

И.А. Чарский

ПОДЗЕМНАЯ
ГИДРОМЕХАНИКА



ОГИЗ · ГОСТЕХИЗДАТ · 1948

И. А. ЧАРНЫЙ

ПОДЗЕМНАЯ
ГИДРОМЕХАНИКА

О Г И З

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1948 ЛЕНИНГРАД

Редактор Е. З. Рабинович.

Техн. редактор А. И. Сапелева.

Подписано к печати 6/ХI 1918 г. 12,25 печ. л. 11,11 уч.-изд. л. 36 600 тип. зн. в печ. л.
А10838. Тираж 4 000 экз. Цена книги 6 руб. 70 коп. Заказ № 8235.

Первая Образцовая тип. имени А. А. Жданова треста «Полиграфкнига» Огиза
при Совете Министров СССР. Москва, Валовая, 28.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Г л а в а I	
Основные понятия теории фильтрации	
§ 1. Введение	7
§ 2. Фильтрация в грунтах. Коэффициент пористости. Фиктивный и идеальный грунты	7
§ 3. Закон фильтрации Дарси. Коэффициенты фильтрации и проницаемости. Пределы применимости закона Дарси . .	8
§ 4. Дифференциальные уравнения ламинарной фильтрации .	12
Г л а в а II	
Некоторые задачи теории фильтрации несжимаемой жидкости	
§ 5. Дифференциальные уравнения фильтрации несжимаемой жидкости	15
§ 6. Плоский поток. Стоки и источники	16
§ 7. Принцип суперпозиции	18
§ 8. Пласт с одной и несколькими скважинами. Интерференция скважин в круговом и полубесконечном пластах .	20
§ 9. Интерференция скважин в пласте полосообразной формы	31
§ 10. Случай горизонтальной скважины — дрены	40
§ 11. Течение между конфокальными эллипсами	42
§ 12. Интерференция скважин в пласте овальной формы . . .	43
Г л а в а III	
Краткие сведения о пространственной задаче теории фильтрации	
§ 13. Решение уравнения Лапласа для точечного источника в пространстве	48
§ 14. Некоторые формулы для дебита несовершенной скважины	49
§ 15. Интерференция несовершенных скважин	51
Г л а в а IV	
Движение границы раздела двух жидкостей в пористой среде	
§ 16. Введение	61
§ 17. Расчет вытеснения одной жидкости другой из трубок тока, предполагаемых неизменными	63

§ 18. Продвижение границы раздела двух жидкостей при напорном режиме в пласте переменной мощности и проницаемости	73
§ 19. Об одном способе оценки промышленных запасов нефтяных месторождений	74

Глава V

**Задача о наивыгоднейшей расстановке
рядов скважин в нефтяных пластах
с напорным режимом**

§ 20. Общие замечания о наивыгоднейших схемах размещения скважин	84
§ 21. Расстановка галлерей в нефтяном пласте переменной мощности и проницаемости при водонапорном режиме, при которой время извлечения нефти минимальное	86
§ 22. Случай переменных пористости и депрессии	89
§ 23. Размещение галлерей при прямолинейном равномерном течении	90

Глава VI

Упругий режим фильтрации

§ 24. Влияние сжимаемости жидкости в пласте на ее приток к скважинам	92
§ 25. Дифференциальные уравнения движения капельной сжимаемой жидкости в пористой среде	94
§ 26. Учет сил инерции	98
§ 27. Связь между пластовым давлением и дебитом для скважины конечных размеров в неограниченном пласте	101
§ 28. Пласт переменного сечения	116

Глава VII

**Теория некоторых методов исследования скважин
и определения гидромеханических параметров пластов**

§ 29. О скорости восстановления пластового давления в скважинах-пьезометрах после прекращения откачки из соседних скважин при упругом режиме фильтрации	118
§ 30. Случай несжимаемой жидкости, когда учитывается влияние второй скважины-пьезометра	132
§ 31. Определение некоторых физических параметров пласта	135
§ 32. Об одном способе обработки наблюдений над восстановлением динамического уровня в единичной скважине после прекращения откачки	139
§ 33. Распространение волны давления внутри жидкости в пласте от торпедирования скважин	146

Глава VIII

Движение газа и газированной жидкости
в пористой среде

§ 34. Дифференциальные уравнения движения газа в пористой среде	149
§ 35. Установившееся течение газа	151
§ 36. Об утечках газа и дутья при подземной газификации	152
§ 37. Определение проницаемости пласта по данным наблюдений над нагнетанием газа в пласт	160
§ 38. Алогия с безнапорным движением жидкости в пористой среде по теории Дююи-Форхгеймера	161
§ 39. Движение газированной жидкости в пористой среде	162

Глава IX

Метод последовательной смены
стационарных состояний

§ 40. Приток к дренажной галлерее при упругом режиме фильтрации	169
§ 41. Радиальный приток к скважине при упругом режиме фильтрации	174
§ 42. Применение метода последовательной смены стационарных состояний к задачам неустановившихся течений газа и безнапорных грунтовых потоков	185
§ 43. Распространение зоны депрессии при прямолинейной фильтрации газа (первая фаза неустановившегося движения). Случай постоянных граничных давлений	186
§ 44. Распространение зоны депрессии при постоянном дебите	188
§ 45. Истощение прямолинейного пласта при постоянном давлении на открытом конце (вторая фаза)	190
§ 46. Истощение прямолинейного пласта при постоянном дебите (вторая фаза)	192
§ 47. Радиальный приток к скважине	193

ПРЕДИСЛОВИЕ

Подземная гидромеханика — наука о движении естественных жидкостей и газов в их природных резервуарах — является сравнительно молодой дисциплиной. Её приложения к задачам фильтрации воды под основаниями гидротехнических сооружений разработаны главным образом трудами Н. Е. Жуковского, Н. Н. Павловского и их учениками и последователями. Подземная гидромеханика в приложении к задачам других областей техники — нефтяной, газовой, горной — создана за последние 25 лет трудами Л. С. Лейбензона и его школы.

В настоящее время имеется ряд монографий, посвящённых этим приложениям теории фильтрации — книги Л. С. Лейбензона¹), В. Н. Щелкачева²) и М. Маскета³). Настоящая работа является дальнейшим развитием исследований указанных выше учёных, а также некоторым обобщением курса лекций, читаемых автором в течение ряда лет в Московском нефтяном институте. Она содержит основные результаты исследований, связанных с практическими задачами и выполненных автором в Институте механики Академии Наук СССР и Московском нефтяном институте в период 1941—1947 гг.

¹) Лейбензон Л. С., Нефтепромысловая механика, ч. II. Подземная гидравлика, 1934; Лейбензон Л. С., Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. Гостехиздат, 1947.

²) Щелкачев В. Н. и Пыхачев Г. Б., Интерференция скважин и теория пластовых водоизапорных систем. АзГОНТИ, 1939; Щелкачев В. Н., Подземная гидравлика. Гостоптехиздат, 1944.

³) Muskat M., The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media. New-York, London, 1937.

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

§ 1. Введение

Подземная гидромеханика является наукой, изучающей законы течения природных жидкостей — нефти, воды и газа в пористой среде. Частицы грунта пористой среды имеют, как правило, самую разнообразную форму. Поэтому, когда мы говорим об изучении течения жидкости, следует иметь в виду, что речь идёт не о скоростях отдельных жидкых частиц, а об осреднённых величинах, дающих представление о потоке в целом. Конечной задачей подземной гидромеханики является установление зависимостей между расходами, контурными давлениями, размерами и структурой пласта и физическими свойствами текущих в нём жидкостей.

Эта задача в общем случае ещё далека от своего разрешения, но отдельные частные случаи с важными техническими приложениями являются хорошо разработанными.

Почти все рассматриваемые здесь задачи мы будем изучать в основном как задачи гидродинамические, но не геологические или физико-химические. Благодаря этому все они могут быть сведены к математическим задачам и решаются методами математического анализа.

§ 2. Фильтрация в грунтах. Коэффициент пористости. Фиктивный и идеальный грунты

При движении жидкости или газа в пористой среде частицы жидкости движутся струйками, расположенными внутри пор. Этот процесс называется фильтрацией. Естественный грунт представляет собой пористую среду, где пористое

пространство, которое может быть заполнено жидкостью или газом, зависит от формы зёрен грунта, их взаимного расположения, степени уплотнения и т. д. Одной из важнейших характеристик пористого пространства является отношение объёма пустот к объёму всего грунта. Это отношение называется коэффициентом пористости. Мы его будем обозначать m .

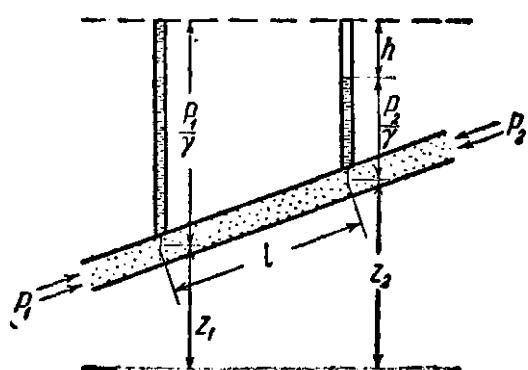
Для гидродинамического анализа приходится рассматривать упрощённые модели грунта. Простейшей моделью грунта является грунт, в котором все поры принимаются за цилиндры с параллельными осями. Такой грунт называется идеальным. Другой моделью грунта является грунт, в котором зёरна предполагаются сферами равных диаметров. Такой грунт называется фиктивным.

§ 3. Закон фильтрации Дарси.

Коэффициенты фильтрации и проницаемости.

Пределы применимости закона Дарси ¹⁾

В основе математической формулировки всякой физической задачи должен лежать какой-либо основной закон, устанавливающий вид связи между изучаемыми величинами. В теории фильтрации одним из таких основных законов является закон, экспериментально установленный в 1856 году французским инженером Дарси и носящий его имя. Этот закон устанавливает связь между потерей напора h и объёмным расходом Q



Фиг. 1.

при прямолинейном движении жидкости в пористой среде (фиг. 1):

$$Q = \frac{cfh}{l}, \quad (1.1)$$

¹⁾ Пока не будет специально оговорено, везде ниже рассматривается однородная или так называемая гомогенная жидкость.

где f — площадь поперечного сечения пласта, l — длина, на которой происходит потеря напора h .

Величина c называется коэффициентом фильтрации. Заметим, что в теории фильтрации скоростным напором $\frac{v^2}{2g}$ пренебрегают, так как скорости частиц жидкости в грунте обычно крайне малы и скоростной напор по сравнению с пьезометрическим ничтожен. Закон Дарси показывает, что расход линейно зависит от потери напора, а это, как правило, является признаком ламинарного режима. Мы будем рассматривать только ламинарный режим, так как обычно в большинстве случаев он имеет место и математическая теория фильтрации при ламинарном режиме является наиболее разработанной.

Уравнение (1.1) можно представить еще в другом виде:

$$w = cl, \quad (1.2)$$

где

$$w = \frac{Q}{f} \quad (1.3)$$

и

$$l = \frac{h}{i}, \quad (1.4)$$

причём i есть гидравлический уклон, а w — средняя в сечении скорость фильтрации.

Скорость w не следует смешивать с физической средней скоростью v продвижения жидких частиц. Легко видеть, что v и w связаны зависимостью

$$w = mv. \quad (1.5)$$

Из (1.2) следует, что c имеет размерность скорости, так как l безразмерно. Знание коэффициента фильтрации играет фундаментальную роль во всех фильтрационных расчётах. Поэтому определению его был посвящён ряд экспериментальных и теоретических исследований для различных условий фильтрации в зависимости от пористости, вязкости жидкости, среднего так называемого эффективного диаметра частиц грунта, их формы, состава и т. д. Формулы и таблицы значений c приведены в руководствах по гидрогеологии, подробных курсах гидравлики и справочниках. Для воды значения c ,

по Н. Н. Павловскому, лежат в интервале 0,001—0,007 см/сек в зависимости от вида грунта (песок, глина и т. д.).

Коэффициент фильтрации c , таким образом, характеризует одновременно фильтрационные свойства жидкости и пористой среды.

Для того чтобы характеризовать независимо от рода жидкости фильтрационные свойства только одной пористой среды, оказывается целесообразным представить закон Дарси (1.1) в несколько иной форме.

Пусть удельный вес жидкости γ . Обозначим через $\Delta p = \gamma h$ потерю давления, соответствующую потере напора h . Тогда уравнение (1.1) можно будет представить так:

$$Q = \frac{k f \Delta p}{\mu l}, \quad (1.6)$$

где μ — абсолютный коэффициент вязкости жидкости, а k — параметр, характеризующий фильтрационные свойства только одной среды, называемый коэффициентом проницаемости.

За практическую единицу проницаемости принята проницаемость пористой среды, удовлетворяющей следующим условиям: при $\mu = 1$ сантипуаз (0,01 г/см·сек), $\Delta p = 1$ ат (1 кг/см²), $l = 1$ см, $f = 1$ см², объёмный расход $Q = 1$ см³/сек. Такая единица называется 1 дарси, или 1000 миллидарси. Таким образом, измеряя проницаемость в дарси, μ — в сантипуазах, Δp — в атмосферах, l — в сантиметрах, f — в см², по формуле (1.6) расход Q получаем в см³/сек.

Можно легко показать, что в физической или технической системах проницаемость k имеет размерность площади:

$$1 \text{ дарси} = \frac{10^{-8}}{0,981} \text{ см}^2. \quad (1.7)$$

Проницаемость горных пород меняется в очень широких пределах — от нескольких миллидарси до нескольких дарси.

Опытное определение коэффициентов фильтрации или проницаемости производится на основании формул (1.1) или (1.6) путём измерения расхода и перепада давления на опытном образце пористой среды, после чего из (1.1) или (1.6) легко найти c или k . Связь между c и k легко устанавливается из

сравнения формул (1.1) и (1.6):

$$c = \frac{k}{\mu} = \frac{kg}{v}, \quad (1.8)$$

где v — кинематический коэффициент вязкости жидкости. Если k измерено в дарси, v — в $\text{см}^2/\text{сек}$ (стоксах), то

$$c = 10^{-5} \frac{k}{v} \text{ см/сек.}$$

Ряд эмпирических и теоретических формул для коэффициента фильтрации в зависимости от структур грунта приведён в соответствующих руководствах по теории фильтрации.

Линейная зависимость между потерей напора и расходом, являющаяся признаком ламинарного режима, нарушается с возрастанием скорости фильтрации.

В настоящее время известно большое число формул, связывающих градиент давления или уклон i со скоростью фильтрации при неламинарных законах фильтрации — формулы Смрекера, Краснопольского-Шези, Форхгеймера и др.

Критерием применимости закона Дарси может служить специально определяемое, разными авторами по разному, число Рейнольдса. Закон Дарси нарушается при числах Рейнольдса, превосходящих определённое критическое значение.

Н. Н. Павловский вывел следующую формулу для числа Рейнольдса:

$$R = \frac{1}{0,75} \frac{wd}{m + 0,23} \frac{wd}{v}, \quad (1.9)$$

где d — эффективный диаметр зёрен грунта.

По Н. Н. Павловскому критическое значение числа Рейнольдса лежит в интервале

$$R_{kp} = 7 \div 9.$$

В. Н. Щелкачев¹⁾, несколько видоизменив вывод Н. Н. Павловского, получил выражение числа Рейнольдса, где вместо эффективного диаметра d входит более удобная характеристика — коэффициент проницаемости:

$$R = \frac{10}{m^{2,3}} \frac{wVk}{v}. \quad (1.10)$$

¹⁾ Щелкачев В. Н., Подземная гидравлика, Гостоптехиздат, 1944 г.

Критическое значение числа Рейнольдса по В. Н. Щелкачеву, полученное путём сопоставления с тщательными опытами Фенчера, Льюиса и Бэрнса, результаты которых приведены в книге Маскета¹⁾, лежит в интервале

$$R_{kp} = 4 \div 12.$$

М. Д. Миллионников²⁾ предложил следующую формулу:

$$R = \frac{lw}{um}, \quad (1.11)$$

где

$$l = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.12)$$

есть так называемый внутренний линейный масштаб пористой среды. Критическое значение R по М. Д. Миллионникову, полученное на основании упомянутых выше опытов Фенчера, Льюиса и Бэрнса

$$R_{kp} = 2,2 \cdot 10^{-2}.$$

Для надёжности предпочтительнее пользоваться нижними пределами в указанных выше формах.

§ 4. Дифференциальные уравнения ламинарной фильтрации

Подробный вывод дифференциальных уравнений теории фильтрации как ламинарной, так и турбулентной, приведён в книгах Л. С. Лейбензона^{3), 4)}. Мы даём краткий вывод для случая ламинарного движения жидкости в пористой среде⁵⁾, причём для простоты внешними массовыми силами будем пренебречь. Закон Дарси в векторной форме можно представить следующим образом:

$$\mathbf{V} = -c \operatorname{grad} H, \quad (1.13)$$

1) Muskat M., The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media, New-York, London, 1937 г.

2) Диссертация. Институт механики АН СССР, 1945 г.

3) Лейбензон Л. С., Нефтепромысловая механика, ч. II, подземная гидравлика. Гареонефтехиздат, 1934.

4) Лейбензон Л. С., Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. Гостехиздат, 1947 г.

5) Здесь, как и везде ниже, рассматривается фильтрация, подчиняющаяся закону Дарси.

где \mathbf{V} — вектор скорости фильтрации с проекциями u , v , w на оси координат x , y , z ; H — напор.

Из (1.13) получаем

$$u = -c \frac{\partial H}{\partial x}, \quad v = -c \frac{\partial H}{\partial y}, \quad w = -c \frac{\partial H}{\partial z} \quad (1.14)$$

или

$$u = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad v = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad w = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (1.15)$$

Четвёртое уравнение — уравнение неразрывности — получается из баланса массы жидкости, втекающей и вытекающей через грани бесконечно малого параллелепипеда объёмом $dx dy dz$, выделенного в пористой среде.

Для сплошного потока жидкости с компонентами скорости u , v , w , как известно из гидродинамики, уравнение неразрывности имеет следующий вид:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (1.16)$$

где ρ — плотность жидкости.

В теории фильтрации нужно учесть, что жидкость занимает не весь объём параллелепипеда $dx dy dz$, а только объём пор в нём. Тогда нетрудно видеть, что уравнение (1.16) должно быть заменено следующим:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \frac{\partial(m\rho)}{\partial t} = 0 \quad (1.17)$$

или в векторной форме

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) + \frac{\partial(m\rho)}{\partial t} = 0. \quad (1.18)$$

В уравнении (1.17) плотность ρ можно заменить через удельный вес γ . Тогда получим

$$\frac{\partial(\gamma u)}{\partial x} + \frac{\partial(\gamma v)}{\partial y} + \frac{\partial(\gamma w)}{\partial z} + \frac{\partial(m\gamma)}{\partial t} = 0. \quad (1.19)$$

В случае сжимаемой жидкости необходимо знать также уравнение состояния — связь между плотностью или удельным

весом и давлением. Эта связь определяется из термодинамических соображений. Предполагая температуру жидкости постоянной, уравнение состояния можно представить в виде

$$f(p, \rho) = 0 \quad (1.20)$$

или

$$f(p, \gamma) = 0, \quad (1.21)$$

где функция f считается известной.

Три уравнения (1.15), уравнение неразрывности (1.19) и уравнение состояния (1.21) образуют систему пяти уравнений для пяти неизвестных функций u, v, w, p, γ .

ГЛАВА II

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

§ 5. Дифференциальные уравнения фильтрации несжимаемой жидкости

Обратимся к уравнениям (1.15), (1.19) и (1.21). Если $\gamma = \text{const}$, то уравнение неразрывности будет иметь вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.1)$$

Дифференцируя в (1.15) u , v , w по x , y , z , найдём:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}. \quad (2.2)$$

Подставляя далее (2.2) в (2.1) и сокращая на постоянный множитель, получим

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (2.3)$$

— уравнение Лапласа.

Для удобства часто вводят функцию

$$\Phi = cH = \frac{kp}{\mu}. \quad (2.4)$$

Очевидно, что

$$\nabla^2 \Phi = 0. \quad (2.5)$$

Тогда

$$V = -\text{grad } \Phi \quad (2.6)$$

и

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (2.7)$$

Функция Φ называется потенциалом скорости. Если известен потенциал во всех точках пласта, то скорости, расходы и давления также становятся известными. Таким образом, одна величина полностью определяет поток в пористой среде.

В некоторых задачах можно считать Φ зависящим только от двух координат, например x и y . Такой поток называется плоским или двухразмерным. Большинство пластовых нефтяных и водяных систем можно рассматривать как плоские; на контурах, ограничивающих пласт, должно быть задано каким-либо образом распределение потенциала или его производной. Таким образом, для реальной задачи потенциал должен удовлетворять не только уравнению Лапласа, но и определенным граничным условиям.

§ 6. Плоский поток. Стоки и источники

Для изучения плоских потоков, как известно, широко применяется теория функций комплексного переменного. Применение теории функций комплексного переменного основано на том обстоятельстве, что действительную часть какой-либо функции $W(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$ можно рассматривать, как потенциал скоростей некоторого фильтрационного потока, а минимум — как функцию тока.

Таким образом, отделяя в $W(z)$ действительную и минимую части

$$W(z) = \Phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

и полагая

$$\Phi(x, y) = \text{const},$$

мы получаем уравнение семейства эквипотенциальных линий, а полагая

$$\psi(x, y) = \text{const}$$

— семейство линий тока.

В теории эксплоатации нефтяных или водяных пластов, откуда жидкость добывается откачкой из скважин, фундаментальную роль играет одна из функций, удовлетворяющих уравнению Лапласа, а именно функция

$$\Phi = A \ln r + \text{const}, \quad (2.8)$$

где r — расстояние от точки $M(x, y)$, в которой потенциал имеет значение Φ , до начала координат (фиг. 2). Прямой проверкой можно легко убедиться, что уравнение (2.8) удовлетворяет уравнению Лапласа на плоскости

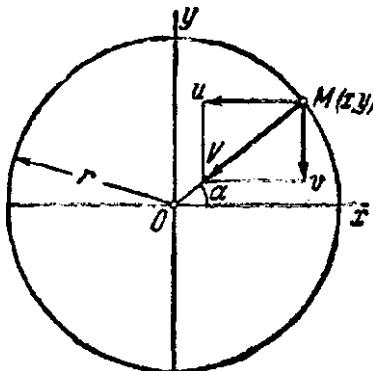
$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0.$$

Для выяснения гидродинамического смысла решения (2.8) найдём скорость фильтрации V . Из уравнений (2.8) и (2.6) имеем:

$$V = -\frac{A}{r}, \quad (2.9)$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Фиг. 2.

Таким образом, скорость фильтрации обратно пропорциональна радиусу r . Очевидно, что при $A > 0$ скорость фильтрации направлена по радиусу r к началу координат, а при $A < 0$ — по радиусу от начала координат.

Таким образом, становится ясным гидродинамический смысл решения (2.8): при $A > 0$ оно определяет поток, вызванный стоком, помещённым в точку O , а при $A < 0$ — источником.

Мы должны себе представить, что вся ось z , перпендикулярная плоскости чертежа, является линией источников или стоков с равномерно распределённой интенсивностью выделения или поглощения жидкости. Картина течения во всех плоскостях, перпендикулярных оси z , будет одна и та же.

Дебиты источника или стока условимся относить к единице длины этой линии.

После этих замечаний нетрудно найти смысл коэффициента A в (2.8). Для этого найдём дебит стока в точке O , т. е. расход через окружность радиуса r , точнее, расход через боковую поверхность цилиндра радиуса r и высотой, равной единице, ось которого направлена перпендикулярно чертежу (фиг. 2); площадь фильтрации в этом случае

равняется $2\pi r$. Тогда, согласно (2.9), дебит определяется формулой

$$q = |V| \cdot 2\pi r = 2\pi A,$$

откуда

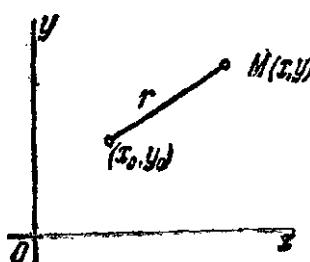
$$A = \frac{q}{2\pi}. \quad (2.10)$$

Дебиты стоков будем считать положительными, дебиты источников — отрицательными. Постоянная const в уравнении (2.8) может быть произвольной. Важна разность потенциалов, а не их абсолютная величина. Стоки мы имеем в практике тогда, когда жидкость извлекается из пласта при помощи скважин, а источник — когда она туда нагнетается.

§ 7. Принцип суперпозиции

Уравнение Лапласа является линейным. Линейные уравнения обладают следующим свойством: сумма частных решений, умноженных на произвольные постоянные, есть также реше-

ние линейного уравнения. Это обстоятельство позволяет находить решения физических задач, сводящихся к интегрированию линейных уравнений при заданных граничных условиях суммированием или суперпозицией частных решений.



Фиг. 3.

Таким образом, если в пласте имеются несколько источников или стоков, то потенциал результирующего потока будет равняться алгебраической сумме потенциалов потоков от каждого источника или стока в отдельности. Этот результат принято называть принципом суперпозиции.

Напишем сначала выражение для потенциала одного источника или стока с дебитом q , помещённого не в начале координат, а в любой точке с координатами x_0, y_0 (фиг. 3). Согласно (2.8) и (2.10), имеем

$$\Phi = \frac{q}{2\pi} \ln r + \text{const},$$

где r — расстояние от точки $M(x, y)$, в которой опреде-

ляется потенциал, до точки x_0, y_0 . Из фиг. 3 следует, что

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

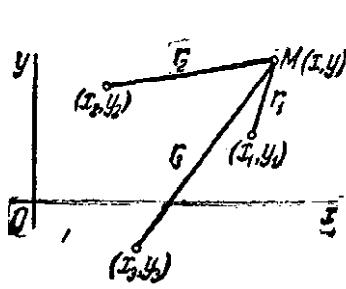
Таким образом, опуская постоянную const , получим

$$\Phi = \frac{q}{2\pi} \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \quad (2.11)$$

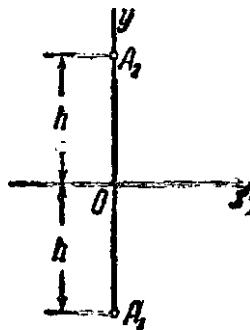
Пусть теперь на плоскости течения расположено произвольное число n источников или стоков в точках $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$ с дебитами q_1, q_2, \dots (фиг. 4). Тогда потенциал результирующего течения, согласно принципу суперпозиции, будет равен

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n q_i \ln \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}. \quad (2.12)$$

Остановимся несколько подробнее на потоке от двух источников или стоков с одинаковыми дебитами, причём



Фиг. 4.



Фиг. 5.

сначала рассмотрим случай, когда знаки дебитов одинаковы, а затем, когда они противоположны.

Пусть (фиг. 5) в точках A_1 и A_2 помещены два равнодебитных источника или стока; расстояние $A_1A_2 = 2h$. Выберем прямую A_1A_2 за ось y , а ось x направим перпендикулярно к ней в середине.

Легко видеть, что если $q_1 = q_2 = q$ (дебиты одного знака), то через ось x жидкость не протекает, т. е. ось x является одной из линий тока. Если же $q_1 = -q_2$ (дебиты разных знаков), то ось абсцисс является эквипотенциальной —

линией, во всех точках которой потенциал один и тот же. Заметим, что точка A_1 является зеркальным отражением точки A_2 в оси x , и наоборот.

В тех случаях, когда пласт со скважинами ограничен прямолинейными границами, которые, смотря по конкретным условиям, могут быть эквипотенциалами (контуры питания) или непроницаемыи, зеркальное отражение скважин в этих границах с сохранением знака дебита или изменением даёт возможность удовлетворить контурным условиям и найти искомый потенциал в пласте¹).

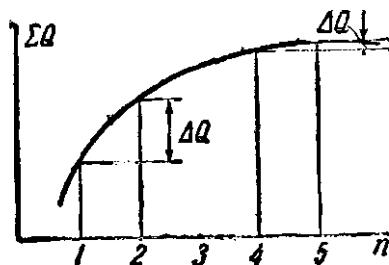
§ 8. Пласт с одной и несколькими скважинами.

Интерференция скважин в круговом и полубесконечном пластах

Потенциал пласта с несколькими скважинами может быть найден, в общем случае, методом суперпозиции.

На первый взгляд может показаться, что добыча в единицу времени с одного и того же пласта будет расти пропорционально числу действующих скважин, находящихся в одинаковых условиях. Однако

в действительности так не происходит: добыча растёт медленнее, чем число действующих скважин. Приблизительный график добычи в единицу времени в зависимости от числа эксплуатирующихся скважин показан на фиг. 6. По оси ординат отложено число n эксплуатирующихся скважин, по оси ординат — добыча со всего пласта в единицу времени ΣQ . Из графика на фиг. 6 видно, что при малом числе действующих скважин новая введённая скважина вызывает заметное увеличение добычи. При большом же числе действующих скважин рост добычи ΔQ с введением одной новой скважины замедляется и, начиная с некоторого числа скважин, дальнейшее его увеличение



Фиг. 6.

1) Щелкачев В. Н. и Пыхачев Г. Б., Интерференция скважин и теория пластовых водонапорных систем. АзГОНТИ, 1939 г.

ние оказывается нерентабельным и нерациональным, так как возрастание добычи станет очень малым и не окупющим затрат, с которыми сопряжено введение одной новой скважины в эксплуатацию.

Таким образом, при прочих неизменных условиях, добыча растёт медленнее числа скважин, так как скважины влияют друг на друга и дебит какой-либо одной скважины зависит от числа всех эксплуатирующихся скважин, причём с возрастанием числа скважин дебит каждой скважины уменьшается. Такое влияние скважин друг на друга называется интерференцией.

Ниже дан вывод формул для дебитов одной и группы скважин, расположенных в пластах различных форм в плане, получаемых с помощью конформного отображения¹⁾.

Предположим, что известно распределение потенциала $\Phi(\xi, \eta)$ внутри какого-либо контура λ плоскости $\zeta = \xi + i\eta$, содержащего внутри себя ряд скважин, причём дебиты их известны. Пусть функция $\zeta(z)$, где $z = x + iy$, реализует конформное отображение области, ограниченной контуром λ на плоскости ζ в область плоскости z , ограниченную контуром λ . Тогда, зная распределение потенциала и дебиты на плоскости ζ , мы сможем определить таковые на плоскости z , если только контурные условия будут одинаковы. При этом необходимо иметь в виду, что радиусы скважин r_c и r_c плоскостей ζ и z должны быть связаны соотношением

$$\rho_c = r_c \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| \quad (2.13)$$

так как ρ_c и r_c ничтожно малы по сравнению с размерами соответствующих областей.

Скорости частиц жидкости в обоих потоках также будут связаны соотношением

$$\bar{v}_z = \bar{v}_\zeta \frac{d\zeta}{dz}, \quad (2.14)$$

вытекающим из формулы

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz},$$

1) Чарный И. А., О притоке нефти к скважинам в месторождениях различных форм. Доклады Академии Наук СССР, т. XLII, №№ 4, 5, 1944 г.

где $W = \Phi + i\psi$, Φ — функция тока, \bar{v}_z , \bar{v}_ζ — комплексные скорости.

Представляет интерес связь между временами dt_z и dt_ζ , в течение которых частицы проходят соответствующие элементы линии тока dz и $d\zeta$:

$$dt_z = \frac{|dz|}{|v_z|} = \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| \cdot \frac{|d\zeta|}{|v_\zeta| \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|} = \frac{dt_\zeta}{\left| \frac{d\zeta}{dz} \right|^2}.$$

Из последней формулы следует, что частицы жидкости, ранее образовывавшие соответственные контуры λ и λ' , в дальнейшем по истечении одного и того же интервала времени t будут образовывать контуры, в общем случае не связанные прежним соответствием.

Если на плоскости ζ имеются источники, то дебиты их сохраняются и на плоскости z . Действительно

$$dz = \frac{d\zeta}{\left| \frac{d\zeta}{dz} \right|}$$

и для малого замкнутого контура, окружающего источник

$$\oint \left| \frac{dW}{dz} \right| dz = \oint \left| \frac{dW}{d\zeta} \right| \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| \left| \frac{d\zeta}{d\zeta} \right| = \oint \left| \frac{dW}{d\zeta} \right| d\zeta,$$

что доказывает сказанное.

Для единичной скважины, концентрично расположенной на плоскости ζ_0 в пласте с круговым контуром питания, комплексный потенциал имеет вид

$$W = \Phi + i\psi = \frac{q}{2\pi} \ln \zeta_0 + \text{const}, \quad (2.15)$$

где Φ , ψ — потенциал скорости и функция тока, q — дебит скважины на единицу мощности пласта.

Если на контуре скважины $r = r_0$ и контуре пласта $r = r_k$ потенциалы имеют значения Φ_0 , Φ_k , мы получаем формулу Дюпон

$$q = \frac{2\pi (\Phi_k - \Phi_0)}{\ln \frac{r_k}{r_0}}, \quad (2.16)$$

Заметим, что формула (2.16) для дебита q , как показано Маскетом, справедлива и при неравномерном распределении потенциала, если под Φ_k и Φ_0 подразумевать средние значения потенциалов на окружностях r_k и r_0 . Отсюда следует, что соотношения между дебитами, имеющие место при равномерном распределении контурных потенциалов, будут сохраняться и при конформном отображении при подстановке в соответствующие формулы средних значений контурных потенциалов.

Рассмотрим теперь ряд примеров интерференции скважин в пластах круговой и полосообразной форм.

1. Эксцентрично расположенная скважина в круговом пласте.

Предположим, что скважина эксцентрично расположена в круговом пласте радиуса r_k (фиг. 7). Пусть её радиус r_c , а полярные координаты её центра δ , α . Эта задача обычно решается (Маскет, Щелкачев и Пыхачев)¹⁾ при помощи довольно сложных вычислений. Посредством конформного отображения её решение может быть получено гораздо более коротким путём.

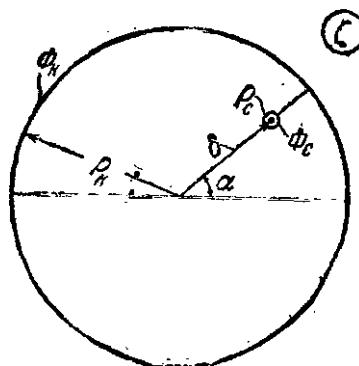
Возьмём дробно-линейное преобразование, переводящее круг радиуса r_k плоскости ζ_0 в такой же круг r_k плоскости ζ , а центр скважины

$$\zeta_c = \delta e^{i\alpha}$$

в его зеркальное изображение относительно этой же окружности (инверсия).

Для этого достаточно положить

$$\zeta_0 = \frac{\zeta - \delta e^{i\alpha}}{\zeta - \frac{\delta^2}{r_k} e^{i\alpha}} \frac{r_k^2}{\delta} = \frac{\zeta - \delta e^{i\alpha}}{\frac{\delta^2}{r_k} - e^{i\alpha}}. \quad (2.17)$$



Фиг. 7.

1) См. сноски на стр. 12 и 20.

Действительно, пусть

$$\zeta = \rho_k e^{i\theta}. \quad (2.18)$$

Тогда, согласно (2.17), после простого вычисления получим:

$$\zeta_0 = \frac{\rho_k e^{i\theta} - \delta e^{i\alpha}}{\frac{\delta}{\rho_k} e^{i\theta} - e^{i\alpha}} = \rho_k e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad (2.19)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_1 &= \frac{\rho_k \sin \theta - \delta \sin \alpha}{\rho_k \cos \theta - \delta \cos \alpha}, \\ \operatorname{tg} \varphi_2 &= \frac{\delta \sin \theta - \rho_k \sin \alpha}{\delta \cos \theta - \rho_k \cos \alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Таким образом, согласно (2.15), комплексный потенциал течения к эксцентричной скважине с точностью до аддитивной постоянной равен алгебраической сумме потенциалов от скважины и её зеркального изображения в окружности ρ_k , которое рассматривается как источник того же дебита:

$$W = \frac{q}{2\pi} \ln \zeta_0 = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{\zeta - \delta e^{i\alpha}}{\frac{\delta}{\rho_k^2} - e^{i\alpha}}. \quad (2.21)$$

Отделяя здесь действительную и минимую части, получим уравнения эквипотенциалей и линий тока:

$$W = \Phi + i\psi \doteq$$

$$= \frac{q}{2\pi} \ln \frac{(\rho \cos \theta - \delta \cos \alpha) + i(\rho \sin \theta - \delta \sin \alpha)}{\left(\frac{\delta}{\rho_k^2} \rho \cos \theta - \cos \alpha \right) + i \left(\frac{\delta}{\rho_k^2} \rho \sin \theta - \sin \alpha \right)} \quad (2.22)$$

или

$$\Phi = \frac{q}{4\pi} \ln \frac{\rho^2 + \delta^2 - 2\rho\delta \cos(\theta - \alpha)}{\frac{\delta^2}{\rho_k^2} + \frac{\rho^2\delta^2}{\rho_k^2} - 2\rho\delta \cos(\theta - \alpha)}, \quad (2.23)$$

$$\psi = \frac{q}{2\pi} [\varphi_1(\rho, \theta) - \varphi_2(\rho, \theta)], \quad (2.24)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_1 &= \frac{\rho \sin \theta - \delta \sin \alpha}{\rho \cos \theta - \delta \cos \alpha}, \\ \operatorname{tg} \varphi_2 &= \frac{\frac{\delta}{\rho_k^2} \rho \sin \theta - \sin \alpha}{\frac{\delta}{\rho_k^2} \rho \cos \theta - \cos \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

Если известны потенциалы Φ_k , Φ_c на контурах пласта ρ_k и скважины радиуса ρ_c , то дебит q можно найти двумя способами. Первый способ — из формулы (2.21). По этой формуле значение характеристической функции W в какой-либо точке контура скважины можно найти следующим образом (фиг. 7). На контуре скважины

$$\zeta = \delta e^{i\alpha} + \rho_c e^{i\beta}, \quad (2.26)$$

где β — угол, составляемый радиусом скважины ρ_c с полярной осью.

В знаменателе же формулы (2.21) в точках контура, пользуясь малостью ρ_c , можно положить

$$\zeta = \delta e^{i\alpha}.$$

Тогда в точках контура скважины

$$W = W_c = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{\rho_c e^{i\beta}}{\frac{\delta}{\rho_k^2} \delta e^{i\alpha} - e^{i\alpha}} = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{\rho_c e^{i\beta}}{\left(\frac{\delta^2}{\rho_k^2} - 1 \right) e^{i\alpha}}, \quad (2.27)$$

откуда, прибавляя пока неизвестную постоянную C , получим

$$\Phi_c = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{\rho_c}{1 - \frac{\delta^2}{\rho_k^2}} + C. \quad (2.28)$$

Из (2.23) и (2.28) легко определяется q ; имеем

$$\Phi_k = \frac{q}{2\pi} \ln \rho_k + C,$$

$$\Phi_c = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{\rho_c}{1 - \frac{\delta^2}{\rho_k^2}} + C,$$

откуда

$$q = -\frac{2\pi(\Phi_k - \Phi_c)}{\ln \frac{\rho_k}{\rho_c} \left(1 - \frac{\delta^2}{\rho_k^2}\right)}. \quad (2.29)$$

Другой способ заключается в прямом использовании формулы Дюпюи (2.16), где вместо ρ_0 — радиуса скважины плоскости ζ_0 — следует подставить величину

$$\rho_0 = \rho_c \left| \frac{d\zeta_0}{d\zeta} \right|_{\zeta = \zeta_c l_a}. \quad (2.30)$$

Согласно (2.17) находим

$$\left| \frac{d\zeta_0}{d\zeta} \right|_{\zeta = \zeta_c l_a} = \frac{1}{1 - \frac{\delta^2}{\rho_k^2}}. \quad (2.31)$$

Из формулы Дюпюи (2.16) и (2.31) сразу получаем прежний результат (2.29).

2. Течение к скважинам, произвольно расположенным в круговом пласте. Число скважин n . Из (2.23) по принципу суперпозиции получаем

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n q_i \ln \frac{\rho_k^2 - \delta_i^2 - 2\rho\delta_i \cos(\theta - \alpha_i)}{\rho_k^2 + \frac{\rho^2 \delta_i^2}{\rho_k^2} - 2\rho\delta_i \cos(\theta - \alpha_i)} + C, \quad (2.32)$$

где δ_i , α_i — полярные координаты центра i -й скважины.

Дебиты q_i и C определяются по известным значениям Φ_c , Φ_k на контурах скважин и контуре пласта. Так как радиусы скважин ρ_c ничтожно малы, то из (2.32) и (2.28) получаем для q_i и C следующую систему:

$$\begin{aligned} \Phi_{je} = & \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n q_i \ln \frac{\delta_j^2 + \delta_i^2 - 2\delta_j\delta_i \cos(\alpha_j - \alpha_i)}{\delta_j^2 + \frac{\delta_i^2}{\rho_k^2} - 2\delta_j\delta_i \cos(\alpha_j - \alpha_i)} + \\ & + \frac{q_j}{2\pi} \ln \frac{\rho_{je}}{\delta_j^2} + C; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.33) \end{aligned}$$

$$\Phi_k = \frac{1}{2\pi} \ln \rho_k \sum_{i=1}^n q_i + C. \quad (2.34)$$

Значок «'» означает, как обычно, что при суммировании от $i=1$ до $i=n$ опускается член $i=j$.

3. Поток к скважине в пласте секториальной формы с углом β . Обозначим (фиг. 8) радиус скважины через r_c , а расстояние её центра до центра сектора — через R_1 . Преобразование

$$\left. \begin{array}{l} \zeta = z^m, \\ m = \frac{2\pi}{\beta}. \end{array} \right\} \quad (2.35)$$

переведёт поток в круговом пласте плоскости ζ с единичной эксцессе тричной скважиной (фиг. 7) в поток плоскости z (фиг. 8). При определении дебита следует воспользоваться формулой (2.29), где вместо r_k , δ , ρ_c нужно соответственно подставить R_k^m , R_1^m и

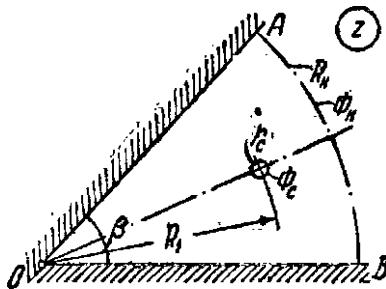
$$r_c \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|_{|z|=R_1} = r_c m R_1^{m-1}.$$

Тогда

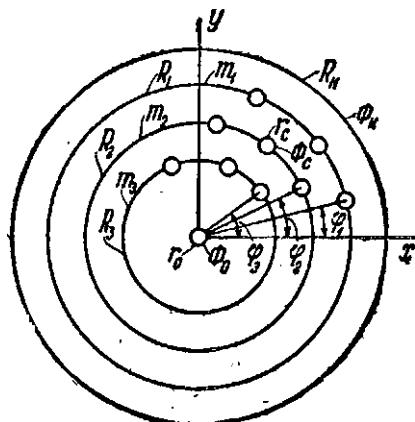
$$q = \frac{2\pi(\Phi_k - \Phi_c)}{R_k^m \ln \frac{m r_c R_1^{m-1}}{1 - \frac{R_1^{2m}}{R_k^{2m}}}}. \quad (2.36)$$

Следует заметить, что если m — целое число, то уравнение (2.36) одновременно даёт дебит скважин, расположенных в вершинах правильного m -угольника (так называемой батареи), находящихся в одинаковых условиях.

4. Поток к скважинам, расположенным форме n кольцевых батарей в круговом пласте радиуса R_k (фиг. 9). Если центральная скважина отсутствует, то из (2.35), (2.21) и (2.23), пользуясь прин-



Фиг. 8.



Фиг. 9.

ципом суперпозиции, после простых вычислений получим:

$$W = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n q_i \ln \frac{\frac{z^{m_i} - R_i e^{im_i \varphi_i}}{R_i^{m_i} z^{m_i}}}{\frac{R_k^{2m_i}}{R_k^{2m_i}}} + C, \quad (2.37)$$

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n q_i \ln \frac{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{r}{R_i} \right)^{m_i} + \left(\frac{R_i}{r} \right)^{m_i} \right] - \cos m_i (\varphi - \varphi_i)}{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{rR_i}{R_k^2} \right)^{m_i} + \left(\frac{R_k^2}{rR_i} \right)^{m_i} \right] - \cos m_i (\varphi - \varphi_i)} + \Phi_k, \quad (2.38)$$

где r, φ — полярные координаты любой точки пласта, m_i — число скважин в i -й кольцевой батарее, R_i, φ_i — полярные координаты центра ближайшей к оси x скважины i -й батареи.

Дебиты q_i определяются по значениям потенциалов Φ_c и Φ_k на контурах скважин и пласта из системы

$$\Phi_{jc} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n q_i \ln \frac{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{R_j}{R_i} \right)^{m_i} + \left(\frac{R_i}{R_j} \right)^{m_i} \right] - \cos m_i (\varphi_j - \varphi_i)}{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{R_i R_j}{R_k^2} \right)^{m_i} + \left(\frac{R_k^2}{R_i R_j} \right)^{m_i} \right] - \cos m_i (\varphi_j - \varphi_i)} - \frac{1}{2\pi} \dot{q}_j \left\{ \ln \frac{R_j}{m_j r_{jc}} + \ln \left[\left(\frac{R_k}{R_j} \right)^{m_j} - \left(\frac{R_j}{R_k} \right)^{m_j} \right] \right\} + \Phi_k, \quad (2.39)$$

$$j = 1, 2, \dots, n.$$

Если имеется и центральная скважина, то из принципа суперпозиции получим

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n q_i \ln \frac{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{r}{R_i} \right)^{m_i} + \left(\frac{R_i}{r} \right)^{m_i} \right] - \cos m_i (\varphi - \varphi_i)}{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{rR_i}{R_k^2} \right)^{m_i} + \left(\frac{R_k^2}{rR_i} \right)^{m_i} \right] - \cos m_i (\varphi - \varphi_i)} + \frac{1}{2\pi} q_0 \ln \frac{r}{R_k} + \Phi_k, \quad (2.40)$$

где q_0 — дебит центральной скважины, r_0 — её радиус.

Пользуясь малостью радиуса r_0 центральной скважины, при определении потенциала Φ_0 на её контуре, поступим

следующим образом: в сумме (2.40) положим $r=0$, а в члене

$$\frac{q_0}{2\pi} \ln \frac{r}{R_k}$$

положим $r=r_0$. Тогда для определения дебитов q_0 и q_i получим систему

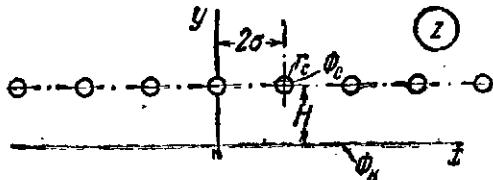
$$\Phi_{jc} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n q_i \ln \frac{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{R_j}{R_i} \right)^{m_i} + \left(\frac{R_i}{R_j} \right)^{m_i} \right] - \cos m_i (\varphi_j - \varphi_i)}{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{R_i R_j}{R_k^2} \right)^{m_i} + \left(\frac{R_k^2}{R_i R_j} \right)^{m_i} \right] - \cos m_i (\varphi_j - \varphi_i)} - \frac{q_j}{2\pi} \left\{ \ln \frac{R_j}{m_j r_{jc}} + \ln \left[\left(\frac{R_k}{R_j} \right)^{m_j} - \left(\frac{R_j}{R_k} \right)^{m_j} \right] \right\} - \frac{q_0}{2\pi} \ln \frac{R_k}{R_j} + \Phi_k, \quad (2.41)$$

$$\Phi_0 = -\frac{1}{2\pi} \left(\sum_{i=1}^n m_i q_i \ln \frac{R_k}{R_i} + q_0 \ln \frac{R_k}{r_0} \right) + \Phi_k. \quad (2.42)$$

Решая эту систему уравнений, мы можем определить, смотря по условиям реальных задач, $n+1$ неизвестных — дебитов или контурных потенциалов.

5. Поток к бесконечной цепочке скважин, находящаяся в одинаковых условиях и расположенных в полубесконечном пласте с прямолинейным контуром питания (фиг. 10). Отправляясь от потока фиг. 7 и формулы (2.29), положим

$$\zeta = \rho_k e^{\frac{I\pi z}{\sigma}}. \quad (2.43)$$



Фиг. 10.

При этом одна скважина плоскости ζ отобразится в бесконечную цепочку скважин плоскости z с расстоянием 2σ между соседними скважинами. Далее (фиг. 7, 10) согласно (2.21),

(2.23) из (2.43) получим:

$$\delta = \rho_k e^{-\frac{\pi H}{\sigma}}; \quad a = \frac{\pi x_1}{\sigma}, \quad (2.44)$$

$$\rho_c = r_c \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|_{\substack{x=x_1 \pm 2\sigma n \\ y=H}} = r_c \frac{\pi \rho_k}{\sigma} e^{-\frac{\pi H}{\sigma}}, \quad (2.45)$$

$$\rho = \rho_k e^{-\frac{\pi y}{\sigma}}; \quad \theta = \frac{\pi x}{\sigma}, \quad (2.46)$$

$$W = \frac{\sigma}{2\pi} \ln \frac{e^{\frac{i\pi z}{\sigma}} - e^{\frac{\pi}{\sigma}(ix_1 - H)}}{e^{\frac{\pi}{\sigma}(iz - H)} - e^{\frac{i\pi x_1}{\sigma}}} + \text{const}, \quad (2.47)$$

$$\Phi = \frac{\sigma}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma}(y - H) - \cos \frac{\pi}{\sigma}(x - x_1)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma}(y + H) - \cos \frac{\pi}{\sigma}(x - x_1)} + C, \quad (2.48)$$

Тогда из формулы (2.29) после подстановки находим

$$q = \frac{2\pi(\Phi_k - \Phi_c)}{\ln \left(\frac{2\sigma}{\pi r_c} \operatorname{sh} \frac{\pi H}{\sigma} \right)}. \quad (2.49)$$

Маскет получает для этой же задачи значительно более длинным путём

$$q = \frac{2\pi(\Phi_k - \Phi_c)}{\ln \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi H}{\sigma}}{\operatorname{sh} \frac{\pi r_c}{2\sigma}}}. \quad (2.50)$$

Ввиду малости r_c по сравнению с 2σ формулы (2.49) и (2.50) практически совпадают.

