
Институт
Компьютерных
Исследований

PETROLEUM RESERVOIR SIMULATION

KHALID AZIZ
Professor of Chemical Engineering
The University of Calgary, Alberta, Canada
and
Manager of the Computer Modelling Group
Calgary, Alberta, Canada

and

ANTONÍN SETTARI
Manager of Technical Developments
Intercomp Resource Development & Engineering Ltd
Calgary, Alberta, Canada



APPLIED SCIENCE PUBLISHERS LTD
LONDON

Х. АЗИЗ, Э. СЕТТАРИ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАСТОВЫХ СИСТЕМ

Перевод с английского
А. В. КОРОЛЕВА и В. П. КЕСТНЕРА

Под редакцией
канд. геол.-минерал. наук
М. М. МАКСИМОВА

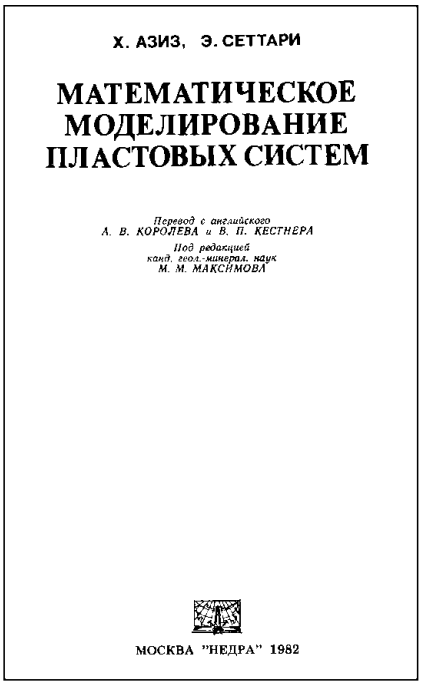
Издание второе, стереотипное

Институт Компьютерных Исследований

Москва ♦ Ижевск

2004

УДК 622.276.1/4(73)



Азиз Х., Сеттари Э.
Математическое моделирование пластовых систем. — Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 416 стр.

Изложены теоретические основы математического моделирования пластовых систем и описаны методы решения уравнений фильтрации с помощью вычислительных машин. Даны рекомендации по конструированию математических и компьютерных моделей, их анализ и примеры программных систем.

Для инженерно-технических работников нефтяной промышленности, научно-исследовательских организаций и высших учебных заведений, занимающихся анализом и проектированием разработки нефтяных месторождений, а также для студентов вузов.

Репринтное издание (оригинальное издание: М.: «Недра», 1982 г.).

ISBN 5–93972–355–1

© Институт компьютерных исследований, 2004

http://rcd.ru
http://ics.org.ru

Посвящается
Муссарат и Барбаре

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга предназначена для инженеров-исследователей, специалистов, занимающихся прикладной математикой, разработкой и применением машинных моделей нефтяных пластов.

Большая часть этой книги посвящена вопросам использования численных методов для решения дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих многофазную фильтрацию флюидов в нефтяных пластах. Для уравнений, решаемых при моделировании нефтяных пластов, характерно наличие специфических черт.

Получить хорошую модель пласта можно лишь при учете технических, физических и математических аспектов проблемы, которые тесно переплетаются между собой.

Книга может служить пособием для инженеров-практиков, а также для специалистов, самостоятельно изучающих моделирование нефтяных пластов. Возможно, что она послужит в качестве справочного пособия для специалистов, занимающихся разработкой и применением технологии моделирования. Многие из описанных здесь идей можно использовать при моделировании фильтрации грунтовых вод.

Из собственного опыта нам известно, что для того, чтобы полностью понять теорию моделирования процессов разработки, следует самому написать программы для ЭВМ и убедиться в их работоспособности. Поэтому читателю рекомендуется составить некоторые программы, например для простой одномерной однофазной модели (см. гл. 3), одномерной двухфазной модели (см. гл. 5) и двумерной однофазной модели (см. гл. 7). Некоторые из основных подпрограмм, необходимые для моделей, приведены в приложении В.

В книге мы пытались каждое понятие вводить в простейшем виде и поддерживать стиль изложения по возможности строгим, но без ненужной абстракции. В тексте по мере надобности коротко рассматриваются основные понятия численного анализа. За подробностями читатель отсылается к соответствующей литературе. Представляя материал по моделированию пластов, мы попытались наряду с тщательным обсуждением различных теоретических и практических аспектов предмета разработать согласованные обозначения и терминологию. У нас не было намерения устанавливать приоритет, поскольку идеи были одновременно разработаны разными людьми и некоторые результаты не были опубликованы из соображений конкуренции.

В настоящей книге относительно полно разобраны конечно-разностные модели для месторождений с «нелетучей» нефтью, но не включены такие вопросы, как моделирование тепловых методов добычи, заводнения с применением химреагентов, вытеснения смешивающимися агентами (за исключением краткого изложения в гл. 12) и использование в моделировании вариационных методов. Это сделано с целью сохранить разумные размеры книги, а также потому, что указанные направления в настоящее время быстро развиваются.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

A — площадь поперечного сечения блока

B_l — объемные коэффициенты, определяемые уравнениями (2.8)—(2.10)

$b_l=1/B_l$ — величина, обратная объемному коэффициенту

C — произвольная константа

C — концентрация (гл. 12)

c — аккумулятивный коэффициент

c_t — сжимаемость флюида, уравнение (2.37)

c_R — сжимаемость породы, уравнение (2.41)

$E_n=\max\limits_i |e^n{}_i|$ — норма погрешности

$e_i=U_i-u_i$ — погрешность приближенного решения в точке i

F_w — функция, обратная $P_c(S_w)$

f — произвольная функция

$f_n=\lambda_n/(\lambda_w+\lambda_n)$ — доля несмачивающей фазы в общем потоке

$f_w=\lambda_w/(\lambda_w+\lambda_n)$ — доля смачивающей фазы в общем потоке

g — вектор ускорения свободного падения

h — пространственный шаг сетки (гл. 3)

h — толщина пласта (гл. 12)

h — высота (положительное направление — вниз)

K_i — константа равновесия системы пар — жидкость для i-го компонента

k, $k_{x,y,z}$ — проницаемость или компоненты тензора проницаемости

k_{rl} — относительная проницаемость для l-й фазы

k_{rog} — относительная проницаемость для нефти в системе нефть — газ

k_{row} — относительная проницаемость для нефти в системе нефть — вода

L — длина

M — молекулярная масса

M — число узлов сетки (гл. 3)

$M=\lambda_w/\lambda_n$ — отношение подвижностей

$M=\mu_o/\mu_s$ — отношение подвижностей при фильтрации смешивающихся флюидов (гл. 12)

$m=\rho\Phi$ — масса единицы объема

$\dot{m}$ — поток массы, расход массы через единицу площади в единицу времени

N — число неизвестных в конечно-разностной схеме после исключения неизвестных, связанных с граничными условиями

P_c — капиллярное давление

P_{co} — капиллярное давление вне пористой среды

P_{cog} — капиллярное давление в системе нефть — газ

P_{cow} — капиллярное давление в системе нефть — вода

PI — функция влияния, уравнение (9.52)

p — давление (U, u также давления)

p_b — давление разгазирования

p_l — давление в l-й фазе

p_s — давление насыщения

p^w — давление в скважине

p_{wf} — забойное давление

QI — функция влияния, уравнение (9.51)

$Q'_{lp}=\dfrac{\partial Q_l}{\partial p}$ — производная от расхода по давлению

$Q'_{lm} = \dfrac{\partial Q_l}{\partial S_m}$ — производная от расхода по насыщенности

Q_{TL} — общий расход жидкости
Q_{To} — общий расход нефти
Q_{Tf} — общий расход флюида
q — отбор в единицу времени, отрицательно при нагнетании
$\tilde{q}$ — убывание массы в единице объема в единицу времени, положительно при отборе, отрицательно при нагнетании
q_i — приближенное среднее значение q в i-м блоке
$q_l = \tilde{q}_l/\rho_{lstc}$ — объем в нормальных условиях компонента l, добываемого из единичного объема пласта в единицу времени
R — универсальная газовая постоянная
$R(A^\nu)$ — средняя скорость сходимости для ν итераций
R_i — локальная погрешность дискретизации в точке i
R_s — растворимость газа в нефти
r — пространственная координата (расстояние в радиальном направлении)
r_e — внешний радиус
r_w — радиус скважины
S_l — насыщенность l-й фазой
S_{gc} — критическая или остаточная газонасыщенность, зависящая от направления вытеснения
S_{gc} — остаточная газонасыщенность при вытеснении жидкостью (гл. 12)
S_{gcr} — критическая газонасыщенность (гл. 12)
S_{gmax} — максимальная насыщенность для газовой фазы
S_{nc} — критическая насыщенность несмачивающей фазой в цикле вытеснения или остаточная насыщенность в цикле пропитки
S_{wc} — критическая насыщенность смачивающей фазой в цикле пропитки или остаточная насыщенность в цикле вытеснения
S_{wmax} — максимальная насыщенность для водной фазы
S_{wo} — значение S_w, соответствующее P_{co}
T — температура (гл. 2)
$T = (\lambda A/\Delta x)$ — конечно-разностная проводимость
$T_l = (\lambda_l)\dfrac{A}{\Delta x}$ — конечно-разностная проводимость для l-й фазы
t — время
Δt — приращение времени
U — зависимая переменная (точное решение дифференциального уравнения в частных производных)
u — кажущаяся скорость (скорость фильтрации)
u_i — аппроксимация U в i-м узле сетки (точное решение алгебраических уравнений, полученное с помощью некоторого способа аппроксимации дифференциального уравнения в частных производных)
u_T — общая скорость, $u_w + u_n$, при двухфазной фильтрации
V — объем
WI — коэффициент продуктивности
x — расстояние
x_i — значение x в i-м узле сетки
y — расстояние

Z — коэффициент сжимаемости

z — расстояние

$\alpha=\Delta t/h^2$ — коэффициент

β — коэффициент турбулентности, уравнение (2.96)

$\beta=\phi\dfrac{c_f}{B^0}+\phi^0\dfrac{c_R}{B}$ — коэффициент при временной производной

Γ — граница пласта

$\gamma=\rho g$ — удельный вес

$\Delta\gamma=\gamma_w-\gamma_n$ — разность удельных весов

$\lambda=k/(\mu B)$ — проводимость

$\overline{\lambda}=\dfrac{\lambda_w\lambda_n}{\lambda_w+\lambda_n}$ — средняя подвижность

λ_i — собственные значения

$\lambda_l=kk_{rl}/(\mu_l B_l)$ — проводимость для l-й фазы

$\lambda_l=kk_{rl}/\mu_l$ — подвижность l-й фазы

λ_{max} — максимум модуля собственных значений

$\lambda R=k_r/(\mu B)$ — радиальная проводимость

$\lambda_T=k\left(\dfrac{k_{ro}}{\mu_o}+\dfrac{k_{rw}}{\mu_w}+\dfrac{k_{rg}}{\mu_g}\right)$ — общая подвижность

$\lambda X=k_x/(\mu B)$ — проводимость в направлении оси x

$\lambda Y=k_y/(\mu B)$ — проводимость в направлении оси y

$\lambda Z=k_z/(\mu B)$ — проводимость в направлении оси z

μ — вязкость

ν — номер итерации

ξ_m — коэффициент усиления, уравнение (3.51)

ρ — плотность флюида

$\rho=\ln r$ — преобразованная радиальная координата (гл. 3)

$\rho(B)$ — спектральный радиус матрицы B

ρ_l — плотность l-й фазы

O — порядок аппроксимации

θ — угол

ϕ — пористость

$\phi=\int\limits_{p^0}^{p}\dfrac{dp}{\gamma}-z$ — псевдопотенциал

ψ — псевдодавление

Ω — граница пласта

ω — параметр смешивания (гл. 12)

ω — множитель релаксации для SOR-метода

$\omega_в$ — оптимальное значение ω для SOR-метода

ω_{li} — массовая доля i-го компонента в l-й фазе

ω_i — массовая доля i-го компонента в смеси

Операторы

$\mathbf{A}$ — матрица коэффициентов системы алгебраических уравнений

A — дифференциальный оператор в декартовых координатах

$\mathbf{B}$ — матрица коэффициентов при u^n, уравнение (3.54)

$\mathbf{C}$ — матрица коэффициентов для краевых задач четвертого рода

C — дифференциальный оператор в цилиндрических координатах

$\mathbf{D}$ — аккумулятивная матрица

E — симметричная трехдиагональная матрица, у которой элементы на главной диагонали равны 2, на нижней и верхней диагоналях —1
I — единичная матрица
J — Якобиан
L — нижняя треугольная матрица в LU-разложении
L — конечно-разностный оператор в декартовых координатах
M — конечно-разностный оператор в цилиндрических координатах
S — симметричная трехдиагональная матрица (гл. 4)
T — матрица проводимостей
U — верхняя треугольная матрица LU-разложения (гл. 8)
Δ — разностный оператор
Δ^2 — разностный оператор для второй производной по пространству
Δ_s — пространственный шаг сетки по координате s ($s=x, y, z, r$ и т. д.)
Δ_t — разностный оператор для производной по времени

Нижние индексы

dg — растворенный газ
f — флюид
fg — свободный газ
i — начальный (гл. 12)
$i\pm 1/2$ — границы блока, содержащего i-й узел
i — i-й узел сетки
J — матрица Якоби
l — компонент или фаза, l=o, g, w (нефть, газ вода)
N — индекс узла пространственной сетки, соответствующий последнему неизвестному
n — несмачивающая фаза
RC — пластовые условия
R — порода
r, θ, z — направления в цилиндрической системе координат
s — растворитель (гл. 12)
sf — стенка забоя
STC — нормальные условия
T — общий
w — смачивающая или водная фаза
x, y, z — направления в декартовой системе координат

Верхние индексы

b — обратная разность — разность назад
f — прямая разность — разность вперед
L — логарифмический
n — временной слой, $n=0, 1, 2, 3, \ldots$
o — начальные условия ($t=0$) или характерные условия
p — порядок конечно-разностной аппроксимации
r — характерный
T — транспонированная матрица или вектор
L — центрированный
* — промежуточное или возмущенное решение
$'$ — d/dx или $\partial/\partial x$
$''$ — d^2/dx^2 или $\partial^2/\partial x^2$

$\dot{}$ — d/dt

$\bar{\bar{}}$ — осредненная по глубине псевдовеличина для вычислений вертикального равновесия (VE), гл. 12

Сокращения

GOR — газонефтяной фактор
LSOR — линейная SOR
SOR — последовательная верхняя релаксация
WOR — водонефтяной фактор
SIP — строго неявная процедура
1 DC — одномерная коррекция
2 DC — двумерная коррекция
PI — коэффициент продуктивности
1-D — одномерный
2-D — двумерный
3-D — трехмерный
ODE — обыкновенные дифференциальные уравнения
PDE — дифференциальные уравнения в частных производных
IMPES — неявное давление — явная насыщенность
SS — совместное решение
SEQ — последовательное решение
VE — вертикальное равновесие
w—n — смачивающий — несмачивающий
C—N — Кранк — Николсон
D2 — схема упорядочения
D4 — схема упорядочения
WI — коэффициент продуктивности

ВВЕДЕНИЕ

1.1. ЧТО ТАКОЕ МАШИННАЯ МОДЕЛЬ?

Основная цель изучения пласта — предсказание его состояния и определение путей увеличения конечной нефтеотдачи. В классической *теории разработки* рассматривают осредненные объекты (балансная модель), для которых невозможно полностью учесть изменения параметров пласта и флюидов во времени и в пространстве. При *моделировании* с помощью вычислительных машин можно более детально исследовать пласт путем разбиения его на блоки (иногда на несколько тысяч) и применения к каждому из них основных уравнений фильтрации. Программы для цифровых вычислительных машин, с помощью которых выполняют необходимые расчеты при таких исследованиях, называются *машинными моделями.* Благодаря успехам, достигнутым с начала 50-х годов в области вычислительной техники и математического обеспечения, в настоящее время стало возможным создание проверенных на практике программ для моделирования некоторых очень сложных процессов, протекающих при осуществлении различных проектов разработки. Технология моделирования пластов постоянно совершенствуется, предлагаются новые модели для все более и более сложных процессов разработки. В этой книге рассмотрена наиболее существенная из всех пластовых моделей, известная как модель нелетучей нефти (*black-oil model*) или бета-модель. С помощью методов, используемых для создания моделей нелетучей нефти, можно разобраться и в более сложных моделях. На практике используют следующие равноценные термины: *математические модели, численные модели, сеточные модели, конечно-разностные модели* и *пластовые модели.* В действительности же в процессе разработки программы для моделирования пласта применяют три вида моделей.

1.1.1. Математическая модель

Моделируемая физическая система описывается соответствующими математическими уравнениями. При этом почти всегда требуются некоторые допущения, необходимые с практической точки зрения для того, чтобы сделать задачу разрешимой. Например, каждый инженер-нефтяник знает, что теория относительной проницаемости имеет ограничения, но поскольку иной теории нет, используется это понятие. Математические модели составляют (см. гл. 2) на основе системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими начальными и граничными условиями.

1.1.2. Численная модель

Уравнения, описывающие математическую модель пласта, почти всегда настолько сложны, что их невозможно решить аналитическими методами. Чтобы представить уравнения в форме, пригодной для решения на цифровых вычислительных машинах, следует их аппроксимировать. Численная модель состоит из полученной системы уравнений. Эти вопросы обсуждаются в гл. 3 — 12.

1.1.3. Машинная модель

Машинная модель пласта — это программа или система программ для вычислительной машины, составленная с целью решения уравнений численной модели. Некоторые практические аспекты создания машинных моделей обсуждаются в гл. 13. В этой книге моделирование нефтяных пластов — это использование машинных моделей для решения практических задач.

1.2. ДРУГИЕ МОДЕЛИ

Специалисты на практике используют и другие модели, подразделяющиеся на две категории: а) *аналоговые* и б) *физические*. Бо́льшая часть распространенных аналоговых моделей — это электрические модели, в которых электрический потенциал и сила тока являются аналоговыми переменными. Дискретные электрические модели (R=C и R=R сетки) — аналоги конечно-разностных уравнений применялись для решения нефтяных задач Брюсом (1943) и Карплюсом (1956). Непрерывные модели электролитического типа описаны Ботсетом (1946). Всестороннее обсуждение этих и других способов аналогового моделирования можно найти у Карплюса (1958). Однако к настоящему времени аналоговые модели полностью вытеснены машинными.

Физические модели описаны многими авторами (Рапопорт, 1955; Гиртсма и др., 1956; Перкинс и Коллинз, 1960; Редфорд и др., 1976). Эти модели играют ключевую роль в понимании процессов, происходящих в пласте. Физические модели можно разделить на две категории (Редфорд и др., 1976): а) *масштабные* и б) *элементарные*. В первых размеры, свойства пласта и флюидов выбирают в лабораторных условиях таким образом, чтобы соотношения различных сил в пласте и в физической модели были одинаковыми. С помощью масштабной модели получают результаты, которые можно непосредственно использовать на месторождении. К сожалению, полностью подобные модели изготовить очень трудно или невозможно (Гиртсма и др., 1956; Поцци и Блэкуэлл, 1963).

На элементарной модели эксперименты проводят с реальными (или смоделированными) пластовыми породами и флюидами. Очевидно, результаты такого моделирования нельзя прямо использовать на месторождении, однако они могут помочь при изучении основных вопросов физики пласта.

Основные уравнения, описывающие фильтрацию флюидов в пласте (математическая модель), справедливы также для масштабных и элементарных моделей. Это означает, что машинную модель можно проверить и даже скорректировать по результатам физического моделирования, а затем использовать для прогноза показателей разработки месторождения. Таким образом, для понимания сложного пластового явления может потребоваться разумное сочетание физического и машинного моделирования. Должно быть ясно, что применение машинных моделей не может исключить необходимость построения физических моделей, так как их нельзя использовать для изучения физического процесса. С другой стороны, данные физических моделей во многих случаях можно использовать только с помощью машинных моделей. В заключение было бы справедливо сказать, что машинные модели нефтяных пластов не могут заменить все физические модели. Однако применение машинных моделей может улучшить понимание данных, полученных в результате физического моделирования, и помочь в планировании экспериментов, проводимых на физических моделях.

1.3. НА КАКИЕ ВОПРОСЫ МОЖЕТ ОТВЕТИТЬ МАШИННАЯ МОДЕЛЬ?

Машинные модели могут быть ценным инструментом для специалиста, пытающегося ответить на следующие вопросы:

1. Как нужно разрабатывать и эксплуатировать месторождение, чтобы максимизировать экономически выгодную добычу углеводородов?
2. Какой наилучший проект увеличения нефтеотдачи для данного пласта? Как и когда он должен быть осуществлен?
3. Почему пласт не ведет себя так, как было предсказано в результате предварительного проектирования или моделирования?
4. Какова экономически целесообразная конечная нефтеотдача для данного месторождения?
5. Какого вида лабораторные данные требуются? Какова чувствительность прогнозных результатов, полученных на модели, к точности различных данных?
6. Нужно ли проводить исследования пласта на физической модели? Как можно пересчитать эти результаты применительно к месторождению?
7. Какие критические параметры необходимо измерять при осуществлении на месторождении проекта разработки?
8. Какова наилучшая схема вскрытия пласта скважинами?
9. Из какой части пласта осуществлять добычу?

Это лишь некоторые общие вопросы; в случае конкретного исследования на модели можно поставить множество специальных вопросов. Определение цели проводимого исследования и точная постановка необходимых вопросов — крайне важный этап при выполнении любого исследования на модели.

1.4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Моделирование нефтяных пластов — инструмент, позволяющий специалисту глубже изучить механизм нефтеотдачи. При правильном его использовании можно получить ценнейшие результаты, но вместе с тем моделирование не может заменить инженерную деятельность, очень важную при проведении всех промысловых исследований (Коутс, 1969; Стэггс и Хербек, 1971). К тому же не для всех пластов требуются сложные модели, во многих случаях на поставленные вопросы можно получить ответ при обычных промысловых исследованиях или исследованиях на очень простых машинных моделях. Машинные модели с большой легкостью генерируют числа. Однако в большинстве случаев правильно проинтерпретировать эти числа могут только лица, хорошо понимающие математическую, численную и машинную модели. Цель настоящей книги — дать основной материал для такого понимания.

ГЛАВА 2

УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ ФЛЮИДОВ

2.1. ВВЕДЕНИЕ

До моделирования нефтяного пласта на вычислительной машине необходимо иметь математическую модель системы, составление которой — цель настоящей главы. Движение флюидов в пористых средах определяется теми же фундаментальными законами, по которым происходит, например, их движение в атмосфере, трубопроводах и реках. Эти законы базируются на сохранении массы, момента и энергии, они детально обсуждаются во многих книгах, в том числе у Бёрда и др. (1960), Шлихтинга (1968), Монина и Яглома (1971). С практической точки зрения совершенно безнадежно в настоящее время пытаться приложить эти основные законы непосредственно к задачам о течении флюидов в пористых средах. Вместо этого используется полуэмпирический подход, в котором взамен уравнения момента применяется закон Дарси. Теоретические основы эмпирического закона Дарси рассматриваются Уитейкером (1966, 1969). Такие исследования позволяют лучше понять ограниченность эмпирических соотношений. Наряду с указанными соотношениями должны быть известны физические параметры флюидов, находящихся в системе, как функции зависимых переменных. В данной книге приведены только математические модели, заведомо имеющие большое практическое значение. Численные методы решения уравнений этих моделей обсуждаются в гл. 3. Краткий вывод уравнений, которые позже предстоит решать, дан в разделе 2.2. Мы ограничимся случаем изотермической одно-, двух- и трехфазной фильтрации несмешивающихся флюидов. В этом контексте представляют интерес следующие однофазные и многофазные системы: газ, нефть, вода, газ — нефть, газ — вода, нефть — вода, нефть — вода — газ.

Первые две книги, в которых рассмотрена механика течения флюидов в пористых средах, были опубликованы Маскетом (1937, 1949). Эти книги, содержащие существенный вклад самого Маскета, имеют большое историческое значение. Книга по теории движения грунтовых вод опубликована в СССР Полубариновой-Кочиной (1952). В ней приведены задачи однофазной фильтрации, допускающие аналитическое решение. Обзор по физике течений в пористых средах опубликован Шейдеггером (1974). В этой книге, предназначенной для специалистов-исследователей, кратко рассмотрены вопросы, связанные с добычей нефти из подземных коллекторов. В книге Коллинза (1961) представлены теоретические и практические аспекты разработки нефтяных месторождений.

Обществом инженеров-нефтяников Американского института инженеров горной промышленности опубликовано три монографии: в двух Мэтьюз и Рассел (1967), Эрлафер (1977) описано

применение законов движения флюидов для исследований скважин на приток и методом восстановления давления, в третьей — Крейг (1971) с практической точки зрения рассмотрел проблему заводнения нефтяных пластов.

У Бэра (1972) полно освещены динамика и статика флюидов в пористых средах. Однако большинство рассмотренных в книге задач ориентировано на гидрологию грунтовых вод. Использование теории фильтрации при испытании газовых скважин дано в публикации Совета по сохранению энергетических ресурсов провинции Альберта, Канада (ERCB, 1975).

2.2. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МАССЫ

2.2.1. Однофазная фильтрация

Рассмотрим фильтрацию одного флюида (один компонент или однородная смесь) в цилиндрическом керне в направлении его оси, как показано на рис. 2.1. Рассматриваемый элементарный объем пористой среды должен быть представительным (Бэр, 1972, с. 19), т. е. он должен быть достаточно большим по сравнению с размером пор и малым по сравнению с размерами керна. Основные физические свойства пористой среды могут быть связаны с элементарным объемом. Если пористость определить как долю элементарного объема, не занятую твердой матрицей, мы увидим, что в случае элементарного объема, соизмеримого с размерами пор, пористость будет равна нулю или единице. С увеличением размера элементарного объема пористость будет колебаться, прежде чем достигнет представительного значения. *Значение пористости в какой-либо точке P соответствует ее представительному значению для элементарного объема, содержащего эту точку.* Другие физические свойства определяют в точке пористой среды аналогичным образом. В этом состоит *континуальный* подход, при котором реальная пористая среда заменяется фиктивным континуумом, для каждой точки которого можно определить переменные и параметры как непрерывные функции пространственных и временной координат.

