



# ITALIAN FLAVORS IN TRANSITION

TRANSITION FROM  
TRADITIONAL TO MODERN

ITALY



ITALY

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР  
ПО НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ВСЕСОЮЗНЫЙ ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ  
(ВИНИТИ)

# ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

---

## СЕРИЯ ГИДРОГЕОЛОГИЯ, ИНЖЕНЕРНАЯ ГЕОЛОГИЯ

Том 11

### МАССОПЕРЕНОС В ВОДОНАСЫЩЕННЫХ ГОРНЫХ ПОРОДАХ

Серия издается с 1969 г.



МОСКВА 1989

Главный редактор информационных изданий ВИНТИ  
профессор *П. В. Нестеров*

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ**

информационных изданий по геологии

Главный редактор проф. *Р. Б. Сейфуль-Мулюков*

Члены редакционной коллегии: проф. *В. С. Алексеев*,

проф. *В. Т. Борисович*, проф. *И. В. Высоцкий*, к. г.-м. н. *И. Б. Иванов*,

проф. *Б. М. Келлер*, акад. *Ю. А. Косыгин*, к. г.-м. н. *И. Н. Красилов*,

к. г.-м. н. *Е. В. Кучерук*, акад. *Н. П. Лаверов*, д. г. н. *К. С. Лосев*,

*И. Т. Макеева* (ученый секретарь редколлегии),

чл.-корр. *А. С. Марфунин*, проф. *А. К. Матвеев*, д. г.-м. н. *М. С. Моделевский*,

д. г.-м. н. *Ю. Б. Осипов*, проф. *В. П. Петров*,

проф. *Г. Ф. Яковлев*

## МАССОПЕРЕНОС В ВОДОНАСЫЩЕННЫХ ГОРНЫХ ПОРОДАХ

*Алексеев В. С., Коммунар Г. М., Шержуков Б. С.*

### ВВЕДЕНИЕ

Исследования процессов массопереноса в водонасыщенных горных породах занимают центральное место в современных проблемах гидрогеологии. Это обусловлено прежде всего актуальностью изучения всех аспектов техногенного влияния на геологическую среду, включая прогнозы и техническое обоснование инженерных мероприятий по защите подземных вод от загрязнения. Теоретические и методические разработки вопросов массопереноса получили наибольшее развитие в работах отечественных и зарубежных специалистов за последние 15—20 лет. Результаты этих исследований освещены в работах Ф. М. Бочера, Н. Н. Веригина, В. М. Гольдберга, В. А. Мироненко, А. Е. Орадовской, А. А. Рошала, В. Т. Румынина, В. М. Шестакова и др.

Наиболее полно изучены вопросы фильтрации и массообмена в горных породах и грунтах в связи с загрязнением подземных вод в горнодобывающих районах [56, 61], при складировании и сбросе промышленных, сельскохозяйственных и бытовых отходов [11, 33, 89], при прогнозах качества подземных вод на водозаборах [9, 32, 69]. В монографии [34] загрязнение подземных вод рассмотрено в связи с загрязнением других природных сред — атмосферного воздуха, поверхностных вод, почв. Гидрогеологические проблемы регулирования качества подземных вод освещены в работе [4].

Теория массопереноса применяется в мелиорации и гидротехнике для расчета процессов растворения, вымыва и кристаллизации солей в почвах и грунтах массивов орошения и оснований гидротехнических сооружений [53]. Сходные теоретические модели массопереноса используются также в гидрогеохимических исследованиях процессов метасоматоза [3, 30] и при изучении сорбционных процессов в химической технологии [13].

В настоящее время с достаточной полнотой разработаны

основы построения моделей массопереноса, методы их аналитической и численной реализации [48, 49]. Намечился переход от рассмотрения гомогенных моделей к гетерогенным структурам пород блокового строения и к стратифицированным средам, наиболее близким к условиям природного залегания [57, 102]. Опубликовано ряд монографий и обобщающих статей по методам определения параметров моделей массопереноса в лабораториях и полевых условиях [25, 58—60, 78, 79]. Основы теории массопереноса в подземных водах вошли в учебники для вузов [55, 100].

Наиболее полные обзоры результатов исследования процессов массопереноса в водонасыщенных горных породах и грунтах были опубликованы в 1968—1971 гг. [12, 25, 36]; их дополнила небольшая работа [66]. Вместе с тем в указанных выше монографиях и статьях, особенно в [34, 61] имеется хорошо подобранная библиография по исследованиям в СССР и за рубежом.

Настоящая работа с учетом достаточно полного освещения отдельных вопросов теории массопереноса в опубликованных ранее работах не претендует на обобщение всего массива публикаций. Авторы в пределах выделенного объема попытались изложить такой материал, который явился бы дополнением к имеющимся исследованиям по весьма широкой проблеме. Сравнительно новые и оригинальные результаты представлены более детально, состояние вопроса кратко изложено в начале разделов.

Структура последующего изложения выбрана таким образом, чтобы на основе комплексного рассмотрения уравнений гидродинамики, диффузии и химической кинетики показать действие как отдельных факторов теоретической модели массопереноса, так и их совместное проявление. Изучение конвективного переноса, гидродинамической дисперсии и массообмена производится как раздельно, так и в сочетании в более сложных моделях.

## **1. ОСНОВНЫЕ ПРОЦЕССЫ МАССОПЕРЕНОСА В ПОДЗЕМНЫХ ВОДАХ И ИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

В природных условиях процесс движения растворов в горных породах и грунтах представляет собой комплекс различных, но взаимосвязанных физико-механических и физико-химических процессов. Главными из них являются:

— фильтрация жидкости (раствора) в породах, сопровождающаяся вытеснением из них пластовой воды (или газа); в общем случае фильтрация происходит в неоднородных и анизотропных по проницаемости породах, а плотность, вязкость и

сжимаемость вытесняющей и пластовой жидкостей различны;  
 — конвективная (фильтрационная) диффузия или гидродинамическая дисперсия, обусловленная неоднородностью поля скоростей фильтрационного потока; релаксация локальных возмущений концентрационного поля происходит под действием молекулярной диффузии; в моделях гетерогенных сред с малопроницаемыми включениями и застойными зонами молекулярная диффузия контролирует обмен веществом между ними и основным потоком подземных вод;

— физико-химическое взаимодействие (массообмен) между движущимися растворами и породами пласта, а также пластовыми жидкостями (сорбция, ионный обмен, растворение и кристаллизация солей, коагуляция и суффозия); сюда включаются также гомогенные процессы радиоактивного распада, биологической деструкции, комплексообразование и др.

С целью количественного описания этих процессов целесообразно сначала сформулировать обобщенную систему дифференциальных уравнений массопереноса, а затем выделить из нее уравнения и процессы, которые могут исследоваться независимо друг от друга.

### 1.1. Обобщенная система дифференциальных уравнений

Фильтрация растворов в горных породах и грунтах в условиях их физико-химического взаимодействия описывается в общем случае системой уравнений движения [15, 25]

$$v_i = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (1.1)$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = -\frac{\partial (\rho p)}{\partial t}, \quad (1.2)$$

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha_\rho (p - p_0)], \quad (1.3)$$

$$n = n_0 + \alpha_n (p - p_0), \quad (1.4)$$

и уравнений диффузии и массообмена

$$u_i = v_i c - D_i \frac{\partial c}{\partial x_i}, \quad (1.5)$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial (nc)}{\partial t}, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = f(c, N, c^*, N^*, \gamma_{\text{диф}}, \gamma_{\text{хим}}), \quad (1.7)$$

$$F(c^*, N^*, \gamma_{\text{сг}}) = 0. \quad (1.8)$$

В этих уравнениях  $x_i$  — декартовы координаты ( $i=1, 2, 3$ , т. е.  $x_1=x$ ;  $x_2=y$ ;  $x_3=z$ );  $p$  — давление в жидкости;  $v_i$  — компо-

ненты скорости фильтрации;  $u_i$  — компоненты массовой скорости ассоциированного жидкостью вещества;  $c$  и  $N$  — массовые концентрации вещества в жидкой и твердой фазах пористой среды,  $c^*$  и  $N^*$  — то же в условиях равновесия;  $\mu$  и  $\rho$  — вязкость и плотность жидкости при давлении  $p$ ;  $n$  — пористость;  $k$  — проницаемость;  $n_0$  и  $\rho_0$  — пористость среды и плотность жидкости при начальном давлении  $p_0$ ;  $\alpha_p$  и  $\alpha_n$  — постоянные параметры сжимаемости жидкости и среды;  $D_i$  — компоненты коэффициента конвективной диффузии, учитывающего молекулярную диффузию и гидродинамическую дисперсию на фронте смешивающегося вытеснения;  $\gamma_{\text{диф}}$  и  $\gamma_{\text{хим}}$  — параметры, определяющие диффузионную и химическую стадии кинетики сорбции.

Равенства (1.1) — (1.3) представляют собой, соответственно, закон Дарси, уравнения неразрывности и состояния жидкости, а равенство (1.4) — уравнение состояния для пористой среды. Наличие в жидкости вещества учитывается параметрами  $\rho_0$  и  $\mu$ , отличными от их же значений для чистой жидкости. Для весьма больших значений давления  $p$  В. Н. Николаевским разработана теория нелинейно-упругого режима фильтрации, где параметры жидкости и среды (плотность и пористость) связаны с давлением в жидкости экспоненциальной зависимостью [64]. Однако даже при значительных нагрузках на пласт (фиктивное давление порядка 100 атм) линейные зависимости (1.3) и (1.4) достаточно точно аппроксимируют опытные данные.

Выражения (1.5) и (1.6) являются уравнениями движения (закон Фика) и баланса массы вещества, содержащегося в жидкости и в твердой фазе. Равенство (1.7) описывает кинетику обмена вещества между жидкой и твердой фазами. Условия протекания процесса предполагаются изотермическими, поэтому температура в (1.7) не входит. Уравнение изотермы сорбции (1.8) в общем виде записывается в неявной форме и содержит константы  $\gamma_{\text{ст}}$ , характеризующие условия взаимодействия веществ в растворе и сорбенте в статических условиях равновесия. Обычно рассматриваются изотермы сорбции в виде явных функций

$$N = f_0(c, \gamma_{\text{ст}}) \quad (1.9)$$

типа линейной изотермы Генри или нелинейных изотерм Ленгмюра, Фрейндлиха и др.

Для коэффициента конвективной диффузии обычно принимается линейная зависимость его от скорости фильтрации вида

$$D_i = D_0 + \lambda_i \vec{v}, \quad (1.10)$$

где  $\vec{v}$  — вектор скорости фильтрации;  $D_0$  — коэффициент молекулярной диффузии в пористой среде;  $\lambda_i$  — коэффициент дисперсии.

При совмещении вектора скорости с осью  $x_1$ , различают коэффициенты продольной и поперечной диффузии

$$D_1 = D_0 + \lambda_1 v_1, \quad D_{2,3} = \lambda_{2,3} v_1, \quad (1.11)$$

причем  $\lambda_2 = \lambda_3$  и, следовательно,  $D_2 = D_3$ . В последнее время для трещиноватых и агрегированных пород применяется более общее выражение для зависимости коэффициента конвективной диффузии от скорости потока [48].

$$D_1 = D_0 + \lambda_1 v + \delta_1 v^2 \quad (1.12)$$

Общая система уравнений гидродинамики, диффузии и массообмена (1.1) — (1.8) содержит 12 уравнений с неизвестными  $p$ ,  $\rho$ ,  $n$ ,  $c$ ,  $N$ ,  $v_i$ ,  $u_i$ . Входящие в эту систему плотность жидкости  $\rho_0$ , вязкость  $\mu$ , пористость  $n_0$  и проницаемость  $k$  вообще говоря не являются постоянными, а зависят от концентраций  $c$  и  $N$ . Однако степень этой зависимости резко различна. Так, например, при фильтрации водных растворов, эмульсий и суспензий малой и средней концентрации (до 60 г/л) плотность их  $\rho_0$  может измениться в зависимости от концентрации  $c$  до 4%, а вязкость  $\mu$  до 8% (при температуре 10°С). Пористость  $n_0$  и проницаемость  $k$  зависят от содержания веществ, поглощенных твердой фазой  $N$ . Вещество в твердой фазе горных пород может находиться в форме растворимых кристаллических и аморфных частиц, дисперсно рассеянных в массе практически нерастворимого материала (случай так называемого объемного засоления пород) или в форме растворимых образований, ранее выпавших в осадок и покрывающих тонкой пленкой поверхность пор и трещин породы (случай так называемого поверхностного засоления пород). Кроме того, вещество в твердой фазе может образоваться в результате адсорбции растворенных и осаждения взвешенных и эмульгированных компонентов фильтрующих растворов, суспензий и эмульсий.

Во всех этих случаях величины  $n$  и  $k$  зависят от  $N$  следующим образом

$$n = n_0 \pm \frac{N}{\delta}; \quad k = A \frac{n^3}{(1-n)^2} d^2 = \frac{A_1}{s_0^2} \frac{n^3}{(1-n)^2}, \quad (1.13)$$

а плотность раствора может быть оценена в зависимости от его концентрации  $C$  по формуле

$$\rho = c + \left(1 - \frac{c}{\delta}\right) \rho_0, \quad (1.14)$$

где  $n_0$  — начальная пористость породы;  $\delta$  — плотность сорбирующегося вещества в твердой фазе;  $A$  и  $A_1$  — постоянные;  $d$  — диаметр частиц;  $s_0$  — удельная поверхность пористой среды.

Если  $N/\delta \leq 0,05 n_0$ , то изменения проницаемости при любых значениях  $n$  не превысят 15—20%. При указанных ограничениях ( $c \leq 60$  г/л;  $N/\delta \leq 0,05 n_0$ ) величины  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $n$ ,  $k$  могут считаться практически независимыми от  $c$  и  $N$ . В этом случае системы



уравнений (1.1) — (1.4) с неизвестными  $p$ ,  $n$ ,  $\rho$ ,  $v_i$  и (1.5) — (1.8) с неизвестными  $c$ ,  $N$ ,  $u_i$  могут рассматриваться независимо друг от друга.

Приведение (1.1) — (1.4) к одному уравнению относительно  $p$  осуществляется следующим образом.

Из (1.1) (1.3) и (1.4) находятся производные

$$\frac{\partial(n\rho)}{\partial t} = (n\rho_0\alpha_p + \rho\alpha_n) \frac{\partial p}{\partial t} \simeq \rho_0(n_0\alpha_p + \alpha_n) \frac{\partial p}{\partial t};$$

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = -\frac{k}{\mu} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} \right) \simeq \frac{k}{\mu} \rho_0 \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2}.$$

Здесь осреднение  $\rho$  и  $n$ , а также отбрасывание по малости произведения производных  $\rho$  и  $p$  по  $x_i$  принято аналогично тому, как это делает В. Н. Щелкачев [105]. Подставляя полученные выражения в (1.2), получим уравнение упругого режима фильтрации в форме

$$a\Delta p = \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (1.15)$$

$$\text{где } a = \frac{k_f h_e}{\mu_e}; \quad \mu_e = \gamma_0 h_e [n_0 \alpha_p + (1 - n_0) a_0]; \quad k_f = \frac{k \gamma_0}{\mu}; \quad a_0 = \frac{\alpha_n}{1 - n_0};$$

$\gamma_0 = \rho_0 g$ ;

$\Delta$  — оператор Лапласа;  $\gamma_0$  — удельный вес жидкости;  $k_f$  — коэффициент фильтрации;  $a_0$  — коэффициент уплотнения, определяемый в одометре;  $h_e = p_e / \gamma_0$  — естественный напор в водоносном пласте;  $\mu_e$  — естественная упругость пласта, равная объему жидкости, выделяющемуся из единицы объема пласта при снижении напора на величину  $h_e$ .

В системе (1.5) — (1.8) следует исключить  $v_i$  и  $u_i$ , чтобы получить для функций  $c$ ,  $c^*$  и  $N$  три уравнения, причем входящее в них давление  $p$  будет уже известной функцией времени и координат, определенной из (1.15). Если принять дополнительно направление скорости фильтрации совпадающим с осью  $x_i$ , что можно сделать для линейного фильтрационного потока, то уравнение (1.5) с учетом (1.10) и (1.11) примет вид:

$$u_i = v_i c - (D_0 + \lambda_i v_i) \frac{\partial c}{\partial x_i}. \quad (1.16)$$

Подстановка этого выражения в (1.6) дает уравнение для случая линейного потока при неустановившейся фильтрации

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(v_i c)}{\partial x_i} - D_0 \frac{\partial^2 c}{\partial x_i^2} - \lambda_1 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial c}{\partial x_i} - \\ & - v_i \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial^2 c}{\partial x_i^2} + \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial(nc)}{\partial t} = 0, \end{aligned} \quad (1.17)$$

которое должно решаться совместно с уравнением (1.15).

Наибольший интерес представляют одномерные случаи, которые при  $n=n_0=\text{const}$  могут быть сформулированы в виде объединенных уравнений движения и сохранения массы для:

— линейного потока

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial c}{\partial x} \right) - \frac{\partial (vc)}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} = n_0 \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (1.18)$$

осесимметричного потока

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r D \frac{\partial c}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial (rvc)}{\partial r} - \frac{\partial N}{\partial t} = n_0 \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (1.19)$$

центрально-симметричного потока

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 D \frac{\partial c}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 vc)}{\partial r} - \frac{\partial N}{\partial t} = n_0 \frac{\partial c}{\partial t}. \quad (1.20)$$

Дальнейшее упрощение (1.18)—(1.20) возможно для условий несжимаемых жидкости и пористой среды ( $\Delta p=0$ ), а также для сжимаемых жидкости и среды при установившейся фильтрации ( $\partial p/\partial t=0$ ). Приближенно можно считать  $\Delta p=0$  и для квазистационарной фильтрации, при которой пьезометрические поверхности, изменяясь во времени, сохраняют ту же геометрическую форму, что и в условиях установившейся фильтрации.

Перенос растворенных веществ в напорном потоке с учетом перетока через породы подошвы и кровли пласта описывается уравнением [29]:

$$D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v \frac{\partial c}{\partial x} + \left[ \frac{v_1}{m} (c - c') + \frac{D_1}{m} \frac{\partial c'}{\partial z} \right]_{z=z_k} + \\ + \left[ \frac{v_2}{m} (c - c'') + \frac{D_2}{m} \frac{\partial c''}{\partial z} \right]_{z=z_n} - \frac{\partial N}{\partial t} = n_0 \frac{\partial c}{\partial t}. \quad (1.21)$$

Здесь  $D$ ,  $D_{1,2}$  — коэффициенты диффузии веществ в основном пласте и в породах кровли и подошвы пласта;  $z_{k,n}$  — координаты кровли и подошвы пласта;  $m$  — его мощность;  $U_{1,2}$  — скорости перетекания раствора через кровлю и подошву пласта.

При  $v_{1,2} > 0$  будет  $c', c'' = c$ , а при  $v_{1,2} < 0$  соответственно  $c' = c_k$  и  $c'' = c_n$ , где  $c_k$  и  $c_n$  — концентрации веществ в соседних пластах. Для безнапорного потока в уравнении (1.21) следует принять  $v_1 = \varepsilon$ ,  $m = h_s$ ,  $D_1 = 0$ , где  $\varepsilon$  — скорость инфильтрации,  $h_s$  — средняя глубина безнапорного потока.

Для всех указанных выше случаев можно получить более общие уравнения диффузии и массообмена, если перейти от декартовых координат к криволинейным и, в частности, для плоской задачи к системе эквипотенциали — линии тока. Такой прием использовался С. Н. Нумеровым и А. Н. Патрашевым [73] в случае, когда коэффициент диффузии не зависит от скорости фильтрации. В случае линейной зависимости коэффициента диффузии от скорости вывод дифференциального урав-

нения в криволинейной системе координат эквипотенциали — линии тока выполнен В. Н. Николаевским [36]. Дополняя эти результаты членом, учитывающим массообмен, и вводя для удобства приведенные значения потенциала скорости фильтрации  $\varphi_r = \varphi/k$  и функции тока  $\psi_r = \psi/k$  получаем

$$\frac{v^2}{k^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi_r} \left( D_1 \frac{\partial c}{\partial \varphi_r} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi_r} \left( D_2 \frac{\partial c}{\partial \psi_r} \right) - k \frac{\partial c}{\partial \varphi_r} \right] - \frac{\partial N}{\partial t} = n_0 \frac{\partial c}{\partial t}. \quad (1.22)$$

Здесь  $v = v(\varphi_r, \psi_r)$  определяется из решения гидродинамической задачи установившейся фильтрации. Таким образом (1.22) является линейным уравнением второго порядка с переменными коэффициентами  $v$ ,  $D_1$  и  $D_2$ .

## 1.2. Уравнения равновесия и кинетики массообмена

Соотношение между концентрациями вещества в растворе и на твердой фазе при продолжительной фильтрации в условиях равновесия определяется уравнением изотермы сорбции или ионного обмена. При физической адсорбции уравнение (1.8) в достаточно общей форме принимается в виде нелинейной изотермы Ленгмюра

$$\frac{N^*}{N_0} = \frac{Lc^*}{1 + Lc^*}, \quad (1.23)$$

где  $C^*$  и  $N^*$  — равновесные концентрации вещества в растворе и на сорбенте,  $N_0$  — емкость поглощения сорбента,  $L$  — константа Ленгмюра.

При малых значениях  $c^*$  величина адсорбции прямо пропорциональна концентрации, а при очень больших соответствует насыщению адсорбента. В первом случае, наиболее часто применяемом при исследованиях физико-химического взаимодействия подземных вод с вмещающими их породами, имеет место линейная изотерма Генри

$$N^* = LN_0 c^* = \Gamma c^* = \frac{n_0}{\alpha} c^*, \quad (1.24)$$

где  $\Gamma$  — постоянная Генри,  $\alpha$  — коэффициент распределения.

Для описания взаимозависимой адсорбции на породе из многокомпонентных растворов при неизменной полной сорбционной емкости породы  $N_0$  изотерма (1.23) обобщается следующим образом

$$\frac{N_i}{N_0} = \frac{L_i c_i^*}{1 + \sum_{i=1}^j L_i c_i^*} \quad (i=1, 2, 3, \dots, j), \quad (1.25)$$

где  $j$  — число компонентов смеси.

В процессах ионообменной сорбции в простейшем случае участвуют два компонента — ион адсорбируемый и ион вытесняемый. Сорбция разновалентных ионов описывается уравнением Никольского—Керра

$$\frac{N_1^{1/n_1}}{N_2^{1/n_2}} = k_{1,2} \frac{c_1^{1/n_1}}{c_2^{1/n_2}}. \quad (1.26)$$

Здесь  $n_1$  и  $n_2$  — валентности ионов. Константа обмена  $k_{1,2}$  дает количественную характеристику адсорбируемости одного иона по сравнению с другим. При обмене одновалентных ионов  $n_1 = n_2 = 1$  в случае  $k_{1,2} < 1$  второй ион имеет большую адсорбируемость — реализуется выпуклая изотерма Ленгмюра, в случае  $k_{1,2} = 1$  адсорбируемость обоих ионов одинакова — линейная изотерма Генри, в случае  $k_{1,2} > 1$  — второй ион имеет меньшую адсорбируемость — вогнутая изотерма.

В исследованиях равновесной адсорбции фосфатов и сульфатов на грунтах [142, 231] используется также нелинейная изотерма Фрейндлиха

$$N^* = kc^{\beta}, \quad (1.27)$$

в которой  $k$  и  $\beta$  — константы.

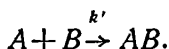
Многие породы способны изменять свои физико-механические свойства при соответствующих изменениях концентрации порового раствора. Так в глинистых и торфяных грунтах под действием ионообменных процессов появляется способность к коагуляции (или пептизации), что немедленно вызывает эффекты повышения (или понижения) водопроницаемости. Значительные изменения происходят также при растворении и кристаллизации солей. Изучению таких процессов посвящены, например, работы В. М. Гольдберга [32, 33].

Вид уравнения кинетики массообмена (1.7) определяется в зависимости от того, какая стадия гетерогенного процесса является лимитирующей. Здесь существует несколько точек зрения. Одни авторы считают, что скорость адсорбционного процесса определяется скоростью внешней диффузии, т. е. транспортом реагирующих веществ к поверхности реакции и обратным движением ее продуктов. Другие исходят из предположения, что кинетика адсорбции определяется скоростью внутренней диффузии, т. е. медленным выравниванием концентрации внутри частиц пород. По мнению третьих, процесс лимитируется непосредственно скоростью реакций (кинетическая стадия).

Ввиду невозможности построения единой обобщающей модели процесса массообмена, обычно рассматривается ряд феноменологических уравнений кинетики. Приведенная ниже сводка таких уравнений включает в себя большую часть из обсуждавшихся различными исследователями.

Необратимая реакция второго порядка.

Предполагается, что при контакте с горными породами вещество  $A$ , растворенное в воде, реагирует с компонентом  $B$ , находящимся на поверхности среды, образуя нерастворимое соединение  $AB$ .



Обозначив концентрации  $A$  и  $AB$ , соответственно, через  $c$  и  $N$ , будем иметь следующее уравнение кинетики:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = k' (N_0 - N) c, \quad (1.28)$$

где  $N_0$  — концентрация активного компонента породы до начала реакции;  $k'$  — константа скорости реакции.

Уравнение кинетики (1.28) широко используется на практике для описания различных физико-химических процессов: адсорбции и ионного обмена, протекающих по биомолекулярному закону [13, 74], осаждения и адгезии взвеси в пористой среде [54, 104, 157], очистки воды от нефти [23] и других [36].

Обратимая реакция первого порядка

Стехиометрическое уравнение такой реакции имеет вид



а уравнение кинетики записывается следующим образом

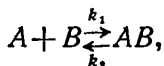
$$\frac{\partial N}{\partial t} = k_1 N_0 c - k_2 N, \quad (1.29)$$

где  $k_{1,2}$  — константы скорости прямой и обратной реакции и при этом  $k_p = k_1/k_2$  — константа равновесия.

Уравнение кинетики (1.29) применялось для описания ионного обмена [13, 74], фильтрационного осветления малоконцентрированных суспензий [54, 104] и ряда других процессов.

Обратимая реакция второго порядка.

Предполагается, что вещество  $A$  при адсорбции на горных породах не образует прочных соединений с веществом  $B$  и поэтому стехиометрическое уравнение реакции записывается в виде:



а уравнение кинетики дается в форме

$$\frac{\partial N}{\partial t} = k_1 (N_0 - N) c - k_2 N. \quad (1.30)$$

Когда обмен определяется скоростями двух противоположно направленных реакций второго порядка, уравнение кинетики имеет вид:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = k_1 (N_0 - N) c - k_2' (c_0 - c) N. \quad (1.31)$$

Для реакций, рассмотренных выше, может быть формально выписано единое обобщенное уравнение кинетики:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \gamma (N_0 - k^* N) c - \beta N, \quad (1.32)$$

где  $\gamma$ ,  $k^*$  и  $\beta$  — константы, определяемые по табл. 1

Таблица 1

Выражения для  $\gamma$ ,  $k^*$  и  $\beta$

Тип реакции	$\gamma$	$k^*$	$\beta$	Уравнение кинетики
Необратимая второго порядка	$\kappa'$	1	0	(1.28)
Обратимая первого порядка	$\kappa_1$	0	$\kappa_2$	(1.29)
Обратимая второго порядка	$\kappa_1$	$\left(1 - \frac{\kappa_2'}{\kappa_1}\right)$	$\kappa_2' C_0$	(1.30)

Рассмотренные выше уравнения кинетики, естественно, не отражают полный перечень встречающихся на практике гетерогенных реакций. Так, например, если учитывать взаимодействие адсорбированных молекул друг с другом, то уравнение кинетики имеет вид

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \gamma c \varphi(N), \quad (1.33)$$

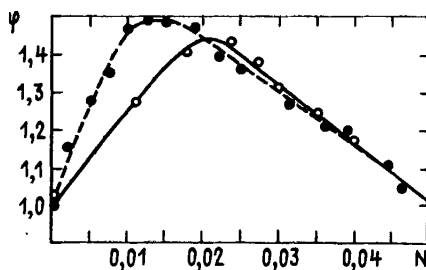
где  $\varphi(N)$  — некоторая функция, отражающая влияние на скорость реакции наличие «свободных мест» на поверхности среды.

Вид функции  $\varphi(N)$  в значительной мере определяется совокупностью процессов, протекающих на поверхности среды. С этой точки зрения показательными являются результаты исследований по адгезии и росту агрегата в коллоидных частицах при фильтровании суспензий (аэрозолей). На начальной стадии процесса (см. табл. 2) здесь в результате модификации поверхности среды с ростом  $N$  наблюдается увеличение скорости реакции; затем по мере дальнейшего накопления вещества в твердой фазе, скорость реакции стабилизируется и начинает снижаться. График  $\varphi(N)$  показан на рис. 1.

Вид функции  $\varphi(N)$ 

Стадия процесса	$\varphi(N)$	Автор
Начальная	$(p_1 + p_2 N)$	Т. Ивасаки [158] Л. В. Радужкевич [72]
Переходная	$(p_1 + p_2 N - p_3 N^2)$	К. Айвес [157]
Завершающая	$(p_4 - p_5 N^2)$	Ю. М. Шехтман [104]

$p_{1-5}$  — экспериментальные константы.

Рис. 1. График функции  $\varphi(N)$ 

### 1.2.2. Диффузионная кинетика массообмена

Рассмотрим наиболее общий случай диффузионного поглощения вещества горными породами. Для простоты положим, что пористая среда представлена частицами (конгломератами или блоками) с условным радиусом  $r_d$  и при этом последние имеют микропористое строение. Ясно, что в этом случае важен учет не только диффузионного подвода вещества к поверхности отдельных частиц, но также и его отток в их внутрипоровое пространство.

Скорость поглощения (адсорбции) вещества из водной фазы частицами грунта определяется уравнением

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \omega D_a \left. \frac{\partial b(r, t)}{\partial r} \right|_{r=r_d}, \quad (1.34)$$

где  $\omega$  — удельная поверхность пористой среды ( $\omega = 3(1 - n_0)/r_d$ ),  $D_a$  — коэффициент диффузии вещества во внутрипоровом пространстве частиц;  $b(r, t)$  — локальная концентрация сорбируемого в частицах вещества.

Распределение  $b(r, t)$  устанавливается из решения следующей задачи:

$$D_a \left( \frac{\partial^2 b}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial b}{\partial r} \right) = \frac{\partial b}{\partial t}, \quad (1.35)$$

$$b(r, 0) = 0, \quad (1.36)$$

$$\left. \frac{\partial b(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (1.37)$$

$$D_a \left. \frac{\partial b(r, t)}{\partial r} \right|_{r=r_d} = \gamma [c - (1 - n_0) c^*], \quad b(r, t)|_{r=r_d} = \Gamma c^*, \quad (1.38)$$

где  $\gamma$  — константа внешнедиффузионного массообмена;  $\Gamma$  — постоянная изотермы Генри.

При  $\gamma \rightarrow \infty$  процесс поглощения вещества всецело контролируется диффузией в объеме частиц грунта. В этом случае вместо граничного условия (1.38) следует записать

$$b(r, t)|_{r=r_d} = \Gamma c(t). \quad (1.39)$$

Второй предельный случай вытекает из (1.35) — (1.38) при условии, что  $D_a \rightarrow \infty$  (стадия внешнедиффузионной кинетики). При усреднении  $b(r, t)$  по объему частиц

$$\bar{b}(t) = \frac{3}{r_d^3} \int_0^{r_d} b(r, t) r^2 dr$$

вместо (1.35) — (1.38) имеем

$$\frac{d\bar{b}}{dt} = D_a \left. \frac{\partial b(r, t)}{\partial r} \right|_{r=r_d} = \gamma^* \left[ c - (1 - n_0) \frac{b(r, t)}{\Gamma} \right] \Big|_{r=r_d}.$$

Тогда, с учетом того, что  $N(t) = (1 - n_0) b(t)$ , уравнение кинетики (1.34) записывается в виде

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \gamma (c - N/\Gamma), \quad \gamma = \gamma^* \omega.$$

По форме это уравнение кинетики совпадает с (1.29), если принять  $\gamma = k_1$  и  $\gamma/\Gamma = k_2$ .

Случай внешнедиффузионного растворения солей был впервые рассмотрен в работах Н. Н. Веригина [15, 16]. Предложенное им уравнение кинетики имеет вид

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_p (c_m - c) N^\alpha, \quad (1.40)$$

где  $c_m$  — предельная растворимость солей в воде;  $\alpha$  — показатель степени, принимающий значение: 0 — при поверхностном и 0,5 — при объемном (дисперсном) распределении солей.



### 1.3. Параметры уравнений массопереноса

В практике гидрогеологических исследований многофакторные модели массопереноса в подземных водах, включающие нелинейные уравнения равновесия и кинетики взаимодействия жидкой и твердой фаз, не нашли в настоящее время применения из-за чрезвычайной сложности определения соответствующих параметров. Обычно наиболее сложной моделью массопереноса является фильтрация растворов с учетом процессов гидродинамической дисперсии и линейной обратимой кинетики массообмена. В этом случае наряду с геофильтрационными параметрами, насыщающими уравнения движения растворов в горных породах, в модель массопереноса включаются гидрогеохимические параметры, приведенные в табл. 3.

Таблица 3

Основные гидрогеохимические параметры

Наименование	Обозначение	Размерность	Соотношение между параметрами
Коэффициент молекулярной диффузии	$D_0$	$\text{м}^2/\text{с}$	$D_r = \lambda_i v$ $D = D_0 + D_r$ $\lambda_i = \frac{D_i - D_0}{v}$
Коэффициент гидродинамической дисперсии	$D_r$	$\text{м}^2/\text{с}$	
Коэффициент конвективной диффузии	$D$	$\text{м}^2/\text{с}$	
Параметр гидродинамической дисперсии	$\lambda_i$	$\text{м}$	$\Gamma = N_0/n_0 c_0$ $n = n_0(1 + \Gamma)$
Постоянная линейной изотермы	$\Gamma$	—	
Массоёмкость	$n$	—	
Константа скорости адсорбции или десорбции	$\gamma$	$\text{с}^{-1}$	
Константа скорости растворения или кристаллизации	$\gamma_p$	$\text{с}^{-1}$	

Условные обозначения:  $c_0$  и  $N_0$  — равновесные концентрации вещества в жидкой и твердой фазах породы,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $v$  — скорость фильтрации,  $\text{м}/\text{с}$ ;  $n_0$  — пористость  $i=1,2,3$  — основные направления координатной системы

Методы определения гидрогеохимических параметров, особенно коэффициентов дисперсии, за последние 25—30 лет претерпели значительную эволюцию. Первые представления о коэффициенте конвективной диффузии, основанные в основном на лабораторных экспериментах, изложены в обзорах [25, 36, 187, 188]. Численные его значения, полученные до 1975 г. обобщены, в частности, в работе [29]. Как показывает анализ работ, посвященных лабораторным исследованиям гидродинамической дисперсии и опубликованных позднее (см. табл. 4), представ-

Таблица 4

Значения параметров продольной  $\lambda_1$  и поперечной  $\lambda_2$  гидродинамической дисперсии пород по данным лабораторных исследований

Порода	$\lambda_1$ , см	$\lambda_2$ , см	Литературный источник
Песок однородный	0,03—3,5	0,002—1,3	[147, 207, 208, 209, 211, 214, 228]
Песок разнородный	1,0—12,7		[160, 208]
Суглинок	0,04—11,2		[96]
Песчаник	0,18—120		[225]
Гранит выветрелый	0,5—2,0	0,6—1,3	[225]

ления о масштабе параметров дисперсии изменились мало. Их значения лежат в пределах от долей сантиметра до десятков сантиметров, возрастая в основном в неоднородных породах [33].

В лабораторных моделях предпринимались попытки изучения влияния на процесс гидродисперсии анизотропии пород [207], их слоистой и блоковой неоднородности [208]. Для грунтов различного фракционного состава подтверждена линейная зависимость коэффициента гидродинамической дисперсии  $D$  от скорости фильтрации [224]. Установлено, что вертикальная плотностная стратификация подземных вод приводит к увеличению параметра поперечной дисперсии [161].

В последнее время значительно выросло число работ, в которых опубликованы результаты экспериментальных исследований процессов гидродинамической дисперсии в полевых условиях. Из этих исследований установлено несоответствие численных значений параметров дисперсии, получаемых в лабораторных и полевых условиях. В последнем случае значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  оказываются большими на 2—3 порядка, что объясняется главным образом влиянием гетерогенности пород в естественном залегании.

Зависимость параметров дисперсии от размеров зоны опробования пород (средних расстояний переноса) может быть учтена применением различных методов экспериментального исследования для разных масштабов переноса загрязнений (индикаторов). Ж. Фрид [89] выделяет с этой целью:

- локальный масштаб от 2 до 4 м;
- средний масштаб от 4 до 20 м;
- крупный масштаб от 20 до 100 м;
- региональный масштаб более 100 м (до нескольких километров).

Указанным масштабам ставятся в соответствие методы индикаторного опробования — одно- и двухскважинный, кустовой и др. Для регионального масштаба применяются, в основном,

методы естественных индикаторов, режимных наблюдений и решений обратных задач по данным моделирования.

Полученные разными исследователями результаты представлены в табл. 5 и 6. При этом использованы лишь два характер-

Таблица 5

Значения параметров продольной  $\lambda_1$  и поперечной  $\lambda_2$  дисперсии по данным полевых исследований в локальном масштабе

Породы	Способ исследования	Расстояние между скважинами, м	$\lambda_1$ м	$\lambda_2$ , м	Литературный источник
Пески однородные разной крупности	I	0,75—11	0,0125—0,08	0,0005—0,03	[213]
»	I	6,5	0,02—0,26	—	[184]
»	I	2—8	0,012—0,024	—	[177]
»	I	5—40	0,016	—	[220]
»	K	50	0,0083	0,0039	[178]
»	K	4—87	0,04—0,22	—	[199]
»	2с	38,3	0,062—0,15	0,013—0,05	[155]
»	1с	4,8	0,18	—	[169]
»	H	80	0,36	0,039	[125]
Песчано-гравелистые аллювиальные отложения	I	1,5—3,0	0,03—0,05	—	[180]
»	K	45—150	0,009—0,25	—	[2]
»	2с	—	0,5	—	[192]
»	K	11—160	1,0	0,1	[227]
»	I	13—32,5	0,85—2,38	—	[167]
»	K	7,6—16,8	0,16—0,8	—	[149]
»	I	13	1—2,7	—	[186]
»	I	65	1,2—2,2	—	[129]
»	K	5—14	0,18—0,81	0,015—1,52	[37]
»	1с	—	5—8	0,015—14,5	[126]
»	2с	9	6,9	—	[200]
»	I	—	12,0	4,0	[126]
»	2с	6,4	15,2	—	[197]
Песчано-глинистые неоднородные отложения	K	4,3—87	0,31—4,3	—	[199]
»	I	65	9,1	1,8	[111]
Песчаник	1с	4,85	0,23	—	[169]
Трещиноватый мел	2с	8	1,0—3,1	—	[156]
»	—	—	11—50	—	[117]
»	1с	20	0,5	—	[131]
Трещиноватые гнейсы	K	10,6	1,4	—	[181]
Трещиноватые доломиты и известняки	2с	38—55	38,1	—	[112]
»	2с	22	44—110	—	[164]

Индексы способов проведения опытных работ; K—кустовое опробование с запуском индикатора в центральную или наблюдательную скважины; 1с и 2с—одно и двухскважинные опыты; I—запуск и регистрация индикатора в естественном потоке; H—режимные наблюдения.

Таблица 6

Значения параметров дисперсии  $\lambda_1$  и отношения  $\lambda_2/\lambda_1$   
по данным полевых режимных наблюдений и моделирования  
в региональном масштабе

Породы	Тип модели*	Характерный размер, м	Пористость	$\lambda_1$ , м	$\lambda_2/\lambda_1$	Литературный источник
Песчано-гравийные отложения	2р	700—1000	0,35	10,54	—	[127]
»	1р	3500	—	6—460	—	[197]
»	1р	600—1000	0,2	12	0,33	[159]
»	1р	800	—	15	0,067	[221]
»	П	660—1320	0,2	30,5	0,3	[126]
»	Зр	—	0,05—0,2	80—200	0,1	[126]
»	»	305	0,4	61	0,3	[163]
»	П	3000	—	81,3	0,01	[143]
Ледниковые отложения (валунная глина, сланцы)	2р	79	0,001—0,053	3—6,1	0,2	[205]
Пески с глинистыми прослоями	Зр	200	0,35	5	0,2	[216]
Ледниковые отложения	П	1300	0,35	21,3	0,2	[193]
Известняки и известковистые песчаники	2р	610	0,25	6,7	0,1	[206]
Трещиноватые базальты	П	640	0,1	91	1,5	[196]
»	П	»	0,1	91	1,0	[139]
»	П	—	—	30,5	0,6	[107]

\* Типы моделей: П—плановая; 1р, 2р и 3р—одномерная линейная; двухмерная профильная и трехмерная.

ных масштаба: локальный до 100 м и региональный — как правило более 300—500 м. Значения параметров для этих масштабов отличаются примерно на порядок. При этом для трещиноватых и неоднородных песчаноглинистых пород значения параметров дисперсии по данным опытов в локальном масштабе близки к значениям, полученным в региональном масштабе. Зависимость значений параметра продольной дисперсии от масштаба исследований представлена также на рис. 2, приведенном Л. Гелхаром в работе [132].

По параметрам массообмена имеется существенно меньшее количество экспериментальных данных. В основном определяются значения коэффициентов распределения или постоянных линейной изотермы  $\Gamma$ . Единичные сведения имеются по значениям констант скорости адсорбции или ионного обмена  $\gamma$ . Такое положение характерно для сравнительно новой в гидрогеологии области изучения физико-химического взаимодействия и

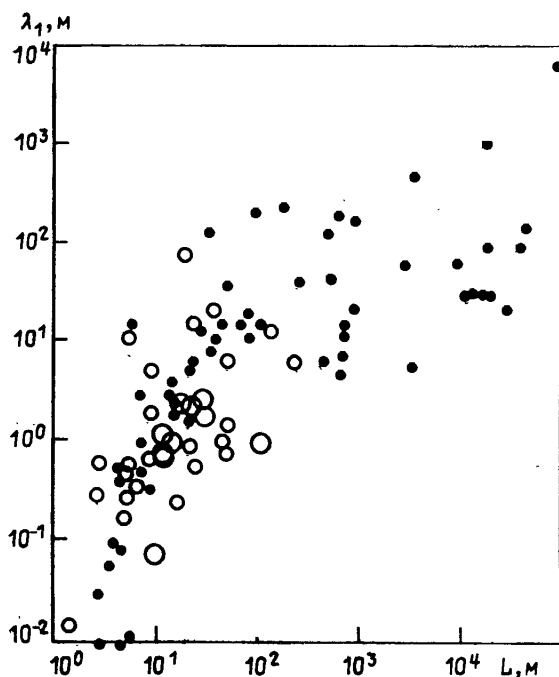


Рис. 2. Зависимость значений параметра продольной дисперсии от масштаба исследований по данным Л. Гелхара

трансформации растворенных в подземных водах веществ с горными породами и грунтами.

Представление о масштабах значений постоянной линейной изотермы дает табл. 7\*. Дополнительно к приведенным в таблице данным можно отметить результаты определения значений постоянной  $\Gamma$  в полевых условиях для сорбции микрокомпонентов  $Cs$  и  $Sr$  на скальных трещиноватых породах [222], представленные в табл. 8.

Обращает на себя внимание различие постоянных  $\Gamma$ , полученных по данным лабораторных исследований в статических и динамических условиях. Последние на порядок и более меньше. Такая же тенденция имеется в данных натурных исследований, которые близки, однако, к значениям динамических опытов.

Некоторые значения констант скорости адсорбции  $\gamma$  приведены в табл. 9. Здесь также отмечается значительный рост  $\gamma$  для опытов, проведенных в статических условиях.

\* Сводка параметров массообмена составлена с участием Н. К. Головановой.

Значения постоянной линейной изотермы Г

Сорбируемый компонент	Порода	Метод определения*	Г, мл/г	Литературный источник
Кальций	Почва	ЛД	6—100	[66]
Сульфаты	Песчаная	ЛД	0,36	[231]
Фосфаты	Пески	ЛС	0,07—1,25	[69]
	Суглинки	ЛС	1,43—10	[69]
Фториды	Пески	ЛС	0,1—0,47	[69]
Некаль	Супеси	ЛС	8,0	[65, 67]
	»	ЛД	0,08	[65, 67]
	»	Н	0,05—0,2	[65, 67]
ПАВ	Песок	ЛС	0,05—0,14	[75]
Фенол	Суглинок	ЛС	1,0	[39]
	»	ЛД	0,5	[39]
Таловые мыла	Суглинок	ЛС	1,4—3,3	[69]
Цинк	Песок	ЛС	6,0	[86]
	Супесь	ЛС	82	[86]
	Тонкозернистый песок	ЛД	7,0	[86]
	»	Н	0,03—0,05	[67]
Медь	Песок	ЛД	12,3—12,9	[86, 87]
	»	ЛС	49—294	[86, 87]
	Супесь	ЛС	240—1100	[86, 87]
Марганец	Песок	ЛД	3,7—3,9	[86, 87]
	»	ЛС	20—63	[86, 87]
	Почва	ЛС	21—37	[223]
Свинец	Песок	ЛД	17,3	[87]
	»	ЛС	19—74	[87]
	Супесь	ЛС	141—453	[87]
Кадмий	Почва	ЛД	300—1000	[66]
	Песок	ЛС	25—100	[87]
	Почва	ЛД	20—38	[223]
Кобальт	Песок	ЛС	27—126	[87]
	Супесь	ЛС	200—830	[87]
Цезий	Песок	Н	53—523	[222]
	»	ЛС	100	[69]
Стронций	Песок	Н	4—19	[222]
	»	ЛД	1,75—145	[11]

\* Индексация методов определения: ЛС и ЛД—лабораторные определения в статистических и динамических условиях; Н—натурные наблюдения

Таблица 8

Значения постоянной линейной изотермы Г, мл/г по данным полевых исследований

Порода	Сорбируемый компонент	
	Сs	St
Гранит	34	1,7
Известняк	13,5	0,2
Базальт	792—9520	16—135

Значения констант скорости адсорбции  $\gamma$ 

Сорбируемый компонент	Порода	$\gamma$ , л/сут	Литературный источник
$Zn^{2+}$ , $ZnCl^{4-}$	Песок тонкозернистый	4,08	[86]
$Cu^{2+}$ , $CuCl^{+}$	»	0,96	[86]
$Mn^{2+}$	»	6,24	[86]
$Ca^{45}$ , $Sr^{88}$ , $Cs^{137}$	Песок	24—240 3840—4584*	[11]
Некаль	»	120	[65]
Нефть	»	1680—6480	[9]

\* В числителе—данные статических, в знаменателе—динамических опытов.

#### 1.4. Модель массопереноса в неоднородных пластах

Предположение об однородности водовмещающих пород является в достаточной мере условным и далеко не всегда реализуется на практике. Об этом свидетельствует тот факт, что значения параметров дисперсии, найденные в полевых условиях см. табл. 5 и 6), во много (порою в десятки и сотни) раз превышают лабораторные. Одной из причин такого несоответствия является то, что в большинстве случаев горные породы имеют в достаточной мере нерегулярную структуру и потому при движении подземных вод поле локальных скоростей (и концентраций) оказывается неоднородным.

Вопрос о применимости уравнения конвективной диффузии для описания процессов массопереноса в неоднородных пластах обсуждался в работах [48, 79, 89]. Показано, что это оказывается возможным при условии, когда масштаб макроструктуры достаточно мал по сравнению с характерным размером (например, размером зоны опробования) исследуемой водоносной толщи и допустимо усреднение как зарождающегося в процессе фильтрации поля случайных скоростей, так и поля локальных концентраций.

Результаты численного моделирования конвективного переноса в неоднородных средах приведены в работах Д. Варрена, Ф. Скиба [229] и Ф. Шварца [204]. В первой рассматривается горизонтально-слоистая толща; во второй анализируется случай неупорядоченной неоднородности. Используя метод Монте-Карло этим исследователям удалось показать, что в таких условиях расчетный параметр макродисперсии не остается постоянным; он изменяется во времени по мере продвижения фронта поршневого вытеснения.

Дальнейшее развитие статистический подход, но уже в рамках функционального описания, получил в работах [91, 120, 134]. Так, Л. Гелхар [134] подробно описывает метод усреднения уравнения массопереноса в горизонтально-слоистой среде в предположении, что флуктуации коэффициента фильтрации представлены однородным случайным полем. При этом было получено одномерное дисперсионное уравнение относительно средней по сечению концентрации, в котором параметр макродисперсии является функцией статистических характеристик среды. На начальной стадии процесса он зависит от вариации коэффициента фильтрации среды в пределах разреза и увеличивается пропорционально квадрату средней скорости потока и времени; при очень больших временах значения параметра дисперсии стабилизируется и он оказывается всецело зависящим от условий массообмена между слоями. При решении усредненного дисперсионного уравнения, считая, что начальный период является кратковременным, Л. Гелхар [134] использует асимптотическое выражение для коэффициента дисперсии. Аналогичного рода асимптотические зависимости, также полученные на основе статистического подхода, приводятся в работах Г. Масерона [114], Г. Дегана [120] и других авторов [79].