Выражение

$$\Phi = \frac{\sigma}{2\pi} \ln \left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma}(y - H) - \cos \frac{\pi(x - x_1)}{\sigma} \right] \quad (2.51)$$

представляет собой потенциал одной бесконечной цепочки скважин — скважин-стоков с центрами в точках $y = H$, $x = x_1 \pm 2\sigma n$.

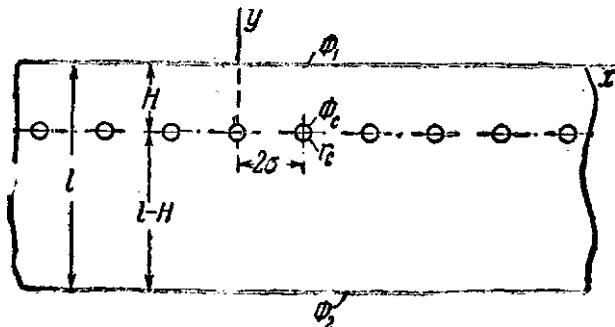
Формула (2.48) выражает результат суперпозиции полей двух таких цепочек — цепочки стоков, указанной выше, и

равнодебитной цепочки источников, являющейся веркальным изображением первой относительно оси x .

Как выше указывалось, при такой суперпозиции ось x является эквилюминтной. Если изображению цепочки присвоить тот же знак дебитов, то при суперпозиции двух таких равнодебитных цепочек с дебитами одного знака ось x будет одной из линий тока, которую можно рассматривать, как непроницаемую границу. Этот случай был исследован В. Н. Щелкачевым¹⁾,²⁾ и будет рассмотрен ниже.

§ 9. Интерференция скважин в пласте полосообразной формы

1. Приток к бесконечной цепочке скважин в полосообразном пласте с постоянными значениями потенциалов на границах $y=0$; $y=-l$



Фиг. 11.

(фиг. 11). При посредстве бесконечно большого числа отражений нашей цепочки в прямых $y=0$ и $y=-l$ таким образом, чтобы каждое последующее отражение меняло знак дебита, т. е. заменяя о бы стоки источниками и наоборот, можно добиться удовлетворения обоих граничных условий $\Phi=\text{const}$, при $y=0$ и $y=-l$. Если при этом плоскость течения рассматривать как плоскость комплексного переменного, то задача сводится к определению двух двояко-периодических функций с действительными периодами 2σ и минимыми перио-

1) Щелкачев В. Н., Подземная гидравлика, Гостехиздат, 1944 г.

2) Диссертация. Московский Нефтяной Институт им. Губкина, 1941 г.

дами $2l$, причём в точках $x = \pm 2y\sigma$, $y = \pm H \pm 2l\sigma$, $v = 0$, $1, 2, \dots$ функции должны иметь логарифмические полюса. Аналогичная задача встречается в электростатике¹⁾ и сводится к нахождению соответствующей эллиптической функции. Можно, однако, решать задачу непосредственно и без помощи эллиптических функций, если обеспечить сходимость получающихся при этом рядов.

Суперпозиция бесконечного числа таких зеркальных отражений, согласно (2.51) определяет потенциал в полосе в виде

$$\Phi = \frac{q}{4\pi} \left\{ \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma} (y+H) - \cos \frac{\pi x}{\sigma}}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma} (y-H) - \cos \frac{\pi x}{\sigma}} + \right. \\ \left. + \sum_{v=1}^{\infty} \ln \frac{\left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma} (y+H+2v\sigma) - \cos \frac{\pi x}{\sigma} \right] \left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma} (y+H-2v\sigma) - \cos \frac{\pi x}{\sigma} \right]}{\left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma} (y-H-2v\sigma) - \cos \frac{\pi x}{\sigma} \right] \left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma} (y-H+2v\sigma) - \cos \frac{\pi x}{\sigma} \right]} \right\} + \\ + c_1 y + c_2, \quad (2.52)$$

где c_1 и c_2 — постоянные, подлежащие определению.

Докажем сходимость ряда (2.52).

Обозначим

$$\frac{\pi}{\sigma} (y+H) = a; \quad \frac{\pi}{\sigma} (y-H) = b; \quad \frac{2\pi l}{\sigma} = z; \quad \frac{\pi x}{\sigma} = \alpha.$$

Тогда сумма, входящая в (2.52), может быть представлена в следующем виде:

$$S = \sum_{v=1}^{\infty} \ln \frac{[\operatorname{ch} (vz+a) - \cos \alpha][\operatorname{ch} (vz-a) - \cos \alpha]}{[\operatorname{ch} (vz+b) - \cos \alpha][\operatorname{ch} (vz-b) - \cos \alpha]},$$

или, перемножая:

$$S = \sum_{v=1}^{\infty} \ln \frac{\operatorname{ch} (vz+a) \operatorname{ch} (vz-a) - \cos \alpha [\operatorname{ch} (vz+a) + \operatorname{ch} (vz-a)] + \cos^2 \alpha}{\operatorname{ch} (vz+b) \operatorname{ch} (vz-b) - \cos \alpha [\operatorname{ch} (vz+b) + \operatorname{ch} (vz-b)] + \cos^2 \alpha} = \\ = \sum_{v=1}^{\infty} \ln \frac{\frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2vz + \operatorname{ch} 2a) - 2 \cos \alpha \operatorname{ch} a \operatorname{ch} vz + \cos^2 \alpha}{\frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2vz + \operatorname{ch} 2b) - 2 \cos \alpha \operatorname{ch} b \operatorname{ch} vz + \cos^2 \alpha}$$

¹⁾ Франк Ф. и Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ОНТИ, 1937 г.

Так как в интересующей нас области $y < 0$, то $\operatorname{ch} b > \operatorname{ch} a$ и, кроме того, всегда $\operatorname{ch} z > \operatorname{ch} a$ и $\operatorname{ch} z > \operatorname{ch} b$. Предположим, что $\cos \alpha > 0$ и обозначим

$$4 \cos \alpha \operatorname{ch} a \operatorname{ch} yz - \operatorname{ch} 2a - 2 \cos^2 \alpha = A_{1y},$$

$$4 \cos \alpha \operatorname{ch} b \operatorname{ch} yz - \operatorname{ch} 2b - 2 \cos^2 \alpha = A_{2y}.$$

Тогда можно указать такое достаточно большое целое число y_0 , начиная с которого, при $y \geq y_0$ будет

$$\operatorname{ch} 2yz > A_{1y}, \quad \operatorname{ch} 2yz > A_{2y}, \quad A_{2y} > A_{1y}.$$

При этом

$$S_y = \sum_{y=y_0}^{\infty} \ln \frac{\operatorname{ch} 2yz - A_{1y}}{\operatorname{ch} 2yz - A_{2y}} = \sum_{y=y_0}^{\infty} \ln \frac{(\operatorname{ch} 2yz - A_{2y}) + (A_{2y} - A_{1y})}{\operatorname{ch} 2yz - A_{2y}}.$$

Из очевидного неравенства

$$\ln(1+x) < x, \quad 0 < x < 1$$

следует, что

$$S_y < \sum_{y=y_0}^{\infty} \frac{A_{2y} - A_{1y}}{\operatorname{ch} 2yz - A_{2y}}.$$

Нетрудно видеть, что последняя сумма при достаточно большом y_0 может стать сколь угодно близкой к нулю при любом z . Аналогичный результат, очевидно, получится и при $\cos \alpha < 0$. Таким образом, можно считать доказанным, что ряд (2.52) сходится и притом равномерно, так как y_0 может быть выбрано независимо от y . Непосредственно видно, что при $y=0$, $\Phi = \Phi_1 = c_2$, т. е. первое граничное условие удовлетворяется. При $y = -l$ из (2.52) получаем

$$\Phi = \Phi_2 = \frac{q}{4\pi} \left\{ \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma} (l-H) - \cos \frac{\pi x}{\sigma}}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma} (l+H) - \cos \frac{\pi x}{\sigma}} + \right. \\ \left. + \sum_{y=1}^{\infty} \ln \frac{\left(\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma} [(2y-1)l+H] - \cos \frac{\pi x}{\sigma} \right) \left(\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma} [(2y+1)l-H] - \cos \frac{\pi x}{\sigma} \right)}{\left(\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma} [(2y+1)l+H] - \cos \frac{\pi x}{\sigma} \right) \left(\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma} [(2y-1)l-H] - \cos \frac{\pi x}{\sigma} \right)} \right\} - c_1 l + \Phi_1. \quad (2.53)$$

Нетрудно видеть, что в сумме (2.53) все члены, кроме части последнего, попарно сокращаются с предыдущими и, таким образом, остаётся

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \frac{q}{4\pi} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma} [(2\nu+1)l - H] - \cos \frac{\pi x}{\sigma}}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma} [(2\nu+1)l + H] - \cos \frac{\pi x}{\sigma}} \right) - c_1 l + \Phi_1 = \\ &= -\frac{2\pi H}{\sigma} \frac{q}{4\pi} - c_1 l + \Phi_1,\end{aligned}$$

откуда

$$c_1 = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{l} = \frac{qH}{2\sigma l}. \quad (2.54)$$

Найдём теперь дебит скважины в зависимости от радиуса скважины r_c и потенциала на её контуре Φ_c , которые считаются одинаковыми для всех скважин. Так как r_c ничтожно мал по сравнению с H и l , то, разлагая в окрестности точки $x=0$, $y=-H$, выражение $\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma} (y+H) - \cos \frac{\pi x}{\sigma}$ в ряд, мы получим с точностью до малых второго порядка

$$\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma} (y+H) - \cos \frac{\pi x}{\sigma} \approx \frac{\pi^2}{2\sigma^2} [(y+H)^2 + x^2] = \frac{\pi^2 r_c^2}{2\sigma^2}.$$

Отсюда, согласно (2.52),

$$\begin{aligned}\Phi_c &= \frac{q}{4\pi} \left\{ \ln \frac{\frac{\pi^2 r_c^2}{2\sigma^2}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi H}{\sigma} - 1} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\nu=1}^{\infty} \ln \frac{\left(\operatorname{ch} \frac{2\pi l\nu}{\sigma} - 1 \right)^2}{\left[\operatorname{ch} \frac{2\pi}{\sigma} (l\nu + H) - 1 \right] \left[\operatorname{ch} \frac{2\pi}{\sigma} (l\nu - H) - 1 \right]} \right\} - c_1 H + \Phi_1,\end{aligned}$$

или, учитывая (2.54),

$$\begin{aligned}\Phi_1 \left(1 - \frac{H}{l} \right) + \Phi_2 \frac{H}{l} - \Phi_c &= q \left[\frac{1}{2\pi} \ln \frac{\sigma}{\pi r_c} + \frac{1}{2\pi} \ln 2 \operatorname{sh} \frac{\pi H}{\sigma} - \frac{H^2}{2\sigma l} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \ln \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi (l\nu + H)}{\sigma} - \operatorname{sh} \frac{\pi (l\nu - H)}{\sigma}}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi l\nu}{\sigma}} \right]. \quad (2.55)\end{aligned}$$

Легко видеть, что для значений $\sigma \leq H$

$$\Phi_1 \left(1 - \frac{H}{l}\right) + \Phi_2 \frac{H}{l} - \Phi_c \approx q \left[\frac{1}{2\pi} \ln \frac{\sigma}{\pi r_c} + \left(1 - \frac{H}{l}\right) \frac{H}{2\sigma} \right]. \quad (2.56)$$

Заметим, между прочим, что условия на контурах скважин могут быть также получены при помощи конформного отображения круга на полуплоскость и формулы (2.13). Результат, разумеется, будет одинаковый.

Отметим частный случай формулы (2.55). При $l \rightarrow \infty$ получается

$$\Phi_1 - \Phi_c = \frac{q}{2\pi} \left(\ln \frac{\sigma}{\pi r_c} + \ln 2 \operatorname{sh} \frac{\pi H}{\sigma} \right), \quad (2.57)$$

что совпадает с (2.49).

Дадим теперь оценку суммы, входящей в формулу (2.55). Это можно сделать следующим образом. Обозначим

$$S_k = \sum_{v=k}^{\infty} \ln \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(lv + H)}{\sigma}}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi lv}{\sigma}}. \quad (2.58)$$

Сумму (2.58) можно представить ещё и так:

$$S_k = \sum_{v=k}^{\infty} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{2\pi lv}{\sigma} - \operatorname{ch} \frac{2\pi H}{\sigma}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi lv}{\sigma} - 1}, \quad (2.59)$$

откуда следует, что $S_k < 0$.

Воспользовавшись неравенством $\ln(1+x) < x$ при $0 < x < 1$, из (2.59) получим

$$|S_k| = \sum_{v=k}^{\infty} \ln \frac{\left(\operatorname{ch} \frac{2\pi lv}{\sigma} - \operatorname{ch} \frac{2\pi H}{\sigma} \right) + \left(\operatorname{ch} \frac{2\pi H}{\sigma} - 1 \right)}{\operatorname{ch} \frac{2\pi lv}{\sigma} - \operatorname{ch} \frac{2\pi H}{\sigma}},$$

откуда

$$\begin{aligned} |S_k| &< \left(\operatorname{ch} \frac{2\pi H}{\sigma} - 1 \right) \sum_{v=k}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{2\pi lv}{\sigma} - \operatorname{ch} \frac{2\pi H}{\sigma}} < \\ &< 2 \left(\operatorname{ch} \frac{2\pi H}{\sigma} - 1 \right) \sum_{v=k}^{\infty} \frac{1}{e^{\frac{2\pi lv}{\sigma}} - 2 \operatorname{ch} \frac{2\pi H}{\sigma}} \end{aligned}$$

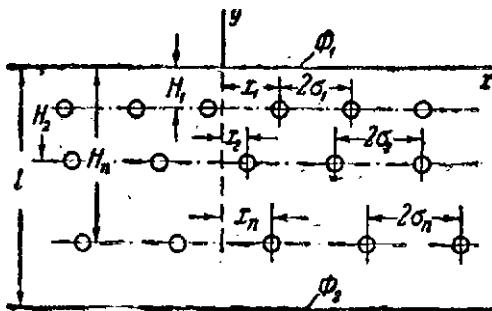
или

$$|S_k| < 2 \left(\operatorname{ch} \frac{2\pi H}{\sigma} - 1 \right) \sum_{v=k}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2\pi l v}{\sigma}}}{1 - 2e^{-\frac{2\pi l v}{\sigma}} \operatorname{ch} \frac{2\pi H}{\sigma}} < \\ < \frac{2 \left(\operatorname{ch} \frac{2\pi H}{\sigma} - 1 \right)}{1 - 2e^{-\frac{2\pi l k}{\sigma}} \operatorname{ch} \frac{2\pi H}{\sigma}} \sum_{v=k}^{\infty} e^{-\frac{2\pi l v}{\sigma}}.$$

Последняя сумма является геометрической прогрессией со знаменателем $e^{-\frac{2\pi l}{\sigma}}$ и, следовательно,

$$|S_k| < \frac{2 \left(\operatorname{ch} \frac{2\pi H}{\sigma} - 1 \right) e^{-\frac{2\pi l k}{\sigma}}}{\left(1 - 2e^{-\frac{2\pi l k}{\sigma}} \operatorname{ch} \frac{2\pi H}{\sigma} \right) \left(1 - e^{-\frac{2\pi l}{\sigma}} \right)}. \quad (2.60)$$

Таким образом, ряд в формуле (2.55) сходится очень быстро при обычных соотношениях между σ , H и l , и для практи-



Фиг. 12.

ческих подсчётов сумму в (2.55) можно опустить или ограничиться одним-двумя первыми членами. Погрешность при этом возможно оценить из выражения (2.60).

2. Случай нескольких цепочек скважин в полосообразном пласте. Если в залежи пробурены несколько цепочек скважин (фиг. 12), то потенциал в любой

точке пласта получается суперпозицией (2.52):

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \left\{ \sum_{i=1}^n q_i \left[\ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma_i} (y + H_i) - \cos \frac{\pi}{\sigma_i} (x - x_i)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma_i} (y - H_i) - \cos \frac{\pi}{\sigma_i} (x - x_i)} + S_i(x, y) \right] \right\} + c_1 y + \Phi_1, \quad (2.61)$$

где q_i — дебит скважины i -го ряда, H_i — расстояние i -го ряда до оси x , x_i — абсцисса ближайшей к оси y скважины i -го ряда, $2\sigma_i$ — расстояние между соседними скважинами в i -ом ряду, n — число рядов

$$S_i(x, y) = \sum_{v=1}^{\infty} \ln \frac{\left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma_i} (y - H_i + 2lv) - \cos \frac{\pi}{\sigma_i} (x - x_i) \right]}{\left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma_i} (y - H_i - 2lv) - \cos \frac{\pi}{\sigma_i} (x - x_i) \right]} \times \frac{\left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma_i} (y + H_i - 2lv) - \cos \frac{\pi}{\sigma_i} (x - x_i) \right]}{\left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma_i} (y + H_i + 2lv) - \cos \frac{\pi}{\sigma_i} (x - x_i) \right]}. \quad (2.62)$$

Учитывая предыдущие вычисления, получим при $y = -H_i$, $x = x_i$ (у скважины i -го ряда)

$$\Phi_{jc} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \sum_{i=1}^n q_i \left[\ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma_i} (H_i - H_j) - \cos \frac{\pi}{\sigma_i} (x_i - x_j)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma_i} (H_i + H_j) - \cos \frac{\pi}{\sigma_i} (x_i - x_j)} + S_i(x_j, -H_j) \right] - 2q_j \left[\ln \frac{\sigma_j}{\pi r_{jc}} + \ln 2 \operatorname{sh} \frac{\pi H_j}{\sigma_j} + \sum_{v=1}^{\infty} \ln \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{\sigma_j} (lv + H_j) \operatorname{sh} \frac{\pi}{\sigma_j} (lv - H_j)}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi lv}{\sigma_j}} \right] \right\} - c_1 H_j + \Phi_1, \quad (2.63)$$

$j = 1, 2, \dots, n.$

Здесь Φ_{jc} — потенциал на контуре скважины j -го ряда, r_{jc} — ее радиус, а значок ' \prime ', как обычно, указывает, что при суммировании от $i = 1$ до $i = n$ в сумме должен быть опущен

член $i = j$. При $y = -l$, $\Phi = \Phi_2$ и из уравнения (2.61)

$$\Phi_2 = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n q_i \left(-\frac{2\pi H_i}{\sigma_i} \right) - c_1 l + \Phi_1$$

или

$$\Phi_2 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{q_i H_i}{\sigma_i} - c_1 l + \Phi_1. \quad (2.64)$$

Уравнения (2.63) и (2.64) образуют систему $n+1$ уравнений первой степени, откуда могут быть найдены расходы q_i и c_1 . При $l \rightarrow \infty$ уравнение (2.64) выпадает, $c_1 = 0$ и $S_i(x, y) = 0$. Остаются только уравнения (2.63). Так как ряд (2.61) равномерно сходится, то его можно дифференцировать. Скорость фильтрации найдём из формул

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (2.65)$$

В частности, при $y = 0$, из (2.61) и (2.65) получим

$$(v)_{y=0} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q_i}{\sigma_i} \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{\pi H_i}{\sigma_i}}{\operatorname{ch} \frac{\pi H_i}{\sigma_i} - \cos \frac{\pi}{\sigma_i} (x - x_i)} + \right. \\ \left. + \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{\sigma_i} (H_i + 2lv)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma_i} (H_i + 2lv) - \cos \frac{\pi}{\sigma_i} (x - x_i)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{\sigma_i} (2lv - H_i)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma_i} (2lv - H_i) - \cos \frac{\pi}{\sigma_i} (x - x_i)} \right) \right] - c_1. \quad (2.66)$$

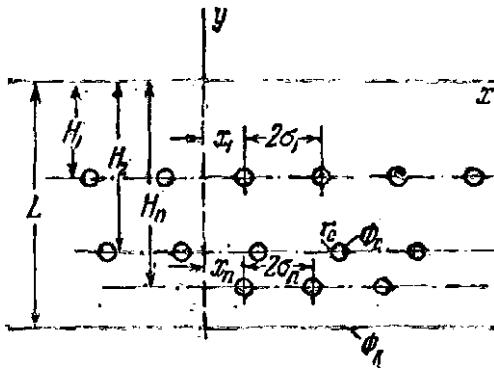
Если $H_i \geq \sigma_i$, то с незначительной погрешностью

$$(v)_{y=0} \approx -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\sigma_i} - c_1. \quad (2.67)$$

Заметим, что при $H_i > \sigma_i$, $l - H_i > \sigma_i$ можно в предыдущих уравнениях принять $S_i(x, y) \approx 0$, что повлечёт погрешность не выше 2–3%. Если же $l = \infty$, то $c_1 = 0$, $S_i(x, y) = 0$,

и для дебитов остаётся только уравнение (2.63), в котором нужно опустить бесконечную сумму и член $-c_1 H_j$.

3. Приток к нескольким бесконечным цепочкам скважин в полосе, один край которой непроницаем, а на другом задан постоянный потенциал¹⁾ (фиг. 13). В этом случае зеркальные изобра-



Фиг. 13.

жения цепочек относительно оси x должны рассматриваться с дебитами того же знака. Тогда суперпозицией выражений (2.51) получим

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n q_i \left\{ \ln \left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma_i} (y + H_i) - \cos \frac{\pi}{\sigma_i} (x - x_i) \right] + \right. \\ \left. + \ln \left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma_i} (y - H_i) - \cos \frac{\pi}{\sigma_i} (x - x_i) \right] \right\} + C. \quad (2.68)$$

Дебиты q_i и постоянная C определяются по известным контурным значениям потенциала на скважинах и границе пласта из системы

$$\Phi_{j,c} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n q_i \left\{ \ln \left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma_i} (H_i - H_j) - \cos \frac{\pi}{\sigma_i} (x_i - x_j) \right] + \right. \\ \left. + \ln \left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma_i} (H_i + H_j) - \cos \frac{\pi}{\sigma_i} (x - x_i) \right] \right\} + \\ + \frac{q_j}{2\pi} \left(\ln \operatorname{sh} \frac{\pi H_j}{\sigma_j} - \ln \frac{\sigma_j}{\pi r_{j,c}} \right) + C, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.69)$$

¹⁾ Эта задача рассматривалась В. Н. Шелкачевым. См. сноску 2 на стр. 31.

На границе $y = -L$, где известен потенциал Φ_k , уравнение (2.68), строго говоря, неприменимо, так как потенциал здесь изменяется, как нетрудно видеть, в пределах

$$\begin{aligned} y &= -L, \\ \Phi &= \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n q_i \left\{ \ln \left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma_i} (L - H_i) \pm 1 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \ln \left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma_i} (L + H_i) \pm 1 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Так как обычно гиперболические косинусы гораздо больше единицы, то приближенно можно принять следующее граничное условие:

$$\Phi_k = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n q_i \left[\ln \operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma_i} (L - H_i) + \ln \operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma_i} (L + H_i) \right] + C. \quad (2.70)$$

Из (2.69) и (2.70) определяются q_i и C . Точное решение задачи, на котором мы не останавливаемся, может быть получено с помощью бесконечного числа зеркальных изображений цепочек в оси x и прямой $y = -L$.

§ 10. Случай горизонтальной скважины — дрены

Рассмотрим случай горизонтальной трубы — дрены в пласте, представляющий интерес в связи с тенденцией эксплуатировать нефтяные пласти с помощью бурения горизонтальных скважин (фиг. 14).

Пусть горизонтальная труба — дрена радиуса r_c с контурным потенциалом Φ_c расположена в полубесконечном пласте мощностью h с прямолинейным контуром питания и контурным потенциалом Φ_k (фиг. 14, *a* — вертикальный разрез, *б* — план). Расстояние от дрены до края пласта H . Непроницаемые кровлю и подошву пласта можно рассматривать как линии тока от течения к бесконечной цепочке скважин-стоков, получаемой зеркальным отражением в кровле и подошве пласта. Очевидно, расстояние между двумя соседними стоками равно мощности пласта h . Тогда, согласно (2.49), где полагаем $2\sigma = h$, дебит на единицу

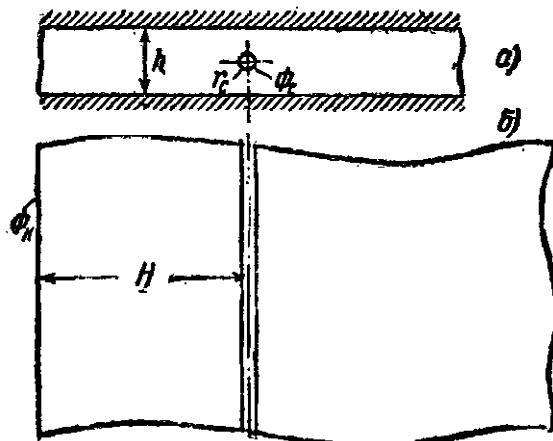
длины дрены равен

$$q_{\text{гор.}} = \frac{2\pi(\Phi_k - \Phi_c)}{\ln \frac{h}{2\pi r_c} + \ln 2 \operatorname{sh} \frac{2\pi H}{h}} \quad (2.71)$$

или, считая $H \geq h$,

$$q_{\text{гор.}} \approx \frac{2\pi(\Phi_k - \Phi_c)}{\ln \frac{h}{2\pi r_c} + \frac{2\pi H}{h}}. \quad (2.72)$$

Дебит на единицу длины единичной вертикальной скважи-



Фиг. 14.

ны в том же месте, как нетрудно показать, равен

$$q_{\text{верт.}} = \frac{2\pi(\Phi_k - \Phi_c)}{\ln \frac{2H}{r_c}}. \quad (2.73)$$

Отсюда

$$\frac{q_{\text{гор.}}}{q_{\text{верт.}}} = \frac{\ln \frac{2H}{r_c}}{\ln \frac{h}{2\pi r_c} + \frac{2\pi H}{h}}. \quad (2.74)$$

Из последнего выражения следует, что, вообще говоря, дебит единицы длины горизонтальной дрены гораздо меньше дебита единицы длины вертикальной. Так, например, при $h = 10 \text{ м}$, $H = 100 \text{ м}$, $r_c = 0,1 \text{ м}$ получаем

$$\frac{q_{\text{гор.}}}{q_{\text{верт.}}} = 0,116.$$

Таким образом, в данном случае дебит единицы длины горизонтальной скважины составляет около 10% дебита единицы длины вертикальной.

Отсюда следует, что горизонтальные скважины должны дренировать пласт на длину, гораздо большую, нежели вертикальные. Это обстоятельство, естественно, всегда соблюдается, и поэтому дебит горизонтальных дрен, ввиду их большой длины, всегда большие дебита вертикальных.

§ 11. Течение между конфокальными эллипсами

Этот случай может представить интерес для течений в пластах овальных форм.

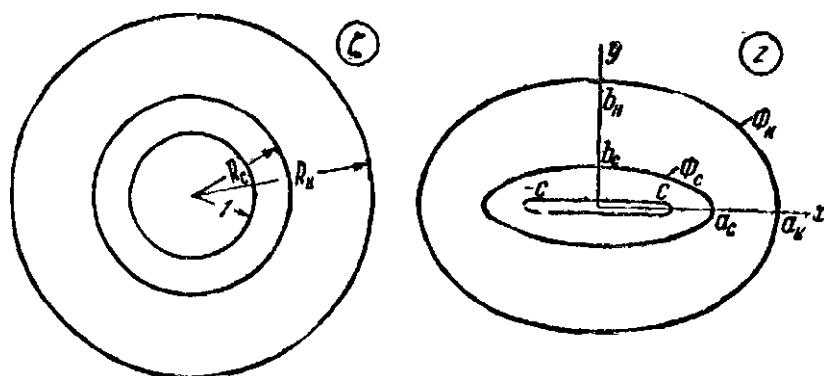
Возьмём функцию

$$z = \frac{c}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right), \quad (2.75)$$

где

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (2.76)$$

есть фокусное расстояние (фиг. 15). Как известно, эта функ-



Фиг. 15.

ция переводит контур эллипса плоскости z в окружность радиуса $R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}}$ плоскости ζ , а разрез, соединяющий фокусы, — в окружность единичного радиуса.

Из формулы Дюпюи получим

$$q = \frac{2\pi(\Phi_k - \Phi_c)}{\ln \frac{R}{1}} = \frac{2\pi(\Phi_k - \Phi_c)}{\ln \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}} = \frac{2\pi(\Phi_k - \Phi_c)}{\ln \frac{a+b}{c}}. \quad (2.77)$$

Здесь Φ_c — потенциал на краях разреза. У Маскета этот же результат получается гораздо сложнее. Если потенциалы Φ_k и Φ_c заданы на контурах двух конфокальных эллипсов с полуосами a_k, b_k, a_c, b_c , то, очевидно,

$$q = \frac{2\pi(\Phi_k - \Phi_c)}{\ln \sqrt{\frac{\frac{a_k+b_k}{a_k-b_k}}{\frac{a_c+b_c}{a_c-b_c}}}} = \frac{4\pi(\Phi_k - \Phi_c)}{\ln \frac{(a_k+b_k)(a_c-b_c)}{(a_k-b_k)(a_c+b_c)}}. \quad (2.78)$$

При этом полуоси обоих эллипсов связаны соотношениями

$$c^2 = a_k^2 - b_k^2 = a_c^2 - b_c^2.$$

Отсюда

$$q = \frac{4\pi(\Phi_k - \Phi_c)}{\ln \frac{(a_k+b_k)^2}{c^2} \frac{c^2}{(a_c+b_c)^2}} = \frac{2\pi(\Phi_k - \Phi_c)}{\ln \frac{a_k+b_k}{a_c+b_c}}. \quad (2.79)$$

§ 12. Интерференция скважин в пласте овальной формы

Точное решение задачи о притоке к скважине в эллиптическом пласте дано П. Я. Полубариновой-Кочиной с помощью конформного отображения эллипса на круг¹⁾.

Другой способ, видимо, более удобный для практических целей, заключается в том, что круг конформно отображается в какой-либо овал, не обязательно эллипс, с заданными полуосами.

Поскольку решена задача о притоке жидкости к скважинам, расположенным в круговой залежи, тем самым будет решена задача для скважин, расположенных в овальной залежи. Функций, преобразующих круг в овал, можно подобрать очень много. Мы остановимся на следующем способе

1) Полубаринова-Кочина П. Я., О прямой и обратной задаче гидравлики нефтяного пласта. Прикладная математика и механика, т. VII, 1943 г.

подбора. Возьмём на плоскости z двуугольник $ABCD$, образованный двумя равными пересекающимися кругами (фиг. 16, а) и отобразим его при посредстве надлежащей функции $\zeta(z)$ в круг единичного радиуса плоскости ζ . Тогда круг радиуса $\rho < 1$ отобразится в овал L , внутри которого ζ не будет иметь особенностей. Овал L и примем за контур пласта.

Функция, преобразующая двуугольник $ABCD$ в единичный круг, имеет вид

$$\zeta = \frac{1 - \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^x}{1 + \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^x}, \quad (2.80)$$

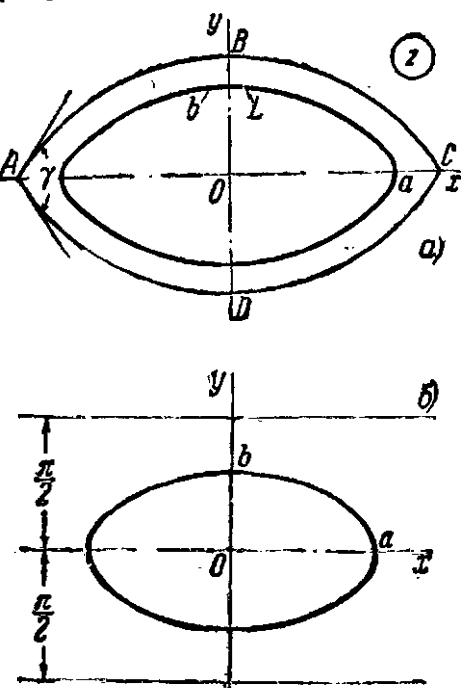
где принято

$$OA = -1; \quad OC = 1;$$

$$x = \frac{\pi}{\gamma}; \quad (2.81)$$

γ — угол пересечения окружностей.

Вместо двуугольника можно ещё взять на плоскости z полосу шириной π (фиг. 16, б) и отобразить её в единичный круг. Тогда кругам $\rho < 1$ будут соответствовать также овалы. Функция, преобразующая полосу шириной π в единичный круг, имеет вид



Фиг. 16.

иметь решения задачи для круга, мы тем самым получаем при помощи формул (2.80) или (2.82) решение задачи для овалов. Для пересчёта скоростей и радиусов скважин нужно знать значения производной

$$\left| \frac{d\zeta}{dz} \right|$$

После вычисления получим

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{4x(1-z^2)^{x-1}}{[(1+z)^x + (1-z)^x]^2}, \quad (2.83)$$

откуда, учитывая (2.80), будем иметь

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{x} \frac{1-z^2}{1-\zeta^2}, \quad (2.84)$$

$$\left| \frac{dz}{d\zeta} \right| = x \sqrt{\frac{(1-\xi)^2 + \eta^2 (1+\xi)^2 + \eta^2}{(1-x)^2 + y^2 (1+x)^2 + y^2}}. \quad (2.85)$$

Отделяя в (2.80) действительную и мнимую части, найдём

$$\zeta = \rho e^{i\theta}, \quad (2.86)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{\sqrt{[1-(x_1^2+y_1^2)]^2+4y_1^2}}{(1+x_1)^2+y_1^2}; & \operatorname{tg} \theta &= \frac{2y_1}{1-(x_1^2+y_1^2)}; \\ x_1 &= r_1 \cos \theta_1; & y_1 &= -r_1 \sin \theta_1; \\ r_1 &= \sqrt{[1-(x^2+y^2)]^2+4y^2}; & \operatorname{tg} \theta_1 &= \frac{2y}{1-(x^2+y^2)}; \\ z &= x+iy = re^{i\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (2.87)$$

Формулы (2.87) дают возможность определить точку плоскости ζ , соответствующую заданной точке плоскости z . Обратно, если нужно найти точку плоскости z , соответствующую заданной точке плоскости ζ , то, решая (2.80) относительно z и отделяя затем действительную и мнимую части, получим

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad (2.88)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{\sqrt{(1-\rho_2^2)^2+4\rho_2^2 \sin^2 \theta_2}}{1+2\rho_2 \cos \theta_2+\rho_2^2}; & \operatorname{tg} \varphi &= \frac{2\rho_2 \sin \theta_2}{1-\rho_2^2}; \\ \rho_2 &= \rho_1^{\frac{1}{x}}; & \theta_2 &= \frac{\theta_1}{x}; & \rho_1 &= \frac{\sqrt{(1-\rho^2)^2+4\rho^2 \sin^2 \theta}}{1+2\rho \cos \theta+\rho^2}; \\ \operatorname{tg} \theta_1 &= \frac{2\rho \sin \theta}{1-\rho^2}; & \zeta &= \xi+i\eta = \rho e^{i\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (2.89)$$

Для практических расчётов нужно определить ρ_k и χ , соответствующие контуру L овальной формы с полуосами a и b (фиг. 16). Из (2.80) и (2.87) получаем после простых вычислений

$$\rho_k = \frac{1 - \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^x}{1 + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^x} = \operatorname{tg} \left(\frac{\chi}{2} \operatorname{arctg} \frac{2b}{1-b^2} \right) \quad (2.90)$$

или, что то же самое,

$$\rho_k = \operatorname{th} \left(\frac{\chi}{2} \ln \frac{1+a}{1-a} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\chi}{2} \operatorname{arctg} \frac{2b}{1-b^2} \right). \quad (2.91)$$

Из этих двух уравнений определяются ρ_k и χ . Напомним, что здесь должно быть $a > b$ и большая полуось двуугольника принята за единицу. Малая полуось двуугольника $OB = OD$, как легко показать, определяется из уравнения

$$OB = \operatorname{tg} \frac{\chi}{4}. \quad (2.92)$$

Заметим, что для заданного отношения $\frac{b}{a}$ величину a можно выбирать произвольно, но, конечно, $a < 1$. При этом будут получаться различные овалы с одним и тем же отношением осей. Для функции (2.82) аналогичным образом получим

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{z}{2} \right) = \frac{1}{2} (1 - \zeta^2), \quad (2.93)$$

$$\left| \frac{d\zeta}{dz} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{[(1-\xi)^2 + \eta^2][(1+\xi)^2 + \eta^2]}. \quad (2.94)$$

Отделяя в (2.82) действительную и мнимую части, найдём

$$\zeta = \xi + i\eta,$$

$$\xi = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sin} y}; \quad \eta = \frac{\operatorname{sin} y}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sin} y}. \quad (2.95)$$

Обратное определение z по известной ζ проще всего сделать следующим образом. Так как разрешение уравнений (2.95)

относительно x и y очень громоздко, то (2.82) представим в виде

$$\zeta = \frac{e^z - 1}{e^z + 1},$$

откуда

$$e^z = \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta}. \quad (2.96)$$

Полагая далее

$$\zeta = \rho e^{i\theta},$$

из (2.96) получим

$$e^z = R e^{i\Phi}, \quad (2.97)$$

где

$$\left. \begin{aligned} R &= \sqrt{\frac{(1 - \rho^2)^2 + 4\rho^2 \sin^2 \theta}{1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2}}, \\ \operatorname{tg} \Phi &= \frac{2\rho \sin \theta}{1 - \rho^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.98)$$

Отсюда

$$x = \ln R, \quad y = \Phi \left(-\frac{\pi}{2} < \Phi < \frac{\pi}{2} \right). \quad (2.99)$$

Дальнейшие расчёты ведутся по формулам для кругового пласта.

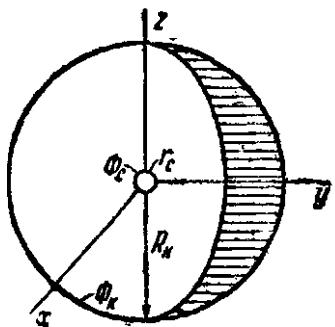
— — —

ГЛАВА III

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

§ 13. Решение уравнения Лапласа для точечного источника в пространстве

Обычно колебания вертикальных отметок пластов гораздо меньше их горизонтальных размеров. Поэтому в большинстве случаев длина пласта почти не отличается от её проекции на горизонтальную плоскость и течение в пласте можно рассчитывать по формулам теории фильтрации для плоских течений.



Фиг. 17.

Однако имеется целый ряд задач, где предположение о плоском течении становится неприемлемым. К таким пространственным задачам относится в первую очередь задача о притоке жидкости к несовершенным скважинам, т. е. к скважинам, неполностью вскрывшим пласт, задача о тече-

нии через отверстия в перфорированной трубе, точное решение задачи о продвижении границы раздела двух жидкостей с учётом негоризонтальности пласта и ряд других.

Пространственные задачи теории фильтрации в большинстве случаев весьма сложны и в настоящее время ещё сравнительно мало разработаны.

Простейшей пространственной задачей теории фильтрации является задача о притоке жидкости в однородной среде к точечному источнику в пространстве (фиг. 17).

Пусть на сferах радиусов r_c и R_k заданы потенциалы Φ_c и Φ_k . Требуется найти дебит жидкости.

В такой постановке задача имеет, конечно, только теоретический интерес. Но мы её разберём потому, что она определит основной элемент решения, необходимый для решения целого ряда других пространственных задач, — потенциал пространственного точечного источника.

Для этого мы используем одно из основных решений уравнения Лапласа в пространстве

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \quad (3.1)$$

имеющее следующий вид:

$$\Phi = \frac{c_1}{r} + c_2, \quad (3.2)$$

где c_1 , c_2 — произвольные постоянные.

Можно простой проверкой убедиться, что (3.2) есть действительно решение уравнения (3.1), которое определяет течение к источнику или стоку (смотря по знаку c_1), помещённому в начале координат.

Нетрудно показать, что дебит определяется формулой

$$Q = \frac{4\pi(\Phi_k - \Phi_c)}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_k}}. \quad (3.3)$$

Скорости, вызванные источником или стоком, находятся из выражения

$$v_r = \pm \frac{Q}{4\pi r^2}. \quad (3.4)$$

§ 14. Некоторые формулы для дебита несовершенной скважины

Задача о дебите скважин, неполностью вскрывшей пласт, была подробно рассмотрена Маскетом, который определял распределение потенциала в пласте из условия, что по оси скважины непрерывно распределены точечные источники вида (3.2) с интенсивностью, подбираемой таким образом, чтобы надлежащим образом были удовлетворены контурные

условия на кровле и подошве пласта, а также на контурах питания я скважины.

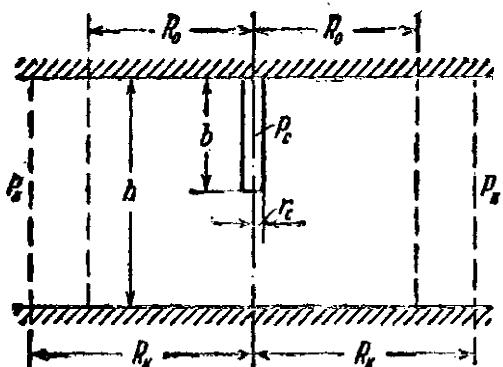
В результате Маскет получил следующую формулу для дебита несовершенной скважины (фиг. 18):

$$Q = \frac{2\pi k h \frac{\Delta p}{\mu}}{\frac{1}{2h} \left\{ 2 \ln \frac{4h}{r_c} - \ln \frac{\Gamma(0,875h) \Gamma(0,125h)}{\Gamma(1-0,875h) \Gamma(1-0,125h)} \right\} - \ln \frac{4h}{R_k}} \quad (3.5)$$

где

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

есть Эйлеров интеграл второго рода, иначе называемый функцией гамма (эта функция табулирована), $\Delta p = p_k - p_c$ — депрессия, под действием которой жидкость притекает к скважине,



Фиг. 18.

представляет собой отношение глубины вскрытия b ко всей мощности пласта h .

Рассмотренная задача была исследована другим методом М. М. Глогоуским¹⁾.

Козени предложил значительно более простую формулу

$$Q = \frac{2\pi k h \bar{h} \frac{\Delta p}{\mu}}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \left(1 + 7 \sqrt{\frac{r_c}{2h\bar{h}}} \cos \frac{\bar{h}}{2} \right). \quad (3.7)$$

Следует отметить, что результаты расчётов по формулам (3.5) и (3.7) довольно близки между собой.

¹⁾ Диссертация. Московский Нефтяной Институт им. Губкина, 1946 г.

Приведём ещё формулу Додсона и Кардвелла¹⁾ для дебита, когда жидкость из пласта поступает в скважину через перфорированную трубу (лайнер):

$$Q = \frac{2\pi k h \frac{\Delta p}{\mu}}{\ln \frac{R_k}{r_c} + \frac{2}{N} \ln \frac{2}{\pi \Omega}}. \quad (3.8)$$

Здесь N — число рядов отверстий, Ω — часть площади поверхности трубы, занятая отверстиями. Эта формула, как указывают авторы, удовлетворительно подтверждается экспериментами.

Интересным следствием формулы (3.8) является то обстоятельство, что уже при сравнительно небольших N и Ω дебит приближается к тому предельному Q_0 , который даёт обычная формула Дюпюи

$$Q_0 = \frac{2\pi k h \frac{\Delta p}{\mu}}{\ln \frac{R_k}{r_c}}.$$

Например, при $N = 6$, $\Omega = 40\%$, $\frac{Q}{Q_0} = 90\%$. Таким образом, наличие фильтра перфорированной трубы уже при сравнительно небольшом числе отверстий мало отражается на характере течения. Остальные экспериментальные и теоретические исследования по несовершенным скважинам приводятся в специальной литературе и здесь не рассматриваются.

§ 15. Интерференция несовершенных скважин²⁾

Из графиков для распределения потенциала, приведённых в книге Маскета³⁾, следует, что на расстоянии от скважины, равном приблизительно мощности пласта, распределение потенциала становится практически равномерным по всей мощности пласта.

1) C. R. Dodson and W. T. Cardwell, Flow into Slotted Liners and an application of the Theory to Core Analysis, Petroleum Technology, март 1944 г.

2) Чарный И. А., Интерференция несовершенных скважин, Известия ОНН АН СССР, № 11, 1946 г.

3) См. сноску на стр. 12.

Таким образом можно считать, что в интервале $R_k > r > R_0$, где $R_0 > h$, поток к скважине движется по законам плоского радиального течения, а влияние несовершенства скважины оказывается только в непосредственной близости к скважине в интервале

$$R_0 > r > r_c.$$

Задавшись величиной $R_0 > h$, можно написать для расхода следующее уравнение:

$$Q' = \frac{2\pi k h}{\mu} \frac{P_k - P_0}{\ln \frac{R_k}{R_0}} = \frac{2\pi k h}{\mu} \frac{P_0 - P_c}{\xi_0}, \quad (3.9)$$

где Q' — дебит скважины, вычисляемый согласно формуле (3.5), в которую вместо R_k нужно подставить R_0 ,

$$\xi_0 = \frac{1}{2h} \left\{ 2 \ln \frac{4h}{r_c} - \ln \frac{\Gamma(0,875h) \Gamma(0,125h)}{\Gamma(1-0,875h) \Gamma(1-0,125h)} \right\} - \ln \frac{4h}{R_0}, \quad (3.10)$$

а P_0 — среднее давление на боковой поверхности цилиндра радиуса R_0 , мысленно выделенного в пласте.

Из (3.9) получаем:

$$P_k - P_0 = -\frac{\ln \frac{R_k}{R_0}}{\xi_0} (P_0 - P_c),$$

$$P_0 = \frac{P_k + \beta P_c}{1 + \beta}, \quad (3.11)$$

$$\beta = \frac{1}{\xi_0} \ln \frac{R_k}{R_0}. \quad (3.12)$$

Дебит Q' , таким образом, будет равен

$$Q' = \frac{2\pi k h}{\mu} \frac{P_k - P_0}{\ln \frac{R_k}{R_0}} = \frac{2\pi k h}{\mu} \frac{\beta}{1 + \beta} \frac{P_k - P_c}{\ln \frac{R_k}{R_0}}. \quad (3.13)$$

Степенью точности предлагаемого приближенного метода расчёта может служить отношение $\varphi = \frac{Q'}{Q}$, где Q — дебит, вычисляемый по формуле Маскета (3.5).

Из (3.13) и (3.5) находим

$$\varphi = \frac{Q'}{Q} = \frac{\beta \xi_0}{(1 + \beta) \ln \frac{R_k}{R_0}}, \quad (3.14)$$

где

$$\xi_k = \frac{1}{2h} \left\{ 2 \ln \frac{4h}{r_c} - \ln \frac{\Gamma(0,875h) \Gamma(0,125h)}{\Gamma(1-0,875h) \Gamma(1-0,125h)} \right\} = \ln \frac{4h}{R_k}. \quad (3.15)$$

Для примера были выбраны следующие данные: $R_k = 1000$ м; $h = 20$ м; $\bar{h} = 0,25$; $r_c = 0,1$ м. Величина R_0 принималась равной: $R_0 = h = 20$ м и $R_0 = 2h = 40$ м. Было получено: для $R_0 = 20$ м $\varphi = 0,99$; для $R_0 = 40$ м $\varphi = 1$.

Вычисления проводились на логарифмической линейке. Значения функции Γ определялись при помощи таблиц.

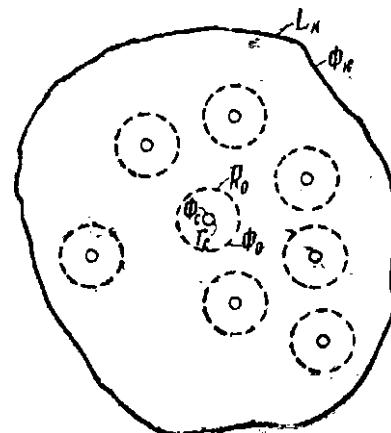
Теперь можно перейти к решению задачи об интерференции нескольких несовершенных скважин.

Как указывалось выше (глава II), плоскую задачу об интерференции группы совершенных скважин можно считать решённой. Если известны формы контура, контурное давление и давления на контурах скважин, то дебиты совершенных скважин определяются, в общем случае, из системы уравнений первой степени, число которых равно числу скважин.

В случае несовершенных скважин можно поступить так. Пусть в пласте мощностью h , ограниченном контуром L_k с контурным потенциалом Φ_k (фиг. 19), расположено n несовершенных скважин с различными, для общности, глубинами вскрытия b_i , контурными потенциалами $(\Phi_c)_i$ и радиусами $(r_c)_i$.

Окружим мысленно каждую несовершенную скважину концентрической цилиндрической поверхностью заданного радиуса $(R_0)_i$, как на фиг. 19, причём пусть $(R_0)_i \geq h$. Для простоты можно выбрать для всех скважин $(R_0)_i = R_0 = \text{const}$.

Будем считать, как это обычно и имеет место в практике, что расстояния между скважинами гораздо больше мощности пласта и, следовательно, величин R_0 .



Фиг. 19.

Таким образом, каждая несовершенная скважина радиуса $(r_c)_i$ окажется «окружённой» совершенной скважиной радиуса $(R_0)_i$, давление или потенциал на боковой поверхности которой может считаться почти равномерно распределённым. Обозначим средний потенциал вдоль этой поверхности через $(\Phi_0)_i$.

В результате мы приходим к следующему: между контуром L_k и контурами $(R_0)_i$ движение происходит по законам плоского течения. Дебиты Q_i связаны с потенциалами $(\Phi_0)_i$, пока ещё не известными, системой n уравнений первой степени с n неизвестными для случая интерференции совершенных скважин.

Потенциалы $(\Phi_0)_i$ определяются из дополнительной системы n уравнений, которая получится, если мы дебит Q_i каждой несовершенной скважины будем определять из формулы Маскета (3.5) с заменой R_k на $(R_0)_i$ и Φ_k на $(\Phi_0)_i$. Получаем

$$Q_i = \frac{2\pi h}{(\epsilon_0)_i} [(\Phi_0)_i - (\Phi_c)_i], \quad (3.16)$$

где согласно (3.10) имеем

$$(\epsilon_0)_i = \frac{1}{2h_i} \left\{ 2 \ln \frac{4h}{(r_c)_i} - \ln \frac{\Gamma(0.875\bar{h}_i) \Gamma(0.125\bar{h}_i)}{\Gamma(1-0.875\bar{h}_i) \Gamma(1-0.125\bar{h}_i)} \right\} - \ln \frac{4h}{(R_0)_i}. \quad (3.17)$$

Таким образом, для определения Q_i и $(\Phi_0)_i$ получается система $2n$ уравнений первой степени с $2n$ неизвестными, откуда все неизвестные могут быть найдены.

Рассмотрим несколько примеров.