Пусть $\dot{m}_x$ — составляющая вектора потока массы флюида (расход массы через единицу площади в единицу времени) плотностью

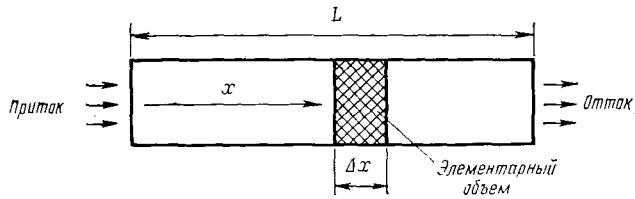


Рис. 2.1. Схема линейной фильтрации в цилиндрическом образце длины Δx

ρ (одна фаза, один компонент) вдоль оси x. Из рис. 2.1 видно, что приток массы через поверхность элементарного объема с координатой x за время Δt составляет

$$\dot{m}_x|_x A\Delta t,$$

а отток массы через поверхность элементарного объема с координатой $x+\Delta x$ за время Δt будет

$$\dot{m}_x|_{x+\Delta x} A\Delta t.$$

Разница между поступающей и отбираемой массой должна быть равна приращению массы в элементарном объеме. Приращение ее в результате сжимаемости за время Δt составит

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi\Delta V)\right]\Delta t,$$

а уменьшение массы в элементарном объеме (истощение) благодаря действию стока интенсивностью $\tilde{q}$ (масса единицы объема в единицу времени) за время Δt будет

$$\tilde{q}\Delta V\Delta t.$$

Итак, имеем

$$(\dot{m}_x|_x - \dot{m}_x|_{x+\Delta x})A\Delta t = \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi\Delta V)\right]\Delta t + \tilde{q}\Delta V\Delta t. \qquad (2.1)$$

Поделив (2.1) на $\Delta V\Delta t$ и учитывая, что $\Delta V = A\Delta x$, получим

$$\frac{\dot{m}_x|_x - \dot{m}_x|_{x+\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \tilde{q}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим уравнение сохранения массы для данной системы

$$-\frac{\partial \dot{m}_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \tilde{q}. \qquad (2.2)$$

Заметим, что $\tilde{q}$ отрицательно в случае источника, так как мы предположили, что оно положительно для стока.

Можно выразить поток массы через кажущуюся скорость (или скорость фильтрации):

$$\dot{m}_x = \rho u_x, \qquad (2.3)$$

где u_x — скорость фильтрации флюида в направлении оси x, определяемая уравнением (2.3). Подставляя уравнение (2.3) в (2.2), получим

$$-\frac{\partial \rho u_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \tilde{q}. \qquad (2.4)$$

Соответствующее уравнение для трехмерного течения в пористой среде произвольной формы можно получить аналогичным образом при рассмотрении элементарного объема $\Delta x\Delta y\Delta z$ в декартовой системе координат. В результате получим

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho u_x + \frac{\partial}{\partial y}\rho u_y + \frac{\partial}{\partial z}\rho u_z\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \tilde{q}.$$

Уравнение можно записать в более общем виде:

$$-\nabla\cdot\rho u=\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)+\tilde{q}. \tag{2.5}$$

Оператор дивергенции в левой части уравнения (2.5) может быть раскрыт в системе координат. Например, в цилиндрических координатах (r, θ, z) уравнение сохранения массы имеет вид

$$-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\rho r u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\rho u_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\rho u_z}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)+\tilde{q}. \tag{2.6}$$

2.2.2. Многофазная фильтрация

Уравнение сохранения массы (2.5) для однофазного течения можно обобщить следующим образом:

$$-\nabla\dot{m}_l=\frac{\partial(m_l)}{\partial t}+\tilde{q}_l, \tag{2.7}$$

где m_l — поток массы компонента l; m_l — масса компонента l в элементарном объеме среды; $\nabla\dot{m}_l$ (или $\mathrm{div}\,\dot{m}_l$) — скорость истечения массы из единицы объема.

При разработке нефтяных месторождений применяют две основные математические модели фильтрации: 1) многофазной или однофазной и 2) многофазной, когда углеводородная система может быть аппроксимирована двумя компонентами: нелетучим (нефтью) и летучим (газом), растворимым в нефтяной фазе. Мы рассмотрим в основном второй случай — β-модель, или модель нелетучей нефти (*black oil model*). Многокомпонентная (композиционная) система кратко будет рассмотрена в гл. 12.

2.2.2.1. β-*модель*

В данной модели фильтрации флюидов предполагается, что существуют три отдельные фазы: нефть, вода и газ. Обычно вода — смачивающая фаза, нефть имеет промежуточную смачиваемость, а газ — несмачивающая фаза. Предполагается, что вода и нефть не смешиваются, не обмениваются массами и не меняют фазы. Газ предполагается растворимым в нефти, в воде же он обычно считается нерастворимым. Если предположить растворимость газа в нефти в нормальных условиях равной нулю, то пластовую нефть можно рассматривать как раствор, состоящий из двух компонентов: нефти и газа при стандартных нормальных условиях. Кроме того, предполагается, что флюиды в пласте находятся при постоянной температуре и в состоянии термодинамического равновесия. В данных условиях зависимость давление — объем — температура (pVT) в системе может быть представлена с помощью объемных коэффициентов следующим образом:

$$B_o=\frac{[V_o+V_{dg}]_{RC}}{[V_o]_{STC}}=f(p_o), \tag{2.8}$$

$$B_w=\frac{[V_w]_{RC}}{[V_w]_{STC}}=f(p_w), \tag{2.9}$$

$$B_g = \frac{[V_g]_{RC}}{[V_g]_{STC}} = f(p_g), \tag{2.10}$$

В приведенных уравнениях $[V_l]_{RC}$ — объем, занятый фиксированной массы компонента l (индексы o, w, g означают нефть, вода или газ в пластовых условиях; $[V_l]_{STC}$ — объем, занятый тем же компонентом при нормальных условиях). Отметим, что некоторые авторы предпочитают оперировать обратными коэффициентами, т. е. принимать $b_l = 1/B_l$. Массообмен между нефтяной и газовой фазами описывается коэффициентом растворимости газа в нефти

$$R_s = \left[\frac{V_{dg}}{V_o}\right]_{STC} = f(p_o), \tag{2.11}$$

по которому определяют количество газа, растворенного в нефти, как функцию давления в нефтяной фазе. Плотности трех фаз в пластовых условиях отнесены к плотностям при нормальных условиях:

$$\rho_o = \frac{1}{B_o}(\rho_{oSTC} + R_s \rho_{gSTC}), \tag{2.12}$$

$$\rho_w = \frac{1}{B_w}(\rho_{wSTC}), \tag{2.13}$$

$$\rho_g = \frac{1}{B_g}(\rho_{gSTC}). \tag{2.14}$$

Плотность нефтяной фазы также может быть представлена как

$$\rho_o = \bar{\rho}_o + \bar{\rho}_{dg}, \tag{2.15}$$

где $\bar{\rho}_o$ и $\bar{\rho}_{dg}$ — плотности двух компонентов:

$$\bar{\rho}_o = \frac{1}{B_o}\rho_{oSTC}, \tag{2.16}$$

$$\bar{\rho}_{dg} = \frac{R_s}{B_o}\rho_{gSTC}. \tag{2.17}$$

Перед рассмотрением многофазного течения введем понятие насыщенности. Насыщенность S_l фазой l — это доля порового объема, занятого фазой l. Очевидно, что $\Sigma_l S_l = 1$. Уравнение сохранения массы можно записать с помощью формулы (2.7).

Для нефтяного компонента в нефтяной фазе

$$\dot{m}_o = \bar{\rho}_o u_o, \tag{2.18}$$

$$m_o = \bar{\rho}_o \phi S_o. \tag{2.19}$$

Подставив уравнения (2.18) и (2.19) в (2.7) и поделив на ρ_{oSTC}, получим

$$-\nabla\left[\frac{1}{B_o}u_o\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{B_o}\phi S_o\right] + q_o, \tag{2.20}$$

где

$$q_o = \frac{\tilde{q}_o}{\rho_{oSTC}}.$$

Все члены в уравнении (2.20) имеют размерность:

$$\frac{\text{Объем в нормальных условиях}}{\text{Объем в пластовых условиях}} \cdot \frac{1}{(\text{время})}.$$

Уравнение для водной фазы получим аналогичным образом:

$$-\nabla\left[\frac{1}{B_w} u_w\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{B_w}\phi S_w\right]+q_w. \tag{2.21}$$

Газовый компонент существует как в газовой, так и в нефтяной фазе:

$$\dot{m}_g=\rho_g u_g+\rho_{dg} u_o, \tag{2.22}$$

$$m_g=\phi\,[S_g\rho_g+\rho_{dg}S_o], \tag{2.23}$$

$$\tilde{q}_g=\tilde{q}_{fg}+\tilde{q}_o R_s\left(\frac{p_s}{p_o}\right)_{STC}=\tilde{q}_{fg}+\tilde{q}_o R_s \rho_{gSTC}. \tag{2.24}$$

Окончательно уравнение для газа получим в виде

$$-\nabla\left[\frac{R_s}{B_o} u_o+\frac{1}{B_g} u_g\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left[\phi\left(\frac{R_s}{B_o} S_o+\frac{1}{B_g} S_g\right)\right]+q_{fg}+R_s q_o \tag{2.25}$$

Здесь q_o, q_w, q_g — соответственно объемы, отбираемые при стандартных условиях в единицу времени из единичного объема пласта.

2.3. ЗАКОН ДАРСИ

2.3.1. Однофазная фильтрация

К уравнению неразрывности или сохранения массы, выведенному в предыдущем разделе, добавим соотношение между скоростью фильтрации и градиентом давления в каждой фазе. Такое соотношение было установлено Дарси (1856) для однофазной фильтрации. Дифференциальная форма этого соотношения имеет вид

$$u=-\frac{k}{\mu}(\nabla p+\rho g), \tag{2.26}$$

где k — тензор абсолютной проницаемости пористой среды; μ — вязкость флюида; g — вектор ускорения свободного падения. Если координата z отсчитывается вниз по вертикали, можно написать

$$\rho g=-\rho g\,\nabla z=-\gamma\nabla z. \tag{2.27}$$

С учетом определения γ закон Дарси можно записать следующим образом:

$$u=-\frac{k}{\mu}(\nabla p-\gamma\nabla z). \tag{2.28}$$

Если $u=0$, из данного уравнения можно получить уравнения гидростатики. В декартовых координатах с осью z, направленной вертикально вниз, они таковы:

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\gamma, \tag{2.29}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}=0. \tag{2.30}$$

Тензор проницаемости, используемый в уравнении (2.26), определяется с помощью этого уравнения и должен быть оценен экспериментально. В большинстве практических задач можно (или необходимо) предположить, что k — диагональный тензор:

$$k=\begin{bmatrix} k_x & & \\ & k_y & \\ & & k_z \end{bmatrix}$$

Если $k_x=k_y=k_z$, среда называется изотропной, в противном случае — анизотропной. Ограничения закона Дарси полно обсуждаются в литературе (Хубберт, 1956; Шейдеггер, 1974; Коллинз, 1961; Уитейкер, 1966, 1969) и здесь рассматриваться не будут.

2.3.2. Многофазная фильтрация

Данный закон можно распространить и на случай одновременного течения более чем одной фазы

$$u_l=-\frac{kk_{rl}}{\mu_l}(\nabla p_l+\rho_l g), \tag{2.31}$$

где l — соответствует о, ω, g (нефтяной, водной и газовой фазам); k_{rl} — относительная проницаемость для фазы l. Уравнение (2.31) можно также записать с учетом γ_l

$$u_l=-\frac{kk_{rl}}{\mu_l}(\nabla p_l-\gamma_l\nabla z), \tag{2.32}$$

где

$$\gamma_l=\rho_l g. \tag{2.33}$$

При этом ось z направлена вниз по вертикали. Если скорость измеряется в см/с, вязкость в мПа·с, а градиент давления в кПа, то k будет измеряться в единицах, получивших наименование «дарси» (Д). Можно показать, что

$$1\text{Д}=9{,}869\times 10^{-9}\text{см}^2.$$

2.4. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ

Уравнения однофазной и многофазной фильтрации получаются комбинированием закона Дарси в той или иной форме и уравнения сохранения массы. Плотность флюида выражается явно или неявно как функция давления с помощью уравнения состояния. Здесь рассматриваются некоторые практические случаи.

2.4.1. Однофазная фильтрация

2.4.1.1. Общее уравнение для сжимаемых флюидов

Если поровое пространство занято одной фазой, подставив уравнение (2.28) в уравнение (2.25), получим

$$\nabla \frac{\rho k}{\mu} (\nabla p - \gamma \nabla z) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \tilde{q}. \tag{2.34}$$

Разделив (2.34) на ρ_{STC} и использовав определение $B = [V]_{\text{RC}}/[V]_{\text{STC}}$, получим

$$\nabla [\lambda (\nabla p - \gamma \nabla z)] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\phi}{B}\right] + q, \tag{2.35}$$

где

$$\lambda = \frac{1}{\mu B} k. \tag{2.36}$$

2.4.1.2. Уравнение для слабосжимаемого флюида

При исследовании фильтрации жидкости часто предполагается, что сжимаемость, определяемая выражением

$$c_f = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}\bigg|_T = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial p}\bigg|_T, \tag{2.37}$$

постоянна во всем интересующем нас диапазоне давлений. Это уравнение можно проинтегрировать и получить

$$\rho = \rho^0 \exp [c_f (p - p^0)], \tag{2.38}$$

где ρ^0 — плотность при некотором характерном давлении. Из определения объемного коэффициента видно, что

$$\frac{\rho}{\rho^0} = \frac{B^0}{B} = \exp [c_f (p - p^0)] = 1 + c_f (p - p^0) + \frac{1}{2!} c_f^2 (p - p^0)^2 + \ldots. \tag{2.39}$$

Здесь B^0 — объемный коэффициент при p^0.

Учитывая только первые два члена разложения, получим

$$B = B^0 / [1 + c_f (p - p^0)]. \tag{2.40}$$

Это справедливо при $c_f \simeq 10^{-5} \div 10^{-6}$.

Если при изменении давления изменение порового объема значительно, его можно учесть, принимая

$$\phi = \phi^0 [1 + c_R (p - p^0)], \tag{2.41}$$

где c_R — сжимаемость породы.

Член с производной по времени в уравнении (2.35) можно выразить через $\partial p/\partial t$, используя выражение (2.40) для $1/B$ и (2.41) для ϕ. При этом уравнение (2.35) имеет вид

$$\nabla [\lambda (\nabla p - \gamma \nabla z)] = \left(\phi \frac{c_f}{B^0} + \phi^0 \frac{c_R}{B}\right) \frac{\partial p}{\partial t} + q. \tag{2.42}$$

Другую удобную форму уравнения фильтрации можно получить, подставляя уравнение (2.38) в уравнение (2.34) и пренебрегая членами, содержащими произведение квадрата градиента давления на c_f, так как они малы по сравнению с другими членами (ERCB, 1975):

$$\nabla^2 p = \frac{\phi \mu c_f}{k} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\mu}{\rho k} \tilde{q}. \tag{2.43}$$

При выводе данного уравнения, известного как «уравнение диффузии» (Карслоу и Егер, 1959), предполагалось, что свойства флюида неизменны, $c_R = 0$, а гравитационными членами пренебрегли.

2.4.1.3. Уравнение фильтрации газа

При фильтрации газа не предполагается, что его сжимаемость не постоянна. В таких случаях уравнение фильтрации можно записать следующим образом:

$$\nabla [\lambda (\nabla p - \gamma \nabla z)] = c(p) \frac{\partial p}{\partial t} + q, \tag{2.44}$$

где

$$c(p) = \phi \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} \left(\frac{1}{B} \right) + \phi^0 \frac{c_R}{B}. \tag{2.45}$$

Другую форму уравнения для газа можно получить, используя соотношение

$$\rho = \frac{p\mathrm{M}}{ZRT}. \tag{2.46}$$

Подставляя уравнение (2.46) в (2.34) и пренебрегая гравитационными членами, обычно малыми для случая фильтрации газа, получим

$$\nabla \left[\frac{p}{\mu Z} \nabla p \right] = \frac{\phi}{k} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{p}{Z} \right] + \frac{RT}{\mathrm{M}k} \tilde{q}. \tag{2.47}$$

Здесь ϕ и k принимались постоянными. Учитывая, что $2p\nabla p = \nabla p^2$, можно записать уравнение (2.47) в виде (Аль-Хуссейни и др., 1966)

$$\nabla^2 p^2 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p^2} [\ln (\mu Z)] (\nabla p^2)^2 = \frac{2\phi \mu Z}{k} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{p}{Z} \right] + 2 \frac{ZRT\mu}{\mathrm{M}k} \tilde{q}. \tag{2.48}$$

Производную в правой части можно записать как

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{Z} \right) = \frac{pc}{Z} \frac{\partial p}{\partial t}, \tag{2.49}$$

где

$$c = \frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p} \bigg|_{\mathrm{T}} = \frac{1}{p} - \frac{1}{Z} \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}p}. \tag{2.50}$$

Подставляя уравнение (2.49) в (2.48) и пренебрегая вторым членом в левой части уравнения (2.48), получим

$$\nabla^2 p^2 = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial p^2}{\partial t} + \frac{2ZRT\mu}{\mathrm{M}k} \tilde{q}. \tag{2.51}$$

Более точное уравнение фильтрации сжимаемого флюида получим, вводя псевдодавление ψ (Аль-Хуссейни и др., 1966)

$$\psi = 2\int_{p^0}^{p} \frac{p}{\mu Z}\, dp. \tag{2.52}$$

Так как

$$\nabla\psi = \frac{d\psi}{dp}\nabla p = \frac{2p}{\mu Z}\nabla p$$

и

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{d\psi}{dp}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{2p}{\mu Z}\frac{\partial p}{\partial t},$$

исходное уравнение (2.47) преобразуется в

$$\nabla^2\psi = \frac{\phi\mu c}{k}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{2RT}{Mk}\tilde{q}. \tag{2.53}$$

Отметим, что данное уравнение того же вида, что и (2.51), и составлено без дополнительных упрощающих предположений. Более полно уравнения однофазной фильтрации газа рассмотрены в руководстве, изданном Советом по сохранению энергетических ресурсов провинции Альберта, Канада (ERCB, 1975).

2.4.2. Многофазная фильтрация

Уравнение (2.32) закона Дарси можно подставить в уравнения (2.20), (2.21) и (2.25) сохранения массы для каждой фазы и получить зависимости фильтрации флюидов:

$$\nabla\left[\lambda_o(\nabla p_o - \gamma_o\nabla z)\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\phi S_o}{B_o}\right] + q_o, \tag{2.54}$$

$$\nabla\left[\lambda_w(\nabla p_w - \gamma_w\nabla z)\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\phi S_w}{B_w}\right] + q_w, \tag{2.55}$$

$$\nabla\left[R_s\lambda_o(\nabla p_o - \gamma_o\nabla z) + \lambda_g(\nabla p_g - \gamma_g\nabla z)\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\phi\left(\frac{R_s}{B_o}S_o + \frac{S_g}{B_g}\right)\right] + R_s q_o + q_{fg}, \tag{2.56}$$

где проводимости

$$\lambda_l = \frac{k_{rl}}{\mu_l B_l}k.$$

В то время как для описания однофазной фильтрации уравнения сохранения массы достаточно (с единственной зависимой переменной p), для многофазной фильтрации нужны дополнительные соотношения. Уравнения (2.54)—(2.56) содержат шесть зависимых

переменных. Для полного описания введем три дополнительных соотношения:

$$S_o+S_w+S_g=1, \tag{2.57}$$

$$P_{cow}=p_o-p_w=f(S_w, S_g), \tag{2.58}$$

$$P_{cog}=p_g-p_o=f(S_w, S_g). \tag{2.59}$$

Соотношения между капиллярными давлениями и насыщенностями обычно получают по опытным данным.

2.4.3. Использование псевдопотенциала

Часто уравнение сохранения массы удобно представлять в виде уравнения, не содержащего явно гравитационных членов. Это достигается использованием псевдопотенциала, введенного Хуббертом (1940, 1956).

Определим

$$\Phi=\int_{p^0}^{p}\frac{dp}{\gamma}-z, \tag{2.60}$$

тогда закон Дарси можно записать в виде

$$u=-\frac{k}{\mu}(\nabla p-\gamma\nabla z)=-\frac{k}{\mu}\gamma\nabla\Phi, \tag{2.61}$$

и уравнения фильтрации формально упрощаются. К примеру, уравнение однофазного течения (2.44) принимает вид

$$\nabla[\lambda\gamma\nabla\Phi]=c(p)\gamma\frac{\partial\Phi}{\partial t}+q,$$

а уравнение (2.54)

$$\nabla[\lambda_o\gamma_o\nabla\Phi_o]=\frac{\partial}{\partial t}\left[\phi\frac{S_o}{B_o}\right]+q_o.$$

Только для фильтрации несжимаемого флюида можно использовать действительный потенциал (пьезометрический напор)

$$\Phi'=p-\gamma z,$$

который связан с Φ соотношением

$$\Phi'=\gamma\Phi.$$

2.4.4. Граничные условия

Для обсуждаемой математической модели необходимы граничные (краевые) и начальные условия. Краевые условия рассмотрены в последующих главах вместе с конечно-разностным представлением уравнений фильтрации (численной моделью).

Граничные условия для уравнений однофазной фильтрации рассматриваются в разделе 3.4 гл. 3, в разделах 7.4 и 7.7 гл. 7.

Граничные условия для уравнений многофазной фильтрации рассматриваются в разделе 5.7 гл. 5 и разделах 9.4 и 9.8 гл. 9, а начальные условия — в разделе 9.5 гл. 9.

2.5. ДРУГИЕ ФОРМЫ УРАВНЕНИЙ МНОГОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Здесь будут рассмотрены другие формы уравнений фильтрации, представленных в предыдущем разделе. Для большей ясности вывод ограничен случаем двухфазной системы, в уравнениях которой индексы «w» и «п» обозначают соответственно смачивающую и несмачивающую фазы. Используется следующая система уравнений двухфазной фильтрации с четырьмя переменными:

$$\nabla[\lambda_w(\nabla p_w-\gamma_w\nabla z)]=\frac{\partial}{\partial t}\left[\phi\frac{S_w}{B_w}\right]+q_w, \tag{2.62}$$

$$\nabla[\lambda_n(\nabla p_n-\gamma_n\nabla z)]=\frac{\partial}{\partial t}\left[\phi\frac{S_n}{B_n}\right]+q_n, \tag{2.63}$$

$$P_c=p_n-p_w=i(S_w), \tag{2.64}$$

$$S_w+S_n=1. \tag{2.65}$$

2.5.1. Представление в параболической форме

Представление в p_w, p_n. Предположим, что существует единственная, обратная к $P_c(S_w)$, функция, т. е.

$$S_w=F_w(P_c)=F_w(p_n-p_w). \tag{2.66}$$

Функция F_w существует, если P_c монотонно возрастает или убывает. Тогда уравнения (2.62) и (2.63) можно представить в виде

$$\nabla[\lambda_w(\nabla p_w-\gamma_w\nabla z)]=\frac{\partial}{\partial t}\left[\phi\frac{F_w}{B_w}\right]+q_w, \tag{2.67}$$

$$\nabla[\lambda_n(\nabla p_n-\gamma_n\nabla z)]=\frac{\partial}{\partial t}\left[\phi\frac{(1-F_w)}{B_n}\right]+q_n. \tag{2.68}$$

Уравнения (2.67) и (2.68) положены в основу метода, называемого в нефтяной литературе «методом совместного решения» (Дуглас и др., 1959; Коутс, 1968а; Шеффилд, 1969). Эти уравнения взаимосвязаны независимо от учета нелинейностей и от применения для моделирования нулевой капиллярности фиктивной функции P_c.

Представление в p_n и P_c. Эта формулировка подобна предыдущей и может быть записана следующим образом:

$$\nabla[\lambda_w(\nabla p_n-\nabla P_c-\gamma_w\nabla z)]=\frac{\partial}{\partial t}\left[\phi\frac{F_w}{B_w}\right]+q_w, \tag{2.69}$$

$$\nabla[\lambda_n(\nabla p_n-\gamma_n\nabla z)]=\frac{\partial}{\partial t}\left[\phi\frac{(1-F_w)}{B_n}\right]+q_n. \tag{2.70}$$

Эквивалентная формулировка может быть написана с помощью p_w и P_c.

Представление в p_n, S_w. Представляя p_w как $p_n - P_c$ и используя уравнение (2.64), получим

$$\nabla [\lambda_w (\nabla p_n - P'_c \nabla S_w - \gamma_w \nabla z)] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \frac{S_w}{B_w} \right] + q_w, \quad (2.71)$$

$$\nabla [\lambda_n (\nabla p_n - \gamma_n \nabla z)] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \frac{(1 - S_w)}{B_n} \right] + q_n. \quad (2.72)$$

При определенных допущениях конечно-разностная форма данных уравнений может быть расщеплена. Это видно, если (2.71) и (2.72) представить в другом виде. Умножив уравнение (2.71) на B_w, уравнение (2.72) на B_n и сложив их вместе, получим

$$B_n \nabla [\lambda_n (\nabla p_n - \gamma_n \nabla z)] + B_w \nabla [\lambda_w (\nabla p_n - \gamma_n \nabla z)] -$$
$$- B_w \nabla [\lambda_w (P'_c \nabla S_w + \Delta\gamma \nabla z)] = B_n \left[(1 - S_w) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B_n} \right) + q_n \right] +$$
$$+ B_w \left[S_w \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B_w} \right) + q_w \right], \quad (2.73)$$

где

$$\Delta\gamma = \gamma_w - \gamma_n. \quad (2.74)$$

Уравнение (2.73) — другая форма уравнения (2.71). Отметим, что в формулировке p, S функция капиллярного давления может быть произвольной при условии, что существует P'_c. В разностном виде, если насыщенности в уравнении (2.73) берутся в явной форме, λ_n, λ_w, p'_c и ∇S_w известны, то $\partial/\partial t (\phi/B_w)$ может быть взята как функция p_n. В этом случае уравнения расщепляются, так как (2.73) можно решить относительно p_n. Затем используется уравнение (2.72) для определения S_w. Эта процедура известна как метод «неявное давление — явная насыщенность» или IMPES-метод (Стоун и Гардер, 1961; Брейтенбах и др., 1969), широко применяемый при моделировании месторождений. Если явный учет насыщенностей невозможен, например при моделировании процесса конусообразования, уравнения остаются связанными.

При $P_c = 0$ ($p_n = p_w = p$) уравнения (2.73) и (2.72) упрощаются:

$$B_n \nabla [\lambda_n (\nabla p - \gamma_n \nabla z)] + B_w \nabla [\lambda_w (\nabla p - \gamma_w \nabla z)] =$$
$$= B_n [(1 - S_w) \partial/\partial t (\phi/B_n) + q_n] +$$
$$+ B_w [S_w \partial/\partial t (\phi/B_w) + q_w], \quad (2.75)$$

$$\nabla [\lambda_n (\nabla p - \gamma_n \nabla z)] = \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \frac{(1 - S_w)}{B_n} \right) + q_n. \quad (2.76)$$

Другое упрощение — случай течения несжимаемых флюидов в несжимаемой среде, т. е. когда B_w, B_n и ϕ постоянны (B_n, B_w не обязательно равны единице). Тогда

$$\nabla[(B_n\lambda_n+B_w\lambda_w)(\nabla p_n-\gamma_n\nabla z)]- \\ -\nabla[B_w\lambda_w(P'_c\nabla S_w+\Delta\gamma\nabla z)]= \\ =B_nq_n+B_wq_w, \tag{2.77}$$

$$\nabla[B_n\lambda_n(\nabla p_n-\gamma_n\nabla z)]=-\phi\frac{\partial S_w}{\partial t}+B_nq_n. \tag{2.78}$$

И, наконец, для фильтрации несжимаемых флюидов равной плотности при $B_w=B_n=1$ без учета действия капиллярных сил получим классические уравнения (Маскет, 1937; Коллинз, 1961):

$$\nabla[(\lambda_n+\lambda_w)(\nabla p-\gamma\nabla z)]=q_n+q_w, \tag{2.79}$$

$$\nabla[\lambda_n(\nabla p-\gamma\nabla z)]=-\phi\frac{\partial S_w}{\partial t}+q_n, \tag{2.80}$$

Очевидно, что эквивалентные формулировки можно получить с помощью p_n, S_n; p_w, S_n или p_w, S_w.