В рамках детерминированных моделей массоперенос в неоднородном пласте исследовался А. Меркадо [175], С. Марле [171] и Ж. Фридом [89]. В частности, в [89, 171] был проанализирован случай горизонтально-слоистого пласта и найдено выражение для параметра макродисперсии при малых временах процесса. В работе С. Марле [171] рассматривался двухслойный пласт, когда каждый из слоев характеризуется собственным значением коэффициента фильтрации и пористостью. Работа [171] интересна в том отношении, что в ней впервые была изложена методика применения статистических моментов для вычисления параметра макродисперсии. Показано, что при наступлении асимптотического режима массопереноса он оказывается зависящим от значений мощности отдельных слоев, их пористости, скоростей фильтрации и условий массообмена. В дальнейшем процедура применения статистических моментов для усреднения локально неоднородного уравнения конвективного переноса была развита в серии работ О. Гевена, Ф. Молза и Дж. Мелвила [144, 155, 179]. Ими исследовался характер изменения во времени коэффициента макродисперсии при движении подземных вод в стратифицированном (горизонтально-слоистом пласте) при априори заданном законе распределения проницаемости в пределах разреза. Оценки стадийности процесса массопереноса и полученные в [179] функциональные зависимости для  $D$  удовлетворительно согласуются с результатами статистического анализа Л. Гелхара [134] Л. А. Рошалья [79] и других.



Математическая модель массопереноса в горизонтально-слоистом пласте.

### 1.4.1. Усреднение уравнения массопереноса

Рассмотрим задачу переноса динамически нейтральной примеси в горизонтально-слоистом пласте (рис. 3) ограниченной мощности  $m$ , для которого известно распределение коэффициента фильтрации  $k_z$  в пределах разреза и  $k = m^{-1} \int_0^m k_z dz$ , где  $k$  — среднее значение коэффициента фильтрации пласта; флуктуацией пористости будем пренебрегать, считая  $n_0 = \text{const}$ . Фильт-

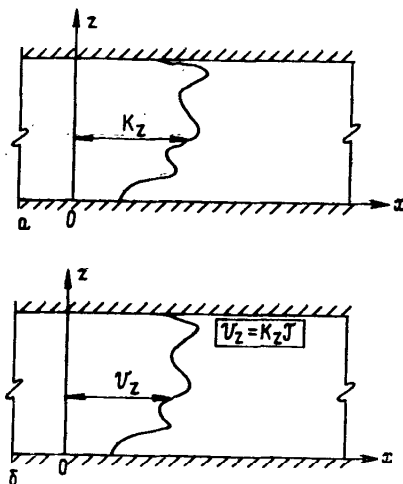


Рис. 3. Расчетная схема массопереноса в слоистом пласте

рация в таких условиях [9] сопровождается образованием концентрационных «язычков». При этом в тех слоях, где  $k_z > k$  фронт продвижения индикатора опережает фронт поршневого вытеснения (который перемещается со средней скоростью потока), а в слоях, где  $k_z < k$  отмечается, наоборот, отставание фронта продвижения индикатора. Это обуславливает возникновение градиентов концентрации в направлении нормальном потоку и, естественно, активизируется массообмен между слоями с различной водопроницаемостью.

При пренебрежении молекулярной диффузией и микродисперсией вдоль потока исходное уравнение записывается в виде

$$n_0 \frac{\partial c^*}{\partial t} + v_z \frac{\partial c^*}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left( D_2 \frac{\partial c^*}{\partial z} \right), \quad (1.41)$$

где  $c^*(x, z, t)$  — локальная концентрация индикатора в точке  $x, z$  в момент времени  $t$ ;  $v_z$  — локальная скорость фильтрации в сечении  $z$ , равная  $k_z J$  ( $J$  — градиент напора);  $D_2$  — коэффициент поперечной дисперсии.

При импульсном вводе индикатора в точке  $x=0$  в момент времени  $t=0$  условия для решения уравнения (1.41) задаются в форме

$$c^*(x, z, 0) = c_0 x_0' \delta(x), \quad (1.42)$$

$$\frac{\partial c^*(x, 0, t)}{\partial z} = \frac{\partial c^*(x, m, t)}{\partial z} = 0, \quad (1.43)$$

$$c^*(-\infty, z, t) = c^*(\infty, z, t) = 0, \quad (1.44)$$

где  $c_0$  — исходная концентрация вводимого в пласт индикатора;  $x_0'$  — бесконечно малая толщина слоя оторочки;  $\delta(x)$  — дельта функция Дирака.

При условии, что массообмен между слоями осуществляется лишь посредством молекулярной диффузии  $D_2 = D_0$  задача (1.41—1.44) оказывается аналогичной задаче Г. Тейлора [218, 219] о переносе динамически нейтральной примеси в капилляре (канале) с заданным профилем распределения скоростей. В работе [41] показано, что при усреднении локально неоднородного уравнения (1.41), т. е. при введении средней по разрезу концентрации, может быть получено известное уравнение конвективной диффузии с некоторым эффективным коэффициентом дисперсии.

В системе отсчета, перемещающейся со средней скоростью фильтрационного потока  $v = kJ$ , уравнение (1.41) при  $D_2 = D_0$  и условия (1.42) — (1.44) запишутся в виде

$$\frac{\partial c^*}{\partial \tau} + a(\bar{v} - 1) \frac{\partial c^*}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 c^*}{\partial y^2}, \quad (1.45)$$

$$c^*(\xi, y, 0) = c_0 \frac{x_0'}{m} \delta(\xi), \quad (1.46)$$

$$\frac{\partial c^*(\xi, 0, \tau)}{\partial y} = \frac{\partial c^*(\xi, 1, \tau)}{\partial y} = 0, \quad (1.47)$$

$$c^*(-\infty, y, \tau) = c^*(\infty, y, \tau) = 0, \quad (1.48)$$

где:

$$\tau = \frac{D_0 t}{n_0 m^2}; \quad \xi = \frac{n_0 x - vt}{n_0 m}, \quad y = \frac{z}{m}, \quad \bar{v} = \frac{v_z}{v}, \quad a = \frac{mv}{D_0}. \quad (1.49)$$

Можно воспользоваться методом усреднения концентрации  $C^*(\xi, y, \tau)$  по разрезу, предложенным в работах [136, 218, 219]. Приняв, что допустимо представление  $C^*(\xi, y, \tau)$  в виде

$$c^*(\xi, y, \tau) = c(\xi, \tau) - \sum_{p=1}^{\infty} u_p(y, \tau) \times \frac{\partial^p c(\xi, \tau)}{\partial \xi^p}, \quad (1.50)$$

где  $u_p(y, \tau)$  — подлежащая определению дисперсная функция и  $c(\xi, \tau)$  — средняя по разрезу концентрация:

$$c(\xi, \tau) = \int_0^1 c^*(\xi, y, \tau) dy \quad (1.51)$$

будем считать, что  $c(\xi, \tau)$  удовлетворяет следующему уравнению

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \frac{\partial^j c}{\partial \xi^j}, \quad (1.52)$$

где  $B_j$  — некоторые коэффициенты, которые также подлежат определению.

Подстановка (1.50) в уравнение (1.45) даст

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial \tau} = & -a(\bar{v}-1) \frac{\partial c}{\partial \xi} - \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \left( \frac{\partial^2 u_p}{\partial y^2} \right) \times \frac{\partial^p c}{\partial \xi^p} - a(\bar{v}-1) \times \right. \\ & \left. \times u_p \frac{\partial^{p+1} c}{\partial \xi^{p+1}} - \frac{\partial u_p}{\partial \tau} \times \frac{\partial^p c}{\partial \xi^p} - u_p \frac{\partial^{p+1} c}{\partial \tau \partial \xi^p} \right\} \end{aligned} \quad (1.53)$$

и при этом, дифференцируя (1.52) по  $\xi^p$ , получим

$$\frac{\partial^{p+1} c}{\partial \tau \partial \xi^p} = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \frac{\partial^{j+p} c}{\partial \xi^{j+p}}. \quad (1.54)$$

Тогда при замене смешанных производных в уравнении (1.53) на (1.54), приравнявая правые части полученного при этом уравнения и уравнения (1.54), будем иметь

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial u_1}{\partial \tau} - a(\bar{v}-1) - B_1 - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right] \frac{\partial c}{\partial \xi} + \\ & + \left[ \frac{\partial u_2}{\partial \tau} - a(\bar{v}-1) u_1 - B_1 u_1 - B_2 - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right] \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} + \\ & + \sum_{p=3}^{\infty} \left\{ \frac{\partial u_p}{\partial \tau} - a(\bar{v}-1) u_{p-1} - B_1 u_{p-1} - \right. \\ & \left. - B_2 u_{p-2} - \sum_{j=3}^p B_j u_{p-j} - \frac{\partial^2 u_p}{\partial y^2} \right\} \frac{\partial^p c}{\partial \xi^p} = 0. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Очевидно, что выражения, выступающие в роли коэффициентов при  $\partial^p c / \partial \xi^p$  должны быть равны нулю. Из этого условия получается следующая система уравнений для  $p=1, 2$ :

$$\frac{\partial u_1}{\partial \tau} - a(\bar{v}-1) - B_1 = \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}, \quad (1.56)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial \tau} - [a(\bar{v}-1) + B_1] u_1 - B_2 = \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \quad (1.57)$$

и для  $p > 2$ , имеем

$$\frac{\partial u_p}{\partial \tau} - [a(\bar{v} - 1) + B_1] u_{p-1} - B_2 u_{p-2} - \sum_{j=3}^p B_j u_{p-j} = \frac{\partial^2 u_p}{\partial y^2}. \quad (1.58)$$

Условия для решения (1.56) — (1.58) записываются на основе (1.46), (1.47) и (1.50), (1.51)

$$u_p(y, 0) = 0, \quad (1.59)$$

$$\frac{\partial u_p(0, \tau)}{\partial y} = \frac{\partial u_p(1, \tau)}{\partial y} = 0. \quad (1.60)$$

При этом, интегрируя (1.50) по  $y$  от 0 до 1, находим, что

$$\int_0^1 u_p(y, \tau) dy = 0 \quad (1.61)$$

и кроме того, имеем

$$\int_0^1 (\bar{v} - 1) dy = 0. \quad (1.62)$$

Проводя в уравнениях (1.56) — (1.58) усреднение дисперсной функции  $u_p(y, \tau)$  по разрезу с учетом соотношений (1.61) и (1.62), получим следующие выражения для определения коэффициентов  $B_j$ :

$$B_1 = -a \int_0^1 (\bar{v} - 1) dy = 0, \quad (1.63)$$

$$B_2 = a \int_0^1 (\bar{v} - 1) u_1(y, \tau) dy \quad (1.64)$$

и соответственно при  $i = p$  ( $i > 2$ )

$$B_j = a \int_0^1 (\bar{v} - 1) u_{p-1}(y, \tau) dy. \quad (1.65)$$

Если в уравнении (1.52) сохранить лишь первые два члена ряда, то при  $B_1 = 0$ , имеем

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = B_2 \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2}, \quad (1.66)$$

где  $B_2$  — определяется по формуле (1.64), а входящая в (1.64) функция  $u_1(y, \tau)$  находится из решения задачи (1.56), (1.59) — (1.60),

### 1.4.2. Вычисление коэффициента макродисперсии

Решение уравнения (1.56) при условиях (1.59) и (1.60) может быть получено методом Фурье. Можно искать решение задачи в виде

$$u_1(y, \tau) = a \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\tau) \cos(\omega_n y), \quad \omega_n = \pi n, \quad (1.67)$$

так что граничные условия (1.60) удовлетворяются сами собой. Положив при этом, что функция  $f(y) = (v-1)$  допускает разложение в ряд Фурье

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n y), \quad (1.68)$$

где

$$A_n = 2 \int_0^1 f(y) \cos(\omega_n y) dy \quad (1.69)$$

на основе (1.56), (1.67) и (1.68) будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T_n'(\tau) + \omega_n^2 T_n(\tau) - A_n] \cos(\omega_n y) = 0, \quad (1.70)$$

откуда

$$T_n'(\tau) + \omega_n^2 T_n(\tau) = A_n. \quad (1.71)$$

Согласно (1.67) и (1.71)

$$u_1(y, 0) = a \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \cos(\omega_n y) = 0 \quad (1.72)$$

и следовательно  $T_n(0) = 0$ . Решая обыкновенное дифференциальное уравнение (1.71) с нулевым начальным условием, находим

$$T_n(\tau) = \frac{A_n}{\omega_n^2} [1 - \exp(-\omega_n^2 \tau)], \quad (1.73)$$

а подставляя (1.73) в (1.67), окончательно имеем

$$u_1(y, \tau) = a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\omega_n^2} \cos(\omega_n y) [1 - \exp(-\omega_n^2 \tau)]. \quad (1.74)$$

При известной функции  $u_1(y, \tau)$  можно рассчитать  $B_2(\tau)$  и найти выражение для коэффициента макродисперсии  $D(\tau) = D_0 B_2(\tau)$ . Подставляя (1.74) в (1.64) с учетом представления

(1.69) для  $A_n$  получим

$$D(\tau) = \frac{a^2 D_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{\omega_n^2} [1 - \exp(-\omega_n^2 \tau)]. \quad (1.75)$$

Из (1.75) следует, что при малых  $\tau$  (когда  $\exp(-\omega_n^2 \tau) \approx 1 - \omega_n^2 \tau$ ) коэффициент макродисперсии равен

$$D(\tau) = \psi^2 a^2 D_0 \tau, \quad (1.76)$$

где

$$\psi^2 = 0,5 \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^1 (\bar{v} - 1) \cos(\omega_n y) dy \right\}^2. \quad (1.77)$$

Для вычисления  $\psi^2$  необходимо располагать данными о распределении скоростей  $u(y)$  по разрезу. Рассмотрим несколько гипотетических примеров, когда функция  $u(y)$  известна и имеет аналитическое представление.

**Пример расчета 1.1.** Пусть коэффициент фильтрации изменяется по линейному закону  $k_y = k + \Delta k(2y - 1)$ , где  $k$  — среднее значение коэффициента фильтрации и  $\Delta k$  — максимальное отклонение от среднего значения. Учитывая, что  $\bar{v} = v_y/v = k_y k_2$  запишем  $f(y) = \varepsilon(2y - 1)$ , где  $\varepsilon = \Delta k/k$ . Подставляя  $f(y)$  в (1.69), найдем

$$A_n = 2\varepsilon \int_0^1 (2y - 1) \cos(\omega_n y) dy = \frac{4\varepsilon}{\omega_n^2} [\cos(\omega_n) - 1].$$

При известном  $A_n$  коэффициент  $\psi^2$  вычисляется по формуле (1.77)

$$\psi^2 = \frac{8\varepsilon^2}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\cos(n\pi) - 1]^2}{n^4} = \frac{32\varepsilon^2}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} (2n - 1)^{-4} = \frac{8}{3} \varepsilon^2.$$

**Пример расчета 1.2.** Предположим, что  $k_y = k + \Delta k \cos(\pi y)$ . В этом случае  $f(y) = \varepsilon \cos(\pi y)$  и из (1.69) следует, что  $A_1 = \varepsilon$ ,  $A_{n>1} = 0$ . Так как при любом  $n > 1$ ,  $A_n = 0$ , то ограничиваясь в формуле (1.77) лишь одним членом ряда, получим

$$\psi^2 = 0,5 \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 = 0,5 \varepsilon^2.$$

Выражение для  $\psi^2$  может быть существенно упрощено. Действительно, при малых  $\tau$  дисперсная функция  $u_1(y, \tau)$ , определяемая согласно (1.74), принимает вид  $u_1(y, 0) \approx \bar{v} + t(\bar{v} - 1)/n_0 t$ .

Подстановка этого выражения в (1.64) приводит к представлению (1.76), где  $\psi^2 = \int_0^1 (\bar{v} - 1)^2 dy$  или, что тоже самое

$$\psi^2 = \int_0^1 \left( \frac{k_y}{k} - 1 \right)^2 dy. \quad (1.78)$$

Из (1.78) видно, что  $\psi^2$  — не что иное, как коэффициент вариации и соответственно

$$\psi^2 = (\sigma_k/k)_2, \quad (1.79)$$

где  $\sigma_k^2$  — дисперсия коэффициента фильтрации относительно среднего значения  $k$ .

Переходя в (1.76) от безразмерного времени  $\tau$  к размерному  $t$ , будем иметь

$$D(t) = \frac{\psi^2 v t}{n_0} v. \quad (1.80)$$

Формула (1.80) для расчета  $D(t)$  правомерна при условии, что  $t \leq 0,01 n_0 m^2 / D_0$ . Полагая, например,  $D_0 = 5 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/сут,  $n_0 = 0,25$  и  $m = 1, 3$  и  $5$ , получим, соответственно,  $t = 50, 450$  и  $1250$  сут. Следовательно, в большинстве практических случаев, можно вполне ориентироваться на использование зависимости (1.80).

В данном случае речь идет о формировании условной зоны смеси в процессе послойного массопереноса при пренебрежении эффектом массообмена между слоями. Дисперсия здесь имеет чисто конвективную природу и определяемый по формуле (1.80) коэффициент  $D(t)$  изменяет свой знак в зависимости от направления потока. С учетом этого обстоятельства расчетная формула для эффективного коэффициента дисперсии может быть представлена в виде [5]

$$D = \left( \lambda \pm \frac{\psi^2 v t}{n_0} \right) v. \quad (1.81)$$

Здесь  $\lambda$  — параметр микродисперсии, а  $\psi^2 v t / n_0$  — параметр макродисперсии. При однонаправленной конвекции совместное действие процессов микро- и макродисперсии приводит к росту размеров зоны смеси; в этом случае в (1.81) принимается знак (+). При смене направления движения фильтрационного потока на обратное, размеры ранее сформировавшейся за счет макродисперсии зоны смеси будут уменьшаться и поэтому в (1.81) следует принимать знак (—).

Другой предельный случай вытекает из (1.75) при больших  $\tau$  (когда  $\exp(-\omega_n^2 \tau) \ll 1$ ). Здесь имеем

$$D^* = \psi_*^2 a^2 D_0 = \sigma_0^2 v^2, \quad (1.82)$$

где

$$\sigma_0^2 = \frac{\psi_*^2 m^2}{D_0}, \quad \psi_*^2 = 0,5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{\omega_n^2}. \quad (1.83)$$

При изменении  $k_y$  по линейному закону, подставляя  $A_n$  из примера 1.1 в формулу (1.83), будем иметь

$$\psi_*^2 = \frac{2e^2}{\pi^6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\cos(n\pi) - 1]^2}{n^6} = \frac{e^2}{\pi^6} \times \frac{63}{2} \xi(6),$$

где  $\xi(6)$  — дзета функции Римана. Учитывая при этом, что  $\xi(6) = \pi^6/945$ , можем записать  $\psi^2 = a_* \varepsilon^2$ , где  $a_* = 1/30$ . В случае изменения  $k_y$  по закону косинуса  $A_n = \varepsilon$  при  $n=1$  и  $A_n = 0$  при  $n > 1$ ; следовательно,  $a_* = 1/2\pi^2$ .

Применимость формулы (1.82) определяется из условия  $t \geq 0,5n_0 m^2/D_0^2$ , что при принятых выше значениях  $D_0$  и  $n_0$  уже при  $m=1$  м даёт  $t \geq 2500$  сут. Таким образом, ориентироваться на использование зависимости (1.82) следует лишь при выполнении прогнозных расчетов на очень большие времена.

## 2. КОНВЕКТИВНЫЙ ПЕРЕНОС И МАССООБМЕН

### 2.1. Конвективный перенос при фильтрации подземных вод в однородных пластах

Простейшей и в то же время наиболее широко используемой моделью геохимической гидродинамики является модель конвективного переноса, которой отвечает система уравнений (1.18)—(1.20) при  $D_i = 0$ ,  $\partial N/\partial t = 0$ . Впервые эта модель рассмотрена Л. С. Лейбензоном [47] в постановке так называемого «поршневого» вытеснения, когда считается, что между вытесняющей и вытесняемой жидкостью существует резкая граница раздела. В последующем были опубликованы многочисленные решения задач в такой постановке для различных технических приложений С. Ф. Аверьяновым [1], Ф. М. Бочевым, Н. Н. Лапшиным, А. Е. Орадовской [9], Н. Н. Веригиным [14], В. М. Гольдбергом [33], А. С. Малышевым [52], М. В. Филиновым [88], В. М. Шестаковым [97], включая их численные и графоаналитические реализации [12, 48, 69, 97].

Для условий нестационарного движения двух разнородных жидкостей, отличающихся вязкостью, фундаментальной является работа Н. Н. Веригина [14], опубликованная в 1952 г. В последующем поставленная в этой работе «задача Веригина» исследовалась математиками [38, 81] и применялась в разработках по фильтрации воды, нефти и газа [73]. К этой задаче сводится также случай равновесного массообмена при замене пористости ее эффективным значением  $n = n_0(1 + \Gamma)$ .

Ниже показываются возможные уточнения задачи Н. Н. Веригина, обусловленные более полным учетом деформируемости среды в уравнении движения границы раздела. Дается оценка предлагаемым уточнениям на примере основных автомоделных решений, приводятся решения ряда неавтомодельных задач по движению границы раздела жидкостей с одинаковой вязкостью.



### 2.1.1. Основные автомодельные задачи движения жидкостей с разной вязкостью

#### Линейная задача

При различных вязкостях жидкостей  $\mu_i$  ( $i=1, 2$ ), участвующих в процессе несмешивающегося вытеснения, задача определения давлений  $p_i(x, t)$ , потоков  $q_i(x, t)$  и координат движущейся границы раздела  $l(t)$  в линейном случае (рис. 2.1) ставится системой уравнений

$$a_i \frac{\partial^2 p_i}{\partial x^2} = \frac{\partial p_i}{\partial t}, \quad a_i = \frac{k_{\pi}}{\mu_i \beta_i^*}, \quad (2.1)$$

$$p_2(x, 0) = p_2(\infty, t) = p_0 = \text{const}, \quad p_1(0, t) = p_c = \text{const}, \quad (2.2)$$

$$p_1(l, t) = p_2(l, t), \quad \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial p_1(l, t)}{\partial x} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial p_2(l, t)}{\partial x}. \quad (2.3)$$

Здесь  $k_{\pi}$  — проницаемость среды,  $a_i$  и  $\beta_i^*$  — коэффициенты пьезопроводности и сжимаемости в зонах, занятых жидкостями 1 и 2,  $\beta_i^* = n_0 \alpha_{ж} + (1 - n_0) \alpha_c$ ,  $n_0$  — пористость,  $\alpha_{ж}$  и  $\alpha_c$  — коэффициенты сжимаемости жидкости и среды;  $p_0$  и  $p_c$  — пластовое давление и давление нагнетания в прямолинейный ряд скважин (галерею).

Удельный расход жидкости в пласте мощностью  $m$  находится из уравнения

$$q_i = \frac{k_{\pi} m}{\mu_i} \frac{\partial p_i}{\partial x}. \quad (2.4)$$

В задаче Н. Н. Веригина система уравнений (2.1) — (2.3) замыкается кинематическим условием

$$n_0 \frac{dl}{dt} = - \frac{k_{\pi}}{\mu_1} \frac{\partial p_1(l, t)}{\partial x}. \quad (2.5)$$

Обращает на себя внимание, что несмотря на то, что задача в целом формулируется для деформационного режима, условие (2.5), являющееся по существу уравнением движения, записано как для несжимаемой среды. Покажем это, исходя из очевидных балансовых соотношений. Условие баланса в зоне  $0 \leq x \leq l(t)$  (рис. 4) имеет вид

$$- \frac{k_{\pi}}{\mu_1} \int_0^l \frac{\partial p_1(0, t)}{\partial x} dx = n_0 l(t) + \beta_1^* \int_0^{l(t)} [p_1(x, t) - p_0] dx. \quad (2.6)$$

Это условие означает, что количество жидкости, поступившее через сечение  $x=0$  за время  $t$ , размещено в порах зоны  $x \leq l(t)$  и в упругом объеме той же зоны. Имея в виду, что это же количество жидкости занимает упругий объем всего

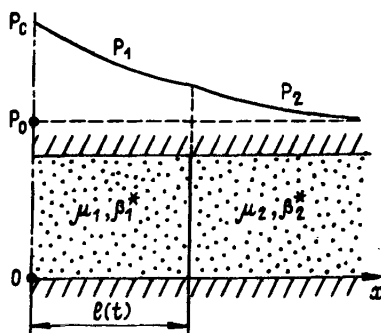


Рис. 4. Расчетная схема движения границы раздела разнородных жидкостей

пласта в обеих зонах, получаем

$$-\frac{k_{\Pi}}{\mu_1} \int_0^t \frac{\partial p_1(0, t)}{\partial x} dt = \beta_1^* \int_0^{l(t)} [p_1(x, t) - p_0] dx + \beta_2^* \int_{l(t)}^{\infty} [p_2(x, t) - p_0] dx. \quad (2.7)$$

Из сравнения (2.6) и (2.7) вытекает

$$n_0 l(t) = \beta_2^* \int_{l(t)}^{\infty} [p_2(x, t) - p_0] dx. \quad (2.8)$$

Любое из соотношений (2.6)–(2.8) так же как и (2.5), замыкают систему уравнений (2.1)–(2.3).

Для получения уравнения движения границы раздела в дифференциальной форме продифференцируем (2.6) и (2.8) по  $t$  с использованием уравнений (2.1). Это дает

$$\{n_0 + \beta_1^* [p_1(l, t) - p_0]\} \frac{dl}{dt} = -\frac{k_{\Pi}}{\mu_1} \frac{\partial p_1(l, t)}{\partial x}, \quad (2.9)$$

$$\{n_0 + \beta_2^* [p_2(l, t) - p_0]\} \frac{dl}{dt} = -\frac{k_{\Pi}}{\mu_2} \frac{\partial p_2(l, t)}{\partial x}. \quad (2.10)$$

Уравнения (2.9) и (2.10) отличаются от уравнения движения Н. Н. Веригина поправкой пористости пласта на упруго-емкость среды на движущемся контуре раздела жидкостей. Вместе с тем в силу условий неразрывности (2.3) одновременное существование (2.9) и (2.10) возможно лишь при одинаковых сжимаемостях жидкостей  $\beta_1^* = \beta_2^*$ , что является следствием традиционной постановки задачи (2.1)–(2.3). Сохраняя эту предпосылку, рассмотрим задачу (2.1)–(2.3), (2.9).

Ее решение является автомодельным и имеет вид

$$p_1 = p_c - (p_c - p_0) \eta_1(\gamma) \operatorname{erf} \xi_1, \quad (2.11)$$

$$p_2 = p_c - (p_c - p_0) \eta_2(\gamma) \operatorname{erf} \xi_2. \quad (2.12)$$

Здесь:

$$\eta_i = \frac{\mu_i \sqrt{a_i} e^{\varphi_i^2}}{\mu_1 \sqrt{a_1} e^{\varphi_1^2} \operatorname{erf} \varphi_1 + \mu_2 \sqrt{a_2} e^{\varphi_2^2} \operatorname{erf} \varphi_2}, \quad \varphi_i = \frac{\gamma}{2 \sqrt{a_i}},$$

$$\xi_i = \frac{x}{2 \sqrt{a_i t}}; \quad l(t) = \gamma \sqrt{t}. \quad (2.13)$$

Для определения параметра  $\gamma$  используется трансцендентное уравнение

$$\beta = \frac{\varphi_2 e^{-\varphi_2^2} (\mu_0 \sqrt{a_0} e^{\varphi_2^2 / a_0} \operatorname{erf} \varphi_2 \sqrt{a_0} + e^{\varphi_2^2} \operatorname{erf} \varphi_2)}{e^{-\varphi_2^2} / \sqrt{\pi} - \varphi_2 \operatorname{erf} \varphi_2 / \mu_0 a_0}, \quad (2.14)$$

в котором  $\beta = \frac{k_n(p_c - p_0)}{n_0 \mu_2 a_2}$ ,  $a_0 = \frac{a_1}{a_2}$ ;  $\mu_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ .

Таким образом, решение (2.11) — (2.13) сохраняется в форме Н. Н. Веригина, однако трансцендентное уравнение (2.14) приобретает новую форму из-за дополнительного отличия в постановке задачи — (2.9) вместо (2.5). Выражения для потоков, как и для давлений, остаются неизменными, но с другим значением  $\gamma$  или  $\varphi_2$  по (2.14).

В частности расход на контуре нагнетания  $x=0$

$$q_1(0, t) = \frac{k_n m}{\mu_1} \cdot \frac{(p_c - p_0)}{\sqrt{\pi a_1 t}} \eta_1(\gamma). \quad (2.15)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи и, прежде всего актуальный случай одинаковых вязкостей жидкостей. При  $\mu_0 = a_0 = 1$ ,  $\varphi_1 = \varphi = \gamma / 2 \sqrt{a}$

$$p(x, t) = p_0 + (p_c - p_0) \operatorname{erf} \xi, \quad \xi = x / 2 \sqrt{a t}. \quad (2.16)$$

Трансцендентное уравнение для определения  $\gamma$  или  $\varphi$  в этом случае имеет вид

$$\beta = \varphi / i \operatorname{erf} \varphi, \quad \beta = \beta^* (p_c - p_0) / n_0,$$

$$i \operatorname{erf} \varphi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\varphi^2} - \varphi \operatorname{erf} \varphi, \quad (2.17)$$

а в задаче Н. Н. Веригина

$$\beta = \sqrt{\pi} \varphi e^{\varphi^2}. \quad (2.18)$$

Ошибка при определении  $\varphi$  и, следовательно,  $\gamma$  по (2.18) вместо (2.17) возрастает с увеличением  $\beta$ , т. е. с ростом разности забойных и пластовых давлений и коэффициента сжи-

Таблица 10

Значения коэффициентов сжимаемости  $\beta^*$  и упругости  $\eta^*$  горных пород

Горные породы	Ф. М. Боцевер [71]				В. М. Шестаков [100]	В. А. Мироненко [55]
	$\pi_0$	$(1-\pi_0)\alpha_c$ см <sup>3</sup> /кгс	$\beta^*$ см <sup>3</sup> /кгс	$\eta^*$ 1/м	$\eta^*$ 1/м	$\eta^*$ 1/м
Глинистые породы	0,1	$0,3 \cdot 10^{-2}$	$0,3 \cdot 10^{-2}$	$0,3 \cdot 10^{-3}$	$(0,1 \div 0,4) \cdot 10^{-3}$	$(0,1 \div 1,0) \cdot 10^{-3}$
Пески и травянисто-галечниковые отложения	0,3	$(0,2 \div 0,7) \cdot 10^{-2}$	$0,5 \cdot 10^{-2}$	$0,5 \cdot 10^{-3}$	$(0,5 \div 2) \cdot 10^{-4}$	$(0,5 \div 5) \cdot 10^{-4}$
Известняки	0,1	$0,2 \cdot 10^{-5}$	$0,7 \cdot 10^{-5}$	$0,7 \cdot 10^{-6}$	$(1 \div 4) \cdot 10^{-4}$	$(0,1 \div 1,0) \cdot 10^{-4}$
Песчаники	0,05	$0,2 \cdot 10^{-5}$	$0,4 \cdot 10^{-5}$	$0,4 \cdot 10^{-6}$	$(0,3 \div 1,0) \cdot 10^{-4}$	
Изверженные породы	0,01	$0,1 \cdot 10^{-5}$	$0,15 \cdot 10^{-5}$	$0,15 \cdot 10^{-6}$	—	

маемости, и падает с увеличением пористости (рис. 5). Оценка этой ошибки может быть произведена по значениям коэффициентов сжимаемости  $\beta^*$  и упругоемости  $\eta^*$  напорных пластов, встречающимся в литературе и приведенным в табл. 10 ( $\eta^* = \gamma\beta^*$ ,  $\gamma$  — объемный вес воды).

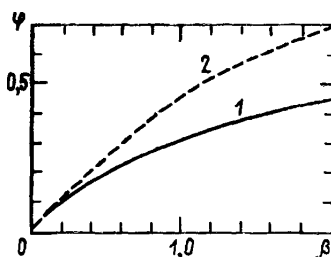


Рис. 5. Сопоставление графиков для определения параметра  $\varphi$  в линейном потоке по формуле (2.17)—1 и (2.18)—2

Принимая в (2.17)  $\gamma(p_c - p_0) = s_0 \approx 100$  м и вычисляя с учетом данных табл. 2.1 характерные значения параметра  $\beta$ , можно дать оценку ошибок, возникающих при определении параметра инъеции  $\gamma$  по (2.18). Аналогичная оценка производится для безнапорных пластов при  $\beta = \mu s_0 / m n_0$  ( $\mu$  — водоотдача или недостаток насыщения). Обобщенная оценка приведена в табл. 11.

Таблица 11

Порядок ошибок при определении параметра  $\gamma$  по уравнению (2.18)

Тип пласта	Характерные значения $\beta$	Ошибка при определении $\gamma$ по (2.18), %
Напорный	$10^{-2} \div 10^{-1}$	до -16
Безнапорный	$0,05 \div 2,0$	до -50

Таким образом, применение приближенного решения (2.18) в случае напорных пластов при упругом режиме фильтрации даст незначительную ошибку. Погрешность расчета существенно возрастает при переходе к гравитационному режиму фильтрации со свободной поверхностью и к режимам газожидкостного вытеснения. В этих случаях должны применяться более строгие зависимости, основанные на использовании уравнений движения (2.9)—(2.10) или их интегральных аналогов (2.6)—(2.8).

Исследование двух других предельных случаев, а именно нагнетания жидкости в газосодержащий пласт и нагнетание газа в пласт, насыщенный капельной жидкостью, приводит к следующим результатам. В первом случае, когда  $\mu_2 \rightarrow 0$ ,  $a_2 \rightarrow \infty$ ,

получается результат Н. Н. Веригина, как для давлений, так и для кинематического коэффициента  $\gamma$ . Это обусловлено постоянством давления на контуре вытеснения ( $p_2(l, t) = p_0 = \text{const}$ ) и соответствует исследованиям Л. С. Лейбензона [47] и П. Я. Полубариновой-Кочиной [70].

При вытеснении жидкости газом

$$p_1 = p_c, \quad p_2 = p_0 + (p_c - p_0) \operatorname{erfc} \xi_2 / \operatorname{erfc} \varphi_2, \quad (2.19)$$

что совпадает с результатом работы [14]. Однако при определении параметра  $\gamma$  (или  $\varphi_2 = \sqrt{\gamma/4a_2}$ ) приходится использовать иную, чем в [14] зависимость

$$\beta = \frac{\varphi_2 \operatorname{erfc} \varphi_2}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\varphi_2^2} - \varphi_2 \frac{\beta_1^*}{\beta_2^*} \operatorname{erfc} \varphi_2}, \quad (2.20)$$

содержащую дополнительно соотношение сжимаемостей газа и жидкости.

Радиальные задачи

Актуальное значение в связи с многочисленностью технических приложений имеет осесимметричная задача нагнетания в пласт постоянного расхода  $Q$  жидкости, свойства которой отличны от пластовой. Определяющая эту задачу система уравнений представлена в работе Н. Н. Веригина [14]. Однако по аналогии с линейной задачей уравнение движения границы раздела жидкостей для деформационного режима записывается в виде одной из интегральных форм

$$Qt = \pi m n_0 R^2(t) + 2\pi m \beta_1^* \int_0^{R(t)} [p_1(r, t) - p_0] r dr, \quad (2.21)$$

а также в следующей из этого выражения формы

$$\{n_0 + \beta_1 [p_1(r, t) - p_0]\} \frac{dR}{dt} = -\frac{k_{\pi}}{\mu_1} \frac{\partial p_1(R, t)}{\partial r}. \quad (2.22)$$

В этом случае автомодельное решение для распределения давлений получается в виде

$$p_1(r, t) = p_0 - \frac{\mu_1 Q}{4\pi k_{\pi m}} Ei(-\lambda_1) - \frac{Q}{4\pi k_{\pi m}} [\mu_2 e^{(a_0-1)\gamma_1} Ei(-\gamma_2) - \mu_1 Ei(-\gamma_1)], \quad (2.23)$$

$$p_2(r, t) = p_0 - \frac{\mu_2 Q}{4\pi k_{\pi m}} e^{(a_0-1)\gamma_1} Ei(-\lambda_2), \quad (2.24)$$

где  $\gamma_{1,2} = R^2/4a_{1,2}t$ ,  $\lambda_{1,2} = r^2/4a_{1,2}t$ .

Для нахождения параметра  $\gamma_1$  и затем положения границы раздела  $R(t)$  в этом случае используется трансцендентное со-

отношение

$$\gamma_1 = \frac{Qe^{-\gamma_1}}{4\pi a_1 m n}, \quad n = n_0 - \frac{Q}{4\pi a_2 m} e^{(a_0-1)\gamma_1} Ei(-a_0\gamma_1). \quad (2.25)$$

В случае однородных жидкостей ( $\mu_1 = \mu_2$ ,  $a_1 = a_2 = a$ ) параметр  $\gamma_1$  и положение границы раздела  $R(t)$  находятся из соотношения

$$\gamma_1 = \frac{\eta e^{-\gamma_1}}{1 - \eta Ei(-\gamma_1)}, \quad \eta = \frac{Q}{4\pi a m n_0}. \quad (2.26)$$

При  $n_0 = n$ , а также в частном случае нагнетания жидкости в газосодержащий пласт ( $\mu_2 \rightarrow 0$ ,  $a_2 \rightarrow \infty$ ) получается результат Н. Н. Веригина

$$p_1(r, t) = p_0 - \frac{\mu_1 Q}{4\pi k_{nm}} [Ei(-\lambda_1) - Ei(-\gamma_1)],$$

$$p_2(r, t) = p_0. \quad (2.27)$$

Уравнение (2.26) в этом случае упрощается

$$\gamma_1 = \eta e^{-\gamma_1}. \quad (2.28)$$

Представляет интерес сопоставление результатов (2.26) и (2.28), приведенное на рис. 6. При максимальном значении

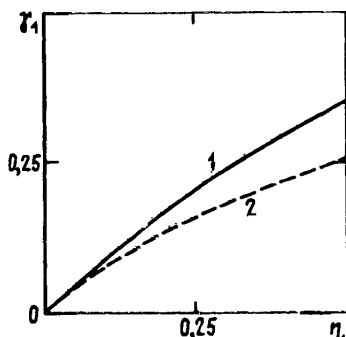


Рис. 6. Сопоставление графиков для определения параметра  $\gamma_1$  в радиальном потоке по формулам (2.28)—1 и (2.26)—2

$\eta = 0,05$  для напорных пластов, сложенных трещиноватыми породами, ошибка в определении  $\gamma_1$  по (2.28) составит 13%, а в определении  $R(t)$  6%. Для безнапорных пластов с характерным для них значением  $\eta = 0,1$  эти ошибки будут соответственно 19,7 и 9,5%, а при максимальном возможном значении  $\eta = 0,5$  соответственно 40 и 18%. Таким образом, учет сжимаемости жидкости и пород пласта в уравнении движения границы раздела однородных жидкостей приводит к существенному ее замедлению.

В случае нагнетания газа в пласт, заполненный первоначально жидкостью, имеем ( $\mu_1 \rightarrow 0$ ,  $a_1 \rightarrow \infty$ )

$$p_1(t) = p_0 - \frac{\mu_2 Q}{4\pi k_{nm}} e^{\gamma_2} Ei(-\gamma_2), \quad (2.29)$$

$$p_2(t) = p_0 - \frac{\mu_2 Q}{4\pi k_{nm}} e^{\gamma_2} Ei(-\lambda_2). \quad (2.30)$$

Граница раздела газа и жидкости находится из соотношения

$$R = \left( \frac{Qt}{\pi m n} \right)^{1/2}, \quad n = n_0 - \frac{\beta_1^* \mu_2 Q}{4\pi k_{nm}} e^{\gamma_2} Ei(-\gamma_2). \quad (2.31)$$

Применяя те же, что и выше соображения, можно сформулировать задачу о движении границы раздела двух жидкостей в случае центрально-симметричного течения. Уравнение движения или кинематическое условие на границе вытеснения в интегральной форме в этом случае имеет вид

$$Qt = \frac{4}{3} \pi n_0 R^3(t) + 4\pi \beta_1^* \int_0^{R(t)} [p_1(r, t) - p_0] r^2 dr. \quad (2.32)$$

Дифференциальная форма этого уравнения получается в виде (2.22).

Автомодельное решение центрально-симметричной задачи может быть найдено для случая, рассмотренного Н. Н. Веригиным и Е. С. Дзекцером [21], когда считается  $Q = c\sqrt{t}$  ( $c = \text{const}$ ). Аналогичным образом можно поставить задачу о грунтовом потоке со свободной поверхностью, пересекающей границы слоев грунта разной проницаемости и гидроемкости [20].

### *2.1.2. Неавтомодельные задачи движения жидкостей с одинаковой вязкостью в различных гидрогеологических условиях*

При решении практических задач прогноза распространения загрязнений в водоносных (а также в сухих) породах без учета влияния гидродинамической дисперсии и неравновесного массообмена применяется в основном поршневая схема вытеснения разнородных жидкостей, имеющих одинаковую вязкость. Это связано с тем, что вязкость растворов неорганических соединений довольно слабо зависит от концентрации (табл. 12).

За счет такого упрощения можно значительно расширить класс решаемых задач о движении границы раздела жидкостей, рассмотрев многие неавтомодельные задачи с усложненными условиями.

**Движение в пластах со свободной поверхностью**

Покажем сначала, как может быть получено кинематическое условие на движущейся границе раздела жидкостей для наиболее сложного случая нелинейной задачи фильтрации со



**Зависимость вязкости раствора NaCl  
от концентрации при  $t=18^\circ\text{C}$  [84]**

Концентрация	Вес %	0,6	1,1	2,8	5,5	10,5	14,9	18,9	22,6
	г/л	6	11	29	57	112	165	216	264
Вязкость раствора по отношению к вязкости воды, $\mu$		1.008	1.02	1.04	1.084	1.192	1.339	1.498	1.70

слабопроницаемым водоупором, расчетная схема которого приведена на рис. 7. Дифференциальное уравнение неустановившейся фильтрации в этом случае записывается в форме

$$k \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{k_0}{m_0} (h - h_e) = \mu_r \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (2.33)$$

где  $k$  и  $\mu_r$  — коэффициент фильтрации и гравитационная водоотдача (или недостаток насыщения) безнапорного пласта;  $k_0$  и  $m_0$  — коэффициент фильтрации и мощность слабопроницаемого водоупора;  $h_e = \text{const}$  и  $h = h(x, t)$  — начальная и текущая глубины (или напоры) грунтовых вод.

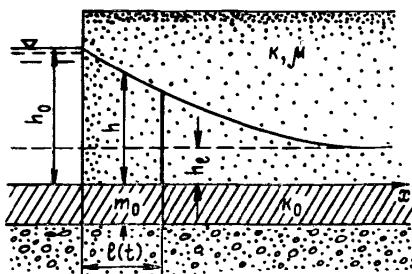


Рис. 7. Расчетная схема движения границы раздела жидкостей в безнапорном пласте со слабопроницаемым водоупором

Для этой схемы нетрудно составить уравнение баланса количеств жидкости, участвующих в формировании зоны  $0 \leq x \leq l(t)$

$$\begin{aligned}
 & -k \int_0^t h(0, t) \frac{\partial h(0, t)}{\partial x} dt = n_0 h_e l(t) + \\
 & + \mu \int_0^{l(t)} [h(x, t) - h_e] dx - \frac{k_0}{m_0} \int_0^{l(t)} \int_0^t [h(x, t) - h_e] dx dt. \quad (2.34)
 \end{aligned}$$

Левая часть этого уравнения представляет собой количество жидкости, поступившей во входное сечение пласта (на единицу его ширины) за время  $t$ . В правой (расходной) части уравнения даны последовательно количества этой жидкости, израсходованные за это же время на насыщение зоны  $0-l(t)$  с мощностью  $h_e$  и активной пористостью  $n_0$ , той же зоны гравитационного заполнения с недостатком насыщения  $\mu_r$  и на фильтрацию через слабопроницаемый водоупор.

Уравнение (2.34) является кинематическим условием в интегральной форме для решения задач о движении границы раздела жидкостей и может в таком виде использоваться непосредственно. Для получения кинематического условия в дифференциальной форме необходимо продифференцировать (2.34) по  $t$  с использованием (2.33).

Опуская промежуточные выкладки получаем

$$h_e \left[ n_0 + \mu_r \frac{h(l, t) - h_e}{h_e} \right] \frac{dl}{dt} = -kh(l, t) \frac{\partial h(l, t)}{\partial x}. \quad (2.35)$$

Таким образом, при решении задач фильтрации с использованием нелинейного уравнения (2.33) кинематическое условие на движущейся границе раздела двух жидкостей также нелинейно и имеет вид (2.35). Из анализа следует также, что параметры слабопроницаемого водоупора в это условие не входят, хотя участвуют в интегральном уравнении баланса (2.34).

Замечательно, что при  $\mu_r = n_0$ , т. е. в случае классической постановки задачи, нелинейное уравнение (3.33) строго должно быть дополнено линейным условием Н. Н. Веригина

$$n_0 \frac{dl}{dt} = -k \frac{\partial h(l, t)}{\partial x}. \quad (2.36)$$

Нетрудно видеть, что при  $h_e = 0$  (2.35) также переходит в (2.36). При фильтрации через слабопроницаемый водоупор в сухой грунт на границе  $l(t)$  происходит скачкообразное изменение расхода перетекания. Условие на границе в этом случае принимается в более общей форме, полученной Н. П. Куратовым.

Анализ этой весьма актуальной для теории фильтрации задачи позволяет сделать следующие основные выводы.

При рассмотрении нелинейных проблем, связанных с решением уравнения фильтрации со свободной поверхностью при достаточно медленных процессах подпора (или спада) грунтовых вод, а также при фильтрации в сухой грунт, следует принимать  $\mu_r = n_0$  с линейным условием на границе раздела жидкостей (2.36).

— При необходимости учета различий в значениях активной пористости  $n_0$  и гравитационной водоотдачи (или недостатка насыщения)  $\mu_r$  следует переходить к нелинейному условию (2.35).

— При решении задач фильтрации разнородных жидкостей со свободной поверхностью в линеаризованной постановке линейное условие (2.36) не удовлетворяет уравнению баланса. Более подходящим в этом случае является условие (2.48), рассматриваемое ниже.

Движение в напорном и двухслойном пластах

При рассмотрении задач фильтрации жидкостей одинаковой вязкости в гидрогеологической практике принято заменять давления напорами (или их изменениями), а проницаемость пласта  $k_n$  коэффициентом фильтрации  $k$ . Коэффициент пьезопроводности в этом случае

$$a = \frac{k_n}{\mu_1 \beta_1^*} = \frac{k}{\gamma \beta^*} = \frac{k m}{\mu}, \quad (2.37)$$

где  $m$  — средняя мощность пласта;  $\mu$  — его гидроемкость (упругая  $\mu_y$  или гравитационная  $\mu_r$ ).

В двухслойных пластах с более проницаемым нижним слоем в соответствии с применяемой обычно моделью [27] движением жидкости в горизонтальном направлении по верхнему слою пренебрегается. Поэтому насыщение или осушение этого слоя происходит лишь по вертикали при изменении напора на кровле нижнего слоя. В коэффициент  $a$  входит в этом случае гравитационная гидроемкость верхнего слоя и, поэтому, его по аналогии с безнапорной фильтрацией называют коэффициентом уровнепроводности. В более сложном случае упругогравитационного режима фильтрации (обычно при большой мощности нижнего слоя) гидроемкость определяется как сумма двух составляющих  $\mu = \mu_y + \mu_r$  [71].

Для расчетной схемы напорного или двухслойного пласта, представленной на рис. 8 а, уравнение движения границы раздела одновязкостных жидкостей, полученное интегрированием условия Н. Н. Веригина

$$n_0 \frac{dl}{dt} = -k \frac{\partial s(l, t)}{\partial x} \quad (2.38)$$

при подъеме уровня в хранилище или канале на величину  $s_0$  и изменении его в пласте

$$s = s_0 \operatorname{erfc}(x/2\sqrt{at}), \quad (2.39)$$

имеет вид (2.18) или в новых обозначениях

$$\beta = \sqrt{\pi} \lambda e^{\lambda^2}, \quad \beta = \frac{\mu s_0}{n_0 m}, \quad \lambda = \frac{l}{2\sqrt{at}}. \quad (2.40)$$

Из (2.40) можно определить  $\lambda$  и затем  $l(t)$ .

На примере этой простой задачи можно показать, каким образом следует учитывать деформируемость среды и гидроемкость пласта с использованием интегральных балансовых соотношений.