Пусть дебит фиктивной скважины радиуса R_0 с потенциалами на контурах скважины и питания Φ_0 и Φ_k определяется формулой

$$Q = \frac{2\pi h (\Phi_k - \Phi_0)}{S}, \quad (3.18)$$

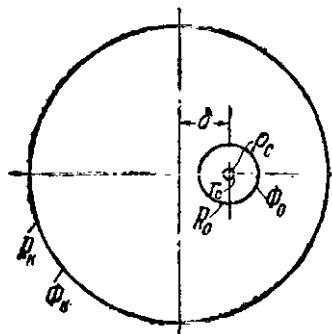
где величина S зависит от расположения скважины и формы области питания. Например, для одной скважины в центре кругового пласта, по Дюпон, получим

$$S = \ln \frac{R_k}{R_0}. \quad (3.19)$$

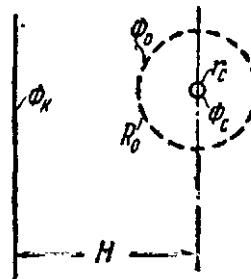
В случае эксцентрично расположенной скважины (фиг. 20), согласно (2.29) найдём

$$S = \ln \frac{R_k}{R_0} \left(1 - \frac{\delta^2}{R_k^2} \right). \quad (3.20)$$

Для скважины в пласте с прямолинейным контуром пи-



Фиг. 20.



Фиг. 21.

тания (фиг. 21), на основании (2.73), будем иметь

$$S = \ln \frac{2H}{R_0}. \quad (3.21)$$

Для «цепочки» скважин в неограниченном пласте с прямолинейным контуром питания (фиг. 22) по формуле (2.49) получим

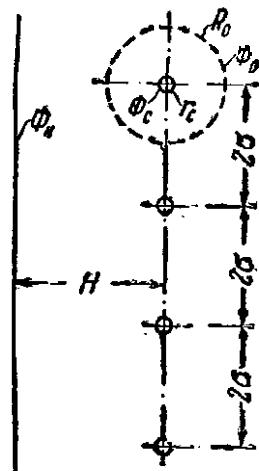
$$S = \ln \frac{\sigma}{\pi R_0} + \ln 2 \operatorname{sh} \frac{\pi H}{\sigma}. \quad (3.22)$$

При $H \geq \sigma$

$$S \approx \ln \frac{\sigma}{\pi R_0} + \frac{\pi H}{\sigma}, \quad (3.23)$$

Дебит несовершенной скважины радиуса r_c с контурным потенциалом Φ_c , ось которой совпадает с осью совершенной, определяется на основании формулы (3.16), если $R_0 > h$, следующим образом:

$$Q = 2\pi h \frac{\Phi_k - \Phi_0}{S} = 2\pi h \frac{\Phi_0 - \Phi_c}{\xi_0}, \quad (3.24)$$



Фиг. 22.

откуда

$$\Phi_k - \Phi_0 = \frac{S}{\xi_0} (\Phi_0 - \Phi_c),$$

$$\Phi_0 = \frac{\Phi_k + \beta \Phi_c}{1 + \beta}, \quad (3.25)$$

$$Q = 2\pi h \frac{\beta}{1 + \beta} \frac{\Phi_k - \Phi_c}{S} = \frac{\beta}{1 + \beta} (Q_{\text{сов.}})_{R_0}, \quad (3.26)$$

где

$$\beta = \frac{S}{\xi_0}, \quad (3.27)$$

$(Q_{\text{сов.}})_{R_0}$ — дебит совершенной скважины радиуса R_0 , но с тем же противодавлением, что и в данной несовершенной скважине.

Как уже указывалось, изложенный выше метод применим для случая $R_0 \geq h$ и для расстояний от скважины до контура области и между скважинами в несколько раз большие R_0 . В этом случае следует ожидать достаточной точности для практических расчётов.

Сопоставим интерференцию бесконечной цепочки совершенных и несовершенных скважин при следующих данных (фиг. 22): $H = 100$ м; $2\sigma = 100$ м; $r_c = 0,1$ м; $h = 20$ м; $\bar{h} = 0,25$. Полагаем $R_0 = h = 20$ м. По формулам (3.23) и (3.17) находим

$$S = \ln \frac{50}{\pi \cdot 20} + \frac{\pi \cdot 100}{50} = 6,06;$$

$$\xi_0 = \frac{1}{2 \cdot 0,25} \left\{ 2 \ln \frac{4 \cdot 20}{0,1} + \ln \frac{\Gamma(0,875 \cdot 0,25) \Gamma(0,125 \cdot 0,25)}{\Gamma(1 - 0,875 \cdot 0,25) \Gamma(1 - 0,125 \cdot 0,25)} \right\} - \frac{4 \cdot 20}{20} = 16,01,$$

а по формулам (3.26) и (3.27) получаем

$$\beta = \frac{6,06}{16,01} = 0,377;$$

$$Q = \frac{0,377}{1,377 \cdot 6,06} \cdot 2\pi h (\Phi_k - \Phi_c) = 0,0454 \cdot 2\pi h (\Phi_k - \Phi_c).$$

Для единичной скважины в тех же условиях (фиг. 21), согласно (3.21), (3.26) и (3.27), имеем

$$S = \ln \frac{2 \cdot 100}{20} = 2,303; \quad \beta = \frac{2,303}{16,01} = 0,144;$$

$$Q = Q_{\text{ед.}} = \frac{0,144}{1,144 \cdot 2,303} 2\pi h (\Phi_k - \Phi_c) = 0,0545 \cdot 2\pi h (\Phi_k - \Phi_c).$$

Интерференция может быть оценена числом

$$i = \frac{Q}{Q_{\text{ед.}}} = \frac{0,0454}{0,0545} = 0,83.$$

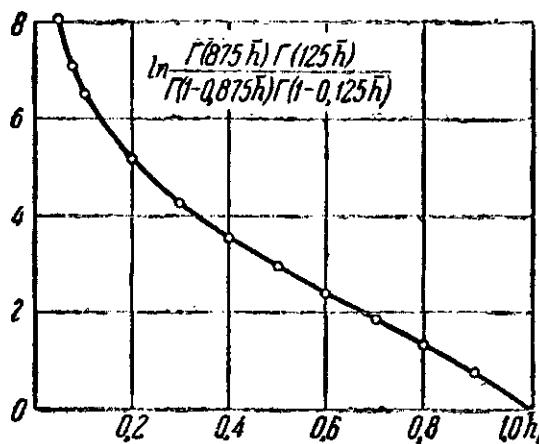
Для совершенных скважин в тех же условиях будет

$$\ln \frac{\sigma}{\sigma_c} + \frac{\pi H}{\sigma} = \ln \frac{50}{\pi \cdot 0,1} + \frac{\pi \cdot 100}{50} = 11,35;$$

$$\ln \frac{2H}{r_c} = \ln \frac{2 \cdot 100}{0,1} = 7,6;$$

$$i = \frac{Q}{Q_{\text{ед.}}} = \frac{7,6}{11,35} = 0,67.$$

Таким образом, интерференция несовершенных скважин значительно меньше, нежели совершенных, в тех же условиях.

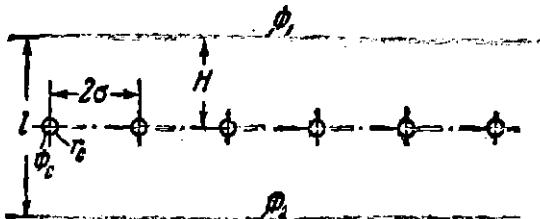


Фиг. 23.

Для облегчения расчётов можно пользоваться графиком фиг. 23.

В качестве второго примера рассмотрим задачу о дебите бесконечной «цепочки» несовершенных скважин в полёс-

образной залежи с двухсторонним питанием (фиг. 24). Эта задача рассматривалась Б. И. Сегалом¹⁾, который при помощи особым способом преобразованного выражения для потенциала бесконечной пространственной решетки стоков получил формулы для дебитов и распределения потенциала в пласте. На фиг. 24 Φ_1 , Φ_2 — потенциалы на границах залежи, r_c , Φ_c —



Фиг. 24.

радиус скважин и потенциал на их контуре, остальные размеры понятны из чертежа.

Б. И. Сегалом были вычислены дебиты для следующего примера (все размеры выражены через мощность пласта, принимаемую за единицу): $h=1$; $r_c=0,01$; $2\sigma=20$; $H=$
 $=\frac{l}{2}=60$; $\Phi_1=\Phi_2=\Phi_k$; $\Phi_k-\Phi_c=1$; погружения полагались равными $\bar{h}=0,25; 0,5; 0,75; 1$.

Расчет дебитов для этого случая по нашему методу производится следующим образом. Для цепочки совершенных скважин, указанной на фиг. 24, для $\sigma \leq H$, согласно (2.56), имеем

$$\Phi_1 \left(1 - \frac{H}{l}\right) + \Phi_2 \frac{H}{l} - \Phi_c = \frac{Q}{h} \left[\frac{1}{2\pi} \ln \frac{\sigma}{r_c} + \left(1 - \frac{H}{l}\right) \frac{H}{2\sigma} \right];$$

отсюда, при $\Phi_1=\Phi_2=\Phi_k$, $H=\frac{l}{2}$ получим

$$Q = 2\pi h \frac{\Phi_k - \Phi_c}{\ln \frac{\sigma}{r_c} + \frac{\pi l}{4\sigma}} \quad (3.28)$$

1) Сегал Б. И., Некоторые пространственные задачи теории потенциала и их приложения. Известия АН СССР, серия математическая, т. 10, № 4.

Последняя формула выведена для дебита совершенной скважины радиуса r_c . Таким образом, согласно (3.18) и (3.28), для фиктивной совершенной скважины радиуса R_0 , найдём

$$S = \ln \frac{a}{\pi R_0} + \frac{\pi l}{4a}. \quad (3.29)$$

Дебит несовершенной скважины теперь получится из (3.27) и (3.26).

Полагаем $R_0 = h = 1$ для $\bar{h} = 0,25$. Из (3.17), графика фиг. 23 и (3.29) получим

$$\xi_0 = \frac{1}{2 \cdot 0,25} (2 \ln 400 - 4,7) - \ln 4 = 13,21;$$

$$S = \ln \frac{10}{\pi \cdot 1} + \frac{\pi \cdot 120}{40} = 10,58;$$

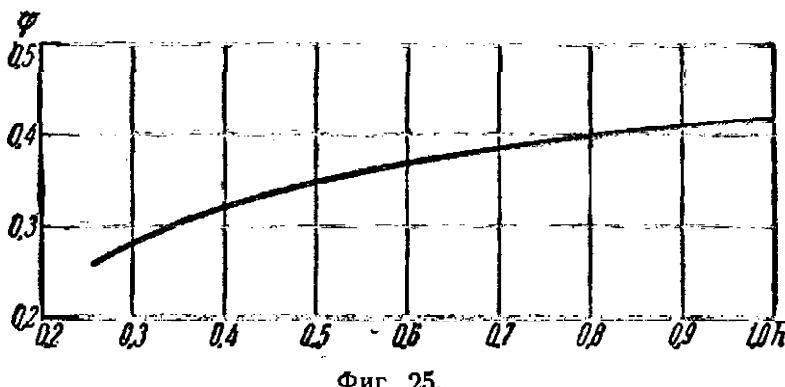
$$\beta = \frac{S}{\xi_0} = \frac{10,58}{13,21} = 0,8.$$

Из (3.26) определяем

$$\varphi = \frac{Q}{h(\Phi_k - \Phi_c)} = \frac{2\pi \cdot 0,8}{1,8 \cdot 10,58} = 0,264.$$

По Б. И. Сегалу, $\varphi = 0,266$.

Для $\bar{h} = 0,5$ после вычислений находим $\varphi = 0,344$. По Б. И. Сегалу $\varphi = 0,345$.



Фиг. 25.

Для $\bar{h} = 0,75$ $\varphi = 0,39$. По Б. И. Сегалу $\varphi = 0,390$. Для $\bar{h} = 1$ дебит проще всего вычислить из (3.28), откуда

для φ получим:

$$\ln \frac{a}{\pi r_c} + \frac{\pi l}{4s} = \ln \frac{10}{\pi \cdot 0,01} + \frac{\pi \cdot 120}{4 \cdot 10} = 15,18;$$

$$\varphi = \frac{Q}{h(\Phi_k - \Phi_c)} = \frac{2\pi}{15,18} = 0,415.$$

По Б. И. Сегалу $\varphi = 0,423$.

Таким образом, согласие с результатами Б. И. Сегала очень хорошее.

На графике, изображённом на фиг. 25, показана зависимость φ от \bar{h} .

ГЛАВА IV

ДВИЖЕНИЕ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

§ 16. Введение

Задача о движении границы раздела двух жидкостей в пористой среде является, в точной постановке, одной из наиболее сложных в теории фильтрации.

Первые исследования её, возникшие в связи с вопросом о стягивании контура нефтеносности при водонапорном режиме течения, принадлежат Л. С. Лейбензону¹⁾. Дальнейшее развитие эта задача получила в работах М. Маскета²⁾, В. Н. Щелкачева³⁾, П. Я. Полубариновой-Кочиной⁴⁾ и др.

Задача о движении в пористой среде границы раздела двух жидкостей с различными физическими свойствами — вязкостью и плотностью — встречается не только в вопросах эксплоатации нефтяных месторождений, но и в случае водонапорного режима газовых месторождений, когда газ притекает к скважинам под напором краевой воды, ряда технологических процессов, где одна жидкость замещает другую в пористой среде, и т. д.

В общем случае строгое гидродинамическое решение, пригодное для практических расчётов, отсутствует. Исследованы лишь отдельные частные случаи, а также разработан ряд приближённых методов, некоторые из которых изложены ниже.

^{1), 2), 3)} См. сноски на стр. 12, 11 и 31.

⁴⁾ Полубаринова-Кочина П. Я., К вопросу о перемещении контура нефтеносности. Доклады АН СССР, 1945 г., т. XLVIII, № 4.

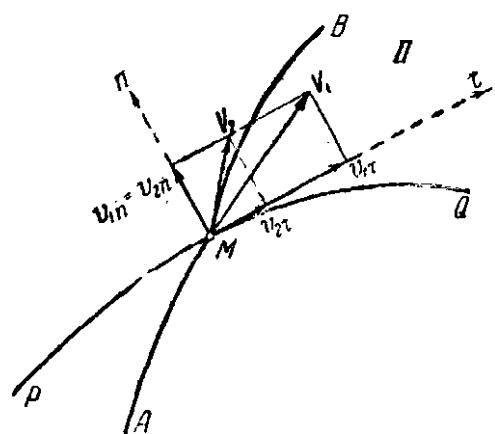
Без принципиальных затруднений получается решение задачи о движении жидкой частицы вдоль линии тока при установившемся течении, т. е. для одножидкостной системы при постоянных значениях контурных потенциалов.

Так же без затруднений получаются решения о поступательном прямолинейном и радиально-круговом движении границы раздела двух жидкостей в пористой среде. Для остальных случаев строгое аналитическое решение, которое можно

использовать для технических расчётов, пока ещё не получено.

На границе раздела двух сред происходит своеобразное преломление линий тока. Пусть (фиг. 26) кривая PQ является границей раздела двух жидкостей с вязкостями μ_1 , μ_2 и пусть, например, $\mu_2 > \mu_1$.

Рассмотрим произвольную точку M границы PQ и проведём



Фиг. 26.

через неё касательную τ к PQ и нормаль n . Найдём проекции скоростей частиц первой и второй жидкостей, находящихся в этот момент в точке M , на τ и n . В силу неразрывности течения элементарные расходы обеих жидкостей через произвольный элемент границы раздела должны быть равны. Отсюда следует, что и нормальные проекции обеих скоростей равны, т. е. $v_{1n} = v_{2n}$. Давление в пласте в точке M также должно быть одинаково для обеих жидкостей, так как разрыва давления в сплошном потоке быть не может. Касательные же компоненты скоростей обеих жидкостей согласно закону Дарси будут

$$v_{1\tau} = - \frac{k}{\mu_1} \frac{dp}{d\tau},$$

$$v_{2\tau} = - \frac{k}{\mu_2} \frac{dp}{d\tau}.$$

Проницаемость k мы считаем постоянной. Но μ_1 , μ_2 различны,

следовательно, $v_{1\tau} \neq v_{2\tau}$, и если $\mu_2 > \mu_1$, то $v_{1\tau} > v_{2\tau}$. Отсюда следует, что и результирующие векторы скоростей V_1 и V_2 точки M для частиц каждой жидкости будут различны и, следовательно, линии тока AM и BM , проходящие через точку M в каждой из жидкостей, будут иметь излом в точке M . Заметим, что в общем случае граница раздела не является в процессе течения эквипотенциалью, хотя в начальный момент и может быть таковой.

Точное решение задачи о продвижении границы раздела, когда $\mu_1 \neq \mu_2$, — в общем случае нерадиального и непрямолинейного течений — наталкивается на чрезвычайные математические затруднения. Поэтому вместо точных решений приходится искать приближённые.

§ 17. Расчёт вытеснения одной жидкости другой из трубок тока, предполагаемых неизменными

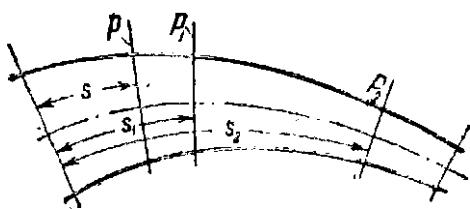
Мы уже видели, что в общем случае — непрямолинейного и нерадиального течений — линии тока на границе раздела двух жидкостей испытывают преломление. Мы можем мысленно построить систему трубок тока в областях, занятых движущимися жидкостями. На границе раздела каждая трубка тока будет иметь излом, перемещающийся вместе с этой границей по мере вытеснения одной жидкости другой. Таким образом, весь процесс течения можно рассматривать как вытеснение одной жидкости другой из системы деформируемых трубок тока, сечения которых изменяются в зависимости от времени.

Заменим теперь эту истинную картину течения другой, физически заведомо неверной картиной: предположим, что картина линий тока и, следовательно, трубок тока для двухжидкостной системы остаётся такой же точно, как и для одно жидкостной при одних и тех же контурных условиях. Иначе говоря, предположим, что в любой трубке тока площадь поперечного сечения изменяется по длине трубы при двухжидкостной системе по тому же самому закону, что и для одно жидкостной.

Для одно жидкостной системы течение предполагается известным. Тогда задача сводится к расчёту времени вытеснения одной жидкости другой из системы трубок переменного

по длине сечения, когда все эти трубки являются уже жёсткими, недеформируемыми.

Наименьшая погрешность будет иметь место для тех трубок тока, ось которых всё время течения остаётся прямолинейной в силу симметрии или по каким-либо другим причинам. Обычно такие трубки с прямолинейной осью существуют почти во всех реальных потоках, и расчёт течения вдоль таких трубок представляет наибольший практический интерес.



Фиг. 27.

есть функция длины s , отсчитываемой вдоль оси. Будем считать, что скорости фильтрации во всех точках сечения f одинаковы.

Из закона Дарси, для расхода q , имеем

$$q = -\frac{k f}{\mu} \frac{dp}{ds}. \quad (4.1)$$

Предположим, что известны давления p_1 и p_2 в сечениях $s = s_1$ и $s = s_2$.

Выразим q через p_1 и p_2 . Для этого из (4.1) найдём

$$dp = -\frac{s \mu}{k} \frac{ds}{f},$$

откуда, интегрируя и замечая, что q не зависит от s , получим

$$p_1 - p_2 = \frac{q \mu}{k} \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{f},$$

$$q = \frac{k}{\mu} \frac{p_1 - p_2}{\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{f}}. \quad (4.2)$$

Оценку степени точности предлагаемого здесь метода дадим ниже.

Рассмотрим какую-либо трубку тока переменного сечения (фиг. 27). Пусть площадь её поперечного сечения

Если проницаемость k переменна, то вместо (4.2) будем иметь

$$q = \frac{1}{\mu} \frac{p_1 - p_2}{\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{kf}}. \quad (4.3)$$

Формулы (4.2) и (4.3) выражают закон Дарси для трубыки переменного сечения с равномерным распределением скоростей в поперечных сечениях.

Рассмотрим теперь жёсткую трубку переменного сечения длиной l , в которой одна жидкость вытесняет другую. Обозначим вытесняющую жидкость индексом «1», а вытесняемую — индексом «2». Этими же индексами будем обозначать в дальнейшем величины, связанные с вытесняющей или вытесняемой жидкостями. Пусть в одном сечении трубы, занятом вытесняющей жидкостью, давление

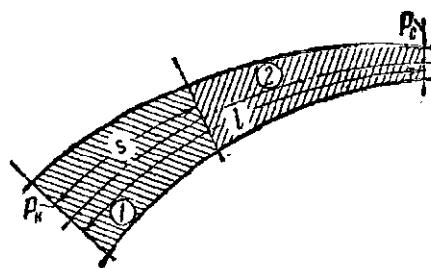
постоянно и равно p_k (контур питания), а в другом, отстоящем от первого на расстоянии $s = l$, занятом вытесняемой жидкостью, также постоянно и равно p_c (скважины).

Предположим, что закон изменения площади f поперечного сечения трубыки по длине известен:

$$f = f(s). \quad (4.4)$$

Пусть первая жидкость занимает в данный момент длину трубыки s , а вторая $l - s$ (фиг. 28). Найдём в этом положении скорость перемещения границы раздела v_{1-2} . Обозначая давление в граничном сечении через p_{1-2} , пористость через m и считая проницаемость k постоянной, согласно (4.2), получим

$$q = fv_{1-2} = fm \frac{ds}{dt} = \frac{k}{\mu_1} \frac{p_k - p_{1-2}}{\int_0^s \frac{ds}{f}} = \frac{k}{\mu_2} \frac{p_{1-2} - p_c}{\int_s^l \frac{ds}{f}}. \quad (4.5)$$



Фиг. 28.

Рассмотрим теперь течение, которое будет в той же трубке, когда она вся будет заполнена только одной жидкостью, на-

пример, второй вытесняемой, при тех же контурных давлениях p_k и p_c . Давление в этом же сечении s обозначим через p_{2-2} , скорость v_{2-2} . Тогда

$$\int v_{2-2} ds = \frac{k}{\mu_2} \int \frac{p_k - p_{2-2}}{f} ds = \frac{k}{\mu_2} \int \frac{p_{2-2} - p_c}{f} ds. \quad (4.6)$$

Подинтегральные функции в (4.5) и (4.6) одинаковы, так как мы условились считать трубку недеформируемой. Тогда, разделив (4.5) на (4.6), найдём

$$\frac{v_{1-2}}{v_{2-2}} = \frac{p_k - p_{1-2}}{\mu_1 (p_k - p_{2-2})} = \frac{p_{1-2} - p_c}{p_{2-2} - p_c},$$

или

$$\frac{v_{1-2}}{v_{2-2}} = \frac{p_k - p_c}{\mu_0 (p_k - p_{2-2}) + (p_{2-2} - p_c)}, \quad (4.7)$$

где

$$\mu_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (4.8)$$

Формула (4.7) является искомой. Она позволяет связать скорость v_{1-2} для двухжидкостной системы со скоростью v_{2-2} одножидкостной.

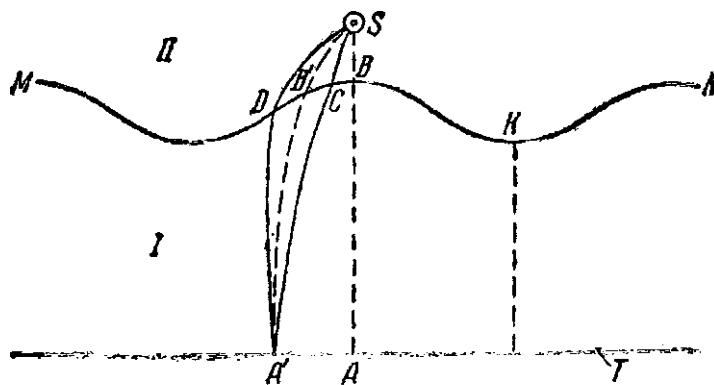
Таким образом, если одножидкостный поток известен, по формуле (4.7) можно найти скорости в любой точке. Отметим, что этот вывод применим и к пространственным потокам. Очевидно, формула (4.7) будет строго верна для прямолинейного и радиального течений, когда деформаций трубок тока вследствие преломления на границе не происходит. Вообще же говоря, формула (4.7) неверна, ибо, как указывалось выше, траектории частиц в одножидкостной и двухжидкостной системах могут быть различными.

В тех случаях, когда существуют траектории, общие для обеих жидкостей, например прямая, из геометрических соображений можно судить, в какую сторону мы делаем ошибку, пользуясь формулой (4.7).

Пусть, например, вытесняемая жидкость под напором вытесняющей поступает к линейной батарее скважин (фиг. 29). Пусть T — контур питания, MN — граница раздела в данный момент, AS — прямолинейная осевая линия тока, проходящая

через какую-либо скважину S . Рассмотрим примерный вид линии тока в обеих областях, проведённой через точку A' , весьма близкую к A . Давления на контурах питания и скважин будем считать неизменным во всех рассматриваемых ниже случаях.

Предположим сначала, что вязкости обеих жидкостей равны, т. е. система одножидкостная. Тогда на границе раздела не будет преломления линий тока и линия тока, проходящая



Фиг. 29.

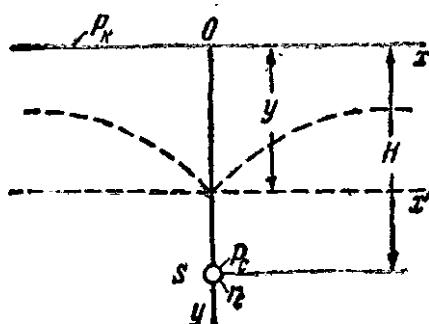
через A' , будет изображаться плавной кривой $A'B'S$. Пусть теперь $\mu_1 \neq \mu_2$; тогда линия тока, проходящая через A' , будет иметь излом на границе раздела. Если $\mu_1 < \mu_2$, то из закона преломления следует, что линия тока будет иметь вид ломаной $A'CS$, т. е. приблизится к прямой AS . Формула (4.7) соответствует условию, что линия $A'B'S$ остается неизменной, чего, как мы видим, в действительности не происходит. Таким образом, во второй зоне при $\mu_1 < \mu_2$ в окрестности прямой AS происходит сгущение линий тока по сравнению с картиной линий тока при $\mu_1 = \mu_2$. Заставляя теперь точку A' стремиться к A , мы приходим к выводу, что скорость точки B границы раздела, лежащей на прямолинейной траектории AS' , в действительности будет несколько больше той величины, которая получится по формуле (4.7), так как сгущение линий тока соответствует увеличению скоростей. Следовательно, эта формула для движения по прямой AS даёт при $\mu_1 < \mu_2$ несколько заниженное значение скорости против действительной.

Рассуждая совершенно аналогичным образом, мы придём к заключению, что при $\mu_1 > \mu_2$ линия тока будет иметь вид $A'DS$ и в этом случае для точки B по формуле (4.7) получится значение скорости, большее действительного. Таким же образом можно показать, что для точки K формула (4.7) будет давать обратные результаты, нежели для точки B , т. е. преувеличенные значения скорости при $\mu_1 < \mu_2$ и преуменьшенные при $\mu_1 > \mu_2$.

Из этих соображений оказывается возможным установить, в какую сторону мы ошибаемся, пользуясь формулой (4.7). Для сопоставления иногда бывает нужно получить заведомо верхний или нижний предел скорости продвижения границы раздела двух жидкостей. Его, мы получим, допустив, что первоначальный граничный контур будет перемещаться без языкообразования со скоростью, равной скорости наиболее быстрой или наиболее медленной частицы. Определение таких частиц обычно может быть сделано без особого труда. При этом, очевидно, дебиты и скорости будут заведомо преувеличены или преуменьшены. Таким образом оказывается возможным установить пределы, между которыми будет находиться

диться истинное движение и истинный срок прорыва вытесняющей жидкости к скважинам.

В качестве примера рассмотрим задачу о сроке обводнения единичной скважины в пласте с прямолинейным контуром питания (фиг. 30), откуда можно будет установить степень точности формулы (4.7).



Фиг. 30.

Из формул (2.12) и (2.73) для давления в любой точке пласта, показанного на фиг. 30 (ось x — контур питания), предполагая, что весь пласт заполнен какой-либо одной жидкостью, например, вытесняемой, получим

$$p_{3-2} = \frac{1}{2} \frac{p_b - p_c}{\ln \frac{2H}{L_0}} \ln \frac{(y - H)^2 + x^2}{(y + H)^2 + x^2} + p_k \quad (4.9)$$

Рассмотрим движение наиболее быстрой частицы, двигающейся по оси y . Давление вдоль оси y найдём, положив в (4.9) $x = 0$. Имеем

$$p_{2-2} = \frac{p_k - p_c}{2H} \ln \frac{(y - H)^2}{(y + H)^2} + p_k$$

или, так как в интересующей нас области $0 < y < H$, то

$$p_{2-2} = \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{2H}{r_c}} \ln \frac{H - y}{H + y} + p_k \quad (4.10)$$

Согласно (4.7), теперь требуется узнать скорость v_{2-2} вдоль оси y . Для неё, учитывая (4.10), получим

$$v_{2-2} = -\frac{k}{\mu_2} \frac{\partial p_{2-2}}{\partial y} = \frac{k}{\mu_2} \frac{2H}{H^2 - y^2} \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{2H}{r_c}}. \quad (4.11)$$

Из (4.10), (4.11) и (4.7) теперь можно найти

$$v_{1-2} = \frac{k}{\mu_2} \frac{p_k - p_c}{H} \varphi \left(\frac{y}{H} \right), \quad (4.12)$$

где

$$\varphi \left(\frac{y}{H} \right) = \frac{2}{\left(1 - \frac{y^2}{H^2} \right) \ln \frac{2H}{r_c}} \frac{1 - \frac{1 - \mu_0}{\ln \frac{2H}{r_c}} \frac{1 + \frac{y}{H}}{1 - \frac{y}{H}}}{1 - \frac{1 - \mu_0}{\ln \frac{2H}{r_c}} \frac{1 + \frac{y}{H}}{1 - \frac{y}{H}}}. \quad (4.13)$$

Обозначим для краткости

$$\frac{y}{H} = \eta; \quad \ln \frac{2H}{r_c} = \dot{a}; \quad (4.14)$$

$$\Delta p = p_k - p_c. \quad (4.15)$$

Тогда

$$v_{1-2} = m \frac{dy}{dt} = \frac{k}{\mu_2} \frac{\Delta p}{H} \varphi \left(\frac{y}{H} \right),$$

откуда

$$t = \frac{m \mu_2 H}{k \Delta p} \int_{y_0}^y \frac{dy}{\varphi \left(\frac{y}{H} \right)}.$$

Заменим здесь интегрирование по y интегрированием по η . Из (4.14) находим

$$t = \frac{m \mu_2 H^2}{k \Delta p} \Psi(\eta), \quad (4.16)$$

где

$$\Psi(\eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{\varphi(\eta)}. \quad (4.17)$$

Рассмотрим далее наиболее простой, но наиболее показательный для сравнения с другим методом расчёта случай, когда $\mu_0 = 0$. При этом из (4.13), (4.14) и (4.17) получим

$$\Psi(\eta) = \frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\eta} a(1 - \eta^2) \left(1 - \frac{1}{a} \ln \frac{1 + \eta}{1 - \eta} \right) d\eta. \quad (4.18)$$

Будем вести расчёт для частицы, которая вначале находилась в точке $x = 0, y = 0$. Тогда в (4.18) $y_0 = 0, \eta_0 = 0$ и

$$\Psi(\eta) = \frac{1}{2} \int_0^{\eta} a(1 - \eta^2) \left(1 - \frac{1}{a} \ln \frac{1 + \eta}{1 - \eta} \right) d\eta. \quad (4.19)$$

Выполнив интеграцию, после всех вычислений и упрощений найдём

$$\begin{aligned} \Psi(\eta) &= \frac{1}{2} \int_0^{\eta} a(1 - \eta^2) \left(1 - \frac{1}{a} \ln \frac{1 + \eta}{1 - \eta} \right) d\eta = \\ &= \frac{1}{2} \left[a\eta \left(1 - \frac{\eta^3}{3} \right) + \left(\frac{\eta^3}{3} - \eta - \frac{2}{3} \right) \ln(1 + \eta) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\eta^3}{3} - \eta + \frac{2}{3} \right) \ln(1 - \eta) + \frac{\eta^3}{3} \right]. \quad (4.20) \end{aligned}$$

К моменту прорыва вытесняющей жидкости в скважину $y = H - r_c$ или, так как обычно r_c очень мало по сравнению с H , то в момент прорыва можно положить

$$\eta = \frac{H - r_c}{H} \approx 1.$$

Тогда для (4.20), после раскрытия неопределённости по правилу Лопитала, получим

$$\Psi(1) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \alpha - \frac{4}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} \right) = \frac{\alpha}{3} - 0,296. \quad (4.21)$$

Таким образом, если скорость v_{1-2} рассчитывать по формуле (4.7), то прорыв вытесняющей жидкости в скважину произойдёт, согласно (4.16) и (4.21), через время

$$t = \frac{m \mu_2 H^2}{k \Delta p} \Psi(1) = \frac{m \mu_2 H^2}{k \Delta p} \left(\frac{\alpha}{3} - 0,296 \right). \quad (4.22)$$

Как выше указывалось, этот срок несколько преувеличен, так как нациа точка движется в действительности быстрее, нежели это получается по формуле (4.7). Найдём теперь нижний предел срока прорыва, для чего предположим, что граница раздела движется всё время параллельно самой себе (ось x' на фиг. 30) со скоростью, равной скорости наиболее быстрой частицы. Попрежнему считаем

$$\mu_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2} = 0.$$

Для характеристики этого движения и отличия его от рассмотренного ранее соответствующие величины будем обозначать штрихом сверху.

Нетрудно видеть, что в этом случае скорость вершины языка можно определить из формулы (4.11) со следующей заменой величин, входящих в (4.11): вместо y в (4.11) следует теперь подставить $y = 0$, а вместо H — разность $H - y$. Тогда, учитывая (4.14), получим

$$v'_{1-2} = \frac{k}{\mu_2} \frac{\Delta p}{\ln \frac{2(H-y)}{2(H-y)}} \frac{2(H-y)}{(H-y)^2} = \frac{k \Delta p}{\mu_2 H (1-\eta)} \frac{2}{[\alpha + \ln(1-\eta)]}. \quad (4.23)$$

Далее имеем

$$v'_{1-2} = m \frac{dy}{dt} = \frac{k \Delta p}{\mu_2 H} \varphi_1(\eta), \quad (4.24)$$

где обозначено

$$\varphi_1(\eta) = \frac{2}{(1-\eta)[\alpha + \ln(1-\eta)]}. \quad (4.25)$$

Из (4.24)

$$t = \frac{m \mu_2 H^2}{k \Delta p} \varphi_1(\eta); \quad (4.26)$$

здесь

$$\Psi_1(\eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{\varphi_1(\eta)} = \frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\eta} (1 - \eta) [a + \ln(1 - \eta)] d\eta. \quad (4.27)$$

Для $\Psi_1(\eta)$, выполняя интеграцию после всех вычислений и упрощений, получим

$$\begin{aligned} \Psi_1(\eta) &= \frac{1}{2} \int_0^{\eta} (1 - \eta) [a + \ln(1 - \eta)] d\eta = \\ &= \frac{1}{2} \left[\eta \left(1 - \frac{\eta}{2} \right) \left(a - \frac{1}{2} \right) - \frac{(1 - \eta)^2}{2} \ln(1 - \eta) \right]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Прорыв вытесняющей жидкости в скважину получится при $\eta = 1$. Из (4.26) и (4.28) после раскрытия неопределённости найдём

$$t_1 = \frac{m \mu_2 H^2}{k \Delta p} \Psi_1(1) = \frac{m \mu_2 H^2}{k \Delta p} \left(\frac{a}{4} - \frac{1}{8} \right). \quad (4.29)$$

Таким образом, верхний предел срока прорыва вытесняющей жидкости в скважину определяется формулой (4.22), нижний — формулой (4.29).

Для сравнения ниже приводится таблица значений отношения $\frac{t_1}{t}$, вычисленных по формулам (4.22) и (4.29) для трёх значений:

Таблица 1

$\frac{H}{r_c}$	a	$\frac{t_1}{t}$
100	5,3	0,82
1000	7,6	0,795
10000	9,9	0,785

Из этой таблицы видно, что для практических значений $\frac{H}{r_c}$ расхождение между оценками достигает около 20%. Несомненно, конечно, что расчёт по формуле (4.7) должен быть ближе к истине, нежели расчёт по второму способу — гипотезы о поступательном перемещении границы раздела. Таким образом, расчёты

сроков прорыва можно производить по формуле (4.7) и изменять получающиеся при этом результаты на 10% в требуемую сторону.

Можно полагать на основании вышеприведённого сопоставления, что ошибка не будет превосходить 10%. Такая точность должна быть признана в подобных расчётах удовлетворительной, так как большинство физических констант и прочих параметров пласта обычно известны не с большей точностью.

§ 18. Продвижение границы раздела двух жидкостей при напорном режиме в пласте переменной мощности и проницаемости

В некоторых случаях продуктивная мощность и проницаемость пластов являются переменными. Это обстоятельство отражается на продвижении границы раздела двух жидкостей с различными физическими свойствами, из которых одна вытесняет другую.

Рассматриваемая здесь задача является задачей теории неравномерного течения грунтовых потоков, в которой, как и в обычной теории одноразмерного неравномерного, медленно изменяющегося течения, принимается допущение о равномерном распределении скоростей в поперечных сечениях. Пусть сечение пласта f есть функция его длины s . Изображением схемы течения может служить трубка переменного сечения, показанная на фиг. 28. На контуре питания со стороны вытесняющей жидкости считается известным давление p_h , в сечении $s = l$, проведённом в части пласта, занятой вытесняющей жидкостью, известно давление p_c . Тогда для скорости продвижения границы раздела $\frac{ds}{dt}$ из (4.5) и (4.15) получим

$$q = fm \frac{ds}{dt} = - \frac{p_h - p_c}{\mu_1 \int_0^s \frac{ds}{kf} + \mu_2 \int_s^l \frac{ds}{kf}} \quad (4.30)$$

или

$$m \frac{ds}{dt} = \frac{\Delta p}{f} - \frac{1}{\mu_1 \int_0^s \frac{ds}{kf} + \mu_2 \int_s^l \frac{ds}{kf}} \quad (4.31)$$

Знаменатель формулы (4.31) можно назвать фильтрационным сопротивлением. Оно, очевидно, также есть функция

длины s . Обозначим его через

$$R(s) = f \left(\mu_1 \int_0^s \frac{ds}{kf} + \mu_2 \int_s^l \frac{ds}{kf} \right). \quad (4.32)$$

Тогда

$$m \frac{ds}{dt} = \frac{\Delta p}{R(s)}. \quad (4.33)$$

Если $\Delta p = \text{const}$, то

$$t = \frac{m}{\Delta p} \int_{s_0}^s R(s) ds, \quad (4.34)$$

где s_0 — начальное положение границы раздела. Формула (4.34) является искомой. Из неё, в частности, легко получаются случаи прямолинейного движения ($f = \text{const}$) и радиального движения ($f = as + b$). Если Δp есть не постоянная, а заданная функция времени, то из (4.33) получим:

$$\int_0^t \Delta p dt = m \int_{s_0}^s R(s) ds. \quad (4.35)$$

Формула (4.35) даёт в этом случае связь между s и t в неявном виде.

В следующем параграфе и главе V эта модель пласта, как трубы тока переменного сечения, используется для решения некоторых практических задач.

§ 19. Об одном способе оценки промышленных запасов нефтяных месторождений¹⁾

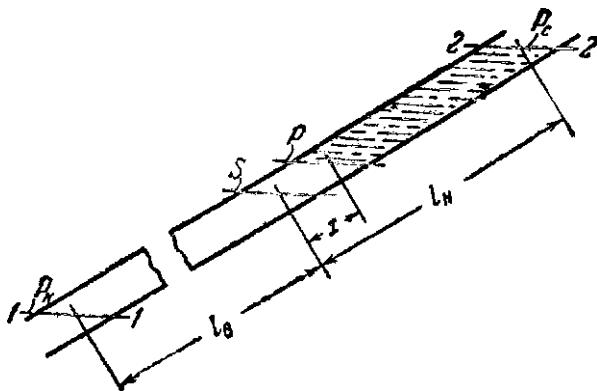
Для оценки промышленных запасов нефтяных месторождений может быть использована связь между текущим дебитом всего месторождения в данный момент и суммарным количеством извлечённой жидкости, начиная с некоторой даты до данного момента времени. Эта связь, устанавливаемая на основе элементарных гидромеханических соображе-

1) Чарный И. А., Об одном способе оценки промышленных запасов нефтяных месторождений. Известия ОТН АН СССР, № 11—12, 1943 г.

ний, может служить также характеристикой режима месторождения.

Следует отметить, что в эту характеристику не входят явно пластовые давления. Кстати, понятие «пластовое давление» нуждается в значительном уточнении. То, что подразумевается под этим термином, в настоящее время является по сути дела пьезометрической высотой в данной точке пласта и зависит от интерференции скважин.

Отнюдь не отказываясь, однако, от использования и этого определения, как несомненно полезного даже при всей его нечёткости, мы считали целесообразным наметить путь исполь-



Фиг. 31.

зования других данных, легче фиксируемых. В первую очередь такими данными являются текущий дебит в данный момент и количество жидкости, извлечённое из пласта, начиная с некоторой даты до данного момента времени.

Представим себе такой пласт в виде трубы с площадью поперечного сечения f , заполненной пористой средой (фиг. 31). Допустим, что часть трубы длиной l_n сначала была заполнена нефтью, другая часть l_b — водой. Предположим, что в сечении 1—1 на контуре питания со стороны воды задано давление p_b , а в сечении 2—2 давление p_c , создаваемое в скважинах. Обозначим вязкости нефти и воды через μ_n и μ_b , проницаемость — k , пористость — m и предположим, что через время t контур нефтеносности пройдёт расстояние x и давление на поверхности раздела воды и нефти будет p .

Тогда, исходя из закона Дарси, можно получить для дебита q , воды или нефти, следующее уравнение:

$$q = \frac{k f p_k - p}{\mu_b l_b + x} = \frac{k f}{\mu_h} \frac{p - p_c}{l_h - x}, \quad (4.36)$$

откуда

$$p = p_k - \frac{q \mu_b}{k f} (l_b + x) = p_c + \frac{q \mu_h}{k f} (l_h - x). \quad (4.37)$$

Из уравнений (4.36) следует также

$$p_k - p_c = \frac{q}{k f} [\mu_b l_b + \mu_h l_h - (\mu_h - \mu_b) x]. \quad (4.38)$$

Расстояние x находится из уравнения (4.38) и выражается формулой

$$x = \frac{\mu_b l_b + \mu_h l_h}{\mu_h - \mu_b} - \frac{(p_k - p_c) k f}{(\mu_h - \mu_b) q}. \quad (4.39)$$

Далее, нетрудно установить зависимость между величиной x и количеством жидкости Q , извлечённой из пласта с начала отсчёта по данный момент времени. Очевидно,

$$Q = m f x \quad (4.40)$$

и

$$x = \frac{Q}{m f}. \quad (4.41)$$

Таким образом, согласно (4.39):

$$Q = \frac{m f (\mu_b l_b + \mu_h l_h)}{\mu_h - \mu_b} - \frac{m k f^2 (p_k - p_c)}{(\mu_h - \mu_b) q}. \quad (4.42)$$

Рассмотрим два наиболее интересных случая.

1. Водонапорный режим с постоянным давлением p_k на контуре питания. Предположим, что разность $p_k - p_c$ остаётся постоянной в течение всего времени эксплуатации пласта или меняется весьма мало. Тогда зависимость $Q = Q \left(\frac{1}{q} \right)$, согласно уравнению (4.42), можно графически изобразить в виде прямой линии AB (фиг. 32). Этот график можно построить на основе данных отчёта про мысла о добыче жидкости.

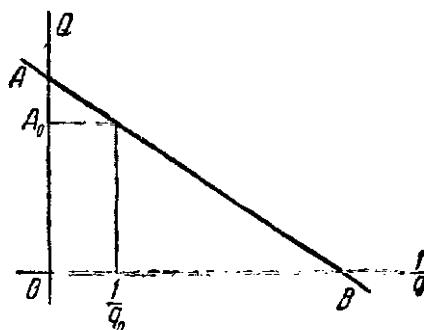
Значения углового коэффициента прямой AB и отрезка OA , отсекаемого ею на оси ординат, легко установить из уравнения (4.42). Остановимся более подробно на значениях от-

резка OA , отсекаемого прямой AB на оси ординат. Как видно из графика, он отвечает нереальному случаю $\frac{1}{q} = 0$, или $q = \infty$, т. е. бесконечно большому дебиту. Значит, во всяком случае, отрезок OA будет больше того количества жидкости, которое может быть отобрано из пласта. Иначе, промышленный запас на начальную дату, от которой начали отсчитывать добычу, будет меньше отрезка OA . Отрезок OA , таким образом, даёт верхний предел возможной величины промышленного запаса месторождения на начало отсчёта добычи. Уточнить эту величину запаса можно следующим образом: очевидно, по мере увеличения расстояния x текущий дебит q жидкости будет всё время увеличиваться, если

разность давлений $p_k - p_c$ поддерживается постоянной. Значение Q_0 , отвечающее дебиту q_0 чистой воды, очевидно, и будет искомой величиной промышленного запаса месторождения. Дебит же q_0 в ряде случаев может быть оценён косвенным образом, по проценту воды, или более прямым образом, если известны дебиты воды законтурных скважин. Величина отрезка $OA_0 = Q_0$, соответствующая значению $\frac{1}{q_0}$, и будет уточнённой величиной промышленного запаса.

2. Водонапорный режим с уменьшающимся давлением p_k на контуре питания. Давление p_k на контуре питания может падать или в случае водонапорного режима, когда приток воды в бассейн, подпирающий нефтяной пласт, будет меньше отбора жидкости из пласта или же, когда наряду с водой одной из движущих сил, заставляющих нефть притекать к скважинам, является газ, давление которого будет падать по мере отбора жидкости.

Конечно, задача в этом случае значительно усложняется и наши дальнейшие рассуждения следует рассматривать только как довольно грубую схему.



Фиг. 32.

Предположим, что разность $p_k - p_c$ изменяется вместе с величиной отбора жидкости из пласта по закону

$$p_k - p_c = \Delta p_0 - \xi Q. \quad (4.43)$$

Коэффициент ξ , таким образом, связывает темп падения располагаемого напора с отбором жидкости Q ; его размерность $[\xi] = \frac{m}{\mu^3}$. Тогда в уравнении (4.42) угловой коэффициент будет переменным и график этой зависимости уже не будет изображаться прямой линией.

Для этого случая, вместо (4.42), получаем

$$Q = \frac{mf(\mu_B l_B + \mu_H l_H)}{\mu_H - \mu_B} - \frac{mkf^2(\Delta p_0 - \xi Q)}{(\mu_H - \mu_B) q},$$

откуда

$$Q = \frac{1}{1 - \frac{mkf^2\xi}{(\mu_H - \mu_B) q}} \left[\frac{mf(\mu_B l_B + \mu_H l_H)}{\mu_H - \mu_B} - \frac{mkf^2 \Delta p_0}{(\mu_H - \mu_B) q} \right]. \quad (4.44)$$

Обозначая

$$\frac{mf(\mu_B l_B + \mu_H l_H)}{\mu_H - \mu_B} = \alpha; \quad \frac{mkf^2 \Delta p_0}{(\mu_H - \mu_B) q} = \beta; \quad \frac{mkf^2 \xi}{\mu_H - \mu_B} = \gamma, \quad (4.45)$$

запишем уравнение (4.44) в виде

$$Q = \frac{\alpha - \frac{\beta}{q}}{1 - \frac{\gamma}{q}}. \quad (4.46)$$

В зависимости от соотношений, в каких находятся друг с другом величины $\frac{\alpha}{\beta}$ и $\frac{1}{\gamma}$, график уравнения (4.46) будет иметь тот или иной вид.

Заметим, что из уравнений (4.45) следует также

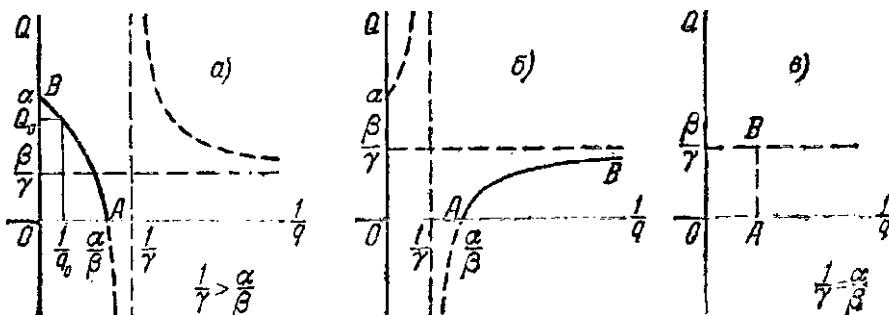
$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mu_B l_B + \mu_H l_H}{k f \Delta p_0}; \quad \frac{1}{\gamma} = \frac{\mu_H - \mu_B}{m k f^2 \xi}. \quad (4.47)$$

В связи с этим рассмотрим три возможных случая.

1) $\frac{1}{\gamma} > \frac{\alpha}{\beta}$, или

$$\frac{\Delta p_0}{\xi} > \frac{(\mu_B l_B + \mu_H l_H) f}{\mu_H - \mu_B}. \quad (4.48)$$

График уравнения (4.46) для $\frac{1}{q} > 0$ показан на фиг. 33, а. Реальным условиям отвечает часть графика, являющаяся кривой AB . Очевидно, в этом случае текущий дебит q будет с течением времени возрастать, но отбор будет расти медленнее, чем в случае $p_k - p_c = \text{const}$. Располагая отчетами промысла о добыче, можно обработать экспериментальные точки $Q = Q\left(\frac{1}{q}\right)$ по уравнению (4.46) способом наименьших квадратов и, таким образом, определить параметры α , β и γ .



Фиг. 33.

После этого, нанося эту кривую на график и определив дебит q_0 , соответствующий чистой воде, можно аналогично предыдущему оценить запас Q_0 .