2.5.2. Представление в гиперболической форме

Данное представление в простом виде возможно только для несжимаемых флюидов. Впервые оно использовалось для расчетов при линейном заводнении (Фейерс и Шелдон, 1959) и не так давно было вновь получено Хиаттом (1968). Общую постановку, приводимую здесь, можно также найти у Бэра (1972) и Спивака (1974).

Уравнения сохранения массы для двухфазной системы без учета сжимаемости породы имеют следующий вид:

$$-\nabla(\rho_wu_w)=\phi\frac{\partial}{\partial t}(\rho_wS_w)+\tilde{q}_w, \tag{2.81}$$

$$-\nabla(\rho_nu_n)=\phi\frac{\partial}{\partial t}[\rho_n(1-S_w)]+\tilde{q}_n. \tag{2.82}$$

После раскрытия членов, деления уравнений на плотности и сложения их получим уравнение для общей скорости $u_T=u_w+u_n$:

$$\nabla u_T=\nabla(u_w+u_n)=-q_n-q_w+\phi\left[\frac{(S_w-1)}{\rho_n}\frac{\partial\rho_n}{\partial t}-\frac{S_w}{\rho_w}\frac{\partial\rho_w}{\partial t}\right]- \\ -\frac{1}{\rho_n}u_n\cdot\nabla\rho_n-\frac{1}{\rho_w}u_w\cdot\nabla\rho_w, \tag{2.83}$$

где $q_l=q_l/\rho_l$ ($l=$w, n). Для несжимаемых флюидов все члены, обусловленные сжимаемостью, равны нулю и уравнение (2.83) упрощается:

$$\nabla u_T=-(q_n+q_w)=-q_T. \tag{2.84}$$

Закон Дарси можно записать в виде

$$u_w = -\lambda_w(\nabla p_w - \gamma_w \nabla z),\quad u_n = -\lambda_n(\nabla p_n - \gamma_n \nabla z),$$

где подвижность * фазы l

$$\lambda_l = \frac{k k_{rl}}{\mu_l}. \tag{2.85}$$

Приведенные выше уравнения можно объединить и получить уравнение для доли потока

$$u_w = M u_n + \lambda_w(\nabla P_c + \Delta\gamma \nabla z), \tag{2.86}$$

где $M = \lambda_w/\lambda_n$ — отношение подвижностей, а $\Delta\gamma = \gamma_w - \gamma_n$. В уравнении (2.86) скорость u_w можно заменить на $u_T - u_n$. Тогда получим

$$u_n = \frac{1}{1+M}[u_T - \lambda_w(\nabla P_c + \Delta\gamma \nabla z)]. \tag{2.87}$$

Окончательно уравнение (2.87) подставляется в уравнение сохранения массы (2.82) для несжимаемых флюидов. Определяя коэффициенты доли в потоке и среднюю подвижность как

$$f_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_w + \lambda_n},\quad f_w = \frac{\lambda_w}{\lambda_w + \lambda_n}, \tag{2.88}$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_w \lambda_n}{\lambda_w + \lambda_n}, \tag{2.89}$$

получим итоговое уравнение

$$\nabla[f_n u_T - \bar{\lambda}(\nabla P_c + \Delta\gamma \nabla z)] = \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} - q_n. \tag{2.90}$$

Различные члены в этом уравнении могут быть выражены через насыщенность:

$$\nabla P_c = \frac{dP_c}{dS_w}\nabla S_w,$$

$$\nabla(f_n u_T) = u_T \cdot \nabla f_n + f_n \nabla \cdot u_T = u_T \cdot \frac{df_n}{dS_w}\nabla S_w - f_n q_T,$$

$$\nabla(\bar{\lambda}\Delta\gamma\nabla z) = \Delta\gamma\nabla z \cdot \nabla\bar{\lambda} = \Delta\gamma\nabla z \cdot \frac{d\bar{\lambda}}{dS_w}\nabla S_w.$$

В последнем уравнении предполагается, что ∇z не зависит от положения в пространстве. Это условие выполняется для большинства координатных систем. Из уравнения (2.88) следует

$$\frac{df_n}{dS_w} = -\frac{df_w}{dS_w}.$$

Так как $f_w + f_n = 1$, можно написать

$$-q_n + f_n q_T = q_w - f_w q_T.$$

* Термины «проводимость», использованный ранее, и «подвижность», определяемый уравнением (2.85), отличаются друг от друга. «Проводимость» включает объемный коэффициент, «подвижность» нет.

После подстановки данных выражений в уравнение (2.90) получим

$$-\nabla\left[\bar{\lambda}\frac{dP_c}{dS_w}\nabla S_w\right]-\left[u_T\frac{df_w}{dS_w}+\Delta\gamma\nabla z\frac{d\bar{\lambda}}{dS_w}\right]\nabla S_w=\phi\frac{\partial S_w}{\partial t}+q_w-f_w q_T. \tag{2.91}$$

Уравнение (2.91) — общее, включающее уравнения, выведенные Фейерсом и Шелдоном (1959) и Хиаттом (1968) для частных случаев. Для его решения необходимо решить относительно u_T уравнение (2.84), тривиальное только в одномерном случае (упражнение 2.2 в конце данной главы). Но уравнение (2.91) — параболического типа, так как $dP_c/dS_w<0$. При $P_c=0$ оно становится гиперболическим. В последнем случае получаем

$$-\left[u_T\frac{df_w}{dS_w}+\Delta\gamma\nabla z\frac{d\bar{\lambda}}{dS_w}\right]\nabla S_w=\phi\frac{\partial S_w}{\partial t}+q_w-f_w q_T. \tag{2.92}$$

Наконец, если плотность флюидов одинаковая (или $\nabla z=0$), уравнение для доли массы в потоке упрощается:

$$u_n=f_n u_T,\quad u_w=f_w u_T,$$

а уравнение (2.92) для этого случая можно переписать в знакомой форме уравнения для вытеснения нефти водой

$$-u_T\frac{df_w}{dS_w}\nabla S_w=\phi\frac{\partial S_w}{\partial t}+q_w-f_w q_T. \tag{2.93}$$

Уравнения (2.84) и (2.93) эквивалентны системе уравнений (2.79) и (2.80). Член, учитывающий источник $q_w—f_w q_T$, будет равен нулю при отборе флюида, так как в этом случае по закону Дарси $q_w=f_w q_T$. Однако при закачке этот член может быть не равен нулю. Например, когда нагнетается смачивающая фаза, $q_T=q_w$,

$$q_w—f_w q_T=(1—f_w)q_w\neq 0.$$

Члены уравнения, учитывающие источник, рассмотрены в гл. 5 и 7.

Уравнения для сжимаемых флюидов получают таким же образом, но они значительно сложнее. Относительно p_n и S_w они имеют вид:

$$\left(\frac{b_n}{b_w}\right)\nabla\cdot[\lambda_w(\nabla p_n-\nabla P_c-\gamma_w\nabla z)]+\nabla\cdot]\lambda_n(\nabla p_n-\gamma_n\nabla z)]=$$

$$=\phi\left[\frac{b_n}{b_w}S_w\frac{\partial b_w}{\partial t}+(1-S_w)\frac{\partial b_n}{\partial t}\right]+\frac{b_n}{b_w}q_w+q_n, \tag{2.94}$$

$$b_w\left(u_T\frac{df_w}{dS_w}+k\Delta\gamma\frac{d\psi}{dS_w}\nabla z\right)\nabla S_w+\nabla\left[b_w k\psi\frac{dP_c}{dS_w}\nabla S_w\right]=$$

$$=-\phi\frac{\partial}{\partial t}(b_w S_w)-q_w-f_w\nabla(b_w u_T)-\psi\nabla[b_w k\Delta\gamma\nabla z[, \tag{2.95}$$

где

$$b_l = 1/B_l,$$

$$f_w = \frac{k_{rw}/\mu_w}{k_{rn}/\mu_n + k_{rw}/\mu_w}, \quad \psi = \frac{k_{rn}}{\mu_n} f_w,$$

а

$$\lambda_l = \frac{kk_{rl}}{\mu_l B_l}.$$

В упражнениях 2.2 и 2.3, приведенных в конце данной главы, выводятся уравнения двухфазной фильтрации и соответствующие уравнения для трехфазного течения.

2.6. УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ, НЕ ПОДЧИНЯЮЩЕЙСЯ ЗАКОНУ ДАРСИ

Строго говоря, закон Дарси распространяется только на ньютоновские флюиды в некотором ограниченном диапазоне скоростей фильтрации, в котором турбулентность, инерционные и другие высокоскоростные эффекты пренебрежимо малы. Кроме того, при очень низких давлениях этот закон не справедлив вследствие явления проскальзывания. В этом разделе мы приведем некоторые используемые в практике соотношения, когда классическая форма закона Дарси неприменима.

2.6.1. Большие скорости фильтрации (инерционные и турбулентные эффекты)

По мере увеличения скорости наблюдаются отклонения от закона Дарси. Исследователи связывали это либо с турбулентностью течения (Фэнчер и Льюис, 1933; Эленбаас и Катц, 1947; Корнелл и Катц, 1953), либо с проявлением инерционных эффектов (Хубберт, 1956; Хауперт, 1959). Общепринято объяснение (Райт, 1968), что по мере увеличения скорости происходит сначала отклонение от него вследствие инерционных эффектов, а затем и из-за турбулентности потока. Хубберт (1956) отметил, что отклонение от закона Дарси происходит при числах Рейнольдса, близких к единице (за характерный размер взят диаметр зерен несцементированных сред), в то время как турбулентность наблюдалась лишь при приближении числа Рейнольдса к 600. Переход от чисто ламинарного течения к полностью турбулентному продолжителен. Этот диапазон скоростей адекватно представлен квадратичной зависимостью, определяемой в случае одномерной стационарной фильтрации без учета гравитационных эффектов выражением

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\mu}{k} u + \beta\rho |u| u, \tag{2.96}$$

где β — коэффициент турбулентности (Катц и др., 1959).

В случае многомерной фильтрации уравнение можно записать в виде (Гиртсма, 1974)

$$-\nabla p = \frac{\mu}{k} u + \beta\rho |u| u.$$

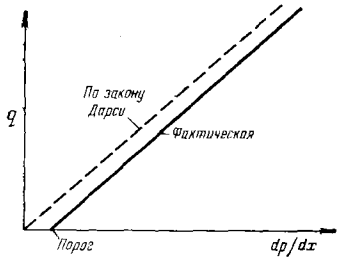


Рис. 2.2. Зависимость q от dp/dx

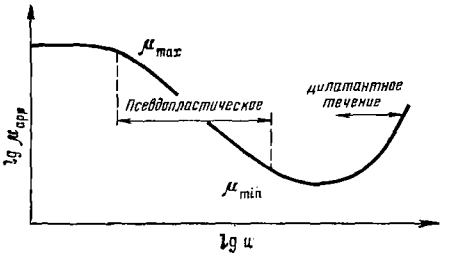


Рис. 2.3. Кажущаяся вязкость для неньютоновских флюидов (Бондору и др., 1972)

Уравнение (2.96), учитывающее ламинарные, инерционные и турбулентные (*LIT*) эффекты, — уравнение сохранения общего момента. Его можно преобразовать к виду

$$u = -\delta \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx}, \tag{2.97}$$

где корректирующий коэффициент турбулентности (Уотенбаргер и Рэми, 1968; Говиер, 1961)

$$\delta = 1 \Big/ \left(1 + \frac{\beta \rho k}{\mu} |u|\right).$$

Если $\delta=1$, уравнение эквивалентно закону Дарси. В анизотропной среде в разных направлениях δ различно. Поток через такую среду в обобщенном виде можно представить как

$$u = -\frac{1}{\mu} k\delta \nabla p, \tag{2.98}$$

где в общем случае k и δ — тензоры.

Уравнение (2.98) характеризует как ламинарное течение, так и течение с инерционно-турбулентными (IT) эффектами. На это уравнение в руководстве ERCB (1975) ссылаются, как на обобщенное ламинарно-инерционно-турбулентное уравнение. Инерционно-турбулентные эффекты обычно существенны только для течения газа у скважин.

Уравнение фильтрации газа получаем объединением уравнения (2.98) с уравнением сохранения массы:

$$\nabla \left[\frac{p}{Z} \frac{k}{\mu} \delta \nabla p\right] = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi p}{Z}\right) + \tilde{q} \frac{RT}{M}.$$

Уравнения данного типа следует решать итерационным путем.

2.6.2. Пороговые явления и явления проскальзывания

Экспериментально установлено, что для начала течения необходим некоторый ненулевой градиент давления. Соотношение между q и dp/dx при небольших скоростях показано на рис. 2.2. Эффект проскальзывания (эффект Клинкенберга) наблюдается при филь-

трации газа при низких давлениях и приводит к увеличению эффективной проницаемости по отношению к проницаемости для жидкостей. Хотя оба явления относительно незначительны, уравнение закона Дарси можно легко видоизменить, чтобы учесть их. Детальное рассмотрение этих эффектов можно найти в работах Коллинза (1961) и Бэра (1972).

2.6.3. Неньютоновская фильтрация

Некоторые флюиды (например, растворы полимеров) проявляют неньютоновские свойства, характеризуемые нелинейной зависимостью напряжения сдвига от скорости сдвига. Теория этого явления не рассматривается в данной книге. Для практических целей фильтрационное сопротивление можно описать законом Дарси с кажущейся вязкостью μ_{app}, зависящий от скорости фильтрации. Пример зависимости μ для раствора полимера показан на рис. 2.3. Скорость фильтрации u можно записать следующим образом:

$$u = -\frac{k}{\mu(u)}(\nabla p - \gamma \nabla z). \tag{2.99}$$

Область псевдопластического течения в широком диапазоне скоростей можно аппроксимировать уравнением со степенным законом (уравнение Блейка — Козени, см. Берд и др., 1960)

$$\mu_{app} = H u^{n-1}. \tag{2.100}$$

Константы H и n определяются опытным путем.

2.6.4. Другие эффекты

Существуют и другие эффекты, вносящие дополнительные нелинейности в основные уравнения фильтрации. Обычно они связаны со вторичными и третичными методами добычи. Например, при использовании раствора полимера последний адсорбируется пластовой породой и раствор превращается в воду. Кроме того, на контакте с полимером уменьшается относительная проницаемость для текущей вслед за ним воды. Если уравнения фильтрации несмешивающихся флюидов применяются для смешивающихся систем (CO_2, мицеллярные растворы и т. д.), рассматривают свойства, зависящие от концентрации. Для термических методов добычи все коэффициенты в уравнении закона Дарси зависят от температуры. Файнол и Фарук Али (1975) рассмотрели также процесс уплотнения пластовой породы при изменении горного давления.

2.7. СВОЙСТВА ФЛЮИДОВ И ПОРОДЫ

Особенности уравнений и методов, применяемых для их решения, во многом зависят от свойств флюидов и породы. В данном разделе эти свойства вкратце рассматриваются, так что можно полностью оценить их роль в моделировании месторождений. Подробное описание физических свойств и зависимостей можно найти у Фрика и Тейлора (1962) и Катца и др. (1959).

2.7.1. Свойства флюидов

Для флюидов, которые можно аппроксимировать изотермической β-моделью, объемные коэффициенты и вязкости являются функциями одного лишь давления и должны определяться при пластовой температуре. Заметим, что B_g связан с коэффициентом сжимаемости газа Z. Поскольку сжимаемость воды c_w мала, ее можно выразить уравнением (2.40)

$$B_w = \frac{B_{wb}}{[1 + c_w(p_w - p_{wb})]}, \tag{2.101}$$

где B_{wb} и p_{wb} — параметры для некоторой характерной точки (обычно для точки насыщения). Вязкости нефти и газа в общем случае сильно зависят от температуры, и это следует учитывать в тех случаях, когда изменениями температуры нельзя пренебречь, что, например, происходит при течении флюида в стволе скважины или при термических методах добычи нефти. При заданном давлении зависимость от температуры в логарифмических координатах может быть принята линейной, т. е.

$$\mu = \mu^0 \left(\frac{T}{T^0}\right)^C, \tag{2.102}$$

где T^0 и μ^0 — параметры для характерной точки. Константу C можно определить с помощью μ при одном значении $T \neq T^0$. По-видимому, эта аппроксимация для нефти неточна в том случае, когда точка насыщения попадает в рассматриваемый диапазон температур. В случае неадекватности β-модели необходимо определить более сложные зависимости, характеризующие композиционные свойства флюидов (см. гл. 12). Пример зависимостей свойств нефти и газа от давления показан на рис. 2.4.

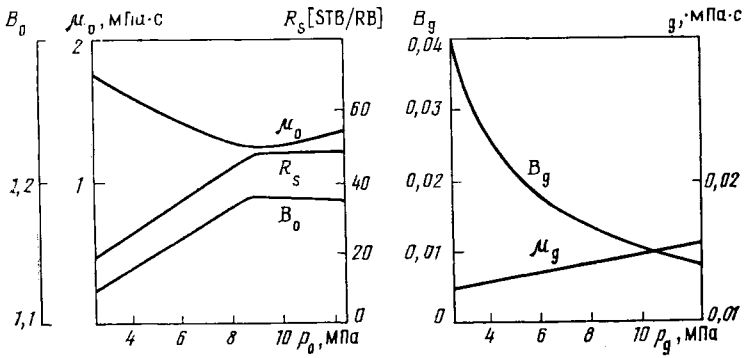


Рис. 2.4. Типичные зависимости свойств нефти (слева) и газа (справа) от давления (Сеттари Азиз, 1975)

2.7.2. Свойства породы

2.7.2.1. Капиллярное давление

В первом приближении можно считать, что капиллярное давление и относительные проницаемости определяются лишь свойствами пластовой породы. Для фильтрации двухфазного флюида типичная кривая капиллярного давления показана на рис. 2.5. Капиллярное давление зависит от насыщенности смачивающим флюидом и направления ее изменения (кривая вытеснения или пропитки). Давление $P_{св}$, необходимое для начала процесса вытеснения, называется «пороговым давлением» (Бэр, 1972); оно существенно для низкопроницаемых пород (Томас и др., 1968). Насыщенность, при которой смачивающая фаза больше не вытесняется при действии градиента давления, называется остаточной насыщенностью. Теоретически кривая P_c должна выходить на асимптоту при этом значении насыщенности, чтобы градиент давления изменялся непрерывно в обеих фазах. Это следует из анализа вертикального гравитационного равновесия. Аналогичная ситуация наблюдается на другом конце кривой в ходе цикла пропитки вблизи точки остаточной насыщенности несмачивающей фазой. Уэлдж (1949) был первым, кто получил отрицательное капиллярное давление, что вызвало дискуссию и послужило толчком для дальнейших экспериментальных исследований (например, Колхаун и др., 1949; Морроу и Харрис, 1965; Морроу, 1970).

Позже исследователи установили, что смачиваемость и капиллярность зависят и от других переменных. Среди них: свойства пластовых флюидов, загрязненность и температура (Постон и др., 1970).

При численном моделировании крутизна кривых всегда должна быть конечной. Вначале некоторые исследователи, стремясь отразить асимптотическое поведение кривой, пытались ввести в вычислительную машину кривые P_c с большой крутизной, что приводило при счете к трудностям. Позже выяснилось, что в этом не было необходимости. При использовании кривых с умеренной крутизной в области S_{wc} решение задачи облегчается. С другой стороны, в этом случае образуется «выброс» на кривой, который должен быть численно обработан (см. гл. 12).

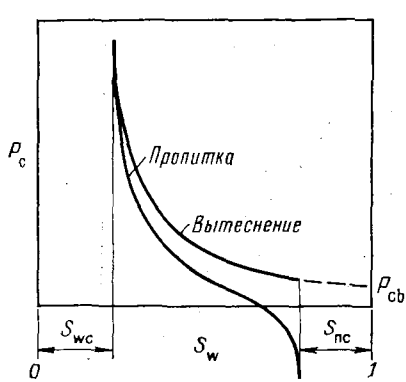


Рис. 2.5. Типичная кривая капиллярного давления

Для трехфазной фильтрации флюида Леверетт и Льюис (1941)

первыми исследовали зависимости (2.58) и (2.59) и подтвердили справедливость следующих предположений:

$$P_{cow}=f(S_w), \qquad (2.103а)$$

$$P_{cog}=f(S_g). \qquad (2.103б)$$

Допущения (2.103а), (2.103б) все еще широко используются, несмотря на то, что были предложены некоторые уточнения, например Шатлером (1969).

Хотя можно сформулировать модель, которая учитывает гистерезис, возникающий при изменении направления фильтрации, но в большинстве случаев это направление можно предсказать, что позволит использовать лишь одну совокупность кривых капиллярного давления.

2.7.2.2. Относительная проницаемость

Большая часть экспериментальных исследований по относительным проницаемостям была проведена на двухфазных системах. На рис. 2.6 показаны типичные зависимости, которые можно получить для водо-нефтяной системы при вытеснении нефти водой. Насыщенность S_w, при которой начинает двигаться вода, называется критической S_{wc}. Насыщенность S_{nc}, при которой перестает двигаться вытесняемая фаза, называется остаточной. Аналогично насыщенности в цикле дренирования: S_{nc} — критическая; S_{wc} — остаточная. Поскольку крутизна кривых капиллярного давления, используемых в численных моделях, при критических насыщенностях должна быть конечной, для определения насыщенности, при которой вытесняемая фаза становится неподвижной, нельзя использовать саму кривую капиллярного давления. По этой причине критическая насыщенность определяется остаточной насыщенностью, при которой относительная проницаемость становится равной нулю. В терминах обобщенного закона Дарси это означает, что фаза перестает двигаться *вследствие нулевой подвижности, а не в результате того, что внешняя сила равна нулю*. Следовательно, нет необходимости различать критическую и остаточную насыщенности.

Помимо экспериментальных результатов, существуют также теоретические зависимости, которые связывают между собой пористость, капиллярное давление и относительную проницаемость. Приближенная связь между ними устанавливается функцией Леверетта $[J=(P_c/\sigma)\sqrt{k/\phi}]$ — основой многих теоретических методов определения проницаемости (Эшфорд, 1969). По этой причине в пласте с сильно изменяющимися свойствами для разных

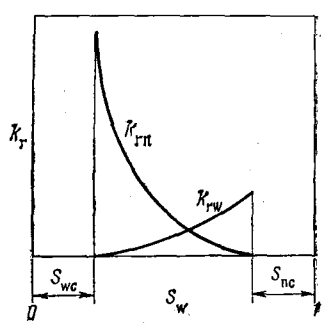


Рис. 2.6. Типичные кривые относительных фазовых проницаемостей

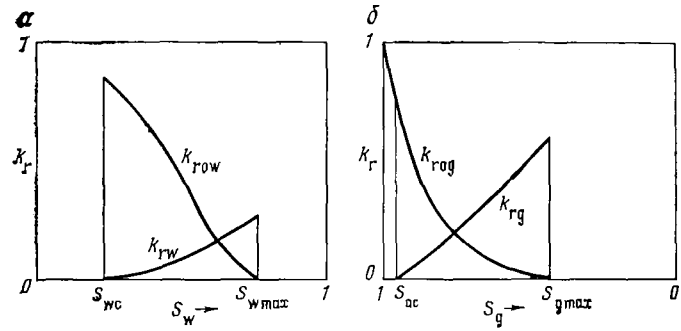


Рис. 2.7. Кривые относительных фазовых проницаемостей
а — система нефть — вода; *б* — система газ — нефть

его частей следует использовать различные кривые относительных фазовых проницаемостей и различные остаточные насыщенности.

На относительные проницаемости также сильно влияет и смачиваемость породы (Оуэнс и Арчер, 1971). Манган (1972) показал, что для определения относительных проницаемостей надо использовать пластовые, а не очищенные флюиды. Начиная с первых измерений Леверетта и Льюиса (1941), почти все исследования по трехфазным системам носят экспериментальный характер (Кори и др., 1956; Снелл, 1962). Эти исследования показывают, что функциональная зависимость может быть аппроксимирована следующим образом:

$$k_{rw}=f(S_w),\quad k_{rg}=f(S_g), \tag{2.104}$$

$$k_{ro}=f(S_w, S_g). \tag{2.105}$$

Функция (2.105) мало изучена, а вид ее неудобен для использования в численных моделях.

Практические относительные проницаемости для трехфазных систем определяют по данным об относительной проницаемости. В двухфазной системе нефть — вода

$$k_{row}=f(S_w) \tag{2.106}$$

и в двухфазной системе нефть — газ

$$k_{rog}=f(S_g). \tag{2.107}$$

Данную концепцию проще понять, если представить, что для k_{row} несмачивающая фаза — это сумма нефтяной и газовой фаз и аналогично для k_{rog} смачивающая фаза — это вся присутствующая жидкость (нефть и вода). Поэтому точка с $k_{rog}=0$ на рис. 2.7, характеризует максимальную водонасыщенность, а не критическую нефтенасыщенность, так как нефтенасыщенность уменьшится еще с увеличением газонасыщенности. Экспериментально, однако, было установлено, что при вытеснении нефти водой и газом одновременно существует остаточная нефтенасыщенность S_{om}. Замечание о гистерезисе P_c, сделанное ранее, относится и к зависимостям k_r, поэтому данные следует выбирать в соответствии с характером вы-

теснения (дренирование или пропитка). Численный учет гистерезиса рассматривается в гл. 12.

Простейший способ определения k_{ro} следующий:

$$k_{ro}=k_{row}k_{rog}. \tag{2.108}$$

Две более точные модели предложены Стоуном. В первой Стоун (1970) определяет нормализованные насыщенности следующим образом:

$$S^*_o=\frac{S_o-S_{om}}{(1-S_{wc}-S_{om})} \quad (S_o\geqslant S_{om}), \tag{2.109}$$

$$S^*_w=\frac{S_w-S_{wc}}{(1-S_{wc}-S_{om})} \quad (S_w\geqslant S_{wc}), \tag{2.110}$$

$$S^*_g=\frac{S_g}{(1-S_{wc}-S_{om})}. \tag{2.111}$$

Заметим, что относительная проницаемость для нефти в трехфазной системе предполагается равной

$$k_{ro}=S^*_o\beta_w\beta_g. \tag{2.112}$$

Множители β_w и β_g определяют из условия, что уравнение (2.112) сводится к двухфазной зависимости в двух предельных случаях: $S_g=S^*_g=0$ и $S_w=S_{wc}$. В результате получим

$$\beta_w=\frac{k_{ro}(S_w)}{1-S^*_w}, \quad \beta_g=\frac{k_{rog}(S_g)}{1-S^*_g}. \tag{2.113}$$

Область подвижной нефтяной фазы для модели (2.113) показана на тройной диаграмме рис. 2.8 в предположении, что S_w и S_g возрастают.