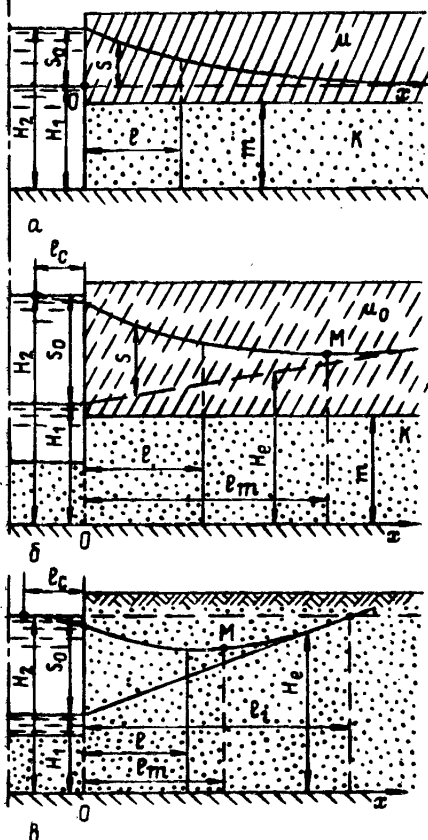


Рис. 8

Рис. 8. Расчетные схемы проникновения загрязненных вод в водоносные пласты

а — напорный и двухслойный, б — двухслойный с уклоном подземных вод и сопротивлением на урезе хранилища, в — безнапорный с уклоном подземных вод и сопротивлением на урезе хранилища

Рис. 9. Графики зависимости  $\lambda(\beta, \lambda_i)$  при  $\lambda_c=0$ ,  $\beta=0+2$

Объем жидкости, поступившей в пласт через сечение  $x=0$  за время  $t$ , равен

$$W(t) = \int_0^t q(0, t) dt = -km \int_0^t \frac{\partial s(0, t)}{\partial x} dt. \quad (2.41)$$

Этот объем размещается в зоне  $0 \leq x \leq l(t)$ , занимая в ней объем пор и дополнительный объем упругого деформирования

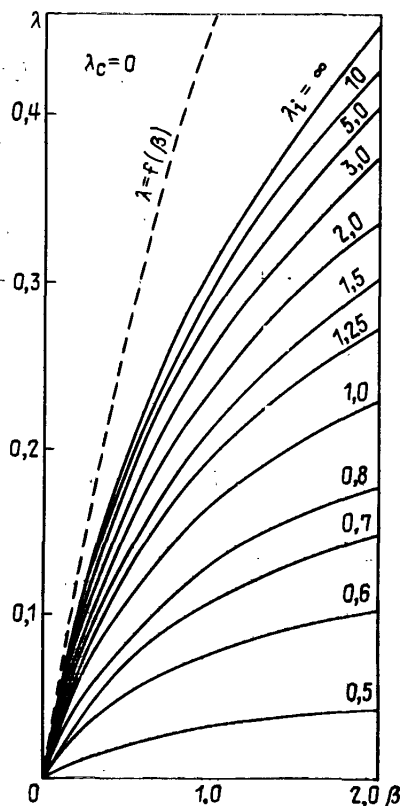


Рис. 9

пласта, а также гидроемкость верхнего слабопроницаемого слоя. Поэтому

$$W(t) = n_0 m l + \mu \int_0^l s(x, t) dx. \quad (2.42)$$

В то же время очевидно, что

$$W(t) = \mu \int_0^\infty s(x, t) dx. \quad (2.43)$$

Из (2.41) и (2.42) следует равенство

$$n_0 m l = -k m \int_0^t \frac{\partial s(0, t)}{\partial x} dt - \mu \int_0^l s(x, t) dx, \quad (2.44)$$

а из (2.42) и (2.43):

$$n_0 m l = \mu \int_l^\infty s(x, t) dx. \quad (2.45)$$

Оба интегральных соотношения (2.44) и (2.45) могут быть использованы для вычисления  $l(t)$ . Соотношение (2.45), в частности, означает физически, что объем пластовой воды  $n_0 m l$ , отнесенной за пределы сечения  $x = l(t)$ , размещается в зоне  $x > l(t)$  в объеме ее упругого деформирования. Интегрируя (2.45), получаем

$$\beta = \frac{\lambda}{ierfc\lambda} \left( \lambda = \frac{l}{2\sqrt{at}}, \beta = \frac{\mu s_0}{n_0 m} \right). \quad (2.46)$$

Таким образом, для вычисления  $l(t)$  получено иное чем (2.40) выражение. При малых  $\lambda$   $ierfc\lambda \approx 1/\sqrt{\pi}$ , а экспонента в (2.40) стремится к единице, поэтому соотношения (2.40) и (2.47) дают тождественный результат. Используя дополнительно рекуррентную формулу для  $ierfc z$ , представим (2.46) в виде

$$\beta = \sqrt{\pi} \lambda / (e^{-\lambda^2} - \sqrt{\pi} \lambda erfc\lambda), \quad (2.47)$$

из которого видно дополнение к формуле (2.40).

На рис. 9 приведены кривые  $\lambda = f(\beta)$ , рассчитанные по (2.40) — штриховая линия — и по (2.46) — кривая для  $\lambda_1 = \infty$ . Они сходятся при малых значениях  $\beta < 0,1$ . Анализ параметров, входящих в  $\beta$ , показывает, что именно этот диапазон является характерным для напорных пластов. Таким образом, соотношение (2.40) для этих условий является как и уравнение (2.38) достаточно хорошим приближением. В то же время при значительном увеличении  $\mu$  и, следовательно,  $\beta$  следует пользоваться или интегральным соотношением (2.45) или эквива-

лентным ему кинематическим уравнением в дифференциальной форме

$$\left[ n_0 + \frac{\mu}{m} s(x, t) \right] \frac{dx}{dt} = -k \frac{\partial s(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l(t)}. \quad (2.48)$$

Следующей актуальной для прогноза распространения загрязнений в водоносных пластах задачей является определение закономерностей движения границы раздела жидкостей при заданном расходе нагнетания (или налива) вытесняющей жидкости на границе  $x=0$ . Для условий расчетной схемы на рис. 8а изменение уровня подземных вод в этом случае имеет известный вид

$$s(x, t) = \frac{2q \sqrt{at}}{km} \operatorname{ierfc} \frac{x}{2\sqrt{at}}, \quad (2.49)$$

где  $\operatorname{ierfc} z = \int_z^\infty \operatorname{erfc} \zeta d\zeta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} - z \operatorname{erfc} z$ .

Подставляя это выражение в уравнение движения границы раздела в интегральной форме (2.45) находим

$$\eta = \lambda / i^2 \operatorname{erfc} \lambda \quad \left( \lambda = \frac{l}{2\sqrt{at}}, \quad \eta = \frac{2q \sqrt{t}}{mn_0 \sqrt{a}} \right). \quad (2.50)$$

Здесь  $i^2 \operatorname{erfc} z = \int_z^\infty i \operatorname{erfc} \zeta d\zeta = 0,25 \left[ (1 + 2z^2) \operatorname{erfc} z - \frac{2}{\sqrt{\pi}} z e^{-z^2} \right]$ .

Для определения  $l(t)$  необходимо решить подбором уравнение (2.50), в которое  $l(t)$  входит в неявной форме. Эта задача упрощается при использовании графиков  $\lambda(\eta)$ , представленных на рис. 10.

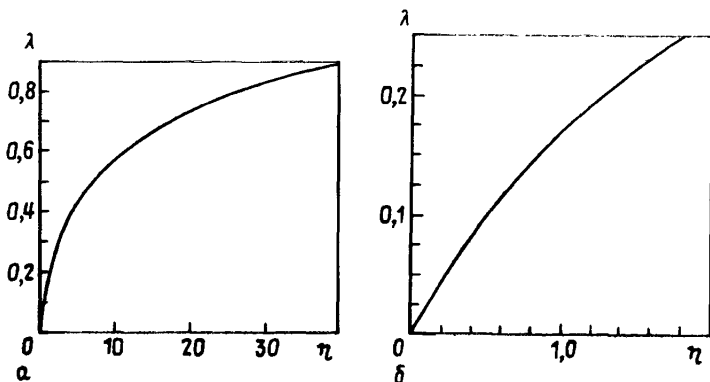


Рис. 10. Графики зависимости  $\lambda(\eta)$

Движение в двухслойном пласте с учетом потока подземных вод и дополнительных сопротивлений

По сравнению с рассмотренными выше простыми расчетными схемами здесь вводятся следующие осложнения гидрогеологических условий (рис. 8 б):

— Имеется естественный поток подземных вод, направленный к границе, на которой происходит изменение напора на величину  $s_0$ .

— Учитываются дополнительные сопротивления, обусловленные наличием экрана или слабопроницаемых отложений в основании канала или хранилища, неполнотой их врезки в водоносный пласт, а также сопротивления, возникающие при приведении ряда несовершенных скважин к эквивалентной галерее.

Такое осложнение задачи производится с помощью краевых условий для напора

$$H(x, 0) = H_e(x), \quad \frac{\partial H(0, t)}{\partial x} - \gamma [H(0, t) - H_1] = 0, \quad (2.51)$$

в которых  $\gamma$  является параметром, отражающим все виды сопротивлений на границе  $x=0$ .

Для условий (2.51) изменение напоров в пласте  $s(x, t)$  после подпора на границе  $x=0$  на величину  $s_0 = \text{const}$  выражается следующим образом:

$$s(x, t) = s_0 [\text{erfc } \xi - e^{\tau(2\xi + \tau)} \text{erfc}(\xi + \tau)], \quad (2.52)$$

где  $\xi = x/2\sqrt{at}$ ,  $\tau = \gamma\sqrt{at}$ .

Интегральное соотношение для определения положения границы раздела жидкостей  $l(t)$  имеет в этом случае вид

$$\int_0^t q(0, t) dt = mn_0 l(t) + \mu \int_0^{l(t)} s(x, t) dx. \quad (2.53)$$

Здесь  $q(0, t)$  — фильтрационный расход в граничном сечении  $x=0$ ,  $n_0$  — активная пористость нижнего слоя;  $\mu$  — то же верхнего слабопроницаемого слоя.

При записи соотношения (2.53) приняты следующие допущения.

— В соответствии с применяемой моделью течения в двухслойной среде движением жидкости в горизонтальном направлении по верхнему слою пренебрегается. Поэтому насыщение этого слоя при подпоре происходит лишь по вертикали из нижнего более проницаемого слоя. Таким образом, объем жидкости, заключенный между кривой  $H_e(x)$  и кровлей нижнего слоя при подпоре перемещается вверх, занимая полосу вдоль свободной поверхности, и в балансе (2.53) не участвует.

— При медленных процессах подпора и спада в капиллярной зоне успевает сформироваться почти подобный себе про-

филь влажности над свободной поверхностью грунтовых вод. Поэтому в балансовом соотношении следует принимать при расчетах насыщения грунтов при подпоре не величину недостатка насыщения, а значение активной пористости верхнего слоя.

Учитывая уклон естественного потока грунтовых вод  $I$  при первом способе линеаризации  $H_e(x) = H_1 + Ix$  для фильтрационного расхода, получаем

$$q(0, t) = -km \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=0} = \gamma k m s_0 e^{\tau^2} \operatorname{erfc} \tau - kmJ. \quad (2.54)$$

Подставляя (2.52) и (2.54) в соотношение (2.53) и интегрируя, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\mu s_0}{\gamma} e^{\tau^2 + \gamma l} \operatorname{erfc} \left( \frac{l}{2\sqrt{at}} + \tau \right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \mu s_0 \sqrt{at} e^{-l^2/4at} = \\ = n_0 m l + kmJt + \mu s_0 \left( 1 + \frac{l}{\gamma l} \right) l \operatorname{erfc} \frac{l}{2\sqrt{at}}. \end{aligned}$$

Разделив все члены этого уравнения на  $2\sqrt{at}\mu s_0$  и вводя безразмерную переменную  $\lambda = l/2\sqrt{at}$  после некоторых преобразований получаем следующее трансцендентное уравнение для определения  $\lambda$

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{\mu s_0}{n_0 m} \left[ \frac{e^{\tau(\tau+2\lambda)}}{2\tau} \operatorname{erfc}(\lambda + \tau) + \frac{e^{-\lambda^2}}{\pi} - \right. \\ \left. - \left( \lambda + \frac{1}{2\tau} \right) \operatorname{erfc} \lambda - \frac{J\tau}{2\gamma s_0} \right]. \quad (2.55) \end{aligned}$$

При выводе (2.55) дополнительно использовано определение  $a = km/\mu$ . Для расчета  $\lambda$  по известным параметрам  $\gamma$ ,  $\mu$  и  $a$  для каждого момента времени  $t$  уравнение (2.55) решается подбором.

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи.

1. При отсутствии дополнительных сопротивлений  $\gamma \rightarrow \infty$  и  $\tau \rightarrow \infty$  после предельного перехода в (2.53) имеем

$$\lambda = \frac{\mu s_0}{n_0 m} \left( i \operatorname{erfc} \lambda - \frac{lat}{2s_0} \right). \quad (2.56)$$

Вводя характерную длину  $l_i = s_0/I$  и соответствующий безразмерный параметр  $\lambda_i = l_i/2\sqrt{at}$  приведем (2.56) к окончательному виду, удобному для вычислений:

$$\beta = \frac{\lambda}{i \operatorname{erfc} \lambda - 1/4\lambda_i} \quad \left( \beta = \frac{\mu s_0}{m n_0} \right). \quad (2.57)$$

По этой зависимости построены расчетные графики  $\lambda(\beta, \lambda_i)$ , приведенные на рис. 9.

Из (2.57) следует, что  $l(t) = 0$  при двух значениях времени  $t = 0$  и  $t = t_0$ , причем

$$t_0 = \frac{4s_0^2}{\pi a I^2}. \quad (2.58)$$



Граница раздела жидкостей при некотором  $I \neq 0$  сначала движется вглубь берега, достигает максимального удаления от уреза воды  $l_m$  и возвращается затем в исходное положение  $l=0$ . При  $t > t_0$  вода из хранилища в пласте отсутствует.

Интересно сопоставить кинематику границы раздела и образующейся фильтрационной ложбины. Координата последней  $l_0(t)$  может быть найдена из уравнений

$$\frac{\partial H(x, t)}{\partial x} = 0, \quad H = H_1 + Ix + s_0 \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}}. \quad (2.59)$$

Тогда

$$e^{-\lambda_0^2} = \frac{I\sqrt{\pi at}}{s_0}, \quad \lambda_0 = \frac{l_0}{2\sqrt{at}}. \quad (2.60)$$

Время возврата ложбины в исходное положение  $x=0$

$$t_0' = \frac{s_0^2}{\pi a I^2}, \quad (2.61)$$

что в 4 раза меньше времени возврата границы раздела.

Записав уравнение движения границы раздела в виде

$$F(t) = \lambda - \beta(\operatorname{ierfc} \lambda - I\sqrt{at}/2s_0) = 0, \quad (2.62)$$

найдем соответствующее уравнение максимума

$$F(t) + F'(t) = 0$$

или

$$e^{-\lambda_m^2} = \frac{I\sqrt{\pi at_m}}{s_0}, \quad \lambda_m = \frac{l_m}{2\sqrt{at_m}}. \quad (2.63)$$

Это выражение совпадает с уравнением движения фильтрационной ложбины, т. е. координаты ложбины и границы раздела жидкостей совпадают, когда последняя достигает своего максимума.

Максимальное удаление границы раздела от уреза воды в хранилище (канале)  $l_m$  связано с временем этого процесса  $t_m$  соотношением

$$l_m = \left( -4at_m \ln \frac{I\sqrt{\pi at_m}}{s_0} \right)^{1/2}. \quad (2.64)$$

Для одновременного определения  $l_m$  и  $t_m$  необходимо решить систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} e^{-\lambda_m^2} &= \sqrt{\pi} / 2\lambda_{im} \\ \beta &= \frac{\lambda_m}{\operatorname{ierfc} \lambda_m - 1/4\lambda_{im}} \end{aligned} \right\}. \quad (2.65)$$

Здесь  $\lambda_{im} = l_i / 2\sqrt{at_m}$ .

Результат совместного решения уравнений (2.64) представлен на рис. 11 в виде графика  $\lambda_{im}(\beta)$ . По этому графику при

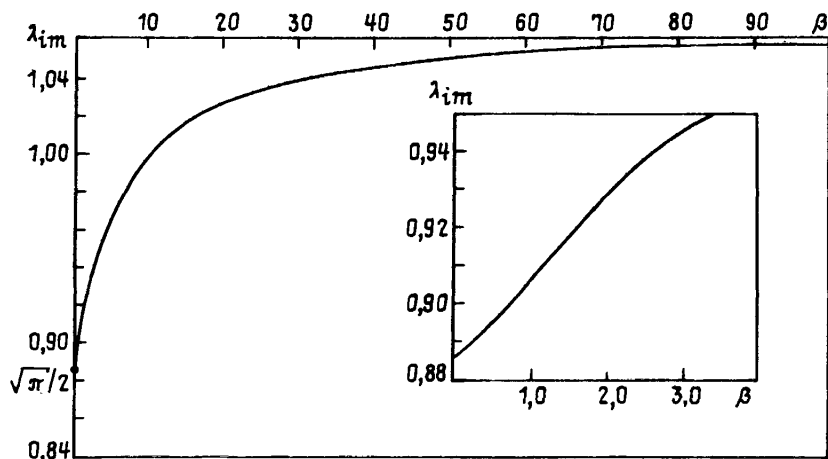


Рис. 11. Графики зависимости  $\lambda_{im}(\beta)$

известном значении параметра  $\beta = \mu s_0 / n_0 t_m$  находится  $\lambda_{im}$  и затем  $t_m$

$$t_m = \frac{l_i^2}{4a\lambda_{im}} = \frac{s_0^2}{4aI^2\lambda_{im}}. \quad (2.66)$$

Координата  $l_m$  определяется по формуле (2.64) или по графику  $\bar{l}_m(\beta)$ , причем  $\bar{l}_m = l_m / l_i$  (рис. 12).

2. Уклон естественного потока грунтовых вод  $I=0$ .

В этом случае в общем решении (2.55) опускается последний член в квадратных скобках. Вводя обозначения  $\tau = 1/2\lambda_c$ ,  $\lambda_c = = l_c/2 \sqrt{at}$ , представим (2.55) для этого случая в виде

$$\beta = \frac{\lambda}{\lambda_{ce}^{(1+4\lambda\lambda_c)/4\lambda^2} \operatorname{erfc}(1+1/2\lambda_c) - (\lambda + \lambda_c) \operatorname{erfc}\lambda + e^{-\lambda^2} \sqrt{\pi}}. \quad (2.67)$$

График функции  $\lambda(\beta, \lambda_c)$ , построенный по этой зависимости, представлен на рис. 13.

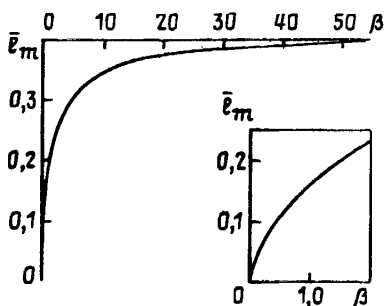


Рис. 12. Графики зависимости  $l_m(\beta)$

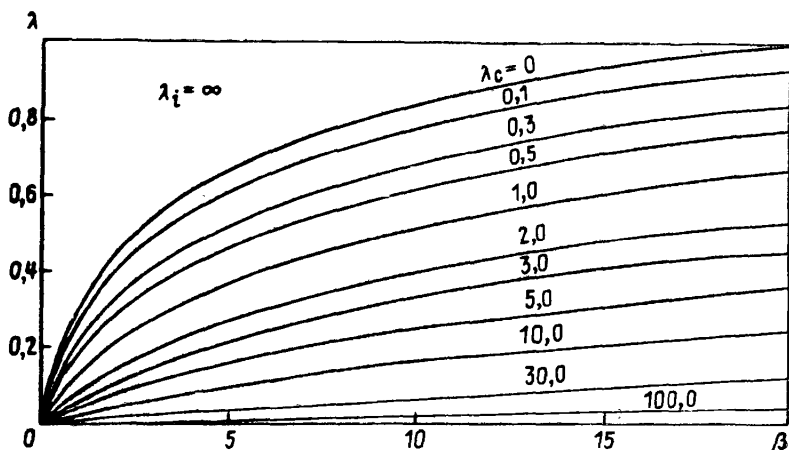


Рис. 13. Графики зависимости  $\lambda(\beta, \lambda_c)$  при  $\lambda_i = \infty$

Движение в пласте со свободной поверхностью с учетом потока подземных вод и дополнительных сопротивлений.

Расчетная схема для этого случая представлена на рис. 8в. Интегральное соотношение для определения  $l(t)$  имеет вид

$$\int_0^t q(0, t) dt = n_0 \int_0^l H_e(x) dx + \mu \int_0^l s(x, t) dx, \\ H_e(x) = H_1 + Ix. \quad (2.68)$$

Для безнапорных потоков при определении фильтрационного расхода  $q(0, t)$  существует неопределенность в назначении мощности потока в сечении  $x=0$ . Для исключения этой неопределенности из интегрального соотношения (2.68) рассмотрим частный случай  $I=0$ , для которого определим величину  $q(0, t)$  из условия баланса количеств жидкости, прошедшей за время  $t$  через сечение  $x=0$  и накопленной в пласте за это же время. Тогда очевидно

$$\int_0^t q(0, t) dt = \mu \int_0^\infty s(x, t) dx. \quad (2.69)$$

Используя для  $s(x, t)$  решение (2.52), вычислим:

$$q(0, t) = -km \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad (2.70)$$

где  $m$  — пока неизвестная глубина потока, подлежащая определению из равенства (2.69).

Известно, что (2.70) после дифференцирования по  $t$  принимает вид

$$q(0, t) = \gamma k m s_0 e^{\gamma^2 t} \operatorname{erfc} \gamma \sqrt{at}, \quad \tau = \gamma \sqrt{at}. \quad (2.71)$$

Подставляя (2.71) и (2.52) в (2.69) и интегрируя, найдем  $m = \mu a/k$ . Если  $a = kh_s/\mu$ , то  $m = h_s$ . С учетом этого результата при  $J \neq 0$

$$q(0, t) = \mu \gamma a e^{\tau} \operatorname{erfc} \tau - k H_1 I. \quad (2.72)$$

Подставляя это в (2.68) и интегрируя, найдем характеристическое уравнение для определения  $l(t)$

$$\frac{a I t}{s_0} + \frac{n_0 H_1 I}{\mu s_0} + n_0 \frac{l^2 I}{2 \mu s_0} + (l + 1/\gamma) \operatorname{erfc} \lambda - \\ - \frac{l e^{-\lambda^2}}{\sqrt{\pi} \lambda} - \frac{1}{\gamma} e^{\tau + 2\lambda \tau} \operatorname{erfc} (\lambda + \tau) - \frac{1}{\gamma} \operatorname{erfc} \lambda = 0. \quad (2.73)$$

В частном случае  $I_c = 0$ ,  $\gamma, \tau \rightarrow \infty$  при  $a_l = a$

$$\beta = \frac{\lambda + s_0 \lambda^2 / 2 H_1 \lambda_i}{i \operatorname{erfc} \lambda - 1/4 \lambda_i}. \quad (2.74)$$

При медленных процессах подпора  $\mu \approx n_0$  и  $\beta = s_0/H_1$ . Тогда (2.74) принимает вид

$$\beta = \frac{\lambda}{i \operatorname{erfc} \lambda - 1/4 \lambda_i - \lambda^2 / 2 \lambda_i}. \quad (2.75)$$

Это соотношение отличается от (2.57) наличием дополнительного члена, отражающего вклад в решение треугольника, образованного плоскостями  $H = H_1$  и  $H = H_e(x)$ .

В заключение следует отметить, что для задач с осложненными начальными и граничными условиями, как показано в рассмотренных выше случаях, более удобной формой уравнения движения границы раздела является интегральная. Ее использование возможно для пластов ограниченной длины, а также при переменном во времени уровне в хранилище [40].

## 2.2. Неравновесный массообмен при фильтрации подземных вод в однородных пластах

В условиях жесткого режима фильтрации ( $\operatorname{div}(v) = 0$ ) уравнение движения и сохранение массы вещества (1.18) — (1.20) при пренебрежении эффектами грануляции среды ( $D = 0$ ) записываются в виде

$$n_0 \frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\partial N}{\partial t} = 0, \quad (2.76)$$

где  $z = (r^{j+1} - r_c^{j+1})/(j+1)$  и принято, что:

— в линейном потоке

$$j = 0, r_c = 0, z = x, v = \text{const}, \quad (2.77)$$

— в радиальном (осесимметричном) потоке

$$j = 1, z = (r^2 - r_c^2)/2, q = Q/2\pi m, \quad (2.78)$$

— в потоке с центральной симметрией

$$j=2, \quad z=(r^3-r_c^3)/3, \quad q=Q/4\pi, \quad (2.79)$$

где  $Q$  — расход источника и  $r_c$  — его радиус.

Ниже будут рассмотрены решения уравнения (2.76) при различных функциональных зависимостях  $\partial N/\partial t$ .

### 2.2.1. Массообмен в кинетической области

Начнем с анализа общего случая, когда скорость реакции  $\partial N/\partial t$  задается уравнением кинетики (1.32), а затем, совершая предельные переходы, выпишем решения для массообменных процессов, интенсивность которых описывается уравнениями (1.28) и (1.30).

Принимая в качестве новых переменных:

$$\tau = t - \frac{n_0 z}{v}, \quad z = z', \quad (2.80)$$

вместо (2.76), (1.32) будем иметь:

$$\frac{\partial N}{\partial \eta} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial \tau} = A_0 c - B_0 N c - E_0 N, \quad (2.81)$$

где

$$\eta = v\tau, \quad A_0 = \frac{\gamma_0 N_0}{v}, \quad B_0 = \frac{k^* \gamma}{v}, \quad E_0 = \frac{\beta}{v}. \quad (2.82)$$

Строгое решение нелинейной системы уравнений (2.81) при краевых условиях

$$c(z, 0) = 0, \quad N(z, 0) = 0, \quad (2.83)$$

$$c(0, \eta) = c_0 \quad (2.84)$$

было впервые получено в работе Г. Томаса [85].

Введением функции  $d\Phi = (cd\eta - Ndz)$  и соотношений

$$N = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad c = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \quad (2.85)$$

система (2.81) приводится к виду:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial \eta} + A_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + B_0 \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + E_0 \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0. \quad (2.86)$$

Далее, в работе [22] показано, что при замене  $\Phi(z, \eta)$  на  $\Phi(z, \eta)$

$$B_0 \Phi(z, \eta) = \ln[\Phi(z, \eta) \exp(-A_0 z - E_0 \eta)] \quad (2.87)$$

уравнение (2.86) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial \eta} = A_0 D_0 \Phi. \quad (2.88)$$

При этом подстановка (2.87) в (2.85) дает

$$\frac{\partial \ln \Phi}{\partial z} = A_0 - B_0 b, \quad (2.89)$$

$$\frac{\partial \ln \Phi}{\partial \eta} = B_0 c + E_0, \quad (2.90)$$

а решая уравнения (2.89), (2.90) при условиях (2.83), (2.84), получаем

$$\Phi(z, 0) = \exp(A_0 z), \quad (2.91)$$

$$\Phi(0, \eta) = \exp[(B_0 c_0 + D_0) \eta]. \quad (2.92)$$

Таким образом, требуется найти решение уравнения (2.88) при условиях (2.91) и (2.92). Применяя к (2.88) преобразование Лапласа по переменной  $\eta$  с учетом условий (2.91) и (2.92), получаем:

$$\begin{aligned} \Phi(z, p) = & \int_0^z A_0 \exp(A_0 y) \frac{1}{p} \exp\left[\frac{A_0 D_0}{p}(z-y)\right] dy + \\ & + \frac{1}{p} \exp\left(\frac{A_0 D_0}{p} z\right) + \frac{1}{p - (B_0 c_0 + D_0)} \exp\left(\frac{A_0 D_0}{p} z\right), \end{aligned} \quad (2.93)$$

где  $p$  — параметр преобразования Лапласа.

Переход от изображения  $\Phi(z, p)$  к оригиналу осуществляется с помощью таблиц [43]. Поэтому для  $\Phi(z, \eta)$  можно записать

$$\begin{aligned} \Phi(z, \eta) = & \int_0^z A_0 \exp(A_0 y) I_0[2\sqrt{A_0(z-y)E_0\eta}] dy + \\ & + I_0[2\sqrt{A_0 z E_0 \eta}] + \int_0^\eta (B_0 c_0 + E_0) \exp[(B_0 c_0 + \\ & + E_0)\xi] I_0[2\sqrt{A_0 z E_0(\eta - \xi)}] d\xi. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Для дальнейших преобразований целесообразно ввести еще две константы

$$\alpha_1 = \frac{k^* \gamma c_0 + \beta}{v}, \quad \alpha_2 = \frac{\gamma N_0 \beta}{(k^* \gamma c_0 + \beta) v} \quad (2.95)$$

такие, что  $\alpha_1 \alpha_2 = A_0 E_0$ . Тогда, обозначая,

$$F(u, \xi) = \int_0^u \exp(u-y) I_0(2\sqrt{\xi y}) dy, \quad (2.96)$$

можно (2.94) представить в виде

$$\Phi(z, \eta) = F(\alpha_1 z, \alpha_2 \eta) + F(E_0 \eta, A_0 z) + I_0(2\sqrt{A_0 z \cdot E_0 \eta}). \quad (2.97)$$

Тогда, учитывая, что

$$\frac{\partial F(u, \xi)}{\partial u} = F(u, \xi) + I_0(2\sqrt{u\xi}), \quad (2.98)$$

$$\frac{\partial F(u, \xi)}{\partial \xi} = F(u, \xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} I_0(2\sqrt{u\xi}), \quad (2.99)$$

подставляя (2.97) в (2.89) и (2.90), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{c(x, \eta)}{c_0} &= \frac{I_0(2\sqrt{A_0 z \cdot E_0 \eta}) + F(\alpha_1 \eta, \alpha_2 z)}{\Phi(z, \eta)} \\ \frac{N(x, \eta)}{N_0} &= \frac{F(\alpha_1 \eta, \alpha_2 z)}{\Phi(z, \eta)} \end{aligned} \right\}. \quad (2.100)$$

Предельные переходы от (2.100) к решениям при более простых кинетических уравнениях выполнены в [22]. Так, например, при  $k^* = 0$  (см. раздел 1.2) уравнение кинетики (1.32) становится линейным и принимает вид

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \gamma N_0 c - \beta N.$$

При  $k^* = 0$  имеем:  $B_0 = 0$ ,  $\alpha_1 = E_0$ ,  $\alpha_2 = A_0$ . Тогда, учитывая, что

$$F(u, \xi) + F(\xi, u) = \exp(u + \xi) - I_0(2\sqrt{u\xi}), \quad (2.101)$$

получаем

$$\Phi(z, \eta) = \exp(A_0 z + E_0 \eta). \quad (2.102)$$

а подстановка (2.102) в (2.100) даст:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{c(z, \eta)}{c_0} &= \exp(-A_0 z - E_0 \eta) [I_0(2\sqrt{A_0 z E_0 \eta}) + F(E_0 \eta, A_0 z)] \\ \frac{N(z, \eta)}{N_0} &= \exp(-A_0 z - E_0 \eta) F(E_0 \eta, A_0 z). \end{aligned} \right. \quad (2.103)$$

Если же принять  $k^* = 1$ , но положить  $\beta = 0$ , то (см. раздел 1.2) уравнение кинетики (1.32) примет вид

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \gamma(N_0 - N)c.$$

Здесь имеем:  $E_0 = 0$ ,  $I_0(0) = 1$  и

$$\begin{cases} F(0, \xi) = 0 \\ F(u, 0) = \exp(u) - 1. \end{cases} \quad (2.104)$$

При этом решение (2.94) трансформируется к виду [104]

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{c(z, \eta)}{c_0} &= \frac{\exp(c_0 B_0 \eta)}{\exp(c_0 B_0 \eta) + \exp(A_0 z) - 1} \\ \frac{b(z, \eta)}{b_0} &= \frac{\exp(c_0 B_0 \eta) - 1}{\exp(c_0 B_0 \eta) + \exp(A_0 z) - 1}. \end{aligned} \right. \quad (2.105)$$

Рассмотрим решение задачи для случая, когда скорость массообмена определяется по (1.33) при  $\Phi(N) = (P_4 - P_5 N^2)$ .

Здесь в переменных (2.80) имеем следующую нелинейную систему уравнений

$$\frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\partial N}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial N}{\partial \eta} = A_0 N_0 c - B_0 N^2 c. \quad (2.106)$$

Интегрирование (2.106) при условиях (2.83), (2.84) даст [103]:

$$\frac{c(x, \eta)}{c_0} = \frac{1}{\sqrt{th^2(c_0 B_0 \eta) + [1 - th^2(c_0 B_0 \eta)] \exp(2A_0 x)}} \quad (2.107)$$

$$\frac{b(x, \eta)}{b_0} = \frac{th(c_0 B_0 \eta)}{\sqrt{th^2(c_0 B_0 \eta) + [1 - th^2(c_0 B_0 \eta)] \exp(2A_0 x)}}.$$

### 2.2.2. Массообмен в области диффузионной кинетики

При двухстадийном диффузионном массообмене, когда в расчет принимается как подвод вещества к поверхности горных пород, так и постепенное заполнение им микропористой структуры отложений (см. раздел 1.2), процесс описывается следующей системой уравнений

$$v \frac{\partial c}{\partial z} + \omega D_a \frac{\partial b(r, z, \tau)}{\partial r} \Big|_{r=r_d} = 0, \quad (2.108)$$

$$D_a \left( \frac{\partial^2 b}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial b}{\partial r} \right) = \frac{\partial b}{\partial \tau}, \quad (2.109)$$

а условия для решения (2.108), (2.109) задаются в виде

$$c(z, 0) = 0, \quad b(r, z, 0) = 0, \quad (2.110)$$

$$c(0, \tau) = c_0, \quad (2.111)$$

$$\frac{\partial b(0, z, \tau)}{\partial r} = 0, \quad (2.112)$$

$$D_a \frac{\partial b(r_c, z, \tau)}{\partial r} = \gamma^* \left[ c - \frac{(1-n_0)}{\Gamma} b(r_d, z, \tau) \right]. \quad (2.113)$$

В такой постановке задача о массообмене (или аналогичная задача о теплообмене) при движении потока жидкости (или газа) через идеализированные слои исследовалась многими авторами [63, 173, 198]. Строгое ее решение было получено Д. Розеном [198].

Система уравнений (2.108)–(2.109) и все условия являются линейными. При преобразовании Лапласа по  $\tau = (t - n_0 z / v)$  в области изображений для

$$u(z, p) = \int_0^\infty c(z, \tau) \exp(-p\tau) d\tau$$

решение записывается в виде

$$u(z, p) = \frac{c_0}{p} \exp \left[ -\frac{z}{v} Y_1(p) \right], \quad (2.114)$$



где

$$Y_1(p) = \frac{(\omega D_a \Gamma / r_d) [\omega \operatorname{ctg} \omega - 1]}{(\Gamma D_a / \gamma^* r_d) [\omega \operatorname{ctg} \omega - 1] + (1 - n_0)}; \quad \omega = i r_d \left( \frac{p}{D_a} \right)^{1/2}. \quad (2.115)$$

Практический интерес, как уже отмечалось ранее (см. раздел 1.2.) могут представлять две предельные ситуации, когда массообмен лимитируется либо внутренней, либо внешней диффузией.

Для анализа динамики массообмена при внутридиффузионной кинетике в (2.115) следует положить  $\gamma^* \rightarrow \infty$ ; в этом случае

$$Y_1(p) = \left( \frac{3 D_a \Gamma}{r_d^2} \right) \times [\omega \operatorname{ctg} \omega - 1]. \quad (2.116)$$

При переходе от (2.114), (2.116) к оригиналу решение записывается в виде

$$\frac{c}{c_0} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp[-X H_1(z)] \sin\{T z^2 - X H_2(z)\} \frac{dz}{z}, \quad (2.117)$$

где

$$H_1(z) = \frac{z (\operatorname{sh} 2z + \sin 2z)}{\operatorname{ch} 2z - \cos 2z} - 1, \quad (2.118)$$

$$H_2(z) = \frac{z (\operatorname{ch} 2z - \sin 2z)}{\operatorname{ch} 2z - \cos 2z}, \quad (2.119)$$

а при  $X \gg 1$  (2.117) имеет следующее асимптотическое представление

$$\frac{c}{c_0} \approx 0,5 \operatorname{erfc} \left[ \frac{3T - x}{\sqrt{4x/5}} \right], \quad (2.120)$$

где

$$X = \frac{3 D_a \Gamma}{r_d^2} \cdot \frac{z}{v}, \quad T = \frac{D_a}{r_d^2} \left( t - \frac{n_0 z}{v} \right). \quad (2.121)$$

При длительном контакте растворов с горными породами, т. е. при больших  $t$  и  $p \rightarrow 0$  (или, что то же самое, при  $D_a \rightarrow \infty$ ) из (2.115) следует

$$Y_1(p) = \omega \gamma^* \frac{p}{p + \omega \gamma^* / \Gamma}. \quad (2.122)$$

Переходя в (2.114), (2.122) от изображения к оригиналу, получаем выражение для  $c/c_0$  в форме (2.103), где  $A_0 = \omega \gamma^* / v$  и  $E_0 = \omega \gamma^* / \Gamma v$ . Это хорошо известное решение задачи внешнедиффузионной кинетики массообмена (или теплообмена), для которого допустимо следующее асимптотическое представление

$$\frac{c}{c_0} = 0,5 \operatorname{erfc} (\sqrt{A_0 z} - \sqrt{E_0 t}). \quad (2.123)$$

Для случая внешнедиффузионного массообмена можно написать приближенное решение задачи и в несколько ином виде. Применяя к (1.39) преобразование Лапласа по  $t$ , в области

изображений для  $\bar{N}(z, p)$  имеем

$$\bar{N}(z, p) = \omega \gamma^* \times \frac{u(z, p)}{p + \omega \gamma / \Gamma},$$

или при  $p \ll \omega \gamma^* / \Gamma$

$$\bar{N}(z, p) \approx \Gamma u(z, p) \left[ 1 - \frac{\Gamma}{\omega \gamma^*} p \right]. \quad (2.124)$$

Следовательно при больших  $t$

$$N(z, t) \approx \Gamma c(z, t) - \frac{\Gamma^2}{\omega \gamma^*} \frac{\partial c(z, t)}{\partial t}. \quad (2.125)$$

Подстановка (2.125) в уравнение (2.76) даст

$$(n_0 + \Gamma) \frac{\partial c}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\Gamma^2}{\omega \gamma^*} \frac{\partial^2 c}{\partial t^2}, \quad (2.126)$$

а производя с помощью соотношений

$$\frac{\partial c}{\partial t} \approx -\frac{v}{(n_0 + \Gamma)} \frac{\partial c}{\partial z}; \quad \frac{\partial^2 c}{\partial t^2} = \frac{v^2}{(n_0 + \Gamma)^2} \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}$$

регуляризацию уравнения (2.126) будем иметь

$$(n_0 + \Gamma) \frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\Gamma^2 v^2}{\omega \gamma^* (n_0 + \Gamma)^2} \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}. \quad (2.127)$$

Решение последнего, как известно, записывается в виде [60]

$$\frac{c}{c_0} = 0,5 \operatorname{erfc} \left[ \frac{z - vt/n_0}{\sqrt{D_0 t/n_0}} \right], \quad (2.128)$$

где

$$n_0 = (n_0 + \Gamma), \quad D_0 = \frac{\Gamma^2 v^2}{\omega \gamma^* (n_0 + \Gamma)^2}. \quad (2.129)$$

При достаточно больших  $\omega \gamma^*$  коэффициент  $D_0 \rightarrow 0$  и из (2.128) следует, что

$$\frac{c}{c_0} = \begin{cases} 1 & \text{при } z < vt/n_0 \\ 0 & \text{при } z > vt/n_0 \end{cases} \quad (2.130)$$

Внешнедиффузионный механизм растворения и вымыва солей из грунтов исследовался в работах [16]. При этом уравнение кинетики принималось в форме (1.40) при  $\alpha = 0,5$  и задача формулировалась следующим образом

$$\frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\partial N}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial \eta} = -B_0 \sqrt{N} (c_m - c), \quad (2.131)$$

$$c(0, \eta) = 0, \quad c(z, 0) = c, \quad N(z, 0) = N_0, \quad (2.132)$$

где  $N_0$  — начальное содержание солей в грунте.

В сечении  $z=0$ , куда поступает чистая вода, изменение  $N(0, \eta)$  определяется выражением

$$N(0, \eta) = \sqrt{N_0} - \frac{B_0}{2} c_m \eta \quad (2.133)$$

и, следовательно, за конечное время  $t=t^*$  здесь достигается полное растворение всех солей. Это время равно

$$t^* = \frac{2\sqrt{N_0}}{\gamma c_m}. \quad (2.134)$$

Таким образом, процесс протекает в две стадии. В первой стадии при  $t < t^*$  распределение концентраций определяется из решения (2.131), (2.132) и составляет

$$\frac{N}{N_0} = th^2 \left[ B_0 \sqrt{N_0} \frac{z}{2} + \operatorname{arth} \left( 1 - \frac{t}{t^*} \right) \right] \quad (2.135)$$

$$\frac{c_m - c}{c_m} = \frac{1}{\frac{t}{t^*} \left( 2 - \frac{t}{t^*} \right) ch^2 \left[ B_0 \sqrt{N_0} \frac{z}{2} + \operatorname{arth} \left( 1 - \frac{t}{t^*} \right) \right]}.$$

Во второй стадии при  $t > t^*$  для решения уравнений (2.131) ставятся условия

$$c(z_t, \eta) = 0, \quad N(z_t, \eta) = N_0, \quad (2.136)$$

где  $z_t$  — перемещающаяся во времени граница зоны полного растворения солей.

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{N}{N_0} &= th^2 \left[ B_0 \sqrt{N} \frac{(z - z_t)}{2} \right], \\ \frac{c_m - c}{c_m} &= \frac{1}{ch^2 \left[ B_0 \sqrt{N_0} \frac{(z - z_t)}{2} \right]}, \end{aligned} \quad (2.137)$$

где

$$z_t = \frac{c_m v (t - t^*)}{N_0}. \quad (2.138)$$

### 2.3. Равновесный массообмен при фильтрации подземных вод в неоднородных пластах\*

Для водоносных комплексов, имеющих слоистое строение, характерна профильная изменчивость не только фильтрационных, но и физико-химических (сорбционных, ионообменных) параметров среды. Поэтому, когда в таких пластах осуществляется перенос примесей активно взаимодействующих с горными породами, то при прогнозах их распространения следует учитывать возмущающее воздействие двух факторов: гидродинамического, обуславливающего формирование неоднородного по мощности пласта поля скоростей и, соответственно, концентраций (см. раздел 1.4) и кинетического, вызывающего дополнительное перераспределение концентрационного профиля за счет массообмена.

\* Раздел написан совместно с Е. В. Середкиной.

Пусть имеется стратифицированная толща пород, каждый из слоев которой характеризуется собственным значением коэффициента фильтрации и емкости поглощения вещества (на распределение этих параметров по разрезу пока никаких ограничений накладывать не будем). Для упрощения же математической модели примем, что массообмен в системе «вода — горные породы» является равновесным. Тогда процесс конвективного переноса вещества опишется следующей системой уравнений

$$n_0 \frac{\partial c^*}{\partial t} + v^* \frac{\partial c^*}{\partial x} + \frac{\partial b^*}{\partial t} = 0, \quad b = \Gamma^* \cdot c^*, \quad (2.139)$$

где  $c^*(x, z, t)$  — локальная концентрация вещества в водной и  $b^*(x, z, t)$  в твердой фазах в точке  $(x, z)$  в момент времени  $t$ ;  $v^*(z)$  — локальная скорость фильтрации ( $v^* = k^* J$ ,  $J$  — градиент напора и  $k^*(z)$  — коэффициент фильтрации элементарного слоя пород в произвольном сечении  $0 \leq z \leq m$  по мощности пласта;  $\Gamma^*(z)$  — значение константы Генри в сечении  $z$ .

Условия для решения уравнений (2.139) зададим в виде

$$c^*(x, z, t) = b^*(x, z, t) = 0, \quad c^*(0, z, t) = c_0. \quad (2.140)$$

В данном случае практический интерес представляет установление зависимостей между интегральными характеристиками процесса и полем средней концентрации переносимого потоком вещества. Поэтому, записав уравнение (2.139) в виде

$$n^* \frac{\partial c^*}{\partial t} + v^* \frac{\partial c^*}{\partial x} = 0, \quad n^* = (\Gamma^* + n_0) \quad (2.141)$$

проведем усреднение в (2.141) всех случайных величин.

Обозначим процедуру усреднения символом

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{m} \int_0^m (\cdot) \alpha z$$

и следуя [41] положим, что  $c^*(x, z, t)$  допускает разложение в ряд Тейлора по  $c(x, t) = \langle c^* \rangle$ ,

$$\begin{aligned} c^*(x, z, t) \approx c(x, t) - f_1^*(z, t) \frac{\partial c(x, t)}{\partial x} - \\ - f_2^*(z, t) \frac{\partial^2 c(x, t)}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (2.142)$$

где  $f_{1,2}^*(z, t)$  — подлежащие определению дисперсные функции.

При этом уравнение для средней концентрации примем в виде

$$\frac{\partial c}{\partial t} = A_1 \frac{\partial c}{\partial x} - A_2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad (2.143)$$

где  $A_{1,2}$  — коэффициенты, которые также подлежат определению.

Тогда несложно показать, что подстановка (2.142) в (2.141) и последующая замена в (2.141) производных  $\partial c/\partial t$  и  $\partial^2 c/\partial x \partial t$  с помощью (2.143) дает

$$\left[ \frac{\partial f_1^*}{\partial t} - u^* - A_1 \right] \frac{\partial c}{\partial x} + \left[ \frac{\partial f_2^*}{\partial t} + (u^* - A_1) f_1^* - A_2 \right] \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0, \quad (2.144)$$

где

$$u^* = v/n^*. \quad (2.145)$$

Приравнивая нулю выражения, выступающие в уравнении (2.144) в роли коэффициентов при  $\partial c/\partial x$  и  $\partial^2 c/\partial x^2$ , имеем

$$\frac{\partial f_1^*}{\partial t} - u^* = A_1, \quad (2.146)$$

$$\frac{\partial f_2^*}{\partial t} + (u^* - A_1) f_1^* = A_2. \quad (2.147)$$

При этом функции  $f_{1,2}^*(z, t)$  удовлетворяют условиям:  $\langle f_{1,2}^* \rangle = 0$  и  $f_{1,2}^*(z, 0) = 0$ . Тогда, усредняя (2.146) и (2.147), получим

$$A_1 = - \langle u^* \rangle, \quad (2.148)$$

$$A_2 = \langle (u^* - \langle u^* \rangle) f_1^* \rangle, \quad (2.149)$$

а поскольку согласно (2.146) выражение для  $f_1^*(z, t)$  может быть представлено в виде

$$f_1^*(z, t) = (u^* - \langle u^* \rangle) t, \quad (2.150)$$

то вместо (2.149) будем иметь

$$A_2 = \langle (u^* - \langle u^* \rangle)^2 \rangle t. \quad (2.151)$$

Для дальнейшего анализа положим, что величины  $v^*$  и  $\Gamma^*$  представимы в виде

$$v^*(z) = v + \Delta_v^*(z), \quad v = \langle v^* \rangle \quad \langle \Delta_v^* \rangle = 0,$$

$$\Gamma^*(z) = \Gamma + \Delta_\Gamma^*(z), \quad \Gamma = \langle \Gamma^* \rangle \quad \langle \Delta_\Gamma^* \rangle = 0,$$

где  $\Delta_v^*$  и  $\Delta_\Gamma^*$  — вариации, соответственно, скорости фильтрации и константы Генри. Следовательно

$$u^*(z) = \frac{v + \Delta_v^*(z)}{(n_0 + \Gamma) + \Delta_\Gamma^*(z)}. \quad (2.152)$$

Подставляя (2.152) в (2.148) и (2.149) и ограничиваясь при усреднении сохранением лишь квадратичных по флуктуациям

членов, получим

$$A_1 = -\frac{v}{n_s}, \quad n_s^* = \frac{n_0 + \Gamma}{\alpha}, \quad \alpha = \left[ 1 + \bar{\psi}_\Gamma^2 - \frac{\rho_{v,\Gamma}}{v(n_0 + \Gamma)} \right], \quad (2.153)$$

$$A_2 = \frac{v^2 t}{n_s^2} \Phi_{v,\Gamma}^2, \quad \Phi_{v,\Gamma}^2 = \left( \frac{\beta_{v,\Gamma}^2}{\alpha^2} - 1 \right),$$

$$\beta_{v,\Gamma}^2 = \left[ 1 + \psi_v^2 + 3\bar{\psi}_\Gamma^2 - \frac{4\rho_{v,\Gamma}}{v(n_0 + \Gamma)} \right], \quad (2.154)$$

где  $n_s$  — эффективная пористость;  $\bar{\psi}_\Gamma$  — обобщенный коэффициент вариации емкостных свойств среды ( $\bar{\psi}_\Gamma = \Gamma \psi_\Gamma / (n_0 + \Gamma)$ ,  $\psi_\Gamma$  — коэффициент вариации константы Генри равный  $\psi_\Gamma = \sigma_\Gamma / \Gamma$  и  $\sigma_\Gamma^2 = \langle \Delta \Gamma^2 \rangle$  — дисперсия распределения  $\Gamma^*$ );  $\psi_v$  — коэффициент вариации скорости фильтрации ( $\psi_v = \sigma_v / v$ ,  $\sigma_v^2 = \langle \Delta v^2 \rangle$  — дисперсия распределения  $v^*$ );  $\rho_{v,\Gamma}$  — коэффициент корреляции  $v^*$  и  $\Gamma^*$  ( $\rho_{v,\Gamma} = \langle \Delta v^* \cdot \Delta \Gamma^* \rangle$ ).

С учетом выражений (2.153) и (2.154) для  $A_{1,2}$  уравнение (2.143) принимает вид

$$n_s^* \frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} = D_s^* \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad (2.155)$$

где  $D_s^*$  — эффективный коэффициент дисперсии, определяемый выражением

$$D_s^* = \frac{v^2 t}{n_s} \Phi_{v,\Gamma}^2. \quad (2.156)$$

Имеет смысл несколько подробнее остановиться на параметрах уравнения (2.155) и их изменчивости в зависимости от распределений  $v^*$  и  $\Gamma^*$ .