2) $\frac{1}{\gamma} < \frac{\alpha}{\beta}$, или

$$\frac{\Delta p_0}{\xi} < \frac{(\mu_n l_n + \mu_w l_w) f}{\mu_n - \mu_w} . \quad (4.49)$$

График уравнения (4.46) для этого случая при $\frac{1}{q} > 0$ показан на фиг. 33, б. Реальным условиям отвечает часть графика — кривая AB . Очевидно, дебит здесь будет падать с ростом времени, а отбор асимптотически приближаться к значению $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\Delta p_0}{\xi}$. Это значение $\frac{\Delta p_0}{\xi}$, как и должно быть из уравнения (4.43), даёт максимальную величину отбора, которая может быть получена за счёт естественной энергии подземного резервуара. Оставшееся количество нефти должно быть извлечено вторичными методами эксплуатации и

рассматриваемыми в настоящей работе методами не может быть оценено. Обрабатывая данные промысла $Q = Q\left(\frac{1}{q}\right)$, по уравнению (4.46) способом наименьших квадратов находим сначала параметры α , β и γ , а затем ту часть запаса, которая может быть извлечена за счёт естественной энергии пласта, по уравнению

$$Q = \frac{\beta}{\gamma}. \quad (4.50)$$

3) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\gamma}$, или

$$\frac{\Delta p_0}{\xi} = \frac{(\mu_B l_B + \mu_H l_H) f}{\mu_H - \mu_B}. \quad (4.51)$$

Уравнение (4.46) соответствует здесь случаю $q = \text{const}$ (дебит жидкости остаётся всё время постоянным). Зависимость $Q = Q\left(\frac{1}{q}\right)$ в этом случае представится графически отрезком вертикальной прямой AB (фиг. 33, в) и, само собой разумеется, что отсюда параметры α , β и γ не смогут быть определены. Для оценки запаса в этом случае придётся пользоваться другими методами.

Неизбежная схематизация задачи и отступление действительных данных от теоретических вызовут естественный разброс точек на графике зависимости $Q = Q\left(\frac{1}{q}\right)$. Однако характер их расположения будет приближаться к одной из четырёх кривых, показанных на фиг. 32, 33, т. е. будет отвечать зависимостям, определяемым уравнениями (4.42) или (4.46). Определяя с помощью способа наименьших квадратов постоянные параметры, входящие в эти уравнения, можно уточнить сведения о режиме месторождения и оценить указанным выше образом промышленный запас.

Один из нефтяных пластов, хорошо в настоящее время изученный, является типичным месторождением с водонапорным режимом, когда контурное давление p_k остаётся неизменным. Воспользуемся данными о добыче этого месторождения для проверки теории.

В таблице 2 приведены годовые дебиты жидкости q , т. е. сумма годовых дебитов нефти, воды и эмульсии. Пластовые давления менялись незначительно.

Таблица 2

Год	1933	1934	1935	1936
Дебит $10^{-6}q \text{ м}^3/\text{год}$	0,776588	0,809448	0,714345	1,160174
Процент воды	25,2	34,2	43,2	55,3
$10^{-6}Q \text{ м}^3$ $10^6/q \text{ год/м}^3$	0,776588 1,29	1,586031 1,24	2,300376 1,4	3,460550 0,86
Год	1937	1938	1939	1940
Дебит $10^{-6}q \text{ м}^3/\text{год}$	0,947932	1,247748	1,452823	1,518554
Процент воды	75,3	85,4	91,2	93,1
$10^{-6}Q \text{ м}^3$ $10^6/q \text{ год/м}^3$	4,408532 1,08	5,656280 0,80	7,109103 0,69	8,637657 0,66

На основании этих данных легко определить зависимость $Q = Q\left(\frac{1}{q}\right)$, где Q — отбор жидкости, а $\frac{1}{q}$ — величина, обратная годовому дебиту. Результаты подсчёта приведены в той же таблице (две нижние строки).

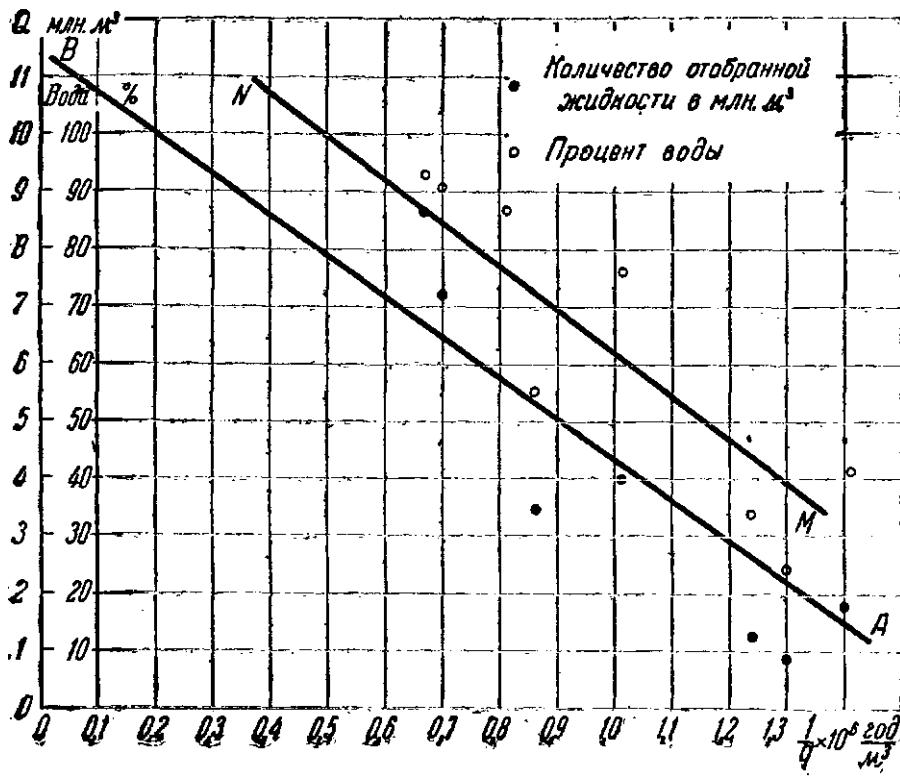
Зависимость $Q = Q\left(\frac{1}{q}\right)$ по данным таблицы 2 показана на фиг. 34. Из этой зависимости видно, что точки с некоторым разбросом располагаются примерно по схеме фиг. 32. Таким образом, отсюда можно заключить, что режим пласта приближается к водонапорному с постоянным контурным давлением p_k на контуре питания.

Апроксимируя зависимость $Q = Q\left(\frac{1}{q}\right)$ из таблицы 2 уравнением $Q = a - \frac{b}{q}$ и определяя обычным образом по способу наименьших квадратов параметры a и b , получим

после подсчётов: $a = 11,4$; $b = 7,18$, т. е.

$$Q = 11,4 - \frac{7,18}{q}. \quad (4.52)$$

Прямая AB , соответствующая этому уравнению, показана на фиг. 34. Отсюда следует, что величина $Q = 11,4$ млн. m^3



Фиг. 34.

является верхним пределом промышленного запаса на 1933 год.

Для уточнения этой величины можно использовать данные о процентном содержании воды, имеющиеся в таблице. Необходимо указать, что данные о проценте воды не позволяют, в общем случае, найти дебит месторождения для чистой воды, так как здесь результат может сильно зависеть от того, в какой части пласта сгруппирована главная масса отдающих скважин, в своде или на крыльях. Кроме того,

эффект водяного конуса также затушёвывает эту картину. Но в данном случае налицо неуклонный рост процента воды с 25,2 до 93,1%. Таким образом связь между процентом воды и дебитом в данном случае несомненно имеется, причём, чтобы установить q_0 , соответствующее 100% воды, придётся экстраполировать сравнительно близко — от 93,1 до 100%. Точки, выраждающие зависимость процента воды от $\frac{1}{q}$, также показаны на фиг. 34. Аппроксимируя зависимость процента воды от $\frac{1}{q}$, как линейную, после подсчётов получим

$$y = 144,6 - \frac{81,8}{q}, \quad (4.53)$$

где y — процент воды.

Прямая MN , выражающая уравнение (4.53), показана на фиг. 34, откуда видно, что при $y = 100\%$, $\frac{1}{q} = 0,5 \cdot 10^{-6}$, чему соответствует $Q_0 = 7,7$ млн. m^3 . Эта величина $Q_0 = 7,7$ млн. m^3 и будет в нашем случае уточнённым значением промышленного запаса пласта на начало 1933 года.

Сопоставление полученных нами результатов о величине запаса пласта к началу его эксплоатации с результатами, полученными М. А. Ждановым другим методом, указывает на незначительное расхождение. По нашим данным, запас на 1916 г. к началу эксплоатации выразился величиной $Q = 11,3 + 7,7 = 19$ млн. m^3 (где 11,3 млн. m^3 — добыча нефти с 1916 по 1933 гг.); М. А. Жданов определил этот же запас в размере 18,082 млн. m^3 .

ГЛАВА V

ЗАДАЧА О НАИВЫГОДНЕЙШЕЙ РАССТАНОВКЕ РЯДОВ СКВАЖИН В НЕФТЯНЫХ ПЛАСТАХ С НАПОРНЫМ РЕЖИМОМ¹⁾

§ 20. Общие замечания о наивыгоднейших схемах размещения скважин

Вопрос о рациональной расстановке скважин является одним из важнейших и сложнейших в эксплоатации нефтяных и газовых месторождений, и его правильное решение может быть произведено только с учётом всех конкретных геолого-промышленных особенностей каждого месторождения, намеченного к эксплоатации после тщательного изучения. Одним из решающих факторов в решении этой проблемы, особенно в условиях нашего планового хозяйства, является экономика.

Выбор оптимальной системы разработки может быть действительно обоснованным в настоящем время только после большой комплексной работы коллектива, состоящего из инженеров-эксплоатационников, геологов, гидромехаников, математиков и экономистов.

Следует отметить исследования В. Н. Щелкачева об оптимальном числе скважин в месторождении, приуроченном к данной геологической структуре²⁾.

1) Чарный И. А., О наивыгоднейшей расстановке рядов скважин в нефтяных пластах с водонапорным режимом. Известия ОТН АН СССР, № 1—2, 1945 г.

2) См. сноску 2 на стр. 31.

Мы предполагаем, что рассматриваемая часть месторождений состоит из пластов, физические и геологические параметры которых — пористость, проницаемость — могут быть усреднены и эти участки, таким образом, могут рассматриваться как однородные. В общей постановке задача может быть сформулирована следующим образом: требуется заданное число скважин разместить и эксплуатировать так, чтобы по окончании разработки площадь целиков была бы возможно меньше, а вся поддающаяся извлечению нефть была бы изъята из пласта в кратчайшее время. В отдельных случаях, конечно, могут иметь место другие требования и условия, но мы здесь будем исходить из сформулированного выше.

Исходя из этого требования, скважины следует расставлять так, чтобы первоначальный контур нефтеносности стягивался по возможности равномерно. При этом условии скважины окажутся расставленными вдоль некоторых линий, подобных или почти подобных первоначальному контуру нефтеносности.

Мы можем теперь вообразить, что эти линии заменены дренажными галлереями, в которых поддерживается то же противодавление, что и в скважинах, и искать теперь положение этих галлерей при заранее заданном их числе из условия, что контур нефтеносности должен стягиваться в кратчайшее время. Таким образом, мы сведём задачу о размещении скважин к определению положения заданного числа линий, вдоль которых скважины будут расставлены, причём эти линии будем считать в наших расчётах галлереями. Действительную линию со скважинами будем называть батареей.

Расстояние между скважинами в батарее мы не будем уточнять, так как его определение и выбор могут быть сделаны только комплексным путём, с учётом всех технико-экономических соображений. Мы здесь только укажем общее решение задачи о размещении линий — галлерей, при котором время эксплуатации минимальное.

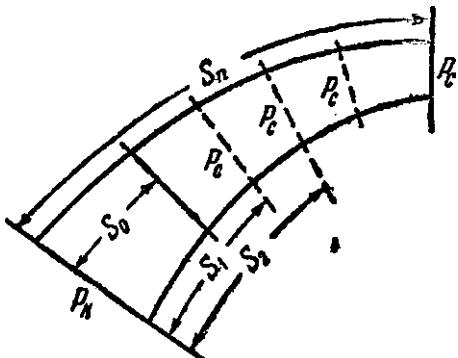
Перед автором было поставлено несколько задач о наивыгоднейшей расстановке галлерей при водонапорном режиме на реальных объектах. Фильтрационные потоки в этих объектах отличались друг от друга, и для каждого объекта в отдельности приходилось решать свою собственную задачу

о наивыгоднейшей расстановке галлерей, что было сопряжено с довольно длинными и сложными вычислениями. Впоследствии оказалось, что эти решения могут быть получены как частные случаи более общего, которое приводится ниже.

§ 21. Расстановка галлерей в нефтяном пласте переменной мощности и проницаемости при водонапорном режиме, при которой время извлечения нефти минимальное

Будем исходить из модели пласта, как трубы переменного сечения (фиг. 35).

Пусть требуется извлечь в минимальное время нефть из пласта при помощи n галлерей. На контуре питания со стороны воды давление постоянное, равное p_k , а в галлереях — давление p_c . Таким образом, приток происходит при депрессии $\Delta p = p_k - p_c$. Для общности примем, что мощность пласта и проницаемость переменны. Определению подлежат местоположения галлерей. Примем также заданными границы первоначального контура нефтеносности s_0 и s_n и будем искать расстояния



Фиг. 35.

s_1, s_2, \dots, s_{n-1} остальных галлерей от контура питания. При этом будем считать здесь справедливой гипотезу о равномерном распределении скоростей в живых сечениях потока.

Предположим, что вода дошла до $i-1$ галлерей ($i = 1, 2, \dots, n-1$) и вытесняет нефть к i -ой галлерее.

Тогда, согласно формуле (4.34) для промежутка времени $t_{i-1, i}$, в течение которого нефть будет извлечена из участка пласта между $i-1$ -ой и i -ой галлереями, получим

$$t_{i-1, i} = \frac{m}{\Delta p} \int_{s_{i-1}}^{s_i} R(s) ds; \quad (5.1)$$

здесь $R(s)$ определяется формулой (4.32).

Далее, считая m и Δp постоянными и суммируя (5.1), найдём общее время эксплуатации пласта

$$t_{0-n} = \frac{m}{\Delta p} \sum_{i=1}^n \int_{s_{i-1}}^{s_i} R(s) ds = = \frac{m}{\Delta p} \sum_{i=1}^n \int_{s_{i-1}}^{s_i} f \left(\mu_b \int_0^s \frac{ds}{k_f} + \mu_n \int_s^{s_i} \frac{ds}{k_f} \right) ds, \quad (5.2)$$

где f — площадь передвигающейся границы раздела воды и нефти.

Чтобы найти все s_i , при которых t_{0-n} будет минимальным, нужно приравнять нулю частные производные $\frac{\partial t_{0-n}}{\partial s_i}$. При этом необходимо учесть, что s_i в уравнении (5.2) являются также параметрами и при вычислении производных нужно воспользоваться известной формулой дифференцирования определённого интеграла по параметру

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \int_{z_1(a)}^{z_2(a)} f(x, a) dx &= \\ &= \int_{z_1(a)}^{z_2(a)} \frac{\partial f(x, a)}{\partial a} dx + f(z_2, a) \frac{dz_2}{da} - f(z_1, a) \frac{dz_1}{da}. \end{aligned}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{0-n}}{\partial s_i} &= \\ &= \frac{m}{\Delta p} \left[\int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{f_i \mu_n}{k_f f_i} ds + f_i \mu_b \int_0^{s_i} \frac{ds}{k_f} - f_i \left(\mu_b \int_0^{s_i} \frac{ds}{k_f} + \mu_n \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{ds}{k_f} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

или, раскрывая скобки и сокращая,

$$\frac{1}{k_f f_i} \int_{s_{i-1}}^{s_i} f ds - f_i \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{ds}{k_f} = 0. \quad (5.3)$$

Эта формула является искомой. Она даёт рекуррентную связь между тремя последовательными значениями s_{i-1} , s_i и s_{i+1} ,

откуда все s_i могут быть определены. В общем случае это определение приходится производить при помощи последовательных приближений следующим образом. Перепишем (5.3) в виде

$$\Phi(s_{i-1}, s_i, s_{i+1}) = 0. \quad (5.4)$$

Задаёмся сначала каким-нибудь первым приближением для значения s_i . Обозначим его через $(s_i)_1$. Тогда, так как s_0 известно, из (5.4) можно найти $(s_2)_1$; далее, так как $(s_1)_1$, $(s_2)_1$ известны, из (5.4) можно найти $(s_3)_1$ и т. д. до тех пор, пока не найдём $(s_n)_1$, которое, вероятно, будет отличаться от заранее заданного s_n . Тогда несколько изменяем $(s_i)_1$ и заменяем теперь его вторым приближением $(s_i)_2$, после чего весь расчёт повторяется. Три-четыре приближения должны давать хорошие результаты. Для ускорения и облегчения расчётов рекомендуется пользоваться графиком отношения

$$\frac{s_{i+1}}{s_{i-1}} = \varphi \left(\frac{s_i}{s_{i-1}} \right),$$

который можно построить, если (5.4) известно.

Из формулы (5.3) следует один вывод большей практической важности: наивыгоднейшие местоположения галлерей не зависят от вязкости воды и нефти и, следовательно, от расстояния до контура питания.

Рассмотрим теперь несколько частных случаев, для которых проницаемость k будем считать постоянной по пласту. При $k = \text{const}$ вместо (5.3) имеем

$$\frac{1}{f_i} \int_{s_{i-1}}^{s_i} f ds - f_i \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{ds}{f} = 0. \quad (5.5)$$

1. $f = \text{const}$. Из (5.5) сразу получаем

$$s_i - s_{i-1} = s_{i+1} - s_i, \quad (5.6)$$

т. е. расстояния между рядами скважин должны быть одинаковыми.

2. $f = as$. Этот случай имеет место при радиальном течении. Из (5.5) находим

$$\frac{s_i^2 - s_{i-1}^2}{2s_i} = s_i \ln \frac{s_{i+1}}{s_i}. \quad (5.7)$$

3. $f = as^2$, $x \neq 1$. Из (5.5) имеем

$$\frac{s_i^{x+1} - s_{i-1}^{x+1}}{(x+1)s_i^x} - s_i^x \frac{s_i^1 - 1 - s_{i-1}^1 - 1}{1-x} = 0,$$

откуда

$$\frac{2s_i}{1-x^2} - \frac{s_i^x + 1}{(1+x)s_i^x} - \frac{s_i^x s_{i-1}^1}{1-x} = 0. \quad (5.8)$$

§ 22. Случай переменных пористости и депрессии

Выше мы считали, что $\Delta p = \text{const}$ и $m = \text{const}$. Если обе эти величины переменны, причём всё время $\Delta p > 0$, наивыгоднейшие расстояния s_i , при которых t_{0-n} будет минимальным, можно определить из следующих рассуждений: если $\Delta p > 0$, то s_i , при которых будет минимум t_{0-n} , одновременно обусловят минимум интеграла

$$I = \int_0^{t_{0-n}} \Delta p \, dt.$$

Считая m переменным и учитывая зависимость (4.35), вместо (5.2) получим

$$I = \int_0^{t_{0-n}} \Delta p dt = \sum_{i=1}^n \int_{s_{i-1}}^{s_i} mf \left(\mu_a \int_0^s \frac{ds}{kf} + \mu_n \int_s^{s_i} \frac{ds}{kf} \right) ds.$$

Приравнивая далее нулю $\frac{\partial I}{\partial s_i}$, найдём соотношение между s_{i-1} , s_i , s_{i+1} более общее, нежели (5.3). Будем иметь

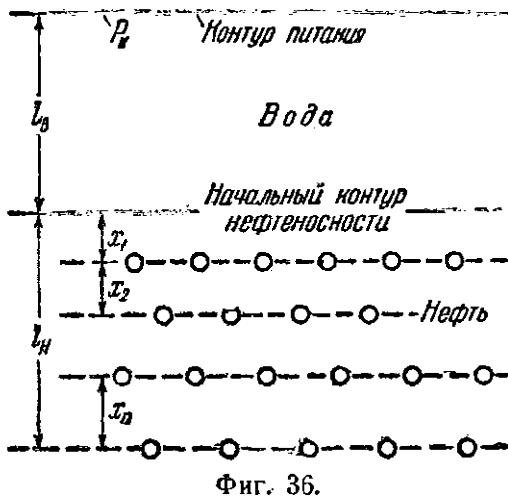
$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial s_i} = & \int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{mf \mu_n}{(kf)_i} ds + (mf)_i \mu_a \int_0^{s_i} \frac{ds}{kf} - \\ & - (mf)_i \left(\mu_a \int_0^{s_i} \frac{ds}{kf} + \mu_n \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{ds}{kf} \right) = 0 \end{aligned}$$

или

$$\frac{1}{(kf)_i} \int_{s_{i-1}}^{s_i} mfds - (mf)_i \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{ds}{kf} = 0. \quad (5.9)$$

§ 23. Размещение галлерей при прямолинейном равномерном течении

С такой задачей приходится встречаться при размещении скважин в полосообразной залежи при $f = \text{const}$. Пусть (фиг. 36) l_b — расстояние между контуром питания и началь-



размещением галлерей будет расстановка их на равных интервалах друг от друга

ным положением контура нефтеносности. Определим расстояния x_1, x_2, \dots между n галлереями с противодавлениями p_c таким образом, чтобы время эксплуатации нефтяного пласта длиной l_n было минимальным. Мы здесь должны исходить из формул (4.32) и (4.34).

Из уравнения (5.6) следует, что в этом случае оптимальным

$$x_i = \frac{l}{n} \cdot$$

Имея в виду формулу (4.34), после простых вычислений получим

$$t_{0-1} = \frac{m}{k\Delta p} \left[\mu_B l_B \frac{l_B}{n} + \frac{\mu_B + \mu_H}{2} \left(\frac{l_B}{n} \right)^2 \right],$$

$$t_{1-2} = \frac{m}{k\Delta p} \left[\mu_B \left(l_B + \frac{l_H}{n} \right) \frac{l_H}{n} + \frac{\mu_B + \mu_H}{2} \left(\frac{l_H}{n} \right)^2 \right],$$

$$t_{n-1, n} = \frac{m}{k \Delta p} \left\{ \mu_B \left[l_B + \frac{(n-1)l_H}{n} \right] \frac{l_H}{n} + \frac{\mu_B + \mu_B}{2} \left(\frac{l_H}{n} \right)^2 \right\}.$$

Суммируя, находим

$$t_{0-n} = \frac{m}{k\Delta p} \left\{ \mu_B \frac{l_h}{n} \left[nl_B + \frac{1+n-1}{2} (n-1) \frac{l_h}{n} \right] + \right. \\ \left. + n \frac{\mu_B + \mu_H}{2} \left(\frac{l_h}{n} \right)^2 \right\} = \\ = \frac{m\mu_H l_h^2}{k\Delta p} \left[\frac{\mu_B}{\mu_H} \left(\frac{l_h}{l_B} + \frac{n-1}{2n} \right) + \frac{1}{2n} \left(1 + \frac{\mu_B}{\mu_H} \right) \right]. \quad (5.10)$$

Полученная формула показывает нерациональность очень большого числа галлерей: обычно, начиная с некоторого весьма малого числа n , уменьшение срока эксплоатации месторождения идет весьма незначительно.

Минимально возможный срок будет при $n = \infty$:

$$t_{0-\infty} = \frac{m\mu_H^2}{k\Delta p} \left[\frac{\mu_B}{\mu_H} \left(\frac{l_B}{l_h} + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (5.11)$$

При обычных довольно больших значениях отношений $\frac{l_h}{l_B}$ формулы (5.10) и (5.11) мало отличаются друг от друга при $n \geq 4$. Таким образом, вовсе не следует думать, что неограниченное возрастание числа галлерей является разумным и целесообразным, так как, начиная с некоторого числа их, уменьшение срока эксплоатации становится весьма незначительным. То же, вообще говоря, относится и к другим формам пластов. Этот вывод не является, впрочем, неожиданным, так как вытекает из самой природы интерференции скважин.

ГЛАВА VI

УПРУГИЙ РЕЖИМ ФИЛЬТРАЦИИ

§ 24. Влияние сжимаемости жидкости в пласте на её приток к скважинам

Учёт сжимаемости является целесообразным в случае, когда в пласте находится большая масса жидкости, первоначально находившейся под значительным давлением. Например, для некоторых нефтяных месторождений упругость краевой воды играет огромную роль.

При изучении некоторых гидромеханических параметров пласта этот учёт также может оказаться полезным.

Классическим примером нефтяного месторождения, где упругость краевой воды является движущей силой нефтяного резервуара, является месторождение East Texas в Северной Америке.

Прежде чем перейти к краткой характеристике этого месторождения, рассмотрим сначала с чисто физической стороны, в чём может проявиться эффект сжимаемости. Пусть движущей силой резервуара является напор краевой воды, а наблюдения показывают, что дебиты скважин уменьшаются с течением времени при почти неизменном пластовом давлении. В этом случае естественно заключить, что падение дебита объясняется сжимаемостью краевой воды, проявляющейся в том, что расстояние до контура питания со стороны воды является как бы переменным и увеличивающимся.

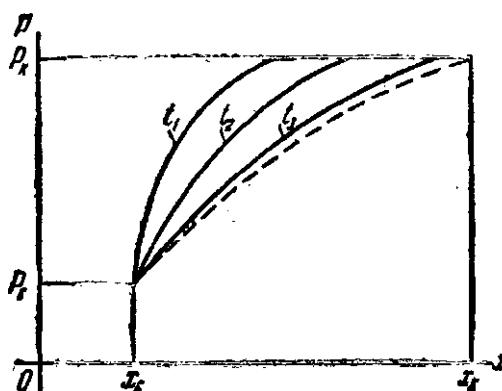
На фиг. 37 x_c представляет собой радиус нефтяного резервуара с пластовым (точнее, водораздельным) давлением p_c , x_k — расстояние до истинного контура питания со стороны воды, где давление всё время постоянно и равно p_k . Кривые с индексами t_1 , t_2 , t_3 представляют собой распределение

ние давления в водяной части в последовательные моменты t_1 , t_2 , t_3 . Пунктиром обозначена кривая, которая имела бы место при стационарном режиме и несжимаемой жидкости. Очевидно, при этом мы будем иметь всё время падающий дебит и, таким образом, сжимаемость воды обусловит своеобразную связь между дебитами и давлениями. Физически это означает следующее: до достижения стационарного состояния часть первоначально сжатой воды увеличит свой объём вследствие понижения давления вблизи нефтяного резервуара и вытеснит, таким образом, нефть. Обычно сжимаемость воды ничтожна — около $\frac{1}{20000} \frac{1}{\text{атм}}$, т. е. изменение давления на 1 атм изменяет её объём на $0,005\%$. Таким образом, падение давления, скажем, на 50 атм освободит $50 \times 0,005\% = 0,25\%$ объёма всей воды. В действительности, вследствие упругости порового пространства и возможного присутствия газа даже в небольших количествах, эффективная сжимаемость воды будет ещё выше. Так, например, в East Texas её пришлось увеличить в 10 раз.

Американские авторы — Маскет, Шилсуз и Херст, впервые изучавшие упругий режим фильтрации на этом месторождении, объяснили эту сверхсжимаемость возможным присутствием свободного газа в порах пласта, для чего им пришлось допустить, что свободный газ занимает $4,9\%$ объёма пор пласта.

В. Н. Щелкачевым было показано, что такой эффект кажущейся сверхсжимаемости жидкости может быть вполне объяснён упругостью самого порового пространства пласта.

Если объём воды будет, например, в 50 раз больше объёма нефти, то освободившийся объём воды, учитывая только её упругость, для данных приведенного выше примера



Фиг. 37.

составит $50 \times 0,25\% = 12,5\%$ объема нефти. Таким образом, $12,5\%$ объема нефти будет добыто за счет одной только упругости самой воды. При учёте упругости порового пространства и других соотношениях этот процент может значительно повыситься.

Изучение режимов сжимаемой жидкости в пласте может производиться двумя способами: 1) интегрированием уравнений движения сжимаемой жидкости в пористой среде, 2) приближённым способом, заключающимся в замене точной кривой распределения давления кривой, соответствующей стационарному распределению, но с перемещающимся (увеличивающимся) расстоянием до контура питания — методом последовательной смены стационарных состояний.

§ 25. Дифференциальные уравнения движения капельной сжимаемой жидкости в пористой среде

Дифференциальные уравнения движения сжимаемой жидкости в пласте могут быть получены из общих дифференциальных уравнений теории фильтрации (1.15), (1.19) и (1.21). Пренебрежём для простоты эффектом силы тяжести. Тогда уравнения движения и неразрывности будут

$$a = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad v = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad w = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\gamma u) + \frac{\partial}{\partial y}(\gamma v) + \frac{\partial}{\partial z}(\gamma w) - \frac{\partial}{\partial t}(m\gamma) = 0. \quad (6.2)$$

Уравнение состояния для сжимаемой жидкости, которую мы будем считать подчиняющейся закону Гука, имеет вид

$$\frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{dp}{K_{ж}},$$

откуда

$$\gamma = \gamma_0 e^{\frac{p - p_0}{K_{ж}}}, \quad (6.3)$$

где $K_{ж}$ — модуль объёмного сжатия жидкости, γ_0 — её удельный вес при давлении p_0 .

Обычно

$$K_{ж} \gg p - p_0.$$

Тогда вместо (6.3), разлагая правую часть в ряд, можно принять

$$\frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma_0} \approx \frac{p - p_0}{K_{\text{ж}}}. \quad (6.4)$$

Для воды $K_{\text{ж}} \approx 20\,000 \text{ кг/см}^2$, для нефти $K_{\text{ж}} \approx 15\,000 \text{ кг/см}^2$.

Учтём, следуя В. Н. Щелкачеву¹⁾, изменение пористости m в зависимости от давления. Положим

$$m = m_0 + \frac{p - p_0}{K_c}, \quad (6.5)$$

где K_c — модуль упругости порового пространства, зависящий от структуры и типа горных пород. Как указывает В. Н. Щелкачев, для разных пластов K_c может меняться в широких пределах: от 6000 кг/см^2 до $50\,000 \text{ кг/см}^2$. Из (6.3)

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\gamma}{K_{\text{ж}}} \frac{\partial p}{\partial x},$$

откуда

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{K_{\text{ж}}}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

и аналогично

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{K_{\text{ж}}}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{K_{\text{ж}}}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial z}.$$

Отсюда, учитывая (6.1), получаем

$$\gamma u = -\frac{k K_{\text{ж}}}{\mu} \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \quad \gamma v = -\frac{k K_{\text{ж}}}{\mu} \frac{\partial \gamma}{\partial y}, \quad \gamma w = -\frac{k K_{\text{ж}}}{\mu} \frac{\partial \gamma}{\partial z}. \quad (6.6)$$

При этом уравнение неразрывности (6.2) получит следующий вид:

$$\frac{k K_{\text{ж}}}{\mu} \nabla^2 \gamma = \frac{\partial}{\partial t} (m \gamma). \quad (6.7)$$

Далее, имея в виду, что квадратами и высшими степенями отношений

$$\frac{p - p_0}{K_{\text{ж}}}, \quad \frac{p - p_0}{K_c}$$

¹⁾ Щелкачев В. Н., Основные уравнения движения упругой жидкости в упругой пористой среде. Доклады АН СССР, 1946 г., т. XLII, № 2.

можно пренебречь по сравнению с их первыми степенями, согласно (6.4), примем

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_0 \frac{p - p_0}{K_{\infty}}$$

и, согласно (6.5):

$$\begin{aligned} m\gamma &= \left(\gamma_0 + \gamma_0 \frac{p - p_0}{K_{\infty}} \right) \left(m_0 + \frac{p - p_0}{K_c} \right) \approx \\ &\approx m_0 \gamma_0 + \gamma_0 \left(\frac{m_0}{K_{\infty}} + \frac{1}{K_c} \right) (p - p_0). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Формулу (6.7), таким образом, можно представить с указанной выше степенью точности, удерживая первую степень отношений $\frac{p - p_0}{K_{\infty}}$ и $\frac{p - p_0}{K_c}$, в виде уравнения

$$\nabla^2 \gamma = \frac{\gamma_0}{K_{\infty}} \nabla^2 p,$$

откуда, учитывая (6.7), получим

$$x \nabla^2 p = \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (6.9)$$

где

$$x = -\frac{k K_{\infty}}{\mu \left(m_0 + \frac{K_{\infty}}{K_c} \right)}. \quad (6.10)$$

С той же степенью точности получаем точно такие же уравнения для γ и $m\gamma$:

$$x \nabla^2 \gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \quad (6.11)$$

$$x \nabla^2 (m\gamma) = \frac{\partial (m\gamma)}{\partial t}; \quad (6.12)$$

Величину x В. Н. Щелкачев предложил, по аналогии с теплопроводностью, называть коэффициентом пьезопроводности.

Упругость порового пространства, таким образом, снижает величину x . Присутствие газовых включений даже в очень небольшом проценте от общего объема пор также может быть учтено соответствующим изменением x .

Оба эти обстоятельства — упругость порового пространства и возможное присутствие газовых включений можно учесть введением приведённого модуля объёмного сжатия жидкости K , связанного с истинным модулем упругости жидкости K_0 , согласно (6.10) соотношением

$$K = \frac{K_0}{1 + \frac{K_0}{m_0 K_c}} \quad (6.13)$$

и в дальнейшем считать пористость постоянной, а уравнение состояния писать в виде (6.4), где K_0 заменено через K :

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_0 \frac{p - p_0}{K}. \quad (6.14)$$

Тогда уравнения (6.9) и (6.11) можно будет вывести ещё иначе следующим путём. При постоянной пористости уравнение неразрывности принимает вид

$$m \frac{\partial \gamma}{\partial t} = - \left[\gamma \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + u \frac{\partial \gamma}{\partial x} + v \frac{\partial \gamma}{\partial y} + w \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right]. \quad (6.15)$$

Скорости фильтрации u, v, w обычно очень малы, и плотность по пласту меняется незначительно, так как пластовые давления, как указывалось, гораздо меньше модуля сжимаемости. Отсюда следует, что последние три члена правой части в уравнении (6.15) гораздо меньше первого и их можно без практической погрешности опустить, а множитель γ в выражении $\gamma \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$ заменить через γ_0 .

Тогда уравнение (6.15) оказывается возможным заменить таким:

$$m \frac{\partial \gamma}{\partial t} = - \gamma_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right). \quad (6.16)$$

Из (6.14) мы имеем

$$\frac{1}{\gamma_0} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = - \frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial t}$$

и

$$m \frac{\partial \gamma}{\partial t} = - \frac{m \gamma_0}{K} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (6.17)$$

Сравнивая (6.16) и (6.17), получаем

$$\frac{m}{K} \frac{dp}{dt} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right). \quad (6.18)$$

Теперь для исключения скоростей u , v , w нужно (6.1) продифференцировать по x , y , z и подставить результат в (6.18). Тогда получим:

$$\frac{kK}{m\mu} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial t}$$

или

$$\frac{kK}{m\mu} \nabla^2 p = \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (6.19)$$

что выше было выведено другим путём.

Для удельного веса γ , очевидно, получим абсолютно такое же уравнение.

§ 26. Учёт сил инерции

В некоторых вопросах, на первый взгляд, может представить интерес учёт сил инерции жидкости, например, при исследовании волны давления, распространяющейся внутри жидкости в пласте при резком изменении давления в скважинах от взрыва при торпедировании скважин.

Идея использования такой взрывной волны для исследования пласта была высказана М. М. Глогоуским. Учёт силы инерции в вопросах фильтрации, как сейчас будет видно, имеет только теоретическое, но не практическое значение, так как (что и следовало ожидать) силы сопротивления при фильтрации оказываются гораздо большие сил инерции.

Закон Дарси, представленный уравнениями (6.1), выражает, по существу, ту мысль, что потеря напора тратится только на преодоление фильтрационного сопротивления. Живой силой (скоростным напором) и инерционным изменением напора при этом мы пренебрегаем.

При резких изменениях давления, но при скоростях частиц жидкости меньших, нежели скорость звука, скоростным напором можно пренебречь, а инерционным изменением напора, вообще говоря, уже нет. Это соображение, как известно, лежит в основе современных теорий гидравлического удара.

Если учесть инерционное изменение напора, то нетрудно видеть, что уравнения движения (6.1) следует заменить следующими¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho}{m} \frac{\partial u}{\partial t} &= - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\mu}{k} u, \\ \frac{\rho}{m} \frac{\partial v}{\partial t} &= - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\mu}{k} v, \\ \frac{\rho}{m} \frac{\partial w}{\partial t} &= - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\mu}{k} w, \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} u &= - \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{k\rho}{m\mu} \frac{\partial u}{\partial t}, \\ v &= - \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{k\rho}{m\mu} \frac{\partial v}{\partial t}, \\ w &= - \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{k\rho}{m\mu} \frac{\partial w}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

Дифференцируя уравнения (6.21) по x, y, z и подставляя в (6.18), найдём

$$\frac{m}{K} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) + \frac{k\rho}{m\mu} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

или, учитывая (6.18),

$$\frac{m}{K} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) - \frac{k\rho}{m\mu} \frac{m}{K} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\rho}{K} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{m\mu}{kK} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (6.22)$$

Как известно, множитель $\frac{\rho}{K}$ имеет простой физический смысл

$$\frac{\rho}{K} = \frac{1}{c^2}, \quad (6.23)$$

где c — скорость звука (формула Ньютона).

Окончательно, таким образом, будем иметь

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{m\mu}{kK} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (6.24)$$

¹⁾ Дэвисон Б. Б., Движение грунтовых вод. Сборник «Некоторые новые задачи механики сплошной среды». Изд. АН СССР, 1939 г.

Уравнение (6.24) также является одним из классических уравнений математической физики — телеграфным уравнением.

Покажем, что членом $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ в этом уравнении можно пренебречь. Для этого сделаем замену переменных, введя безразмерные переменные

$$\xi = \frac{x}{R}, \quad \eta = \frac{y}{R}, \quad \zeta = \frac{z}{R}, \quad \bar{p} = \frac{p}{p_0}, \quad \tau = \frac{ct}{R}. \quad (6.25)$$

Здесь p_0 — произвольно постоянное давление, R — расстояние или порядок расстояния от начала координат, скажем, от скважины, на котором нас интересует изменение давления p . Нетрудно видеть, что уравнение (6.24) в новых переменных принимает вид

$$\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \zeta^2} \right) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \tau^2} + \frac{c}{R} \frac{m \mu}{k K} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \tau}$$

или

$$\nabla^2 \bar{p} = \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \tau^2} + A \frac{\partial \bar{p}}{\partial \tau}, \quad (6.26)$$

где

$$A = \frac{c R m \mu}{k K}. \quad (6.27)$$

Легко видеть, что безразмерная величина A уже при R , равном нескольким метрам, гораздо больше единицы.

Например, пусть $C = 1000 \text{ м/сек}$; $R = 1 \text{ м}$; $m = 0,2$; $k = 1 \text{ дарси}$; $K = 10^4 \text{ кг/см}^2$. Тогда $A = 200$.

Таким образом, отбрасывая $\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \tau^2}$ в (6.26), мы для расстояний порядка метров от источников возмущения делаем ошибку не свыше нескольких процентов. Естественно, эта ошибка будет уменьшаться с ростом R и для расстояний в десятки и тем более сотни метров станет пренебрежимо малой.

Таким образом, в дальнейшем мы будем исходить из уравнения теплопроводности (6.9), а не из телеграфного, хотя, вообще говоря, известен или может быть получен ряд решений телеграфного уравнения, которые могли бы быть применены к нашим задачам.

§ 27. Связь между пластовым давлением и дебитом для скважины конечных размеров в неограниченном пласте

М. Маскет в названной выше книге рассмотрел ряд задач для пласта круговой формы с центральной скважиной. Решения их получаются в рядах бесселевых функций и требуют трудоёмких вычислений. Более простыми получаются решения плоских задач для случая точечных источников, но, насколько нам известно, они доведены до расчётных формул только для точечных источников с постоянным дебитом.

Решение, соответствующее мгновенному точечному источнику и являющееся функцией Грина для уравнения теплопроводности, позволяет написать формальные выражения для давления в пласте, распределяя надлежащим образом подобраные интенсивности источников, стоков или диполей вдоль соответствующих контуров¹⁾). При этом, если задавать на границах давления, для интенсивностей этих распределений в функции времени, т. е. для дебитов, получаются сингулярные интегральные уравнения Вольтерра, мало пригодные для эффективных расчётов. Проще получаются решения задач, когда интенсивности — дебиты известны в функции времени. В этом случае решения приводятся к квадратурам, правда, весьма громоздким, но всё же гораздо более простым.

Ниже даётся решение задачи о распределении давления в пласте для случая распределённых вдоль окружности стоков с переменным во времени дебитом, т. е. для скважины конечных размеров.

Одно из частных решений (6.12), соответствующее точечному источнику, может быть дано в виде

$$mY = \frac{G}{4\pi h t} e^{-\frac{r^2}{4ht}}, \quad (6.28)$$

где G — весовое количество жидкости, мгновенно инжектированной в пласт, h — мощность пласта, r — расстояние от источника, t — время.

Пользуясь принципом суперпозиции для стока с весовым дебитом $G(t)$, равномерно распределённого вдоль окружности

¹⁾ Мюнц Г., Интегральные уравнения, ч. I, ГТТИ, 1934 г.

радиуса a , т. е. для скважины радиуса a (фиг. 38), Маскет по аналогии с решением Карлслоу¹⁾ соответствующей тепловой задачи, получает следующую формулу²⁾:

$$m\gamma = (m\gamma)_i - \frac{1}{4\pi\kappa h} \int_0^t \frac{G(\tau)}{t-\tau} e^{-\frac{a^2+r^2}{4\kappa(t-\tau)}} I_0 \left[\frac{ar}{2\kappa(t-\tau)} \right] d\tau, \quad (6.29)$$

где $(m\gamma)_i$ — начальное значение произведения пористости на удельный вес жидкости в пласте, I_0 — бесселева функция первого рода нулевого порядка от мнимого аргумента.

Как уже указывалось, Маскетом даны расчётные формулы только для случая $a=0$ (точечный источник) и $G(t)=\text{const}$.

При $a \neq 0$ и $G(t) \neq \text{const}$ преобразование формулы (6.29) к удобному для расчётов виду можно выполнить следующим образом. Будем считать, что в некотором интервале $G(t)$ может быть разложена в ряд Тейлора. Далее, произведём замену перечисленного и обозначим

$$\frac{a^2+r^2}{4\kappa(t-\tau)} = u. \quad (6.30)$$

Тогда

$$\tau = t - \frac{a^2+r^2}{4\kappa u}, \quad d\tau = \frac{a^2+r^2}{4\kappa u^2}, \quad (6.31)$$

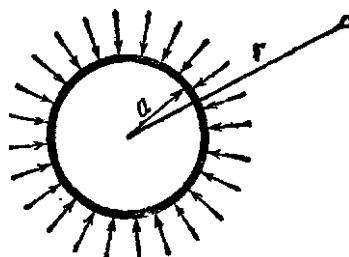
$$G(\tau) = G\left(t - \frac{a^2+r^2}{4\kappa u}\right) = G(t) - \frac{a^2+r^2}{4\kappa u} G'(t) + \\ + \frac{1}{2!} \left(\frac{a^2+r^2}{4\kappa u}\right)^2 G''(t) - \frac{1}{3!} \left(\frac{a^2+r^2}{4\kappa u}\right)^3 G'''(t) + \dots \quad (6.32)$$

или

$$G(\tau) = G(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{a^2+r^2}{4\kappa u}\right)^m G^{(m)}(t) = G(t, u). \quad (6.33)$$

¹⁾ Карлслоу Х. С., Теория теплопроводности. Гостехиздат, 1947 г.

²⁾ Маскет пишет формулу (6.29) не для $m\gamma$, а для γ , считая пористость m постоянной. Мы находим более удобным сразу писать соответствующие выражения для $m\gamma$.



Фиг. 38.

Подставляя (6.30) — (6.33) в (6.29), получим

$$\begin{aligned}
 m\gamma &= (m\gamma)_i - \frac{1}{4\pi kh} \int_{\frac{a^2+r^2}{4\pi t}}^{\infty} G(t, u) e^{-u} \cdot \frac{4xu}{a^2+r^2} \frac{a^2+r^2}{4xu^2} I_0\left(\frac{ar}{2\sqrt{a^2+r^2}} u\right) du = \\
 &= (m\gamma)_i - \frac{1}{4\pi kh} \int_{\xi}^{\infty} G(t, u) \frac{e^{-u}}{u} I_0(au) du = \\
 &= (m\gamma)_i - \frac{G(t, \xi, a)}{4\pi kh}, \quad (6.34)
 \end{aligned}$$

где

$$\xi = \frac{a^2+r^2}{4\pi t}, \quad a = \frac{2ar}{a^2+r^2}, \quad (6.35)$$

$$G(t, \xi, a) = \int_{\xi}^{\infty} G(t, u) \frac{e^{-u}}{u} I_0(au) du. \quad (6.36)$$

Задача заключается в вычислении интеграла (6.34) при $G(t, u)$, определённом (6.33).

Для интегрирования будем пользоваться разложением

$$I_0(au) = 1 + \frac{a^2 u^2}{2^2} + \frac{a^4 u^4}{2^2 4^2} + \frac{a^6 u^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots \quad (6.37)$$

Для больших значений ξ можно воспользоваться также асимптотическим разложением

$$I_0(au) = \frac{e^{au}}{\sqrt{2\pi au}} \left[1 + \frac{1}{8au} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2!} \frac{1}{(8au)^3} + \dots \right]. \quad (6.38)$$

Из (6.33), (6.34) и (6.35) имеем

$$\begin{aligned}
 m\gamma &= (m\gamma)_i - \frac{1}{4\pi kh} \left[G(t) \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} I_0(au) du + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} t^m G^m(t) \xi^m \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^{m+1}} I_0(au) du \right]. \quad (6.39)
 \end{aligned}$$

Интегралы в (6.39) при посредстве (6.37) вычислим следующим образом:

$$I_0 = \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} I_0(\alpha u) du = \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} \left(1 + \frac{\alpha^2 u^2}{2^2} + \frac{\alpha^4 u^4}{2^2 \cdot 4^2} + \dots \right) du = = -Ei(-\xi) + C_0(\alpha) - i_0 = \Psi_0(\xi, \alpha), \quad (6.40)$$

где

$$-Ei(-\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \quad (6.41)$$

есть интегральный экспоненциал — табулированная функция¹⁾. Для малых ξ

$$-Ei(-\xi) \approx \ln \frac{1}{1,781072 \xi}, \quad (6.42)$$

где $1,781072\dots$ — эйлерова константа,

$$C_0(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{\alpha^2}{2^2} u + \frac{\alpha^4}{2^2 \cdot 4^2} u^3 + \frac{\alpha^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} u^5 + \dots \right) du = = \frac{\alpha^2}{2^2} + \frac{\alpha^4}{2^2 \cdot 4^2} \cdot 3! + \frac{\alpha^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \cdot 5! + \dots, \quad (6.43)$$

$$i_0 = \int_0^{\xi} e^{-u} \left(\frac{\alpha^2}{2^2} u + \frac{\alpha^4}{2^2 \cdot 4^2} u^3 + \frac{\alpha^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} u^5 + \dots \right) du. \quad (6.44)$$

Ряд $C_0(\alpha)$ сходится абсолютно и равномерно, что легко проверяется для предельного случая $\alpha = 1$ по признаку Раабе и может быть вычислен с любой точностью. При $\alpha = 1$ имеем

$$C_0(1) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{1}{2^2} + \frac{3!}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{5!}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots = = \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} + \dots, \\ \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(2n+2)^2}{2n(2n+1)} = \frac{2n^2+4n+2}{2n^2+n}, \\ n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \frac{3n+2}{2n+1} > 1,$$

что и доказывает сказанное.

1) Янкé и Эйде, Таблицы функций, Гостехиздат, 1948.

В (6.44) удерживаем четыре члена:

$$\begin{aligned}
 i_0 = & \frac{a^2}{2^2} [1 - (1 - \xi) e^{-\xi}] + \frac{a^4}{2^2 \cdot 4^2} [6 - (\xi^3 + 3\xi^2 + 6\xi + 6) e^{-\xi}] + \\
 & + \frac{a^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} [120 - (\xi^5 + 5\xi^4 + 20\xi^3 + 60\xi^2 + 120\xi + 120) e^{-\xi}] + \\
 & + \frac{a^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^3 \cdot 8^2} [5040 - (\xi^7 + 7\xi^6 + 42\xi^5 + 210\xi^4 + 840\xi^3 + \\
 & + 2520\xi^2 + 5040\xi + 5040) e^{-\xi}] + \Delta i_0. \quad (6.45)
 \end{aligned}$$

Погрешность Δi_0 от отбрасывания остальных членов в (6.44) можно оценить следующим образом. Воспользовавшись разложением для $\operatorname{sh} au$, получим

$$\begin{aligned}
 \Delta i_0 = & \int_0^{\xi} e^{-u} \left(\frac{a^{10}}{2^2 \dots 10^2} u^9 + \frac{a^{12}}{2^2 \dots 12^2} u^{11} + \dots \right) du = \\
 = & a \frac{9!}{2^2 \dots 10^2} \int_0^{\xi} e^{-u} \left(\frac{a^9 u^9}{9!} + \frac{11!}{9!} \frac{a^{11}}{12^2} \frac{u^{11}}{11!} + \dots \right) du < \\
 < & a \frac{9!}{2^2 \dots 10^2} \int_0^{\xi} e^{-u} \left(\frac{a^9 u^9}{9!} + \frac{a^{11} u^{11}}{11!} + \dots \right) du = \\
 = & a \frac{9!}{2^2 \dots 10^3} \int_0^{\xi} e^{-u} \left(\operatorname{sh} au - \frac{au}{1!} - \frac{a^3 u^3}{3!} - \frac{a^5 u^5}{5!} - \frac{a^7 u^7}{7!} \right) du = \\
 = & a \frac{9!}{2^2 \dots 10^3} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1 - e^{-(1-\alpha)\xi}}{1 - \alpha} - \frac{1 - e^{-(1+\alpha)\xi}}{1 + \alpha} \right] - \right. \\
 - & a (1 - e^{-\xi}) + a \xi e^{-\xi} - \frac{a^3}{3!} [6 - (\xi^3 + 3\xi^2 + 6\xi + 6) e^{-\xi}] - \\
 - & \frac{a^5}{5!} [120 - (\xi^5 + 5\xi^4 + 20\xi^3 + 60\xi^2 + 120\xi + 120) e^{-\xi}] - \\
 - & \left. \frac{a^7}{7!} [5040 - (\xi^7 + 7\xi^6 + 42\xi^5 + 210\xi^4 + 840\xi^3 + \right. \\
 & \left. + 2520\xi^2 + 5040\xi + 5040) e^{-\xi}] \right\}. \quad (6.46)
 \end{aligned}$$

Таким образом

$$G(t) \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-\alpha u}}{u} \cdot I_0(\alpha u) du = G(t) \Psi_0(\xi, \alpha), \quad (6.47)$$

где $\Psi_0(\xi, \alpha)$ вычисляется по формулам (6.40) — (6.47).