Для второй модели (Стоун, 1973) не требуются данные S_{om}, определяемые при моделировании. Соответствующее уравнение выводится по результатам исследования течения в канале и имеет вид

$$k_{ro}=(k_{row}+k_{rw})\,(k_{rog}+k_{rg})-(k_{rw}+k_{rg}), \tag{2.114}$$

при ограничении $k_{ro}\geqslant 0$, т. е. отрицательные значения k_{ro} относят к неподвижной нефти.

Следует заметить, что зависимости обеих моделей будут точно соответствовать процессам в двухфазных системах *только* при относительной проницаемости в концевых точках, равной единице:

$$k_{row}(S_{wc})=k_{rog}(S_g=0)=1. \tag{2.115}$$

В противном случае функция $k_{ro}(S_w, S_g)$ будет приближенно отображать двухфазные зависимости. Можно построить модель, не имеющую этого ограничения, при предположении, что зависимости для системы газ — нефть получают, если *присутствует остаточная вода*. В таком случае система нефть — вода при $S_{wc}=0$ и система нефть — газ при $S_g=0$ физически идентичны (т. е. при $S_w=S_{wc}$ значение $S_o=1-S_{wc}$) и поэтому по уравнению (2.115) абсолютная

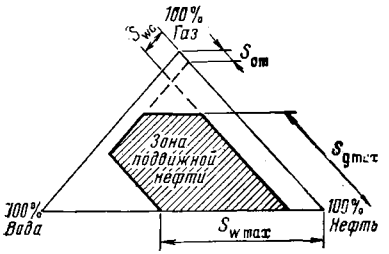


Рис. 2.8. Зона подвижной нефти при трехфазной фильтрации

проницаемость будет определяться как эффективная проницаемость для нефтяной фазы при S_{wc}. Чтобы получить обычное определение проницаемости, модели, предложенные Стоуном, следует видоизменить.

Обозначим

$$k_{row}(S_{wc}) = k_{rog}(S_L = 1) = k_{rocw}, \tag{2.116}$$

где $S_L = 1 - S_g = S_o + S_{wc}$ — для системы нефть — газ. Две модели Стоуна можно изменить следующим образом:

Модель I:

$$k_{ro} = k_{rocw} S^*_o \beta_w \beta_g, \tag{2.117}$$

где

$$\beta_w = \frac{k_{row}(S_w)/k_{rocw}}{1 - S^*_w}, \quad \beta_g = \frac{k_{rog}(S_L)/k_{rocw}}{1 - S^*_g}. \tag{2.118}$$

Модель II:

$$k_{ro} = k_{rocw}\left[(k_{row}/k_{rocw} + k_{rw})(k_{rog}/k_{rocw} + k_{rg}) - (k_{rw} + k_{rg})\right]. \tag{2.119}$$

Дитрих и Бондор (1976) предложили другую нормализованную форму модели II:

$$k_{ro} = \frac{1}{k_{rocw}}(k_{row} + k_{rw})(k_{rog} + k_{rg}) - (k_{rw} + k_{rg}). \tag{2.120}$$

Насыщенности S_{om}, вычисленные по этой модели, имеют большие значения по сравнению с вычисленными по уравнению (2.119). Кроме того, получаются неправильные значения для малых k_{rocw}, так как

$$\lim k_{ro} = \infty \text{ при } k_{rocw} \to 0.$$

По этой причине уравнение (2.119) более приемлемо.

Примеры.

По рис. 2.9 и 2.10 можно определить свойства породы для двухфазных систем. Зависимости k_{ro} для трехфазных систем, полученные по уравнениям (2.118) и (2.119), приведены на рис. 2.11 и 2.12. Графики зависимостей для двухфазной системы получены интерполяцией табличных данных, обычно вводимых в модель. Вторая совокупность зависимостей показывает, что по двум моделям можно получить совершенно различные проницаемости в области небольших значений k_{ro}.

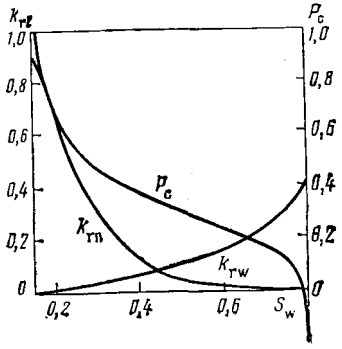


Рис. 2.9. Типичные зависимости свойств породы для системы вода — нефть, когда вода — смачивающая фаза (Сеттари и Азиз, 1975)

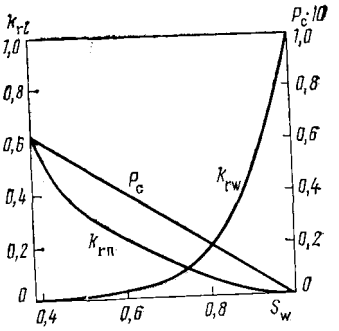


Рис. 2.10. Типичные зависимости свойств породы для системы газ — нефть, когда нефть — смачивающая фаза (Сеттари и Азиз, 1975)

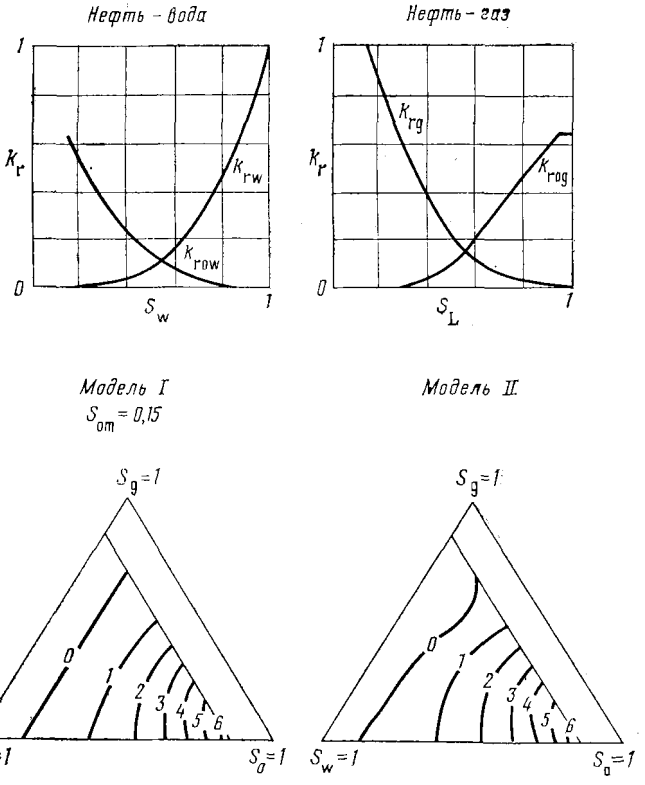


Рис. 2.11. Относительные проницаемости при трехфазной фильтрации, определенные по моделям Стоуна (I и II).

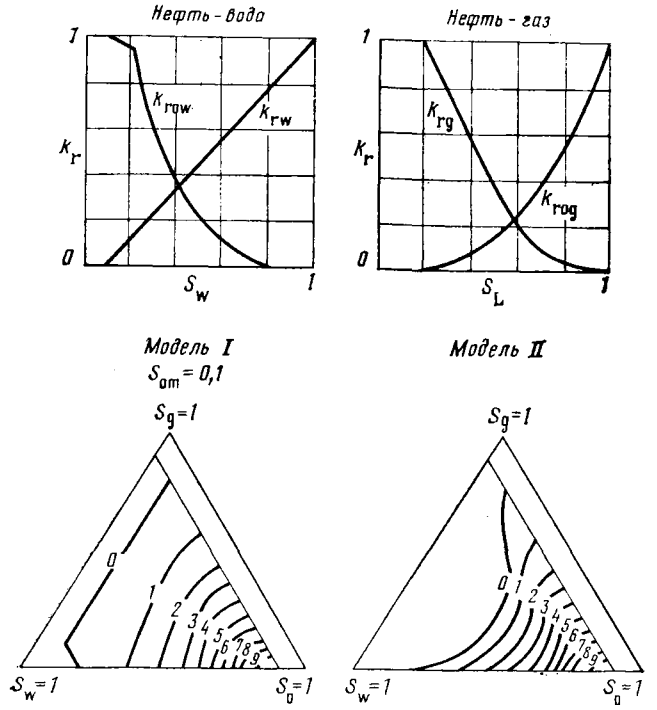


Рис. 2.12. Относительные проницаемости при трехфазной фильтрации, определенные по моделям Стоуна (I и II)

2.7.2.3. Другие свойства

В разделе 2.2.3 уже отмечался тензорный характер абсолютной проницаемости. В силу естественной слоистости пластовых пород главные оси тензора обычно горизонтальны и вертикальны и могут быть отождествлены с горизонтальной (k_H) и вертикальной (k_V) проницаемостью. Поэтому в декартовой системе координат xyz с осью z, направленной вниз, имеем

$$k_x=k_y=k_H, \quad k_z=k_V.$$

Пористость породы зависит от давления из-за сжимаемости породы c_R. Обычно значение c_R сравнимо со значением сжимаемости воды и его также можно считать постоянным, что дает

$$\phi=\phi^0[1+c_R(p-p^0)], \qquad (2.121)$$

где ϕ^0 — пористость при характерном давлении p^0.

2.8. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В данной главе были получены основные уравнения фильтрации для моделей нелетучей нефти. Их ограниченность подробно не обсуждалась, поскольку книга посвящена главным образом численным методам.

Наиболее слабое место таких математических моделей — трехфазные относительные проницаемости и капиллярное давление. Простые модели, основанные на двухфазных зависимостях, требуют проверки.

Задачи о фильтрации флюидов с изменениями температуры и с диффузией массы не рассматривались. Эти вопросы в данную книгу не входят.

Упражнения

Упражнение 2.1.

Вывести уравнение сохранения массы произвольного вещества в пористой среде произвольной формы, насыщенной одной или двумя фазами.

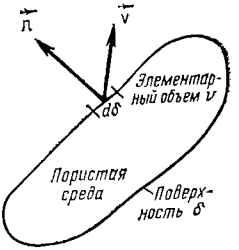


Схема решения

Рассмотрим фильтрацию некоторого вещества Q, распределенного с концентрацией C в представленной ниже системе.

Покажем, что

$$\text{полная масса потока через поверхность} = \int_{\delta} vnd\sigma, \qquad \text{(A)}$$

$$\text{изменение } Q \text{ внутри объема } V = \int_{V} \tilde{q}dV, \qquad \text{(B)}$$

$$\text{Скорость изменения } Q \text{ в } V = \int_{V} CdV \qquad \text{(C)}$$

Здесь v — действительная скорость вещества (поровая скорость) в пористой среде; $\tilde{q}$ — изменение Q в единице объема за единицу времени.

Используя теорему Гаусса, покажем, что уравнение сохранения для Q

$$\frac{d}{dt}\int_V C dV = -\int_\delta cv\cdot n d\delta + \int_V \tilde{q} dV$$

можно записать в виде

$$\int_V \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla\cdot Cv - \tilde{q}\right] dV = 0. \tag{D}$$

Для пористой среды, насыщенной однокомпонентным флюидом, уравнение (D) можно записать как

$$-\nabla(\rho u) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) - \tilde{q}, \tag{E}$$

где $u = v\phi$ — скорость фильтрации.

Указание. Поток массы равен $\int Cvdn = \int \rho u dn$, так как $C = \rho$ для порового пространства и $C = 0$ для матрицы породы. Аналогично $C = \rho\phi$ для аккумулятивного члена.

Обобщим уравнение (E) для случая многофазной фильтрации и дадим определения скорости фильтрации и относительных проницаемостей, исходя из потока массы.

Упражнение 2.2.

Вывести уравнения (2.94) и (2.95).

Схема решения

(a) Для получения уравнения (2.94) из уравнений (2.20) и (2.21), исключить $\partial S_l/\partial t$ путем умножения уравнения для смачивающей фазы на b_n/b_w.

(b) Скорость фильтрации u_w определяется выражением

$$u_w = f_w u_T + k\psi(\nabla P_c + \Delta\gamma\nabla z). \tag{A}$$

Чтобы получить уравнение (2.95), следует подставить (A) в уравнение для смачивающей фазы.

Упражнение 2.3.

Вывести эквивалент уравнений (2.94) и (2.95) для трехфазной фильтрации.

Схема решения

Запишем уравнения:

$$-\nabla(b_w u_w) = \frac{\partial}{\partial t}(\phi b_w S_w) + q_w \tag{A}$$

$$-\nabla(b_o u_o) = \frac{\partial}{\partial t}(\phi b_o S_o) + q_o \tag{B}$$

$$-\nabla(b_g u_g) - \nabla R_s\cdot(b_o u_o) = \frac{\partial}{\partial t}(\phi b_g S_g) + \phi b_o S_o \frac{\partial R_s}{\partial t} + q_g. \tag{C}$$

(Относительно вида уравнения (C) см. упражнение 5.2 в гл. 5).

a). Исключим производные от насыщенности, умножая уравнения для воды и газа на b_o/b_w и b_o/b_g и складывая их:

$$\nabla[\lambda_o(\nabla p_o - \gamma_o\nabla z)] + (b_o/b_w)\nabla[\lambda_w(\nabla p_o - \nabla P_{cow} - \gamma_w\nabla z)] +$$
$$+ (b_o/b_g)\nabla[\lambda_g(\nabla p_o + \nabla P_{cog} - \gamma_g\nabla z)] =$$
$$= S_o\left[\frac{\partial(\phi b_o)}{\partial t} + \left(\frac{b^2_o}{b_g}\right)\phi\frac{\partial R_s}{\partial t}\right] + (b_o/b_w)S_w\frac{\partial(\phi b_w)}{\partial t} +$$
$$+ \left(\frac{b_o}{b_g}\right)S_g\frac{\partial(\phi b_g)}{\partial t} + q_o + (b_o/b_w)q_w + (b_o/b_g)q_g. \qquad (D)$$

b). Уравнение фильтрации воды, выраженное через ее доли в общем потоке, следующее:

$$u_w = f_w u_T + k\psi_{og}(\nabla P_{cow} + \nabla\gamma_{ow}\nabla z) +$$
$$+ k\psi_g(\nabla P_{cog} + \Delta\gamma_{og}\nabla z), \qquad (E)$$

где

$$\Delta\gamma_{ow} = \gamma_w - \gamma_o,\ \Delta\gamma_{og} = \gamma_o - \gamma_g,$$
$$\psi_{og} = \left(\frac{k_{ro}}{\mu_o} + \frac{k_{rg}}{\mu_g}\right)f_w,\ \psi_g = \frac{k_{rg}}{\mu_g}f_w.$$

Подставим (E) в (A) и получим

$$b_w\left[u_T\frac{\partial f_w}{\partial S_w} + k\left(\Delta\gamma_{ow}\frac{\partial\psi_{og}}{\partial S_w} + \Delta\gamma_{og}\frac{\partial\psi_g}{\partial S_w}\right)\nabla z\right]\cdot\nabla S_w +$$
$$+ b_w\left[u_T\frac{\partial f_w}{\partial S_g} + k\left(\Delta\gamma_{ow}\frac{\partial\psi_{og}}{\partial S_g} + \Delta\gamma_{og}\frac{\partial\psi_g}{\partial S_g}\right)\nabla z\right]\cdot\nabla S_g +$$
$$+ \nabla\cdot\left[b_w k\psi_{og}\frac{dP_{cow}}{dS_w}\nabla S_w\right] + \nabla\cdot\left[b_w k\psi_g\frac{dP_{cog}}{dS_g}\nabla S_g\right] =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial t}(\phi b_w S_w) - q_w - f_w\nabla\cdot(b_w u_T) - \psi_{og}\nabla\cdot(kb_w\Delta\gamma_{ow}\nabla z) -$$
$$- \psi_g\nabla\cdot(kb_w\Delta\gamma_{og}\nabla z). \qquad (F)$$

Аналогичным образом можно получить уравнение фильтрации нефти, выраженное через ее долю в общем потоке:

$$u_o = f_o u_T - k\xi_w(\nabla P_{cow} + \Delta\gamma_{ow}\nabla z) + k\xi_g(\nabla P_{cog} + \Delta\gamma_{og}\nabla z), \qquad (G)$$
$$\xi_w = \frac{k_{rw}}{\mu_w}f_o,\quad \xi_g = \frac{k_{rg}}{\mu_g}f_o.$$

Подставим (G) в (B), чтобы получить

$$b_o\left[u_T\frac{\partial f_o}{\partial S_w}+k\left(-\Delta\gamma_{ow}\frac{\partial\xi_w}{\partial S_w}+\Delta\gamma_{og}\frac{\partial\xi_g}{\partial S_w}\right)\nabla z\right]\cdot\nabla S_w+$$

$$+b_o\left[u_T\frac{\partial f_o}{\partial S_g}+k\left(-\Delta\gamma_{ow}\frac{\partial\xi_w}{\partial S_w}+\Delta\gamma_{og}\frac{\partial\xi_g}{\partial S_g}\right)\nabla z\right]\cdot\nabla S_g-$$

$$-\nabla\left[b_o k\xi_w\frac{dP_{cow}}{dS_w}\nabla S_w\right]+\nabla\left[b_o k\xi_g\frac{dP_{cog}}{dS_g}\nabla S_g\right]=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}(\phi b_o S_o)-q_o-f_o\nabla(b_o u_T)+\xi_w\nabla\cdot(kb_o\Delta\gamma_{ow}\nabla z)-$$

$$-\xi_g\nabla(kb_o\Delta\gamma_{og}\nabla z). \qquad \text{(H)}$$

ГЛАВА 3

ОДНОМЕРНАЯ ОДНОФАЗНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

3.1. ВВЕДЕНИЕ

Данная глава посвящена численным решениям уравнений одномерной однофазной фильтрации. Одномерные задачи — простейшие из рассматриваемых в данной книге. Поэтому численные решения здесь не всегда столь необходимы.

Для ряда особых случаев известны аналитические решения (Маскет, 1937; Коллинз, 1961), которые попутно можно использовать для проверки точности методов аппроксимации. Помимо этого, большая часть понятий, относящихся к конечно-разностным методам, и методика численного решения представлены здесь в доступном виде и могут быть в дальнейшем распространены для многомерной фильтрации. (В данной книге понятие «размерность» относится только к пространству, но не ко времени, поэтому нестационарная задача в координатах x и t одномерна.)

Математическая постановка задач и их численное решение зависят от типа физической системы и допущений, принятых при разработке ее математической модели.

Уравнения фильтрации, о которых пойдет речь в данной главе, рассматривались в гл. 2 для общей трехмерной системы. Ниже кратко перечислены различные формы уравнений одномерной фильтрации. Конечно-разностные методы решения этих уравнений будут представлены в следующих разделах данной главы. Большинство задач фильтрации можно сгруппировать следующим образом.

1. Задачи стационарной линейной фильтрации, описываемые линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями (ODE),

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}=q(x). \tag{3.1}$$

2. Задачи нестационарной линейной фильтрации, описываемые линейными дифференциальными уравнениями в частных производных (PDE),

$$\frac{\partial^2U}{\partial x^2}=\frac{\partial U}{\partial t}+q(x,\ t). \tag{3.2}$$

3. Задачи нестационарной линейной фильтрации, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных с переменными коэффициентами,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x,\ U)\frac{\partial U}{\partial x}\right]=c(x,\ U)\frac{\partial U}{\partial t}+q(x,\ t). \tag{3.3}$$

4. Задачи нестационарной радиальной фильтрации, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных с переменными коэффициентами,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\lambda(r, U)\frac{\partial U}{\partial r}\right]=c(r, U)\frac{\partial U}{\partial t}+q(r, t). \qquad (3.4)$$

Использовать U для обозначения зависимой переменной p удобно при общем рассмотрении конечно-разностных методов. Однако в последующих главах вместо U использован символ p для обозначения как приближенного, так и точного решения. Но и в этой главе символ p применяют тогда, когда речь пойдет о физическом смысле задачи.

В следующих двух разделах вводятся терминология и основные определения, принятые для конечно-разностных методов. Для большей ясности рассматривается простое эллиптическое (3.1) и простейшее параболическое уравнения на равномерной сетке. Специальные вопросы использования неравномерных сеток и учета нелинейностей рассматриваются в последующих разделах.

В механике для описания однофазной фильтрации в пористой среде обычно пользуются уравнениями, численные методы решения которых достаточно подробно описаны в литературе. Основные методы численного анализа, связанные с данной задачей, можно найти в ряде книг (Лапидус, 1962; Смит, 1965; фон Розенберг, 1969; Амис, 1969; Митчел, 1969). Опубликовано еще много других книг, поэтому выделить и рекомендовать какую-либо одну довольно трудно.

Новые достижения в области численного анализа отражаются в таких периодических изданиях, как журнал SIAM Journal of Numerical Analysis, Numerische Mathematik, Mathematics of Computation и др.

Литература по прикладным вопросам численного анализа встречается в нескольких областях техники, но особенно много ее в области теплопереноса.

3.2. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ

Излагаемый материал имеет двоякое назначение: 1) определение терминологии; 2) обобщение основных положений, которые потребуются для разработки специальных методов. Полное изложение как теории, так и ее практических приложений можно найти в ряде книг по численным методам решения дифференциальных уравнений (например, Форсайт и Вазов, 1960; Генричи, 1962; Саульев, 1964; Рихтмайер и Мортон, 1967; Амис, 1969; Лапидус, Зайнфельд, 1971), а также в книгах, имеющих отношение к численному анализу (например, Хильдебранд, 1956; Янг и Грегори, 1973; Блюм, 1972).

Основная идея любого приближенного метода аппроксимации — замена исходной задачи другой, более легкой, решение которой

в определенном смысле близко к решению исходной задачи. В качестве простого примера рассмотрим уравнение

$$AU \equiv \frac{d^2U}{dx^2} - q(x) = 0 \quad (0 < x < L), \tag{3.5}$$

где

$$U(0) = U(L) = 0.$$

При конечно-разностном методе вместо определения непрерывной, достаточно гладкой функции $U(x)$, которая удовлетворяет условию (3.5), находим лишь приближенные значения U для конечного множества отдельно взятых точек $x_1, x_2, \ldots, x_N$ в интервале $(0, L)$. Точки x_i называют сеточными точками или узлами сетки. Дифференциальное уравнение заменяется системой алгебраических уравнений, связывающих значения u_i и x_i для всех узлов сетки. Эти уравнения называют «конечно-разностными». Таким образом, задача решения дифференциального уравнения сводится к решению алгебраических уравнений. Если можно показать, что решение дискретной задачи близко к решению исходной, это означает, что величины u_i аппроксимируют истинное решение $U_i = U(x_i)$ в узлах сетки x_i. Процесс получения конечно-разностных уравнений, аппроксимирующих данное дифференциальное уравнение, называется дискретизацией.

На данном этапе рассмотрим три вопроса:

а) как дискретизировать данное дифференциальное уравнение?

б) как можно удостовериться в том, что конечно-разностное решение u_i в некотором смысле близко к U_i и какова погрешность?

в) каков наилучший метод решения полученной системы алгебраических уравнений?

Первые два вопроса обсуждаются в настоящей главе. Третий, чрезвычайно важный с практической точки зрения, рассматривается в два этапа: 1) если конечно-разностные уравнения нелинейны, их следует линеаризовать (это рассматривается в разделе 3.7); 2) решение полученных матричных уравнений (эта задача будет рассмотрена в следующей главе).

3.2.1. Дискретизация по пространству

Рассмотрим уравнение (3.5) с граничными условиями $U(0) = U(L) = 0$. В основном имеются три метода дискретизации любого оператора A: разложение в ряд Тейлора, интегральный и вариационный методы (Форсайт и Вазов, 1960; Варга, 1962). Уравнения этих методов соответствуют дифференциальной, интегральной и вариационной формам уравнения сохранения массы (3.5). Исходную задачу можно записать как

$$AU = 0,$$

но вместо нее решаем

$$LU = 0,$$

где L — конечно-разностный оператор, аппроксимирующий дифференциальный оператор A. Обобщая, запишем

$$AU_i = LU_i + R_i, \tag{3.6}$$

где LU_i получено при аппроксимации производных в дифференци-

альном операторе A; R_i — остаточный член, называемый *погрешностью аппроксимации или локальной погрешностью дискретизации.*

3.2.1.1. Метод разложения в ряд Тейлора

Рассмотрим равномерную сетку с узлами

$$x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{N+1}$$

при $x_0=0$, $x_{N+1}=L$ и шагом h, определяемым следующим образом:

$$h=x_{i+1}-x_i=L/(N+1).$$

При разложении в ряд Тейлора U_{i+1} и U_{i-1} по U_i получим:

$$U_{i+1}=U_i+U'_ih+U''_i\frac{h^2}{2}+U'''_i\frac{h^3}{6}+U_i^{\mathrm{IV}}\frac{h^4}{24}+$$

$$+U_i^{\mathrm{V}}\frac{h^5}{120}+U_i^{\mathrm{VI}}\frac{h^6}{720}+\ldots; \tag{3.7}$$

$$U_{i-1}=U_i-U'_ih+U''_i\frac{h^2}{2}-U'''_i\frac{h^3}{6}+U_i^{\mathrm{IV}}\frac{h^4}{24}-$$

$$-U_i^{\mathrm{V}}\frac{h^5}{120}+U_i^{\mathrm{VI}}\frac{h^6}{720}-\ldots. \tag{3.8}$$

С помощью указанных разложений можно получить несколько разностных аппроксимаций для U'_i и одну для U''_i. Решаем уравнение (3.7) относительно U'_i:

$$U'_i=\frac{U_{i+1}-U_i}{h}+R^f_i, \tag{3.9}$$

где

$$R^f_i=-U''_i\frac{h}{2}-U'''_i\frac{h^2}{6}-\ldots \tag{3.10}$$

В уравнении (3.9) выражение $(U_{i+1}-U_i)/h$ — аппроксимация производной U'_i разностью «вперед». Она получена в предположении, что R^f_i мала. Аналогично, преобразуя уравнение (3.8), получим

$$U'_i=\frac{U_i-U_{i-1}}{h}+R^b_i, \tag{3.11}$$

где

$$R^b_i=U''_i\frac{h}{2}-U'''_i\frac{h^2}{6}+\ldots \tag{3.12}$$

В уравнении (3.11) выражение $(U_i-U_{i-1})/h$ — аппроксимация производной U'_i разностью «назад», а R^b_i — локальная погрешность дискретизации для аппроксимации разностью «назад».