Допустим, что имеется горизонтально-слоистый пласт, породы которого характеризуются постоянной в пределах разреза емкостью поглощения вещества. В этом случае  $\Gamma^* = \Gamma$ ,  $\Delta \Gamma^* = 0$  и поэтому в (2.153) и (2.154) следует принять  $\bar{\psi}_\Gamma = 0$  и  $\rho_{v,\Gamma} = 0$ . С другой стороны, если в фильтрационном отношении пласт может рассматриваться как однородный, но при этом отмечается флуктуация емкостных свойств пород, то при  $v^* = v$ ,  $\Delta v^* = 0$ , соответственно,  $\psi_v = 0$  и  $\rho_{v,\Gamma} = 0$ . Расчетные значения  $n_s$  и  $\Phi_{v,\Gamma}^2$  для этих ситуаций приведены в табл. 13.

Из табл. 13 видно, что в случае, отражаемом зависимостями (2.157), дисперсия концентрационного профиля всецело определяется флуктуацией поля горизонтальных скоростей, но при этом формируется зона смеси в окрестности фронта адсорбции  $x^* = vt / (n_0 + \Gamma)$  и лишь при  $\Gamma = 0$ , когда переносимая потоком примесь является динамически нейтральной, дисперсия перемещается на фронт поршневого вытеснения  $x = vt / n_0$  [41, 79, 144].

Выражения для  $n^*$  и  $\Phi_{v,r}^2$ 

Характер неоднородности пород	$n^*$	$\Phi_{v,r}^2$	Формулы
Горизонтально-слоистый пласт ( $\Gamma^*=\Gamma$ , $\Delta_v^*=0$ )	$(n_0 + \Gamma)$	$\Psi_v^2$	(2.157)
Однородный пласт ( $v^*=v$ , $\Delta_v^*=0$ )	$\frac{(n_0 + \Gamma)}{(1 + \Psi_\Gamma^2)}$	$\frac{\bar{\Psi}_\Gamma^2(1 - \bar{\Psi}_\Gamma^2)}{(1 + \bar{\Psi}_\Gamma^2)^2}$	(2.158)

Во второй расчетной ситуации речь идет о дисперсии концентрационного профиля, порожденной лишь только флуктуацией емкостных свойств пород. Зона смеси здесь также формируется в окрестности фронта адсорбции. Однако обращает на себя внимание тот факт, что флуктуации  $\Gamma^*$  вызывают снижение невозмущенной эффективной пористости  $(n_0 + \Gamma)$  и это, естественно, приводит к еще более заметному отставанию фронта адсорбции от фронта поршневого вытеснения.

С тем, чтобы проанализировать общий случай, когда одновременно прослеживается изменчивость  $v^*$  и  $\Gamma^*$  в пределах разреза, рассмотрим конкретную расчетную ситуацию.

**Пример расчета 2.1.** Примем, что локальная эффективная пористость  $n^*(z)$  и скорость фильтрации  $v^*(z)$  изменяются в пределах разреза по линейному закону:

$$\begin{aligned} h^*(z) &= (n_0 + \Gamma) [1 + \varepsilon_\Gamma (2z/m - 1)], \quad \varepsilon_\Gamma = \Delta_\Gamma^0 / (n_0 + \Gamma), \\ v_\pm^*(z) &= v [1 \pm \varepsilon_v (2z/m - 1)], \quad \varepsilon_v = \Delta_v^0 / v, \end{aligned}$$

где  $\Delta_v^0$ ,  $\Delta_\Gamma^0$  — максимальные отклонения  $v^*$  и  $\Gamma^*$  от их средних значений. Здесь имеем:

$$u^*(z) = \frac{v}{(n_0 + \Gamma)} \cdot \frac{[1 \pm \varepsilon_v (2z/m - 1)]}{[1 \pm \varepsilon_\Gamma (2z/m - 1)]}, \quad (2.159)$$

а подставляя (2.159) в (2.148) и (2.151), получаем следующие выражения для  $\alpha_{v,\Gamma}$  и  $\Phi_{v,\Gamma}^2$ :

$$\alpha_{v,\Gamma} = \frac{1}{2\varepsilon_\Gamma} \left( 1 \mp \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_\Gamma} \right) \ln \left( \frac{1 + \varepsilon_\Gamma}{1 - \varepsilon_\Gamma} \right) \pm \left( \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_\Gamma} \right), \quad (2.160)$$

$$\Phi_{v,\Gamma}^2 = \frac{(\varepsilon_\Gamma \mp \varepsilon_v)^2}{\varepsilon_\Gamma^2} \left[ \frac{1}{(1 - \varepsilon_\Gamma^2)} - \frac{1}{4\varepsilon_\Gamma^2} \ln^2 \left( \frac{1 + \varepsilon_\Gamma}{1 - \varepsilon_\Gamma} \right) \right]. \quad (2.161)$$

В этом примере отражены две модельные ситуации. Первая иллюстрирует случай, когда  $v^* = v_\pm^*$  и, следовательно, имеет место положительная корреляция  $v^*$  и  $\Gamma^*$  (т. е. реализациям с повышенной (или пониженной) водопроницаемостью пород соот-

ветствуют большие (малые) значения константы Генри), а вторая, наоборот, описывает случай, когда  $v^* = v_-^*$  и  $v^*$  и  $\Gamma^*$  коррелированы отрицательно.

Расчёты по формулам (2.160) и (2.161) приведены в табл. 14.

Таблица 14

Значения коэффициентов  $\varphi_{v,\Gamma}^2$ ,  $\Gamma$  и  $\alpha_{v,\Gamma}$

$\rho_v, \Gamma$	$e_{\Gamma} = \frac{\Delta v^0}{v}$	$e_{\Gamma} = \Delta_{\Gamma}^0 / (n_0 + \Gamma)$								
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	
$\rho_v, \Gamma > 0$	1	0,274	0,226	0,187	0,155	0,126	1,101	0,078	0,056	
		0,970	0,945	0,926	0,911	0,901	0,896	0,897	0,907	
	0,8	0,166	0,127	0,096	0,069	0,045	0,025	0,009	0	
		0,976	0,959	0,947	0,941	0,941	0,948	0,966	1	
	0,6	0,085	0,057	0,034	0,017	0,005	0	0,009	0,056	
		0,983	0,973	0,968	0,970	0,980	1	1,034	1,093	
	0,4	0,030	0,014	0,004	0	0,005	0,025	0,078	0,223	
		0,900	0,986	0,889	1	1,020	1,052	1,102	1,187	
	0,2	0,003	0	0,004	0,017	0,045	0,101	0,217	0,502	
		0,997	1	1,010	1,029	1,059	1,103	1,171	1,280	
	$\rho_v, \Gamma < 0$	0,2	0,030	0,057	0,096	0,155	0,248	0,405	0,704	1,394
			1,010	1,027	1,053	1,089	1,138	1,207	1,307	1,966
0,4		0,085	0,127	0,187	0,275	0,409	0,633	1,054	2,007	
		1,014	1,041	1,074	1,118	1,177	1,259	1,375	1,560	
0,6		0,166	0,226	0,310	0,430	0,612	0,912	1,468	2,731	
		1,023	1,056	1,095	1,148	1,217	1,310	1,444	1,653	
0,8		0,274	0,354	0,463	0,619	0,854	1,241	1,954	3,568	
		1,030	1,068	1,116	1,177	1,256	1,362	1,512	1,746	
1,0		0,409	0,509	0,646	0,842	1,137	1,621	2,510	4,515	
		1,037	1,082	1,137	1,207	1,296	1,414	1,580	1,840	

Примечание: числитель —  $\varphi_{v,\Gamma}^2$ ,  $\Gamma$ , знаменатель —  $\alpha_{v,\Gamma}$ .

При положительной корреляции ( $\rho_{v,\Gamma} > 0$ ) прослеживается нивелирующий механизм, уменьшающий дисперсию концентрационного фронта. Здесь при  $\Delta v^0 = \Delta_{\Gamma}^0$  действительная скорость переноса  $u^* = \text{const}$  (см. формулу (2.159) и поэтому  $\alpha_{\Gamma} = 1$  и  $\varphi_{v,\Gamma}^2 = 0$ . Выше и ниже этой границы (см. табл. 14)  $\varphi_{v,\Gamma}^2 > 0$ , но значения их малы.

В случае отрицательной корреляции ( $\rho_{v,\Gamma} < 0$ ) наблюдается рост  $\alpha_{v,\Gamma}$  и, соответственно, уменьшение эффективной порис-



тости  $n^*$ ; при этом  $\varphi_{v,\Gamma}^2$  в области значимых отклонений  $\Delta_v^0$  и  $\Delta_\Gamma^0$  оказываются достаточно большими.

Обычно породы с высокой водопроницаемостью имеют меньшую адсорбционную емкость нежели слабопроницаемые отложения. Поэтому на практике, по-видимому, чаще всего реализуется ситуация, когда  $v^*$  и  $\Gamma^*$  коррелированы отрицательно; в этом случае следует ожидать больших значений  $\varphi_{v,\Gamma}^2$ .

Фундаментальное решение уравнения (2.155) при  $D_a^*$  определяемом по (2.156) для краевых условий  $c(0,t)=c_0$ ,  $c(x,0)=0$  и  $c(\infty,t)=0$  имеет вид

$$\frac{c}{c_0} = \frac{\operatorname{erfc}[(\bar{x}-1)\mu]}{1 + \operatorname{erf}\mu}, \quad (2.162)$$

где

$$\bar{x} = \frac{x}{x^{**}}, \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{2} \varphi_{v,\Gamma}}, \quad x^{**} = \frac{vt}{n^*}. \quad (2.163)$$

Решение (2.162), (2.163) остается в силе и для случая, когда вариации  $\Delta_\Gamma^*$  достаточно малы (при этом величины  $n^*$  и  $\varphi_{v,\Gamma}^2$  определяются согласно (2.157) табл. 13).

Если же допустить, что водовмещающие породы являются однородными в фильтрационном отношении ( $\Delta_v^*=0$ ), то при решении уравнения (2.155) условие нулевой концентрации следует ставить не на бесконечности, а на границе фронта поршневого вытеснения (при  $x_* = vt/n_0$ ). Здесь для  $n^*$  и  $\varphi_{v,\Gamma}^2$ , определяемых по (2.158) имеем

$$\frac{c}{c_0} = \frac{\operatorname{erf}[(\bar{n}-1)\mu] - \operatorname{erf}[(\bar{x}-1)\mu]}{\operatorname{erf}(\bar{n}-1) + \operatorname{erf}\mu}, \quad (2.164)$$

где  $\bar{n} = \frac{n^*}{n_0}$ .

### 3. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ДИСПЕРСИЯ

Анализу процесса гидродинамической дисперсии в однородных и неоднородных водонасыщенных горных породах и грунтах посвящены многочисленные исследования, обобщенные в ряде обзорных работ [25, 66, 187, 188] и монографий [12, 36, 51, 61, 89, 92]. Наряду с изучением гидродисперсии в однородных средах (микродисперсия) в последние годы разрабатываются вопросы гидродисперсии в агрегированных и стратифицированных средах (макродисперсия). При этом значительное развитие получили модели блоковой структуры сред с двойной пористостью [101, 102], пород с выраженной слоистой неоднородностью [41, 57, 77, 79, 80]. Рассмотрено множество одно- и двумерных задач конвективно-дисперсионного переноса в

аналитической [12, 25, 45, 60, 66] и численной [48, 50] реализациях.

В настоящей главе излагаются результаты по изучению моделей гидродинамической дисперсии, представляющих по мнению авторов наибольший интерес.

### 3.1. Точные и приближенные решения радиальной задачи гидродинамической дисперсии

Эта задача была рассмотрена многими авторами в связи с актуальностью для обоснования прогнозных моделей, а также для проведения и обработки результатов опытно-миграционных исследований [6, 36, 90, 98, 182, 217]. Здесь она вначале ставится для однородных водоносных пластов, когда допустимо предположение о линейной зависимости коэффициента дисперсии от скорости потока. В этом случае уравнение (1.19) при  $v(r) = q/r$  имеет вид

$$n_0 \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{q}{r} \frac{\partial c}{\partial r} = \frac{\lambda q}{r} \frac{\partial^2 c}{\partial r^2}, \quad q = \frac{Q}{2\pi m}. \quad (3.1)$$

Рассмотрим решение уравнения (3.1) при следующих краевых условиях

$$c(r, 0) = 0, \quad c(r_c, t) = c_0, \quad c(\infty, t) = 0, \quad (3.2)$$

где  $r_c$  — радиус скважины.

Введем безразмерные переменные  $\rho = r/\lambda$ ,  $\tau = qt/n_0\lambda^2$ . Это позволяет вместо (3.1), (3.2) записать

$$\rho \frac{\partial c}{\partial \tau} + \frac{\partial c}{\partial \rho} = \frac{\partial^2 c}{\partial \rho^2}, \quad (3.3)$$

$$c(\rho, 0) = 0, \quad c(\rho_c, \tau) = c_0, \quad c(\infty, \tau) = 0, \quad (3.4)$$

где  $\rho_c = r_c/\lambda$ .

Применяя к этому уравнению и условиям преобразование Лапласа

$$u(\rho, p) = \int_0^\infty c(\rho, \tau) \exp(-p\tau) d\tau$$

получаем

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} - \frac{du}{d\rho} - pu = 0, \quad (3.5)$$

$$u(\rho_c, p) = \frac{c_0}{p}, \quad u(\infty, p) = 0. \quad (3.6)$$

Решение уравнения (3.5) выражается через функции Эйри

$$u = \exp\left(\frac{\rho}{2}\right) \{\alpha_1 A_i(\varphi) + \alpha_2 B_i(\varphi)\}, \quad \varphi = \frac{1 + 4p\rho}{4p^{2/3}}, \quad (3.7)$$

где  $A_i(\varphi)$  и  $B_i(\varphi)$  — функции Эйри;  $\alpha_{1,2}$  — постоянные, которые определяются из условий (3.6).

При  $\rho \rightarrow \infty$  ( $\varphi \rightarrow \infty$ ) функции  $A_i(\varphi) \rightarrow 0$ ,  $B_i(\varphi) \rightarrow \infty$ . В силу ограниченности  $U(\rho, p)$  имеем  $\alpha_2 = 0$ , а удовлетворяя первому условию (3.6), находим

$$\alpha_1 = \frac{c_0}{p A_i(\varphi_c)} \exp\left(-\frac{\rho_c}{2}\right), \quad \varphi_c = \frac{1+4\rho\rho}{4\rho^{2/3}} \quad (3.8)$$

и следовательно

$$u = c_0 \exp\left(\frac{\rho - \rho_c}{2}\right) \frac{F_0(p)}{p}, \quad F_0(p) = \frac{A_i(\varphi)}{A_i(\varphi_c)}. \quad (3.9)$$

Учитывая соотношение [83]

$$A_i(z) = \frac{\sqrt{z}}{\pi \sqrt{3}} K_{1/3}\left(\frac{2}{3} z^{3/2}\right)$$

(где  $K_{1/3}(z)$  — функция Макдональда), выражение для  $F(p)$  можно представить в виде

$$F(p) = \frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{\varphi_c}} \cdot \frac{K_{1/3}\left(\frac{2}{3} \varphi^{3/2}\right)}{K_{1/3}\left(\frac{2}{3} \varphi_c^{3/2}\right)}. \quad (3.10)$$

В такой форме решение задачи в изображениях было получено в работах А. Огата [182], Г. П. Цыбульского [90] и других [36, 217].

Переход в (3.10) от изображения к оригиналу осуществляется по формуле обращения

$$c(\rho, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} u(\rho, p) \exp(p\tau) dp. \quad (3.11)$$

Поскольку функция  $U(\rho, p)$  имеет простой полюс в точке  $p=0$ , то интеграл (3.11) может быть представлен в форме

$$c = \text{Res}\{u \exp(p\tau)\}_{p=0} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L^*} u \exp(p\tau) dp, \quad (3.12)$$

где  $\int_{L^*}$  — два несобственных интеграла по берегам разреза вдоль отрицательной вещественной полуоси контура Бромвича (рис. 14).

Вычет в точке  $p=0$  определяется с использованием разложения  $A_i(z)$  при больших значениях аргумента

$$A_i(z) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} + z^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} z^{3/2}\right). \quad (3.13)$$

Это дает

$$\text{Res}\{u \exp(p\tau)\}_{p=0} = c_0. \quad (3.14)$$

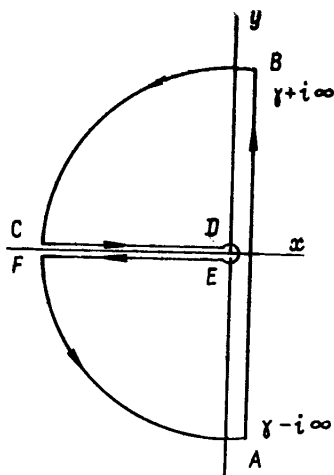


Рис. 14. Контур Бромвича

Для вычисления интегралов  $\int_{L^*}$  при  $u(\rho, p)$ , определяемом согласно (3.9), можно воспользоваться соотношением

$$A_i \left[ z \exp \left( \pm \frac{2\pi i}{3} \right) \right] = 0,5 [A_i(z) \mp i B_i(z)] \exp \left( \pm \frac{\pi i}{3} \right).$$

Тогда, принимая по берегам разреза I  $p = z \exp(-i\pi)$ ,  $p = -z$  и II  $p = z \exp(i\pi)$ ,  $p = -z$ , получим

$$\int_I = -\frac{1}{2\pi i} \exp \left\{ \frac{\rho - \rho_c}{2} \right\} \int_R^{\varepsilon} \frac{\exp(-z\tau) A_i \left[ \chi \exp \left( -\frac{2\pi i}{3} \right) \right]}{z A_i \left[ \chi_0 \exp \left( -\frac{2\pi i}{3} \right) \right]} dz,$$

$$\int_{II} = -\frac{1}{2\pi i} \exp \left\{ \frac{\rho - \rho_c}{2} \right\} \int_{\varepsilon}^R \frac{\exp(-z\tau) A_i \left[ \chi \exp \left( \frac{2\pi i}{3} \right) \right]}{z A_i \left[ \chi_0 \exp \left( \frac{2\pi i}{3} \right) \right]} dz,$$

где

$$\chi = \frac{1 - 4\rho z}{4z^{2/3}}, \quad \chi_0 = \frac{1 - 4\rho_c z}{4z^{2/3}}.$$

С учетом этих соотношений

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L^*} u \exp(\tau p) dp = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} [f_I + f_{II}] = c_0 F_0(\rho, \tau), \quad (3.15)$$

где

$$F_0(\rho, \tau) = \frac{1}{\pi} \exp \left\{ \frac{\rho - \rho_c}{2} \right\} \int_0^{\infty} \frac{f_0(z) \exp(-z^2 \tau)}{z} dz, \quad (3.16)$$

$$f_0(z) = \frac{A_i(\chi_0) B_i(\chi) - A_i(\chi) B_i(\chi_0)}{A_i^2(\chi_0) - B_i^2(\chi_0)}. \quad (3.17)$$

Подставляя (3.14) и (3.15) в (3.12), имеем [42]

$$\bar{c} = c/c_0 = W_0(\rho, \tau), \quad W_0(\rho, \tau) = 1 - F_0(\rho, \tau). \quad (3.18)$$

При вычислении интегралов  $\int_{\mathcal{L}}$  в работе Г. П. Цыбульского [90] использовалось интегральное представление для функции Макдональда. В этом случае решение задачи получается в сложной и непригодной даже для расчета на ЭВМ форме. Решение дается, А. Огата [182], в виде несобственного интеграла от функций Бесселя первого  $J_\nu(z)$  и второго  $Y_\nu(z)$  рода дробного  $\nu=1/3$  порядка; такой же результат получен в работе Д. Танга и Д. Беби [217]. Используя соотношения между функциями  $A_i(z)$ ,  $B_i(z)$  и  $J_\nu(z)$ ,  $Y_\nu(z)$ , можно показать, что решение (3.18) при  $F_0(\rho, \tau)$ , определяемом согласно (3.16), (3.17), эквивалентно решению А. Огата. Однако выражение  $F_0(\rho, \tau)$  в виде несобственного интеграла от функций Эйри, для которых в [83] имеются соответствующие представления, с точки зрения вычисления  $\bar{c}(\rho, \tau)$  является более предпочтительным.

Результаты расчетов по формуле (3.18) для  $\rho_c=0$  (скважина весьма малого радиуса) представлены в [42].

При  $\rho_c=0$  область интегрирования в (3.18) расщепляется на два интервала  $0 < z < (4\rho)^{-1}$  и  $(4\rho)^{-1} < z < \infty$ . В диапазоне  $0 < z < (4\rho)^{-1}$ , где  $\chi \geq 0$  функции Эйри имеют экспоненциальный характер и особых сложностей при вычислении интеграла не возникает. При  $z > (4\rho)^{-1}$  изменяется знак  $\chi$  ( $\chi < 0$ ); при отрицательных значениях аргумента функции Эйри сильно осциллируют и поэтому для обеспечения требуемой точности интегрирование в диапазоне  $(4\rho)^{-1} < z < \infty$  следует проводить с весьма мелким шагом или использовать специальные приемы [152].

Расчетные профили концентраций  $\bar{c}(\rho, \tau)$  приведены на рис.

Для  $\tau=225, 450, 900$  и  $1800$  на рис. 15 дано сопоставление между значениями  $\bar{c}(\rho, \tau)$ , вычисленными по формуле (3.18) и полученными в работе Дж. Хоупса и Д. Харлемана [150, 151] путем численного решения исходной задачи на ЭВМ.

На рис. 16 приведены так называемые  $E$ -кривые, рассчитанные по формуле (3.18) для  $\rho=1, 3, 10$  и  $30$  и заимствованные из работы Дж. Саути [200]. При  $\rho > 10$  здесь также наблюдается хорошая согласованность; при  $\rho < 10$  отмечается существенное расхождение результатов.

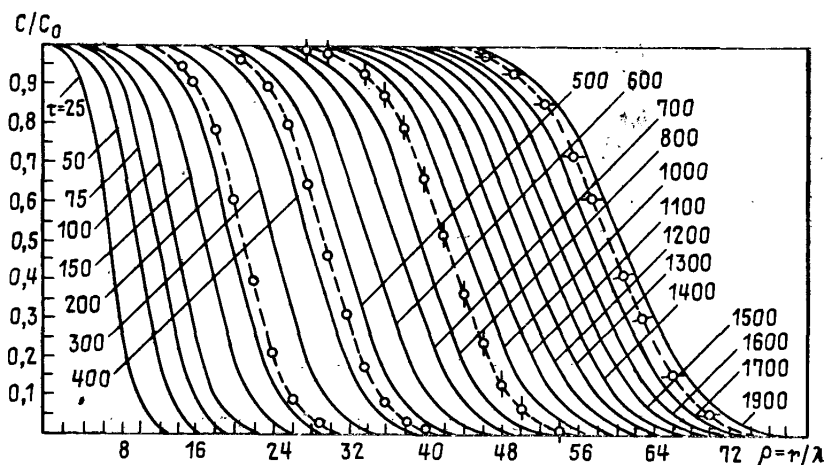


Рис. 15. Расчетные профили концентрации по решению (3.18)

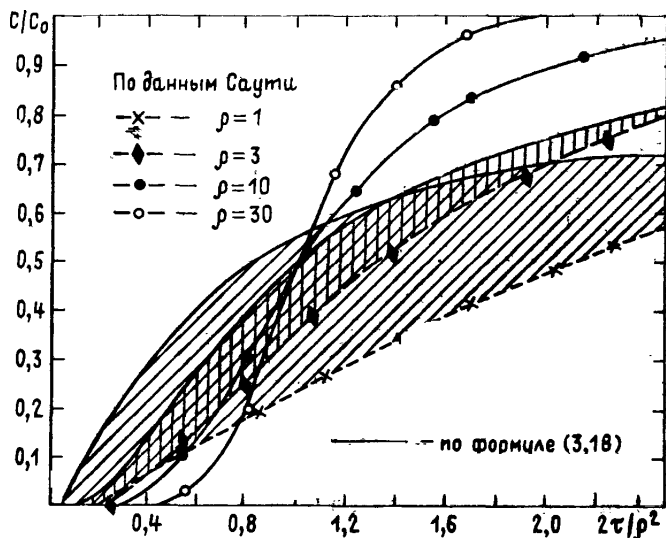


Рис. 16. Графики  $\frac{c}{c_0} = f(2\tau/\rho^2, \rho)$

На рис. 17 приведены графики, отражающие закономерности изменения концентраций на фронте поршневого вытеснения, т. е. при  $\rho = \Theta$ , где  $\Theta = \sqrt{2\tau}$ . Из рисунка видно, что при  $\Theta \rightarrow 0$  согласно расчетам по формуле (3.18) величина  $\bar{c}(\rho = \Theta, \Theta) \rightarrow 1$ ; по мере удаления фронта от скважины концентрация  $\bar{c}(\rho = \Theta, \Theta)$  уменьшается, асимптотически стремясь к постоян-

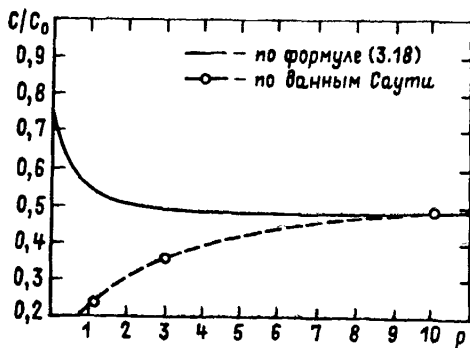


Рис. 17. Расчетные концентрации на фронте вытеснения

ной величине равной 0,485. Согласно данным Дж. Саути (кривая 2, построенная по точкам снятым с графика рис. 15 при  $2\tau/\rho^2=1$  для  $\rho=1, 3$ , и 10) имеет место обратная картина, т. е. при  $\theta \rightarrow 0$ ,  $\bar{c}(\rho=\theta, \theta) \rightarrow 0$ .

Начальное и граничное условие (3.2) при  $\rho \rightarrow 0$ ,  $\tau \rightarrow 0$  несовместимы (скважина является особой точкой, где функция  $\bar{c}(\rho, \tau)$  претерпевает разрыв). По-видимому, при численном решении задачи на ЭВМ, в работе Дж. Саути [200] условие  $c_{ij}=c_0$  (где  $i, j$  — индексы шагов дискретной сетки, соответственно, по  $\rho, \tau$ ) выполнялись лишь в узлах  $i=0, j \geq 1$ , а в узле  $i=0, j=0$  задано  $\bar{c}_{ij}=0$ . За счет этого и происходит снижение  $\bar{c}(\rho, \tau)$  в области малых  $\rho, \tau$  (т. е. в окрестности узла  $i=0, j=0$ ); при увеличении  $\rho$  или  $\tau$  влияние условия  $\bar{c}_{ij}=0$  в узле  $i=0, j=0$  ослабевает и при  $\rho \geq 10$  уже практически не сказывается на точности вычисления  $\bar{c}(\rho, \tau)$ .

Решение в форме (3.18) независимо от [42] было получено также в работе П. Хсьеха [152]. Результаты его численных расчетов для  $\rho_c=1, 10$  и 20 представлены в табл. 15.

При решении радиальной задачи микродисперсии в строгой постановке вместо условия (3.2) на скважине должно задаваться условие Данквертса, которое в переменных  $\rho, \tau$  записывается в виде

$$c(\rho_c, \tau) - \frac{\partial c(\rho_c, \tau)}{\partial \rho} = c_0 \quad (3.19)$$

Несложно показать, что в этом случае в области изображений получается следующий результат

$$u(\rho, p) = c_0 \exp \left\{ \frac{\rho - \rho_c}{2} \right\} \frac{F_1(p)}{p}, \quad (3.20)$$

Таблица 15

$\eta=50$		100		500		1000		2000	
$\rho$	$\bar{c}$	$\rho$	$\bar{c}$	$\rho$	$\bar{c}$	$\rho$	$\bar{c}$	$\rho$	$\bar{c}$
2.0	0.998	6.0	0.993	18.0	0.997	30.0	0.995	46.0	0.994
4.0	0.985	8.0	0.969	20.0	0.991	34.0	0.969	50.0	0.975
5.0	0.966	10.0	0.898	22.0	0.976	36.0	0.936	54.0	0.914
6.0	0.929	11.0	0.833	24.0	0.942	38.0	0.879	56.0	0.857
7.0	0.868	12.0	0.744	26.0	0.876	40.0	0.793	58.0	0.778
8.0	0.773	13.0	0.633	28.0	0.770	42.0	0.676	60.0	0.678
9.0	0.647	14.0	0.508	30.0	0.623	44.0	0.538	62.0	0.563
10.0	0.498	15.0	0.380	32.0	0.452	46.0	0.393	64.0	0.441
11.0	0.346	16.0	0.262	34.0	0.288	48.0	0.261	66.0	0.323
12.0	0.213	17.0	0.164	36.0	0.157	50.0	0.155	68.0	0.220
13.0	0.114	18.0	0.093	38.0	0.072	52.0	0.082	70.0	0.139
14.0	0.052	20.0	0.021	40.0	0.027	56.0	0.015	74.0	0.042
16.0	0.006	22.0	0.003	42.0	0.009	60.0	0.002	78.0	0.009

 $\rho_c=1.0$  $\rho_c=10.0$



11.0	0.964	11.0	0.933	22.0	0.990	30.0	0.997	48.0	0.991
12.0	0.892	13.0	0.949	26.0	0.936	34.0	0.981	54.0	0.932
13.0	0.775	14.0	0.900	28.0	0.867	38.0	0.918	56.0	0.885
13.5	0.701	15.0	0.826	30.0	0.757	40.0	0.851	58.0	0.816
14.0	0.617	16.0	0.724	31.0	0.686	42.0	0.754	60.0	0.726
14.5	0.529	17.0	0.600	32.0	0.607	44.0	0.629	62.0	0.571
15.0	0.439	18.0	0.463	33.0	0.523	46.0	0.487	64.0	0.497
15.5	0.353	19.0	0.329	34.0	0.436	48.0	0.345	66.0	0.377
16.0	0.273	20.0	0.213	35.0	0.352	50.0	0.221	68.0	0.266
16.5	0.203	21.0	0.124	36.0	0.274	52.0	0.126	70.0	0.174
17.0	0.145	22.0	0.065	38.0	0.148	54.0	0.064	72.0	0.105
18.0	0.064	23.0	0.030	40.0	0.067	56.0	0.028	76.0	0.029
19.0	0.023	25.0	0.004	44.0	0.008	60.0	0.004	80.0	0.006

$\rho_c = 20.0$

21.0	0.898	21.0	0.970	24.0	0.998	34.0	0.996	48.0	0.997
21.5	0.819	22.0	0.910	28.0	0.982	38.0	0.976	52.0	0.984
22.0	0.722	23.0	0.812	30.0	0.954	40.0	0.949	56.0	0.940
22.5	0.613	23.5	0.749	32.0	0.836	42.0	0.901	60.0	0.833
23.0	0.499	24.0	0.678	34.0	0.796	44.0	0.825	62.0	0.748
23.5	0.388	24.5	0.601	35.0	0.729	46.0	0.718	64.0	0.643
24.0	0.287	25.0	0.520	36.0	0.653	48.0	0.586	66.0	0.525
24.5	0.201	25.5	0.439	37.0	0.568	50.0	0.442	68.0	0.404
25.0	0.133	26.0	0.361	38.0	0.480	52.0	0.303	70.0	0.291
25.5	0.083	27.0	0.223	40.0	0.309	54.0	0.187	72.0	0.194
26.0	0.048	28.0	0.122	42.0	0.170	56.0	0.103	76.0	0.068
27.0	0.014	29.0	0.058	44.0	0.079	58.0	0.050	80.0	0.016
28.0	0.003	30.0	0.023	48.0	0.009	62.0	0.008	84.0	0.003

где

$$F_1(p) = \frac{A_i(\varphi)}{0.5 A_i(\varphi_c) - p^{1/3} A_i'(\varphi_c)} \quad (3.21)$$

и  $A_i'(z)$  — производная от функции Эйри  $A_i(z)$ .

Переход от изображения (3.20) к оригиналу выполнен Чи-Шун Ченем [114]. При этом решение задачи может быть представлено в виде

$$\bar{c}(\rho, \tau) = W_1(\rho, \tau), \quad W_1(\rho, \tau) = 1 - F_1(\rho, \tau), \quad (3.22)$$

где

$$F_1(\rho, \tau) = \frac{4}{\pi} \exp\left\{\frac{\rho - \rho_c}{2}\right\} \int_0^\infty \frac{f_1(z) \exp(-z^2, \tau)}{z} dz, \quad (3.23)$$

$$f_1(z) = \frac{A_i(\varphi) f_*(z) - B_i(\varphi) f_{**}(z)}{f_*^2(z) + f_{**}^2(z)}, \quad (3.24)$$

$$f_*(z) = B_i(\varphi_c) + 2z^{2/3} B_i'(\varphi_c), \quad (3.25)$$

$$f_{**}(z) = A_i(\varphi_c) + 2z^{2/3} A_i'(\varphi_c) \quad (3.26)$$

и  $B_i'(z)$  — производная от функции Эйри  $B_i(z)$ .

Представляет интерес сопоставить решение (3.18) с (3.22) и оценить погрешность, возникающую за счет неучета в условии (3.2) градиента концентрации на скважине.

Ясно, что несоответствие между (3.18) и (3.22) в наибольшей степени будет проследиваться на начальной стадии процесса и именно в непосредственной близости от скважины. Поэтому имеет смысл найти асимптотические представления для (3.22) и соответственно (3.18) при малых  $\tau$ .

При  $\rho > 0.04 \rho_c$  с погрешностью, не превышающей 1%  $\varphi_c \approx \rho_c \rho^{1/3}$  и  $\varphi \approx \rho \rho^{1/3}$ . Тогда при замене в (3.9) функций  $A_i(z)$  аппроксимируемыми их выражениями (3.13) будем иметь

$$F_0(p) \approx \left(\frac{\rho_c}{\rho}\right)^{1/4} \frac{\exp(-m \sqrt{p})}{p}, \quad m = \frac{2}{3} (\rho^{3/2} - \rho_c^{3/2}). \quad (3.27)$$

Оригинал изображения (3.27) известен [7] и при этом решение дается в виде

$$\bar{c}(\rho, \tau < 0.04 \rho_c) = \left(\frac{\rho_c}{\rho}\right)^{1/4} \exp\left\{\frac{\rho - \rho_c}{2}\right\} \operatorname{erfc}\left(\frac{m}{2 \sqrt{\tau}}\right). \quad (3.28)$$

При больших значениях аргумента  $A_i'(z)$ , так же как и  $A_i(z)$ , удовлетворительно аппроксимируется первым членом ряда [83]

$$A_i'(z) \approx -\frac{1}{2 \sqrt{\pi}} z^{1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} z^{3/2}\right) \quad (3.29)$$

С учетом (3.13) и (3.29) для  $F_1(p)$  получаем

$$F_1(p) \approx (\rho_c \rho)^{-1/4} \times \frac{\exp(-m \sqrt{p})}{p [0.5 \sqrt{\rho_c + \sqrt{p}}]}$$

и соответственно асимптотика для  $\bar{c}(\rho, \tau)$ , когда на скважине ставится условие 3-го рода, имеет вид

$$\bar{c}(\rho, \tau < 0,04\rho_c) = 2\left(\frac{\rho_c}{\rho}\right)^{1/4} \exp\left\{\frac{\rho - \rho_c}{2}\right\} \times \left[ \operatorname{erfc}\left(\frac{m}{2\sqrt{\tau}}\right) - \exp\left(\frac{m}{2\sqrt{\rho_c}} + \frac{\tau}{4\rho_c}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{m}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\frac{\tau}{4\rho_c}}\right) \right]. \quad (3.30)$$

Результаты сопоставительных расчетов представлены на рис. 18. Как и следовало ожидать различие в распределении  $c(\rho, \tau)$  существенно лишь на ранней стадии процесса (рис. 18); с ростом же  $\tau$  (за счет того, что градиент концентрации на скважине уменьшается) условие (3.19) вырождается в (3.2) и графики  $\bar{c}(\rho, \tau)$ , рассчитанные по (3.18) и (3.22), становятся практически неразличимыми (рис. 18).

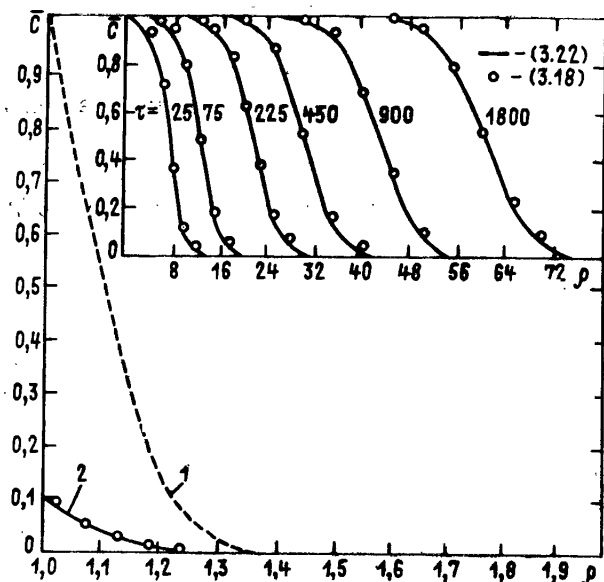


Рис. 18. Графики  $\bar{c}=f(\rho, \tau)$  при  $\rho_c=1,0$  — по (3.22); 0 — по (3.18).  
Графики  $c=f(\rho)$  при  $\tau=0,01$ . 1 — по формуле (3.28); 2 — по формуле (3.30)

Все строгие решения для радиальной задачи дисперсии имеют довольно сложный вид и использовать их, по-видимому, следует лишь как эталоны для оценки точности приближенных зависимостей.

Одно из первых приближенных решений данной задачи было получено в работе Л. Лау, В. Кауфмана и Д. Тодда [166]. Приняв за основу известное приближенное решение задачи

гидродинамической дисперсии в полуограниченном линейном потоке

$$\bar{c} = 0,5 \operatorname{erfc} \eta, \quad \eta = \frac{x-x_*}{\sqrt{2\sigma^2}}, \quad x_* = \frac{vt}{n_0}, \quad \sigma^2 = 2\lambda x_* \quad (3.31)$$

в (3.31) предлагалось осуществить замену  $x=r$ ,  $x_*=r_*$  (где  $r_* = \sqrt{r_c^2 + 2qt/n_0}$ ), а дисперсию  $\sigma^2$  определять как сумму составляющих

$$d\sigma = d\sigma_1 + d\sigma_2,$$

где  $\sigma_{1,2}$  — стандартные отклонения, порожденные, соответственно, перемещением фронта поршневого вытеснения и геометрией потока. В работе [166] принималось, что, как и в линейном потоке,  $\sigma_1^2 = 2\lambda r_*$  и потому:

$$d\sigma_1 = \lambda dr_*/\sigma.$$

Влияние же радиальной геометрии устанавливалось из условия материального баланса в зоне смеси

$$\sigma_2 \bar{r}_* = \text{const}, \quad d\sigma_2 = -\sigma \bar{dr}_*/\bar{r}_*.$$

Суммарный учет обоих факторов приводит к уравнению:

$$\frac{d\sigma}{dr_*} = \frac{\lambda}{\sigma} - \frac{\sigma}{r_*}, \quad (3.32)$$

решение которого при условии на скважине  $\sigma(r_*=r_c)=0$  имеет вид:

$$\sigma^2 = \frac{2\lambda}{3r_*^{\frac{1}{2}}} (r_*^3 - r_c^3). \quad (3.33)$$

Способ Л. Лау и др. может быть использован для построения приближенного решения задачи гидродинамической дисперсии в потоке с центральной симметрией. В этом случае  $r_* = (r_c^3 + 3Qt/4\pi n_0)^{1/3}$  и выражение для  $\sigma^2$  имеют вид

$$\sigma^2 = \frac{2\lambda}{5r_*^{\frac{1}{2}}} (r_*^5 - r_c^5). \quad (3.34)$$

Поскольку в уравнение (3.1)  $\lambda$  входит, как малый параметр, то для отыскания его приближенного решения можно воспользоваться методом возмущения [42].

Произведем в (3.1) замену переменных:

$$\mu = \frac{r-r_*}{\sqrt{\lambda}}, \quad t = t',$$

где  $r_* = \int_0^t (v_*/n_0) dt$  — расстояние, пройденное фронтом поршневого вытеснения,  $v_*$  — скорость фильтрации при  $r=r_*$  (будем при этом считать, что в (3.1)  $v$ , произвольным образом зависит от  $r$  и, в частном случае,  $v_r = \text{const}$ ).

Тогда вместо (3.1) можно записать

$$n_0 \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (v_r - v_*) \frac{\partial c}{\partial \mu} = v_r \frac{\partial^2 c}{\partial \mu^2}.$$

Учитывая при этом, что в области фронта поршневого вытеснения допустимо разложение  $v_r$  в ряд Тейлора

$$v_r \approx v_* + \sqrt{\lambda} \mu \left. \frac{dv_r}{dr} \right|_{r=r_*} \quad (3.35)$$

будем иметь

$$n_0 \frac{\partial c}{\partial t} + \mu \left. \frac{dv_r}{dr} \right|_{r=r_*} \times \frac{\partial c}{\partial \mu} \approx v_* \frac{\partial^2 c}{\partial \mu^2}. \quad (3.36)$$

Последнее подстановкой

$$\mu = \varphi \exp \left[ \frac{1}{n_0} \int_0^t \left. \frac{dv_r}{dr} \right|_{r=r_*} dt \right] \quad (3.37)$$

трансформируется к виду

$$n_0 \frac{\partial c}{\partial t} = D(t) \frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2}, \quad (3.38)$$

где

$$D(t) = v_* \exp \left[ -\frac{2}{n_0} \int_0^t \left. \frac{dv_r}{dr} \right|_{r=r_*} dt \right]. \quad (3.39)$$

Известно, что при краевых условиях

$$c(\varphi, 0) = \begin{cases} c_0 & \text{при } \varphi < 0 \\ 0 & \text{при } \varphi > 0, \end{cases} \quad (3.40)$$

$$c(\varphi = -\infty, t) = c_0, \quad c(\varphi = \infty, t) = 0. \quad (3.41)$$

решение уравнения (3.38) имеет вид (3.31) и при этом

$$\eta = \frac{\varphi}{2\sqrt{B(t)}}, \quad B(t) = \frac{1}{n_0} \int_0^t D(t) dt. \quad (3.42)$$

Для определения  $\varphi$ ,  $D(t)$  и  $B(t)$  необходимо задаться геометрией потока.

В случае радиальной фильтрации, когда  $v_r = q/r$ ,  $r_f = \sqrt{r_c^2 + 2qt/n_0}$  и  $dv_r/dr|_{r=r_*} = -q/r_*^2$ , из (3.37), (3.39) и (3.42) находим

$$\varphi = \frac{(r-r_*)r_*}{r_c \sqrt{\lambda}}, \quad D(t) = \frac{qr_*}{r_c^2}, \quad B(t) = \frac{(r_*^2 - r_c^2)}{3r_c^3}. \quad (3.43)$$

Подстановка же (3.43) в (3.42) дает

$$\eta = \frac{(r-r_*)r_*}{\sqrt{4\lambda(r_*^2 - r_c^2)^3}}, \quad (3.44)$$

что совпадает с (3.31), (3.33).

В потоке с центральной симметрией  $v_r = Q/4\pi r^2$ ,

$$r_* = (r_c^3 + 3Qt/4\pi n_0)^{1/3} \text{ и } dv_r/dr|_{r=r_*} = -Q/2\pi r_*^3$$

имеем:

$$\varphi = \frac{(r-r_*)r_*^2}{r_c^2\sqrt{\lambda}}, \quad D(t) = \frac{3Qr_*^2}{4\pi r_c^4}, \quad B(t) = \frac{r_*^5 - r_c^5}{5r_c^4}, \quad (3.45)$$

а при подстановке (3.45) в (3.42), получаем

$$\eta = \frac{(r-r_*)r_*^2}{\sqrt{4\lambda}(r_*^3 - r_c^3)/5}, \quad (3.46)$$

что находится в соответствии с (3.31), (3.35).

Представленные решения интересны в том отношении, что они идентичны по форме и поэтому можно оценить как на дисперсии распределения  $\bar{c}$  сказывается геометрия потока (см. табл. 16).

Таблица 16

Поток	$v_r$	$r_*$	$\sigma^2$
Линейный	$v = \text{const}$	$vt/n_0$	$2\lambda r_*$
Радиальный	$q/r$	$(r_c^3 + 2qt/n_0)^{1/2}$	$2\lambda(r_*^3 - r_c^3)/3r_*^3$
Сферический	$Q/4\pi r$	$(r_c^3 + 3Qt/4\pi n_0)^{1/3}$	$2\lambda(r_*^5 - r_c^5)/5r_*^4$

Расчет показывает, что наибольшая ширина зоны смеси имеет место в линейном потоке; в радиальном потоке  $\sigma^2$  в 3 раза, а в сферическом в 5 раз меньше, чем в линейном. Это и понятно — уменьшение вследствие расхождения скорости фильтрации не только замедляет передвижение фронта, но и снижает интенсивность перемешивания.

Известны и другие приближенные решения радиальной задачи дисперсии. Они также были получены путем усреднения в исходном уравнении коэффициента  $D = \lambda v_r$  (в предположении, что  $\lambda$  — малый параметр). Записываются эти решения в форме (3.31) и отличаются друг от друга лишь видом автомодельной переменной  $\eta$ .

В области фронта поршневого вытеснения решение Л. Лау хорошо согласуется с другими приближенными решениями. Действительно (см. табл. 17) при  $r_* \approx 0,5(r+r_*)$  формула (3.47) для  $\eta$  совпадает с представлением (3.46), а при условии, что  $\ln(r/r_*) \approx (r_* - 1)$  формула (3.49) также приводится к виду (3.46). При удалении от фронта поршневого вытеснения расхождение между  $\eta$  возрастает, однако в силу того, что параметр достаточно мал, расчетные значения  $\bar{c}(r, t)$  оказываются достаточно близкими.

Формулы для расчета  $\eta$  в радиальном потоке

Зависимость	Номер формулы	Автор
$\frac{r^2 - r_*^2}{\sqrt{16} \lambda r_*^2/3}$	(3.47)	П. Раймонди и др. (1959) Дж. Хоупс и Д. Харлеман (1965)
$\frac{r^2 - r_*^2}{\sqrt{16} \lambda r_*^3/3}$	(3.48)	В. М. Шестаков (1962) Р. Гарднер и др. (1962) Л. Гелхар и М. Коллинз (1971) Г. И. Баренблатт и др. (1972) Б. Хант (1974)
$\frac{p_* \ln(r/r_*)}{\sqrt{4} \lambda r_*^3/3}$	(3.49)	Г. Деган (1971)

Сопоставление приближенных решений с расчетами по точному при  $\rho=10$  (или  $\rho=50$ ), когда концентрация  $c(r_*, t)$  на фронте поршневого вытеснения стабилизировалась позволяет заключить, что решения Л. Лау и др. [166], В. М. Шестакова [98] и Г. Дегана [119] уже при выполнении условий  $\rho \geq 20$  имеют погрешность в 2,5%; такая же точность достигается и при использовании решения П. Раймонди и др. [194], когда  $\rho \geq 50$ . Экспериментальная проверка (Р. Бентсен и Р. Нильсон [110], Дж. Хоупс и Д. Харлеман [150], О. Исмаил и О. Кимблер [124]) показала, что кривые распределения концентраций, рассчитанные по зависимости П. Раймонди и др. [194], удовлетворительно описывают опытные данные.

На рис. 19 показано сопоставление пространственных распределения концентрации  $\bar{c}(r/\lambda)$  при фиксированном времени  $r_*^2/r^2=10$  для всех рассматриваемых приближений. На рис. 20 даны для этих же случаев кривые зависимости концентрации от безразмерного времени  $r_*^2/r^2$  при  $r/\lambda=3$ . Сравнение этих результатов с кривыми точного решения (3.18) свидетельствует о предпочтительности приближенного решения Л. Лау и др. Близкий результат дает также решение В. М. Шестакова и др.

Рассмотрим теперь решение задачи для схемы импульсного ввода вещества в нагнетательную скважину. В этом случае на скважине ставится следующее граничное условие [114]:

$$c(\rho_c, \tau) - \frac{\partial c(\rho_c, \tau)}{\partial \rho} = \frac{M_0}{2\pi m n_0 \lambda^2} \delta(\tau), \quad (3.50)$$

где  $M_0$  — масса введенного в поток вещества;  $\delta(\tau)$  — дельта функция Дирака.