Вычисление $C_0(\alpha)$ в (6.43) при $\alpha \neq 1$ не представляет затруднений, так как, согласно (6.35), $\alpha \leq 1$. При $\alpha = 1$ ряд $C_0(\alpha)$ сходится хуже, нежели при $\alpha < 1$, и для его вычисления нужно брать довольно много членов.

Ряд $C_0(1)$ сходится очень медленно. Сходимость его может быть улучшена, для чего представим $C_0(1)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} C_0(1) &= \frac{1}{2^2} + \frac{3!}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{5!}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} + \dots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n (2n)!!}, \end{aligned}$$

где знак «!!» есть обозначение обобщённого факториала

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1); \quad (2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n.$$

Далее воспользуемся рядами, суммы которых известны¹⁾:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(4n^2-1)(2n)!!} = 1 - \frac{\pi}{4}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Составим разность

$$\frac{(2n-1)!!}{2n(2n)!!} - \frac{(2n-1)!!}{(4n^2-1)(2n)!!} - \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} = - \frac{(2n-1)!!}{2n(4n^2-1)(2n)!!}.$$

Таким образом

$$\begin{aligned} C_0(1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n(2n)!!} = 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n(4n^2-1)(2n)!!} = \\ &= \frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n(4n^2-1)(2n)!!}. \end{aligned}$$

1) Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Гостехиздат, 1943 г.

Последний ряд сходится гораздо быстрее, и его вычисление не представляет затруднений; $C_0(1) = 0,6935$.

При значениях a , близких к единице, сходимость ряда $C_0(a)$ может быть улучшена таким же точно образом. Составим разность

$$a^{2n} \frac{(2n-1)!!}{2n(2n)!!} - \frac{(2n-1)!!}{(4n^2-1)(2n)!!} - \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} = \\ = - \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{2n}{4n^2-1} - \frac{a^{2n}}{2n} \right),$$

откуда

$$C_0(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{2n}(2n-1)!!}{2n(2n)!!} = 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - 1 - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{2n}{4n^2-1} - \frac{a^{2n}}{2n} \right) = \\ = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{2n}{4n^2-1} - \frac{a^{2n}}{2n} \right).$$

Последний ряд при a , близких к единице, сходится довольно быстро.

При $a < 0,5$ $C_0(a)$ целесообразнее определять из (6.43). Остальные интегралы в (6.39) могут быть вычислены следующим образом:

$$I_m = \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^{m+1}} I_0(au) du = \\ = \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^{m+1}} \left(1 + \frac{a^2 u^2}{2^2} + \frac{a^4 u^4}{2^2 \cdot 4^2} + \dots \right) du. \quad (6.48)$$

Интегралы, входящие в (6.48), вычисляются по рекуррентным формулам (v — целое)

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^v} du = \frac{e^{-\xi}}{(v-1)\xi^{v-1}} - \frac{1}{v-1} \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-u} du}{u^{v-1}}, \\ \int_{\xi}^{\infty} e^{-u} u^v du = e^{-\xi} \xi^v + v \int_{\xi}^{\infty} e^{-u} u^{v-1} du. \quad (6.49)$$

Оценки погрешности, получающейся от удержания в (6.48) конечного числа членов, могут быть произведены аналогично тому, как это было сделано для I_0 .

Ограничивааясь в (6.48) пятью членами, после вычислений получим

$$\xi \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^2} I_0(au) du = \Psi_1(\xi, a); \quad (6.50)$$

здесь

$$\begin{aligned} \Psi_1(\xi, a) = & e^{-\xi} \left(1 + \frac{a^2}{2^2} \xi \right) + \xi Ei(-\xi) + \xi C_1(a) - \\ & - \xi \left\{ \frac{a^4}{2^2 \cdot 4^2} [2 - (\xi^2 + 2\xi + 2) e^{-\xi}] + \frac{a^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} [24 - (\xi^4 + 4\xi^3 + \right. \right. \\ & \left. \left. + 12\xi^2 + 24\xi + 24) e^{-\xi}] + \frac{a^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} [720 - (\xi^6 - 6\xi^5 + \right. \right. \\ & \left. \left. + 30\xi^4 + 120\xi^3 + 360\xi^2 + 720\xi + 720) e^{-\xi}] \right\} + \Delta_1, \end{aligned} \quad (6.51)$$

где Δ_1 — погрешность при вычислении (6.50), а

$$C_1(a) = \frac{a^4}{2^2 \cdot 4^2} 2! + \frac{a^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} 4! + \frac{a^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} 6! + \dots \quad (6.52)$$

Ряд для $C_1(a)$ также можно улучшить для a , близких к единице:

$$C_1(a) = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} a^{2n}.$$

Составим разность

$$\left(\frac{1}{4n^2-1} - \frac{a^{2n+2}}{4n^2} \right) \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

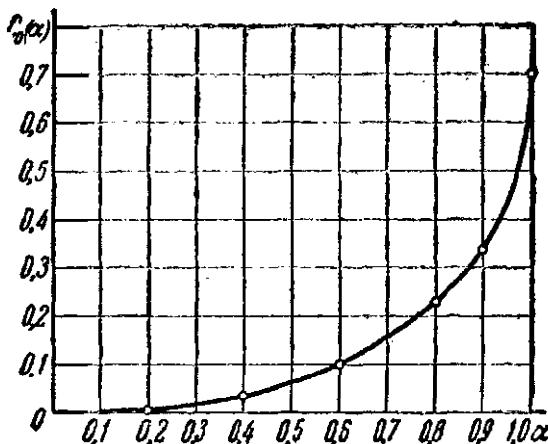
Тогда

$$\begin{aligned} C_1(a) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(4n^2-1)(2n)!!} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n^2-1} - \frac{a^{2n+2}}{4n^2} \right) \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \\ &= 1 - \frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n^2-1} - \frac{a^{2n+2}}{4n^2} \right) \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Последний ряд при α , близком единице, сходится быстро.
При $\alpha = 1$

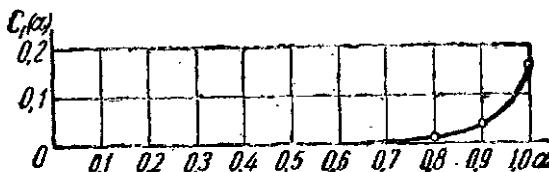
$$C_1(1) = 1 - \frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{4n^2(4n^2-1)(2n)!!}. \quad (6.54)$$

При $\alpha < 0,5$ $C_1(\alpha)$ лучше, конечно, определять из (6.52).



Фиг. 39.

На фиг. 39, 40 показаны графики зависимости $C_0(\alpha)$ и $C_1(\alpha)$ от α .



Фиг. 40.

Погрешность Δ_1 удовлетворяет неравенству

$$\Delta_1 < \xi \alpha^2 \frac{8!}{2^2 \dots 10^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1 - e^{-(1-\xi)\xi}}{1-\xi} + \frac{1 - e^{-(1+\xi)\xi}}{1+\xi} \right] - (1 - e^{-\xi}) - \right. \\ - \frac{\alpha^2}{2!} [2 - (\xi^2 + 2\xi + 2) e^{-\xi}] - \frac{\alpha^4}{4!} [24 - (\xi^4 + 4\xi^3 + 12\xi^2 + \\ + 24\xi + 24) e^{-\xi}] - \frac{\alpha^6}{6!} [720 - (\xi^6 + 6\xi^5 + 30\xi^4 + 120\xi^3 + \\ \left. - 360\xi^2 + 720\xi + 720) e^{-\xi}] \right\}, \quad (6.55)$$

$$\xi^3 \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^4} I_0(\alpha u) du = \Psi_2(\xi, \alpha). \quad (6.56)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Psi_2(\xi, \alpha) = & e^{-\xi} \left(\frac{1}{2} - \frac{\xi}{2} \right) - \left(\frac{\xi^2}{2} + \frac{\alpha^2 \xi^2}{2^2} \right) Ei(-\xi) + \xi^2 C_2(\alpha) - \\ & - \xi^2 \left\{ \frac{\alpha^4}{2^2 \cdot 4^2} [1 - (1 + \xi) e^{-\xi}] + \frac{\alpha^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} [6 - (\xi^3 + 3\xi^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + 6\xi + 6) e^{-\xi}] + \frac{\alpha^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} [120 - (\xi^5 + 5\xi^4 + 20\xi^3 + 60\xi^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + 120\xi + 120) e^{-\xi}] \right\} + \Delta_2. \quad (6.57) \end{aligned}$$

$$C_2(\alpha) = \frac{\alpha^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{\alpha^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} 3! + \frac{\alpha^8}{2^5 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} 5! + \dots \quad (6.58)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 < & \xi^2 \alpha^3 \frac{7!}{2^2 \dots 10^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1 - e^{-(1-\alpha)\xi}}{1-\alpha} - \frac{1 - e^{-(1+\alpha)\xi}}{1+\alpha} \right] - \right. \\ & - \alpha [1 - (1 + \xi) e^{-\xi}] - \frac{\alpha^3}{3!} [6 - (\xi^3 + 3\xi^2 + 6\xi + 6) e^{-\xi}] - \\ & \left. - \frac{\alpha^5}{5!} [120 - (\xi^5 + 5\xi^4 + 20\xi^3 + 60\xi^2 + 120\xi + 120) e^{-\xi}] \right\}. \quad (6.59) \end{aligned}$$

$$\xi^3 \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^4} I_0(\alpha u) du = \Psi_3(\xi, \alpha), \quad (6.60)$$

$$\begin{aligned} \Psi_3(\xi, \alpha) = & e^{-\xi} \left(\frac{1}{3} - \frac{\xi}{6} + \frac{\xi^2}{6} + \frac{\alpha^2}{2^2} \xi^2 + \frac{\alpha^4}{2^2 \cdot 4^2} \xi^3 \right) + \\ & + \xi^3 \left(\frac{1}{6} + \frac{\alpha^2}{2^2} \right) Ei(-\xi) + \xi^3 C_3(\alpha) - \xi^3 \left\{ \frac{\alpha^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} [2 - \right. \right. \\ & - (\xi^2 + 2\xi + 2) e^{-\xi}] + \frac{\alpha^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} [24 - (\xi^4 + 4\xi^3 + \right. \right. \\ & \left. \left. + 12\xi^2 + 24\xi + 24) e^{-\xi}] \right\} + \Delta_3. \quad (6.61) \end{aligned}$$

$$C_3(\alpha) = \frac{\alpha^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} 2! + \frac{\alpha^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} 4! + \dots \quad (6.62)$$

$$\Delta_3 < \xi^3 \alpha^4 \frac{6!}{2^3 \dots 10^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1 - e^{-(1-\alpha)\xi}}{1 - \alpha} + \frac{1 - e^{-(1+\alpha)\xi}}{1 + \alpha} \right] - \right. \\ - (1 - e^{-\xi}) - \frac{\alpha^2}{2!} [2 - (\xi^2 + 2\xi + 2) e^{-\xi}] - \\ \left. - \frac{\alpha^4}{4!} [24 - (\xi^4 + 4\xi^3 + 12\xi^2 + 24\xi + 24) e^{-\xi}] \right\}. \quad (6.63)$$

$$\xi^4 \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^5} I_0(\alpha u) du = \Psi_4(\xi, \alpha). \quad (6.64)$$

$$\Psi_4(\xi, \alpha) = e^{-\xi} \left[\frac{1}{4} - \frac{\xi}{12} + \frac{\xi^2}{24} - \frac{\xi^3}{24} + \frac{\alpha^2}{4} \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{2} \right) \right] - \\ - \xi^4 \left(\frac{1}{24} + \frac{\alpha^2}{8} + \frac{\alpha^4}{64} \right) Ei(-\xi) + \xi^4 C_4(\alpha) - \\ - \xi^4 \left\{ \frac{\alpha^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} [1 - (1 + \xi) e^{-\xi}] + \right. \\ \left. + \frac{\alpha^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} [6 - (\xi^3 + 3\xi^2 + 6\xi + 6) e^{-\xi}] \right\} + \Delta_4. \quad (6.65)$$

$$C_4(\alpha) = \frac{\alpha^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{\alpha^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} 3! + \frac{\alpha^{10}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} 5! + \dots \quad (6.66)$$

$$\Delta_4 < \xi^4 \alpha^5 \frac{5!}{2^3 \dots 10^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1 - e^{-(1-\alpha)\xi}}{1 - \alpha} - \frac{1 - e^{-(1+\alpha)\xi}}{1 + \alpha} \right] - \right. \\ - \alpha [1 - (1 + \xi) e^{-\xi}] - \left. \frac{\alpha^3}{3!} [6 - (\xi^3 + 3\xi^2 + 6\xi + 6) e^{-\xi}] \right\}; \quad (6.67)$$

$$\xi^5 \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^6} I_0(\alpha u) du = \Psi_5(\xi, \alpha); \quad (6.68)$$

$$\Psi_5(\xi, \alpha) = e^{-\xi} \left[\frac{1}{5} - \frac{\xi}{20} + \frac{\xi^2}{60} - \frac{\xi^3}{120} + \frac{\xi^4}{120} + \frac{\alpha^2}{4} \left(\frac{\xi^2}{3} - \frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi^4}{6} \right) + \right. \\ + \frac{\alpha^4 \xi^4}{64} + \frac{\alpha^6 \xi^5}{2304} \left. \right] + \xi^5 \left(\frac{1}{120} + \frac{\alpha^2}{24} - \frac{\alpha^4}{64} \right) Ei(-\xi) + \xi^5 C_5(\alpha) - \\ - \xi^5 \left\{ \frac{\alpha^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} [2 - (\xi^2 + 2\xi + 2) e^{-\xi}] + \right. \\ \left. + \frac{\alpha^{10}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} [24 - (\xi^4 + 4\xi^3 + 12\xi^2 + 24\xi + 24) e^{-\xi}] \right\} + \Delta_5. \quad (6.69)$$

$$C_5(\alpha) = \frac{\alpha^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} 2! + \frac{\alpha^{10}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} 4! + \dots \quad (6.70)$$

$$\begin{aligned} \Delta_5 < \xi^5 \alpha^6 \frac{6!}{2^2 \cdot 4^2 \dots 12^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1 - e^{-(1-\alpha)\xi}}{1-\alpha} + \frac{1 - e^{-(1+\alpha)\xi}}{1+\alpha} \right] - \right. \\ & - (1 - e^{-\xi}) - \frac{\alpha^2}{2!} [2 - (\xi^2 + 2\xi + 2) e^{-\xi}] - \\ & \left. - \frac{\alpha^4}{4!} [24 - (\xi^4 + 4\xi^3 + 12\xi^2 + 24\xi + 24) e^{-\xi}] \right\}. \quad (6.71) \end{aligned}$$

Таким образом, для (6.34) получим

$$\begin{aligned} m\gamma = (m\gamma)_i - \frac{1}{4\pi\alpha h} \left[G(t) \Psi_0(\xi, \alpha) - tG'(t) \Psi_1(\xi, \alpha) + \right. \\ + \frac{t^2}{2!} G''(t) \Psi_2(\xi, \alpha) - \frac{t^3}{3!} G'''(t) \Psi_3(\xi, \alpha) + \frac{t^4}{4!} G^{(IV)}(t) \Psi_4(\xi, \alpha) - \\ \left. - \frac{t^5}{5!} G^{(V)}(t) \Psi_5(\xi, \alpha) + \dots \right] = (m\gamma)_i - \frac{1}{4\pi\alpha h} G(t, \xi, \alpha), \quad (6.72) \end{aligned}$$

где Ψ_0, Ψ_1, \dots определяются по формулам (6.40) — (6.71).

Заметим, что если вначале из скважины отбирался стационарный дебит $G_{\text{стаци}}$, то дебит $G(t)$ в предыдущих формулах должен отсчитываться от этого стационарного. Отрицательный дебит $G(t)$ соответствует нагнетанию жидкости в скважину.

На фиг. 41 показан сплошной кривой график $\Psi_0(\xi, 1)$ для $\alpha = 1$ (пунктирная кривая относится к уравнению (9.46)).

Изменение давления находится без затруднений, если известно распределение величины $(m\gamma)$. Согласно (6.8)

$$\Delta p = p - p_i = \frac{m\gamma - (m\gamma)_i}{(m\gamma)_i} K, \quad (6.73)$$

где K — приведенный модуль объёмного сжатия, определяемый из (6.13).

Из уравнений (6.72) и (6.73), учитывая (6.10), получим

$$\Delta p = p - p_i = - \frac{K}{m\gamma} \frac{G(t, \xi, \alpha)}{4\pi\alpha h} = - \frac{1}{4\pi} \frac{\mu}{kh} Q(t, \xi, \alpha). \quad (6.74)$$

Здесь пористость m и удельный вес γ считаются постоянными, а

$$Q(t, \xi, a) = \frac{G(t, \xi, a)}{\gamma} \quad (6.75)$$

есть та же функция, что и в (6.72), но имеющая размерность объёмного дебита. В дальнейшем через Q мы будем обозначать объёмный дебит.

Таким образом, если известен дебит скважины радиуса a в функции времени, то изменение давления в пласте может быть найдено по выведенным выше формулам.

Под «скважиной» можно подразумевать любую окружность, для которой известен протекающий сквозь неё дебит жидкости. Например, в месторождении Вудбайн (Вост. Техас) при анализе упругого режима под «скважиной» подразумевалась окружность радиусом в 20 миль (радиус контура нефтеносности).

Согласно (6.35), небольшим значениям ξ соответствуют сравнительно большие значения t . Для реальных скважин радиуса 10—15 см, в непосредственной близости к скважине, ξ будет очень мало после нескольких секунд.

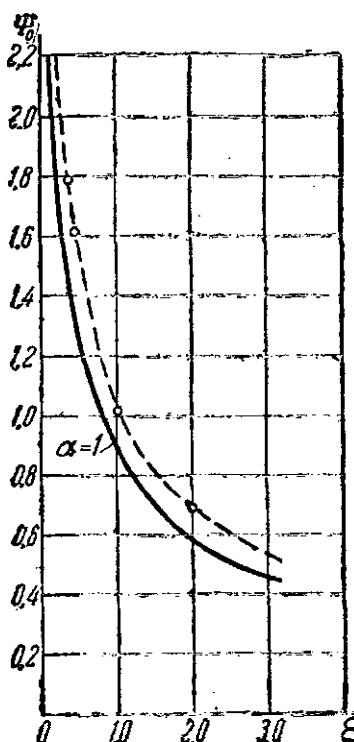
Пусть, например, радиус скважины $a = 10 \text{ см}$, $k = 1 \text{ дарси}$, $K = 2000 \text{ кг/см}^2$ (в 10 раз меньше модуля упругости чистой воды), $\mu = 1$ сантипуаз, $m = 0,2$.

Тогда

$$x = \frac{kk}{m\mu} = \frac{1 \cdot 2000}{0,2 \cdot 1} = 10^4 \text{ см}^2/\text{сек}; \quad \xi = \frac{10^3 + r^2}{4 \cdot 10^4 t}.$$

При r порядка нескольких десятков сантиметров через несколько секунд ξ станет очень малым.

Для малых ξ ($\xi \ll 1$) уравнение (6.72) можно упростить. Согласно формулам (6.40) — (6.71) для Ψ_0, Ψ_1, \dots при очень



Фиг. 41.

малом ξ имеем

$$\Psi_0(\xi, \alpha) \approx -Ei(-\xi) = \ln \frac{1}{1.781072\xi} = \ln \frac{4xt}{1.781072(a^2+r^2)}, \quad (6.76)$$

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1(\xi, \alpha) &\approx 1; & \Psi_2(\xi, \alpha) &\approx \frac{1}{2}; \\ \Psi_3(\xi, \alpha) &\approx \frac{1}{3}, \dots, & \Psi_m(\xi, \alpha) &\approx \frac{1}{m} \end{aligned} \right\} \quad (6.77)$$

Тогда

$$\begin{aligned} G(t, \xi, \alpha) &\approx -G(t) Ei(-\xi) - tG'(t) + \frac{1}{2} \frac{t^2}{2!} G''(t) - \\ &- \frac{1}{3} \frac{t^3}{3!} G'''(t) + \dots \approx G(t) \ln \frac{4xt}{1.781072(a^2+r^2)} - tG'(t) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{t^2}{2!} G''(t) - \frac{1}{3} \frac{t^3}{3!} G'''(t) + \dots \end{aligned} \quad (6.78)$$

Для больших значений ξ некоторое упрощение может быть достигнуто, если воспользоваться при вычислении интегралов в (6.39) асимптотическим разложением (6.38). При $\xi \gg 1$ имеем

$$I_m = \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^{m+1}} I_0(au) du \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-(1-\alpha)u}}{u^{m+\frac{3}{2}}} du. \quad (6.79)$$

Рассмотрим сначала случай $\alpha \neq 1$.

После вычисления, ограничиваясь $m = 0, 1, 2$, получим

$$I_0 = \frac{2(1-\alpha)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi a}} \left[\frac{e^{-\beta^2}}{\beta} - \sqrt{\pi} (1 - \operatorname{erf} \beta) \right] = \varphi_0(\xi, \alpha),$$

$$\begin{aligned} \xi I_1 &= \frac{2(1-\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi a}} \left[\frac{e^{-\beta^2}}{3\beta} \left(\frac{1}{\beta^2} - 2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} \sqrt{\pi} (1 - \operatorname{erf} \beta) \right] \xi = \varphi_1(\xi, \alpha), \end{aligned} \quad (6.80)$$

$$\begin{aligned} \xi^2 I_2 &= \frac{2(1-\alpha)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{2\pi a}} \left[\frac{e^{-\beta^2}}{5\beta} \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3\beta^2} + \frac{1}{\beta^4} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{15} \sqrt{\pi} (1 - \operatorname{erf} \beta) \right] \xi^2 = \varphi_2(\xi, \alpha), \end{aligned}$$

где

$$\beta = \sqrt{(1-a)\xi}, \quad (6.81)$$

а

$$\operatorname{erf} \beta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\beta} e^{-z^2} dz \quad (6.82)$$

есть интеграл вероятностей.

Таким образом, при $\xi \gg 1$ для $G(t, \xi, a)$ имеем

$$G(t, \xi, a) \approx G(t) \varphi_0(\xi, a) - tG'(t) \varphi_1(\xi, a) + \frac{t^2}{2!} G''(t) \varphi_2(\xi, a) - \dots \quad (6.83)$$

Так как в практике большие значения ξ встречаются редко, оценку погрешностей мы здесь не производим.

При $r=a$, т. е. $a=1$, вычисления чрезвычайно упрощаются:

$$I_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi}^{\infty} \frac{du}{u^{m+\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \left(m + \frac{1}{2}\right) \xi^{m+\frac{1}{2}}} = \varphi_m(\xi, 1), \quad (6.84)$$

$$G(t, \xi, 1) \approx G(t) \varphi_0(\xi, 1) - \xi t G'(t) \varphi_1(\xi, 1) + \dots \quad (6.85)$$

и

$$\varphi_0(\xi, 1) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\xi}} = \frac{2}{a\sqrt{\pi}} \sqrt{xt}.$$

Большие значения ξ соответствуют малым значениям t . Таким образом, при малых t :

$$G(t, \xi, 1) \approx \frac{2G(t)}{a\sqrt{\pi}} \sqrt{xt}. \quad (6.86)$$

Выведенные выше формулы могут быть полезными при определении упругих и других гидромеханических параметров пласта по данным связи между дебитами скважин и изменением пластового давления.

Если в интервалах $0 < t < t_1$, $t_1 < t < t_2$, $t_2 < t < t_3, \dots$ дебит $G(t)$ выражается разными функциями $G_{0-1}(t)$, $G_{1-2}(t)$, $G_{2-3}(t), \dots$, из коих каждая в своём интервале разлагается в ряд Тейлора, то изменение во времени произведения удельного веса на пористость γ или давления p может быть

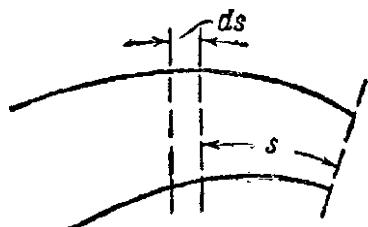
найдено при помощи принципа суперпозиции из (6.72) или (6.75) следующим образом:

§ 28. Пласт переменного сечения

Точное решение в этом случае весьма усложняется, так как задача становится пространственной.

Однако, как это делается в гидравлике неравномерного медленно изменяющегося течения, мы можем приближенно

считать распределение скоростей и давлений равномерным по всей мощности пласта.



Фиг. 42.

Тогда, рассматривая пласт, как своего рода трубу переменного сечения, заполненную пористой средой (фиг. 42), можно составить дифференциальные уравнения неразрывности и движения.

Пусть площадь поперечного сечения пласта f есть известная функция координаты s . Уравнение неразрывности получается обычным путём из рассмотрения веса жидкости, втекающей и вытекающей в элемент пласта, ограниченный сечениями s и $s + ds$; имеем

$$f ds \frac{\partial}{\partial t} (m\gamma) = - \frac{\partial G}{\partial s} ds, \quad (6.88)$$

где G — весовой расход в сечении s .

Согласно закону Дарси, учитывая сжимаемость жидкости и упругость порового пространства, имея в виду уравнение (6.8), получим

$$G = -\gamma \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial s} f = -\gamma \frac{k}{\mu} f \frac{K}{(m_f)_0} \frac{\partial (m_f)}{\partial s} \approx \frac{kK}{\mu m} \frac{\partial (m_f)}{\partial s}, \quad (6.89)$$

так как можно принять $\frac{T}{T_0} \approx 1$.

Согласно (6.89) и (6.88) теперь найдём

$$f \frac{\partial(m_\gamma)}{\partial t} = \kappa \left[f \frac{\partial^2(m_\gamma)}{\partial s^2} + \frac{df}{ds} \frac{\partial(m_\gamma)}{\partial s} \right]. \quad (6.90)$$

Уравнение (6.90) можно ещё представить так:

$$\frac{\partial(m_\gamma)}{\partial t} = \kappa \left[\frac{\partial^2(m_\gamma)}{\partial s^2} + \frac{d \ln f}{ds} \frac{\partial(m_\gamma)}{\partial s} \right]. \quad (6.91)$$

Аналогично получим

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \left[\frac{\partial^2 p}{\partial s^2} + \frac{d \ln f}{ds} \frac{\partial p}{\partial s} \right]; \quad (6.92)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \kappa \left[\frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2} + \frac{d \ln f}{ds} \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right]. \quad (6.93)$$

Уравнения (6.91) — (6.93) являются линейными уравнениями второго порядка параболического типа и могут быть проинтегрированы обычными методами при соответствующих начальных и граничных условиях.

Из (6.92) легко получается преобразование уравнения (6.9) к полярным или сферическим координатам, когда тече-
ние есть функция одного переменного r , что обычно требует выражения оператора Лапласа в этих системах координат. Например, в полярных координатах для плоского пласта с центральной скважиной, заменяя s в (6.92) на r , при $h = \text{const}$ получим

$$f = 2\pi r h; \quad \frac{d \ln f}{ds} = \frac{d \ln f}{dr} = \frac{1}{r},$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \kappa \nabla^2 p.$$

Для радиального притока к точечному источнику

$$f = 4\pi r^2; \quad \frac{d \ln f}{dt} = \frac{2}{r},$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \kappa \nabla^2 p.$$

ГЛАВА VII

ТЕОРИЯ НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ СКВАЖИН И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПЛАСТОВ

§ 29. О скорости восстановления пластового давления в скважинах-пьезометрах после прекращения откачки из соседних скважин при упругом режиме фильтрации

При исследовании скважин иногда пользуются следующим методом: в какой-либо момент времени внезапно останавливают откачуку жидкости из скважины и следят за подъёмом динамического уровня $H_{дин}$ во времени. Полученная при этом кривая зависимости $H_{дин} = H_{дин}(t)$ позволяет сделать ряд заключений эксплоатационного характера о работе скважины. Ряд таких исследований был выполнен В. Н. Щелкачевым.

На одном из нефтяных промыслов им были сделаны следующие наблюдения: одновременно измерялись подъёмы уровня в двух соседних скважинах: одной — эксплоатационной и второй — пространающей, которая служила скважиной-пьезометром. После прекращения откачки из эксплоатационной скважины в ней наблюдался подъём динамического уровня. Оказалось что подъём в соседней скважине-пьезометре начинался не сразу, а только через некоторое время, достаточно длительное — порядка 10 минут при расстоянии между скважинами около 100 метров.

Ниже излагается теория этого явления и его использование для определения некоторых гидромеханических констант пласта.

Рассмотрим пласт, эксплуатируемый рядом скважин, из которых рассмотрим какую-либо одну (фиг. 43). Предполо-

жим, что на некотором расстоянии b от неё давление не зависит от её дебита, а определяется совокупностью дебитов остальных скважин. Таким образом, схематично мы можем рассматривать одну центральную скважину в круговом пласте радиуса b , на контуре которого давление p остаётся постоянным $p = p_k$.

Предположим, что в начале из скважины отбирался постоянный дебит Q при динамическом давлении в скважине $p = (p_c)_0$.

Сформулируем задачу следующим образом: пусть внезапно откачка из скважины прекратилась, и жидкость, вытекающая из пласта, заполняет ствол скважины, в которой уровень H начинает повышаться. Требуется определить в дальнейшие моменты времени давление в любой точке пласта с учётом упругости жидкости, предполагая, что на окружности $r = b$ давление $p = p_k$ остаётся неизменным. Пласт считается однородным и движение подчиняющимся закону Дарси. Искомая функция — давление — считается зависящей от радиуса r и времени t .

Границные условия заключаются в следующем:

1) расход, вытекающий из пласта в скважину, идёт на повышение в ней динамического уровня. Таким образом, при $r = a$ — радиусу скважины:

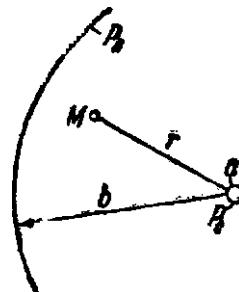
$$2\pi a \frac{kh}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=a} = \frac{f_k}{\gamma_0} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_{r=a} \quad (7.1)$$

где h — мощность пласта, f_k — площадь кольцевого сечения скважины между обсадными и подъёмными трубами, γ_0 — удельный вес жидкости и

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=a} = \frac{f_k \mu}{2\pi k h \gamma_0 a} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_{r=a} \quad (7.2)$$

2) на окружности $r = b$ — контуре питания

$$p = p_k = \text{const.} \quad (7.3)$$



Фиг. 43.

Начальные условия: при $t=0$ считается известным распределением давления

$$p = g(r). \quad (7.4)$$

Так как при $t=0$ распределение давления было стационарным, то

$$g(r) = (p_c)_0 + \frac{p_k - (p_c)_0}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{r}{a}. \quad (7.5)$$

Ищем частное решение уравнения (6.9), обращающееся в нуль при $r=b$, в виде

$$U_0(ar) e^{-ix^2 t},$$

где

$$U_0(ar) = J_0(ar) Y_0(ab) - J_0(ab) Y_0(ar), \quad (7.6)$$

причём J_0 , Y_0 — бесселевы функции нулевого порядка первого и второго рода. Характеристические числа α должны быть определены из граничного условия (7.2), которое принимает вид:

$$\alpha U'_0(\alpha a) = -\frac{f_k \mu}{2\pi k h Y_0 a} x a^2 U_0(\alpha a)$$

или

$$U'_0(\alpha a) + M x a U_0(\alpha a) = 0, \quad (7.7)$$

где

$$M = \frac{f_k \mu}{2\pi k h Y_0 a}. \quad (7.8)$$

Покажем, что фундаментальные функции $U_0(\alpha r)$, где α определены (7.7), не образуют ортогональной системы. Для этого, как обычно поступают в теории бесселевых функций, вычислим интеграл

$$I = \int_a^b r U_0(\alpha_1 r) U_0(\alpha_2 r) dr.$$

Здесь α_1 и α_2 — какие-либо два корня уравнения (7.7).

Как известно,

$$I = \int_a^b r U_0(\alpha_1 r) U_0(\alpha_2 r) dr = \frac{[x_2 r U'_0(\alpha_2 r) U_0(\alpha_1 r) - x_1 r U'_0(\alpha_1 r) U_0(\alpha_2 r)]_a^b}{x_1^2 - x_2^2}$$

или, так как

$$U_0(a_1 b) = U_0(a_2 b) = 0,$$

$$I = \frac{a}{a_1^2 - a_2^2} [a_1 U'_0(a_1 a) U_0(a_2 a) - a_2 U'_0(a_2 a) U_0(a_1 a)].$$

Учитывая (7.7), I представим следующим образом:

$$I = \frac{a}{a_1^2 - a_2^2} [-M \alpha a_1^2 U_0(a_1 a) U_0(a_2 a) + M \alpha a_2^2 U_0(a_2 a) U_0(a_1 a)] = \\ = -M \alpha a U_0(a_1 a) U_0(a_2 a). \quad (7.9)$$

Отсюда следует, что $I \neq 0$ и, следовательно, функции $U_0(ar)$ не ортогональны.

Таким образом, обычный способ решения — представление искомой функции рядом $\sum c_n U_0(a_n r) e^{-\frac{\alpha a_n t}{M}}$ требует для определения коэффициентов c_n из начального условия (7.4) предварительной ортогонализации системы функций $U_0(a_n r)$.

Процесс ортогонализации является весьма кропотливым и утомительным; поэтому мы будем искать решение другим способом, воспользовавшись тем обстоятельством, что в (7.4) $g(r)$ является стационарным распределением давления и, следовательно, удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 g(r) = 0.$$

Сделаем следующую замену переменных.

Введём новую функцию

$$u = p(r, t) - g(r). \quad (7.10)$$

Функция u , очевидно, есть подъём давления сверх первоначального стационарного.

Так как $\nabla^2 g(r) = 0$, то (6.9) удовлетворяется:

$$x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (7.11)$$

Начальное условие, согласно (7.4) и (7.10), будет

$$t = 0, \quad u = 0. \quad (7.12)$$

Границочное условие (7.3) принимает вид

$$r = b, \quad u = 0 \quad (7.13)$$

Границное условие (7.2) изменится; согласно (7.8) и (7.10) имеем

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{dg}{dr}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

и вместо (7.2) будет

$$r = a, \quad \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{dg}{dr} = M \frac{\partial u}{\partial t}.$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial r} - M \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{dg}{dr} = V_0. \quad (7.14)$$

Будем искать функцию u в виде некоторого контурного интеграла в плоскости комплексного переменного a :

$$u = \int_{(P)} c(a) U_0(ar) e^{-xa^2 t} da, \quad (7.15)$$

где $U_0(ar)$ определено (7.6).

Путь интегрирования (P) и $c(a)$ постараемся выбрать так, чтобы удовлетворить граничному условию (7.14) и начальному (7.12).

Согласно (7.14), из уравнения (7.15) получим, предполагая возможным дифференцирование по параметрам r и t под знаком интеграла

$$\int_{(P)} c(a) \left[\frac{\partial U_0(ar)}{\partial r} + Mxa^2 U_0(ar) \right]_{r=a} e^{-xa^2 t} da = V_0. \quad (7.16)$$

Предположим, далее, что константу V_0 также можно представить в виде контурного интеграла по тому же пути (P)

$$V_0 = \int_{(P)} A(a) e^{-xa^2 t} da. \quad (7.17)$$

Тогда из (7.16) и (7.17) получаем

$$c(a) = \frac{A(a)}{\left[\frac{\partial U_0(ar)}{\partial r} + Mxa^2 U_0(ar) \right]_{r=a}},$$

откуда

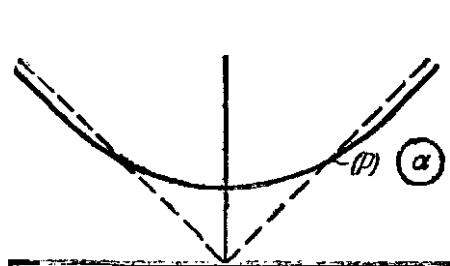
$$u = \int_{(P)} \frac{A(a) U_0(ar) e^{-xa^2 t}}{\left[\frac{\partial U_0(ar)}{\partial r} + Mxa^2 U_0(ar) \right]_{r=a}} da. \quad (7.18)$$

Следуя Карлслоу¹⁾, мы берем за путь интегрирования (P) кривую, лежащую в верхней полуплоскости α , асимптотами которой являются биссектрисы прямых углов между осями координат (фиг. 44).

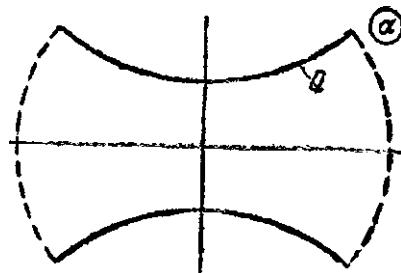
Нетрудно убедиться, что интеграл

$$I_1 = \frac{V_0}{l\pi} \int_{(P)} \frac{e^{-\alpha^2 t}}{\alpha} d\alpha \quad (7.19)$$

равен V_0 при $t > 0$. Для этого построим замкнутый контур (Q), образованный линией (P), линией, симметричной (P) относительно действительной оси α , и дугами бесконечно



Фиг. 44.



Фиг. 45.

большого радиуса (фиг. 45). При $t > 0$ подинтегральное выражение в (7.19), как легко видеть, обращается в нуль на этих дугах. Учитывая, что функция $\frac{e^{-\alpha^2 t}}{\alpha}$ нечетная, можно написать

$$I_1 = \frac{V_0}{l\pi} \int_{(P)} \frac{e^{-\alpha^2 t}}{\alpha} d\alpha = \frac{V_0}{2\pi l} \int_{(Q)} \frac{e^{-\alpha^2 t}}{\alpha} d\alpha. \quad (7.20)$$

Подинтегральная функция в (7.20) имеет единственный полюс $\alpha = 0$, и из теоремы вычетов сразу получаем

$$I_1 = V_0 \text{ при } t > 0.$$

Таким образом, из (7.17) и (7.20) имеем

$$A(\alpha) = \frac{V_0}{l\pi\alpha}. \quad (7.21)$$

¹⁾ См. сноску на стр. 102.

Далее, из (7.18) находим следующее выражение для u :

$$u = \frac{V_0}{l\pi} \int_{(P)} \frac{U_0(ar) e^{-x^2 t} da}{a \left[\frac{\partial U_0(ar)}{\partial r} + M \alpha^2 U_0(ar) \right]_{r=a}}. \quad (7.22)$$

Рассмотрим подинтегральное выражение (7.22). Докажем, что оно вещественно и однозначно на всей действительной оси α и имеет только простые вещественные полюсы.

Вопрос о вещественности возникает потому, что $U_0(ar)$ есть линейная комбинация бесселевых функций первого и второго рода, причём последние содержат логарифм. Как известно,

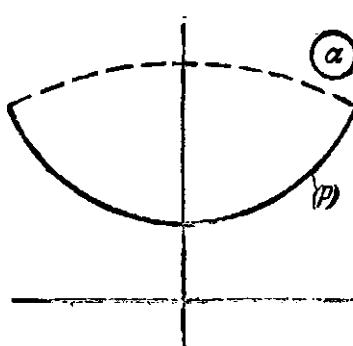
$$Y_0(-x) = Y_0(x) - 2iJ_0(x),$$

откуда, согласно (7.6), учитывая, что $J_0(x)$ есть чётная функция, найдём

$$U_0(-ar) = J_0(ar) [Y_0(ab) - 2iJ_0(ab)] - J_0(ab) [Y_0(ar) - 2iJ_0(ar)] = J_0(ar) Y_0(ab) - J_0(ab) Y_0(ar) = U_0(ar). \quad (7.23)$$

Следовательно, первая часть предложения доказана.

Для доказательства второй части предложения заметим, что полюсами в (7.22) будут точки $\alpha = 0$ и корни уравнения (7.7). Последнее же, как



Фиг. 46.

следует из (7.9) и обычных рассуждений, применяемых в теории функций Бесселя, имеет только простые вещественные корни. Таким образом, и вторая часть предложения доказана.

Из асимптотических выражений для бесселевых функций при больших значениях аргумента α можно без труда показать, что при $t = 0$ подинтегральное выражение в (7.22) обращается в нуль на дуге бесконечно большого радиуса в верхней полуплоскости α (фиг. 46, пунктир), а при $t > 0$ — на дугах бесконечно большого радиуса, показанных пунктиром на фиг. 45.

Замечая, что подинтегральное выражение в (7.22) является нечётной функцией α , мы можем теперь, как и выше,

заменить путь интегрирования (P) (фиг. 44) замкнутым контуром (Q) (фиг. 45):

$$u = \frac{V_0}{2\pi i} \int_{(Q)} \frac{U_0(ar) e^{-i\alpha st} d\alpha}{\alpha \left[\frac{\partial U_0(ar)}{\partial r} + M\alpha^2 U_0(ar) \right]_{r=a}} = \\ = V_0 (R_0 + 2 \sum_{s=1}^{\infty} R_s), \quad (7.24)$$

где R_0 — вычет подинтегральной функции относительно полюса $\alpha = 0$, R_s — вычет относительно полюса, являющегося положительным корнем α_s уравнения (7.7).

Для вычетов R_0 и R_s будем иметь

$$R_0 = \left\{ \frac{U_0(ar)}{\left[\frac{\partial U_0(ar)}{\partial r} + M\alpha^2 U_0(ar) \right]_{r=a}} \right\}_{\alpha=0}, \quad (7.25)$$

$$R_s = \left\{ \frac{U_0(\alpha_s r) e^{-i\alpha_s^2 t}}{\left[\frac{\partial^2 U_0(ar)}{\partial r \partial \alpha} + 2M\alpha U_0(ar) + M\alpha^2 \frac{\partial U_0(ar)}{\partial \alpha} \right]_{r=a}} \right\}_{\alpha=\alpha_s}. \quad (7.26)$$

Вычислим производные $\frac{\partial U_0(ar)}{\partial r}$, $\frac{\partial U_0(ar)}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial^2 U_0(ar)}{\partial r \partial \alpha}$.

Из (7.6) получим

$$\frac{\partial U_0(ar)}{\partial r} = \alpha [J_0(ab) Y_1(ar) - J_1(ar) Y_0(ab)] = \alpha U'_0(ar), \quad (7.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_0(ar)}{\partial \alpha} = r [J_0(ab) Y_1(ar) - J_1(ar) Y_0(ab)] + \\ + b [J_1(ab) Y_0(ar) - J_0(ar) Y_1(ab)], \end{aligned} \quad (7.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_0(ar)}{\partial r \partial \alpha} = r \alpha [J_0(ab) Y_0(ar) - J_0(ar) Y_0(ab)] + \\ + b \alpha [J_1(ar) Y_1(ab) - J_1(ab) Y_1(ar)]. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Далее, воспользуемся выражениями функций Бесселя для малых значений аргумента x

$$\begin{aligned} J_0(x) \approx 1; \quad J_1(x) \approx \frac{x}{2}; \\ Y_0(x) \approx \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma x}; \quad Y_1(x) \approx -\frac{2}{\pi x}; \end{aligned} \quad (7.30)$$

здесь $\gamma = 1,781072\dots$ — эйлерова постоянная.

Теперь мы можем вычислить вычеты R_0 и R_s в (7.25) и (7.26).

Имеем из (7.6) и (7.30)

$$\lim_{a \rightarrow 0} U_0(ar) = -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\pi \gamma ab} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\pi \gamma ar} = \frac{2}{\pi} \ln \frac{b}{r}, \quad (7.31)$$

а из (7.27) и (7.30)

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{\partial U_0(ar)}{\partial r} \right]_{r=a} = -\frac{2}{\pi a}. \quad (7.32)$$

Отсюда

$$R_0 = -a \ln \frac{b}{r}. \quad (7.33)$$

Далее, из (7.28) и (7.29), согласно (7.26), получаем

$$R_s = \frac{U_0(a_s r)}{a_s \alpha_s} e^{-\pi \alpha_s^2 t}, \quad (7.34)$$

где α_s — s -й положительный корень уравнения (7.7)

$$\begin{aligned} \alpha_s = & (2Mx - a) \alpha_s' [J_0(\alpha_s a) Y_0(\alpha_s b) - J_0(\alpha_s b) Y_0(\alpha_s a)] + \\ & + b \alpha_s [J_1(\alpha_s a) Y_1(\alpha_s b) - J_1(\alpha_s b) Y_1(\alpha_s a)] + \\ & + Mx \alpha_s^2 \{a [J_0(\alpha_s b) Y_1(\alpha_s a) - J_1(\alpha_s a) Y_0(\alpha_s b)] + \\ & + b [J_1(\alpha_s b) Y_0(\alpha_s a) - J_0(\alpha_s a) Y_1(\alpha_s b)]\}. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Из (7.5) и (7.14) находим

$$V_0 = -\frac{1}{a} \frac{p_k - (p_c)_0}{\ln \frac{b}{a}}. \quad (7.36)$$

Таким образом, окончательно для u , согласно (7.24), получаем

$$\begin{aligned} u = & -\frac{1}{a} \frac{p_k - (p_c)_0}{\ln \frac{b}{a}} \left[-a \ln \frac{b}{r} + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{U_0(a_s r)}{a_s \alpha_s} e^{-\pi \alpha_s^2 t} \right] = \\ = & [p_k - (p_c)_0] \left[\frac{\ln \frac{b}{r}}{\ln \frac{b}{a}} - \frac{2}{a \ln \frac{b}{a}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{U_0(a_s r)}{a_s \alpha_s} e^{-\pi \alpha_s^2 t} \right]. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Приведём это уравнение к более удобному для расчётов виду. Нас будут интересовать несколько первых положитель-

ных корней уравнения (7.7). При этом обычно $b \gg a$, приблизительно в 1000—2000 раз. Таким образом, в формулах, содержащих величину $a_s a$, мы можем воспользоваться выражениями (7.30) для малых значений аргумента.

Уравнение (7.7) можно представить так:

$$-J_1(a_s a) Y_0(a_s b) + J_0(a_s b) Y_1(a_s a) + \\ + M \kappa z_s [J_0(a_s a) Y_0(a_s b) - J_0(a_s b) Y_0(a_s a)] = 0. \quad (7.38)$$

Обозначим

$$\frac{b}{a} = \rho, \quad (7.39)$$

$$a_s b = z_s, \quad (7.40)$$

$$\frac{M \kappa}{a} = \chi, \quad (7.41)$$

причём ρ , z_s , χ , очевидно, безразмерны.

Тогда, предполагая $a_s a = \frac{z_s}{\rho}$ малым и пользуясь (7.30), вместо (7.38) получим

$$(2\chi - 1) Y_0(z_s) - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\rho^2}{z_s^2} - \chi \ln \frac{2\rho}{\gamma z_s} \right) J_0(z_s) = 0. \quad (7.42)$$

Обычно χ очень велико — порядка десятков и даже сотен тысяч. Поэтому без практической погрешности уравнение (7.42) можно представить так:

$$2\chi Y_0(z_s) - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\rho^2}{z_s^2} - \chi \ln \frac{2\rho}{\gamma z_s} \right) J_0(z_s) = 0$$

или

$$\frac{\pi}{2} \frac{Y_0(z_s)}{J_0(z_s)} z_s^2 - z_s^2 \ln z_s = \frac{\rho^2}{\chi} - z_s^2 \ln \frac{2\rho}{\gamma}. \quad (7.43)$$

Для нахождения ближайших z_s на фиг. 47 построен график функции

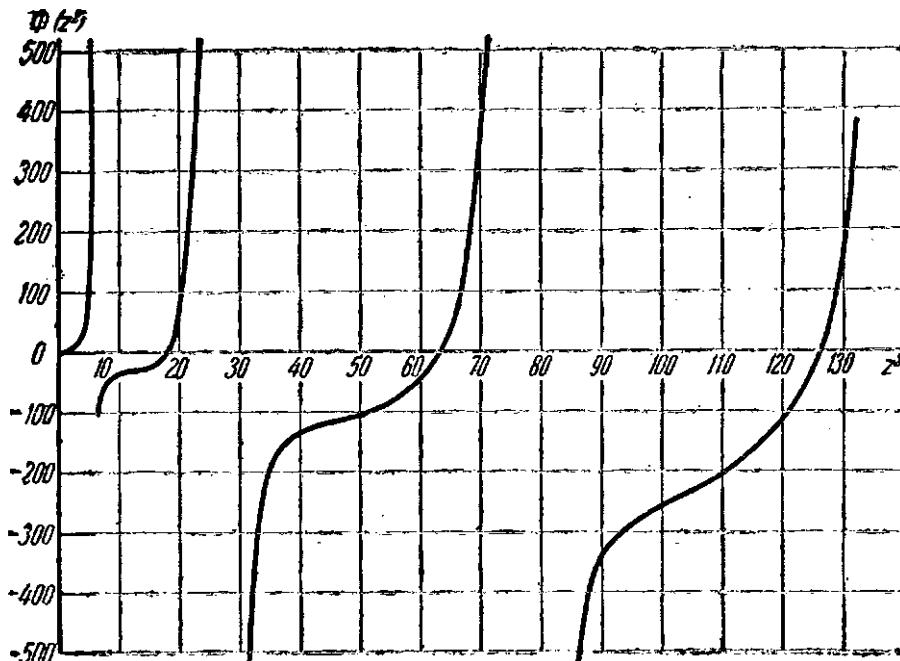
$$\Phi(z^2) = \frac{\pi}{2} \frac{Y_0(z)}{J_0(z)} z^2 - z^2 \ln z.$$

Пересечение кривых этого графика с прямой

$$\Phi(z^2) = \frac{\rho^2}{\chi} - z^2 \ln \frac{2\rho}{\gamma}$$

определяет значения z_s^2 . Прямую же легко построить, зная $\frac{\rho^2}{\chi}$ и ρ^1).

При достаточно большом значении χ (7.43) может иметь первый корень z_1 близким к нулю. Этот корень имеет очень простой физический смысл, который мы выясним ниже.



Фиг. 47.