Аппроксимация производной U'_i «центральной» разностью получена при вычитании (3.8) из (3.7):

$$U'_i=\frac{U_{i+1}-U_{i-1}}{2h}+R^c_i, \tag{3.13}$$

где

$$R^c_i=-U'''_i\frac{h^2}{6}-U_i^{\mathrm{V}}\frac{h^4}{120}-\ldots \tag{3.14}$$

Здесь $(U_{i+1}-U_{i-1})/2h$ — аппроксимация для U'_i.

До сих пор рассматривалась только первая производная. Аппроксимация для второй производной получается путем сложения уравнений (3.7) и (3.8):

$$U''_i = \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} + R^2_i, \tag{3.15}$$

где

$$R^2_i = -U_i^{\mathrm{IV}} \frac{h^2}{12} - U_i^{\mathrm{VI}} \frac{h^4}{360} - \ldots \tag{3.16}$$

В уравнении (3.15) аппроксимация «центральной» разностью для U''_i

$$\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} = \frac{1}{h^2} \Delta^2 U_i, \tag{3.17}$$

R^2_i — соответствующий остаточный член. В уравнении (3.17) Δ^2 — линейный оператор.

В качестве примера рассмотрим дифференциальный оператор A, заданный уравнением (3.5). Используя аппроксимацию производной «центральной» разностью, получим

$$AU_i = \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} - q_i + R^2_i, \tag{3.18}$$

где $q_i = q(x_i)$. Сравнивая это выражение с уравнением (3.6), видим, что

$$LU_i \equiv \frac{1}{h^2} \Delta^2 U_i - q_i, \tag{3.19}$$

$$R_i = R^2_i.$$

Обычно невозможно получить точное значение U_i. Вместо (3.19) решаем

$$Lu_i = \frac{1}{h^2} \Delta^2 u_i - q_i = 0, \tag{3.20}$$

где u_i — конечно-разностная аппроксимация U_i, а уравнение (3.20) — конечно-разностная аппроксимация уравнения (3.5).

Другие конечно-разностные аппроксимации, рассмотренные здесь, будут использованы позднее для более сложных задач.

Для решения таких задач можно использовать интерполяцию полиномами (Карнаган и др. (1969); Келли (1968)). Разностная формула для $U^{(p)}$ — разностная производная полинома, интерполирующего U при заданном наборе узлов. Отсюда следует:

a) разностный оператор для $U^{(p)}$ должен включать по крайней мере $(p+1)$ различных значений U_i;

b) аппроксимация $U^{(p)}$ — точная, если функция U — полином степени $q \leqslant p$.

С помощью такого метода можно получать аппроксимации высшего порядка точности (см. упражнение 3.1).

3.2.1.2. Интегральный метод

Интегральный метод лучше соответствует физическому смыслу изучаемого процесса. Отметим, что уравнение (3.17) можно получить, если принять $U''=(U')'$ и аппроксимировать $(U')'$ как

$$(U')'\cong (U'_{i+1/2}-U'_{i-1/2})/h,$$

а затем аппроксимировать U' как

$$U'_{i+1/2}\simeq (U_{i+1}-U_i)/h,\quad U'_{i-1/2}\simeq (U_i-U_{i-1})/h.$$

Таким образом, интегральным методом получаем конечно-разностные уравнения. По данному методу в противоположность методу Тейлора следует учитывать дополнительное понятие «блок» (или «ячейка»), характеризующее область, ограниченную плоскостями, проведенными между данной и соседними точками. При рассмотрении одномерной фильтрации заменяем ось x на «стержень» постоянного сечения A. Блок для сеточной точки i определяется границами $x_{i+1/2}$ и $x_{i-1/2}$ (рис. 3.1).

Уравнение сохранения массы (3.5), рассмотренное в гл. 2, можно записать в интегральной форме

$$A\left[\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x-\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}q\mathrm{d}x\right]=A\left[\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{i+1/2}-\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{i-1/2}\right]-$$

$$-A\left[\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}q\mathrm{d}x\right]=0, \tag{3.21}$$

где интегрирование проводилось по объему блока, а интеграл преобразован с использованием теоремы Грина. Уравнение (3.21) выражает сохранение массы для блока i, так как $A\dfrac{\partial U}{\partial x}\Big|_{i\pm1/2}$ соответствует расходам между блоками, а $A\displaystyle\int_{x_{i-1/2}}^{x_i+1/2}q\mathrm{d}x$ — полной интенсивности источника для блока i. Используя центральные разности для $\partial U/\partial x$, представим уравнение (3.21) в дискретной форме:

$$A\left[\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{i+1/2}-\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{i-1/2}\right]-A\int q\mathrm{d}x\approx A\,(u_{i+1}-$$

$$-2u_i+u_{i-1})/h-Aq_ih=0, \tag{3.22}$$

где q_i аппроксимирует среднее значение q для блока i. Разделив уравнение (3.22) на объем блока $V=Ah$, вновь приходим к уравнению (3.20). Отметим, что с помощью интегрального метода получаем уравнения, в которых значения аргументов выражены в единицах «масса/время», тогда как по методу рядов Тейлора эти значения даны в единицах «масса/(объем·время)». На практике

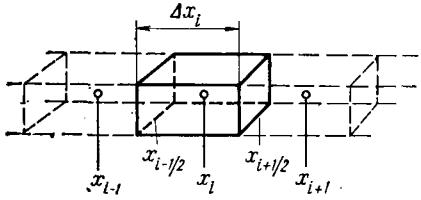


Рис. 3.1. Разбиение на блоки в одномерном случае

предпочтительнее использовать уравнение (3.22), для которого получаются симметричные матрицы. Это уравнение пригодно для расчета материального баланса, что рассматривается в разделе 3.7.

3.2.1.3. Вариационный метод

В заключение кратко рассмотрим вариационный метод, основанный на вариационной формулировке уравнения сохранения массы. Как показано в работах Михлина (1964), Куранта и Гилберта (1953), Хильдебранта (1965), Шехтера (1967), при решении уравнения (3.5) минимизируется интеграл

$$I=\int_0^L\left[\frac{1}{2}\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]^2-qV\right]dx \tag{3.23}$$

по всем достаточно гладким и удовлетворяющим граничным условиям функциям V. На этом этапе, как показано в работе Варги (1962), для непосредственной аппроксимации уравнения можно использовать функционал I. Кроме того, применяют функции определенного класса v (обычно полиномиальных), которые аппроксимируют функции V, а затем решают задачи минимизации только для функций этого класса. Например, предположим, что все аппроксимирующие функции v имеют вид

$$v(x)=\sum_{i=1}^{i=N} c_i S_i(x), \tag{3.24}$$

где $S_i(x)$ — так называемые «функции-шапочки», показанные на рис. 3.2. Функции S_i называются базисными, каждая из них отлична от нуля только в интервале (x_{i-1}, x_{i+1}), называемом носителем S_i. Легко видеть, что класс функций, заданных уравнением (3.24), состоит из всех функций v, которые между точками x_i являются непрерывными и кусочно-линейными. Функции v удовлетворяют условию $v(0)=v(L)=0$, при этом значения v, b, x_i равны c_i. Подставляя уравнение (3.24) в уравнение (3.23), получаем квадратичную форму c_i, которая имеет минимум для определенных значений $v_i=c_i$. Процедура минимизации, отраженная в упражнении 3.2, приводит к системе алгебраических уравнений, тождественной уравнению (3.20).

Другие базисные функции позволяют получить алгебраические уравнения, отличающиеся от данного. В широком смысле на таком подходе основаны все методы вариационного типа (Ритца,

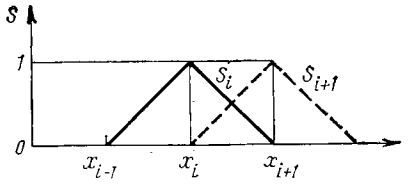


Рис. 3.2. «Функции — шапочки»

Галеркина, конечных элементов, невязок и др.). По этой причине, а также из-за того, что рассматриваются непрерывные функции, нельзя относить алгебраические уравнения, полученные этим методом, к конечно-разностным.

3.2.1.4. Дискретная задача

Все методы дискретизации приводят к получению системы алгебраических уравнений для краевой задачи — см. уравнение (3.5):

$$(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1})/h^2=q_i,\ i=1, 2, \ldots, N,\ u_0=u_{N+1}=0. \quad (3.25)$$

Уравнения (3.25) в матричной форме имеют вид

$$\frac{1}{h^2}\mathrm{E}u=-q, \quad (3.26)$$

где E — симметричная трехдиагональная матрица

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

а векторы u и q

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{q}=\begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix}$$

Методы решения уравнения (3.26) рассматриваются в следующей главе.

3.2.2. Дискретизация во времени

Рассмотрим параболическое уравнение (3.2)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{\partial U}{\partial t}+q \quad (3.28)$$

с начальным условием $U(x, 0)=U^0(x)=f(x)$. Дискретизация левой части уравнения с использованием сеточных значений U_i уже обсуждалась. Для нестационарных задач эти величины — функции времени $u_i=u_i(t)$. Тогда в каждом узле сетки x_i правую часть уравнения (3.28) можно заменить на $du_i/dt+q_i$. При этом получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1})/h^2=\frac{du_i}{dt}+q_i,\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N), \qquad (3.29)$$

с начальными условиями $u_i(0)=U^0(x_i)$. Уравнение (3.29) дискретно в пространстве, но непрерывно во времени. Этот процесс называется процессом полудискретизации (Варга, 1962).

Обычный способ решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.29) заключается в дискретизации производных также и по времени. Один из подходов состоит в применении методов, разработанных для обыкновенных дифференциальных уравнений, как показано в разделе 3.3.3. Однако поскольку число совместных уравнений обычно велико, для решения параболических уравнений, независимо от численных методов, предназначенных для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, были разработаны специальные численные методы.

Разобьем координату по времени на временные шаги Δt и будем искать численное решение только на дискретных слоях $t_0=0$, $t_1=\Delta t$, ..., $t_n=n\Delta t$, ... Затем каждую функцию $u_i(t)$ аппроксимируем значениями $u^n{}_i$, $n=1, 2, \ldots$. Далее производную du_i/dt выразим через $u^n{}_i$.

В простейшем случае du_i/dt аппроксимируется прямой разностью

$$\left(\frac{du_i}{dt}\right)^n \approx (u_i^{n+1}-u^n{}_i)/\Delta t.$$

После подстановки данного выражения в уравнение (3.29), левая часть которого записана для слоя n, получим уравнение классического явного метода

$$\alpha\Delta^2 u^n{}_i\equiv\alpha(u_{i-1}-2u_i+u_{i+1})^n=(u_i{}^{n+1}-u^n{}_i)+q_i\Delta t,$$
$$i=1, 2, \ldots, N,\ n=0, 1, \ldots, \qquad (3.30)$$

где $\alpha=\Delta t/h^2$.

Поскольку на первом временном шаге ($n=0$) все $u^0{}_i=U^0(x_i)$ известны, то единственным неизвестным в уравнении (3.30) является u_i^{n+1}. Уравнения можно решать явно и последовательно для каждого узла, отсюда и название «явный метод».

Другой способ аппроксимации производной по времени заключается в использовании обратной разности

$$\left(\frac{du_i}{dt}\right)^{n+1} \approx (u_i^{n+1}-u_i^n)/\Delta t$$

при записи левой части уравнения на слое $(n+1)$:

$$\alpha\Delta^2 u^n{}_i\equiv\alpha(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1})^{n+1}=(u_i{}^{n+1}-u^n{}_i)+q_i\Delta t,$$
$$i=1, 2, \ldots, N,\ n=0, 1, 2, \ldots. \qquad (3.31)$$

Все u_i^{n+1} неизвестны, поэтому N уравнений для заданного временного слоя n должны решаться одновременно. Следовательно, уравнение (3.31) — уравнение классического неявного метода. В матричной форме его можно записать следующим образом:

$$(\alpha E+I)\,u^{n+1}=u^n-\Delta t q,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{3.32}$$

где E — матрица, определяемая уравнением (3.27), а I — единичная матрица.

В настоящей главе также будут рассмотрены и другие методы. Следует отметить, что единая теория дискретизации по времени излагается в теории аппроксимаций Паде (Варга, 1962).

3.2.3. Погрешности дискретизации

При рассмотрении конечно-разностных аппроксимаций для различных производных остаточными членами пренебрегали. Рассмотрим воздействие такой аппроксимации и ответим на вопросы:

1. Обеспечивает ли решение $u^n{}_i$ приемлемую аппроксимацию $U^n{}_i$?

2. Как отражается уменьшение размеров ячеек на погрешностях дискретизации?

Эти вопросы рассмотрены далее.

3.2.3.1. Локальный порядок и согласованность аппроксимации

В качестве примера рассмотрим выражение (3.9) для аппроксимации U'. Остаточный член $R^f{}_i$ в уравнении (3.10) называется погрешностью аппроксимации или локальной погрешностью дискретизации для аппроксимации U'_i разностью $(U_{i+1}-U_i)/h$. Для оценки $R^f{}_i$ необходимы производные U высшего порядка, которые обычно неизвестны. Однако некоторую (качественную) информацию об изменении $R^f{}_i$ при $h\to 0$ получить можно. Для этого необходимо ввести понятие «асимптотического поведения функции»: функция $f(h)$ имеет «порядок» p, если существует такая константа K, что для всех $h<h_0$ выполняется неравенство $|f(h)|\leqslant Kh^p$. Обозначим

$$f(h)=O(h^p).$$

Другими словами, $f(h)$ стремится к нулю со скоростью, пропорциональной h в p-й степени (наиболее общий случай, когда p — положительное целое). С другой стороны, выражение

$$f(h)=o(h^p)$$

означает, что $f(h)/h^p\to 0$ при $h\to 0$, т. е. $f(h)$ стремится к нулю быстрее, чем h^p (более подробные пояснения см. в работе Амеса (1969).

Используя указанные обозначения для

$$R^f{}_i=-U''{}_i\frac{h}{2}-U'''{}_i\frac{h^2}{6}-\ldots,$$

видим, что для $h \to 0$ первый член будет в конечном счете доминирующим и, следовательно,

$$\lim_{h\to 0} R^f{}_i = \lim_{h\to 0} \left(-U''_i \frac{h}{2}\right),$$

что означает

$$R^f = O(h). \tag{3.33}$$

Итак, поскольку U''_i не зависят от h, то $R^f \neq O(h^p)$ для любого $p > 1$. Наибольшее значение p, при котором $R = O(h^p)$, называется *порядком* погрешности R (и аппроксимации, связанной с R). Следовательно, выражение для прямой разности (3.9) — аппроксимация U' первого порядка. Тогда можно записать

$$U'_i = (U_{i+1} - U_i)/h + O(h). \tag{3.34}$$

Аналогично находим:

$$U'_i = (U_i - U_{i-1})/h + O(h), \tag{3.35}$$

$$U'_i = (U_{i+1} - U_{i-1})/2h + O(h^2), \tag{3.36}$$

$$U''_i = (U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1})/h^2 + O(h^2). \tag{3.37}$$

За счет выбора достаточно малого значения h погрешность в каждом из этих выражений может быть уменьшена. Такие аппроксимации называют *согласованными*. Точнее можно сказать, что разностный оператор L согласованно аппроксимирует соответствующий дифференциальный оператор A в точке x_i, если погрешность аппроксимации R_i удовлетворяет условию

$$R_i \equiv AU_i - LU_i \to 0 \text{ при } h \to 0. \tag{3.38}$$

Поскольку это утверждение справедливо только в точке x_i, то с практической точки зрения наиболее приемлемо более общее определение.

Определение. *Разностный оператор* L согласованно аппроксимирует дифференциальный оператор A, если $\|R\| \to 0$ при $h \to 0$, где $\|R\|$ — норма вектора R, содержащего элементы R_i (см. приложение A).

Указанное определение было использовано многими авторами, в том числе Рихтмайером и Мортоном (1967) и Блюмом (1972). Если рассматриваются только целочисленные величины порядка аппроксимации, то это определение равносильно:

L согласован, если $R_i = O(h^p)$ при $p > 1$

и

L несогласован, если $R_i = O(h^0)$.

Отметим, что согласованность — это свойство разностного оператора, а не решения.

3.2.3.2. Сходимость

Пусть e_i — погрешность приближенного решения в узле i

$$e_i = U_i - u_i. \tag{3.39}$$

Ее называют погрешностью решения или глобальной погрешностью дискретизации.

Определение. *Разностный оператор* L *сходится к дифференциальному оператору* A, *если* $\|e\| \to 0$ *при* $h \to 0$.

С практической точки зрения погрешности e_i важнее, чем R_i. Для иллюстрации их связи оценим $LU_i - Lu_i$ для эллиптической краевой задачи — см. уравнение (3.5). На основании определения (3.6)

$$LU_i = -R_i, \tag{3.40}$$

поскольку $AU_i = 0$. Конечно-разностный оператор для данной задачи задается соотношением

$$Lu_i \equiv \frac{1}{h^2}\Delta^2 u_i - q_i = 0. \tag{3.41}$$

Вычитая (3.41) из (3.40) и используя определение (3.39), получим

$$\begin{aligned} LU_i - Lu_i &= -R_i \\ &= \frac{1}{h^2}\Delta^2 U_i - \frac{1}{h^2}\Delta^2 u_i - q(x_i) + \\ &= \frac{1}{h^2}\Delta^2 e_i \end{aligned}$$

или

$$\frac{1}{h^2}\Delta^2 e_i + R_i = 0. \tag{3.42}$$

При выводе уравнения (3.42) учитывали, что Δ^2 — линейный оператор. Уравнение (3.42) дает представление о важной взаимосвязи между локальными погрешностями и погрешностями решения.

Погрешности решения e_i *соответствуют погрешностям разностного уравнения для* u_i, *если источник* q_i *заменить на локальную погрешность* R_i.

В примере, рассмотренном выше, видно, что $\|e\| \to 0$ при $\|R\| \to 0$. В этом случае согласованность операторов обеспечивает сходимость решения. Более того, если $\|R\| = O(h^p)$, то решение уравнения (3.42) будет стремиться к нулю, как $O(h^p)$ (см. упражнение 3.3). Данный результат справедлив не всегда, поскольку порядок сходимости e зависит также от аппроксимации граничных условий. Дополнительные сложности также возникают при рассмотрении нестационарных задач.

Сходимость явного метода. Рассмотрим параболическое уравнение (3.28)

$$AU \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial t} - q = 0.$$

Аппроксимация прямой разностью для данной задачи представлена уравнением (3.30)

$$\begin{aligned} \Delta t L u_i = \alpha \Delta^2 u^n{}_i - (u_i{}^{n+1} - u^n{}_i) - q_i \Delta t = 0, \\ i = 1, 2, \ldots, N, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{3.43}$$

Поскольку

$$R_i = AU^n{}_i - LU^n{}_i = O(h^2) + O(\Delta t),$$

то L согласован с A. Как и для уравнения (3.41), находим, что погрешности $e^n{}_i$ удовлетворяют соотношению

$$\alpha\Delta^2 e^n{}_i - (e_i{}^{n+1} - e^n{}_i) = -\Delta t R_i. \tag{3.44}$$

Следовательно, погрешность e_i^{n+1}, вызываемая погрешностями $e^n{}_i$ на предыдущем слое с учетом $R^n{}_i$, определяется как

$$e_i{}^{n+1} = \alpha e^n{}_{i+1} + (1-2\alpha) e^n{}_i + \alpha e^n{}_{i-1} + \Delta t R_i. \tag{3.45}$$

Определим увеличение погрешности, введенной при $t=0$. Обозначим

$$E_n = \max_i | e^n{}_i |,$$

$$M = \max_{i,\,n} | R^n{}_i |.$$

Применяя неравенство треугольника к уравнению (3.45), получим

$$E_{n+1} \leq 2\alpha E_n + | (1-2\alpha) E_n | + \Delta t M. \tag{3.46}$$

Вначале рассмотрим случай, когда $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Поскольку $(1-2\alpha)$ положительно, то уравнение (3.46) сводится к

$$E_{n+1} \leq E_n + \Delta t M.$$

Последовательное применение указанного выше соотношения дает

$$E_n \leq E_0 + n\Delta t M = E_0 + t_n M, \tag{3.47}$$

где E_0 — максимальная погрешность, полученная в результате аппроксимации начальных условий. Рассматривая уравнение (3.47), можно сделать два важных вывода.

1. Если $E_0=0$, то $E_n \to 0$, когда временной шаг и размер сетки стремятся к нулю. Это доказывает сходимость явного метода для $\leqslant \frac{1}{2}$.

2. Если $E_0 \neq 0$, то поскольку M ограничено, погрешность на любом шаге n тоже ограничена. Мы вернемся к этому при обсуждении устойчивости конечно-разностных схем.

До сих пор рассматривался случай, когда $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Теперь рассмотрим случай, когда $\alpha > \frac{1}{2}$. Из уравнения (3.46) получим

$$E_{n+1} \leq (4\alpha - 1) E_n + \Delta t M = \beta E_n + \Delta t M, \tag{3.48}$$

где $\beta = 4\alpha - 1 > 1$.

Используя указанное соотношение, получим

$$E_n \leq \beta^n E_0 + \Delta t M \sum_{l=0}^{n-1} \beta^l. \tag{3.49}$$

Следует упомянуть о двух важных особенностях, касающихся уравнения (3.49).

1. Если $E_0=0$, то второй член уравнения (3.49) может не стремиться к нулю, когда временной шаг и шаг сетки стремятся к нулю.

2. Если $E_0\neq 0$, то ясно, что начальные погрешности могут (на практике это так и происходит) экспоненциально расти с увеличением числа временных шагов. Эта особенность более подробно рассматривается при обсуждении вопроса устойчивости. Здесь рассматривалась *согласованная, но условно сходящаяся схема.*

Сходимость неявного метода. Анализ, подобный приведенному выше для явного метода, показывает, что для аппроксимации $\partial U/\partial t$ в уравнении (3.31) обратной разностью

$$\|e\|\to 0 \text{ при } \Delta t,\ h\to 0$$

независимо от значения α. Это будет показано при анализе устойчивости в упражнениях 3.4 и 3.5.

3.2.3.3. Устойчивость решения

Это понятие важно для нестационарных задач. Общее определение устойчивости можно сформулировать следующим образом. Определение. *Численный алгоритм считается устойчивым, если произвольные погрешности, возникшие на некоторой стадии вычислений, при последующих расчетах не возрастают.*

В более общем смысле устойчивость означает, что машинное решение непрерывно зависит от начальных и граничных условий. В литературе существует несколько определений, они обсуждаются в работах Рихтмайера и Мортона (1967), Форсайта и Вазова (1960).

Для эллиптических задач аппроксимация (включая аппроксимацию граничных условий) всегда будет устойчива, если она согласованна и если метод, применяемый для решения матричного уравнения, устойчив относительно ошибок округления.

Этого нельзя сказать о параболических уравнениях, которые аппроксимируются на последовательности временных шагов. Любая погрешность, возникшая на некотором временном слое n, будет распространяться во времени и влиять на решение на всех шагах $m>n$. Это справедливо не только для ошибок округления, но и для погрешностей дискретизации. Следовательно, устойчивость необходима всегда при получении решений, имеющих смысл.

При отсутствии устойчивости численной схемы можно наблюдать возрастание погрешностей двух видов.

1. *Ошибки округления.* При решении конечно-разностных уравнений на машинах с конечной длиной слова, вычисленные значения машинного решения, обозначенные как u^*_i, будут отличаться от u_i. Разность $u^*_i-u_i$, называемая «отклонением», вызывается ошибками округления, а ее величина зависит также от длины машинного слова и организации вычислений.

2. *Погрешности дискретизации.* Если, например, для численного решения нужно аппроксимировать начальные условия задачи, то при этом возникают некоторые погрешности $E_0 \neq 0$. При рассмотрении сходимости было показано, что влияние $E_0 \neq 0$ увеличивается со временем, если согласованная численная схема не сходится. Численную схему (хотя это ранее явно не упоминалось), для которой погрешности, вызванные E_0, растут во времени, называют *неустойчивой.*

Из сказанного ясно, что устойчивость и сходимость — понятия взаимосвязанные. Это соответствует теореме эквивалентности Лакса:

Для согласованной аппроксимации устойчивость является необходимым и достаточным условием сходимости (Рихтмайер и Мортон, 1967).

Эта теорема имеет огромное практическое значение, поскольку для исследования устойчивости существуют относительно простые методы, тогда как для практических задач сходимость доказать обычно достаточно сложно.

Однако теорема распространяется только для «надлежащим образом» поставленных задач (Рихтмайер и Мортон, 1967, с. 39). Некоторые нелинейные задачи могут не удовлетворять этому условию, при этом сходимость в таких случаях не обеспечивается устойчивостью. Пример, иллюстрирующий это положение, приводится в разделе 5.5.1, где согласованная устойчивая аппроксимация гиперболического уравнения не сходится к истинному решению.

Теперь должно быть ясно, что согласованность схемы легко установить. Рассмотрим два метода исследования устойчивости.

Метод рядов Фурье. Решение начальной задачи формально можно записать в виде ряда Фурье (Рихтмайер и Мортон, 1967). Аналогичным образом решение разностных уравнений можно записать в виде дискретного ряда Фурье

$$u^n_i = \sum_m A_m u_i^{n\,(m)}, \quad m = 1, 2, \ldots, N, \tag{3.50}$$

где

$$u_i^{n\,(m)} = \xi_m^n \, e^{\sqrt{-1}ihm}, \tag{3.51}$$

а коэффициенты A_m определяются начальными и граничными условиями. Рост компонента $u_i^{n\,(m)}$ определяется коэффициентом ξ_m, который называется *коэффициентом усиления.* Разностное уравнение будет устойчиво, если

$$|\xi_m| < 1. \tag{3.52}$$

Коэффициент усиления получен при подстановке (3.51) в разностное уравнение и решении последнего относительно ξ_m. Например,

для уравнения явного метода (3.43) после операций, показанных в упражнении 3.4, получим

$$\xi_m = 1 - 4\alpha \sin^2\left(\frac{mh}{2}\right). \tag{3.53}$$

При $|\xi_m| < 1$ для любых m снова получаем условие $\alpha < \frac{1}{2}$.

Матричный метод. Поскольку в методе, использующем представление решения в виде ряда Фурье, рассматривается только одно конкретное решение, то в нем не учитываются граничные условия. В противоположность этому при матричном методе имеют дело с полным решением, включающим граничные условия.