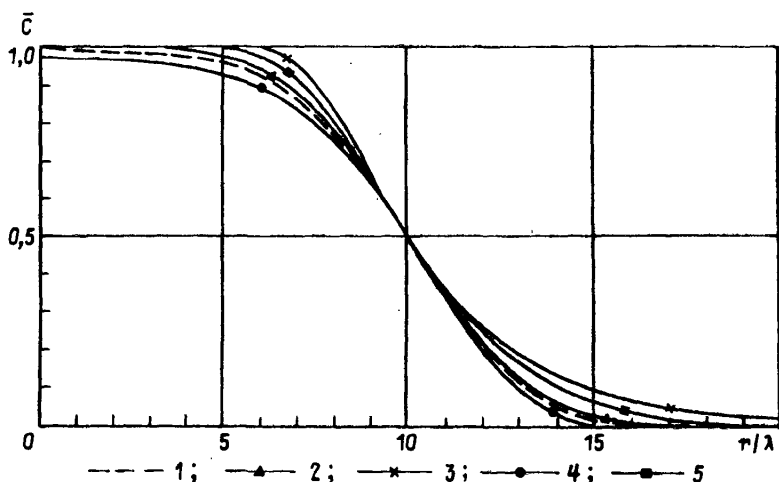


Рис. 19. Сопоставление пространственных распределений концентрации по точному (3.18) — кривая 1 и по приближенным решениям (3.44), (3.47) — (3.49) — кривые 2—5

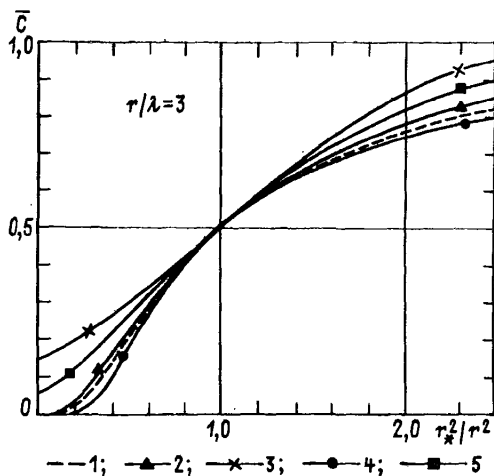


Рис. 20. Выходные кривые концентраций в сечении  $\tau/\lambda=3$  по точному (3.18) — кривая 1 и по приближенным решениям (3.44), (3.47) — (3.49) — кривые 2—5

Учитывая, что  $\int_0^\infty \delta(\tau) \exp(-p\tau) d\tau = 1$  на основе теоремы Дюамеля из (3.22), получаем

$$c(\rho, \tau) = \frac{M_0}{2\pi i n_0 \lambda^2} F_2(\rho, \tau), \quad (3.51)$$



где

$$F_2(\rho, \tau) = \frac{4}{\pi} \exp \left\{ \frac{\rho - \rho_c}{2} \right\} \int_0^{\infty} z f_1(z) \exp(-z^2 \tau) dz.$$

Для отыскания приближенного решения примем, что оно имеет вид эквивалентный выражению для плотности нормального распределения вероятности. Тогда в соответствии с представлением для (3.33) можно записать

$$c = \frac{Q_u}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\eta^2}, \quad \eta^2 = \frac{(r-r_*)^2}{2\sigma^2}, \quad \sigma^2 = \frac{2}{3} \lambda \left( r_* - \frac{r_c^2}{r_*} \right). \quad (3.52)$$

Здесь участвует неизвестная пока мощность источника  $Q_u$ , которая может быть определена из условия нормировки по массе введенного в поток вещества  $M_0$ . Интегрирование по области распространения введенной массы дает

$$M_0 = 2\pi m n_0 \int_0^{\infty} r c(r, t) dr = 2\pi m n_0 r_* Q_u,$$

откуда находится  $Q_u$ , и окончательное выражение для распределения концентрации при  $r_c=0$  имеет вид

$$\tilde{c} = \frac{c}{M_0/\pi m n_0 r_*^2} = \frac{(3/\pi)^{1/2}}{4} \cdot \frac{\rho^{1/2}}{\vartheta^{3/2}} \exp \left[ -\frac{(1-\vartheta)^2}{4\vartheta/3\rho} \right], \quad (3.53)$$

где  $\rho = r/\lambda$ ,  $\vartheta = r_*/r$ .

Другая форма приближенного решения этой задачи получается из решения для линейного потока с временной импульсной функцией концентрации на границе (вида (3.50) при градиенте равно нулю):

$$\tilde{c} = \frac{(3/\pi)^{1/2}}{4} \cdot \frac{\rho^{1/2}}{\vartheta^{5/2}} \exp \left[ -\frac{(1-\vartheta)^2}{4\vartheta/3\rho} \right]. \quad (3.54)$$

Решения (3.53) и (3.54) отличаются показателем степени  $\vartheta$  в знаменателе предэкспоненциального множителя. Форма выходных кривых  $\tilde{c}(\rho, \vartheta^2)$ , построенных по этим решениям, представлена на рис. 21. Из их сопоставления следует, что концентрации по второму решению (3.54) получаются больше на  $\vartheta$  при  $\vartheta < 1$  и меньше на ту же величину при  $\vartheta > 1$ ; при  $\vartheta = 1$  они совпадают. Максимумы кривых по второму решению несколько смещены влево.

При пакетном вводе вещества распределение  $\tilde{c}$  устанавливается на основе принципа суперпозиции. Ориентируясь на обобщенную формулу (3.31), будем иметь

$$\tilde{c} = 0,5(erfc\eta - erfc\eta_0), \quad (3.55)$$

$$\eta_0 = \frac{r-r_{*0}}{\sqrt{4\lambda r_{*0}/3}}, \quad r_{*0} = \sqrt{r_c^2 + \frac{2q(t-t_0)}{n}},$$

где  $t_0$  — продолжительность ввода оторочки.

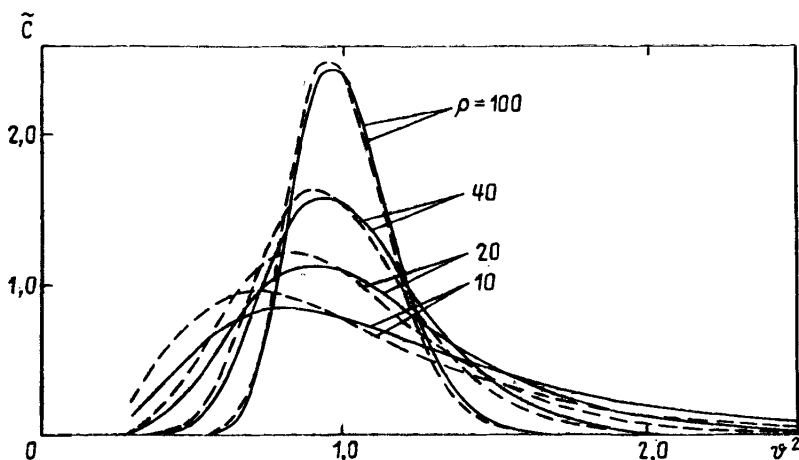


Рис. 21. Выходные кривые  $\tilde{c}(\rho, \vartheta^2)$  по (3.53) — сплошная и по (3.54) — пунктирная линии

Для центрально-симметричного течения в случае импульсно-го ввода индикатора в скважину со сферическим фильтром радиуса  $r_c \rightarrow 0$  в результате нормировки по массе  $M_0$  из (3.53) получается решение типа источника

$$\tilde{c} = \frac{c}{M_0 / \frac{4}{3} \pi n_0 r^3} = \frac{(5/\pi)^{1/2}}{8} \cdot \frac{\rho^{1/2}}{\vartheta} \exp \left[ -\frac{(1-\vartheta)^2}{4\vartheta^2 \rho} \right] \quad (3.55a)$$

при переменных  $\rho$  и  $\vartheta$  как в (3.53).

### 3.2. Гидродинамическая дисперсия при знакопеременной конвекции\*

Теоретические и экспериментальные исследования гидродинамической дисперсии в водоносных пластах выполнены в основном для случая однонаправленного движения подземных вод. Однако в ряде технических приложений приходится иметь дело с возвратно-поступательным движением, когда скорость фильтрации меняет свой знак на обратный и возникает режим знакопеременной конвекции.

Такой режим имеет место, например, в береговых зонах моря, рек и каналов при колебаниях уровня в них и смене фаз притока и оттока. Более сложные условия возникают в задачах создания и эксплуатации подземных водохранилищ в соленых водоносных горизонтах. При прогнозах смешения пресных и соленых вод в этих случаях необходимо рассматривать модель двухжидкостной системы с переменной как по величине, так и

\* Раздел написан совместно с Л. Н. Муратовой.

по знаку скорости конвекции. Аналогичная ситуация имеет место при применении так называемого односкважинного метода определения миграционных параметров пород в полевых условиях, когда искусственно создается режим знакопеременной конвекции. Такая же модель должна рассматриваться в задачах массопереноса при циклической обработке призабойной зоны скважин с целью повышения ее проницаемости и улучшения качества извлекаемой водозаборами воды методами геотехнологии.

В отдельных работах режим знакопеременной конвекции рассмотрен исходя из предпосылки о неизменности параметров гидродинамической дисперсии при изменении знака скорости конвективного переноса. В такой постановке Г. Гарднером, Дж. Довни и М. Вилли [130] исследован циклический режим эксплуатации подземного газохранилища. М. Мерритом [176] на основе моделирования при тех же предположениях изучены различные схемы и режимы эксплуатации линз пресных вод. Приближенное решение задачи гидродинамической дисперсии для режима закачка—откачка в скважине получили Л. Гелхар и М. Коллинз [133]. Параметры дисперсии считаются также неизменными в используемом односкважинном опробовании пластов [117, 169].

Во всех указанных случаях независимость коэффициентов дисперсии от направления скорости потока не согласуется с физическими представлениями о механизме формирования зоны смеси в основных моделях гидродинамической дисперсии. Из качественного анализа таких моделей, начиная с модели Тейлора—Эриса для однородной среды, следует очевидное предположение о том, что при смене направления движения фильтрационного потока на обратное неоднородность поля скоростей может привести к сжатию зоны смеси, т. е. к эффекту, который противоречит классической модели диффузии. В сравнительно однородных средах этому эффекту будет противодействовать релаксационное влияние молекулярного смешения. В моделях, где преобладает макронеоднородность (например, в модели слоисто-неоднородного пласта), это противодействие минимально.

Исходя из таких представлений для случая линейного потока дифференциальное уравнение гидродинамической дисперсии следует записывать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot \left( D_i \frac{\partial c_i}{\partial x} \right) \mp \frac{\partial (v_i c_i)}{\partial x} = n_0 \frac{\partial c_i}{\partial t}, \quad (3.56)$$

в котором для направлений прямого и обратного движения ( $i = 1, 2$ ) различные концентрации  $c_i$ , скорости  $v_i$  и коэффициенты диффузии  $D_i = \lambda_i v_i$ .

Для подтверждения зависимости  $D_i$  или  $\lambda_i$  от смены направления движения потока были поставлены эксперименты [62], результаты которых излагаются ниже.

### 3.2.1. Экспериментальные исследования

Эксперименты выполнялись на лабораторной установке с образцами песчаного грунта и смесью песка с гранулами полистирола. Образцы песка длиной 20 и 40 см диаметром 5 см с преобладающим размером фракций  $0,25 \div 0,5$  мм имели пористость  $0,35 \div 0,38$ . Такие же по размерам образцы смеси песка с полистиролом имели пористость 0,19.

В качестве индикатора использовался 0,1 н раствор хлористого кальция ( $\text{CaCl}_2$ ) при непрерывном вводе и тот же 1,0 н раствор при непрерывно-импульсном (пакетном) вводе в образец. Смена направления фильтрации раствора через образец осуществлялась его поворотом на  $180^\circ$  при сохранении направления скорости снизу вверх.

По экспериментальным данным строились выходные кривые зависимости относительной концентрации  $c/c_0$  от числа прошедших через образец поровых объемов  $\Phi$ . Типичные выходные кривые для разных режимов ввода индикатора представлены на рис. 22 (а, б). Сопоставление кривых для прямой и знакопеременной конвекции при непрерывном вводе индикатора (рис. 22а) показывает, что характерный размер зоны смеси — расстояние  $\Phi_{0,1}^{0,9}$  между точками с относительной концентрацией 0,1 и 0,9 — в последнем случае меньше при равном в обоих случаях пути, пройденном центром зоны. Опыты в режиме непрерывно-импульсного ввода индикатора (рис. 22б) приводят к такому же качественному выводу. В последнем случае за характерный размер зоны смеси принимается расстояние  $\Phi_{0,1}$  между точками с относительной концентрацией 0,1 на переднем и заднем фронте.

Поскольку при знакопеременной конвекции центр зоны смеси проходит в прямом направлении лишь половину длины образца ее размер должен быть меньше, чем на выходной кривой для прямой конвекции. Следовательно в представленных на рис. 22а и 22б случаях в фазе обратного движения зона смеси или продолжает расти, но более медленно, чем в фазе прямого движения, или сжимается, но с меньшей скоростью, чем расширение при прямой конвекции. Для количественной оценки этих эффектов использована модель гидродинамической дисперсии с различными коэффициентами для прямой и обратной конвекции, представленная уравнением (3.56).

Рассмотрим решения уравнения (3.56) для расчетных схем импульсного, непрерывного и непрерывно-импульсного ввода индикатора в образец.

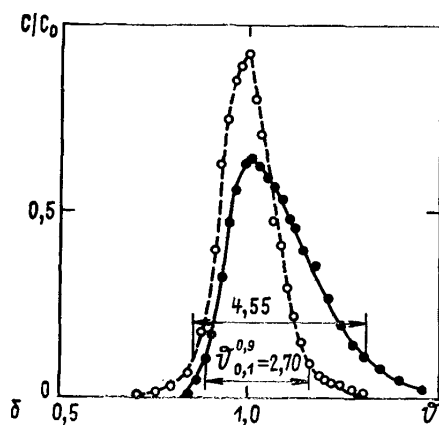
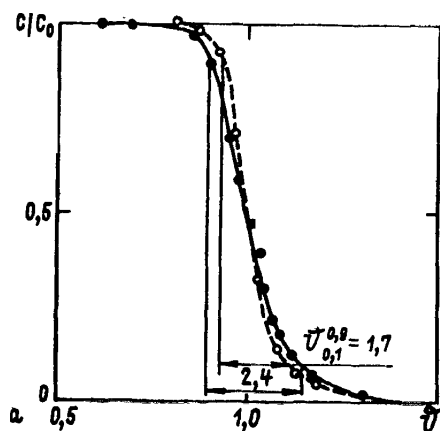


Рис. 22. Выходные кривые для прямого (сплошная линия) и обратного (штриховая линия) движения при непрерывном (а) и непрерывно-импульсном (б) вводе индикатора

**Импульсный ввод индикатора.** При вводе массы индикатора  $M_1$  в точке  $x=x_0$  для схемы неограниченной области  $-\infty < x < +\infty$  известное решение (3.56)

$$c_1 = \frac{M_1}{2(\pi D_1 t/n)^{1/2}} \exp \left[ -\frac{(x-x_0-v_1 t/n)^2}{4D_1 t/n} \right] \quad (3.57)$$

в конце первой фазы прямого движения ( $t=t_1$ ) при  $l_1=v_1 t_1/n$ ,  $\sigma_1=2(D_1 t_1/n)^{1/2}$  имеет вид

$$c_1(x, x_0, t_1) = \frac{M_1}{\pi^{1/2} \sigma_1} \exp \left[ -\frac{(x-x_0-l_1)^2}{\sigma_1^2} \right]. \quad (3.58)$$

Для второй фазы, когда меняется знак при первой производной по  $x$ , уравнение (3.56) должно решаться при начальном распределении концентраций (3.58). Заменяем это распределение множеством элементарных источников мощностью  $c_1(x_1, t_1)$ . Поле концентраций, вызванное действием одного такого элементарного источника, определяется выражением

$$c_2'(x, x_1, t_2) = \frac{c_1(x_1, t_1)}{2\pi^{1/2}\sigma_2} \exp \left[ -\frac{(x-x_1-l_2)^2}{\sigma_2^2} \right], \quad (3.59)$$

где  $l_2 = v_2 t_2 / n$ ,  $\sigma_2 = 2(D_2 t_2 / n)^{1/2}$ .

Суммируя действие этих источников, получим

$$\begin{aligned} c_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} c_2'(x_1, t_2) dx_1 = \\ &= \frac{M_1/n}{[\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)]^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{[(x_0 + l_1) - (x + l_2)]^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

В частном случае при регистрации концентрации в точке ввода индикатора  $x = x_0$  уравнение выходной кривой для второй фазы имеет вид

$$c_2(t_2) = \frac{M_1/n}{[\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)]^{1/2}} \exp \left[ -\frac{(l_1 - l_2)^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right]. \quad (3.61)$$

**Непрерывный ввод индикатора.** В качестве первого приближения для первой фазы может быть использовано решение контактной задачи

$$\frac{c}{c_0} = 0,5 \operatorname{erf} c \frac{x - v_1 t / n}{2(D_1 t / n)^{1/2}}. \quad (3.62)$$

Это решение удовлетворительно аппроксимирует точное с условием  $c(0, t) = c_0$  при  $v_1 x / D_1 \geq 20$ . То же решение вида получается методом мгновенных источников, распределенных на полупрямой  $-\infty < x \leq 0$ . Исходя из этого решение для второй фазы находится интегрированием (3.60) по  $x_0$  в пределах от  $-\infty$  до 0. В результате получается

$$\frac{c_2}{c_0} = 0,5 \operatorname{erf} c \frac{x - l_1 + l_2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{1/2}}. \quad (3.63)$$

Уравнение выходной кривой в точке ввода индикатора имеет вид (3.63) при  $x = 0$ .

**Непрерывно-импульсный ввод индикатора.** Моделируя этот режим ввода полосообразным начальным распределением концентрации  $c = c_0$  при  $-a/2 \leq x \leq a/2$ , получаем решение Н. Н. Веригина [73] для первой фазы

$$\frac{c}{c_0} = 0,5 \left[ \operatorname{erf} c \frac{x - (l_1 + a/2)}{\sigma_1} - \operatorname{erf} c \frac{x - (l_1 - a/2)}{\sigma_1} \right]. \quad (3.64)$$

Аналогичным предыдущему методом (интегрированием выражения (3.60) по  $x_0$  в пределах от  $-a/2$  до  $a/2$ ) получается

решение для второй фазы

$$\frac{c}{c_0} = 0,5 \operatorname{erfc} \frac{(x-a/2)-(l_1-l_2)}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{1/2}} - \operatorname{erfc} \frac{(x+a/2)-(l_1-l_2)}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{1/2}}. \quad (3.65)$$

Уравнение выходной кривой в точке ввода индикатора имеет вид (3.65) при  $x=0$ .

По приведенным выше решениям разработана методика обработки экспериментальных данных и определения параметра гидродинамической дисперсии в первой  $\lambda_1$  и второй  $\lambda_2$  фазах движения раствора через образец грунта. Для режима непрерывного ввода индикатора при знакопеременной конвекции используются методы касательной в точке перегиба выходной кривой (МК) и прямолинейной анаморфозы с обработкой методом наименьших квадратов (МНК). По первому методу при отборе проб в точке  $x=0$  решение (3.63) записывается в форме

$$\bar{c}_2 = \frac{c_2}{c_0} 0,5 \operatorname{erfc} \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2(\vartheta_1/\xi_1 + \vartheta_2/\xi_2)^{1/2}}, \quad (3.66)$$

где  $\vartheta_i = v_i t_i / l_i n$ ,  $\xi_i = v_i l_i / D_i$ ,  $i=1, 2$ .

Наклон касательной в точке перегиба  $\vartheta_2 = \vartheta_2^*$

$$i = \left. \frac{\partial \bar{c}_2}{\partial \vartheta_2} \right|_{\vartheta_2^*} = -\frac{1}{2} \left[ \pi \left( \frac{\vartheta_1^*}{\xi_1} + \frac{\vartheta_2^*}{\xi_2} \right) \right]^{1/2}. \quad (3.67)$$

Отсюда при  $\vartheta_1^* = \vartheta_2^*$

$$\xi_2 = \frac{4\pi i^2 \vartheta_1^* \xi_1}{\xi_1 - 4\pi i^2 \vartheta_1^*}, \quad \lambda_2 = \frac{\vartheta_1^* l_0}{\xi_2}, \quad (3.68)$$

где  $\vartheta_1^*$  — фиксированная доля порового объема, введенного в образец длиной  $l_0$  в первой фазе эксперимента.

Значения  $\xi_1$  и  $\lambda_1$  вычисляются по данным опытов в режиме прямой конвекции по одной из известных методик [29].

Прямолинейная анаморфоза выражения (3.66) может быть построена следующим образом

$$\varphi_i = b + \vartheta_{2i}^*, \quad (3.69)$$

причем

$$\varphi = \left[ \frac{\vartheta_{2i}^* - \vartheta_1^*}{2 \operatorname{erf}^{-1}(1 - 2c_{2i})} \right]^2, \quad b = \frac{\vartheta_1^* n}{\xi_1 n_0}, \quad k = \frac{n}{\xi_2 n_0},$$

$c_{2i}$  — концентрации проб, соответствующие поровым объемам  $\vartheta_{2i}^* = \vartheta_i^* - \vartheta_1^*$ , пропущенным через образец во второй фазе.

Параметры прямой (3.69)  $b$  и  $k$  рассчитываются методом наименьших квадратов, что позволяет найти  $\xi_2$  и  $n$ , а также  $\lambda_2$ :

$$\xi_2 = \frac{n}{k n_0}, \quad n = \frac{\xi_1 n_0 b}{\vartheta_1^*}, \quad \lambda_2 = \frac{\vartheta_1^* l_0}{\xi_2}. \quad (3.70)$$

Следует иметь в виду, что при обработке методом наименьших квадратов большое влияние на величины определяемых

параметров оказывают экспериментальные точки концентраций, близких к нулю или единице, достоверность которых ниже, чем точек в средней части выходной кривой. Это приводит, как правило, к некоторому завышению параметра  $\lambda_2$ . Поэтому точки в областях  $\bar{c} < 0,05$  и  $\bar{c} > 0,95$  в расчет вводить не следует.

Для режима импульсного и непрерывно-импульсного ввода индикатора при знакопеременной конвекции обработка экспериментальных данных может быть выполнена по зависимостям (3.61) и (3.65). При отыскании двух параметров нужно дополнить их соответствующими уравнениями для максимальной концентрации  $\bar{c}_{2\max}$ . Сходная методика обработки данных изложена в монографии [29]. Однако, имея ввиду довольно большие ошибки в определении максимальной концентрации и времени ее выхода из образца, целесообразно обработку экспериментальных данных вести интегральными методами, одним из которых является метод статистических моментов [29].

Анализ решений показывает, что применение зависимости (3.61) для импульсного ввода в обработке результатов опытов в режиме непрерывно-импульсного ввода индикатора оправдано при размерах «пакета»  $\theta_0 < 0,05$ . В этом случае ошибка в определении концентраций не превышает 14% (при  $\xi \leq 500$ ). При  $\theta_0 = 0,1$  ошибка в области малых концентраций достигает 100%, а в области максимума 8,4% при  $\xi = 100$  и 42% при  $\xi = 500$ . Так как в экспериментах с непрерывно-импульсным вводом индикатора задавались значения  $\theta_0$  порядка 0,16—0,17, обработка их данных велась методом статистических моментов (МСМ).

Выражения для координаты центра тяжести выходной кривой  $\theta_{ц}$  и дисперсия  $\sigma_1^2$  в фазе прямого движения приводятся в работе [29]. Для второй фазы эти интегральные характеристики имеют вид

$$\theta_{ц2} = \frac{2}{\xi_2} + 2\theta_1 + \frac{\theta_0}{2}, \quad \sigma_2^2 = \frac{2\theta_1\xi_2^2/\xi_1 + 2\theta_1/\xi_2 + 8}{\xi_2^2} + \frac{\theta_0^2}{12}. \quad (3.71)$$

При  $n = n_0$  из (3.71) следует формула для определения  $\xi_2$

$$\xi_2 = \frac{\theta_1 + [\theta_1^2 - 8(2\theta_1/\xi_1 - \sigma_2^2 + \theta_0^2/12)]^{1/2}}{\sigma_2^2 - 2\theta_1/\xi_1 - \theta_0^2/12}. \quad (3.72)$$

и следовательно параметра  $\lambda_2$  по (3.70). При  $n \neq n_0$  в (3.71) необходимо ввести  $\theta_1 = -\theta_1 * n/n_0$  и  $\theta_0 = \theta_0 * n/n_0$  и из совместного решения двух уравнений найти  $n$  и  $\xi_2$ , а также  $\lambda_2$ .

Сводные результаты обработки данных экспериментальных исследований приведены в табл. 18. В ней помещены только опыты со знакопеременной конвекцией; средние значения параметра дисперсии  $\lambda_1$  для первой фазы брались из соответствующих опытов с прямой конвекцией на той же набивке с осреднением по серии. Результаты опытов, обработанные методами касательной (МК), наименьших квадратов (МНК) и статистиче-



Таблица 18

Параметры гидродинамической дисперсии  $\bar{\lambda}_1$  и  $\bar{\lambda}_2$  (в см) по данным экспериментальных исследований

№№ серий	№№ опытов	Длина образца, см	Пористость	Средняя скорость фильтрации, см/с		Методика обработки опытных данных						
						МК		МНК		МСМ		
						$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{v}_0$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$
I	7	20,0	0,37	5,59	5,16	0,16	-0,09	0,16	-0,07			
	8	»	»	»	»	»	-0,10	»	-0,13			
II	12	40,0	0,23	4,14	4,17	0,25	-0,09	0,41	-0,10			
	15	»	»	»	»	»	-0,09	»	-0,17			
III	21	20,0	0,35	4,32	4,63	0,06	-0,02	0,16	-0,014			
	22	»	»	»	»	»	-0,02	»	-0,12			
	23	»	»	»	»	»	-0,01	»	-0,11			
	24	»	»	»	»	»	-0,02	»	-0,12			
	25	»	»	»	»	»	0,04	»	-0,11			
IV	28	»	»	3,88	3,73	—	—	—	—	0,163	0,113	0,024
	30	»	»	»	»	—	—	—	—	0,167	»	-0,047

ских моментов (МСМ), представлены осредненными значениями параметра  $\lambda_2$  для второй фазы обратного движения.

Почти во всех опытах для фазы обратного движения получены отрицательные значения параметра гидродинамической дисперсий. По отдельным опытам этот параметр остается положительным, но существенно меньшим по величине, чем в фазе прямого движения. Обработка методом наименьших квадратов дает несколько большие значения параметра дисперсии, учитывая тянущиеся хвосты выходных кривых.

При непрерывно-импульсном вводе индикатора отмечается рост максимума выходной кривой при сравнении с данными опытов с прямой конвекцией.

Таким образом, экспериментальными исследованиями установлено, что при знакопеременной конвекции в фазе обратного движения происходит сжатие зоны смеси (или значительное замедление ее роста). Этот эффект объясняется частичным сохранением поля локальной неоднородности скоростей в поровых каналах и имеет место даже в образцах однородного песка. В смеси песка с гранулами полистирола отмечено его большее проявление. Следует ожидать, что в трещиноватых, пористо-трещиноватых и слоисто-неоднородных породах роль этого эффекта будет более значительной.

Примерами реализации предложенной модели гидродинамической дисперсии при знакопеременной конвекции являются полученные ниже решения для различных расчетных схем разового загрязнения подземных вод.

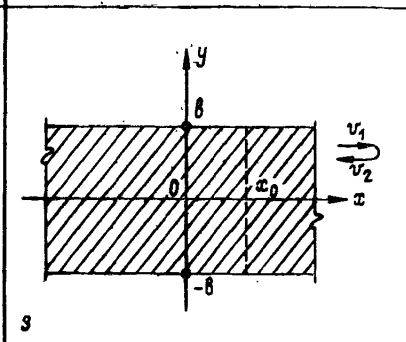
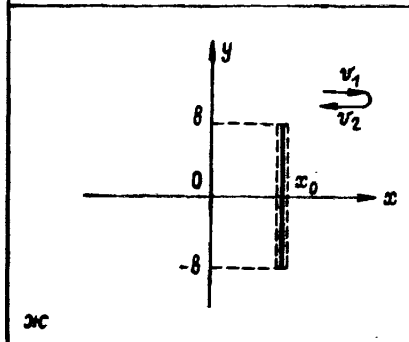
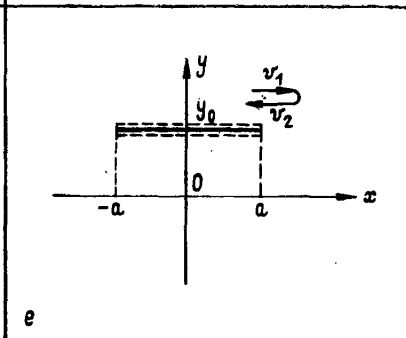
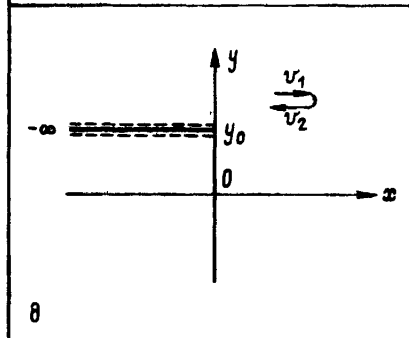
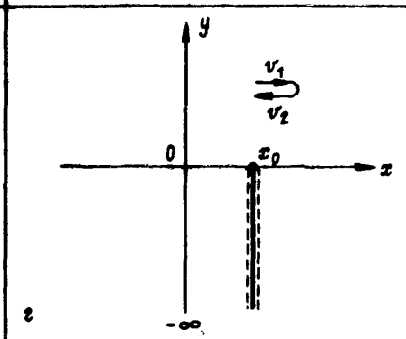
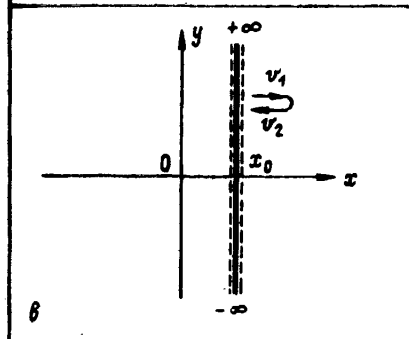
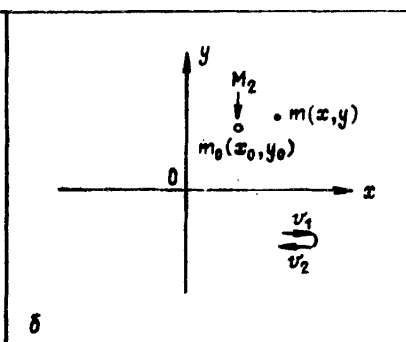
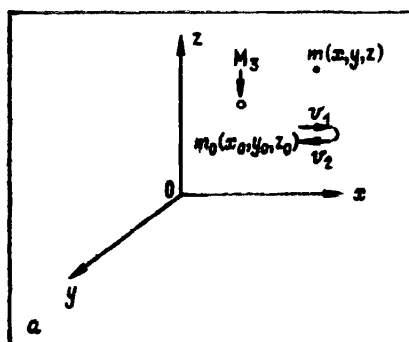
### 3.2.2. Действие мгновенных источников загрязнения подземных вод в линейном потоке

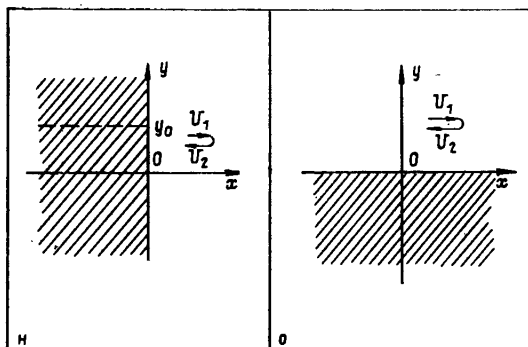
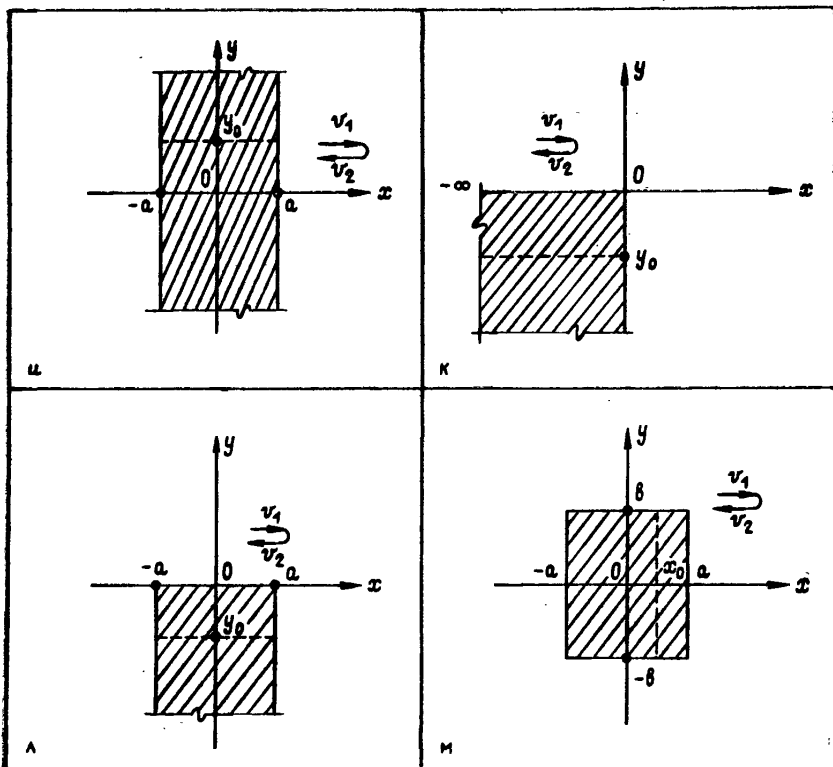
Часто встречающиеся расчетные схемы разового загрязнения подземных вод рассматриваются обычно с помощью модели мгновенных источников. Для разных форм области начального загрязнения решения задач миграции веществ в пласте при однонаправленном потоке подземных вод приведены, например, в [73]. Ряд аналогичных расчетных схем, но в условиях знакопеременной конвекции, может быть также построен с учетом возможных инженерных ситуаций, а также в предположении, что из них методом суперпозиции могут быть получены более сложные случаи. Методология решения задач показывается на примере схемы мгновенного точечного источника в пространстве (рис. 23).

#### Точечный источник (рис. 23а)

Для одномерного движения по оси  $x$  с постоянной скоростью  $v_1 = \text{const}$  дифференциальное уравнение

$$D_{x1} \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} + D_{y1} \frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2} + D_{z1} \frac{\partial^2 c_1}{\partial z^2} - v_1 \frac{\partial c_1}{\partial x} = n_0 \frac{\partial c_1}{\partial t}, \quad (3.73)$$





в котором  $c_1$  — концентрация;  $D_{x1}$ ,  $D_{y1}$ ,  $D_{z1}$  — компоненты тензора гидродинамической дисперсии, имеет известное для рассматриваемой схемы решение:

$$c_1(x, y, z, x_0, y_0, z_0, t) = \frac{M_3/n_0}{8\pi^{3/2}t^{3/2}\sqrt{D_{x1}D_{y1}D_{z1}}} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{(x-x_0-v_1t/n_0)^2}{4D_{x1}t}-\frac{(y-y_0)^2}{4D_{y1}t}-\frac{(z-z_0)^2}{4D_{z1}t}\right\}. \quad (3.74)$$

Здесь  $x_0, y_0, z_0$  — координаты импульсного ввода вещества,  $\bar{D}_{x1, y1, z1} = D_{x1, y1, z1}/n_0$ , а  $M_3$  — масса введенного вещества.

В конце первой фазы движения в прямом направлении  $t = t_1$ , обозначая  $v_1t_1/n_0 = l_1$

$$\sigma_{x1} = 2\sqrt{D_{x1}t_1/n_0}; \quad \sigma_{y1} = 2\sqrt{D_{y1}t_1/n_0}; \quad \sigma_{z1} = 2\sqrt{D_{z1}t_1/n_0},$$

имеем из (3.74)

$$c_1(x, y, z, x_0, y_0, z_0, t_1) = \frac{M_3/n_0}{\pi^{3/2}\sigma_{x1}\sigma_{y1}\sigma_{z1}} \times \\ \times \exp\left[\frac{-(x-x_0-l_1)^2}{\sigma_{x1}^2}-\frac{(y-y_0)^2}{\sigma_{y1}^2}-\frac{(z-z_0)^2}{\sigma_{z1}^2}\right]. \quad (3.75)$$

Для второй фазы, когда скорость меняет не только значение, но и знак на обратный, дифференциальное уравнение

$$D_{x2}\frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} + D_{y2}\frac{\partial^2 c_2}{\partial y^2} + D_{z2}\frac{\partial^2 c_2}{\partial z^2} + v_2\frac{\partial c_2}{\partial x} = n_0\frac{\partial c}{\partial t} \quad (3.76)$$

должно рассматриваться при условии начального распределения концентраций, полученного на конец первой фазы.

Будем считать, что в начале второй фазы действует множество элементарных источников мощностью  $c_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ . Поле концентраций, вызванное действием одного такого элементарного источника, может быть найдено из выражения

Рис. 23. Схемы источников:

а) точечный в пространстве; б) линейный источник неограниченной длины; в) плоский источник неограниченной длины; г) полуограниченный плоский источник, параллельный плоскости ZOY; д) полуограниченный плоский источник, параллельный плоскости XOZ; е) полосообразный плоский источник, параллельный плоскости XOZ; ж) полосообразный плоский источник, параллельный плоскости ZOY; з) объемный источник в форме неограниченного слоя конечной мощности, параллельного плоскости XOZ; и) объемный источник в форме неограниченного слоя конечной мощности, параллельного плоскости ZOY; к) объемный источник в форме прямоугольного двугранника с осью OX и углом  $\frac{1}{2}\pi$ ; л) объемный источник в виде трехгранника; м) объемный источник в форме стержня; прямоугольного поперечного сечения неограниченной длины с осью, параллельной OZ; н) объемный источник в форме полупространства, ограниченного плоскостью ZOY (контактная задача); о) объемный источник в форме полупространства, ограниченного плоскостью XOY

$$c_2'(x, y, z, x_1, y_1, z_1, t) = \frac{c_1(x_1, y_1, z_1, t_1)}{8\pi^{3/2}t^{3/2}\sqrt{\bar{D}_{x2}\bar{D}_{y2}\bar{D}_{z2}}} \times \\ \times \exp\left[\frac{-(x-x_1+v_2t_2/n_0)^2}{4\bar{D}_{x2}t} - \frac{(y-y_0)^2}{4\bar{D}_{y2}t} - \frac{(z-z_0)^2}{4\bar{D}_{z2}t}\right]. \quad (3.77)$$

Если здесь положить  $v_2t/n_0 = l_2$ ;  $\sigma_{x2} = 2\sqrt{\bar{D}_{x2}t/n_0}$ ;  $\sigma_{y2} = 2\sqrt{\bar{D}_{y2}t/n_0}$ ;  $\sigma_{z2} = 2\sqrt{\bar{D}_{z2}t/n_0}$ , то получим

$$c_2' = \frac{c_1(x_1, y_1, z_1, t_1)}{\pi^{3/2}\sigma_{x2}\sigma_{y2}\sigma_{z2}} \exp\left[\frac{-(x-x_1+l_2)^2}{\sigma_{x2}^2} - \frac{(y-y_1)^2}{\sigma_{y2}^2} - \frac{(z-z_1)^2}{\sigma_{z2}^2}\right]. \quad (3.78)$$

Для нахождения результирующего поля концентраций от действия всего множества элементарных источников проинтегрируем их по  $x_1, y_1, z_1$ , что даст

$$c_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} c_2'(x_1, y_1, z_1, t) dx_1 dy_1 dz_1. \quad (3.79)$$

Учитывая значения  $c_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$  по (3.75), получим

$$c_2' = \frac{M_3/n_0}{\pi^3\sigma_{x1}\sigma_{y1}\sigma_{z1}\sigma_{x2}\sigma_{y2}\sigma_{z2}} \times \\ \times \exp\left[-\frac{(x_1-x_0-l_1)^2}{\sigma_{x1}^2} - \frac{(y-y_0)^2}{\sigma_{y1}^2} - \frac{(z-z_0)^2}{\sigma_{z1}^2}\right] \times \\ \times \exp\left[-\frac{(x-x_1+l_2)^2}{\sigma_{x2}^2} - \frac{(y-y_1)^2}{\sigma_{y2}^2} - \frac{(z-z_1)^2}{\sigma_{z2}^2}\right]. \quad (3.80)$$

Подставляя (3.80) в (3.79) и интегрируя поле преобразований, получим окончательно

$$c_2 = \frac{M_3 \exp\left\{-\frac{[(x_0+l_1)-(x+l_2)]^2}{\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2} - \frac{(y-y_0)^2}{\sigma_{y1}^2 + \sigma_{y2}^2} - \frac{(z-z_0)^2}{\sigma_{z1}^2 + \sigma_{z2}^2}\right\}}{n_0\pi^{3/2}[(\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2)(\sigma_{y1}^2 + \sigma_{y2}^2)(\sigma_{z1}^2 + \sigma_{z2}^2)]^{1/2}}. \quad (3.81)$$

В частном случае регистрации концентрации в точке ввода массы  $x_0, y_0, z_0$  во второй фазе будет получена выходная кривая, уравнение которой

$$c_2(t_2) = \frac{M_3 \exp\left[-\frac{(l_1-l_2)^2}{\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2}\right]}{n_0\pi^{3/2}[(\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2)(\sigma_{y1}^2 + \sigma_{y2}^2)(\sigma_{z1}^2 + \sigma_{z2}^2)]^{1/2}}. \quad (3.82)$$

Последнее выражение может быть использовано для решения обратных задач по данным импульсного ввода индикатора

в скважину с коротким фильтром, если есть основания принять схему пласта неограниченной мощности и не учитывать влияния его границ.

На основе фундаментального решения для точечного источника при импульсном вводе массы могут быть получены самые разнообразные расчетные схемы и решения для них. Ниже представлены некоторые случаи, геометрия которых соответствует как схемам гидрогеохимических исследований методами индикаторов, так и ряду задач рассеяния вещества при заданном в пространстве начальном его распределении.

### Линейный источник неограниченной длины (рис. 23б)

Эта схема открывает серию задач, которые принято называть плановыми. Дифференциальное уравнение процесса гидродинамической дисперсии для них не содержит составляющей по координате  $z$ . Все характеристики процесса считаются каким-либо образом осредненными по этой координате. Для первой фазы в этом случае получается уравнение

$$D_{x1} \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} + D_{y1} \frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2} - v_1 \frac{\partial c_1}{\partial x} = n_0 \frac{\partial c_1}{\partial t}. \quad (3.83)$$

Для линейного источника неограниченной длины в пространстве или что то же самое точечного источника на плановой плоскости решение (3.83) может быть получено интегрированием (3.75) по оси  $z$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Оно известно [73] и имеет следующий вид:

$$c_1(x, y, x_0, y_0, t_1) = \frac{M_2/n_0}{\pi \sigma_{x1} \sigma_{y1}} \exp \left[ -\frac{(x-x_0-l_1)^2}{\sigma_{x1}^2} - \frac{(y-y_0)^2}{\sigma_{y1}^2} \right]. \quad (3.84)$$

Дифференциальное уравнение для второй фазы записывается

$$D_{x2} \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} + D_{y2} \frac{\partial^2 c_2}{\partial y^2} + v_2 \frac{\partial c_2}{\partial x} = n_0 \frac{\partial c_2}{\partial t} \quad (3.85)$$

и также может быть решено путем интегрирования полученного выше решения для точечного пространственного источника (3.81) по координате  $z$ . Опуская необходимые промежуточные выкладки, окончательно получаем

$$c_2 = \frac{M_2}{n_0 \pi \sqrt{\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2} \sqrt{\sigma_{y1}^2 + \sigma_{y2}^2}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{[(x_0+l_1)-(x+l_2)]^2}{\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2} - \frac{(y-y_0)^2}{\sigma_{y1}^2 + \sigma_{y2}^2} \right\}. \quad (3.86)$$

Обозначения те же, что в выражении (3.75).

В частном случае для решения обратных задач при импульсном вводе индикатора в точку с координатами  $(x_0, y_0)$ ,

выходная кривая может быть получена по уравнению

$$c_2(t_2) = \frac{M_2 \exp \left[ -\frac{(l_1 - l_2)^2}{\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2} \right]}{n_0 \pi \left[ (\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2) (\sigma_{y1}^2 + \sigma_{y2}^2) \right]^{1/2}}. \quad (3.87)$$

**Плоский источник неограниченной длины (рис. 23в)**

Эта схема используется обычно при обработке результатов лабораторных экспериментов. Решения для фаз прямого и обратного движения подземных вод даются формулами (3.57) и (3.60).

Представленные выше решения для трех схем (точечного, линейного и плоского мгновенных источников) позволяют решить ряд плановых и объемных задач, которые отличаются друг от друга лишь геометрической формой начального заполнения пласта индикатором. Решения для них получены в предположении неограниченного водоносного пласта.

**Полуограниченный плоский источник, параллельный плоскости  $хоу$  (рис. 23г)**

Решение для однонаправленного движения получается из решения (3.84) для линейного источника неограниченной длины, параллельного оси  $оу$ , путем интегрирования его по оси  $у$  от  $-\infty$  до 0. В результате имеем

$$c_1 = \frac{M_1/n_0}{2\sqrt{\pi}\sigma_{x1}} \cdot e^{\frac{-(x-x_0-l_1)^2}{\sigma_{x1}^2}} \operatorname{erfc} \frac{y}{\sigma_{y1}}. \quad (3.88)$$

Чтобы получить решение для второй фазы движения поступаем аналогично предыдущему, т. е. решение (3.86) для второй фазы линейного источника неограниченной длины интегрируем по координате  $у$  от  $-\infty$  до 0. После преобразований будем иметь

$$c_2 = \frac{M_1 \exp \left\{ \frac{-[(x_0 + l_1) - (x + l_2)]^2}{\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2} \right\}}{2n_0 \sqrt{\pi} \sqrt{\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2}} \operatorname{erfc} \left[ \frac{y}{\sqrt{\sigma_{y1}^2 + \sigma_{y2}^2}} \right]. \quad (3.89)$$

**Полуограниченный плоский источник, параллельный плоскости  $хоz$  (рис. 23д)**

Если полученное выше решение (3.84) для линейного мгновенного источника неограниченной длины в точке с координатами  $(x_0, y_0)$  проинтегрировать по  $x_0$  от  $-\infty$  до 0, то получим

$$c_1 = \frac{M_1}{2n_0 \sqrt{\pi} \sigma_{y1}} e^{\frac{(y-y_0)^2}{\sigma_{y1}^2}} \operatorname{erfc} \left( \frac{x-l_1}{\sigma_{x1}} \right). \quad (3.90)$$

Выражение (3.90) есть решение для полуограниченного плоского источника параллельного плоскости  $хоz$  для однонаправленного движения.