Пусть $z_1 \ll 1$, тогда из (7.30) вместо (7.43) получим

$$\frac{\rho^2}{\chi z_1^2} = \ln \rho,$$

откуда

$$z_1 = \frac{\rho}{V\chi \ln \rho} \quad (7.44)$$

1) Разумеется, здесь не может возникнуть путаницы с прежними обозначениями ρ и χ . В настоящем параграфе $\rho = \frac{b}{a}$, согласно (7.39), $\chi = 1,781072$ — эйлерова постоянная.

и, согласно (7.41) и (7.8):

$$\alpha a_1^2 = \alpha \frac{z_1^2}{b^2} = \frac{\chi \frac{\rho^2}{b^2} \ln \rho}{\chi \ln \rho} = \frac{2\pi k h \gamma_0}{\mu f_k \ln \frac{b}{a}}. \quad (7.45)$$

Обычно $\rho = \frac{b}{a}$ есть величина порядка нескольких тысяч. Поэтому по сравнению с первыми корнями $z_s = a_s b$ величины $\frac{z_s}{\rho}$ будут очень малы.

Тогда, учитывая (7.30) и (7.41), вместо (7.35) получим

$$\begin{aligned} \alpha_s \sigma_s = & \left((2\chi - 1) \frac{z_s}{\rho} \left[Y_0(z_s) + \frac{2}{\pi} J_0(z_s) \ln \frac{2\rho}{\gamma z_s} \right] + \right. \\ & + z_s \left[\frac{z_s}{2\rho} Y_1(z_s) + \frac{2\rho}{\pi z_s} J_1(z_s) \right] - \chi \frac{z_s^2}{\rho^2} \left\{ \frac{2\rho}{\pi z_s} J_0(z_s) + \frac{z_s}{2\rho} Y_0(z_s) + \right. \\ & \left. \left. + \rho \left[\frac{2}{\pi} J_1(z_s) \ln \frac{2\rho}{\gamma z_s} + Y_1(z_s) \right] \right\} \right) \frac{z_s}{b} = \frac{\alpha_s z_s}{b}. \quad (7.46) \end{aligned}$$

Если первый корень z_1 (7.43) близок к нулю, то, имея в виду, что χ очень велико, вместо (7.46) для $\alpha_1 \sigma_1$ найдём

$$\begin{aligned} \alpha_1 \sigma_1 = & \frac{\alpha_1 z_1}{b} = \\ = & \left[\frac{4\chi}{\pi} \frac{z_1}{\rho} \ln \rho - \frac{z_1}{\pi \rho} + \frac{z_1^2}{\pi} - \chi \left(\frac{z_1^3}{\pi \rho^2} \ln \frac{2\rho}{\gamma z_1} - \frac{z_1^3}{\pi \rho^3} \ln \frac{2}{\gamma z_1} \right) \right] \frac{z_1}{b}. \quad (7.47) \end{aligned}$$

Заменяя, далее, в (7.47) z_1 из уравнения (7.44), будем иметь

$$\alpha_1 \sigma_1 = \frac{4\rho}{\pi b} \left[1 - \frac{1}{4\chi \ln \rho} - \frac{\rho^2}{4\chi \ln^2 \rho} \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right) \ln \left(\frac{2\sqrt{\chi \ln \rho}}{\gamma \rho} \right) \right] \quad (7.48)$$

или приближённо

$$\alpha_1 \sigma_1 \approx \frac{4\rho}{\pi b}. \quad (7.49)$$

Учитывая (7.31), (7.45) и (7.49), уравнение (7.37) можно

будет представить следующим образом:

$$\begin{aligned}
 u = & [p_k - (p_c)_0] \left[\frac{\ln \frac{b}{r}}{\ln \frac{b}{a}} - \frac{2b}{a \ln \frac{b}{a}} - \frac{2 \ln \frac{b}{r}}{\pi \rho} - \frac{\pi}{4} e^{-\frac{2\pi k h \gamma_0 t}{\mu f_k \ln \rho}} \right. \\
 & \left. - \frac{2}{a \ln \rho} \sum_{s=2}^{\infty} \frac{U_0(a_s r)}{a_s \sigma_s} e^{-x a_s^2 t} \right] = \\
 = & [p_k - (p_c)_0] \left[\frac{\ln \frac{b}{r}}{\ln \frac{b}{a}} \left(1 - e^{-\frac{2\pi k h \gamma_0 t}{\mu f_k \ln \rho}} \right) - \frac{2}{a \ln \rho} \sum_{s=2}^{\infty} \frac{U_0(a_s r)}{a_s \sigma_s} e^{-x a_s^2 t} \right]. \tag{7.50}
 \end{aligned}$$

Обозначим

$$x a_s^2 t = z_s^2 \tau, \tag{7.51}$$

где

$$\tau = \frac{x t}{b^2} = \frac{k K t}{m \mu b^2}. \tag{7.52}$$

Тогда (7.37) можно представить ещё и в таком виде:

$$u = [p_k - (p_c)_0] \left[\frac{\ln \frac{b}{r}}{\ln \rho} - \frac{2\rho}{\ln \rho} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{U_0\left(\frac{z_s r}{b}\right)}{z_s \sigma_s} e^{-z_s^2 \tau} \right], \tag{7.53}$$

где, согласно (7.16) и (7.40),

$$U_0\left(\frac{z_s r}{b}\right) = J_0\left(\frac{z_s r}{b}\right) Y_0(z_s) - J_0(z_s) Y_0\left(\frac{z_s r}{b}\right), \tag{7.54}$$

а $z_s \sigma_s$ определяется из (7.46).

При очень малом z_1 , когда z_1 возможно определить из уравнения (7.44), вместо (7.50) получим

$$u = [p_k - (p_c)_0] \left[\frac{\ln \frac{b}{r}}{\ln \rho} \left(1 - e^{-\frac{2\pi k h \gamma_0 t}{\mu f_k \ln \rho}} \right) - \frac{2\rho}{\ln \rho} \sum_{s=2}^{\infty} \frac{U_0\left(\frac{z_s r}{b}\right)}{z_s \sigma_s} e^{-z_s^2 \tau} \right]. \tag{7.55}$$

Первый член в (7.50) или (7.54) имеет простой физический

смысл: он определяет рост пластового давления в случае несжимаемой жидкости. Действительно, если жидкость несжимаема, то из формулы Диопюи для давления в скважине имеем

$$\frac{2\pi k h}{\mu} \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{b}{a}} = \frac{f_k}{\gamma_0} \frac{dp_c}{dt}.$$

Интегрируя это уравнение и обозначая, согласно (7.39), $\frac{b}{a} = \rho$, получаем

$$\frac{dp_c}{p_k - p_c} = \frac{2\pi k h \gamma_0}{\mu f_k \ln \rho} dt$$

или

$$\ln(p_k - p_c) = -\frac{2\pi k h \gamma_0 t}{\mu f_k \ln \rho} + \text{const.}$$

Так как при $t = 0$ $p_c = (p_c)_0$, то

$$\frac{p_k - p_c}{p_k - (p_c)_0} = e^{-\frac{2\pi k h \gamma_0 t}{\mu f_k \ln \rho}}. \quad (7.56)$$

Для давления p в любой точке пласта в каждый момент так как жидкость считается несжимаемой, имеем

$$p = p_k - \frac{p_k - p_c}{\ln \rho} \ln \frac{b}{r}.$$

Обозначая, далее, давление в начальный момент через p_0 и учитывая (7.4) и (7.10), найдём

$$g(r) = p_0 = p_k - \frac{p_k - (p_c)_0}{\ln \rho} \ln \frac{b}{r},$$

откуда

$$u = p - g(r) = p - p_0 = [p_c - (p_c)_0] \frac{\ln \frac{b}{r}}{\ln \rho}. \quad (7.57)$$

Но из (7.56):

$$p_c - (p_c)_0 = [p_k - (p_c)_0] (1 - e^{-\frac{2\pi k h \gamma_0 t}{\mu f_k \ln \rho}}).$$

Таким образом,

$$p - p_0 = [p_k - (p_c)_0] \frac{\ln \frac{b}{r}}{\ln \rho} \left(1 - e^{-\frac{2\pi k h_0 t}{\mu f_k \ln \rho}}\right), \quad (7.58)$$

что совпадает с первым членом (7.50) и (7.55).

§ 30. Случай несжимаемой жидкости, когда учитывается влияние второй скважины-пьезометра

Везде выше вторая скважина играла, вообще говоря, роль не пьезометра, а манометра, регистрирующего давление в данной точке пласта. В действительности же она является именно пьезометром, и тогда, когда происходит подъём уровней в обеих скважинах, в пласте действуют два стока, а не один, как мы предполагали до сих пор.

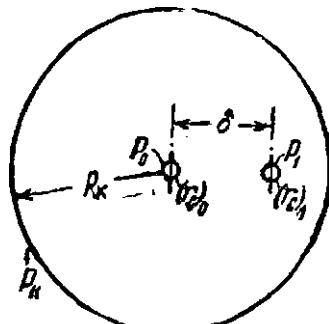
Учтём интерференцию этих двух стоков. В этом случае учёт сжимаемости чрезвычайно усложняет задачу и для упрощения мы будем считать жидкость несжимаемой. Дебиты скважин будут зависеть от динамических уровней и контурного давления.

В общем случае, когда в круговом пласте радиуса R_k с контурным давлением p_k расположено n скважин радиусов (r_i) , с противодавлениями $(p_c)_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, дебиты Q_i могут быть определены из системы уравнений первой степени (2.33) и (2.34).

Для случая двух скважин, из коих одна расположена в центре (фиг. 48), в этих уравнениях следует положить: $n = 2$; $\delta_1 = 0$; $\delta_2 = \delta$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Центральную скважину и величины, к ней относящиеся, будем обозначать индексом «0», а скважину, смешённую на расстояние δ от центра, индексом «1». Тогда из (2.33) и (2.34) для дебитов Q_0 и Q_1 получим уравнения первой степени, решая которые найдём

$$\left. \begin{aligned} Q_0 &= C(p_k - p_0) - B(p_k - p_1), \\ Q_1 &= A(p_k - p_1) - B(p_k - p_0), \end{aligned} \right\} \quad (7.59)$$



Фиг. 48.

где A , B , C имеют следующие значения:

$$A = 2\pi \frac{kh}{\mu \Delta} \ln \frac{R_k}{(r_c)_0}, \quad (7.60)$$

$$B = 2\pi \frac{kh}{\mu \Delta} \ln \frac{R_k}{\delta}, \quad (7.61)$$

$$C = 2\pi \frac{kh}{\mu \Delta} \ln \frac{R_k}{(r_c)_1} \left(1 - \frac{\delta^2}{R_k^2} \right), \quad (7.62)$$

$$\Delta = \ln \frac{R_k}{(r_c)_1} \left(1 - \frac{\delta^2}{R_k^2} \right) \ln \frac{R_k}{(r_c)_0} - \ln^2 \frac{R_k}{\delta}. \quad (7.63)$$

Если откачка из скважины прекращена, то уровни в скважинах начнут повышаться. Предполагая R_k и p_k неизменными, из (7.59) получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\left. \begin{aligned} Q_0 &= C(p_k - p_0) - B(p_k - p_1) = \frac{f_0}{\gamma_0} \frac{dp_0}{dt}, \\ Q_1 &= A(p_k - p_1) - B(p_k - p_0) = \frac{f_1}{\gamma_0} \frac{dp_1}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (7.64)$$

Здесь f_0 и f_1 — площади сечений кольцевых пространств скважин, внутри которых происходит подъём уровней, γ_0 — удельный вес жидкости.

Общее решение уравнений (7.64) после вычислений получим в следующем виде:

$$p_k - p_0 = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t}, \quad (7.65)$$

$$p_k - p_1 = \left(\frac{C\gamma_0}{f_0} + s_1 \right) \frac{c_1 f_0}{B\gamma_0} e^{s_1 t} + \left(\frac{C\gamma_0}{f_0} + s_2 \right) \frac{c_2 f_0}{B\gamma_0} e^{s_2 t}, \quad (7.66)$$

где c_1 , c_2 — произвольные постоянные;

$$s_1 = \frac{C\gamma_0}{f_0} \left[-\frac{1}{2} \left(1 + \frac{f_0}{f_1} \right) \frac{A}{C} + \sqrt{N} \right]; \quad (7.67)$$

$$s_2 = \frac{C\gamma_0}{f_0} \left[-\frac{1}{2} \left(1 + \frac{f_0}{f_1} \right) \frac{A}{C} - \sqrt{N} \right]; \quad (7.68)$$

$$N = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{f_0 A}{f_1 C} \right)^2 + \frac{f_0 B^2}{f_1 C^2}. \quad (7.69)$$

Постоянные c_1 и c_2 должны быть определены из начальных условий. В нашем случае будем считать известной начальную

депрессию $(p_k - p_0)_{t=0}$. Смешанная скважина перед прекращением откачки из центральной скважины играла роль пьезометра, и в начальный момент распределение давления в пласте определялось только одной центральной скважиной.

Таким образом, из формулы Дюпюи имеем

$$(p_k - p_1)_{t=0} = (p_k - p_0)_{t=0} \frac{\ln \frac{R_k}{\delta}}{\ln \frac{R_k}{(r_c)_0}} = (p_k - p_0)_{t=0} \frac{B}{A}. \quad (7.70)$$

Обозначая

$$\frac{(p_k - p_0)_{t=0}}{\gamma_0} = H_k \quad (7.71)$$

для указанных выше начальных условий, после вычислений найдём следующие окончательные выражения для подъёмов уровней H_0 и H_1 в скважинах сверх начальных:

$$H_0 = \frac{p_0 - (p_0)_{t=0}}{\gamma_0} = C_1 (1 - e^{s_1 t}) + C_2 (1 - e^{s_2 t}); \quad (7.72)$$

$$H_1 = \frac{p_1 - (p_1)_{t=0}}{\gamma_0} = C_3 (1 - e^{s_3 t}) + C_4 (1 - e^{s_4 t}), \quad (7.73)$$

где

$$C_1 = \frac{H_k}{2\sqrt{N}} \left[\frac{B^2}{AC} + \sqrt{N} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{f_0 A}{f_1 C} \right) \right]; \quad (7.74)$$

$$C_2 = \frac{H_k}{2\sqrt{N}} \left[\sqrt{N} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{f_0 A}{f_1 C} \right) - \frac{B^2}{AC} \right]; \quad (7.75)$$

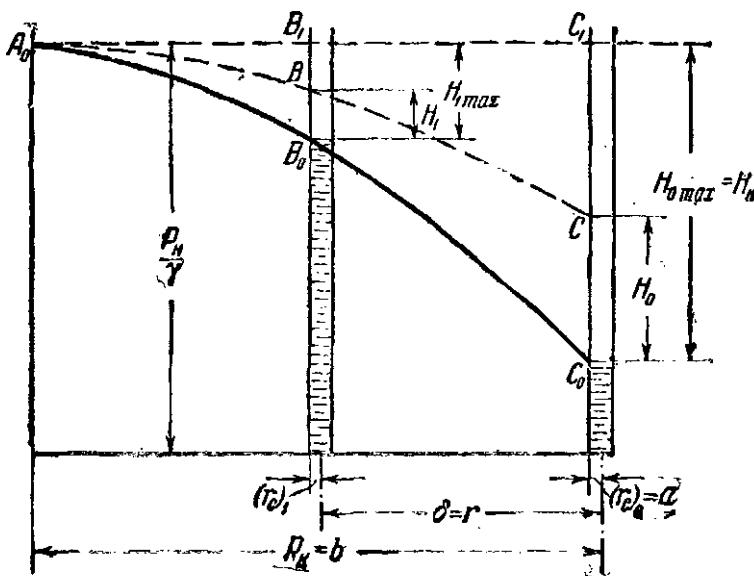
$$C_3 = \frac{H_k}{2\sqrt{N}A} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{f_0 A}{f_1 C} \right) + \sqrt{N} \right]; \quad (7.76)$$

$$C_4 = \frac{H_k}{2\sqrt{N}A} \left[\sqrt{N} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{f_0 A}{f_1 C} \right) \right]. \quad (7.77)$$

В начальный момент дебит Q_1 в скважине-пьезометре равнялся нулю, иначе говоря, $\left(\frac{dH_1}{dt} \right)_{t=0} = 0$, что легко проверить и непосредственно из (7.73). Таким образом, подъём уровня в скважине-пьезометре начинается с нулевой скоростью и скорость подъёма достигает заметной величины только через некоторое время. Вполне вероятно, что этим обстоятельством и объясняется задержка в несколько минут начала подъёма уровня в скважине-пьезометре по сравнению с началом подъёма уровня в эксплуатируемой скважине.

§ 31. Определение некоторых физических констант пласта

Покажем в заключение, как, имея фактические графики подъёмов уровней $H_0 = H_0(t)$ и $H_1 = H_1(t)$, можно определить некоторые физические константы пласта. Само собою разумеется, что истинное течение отличается в действительности от принятой здесь упрощённой схемы. Однако можно



Фиг. 49.

рассчитывать, что порядок величин этих констант, определяемых обработкой реальных кривых $H_0(t)$ и $H_1(t)$, будет соответствовать действительности.

В какой степени это так, конечно, можно будет установить только после обработок нескольких таких вполне надёжных кривых.

Как указывалось выше, мы исходим из схемы течения, показанной на фиг. 49. Первоначальная пьезометрическая линия была $A_0B_0C_0$. Мы предполагаем, что она соответствовала простому логарифмическому распределению давления по Дюпюи. После прекращения откачки из эксплоатационной скважины эта линия начала постепенно подниматься (проме-

жуточное положение показано кривой A_0BC), стремясь в пределе занять горизонтальное положение $A_0B_1C_1$.

Результаты измерений подъёмов уровней, произведённые В. Н. Щелкачевым, дают кривые вида, показанного на фиг. 50.

Обработку можно вести в двух вариантах: с учётом сжимаемости жидкости по формуле (7.53), когда вторая скважина рассматривается не как пьезометр, а закрытый манометр и без учёта сжимаемости по формулам (7.72) и (7.73), но зато рассматривая вторую скважину как пьезометр. Для удобства мы в этих случаях будем пользоваться различными

обозначениями: с учётом сжимаемости — обозначениями § 29, без учёта сжимаемости — обозначениями § 30. (На фиг. 49 показаны те и другие.)

Прежде всего нужно найти «радиус влияния» $R_k = b$. Это можно сделать, если

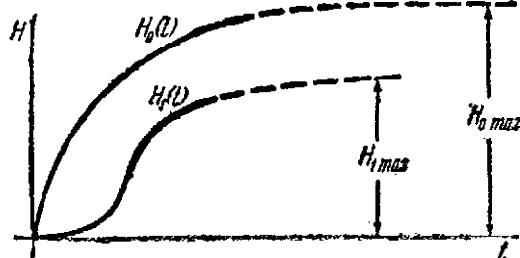
известны $H_{1\max}$ и $H_{0\max}$, так как в начале распределения давления принимается логарифмическим по Дюпон. $H_{1\max}$ и $H_{0\max}$ должны быть определены или прямо из опытов, или надлежащей экстраполяцией экспериментальных кривых $H_0(t)$ и $H_1(t)$ (фиг. 50).

Мы считаем известными расстояние между скважинами $\delta = r$ и размеры сечений скважин. Тогда, зная $H_{1\max}$ и $H_{0\max}$, получим

$$\frac{H_{1\max}}{H_{0\max}} = \frac{\ln \frac{b}{r}}{\ln \frac{b}{a}} = \frac{\ln \frac{R_k}{\delta}}{\ln \frac{R_k}{(r_c)_0}}, \quad (7.78)$$

откуда легко находим

$$\ln \frac{b}{a} = \frac{\ln \frac{r}{a}}{1 - \frac{H_{1\max}}{H_{0\max}}}. \quad (7.79)$$



Фиг. 50.

Таким образом, $b = R_k$ может быть определено.

Далее, обычно известен дебит эксплоатационной скважины Q перед прекращением откачки. Мы можем принять (фиг. 49):

$$Q = \frac{2\pi k h}{\mu} \frac{\ln \frac{b}{a}}{\ln \frac{b}{a}}, \quad (7.80)$$

откуда

$$\frac{kh}{\mu} = Q \frac{\ln \frac{b}{a}}{2\pi \ln \frac{b}{a}}. \quad (7.81)$$

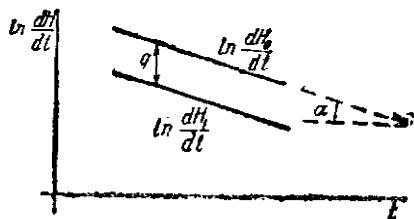
Заметим попутно, что одним из способов контроля правильности замеренных кривых $H_0(t)$ и $H_1(t)$ может быть следующее сопоставление: должно быть

$$f_0 \left(\frac{dH_0}{dt} \right)_{t=0} = Q. \quad (7.82)$$

Начальная скорость подъёма $\left(\frac{dH_0}{dt} \right)_{t=0}$ в эксплоатационной скважине легко может быть измерена из графика (фиг. 50). Очевидно, дебиты, вычисленный из (7.82) и замеренный непосредственно, должны совпадать. В противном случае эксперимент является дефектным и обработка таких исходных кривых $H_0(t)$ и $H_1(t)$ даст мало надёжные результаты.

После того, как параметр $\frac{kh}{\mu}$ из (7.81) найден, дальнейшую обработку следует вести следующим образом. Можно считать, что по истечении некоторого времени, когда скорость подъёма уровней начнёт заметно замедляться, величина подъёма будет определяться практически только первым членом (7.53). Тогда, очевидно, логарифмы скоростей подъёмов должны быть, начиная с некоторого момента, линейными функциями времени и изображаться двумя параллельными прямыми (фиг. 51).

Из (7.52) и (7.53) следует, что угловой коэффициент этих прямых и расстояние между ними q имеют следующие



Фиг. 51.

значения:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{z_1^2 x}{b^2} = \frac{z_1^2 k K}{m \mu b^2}, \quad (7.83)$$

$$q = \ln \frac{U_0 \left(z_1 \frac{a}{b} \right)}{U_0 \left(z_1 \frac{r}{b} \right)}, \quad (7.84)$$

где z_1 — первый корень трансцендентного уравнения (7.43), а U_0 определяется из (7.54). Скорости подъёма и их логарифмы могут быть определены по фиг. 50. Заметим, что из графика, изображённого на фиг. 47, следует, что во всяком случае $z_1^2 < 5,7$. Для приближённых оценок можно принять $z_1^2 \approx 5,7$, имея в виду, что в действительности $z_1^2 < 5,7$. Зная q и $\operatorname{tg} \alpha$ из графика, показанного на фиг. 51, по уравнению (7.84) можно вычислить z_1 (z_1 , конечно, вычисляется подбором или графически) и параметр

$$x = \frac{b^2}{z_1^2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Представляя последний параметр в виде

$$x = \frac{k h}{\mu m h} \frac{K}{K}, \quad (7.85)$$

мы можем найти величину $\frac{K}{m h}$, так как $\frac{k h}{\mu}$ известно из (7.81).

Для проверки следует сопоставить вычисленные значения $H_0(t)$ по формулам (7.53) с фактической кривой.

Сопоставлять кривую $H_1(t)$ с расчётом по формуле (7.53) не имеет особого смысла, так как в расчёте по (7.53) вторая скважина, как уже указывалось, рассматривается как закрытый манометр, и в начальные моменты движения следует ожидать большого расхождения. Следует ожидать, что сжимаемость жидкости, вероятно, будет мало сказываться на характере кривых $H_0(t)$ и $H_1(t)$. Поэтому после определения физических констант и размеров зоны влияния дальнейший расчёт нужно вести по формулам (7.56), (7.72) и (7.73). Если имеются опытные данные о подъёмах уровней в нескольких пьезометрических скважинах, окружающих одну эксплуатационную, то, возможно, что подобная, несколько видоизменённая методика определения констант сможет дать некоторую информацию о характере неоднородности пласта.

В качестве иллюстрации на графиках фиг. 52 приводятся две фактические кривые подъёма уровней в эксплоатационной скважине 13/8 после прекращения откачки и в скважине-пьезометре 11/8, полученные В. Н. Щелкачевым.

Точной информации о характере пластов и конструкции скважин в нашем распоряжении не было.

На фиг. 52 также нанесены точки теоретических кривых, вычисленные по нашей просьбе в Институте механики АН СССР М. М. Семчиновой. При вычислениях принималось $a = r_c = 0,15 \text{ м}$. По определению указанным выше способом оказалось, что

$$b = R_k = 630 \text{ м}; \quad \frac{z_1 k K}{\mu f_0 b^2} = 0,013 \text{ 1/мин.}$$

На фиг. 52 показаны теоретические точки для $\chi = 10^6$, вычисленные по формуле (7.53). Как видно из графика, для скважины 13/8 они довольно хорошо ложатся на фактическую кривую и идут выше фактической кривой скважины 11/8, что объясняется, как уже указывалось, тем, что в (7.53) вторая скважина рассматривается как закрытый манометр, а не пьезометр со свободно поднимающимся уровнем. Там же нанесены точки, вычисленные по уравнениям (7.56), (7.72) и (7.73) при

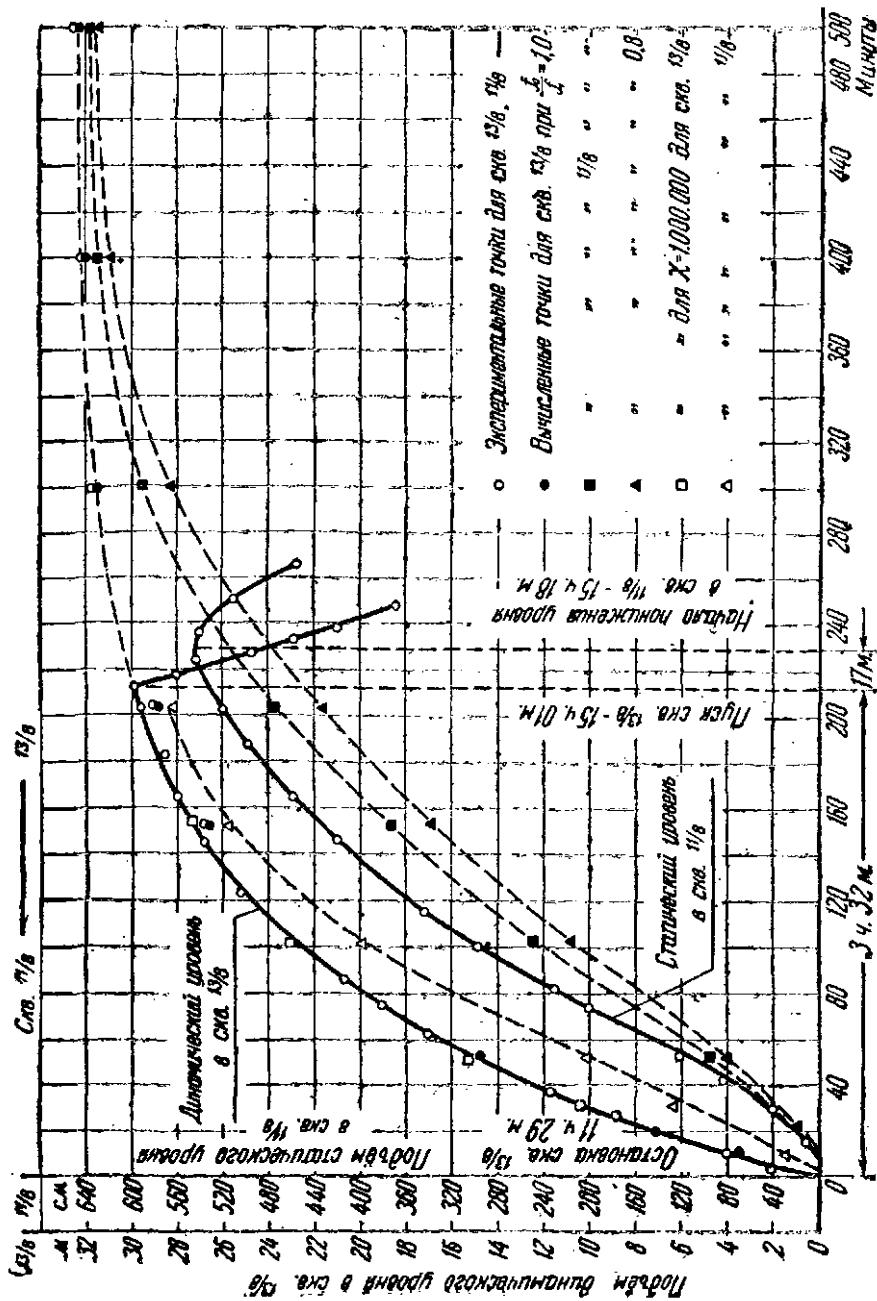
$$\frac{2\pi k h \gamma_0}{\mu f_0 \ln \rho} = 0,013 \text{ 1/мин.}$$

для значений $f_0:f_1 = 1$ и $f_0:f_1 = 0,8$.

Из рассмотрения их положения следует, что они также хорошо ложатся на фактическую кривую скважины 13/8 и лучше, чем по (7.53), на фактическую кривую скважины 11/8. В частности, хорошо заметен очень медленный рост подъёма уровня в скважине 11/8 на протяжении первых 10 минут.

§ 32. Об одном способе обработки наблюдений над восстановлением динамического уровня в единичной скважине после прекращения откачки

Известно, что индикаторные кривые $Q - S$ (Q — дебит, S — понижение уровня ниже статического), заснятые методом прослеживания динамического уровня после остановки откачки из скважины и методом пробных откачек, могут от-



Фиг. 52.

личаться друг от друга¹⁾. Причиной этому являются упругие свойства флюида и пористой среды, проявляющиеся при нестационарных режимах фильтрации.

Ниже изложен способ нахождения одного из основных упругих параметров пласта — коэффициента пьезопроводности по наблюдениям над восстановлением уровня в одной скважине.

Воспользуемся формулами (6.72), (6.74), (6.76) и (6.77), где полагаем $r = a$ — радиус скважины. Имеем

$$\Delta p = -\frac{1}{4\pi} \frac{\mu}{kh} \left[Q(t) \ln \frac{2xt}{1,781072a^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m \cdot m!} t^m Q^{(m)}(t) \right]. \quad (7.86)$$

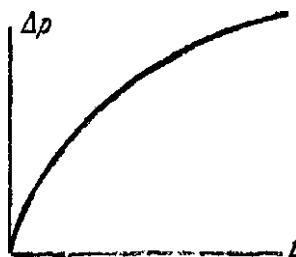
Заметим, что если вначале из скважины отбирался стационарный дебит, до дебита $Q(t)$ в этой формуле должен отсчитываться от этого стационарного.

Очевидно, если $Q(t)$ соответствует нагнетанию, то знак в (7.86) должен быть изменён на обратный.

Пусть из скважины прекращена откачка и забойное давление начинает повышаться. При помощи забойного самопишущего манометра или каким-либо другим способом получена кривая $\Delta p = \Delta p(t)$, где Δp — повышение давления (фиг. 53). Мы можем рассматривать остановку откачки как наложение некоторого расхода $Q(t)$, нагнетаемого в скважину, на первоначальный стационарный дебит скважины. Этот расход $Q(t)$ может быть определён, если повышение динамического уровня в затрубном пространстве происходит свободно.

Но если скважина фонтанирует и остановка откачки происходит не мгновенно или если в затрубном пространстве имеется газ или воздух, то определение $Q(t)$ становится затруднительным.

Покажем, как, имея только эту кривую $\Delta p = \Delta p(t)$ и не зная величины $Q(t)$, определить коэффициент пьезопроводности x . Для этого заметим, что на достаточно большом интервале



Фиг. 53.

1) Щелкачев В. Н. и Донцов К. М., Сопоставление исследований скважин различными методами. Нефтяное хозяйство, № 2—3, 1945 г.

времени, охватывающем примерно половину графика фиг. 53, $Q(t)$ может быть аппроксимирована полиномом второй или третьей степени:

$$Q(t) = q_1 t + q_2 t^2. \quad (7.87)$$

или

$$Q(t) = q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3. \quad (7.88)$$

Коэффициенты q_1 , q_2 , q_3 , очевидно, неизвестны. Подставляя последовательно (7.87) и (7.88) в (7.86) и учитывая, что $Q(t)$ соответствует нагнетанию, получим

$$\begin{aligned} \Delta p &= \frac{1}{4\pi kh} \left[(q_1 t + q_2 t^2) \ln \frac{2xt}{1,781a^2} - (q_1 t + 2q_2 t^2) + \frac{1}{4} 2q_3 t^2 \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi kh} \left[(q_1 t + q_2 t^2) \ln \frac{2xt}{1,781a^2} - q_1 t - 1,5q_2 t^2 \right]. \end{aligned} \quad (7.89)$$

$$\begin{aligned} \Delta p &= \frac{1}{4\pi kh} \left[(q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3) \ln \frac{2xt}{1,781a^2} - \right. \\ &\quad \left. - (q_1 t + 2q_2 t^2 + 3q_3 t^3) + \frac{1}{2} (q_2 t^2 + 3q_3 t^3) - \frac{1}{3} q_3 t^3 \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi kh} \left[(q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3) \ln \frac{2xt}{1,781a^2} - \right. \\ &\quad \left. - q_1 t - 1,5q_2 t^2 - 1,835q_3 t^3 \right]. \end{aligned} \quad (7.90)$$

Затем из графика фиг. 53 берём точки $t_0, \Delta p_0; t_1, \Delta p_1; t_2, \Delta p_2; t_3, \Delta p_3; \dots$, число которых на единицу превосходит порядок степени полинома, которым мы аппроксимировали $Q(t)$, и из уравнений (7.89) или (7.90) находим отношения $\frac{\Delta p_1}{\Delta p_0}, \frac{\Delta p_2}{\Delta p_0}, \dots$, число которых будет равно порядку степени полинома. При этом для неизвестных q_1, q_2, q_3, \dots будут получаться линейные однородные уравнения, для совместности которых необходимо, чтобы определитель из коэффициентов при q_1, q_2, q_3, \dots равнялся нулю. В этот определитель войдёт x , который, таким образом, может быть определён.

Для полинома (7.90) третьей степени берём из графика четыре точки $t_0, \Delta p_0; t_1, \Delta p_1; t_2, \Delta p_2; t_3, \Delta p_3; t_4, \Delta p_4$ и находим отношение

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p_1}{\Delta p_0} &= c_1 = \\ &= \frac{(q_1 t_1 + q_2 t_1^2 + q_3 t_1^3) \ln \frac{2xt_1}{1,781a^2} - q_1 t_1 - 1,5q_2 t_1^2 - 1,835q_3 t_1^3}{(q_1 t_0 + q_2 t_0^2 + q_3 t_0^3) \ln \frac{2xt_0}{1,781a^2} - q_1 t_0 - 1,5q_2 t_0^2 - 1,835q_3 t_0^3}. \end{aligned} \quad (7.91)$$

Таким же образом определяем

$$c_2 = \frac{\Delta p_2}{\Delta p_0}, \quad c_3 = \frac{\Delta p_3}{\Delta p_0}. \quad (7.92)$$

Из (7.91) получаем

$$\begin{aligned} q_1 & \left[t_1 \left(\ln \frac{2xt_1}{1,781a^2} - 1 \right) - c_1 t_0 \left(\ln \frac{2xt_0}{1,781a^2} - 1 \right) \right] + \\ & + q_2 \left[t_1^2 \left(\ln \frac{2xt_1}{1,781a^2} - 1,5 \right) - c_1 t_0^2 \left(\ln \frac{2xt_0}{1,781a^2} - 1,5 \right) \right] + \\ & + q_3 \left[t_1^3 \left(\ln \frac{2xt_1}{1,781a^2} - 1,835 \right) - c_1 t_0^3 \left(\ln \frac{2xt_0}{1,781a^2} - 1,835 \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (7.93)$$

Совершенно аналогично получим ещё два таких же уравнения, где вместо t_1 , c_1 будут находиться t_2 , c_2 и t_3 , c_3 . Для совместности всех трёх уравнений определитель, составленный из коэффициентов при q_1 , q_2 , q_3 , т. е. из величин

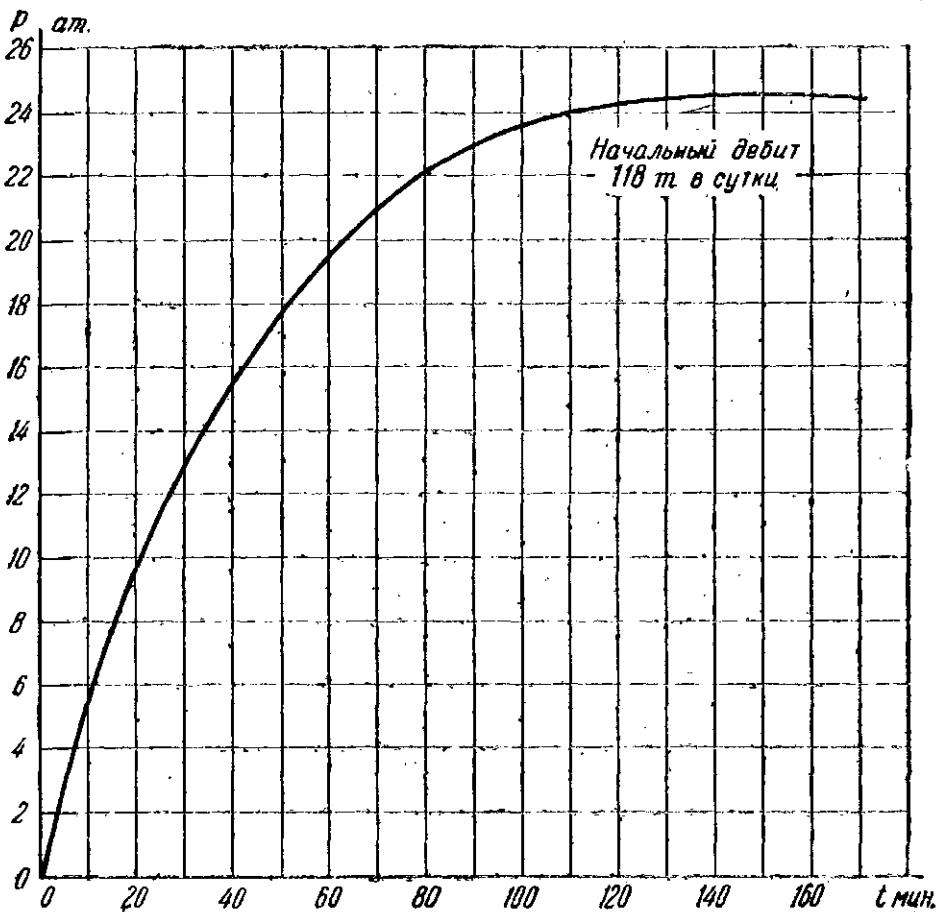
$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= t_1 \left(\ln \frac{2xt_1}{1,781a^2} - 1 \right) - c_1 t_0 \left(\ln \frac{2xt_0}{1,781a^2} - 1 \right), \\ a_{12} &= t_1^2 \left(\ln \frac{2xt_1}{1,781a^2} - 1,5 \right) - c_1 t_0^2 \left(\ln \frac{2xt_0}{1,781a^2} - 1,5 \right), \\ a_{13} &= t_1^3 \left(\ln \frac{2xt_1}{1,781a^2} - 1,835 \right) - c_1 t_0^3 \left(\ln \frac{2xt_0}{1,781a^2} - 1,835 \right), \\ a_{21} &= t_2 \left(\ln \frac{2xt_2}{1,781a^2} - 1 \right) - c_2 t_0 \left(\ln \frac{2xt_0}{1,781a^2} - 1 \right), \\ a_{22} &= t_2^2 \left(\ln \frac{2xt_2}{1,781a^2} - 1,5 \right) - c_2 t_0^2 \left(\ln \frac{2xt_0}{1,781a^2} - 1,5 \right), \\ a_{23} &= t_2^3 \left(\ln \frac{2xt_2}{1,781a^2} - 1,835 \right) - c_2 t_0^3 \left(\ln \frac{2xt_0}{1,781a^2} - 1,835 \right), \\ a_{31} &= t_3 \left(\ln \frac{2xt_3}{1,781a^2} - 1 \right) - c_3 t_0 \left(\ln \frac{2xt_0}{1,781a^2} - 1 \right), \\ a_{32} &= t_3^2 \left(\ln \frac{2xt_3}{1,781a^2} - 1,5 \right) - c_3 t_0^2 \left(\ln \frac{2xt_0}{1,781a^2} - 1,5 \right), \\ a_{33} &= t_3^3 \left(\ln \frac{2xt_3}{1,781a^2} - 1,835 \right) - c_3 t_0^3 \left(\ln \frac{2xt_0}{1,781a^2} - 1,835 \right), \end{aligned} \right\} \quad (7.94)$$

должен быть равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad (7.95)$$

Из уравнения (7.95) может быть определена величина x .

Заметим, что поскольку x , являясь весьма большим числом, входит во все формулы под знаком натурального логарифма,



Фиг. 54.

то при её определении допустимы ошибки в несколько раз, так как при этом величина натурального логарифма может меняться незначительно и функция $\Delta p = \Delta p(t)$ будет меняться очень мало при больших изменениях x . Разумеется, желательно иметь наиболее точные данные.

Если ограничиться полиномом (7.89) второй степени, то вместо (7.94) и (7.95) получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad (7.96)$$

откуда x также может быть найдена.

Для примера была использована фактическая кривая восстановления забойного давления после остановки откачки, записанная забойным самопищущим манометром (фиг. 54). Начальный дебит 118 $m^3/\text{сутки}$, радиус скважины $a = 7,6 \text{ см}$ (диаметр 6"). В затрубном пространстве находился воздух, который не имел выхода. Таким образом, непосредственное определение дебита из кривой давления графическим дифференцированием было затруднительно.

Определение коэффициента пьезопроводности x по этим данным производилось в Московском нефтяном институте Л. Ф. Клубковым при помощи формул (7.95) и (7.96). Исходные точки t_1, t_2, t_3 выбирались в различных частях графика фиг. 54. Опорной точкой была принята точка $t_0 = 2 \text{ мин.}$

Результаты расчётов представлены в табл. 3, 4.

Таблица 3

$$Q(t) = q_1 t + q_2 t^2$$

№ вариантов	t_1, t_2 минуты	$x \frac{\text{см}^2}{\text{сек}}$	ln x
1	5,12	310	5,73
2	5,17	340	5,82
3	8,14	526	6,26
4	10,15	557	6,32
5	8,22	608	6,41
6	10,20	640	6,45
7	20,60	2526	7,81
8	20,100	4510	8,41
9	60,100	412500	12,9

Таблица 4

$$Q(t) = q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3$$

№ вариантов	t_1, t_2, t_3 минуты	$x \frac{\text{см}^2}{\text{сек}}$	ln x
1	5, 12, 17	233	5,46
2	8, 14, 22	418	6,04
3	10, 15, 20	413	6,03
4	20, 60, 100	1984	7,56

Сопоставляя эти данные, мы замечаем, во-первых, что x по расчёту колеблется в широких пределах, хотя $\ln x$ меняется гораздо меньше. Наиболее широкий интервал охвачен

вариантами 7 и 8 таблицы 3 и вариантом 4 таблицы 4. Это даёт основание принять порядок величины $\kappa = 2000 \text{ см}^2/\text{сек.}$

Измерения проницаемости, вязкости и пористости по образцам кернов дают средние вероятные значения $k = 1$ дарси, $\mu = 3$ сантипуаза, $m = 0,2$. Из (6.10) находим, что при этом

$$K = \frac{K_{\kappa}}{1 + \frac{K_{\kappa}}{mK_c}} = \frac{\kappa \mu}{k} = \frac{2000 \cdot 0,2 \cdot 3}{1} = 1200 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

Как известно, K может быть меньше K_{κ} в 10—20 раз.

Вероятный порядок модуля объёмного сжатия нефти $K_{\kappa} = 15000 \text{ кг/см}^2$.

Таким образом, найденная величина $K = 1200 \text{ кг/см}^2$ представляется вполне вероятной.

§ 33. Распространение волны давления внутри жидкости в пласте от торпедирования скважин

Торпедирование скважин часто применяется для улучшения притока жидкости к скважине:

Эффект торпедирования можно уподобить мгновенной эмиссии из скважины в пласт некоторого весового количества жидкости G . Согласно уравнению (6.28), получим

$$m\gamma - (m\gamma)_0 = \frac{G}{4\pi k h t} e^{-\frac{r^2}{4kt}} = \frac{G m_0 \mu}{4\pi k K h t} e^{-\frac{r^2 m_0 \mu}{4k K t}}. \quad (7.97)$$

Здесь h — мощность пласта.

Соответствующее повышение давления Δp будет

$$\Delta p = K \frac{m\gamma - (m\gamma)_0}{(m\gamma)_0} = \frac{G \mu}{4\pi k h \gamma_0 t} e^{-\frac{r^2 m_0 \mu}{4k K t}}. \quad (7.98)$$

Величина G может быть связана с объёмом продуктов взрыва V , приведённым к атмосферному давлению следующим образом:

$$G = \frac{V}{p_0} \gamma_0, \quad (7.99)$$

где p_0 — первоначальное пластовое давление в абсолютных атмосферах.

Тогда

$$\Delta p = \frac{V}{4\pi p_0 \frac{kh}{\mu}} e^{-\frac{r^2 m_0 \mu}{4kKt}} \quad (7.100)$$

и

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = \frac{V}{4\pi p_0 \frac{kh}{\mu}} \frac{e^{-\frac{r^2 m_0 \mu}{4kKt}}}{t^2} \left(\frac{r^2 m_0 \mu}{4kKt} - 1 \right) = 0, \quad (7.101)$$

откуда значение $t = t_1$ при $(\Delta p)_{\max}$ будет выражаться следующим образом:

$$t_1 = \frac{r^2 m_0 \mu}{4kK}. \quad (7.102)$$

Из (7.100) и (7.102) находим

$$\Delta p_{\max} = \frac{V}{4\pi p_0 \frac{kh}{\mu}} \frac{4kK}{r^2 m_0 \mu} \frac{1}{e} = \frac{V}{\pi p_0 V_{\text{пл.}}} \frac{K}{m_0}, \quad (7.103)$$

где

$$V_{\text{пл.}} = \pi r^2 h \quad (7.104)$$

есть объём пласта, захваченный волной давления.

Отмечая время t_1 и измеряя Δp_{\max} , оказывается возможным определить следующие параметры пласта, которые могут представить большой практический интерес: $\frac{K}{mh}$ и $\frac{kh}{\mu}$. Найдём порядок величин Δp_{\max} и t_1 для следующего примера: $r = 100 \text{ м}$; $h = 10 \text{ м}$; $V_{\text{пл.}} = \pi \cdot 100^2 \cdot 10 = 0,314 \cdot 10^6 \text{ м}^3$; $k = 1 \text{ дарси}$; $\mu = 1 \text{ сантипуаз}$; $K = K_{\text{ж}} = 20000 \text{ кг/см}^2$; $m_0 = 0,2$.

Пусть объём продуктов взрыва $V = 20 \text{ м}^3$, пластовое давление $p_0 = 50 \text{ ат}$. Согласно (7.103), имеем

$$\Delta p_{\max} = \frac{20 \cdot 20000}{2,718 \cdot 50 \cdot 0,314 \cdot 10^6 \cdot 0,2} = 0,0466 \text{ ат.}$$

Регистрация такого давления надлежаще сконструированным и изготовленным забойным прибором не представляет особых затруднений.

Далее из (7.102) находим

$$t_1 = \frac{100^2 \cdot 10^4 \cdot 0,2 \cdot 1}{4 \cdot 1 \cdot 20000} = 250 \text{ сек.}$$

Таким образом, в этом случае на расстоянии 100 м от взрыва следует ожидать максимального давления 0,0466 atm через 250 секунд.

ГЛАВА VIII

ДВИЖЕНИЕ ГАЗА И ГАЗИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

§ 34. Дифференциальные уравнения движения газа в пористой среде

Гидродинамическая теория движения газа в пористой среде впервые была создана Л. С. Лейбензоном. Позже ряд результатов Л. С. Лейбензона был получен американским учёным Маскетом. Здесь мы даём только самое краткое изложение теории Л. С. Лейбензона и Маскета, отсылая читателя за подробностями к оригинальным работам¹⁾. Дифференциальные уравнения движения газа получаются из общих уравнений теории фильтрации (1.15), (1.19) и (1.21). Силой тяжести для простоты пренебрегаем.

Уравнение состояния (1.21) для газов можно представить в виде уравнения политропического процесса

$$\frac{p}{\gamma^n} = \text{const}, \quad (8.1)$$

где n — показатель политропы, заключённый в интервале $1 < n < \frac{c_p}{c_v}$, где $\frac{c_p}{c_v}$ — показатель аднабаты.

Для удобства, следуя Л. С. Лейбензону, это уравнение представим так:

$$\frac{p}{\gamma^n} = \frac{p_0}{\gamma_0^n} = \beta^n. \quad (8.2)$$

¹⁾ См. сноски на стр. 12.

Здесь p_0 , γ_0 — известные давление и удельный вес при нормальных условиях. Из (8.2) находим

$$\gamma = \frac{1}{\beta} p^{\frac{1}{n}}. \quad (8.3)$$

Найдём произведения γu , γv , γw — так называемые компоненты весовой скорости газа.

Из уравнений движения (1.15) и (8.3) получим

$$\gamma u = - \frac{k \gamma}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{k}{\mu \beta} p^{\frac{1}{n}} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Аналогично находятся выражения для γv и γw . Предыдущее уравнение можно представить ещё и так:

$$\gamma u = - \frac{k}{\beta \mu \left(1 + \frac{1}{n}\right)} \frac{\partial}{\partial x} p^{1 + \frac{1}{n}}. \quad (8.4)$$

Обозначим

$$\frac{n}{\beta(1+n)} p^{1 + \frac{1}{n}} = P. \quad (8.5)$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \gamma u &= - \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}; \\ \gamma v &= - \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y}; \\ \gamma w &= - \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Выразим теперь через P левую часть уравнения неразрывности (1.19), в котором для простоты пористость m считаем постоянной.