Каждую двухслойную разностную схему можно записать в матричной форме

$$u^{n+1} = Bu^n + k, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.54}$$

например, для явного метода — см. уравнение (3.30) $B = (I - \alpha E)$, для неявного — см. уравнение (3.32) $B = (\alpha E + I)^{-1}$. Введем погрешности в начальный вектор u^0, тогда возмущенный начальный вектор $u^{*,0} = u^0 + \varepsilon^0$, при этом предполагаем, что остальные вычисления выполняются без ошибок. Тогда решение на временном слое n будет иметь вид $u^{*,n} = u^n + \varepsilon^n$. При подстановке в (3.56) получим $\varepsilon^{n+1} = B\varepsilon^n$, а при последовательной редукции временного слоя

$$\varepsilon^n = (B)^n \varepsilon^0. \tag{3.55}$$

Для устойчивости уравнения требуется ограниченность $\|\varepsilon^n\|$. Достаточным условием этого является $\|B\| < 1$ при норме матрицы, согласованной с нормой вектора. Используя свойства согласованных норм, рассмотренных в приложении А, имеем:

$$\|\varepsilon^n\| = \|B^n \varepsilon^0\| \leq \|B^n\| \, \|\varepsilon^0\| = \|B\|^n \|\varepsilon^0\|$$

$$\|\varepsilon^n\| \to 0 \text{ при } n \to \infty, \text{ если } \|B\| < 1.$$

В частности, если выбрать евклидову норму ε, то норме B соответствует спектральная норма (см. приложение А). Если B симметрична (что часто бывает), то ее спектральная норма равна спектральному радиусу матрицы

$$\|B\| = \rho(B) = \max_i |\lambda_i|,$$

где λ_i — собственные значения B.

Из этого следует:

для симметричной матрицы B разностная схема устойчива, если

$$|\lambda_{\max}| < 1, \tag{3.56}$$

где $\lambda_{\max}$ — наибольшее собственное значение B.

Более общие результаты можно найти в работах Варги (1962), Фаддеева и Фаддеевой (1963), Рихтмайера и Мортона (1967) (см. приложение А). В общем, справедливо следующее условие.

Для устойчивости разностной схемы необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения B *по модулю были бы меньше*

единицы. Кроме того, достаточно, чтобы произвольная норма $\mathbf{B}$ *была меньше единицы.*

В простых случаях уравнения вида (3.30) и (3.32) собственные значения матрицы можно получить явно, при этом они оказываются равными значениям коэффициентов усиления ξ по методу Фурье (упражнение 3.5).

3.3. ДРУГИЕ ИЗБРАННЫЕ МЕТОДЫ

В последнем разделе были рассмотрены два основных метода получения приближенного решения уравнения (3.25).

В существующей литературе описываются многие другие методы. Тем не менее здесь мы не намерены давать полный анализ всех имеющихся методов, однако представить краткое описание некоторых считаем целесообразным.

3.3.1. Явные методы

Пример явного метода уже был дан при рассмотрении уравнения (3.30). Такие методы предпочтительнее, поскольку в данном случае не требуется решения системы уравнений. Однако они условно устойчивы (в зависимости от отношения $\alpha=\Delta t/h^2$, характеризующего размер ячейки). Рассмотрим некоторые другие явные методы, о которых сообщается в литературе.

Один из самых первых методов предложен Ричардсоном (1910):

$$2\alpha\Delta^2 u_i^n = u_i^{n+1} - u_i^{n-1}, \tag{3.57}$$

Хотя метод и имеет точность порядка $O(\Delta t^2)$, он неустойчив для всех значений α. Дюфор и Франкел (1953) модифицировали уравнение (3.57), заменив член $2u^n{}_i$ в левой части на $u_i^{n+1}+u_i^{n-1}$. В результате получим

$$2\alpha(u^n{}_{i-1} - u_{in-1} + u^n{}_{i+1} - u_i^{n+1}) = u_i^{n+1} - u_i^{n-1}. \tag{3.58}$$

Такая модификация приводит к получению безусловно устойчивого метода. Однако поскольку пространственные производные оцениваются величинами u на трех различных временных слоях, то такая аппроксимация не всегда согласованна (см. упражнение 3.6). Уравнения (3.57) и (3.58) трехслойные (включают значения u на t^{n-1}, t^n и t^{n+1} слоях). Вначале для их решения требуется знать значения их на первых двух слоях. Если u_0 — начальное условие, то u^1 следует определять каким-либо другим методом. Это усложняет программирование, а также может сказаться на точности.

Безусловно устойчивые явные методы, не требующие начальных дополнительных величин, представлялись Саульевым (1964) и с небольшими изменениями Ларкином (1964) и Баракатом и Кларком (1966). По методу Саульева два уравнения поочередно решаются соответственно на четных и нечетных временных шагах:

$$\alpha(u_{i-1}^{n+1} - u_i^{n+1} + u_{i+1}^n - u_i^n) = u_i^{n+1} - u_i^n \quad n=0,\ 2,\ 4,\ \ldots, \tag{3.59a}$$

$$\alpha(u_{i-1}^n - u_i^n + u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}) = u_i^{n+1} - u_i^n \quad n=1,\ 3,\ 5,\ \ldots. \tag{3.59b}$$

Эти уравнения можно решить явно, если уравнение (3.59a) рассматривать в порядке возрастания, а (3.59b) — в порядке убывания номеров i. Метод безусловно устойчив, но является согласованным только, если $\alpha \to 0$ при $\Delta t \to 0$ (подобно методу Дюфора и Франкела). Если направление обхода (последовательности i) не меняется, то при использовании метода Саульева происходит накопление ошибок на конце линии обхода. Следовательно, если на каждом временном шаге выполнять два «встречных» обхода и результаты осреднять, то следует ожидать дальнейшего улучшения решения. Указанная модификация метода выполнена Ларкином (1964) и Баракатом и Кларком (1966).

$$\alpha (v_{i-1} - v_i + u^n{}_{i+1} - u^n{}_i) = v_i - u^n{}_i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, N, \tag{3.60a}$$

$$\alpha (u^n{}_{i-1} - u^n{}_i + w_{i+1} - w_i) = w_i - u^n{}_i, \quad i = N, N-1, \ldots, 1, \tag{3.60b}$$

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(v_i + w_i). \tag{3.60c}$$

Другая группа явных методов, которую Гурли (1970) и Гурли и Макгир (1971) назвали методами, использующими принцип «игры в классики», также имеет в своей основе идею, предложенную Саульевым. В простейшей форме алгоритм «игры в классики» используется при первом подсчете величин $u_i{}^{n+1}$ явным методом по формуле (3.30) для всех нечетных i и последующем решении неявным методом для четных i:

$$\alpha (u^n{}_{i-1} - 2u^n{}_i + u^n{}_{i+1}) = u_i^{n+1} - u^n{}_i, \quad i = 1, 3, 5, \ldots, \tag{3.61a}$$

$$\alpha (u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}) = u_i^{n+1} - u^n{}_i, \quad i = 2, 4, 6, \ldots \tag{3.61b}$$

После решения уравнения (3.61a) становятся известными значения u_{i-1}^{n+1} и u_{i+1}^{n+1} во втором уравнении и уравнение (3.61b) также решается явным методом. Метод безусловно устойчив, и его порядок точности $O(\Delta x^2 + \Delta t^2)$. В более общей постановке методы, основанные на принципе «игра в классики», могут быть представлены как разновидности метода Кранка—Николсона.

3.3.2. Другие неявные методы

Классический неявный метод — см. уравнение (3.31), имеет точность порядка $O(\Delta t)$.

В настоящем разделе мы рассмотрим некоторые другие методы, требующие решения совместных уравнений.

Метод Кранка — Николсона. Схема Кранка—Николсона — это метод второго порядка точности по времени:

$$\frac{1}{2}\alpha (\Delta^2 u^n{}_i + \Delta^2 u_i^{n+1}) = u_i^{n+1} - u^n{}_i. \tag{3.62}$$

Этот метод можно обобщить, присваивая различные весовые коэффициенты для явных и неявных составляющих левой части уравне-

ния. Если θ — весовой коэффициент $(0<\theta<1)$, то в обобщенном виде запишем

$$\theta\alpha\Delta^2 u^n{}_i+(1-\theta)\,\alpha\Delta^2 u_i{}^{n+1}=u_i{}^{n+1}-u^n{}_i. \qquad (3.63)$$

Обычный способ получения уравнения (3.62) заключается в аппроксимации $\partial^2 u/\partial x^2$ на временном слое $n+1/2$, где $u^{n+1}-u^n$ — «центральная» разность для $\partial u/\partial t$. Рассмотрим другой подход, который показывает эквивалентность метода Кранка — Николсона и явно-неявного метода Саульева (1964). Суть метода Суальева заключается в поочередном использовании явных и неявных шагов:

$$\alpha\Delta^2 u^n{}_i=u_i{}^{n+1}-u^n{}_i,\ n=0,\ 2,\ 4,\ \ldots, \qquad (3.64a)$$

$$\alpha\Delta^2 u_i{}^{n+2}=u_i{}^{n+2}-u_i{}^{n+1},\ n=0,\ 2,\ 4,\ \ldots \qquad (3.64b)$$

Складывая эти два уравнения, получим

$$\alpha(\Delta^2 u^n{}_i+\Delta^2 u_i{}^{n+2})=u_i{}^{n+2}-u^n{}_i. \qquad (3.65)$$

Указанное уравнение фактически является уравнением Кранка — Николсона с временным шагом $2\Delta t$. Временной слой $(n+1)$ соответствует слою $n+1/2$, который в формуле Кранка — Николсона представлен неявно. Следовательно, формулу Кранка—Николсона с временным шагом Δt можно получить, если за явным шагом $\Delta t/2$ следует неявный $\Delta t/2$. Для получения обобщенного уравнения (3.63) требуется использовать (3.64a) с временным шагом $\theta\Delta t$ и (3.64b) с временным шагом $(1-\theta)\Delta t$.

Из (3.64) следует, что метод Кранка — Николсона —метод типа предиктор-корректор, и для него необходим другой способ программирования.

Обобщенный метод безусловно устойчив, если $0<\theta<1$, и в общем случае имеет порядок точности $O(h^2+\Delta t)$. Порядок точности метода становится $O(h^2+\Delta t^2)$ для $\theta=1/2$ и $O(h^4+\Delta t^2)$ для $\theta=1/2-h^2/12\Delta t$ (Крендалл, 1955).

Некоторые трудности возникают при использовании метода Кранка—Николсона с граничными условиями, содержащими производные (Смит, 1965; Кист и Митчел, 1966).

Пример многослойного неявного метода — схема, полученная Рихтмайером и Мортоном (1967, с. 190) и Лисом (1966)

$$\alpha\Delta^2 u_i^{n+1}=\frac{3}{2}(u_i^{n+1}-u^n{}_i)-\frac{1}{2}(u^n{}_i-u_i^{n-1}),\ n=1,\ 2,\ldots \qquad (3.66)$$

Взвешивание в данном случае проводится в правой части уравнения. Схема безусловно устойчива, имеет точность $O(h^2+\Delta t^2)$, но нуждается в дополнительных значениях для начала счета (см. упражнение 3.7).

Рихтмайер и Мортон (1967) представили обзор нескольких других многослойных разностных схем.

3.3.3 Методы с использованием системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ODE-методы)

Из раздела 3.2.2 следует, что при дискретизации пространственных производных образуется система обыкновенных дифференциальных уравнений — см. (3.29). Для их решения (по крайней

мере, в принципе) можно применять любой из многочисленных методов, разработанных для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Фактически все методы решения уравнений, рассмотренные выше, являются развитием методов для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. В данном разделе рассмотрим некоторые старые методы в новой постановке, а также несколько новых.

Рассмотрим, например, краевую задачу

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \tag{3.67}$$

При дискретизации правой части получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_i(t)}{dt}=\frac{1}{h^2}\Delta^2 u_i(t) \quad i=1, 2, \ldots, N, \tag{3.68}$$

которую также можно записать в матричной форме:

$$\frac{du}{dt}=-\frac{1}{h^2}Eu(t). \tag{3.69}$$

Матрица E задана уравнением (3.27).

В литературе по обыкновенным дифференциальным уравнениям решаемая система уравнений обычно записывается как

$$\frac{du}{dt}=f(u, t). \tag{3.70}$$

Следовательно, для нашего примера

$$f=-\frac{1}{h^2}Eu(t). \tag{3.71}$$

Все уравнения ODE-методов могут рассматриваться как аппроксимации

$$u^{n+1}=u^n+\int_n^{n+1} f\,dt.$$

3.3.3.1. Метод Эйлера

Метод Эйлера (Генричи, 1962) для решения уравнения (3.70) — это явный метод, описываемый формулой

$$u_i^{n+1}=u^n{}_i+\Delta t f_i(u^n, t^n)=u^n{}_i+\alpha\Delta^2 u_i(t^n), \quad i=1, 2, \ldots, N \tag{3.72}$$

или в матричной форме

$$u^{n+1}=u^n-\alpha Eu^n=(I-\alpha E)u^n, \tag{3.73}$$

что в точности совпадает с классическим определением явного метода, данным ранее посредством (3.30).

3.3.3.2. Модифицированный метод Эйлера

Очень распространенный явный метод второго порядка по Δt можно представить в виде следующего двухшагового процесса.

1. Начальный прогноз решения по методу Эйлера

$$u_i^{*,n+1}=u^n{}_i+\Delta t f_i(u^n,\ t^n),\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ N. \tag{3.74}$$

2. Использование прогнозных величин для отыскания решения на $n+1$ слое посредством

$$u_i^{n+1}=u^n{}_i+\frac{\Delta t}{2}[f_i(u^n,\ t^n)+f_i(u^{*,\,n+1},\ t^{n+1})],$$

$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ N. \tag{3.75}$$

В матричной форме формулу метода можно записать следующим образом:

$$u^{n+1}=\frac{1}{2}[\mathrm{I}+(\mathrm{I}-\alpha\mathrm{E})^2]\,u^n. \tag{3.76}$$

Устойчивость метода зависит от спектрального радиуса матрицы в правой части. В литературе данный метод имеет много вариантов. Можно обобщить их как метод второго порядка типа Рунге—Кутта (Генричи, 1962):

$$u^*{}_i=u^n{}_i+\frac{\Delta t}{2b}f(u^n,\ t^n)\,|\,t^*=t^n+\frac{\Delta t}{2b}, \tag{3.77}$$

$$u_i{}^{n+1}=u^n{}_i+\Delta t[(1-b)f(u^n,\ t^n)+bf(u^*,\ t^*)]. \tag{3.78}$$

При $b=0$ указанная схема сводится к методу Эйлера. Для $b\neq 0$ схема имеет второй порядок. Например, для $b=1/2$ получим модифицированный метод Эйлера, рассмотренный ранее.

3.3.3.3. Классический метод Рунге — Кутта

Классическим методом Рунге—Кутта (Генричи, 1962) называется явный метод четвертого порядка для уравнения (3.70):

$$u^{n+1}=u^n+\frac{\Delta t}{6}(a_1+2a_2+2a_3+a_4), \tag{3.79}$$

где

$$a_1=f(u^n,\ t^n),$$

$$a_2=f\left(u^n+u^n+\frac{1}{2}\Delta t a_1,\ t^n+\frac{1}{2}\Delta t\right),$$

$$a_3=f\left(u^n+\frac{1}{2}\Delta t a_2,\ t^n+\frac{1}{2}\Delta t\right),$$

$$a_4=f(u^n+\Delta t a_3,\ t^n+\Delta t).$$

Матричная форма уравнений данного метода для линейного случая рассматривается в упражнении 3.8. Этот метод и модифицированный метод Эйлера принадлежат к классу методов, известных под названием «явные методы Рунге—Кутта». Как и следовало ожидать, эти методы условно устойчивы.

3.3.3.4. Неявные методы Рунге — Кутта

Явные методы Рунге — Кутта, рассмотренные выше, позволяют получить для производной по времени аппроксимации высших порядков, но их недостатком является условная устойчивость. Для нелинейных задач более желательно использовать безусловно устойчивые неявные методы Рунге — Кутта. В целом класс таких методов рассмотрен Гиром (1971). Здесь будут представлены только несколько специально выбранных методов.

Методы второго порядка. Линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{dt}=f(u)=Au \tag{3.80}$$

можно решать по следующей формуле:

$$u^{n+1}=u^n+\frac{1}{2}(a_1+a_2), \tag{3.81}$$

где

$$a_1=\Delta t f(u^n)=\Delta t A u^n, \tag{3.82}$$

$$a_2=\Delta t f(u^{n+1})=\Delta t A u^{n+1}. \tag{3.83}$$

Подставляя уравнения (3.82) и (3.83) в уравнение (3.80), приходим к методу Кранка—Николсона. Указанную схему можно применять также для нелинейных задач.

Другой метод второго порядка дан Розенброком (1963):

$$a_1=\Delta t(f(u^n)+bJ^n a_1), \tag{3.84}$$

$$a_2=\Delta t(f(u^n+\beta a_1)+bJ^n a_2),$$

$$u^{n+1}=u^n+a_2. \tag{3.85}$$

Здесь J — якобиан функции f с элементами $(\partial f_i/\partial u_j)$, а

$$b=1-\frac{\sqrt{2}}{2}=0{,}29289, \tag{3.86}$$

$$\beta=(\sqrt{2}-1)/2=0{,}207106. \tag{3.87}$$

Например, если данная процедура применена для линейной задачи (3.80), то

$$J=A, \tag{3.88}$$

а метод сводится к следующей двухэтапной процедуре:

$$\left(A-\frac{1}{b\Delta t}I\right)a_1=-\frac{1}{b}Au^n, \tag{3.89}$$

$$\left(A-\frac{1}{b\Delta t}I\right)a_2=-\frac{1}{b}Au^n-\frac{\beta}{b}Aa_1. \tag{3.90}$$

Процедура требует чуть больше затрат, чем при методе Кранка—Николсона, если можно хранить матрицу, обратную $(A-(1/b\Delta t)I)$.

Метод третьего порядка. Пример неявного метода Рунге—Кутта третьего порядка — метод, описанный в работе Калахана (1968),

$$u^{n+1}=u^n+\frac{1}{4}a_1+\frac{3}{4}a_2, \tag{3.91}$$

где

$$a_1=\Delta t[f(u^n)+\beta J(u^n)a_1], \tag{3.92}$$

$$a_2=\Delta t[f(u^n+\gamma a_1)+\beta J(u^n)a_2], \tag{3.93}$$

$$\beta=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}/3)=0{,}78867, \tag{3.94}$$

$$\gamma=-\frac{2}{\sqrt{3}}=-1{,}154700. \tag{3.95}$$

Получение матричной формы уравнений данного метода предоставляется читателю в качестве упражнения.

Подробный разбор методов численных решений обыкновенных дифференциальных уравнений, включая «жесткие» уравнения, дан Лапидусом и Зайнфельдом (1971) и Гиром (1971). Методы Рунге—Кутта и их применение для нелинейных задач моделирования поведения пластовых систем разбираются в работе Прайса и др. (1978).

3.3.4. Сравнение методов

Вопрос о том, какой из методов наилучший, не имеет однозначного ответа. Выбор наилучшего метода большей частью диктуется свойствами задачи, особенно для нелинейных задач.

В целом при явных методах требуется меньше затрат на временном шаге, чем при неявных, однако сам временной шаг для явных методов ограничен по соображениям устойчивости и точности. При переходе от явных к неявным методам объем вычислений на одном временном шаге возрастает, устойчивость решения также возрастает. Это в большей мере проявляется при решении многомерных нелинейных задач. Для решения линейных задач и задач со слабо выраженной нелинейностью особенно популярны методы Кранка—Николсона второго порядка. Однако для сильно нелинейных задач наличие явного компонента в методе Кранка—Николсона может ограничить его устойчивость.

С точки зрения программирования явные методы значительно проще и их требования к объему занимаемой памяти умеренны. Во всех неявных методах для решения системы линейных уравнений используется определенный алгоритм и нужен дополнительный объем памяти для выполнения вычислений. Эти вопросы подробно обсуждаются в гл. 4, 6 и 8.

Подход с использованием аппарата для обыкновенных дифференциальных уравнений (иногда его называют «методом прямых») кажется привлекательным по нескольким причинам. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно хорошо разработана, имеется большое число методов, многие из которых при-

годны для решения нелинейных задач. Некоторые из методов более высокого порядка — такие, как метод Рунге—Кутта, требуют бóльших затрат машинного времени на один временной шаг, чем методы более низкого порядка точности, являющиеся более простыми. Чтобы выдержать конкуренцию с методами более низкого порядка, необходимо для любой заданной точности использовать соответственно бóльшие временные шаги. Такие временные шаги могут не удовлетворять ограничениям, налагаемым на временной шаг из соображений устойчивости. Кроме того, погрешность аппроксимации дифференциальных уравнений в частных производных по пространству не зависит от вида аппроксимации du/dt. В том случае, если погрешность аппроксимации по пространству доминирует, увеличение точности аппроксимации по времени за счет использования методов высшего порядка не является оправданным. Для выполнения адекватной аппроксимации по пространству обычно используют достаточно большое число обыкновенных дифференциальных уравнений. Некоторые ODE-методы, пригодные для использования в случае одного уравнения, оказываются неприемлемыми для больших систем (например, методы типа предиктор-корректор с итерацией в корректоре).

В работе Уоллиса и Азиза (1975), в которой рассматривается задача распространения очага загрязнения в атмосфере, продемонстрировано превосходство ODE-методов при определенных условиях. Учитывая повышенные требования к точности решения, задачи подобного типа необходимо решать, используя малые временные шаги (меньшие, чем предел устойчивости). В этом случае предпочтительно использовать ODE-методы. Другое преимущество этих методов — существенно более простая автоматизация решения различных задач, чем в методах, разработанных для решения дифференциальных уравнений в частных производных (PDE-методы). Некоторые универсальные пакеты программ решения систем дифференциальных уравнений в частных производных составлены на основе ODE-методов (см. Карвер, 1973; Карденас, 1973). Использование таких пакетов обычно облегчает работу по постановке задачи для машины, однако это достигается за счет увеличения машинного времени и использованной памяти.

По-видимому, для тех случаев, когда одни и те же дифференциальные уравнения в частных производных должны использоваться для решения различных задач, наибольший эффект достигается, если при разработке моделирующих программ учитывать особенности задачи.

3.4. ТИПЫ СЕТОК И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Два вопроса, которые излагаются в данном разделе, взаимосвязаны, поскольку используемая сетка определяет форму граничных условий. Вначале покажем два способа построения сеток: 1) с распределенными узлами и блочно-централизованных и 2) связанные с ними граничные условия для случая равномерного раз-

биения области, а затем перейдем к рассмотрению неравномерных сеток. Введем некоторые определения. Независимо от способа дискретизации или вида граничных условий N будет соответствовать числу конечно-разностных уравнений, которые надо решить (т. е. числу неизвестных на заданном временном шаге).

Множество значений i зависит от вида граничных условий и способа аппроксимации и может включать значения от 0 до $N+1$. Указанные замечания будут подробнее истолкованы при обсуждении граничных условий.

3.4.1. Два способа построения сетки

При заданной длине пласта L и постоянном поперечном сечении A сетку из M узлов можно построить двумя способами.

1. Поместить первый и последний узлы сетки в точки $x=0$ и $x=L$ соответственно, а остальные расположить равномерно между ними (рис. 3.3 для $M=5$). Для определения объемов блоков, связанных с каждым узлом, поместим границы блоков (пунктирные линии на рис. 3.3) посередине между узлами. Таким образом, $\Delta x=L/M-1$, а объемы $V=\Delta xA$, за исключением точек на границах, для которых объемы равны $V/2$. Такой метод построения сетки называют методом «сетки с распределенными узлами» (Сеттари и Азиз, 1972).

2. Можно поделить отрезок L на M равных блоков и затем разместить узлы в центрах этих блоков, как показано на рис. 3.4. В данном случае сами блоки имеют меньшие размеры, чем в предыдущем случае, поскольку $\Delta x=L/M$. Кроме того, в этом случае отсутствуют узлы на границах. Этот способ широко применяют инженеры-нефтяники, которые обычно называют такую сетку «блочно-центрированной».

Для равномерных сеток различие между двумя видами сеток заключается в способе представления граничных условий. Однако анализ покажет, что в случае произвольного разбиения пространства сетка с распределенными узлами более точна, чем блочно-центрированная. Основной принцип построения сетки заключается в том, что границы блоков должны размещаться между узлами, а не наоборот, поскольку дифференциальное уравнение аппроксимируется в узлах, а не на границах. Подробное обсуждение этих положений проводится в разделе 3.4.3.

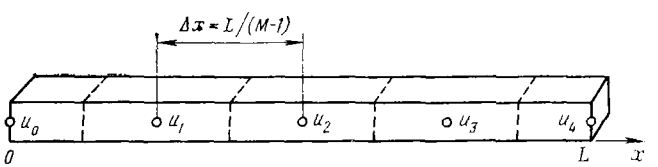
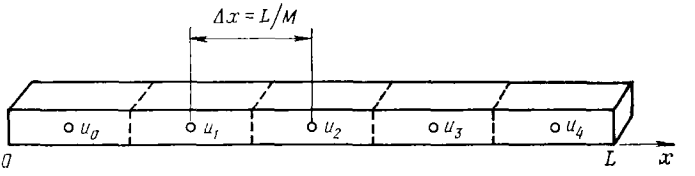


Рис. 3.3. Сетка с распределенными узлами



Блочно-центрированная сетка

3.4.2. Граничные условия

В процессе моделирования поведения нефтяного пласта его взаимодействие с окружающей областью отражается условиями, заданными на границах. Необходимо, чтобы граничные условия были сформулированы и аппроксимировались в соответствии с взаимодействием пласта с его окружением. В данном разделе будут рассмотрены наиболее распространенные виды граничных условий и методы их аппроксимации.

3.4.2.1. Граничные условия первого рода

При условиях первого рода (условия Дирихле) задают значение U на границе области. При моделировании нефтяных пластов учитывают условия Дирихле в том случае, если задается давление на границе пласта или в скважине.

Граничное условие при $x=0$ для нестационарного уравнения (3.28)

$$U(0,\ t)=f_1(t). \tag{3.96}$$

Конечно-разностное граничное условие для сетки с распределенными узлами

$$u^n{}_0=f_1(t^n) \qquad n=0,\ 1. \tag{3.97}$$

Уравнение (3.97) используется в том случае, когда нужно учитывать значение $u^n{}_0$, а для первого узла сетки это уравнение решать не обязательно. Поэтому первое неизвестное u_1 нужно определять во втором узле сетки (рис. 3.5).

Для блочно-центрированной сетки ближайшая точка расположена на расстоянии $\Delta x/2$ от границы и значение u_0 должно экстраполироваться в эту точку. В простейшем случае (рис. 3.6) аппроксимация первого порядка:

$$u^n{}_0=f_1(t^n)+O(\Delta x). \tag{3.98}$$

Аппроксимация второго порядка (рис. 3.7):

$$\frac{1}{2}\,(3u^n{}_1-u^n{}_2)=f_1(t^n)+O(\Delta x^2). \tag{3.99}$$

Недостатком данного способа учета граничных условий является то, что уравнение (3.99) должно быть включено в систему решаемых разностных уравнений. Поэтому блочно-центрированную сетку иногда модифицируют, используя полублоки на границе моделируемой области (фактически на границах блочно-центрированная сетка преобразуется в сетку с распределенными узлами).