Аналогично можно записать решение для второй фазы. Для этого решение (3.86) нужно проинтегрировать по координате  $x_0$  от  $-\infty$  до 0. Это дает

$$c_2(x, y, y_0, t) = \frac{M_1 \exp \left[ -\frac{(y-y_0)^2}{\sigma_{y1}^2 + \sigma_{y2}^2} \right]}{2n_0 \sqrt{\pi} \sqrt{\sigma_{y1}^2 + \sigma_{y2}^2}} \operatorname{erfc} \left[ \frac{x-(l_1-l_2)}{\sqrt{\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2}} \right]. \quad (3.91)$$

**Полосообразный плоский источник, параллельный плоскости  $xoz$  (рис. 23е)**

Решение для этой схемы может быть получено из выражения для неограниченного линейного источника (3.84) интегрированием его от « $-a$ » до « $a$ » по  $x_0$ . Сделав необходимые преобразования, получим

$$c_1(x, x_0, t_1) = \frac{M_1}{2n_0 \sqrt{\pi} \sigma_{y1}} \exp \left[ -\frac{(y-y_0)^2}{\sigma_{y1}^2} \right] \times \\ \times \left[ \operatorname{erfc} \frac{x-(a+l_1)}{\sigma_{x1}} - \operatorname{erfc} \frac{x+(a-l_1)}{\sigma_{x1}} \right]. \quad (3.92)$$

Выражение для второй фазы разнонаправленного движения получается интегрированием (3.86) по той же координате  $x_0$  в тех же пределах.

$$c_2(x, x_0, t) = \frac{M_1}{2n_0 \sqrt{\pi} (\sigma_{y1}^2 + \sigma_{y2}^2)^{1/2}} \exp \left[ -\frac{(y-y_0)^2}{\sigma_{y1}^2} \right] \times \\ \times \left[ \operatorname{erfc} \frac{(x-a)-(l_1-l_2)}{\sqrt{\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2}} - \operatorname{erfc} \frac{(x+a)-(l_1-l_2)}{\sqrt{\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2}} \right]. \quad (3.93)$$

**Полосообразный плоский источник, параллельный плоскости  $zoy$  (рис. 23ж)**

Решение для этой схемы получается аналогично предыдущему с той лишь разницей, что интегрирование выражения (3.84) ведется по координате  $y_0$  в пределах от « $-b$ » до « $+b$ ». В результате получается:

$$c_1(x, x_0, t_1) = \frac{M_1}{2n_0 \sqrt{\pi} \sigma_{x1}} \exp \left[ -\frac{(x-x_0-l_1)^2}{\sigma_{x1}^2} \right] \times \\ \times \left[ \operatorname{erfc} \frac{y-b}{\sigma_{y1}} - \operatorname{erfc} \frac{y+b}{\sigma_{y1}} \right]. \quad (3.94)$$

Во второй фазе, когда скорость меняет свой знак на обратный, зависимость  $c_2(x, x_0, t)$  получается интегрированием (3.86) по текущей координате  $y_0$  от  $-b$  до  $+b$ . Распределение концентраций в этом случае

$$c_2(x, x_0, t_2) = \frac{M_1}{2 \sqrt{\pi} (\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{[(x_0+l_1)-(x+l_2)]^2}{\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2} \right\} \times \\ \times \left[ \operatorname{erfc} \frac{y-b}{\sqrt{\sigma_{y1}^2 + \sigma_{y2}^2}} - \operatorname{erfc} \frac{y+b}{\sqrt{\sigma_{y1}^2 + \sigma_{y2}^2}} \right]. \quad (3.95)$$

**Объемный источник в форме неограниченного слоя конечной мощности, параллельного плоскости  $xoz$  (рис. 23з)**

Для того, чтобы получить решение для этого случая, необходимо взять выражение для полосообразного плоского источника параллельного плоскости  $zoy$  и проинтегрировать его по оси  $x$  от  $-\infty$  до  $\infty$ , Тогда:

$$c_1 = \frac{M_1}{2n_0} \left[ \operatorname{erfc} \frac{y-j}{\sigma_{y1}} - \operatorname{erfc} \frac{y+b}{\sigma_{y1}} \right]. \quad (3.96)$$

При изменении знака скорости на обратный поле концентраций от действия этого источника будет:

$$c_2 = \frac{M_1}{2n_0} \left[ \operatorname{erfc} \frac{y-b}{\sqrt{\sigma_{y1}^2 + \sigma_{y2}^2}} - \operatorname{erfc} \frac{y+b}{\sqrt{\sigma_{y1}^2 + \sigma_{y2}^2}} \right]. \quad (3.97)$$

**Объемный источник в форме неограниченного слоя конечной мощности, параллельного плоскости  $zoy$  (рис. 23и)**

При задании источника такой формы решение для него будет

$$c_1 = \frac{M_1}{2n_0} \left[ \operatorname{erfc} \frac{x-(a+l_1)}{\sigma_{x1}} - \operatorname{erfc} \frac{x+(a-l_1)}{\sigma_{x1}} \right]. \quad (3.98)$$

Оно получено из выражения (3.92) путем интегрирования его по координате  $y_0$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Для второй фазы с последующим изменением знака скорости на обратный получено следующее решение из (3.93) по аналогии с (3.98):

$$c_2 = \frac{M_1}{2n_0} \left[ \operatorname{erfc} \frac{(x-a)-(l_1-l_2)}{\sqrt{\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2}} - \operatorname{erfc} \frac{(x+a)-(l_1-l_2)}{\sqrt{\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2}} \right]. \quad (3.99)$$

**Объемный источник в форме прямоугольного двугранника с осью  $ox$  и углом  $3/2\pi$  (рис. 23к)**

Для этой схемы решение может быть получено интегрированием выражения (3.90) по оси  $y$  в пределах от  $-\infty$  до 0. После преобразований будем иметь для первой фазы

$$c_1 = \frac{M_1}{4n_0} \operatorname{erfc} \frac{x-l}{\sigma_{x1}} \operatorname{erfc} \frac{y}{\sigma_{y1}}. \quad (3.100)$$

При смене знака скорости на обратный решение для второй фазы имеет вид

$$c_2 = \frac{M_1}{4n_0} \operatorname{erfc} \left[ \frac{x-(l_1-l_2)}{\sqrt{\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2}} \right] \operatorname{erfc} \frac{y}{\sqrt{\sigma_{y1}^2 + \sigma_{y2}^2}}. \quad (3.101)$$

**Объемный источник в виде трехгранника (рис. 23л)**

Если решение (3.92) для полосообразного плоского источника, параллельного плоскости  $xoz$ , проинтегрировать от  $-\infty$  до 0 по координате  $y$ , то получим уравнение для рассматри-

ваемой схемы, которое выглядит так:

$$c_1 = \frac{M_1}{4n_0} \left[ \operatorname{erfc} \frac{x-(a+l_1)}{\sigma_{x_1}} - \operatorname{erfc} \frac{x+(a-l_1)}{\sigma_{x_1}} \right]. \quad (3.102)$$

Аналогичным путем можно получить выражение для второй фазы, проинтегрировав (3.93) по тем же координатам и в тех же пределах. В результате будем иметь следующую форму записи этого решения:

$$c_2 = \frac{M_1}{4n_0} \left[ \operatorname{erfc} \frac{(x-a)-(l_1-l_2)}{\sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2}} - \operatorname{erfc} \frac{(x+a)-(l_1-l_2)}{\sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2}} \right] \times \\ \times \operatorname{erfc} \frac{y}{\sqrt{\sigma_{y_1}^2 + \sigma_{y_2}^2}}. \quad (3.103)$$

**Объемный источник в форме стержня прямоугольного поперечного сечения неограниченной длины с осью параллельной  $oz$  (рис. 23м)**

Решение для прямоугольного в плане заполнения пласта раствором может быть найдено из выражения (3.92), если проинтегрировать его в пределах от  $-b$  до  $+b$  по координате  $y$ . В результате получим

$$c_1 = \frac{M_1}{4n_0} \left[ \operatorname{erfc} \frac{x-(a+l_1)}{\sigma_{x_1}} - \operatorname{erfc} \frac{x+(a-l_1)}{\sigma_{x_1}} \right] \times \\ \times \left[ \operatorname{erfc} \frac{y-b}{\sigma_{y_1}} - \operatorname{erfc} \frac{y+b}{\sigma_{y_1}} \right]. \quad (3.104)$$

Для второй фазы, когда скорость меняет не только значение, но и знак на обратный, решение для этой схемы примет вид:

$$c_2 = \frac{M_1}{4n_0} \left[ \operatorname{erfc} \frac{(x-a)-(l_1-l_2)}{\sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2}} - \operatorname{erfc} \frac{(x+a)-(l_1-l_2)}{\sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2}} \right] \times \\ \times \left[ \operatorname{erfc} \frac{y-b}{\sqrt{\sigma_{y_1}^2 + \sigma_{y_2}^2}} - \operatorname{erfc} \frac{y+b}{\sqrt{\sigma_{y_1}^2 + \sigma_{y_2}^2}} \right]. \quad (3.105)$$

**Объемный источник в форме полупространства, ограниченного плоскостью  $zoy$  (контактная задача) (рис. 23н)**

Решение для двух полуограниченных сред (контактная задача) можно получить из выражения (3.90) для полуограниченного плоского источника параллельного плоскости  $hoz$  путем интегрирования его по координате  $y_0$ , что дает выражение (3.62).

Для второй фазы движения зоны смеси решение запишется в виде (3.63), которое получается из выражения (3.91) путем интегрирования его по координате  $y_0$ .

**Объемный мгновенный источник в форме полупространства, ограниченного плоскостью  $хоу$  (рис. 23о)**

Решение для первой фазы в этом случае будет:

$$c_1 = \frac{M_1}{2n_0} \operatorname{erfc} \frac{z}{\sigma_{z1}}. \quad (3.106)$$

Для второй фазы

$$c_2 = \frac{M_1}{2n_0} \operatorname{erfc} \frac{z}{\sqrt{\sigma_{z1}^2 + \sigma_{z2}^2}}. \quad (3.107)$$

### 3.2.3. Действие непрерывных источников загрязнения подземных вод в линейном потоке

В качестве примера здесь рассматриваются случаи непрерывного и непрерывно-импульсного загрязнения подземных вод для схемы плоского источника, действующего в течение всего времени однонаправленного движения в первой фазе. Во второй фазе поступление загрязняющих веществ прекращается и образовавшаяся загрязненная зона подземных вод сносится потоком в обратном направлении.

Случай непрерывного в первой фазе источника может быть рассмотрен с помощью модели мгновенного источника, включаемого в действие в произвольный момент времени  $\tau_1$  первой фазы длительностью  $t_1$ :

$$c_2 = \frac{M}{2\sqrt{\pi[D_1(t_1 - \tau_1) + D_2 t_2]/n_0}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{[v_1(t_1 - \tau_1)/n_0 - v_2 t_2/n_0 - x]^2}{4[D_1(t_1 - \tau_1) + D_2 t_2]/n_0} \right\}. \quad (3.108)$$

Для перехода к непрерывному источнику, действующему в течение первой фазы, необходимо проинтегрировать (3.108) по  $\tau_1$  от 0 до  $t_1$ . Для этой цели введем обозначения

$$\tau = [D_1(t_1 - \tau_1) + D_2 t_2]/n_0, \\ \alpha_1 = \frac{v_1^2}{4D_1^2}, \quad \beta_1 = \frac{D_1}{v_1} \left( x_2 + \frac{v_2 t_2}{n_0} + \frac{D_2}{D_1} \frac{v_1 t_2}{n_0} \right) \quad (3.109)$$

и представим (3.108) в форме

$$c_2 = \frac{M}{\sqrt{\pi\tau}} e^{-\alpha_1 \frac{(\tau - \beta_1)^2}{\tau}} d\tau, \quad (3.110)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{v_1^2}{4D_1^2}, \quad \beta_1 = \frac{D_1}{v_1} \left( x_2 + \frac{v_2 t_2}{n_0} + \frac{D_2}{D_1} \frac{v_1 t_2}{n_0} \right).$$

Интегрирование (3.110) по  $\tau_1$  от 0 до  $t_1$  дает следующее выражение

$$c_{2H} = \frac{M \cdot n_0}{\sqrt{\pi D_1}} \int_{D_2 t_2/n_0}^{(D_1 t_1 + D_2 t_2)/n_0} \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\alpha_1 \frac{(\tau - \beta_1)^2}{\tau}} d\tau, \quad (3.111)$$

которое удобно представить в виде суммы однотипных интегралов

$$c_{2H} = \frac{M \cdot n_0}{2D_1} e^{2\alpha_1 \beta_1} (I_1 - I_2), \quad (3.112)$$

отличающихся верхними пределами

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(D_1 t_1 + D_2 t_2)/n_0} \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\alpha_1 \tau - \alpha_1 \beta_1^2 / \tau} d\tau, \quad (3.113)$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{D_2 t_2/n_0} \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\alpha_1 \tau - \alpha_1 \beta_1^2 / \tau} d\tau. \quad (3.114)$$

Используя таблицы операционных соответствий [7], имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\vartheta} \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-a\tau - a/4\tau} d\tau &\doteq \frac{\exp[-\sqrt{a(p+a)}]}{p \sqrt{p+a}} \doteq \\ &\doteq \frac{1}{2\sqrt{a}} \left\{ e^{-\sqrt{a\vartheta}} \operatorname{erfc} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\vartheta}} - \sqrt{a\vartheta} \right) - \right. \\ &\quad \left. - e^{\sqrt{a\vartheta}} \operatorname{erfc} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\vartheta}} + \sqrt{a\vartheta} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Подставляя в (3.115) соответствующие пределы (3.113) и (3.114), а также  $a = \alpha_1 = \frac{v_1^2}{4D_1^2}$ ,  $\alpha = \alpha_1 \beta_1^2 = \left( x + \frac{v_2 t_2}{n_0} + \frac{D_2 v_1 t_2}{D_1 n_0} \right)$  и вводя при  $D_{1,2} = \lambda_{1,2} \cdot v_{1,2}$  безразмерный критерий  $\xi_x = v_1 x / D_1$ , характерные размеры зоны смещения  $\sigma_{1,2} = 2(D_{1,2} t_{1,2} / n_0)^{1/2}$  и расстояния, пройденные фронтом поршневого вытеснения  $l_{1,2} = v_{1,2} \cdot t_{1,2} / n_0$ , получаем:

$$c_{2H} = Q_1 (I_1^* - I_2^*), \quad Q_1 = M \cdot n_0 / v_1, \quad (3.116)$$

$$\begin{aligned} I_1^* &= \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erfc} \frac{x - l_1 + l_2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{1/2}} - e^{\xi_x + \frac{l_2}{\lambda_1} (1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1})} \operatorname{erfc} \frac{x + l_1 + l_2 + 2l_2 \lambda_2 / \lambda_1}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{1/2}} \right], \\ I_2 &= \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erfc} \frac{x + l_2}{\sigma_2} - e^{\xi_x + \frac{l_2}{\lambda_1} (1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1})} \operatorname{erfc} \frac{x + l_2 + 2l_2 \lambda_2 / \lambda_1}{\sigma_2} \right]. \end{aligned}$$

Величина  $M$  здесь представляет собой массовый расход индикатора в сечении  $x=0$  на единицу площади источника.

Иллюстрация полученного решения (3.116) представлена на рис. 24—25 для одинаковых коэффициентов дисперсии в первой фазе прямого движения  $\lambda_1 = 1,0$  м и для разных — во второй фазе обратного движения  $\lambda_2 = 1,0$  м,  $\lambda_2 = 0,1$  м. Остальные параметры заданы произвольно,  $v_1 = v_2 = 1$  м/сут,  $n_0 = 0,25$ ,  $t_1 = 10$  сут,  $M = 4$  г/л = 4000 г/м<sup>3</sup>. Анализ показывает, что при одинаковых коэффициентах дисперсии (рис. 24) во второй фазе продолжается развитие зоны смеси на переднем фронте, а

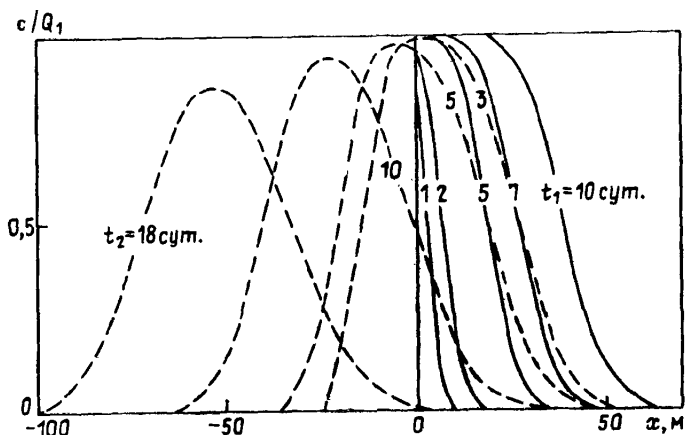


Рис. 24. Распределение концентраций индикатора по решению (3.116) при  $\lambda_1=\lambda_2=1,0$  м:

— фаза прямого движения; - - - фаза обратного движения

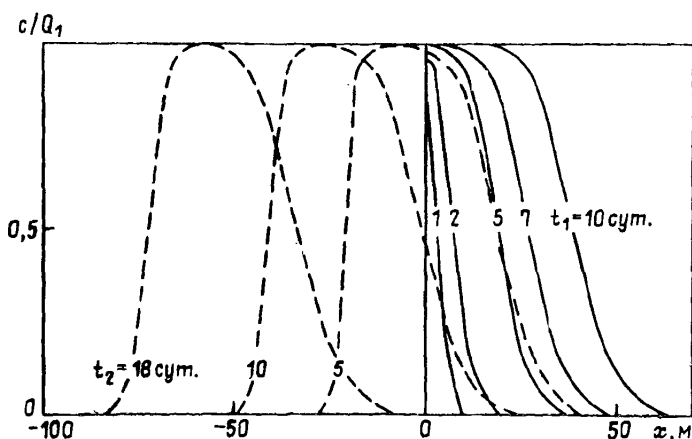


Рис. 25. Распределение концентраций индикатора по решению (3.116) при  $\lambda_1=1,0$  м и  $\lambda_2=0,1$  м:

— фаза прямого движения; - - - фаза обратного движения

также на заднем фронте, который в фазе обратного движения становится передним. Распределение концентраций в пласте принимает гауссовскую форму со снижающимся во времени максимумом.

В случае значительно меньших  $\lambda_2=0,1$  м (рис. 25) развитие кривой распределения концентраций во второй фазе существенно замедляется. Фронты кривой мало меняют форму, достигнутую к концу первой фазы. К моменту времени  $t_2=18$  сут в

вершине кривой распределения еще сохраняется небольшой горизонтальный участок  $c_2 = c_{2н}$  или  $c_{2н}/Q_1 = 1,0$ .

Случай источника с непрерывно-импульсным вводом загрязняющего вещества в первой фазе может быть получен модификацией предыдущего решения следующим образом. Выражение (3.108) интегрируется по  $\tau_1$  от 0 до  $t_0$ , где  $t_0$  — длительность непрерывного ввода загрязнителя в поток в начале первой фазы. При этом интегралы  $I_1$  и  $I_1^*$  не изменяются, а вместо (3.114) будет записан интеграл с другим верхним пределом:

$$I_{20} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{[D_1(t_1 - t_0) + D_2 t_0]/n_0} \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\alpha_1 \tau - \alpha_1 \beta_1^2/\tau} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erfc} \frac{x + l_2 - l_1 + l_0}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_0^2)^{1/2}} - \right.$$

$$\left. - e^{\xi x + \frac{l_2}{\lambda_1} \left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)} \operatorname{erfc} \frac{x + l_1 + l_2 - l_0 + 2l_2 \lambda_2/\lambda_1}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_0^2)^{1/2}} \right].$$

Концентрация загрязнителя в этом случае определяется по формуле:

$$c_{20} = Q_1 (I_1^* - I_{20}^*). \quad (3.117)$$

В первой фазе движения ( $t_2 = 0$ ):

$$I_1^* = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erfc} \frac{x - l_1}{\sigma_1} - e^{\xi x} \operatorname{erfc} \frac{x + l_1}{\sigma_1} \right],$$

$$I_{20}^* = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erfc} \frac{x - l_1 + l_0}{(\sigma_1^2 - \sigma_0^2)^{1/2}} - e^{\xi x} \operatorname{erfc} \frac{x + l_1 - l_0}{(\sigma_1^2 - \sigma_0^2)^{1/2}} \right],$$

$$l_0 = v_1 t_0 / n_0, \quad \sigma_0 = 2 \sqrt{D_1 t_0 / n_0}.$$

Иллюстрация решения (3.117) представлена на рис. 26 и 27, на которых прослеживается эффект снижения значений коэффициента гидродинамической дисперсии в фазе обратного движения. Принятые значения параметров иллюстративного расчета те же, что и ранее, т. е.  $\lambda_1 = 1,0$  м,  $\lambda_2 = 1,0$  м и 0,1 м,  $v_{1,2} = 1,0$  м/сут,  $n_0 = 0,25$ ,  $t_1 = 10$  сут. Характеристика ввода индикатора в пласт:  $t_0 = 1$  сут,  $Q_1 = 1$  г/л. При  $\lambda_1 = \lambda_2$  (рис. 26) в фазе обратного движения продолжается развитие зоны смеси в виде гауссовского распределения с постоянным снижением максимума. При  $\lambda_2 = 0,1$  м (рис. 27) процесс развития зоны смеси существенно замедляется, максимумы концентраций снижаются сдержанно.

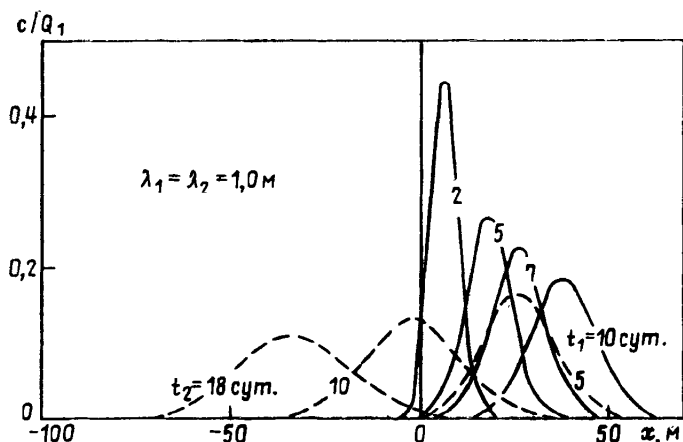


Рис. 26. Распределение концентраций индикатора по решению (3.117) при  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,0 \text{ м}$ :

—— фаза прямого движения; — — — фаза обратного движения

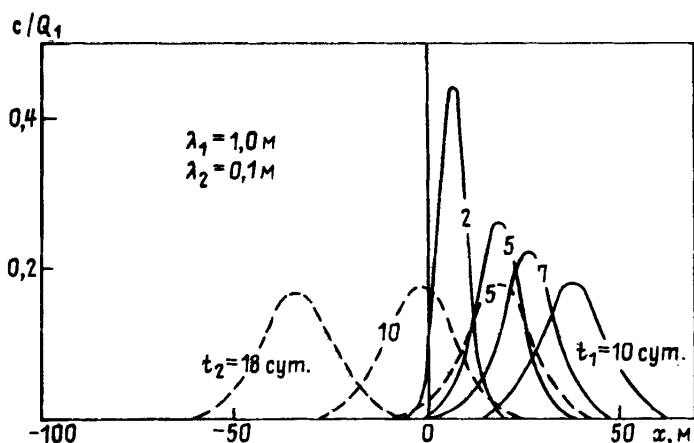


Рис. 27. Распределение концентраций индикатора по решению (3.117) при  $\lambda_1 = 1,0 \text{ м}$  и  $\lambda_2 = 0,1 \text{ м}$ :

—— фаза прямого движения; — — — фаза обратного движения

### 3.3. Гидродинамическая дисперсия при знакопеременной конвекции в радиальном потоке

В строгой постановке задача прогнозирования концентраций загрязняющих веществ в радиальных потоках подземных вод, меняющих направление движения на обратное, является развитием задачи, рассмотренной выше. В данном случае она должна решаться при начальном условии, отвечающем рас-



пределению концентраций в пространстве на момент времени переключения скважины с нагнетания на откачку жидкости. Поэтому заранее можно сказать, что аналитическая реализация такой задачи будет чрезвычайно сложной.

Для решения практических задач здесь могут быть использованы приближенные приемы (3.1), которые позволяют усложнить условия различным коэффициентам дисперсии при прямом и обратном движении зоны смеси, рассмотрением моделей стратифицированных сред и дисперсионных явлений в них при равновесном массообмене.

### 3.3.1. Гомогенные и гетерогенные породы неупорядоченного строения

Для гомогенных пород, а также гетерогенных комплексов неупорядоченного строения может быть использована модель с различными по величине ( $a$  в общем случае и по знаку), но постоянными значениями параметров гидродисперсии. Для фазы прямого движения зоны смеси (при нагнетании жидкости в скважину радиуса  $r_c$ ) решения осесимметричной задачи, полученные способом Л. Лау и др. [166], имеют вид (3.31) для ступенчатого ввода загрязняющего вещества или индикатора и (3.54) — для импульсного ввода. В этих решениях

$$\eta = \frac{r-r_*}{\sqrt{2}\sigma_1}, \quad \sigma_1^2 = \frac{2}{3} \lambda_1 \left( r_* - \frac{r_c^3}{r_*^2} \right). \quad (3.118)$$

В предположении, что структура решений остается неизменной и для второй фазы обратного движения при откачке из скважины, найдем зависимость для характерной ширины зоны смеси  $\sigma_2$  с учетом двух основных факторов ее формирования — пройденного расстояния и радиальной геометрии потока. Имея в виду, что теперь радиус фронта вытеснения  $r_* = (r_0^2 - Qt/\pi mn_0)^{1/2}$  убывающая величина, а фактор радиальной геометрии меняет знак, способствуя росту  $\sigma_2$ , получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d\sigma_2}{dr_*} = -\frac{\lambda_2}{\sigma_2} - \frac{\sigma_2}{r_*}. \quad (3.119)$$

Решение этого уравнения при начальном условии

$$r_* = r_0, \quad \sigma_2^2 = \frac{2}{3} \lambda_1 \left( r_0 - \frac{r_c^3}{r_0^2} \right), \quad (3.120)$$

где  $r_0$  — радиус фронта поршневого вытеснения в конце фазы нагнетания, имеет вид:

$$\sigma_2^2 = \frac{2}{3} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2) r_0^3 - \lambda_1 r_c^3 - \lambda_2 r_*^3}{r_*^2}. \quad (3.121)$$

Таким образом, для стадии откачки из скважины при ступенчатом или импульсном вводе индикатора в начале нагне-

тания следует использовать зависимости (3.31) или (3.54) с новым значением  $\sigma_2$  по (3.121).

Аналогичная задача для частного случая  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  рассмотрена Л. Гелхаром и М. Коллинзом [133] методом возмущений. Для ступенчатого ввода индикатора записываем полученное решение

$$\frac{c}{c_0} = 0,5 \operatorname{erfc} \eta, \quad \eta = \frac{r^2 - r_*^2}{\left[ \frac{16}{3} \lambda (2r_0^3 - r_*^3 - r_c^3) \right]^{1/2}}. \quad (3.122)$$

Эти же авторы предложили прием, устраняющий иррациональность в (3.122) при  $r_* < 0$ . Такой случай имеет место при  $Qt/\pi mn_0 > r_0^2$ . Для концентраций в откачиваемой воде ( $r = r_c = 0$ ) дается модификация (3.122) в объемах нагнетания  $W_0 = \pi mn_0 r_0^2$  и откачки  $W = \pi mn_0 (r_0^2 - r_*^2)$

$$\frac{c}{c_0} = 0,5 \operatorname{erfc} \eta_0, \quad \eta_0 = \frac{\bar{W} - 1}{\left\{ \frac{16}{3} \frac{\lambda}{r_0} \left[ 2 - |1 - \bar{W}|^{1/2} (1 - \bar{W}) \right] \right\}^{1/2}}, \quad (3.123)$$

$$\bar{W} = \frac{W}{W_0}.$$

Здесь введен модуль  $|1 - \bar{W}|$ , устраняющий иррациональность и обеспечивающий непрерывность функции  $c/c_0(\bar{W})$  при  $\bar{W} = 1$ .

В более общем случае  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  при  $\sigma_2$ , определяемом по (3.121) с учетом объема ствола скважины  $W_c = \pi mn_0 r_c^2$ , концентрация в откачиваемой воде ( $r = r_c$ ) определяется выражением

$$\frac{c}{c_0} = 0,5 \operatorname{erfc} \eta_c, \quad (3.124)$$

в котором

$$\eta_c = \frac{\bar{W} - 1 + |1 - \bar{W}|^{1/2} \bar{W}_c^{1/2}}{\left\{ \frac{4}{3\rho_0} \left[ 1 + \bar{\lambda} - \bar{W}_c^{3/2} - \bar{\lambda} |1 - \bar{W}|^{1/2} (1 - \bar{W}) \right] \right\}^{1/2}},$$

$$\bar{\lambda} = \lambda_2/\lambda_1, \quad \rho_0 = r_0/\lambda_1, \quad \bar{W}_c = W_c/W_0.$$

Упрощение  $\eta_c$  при  $W_c = 0$ , а также в случае  $\bar{\lambda} = 1$ , получается просто. При этом видно, что аргументы функций  $\eta_0$  и  $\eta_c$  по (3.123) и (3.124) отличаются в два раза, что сказывается на расхождении результатов, особенно при  $c/c_0 > 0,8$  и  $c/c_0 < 0,2$  (см. рис. 20). Интересно отметить, что для решений, полученных разными методами и имеющих разные аргументы  $\eta$ , градиенты концентраций  $\partial c/\partial r$  на фронте поршневого вытеснения  $r = r_*$  совпадают как в фазе прямого движения (нагнетание), так и в фазе обратного движения зоны смеси (откачка). Такое же совпадение имеет место и для градиентов концентрации  $\partial c(\bar{W})/\partial \bar{W}$  в точке  $\bar{W} = 1$  выходной кривой в скважине; при этом  $c/c_0 = 0,5$ .

При импульсном вводе массы индикатора  $M_0$  в скважину в начале фазы нагнетания решение для второй фазы откачки при нормировке как и в случае (3.53) имеет вид

$$\tilde{c} = \frac{c}{M_0/\pi m n_0 r^2} = \frac{(3/\pi)^{1/2}}{4} \frac{\rho_1^{1/2}}{\vartheta \vartheta_1^{1/2}} \exp \left[ -\frac{(1-\vartheta)^2}{4\vartheta_1/3\rho_1} \right], \quad (3.125)$$

где  $\vartheta = r_*/r$ ,  $\rho_1 = r/\lambda_1$ ,

$$\vartheta_1 = \left( \frac{1+\bar{\lambda}}{\vartheta_0^3} \right) - \frac{1}{\vartheta_0^3} - \bar{\lambda} \vartheta, \quad \bar{\lambda} = \lambda_2/\lambda_1, \quad \vartheta_c = r_*/r_c, \quad \vartheta_0 = r_*/r_0.$$

При  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  решение (3.125) переходит в (3.53). По аналогии с (3.54) при задании на стенке скважины временной импульсной функции концентрации имеем

$$\tilde{c} = \frac{(3/\pi)^{1/2}}{4} \cdot \frac{\rho^{1/2}}{\vartheta^2 \vartheta_1^{1/2}} \exp \left[ -\frac{(1-\vartheta)^2}{4\vartheta_1/3\rho_1} \right]. \quad (3.126)$$

Зависимость (3.125) удобно использовать, когда переменными являются как и в (3.123)—(3.124) объемы нагнетания в первой фазе  $W_0$  и относительные объемы откачки во второй фазе  $\bar{W} = \bar{W}/W_0$ . В этом случае (3.125) принимает вид

$$\tilde{c}^0 = \frac{c}{M_0/W_0} = \frac{e^{-(1-\bar{W})^2/G}}{2\sqrt{\pi G}}, \quad (3.127)$$

где

$$G = \frac{4}{3} \left[ \frac{1}{\rho_1} + \frac{1 - |1 - \bar{W}|^{1/2} (1 - \bar{W})}{\rho_2} \right], \quad \rho_{1,2} = r_0/\lambda_{1,2}.$$

Работа скважины с коротким фильтром в водоносном пласте большой мощности в режиме нагнетание—откачка может быть смоделирована сферической задачей гидродинамической дисперсии, решение которой для первой фазы имеет вид (3.56). Для второй фазы обратного движения характерная ширина зоны смеси  $\sigma$  определяется из выражения

$$\sigma^2 = \frac{2}{5} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2) r_0^5 - \lambda_1 r_c^5 - \lambda_2 r_*^5}{r_*^4}. \quad (3.128)$$

### 3.3.2. Стратифицированные многослойные породы

Из качественного анализа моделей массопереноса в стратифицированных пластах следует, что на ранних стадиях процесса (при  $t \leq t_n$ , где  $t_n = 0,01 n_0 m^2/D_0$ ), когда массообмен между слоями проявляется крайне слабо, профиль концентрации в пределах разреза формируется под воздействием двух независимых механизмов. С одной стороны здесь четко прослеживается последний конвективный перенос примеси, с другой, имеет место дисперсия фронтов поршневого вытеснения в пределах каждого элементарного слоя. В рамках упрощенной детерминированной модели (см. раздел 1.4) это обстоятельство

учитывается введением эффективного коэффициента дисперсии

$$D = \lambda v + \frac{\psi_v^2}{n_0} v^2 t. \quad (3.129)$$

Исследуя закономерности массопереноса при знакопеременной конвекции, примем, что коэффициент  $\lambda$  в (3.129) является величиной постоянной (независящей от направления потока). В то же время, памятуя о том, что дисперсия, порождаемая профильной флуктуацией проницаемости среды, имеет исключительно конвективную природу, попытаемся учесть эффект сжимаемости условной зоны смеси, формирующейся при сплошном переносе.

При  $D$ , определяемом по (3.129), уравнение (3.1) записывается в виде

$$n_0 \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{q}{r} \frac{\partial C}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \lambda \frac{q}{r} + \frac{\psi_v^2 t}{n_0} \frac{q^2}{r^2} \right) \frac{\partial C}{\partial r} \right]. \quad (3.130)$$

Будем искать решение уравнения (3.130), используя приближенный прием, изложенный в работах [6, 98, 133]. Вводя новую переменную  $\mu = (r^2 - r_*^2)$ , где  $r_* = (r_c + 2qt/n_0)^{1/2} \approx (Qt/\pi m n_0)^{1/2}$ , и, считая при этом, что  $|\mu| \ll r_*$ , вместо (3.130) имеем

$$n_0 \frac{\partial C}{\partial t} \approx 4 \left( \lambda q \sqrt{\frac{2qt}{n_0}} + \frac{\psi_v^2 q^2 t}{n_0} \right) \frac{\partial^2 C}{\partial \mu^2}.$$

Тогда, полагая  $\eta = \mu / \sqrt{2\omega^2}$ , где

$$\omega^2 = 8 \int_0^t \left( \frac{\lambda q}{n_0} \sqrt{\frac{2qt}{n_0}} + \frac{\psi_v^2 q^2 t}{n_0^2} \right) dt, \quad (3.131)$$

получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 C}{d\eta^2} + 2\eta \frac{dC}{d\eta} = 0,$$

решение которого имеет вид:

$$C = A_1 \operatorname{erf}(\eta) + A_2. \quad (3.132)$$

Согласно (3.131) функция  $\omega^2$  (характеризующая дисперсию потока) равна:

$$\omega^2 = \frac{8\lambda}{3} r_*^3 + \psi_v^2 r_*^4 \quad (3.133)$$

и следовательно

$$\eta = \frac{r^2 - r_*^2}{\sqrt{2\omega^2}} = \frac{r^2 - r_*^2}{\sqrt{\frac{16\lambda}{3} r_*^3 + 2\psi_v^2 r_*^4}}, \quad (3.134)$$

причем в случае  $t \rightarrow 0$  и  $r \rightarrow \infty$ ,  $\eta \rightarrow \infty$ , а при  $r = r_c$  ( $r_c \approx 0$ ),  $\eta \approx -1/\sqrt{(16\lambda/3)r_*^3 + 2\psi_v^2 r_*^4}$ . Поэтому условия (3.2) для определе-

ния постоянных  $A_{1,2}$  записываются в виде

$$C = \begin{cases} C_0 & \text{при } \eta = \eta_*, \eta_* = \eta|_{r=r_c} \\ 0 & \text{при } \eta \rightarrow \infty \end{cases}$$

и соответственно будем иметь

$$\bar{C} = \frac{C}{C_0} = \frac{\operatorname{erfc}(\eta)}{1 + \operatorname{erf}(\eta_*)}. \quad (3.135)$$

При введении безразмерных переменных  $r = r/r_0$  и  $t_* = (r_*/r_0)^{1/2}$  (где  $r_0$  — расстояние от скважины до фронта поршневого вытеснения на момент окончания закачки) расчетная формула (3.135) принимает вид:

$$\bar{C} = C^* \operatorname{erfc}(\eta), \quad (3.136)$$

где

$$\eta = \frac{\bar{r}^2 - t_*^2}{\sqrt{(16\lambda/3r_0) t_*^{3/2} + 2\psi_v^2 t_*^2}}, \quad (3.137)$$

$$C^* = \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left( 1 / \sqrt{(16\lambda/3r_0) t_*^{-1/2} + 2\psi_v^2} \right) \right\}^{-1}. \quad (3.138)$$

Отметим некоторые особенности этого решения. При  $\bar{r}^2 = t_*$ ,  $\eta = 0$  и  $\bar{C} = C^*$ ; следовательно  $C^*$  — это относительная концентрация на фронте поршневого вытеснения. В случае  $\psi_v^2 = 0$  концентрация  $C^*$  является функцией времени, причем, как и при строгом решении радиальной задачи микродисперсии (см. рис. 17), здесь  $C^*$  при  $t_* = 0$  равна 1,0, а с ростом  $t_*$  отмечается постепенное снижение  $C^*$  до 0,5. Если же принять  $\lambda = 0$ , то  $C^*$  оказывается величиной постоянной, но зависящей от  $\psi_v^2$ ; в существенно неоднородных пластах  $C^* \rightarrow 1,0$ , а при незначительной изменчивости водопроницаемости пород ( $\psi_v^2 \leq 0,35$ ) можно считать  $C^* \approx 0,5$  [60].

Принимая во внимание предположение об обратимости дисперсии на макроуровне, для определения  $\omega^2$  в фазе откачки будем иметь следующее уравнение

$$\frac{d\omega^2}{dr_*} = -(8\lambda r_*^2 - 4\psi_v^2 r_*^3). \quad (3.139)$$

Решение (3.139) при начальном условии

$$r_* = r_0, \quad \omega^2 = \frac{8\lambda}{3} r_0^3 + \psi_v^2 r_0^4 \quad (3.140)$$

записывается в виде

$$\omega^2 = \frac{8\lambda}{3} (2r_0^3 - r_*^3) + \psi_v^2 r_*^4, \quad (3.141)$$

где  $r_* = (r_0^2 - Qt/\pi mn_0)^{1/2}$ . Тогда, оставляя неизменной структуру решения (3.135), выражение для  $\bar{C}$  в период откачки

представим в виде (3.136), где

$$\eta = \frac{\bar{r}^2 - (1 - \bar{W})}{V(16\lambda/3r_c)[2 - (1 - \bar{W})^{1/2}(1 - \bar{W})] + 2\psi_v^2(1 - \bar{W})^2}. \quad (3.142)$$

$\eta_*$  равна  $\eta$  при  $\bar{r} \approx 0$  и  $\bar{W} = 0$  и соответственно

$$c^* = \{1 + erf(1/\sqrt{(16\lambda/3c_0) + 2\psi_v^2})\}^{-1}. \quad (3.143)$$

**Пример расчета 3.1.** Проведем определение параметров  $\lambda$  и  $\psi_v$ , используя результаты опытов, представленные в работах Дж. Пикенса и Г. Гризака [189, 190].

Исследования проводились на участке, приуроченном к песчаным отложениям мощностью  $m=8,2$  м, сверху и снизу перекрытым слабопроницаемыми глинистыми прослоями. Залегают водоносный пласт на глубине 2 м от поверхности земли. Коэффициент фильтрации пород, установленный на основе кустовых откачек, определен равным  $k=12$  м/сут; пористость песков составляет  $n_0=0,33-0,43$ .

В целом пласт может быть вполне охарактеризован как однородный. Вместе с тем результаты послойного определения коэффициента фильтрации песков (табл. 19) явно свидетельствуют о том, что опробуемая толща имеет слоистое строение.

Таблица 19

Данные о изменении коэффициента фильтрации в пределах разреза на различных расстояниях от центральной скважины

Точка отбора образца (глубина от поверхности земли, м)	Мощность опробованного слоя, м	Коэффициент фильтрации	
		$z=4$ м	$z=7$ м
2.13	0,44	1,140	0,786
2.74	0,53	0,740	0,936
3.19	0,45	0,701	0,646
3,64	0,45	0,746	0,659
4,08	0,45	0,736	0,659
4,53	0,45	0,672	0,659
4,98	0,45	0,802	0,728
5,43	0,45	0,970	0,818
5,87	0,45	0,970	0,978
6,32	0,45	1,225	1,096
6,77	0,45	1,237	1,268
7,21	0,45	1,501	1,284
7,66	0,45	1,406	1,488
8,11	0,45	1,293	1,488
8,56	0,45	1,352	1,403
9,00	0,45	1,175	1,309
9,45	0,53	0,938	1,135
10,05	0,40	0,302	0,583

Рассчитанные в [189, 190] на основе данных табл. 19 значения  $\psi_b$  составляют, соответственно, 0,095 и 0,093 для точек на расстоянии  $r=4$  м и  $r=7$  м от центральной скважины.

Индикаторные опыты проводились по схеме: а) закачка индикатора (трассера) в центральную скважину с контролем за его распространением по трем наблюдательным скважинам и б) последующая откачка воды из центральной скважины при непрерывном слежении за изменением в ней содержания трассера. В качестве индикатора использовался радиоактивный изотоп  $J^{131}$ . Закачка производилась с расходом  $Q=3,186$  м<sup>3</sup>/ч в течение  $t=30$  ч (соответственно объем поданной в пласт воды составил  $W=95,6$  м<sup>3</sup>); отбиралась вода из скважины с таким же расходом и при этом откачка продолжалась в течение 48 ч до полного извлечения из пласта всего трассера.

Графики изменения средней концентрации по наблюдательным скважинам, расположенным на расстоянии  $r=1,2$  и 3 м от центральной, показаны на рис. 28; выходная кривая, снятая по центральной скважине в период откачки, приведена на рис. 29.

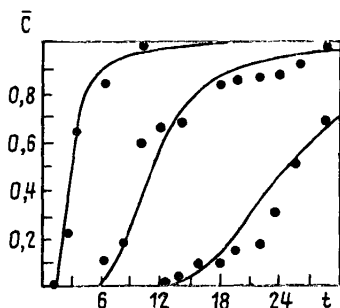


Рис. 28. Экспериментальные точки и расчетные выходные кривые концентраций в наблюдательных скважинах при закачке

В данном случае можно принять, что концентрация на фронте поршневого вытеснения  $C^*=0,5$ . Тогда, определяя касательную  $dc/dt$  в точке  $\bar{C}=C^*$  в решении (3.136)—(3.137), будем иметь

$$\left(\frac{\Delta t_*}{t_f}\right)^2 = 2\pi \left( \frac{8\lambda}{3r_0 r} + \psi_U^2 \right), \quad (3.144)$$

где  $\Delta t_* = (t_*' - t_*'')$  и  $t_*'$ ,  $t_*''$  — время, соответствующее на выходной кривой (рис. 28) точкам  $\bar{C}=1,0$  и  $\bar{C}=0,0$ , а  $t_f$  — время  $t_* = r$ .

Поступая аналогичным образом с решением для стадии откачки, найдем наклон кривой к оси  $\bar{W}$  при  $\bar{W}=1$  в точке

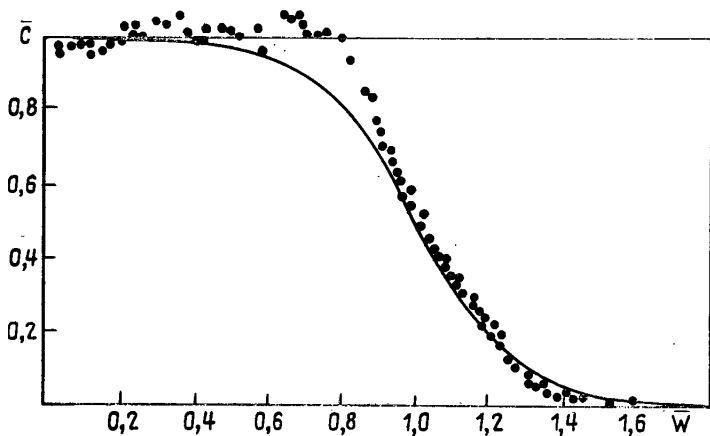


Рис. 29. Экспериментальные точки и расчетная выходная кривая концентраций в центральной скважине при откачке

$\bar{r} = 0$ . Это дает

$$\lambda = \frac{3r_0}{32\pi} (\Delta\bar{W})^2, \quad (3.145)$$

где  $\Delta\bar{W} = (\bar{W}'' - \bar{W}')$  и  $\bar{W}'$ ,  $\bar{W}''$  — относительные объемы, соответствующие на выходной кривой (рис. 29) точкам  $\bar{C} = 0,0$  и  $\bar{C} = 1,0$ .

Графическим путем на выходной кривой для  $r = 2$  м (рис. 28) найдем  $t_f = 0,37 \times 30 = 11$  ч. и  $\Delta t_* = (0,53 - 0,2) \times 30 = 10$  ч. Подставляя эти значения в (3.144), получим:

$$\frac{8\lambda}{3r_0 r} + \Psi_v^2 = 0,131.$$

Определим также активную пористость пласта. Она равна

$$n_0 = \frac{Qt_f}{\pi m r^2} = 0,34.$$

$$\text{Тогда } r_0^2 = \left( \frac{Qt}{\pi m n_0} \right)^{1/2} = 3,3 \text{ м.}$$

Для выходной кривой рис. 29 (согласно [189, 190]) имеем  $\Delta\bar{W} = 0,565$ ; подставляя найденные значения  $r_0^2$  и  $\Delta\bar{W}$  в (2.106) получаем

$$\lambda = \frac{3 \times 3,3}{32\pi} (0,565)^2 = 0,03 \text{ м}$$

и при этом  $\Psi_v^2 = (0,131 - 80,0316) = 0,091$ . То, что в данном случае значения  $\Psi_v^2$ , установленные на основе индикаторного и фильтрационного опробования пласта, оказались достаточно



близкими несомненно свидетельствует о правомерности представленной модели (выходные кривые, рассчитанные при  $\lambda = 0,03$  и  $\Psi_v^2 = 0,091$  для фазы закачки и откачки показаны соответственно на рис. 3.15 и рис. 29).

Вместе с тем необходимо обратить внимание на одно важное обстоятельство. Из соотношения (3.145) видно, что наклон выходной кривой  $\bar{dc}/d\bar{W}$  в фазе откачки в точке  $\bar{r}=0$  при  $\bar{W}=1$  не зависит от коэффициента вариации  $\Psi_v^2$ , а содержит в себе информацию только о микродисперсии. Это, собственно говоря, является следствием принятого механизма послойного переноса, когда полностью пренебрегается эффектом массообмена между слоями с различной водопроницаемостью. Поскольку на самом деле массообмен все-таки может иметь место, то, по-видимому, установленные таким образом значения  $\lambda$  будут несколько завышенными и, более того, с увеличением зоны охвата  $r_0$  следует ожидать роста  $\lambda$ . Таким образом, на надежное определение  $\lambda$  при односкважинном опробовании пласта рассчитывать не приходится.

### 3.3.3. Стратифицированные породы с равновесным массообменом\*

При фильтрации в стратифицированных пластах активных примесей зона смеси формируется под воздействием двух взаимноусиливающих (или, наоборот, ослабляющих) друг друга механизмов, обусловленных изменчивостью водопроницаемости пород и их емкостных (физико-химических) свойств в пределах разреза. В простейшем случае, при равновесном массообмене, это обстоятельство учитывается (см. раздел 2.3.) введением в уравнение конвективной диффузии эффективной пористости  $n_0$  и коэффициента дисперсии  $D_0$ , определяемых по формулам,

$$n_0 = \frac{(n_0 + \Gamma)}{\alpha_f}, \quad D_0 = \frac{\varphi_{v,\Gamma}^2}{n_0} v^2 t, \quad (3.146)$$

где  $\varphi_{v,\Gamma}$  — коэффициент профильной вариации действительной скорости переноса вещества;  $\alpha_f$  — коэффициент, отражающий изменение невозмущенной эффективной пористости  $(n_0 + \Gamma)$  за счет флуктуаций проницаемости среды и емкости поглощения вещества.

Фундаментальное решение уравнения (3.1) при коэффициенте дисперсии  $D_0$  имеет вид (3.135). При этом в период закачки в (3.135)

$$\omega^2 = \varphi_{v,\Gamma}^2 r_*^4, \quad r_* \approx (Qt/\pi m n_0)^{1/2}, \quad \eta_* = -1/\sqrt{2} \varphi_{v,\Gamma}. \quad (3.147)$$

\* Раздел написан совместно с Е. В. Середкиной.

В условиях равновесного массообмена при откачке будет происходить обратный переход вещества из пород в воду. Поэтому при движении адсорбционного фронта  $r_* = (r_0^2 - Qt/\pi m n_0)^{1/2}$  к скважине функция  $\omega^2$  определится из решения уравнения

$$\frac{d\omega^2}{dr_*} = 4\varphi_{v,\Gamma}^2 r_*^3 \quad (3.148)$$

при условии

$$r_* = r_0, \quad \omega^2 = \varphi_{v,\Gamma}^2 r_0^4, \quad (3.149)$$

где  $r_0$  — расстояние от скважины до фронта адсорбции на момент окончания закачки.

Из (3.148), (3.149) имеем

$$\omega^2 = \varphi_{v,\Gamma}^2 r_*^2. \quad (3.150)$$

Ясно, что в данном случае (за счет десорбции вещества) в период откачки (по мере перемещения  $r_*$  к скважине) наблюдается как бы сжатие условной зоны смеси, а выходная кривая  $\bar{c}$  при  $r = r_c$  ( $r_c \rightarrow 0$ ) получается в виде «ступеньки».

Рассмотрим иную ситуацию. Допустим, что адсорбция вещества является необратимой. Тогда при откачке фронт адсорбции будет перемещаться к скважине по закону поршневого вытеснения, а на перестроении концентрационного профиля скажется лишь только эффект изменчивости проницаемости пород в пределах разреза. Здесь для определения  $\omega^2$  имеем:

$$\frac{d\omega^2}{dr_*} = 4\psi_v^2 r_*^3, \quad (3.151)$$

где

$$r_* = (r_0^2 - Qt/\pi m n_0)^{1/2}. \quad (3.152)$$

Решая уравнение (3.151) при условии (3.149), получаем

$$\omega^2 = (\varphi_{v,\Gamma}^2 - \psi_v^2) r_0^4 - \psi_v^2 r_*^4, \quad (3.153)$$

где  $r_*$  принимается согласно (3.152). В этом случае выражение для  $\bar{c}$  на скважине в переменных  $\bar{W}$  и  $\bar{n} = n_s/n_0$  записывается в виде (3.136) при

$$\eta = \frac{(\bar{W} - \bar{n})}{V^2 [(\varphi_{v,\Gamma}^2 - \psi_v^2) \bar{n}^2 + \psi_v^2 (n - \bar{W})^2]}, \quad (3.154)$$

$$c^* = \{1 + erf(1/\sqrt{2} \varphi_{v,\Gamma})\}^{-1}. \quad (3.155)$$

Необратимая адсорбция наблюдается при закачке в пласт аэрированной (кислородсодержащей) воды. Этот прием используется для создания искусственных геохимических барьеров при внутрипластовой очистке подземных вод.

**Пример расчета 3.2.** Проведем оценку параметров уравнения (3.136), (3.154)—(3.155) по выходным кривым  $\bar{c}$ , полученным при работе установок обезжелезивания подземных вод в пласте на Орельском водозаборе г. Днепродзёржинска. Водозабор представлен линейным рядом из 80 скважин, расположенных на расстоянии 200 м друг от друга. Вода, каптируемая скважинами, является некондиционной: она характеризуется повышенным содержанием железа, а на отдельных участках также марганца и аммония. В зоне расположения фильтров залегают мелко- и среднезернистые, а местами крупнозернистые и даже гравелистые пески, имеющие мощность 8—10 м и коэффициент фильтрации 25—50 м/сут.