Из уравнений (8.3) и (8.5) имеем

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \left(\beta \frac{1+n}{n} \right)^{\frac{1}{1+n}} \frac{1}{\beta} P^{\frac{1}{1+n}}, \\ m \frac{\partial \gamma}{\partial t} &= \frac{m}{\beta(1+n)} \left(\beta \frac{1+n}{n} \right)^{\frac{1}{1+n}} P^{-\frac{n}{1+n}} \frac{\partial P}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

Согласно уравнению неразрывности и (8.6), дифференцируя (8.6) по x , y , z и складывая, получаем

$$\frac{k}{\mu} \nabla^2 P = \frac{m}{\beta(1+n)} \left(\beta \frac{1+n}{n} \right)^{\frac{1}{1+n}} P - \frac{n}{1+n} \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (8.8)$$

Это уравнение и является искомым. Оно принадлежит к классу нелинейных уравнений параболического типа, для которого общая теория интегрирования ещё отсутствует. Поэтому при неустановившемся течении газа приходится прибегать к приближённым методам. Ряд таких приближённых методов разработан Л. С. Лейбензоном и Маскетом и успешно разрабатывается в настоящее время.

§ 35. Установившееся течение газа

При установившемся течении газа $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$ и (8.8) обращается в уравнение Лапласа

$$\nabla^2 P = 0. \quad (8.9)$$

Сравнивая (8.6) и (8.9) с уравнениями (1.15) и (2.3) для несжимаемой жидкости, мы замечаем их полное сходство. Отсюда следует очень важный вывод: при расчётах установившегося течения газа можно пользоваться всеми формулами, выведенными для несжимаемой жидкости, с заменой давления p — величиной P из (8.5), линейных скоростей — весовыми, объёмных расходов — весовыми расходами.

Можно считать, что после некоторого короткого интервала времени с начала эксплоатации газовой скважины распределение давления вокруг скважины приближается к установившемуся и может рассматриваться как таковое.

Это обстоятельство чрезвычайно облегчает ряд практических расчётов. В частности, тогда не представляет принципиальных затруднений задача о вытеснении газа жидкостью, которая может быть рассмотрена примерно так же, как задачи главы IV.

§ 36. Об утечках газа и дутья при подземной газификации¹⁾

Поставим перед собой такую задачу: пусть в однородном пласте, ограниченном каким-либо контуром, на котором давление не меняется, имеются скважины известных радиусов с заданными забойными давлениями на их контурах. В одни скважины поступает газ, из других он извлекается. Требуется рассчитать дебиты скважин.

Пласт будем считать постоянной мощности, скважины совершенными и течение рассматривать как плоское ламинарное и установившееся.

Введём обозначение

$$\Phi = \frac{kP}{\mu}, \quad (8.10)$$

где Φ — потенциал «весовой скорости».

Предполагая режим течения изотермическим, из (8.10) и (8.5), при $n = 1$, получим

$$\Phi = \frac{k}{2\mu} \frac{\gamma_0}{p_0} p^2, \quad (8.11)$$

где γ_0 — удельный вес при атмосферном давлении p_0 .

Тогда компоненты весовой скорости в (8.6) примут значения

$$\gamma u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \gamma v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \gamma w = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (8.12)$$

Заметим, что при расчётах, когда проницаемость k задана в дарси, вязкость μ в сантимуазах, давление в атмосферах (абсолютных), u , v , w получаются в см/сек, а γV (V — вектор скорости фильтрации) есть весовой расход газа через 1 см² поперечного сечения пласта.

Таким образом, если мы желаем выражать весовой расход в граммах или килограммах в секунду, γ и γ_0 следует соответственно выражать в г/см³, или кг/см³ (но не в кг/м³).

В дальнейшем нам всё время придётся иметь дело с выражением для потенциала в пласте от действия одной или

1) ЧарныЙ И. А., Фильтрация газа в угольном пласте, Известия ОТН, 1947 г., № 2.

нескольких скважин. Потенциал, определяемый одной скважиной-стоком, имеет вид

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r + C. \quad (8.13)$$

Здесь Q — весовой дебит скважины на единицу мощности пласта, C — произвольная константа.

Q считается положительным, если из скважины извлекается газ, и, наоборот, если газ нагнетается в пласт, то дебит скважины-источника должен считаться отрицательным.

Переходим к рассмотрению отдельных случаев.

1. Две скважины — инъекционная и эксплуатационная — в круговом пласте (фиг. 55).

Пусть радиус пласта есть R , радиусы скважин — r_{1c} , r_{2c} , при чём пусть скважины отстоят вдали от контура пласта.

Обозначим потенциалы на контурах скважин Φ_1 , Φ_2 , а на контуре пласта — Φ_k , неизвестные дебиты — Q_1 , Q_2 .

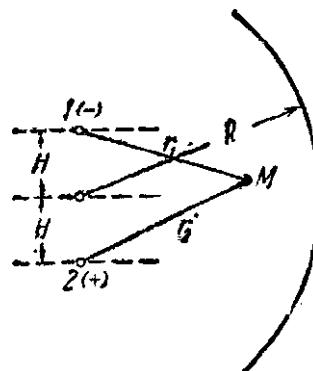
Тогда, согласно (8.13), мы можем, применив принцип суперпозиции, написать для потенциала в любой точке пласта

$$\Phi = \frac{Q_1}{2\pi} \ln r_1 + \frac{Q_2}{2\pi} \ln r_2 + C, \quad (8.14)$$

где r_1 , r_2 — расстояния точки M до скважин.

Помещая точку M соответственно на контурах каждой скважины и пласта и полагая R достаточно большим, получим

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{Q_1}{2\pi} \ln r_{1c} + \frac{Q_2}{2\pi} \ln 2H + C, \\ \Phi_2 &= \frac{Q_1}{2\pi} \ln 2H + \frac{Q_2}{2\pi} \ln r_{2c} + C, \\ \Phi_k &= \frac{Q_1}{2\pi} \ln R + \frac{Q_2}{2\pi} \ln R + C. \end{aligned} \right\} \quad (8.15)$$



Фиг. 55.

Из этих уравнений определяются

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= -2\pi \left\{ \frac{(\Phi_1 - \Phi_k) \ln \frac{R}{r_{2c}} - (\Phi_2 - \Phi_k) \ln \frac{R}{2H}}{\ln \frac{R}{r_{1c}} \cdot \ln \frac{R}{r_{2c}} - \ln^2 \frac{R}{2H}}, \right. \\ Q_2 &= 2\pi \left. \frac{(\Phi_1 - \Phi_k) \ln \frac{R}{2H} - (\Phi_2 - \Phi_k) \ln \frac{R}{r_{1c}}}{\ln \frac{R}{r_{1c}} \cdot \ln \frac{R}{r_{2c}} - \ln^2 \frac{R}{2H}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (8.16)$$

Пусть $\Phi_1 > \Phi_2$ и $\Phi_1 > \Phi_k$, т. е. в первую скважину нагнетается газ. Тогда из (8.16) следует, что $Q_1 < 0$, т. е. первая скважина является скважиной-источником, как и должно быть. Вторая же скважина будет стоком или источником в зависимости от знака и величины числителя в формуле (8.16) для Q_2 .

Характеристикой утечки в пласт может служить отношение дебита Q_2 к абсолютной величине нагнетаемого дебита Q_1 :

$$\varphi = \frac{Q_2}{|Q_1|} = \left| \frac{(\Phi_1 - \Phi_k) \ln \frac{R}{2H} - (\Phi_2 - \Phi_k) \ln \frac{R}{r_{1c}}}{(\Phi_1 - \Phi_k) \ln \frac{R}{r_{2c}} - (\Phi_2 - \Phi_k) \ln \frac{R}{2H}} \right|. \quad (8.17)$$

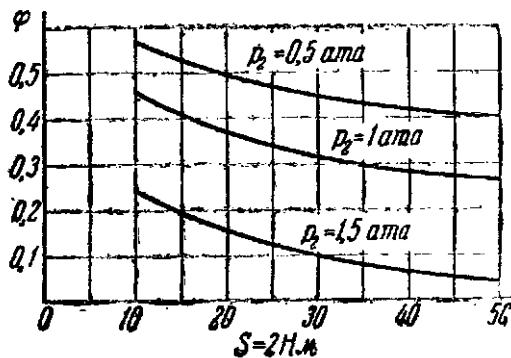
Пусть забойные давления будут p_1 и p_2 , а контурное давление на контуре пласта $p_k = 1 \text{ atm}$.

Тогда, учитывая (8.11), из (8.17) получим

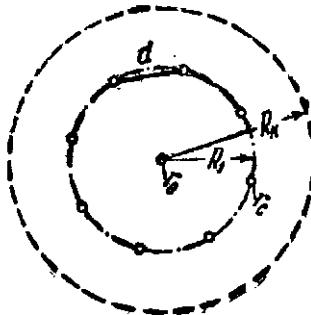
$$\varphi = \frac{Q_2}{|Q_1|} = \left| \frac{(p_1^2 - 1) \ln \frac{R}{2H} - (p_2^2 - 1) \ln \frac{R}{r_{1c}}}{(p_1^2 - 1) \ln \frac{R}{r_{2c}} - (p_2^2 - 1) \ln \frac{R}{2H}} \right|. \quad (8.18)$$

Очевидно, что при $p_1 > p_2 > 1$ $\varphi < 1$, т. е. утечки всегда имеют место, причём процент утечки при одиородном пласте определяется только местоположением скважин, размерами пласта и забойными давлениями, но не физическими константами пласта или газа.

На фиг. 56 показано влияние расстояния $2H=S$ между скважинами на процент утечек для примера, когда $R=500$ м, $r_{1c}=r_{2c}=0,1$ м, $p_1=2,5$ ата, $p_2=0,5$; 1; 1,5 ата. Расчёты относятся к случаю изотропного пласта. При действительной газификации между скважинами создаётся зона выгорания лепестковидной формы с повышенной относительно другой части пласта проницаемостью. Поэтому основной поток газа устремляется в зону с повышенной проницаемостью, и действительные утечки должны быть меньше, нежели в однородном изотропном пласте. Таким образом, вышеуказан-



Фиг. 56.



Фиг. 57.

данный расчёт должен давать верхний предел утечек, которые в действительности будут меньше, если не учитывать утечки через перекрывающие породы.

2. Кольцевая «батарея» скважин (фиг. 57).

Пусть в круговом пласте радиуса R_k размещена вдоль окружности радиуса R_1 кольцевая «батарея» из m скважин с радиусами r_c и одна центральная скважина радиуса r_0 . Пусть давления и потенциалы на контурах скважин и пласта соответственно будут p_c , p_0 , p_k и Φ_c , Φ_0 , Φ_k . Тогда дебиты Q_1 скважин «батареи» и дебит Q_0 центральной скважины определяются из следующей системы уравнений (2.41) и (2.42):

$$\Phi_c - \Phi_k = \frac{Q_1}{2\pi} \left\{ \ln \frac{R_1}{mr_c} + \ln \left[\left(\frac{R_k}{R_1} \right)^m - \left(\frac{R_1}{R_k} \right)^m \right] \right\} - \frac{Q_0}{2\pi} \ln \frac{R_k}{R_1}; \quad (8.19)$$

$$\Phi_0 - \Phi_k = -\frac{1}{2\pi} \left(Q_0 \ln \frac{R_k}{r_0} + m Q_1 \ln \frac{R_k}{R_1} \right). \quad (8.20)$$

Решая эти уравнения для дебита Q_0 центральной скважины и суммарного дебита mQ_1 «батареи», получим

$$Q_0 = -2\pi \frac{(\Phi_0 - \Phi_k) \left\{ \ln \frac{R_1}{mr_c} + \ln \left[\left(\frac{R_k}{R_1} \right)^m - \left(\frac{R_1}{R_k} \right)^m \right] \right\} - (\Phi_c - \Phi_k) m \ln \frac{R_k}{R_1}}{\ln \frac{R_k}{r_0} \left\{ \ln \frac{R_1}{mr_c} + \ln \left[\left(\frac{R_k}{R_1} \right)^m - \left(\frac{R_1}{R_k} \right)^m \right] \right\} - m \ln^2 \frac{R_k}{R_1}}; \quad (8.21)$$

$$mQ_1 = \frac{(\Phi_0 - \Phi_k) m \ln \frac{R_k}{r_0} - (\Phi_c - \Phi_k) m \ln \frac{R_k}{r_0}}{\ln \frac{R_k}{r_0} \left\{ \ln \frac{R_1}{mr_c} + \ln \left[\left(\frac{R_k}{R_1} \right)^m - \left(\frac{R_1}{R_k} \right)^m \right] \right\} - m \ln^2 \frac{R_k}{R_1}}. \quad (8.22)$$

Пусть $\Phi_0 > \Phi_c$ и $\Phi_0 > \Phi_k$. Тогда из (8.21) следует, что $Q_0 < 0$ и центральная скважина будет скважиной-источником. Знак дебита Q_1 скважин «батареи» зависит от знака чисителя в формуле (8.22). Утечки, как и раньше, будем характеризовать отношением

$$\varphi = \frac{mQ_1}{|Q_0|} = \left| m \frac{(\Phi_0 - \Phi_k) \ln \frac{R_k}{R_1} - (\Phi_c - \Phi_k) \ln \frac{R_k}{r_0}}{(\Phi_0 - \Phi_k) \left\{ \ln \frac{R_1}{mr_c} + \ln \left[\left(\frac{R_k}{R_1} \right)^m - \left(\frac{R_1}{R_k} \right)^m \right] \right\} - (\Phi_c - \Phi_k) m \ln \frac{R_k}{R_1}} \right|. \quad (8.23)$$

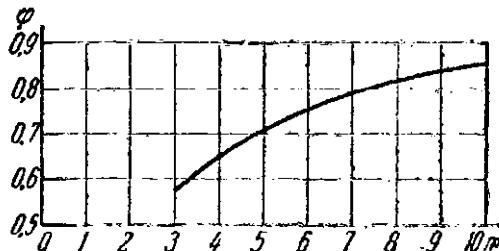
При $m \geq 3$ и $R_1 \ll R_k$ формула (8.23) может быть упрощена:

$$\varphi \approx \left| \frac{\ln \frac{R_k}{R_1} - \frac{p_c^2 - p_k^2}{p_0^2 - p_k^2} \ln \frac{R_k}{r_0}}{\frac{1}{m} \ln \frac{R_1}{mr_c} + \left(1 - \frac{p_c^2 - p_k^2}{p_0^2 - p_k^2} \right) \ln \frac{R_k}{R_1}} \right|. \quad (8.24)$$

На фиг. 58 показано влияние числа скважин в «батарее» на величину утечек (в процентах) для примера: $R_k = 500$ м, $R_1 = 50$ м; $p_c = p_k = 1$ ат; $r_c = r_0 = 0,1$ м.

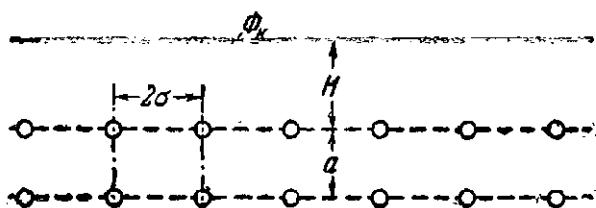
3. Линейные «батареи» скважин (фиг. 59). Рассмотрим полубесконечный пласт, в котором расположено два ряда скважин. Обозначим (фиг. 59) расстояние ближайшего первого ряда от края пласта H , расстояние между первым и вторым рядами — a , расстояние между скважинами

в каждом ряду — 2σ , давления и потенциалы на контурах пласта и скважин первого и второго рядов — p_k , p_1 , p_2 и Φ_k , Φ_1 , Φ_2 , радиусы скважин — r_c . Расположение скважин примем,



Фиг. 58.

как на фиг. 59. Число скважин в каждом ряду принято бесконечно большим. Тогда дебиты одной скважины первого и второго рядов определяются из системы уравнений (2.63)



Фиг. 59.

и (2.64), в которых ширина пласта l должна равняться бесконечности. Имеем

$$2\pi(\Phi_1 - \Phi_k) = -Q_1 \left(\ln \frac{a}{\pi r_c} + \ln 2 \operatorname{sh} \frac{\pi H}{\sigma} \right) + \\ + Q_2 \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi a}{\sigma} - 1}{\operatorname{ch} \frac{\pi(2H+a)}{\sigma} - 1}; \quad (8.25)$$

$$2\pi(\Phi_2 - \Phi_k) = Q_1 \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi a}{\sigma} - 1}{\operatorname{ch} \frac{\pi(2H+a)}{\sigma} - 1} - \\ - Q_2 \left[\ln \frac{a}{\pi r_c} + \ln 2 \operatorname{sh} \frac{\pi(H+a)}{\sigma} \right]. \quad (8.26)$$

Решая эти уравнения относительно Q_1 и Q_2 , получим

$$Q_1 = 2\pi \frac{(\Phi_s - \Phi_k) \left[\ln \frac{\sigma}{\pi r_0} + \ln 2 \operatorname{sh} \frac{\pi(H+a)}{a} \right] - (\Phi_s - \Phi_k) \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(2H+a)}{a} - 1}{\operatorname{ch} \frac{\pi a}{a} - 1}}{\frac{1}{4} \ln^2 \frac{\sigma}{\operatorname{ch} \frac{\pi a}{a} - 1} - \left(\ln \frac{\sigma}{\pi r_0} + \ln 2 \operatorname{sh} \frac{\pi H}{a} \right) \left[\ln \frac{\sigma}{\pi r_0} + \ln 2 \operatorname{sh} \frac{\pi(H+a)}{a} \right]} ; \quad (8.27)$$

$$Q_2 = 2\pi \frac{(\Phi_s - \Phi_k) \left(\ln \frac{\sigma}{\pi r_0} + \ln 2 \operatorname{sh} \frac{\pi H}{a} \right) - (\Phi_s - \Phi_k) \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(2H+a)}{a} - 1}{\operatorname{ch} \frac{\pi a}{a} - 1}}{\frac{1}{4} \ln^2 \frac{\sigma}{\operatorname{ch} \frac{\pi a}{a} - 1} - \left(\ln \frac{\sigma}{\pi r_0} + \ln 2 \operatorname{sh} \frac{\pi H}{a} \right) \left[\ln \frac{\sigma}{\pi r_0} + \ln 2 \operatorname{sh} \frac{\pi(H+a)}{a} \right]} . \quad (8.28)$$

В зависимости от соотношения между Φ_1 , Φ_s и Φ_k дебиты Q_1 и Q_2 могут иметь тот или иной знак.

Пусть $\Phi_2 > \Phi_1$ и $\Phi_2 > \Phi_k$, т. е. газ нагнетается в скважины второго ряда. Тогда в (8.28) Q_2 отрицательно и процент утечки будет:

$$\varphi = \frac{Q_1}{|Q_2|} = \begin{cases} \frac{(\Phi_s - \Phi_k) \frac{1}{2} \ln \frac{\sigma}{\operatorname{ch} \frac{\pi a}{a} - 1} - (\Phi_1 - \Phi_k) \left[\ln \frac{\sigma}{\pi r_0} + \ln 2 \operatorname{sh} \frac{\pi(H+a)}{a} \right]}{\operatorname{ch} \frac{\pi(2H+a)}{a} - 1} \\ (\Phi_s - \Phi_k) \left(\ln \frac{\sigma}{\pi r_0} + \ln 2 \operatorname{sh} \frac{\pi H}{a} \right) - (\Phi_1 - \Phi_k) \frac{1}{2} \ln \frac{\sigma}{\operatorname{ch} \frac{\pi a}{a} - 1} \end{cases} \quad (8.29)$$

или

$$\varphi = \frac{Q_1}{|Q_2|} = \begin{cases} \frac{\left(p_2^2 - p_k^2 \right) \frac{1}{2} \ln \frac{\sigma}{\operatorname{ch} \frac{\pi a}{a} - 1} - \left(p_1^2 - p_k^2 \right) \left[\ln \frac{\sigma}{\pi r_0} + \ln 2 \operatorname{sh} \frac{\pi(H+a)}{a} \right]}{\operatorname{ch} \frac{\pi(2H+a)}{a} - 1} \\ \left(p_2^2 - p_k^2 \right) \left(\ln \frac{\sigma}{\pi r_0} + \ln 2 \operatorname{sh} \frac{\pi H}{a} \right) - \left(p_1^2 - p_k^2 \right) \frac{1}{2} \ln \frac{\sigma}{\operatorname{ch} \frac{\pi a}{a} - 1} \end{cases} . \quad (8.30)$$

Если $H > a$ и $a > \sigma$, то для упрощения расчётов можно полагать

$$\varphi \approx \begin{cases} \left(p_2^2 - p_k^2 \right) \frac{\pi H}{a} - \left(p_1^2 - p_k^2 \right) \left[\ln \frac{\sigma}{\pi r_0} + \frac{\pi(H+a)}{a} \right] \\ \left(p_2^2 - p_k^2 \right) \left(\ln \frac{\sigma}{\pi r_0} + \frac{\pi H}{a} \right) - \left(p_1^2 - p_k^2 \right) \frac{\pi H}{a} \end{cases} . \quad (8.31)$$

При $p_1 = p_k$

$$\varphi \approx \frac{\frac{\pi H}{a} \ln \frac{a}{\pi r_c} + \pi H}{\frac{\pi H}{a}}, \quad (8.32)$$

т. е. в этом случае φ не зависит от a . Если теперь поменять местами ряды, т. е. нагнетать газ в первый ряд и отбирать из второго, тогда $p_1 > p_2$ и из (8.27) и (8.28), положая $H \geq \sigma$ и $a \geq \sigma$, получим

$$\varphi \approx \left| \frac{\left(p_1^2 - p_k^2 \right) \frac{\pi H}{a} - \left(p_2^2 - p_k^2 \right) \left(\ln \frac{a}{\pi r_c} + \frac{\pi H}{a} \right)}{\left(p_1^2 - p_k^2 \right) \left[\ln \frac{a}{\pi r_c} + \frac{\pi (H + a)}{a} \right] - \left(p_2^2 - p_k^2 \right) \frac{\pi H}{a}} \right|. \quad (8.33)$$

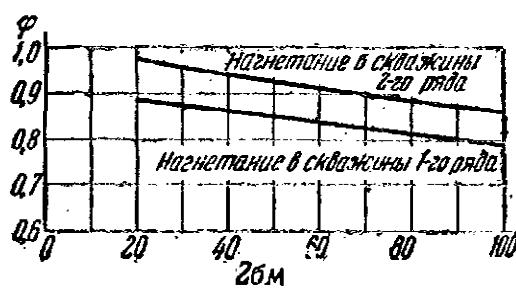
При $p_2 = p_k$

$$\varphi = \frac{\frac{\pi H}{a} \ln \frac{a}{\pi r_c} + \pi (H + a)}{\frac{\pi H}{a} \ln \frac{a}{\pi r_c} + \pi (H + a)}. \quad (8.34)$$

В этом случае по сравнению с (8.32) утечки увеличились. Заметим, что хотя эти формулы выведены для бесконечного числа скважин, они пригодны для расчётов и в том случае, когда число скважин будет шесть-восемь в каждом ряду.

Влияние на процент утечек расстояния между скважинами $2a$ показано на фиг. 60 — для случаев нагнетания в скважины первого и второго рядов. Для расчёта принято: $H = 500$ м; $a = 50$ м; $r_c = 0,1$ м.

Как и следовало ожидать, при линейном расположении скважин утечки оказываются наименьшими по сравнению с двумя рассмотренными ранее случаями двух скважин и кольцевой батареи.



Фиг. 60.

§ 37. Определение проницаемости пласта по данным наблюдений над нагнетанием газа в пласт

Наряду с лабораторными измерениями проницаемости целисообразно определить среднюю проницаемость в различных направлениях в пласте по данным опытных нагнетаний холодного воздуха в одни скважины и отбора его через другие. Разумеется, форма пласта в плане будет отличаться от правильной геометрической фигуры — круга или полосы. Тем не менее, всякий контур можно условно рассматривать как приближающийся к кругу, овалу или полосе. Если аппроксимировать пласт в виде кругового (при небольшом числе скважин, расположенных вдали от контура, это допустимо и вполне целесообразно), то «приведённый» радиус этого круга подлежит определению и может быть оценён по измерению дебитов и давлений в двух скважинах — нагнетательной и скважине-стоке (фиг. 55).

Зная расстояние между скважинами $2H$ и измеряя весовые дебиты газа Q_1 , Q_0 (и тем самым φ), а также забойные давления p_1 и p_2 , из уравнения (8.18) можно найти «приведённый» радиус R , вернее его порядок, так как, вероятно, для разных отношений φ и разных скважин будут получаться различные величины R . Оценив среднее значение R по пласту, можно перейти к определению проницаемости k при посредстве формул (8.16) и (8.11), которые можно представить так¹⁾:

$$Q_1 = -\pi \frac{k \gamma_0}{\mu p_0} \frac{\left(p_1^2 - p_2^2 \right) \ln \frac{R}{r_{2c}} - \left(p_2^2 - p_k^2 \right) \ln \frac{R}{2H}}{\ln \frac{R}{r_{1c}} \ln \frac{R}{r_{2c}} - \ln^2 \frac{R}{2H}}; \quad (8.35)$$

$$Q_2 = \frac{\pi k \gamma_0}{\mu p_0} \frac{\left(p_1^2 - p_k^2 \right) \ln \frac{R}{2H} - \left(p_2^2 - p_k^2 \right) \ln \frac{R}{r_{1c}}}{\ln \frac{R}{r_{1c}} \ln \frac{R}{r_{2c}} - \ln^2 \frac{R}{2H}}. \quad (8.36)$$

Абсолютная вязкость газа μ должна быть, разумеется, известной.

1) Первая скважина считается нагнетательной и $p_1 > p_2$.

Зная Q_1, Q_2, R из (8.35) и (8.36), легко найти проницаемость k . Можно преобразовать формулы (8.35) и (8.36) так, чтобы туда вошли не весовые расходы, а объемные, приведенные к атмосферному давлению. Тогда, полагая $p_0 = 1 \text{ atm}$, $p_k = 1 \text{ atm}$, получим

$$\left| \frac{Q_1}{\gamma_0} \right| = \frac{\pi k}{\mu} \frac{\left(p_1^2 - 1 \right) \ln \frac{R}{r_{1c}} - \left(p_2^2 - 1 \right) \ln \frac{R}{2H}}{\ln \frac{R}{r_{1c}} \ln \frac{R}{r_{2c}} - \ln^2 \frac{R}{2H}}; \quad (8.37)$$

$$Q_2 = \frac{\pi k}{\mu} \frac{\left(p_1^2 - 1 \right) \ln \frac{R}{2H} - \left(p_2^2 - 1 \right) \ln \frac{R}{r_{1c}}}{\ln \frac{R}{r_{1c}} \ln \frac{R}{r_{2c}} - \ln^2 \frac{R}{2H}}. \quad (8.38)$$

При этом следует $\left| \frac{Q_1}{\gamma_0} \right|$ и $\frac{Q_2}{\gamma_0}$ измерять в $\text{см}^3/\text{сек}$ на 1 см мощности пласта, μ в сантимпуазах, p_1, p_2 — в абсолютных атмосферах. Тогда проницаемость k получится в дарси.

§ 38. Аналогия с безнапорным движением жидкости в пористой среде по теории Дюпюи-Форхгеймера

Л. С. Лейбензон указал на аналогию между теорией Дюпюи-Форхгеймера для безнапорной фильтрации грунтового потока и теорией движения газа в пористой среде.

Теория Дюпюи-Форхгеймера, как известно, исходит из следующих допущений: пренебрегают вертикальными компонентами скоростей и средние скорости вдоль каждой вертикали принимают пропорциональными уклону свободной поверхности.

Тогда, считая, для простоты, непроницаемое дно горизонтальным, как нетрудно видеть, уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} (uh) + \frac{\partial}{\partial y} (vh) = -m \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (8.39)$$

где u, v — проекции средних скоростей вдоль вертикали на горизонтальные оси x, y , h — глубина потока, m — пористость.

Динамические уравнения, согласно второму допущению, примут следующий вид:

$$u = -c \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v = -c \frac{\partial h}{\partial y} \quad (8.40)$$

или

$$uh = -c \frac{\partial}{\partial x} \frac{h^2}{2}, \quad vh = -c \frac{\partial}{\partial y} \frac{h^2}{2}, \quad (8.41)$$

где c — коэффициент фильтрации.

Из (8.40) и (8.41) получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{h^2}{2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{h^2}{2} = \frac{m}{c} \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (8.42)$$

Это уравнение полностью совпадает с уравнением (8.8) для изотермического течения газа при $n=1$.

Таким образом, между безнапорным фильтрационным потоком несжимаемой жидкости и движением газа в пористой среде существует следующая аналогия: расходу на единицу ширины грунтового потока соответствует весовая скорость газа, глубине потока — давление, коэффициенту фильтрации c — величина $\frac{k}{\mu} \frac{\gamma_0}{p_0}$, параметру $\frac{m}{c}$ в правой части (8.42) — параметр $\frac{m_\mu}{k}$ для газа.

При посредстве этой аналогии все задачи, решённые для фильтрации газа, могут быть распространены на соответствующие случаи безнапорного грунтового потока¹⁾.

§ 39. Движение газированной жидкости в пористой среде

Задача о движении смеси жидкости и газа является одной из самых сложных и в настоящее время ещё не может считаться полностью разрешённой.

1) Заметим, что дебиты, вычисляемые на основании теории Дююн-Форхгеймера, очень хорошо согласуются с действительными. В очертаниях депрессионной кривой расхождение увеличивается вблизи скважин. Вдали от скважин согласие вполне хорошее.

Здесь мы самым кратким образом касаемся состояния этого вопроса в теории фильтрации, отсылая читателя за подробностями к оригинальным работам¹⁾.

Под газированной жидкостью подразумевается жидкость, содержащая растворённый газ. При движении такой жидкости в зонах пониженного давления будет происходить выделение газа, которое будет весьма существенно влиять на характер течения.

В случае нефтяных месторождений газ, выделяющийся из газированной жидкости, текущей в пористой среде, играет существенную роль, особенно в начальный период эксплуатации месторождения — период так называемого газового режима. В дальнейшем, когда весь газ вышел, приток жидкости к скважинам осуществляется напором краевой воды, а если таковой не имеется, то извлекается не вся жидкость, а только примерно 20—25% промышленного запаса.

Газ играет, вообще говоря, двойкую роль. с одной стороны, он является, особенно в газовый период, одной из движущих сил, заставляющих жидкость притекать к скважинам, с другой — присутствие свободного газа в порах тормозит приток жидкости.

Первые исследования о движении газированной жидкости в пористой среде принадлежат Л. С. Лейбензону. В своих первых работах²⁾ Л. С. Лейбензон рассматривал газированную жидкость как своего рода упругую смесь жидкости и газа с особым уравнением состояния, зависящим от характера растворимости газа в жидкости.

Несколько иначе подошли к этой проблеме американские учёные — Уайкоф, Ботсет и Маскет.

Уайкоф и Ботсет на специально сконструированной экспериментальной модели пласта измеряли объёмные расходы газа и жидкости Q_g и Q_j .

1) Лейбензон Л. С., Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. Гостехиздат, 1947 г.

Лапук Б. Б., Об установившемся движении газированной жидкости в пористой среде. Нефтяная промышленность СССР, № 5, 1941 г.

Царевич К. А., Приближённый способ расчёта притока нефти и газа к скважинам при режиме растворенного газа. Труды Московского Нефтяного Института им. Губкина, вып. 5, 1947 г.

2) Лейбензон Л. С., Нефтепромысловая механика, ч. II. Геонефтепиздат, 1934 г.

Результаты опытов обрабатывались следующим образом: согласно закону Дарси, предполагаемого справедливым для каждой из фаз жидкой и газообразной, можно написать

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= v_r f = \frac{k_r}{\mu_r} f \frac{\Delta p}{\Delta l} ; \\ Q_{\text{ж}} &= v_{\text{ж}} f = \frac{k_{\text{ж}}}{\mu_{\text{ж}}} f \frac{\Delta p}{\Delta l} , \end{aligned} \right\} \quad (8.43)$$

где v_r , $v_{\text{ж}}$ — скорости фильтрации газа и жидкости, f — сечение пласта, μ_r , $\mu_{\text{ж}}$ — абсолютные вязкости газа и жидкости, $\frac{\Delta p}{\Delta l}$ — падение давления на единицу длины потока, k_r , $k_{\text{ж}}$ — эффективные проницаемости для газовой и жидкой фаз.

Целью опытов было выяснение обстоятельств, определяющих величины k_r , $k_{\text{ж}}$ и связь их с заранее известной проницаемостью k пористой среды для течения однородной жидкости.

Измеряя Q_r , $Q_{\text{ж}}$, μ_r , $\mu_{\text{ж}}$, f , $\frac{\Delta p}{\Delta l}$, из опытов, согласно (8.43), определялись k_r и $k_{\text{ж}}$. Оказалось, что основным фактором, от которого зависят k_r и $k_{\text{ж}}$, является степень насыщенности порового пространства жидкостью. Обозначая эту степень через ρ ¹⁾ и измеряя её в процентах, оказалось возможным установить вид функций $F_r(\rho)$ и $F_{\text{ж}}(\rho)$, где

$$\left. \begin{aligned} F_r(\rho) &= \frac{k_r}{k} , \\ F_{\text{ж}}(\rho) &= \frac{k_{\text{ж}}}{k} . \end{aligned} \right\} \quad (8.44)$$

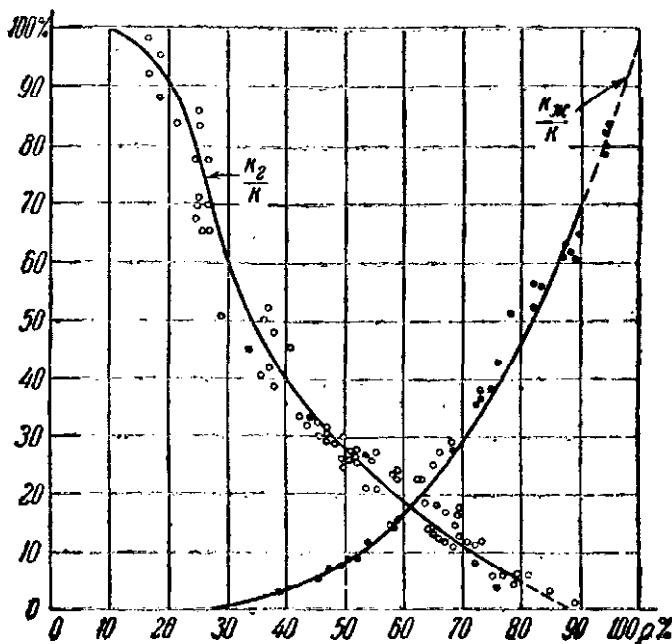
Эти функции показаны на фиг. 61.

Кривые фиг. 61 обнаруживают чрезвычайно интересную особенность: если небольшая часть объёма пор занята жидкостью (ρ мало), то при этом $F_r(\rho)$ близко к единице. Наоборот, если небольшая часть объёма пор занята газом, то $F_{\text{ж}}(\rho)$ значительно меньше единицы (около 70%). Таким образом,

1) Не следует смешивать с плотностью, имеющей такое же обозначение.

газ тормозит движение жидкости гораздо больше, чем жидкость движение газа.

Первая теория движения газированной жидкости, в основе которой лежат опыты Уайкофа и Ботсета, была создана Маскетом. Существенный шаг вперёд к разработке этой теории был сделан С. А. Христиановичем. На основании теории С. А. Христиановича Б. Б. Лапук¹⁾ разработал практический метод расчёта установившегося движения газированной



Фиг. 61.

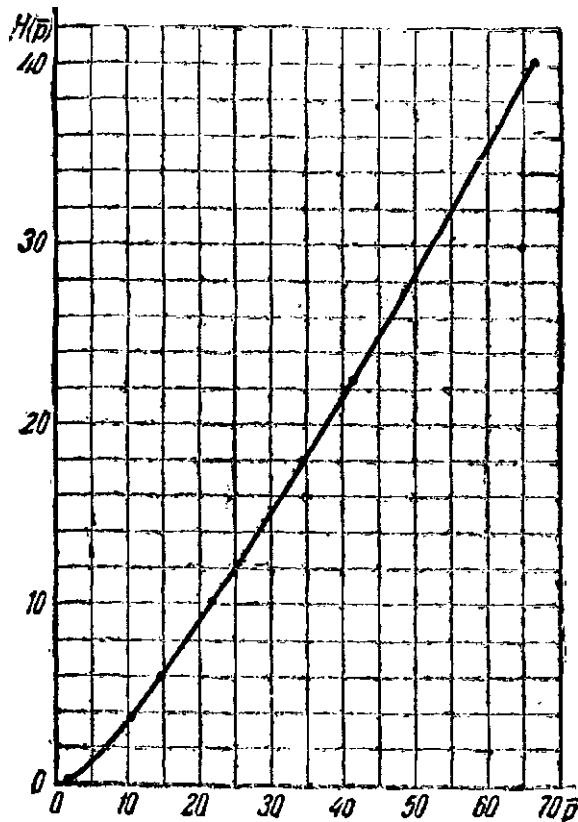
жидкости в пласте. Теория неустановившегося движения газированной жидкости в пласте с помощью метода последовательной смены стационарных состояний разрабатывалась К. А. Царевичем.

Опуская подробное изложение работ вышеуказанных авторов, мы приведём здесь только способ расчёта установившегося течения газированной жидкости в пористой среде, приведённый в статье Б. Б. Лапука и предложенное нами

1) См. сноски на стр. 163.

его упрощение, облегчающее производство численных расчётов.

Согласно С. А. Христиановичу и Б. Б. Лапуку, при устанавлившемся течении газированной жидкости в пористой среде для дебита жидкости $Q_ж$ остаются в силе все формулы, выведенные для дебита несжимаемой жидкости, где вместо давле-



Фиг. 62.

ния p следует подставить величину H , связанную с давлением соотношением

$$H = \xi \varphi \left(\frac{p}{\xi} \right) . \quad (8.45)$$

Здесь

$$\xi = \Gamma \frac{\mu_t}{\mu_ж} , \quad (8.46)$$

Γ — газовый фактор в $\frac{m^3}{m^3}$, т. е. отношение объёмного расхода газа, приведённого к атмосферному давлению, к объёмному расходу жидкости, $\varphi\left(\frac{p}{\xi}\right)$ — функция, определяемая из графика фиг. 62, заимствованного нами из статьи Б. Б. Лапука. Отметим, что из этой статьи и графиков Уайкофа и Ботсета следует также, что эффект газирования нужно учитывать только тогда, когда

$$\frac{p}{\Gamma} < \frac{\gamma_0}{S_0}, \quad (8.47)$$

где γ_0 — плотность газа при атмосферном давлении, S_0 — массовый коэффициент растворимости газа в жидкости. При установившемся течении Γ одинаково во всём пласте. Если $\frac{p_0}{\Gamma} < \frac{\gamma_0}{S_0}$, то эффект газирования сказывается только в том, что проницаемость среды k для однородной жидкости следует уменьшить приблизительно на 15% и весь расчёт вести непосредственно по формулам для несжимаемой жидкости.

Предлагаемое ниже упрощение метода расчёта заключается в следующем. Кривую графика, изображённого на фиг. 62, можно приблизённо заменить прямой линией:

$$\varphi\left(\frac{p}{\xi}\right) = a_0 \frac{p}{\xi} \quad (8.48)$$

в интервале $0 < \frac{p}{\xi} < \frac{p_0}{\xi}$ и прямой линией

$$\varphi\left(\frac{p}{\xi}\right) = a_1 \frac{p}{\xi} - A_1 \quad (8.49)$$

в интервале $\frac{p}{\xi} > \frac{p_0}{\xi}$. Здесь

$$a_0 = 0,4; \quad a_1 = 0,65; \quad \frac{p_0}{\xi} = 15 \text{ ат}; \quad A_1 = 3,9 \text{ ат}. \quad (8.50)$$

При законе Дарси дебиты Q_0 однородной несжимаемой жидкости являются линейными функциями депрессии $p_k - p_c$, т. е. контурного давления p_k и противодавлений в скважинах p_c ; следовательно, согласно (8.45), объёмные расходы Q_{jk} жидкой фазы газированной жидкости будут теми же линейными функциями величин H_k и H_c , соответствующих давлениям p_k и p_c .

Для простоты рассмотрим случай одной скважины в пре-
небрежении силой тяжести. Пусть

$$Q_0 = \frac{k}{\mu_{ж}} M (p_k - p_c), \quad (8.51)$$

где M — постоянная, зависящая от геометрических размеров пласта, расположения скважины, но не от давлений p_k и p_c . Рассмотрим три случая:

1. $p_c > p_0$, $p_k > p_0$, где p_0 определено из (8.50). Тогда, согласно (8.45), (8.49) и (8.51):

$$\begin{aligned} Q_{ж} &= \frac{k}{\mu_{ж}} M \xi \left[\left(\frac{a_1 p_k}{\xi} - A_1 \right) - \left(\frac{a_1 p_c}{\xi} - A_1 \right) \right] = \\ &= \frac{k a_1}{\mu_{ж}} M (p_k - p_c). \end{aligned} \quad (8.52)$$

Сопоставляя (8.51) и (8.52), мы замечаем, что они отличаются только коэффициентом $a_1 = 0,65$. Таким образом, здесь остаются в силе все формулы для несжимаемой жидкости, но вместо $\frac{k}{\mu_{ж}}$ следует представить коэффициент $\frac{k a_1}{\mu_{ж}}$.

2. $p_c < p_0$, $p_k > p_0$. Согласно (8.45), (8.49) и (8.51)

$$\begin{aligned} Q_{ж} &= \frac{k}{\mu_{ж}} M \xi \left[\left(\frac{a_1 p_k}{\xi} - A_1 \right) - \frac{a_0 p_c}{\xi} \right] = \\ &= \frac{k a_1 M}{\mu_{ж}} \left[p_k - \left(\frac{a_0}{a_1} p_c + \frac{\xi A_1}{a_1} \right) \right] \end{aligned} \quad (8.53)$$

или

$$Q_{ж} = \frac{k a_0 M}{\mu_{ж}} \left[\left(\frac{a_1}{a_0} p_k - \frac{\xi A_1}{a_0} \right) - p_c \right]. \quad (8.54)$$

Сопоставление с (8.51) показывает, как изменяется в данном случае эта формула.

3. $p_c < p_0$, $p_k < p_0$. Согласно (8.45), (8.49) и (8.51) получим, что вместо $\frac{k}{\mu_{ж}}$ в формулу (8.51) следует подставить $\frac{k a_0}{\mu_{ж}}$.

— — —

ГЛАВА IX

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ СМЕНЫ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ

§ 40. Приток к дренажной галлерее при упругом режиме фильтрации

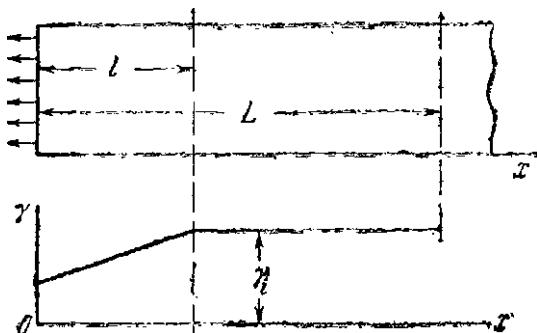
При исследовании ряда задач, связанных с неустановившимися процессами, часто хорошие результаты даёт один из приближённых методов — так называемый метод последовательной смены стационарных состояний. Сущность его заключается в том, что распределение искомой величины в пространстве рассматривается как установившееся, но с движущимися, перемещающимися границами, закон движения которых определяется краевыми условиями. Иногда это перемещение является фиктивным, но, приняв распределение установившимся в каждый момент времени и зная движение границ, можно получить приближённое решение задачи.

Этот метод с успехом применяется к многим задачам теории теплоты, гидромеханики и фильтрации.

Пусть из пласта, где жидкость первоначально находилась в покое при давлении p_i и удельном весе γ_i , начинает вытекать в дренажную галлерею жидкость с весовым дебитом $G(t)$ через единицу площади поперечного сечения пласта. Требуется найти, как будет изменяться давление $(p)_x=0 = p_0$ и удельный вес $(\gamma)_x=0 = \gamma_0$ при входе в галлерею, т. е. при $x=0$ (фиг. 63).

Будем приближённо считать (в чём и заключается сущность метода), что в каждый момент времени распределение давления таково, как если бы в этот момент времени режим был установившимся, т. е. удовлетворяющим условиям $\nabla^2 p = 0$.

$\nabla^2\gamma = 0$. При таком допущении мы будем иметь для γ и p линейную функцию координаты x на некоторой длине l , где $x = l$ будет границей, на которую распространилась депрессия в пласте. При $x = l$ $p = p_l$. Границу эту мы должны



Фиг. 63.

считать перемещающейся, чтобы не нарушить граничное условие при $x = 0$.

Таким образом, мы можем написать

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{\gamma_l - \gamma_0}{l} x, \quad p = p_0 + \frac{p_l - p_0}{l} x. \quad (9.1)$$

Средний удельный вес на длине l

$$\gamma_{\text{ср}} = \frac{\gamma_0 + \gamma_l}{2}. \quad (9.2)$$

Пусть $x = L > l$ представляет собой границу, до которой депрессия ещё не дошла. Выделим в пласте цилиндр длиною L с поперечным сечением, равным единице, и найдём вес W жидкости, находящейся в нём. Для этого, согласно В. Н. Щелкачеву, сначала учтём изменение пористости от давления

$$m = m_0 + \frac{p - p_0}{K_c}, \quad (9.3)$$

где m_0 , m — пористости при давлениях p_0 и p , K_c — модуль упругости порового пространства.

Тогда

$$m_l = m_0 + \frac{p_l - p_0}{K_c},$$

откуда средняя пористость на длине l :

$$m_{cp} = \frac{m_0 + m_l}{2} = m_i - \frac{1}{2} \frac{p_i - p_0}{K_c}. \quad (9.4)$$

Таким образом

$$W = \left(m_i - \frac{1}{2} \frac{p_i - p_0}{K_c} \right) \frac{\gamma_0 + \gamma_l}{2} l + m_i \gamma_l (L - l). \quad (9.5)$$

Далее,

$$\gamma_l = \gamma_0 + \gamma_0 \frac{p_i - p_0}{K_{\text{ж}}}$$

и

$$\frac{\gamma_0 + \gamma_l}{2} = \gamma_i \left(1 - \frac{1}{2} \frac{p_i - p_0}{K_{\text{ж}}} \right). \quad (9.6)$$

Пренебрегая малыми второго порядка, согласно (9.5), получим

$$\begin{aligned} W &= \left(m_i - \frac{1}{2} \frac{p_i - p_0}{K_c} \right) \gamma_i \left(1 - \frac{1}{2} \frac{p_i - p_0}{K_{\text{ж}}} \right) l - m_i \gamma_i (L - l) = \\ &= m_i \gamma_i l - \frac{p_i - p_0}{2} \left(\frac{1}{K_c} + \frac{m_i}{K_{\text{ж}}} \right) \gamma_i l. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Весовой расход $G(t)$ связан с W соотношением

$$\begin{aligned} G(t) &= -\frac{dW}{dt} = \\ &= \frac{p_i - p_0}{2} \left(\frac{1}{K_c} + \frac{m_i}{K_{\text{ж}}} \right) \gamma_i \frac{dt}{dt} - \frac{1}{2} \gamma_i l \left(\frac{1}{K_c} + \frac{m_i}{K_{\text{ж}}} \right) \frac{dp_0}{dt}, \end{aligned} \quad (9.8)$$

откуда скорость фильтрации при $x = 0$ будет

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{G(t)}{\gamma_0} \approx \frac{G(t)}{\gamma_i} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{K_c} + \frac{m_i}{K_{\text{ж}}} \right) \left[(p_i - p_0) \frac{dt}{dt} - l \frac{dp_0}{dt} \right]. \end{aligned} \quad (9.9)$$

С другой стороны, согласно Дарси, можно написать

$$v(t) = \frac{k}{\mu} \frac{p_i - p_0}{l}. \quad (9.10)$$

Из (9.9) и (9.10) могут быть найдены две неизвестные функции p_0 и l , если известна $v(t)$, и, наоборот, $v(t)$ и l , если известно p_0 .

Пусть известна $v(t)$. Тогда из (9.9) и (9.10) имеем

$$p_t - p_0 = \frac{\mu l}{k} v(t),$$

$$-\frac{dp_0}{dt} = \frac{\mu l}{k} v'(t) + \frac{\mu v(t)}{k} l \frac{dl}{dt}. \quad (9.11)$$

Подставляя (9.11) в (9.9), получаем

$$v(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{K_c} + \frac{m_t}{K_{\infty}} \right) \left[\frac{\mu l}{k} v(t) \frac{dl}{dt} + \frac{\mu l^2}{k} v'(t) + \frac{\mu v(t)}{k} l \frac{dl}{dt} \right] = =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{K_c} + \frac{m_t}{K_{\infty}} \right) \frac{\mu}{k} \left[v(t) \frac{d(l^2)}{dt} + v'(t) l^2 \right] = =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{K_c} + \frac{m_t}{K_{\infty}} \right) \frac{\mu}{k} \frac{d}{dt} [l^2 v(t)]. \quad (9.12)$$

Уравнение (9.12) легко интегрируется:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{K_c} + \frac{m_t}{K_{\infty}} \right) \frac{\mu}{k} l^2 v(t) = \int v(t) dt + \text{const.}$$

Так как при $t = 0$, $l = 0$, то

$$\frac{1}{2} \frac{\mu}{k} \left(\frac{1}{K_c} + \frac{m_t}{K_{\infty}} \right) l^2 v(t) = \int_0^t v(t) dt = V(t), \quad (9.13)$$

где

$$V(t) = \int_0^t v(t) dt$$

есть объём жидкости, вытекший в галлерею за время t через единицу площади дренажа. Из (9.13), (9.10) и (6.10) находим

$$l = \sqrt{\frac{2k}{\mu} \frac{1}{\frac{1}{K_c} + \frac{m_t}{K_{\infty}}} \frac{V(t)}{v(t)}} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\mu} \frac{V(t)}{v(t)}}, \quad (9.14)$$

$$\Delta p = p_t - p_0 = \frac{\mu}{k} v(t) l = \frac{\mu}{k} \sqrt{2\kappa v(t) V(t)}. \quad (9.15)$$

Теперь предположим, что известно давление p_0 в функции времени. Тогда, сравнивая правые части (9.9) и (9.10), получим

$$\frac{\mu}{k} \frac{p_t - p_0}{l} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{K_c} + \frac{m_t}{K_{\infty}} \right) \left[(p_t - p_0) \frac{dl}{dt} - l \frac{dp_0}{dt} \right]$$

или

$$\frac{2k}{\mu} \frac{1}{\frac{1}{K_c} + \frac{m_t}{K_{\infty}}} = t \frac{dt}{dt} - \frac{1}{p_t - p_0} \frac{dp_0}{dt} t^2$$

или

$$\frac{dz}{dt} + bz = 4x, \quad (9.16)$$

где

$$z = t^2,$$

$$b = -\frac{2}{p_t - p_0} \frac{dp_0}{dt}. \quad (9.17)$$

Интегрируя (9.16) и полагая $t = 0$ при $t = 0$, найдём

$$t = \frac{2V_x}{p_t - p_0} \sqrt{\int_0^t (p_t - p_0)^2 dt}, \quad (9.18)$$

$$v(t) = \frac{k}{\mu} \frac{(p_t - p_0)^2}{2V_x} \frac{1}{\sqrt{\int_0^t (p_t - p_0)^2 dt}}. \quad (9.19)$$

Сравним формулу (9.19) с точным решением для случая, когда при $x = 0$ начинает заданным образом изменяться давление $p_0 = p_0(t)$. Если при $t = 0$, $p = p_t = \text{const}$, то точное решение имеет вид

$$p - p_t = \frac{2}{V\pi} \int_{\frac{x}{2\sqrt{xt}}}^{\infty} \left[p_0 \left(t - \frac{u^2}{4\pi u^2} \right) - p_t \right] e^{-u^2} du. \quad (9.20)$$

При $p_0(t) = \text{const}$ это уравнение обращается в следующее:

$$\frac{p - p_t}{p_0 - p_t} = \frac{2}{V\pi} \int_{\frac{x}{2\sqrt{xt}}}^{\infty} e^{-u^2} du = 1 - erf \frac{x}{2\sqrt{xt}}. \quad (9.21)$$

Из (9.21), для проекции на ось x скорости фильтрации, получим

$$v = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} =$$

$$= \frac{k}{\mu} \frac{2(p_0 - p_i)}{V\pi} e^{-\frac{x^2}{4xt}} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} = \frac{k}{\mu} \frac{(p_0 - p_i)}{V\pi} \frac{e^{-\frac{x^2}{4xt}}}{\sqrt{\pi t}}, \quad (9.22)$$

откуда, при $p_i > p_0$, для объёмного расхода через единицу площади дренажа, полагая $x = 0$, находим

$$v(t) = \frac{1}{V\pi} \frac{k}{\mu} \frac{p_i - p_0}{\sqrt{\pi t}} = 0,565 \frac{k}{\mu} \frac{p_i - p_0}{\sqrt{\pi t}}. \quad (9.23)$$

Из приближённой же формулы (9.19), при $p_i - p_0 = \text{const.}$ имеем

$$v(t) = \frac{1}{2} \frac{k}{\mu} \frac{p_i - p_0}{\sqrt{\pi t}}. \quad (9.24)$$

Расхождение между (9.23) и (9.24) составляет около 11%, причём, как и должно быть, метод последовательной смены стационарных состояний даёт преуменьшенное значение скорости фильтрации.