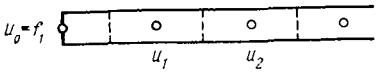


Рис. 3.5. Граничное условие Дирихле для сетки с распределенными узлами

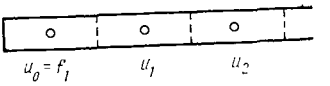
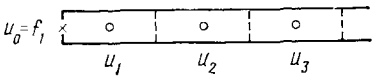


Рис. 3.6. Граничное условие Дирихле для блочно-центрированной сетки

3.4.2.2. Граничные условия второго рода

Для уравнения относительно давления условия второго рода (Неймана) пропорционально расходу через границу области. Они могут быть использованы при учете дебита скважины, известной

Рис. 3.7. Граничные условия Дирихле дл блочно-центрированной сетки



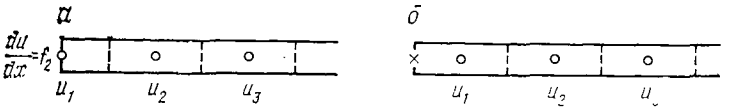


Рис. 3.8. Граничные условия Неймана для сеток с распределенными узлами (*а*) и блочно-центрированной (*б*)

величины притока из водоносного пласта или перетока из частей пласта, находящихся вне моделируемой области. Иногда (см. следующий раздел) поток флюида через границы выражается с помощью члена источника $q(x, t)$.

Пусть граничные условия при $x=0$ имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\mathrm{f}_2(t). \tag{3.100}$$

При использовании внутренних точек сетки производная аппроксимируется с помощью метода порядка $O(\Delta x)$ (рис. 3.8):

$$\mathrm{f}_2(i^n) \simeq (u^n{}_2 - u^n{}_1)/\Delta x. \tag{3.101}$$

Это грубая аппроксимация для производных на границе, в особенности для блочно-центрированной сетки.

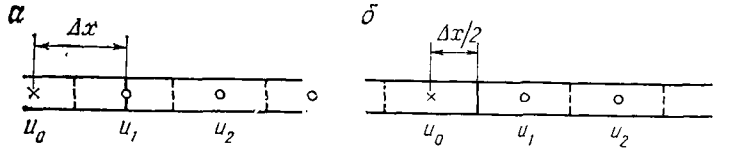


Рис. 3.9. К методу отражений

Широко распространенный метод отражения — метод второго порядка точности. В соответствии с рис. 3.9 введем вспомогательный узел за границей области. При этом u_0 неизвестно в данном узле. Рассмотрим сетку с распределенными узлами, показанную на рис. 3.9,*а*. Граничное условие для уравнения (3.100) дискретизируется с использованием центральной разности при $x=0$:

$$f_2(t^n)=(u^n{}_2-u^n{}_0)/2\Delta x+O(\Delta x^2). \qquad (3.102)$$

С помощью формулы (3.102) $u^n{}_0$ исключается из разностного уравнения, записанного для узла $x=0$.

Аналогичная процедура применима для блочно-центрированной сетки (см. рис. 3.9,*б*):

$$f_2(t^n)=(u^n{}_1-u^n{}_0)/\Delta x+O(\Delta x^2). \qquad (3.103)$$

Погрешность аппроксимации по уравнению (3.103) точно равна половине погрешности аппроксимации по уравнению (3.102). Однако в разделе 3.3.2 упоминалось, что эти погрешности учитываются в уравнении для погрешностей решения (3.42). По причинам, которые станут ясны после рассмотрения произвольной пространственной сетки, воздействие члена источника пропорционально объему граничного блока, который больше (ровно вдвое для одного и того же Δx) для блочно-центрированной сетки. Следовательно, погрешность из-за аппроксимации на границе должна быть почти одинаковой для обоих типов сетки.

3.4.2.3. Граничные условия третьего рода

Такие граничные условия возможны при комбинации двух предыдущих условий

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+bu=f_3(t). \qquad (3.104)$$

«Смешанные» граничные условия очень часто встречаются в литературе по теплопереносу. В задачах о течении жидкостей они возникают в следующей ситуации.

Рассмотрим пласт I, связанный в точке $x=0$ с другим пластом, среднее давление в котором $U_{II}(t)$ изменяется. Влияние второго пласта учитывается с помощью граничного условия на $x=0$ (рис. 3.10). Переток флюида из пласта II в I

$$q_{II\to I}(t)=b\,[U_{II}(t)-u_1], \qquad (3.105)$$

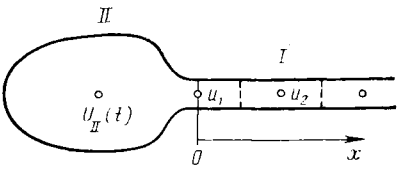
где b — константа пропорциональности, аналогичная коэффициенту продуктивности. С другой стороны, внутри пласта I при $x\to 0$ расход жидкости определяется в соответствии с законом Дарси

$$q_{II\to I}(t)=a\frac{\partial U}{\partial x}. \qquad (3.106)$$

При комбинации этих двух уравнений имеем граничное условие типа (3.104):

$$a\frac{\partial U}{\partial x}+bU=bU_{II}(t).$$

Рис. 3.10. Граничные условия третьего рода



Аналогичные уравнения получают при рассмотрении отдельных скважин и водоносных зон пластов (см. гл. 9). Для сетки с распределенными узлами уравнение (3.104) может быть аппроксимировано посредством

$$a[u^n{}_2 - U^n{}_{II}]/2\Delta x + bu^n{}_1 = bU^n{}_{II}, \tag{3.107}$$

где использована отраженная точка. В случае блочно-центрированной сетки возникают трудности при аппроксимации bu в точке $x=0$; при этом уравнения становятся более сложными.

3.4.2.4. Граничные условия четвертого рода

Такие условия, называемые также «циклическими» граничными условиями, обычно не используют при решении одномерных задач. Однако они имеют важное значение при решении многомерных задач. Рассмотрим их и используем результаты в последующих главах. Примером области с такими граничными условиями является пласт в виде кольца (рис. 3.11) с центральной линией, взятой в качестве координатной оси x. В этом случае точка $x=0$ совпадает с точкой $x=L$.

Учитывая непрерывность давления и потока в точке $x=0$, запишем

$$U(L, t) = U(0, t), \tag{3.108a}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(L, t) = \frac{\partial U}{\partial x}(0, t). \tag{3.108b}$$

Для сетки с распределенными узлами (см. рис. 3.11,*а*) задаем

$$u_N = u_0. \tag{3.109}$$

Следовательно, разностные уравнения для $i=1$ и $i=N$ будут:

$$(u_N - 2u_1 + u_2)/\Delta x^2 = \frac{\partial u_1}{\partial t} + q_1,$$

$$(u_{N-1} - 2u_N + u_1)/\Delta x^2 = \frac{\partial u_N}{\partial t} + q_N. \tag{3.110}$$

Граничное условие (3.108b) не используется, поскольку $\partial U/\partial x$ аппроксимируется в $N-1/2$ и $1/2$.

Для блочно-центрированной сетки (см. рис. 3.11,*б*) не используется условие (3.108*а*), поскольку нет узла при $x=0$, а (3.108b) удовлетворяется, если $\partial u/\partial x$ при $x=0$ аппроксимируется одним и

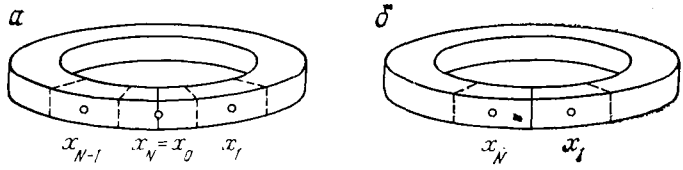


Рис. 3.11. Граничные условия четвертого рода

тем же членом в уравнениях для точек 1 и N. Следовательно, оба уравнения имеют вид:

$$(u_N - 2u_1 + u_2)/\Delta x^2 = \frac{\partial u_1}{\partial t} + q_1,$$

$$(u_{N-1} - 2u_N + u_1)/\Delta x^2 = \frac{\partial u_N}{\partial t} + q_N. \qquad (3.111)$$

Циклические граничные условия возникают также для двух- и трехмерных задач, решаемых в цилиндрических координатах (см. следующие главы).

3.5. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ ФЛЮИДОВ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Вначале рассмотрим уравнение (3.3) для слабосжимаемой жидкости

$$AU \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x, U)\frac{\partial U}{\partial x}\right] - c(x, U)\frac{\partial U}{\partial t} - q(x, t), \qquad (3.112)$$

где $\lambda(x, U) = k(x)/B\mu(U)$, $c(x, U) = \frac{\phi(x)c_f}{B^0} + \frac{\phi^0 c_R}{B(U)}$.

При решении уравнения (3.112) имеются две особенности, о которых не шла речь в предыдущих параграфах:

1) использование неравномерной сетки;
2) представление переменных коэффициентов λ и c.

3.5.1. Разностные уравнения для неравномерной сетки

Использование сетки с неодинаковыми шагами весьма распространено при моделировании пластовых систем. Для получения желаемой точности при решении практических задач необходимо детализировать сетку для некоторых областей пласта. Например, локальная детализация (уменьшение шага) необходима вокруг скважины для моделирования образования конуса обводнения в одиночной скважине. С другой стороны, зачастую можно использовать более грубую сетку для таких областей, как водоносные пласты и значительные газовые шапки, где давление и насыщенность изменяются слабо. Неравномерная сетка также имеет свои преимущества при профильном и трехмерном моделировании слоистых пластов, когда в соответствии с их слоистостью выбирается вертикальная сетка. На практике всегда выгодно использовать по

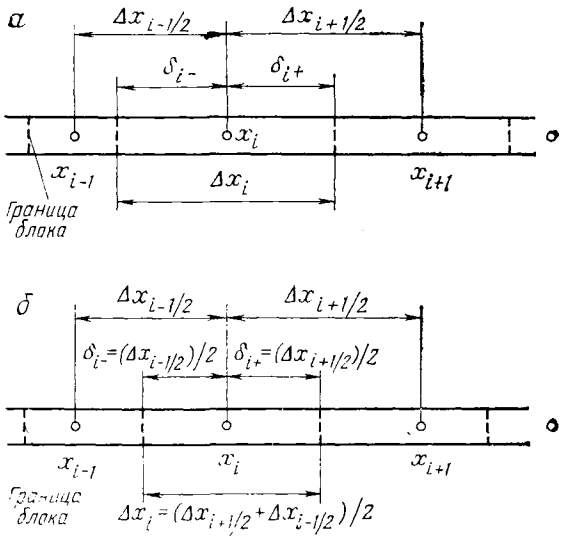


Рис. 3.12. Сетки:
а — блочно-центрированная; *б* — с распределенными узлами

возможности более грубую сетку (особенно в трехмерном случае), поэтому очень важна точность конечно-разностных аппроксимаций.

Применению неравномерной сетки при моделировании пластов посвящены две статьи (Сеттари и Азиз, 1972, 1974). Связанный с этим вопрос о нерегулярных границах обсуждался, например, в работах Гринспена (1965) и Коллатца (1966). Однако при моделировании пластов особо важного значения он не имеет, поскольку физические границы отчетливо не выражены и обычно точно не известны.

Теперь рассмотрим разностную аппроксимацию оператора A на неравномерной сетке. Наши рассуждения будут очень близки содержанию работы Сеттари и Азиза (1972), в которой можно найти некоторые подробности. Геометрические величины для сетки с распределенными узлами и блочно-центрированной сетки показаны на рис. 3.12. В соответствии с принципами, высказанными в разделе 3.4.1, для блочно-центрированной сетки сначала выбирают размеры блоков Δx_i, а затем между границами размещают узловые точки, т. е.

$$\delta_{i-}=\delta_{i+}=\Delta x_i/2.$$

Следовательно,
$$\Delta x_{i+1/2}=\frac{1}{2}(\Delta x_i+\Delta x_{i+1}).$$

Для сетки с распределенными узлами вначале выбирают узлы, а затем устанавливают границы блоков в середине отрезков, соединяющих два соседних узла:

$$\delta_{i+}=\delta_{i+1,-}=\Delta x_{i+1/2}/2,$$
$$\delta_{i-}=\delta_{i-1,+}=\Delta x_{i-1/2}/2.$$

Тогда размер блоков

$$\Delta x_i = \frac{1}{2}(\Delta x_{i+1/2} + \Delta x_{i-1/2}) = \delta_{i+} + \delta_{i-}.$$

Кроме границ блоков, необходимо также определить межблочные проводимости $\lambda_{i+1/2}$. Определение значений $\lambda_{i+1/2}$ будет рассмотрено в разделе 3.5.3. Как было показано в работе Сеттари и Азиза (1972), выводы этого раздела не зависят от способа учета проводимостей.

В случае блочно-центрированной сетки конечно-разностная аппроксимация для A

$$\tilde{L}_1 u_i = \frac{1}{\Delta x_i}\left[\lambda_{i+1/2}\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x_{i+1/2}} + \lambda_{i-1/2}\frac{u_{i-1}-u_i}{\Delta x_{i-1/2}}\right]. \tag{3.113}$$

Если $\lambda_{i\pm1/2}$ аппроксимируется как

$$\lambda_{i\pm1/2} = \frac{1}{2}(\lambda_i + \lambda_{i\pm1}), \tag{3.114}$$

то вместо $\tilde{L}_1$ конечно-разностным оператором будет

$$L_1 u_i = \frac{1}{\Delta x_i}\left[\frac{\lambda_i}{2}\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{u_{i-1}-u_i}{\Delta x_{i-1/2}}\right) + \frac{\lambda_{i+1}}{2}\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x_{i+1/2}}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\lambda_{i-1}}{2}\left(\frac{u_{i-1}-u_i}{\Delta x_{i-1/2}}\right)\right]. \tag{3.115}$$

Аналогично для сетки с распределенными узлами исходным является оператор

$$L_2 u_i = \frac{2}{\Delta x_{i+1/2} + \Delta x_{i-1/2}}\left[\lambda_{i+1/2}\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x_{i+1/2}}\right) + \lambda_{i-1/2}\left(\frac{u_{i-1}-u_i}{\Delta x_{i-1/2}}\right)\right], \tag{3.116}$$

который для аппроксимации (3.114) заменяется на

$$L_2 u_i = \frac{2}{\Delta x_{i+1/2} + \Delta x_{i-1/2}}\left[\lambda_i\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{u_{i-1}-u_i}{\Delta x_{i-1/2}}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\Delta x_{i+1/2}}{2}\left(\frac{\lambda_{i+1}-\lambda_i}{\Delta x_{i+1/2}}\right)\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x_{i+1/2}}\right) + \frac{\Delta x_{i-1/2}}{2}\left(\frac{\lambda_i-\lambda_{i-1}}{\Delta x_{i-1/2}}\right)\left(\frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x_{i-1/2}}\right)\right]. \tag{3.117}$$

Погрешности аппроксимации операторов L_1 и L_2 составляют

$$R_1(U_i) = -\frac{\Delta x_{i+1} - 2\Delta x_i + \Delta x_{i-1}}{4\Delta x_i}(\lambda U')'_i -$$
$$-\frac{(\Delta x_{i+1/2})^2 - (\Delta x_{i-1/2})^2}{12\Delta x_i}[2\lambda U''' + 3(\lambda' U')']_i -$$
$$-\frac{(\Delta x_{i+1/2})^3 + (\Delta x_{i-1/2})^3}{24\Delta x_i}[\lambda U^{IV} + 2\lambda' U''' + 3\lambda'' U'' + 2\lambda''' U']_i + O(\Delta x^3), \tag{3.118}$$

$$R_2(U_i) = -\frac{(\Delta x_{i+1/2} - \Delta x_{i-1/2})}{6}[2\lambda U''' + 3(\lambda' U')']_i -$$

$$-\frac{(\Delta x^3{}_{i+1/2} + \Delta x^3{}_{i-1/2})}{24\Delta x_i}[\lambda U^{IV} + 2\lambda' U''' + 3\lambda'' U'' + 2\lambda''' U']_i + O(\Delta x^3). \tag{3.119}$$

Мы видим, что при том же расположении узлов погрешность R_1 отличается от погрешности R_2 на

$$\frac{\Delta x_{i+1} - 2\Delta x_i + \Delta x_{i-1}}{4\Delta x_i}(\lambda U')'_i. \tag{3.120}$$

В общем случае это член нулевого порядка, что означает (в смысле определения раздела 3.2.3), что L_1 — несогласованная аппроксимация. В противоположность этому L_2 всегда имеет по крайней мере первый порядок точности и, следовательно, согласована. Отметим также, что при равномерном разбиении по пространству обе аппроксимации имеют точность $O(\Delta x^2)$ и для постоянного значения λ они сводятся к знакомому виду, рассмотренному ранее (см. уравнение (3.15). С другой стороны, *сведение задачи к линейной* (λ=const) *с неравномерной сеткой не повышает порядок аппроксимации*. По ходу рассуждений мы отметим здесь, что для нелинейного случая в зависимости от способа аппроксимации $\lambda_{i\pm1/2}$ может понизиться порядок оператора L, если вместо уравнения (3.114) используется другая аппроксимация (см. раздел 3.5.3). Важным обстоятельством является то, что дополнительные члены — источники погрешности, появляющиеся в результате аппроксимации λ, для операторов L_1 и L_2 совпадают (см. приложение В в работе Сеттари и Азиза, 1972).

Теперь оценим значение предлагаемого анализа погрешности аппроксимации. Аппроксимация для сетки с распределенными узлами L согласована и, следовательно, при любой устойчивой аппроксимации правой части уравнения (3.112) сходимость обеспечивается. Однако для оператора L_1 при блочно-центрированной сетке априорной гарантии сходимости нет. Следует подчеркнуть, что при несогласованности необязательно происходит расходимость при $\|\Delta x\| \to 0$. Фактическая скорость сходимости зависит от способа уменьшения шага сетки. Например, можно установить такую последовательность изменения шагов, при которой член (3.120) тождественно равен нулю; такая последовательность удовлетворяет дискретному представлению оператора Лапласа

$$\Delta x_{i+1} - 2\Delta x_i + \Delta x_{i-1} = 0.$$

Можно построить сетку с другими шагами, для которых погрешность члена (3.120) будет соответствовать $O(\Delta x)$ или $O(\Delta x^2)$. С другой стороны, можно выбрать шаги так, что данный член примет значение $O(\Delta x^0)$, но только при конечном числе узлов. Поскольку погрешности дискретизации входят в уравнения для погрешности решения как источники (см. раздел 3.2.3), то их воздействие «сглаживается». Основываясь на численных эксперимен-

тах, мы приходим к выводу, что для произвольного, достаточно плавного изменения пространственных шагов оператор L_1 в пределе также будет сходящимся.

В результате того, что погрешность, вызываемая членом нулевого порядка, в пределе стремится к нулю, можно получить значительные ошибки при конечных размерах сетки. Рассмотрим это для случая горизонтальной нелинейной фильтрации газа в предположении несжимаемости пористой среды:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(p)\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{|BI}{M}S(t,\ x)=c(p)\frac{\partial p}{\partial t}\quad x\in(0,\ L),\qquad(3.121)$$

где

$$\lambda=\frac{kp}{Z\mu},\quad c=\frac{\phi A}{Z}\left(1-\frac{p}{Z}\frac{dZ}{dp}\right).$$

Здесь T — температура; M — молекулярная масса газа; A и B — переводные коэффициенты. Калхем и Варга (1971) предложили особую форму для члена источника $S(t, x)$, при которой возможно точное решение уравнения (3.121) с резким скачком давления вблизи $x=L$. Численное решение этой задачи было выполнено с использованием операторов L_1 и L_2 (при уменьшении шага сетки около данного пика. Подбором достаточно малого Δt удалось снизить погрешности аппроксимации по времени. При этом краевые эффекты были устранены, а l_∞ (норма погрешностей) оценивалась как функция времени. На рис. 3.13 показаны результаты для двух сеток с 25 и 50 узлами.

Оба оператора сходящиеся, но погрешность для блочно-центрированной сетки значительно бо́льшая. Видно, что погрешности по-

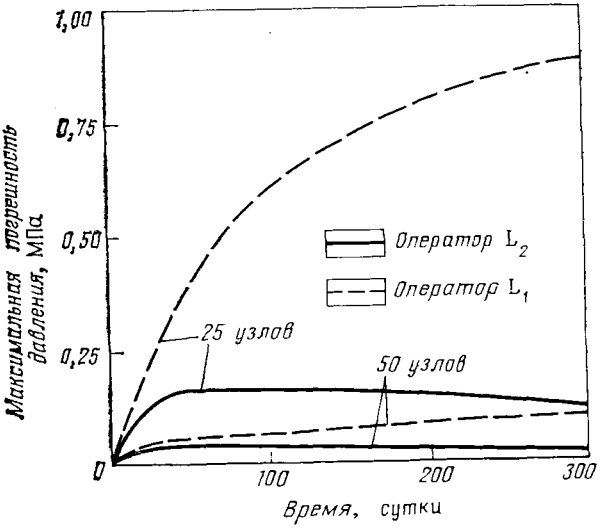


Рис. 3.13. Влияние уменьшения шага сетки на погрешность, полученную для операторов L_1 и L_2

разному изменяются во времени: с увеличением времени погрешности, связанные с L_1, возрастают, а связанные с L_2 — уменьшаются.

Результаты, воспроизведенные на рис. 3.13, важны потому, что на практике погрешности дискретизации редко определяют экспериментальным путем при изменении шагов сеток. Так, в указанном примере для L_1 потребовалось бы 40 блоков, тогда как для L_2 достаточно 25. На практике, вероятно, для L_1 будут использованы 25 блоков, что в данном случае даст бо́льшие погрешности.

В заключение следует отметить, что после сравнения этих сеток можно рекомендовать сетку с распределенными узлами. Поскольку различие двух схем заключается только в расположении границ блоков, то использование рекомендуемой сетки не вызывает осложнений. Кроме этого, при использовании такой схемы получают определенные преимущества, если учитываются граничные условия, в особенности для задач с одиночной скважиной (см. гл. 9).

3.5.2. Разностные уравнения в матричной форме

Левую часть уравнения (3.112) можно дискретизировать. Результирующие разностные уравнения запишем в матричной форме:

$$-Tu = B\frac{du}{dt} + Q, \tag{3.122}$$

где, как и ранее,

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_N)^T.$$

Если использовать уравнения непосредственно в виде

$$Lu_i = c_i du_i/dt + q_i, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{3.123}$$

то матрица T не будет симметричной (исключение составляет равномерная сетка), поскольку элемент $i, j+1$ не совпадает с элементом $i+1, j$:

$$\frac{\lambda_{i+1/2}}{\Delta x_i \Delta x_{i+1/2}} \neq \frac{\lambda_{i+1/2}}{\Delta x_{i+1} \Delta x_{i+1/2}}.$$

Симметричная форма желательна по теоретическим и практическим соображениям. Указанное свойство достигается при умножении i-го уравнения на Δx_i. В результате получим следующее уравнение:

$$\frac{\lambda_{i+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}}(u_{i+1} - u_i) + \frac{\lambda_{i-1/2}}{\Delta x_{i-1/2}}(u_{i-1} - u_i) = \Delta x_i c_i du_i/dt + \Delta x_i q_i. \tag{3.124}$$

Уравнения (3.123) и (3.124) имеют также определенный физический смысл: левая часть уравнения (3.123) — производная от потока (т. е. производная от расхода на единицу площади), а соответствующие члены уравнения (3.124) характеризуют интенсивность

притока и оттока флюидов из i-го блока. Аналогично правая часть уравнения (3.123) представляет собой скорость изменения массы в единице объема, а правая часть уравнения (3.124) — скорость изменения массы в объеме i-го блока. Это станет очевидным после умножения дифференциального уравнения на произвольную площадь поперечного сечения $A=\Delta y\Delta z$. Следовательно, можно записать уравнение (3.124) так:

$$q_{i+1/2}-q_{i-1/2}=T_{i-1/2}(u_{i+1}-u_i)-T_{i+1/2}(u_i-u_{i-1})=V_i c_i\frac{du_i}{dt}+Q_i, \tag{3.125}$$

где

$$T_{i+1/2}=\frac{\lambda_{i+1/2}A}{\Delta x_{i+1/2}},$$

$$V_i=\Delta x_i A.$$

Если допустить, что область A — функция x, то возможен частичный учет *многомерных эффектов*. Подобная модификация уравнения (3.125) — обычная форма, используемая при моделировании пластов.

Уравнение (3.125) часто получают непосредственно, используя элементарные соображения о сохранении массы для i-го блока: (втекает) — (вытекает) = (прирост).

Такой подход с использованием материального баланса более понятен инженерам и соответствует интегральному методу получения разностных уравнений (см. раздел 3.2.1).

Рассмотрим граничные условия при $x=0$. Наиболее общий случай, когда отсутствует переток на границе, можно учесть с помощью метода отражения (см. раздел 3.3.4 и рис. 3.9). Запишем уравнение (3.125) для $i=1$. Чтобы использовать этот метод для сетки с распределенными узлами, необходимо соблюдение условия: $u_0=u_2$, $T_{1/2}=T_{1+1/2}$ (см. рис. 3.9,*а*). Тогда

$$2T_{1+1/2}(u_2-u_1)=\Delta x_1 A c_1\frac{du_1}{dt}+\Delta x_1 A q_1.$$

После деления на 2 получим

$$T_{1+1/2}(u_2-u_1)=V_1 c_1\frac{du_1}{dt}+V_1 q_1, \tag{3.127}$$

где $V_1=(\Delta x_1/2)A$ — точный объем первого блока.

С другой стороны, для блочно-центрированной сетки условие $u_0=u_1$ (что эквивалентно $T_{1/2}=0$) снова приводит к уравнению (3.127), но при $V_1=\Delta x_1 A$.

Если предположить отсутствие перетока на границе при $x=0$ и $x=L$, матрицы T и B в уравнении (3.122) будут следующими:

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} T_{3/2} & -T_{3/2} & & & \\ -T_{3/2} & (T_{3/2}+T_{5/2}) & -T_{5/2} & & \\ & & -T_{i-1/2} & (T_{i-1/2}+T_{i+1/2}) & -T_{i+1/2} \\ & & & -T_{N-1/2} & T_{N-1/2} \end{bmatrix} \tag{3.128}$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} V_1c_1 & & & & \\ & V_2c_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & V_ic_i & \\ & & & & \cdot \\ & & & & V_Nc_N \end{bmatrix} \tag{3.129}$$

а вектор Q будет представлен в виде

$$Q=[Q_1, \ldots, Q_i, \ldots, Q_N]^T, \tag{3.130}$$

Отметим, что T — симметричная трехдиагональная матрица.

3.5.3 Учет переменных коэффициентов

Для выбора значений $\lambda_{i+1/2}$, c_i и q_i нет какого-либо единого способа. Эти величины должны быть выбраны такими, чтобы получить по возможности более точные значения для расхода (аккумуляции и притока в блок). Однако иногда (например, при многофазной фильтрации) они выбираются в зависимости от используемых численных методов. Выведем некоторые формулы для простых случаев.