Опыты проводились на первых 20 скважинах. Закачка аэрированной воды в пласт осуществлялась с расходом  $Q=20$ — $23$  м<sup>3</sup>/ч в течение времени  $t=110$ — $130$  ч; отбиралась вода из скважин с расходом  $Q=40$ — $50$  м<sup>3</sup>/ч. На всех скважинах были выполнены два контрольных цикла с регистрацией концентрации кислорода в откачиваемой воде. На рис. 30 представлены

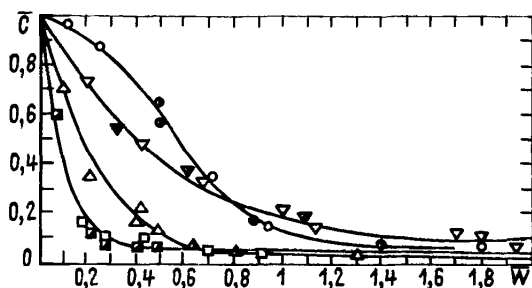


Рис. 30. Выходные кривые по кислороду

сква. № 5— $\triangle$ —1-й цикл;  $\blacktriangle$ —2-й цикл  
 сква. № 9— $\square$ —1-й цикл;  $\blacksquare$ —2-й цикл  
 сква. № 12— $\circ$ —1-й цикл;  $\bullet$ —2-й цикл  
 сква. № 19— $\nabla$ —1-цикл;  $\blacktriangledown$ —2-й цикл

— — теоретическая кривая по формулам (3.136), (3.154), (3.155)

результатирующие выходные кривые  $\bar{c}$  по скважинам 5, 9, 12 и 19 и в табл. 20 приведены условия проведения опытов. При этом на первом цикле отбор воды из скважин продолжался 18—20 сут. до установления практически исходного качества воды по содержанию железа и других окисляемых ингредиентов. На скважине 12 откачка была прекращена после отбора двухкратного объема поданной в пласт аэрированной воды.

Для обработки выходных кривых представим уравнения (3.136), (3.154)—(3.155) в виде

$$y = a + b(\bar{n} - \bar{W})^2, \quad (3.156)$$

Таблица 2 0

№№ скв.	№№ циклов	$W_z, \text{ м}^3$	$C_{O_2}, \text{ мг/л}$	Расчетные параметры			
				$c^*$	$\bar{n}$	$\varphi_v, \Gamma$	$\psi_v$
5	1	2840	8,3	0,970	0,01	24,814	0,387
	2		8,9				
9	1	2600	6,1	0,865	0,02	5,066	0,516
	2	2700	5,5				
12	1	2580	14,1	0,550	0,53	0,778	0,533
	1	2460	14,6	0,950	0,03	18,347	0,506
19	1						
	2	2670	15,3				

где

$$y = \left[ \frac{(\bar{n} - \bar{W})}{\arccos(c/c^*)} \right]^2, \quad a = 2(\varphi_{v,\Gamma}^2 - \psi_v^2) \bar{n}^2, \quad b = 2\psi_v^2. \quad (3.157)$$

Тогда, задавшись первоначально произвольным значением  $c^*$  ( $0,5 \leq c^* < 1$ ), по выходной кривой рис. 30 для точки  $\bar{c} = c^*$  найдем  $\bar{W} = \bar{n}$  и уже для как бы известных  $c^*$  и  $\bar{n}$ , используя массив данных  $\bar{c}$ , определим коэффициенты  $a$  и  $b$  уравнения (3.156). Зная их по (3.157), несложно вычислить  $\psi_v$  и  $\varphi_{v,\Gamma}$ , а при найденном  $\varphi_{v,\Gamma}$  по (3.155) рассчитать  $c^*$ . Если полученное таким образом  $c^*$  отличается от заданного, то все расчеты по определению  $\bar{n}$ ,  $\psi_v$  и  $\varphi_{v,\Gamma}$  следует повторить заново и так до тех пор, пока не будет достигнуто их удовлетворительное совпадение.

Найденные таким образом значения параметров по отдельным скважинам сведены в табл. 20.

Из данных табл. 20 видно, что на скважинах 5, 9 и 19, где кривые характеризуются с начала откачки резким спадом концентрации, значения  $c^* \rightarrow 1,0$  и  $\bar{n} \rightarrow 0$ . Следовательно, для обработки кривых такого типа можно использовать приближенную методику оценки параметров, полагая в уравнении (3.136)  $c^* = 1$  и пренебрегая во всем диапазоне изменения  $\bar{W}$  величиной  $\bar{n}$ . Правда в этом случае при найденных  $a$  и  $b$  удаётся рассчитывать лишь только коэффициент  $\psi_v$ .

Обращает на себя внимание тот факт, что коэффициенты  $\psi_v$  по скважинам оказались достаточно близкими и на скважинах 5, 9, 19 они значительно меньше коэффициентов  $\varphi_{v,\Gamma}$ . Это свидетельствует о том, что в окрестности отмеченных скважин водовмещающие породы характеризуются существенной профильной изменчивостью не только фильтрационных, но и емкостных свойств (см. раздел 2.4).

Результаты, полученные на 12-й скважине, иллюстрируют другую предельную ситуацию. Коэффициент  $\varphi_{v,\Gamma}$  здесь ока-

зался относительно небольшим и поэтому при обработке опытных данных можно было ограничиться расчетом параметров, положив  $C^*=0,5$ .

Расчетные выходные кривые для скважин 5, 9, 12 и 19 приведены на рис. 30. Удовлетворительное совпадение теоретических и измеренных в опытах величин  $\bar{C}$  дает основание считать, что в таких условиях процесс адсорбции кислорода на породах пласта действительно протекает в соответствии с предложенным механизмом.

Обращает на себя внимание одно весьма интересное обстоятельство. В зоне, где емкость поглощения по  $O_2$  оказывается полностью исчерпанной, кислород должен, естественно, переноситься потоком уже как динамически нейтральный (не сорбируемый) индикатор.

**Пример расчета 3.3.** На скважине 12 сразу после 1-го цикла были выполнены еще два контрольных опыта. В обоих случаях объем поданной в пласт аэрированной воды составил  $W_z=254 \text{ м}^3$  при  $C_{O_2}$  на первом цикле 12,7 мг/л и на втором — 13,9 мг/л; откачка продолжалась до отбора  $2W_z$ . Полученные при этом выходные кривые  $\bar{C}$  представлены на рис. 31.

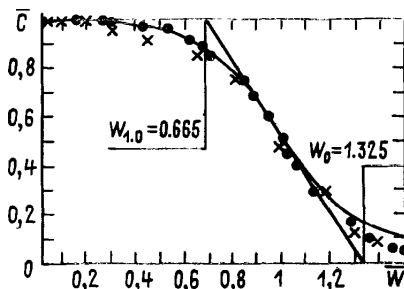


Рис. 31. Выходные кривые по кислороду:

● — 1-й опыт; × — 2-й опыт  
 — — — теоретическая кривая по формулам (3.136), (3.142), (3.143)

Для идентификации выходных кривых здесь можно воспользоваться методом, изложенным в предыдущем разделе. Учитывая, что коэффициент вариации  $\psi_v$  на скважине 12 (см. табл. 3.6) равен 0,553 и при этом согласно (3.143) при  $8\lambda/3r_0 \ll \psi_v^2$ ,  $C^*=0,515$  в (3.136) допустимо принять  $C^*=0,5$ . Тогда на основании (3.145) найдем (см. рис. 31)

$$\frac{\lambda}{r_0} = \frac{3}{32\pi} (\Delta \bar{W})^2 = \frac{3}{32\pi} (1,325 - 0,665)^2 = 0,013.$$

Выходная кривая, рассчитанная по (3.136), (3.142) при  $\bar{r}_0=0$  для  $\lambda/r_0=0,013$  и  $\psi_v=0,553$ , показана на рис. 31.

#### 4. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ДИСПЕРСИЯ И МАССОБМЕН

Фильтрация растворов в горных породах и грунтах сопровождается как процессами рассеяния вещества механической природы (гидродинамическая дисперсия), так и сложными процессами физико-химического взаимодействия растворенного вещества с твердой фазой породы (массообмен). При решении практических задач с участием этих процессов из-за многообразия явлений приходится или суммировать их действие, предполагая какой-либо общий механизм взаимодействия, или же выделять из них ограниченное число проявлений, являющихся лимитирующими.

Существующие исследования по сорбции растворов [86] на горных породах и грунтах различного минералогического состава свидетельствуют о том, что преобладающей формой их взаимодействия является ионный обмен. Обменная емкость глинистых грунтов определяется в основном минералогическим составом, изменяясь от 3—15 мг-экв/100 г для коалинита до 100÷150 мг-экв/100 г для вермикулита. Обменная емкость песков различного минералогического состава изменяется в пределах 0,3÷13 мг-экв/100 г. Существенное влияние на ионный обмен оказывает комплексообразование, снижая обменную емкость на 1—2 порядка.

Изучение совместного протекания массообменных процессов с учетом гидродинамической дисперсии при произвольных уравнениях кинетики (1.7) и равновесия (1.8) является весьма сложной проблемой. Поэтому при аналитическом решении таких задач устанавливается обычно лимитирующая стадия процесса сорбции. По данным множества экспериментальных работ при ионном обмене преобладающее влияние даже для сильных ионитов имеет внешнедиффузионное торможение. Аналогично для физической адсорбции скорость процесса также определяется скоростью внешней диффузии, т. е. условиями транспорта реагирующих веществ к поверхности взаимодействия. В этих случаях для описания кинетики ионообменных и сорбционных процессов обычно используется уравнение

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \gamma (c - c^*), \quad (4.1)$$

в котором  $\gamma$  — константа скорости процесса взаимодействия;  $c^*$  — концентрация раствора, равновесная количеству вещества, поглощенному к данному моменту времени твердой фазой. Эта концентрация связана функционально с концентрацией на твердой фазе  $N^*$  уравнением изотермы сорбции или ионного обмена

$$c^* = f(N^*). \quad (4.2)$$

Кинетическое уравнение (4.1) применяется также для других процессов межфазового взаимодействия. К этому уравнению приводится механизм внутридиффузионного поглощения в средах с двойной пористостью. При  $c^* = \text{const}$  получается уравнение кинетики растворения солей (при поверхностном засолении). При  $c^* = 0$  имеем кинетику необратимых процессов деструкции или радиоактивного распада. Константа  $\gamma$  во всех этих случаях приобретает свой физический смысл.

Ниже приводятся некоторые строгие решения задач гидродинамической дисперсии и массообмена при линейных уравнениях кинетики (4.1), а также указаны примеры возможных приближенных реализаций, когда уравнение (4.1) нелинейно.

## 4.1. Линейный поток подземных вод

### 4.1.1. Случай линейной изотермы адсорбции

Для этого случая система уравнений баланса массы вещества и кинетики процесса имеет вид:

$$D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} = n_0 \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \gamma (c - \alpha N), \quad \alpha = 1/\Gamma. \quad (4.4)$$

Система уравнений (4.3)–(4.4) с наибольшей полнотой рассмотрена Л. Лапидусом и В. Амундсоном [165] для процессов, протекающих в хроматографических и ионообменных колонках. Ими получено решение для общих условий, когда концентрация на входе является функцией времени  $c(0, t) = c_0(t)$ , а начальное распределение вещества в растворе и на твердой фазе зависит от координат  $c(x, 0) = c_i(x)$ ,  $N(x, 0) = N_i(x)$ . Для более простых условий

$$c(x, 0) = N(x, 0) = 0, \quad c(0, t) = c_0, \quad \partial c(\infty, t)/\partial x = 0 \quad (4.5)$$

решение для распределения концентрации вещества в поровом растворе имеет вид

$$\frac{c}{c_0} = e^{\xi} \left[ F(\xi, \tau) + \alpha \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{\tau} F(\xi, \eta) d\eta \right], \quad (4.6)$$

где

$$F(\xi, \tau) = e^{-\alpha \vartheta} \int_0^{\tau} I_0 \left[ 2 \frac{\vartheta}{\tau} \sqrt{\alpha \mu (\tau - \mu)} \right] \frac{\xi}{2 \sqrt{\pi \mu}} e^{-\xi^2/4\mu - g\mu} \cdot \frac{d\mu}{\mu};$$

$$g = 1 + \frac{\vartheta}{\tau} (1 - \alpha);$$

$\xi = vx/D$ ,  $\vartheta = vt/xn_0$ ,  $\tau = v^2 t/Dn_0$ ,  $I_0(z)$  — модифицированная функция Бесселя.

В иной форме решение уравнений (4.3) — (4.4) при тех же условиях (4.5) получено Э. А. Бондаревым и В. Н. Николаевским [8]. Аналогичная система уравнений при  $\alpha=1$  рассматривалась К. Коатсом и Б. Смитом [116] в задаче о конвективной диффузии в средах с застойными зонами.

В связи со сложностью вычислений по (4.6) получено также решение задачи (4.3) — (4.5) в виде [94]

$$\frac{c}{c_0} = \frac{2e^{\xi_1}}{\pi} \int_0^{\infty} (\varphi_1 \cdot \psi_2 - \varphi_2 \cdot \psi_1) d\mu. \quad (4.7)$$

Здесь

$$\varphi_{1,2}(\xi_1, \zeta, \mu) = \exp \left\{ - \left[ \frac{(\mu^2 + \xi_1^2) \cdot \vartheta}{4} + \frac{(1 + \alpha) \vartheta \zeta}{2} \pm \frac{\vartheta}{4\xi_1} f(\xi_1, \zeta, \mu) \right] \right\},$$

$$\psi_{1,2}(\xi_1, \zeta, \mu) = \frac{[2(\alpha - 1)\xi_1\zeta - \xi_1^2 - \mu^2 \pm f(\xi_1, \zeta, \mu)] \mu \sin \mu}{[\mu^2 + \xi_1^2 + 2(1 + \alpha)\xi_1\zeta \mp f(\xi_1, \zeta, \mu)] f(\xi_1, \zeta, \mu)},$$

$$f(\xi_1, \zeta, \mu) = [(\mu^2 + \xi_1^2 - 2\alpha\xi_1\zeta)^2 + 4\xi_1\zeta\mu^2 + 4\xi_1^3\zeta + 4(1 + 2\alpha)\xi_1^2\zeta^2]^{1/2},$$

$$\xi_1 = \xi/2 = vx/2D, \quad \zeta = \gamma n_0 x/v.$$

Более сложным является случай ограниченной длины пласта с условием 3-го рода на входе, когда уравнения (4.3) — (4.4) решаются при краевых условиях

$$c(x, 0) = 0, \quad -D \frac{\partial c(0, t)}{\partial x} + vc(0, t) = vc_0, \quad \frac{\partial c(l, t)}{\partial x} = 0. \quad (4.8)$$

Распределение концентраций вещества в поровом растворе находится из выражения

$$\frac{c}{c_0} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\mu_n \xi (\mu_n \cos \mu_n \bar{x} + \xi \sin \mu_n \bar{x})}{a_0 (\mu_n^2 + \xi^2) (\mu_n^2 + \xi^2 + 2\xi^2)} (a_1^* e^{-\tau_1} + a_2^* e^{-\tau_1}) e^{\xi \bar{x}}, \quad (4.9)$$

в котором

$$a_0 = \{[0,5(\mu_n^2 + \xi^2) - \xi \xi_\alpha]^2 + 2\xi \zeta (\mu_n^2 + \xi^2)\}^{1/2},$$

$$a_{1,2}^* = a_0 \pm [0,5(\mu_n^2 + \xi^2) - \xi \xi_\alpha],$$

$$\tau_{1,2} = \frac{\vartheta}{2\xi} \{[0,5(\mu_n^2 + \xi^2) + \xi \xi_\alpha] \mp a_0\},$$

$$\xi = vl/2D, \quad \zeta = \gamma l/v, \quad \xi_\alpha = \zeta(1 + \alpha n_0), \quad \vartheta = vt/ln_0.$$

Уравнение для вычисления корней  $\mu_n$  имеет вид

$$\operatorname{tg} \mu_n = \frac{2\xi \mu_n}{\mu_n^2 - \xi^2}. \quad (4.10)$$



Действительные корни этого уравнения соответствуют абсциссам общих точек кривых:

$$\eta = \frac{2}{\operatorname{tg} \mu_n} \quad \text{и} \quad \eta = \frac{\mu_n}{\xi} - \frac{\xi}{\mu_n},$$

вторая из которых есть прямоугольная гиперболa с центром в начале координат и асимптотами  $\mu_n=0$  и  $\eta=\mu_n/\xi$ . Следовательно корни (4.10) могут быть определены графически. Эти же корни можно найти более простым путем. Не приводя доказательств маркируем нечетные и четные корни следующим образом

$$\mu_{2n-1} = \beta_n, \quad \mu_{2n} = \gamma_n.$$

Для корней  $\beta_n$  и  $\gamma_n$  действительны уравнения

$$\operatorname{tg} \beta_n = \xi/\beta_n, \quad \operatorname{ctg} \gamma_n = -\xi/\gamma_n. \quad (4.11)$$

Таким образом (4.10), заменяется более простыми соотношениями (4.11), часто встречающимися в литературе.

Наиболее общие результаты по рассматриваемой линейной проблеме получены Ф. Линдстремом [168]. Наряду с механизмом линейной обратимой сорбции или ионного обмена он предусмотрел возможность радиоактивного и микробиологического распада как в жидкой, так и в твердой фазе, а также химических реакций и необратимой сорбции на поверхности частиц породы. Система уравнений баланса массы (4.3) и кинетики массообмена (4.4) в этом случае записывается в более сложной форме

$$D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} - \lambda_p c = n_0 \frac{\partial c}{\partial t}, \quad 0 < x < \infty, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \gamma(c - \alpha N) - \lambda_T N, \quad t > 0, \quad (4.13)$$

где  $\lambda_p$  — обобщенная константа распада веществ в растворе;  $\lambda_T$  — то же в сорбированной фазе.

Краевые условия:

$$\begin{aligned} c(x, 0) = N(x, 0) = 0; \quad -D \frac{\partial c(0, t)}{\partial x} + v c(0, t) = A(t) v c_0; \\ -D \frac{\partial c(\infty, t)}{\partial x} + v c(\infty, t) = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

предусматривают непрерывно-импульсный ввод раствора, при котором

$$A(t) = \sum_{i=0}^M (-1)^i H(t - T_i). \quad (4.15)$$

Здесь  $M$  — положительное целое число,  $H(t - T_i)$  — единичная ступенчатая функция Хевисайда, равная нулю при  $t \leq T_i$  и единице при  $t > T_i$ . При  $M=0$  и  $T_i=0$  получается случай ввода раствора с постоянной концентрацией при  $t \geq 0$ . При  $M=1$  и

$T_0=0$  задается непрерывно-импульсный ввод продолжительно-  
стью  $T_1$ .

Решение системы (4.12) — (4.13) при условиях (4.14) имеет  
вид

$$\frac{c}{c_0} = A(t) \int_0^{t-T_1} g(x, \theta) \cdot h(t-T_1, \theta) d\theta \quad (4.16)$$

при  $T_M \leq t \leq T_{M+1}$ ,  $M=0, 1, 2, \dots$ ,

$$g(x, \theta) = \frac{v}{D^{1/2}} e^{-\lambda_p \theta} \left\{ \frac{\exp[-(x-v\theta)^2/4D\theta]}{(\pi\theta)^{1/2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{v}{2D^{1/2}} e^{vx/D} \operatorname{erfc} \frac{x+v\theta}{2(D\theta)^{1/2}} \right\},$$

$$h(t-T_1, \theta) = e^{-\gamma\theta/n_0} \{ e^{-b(t-T_1)\theta} \cdot J_0[2(a(t-T_1-\theta)\theta)^{1/2}] +$$

$$+ b \int_0^{t-T_1-\theta} e^{-b\eta} J_0[2(a\theta\eta)^{1/2}] d\eta \},$$

$$a = -\gamma b/n_0, \quad b = \alpha\gamma + \lambda_T.$$

Подынтегральная функция  $h(t-T_1, \theta)$  является по существу модификацией функции Гольдштейна  $J$  [137], достаточно хорошо изученной в специальной литературе [43]. Следует отметить, что большинство решений подобных задач, включая и (4.9), получаются аналогично (4.16) в виде двукратного интегрирования по времени и поэтому являются чрезвычайно сложными для вычислений. Ф. Линдстрему удалось выполнить в (4.16) интегрирование по частям, благодаря чему это решение упростилось

$$\frac{c}{c_0} = A(t) \left[ e^{-\gamma(t-T_1)/n_0} \cdot G(x, t-T_1) + \right. \\ \left. + \int_0^{t-T_1} G(x, \theta) \cdot h_1(t-T_1, \theta) d\theta \right]. \quad (4.17)$$

Здесь:

$$G(x, t) = \frac{v}{2D^{1/2}\lambda_p} \left\{ \frac{v}{D^{1/2}} e^{vx/D-\lambda_p t} \operatorname{erfc} \frac{x+vt/n_0}{2\sqrt{Dt/n_0}} - \right. \\ \left. - \left[ \frac{v}{2D^{1/2}} + \left( \lambda_p + \frac{v^2}{4D} \right)^{1/2} \right] \exp \left\{ x \left[ \frac{v}{2D} + \left( \frac{\lambda_p}{D} + \frac{v^2}{4D^2} \right)^{1/2} \right] \right\} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{erfc} \frac{x+2[Dn_0^2(\lambda_p+v^2/4D)t^2]^{1/2}}{2(Dt/n_0)^{1/2}} - \left[ \frac{v}{2D^{1/2}} - \left( \lambda_p + \frac{v^2}{4D} \right)^{1/2} \right] \times \right. \\ \left. \times \exp \left\{ x \left[ \frac{v}{2D} - \left( \frac{\lambda_p}{D} - \frac{v^2}{4D^2} \right)^{1/2} \right] \right\} \right\} \times$$

$$\times \operatorname{erfc} \frac{x-2[Dn_0^2(\lambda_p+v^2/4D)t^2]^{1/2}}{2(Dt/n_0)^{1/2}}, \quad (4.18)$$

$$h_1(t, \theta) = \frac{\gamma}{n_0} e^{-b(t-\theta)-\gamma/n_0} \left\{ I_0 [2(\gamma b(t-\theta)\theta/n_0)^{1/2}] + \right. \\ \left. + \left( \frac{b\theta n_0}{\gamma(t-\theta)} \right)^{1/2} I_1 [2(\gamma b(t-\theta)\theta/n_0)^{1/2}] \right\}. \quad (4.19)$$

Для содержания вещества в твердой фазе получена следующая зависимость

$$N(x, t) = \gamma A(t)/n_0 \int_0^{t-T_l} G(x, \theta) \cdot h_2(t-T_l, \theta) d\theta, \quad (4.20)$$

в которой  $G(x, \theta)$  определяется по (4.18), а функция  $h_2$  находится из выражения:

$$h_2(t, \theta) = e^{-\gamma\theta/n_0-b(t-T_l-\theta)/n_0} \left\{ I_0 [2(\gamma b(t-T_l-\theta)\theta/n_0)^{1/2}] + \right. \\ \left. + \left( \frac{\gamma(t-T_l-\theta)/n_0}{b\theta} \right)^{1/2} I_1 [2(\gamma b(t-T_l-\theta)\theta/n_0)^{1/2}] \right\}. \quad (4.21)$$

В частном случае  $\lambda_p \rightarrow 0$  после предельного перехода в (4.18) получаем:

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} G = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erfc} \frac{x-vt/n_0}{2\sqrt{Dt/n_0}} + 2v \left( \frac{t}{\pi D n_0} \right)^{1/2} \exp \left[ -\frac{(x-vt/n_0)^2}{4Dt/n_0} \right] - \right. \\ \left. - \left( 1 + \frac{vx}{D} + \frac{v^2 t}{D n_0} \right) e^{vx/D} \operatorname{erfc} \frac{x+vt/n_0}{2\sqrt{Dt/n_0}} \right\}. \quad (4.22)$$

В частном случае  $\gamma \rightarrow 0$  получается решение для диффузионной модели с кинетикой распада

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} c(x, t) = c_0 A(t) G(x, t-T_l). \quad (4.23)$$

При равновесной адсорбции  $\gamma \rightarrow \infty$  имеем

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} c(x, t) = c_0 A(t) G \left( x, \frac{t-T_l}{1+1/\alpha n_0} \right). \quad (4.24)$$

Сложная форма получаемых решений задач с совместным действием гидродинамической дисперсии и массообмена может быть в ряде случаев упрощена путем перехода к асимптотическим представлениям и приближенным решениям, которых множество. Отметим здесь некоторые из них.

В ряде случаев при большой длительности процесса кинетика адсорбции может быть учтена в модели гидродинамической дисперсии путем введения эффективных значений параметров [60]

$$n_s = n_0(1+\Gamma), \quad D_s = D + \frac{\Gamma^2 v^2}{\gamma(1+\Gamma)^2}, \quad \Gamma = \frac{1}{\alpha}. \quad (4.25)$$

Считается, что такой подход справедлив при  $t > t_a \approx 10 \Gamma n_0/\gamma$ . Например для умеренно сорбируемых веществ ( $\Gamma = 2 \div 3$ ,  $\gamma = 10 \div 100 \text{ сут}^{-1}$ ) оценка времени  $t_a$  дает  $t_a = (0,2 \div 3) n_0$ .

В работе [94] получено асимптотическое решение задачи (4.3) — (4.5) в виде

$$\frac{c}{c_0} = \frac{1}{2} \left[ e^{-(V\eta^*-1)\xi/2} \times \operatorname{erfc} \frac{1-\vartheta V\eta^*}{2V\vartheta/\xi} + e^{(V\eta^*+1)\xi/2} \operatorname{erfc} \frac{1+\vartheta V\eta^*}{2V\vartheta/\xi} \right], \quad (4.26)$$

причем  $\xi = vx/D$ ,  $\vartheta = vt/xn_0$ ,  $\eta^* = 1 + \frac{4\zeta}{\xi} + \frac{16\alpha\zeta^2}{\xi^2}$ ,  $\zeta = \gamma x/v$ .

Показано, что (4.26) в практическом диапазоне параметров  $\xi$ ,  $\alpha$  и  $\gamma$  удовлетворительно сходится к точному решению. Из (4.26) получаются также известные частные решения для случаев конвективной диффузии ( $\zeta = 0$ ,  $\eta^* = 1$ ) и необратимой кинетики 1-го порядка ( $\alpha = 0$ ,  $\eta^* = 1 + 4\zeta/\xi$ ).

Эффективное решение задач гидродинамической дисперсии и массообмена может быть получено методом возмущения и сращения асимптотических разложений [6, 53, 123, 154].

Сущность этого метода в данном случае сводится к следующему. Условно выделяются две области массопереноса. В первой области, называемой внешней, массоперенос рассматривается в рамках модели поршневого вытеснения. Физически это равносильно допущению о пренебрежимо малом влиянии дисперсионных эффектов на процесс массообмена. Во второй, внутренней области, которая считается локализованной в окрестности фронта поршневого вытеснения, в расчет принимается и дисперсия и массообмен (правда, массообмен здесь учитывается приближенно, как бы в ранней стадии своего развития). При известных внешнем и внутреннем решениях путем аддитивного составления строится решение, пригодное для всей области массопереноса (оно определяется как сумма внутреннего и внешнего за вычетом их общей части).

Для внешней области (при  $D=0$ ) решение приведено в разделе 2.2 — формула (2.103). Для концентрации в жидкой фазе в принятых выше обозначениях

$$\frac{c}{c_0} = J(\zeta, \eta) = 1 - e^{-\eta} \int_0^{\xi} e^{-z} I_0(2\sqrt{\eta z}) dz, \quad (4.27)$$

где  $\eta = \alpha\gamma(t - n_0x/v)$ ,  $\zeta = \gamma x/v$ .

Функция Гольдштейна [137] здесь представлена в иной чем выше форме.

При малых  $v(t - n_0x/v)$  решение (4.27) имеет асимптотику

$$\frac{c}{c_0} = \exp\left(-\frac{\gamma x}{v}\right). \quad (4.28)$$

Для отыскания решения во внутренней области (в окрестности фронта поршневого вытеснения при  $x=x_*$ ) вводится переменная  $\mu = x - x_*$ . Тогда, принимая во внимание, что при  $x=x_*$ ,  $N(x, t) = 0$ , вместо (4.3) и (4.4) будем иметь

$$n_0 \frac{\partial c}{\partial t} + \gamma c = D \frac{\partial^2 c}{\partial \mu^2}, \quad (4.29)$$

а краевые условия запишутся в виде

$$c = \begin{cases} c_0 \exp\left(-\frac{\gamma t}{n_0}\right) & \text{при } \mu \rightarrow -\infty, t > 0 \\ 0 & \text{при } \mu \rightarrow +\infty, t > 0. \end{cases} \quad (4.30)$$

Решение (4.29) — (4.30) имеет вид

$$\frac{c}{c_0} = 0,5 \exp\left(-\frac{\gamma t}{n_0}\right) \operatorname{erfc} \frac{x - x_*}{\sqrt{2Dt/n_0}}, \quad (4.31)$$

а строя на основе (4.27) и (4.31) составное решение, получаем

$$\begin{aligned} \frac{c}{c_0} = & [J(\xi, \eta) - e^{\gamma t/n_0}] H(t - n_0 x/v) + \\ & + 0,5 e^{-\gamma t/n_0} \operatorname{erfc} \frac{x - x_*}{\sqrt{2Dt/n_0}}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

где  $H$  — единичная функция Хевисайда.

К задачам гидродинамической дисперсии и массообмена примыкают задачи для сред с диффузионным поглощением массы слабопроницаемыми включениями породы в виде блоков для гетерогенных сред и прослоев для стратифицированных пластов. Наметились три подхода к построению математической модели этого процесса. Наиболее общим из них является формулировка задачи массопереноса как сопряженной для двух сред с разными параметрами [76, 79, 211, 214, 215]. Частной формой такого подхода является модель макродисперсии в гетерогенных средах [48, 60, 79, 80]. И наконец другой частной формой является описание массообмена между элементами среды с двойной пористостью с помощью модели с формальной кинетикой. Обоснование такой модели и ее сопоставление с предыдущими содержится в работах А. Валочки и др. [185, 225, 226]. Модель среды с двойной пористостью и химической реакцией применительно к агрегированным почвам рассмотрена Дж. Криттенденом и др. [118].

#### 4.1.2. Случай нелинейной изотермы

Введение в рассматриваемые задачи нелинейных изотерм значительно усложняет их и доступными становятся только приближенные или численные методы. Приближенное решение системы уравнений (4.3) — (4.4) для изотермы Ленгмюра получено А. Аквивосом [106]. Он вводит новые переменные

$$z = \left( x - \frac{\alpha v t}{\alpha n_0 + 1} \right) \frac{v}{D(\alpha n_0 + 1)}, \quad \bar{c} = \frac{c}{c_0},$$

$$\bar{N} = \frac{N}{N_0} \quad \text{и} \quad \bar{c}^*(\bar{N}) = \frac{c^*(\bar{N}N)}{c_0}$$

и получает систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{c}}{dz} &= \bar{c} - \bar{N} \\ \beta \frac{d\bar{N}}{dz} &= \bar{c}^*(\bar{N}) - \bar{c}, \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

в которой безразмерная группа

$$\beta = \left[ \frac{v}{(1-n_0)(\alpha n_0 + 1)} \right]^2 \frac{1}{D\gamma}$$

определяет в какой-то мере относительную роль продольной диффузии и внешнего сопротивления массообмену в процессе сорбции. Предельные значения  $\beta=0$  и  $\beta=\infty$  характеризуют соответственно случаи  $\gamma=\infty$  — равновесная сорбция и  $\gamma=0$  — несорбирующая порода. Для промежуточных значений  $\beta$  отыскивается приближенное решение (4.3) — (4.4) при дополнительных условиях  $c=c_0$ ,  $N=N_0$  при  $x \rightarrow +\infty$ ,  $c=N=0$  при  $x \rightarrow -\infty$ ,  $c=c_0 H(-x)$  при  $t=0$ , где  $H(-x)$  — единичная функция Хевисайда. Указанные условия определяют контактную задачу, для которой возможно еще одно дополнительное предположение, а именно  $c/c_0=0,5$  при  $z=0$ , которое используется А. Акривосом.

Систему уравнений замыкает уравнение изотермы ионного обмена для одновалентных ионов, записываемое в виде

$$N = \frac{cN_0}{kc_0 + (1-k)c}. \quad (4.34)$$

Из (4.34) можно получить изотерму Ленгмюра, сгруппировав переменные и параметры следующим образом  $a = \frac{N_0}{kc_0}$  и  $b = \frac{1-k}{kc_0}$ . Тогда вместо (4.34) можно записать  $N = \frac{ac}{1+bc}$ , где  $c$ ,  $c_0$  и  $N$ ,  $N_0$  — концентрации и обменные емкости второго из обменивающихся ионов ( $c=c_2$  и  $N=N_2$ );  $k$  — константа ионного обмена ( $k=k_{12}$ ), дающая количественную характеристику адсорбируемости одного иона по сравнению с другим. При  $k < 1$  имеет место предпочтительная адсорбция второго иона, изотерма Ленгмюровского типа (выпуклая).

Решение для координат точек концентрационного фронта имеет вид:

$$z = \frac{1}{g-1} \ln \frac{1}{2\bar{c}} - \frac{1}{g-1} \int_{\bar{c}}^{0,5} \frac{v}{(g-1)\bar{c}^2 + \bar{c}v} d\bar{c}. \quad (4.35)$$

Здесь

$$v = \frac{N}{N_0} - g \frac{c}{c_0} = \bar{N} - g\bar{c},$$

$$g = \frac{\eta}{2} \left[ 1 - \frac{k}{\beta} + \sqrt{\left(1 - \frac{k}{\beta}\right)^2 + \frac{4}{\beta}} \right].$$

Интеграл в (4.35) вычисляется любым из численных методов.

Для определения ширины концентрационного фронта наиболее интересно определить расстояние  $z$  между точкой  $\bar{c}=0,5$  и небольшим значением  $\bar{c}=0,05$ . В этом случае получается более удобное приближение:

$$z = \frac{2}{\sqrt{\left[\left(1 - \frac{k}{\beta}\right)^2 + \frac{4}{\beta}\right] - \left(1 + \frac{k}{\beta}\right)}} \cdot \ln \left( \frac{1}{2\bar{c}} + A \right), \quad (4.36)$$

где  $A$  — вычисляется по следующей интерполяционной формуле:

$$\frac{\ln 2}{A} \simeq \frac{1}{1 + \beta/k} \left( \frac{\rho}{k^2} + k \right).$$

Расчеты по формуле (4.36) рекомендуются в пределах  $\frac{1}{4} < k < 1$ . При  $0 < k < \frac{1}{4}$  могут использоваться зависимости:

$$\left. \begin{aligned} \bar{c} &= 1 - e^z \frac{\lambda + 1}{2\lambda} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda + 1}{2\lambda} \right)^\lambda \right], & z \leq \ln \frac{2\lambda}{\lambda + 1} \\ \bar{c} &= \frac{1}{2} e^{-\lambda z}, & z \geq \ln \frac{2\lambda}{\lambda + 1} \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

где

$$\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{4}{\beta}\right) - 1}.$$

## 4.2. Осесимметричный поток

При необратимой реакции 1-го порядка исходное дифференциальное уравнение дисперсии примеси в радиальном потоке записывается в виде

$$n_0 \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{q}{r} \frac{\partial c}{\partial r} + \gamma c = \lambda \frac{q}{r} \frac{\partial^2 c}{\partial r^2}. \quad (4.38)$$

Рассмотрим решение уравнения (4.38) при краевых условиях (3.4), соответствующих режиму непрерывного ввода вещества в скважину [42].

При использовании подстановок  $\rho = r/\lambda$ ,  $\tau = qt/n_0\lambda^2$ ,  $\alpha^* = \gamma\lambda^2/$

/q уравнение (4.38) принимает вид

$$\rho \frac{\partial c}{\partial \tau} + \frac{\partial c}{\partial \rho} + \rho \alpha^* c = \frac{\partial^2 c}{\partial \rho^2}, \quad (4.39)$$

а полагая

$$c(\rho, \tau) = u(\rho, \tau) \exp(-\alpha^* \tau + \rho/2) \quad (4.40)$$

вместо (4.39) и (3.4) будем иметь

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{u}{4} = 0, \quad (4.41)$$

$$u(\rho, 0) = 0, \quad u(\rho_c, \tau) = c_0 \exp(\alpha^* \tau - \rho/2), \quad u(\infty, \tau) = 0. \quad (4.42)$$

Применяя к (4.41), (4.42) преобразование Лапласа по

$$\bar{u} = \int_0^\infty u(\rho, \tau) \exp(-p\tau) d\tau,$$

получим

$$\frac{d^2 \bar{u}}{d\rho^2} - \rho p \bar{u} - \frac{\bar{u}}{4} = 0, \quad (4.43)$$

$$\bar{u}(\rho_c, p) = \frac{c_0}{p - \alpha^*} \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right), \quad \bar{u}(\infty, p) = 0. \quad (4.44)$$

Решение уравнения (4.43) при условиях (4.44) имеет вид:

$$\bar{u}(\rho, p) = c_0 \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right) \times \left[1 + \frac{\alpha^*}{p - \alpha^*}\right] \frac{F(p)}{p}. \quad (4.45)$$

Оригинал  $F(p)/p$  известен (см. раздел 3.1)

$$\frac{F(p)}{p} = \exp\left[-\frac{(\rho - \rho_c)}{2}\right] W(\rho, \tau),$$

где  $W(\rho, \tau)$  — функция, определяемая согласно (3.18). Следовательно

$$\bar{c} = \frac{c}{c_0} = \exp(-\alpha^* \tau) W(\rho, \tau) + \alpha^* \int_0^\tau \exp(-\alpha^* z) W(\rho, z) dz. \quad (4.46)$$

Стационарное распределение концентрации устанавливается из решения (4.39) при  $dc/d\tau = 0$ . Это решение имеет вид

$$\bar{c} = \frac{c}{c_0} = \exp\left[-\frac{(\rho - \rho_c)}{2}\right] \times \frac{Ai[(1 + 4\alpha^* \rho)/4\alpha^{*2/3}]}{Ai[(1 + 4\alpha^* \rho_c)/4\alpha^{*2/3}]} \quad (4.47)$$

Профили концентраций  $\bar{c}(\rho, \tau)$ , рассчитанные по (4.46) при  $\alpha^* = 0,005$  для ряда значений  $\tau$ , приведены на рис. 32; здесь же показана кривая распределения  $\bar{c}(\rho, \infty)$ , вычисленная по формуле (4.47). Из рис. 32 видно, что при  $\alpha^* = 0,005$  стационарное распределение устанавливается примерно  $\tau \approx 400$ . По мере уменьшения  $\alpha^*$  время, за которое процесс стабилизируется,



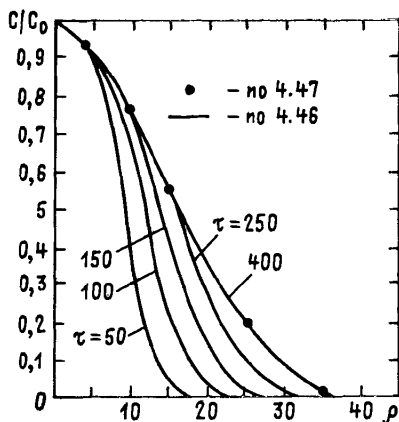


Рис. 32. Нестационарное распределение концентрации при неравновесном массообмене

возрастает (при  $\alpha^* = 0$  стабилизации вообще не происходит и концентрационный фронт перемещается по пласту).

Решение в форме (4.46) является очень сложным и, по-видимому, использовать его можно лишь в качестве эталона для оценки точности приближенных зависимостей.

Найдем приближенное решение уравнения (4.38), применяя метод сращения асимптотических разложений [109].

Внешнее решение задачи будем искать в предположении, что  $\lambda \rightarrow 0$ . В этом случае вместо (4.38) имеем

$$n_0 \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{q}{r} \frac{\partial c}{\partial r} + \alpha c = 0. \quad (4.48)$$

Решение уравнения (4.48) при условиях  $c(r, 0) = 0$ ,  $c(r_0, t) = c_0$  записывается в виде

$$c_{\text{внеш}} = \begin{cases} c_0 \exp \left[ -\frac{\alpha (r^2 - r_*^2)}{2q} \right] & \text{при } r \leq r_* \\ 0 & \text{при } r > r_* \end{cases} \quad (4.49)$$

Внутреннее решение ищется в области фронта поршневого вытеснения (т. е. при  $r \approx r_*$ ). Переходя в уравнении (4.38) к переменной  $\mu_1 = (r^2 - r_*^2)/\lambda^{1/2}$ , получим

$$n_0 \frac{\partial c}{\partial t} + \alpha c = 4q \frac{\partial}{\partial \mu_1} \left[ \sqrt{r_*^2 + \lambda^{1/2} \mu_1} \times \frac{\partial c}{\partial \mu_1} \right],$$

а учитывая, что  $\lambda$  — малый параметр и  $r_*^2 \gg \lambda^{1/2} \mu_1$ , запишем

$$n_0 \frac{\partial c}{\partial t} + \alpha c = 4q \sqrt{r_*^2 + \frac{2qt}{n_0}} \times \frac{\partial^2 c}{\partial \mu_1^2}. \quad (4.50)$$

Решение (4.50) отыскивается при следующих условиях

$$c(\mu_1, t) = c_0 \exp\left(-\frac{\alpha t}{n_0}\right) \text{ при } \mu_1 \rightarrow -\infty, t > 0, \quad (4.51)$$

$$c(\mu_1, t) = 0 \text{ при } \mu_1 \rightarrow \infty, t > 0, \quad (4.52)$$

где первое условие (4.51) отражает процедуру сращивания внутреннего решения с внешним.

Из (4.50), (4.51) — (4.52) имеем

$$c_{\text{внут}} = 0,5 c_0 \exp\left(-\frac{\alpha t}{n_0}\right) \operatorname{erfc}(\eta), \quad (4.53)$$

где

$$\begin{aligned} \eta &= (r^2 - r_*^2) / \sqrt{\frac{16\lambda}{3}(r_*^3 - r_c^3)} \Big|_{r_c=0} = \\ &= (r^2 - r_*^2) / \sqrt{\frac{16\lambda}{3} r_*^3}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Составное решение, найденное по правилам [123], как сумма внутреннего и внешнего решения за вычетом их общей части (при  $r_c \approx 0$ ), записывается в виде

$$\begin{aligned} \bar{c} = \frac{c}{c_0} &= \left[ \exp\left(-\frac{\alpha r}{2q}\right)^2 - \exp\left(-\frac{\alpha t}{n_0}\right) \right] H\left(t - \frac{n_0 r^2}{2q}\right) + \\ &+ 0,5 \exp\left(-\frac{\alpha t}{n_0}\right) \operatorname{erfc}(\eta), \end{aligned} \quad (4.55)$$

где  $H\left(t - \frac{n_0 r^2}{2q}\right)$  — единичная функция Хевисайда.

В переменных  $\rho, \tau$  вместо (4.55) будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{c} &= [\exp(-0,5\alpha^*\rho^2) - \exp(-\alpha^*\tau)] H(\tau - 0,5\rho^2) + \\ &+ 0,5 \exp(-\alpha^*\tau) \operatorname{erfc}\left[\frac{\rho^2 - 2\tau}{\sqrt{16(2\tau)^{3/2}/3}}\right]. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Сопоставительные расчеты по (4.46) и (4.56) выполнялись для случая  $\alpha^* = 0,005$ . Результаты их представлены в табл. 21. Из данных табл. 21 видно, что приближенное решение (4.56) достаточно хорошо согласуется с точным.

Рассмотрим решение уравнения (4.38) для случая непрерывно-импульсного ввода вещества в скважину, когда крайевые условия заданы в виде

$$c(r, 0) = 0, c(r_c, t) = c_0 H(t_0 - t), c(\infty, t) = 0, \quad (4.57)$$

где  $H(t_0 - t)$  — единичная функция Хевисайда и  $t_0$  — время, в течение которого концентрация вещества в закачиваемой воде равна  $c_0$ . Эффективное решение задачи (4.38), (4.57) легко находится методом возмущения [154]. В данном случае внешнее

Расчетные значения  $\bar{c}$  ( $\rho$ ,  $\tau$ )

$\tau$	$\rho$					
	5	10	15	20	25	30
50	0,895*	0,400	0,190	0	0	0
	0,919**	0,389	0,210	0	0	0
100	0,918	0,699	0,251	0,160	0	0
	0,938	0,725	0,236	0,170	0	0
150	0,920	0,744	0,449	0,108	0,005	0
	0,939	0,771	0,453	0,102	0,006	0
200	0,920	0,751	0,520	0,223	0,033	0,001
	0,939	0,778	0,538	0,184	0,031	0,001
250	0,921	0,752	0,541	0,299	0,082	0,007
	0,939	0,779	0,562	0,290	0,071	0,007
300	0,921	0,752	0,547	0,336	0,132	0,021
	0,939	0,779	0,568	0,338	0,100	0,019
350	0,922	0,753	0,549	0,351	0,168	0,042
	0,939	0,779	0,569	0,357	0,146	0,034
400	0,923	0,753	0,550	0,356	0,190	0,063
	0,939	0,779	0,570	0,364	0,179	0,047

\* По формуле (4.46).

\*\* По формуле (4.56).

решение (4.38) при  $\lambda \rightarrow 0$  имеет вид (при  $r_0 \approx 0$ )

$$c_{p\text{внеш}} = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < r < r_0 \\ c_{p0} \exp\left(-\frac{\alpha_p r^2}{2q}\right) & \text{при } r_0 < r < r_* \\ 0 & \text{при } r > r_*. \end{cases} \quad (4.58)$$

При этом концентрация на переднем и заднем фронтах оторочки соответственно равна

$$c_p(r_*, t) = c_{p0} \exp\left(-\frac{\alpha_p t}{n_0}\right) \quad (4.59)$$

и

$$c_p(r_{*0}, t) = c_{p0} \exp\left(-\frac{\alpha_p (t - t_0)}{n_0}\right). \quad (4.60)$$

Внутреннее решение для переднего фронта (т. е. при  $r = r_*$ ) определяется согласно (4.53); для заднего фронта (при  $r = r_{*0}$ ) оно находится аналогичным образом и имеет вид

$$c_{p(\text{внут})} = c_{p0} [1 - 0,5 \operatorname{erfc}(\eta_0)] \exp\left[-\frac{\alpha_p (t - t_0)}{n_0}\right], \quad (4.61)$$

где  $\eta_0$  — автомодельная переменная, определяемая согласно (4.54) при  $r_* = r_{*0}$ .

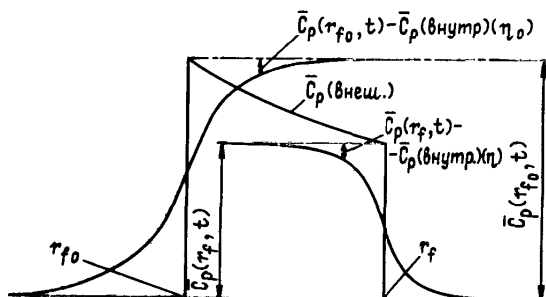


Рис. 33. Схема построения составного решения

Схема построения составного решения показана на рис. 33, а само решение для  $\bar{c} = c_p/c_{p0}$  записывается в виде (при  $r_0 \approx 0$ )

$$\begin{aligned} & \text{при } 0 < r < r_{*0} \\ \bar{c} &= [1 - 0,5 \operatorname{erfc}(\eta_0)] \exp \left[ -\frac{\alpha_p(t-t_0)}{n_0} \right] + \\ & + [0,5 \operatorname{erfc}(\eta)] \exp \left[ -\frac{\alpha_p t}{n_0} \right] \\ & \text{при } r_{*0} < r < r_* \\ \bar{c} &= 0,5 \exp \left( -\frac{\alpha_p r^2}{2q} \right) + [0,5 \operatorname{erfc}(\eta) - 1] \exp \left( -\frac{\alpha_p t}{n_0} \right) - \\ & - 0,5 \operatorname{erfc}(\eta_0) \exp \left[ -\frac{\alpha_p(t-t_0)}{n_0} \right] \\ & \text{при } r_* < r < \infty \\ \bar{c} &= 0,5 \operatorname{erfc}(\eta) \exp \left( -\frac{\alpha_p t}{n_0} \right) - 0,5 \operatorname{erfc}(\eta_0) \exp \left[ -\frac{\alpha_p(t-t_0)}{n_0} \right]. \end{aligned} \quad (4.62)$$

При  $\alpha_p \rightarrow 0$  каждая из расчетных формул (4.62) трансформируется к решению (3.55), полученному для несорбирующей оторочки; при  $\lambda = 0$ , что соответствует условиям чисто конвективного переноса, концентрации  $\bar{c}$  в области  $0 < r < r_{*0}$  и  $r_{*0} < r < r_*$  равны нулю, а в области  $r_* < r < \infty$ ,  $\bar{c}$  определяется согласно (4.46).

**Пример расчета 4.1.** Проведем расчеты по полученным решениям для следующих исходных данных:  $M = 15$  м,  $n_0 = 0,25$ ,  $\lambda = 0,05$  м,  $\alpha_p = 0,002$  ч<sup>-1</sup>,  $Q = 15$  м<sup>3</sup>/ч и  $t_0 = 1$  сут (24 ч).