Если $p_0(t) \neq \text{const.}$, то расхождение должно увеличиваться. Например, при $p_i - p_0(t) = bt$ — линейной функции времени — расхождение увеличивается до 23%. Правда, в пользу приближённого метода говорит, помимо его простоты, ещё и то обстоятельство, что усреднённые гидрогеологические константы пластов — пористость, проницаемость, мощность и т. д. — определяются с вероятной ошибкой порядка 15—20%, а иногда и выше. Таким образом, зная, в какую сторону мы делаем погрешность, в ряде практических задач пользование приближённым методом последовательной смены стационарных состояний может оказаться вполне целесообразным.

§ 41. Радиальный приток к скважине при упругом режиме фильтрации

Пользуясь методом последовательной смены стационарных состояний, мы должны считать, что вокруг скважины образуется воронка депрессии с постоянно увеличивающимся радиусом, что, вообще говоря, физически неверно, а является

лишь следствием принятой расчётной схемы. Время, необходимое для достижения воронкой депрессии естественных границ подземного резервуара, назовём первой фазой фильтрации. По достижении этих границ, если они непроницаемы, начнётся падение граничного пластового давления и собственно истощение резервуара. Этот период назовём второй фазой фильтрации.

Пусть в пласте радиуса R_k воронка депрессии дошла до переменного радиуса $r=R$ (фиг. 64). Относя расчёт к единице мощности пласта, для веса жидкости в пласте получим

$$G = (m\gamma)_k \pi (R_k^2 - R^2) + \int_{r_0}^R m\gamma 2\pi r dr. \quad (9.25)$$

Предполагая в кольце $r=r_c$ и $r=R$ распределение стационарным, найдём

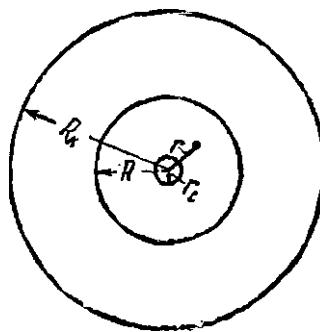
$$m\gamma = (m\gamma)_c + \frac{(m\gamma)_k - (m\gamma)_c}{\ln \frac{R}{r_c}} \ln \frac{r}{r_c}, \quad (9.26)$$

откуда

$$\begin{aligned} G &= (m\gamma)_k \pi (R_k^2 - R^2) + 2\pi \frac{(m\gamma)_k - (m\gamma)_c}{\ln \frac{R}{r_c}} \int_{r_0}^R r \ln \frac{r}{r_c} dr = \\ &= (m\gamma)_k \pi R_k^2 - [(m\gamma)_k - (m\gamma)_c] \pi R^2 - (m\gamma)_c \pi r_c^2 + \\ &\quad + 2\pi \frac{(m\gamma)_k - (m\gamma)_c}{\ln \frac{R}{r_c}} \left[\frac{R^2}{2} \ln \frac{R}{r_c} - \frac{1}{4} (R^2 - r_c^2) \right]. \quad (9.27) \end{aligned}$$

Выражая $m\gamma$ через давление p , последнее уравнение можно представить ещё и в следующем виде:

$$\begin{aligned} G &= (m\gamma)_k \pi R_k^2 - \frac{m_0 \gamma_0}{K} (p_k - p_c) \pi R^2 - (m\gamma)_c \pi r_c^2 + \\ &\quad + 2\pi \frac{m_0 \gamma_0}{K} \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R}{r_c}} \left[\frac{R^2}{2} \ln \frac{R}{r_c} - \frac{1}{4} (R^2 - r_c^2) \right], \end{aligned}$$



Фиг. 64.

или, упрощая,

$$G = (m\gamma)_k \pi R_k^2 - (m\gamma)_c \pi r_c^2 - \pi \frac{m_0 \gamma_0}{K} (p_k - p_c) \frac{R^2 - r_c^2}{2 \ln \frac{R}{r_c}}. \quad (9.28)$$

В (9.28) для первой фазы считаем p_c постоянным. При переменном p_c нет никаких принципиальных затруднений, но интегрирование усложняется.

При $p_c = \text{const}$, согласно Дюпон, имеем

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \frac{\pi m_0 \gamma_0}{2K} (p_k - p_c) \frac{2R \ln \frac{R}{r_c} - \frac{1}{R} (R^2 - r_c^2)}{\ln^2 \frac{R}{r_c}} \cdot \frac{dR}{dt} = \\ &= \gamma_c \frac{2\pi k}{\mu} \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R}{r_c}}, \end{aligned} \quad (9.29)$$

где γ_c — удельный вес при давлении p_c (при входе в скважину).

Полагая, что удельный вес меняется очень мало, считая пористость также мало изменяющейся и обозначая её через m , вместо этого уравнения получим

$$\frac{m}{2K} \frac{2R \ln \frac{R}{r_c} - \frac{1}{R} (R^2 - r_c^2)}{\ln \frac{R}{r_c}} \frac{dR}{dt} = \frac{2k}{\mu}. \quad (9.30)$$

или

$$t = \frac{m\mu}{4kK} \left(R^2 - r_c^2 - \int_{r_c}^R \frac{R^2 - r_c^2}{R \ln \frac{R}{r_c}} dR \right). \quad (9.31)$$

Обозначая

$$\frac{R}{r_c} = u, \quad (9.32)$$

$$2 \ln u = 2 \ln \frac{R}{r_c} = v, \quad (9.33)$$

$$\frac{m\mu r_c^2}{4kK} = \frac{r_c^2}{4\pi} = T_0, \quad (9.34)$$

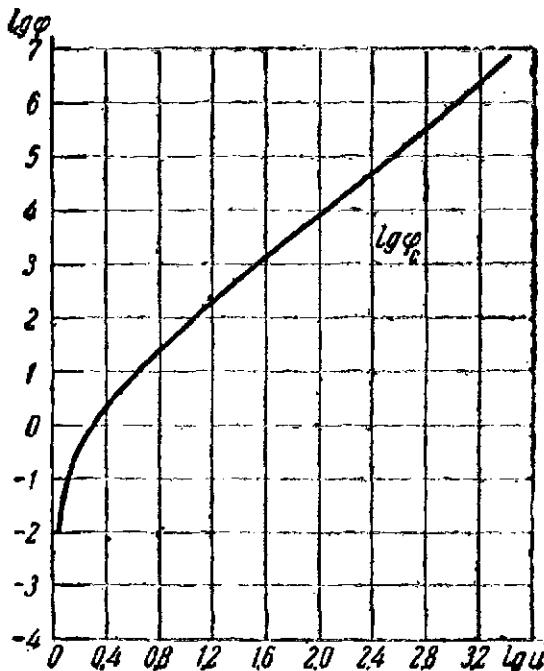
найдём

$$t = T_0 \varphi(u). \quad (9.35)$$

Здесь

$$\varphi(u) = u^2 - 1 - \int_1^u \frac{u^2 - 1}{u \ln u} du. \quad (9.36)$$

Вычисление интеграла (9.36) выполняется приближенно.



Фиг. 65.

Для $v \leq 0,1$, что соответствует $u \leq 1,0513$, имеем

$$\varphi(u) = u^2 - 1 - \left(v + \frac{1}{2} \frac{v^2}{2!} + \frac{1}{3} \frac{v^3}{3!} + \dots \right), \quad (9.37)$$

для $v > 0,1$, $u > 1,0513$:

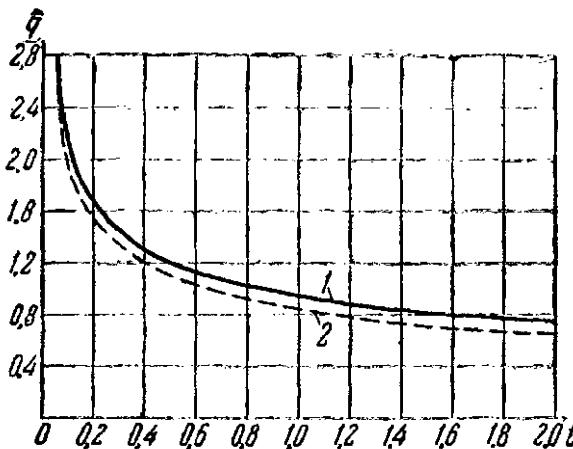
$$\varphi(u) = u^2 + \ln 10v - Ei(v) - 2,7253, \quad (9.38)$$

где

$$Ei(v) = - \int_{-\infty}^v \frac{e^v}{v} dv \quad (9.39)$$

есть интегральный экспоненциал — табулированная функция. График функции (9.38) приведён на фиг. 65.

Рассматриваемая здесь задача для $p_c = \text{const}$ была точно решена Маскетом для случая кругового пласта при $R_h:r_c = 5$. Связь между дебитом и временем даётся им в виде функциональной зависимости $\bar{q} = \bar{q}(t)$, где \bar{q} — безразмерный дебит,



Фиг. 66.

\bar{t} — безразмерное время, которые определяются уравнениями

$$\bar{q} = \frac{q\mu}{2\pi kK(\gamma_k - \gamma_c)}, \quad \bar{t} = \frac{kKt}{m\mu r_c^2}.$$

Легко видеть, что эти величины можно выразить в наших обозначениях через $u = \frac{R}{r_c}$ и $\varphi(u)$. Из формул Дюпюи (9.32), (9.34) и (9.35) получаем

$$\bar{q} = \frac{1}{\ln u}, \quad \bar{t} = \frac{1}{4} \varphi(u).$$

По значениям $\varphi(u)$ из формул (9.37) и (9.38), или из графика фиг. 65, устанавливаем связь между \bar{q} и \bar{t} . Результаты приведены на графике фиг. 66.

Кривая 1 заимствована из книги Маскета, а кривая 2 построена нами. Для построения, задаваясь различными u , определяем сначала $\bar{q} = \frac{1}{\ln u}$, а затем из графика, изображённого на фиг. 65, находим $\varphi(u)$ и $\bar{t} = \frac{1}{4} \varphi(u)$. Расхождение

между кривыми не превосходит 10% . Это обстоятельство указывает на допустимость подобного метода расчёта.

Когда задан закон изменения дебита, то в (9.28) p_c будет переменным:

$$-\frac{dG}{dt} = \frac{\pi m_0 \gamma_0}{2K} \left[\frac{2R \ln \frac{R}{r_c} - \frac{1}{R} (R^2 - r_c^2)}{\ln^2 \frac{R}{r_c}} (p_k - p_c) \frac{dR}{dt} - \right. \\ \left. - \frac{R^2 - r_c^2}{\ln \frac{R}{r_c}} \frac{dp_c}{dt} \right] = \gamma_c q. \quad (9.40)$$

$$q = \frac{2\pi k}{\mu} \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R}{r_c}}. \quad (9.41)$$

Если известен дебит, то проще всего поступить так: из (9.41) находим

$$-\frac{dp_c}{dt} = \frac{\mu}{2\pi k} \left(\frac{dq}{dt} \ln \frac{R}{r_c} + \frac{q}{R} \frac{dR}{dt} \right). \quad (9.42)$$

Подставив это значение в (9.40) и полагая $\gamma_c = \gamma_0$, будем иметь

$$\frac{\pi m}{2K} \left[\frac{2R \ln \frac{R}{r_c} - \frac{1}{R} (R^2 - r_c^2)}{\ln^2 \frac{R}{r_c}} - \frac{q \mu}{2\pi k} \ln \frac{R}{r_c} \frac{dR}{dt} + \right. \\ \left. + \frac{R^2 - r_c^2}{\ln \frac{R}{r_c}} \frac{\mu}{2\pi k} \left(\frac{dq}{dt} \ln \frac{R}{r_c} + \frac{q}{R} \frac{dR}{dt} \right) \right] = q$$

или

$$\frac{\pi m}{2K} \left[2Rq \frac{dR}{dt} + (R^2 - r_c^2) \frac{dq}{dt} \right] = \frac{2\pi k}{\mu} q,$$

откуда

$$\frac{d}{dt} [(R^2 - r_c^2) q] = 4\kappa q. \quad (9.43)$$

Интегрируя (9.43), получим

$$R^2 - r_c^2 = 4\kappa \frac{Q(t)}{q}, \quad (9.44)$$

где

$$Q(t) := \int_0^t q dt \quad (9.45)$$

есть объём извлечённой жидкости.

Согласно (9.41) в течение первой фазы для депрессии имеем

$$p_k - p_c = -\frac{q}{2\pi k} \ln \frac{R}{r_c} = -\frac{q}{2\pi k} \ln \left[\frac{4\pi}{r_c^2} \frac{Q(t)}{q} + 1 \right]. \quad (9.46)$$

Объём извлечённой жидкости в течение первой фазы (на единицу мощности пласта) определяется, согласно (9.28), следующей формулой:

$$Q(t) = \frac{\pi m}{K} (p_k - p_c) \frac{R_k^2 - r_c^2}{2 \ln \frac{R_k}{r_c}}. \quad (9.47)$$

Формулу (9.46) для случая $q = \text{const}$ можно привести к типу формулы (6.74) при $\alpha = 1$, которая в этом случае ($\alpha = 1$, $q = \text{const}$) имеет вид

$$\Delta p = p_k - p_c = \frac{\mu}{4\pi k} q \Psi_0(\xi, 1),$$

где, согласно (6.35):

$$\xi = \frac{a^2 + a^2}{4\pi t} = \frac{a^2}{2\pi t} = \frac{r_c^2}{2\pi t},$$

а функция $\Psi_0(\xi, 1)$ приведена на графике фиг. 41. С другой стороны, как нетрудно видеть, формулу (9.46) можно представить для случая $p = \text{const}$ ещё и таким образом:

$$p_k - p_c = \frac{\mu}{4\pi k} q \ln \left(1 + \frac{2}{\xi} \right).$$

График функции $\ln \left(1 + \frac{2}{\xi} \right)$ показан пунктиром на той же фиг. 41.

Таким образом, из сопоставления этих кривых можно судить о степени точности метода последовательной смены стационарных состояний для первой фазы упругого режима. Метод последовательной смены даёт несколько преувеличенное значение депрессии, особенно для начальных моментов времени.

Перейдём к исследованию второй фазы, когда воронка депрессии достигла естественных непроницаемых границ подземного резервуара (фиг. 64).

Согласно уравнению (9.28), в этот момент вес жидкости в пласте равен

$$G = (m\gamma)_k \pi R_k^2 - (m\gamma)_c \pi r_c^2 - \frac{\pi m_0 \gamma_0}{K} \frac{R_k^2 - r_c^2}{2 \ln \frac{R_k}{r_c}} (p_k - p_c). \quad (9.48)$$

Дальнейшее истощение резервуара будет сопровождаться падением контурных давлений p_k или p_c , смотря по условиям отбора жидкости.

К уравнению (9.48) добавляются ещё два:

$$-\frac{dG}{dt} = -\pi R_k^2 \frac{d(m\gamma)_k}{dt} + \pi r_c^2 \frac{d(m\gamma)_c}{dt} + \frac{\pi m_0 \gamma_0}{K} \frac{R_k^2 - r_c^2}{2 \ln \frac{R_k}{r_c}} \left(\frac{dp_k}{dt} - \frac{dp_c}{dt} \right) = \gamma_c q; \quad (9.49)$$

$$q = \frac{2\pi k}{\mu} \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \quad (9.50)$$

или, согласно (6.8) и (6.13):

$$-\frac{dG}{dt} = -\frac{\pi m_0 \gamma_0}{K} \left[\left(R_k^2 - \frac{R_k^2 - r_c^2}{2 \ln \frac{R_k}{r_c}} \right) \frac{dp_k}{dt} + \left(\frac{R_k^2 - r_c^2}{2 \ln \frac{R_k}{r_c}} - r_c^2 \right) \frac{dp_c}{dt} \right] = \gamma_c q. \quad (9.51)$$

Полагая, как раньше, $\gamma_g \approx \gamma_c$ и обозначая

$$R_k^2 - \frac{R_k^2 - r_c^2}{2 \ln \frac{R_k}{r_c}} = a, \quad (9.52)$$

$$\frac{R_k^2 - r_c^2}{2 \ln \frac{R_k}{r_c}} - r_c^2 = b,$$

из (9.51) получим

$$-\left(a \frac{dp_k}{dt} + b \frac{dp_c}{dt}\right) = -\frac{2\kappa}{\ln \frac{R_k}{r_c}} (p_k - p_c) \quad (9.53)$$

или

$$\frac{dp_k}{dt} + \frac{\beta}{a} p_k = \frac{\beta}{a} p_c + \frac{b}{a} \frac{dp_c}{dt}, \quad (9.54)$$

где

$$\beta = \frac{2\kappa}{\ln \frac{R_k}{r_c}}; \quad (9.55)$$

Предположим, что p_c известно в функции времени. Тогда интеграл уравнения (9.54) имеет следующий вид:

$$p_k e^{\frac{\beta t}{a}} - (p_k)_0 = \frac{1}{a} \int_0^t \left(\beta p_c - b \frac{dp_c}{dt} \right) e^{\frac{\beta t}{a}} dt. \quad (9.56)$$

Здесь $(p_k)_0$ — давление на контуре R_k к началу второй фазы.

В частности, при $p_c = \text{const}$ из (9.56) получим

$$p_k e^{\frac{\beta t}{a}} - (p_k)_0 = p_c (e^{\frac{\beta t}{a}} - 1)$$

или

$$p_k = [(p_k)_0 - p_c] e^{-\frac{\beta t}{a}} + p_c. \quad (9.57)$$

Предположим теперь, что известен дебит q в функции времени.

Тогда из (9.51) и (9.52) найдём

$$-\left(a \frac{dp_k}{dt} + b \frac{dp_c}{dt}\right) = -\frac{2\kappa}{\ln \frac{R_k}{r_c}} (p_k - p_c) = \frac{K}{\pi m_0} q. \quad (9.58)$$

Согласно (9.58):

$$\frac{dp_k}{dt} - \frac{dp_c}{dt} = a \frac{dq}{dt}, \quad (9.59)$$

где

$$a = \frac{\mu}{2\kappa k} \ln \frac{R_k}{r_c}.$$

Таким образом

$$\left. \begin{aligned} a \frac{dp_k}{dt} + b \frac{dp_c}{dt} &= - \frac{K}{\pi m_0} q, \\ \frac{dp_k}{dt} - \frac{dp_c}{dt} &= a \frac{dq}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (9.60)$$

Решения уравнений (9.60) имеют вид

$$\frac{dp_k}{dt} = - \frac{\frac{K}{\pi m_0} q + ab \frac{dq}{dt}}{R_k^2 - r_c^2}, \quad (9.61)$$

$$\frac{dp_c}{dt} = - \frac{\frac{K}{\pi m_0} q + aa \frac{dq}{dt}}{R_k^2 - r_c^2}.$$

Отсюда находятся контурные давления

$$\left. \begin{aligned} p_k &= - \frac{1}{R_k^2 - r_c^2} \left[\frac{K}{\pi m_0} Q(t) - ab(q - q_0) \right] + (p_k)_0, \\ p_c &= - \frac{1}{R_k^2 - r_c^2} \left[\frac{K}{\pi m_0} Q(t) + aa(q - q_0) \right] + (p_c)_0. \end{aligned} \right\} \quad (9.62)$$

Здесь $Q(t)$ — суммарный объём извлечённой нефти, q_0 и q — дебиты в начальный момент $t = 0$ и данный момент t . Падение пластового давления на контурах будет¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \Delta p_k &= (p_k)_0 - p_k = - \frac{1}{R_k^2 - r_c^2} \left[\frac{K}{\pi m_0} Q(t) - ab(q - q_0) \right], \\ \Delta p_c &= (p_c)_0 - p_c = \Delta p_0 + \frac{1}{R_k^2 - r_c^2} \left[\frac{K}{\pi m_0} Q(t) + aa(q - q_0) \right], \end{aligned} \right\} \quad (9.63)$$

где

$$\Delta p_0 = (p_k)_0 - (p_c)_0 \quad (9.64)$$

есть начальная депрессия.

При $q = \text{const}$, $Q(t) = qt$, $q - q_0 = 0$ предыдущие формулы соответственно упрощаются.

Определим зависимость p_k и p_c от времени для примера, который взят из книги Маскета. Для реальной скважины

¹⁾ Отсчёт ведётся от первоначального давления $(p_k)_0$.

имеем:

$$K = \frac{10^4}{4,5} = 2220 \text{ атм.}; r_c = \frac{1}{4} \text{ фут.} = 7,6 \text{ см};$$

$$R_k = 500 \text{ фут.} = 152 \text{ м.}$$

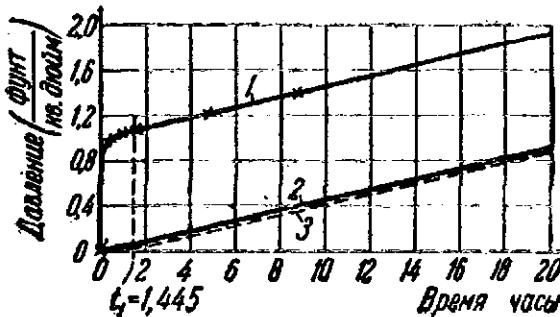
$$q = 1 \frac{\text{баррель}}{\text{сутки} \cdot \text{фут}} = 0,0605 \text{ см}^3/\text{сек} \cdot \text{см} = \text{const};$$

$$\frac{k}{\mu} = 1; \quad m_0 = 0,2.$$

Согласно (9.46), в течение первой фазы, после вычисления получим

$$p_k - p_c = 0,0706 \ln(1 + 27,7 \cdot 10^5 \cdot t), \quad (9.65)$$

где t — время в часах, $p_k - p_c$ — депрессия в фунт/кв. дюйм.



Фиг. 67.

Длительность t_1 первой фазы при $q = \text{const}$ найдётся из (9.44). Полагая там $R = R_k = 152 \text{ м.}$, получим $t_1 = 1,445$ часа. К концу первой фазы, из (9.65) находим $p_k - p_c = 1,02$ фунт/кв. дюйм.

Для второй фазы по уравнениям (9.63) имеем

$$\Delta p_k = 0,049 (t - 1,445), \quad (9.66)$$

$$\Delta p_c = 1,02 + 0,049 (t - 1,445). \quad (9.67)$$

Точки, вычисленные по уравнениям (9.65), (9.66) и (9.67), показаны на фиг. 67, заимствованной из книги Маскета, который рассчитывал тот же пример по точным, очень громоздким формулам, выражющимся в рядах бесселевых функций. Кривые 1, 2 вычислены Маскетом. Кривая 1 относится к падению пластового давления для скважины, кривая 2 — для

контура. Крестиками показаны точки, вычисленные для первой фазы по уравнению (9.65) и для второй по уравнению (9.66). Прямая z_3 , соответствующая уравнению (9.67), показана пунктиром.

Соответствие предлагаемого решения с точным следует признать вполне удовлетворительным.

§ 42. Приложения метода последовательной смены стационарных состояний к задачам неустановившихся течений газа и безнапорных грунтовых потоков

Общая теория интегрирования полученного Л. С. Лейбензоном уравнения неустановившегося течения газа (8.8) — нелинейного уравнения параболического типа — ещё не разработана в достаточной степени. Сам Л. С. Лейбензон¹⁾ предложил способ, основанный на его линеаризации и дальнейшем решении методом последовательных приближений. Этот способ приводит к очень громоздким и сложным вычислениям.

М. Маскет применил к задачам радиальной фильтрации газа метод последовательной смены стационарных состояний. В результате задача принципиально чрезвычайно упростилась, но свелась к квадратурам, которые М. Маскету пришлось вычислять графически. Ряд задач о прямолинейной и радиальной фильтрации газа был рассмотрен Б. Б. Лапуком этим же методом при помощи понятия о средневзвешенном по пласту давлении²⁾.

Метод последовательной смены стационарных состояний при всех обстоятельствах требует предварительного определения количества жидкости или газа в пласте. Это определение сводится к вычислению некоторых интегралов, где переменной интегрирования обычно является длина. Предлагаемое ниже упрощение заключается в том, что интегрирование по длине заменяется интегрированием по переменной, за которую принимается давление или удельный вес. При этом, если квадратура выполнима в конечном виде, вычисле-

¹⁾ См. сноску на стр. 12.

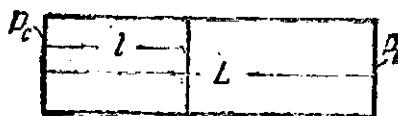
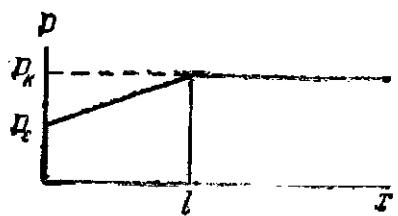
²⁾ Лапук Б. Б., Приближённое решение задач о неустановившейся радиальной фильтрации газов по закону Дарси, Доклады АН СССР, т. LVIII, № 1, 1947 г.

ния чрезвычайно упрощаются. Если же квадратура не выполняется в конечном виде, как, например, в случае радиальной фильтрации, можно простым путем дать оценку верхнего и нижнего значений вычисляемых интегралов.

Все рассмотренные ниже задачи для изотермического течения газа автоматически распространяются на соответствующие случаи грунтовых безнапорных потоков, согласно установленной ранее аналогии.

**§ 43. Распространение зоны депрессии
при прямолинейной фильтрации газа
(первая фаза неустановившегося движения).
Случай постоянных граничных давлений**

Рассмотрим случай прямолинейного движения газа в пласте длиной L (фиг. 68), где первоначально было постоянное давление p_k . Пусть в момент $t=0$ на открытом конце $x=0$ давление изменилось и стало равным $p_c = \text{const}$.



Фиг. 68.

При методе последовательной смены стационарных состояний мы должны считать, что депрессионная кривая, рассматриваемая, как стационарная, распространяется вдоль пласта от сечения $x=0$ к сечению $x=L$.

При изотермическом течении, согласно (8.5), имеем

$$P = \frac{1}{2} \frac{v_0}{p_0} p^2. \quad (9.68)$$

Пусть зона депрессии распространилась на расстояние L . Тогда

$$P = \frac{p_k - p_c}{l} x + p_c$$

или

$$p^2 = \frac{p_k^2 - p_c^2}{l} x + p_c^2. \quad (9.69)$$

Вес газа в пласте к этому моменту (на единицу площади поперечного сечения пласта) равен

$$W = m \int_0^l \gamma dx + m \gamma_k (L - l) = m \frac{\gamma_0}{p_0} \left[\int_0^l p dx + p_k (L - l) \right]. \quad (9.70)$$

Для вычисления интеграла заменим интегрирование по x интегрированием по p . Согласно (9.69) получим

$$dx = \frac{2 p dp}{p_k^2 - p_c^2} l$$

и

$$\begin{aligned} W &= \frac{m \gamma_0}{p_0} \left[\frac{2l}{p_k^2 - p_c^2} \int_{p_c}^{p_k} p^2 dp + p_k (L - l) \right] = \\ &= \frac{m \gamma_0}{p_0} \left[\frac{2}{3} \frac{p_k^3 - p_c^3}{p_k^2 - p_c^2} l + p_k (L - l) \right] = \\ &= \frac{m \gamma_0}{p_0} \left[\frac{2}{3} \left(p_k + p_c - \frac{p_k p_c}{p_k + p_c} \right) l + p_k (L - l) \right]. \quad (9.71) \end{aligned}$$

Весовой дебит q через единицу площади поперечного сечения пласта, или весовая скорость фильтрации, выражается следующим образом:

$$q = \frac{1}{2} \frac{k}{\mu} \frac{\gamma_0}{p_0} \frac{p_k^2 - p_c^2}{l}. \quad (9.72)$$

Этот дебит равен уменьшению веса газа в пласте в единицу времени:

$$q = - \frac{dW}{dt},$$

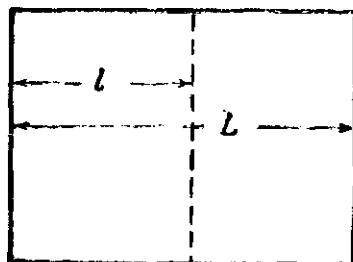
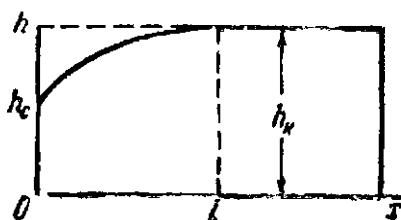
или, согласно (9.71) и (9.72), так как p_k и p_c постоянны, то

$$- \frac{m \gamma_0}{p_0} \left[\frac{2}{3} \left(p_k + p_c - \frac{p_k p_c}{p_k + p_c} \right) \frac{dt}{dt} - p_k \frac{dt}{dt} \right] = \frac{1}{2} \frac{k}{\mu} \frac{\gamma_0}{p_0} \frac{p_k^2 - p_c^2}{l},$$

откуда

$$m \left(\frac{p_k}{3} + \frac{2}{3} \frac{p_k p_c}{p_k + p_c} - \frac{2}{3} p_c \right) \frac{dt}{dt} = \frac{1}{2} \frac{k}{\mu} \frac{p_k^2 - p_c^2}{l}. \quad (9.73)$$

Интегрируя это уравнение и учитывая, что при $t=0$ $l=0$, получаем следующее выражение:



Фиг. 69.

Согласно (9.74) для этого случая (фиг. 69) получим

$$t = \frac{m}{3c(h_k^2 - h_c^2)} \left(h_k + 2 \frac{h_k h_c}{h_k + h_c} - 2h_c \right) l^2. \quad (9.75)$$

§ 44. Распространение зоны депрессии при постоянном дебите

Решим ту же задачу, что и выше, но для случая, когда дебит $q = \text{const}$. При этом давление p_c уже будет, очевидно, переменным. Уравнение $q = -\frac{dW}{dt}$ принимает в этом случае следующий вид:

$$-\frac{m\gamma_0}{p_0} \left\{ \frac{2}{3} \left(p_k + p_c - \frac{p_k p_c}{p_k + p_c} \right) \frac{dl}{dt} - p_k \frac{dl}{dt} + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} l \left[\frac{dp_c}{dt} - \frac{(p_k + p_c)p_k - p_k p_c}{(p_k + p_c)^2} \frac{dp_c}{dt} \right] \right\} = q$$

$$t = \frac{m}{3k(p_k^2 - p_c^2)} \left(p_k + \right. \\ \left. + 2 \frac{p_k p_c - 2p_c}{p_k + p_c} \right) l^2. \quad (9.74)$$

Зная зависимость $l = l(t)$, можно из (9.72) найти закон изменения дебита в функции времени. Вследствие малой вязкости газа μ длина l растёт весьма быстро и, соответственно, дебит падает так же.

Для грунтовых вод эта задача соответствует случаю притока к дренажной галлерее при внезапном изменении в ней уровня воды.

или

$$\frac{m\gamma_0}{p_0} \left\{ \left(\frac{1}{3} p_k + \frac{2}{3} \frac{p_k p_c}{p_k + p_c} - \frac{2}{3} p_c \right) \frac{dl}{dt} - \right. \\ \left. - \frac{2}{3} l \left[1 - \frac{p_k^2}{(p_k + p_c)^2} \right] \frac{dp_c}{dt} \right\} = q. \quad (9.76)$$

Из (9.72) имеем

$$l = \frac{1}{2} \frac{k}{\mu} \frac{\gamma_0}{p_0} \frac{p_k^2 - p_c^2}{q}, \quad (9.77)$$

откуда

$$\frac{dl}{dt} = - \frac{k\gamma_0}{\mu p_0 q} p_c \frac{dp_c}{dt}. \quad (9.78)$$

С учётом (9.77) и (9.78) уравнение (9.76) имеет вид

$$- \frac{m\gamma_0}{p_0} \left[\frac{k\gamma_0}{\mu p_0 q} \left(\frac{1}{3} p_k p_c + \frac{2}{3} \frac{p_k p_c^2}{p_k + p_c} - \frac{2}{3} p_c^2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \frac{k\gamma_0}{\mu p_0 q} \left(p_k^2 - p_c^2 - p_k^2 \frac{p_k - p_c}{p_k + p_c} \right) \right] \frac{dp_c}{dt} = q. \quad (9.79)$$

Интегрирование этого уравнения, после всех сокращений и упрощений, даёт

$$t = - \frac{m\gamma_0^2 k}{\mu p_0^2 q^2} \left(\frac{p_k p_c^2}{2} - \frac{p_c^3}{3} \right) + C. \quad (9.80)$$

При

$$t = 0 \quad p_c = p_k.$$

Отсюда

$$t = \frac{m\gamma_0^2 k}{6\mu p_0^2 q^2} (p_k^3 + 2p_c^3 - 3p_k p_c^2). \quad (9.81)$$

Для нахождения p_c при заданном t представим (9.81) следующим образом:

$$t = \frac{m\gamma_0^2 k}{6\mu p_0^2 q^2} p_k^3 \left[1 - 3 \left(\frac{p_c}{p_k} \right)^2 + 2 \left(\frac{p_c}{p_k} \right)^3 \right]. \quad (9.82)$$

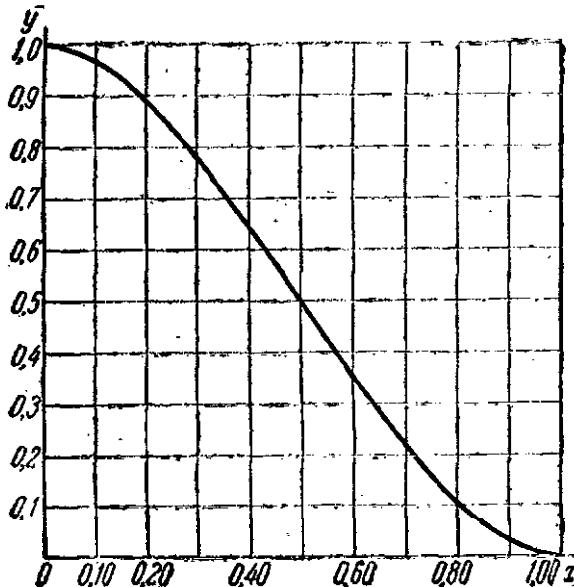
График функции

$$y = 1 - 3 \left(\frac{p_c}{p_k} \right)^2 + 2 \left(\frac{p_c}{p_k} \right)^3 \quad (9.83)$$

показан на фиг. 70.

Таким образом, зная зависимость $p_c = p_c(t)$ из (97.7), можно найти t .

Само собой разумеется, что извлечение постоянного дебита $q = \text{const}$ возможно только до значений $p_c \geq 0$. В противном случае дебит начнёт неизбежно падать.



Фиг. 70.

Для потока грунтовых вод (фиг. 69) в этом случае, когда из галлерей начинает откачиваться постоянный дебит q на единицу ширины галлерей, получим

$$t = \frac{\pi c h_k^3}{6q^2} y, \quad (9.84)$$

где

$$y = 1 - 3 \left(\frac{h_c}{h_k} \right)^2 + 2 \left(\frac{h_c}{h_k} \right)^3. \quad (9.85)$$

§ 45. Истощение прямолинейного пласта при постоянном давлении на открытом конце (вторая фаза)

После того как зона депрессии дошла до границы прямолинейного пласта $x = L$, дальнейший процесс будет определяться существующими на этой границе условиями. Пусть

граница $x = L$ непроницаема. Предположим, что на открытом конце $x = 0$ поддерживается постоянное давление p_c . Тогда контурное давление p_k на непроницаемой границе начнет снижаться. Дебит, естественно, также будет падать.

Вес газа в пласте в период второй фазы — истощения — определяется формулой (9.71), где следует положить $l = L$. При этом

$$W = \frac{2}{3} \frac{m \gamma_0 L}{p_0} \left(p_k - \frac{p_c^2}{p_k + p_c} \right). \quad (9.86)$$

Дебит q попрежнему связан с W соотношением $q = -\frac{dW}{dt}$.

Отсюда

$$-\frac{2}{3} \frac{m \gamma_0 L}{p_0} \left[1 - \frac{p_c^2}{(p_k + p_c)^2} \right] \frac{dp_k}{dt} = \frac{1}{2} \frac{k}{\mu} \frac{\gamma_0}{p_0} \frac{p_k^2 - p_c^2}{L}. \quad (9.87)$$

Интегрируя, найдем

$$t = -\frac{4}{3} \frac{m \mu L^2}{k} \left[\frac{3}{8 p_c} \ln \frac{p_k - p_c}{p_k + p_c} - \frac{p_c}{4(p_k + p_c)^2} + \frac{1}{4(p_k + p_c)} \right] + C. \quad (9.88)$$

Пусть при $t = 0$ $p_k = (p_k)_0$. Тогда

$$t = \frac{4}{3} \frac{m \mu L^2}{k} \left\{ \frac{3}{8 p_c} \ln \frac{[(p_k)_0 - p_c](p_k + p_c)}{(p_k - p_c)[(p_k)_0 + p_c]} + \frac{p_c}{4} \left[\frac{1}{(p_k + p_c)^2} - \frac{1}{[(p_k)_0 + p_c]^2} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{p_k + p_c} - \frac{1}{(p_k)_0 + p_c} \right] \right\}. \quad (9.89)$$

Из уравнений (9.87) или (9.89) нетрудно видеть, что при $p_c = 0$ мы получим

$$t = \frac{4}{3} \frac{m \mu L^2}{k} \left[\frac{1}{p_k} - \frac{1}{(p_k)_0} \right]. \quad (9.90)$$

Для дренажной галлерей (фиг. 69) имеем

$$t = \frac{4}{3} \frac{m L^2}{c} \left\{ \frac{3}{8 h_c} \ln \frac{[(h_k)_0 - h_c](h_k + h_c)}{(h_k - h_c)[(h_k)_0 + h_c]} + \frac{h_c}{4} \left[\frac{1}{(h_k - h_c)^2} - \frac{1}{[(h_k)_0 - h_c]^2} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{h_k - h_c} - \frac{1}{(h_k)_0 - h_c} \right] \right\}. \quad (9.91)$$

Если уровень h_c в галлерее равен нулю, то

$$t = \frac{4}{3} \frac{m L^2}{c} \left[\frac{1}{h_k} - \frac{1}{(h_k)_0} \right]. \quad (9.92)$$

§ 46. Истощение прямолинейного пласта при постоянном дебите (вторая фаза)

Рассмотрим предыдущую задачу при условии $q = \text{const}$. При этом, очевидно, будут изменяться p_c и p_k . Объём газа в пласте, согласно (9.71), равен

$$W = \frac{2}{3} \frac{m\gamma_0}{p_0} L \left(p_k + p_c - \frac{p_k p_c}{p_k + p_c} \right),$$

откуда

$$q = -\frac{dW}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{m\gamma_0 L}{p_0} \left[\frac{dp_k}{dt} + \frac{dp_c}{dt} - \frac{p_k^2 \frac{dp_c}{dt} + p_c^2 \frac{dp_k}{dt}}{(p_k + p_c)^2} \right]. \quad (9.93)$$

Далее, согласно (9.77), имеем

$$p_k^2 - p_c^2 = \frac{2\mu p_0 \gamma L}{k\gamma_0} = a. \quad (9.94)$$

Тогда

$$\begin{aligned} p_c &= \sqrt{p_k^2 - a}, \\ \frac{dp_c}{dt} &= \frac{p_k}{V} \frac{dp_k}{dt}. \end{aligned} \quad (9.95)$$

Подставляя значение $\frac{dp_c}{dt}$ в (9.93) и упрощая, найдём

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3} \frac{m\gamma_0 L}{p_0} \left[\frac{p_k}{V} \frac{dp_k}{dt} - \frac{1}{a^2} \frac{p_k^3 (2p_k^2 - a)}{V} + \frac{3p_k^2}{a} + \right. \\ \left. + \frac{2p_k}{a^2} (p_k^2 - a)^{\frac{3}{2}} \right] \frac{dp_k}{dt} = q. \quad (9.96) \end{aligned}$$

Интегрируя это уравнение, после всех вычислений, получаем

$$-\frac{2}{3} \frac{m\gamma_0 L}{p_0 a} (p_k^3 - p_k^2 \sqrt{p_k^2 - a}) = qt + C. \quad (9.97)$$

Постоянную интеграции C определим из условия, что при

$$t = 0 \quad p_k = (p_k)_0. \quad (9.98)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} t = \frac{2}{3} \frac{m\gamma_0 L}{p_0 a} \left\{ (p_k)_0^3 - p_k^3 - \right. \\ \left. - [(p_k)_0^2 \sqrt{(p_k)_0^2 - a} - p_k^2 \sqrt{p_k^2 - a}] \right\}. \quad (9.99) \end{aligned}$$

Для грунтового потока в этом случае (фиг. 69) вместо (9.94) и (9.99) будем иметь

$$a = h_k^2 - h_c^2 = \frac{2qL}{c}, \quad (9.100)$$

где q — дебит на единицу ширины галлерен, по условию, постоянный;

$$t = \frac{2}{3} \frac{mL}{a_q} \left\{ (h_k)_0^3 - h_k^3 - [(h_k)_0^2 \sqrt{(h_k)^2 - a} - h_k^2 \sqrt{h_k^2 - a}] \right\}. \quad (9.101)$$

§ 47. Радиальный приток к скважине

Применение метода последовательной смены стационарных состояний к исследованию пластовых давлений и дебитов газовых скважин было сделано М. Маскетом и Б. Б. Лапуком.

Для всех задач такого рода, как и выше для прямолинейного пласта, необходимо предварительно найти вес газа в пласте.

В общем случае, как уже сказано выше, при радиальном течении, задача сводится к квадратурам, не выполнимым в конечном виде. Маскет при этом пользовался результатами графического интегрирования.

Нетрудно видеть, что при установившемся режиме давление мало меняется по пласту и испытывает замедленное падение в непосредственной близости к скважине. Это дало основание Б. Б. Лапуку приблизенно принять за среднее пластовое давление на контуре пласта.

Мы ограничимся здесь указанием пределов, между которыми находится среднее давление в пласте вокруг газовой скважины. Найдём сначала вес газа в пласте радиуса R_k вокруг скважины радиуса r_c . Расчёт будем вести на единицу мощности пласта. Давления на контурах пласта и скважин — p_k , p_c . Пусть воронка депрессии прошла расстояние $R < R_k$ (фиг. 64). Тогда вес газа в пласте будет

$$W = \frac{m_{10}}{p_0} p_k \pi (R_k^2 - R^2) + \frac{m_{10}}{p_0} 2\pi \int_{r_c}^R p r dr. \quad (9.102)$$

Рассматривая распределение давления в кольце радиуса R как стационарное, получим

$$p^2 = \frac{p_k^2 - p_c^2}{\ln \frac{R}{r_c}} \ln \frac{r}{r_c} + p_c^2. \quad (9.103)$$

Для упрощения вычислений, как и выше, заменим интегрирование по r интегрированием по p .

Из (9.103) находим

$$r = r_c e^{\frac{p^2 - p_c^2}{p_k^2 - p_c^2} \ln \frac{R}{r_c}} \quad (9.104)$$

$$dr = \frac{2p}{p_k^2 - p_c^2} r_c \ln \frac{R}{r_c} e^{-\frac{p^2 - p_c^2}{p_k^2 - p_c^2} \ln \frac{R}{r_c}} dp, \quad (9.105)$$

$$W_R = \frac{m_{10}}{p_0} 2\pi \int_{r_c}^R pr dr = \frac{m_{10}}{p_0} 2\pi r_c^2 \frac{a}{p_k^2 - p_c^2} \int_{p_c}^{p_k} p^2 e^{\frac{p^2 - p_c^2}{p_k^2 - p_c^2}} dp, \quad (9.106)$$

где

$$a = 2 \ln \frac{R}{r_c}. \quad (9.107)$$

Оценим интеграл в (9.106)

$$J = \int_{p_0}^{p_k} p^2 e^{\frac{p^2 - p_c^2}{p_k^2 - p_c^2}} dp, \quad (9.108)$$

который не берётся в конечном виде.

Сделаем замену переменного

$$a \frac{p^2 - p_c^2}{p_k^2 - p_c^2} = u. \quad (9.109)$$

Тогда

$$J = \frac{p_k^2 - p_c^2}{2a} \int_0^a \frac{p_c^2 + \frac{u}{a} (p_k^2 - p_c^2)}{\sqrt{p_c^2 + \frac{u}{a} (p_k^2 - p_c^2)}} e^u du. \quad (9.110)$$

Для оценки наименьшего значения J положим под радикалом в (9.110) $u = a$. При этом

$$\begin{aligned} J > J_1 &= \frac{p_k^2 - p_c^2}{2ap_k} \int_0^a [p_c^2 + \frac{u}{a} (p_k^2 - p_c^2)] e^u du = \\ &= \frac{p_k^2 - p_c^2}{2ap_k} \left\{ p_c^2 (e^a - 1) + \frac{p_k^2 - p_c^2}{a} [e^a (a - 1) + 1] \right\}. \quad (9.111) \end{aligned}$$

Учитывая (9.107), найдём

$$\begin{aligned} J > J_1 &= \frac{p_k^2 - p_c^2}{2a} p_k \frac{R^2}{r_c^2} \left[1 - \frac{1}{a} \left(1 - \frac{p_c^2}{p_k^2} \right) - \frac{r_c^2}{R^2} \frac{p_c^2}{p_k^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{a} \left(1 - \frac{p_c^2}{p_k^2} \right) \frac{r_c^2}{R^2} \right]. \quad (9.112) \end{aligned}$$

Таким образом, согласно (9.106), мы получаем

$$\begin{aligned} W_R > \frac{m_{10}}{p_0} p_k \pi R^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2 \ln \frac{R}{r_c}} \left(1 - \frac{p_c^2}{p_k^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{r_c^2}{R^2} \left[\frac{p_c^2}{p_k^2} - \frac{1}{2 \ln \frac{R}{r_c}} \left(1 - \frac{p_c^2}{p_k^2} \right) \right] \right\}. \quad (9.113) \end{aligned}$$

Отсюда легко видеть, что среднее давление p_{cp} в пласте, определяемое равенством

$$p_{cp} = \frac{W_R \cdot p_0}{m \pi R^2 \gamma_0},$$

лежит в пределах

$$p_k > p_{cp} > \beta p_k, \quad (9.114)$$

где

$$\beta = 1 - \frac{1}{2 \ln \frac{R}{r_c}} \left(1 - \frac{p_c^2}{p_k^2} \right) - \frac{r_c^2}{R^2} \left[\frac{p_c^2}{p_k^2} - \frac{1}{2 \ln \frac{R}{r_c}} \left(1 - \frac{p_c^2}{p_k^2} \right) \right]. \quad (9.115)$$

Для значений $R \gg r_c$, что будет иметь место очень быстро с начала движения, найдём

$$\beta = 1 - \frac{1}{2 \ln \frac{R}{r_0}} \left(1 - \frac{p_c^2}{p_k^2} \right). \quad (9.116)$$

Например, при $r_c = 0,1 \text{ м}$, $R = 100 \text{ м}$, $\frac{p_c}{p_k} = \frac{1}{2}$, $\beta = 0,946$.

При значениях p_c , приближающихся к p_k , β будет ещё ближе к единице

В случае грунтового потока вокруг скважины сохраняется этот же результат, причём вместо p_k , p_c следует подставить h_k , h_c .

Для веса извлечённого газа к моменту, когда депрессия прошла расстояние R , полагая $R \gg r_c$, имеем

$$G = \frac{m_{10}}{p_0} p_k \pi R^2 - W_R.$$

Из (9.113) и (9.115) следует, что

$$G < \frac{m_{10}}{p_0} p_k \pi R^2 (1 - \beta). \quad (9.117)$$

Таким образом, в согласии с Маскетом, количество газа, извлекаемое в течение первой фазы, составляет очень небольшую часть запаса.

Практические расчёты, связанные со второй фазой, существенно упрощаются благодаря возможности принять за среднее давление контурное. Ряд таких расчётов был выполнен Б. Б. Лапуком. Наблюдения над дебитами и давлениями в газовых скважинах позволяют, исходя из метода последовательной смены стационарных состояний, сделать ряд определений физических констант пласта — проницаемости, мощности, запаса и т. д., подобно тому как это было указано в главе VII. За отсутствием места этот круг вопросов здесь не рассматривается.