Графики  $\bar{c} = f(r)$ , представленные на рис. 34, позволяют оценить совместное влияние реакции и дисперсии на динамику перераспределения концентрации в процессе перемещения оторочки по пласту. Изменение  $\bar{c}$  при чисто конвективном переносе ( $\lambda = 0$ ,  $\alpha_p \neq 0$ ) описывается кривой 1. Из рис. 34 видно, что дисперсия (кривая 2 рассчитана при  $\lambda \neq 0$ ,  $\alpha_p \neq 0$ ) вызывает размазывание границ оторочки и дополнительное уменьшение

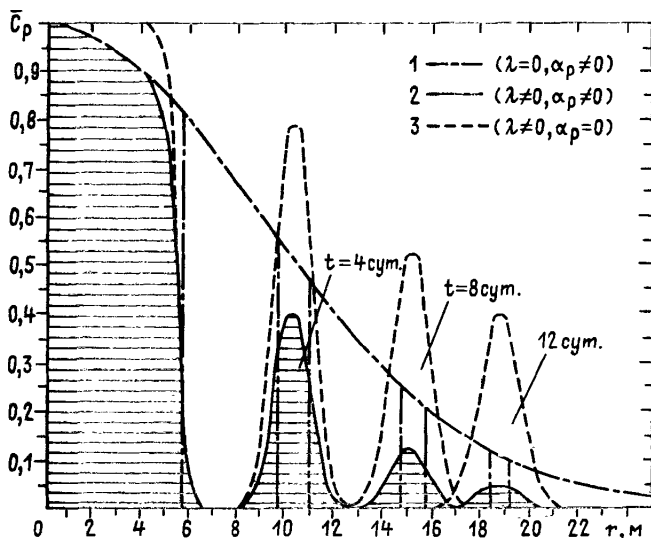


Рис. 34. Расчетные графики  $\bar{c}=f(r)$

$\bar{c}$  (в данном примере при относительно небольшом времени  $t_0$  ввода оторочки наблюдается заметный отрыв точек  $c_{\max}$  от ограничивающей кривой 1).

Из данного примера видно, что совместное проявление реакции и дисперсии обеспечивает целенаправленное снижение концентрации; по мере продвижения оторочки  $c_{\max}$  уменьшается практически до нуля. Следует отметить, что при принятом механизме реакции скорость перемещения точек  $c_{\max}$  остается такой же, как при индикаторной оторочке (кривая 3 рассчитана для случая  $\lambda \neq 0, \alpha_p \neq 0$ ).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Аверьянов С. Ф. Рассоляющее действие фильтрации из каналов. «Влияние орошения на режим грунтовых вод». М.: Наука, 1959. 44—120
2. Агронский А. Р., Ильин Н. И. Определение активной пористости и гидродинамической дисперсии водоносных пластов с помощью радиоактивных индикаторов. «Тр. ПНИИИС», 1986, 24—33
3. Албул С. П. Рудопоисковая гидрогеохимия. М.: Ун-т дружбы народов им. П. Лумумбы, 1969. 344 с.
4. Алексеев В. С., Коммунар Г. М., Астрова Н. В. Гидрогеологические проблемы регулирования качества подземных вод // Итоги науки и техн. Сер. Гидрогеология. Инженерная геология.— 1984.— 9.— 88 с.
5. Алексеев В. С., Коммунар Г. М., Макаров В. Н. Установки циклического типа для регулирования качества подземных вод. «Тр. ВОДГЕО. Гидрогеологические исследования и расчеты защиты подземных вод от загрязнения». 1987, 51—64
6. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.
7. Бейтмен Г., Эрдейн А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969. 344 с.
8. Бондарев Э. А., Николаевский В. Н. Конвективная диффузия в пористых средах с учетом явления адсорбции. «Прикл. мех. и техн. физика», 1962, № 5, 128—134
9. Бочеввер Ф. М., Лапшин Н. Н., Орадовская А. Е. Защита подземных вод от загрязнения. М.: Недра, 1979. 255 с.
10. Бочеввер Ф. М., Орадовская А. Е. Конвективная диффузия солей в радиальном потоке подземных вод в связи с защитой их от загрязненных стоков. «Тр. ВОДГЕО. Гидрогеология», 1966, вып. 13, 159—180
11. Бочеввер Ф. М., Орадовская А. Е. Гидрогеологическое обоснование защиты подземных вод и водозаборов от загрязнения. М.: Недра, 1972. 129 с.
12. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. М.: Мир, 1971. 452 с.
13. Веницианов Е. В., Рубинштейн Р. Н. Динамика сорбции из жидких сред. М.: Наука, 1983. 238 с.
14. Веригин Н. Н. Нагнетание вязжущих растворов в горные породы в целях повышения прочности и водонепроницаемости оснований гидротехнических сооружений. «Изв. АН СССР. ОТН», 1952, № 5, 674—687
15. Веригин Н. Н. Некоторые вопросы химической гидродинамики, представляющие интерес для мелиорации и гидротехники. «Изв. АН СССР. ОТН», 1953, № 10, 1369—1382
16. Веригин Н. Н. О кинетике растворения солей при фильтрации воды в грунтах. «Растворение и выщелачивание горных пород». М.: Изд-во лит. по стр. и архитект., 1957, 84—113
17. Веригин Н. Н. Об одном классе гидромеханических задач для областей с подвижными границами. «Динамика жидкости со свободными границами». СО АН СССР, 1980, вып. 46, 23—32
18. Веригин Н. Н. Задачи конвективной диффузии и равновесного массообмена с условиями на движущихся границах. «Тр. ВОДГЕО. Методы

- расчета процессов массопереноса в гидрогеологических исследованиях», 1984, 3—7
19. *Веригин Н. Н.* Основные принципы и методы геохимической гидродинамики. «Геохимия и рудообразование», 1987, № 15, 53—60
  20. *Веригин Н. Н., Дзекцер Е. С.* Неустановившаяся фильтрация вблизи каналов и дрен в многослойных грунтах. «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1967, № 1, 170—174
  21. *Веригин Н. Н., Дзекцер Е. С.* Об инъекции жидкости в пористую среду в случае сферической симметрии. «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1968, № 6, 169—172
  22. *Веригин Н. Н., Коммунар Г. М.* Фильтрация суспензий через пористые среды. «Тр. ВОДГЕО. Научные исследования в области инженерной гидрогеологии». 1978, вып. 74, 120—125
  23. *Веригин Н. Н., Родзиллер И. Д.* Очистка нефтяных вод методом фильтрации. «Нефть х-во», 1956, № 10, 52—56
  24. *Веригин Н. Н., Шержуков Б. С.* Геохимические расчеты процессов подземного растворения руд. «Изв. вузов, Горный ж.», 1969, № 5, 3—5
  25. *Веригин Н. Н., Шержуков Б. С.* Диффузия и массообмен при фильтрации жидкостей в пористых средах. «Развитие исследований по теории фильтрации в СССР». М.: Наука, 1969, 237—313
  26. *Веригин Н. Н., Шержуков Б. С.* Экспериментальное определение параметров диффузии и сорбции в пористых средах. «Тр. ВОДГЕО», 1977, вып. 66, 35—38
  27. *Веригин Н. Н., Шестаков В. М.* Методы расчета движения грунтовых вод в двухслойной среде. М.: ВОДГЕО, 1954. 47 с.
  28. Гидрогеологические исследования за рубежом. М.: Недра, 1982. 426 с.
  29. Гидродинамические и физико-химические свойства горных пород (*Веригин Н. Н., Васильев С. В., Саркисян В. С., Шержуков Б. С.*). М.: Недра, 1977. 271 с.
  30. *Голубев В. С.* Динамика геохимических процессов. М.: Недра, 1981. 208 с.
  31. *Голубев В. С., Гарибянц А. А.* Гетерогенные процессы геохимической миграции. М.: Недра, 1968. 192 с.
  32. *Гольдберг В. М.* Гидрогеологические прогнозы качества подземных вод на водозаборах. М.: Недра, 1976, 152 с.
  33. *Гольдберг В. М.* Подземное захоронение промстоков химической промышленности (опыт и задачи гидрогеологических исследований). М.: ВСЕГИНГЕО, 1968. 79 с.
  34. *Гольдберг В. М.* Взаимосвязь загрязнения подземных вод и природной среды. М.: Гидрометеиздат, 1987. 248 с.
  35. *Гольдберг В. М., Газда С.* Гидрогеологические основы охраны подземных вод от загрязнения. М.: Недра, 1984. 261 с.
  36. Движение углеводородных смесей в пористой среде (*Николаевский В. Н., Бондарев Э. А., Миркин М. И., Степанова Г. С., Терзи В. П.*). М.: Недра, 1968. 191 с.
  37. *Еникеева С. Н., Еникеев Б. Н., Орадовская А. Е.* Определение параметра гидродинамической дисперсии и активной пористости в неоднородных песчано-гравийных отложениях. «Оценка и прогноз гидрогеол. условий на застраиваемых территориях». М.: 1987 128—138
  38. *Камынин Л. И.* О линейной задаче Веригина. «Докл. АН СССР», 1963, 150, № 6, 1210—1214
  39. *Каплин Г. И., Цыгуткин С. Г.* Учет влияния сорбционных процессов для прогнозирования загрязнения подземных вод фенолами. «Проблемы охраны вод», 1975, № 6, 100—104
  40. *Колесникова Л. У., Малышев А. С.* Формирование зоны смещения пластовых и речных вод в береговой зоне водохранилищ. «Тр. ВОДГЕО. Прогноз подтопления и проектирование мероприятий по его предотвращению», 1986, 90—95
  41. *Коммунар Г. М.* Перенос загрязнений в неоднородных пластах. «Тр. ВОДГЕО. Гидрогеологические исследования и расчеты защиты подземных вод от загрязнения», 1987, 37—50

42. Коммунар Г. М., Шержуков Б. С., Муратова Л. Н. Конвективная диффузия и массообмен в радиальном потоке. «Тр. ВОДГЕО. Прогноз подтопления и проектирование мероприятий по его предотвращению», 1986, 28—38
43. Корольков Б. П. Специальные функции для исследования динамики нестационарного теплообмена. М.: Наука, 1976. 166с.
44. Куранов Н. П. Теория массопереноса в безнапорных фильтрационных потоках. «Тр. ВОДГЕО. Методы расчета процессов массопереноса в гидрогеологических процессах», 1984, 4—18
45. Лаврик В. И., Милютин А. Ф. Аналитическое и численно-аналитическое решение двумерных краевых задач конвективной диффузии растворимых веществ при фильтрации подземных вод. Киев, Ин-т математики АН УССР. Препринт 78.24. 1978, 56 с.
46. Лаврик В. И., Добрынский В. А., Рогаль И. В. Некоторые математические модели и методы исследования процессов загрязнения подземных вод. «Мат. и пробл. водн. хоз-ва». Киев, 1986, 100—123
47. Лейбензон Л. С. Нефтепромысловая механика. Ч. 2. Подземная гидравлика воды, нефти и газа. М. — Л.: Горгеолнефтеиздат, 1934, 352 с.
48. Лукнер Л., Шестаков В. М. Моделирование миграции подземных вод. М.: Недра, 1986, 208 с.
49. Лялько В. И. Методы расчета тепло- и массопереноса в земной коре. Киев: Наукова думка, 1974, 132 с.
50. Лялько В. И., Бут Ю. С., Филиппов Ю. Ф., Шнейдерман Г. А. Моделирование гидрогеологических условий охраны подземных вод. Киев: Наукова думка, 1980
51. Лялько В. И., Митник М. М. Исследование процессов переноса тепла и вещества в земной коре. Киев: Наукова думка, 1978
52. Малышев А. С. Численный метод расчета развития контура подземного хранилища промстоков. «Тр. ВОДГЕО. Водное хозяйство», 1975, вып. 48, 80—84
53. Методы прогноза солевого режима грунтов и грунтовых вод (Веригин Н. Н., Васильев С. В., Куранов Н. П., Саркисян В. С., Шульгин Д. Ф.). М.: Колос, 1979. 336 с.
54. Минц Д. М. Теоретические основы технологии очистки воды. М.: Стройиздат, 1964. 156 с.
55. Мироненко В. А. Динамика подземных вод. М.: Недра, 1983, 358 с.
56. Мироненко В. А., Мольский Е. В., Румынин В. Г. Изучение загрязнения подземных вод в горно-добывающих районах. Л.: Недра, 1988. 278 с.
57. Мироненко В. А., Румынин В. Г. О расчетных моделях миграции в стратифицированных комплексах водоносных пород. «Зап. Ленингр. Горн. ин-та», 1982, 91, 5—20
58. Мироненко В. А., Румынин В. Г. Теоретические основы опытно-миграционных исследований в водоносных пластах. Ст. I. «Изв. высш. учеб. заведений. Геол. и разведка», 1985, № 7, 65—74
59. Мироненко В. А., Румынин В. Г. Теоретические основы опытно-миграционных исследований в водоносных пластах. Ст. II. «Изв. высш. учеб. заведений. Геол. и разведка», 1985, № 9, 69—77
60. Мироненко В. А., Румынин В. Г. Опытно-миграционные работы в водоносных пластах. М.: Недра, 1986, 240 с.
61. Мироненко В. А., Румынин В. Г., Учаев В. К. Охрана подземных вод в горно-добывающих районах. Л.: Недра, 1980, 320 с.
62. Муратова Л. Н. Гидродинамическая дисперсия и равновесный массообмен при знакопеременной конвекции. «Тр. ВОДГЕО. Методы расчета процессов массопереноса в гидрогеологических исследованиях», 1984, 18—22
63. Мясников И. А., Гольдберг К. А. Внутренне-диффузионная динамика сорбции в линейной области. «Ж. физической химии», 1953, 27, вып. 9, 1311—1324



64. *Николаевский В. Н.* К построению нелинейной теории упругого режима фильтрации жидкости и газа. «Прикл. мех. и техн. физика», 1961, № 4, 67—76
65. *Орадовская А. Е.* Определение сорбционной способности грунтов в целях прогноза распространения промстоков в подземных водах. «Гидрогеологические вопросы подземного захоронения промышленных стоков». М.: ВСЕГИНГЕО, 1969, 160—173
66. *Орадовская А. Е.* Миграция вещества и тепла в подземных водах «Гидрогеологические исследования за рубежом». М.: Недра, 1982, 33—74
67. *Орадовская А. Е., Ефремова А. В., Агапова Н. М.* Сорбция поверхностно-активных веществ при фильтрации промышленных стоков в водоносных горизонтах. «Тр. лаб. инж. гидрогеологии. ВНИИ ВОДГЕО». Сб. 1. М.: Стройиздат, 147—155
68. *Орадовская А. Е., Ефремова А. В.* Определение миграционных параметров водоносных горизонтов при нестабильном вводе индикатора. «Тр. ВОДГЕО. Методы расчета процессов массопереноса в гидрогеологических исследованиях», 1984, 7—10
69. *Орадовская А. Е., Лапшин Н. Н.* Санитарная охрана водозаборов подземных вод. М.: Недра, 1987. 168 с.
70. *Полубаринова-Кочина П. Я.* О неустановившихся движениях в теории фильтрации. I. О перемещении контура нефтеносности. «ПММ», 1945, IX, 79—90
71. Проектирование водозаборов подземных вод (*Арцев А. И., Боцвер Ф. М., Лапшин Н. Н., Орадовская А. Е., Хохлатов Э. М.*). М.: Стройиздат, 1976, 292 с.
72. *Радукевич Л. В.* Природа вторичных процессов при фильтрации аэрозолей. Сообщ. I. Простейшая теория соосаждения частиц в фильтре и кинетика коагуляции. «Изв. АН СССР. Сер. хим.», 1963, № 3, 407—417
73. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917—1967). Отв. ред. *П. Я. Полубаринова-Кочина*. М.: Наука, 1969. 546 с.
74. *Рачинский В. В.* Введение в общую теорию динамики сорбции и хроматографии. М.: Наука, 1964. 137 с.
75. Рекомендации по проведению гидрохимического опробования и физико-химических исследований для оценки загрязнения подземных вод. М.: Стройиздат, 1986. 32 с.
76. *Розен И. В., Цабек Л. К.* Определение коэффициента продольного перемешивания в недеформируемой пористой среде при наличии сорбции. «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1972, № 4, 155—161
77. *Рошаль А. А.* Массоперенос в двухслойной пористой среде. «Прикл. мех. и техн. физика», 1969, № 4, 36—43
78. *Рошаль А. А.* Методы определения миграционных параметров. Обзор ВИЭМС. Сер. «Гидрогеология и инженерная геология», 1980, 62 с.
79. *Рошаль А. А.* Полевые методы определения миграционных параметров. Обзор ВИЭМС. Сер. «Гидрогеология и инженерная геология», 1981, 61 с.
80. *Рошаль А. А., Шестаков В. М.* О миграции подземных вод в слоистых пластах. «Гидрогеологические вопросы подземного захоронения промышленных стоков». М.: ВСЕГИНГЕО, 1969, 43—55
81. *Рубинштейн Л. И.* О решении задачи Н. Н. Веригина. «Докл. АН СССР», 1957, 113, № 1, 50—53
82. *Самсонов Б. Г., Самсонова Л. М.* Миграция вещества и решение гидрогеологических задач. М.: Недра, 1987
83. Справочник по специальным функциям. Под ред. *М. Абрамовица и И. Стигина*. М.: Наука, 1979. 830 с.
84. Справочник химика. Т. I. Л. — М.: Госхимиздат, 1951. 895 с.
85. *Томас Г.* Хроматография. Под ред. *Дубинина М. М.* М.: Иностранная литература, 1949. 25—52
86. *Тютюнова Ф. И.* Физико-химические процессы в подземных водах. М.: Наука, 1976, 126 с.
87. *Тютюнова Ф. И.* Гидрогеохимия техногенеза. М.: Наука, 1987. 335 с.

88. *Филинов М. В.* Осесимметричная задача о нагнетании газа в водоносный пласт. «Прикл. мех. и техн. физика», 1961, № 4
89. *Фрид Ж.* Загрязнение подземных вод. М.: Недра, 1981. 304 с.
90. *Цыбульский Г. П.* Плоскорадиальная задача о распределении концентрации растворителя при переменном коэффициенте диффузии. «Тр. Краснодар. фил. ВНИИ», 1965, вып. 15, 122—125
91. *Швидлер М. И.* Статистическое моделирование фильтрационных процессов в неоднородных средах. «Изв. высш. учеб. заведений. Геол. и разведка», 1983, № 5, 66—83
92. *Шейдеггер А.* Физика течения жидкостей через пористую среду. Гостоптехиздат, 1960. 249 с.
93. *Шержуков Б. С.* Диффузия и неравновесный массообмен при фильтрации в районах наземных и подземных хранилищ промстоков (линейная задача для потока ограниченной длины). «Тр. ВОДГЕО», 1975, вып. 54, 25—39
94. *Шержуков Б. С., Малышев А. С.* Диффузия и неравновесный массообмен при фильтрации в районах наземных и подземных хранилищ промстоков (линейная задача для полуограниченного потока). «Тр. ВОДГЕО», 1975, вып. 54, 18—24
95. *Шержуков Б. С., Муратова Л. Н.* Прогноз массопереноса при постоянно действующем источнике и переменной скорости фильтрации. «Тр. ВОДГЕО. Гидрогеологические исследования и расчеты защиты подземных вод от загрязнения», 1987, 64—69
96. *Шерстюк А. Н., Цыгуткин С. Г.* Некоторые данные о коэффициенте конвективной диффузии в связных породах и методы его определения. «Проблемы охраны и использования вод». Харьков, 1973, № 3, 134—144
97. *Шестаков В. М.* Основы гидрогеологических расчетов при фильтрации из хранилищ промышленных стоков. М.: ВНИИ ВОДГЕО, 1961. 100 с.
98. *Шестаков В. М.* К теории фильтрации растворов в грунтах. «Вопросы формирования химического состава подземных вод». М., 1963, 192—213
99. *Шестаков В. М.* О кинетике сорбции на грунтах. «Гидрогеологические вопросы подземного захоронения промышленных стоков». М.: ВСЕГИН-ГЕО, 1969. 23—42
100. *Шестаков В. М.* Динамика подземных вод. Изд. 2-е. М.: МГУ, 1979, 367 с.
101. *Шестаков В. М.* Теоретические модели переноса загрязнений в подземных водах. «Научные основы изучения и охраны подземных вод». Ч. II. М., 1980, 3—16
102. *Шестаков В. М., Рошаль А. А., Пашковский И. С.* Методика определения миграционных параметров в гетерогенных системах. «Вопросы гидрогеологии». М.: Изд-во МГУ, 1973. 83—97
103. *Шехтман Ю. М.* О фильтрации малоконцентрированных смесей жидкости со взвешенными твердыми частицами. «Инж. сб. ИМ АН СССР», 1953, XIV, 180—188
104. *Шехтман Ю. М.* Фильтрация малоконцентрированных суспензий. М.: Изд-во АН СССР, 1961. 212 с.
105. *Щелкачев В. Н.* Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. Гостоптехиздат, 1959. 467 с.
106. *Acrivos A.* On the combination effect of longitudinal diffusion and external mass transfer resistance in fixed bed operations. «Chem. Engng. Sci.», 1960, 13, № 1, 1—6
107. *Ahlstrom S. W., Foote H. P., Arnett R. C., Cole C. R., Serne R. J.* Multicomponent mass transport model: theory and numerical implementation (discrete-parcel-random-walk version). «Battelle BNWL/2127 (UC-70, UC-32) prepared for ERDA and the Atlantic Richfield Hanford Co.», 1977
108. *Baldwin D. E.* Prediction of tracer performance in a five-spot pattern. «J. Petrol. Technology», 1966, 513—517
109. *Bear J.* Dynamics of fluids in porous media. N. Y., 1972
110. *Bentsen R., Nielsen R.* A study of plane radial miscible displacement in a consolidated porous medium. «Soc. Petr. Eng. J.», 1966, 6, № 1

111. *Borden R. C., Bedient P. B., Lee M. D., Ward C. H., Wielson J. T.* Transport of dissolved hydrocarbons influenced by oxygen-limited biodegradation. 2. Field application. «Water Resour. Res.», 1986, 22, № 13, 1983—1990
112. *Bredenhoeft J. D., Counts H. B., Robson S. G., Robertson J. B.* Solute transport in groundwater systems, in Facets of Hydrology. New York: John Wiley & Sons, 1976, 229 p.
113. *Bredenhoeft J. D., Pinder G. F.* Mass transport in flowing groundwater. «Water Resour. Res.», 1973, 9, 194
114. *Chia-Shyun-Chen.* Analytical solutions for radial dispersion with Cauchy boundary at injection well. «Water Resour. Res.», 1987, 23, № 7, 1217—1224
115. *Chin D. A.* Estimation of dispersion coefficients in porous media. «J. Hydraul. Eng.», 1986, 112, № 7, 591—609
116. *Coats H. H., Smith B. D.* Dead and pore volume and dispersion in porous media. «Soc. Petrol. Engrg. J.», 1964, 4, № 1, 73—84
117. *Cole J. A.* Some interpretations of dispersion measurements in aquifers. Groundwater Pollution in Europe, Proc. Conf., Reading, 1972. N. Y.: Port Washington, 1974. 86—95
118. *Crittenden J. C., Hutzler N. J., Geyer D. G., Oravitz J. L., Friedman G.* Transport of organic compounds with saturated groundwater flow: Model development and parameter sensitivity. «Water Resour. Res.», 1986, 22, № 3, 271—284
119. *Dagan G.* Perturbation solutions of the dispersion equation in porous mediums. «Water Resour. Res.», 1971, 135—142
120. *Dagan G.* Stochastic modelling of groundwater flow by unconditional and conditional probabilities. 2. The solute transport. «Water Resour. Res.», 1982, 18, № 4, 835—848
121. *Domenico P. A., Robbins G. A.* A dispersion scale effect in model calibrations and field tracer experiments. «J. Hydrol.», 1984, 70, № 1—4, 123—132
122. *Duguid J. O., Reeves M. A.* A comparison of mass transport using average and transient rainfall boundary conditions. Finite Elements in Water Resources. London: Pentech Press, 1977, 2, 25
123. *Eldor M., Dagan G.* Solutions of hydrodynamic dispersion in porous media. «Water Resour. Res.», 1972, 8, № 2, 1316—1331
124. *Esmail O. I., Kimbler O. K.* Investigation of the technical feasibility of storing fresh water in saline aquifers. «Water Resour. Res.», 1967, 3, № 3, 683—685
125. *Freyberg D. L.* A natural gradient experiment on solute transport in a sand aquifer. 2. Spatial moments and the advection and dispersion of nonreactive tracers. «Water. Resour. Res.», 1986, 22, № 13, 2031—2046
126. *Fried J. J.* Groundwater pollution. Amsterdam: Elsevier Scientific, 1975, 330 p.
127. *Frind E. O., Matanga G. B., Cherry J. A.* The dual formulation of flow for contaminant transport modeling. 2. The Borden aquifer. «Water. Resour. Res.», 1985, 21, № 2, 170—182
128. *Gaillard B., Calmels P., Margrita R.* Etude comparative de deux methodes de traceurs pour la determination des paramètres hydrodynamiques des aquiferes poreux satures. «Isot. Techn. Water Resour. Dev. Proc. Int. Symp., Vienna, 30 March—3 Apr., 1987». Vienna, 1987, 605—621
129. *Gaillard B., Guizerix J., Margat J.-F., Molinary J., Peaudecerf P.* Etude experimentale du mecanisme de la migration des substances miscibles dans une nappe alluviale. Consequences pratiques sur l'etude et la provision des pollutions. «Mem. Soc. Geol. France», 1980, № 11, 65—70
130. *Gardner G., Downie T., Wyllie M.* Problems in the recovery of gas from aquifers used for gas storage. «J. Inst. Petrol.», 1962, 48, № 457, 1—6
131. *Garnier J. M., Crampon N., Preaux C., Porel G., Vreulx M.* Uranine dans la nappe de craie senonienne en écoulement radial convergent (Béthune, France). «J. Hydrol.», 1985, 78, 379—392

132. *Gelhar L. W.* Stochastic subsurface hydrology from theory to applications. «Water Resour. Res.», 1986, 22, № 9, 1358—1459
133. *Gelhar L. W., Collins M. A.* General analysis of longitudinal dispersion in nonuniform flow. «Water Resour. Res.», 1971, 7, № 6, 1511—1521
134. *Gelhar L. W., Gutjahr A., Naff R.* Stochastic analysis of microdispersion in a stratified aquifer. «Water Resour. Res.», 1979, 15, № 6, 1387—1397
135. *Gershon N. D., Nir A.* Effect of boundary conditions of models on tracer distribution in flow through porous media. «Water Resour. Res.», 1969, 5, № 4, 830—838.
136. *Gill W., Sankarasubramanian R.* «Exact analysis of unsteady convective diffusion. «Proc. Roy. Soc. London A», 1970, 316, 341—350
137. *Goldstein S.* On the mathematics of exchange processes in fixed columns. Part I—V. «Proc. Roy. Soc. London A», 1953, 219, 1959, 252
138. *Goltz M. N., Roberts P. V.* Three-dimensional solutions for solute transport in an infinite medium with mobile and immobile zones. «Water Resour. Res.», 1986, 22, № 7, 1139—1148
139. *Grove D. B.* The use of Galerkin finite-element methods to solve mass-transport equations. U. S. Geol. Sur., Water Research. Investigations, Report, 77—49, 1977, 61 p.
140. *Grove D. B., Beetem W. A.* Porosity and dispersion constant calculations for a fractured carbonate aquifer using the two-well tracer method. «Water Resour. Res.», 1971, 7, 128
141. *Gupta S. K.* Leached fraction and parameter identification equations for solute movement in porous media. «J. Inst. Eng. (India) Civ. Eng. Div.», 1984, 64, № 6, 343—347
142. *Gupta S. P., Greenkorn R. A.* Solution for radial-flow with nonlinear adsorption. «J. Eng. Environ. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng.», 1976, 102, № 1, 87—94
143. *Gupta S. K., Tanji K. K., Zuthin J. N.* A three-dimensional finite element groundwater model. «Contrib. California Water Research. Center», 1975, 52, 119 p.
144. *Guven O., Molz F. I., Melville J. G.* An analysis of dispersion in stratified aquifer. «Water Resour. Res.», 1984, 20, № 10, 1337—1354
145. *Hall W.* An analysis of sand filtration. «J. Sanit. Eng. Div. (Proc. Am. Soc. Civil Eng.)», 1957, 1276, 1—9
146. *Helweg O. J., Labadie J. W.* Linked models for managing river basin salt balance. «Water. Resour. Res.», 1977, 13, 329
147. *Hibsch G., Kreft A.* Determination of aquifer characteristics by the multi-well method. «Nucl. Techn. Groundwater Pollut. Res. Proc. Advis. Group Meet., Cracow, 1976», Vienna, 1980, 227—238
148. *Hiester N., Vermeulen T.* Saturation performance of ion-exchange and adsorption columns. «Chem. Eng. Prog.», 1952, 48, № 10, 505—516
149. *Hoehn E., Roberts P.* Advection-dispersion interpretation of tracer observations in an aquifer. «Ground Water», 1982, 20, № 4, 457—465
150. *Hoopes J. A., Harleman D. R. F.* Dispersion in radial flow from a recharge well. «J. Geophys. Res.», 1967, 72, № 14, 3595—3607.
151. *Hoopes J. A., Harleman D. R. F.* Wastewater recharge and dispersion in porous media. «J. Hydraul. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng.», 1967, 93, № 5, 51—71 .
152. *Hsieh P. A.* A new formula for the analytical solution of the radial dispersion problem. «Water Resour. Res.», 1986, 22, № 11, 1597—1605
153. *Hunt B. W.* Dispersion from pit in uniform seepage. «J. Hydraul. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng.», 1973, 99, № 1, 13—21
154. *Hunt B. W.* Radial dispersion in groundwater flow. «J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng.», 1974, 100, № 6, 1117—1127
155. *Huyakorn P. S., Andersen P. F., Molz F. J., Guven O., Melville J. G.* Simulations of two-well tracer in stratified aquifers at the Chalk river and the Mobile Sites. «Water Resour. Res.», 1986, 22, № 7, 1016—1030
156. *Ivanovich M., Smith D. B.* Determination of aquifer parameters by a two-well pulsed method using radioactive tracers. «J. Hydrol.», 1978, 36, 35

157. *Ives K., Gregore J.* Filtration suspended particles in porous media. «Proc. Soc. Wat. Treat. Exam.», 1966, 15, 93—105
158. *Iwasaki T.* Some notes on sand filtration. «J. Amer. Water Works Assoc.», 1937, 29, № 10, 1591—1602
159. *Kinzelbach W., Ackerer P.* Modelisation de la propagation d'un contaminant dans un champ d'écoulement transitoire. «Hydrogéologie», 1986, № 2, 197—205
160. *Klotz D.* Untersuchungen zur hydrodynamischen Dispersion in wasserungesättigten porösen Medien. «Dtsch. gewässerk. Mitt.», 1980, 24, № 6, 158—163
161. *Kobus H. E., Spitz K. H.* Transverse mixing of stratified flows in porous media. «21st Congr. Int. Assoc. Hydraul. Res., Melbourne. 19—23 Aug., 1985», 1985, 170—174
162. *Konikow L. F.* Modeling chloride movement in the alluvial aquifer at the Rocky Mountain arsenal, Colorado. U. S. Geol. Surv., Water Supply Pap. Report 2044, 1977, 43 p.
163. *Konikow L. F., Bredehoeft I. D.* Modeling flow and chemical quality changes in an irrigated steam-aquifer system. «Water Resour. Res.», 1974, 10, 546—562
164. *Kreft A., Lenda A., Turek B., Zuber A., Czauderna K.* Determination of effective porosities by the two-well pulse method. «Isotop technique in Ground Water Hydrology». Vienna, 1973, 2, 295—312
165. *Lapidus L., Amundson W. R.* Mathematics of adsorption in beds. VI. The effect of longitudinal diffusion in ion exchange and chromatographic columns. «J. Phys. Chem.», 1952, 56, 984—988
166. *Lau I. K., Kaufman W. J., Todd D. K.* Dispersion of a water tracer in radial laminar flow through homogenous porous media. Progr. Report № 5. Sanitary engineering research laboratory, Univ. of California, Berkeley, Calif., 1959, 78 p.
167. *Laurent E.* Determinations des coefficient intrinsèques de dispersion d'un aquifère. La technique de l'eau et de l'assainissement, № 388, Avril 1979, 29—35
168. *Lindstrom F. T.* Pulsed dispersion of tracer chemical concentrations in a saturated sorbing porous medium. «Water Resour. Res.», 1976, 12, № 2, 229—238
169. *Mandel S., Bugayevsky M., Bachmat Y., Drost W.* Estimation of dispersivity and effective porosity by a single well tracer technique. «Sci. Basis Water Resour. Manag. Proc. Symp. Jerusalem, 19—23 Sept., 1985». «IAHS Publ.», 1985, № 153, 219—229
170. *Marino M. A.* Distribution of contaminants in porous media flow. Water Resour. Res., 1974, 10, № 5, 1013—1018
171. *Marle C., Simandoux P., Pascirsky J., Gaulier C.* Etude du de placement de fluides miscibles en milieu poreux stratifié. «Rev. Inst. Fr. Petr.», 1967, 22, 272—294
172. *De Marsily G., Ledoux E., Barbreau A., Marot J.* Nuclear waste disposal: can the geologist guarantee isolation. «Science», 1977, 197, 519 p.
173. *Masamune S., Smith J. M.* Adsorption rate studies — significance of pore diffusion. «AIChE J.», 1964, 10, № 2, 246—252
174. *Matheron G., De Marsily D.* Is transport in porous media always diffusive? A counter example. «Water Resour. Res.», 1980, 26, № 5, 901—917
175. *Mercado A.* The spreading pattern of injected waters in a permeability stratified aquifer. «IAHS Publ.», 1967, 72, 23—36
176. *Merritt M. L.* Subsurface storage of freshwater in south Florida: a digital model analysis of recoverability. U. S. Geol. Surv., Water Supply Pap., Report 2261, 1985, VI, 44 p.
177. *Meyer B. R., Bain C. A. R., De Jesus, Stephenson D.* Radiotracer evaluation of groundwater dispersion in a multi-layered aquifer. «J. Hydrol.», 1981, 50, 259—271
178. *Moltyaner G. L.* Stochastic versus deterministic: a case study. «Hydrogéologie», 1986, № 2, 183—196

179. Molz F. J., Guven O., Melville J. G., Croker R. D., Matteson K. T. Performance, analysis, and simulation of a two-well tracer test at the Mobile site. «Water Resour. Res.», 1986, 22, № 7, 1031—1037
180. Naymik T. G., Sievers M. E. Characterization of dye tracer plumes: in situ field experiments. «Ground Water», 1985, 23, № 6, 746—752
181. Nowakowski K. S., Evans G. V., Lever D. A., Raven K. G. A field example of measuring hydrodynamic dispersion in a single fracture. «Water Resour. Res.», 1985, 21, № 8, 1165—1174
182. Ogata A. Theory of dispersion in granular medium. «Geol. Surv. Paper», 1958, 411—1, 11—134
183. Ogata A. Two-dimensional steady-state dispersion in a saturated porous medium. «J. Research U. S. Geol. Surv.», 1976, 4, № 3, 277—284
184. Palmer C. D., Nadon R. L. A radial injection tracer experiment in a confined aquifer, Scarborough, Ontario, Canada. «Ground Water», 1986, 24, № 3, 322—331
185. Parker J. C., Valocchi A. J. Constraints on the validity of equilibrium and first-order kinetic transport models in structured soils. «Water Resour. Res.», 1986, 22, № 3, 399—407
186. Peaudecerf P., Sauty J. P. Application of a mathematical model to the characterization of dispersion effects on groundwater quality. «Prog. Water Tech.», 1978, 10, 443—454
187. Perkins T. K., Johnston O. C. A review of diffusion and dispersion in porous media. «Soc. Petrol. Engrs. J.», 1963, 3, № 1, 70—84
188. Pfannkuch H. O. Contribution a l'etude des déplacements de fluides miscibles dans un milieu poreux. «Rev. Inst. Franç. petrole», 1963, 18, № 2, 215—270
189. Pickens T., Grisak G. Scale-dependent dispersion in a stratified aquifer. «Water Resour. Res.», 1981, 17, № 4, 1191—1211
190. Pickens J. F., Grisak G. E. Modeling of scale-dependent dispersion in hydrogeologic systems. «Water Resour. Res.», 1981, 17, № 6, 1701—1711
191. Pickens J. F., Lennox W. C. Numerical simulation of waste movement in steady groundwater flow systems. «Water Resour. Res.», 1976, 12, 171
192. Pickens J. F., Merritt W. F., Cherry J. A. Field determination of the physical contaminant transport parameters in a sandy aquifer. Proc. IAEA Advisory Group Meeting, Cracow, Poland, 1977
193. Pinder G. F. A Galerkin finite-element simulation of ground-water contamination on Long Island, New York. «Water Resour. Res.», 1973, 9, 1657—1669
194. Raimondi R., Gardner G. H., Petrick C. B. Effect of pore structure and molecular diffusion on the mixing of miscible liquids flowing in porous media. Prepr. Presented of AIChE-SPE Joint Sympos., San Francisco, 1959
195. Robbins G. A., Domenico P. A. Determining dispersion coefficients and sources of model-dependent scaling. «J. Hydrol.», 1984/1985, 75, 195—211
196. Robertson J. B. Digital modeling of radioactive and chemical waste transport in the Snake River plain aquifer of the National reactor testing station, Idaho. U. S. Geol. Surv., Open File, Report IDO22054, 1974, 41 p.
197. Robson S. G. Feasibility of digital water quality modeling illustrated by application at Barstow, Ca. U. S. Geol. Surv., Water Research Investigation, Report 46—73, 1974, 66 p.
198. Rosen J. B. Kinetics of fixed bed system for solid diffusion into spherical particles. «J. Chem. Phys.», 1952, 20, № 3, 387—394
199. Salama R. B. Hydrodispersive transfer of solutes in the shallow aquifer in the Alligator River region. «Austral. Water Resour. Coun. Conf. Ser.», 1986 (1987), № 13, 351—361
200. Sauty J. P. Identification des parametres du transport hydrodispersif dans les aquifers par interpretation de tracage en ecoulement cylindrique convergent ou divergent. «J. Hydrol.», 1978, 39, 69—103
201. Sauty J.-P. An analysis of hydrodispersive transfer in aquifers. «Water Resour. Res.», 1980, 16, № 1, 145—158

202. *Schulin R., van Genuchten M. Th., Fluhler H., Ferlin P.* An experimental study of solute transport in a stony field soil. «Water Resour. Res.», 1987, 23, № 9, 1785—1794
203. *Schwartz F. W.* An radioactive waste management: an analysis of the parameters controlling subsurface contaminant transfer. «J. Hydrol.», 1975, 27, 51
204. *Schwartz F.* Macroscopic dispersion in porous media: The controlling factors. «Water Resour. Res.», 1977, 13, № 4, 743—752
205. *Schwartz F. W.* On radioactive waste management: model analysis of a proposed site. «J. Hydrol.», 1977, 32, 257
206. *Segol G., Pinder G. F.* Transient simulation of salt water intrusion in Southern Florida. «Water Resour. Res.», 1976, 12, № 1, 65—70
207. *Silliman S. E., Konikov L. F., Voss C. I.* Laboratory investigation of longitudinal dispersion in anisotropic porous media. «Water Resour. Res.», 1987, 23, № 11, 2145—2151
208. *Silliman S. E., Simpson E. S.* Laboratory evidence of the scale effect in dispersion of solutes in porous media. «Water Resour. Res.», 1987, 23, № 8, 1667—1673
209. *De Smedt F., Wierenga P. J.* Mass transfer in porous media with immobile water. «J. Hydrol.», 1979, 41, 59—67
210. *De Smedt F., Wierenga P. J.* Solute transfer through columns of glass beads. «Water Resour. Res.», 1984, 20, № 2, 225—232
211. *Starr R. C., Gillham R. W., Sudecky E. A.* Experimental investigation of solute transport in stratified porous media. 2. The reactive case. «Water Resour. Res.», 1985, 21, № 7, 1043—1050
212. *Sudicky E. A.* A natural gradient experiment on solute transport in a sand aquifer: spatial variability of hydraulic conductivity and its role in the dispersion process. «Water Resour. Res.», 1986, 22, № 13, 2069—2082
213. *Sudicky E. A., Cherry J. A., Frind E. O.* Migration of contaminants in groundwater at a landfill: a case study. 4. A natural-gradient dispersion test. «J. Hydrol.», 1983, 63, 81—108
214. *Sudicky E. A., Gillham R. W., Frind E. O.* Experimental investigation of solute transport in stratified porous media. 1. The nonreactive case. «Water Resour. Res.», 1985, 21, № 7, 1035—1041
215. *Sudicky E. A., Gillham R. W., Frind E. O.* Experimental investigation of solute transport in stratified porous media. 2. The reactive case. «Water Resour. Res.», 1985, 21, № 7, 1043—1050
216. *Sykes J. F., Pahwa S. B., Lantz R. B., Ward D. S.* Numerical simulation of flow and contaminant migration at extensively monitored landfill. «Water Resour. Res.», 1982, 18, № 6, 1687—1704
217. *Tang D. H., Babu D. K.* Analytical solution of a velocity dependent dispersion problem. «Water Resour. Res.», 1979, 15, № 6, 1471—1478
218. *Taylor G.* The dispersion of matter in a solvent flowing slowly through a tube. «Proc. Roy. Soc. London A», 1953, 219, 189—203
219. *Taylor G.* The dispersion of matter in turbulent flow through pipe. «Proc. Roy. Soc. London A», 1954, 223, 446—468
220. *Taylor S. R., Howard K. W. F.* A field study of scaledependent dispersion in a sandy aquifer. «J. Hydrol.», 1987, 90, 11—17
221. *Theis C. V.* Hydrologic phenomena affecting the use of tracers in limiting ground water flow. «Radioisotopes in hydrology». Vienna: IAEA, 1963, 193—206
222. Theory of contaminant. Stud. and Repts. «Hydrol.», 1980, № 3, 24—123
223. *Turner R. R., Steel K. F.* Cadmium and manganese sorption by soil macropore linings and fillings. «Soil Sci.», 1988, 145, № 2, 79—86
224. *Uffaludi L.* Longitudinal dispersion tests in non-uniform porous media. «Hydrol. Sci. J.», 1986, 12, 31, 4, 467—474
225. *Valocchi A. J.* Validity of the local equilibrium assumption for modeling sorbing solute transport through homogeneous soils. «Water Resour. Res.», 1985, 21, № 6, 808—820

226. *Valocchi A. J.* Effect of radial flow on deviations from local equilibrium during sorbing solute transport through homogeneous soils. «Water. Resour. Res.», 1986, 22, № 12, 1693—1701
  227. *Valocchi A. J., Roberts P. V., Parks G. A., Street R. L.* Simulation of the transport of ion-exchanging solutes using laboratory determined chemical parameter values. «Ground water.», 1981, 19, № 6, 600—607
  228. *Wang H. Q., Crampon N., Huberson S., Garnier J. M.* Linear graphical method for determining hydrodispersive characteristics in tracer experiments with instantaneous injection. «J. Hydrol.», 1987, 95, 143—154
  229. *Warren J., Skiba F.* Macroscopic dispersion. «Trans. Ass. Int. Mech. Eng. Soc. Petrol. Eng.», 1964, 231, 215—230
  230. *Webster D. S., Proctor J. F. and Marine I. W.* Two-well tracer test in fractured crystalline rock. U. S. Geol. Surv., Water Supply Pap., Report 1544—1, 1970, 22 p.
  231. *Wood W. W.* Use of laboratory data to predict sulfate sorption during artificial groundwater recharge. «Ground Water», 1978, 16, № 1, 22—31
-



## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Алексеев В. С., Коммунар Г. М., Шержуков Б. С. Массоперенос в водонасыщенных горных породах</b>	<b>3</b>
<b>Введение</b>	<b>3</b>
1. Основные процессы массопереноса в подземных водах и их дифференциальные уравнения	4
1.1. Обобщенная система дифференциальных уравнений	5
1.2. Уравнения равновесия и кинетики массообмена	10
1.2.1. Реакции, протекающие в кинетической области	12
1.2.2. Диффузионная кинетика массообмена	14
1.3. Параметры уравнений массопереноса	16
1.4. Модель массопереноса в неоднородных пластах	22
1.4.1. Усреднение уравнения массопереноса	24
1.4.2. Вычисление коэффициента макродисперсии	28
2. Конвективный перенос и массообмен	31
2.1. Конвективный перенос при фильтрации подземных вод в однородных пластах	31
2.1.1. Основные автомодельные задачи движения жидкостей с разной вязкостью	32
2.1.2. Неавтомодельные задачи движения жидкостей с одинаковой вязкостью в различных гидрогеологических условиях	39
2.2. Неравновесный массообмен при фильтрации подземных вод в однородных пластах	51
2.2.1. Массообмен в кинетической области	52
2.2.2. Массообмен в области диффузионной кинетики	55
2.3. Равновесный массообмен при фильтрации подземных вод в неоднородных пластах	58
3. Гидродинамическая дисперсия	64
3.1. Точные и приближенные решения радиальной задачи гидродинамической дисперсии	65
3.2. Гидродинамическая дисперсия при знакопеременной конвекции	80
3.2.1. Экспериментальные исследования	82
3.2.2. Действие мгновенных источников загрязнения подземных вод в линейном потоке	88
3.2.3. Действие непрерывных источников загрязнения подземных вод в линейном потоке	98
3.3. Гидродинамическая дисперсия при знакопеременной конвекции в радиальном потоке	102
3.3.1. Гомогенные и гетерогенные породы неупорядоченного строения	103
3.3.2. Стратифицированные многослойные породы	105
3.3.3. Стратифицированные породы с равновесным массообменом	111
4. Гидродинамическая дисперсия и массообмен	116
4.1. Линейный поток подземных вод	117
4.1.1. Случай линейной изотермы адсорбции	117
4.1.2. Случай нелинейной изотермы	123
4.2. Осесимметричный поток	125
<b>Литература</b>	<b>132</b>

**В. С. Алексеев, Г. М. Коммунар, Б. С. Шержуков.** Массоперенос в водонасыщенных горных породах // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Сер. Гидрогеология. Инженерная геология. — 1989. — 11 — с. 1—

Приносятся новые результаты по ряду актуальных задач конвективного переноса, гидродинамической дисперсии и массообмена. Охарактеризован подход к решению этих задач для наиболее сложных случаев радиального потока, знакопеременной конвекции, стратифицированных пород и др. Работа предназначена для использования при гидрогеологических исследованиях вопросов фильтрации и массообмена в связи с загрязнением подземных вод, при прогнозах и регулировании их качества в области строительства, горного дела, мелнорации и гидротехники.

Технический редактор *Г. И. Репкина*

Корректор *С. С. Тихонова*

Сдано в набор 01.03.89

Подписано в печать 07.02.89

Т—01352

Формат бумаги 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Бум. кн.-журн.

Литературная гарнитура.

Высокая печать.

Усл. печ. л. 9,0

Усл. кр.-отт. 9,19

Уч.-изд. л. 7,95

Тираж 400 экз.

Заказ 1314

Цена 1р. 20 к.

Адрес редакции: 125219, Москва, А-219, Балтийская ул., 14. Тел. 152-58-88

Производственно-издательский комбинат ВИНТИ

140010, Люберцы, 10, Московской обл., Октябрьский просп., 403

# ОПЕЧАТКИ

к ИНТ «Гидрогеология. Инженерная геология» Т. 11

Стр.	строка	Напечатано	Следует читать
29	4 снизу	$u_1(y, 0) \approx \bar{v}, t(\bar{v}-1)/n_0 m$	$u_1(y, 0) \approx \bar{v} t(\bar{v}-1)/n_0 m$
30	ф-ла (1.79)	$\psi^2 = (\sigma_k/k)_2$	$\psi^2 = (\sigma_k/k)^2$
41	24 сверху	(3.33)	(2.33)
63	Примечание под таблицей	$\Phi v^2, \Gamma$	$\Phi_v^2, \Gamma$
68	10 снизу	пропущено	рис. 15
69	4 снизу	$\theta = \sqrt{2\tau}$	$\theta = \sqrt{2\tau}$
75	7 снизу	$r_f = \sqrt{r_c^2 + 2qt/n_0}$	$r_* = \sqrt{r_c^2 + 2qt/n_0}$
77	табл. 17, последняя строка	$\frac{p_* \ln(r/r_*)}{\sqrt{4\lambda r_*/3}}$	$\frac{r_* \ln(r/r_*)}{\sqrt{4\lambda r_*/3}}$
77	15 снизу	пространственных	профильного
79	ф-ла (3.53)	$\exp \left[ -\frac{(1-v)^2}{4\theta/3\rho} \right]$	$\exp \left[ -\frac{(1-\theta)^2}{4\theta/3\rho} \right]$
79	10 снизу	$v$	$\theta$
84	ф-ла (3.62)	$\frac{c}{c_0} = 0,5 \operatorname{erfc} \frac{x-v_1 t/n}{2(D_1 t/n)_1^{1/2}}$	$\frac{c}{c_0} = 0,5 \operatorname{erfc} \frac{x-v_1 t/n}{2(D_1 t/n)^{1/2}}$
85	6 снизу	$\theta_{2*1} = \theta_1^* - \theta_1^*$	$\theta_{2l}^* = \theta_1^* - \theta_1^*$
86	22 сверху	$\sigma_0 = 0,1$	$\theta_0 = 0,1$
87	табл. (II колонка)	$\bar{v}_0$	$\bar{\theta}_0$
114	25 снизу	$\psi_k$ и $\psi_v, \Gamma$	$\psi_v$ и $\psi_v, \Gamma$
114	8 снизу	оказалис	оказались