Предположим, что проводимость кусочно-постоянна с поверхностью раздела, расположенной между точками i и $i+1$ (не обязательно по границе блока) (рис. 3.14). Расход между узлами i и $i+1$ равен

$$-q=A\frac{(p_{\text{int}}-p_i)}{\delta_i}\lambda_i=A\frac{(p_{i+1}-p_{\text{int}})}{\delta_{i+1}}\lambda_{i+1},$$

где p_{int} — давление на этой поверхности. Следует определить среднюю проводимость, при которой получим то же значение расхода между узлами i и $i+1$:

$$-q=A\frac{(p_{i+1}-p_i)}{\Delta x_{i+1/2}}\lambda_{i+1/2}. \tag{3.131}$$

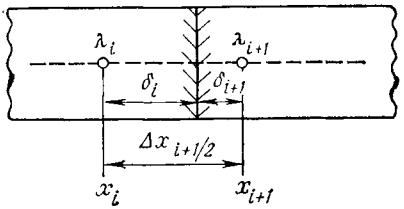


Рис. 3.14. Осреднение проводимости для вертикального раздела

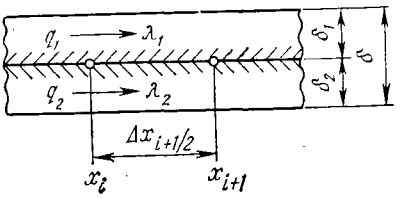


Рис. 3.15. Осреднение проводимости для слоистой системы

Исключая p_{int} из этих уравнений, получим

$$\lambda_{i+1/2} = \frac{(\delta_i + \delta_{i+1})}{\frac{\delta_{i+1}}{\lambda_{i+1}} + \frac{\delta_i}{\lambda_i}}. \tag{3.132}$$

Следовательно, $\lambda_{i+1/2}$ — *среднее гармоническое значений* λ_i и λ_{i+1}.

Рассмотрим случай, когда в пласте содержится два слоя различной проницаемости (рис. 3.15). Общий расход между x_i и x_{i+1} равен

$$-q = -(q_1 + q_2) = A\frac{\delta_1}{\delta}\frac{(p_{i+1} - p_i)}{\Delta x_{i+1/2}}\lambda_1 + A\frac{\delta_2}{\delta}\frac{(p_{i+1} - p_i)}{\Delta x_{i+1/2}}\lambda_2.$$

При сравнении данного уравнения с (3.131), получим

$$\lambda_{i+1/2} = \left(\frac{\delta_1\lambda_1 + \delta_1\lambda_2}{\delta_1 + \delta_2}\right), \tag{3.133}$$

т. е. в этом случае $\lambda_{i+1/2}$ — взвешенное арифметическое значение λ_1 и λ_2.

Аналоги уравнений (3.132) и (3.133) широко используют при описании явлений теплопередачи (теплопроводность в составных стенах) и в электротехнике (последовательно-параллельные резисторные цепи).

Значение абсолютной проницаемости k на практике обычно относят к центру блока. При этом свойства, зависящие от давления, оценивают по давлению в блоке p_i. Предполагается, что проводимости λ_i внутри всех блоков постоянны, их используют для определения $\lambda_i \pm {}^1/_2$. Подобная аппроксимация удовлетворительна в том случае, если свойства пласта в двух соседних блоках сильно не различаются. Если разница в проницаемости в них велика, а данные недостоверны, то могут возникнуть большие погрешности. Характерное значение проводимости должно в таком случае отражать изменения k между узлами на основе статистической интерпретации данных (Тороньи и Фарук Али, 1974).

При учете $c(x)$ и $q(x, t)$ возникают аналогичные проблемы. Значения c_i и q_i следует выбирать путем осреднения

$$c_i V_i = \int_{\Delta x_i} Ac(x)\,\mathrm{d}x, \quad q_i V_i = \int_{\Delta x_i} Aq(x)\,\mathrm{d}x.$$

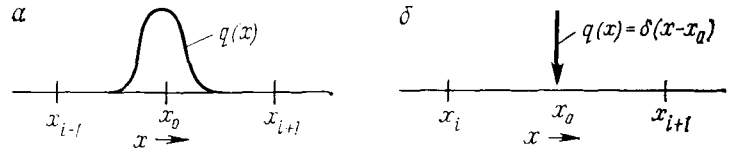


Рис. 3.16. Аппроксимация источников и стоков

Поскольку сжимаемости $c_т$, c_R приняты постоянными, можно записать $c_i=\phi_i c_т/B^0+\phi^0 c_R/B$, где характерная пористость блока i

$$\phi_i=\frac{1}{V_i}\int\limits_{V_i}\phi dV. \tag{3.134}$$

Данные, требуемые для подстановки в уравнение (3.134), известны редко, кроме значений члена источника q_i. Источники и стоки обычно представляют собой нагнетательные и добывающие скважины и поэтому могут быть аппроксимированы точечными (при помощи δ-функции Дирака), а не распределенными источниками (рис. 3.16).

Поскольку вся область ненулевых значений функции источника приходится на один блок сетки, то общая интенсивность источника

$$Q_i=q_iU_i=S_{V_i}qdv$$

не зависит от фактического его распределения внутри блока. Поскольку в разностных уравнениях учитывается только общий расход Q_i, то функция $q(x)$ несущественна. Это также характеризует предел «разрешающей способности» конечно-разностного метода: *положение скважины в пределах одного блока сетки можно менять, что не влияет на результаты решения.*

3.6. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИИ В РАДИАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Эквивалентом уравнения (3.112) в радиальных цилиндрических координатах [(уравнение 3.4)] является

$$CU\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda(r,\ U)\frac{\partial U}{\partial r}\right)-c(r)\frac{\partial U}{\partial t}-q(r,\ t). \tag{3.135}$$

Преобразуя пространственные координаты, можно привести это уравнение к форме, схожей с формой уравнения (3.112). Пусть $\rho=\ln r$, тогда $r\lambda\partial U/\partial r=\lambda\partial U/\partial\rho$. После умножения на r^2 уравнение (3.135) преобразуется и имеет вид

$$AU\equiv\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\lambda(\exp(\rho),\ U)\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)-$$

$$-\exp(2\rho)\left(c(\exp(\rho))\frac{\partial U}{\partial t}-q(\exp(\rho),\ t)\right), \tag{3.136}$$

поскольку $r=\ln^{-1}\rho=\exp(\rho)$.

Каждое из приведенных уравнений описывает течение флюида в пласте, направленное к отдельной скважине в предположении,

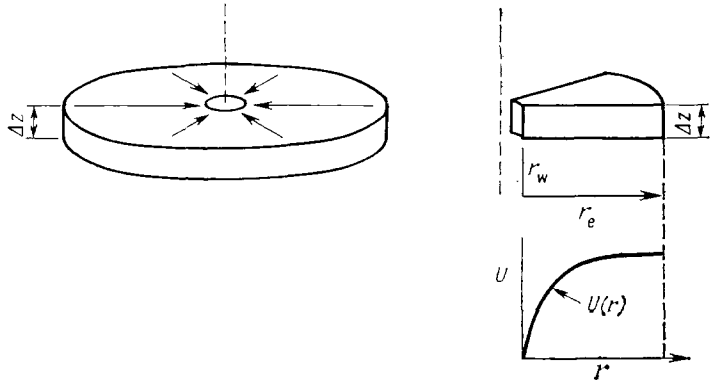


Рис. 3.17. Одномерная радиальная фильтрация: r_w и r_e соответственно радиус скважины и внешний радиус дренирования

что все параметры пласта и граничные условия симметричны относительно оси скважины (рис. 3.17). Аналитические решения для простых случаев широко известны (Крафт и Хавкинс, 1959. ERCB, 1975). Они могут быть представлены в виде лорарифмических кривых, когда градиент давления быстро растет при приближении к стволу скважины.

Если уравнение (3.135) решается численно, для получения равномерной точности необходимы постоянно уменьшающиеся шаги сетки при $r \to r_w$. Это приводит к существенной неравномерности сетки (отношение максимального Δr к минимальному обычно имеет порядок 10^2).

Если для расчетов используют уравнение (3.136), то обычно наиболее удобен равный шаг по ρ. Поскольку для установившегося течения, подчиняющегося закону Дарси в однородной среде,

$$U - U_w \sim \ln (r/r_w) \sim \rho - \rho_w,$$

то равный шаг по ρ обеспечивает равное падение давлений между узлами сетки. Такая аргументация широко используется при построении сетки, неравномерной по r. Предположим, что имеем сетку с распределенными N узлами. Тогда $r_1 = r_w$, $r_N = r_e$. Шаг сетки должен быть равномерным по ρ, следовательно,

$$\Delta\rho = (\rho_e - \rho_w)/(N-1) = \text{const}.$$

Поскольку $\Delta\rho = \ln (r_{i+1}/r_i)$, получим

$$\frac{r_{i+1}}{r_i} = \left(\frac{r_e}{r_w}\right)^{1/(N-1)}, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \qquad (3.137)$$

т. е. координаты узлов возрастают в геометрической прогрессии.

Отметим, что хотя в (3.136) левая часть преобразована в оператор, похожий на оператор, описывающий линейную фильтрацию, радиальные особенности уравнения перенесены в правую часть (аккумулятивные члены). Следовательно, преобразованное уравнение не имеет каких-либо существенных преимуществ для численно-

го решения. В большинстве двух- и трехмерных радиальных моделей непосредственно используется радиальная координата r (Макдональд и Коутс, 1970; Леткеман и Ридингс, 1970; Нолен и Берри, 1972; Сонье и др., 1973; Сеттари и Азиз, 1974), хотя использование координаты ρ упоминается в работах Брюса и др. (1953) и Акбара и др. (1974).

3.6.1. Разностные уравнения для неравномерной сетки

Подготовка неравномерной сетки для решения уравнения (3.135) проводится подобно подготовке сетки для линейного случая, рассмотренного в разделе 3.5.1. Если задается коэффициент $\bar{\lambda}(x, U)=x\lambda(x, U)$, то оператор C можно записать как $(1/x)$A. Отсюда следует вывод, что к оператору C можно применить результаты анализа, приведенные в разделе 3.5.1. Здесь, как и ранее, использование сетки с распределенными узлами всегда приводит к согласованной аппроксимации, тогда как блочно-центрированная сетка пригодна лишь при особых условиях (так как в общем случае получаем несогласованную аппроксимацию). Все согласованные аппроксимации для CU можно записать как

$$\mathrm{M}u_i = \frac{1}{x_i \Delta x_i}\left[\lambda_{i+1/2}\, x_{i+1/2}\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x_{i+1/2}}\right)+\lambda_{i-1/2}\, x_{i-1/2}\left(\frac{u_{i-1}-u_i}{\Delta x_{i-1/2}}\right)\right], \tag{3.138}$$

где

$$x_{i+1/2}=\mathrm{f}(x_i,\ x_{i+1}), \tag{3.139}$$

а f — функция осреднения.

Однако, если $x=r$ — радиальная координата, то не ясно, является ли среднее арифметическое значение координат наилучшим для определения границ между узлами. Как указывалось в работе Сеттари и Азиза (1974), согласованная аппроксимация обеспечивается в различных случаях.

а) *Среднее арифметическое*

$$r_{i+1/2}=\frac{1}{2}(r_i+r_{i+1}). \tag{3.140}$$

в) *Среднее геометрическое*

Данный подход применяют в том случае, когда среднее значение координат используется для преобразованного уравнения [уравнение (3.136)].

$$r_{i+1/2}=(r_i r_{i+1})^{1/2}. \tag{3.141}$$

с) *Среднее логарифмическое*

Здесь необходимо использовать определенные физические понятия. Поэтому вместо u применим переменную p, обозначающую давление.

При установившемся течении (λ=const) точное значение падения давления между точками i и $i+1$ можно получить при интегрировании уравнения Дарси

$$q = -2\pi r\lambda \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r},$$

в результате чего

$$q_{\mathrm{E}} = -\frac{\lambda 2\pi}{\ln(r_{i+1}/r_i)}(p_{i+1} - p_i) \tag{3.142}$$

Скорость фильтрации для дискретного случая $q_i+1/2$ представлена первым членом в скобках в уравнении (3.138), помноженным на 2π,

$$-q_{i+1/2} = 2\pi r_{i+1/2}\lambda_{i+1/2}\left(\frac{p_{i+1}-p_i}{r_{i+1}-r_i}\right). \tag{3.143}$$

Из уравнения (3.143) получим точное значение перепада давления при λ=const, если

$$r_{i+1/2} = r^{\mathrm{L}}_{i+1/2} = \frac{r_{i+1}-r_i}{\ln(r_{i+1}/r_i)} \tag{3.144}$$

известный «логарифмический средний радиус».

Сам по себе численный анализ не дает какого-либо основания для выбора границ блока. Выбрать эти границы можно, используя некоторые свойства разностных уравнений, аппроксимирующих уравнение (3.135). Используя (3.138) для (3.135), получим

$$\frac{1}{r_i(r_{i+1/2}-r_{i-1/2})}\left[\lambda_{i+1/2}r_{i+1/2}\left(\frac{p_{i+1}-p_i}{r_{i+1}-r_i}\right)+\right.$$
$$\left.+\lambda_{i-1/2}r_{i-1/2}\left(\frac{p_{i-1}-p_i}{r_i-r_{i-1}}\right)\right] = c_i\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}+q_i. \tag{3.145}$$

Для получения симметричной формы и придания членам уравнения физического смысла умножим (3.145) на $\Delta z 2\pi r_i(r_{i+1/2}-r_{i-1/2})$. Используя при этом (3.143), получим

$$-(q_{i+1/2}-q_{i-1/2}) = C_{Vi}c_i\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}+C_{Vi}q_i, \tag{3.146}$$

где

$$C_{Vi} = 2\pi r_i(r_{i+1/2}-r_{i-1/2})\Delta z. \tag{3.147}$$

В уравнении (3.146) $q_i\pm{}^1/_2$ — приток и отток для блока i, являющегося кольцом, а C_{Vi} — дискретное значение объема блока.

Теперь необходимо, чтобы:

а) уравнение в дискретной форме обеспечивало бы точное значение расхода для заданного перепада давления при λ=const;

б) дискретный объем был бы равен фактическому объему блока:

$$V_i = \pi(r^2{}_{i+1/2}-r^2{}_{i-1/2})\Delta z.$$

Запишем

$$q_{i+1/2}=q_{\text{E}},\ C_{\text{v}i}=V_i. \tag{3.148}$$

Эти условия удовлетворяются, если

$$r_{i+1/2}=r^{\text{L}}{}_{i+1/2},$$

$$2r_i(r_{i+1/2}-r_{i-1/2})=$$

$$=r^2{}_{i+1/2}-r^2{}_{i-1/2}. \tag{3.149}$$

К сожалению, соотношения (3.148) не удовлетворяются одновременно при произвольном выборе границ. Тем не менее, как рассматривается ниже, можно получить различные виды дискретизации, удовлетворяющие этим условиям.

Обозначим $\rho=r^2$; тогда уравнение (3.135) приводится к виду

$$4\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\lambda\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)=c\frac{\partial p}{\partial t}+q,$$

что может быть аппроксимировано по следующей согласованной схеме:

$$\frac{4}{(\rho_{i+1/2}-\rho_{i-1/2})}\left[\lambda_{i+1/2}\rho_{i+1/2}\frac{p_{i+1}-p_i}{\Delta\rho_{i+1/2}}+\right.$$

$$\left.+\lambda_{i-1/2}\rho_{i-1/2}\frac{p_{i-1}-p_i}{\Delta\rho_{i-1/2}}\right]=c_i\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}+q_i. \tag{3.150}$$

После умножения на

$$C_{\text{v}i}=\pi(\rho_{i+1/2}-\rho_{i-1/2}) \tag{3.151}$$

получим уравнение (3.146), но с $q_{i\pm1/2}$, заданным в виде

$$q_{i+1/2}=4\pi\lambda_{i+1/2}\rho_{i+1/2}\left(\frac{p_{i+1}-p_i}{\rho_{i+1}-\rho_i}\right). \tag{3.152}$$

Условия (3.148) эквивалентны следующим:

$$\rho_{i+1/2}-\rho_{i-1/2}=r^2{}_{i+1/2}-r^2{}_{i-1/2},$$

$$2\frac{\rho_{i+1/2}}{\rho_{i+1}-\rho_i}=r^{\text{L}}_{i+1/2}\frac{1}{(r_{i+1}-r_i)}.$$

Первое условие всегда удовлетворяется тривиально, а второе используется для определения $\rho_{i+1/2}$:

$$\rho_{i+1/2}=\frac{\rho_{i+1}-\rho_i}{\ln\left(\frac{\rho_{i+1}}{\rho_i}\right)}=\rho^{\text{L}}_{i+1/2}. \tag{3.153}$$

Следовательно, если применяют дискретизацию вида (3.150), границу должны выбирать в соответствии с логарифмом r^2, а не r. Отметим, что использование уравнения (3.153) сводит уравнение (3.152) к (3.143) при $r_{i+1/2}=r^{\text{L}}{}_{i+1/2}$.

Другими словами: *положение границы для определения межблочной проводимости подчиняется логарифмическому закону относительно r, а положение границы для определения объема блока — логарифмическому закону относительно* r^2.

Следует отметить, что разница между дискретизацией (3.150) и (3.145) заключается только в определении C_V и, следовательно, проявляется только в случае нестационарных задач.

В противном случае можно использовать дискретизацию (3.143) и заменить C_V на V. Разностные уравнения такого вида не могут быть выведены с помощью метода рядов Тейлора, однако их можно получить интегральным методом.

3.6.2. Разностные уравнения в матричной форме

Уравнение (3.146) можно записать в форме уравнения (3.125):

$$T_{i-1/2}(p_{i-1}-p_i)+T_{i+1/2}(p_{i+1}-p_i)=V_i c_i \frac{dp_i}{dt}+V_i q_i.$$

При выборе дискретизации вида (3.150) будем иметь

$$T_{i+1/2}\equiv 2\pi r^L_{i+1/2}\frac{\Delta z}{r_{i+1}-r_i}\lambda_{i+1/2}, \tag{3.154}$$

$$V_i=\pi(r^2{}_{i+1/2}-r^2{}_{i-1/2})\Delta z, \tag{3.155}$$

где

$$r^2{}_{i+1/2}=\frac{r^2{}_{i+1}-r^2{}_i}{\ln\left(\frac{r_i+1}{r_i}\right)^2}, \tag{3.156}$$

$$r^{\mathrm{L}}_{i+1/2}=\frac{r_{i+1}-r_i}{\ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)}. \tag{3.157}$$

При записи в матричной форме получим

$$Tp=B\frac{dp}{dt}+Q,$$

где матрица T снова оказывается симметричной.

Интересно заметить, что при выводе рассмотренных разностных уравнений можно использовать несколько другой подход, а именно, представить уравнение (3.115) в раскрытом виде:

$$CU\equiv\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda(r,\ U)\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\lambda(r,\ U)\frac{\partial U}{\partial r}=c(r)\frac{\partial U}{\partial t}+q(r,\ t), \tag{3.158}$$

а затем осуществить конечно-разностную аппроксимацию. К сожалению, а таком случае получаем несимметричные разностные уравнения (Варга, 1962, с. 193; упоминается также о других способах получения симметричной формы при интегрировании).

3.6.3. Учет переменных коэффициентов

Все замечания раздела 3.5.3 можно здесь повторить с учетом цилиндрической формы. Например, пористость ϕ_i может определяться как

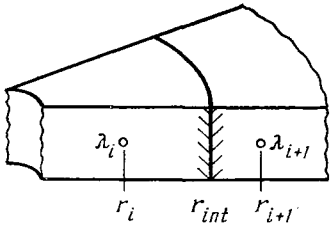


Рис. 3.18. Осреднение проводимости для вертикальной поверхности раздела

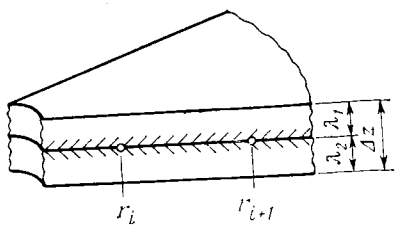


Рис. 3.19. Осреднение проводимости для горизонтальной поверхности раздела

$$\phi_i = \frac{\Delta z}{V_i} 2\pi \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \phi(r)\, r\,dr. \tag{3.159}$$

Формулы для «взвешивания» λ, соответствующие уравнениям (3.132) и (3.133), выглядят следующим образом:

а) для вертикальной поверхности раздела (рис. 3.18)

$$\lambda_{i+1/2} = \frac{\ln(r_{i+1}/r_i)}{\dfrac{\ln(r_{int}/r_i)}{\lambda_i} + \dfrac{\ln(r_{i+1}/r_{int})}{\lambda_{i+1}}}; \tag{3.160}$$

б) для горизонтальной поверхности раздела (послойная проводимость, рис. 3.19)

$$\lambda_{i+1/2} = \frac{\delta_1}{\Delta z}\lambda_1 + \frac{\delta_2}{\Delta z}\lambda_2, \tag{3.161}$$

что представляет собой то же уравнение (3.133).

3.7. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.7.1. Существование решения и материальный баланс

Матричное уравнение для линейного и радиального течения имеет один и тот же вид

$$-Tu = B\frac{du}{dt} + Q, \tag{3.162}$$

где T — симметричная трехдиагональная матрица с положительными диагональными элементами; B — диагональная матрица с положительными элементами. Для граничных условий Неймана T, B, и Q были представлены в разделе 3.5.2. Для условий Дирихле видоизменяются только уравнения для граничных точек. Например, рассмотрим условие $u_{N+1}=u_L$ при $x=L$. Тогда матрица T будет

иметь вид

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{3/2} & -T_{3/2} & & & \\ -T_{3/2} & T_{3/2}+T_{5/2} & -T_{5/2} & & \\ & & -T_{i-1/2} & T_{i-1/2}+T_{i+1/2} & -T_{i+1/2} \\ & & & -T_{N-1/2} & T_{N-1/2}+T_{N+1/2} \end{bmatrix} \tag{3.163}$$

а вектор Q будет включать граничный член

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_i \\ \vdots \\ Q_N + T_{N+1/2} u_L \end{bmatrix} \tag{3.164}$$

Здесь $Q_i = V_i q_i$ — общий расход источника для блока i.

Мы видим, что для каждой строки матрицы T диагональный элемент равен сумме абсолютных значений внедиагональных элементов, за исключением последней строки, в которой диагональный элемент больше. Очевидно также, что T неприводимая матрица (см. приложение А). В соответствии с определением диагонального преобладания, имеем:

а) T — *матрица с диагональным преобладанием и нулевой суммой в строке для граничных условий Неймана;*

б) T — *неприводимая матрица с диагональным преобладанием, если хотя бы одно граничное условие есть условие Дирихле.*

Диагональное преобладание — важное свойство; из этого следует, что T вырождена в случае (а) и положительно определена в случае (б) (Таусски, 1949; Варга, 1972, гл. 1.5, приложение А).

3.7.1.1. Эллиптические задачи

Полученные результаты можно применять для стационарных задач или для расчета течения несжимаемых жидкостей, когда (3.162) сводится к виду $-Tu=Q$.

а) *Задача Неймана.* Поскольку T выраждена, решение может существовать или не существовать. Просуммируем уравнения, помня, что для данного случая T и Q задаются уравнениями (3.128) и (3.130). Все потоковые члены $T_{i+1/2}(u_{i+1}-u_i)$ уничтожаются, и перед сложением с последним уравнением получим

$$T_{N-1/2}(u_{N-1} - u_N) = \sum_{i=2}^{N-1} Q_i. \tag{3.165а}$$

Последнее уравнение имеет вид

$$-T_{N-1/2}(u_{N-1}-u_N)=Q_N. \tag{3.165b}$$

Эти два уравнения удовлетворяются, если

$$\sum_{i=1}^{N} Q_i=0. \tag{3.166}$$

Затем можно произвольно выбрать u_N, которое однозначно определит $u_{N-1}, \ldots, u_1$.

Условие (3.166) можно рассматривать как *условие материального баланса*. Понятие «материальный баланс» с инженерной точки зрения — это выражение для сохранения массы во всей системе, полученное путем использования теоремы Грина для уравнения сохранения массы. Для задач типа Неймана это также условие решения дифференциальных уравнений (Михлин и Смолицкий, 1967). В замкнутой несжимаемой системе при отсутствии перетока через границу для условия сохранения массы требуется баланс отбора и нагнетания ($\int q dx=0$). Уравнение в конечно-разностной форме имеет вид (3.166). Решение не единственно ввиду предположения о несжимаемости: *поскольку ни одно из свойств не зависит от давления,* величина давления несущественна;

б) *Граничные условия Дирихле.* В данном случае существует единственное решение. Можно вывести уравнение материального баланса, для которого должно существовать решение. При суммировании конечно-разностных уравнений для всех узлов, где T и q задаются уравнениями (3.163) и (3.164), получим

$$\mathrm{T}_{N+1/2}(u_L-u_N)+\sum_{i=1}^{N} Q_i=0. \tag{3.167}$$

Очевидно, что $\mathrm{T}_{N+1/2}(u_L-u_N)$ — расход через границу, который должен быть сбалансирован с нагнетанием и отбором.

3.7.1.2. Параболические задачи

Для доказательства существования решения рассмотрим конкретный вид аппроксимации по времени. Для неявного метода

$$-\mathrm{T}u^{n+1}=\frac{\mathrm{B}}{\Delta t}(u^{n+1}-u^n)+Q^{n+1}, \tag{3.168}$$

где $\mathrm{T}+\mathrm{B}/\Delta t$ — матрица, которую предстоит обратить. Поскольку элементы B положительны, то $\mathrm{T}+\mathrm{B}/\Delta t$ — матрица со строгим *диагональным преобладанием* и, следовательно, она является положительно определенной. Это означает, что уравнение (3.168) имеет единственное решение (см. приложение А). Такое же утверждение справедливо для метода Кранка—Николсона:

$$-\frac{1}{2}(\mathrm{T}u^n+\mathrm{T}u^{n+1})=\frac{\mathrm{B}}{\Delta t}(u^{n+1}-u^n)+\frac{1}{2}(Q^n+Q^{n+1}).$$

Здесь обращаемая матрица имеет вид $\left(\frac{1}{2}\mathrm{T}+\mathrm{B}/\Delta t\right)$.

Понятие материального баланса естественным образом распространяется на нестационарные задачи. Масса флюида в блоке i представляется как $m_i=V_i(\phi/B)_i$, а скорость изменения массы в результате сжимаемости будет

$$\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t}=c_iV_i\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=V_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\phi}{B}\right)_i. \tag{3.169}$$

Снова, суммируя уравнение (3.162), получим

$$Q_L+\sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N}Q_i=0, \tag{3.170}$$

что является непрерывной во времени формой уравнения материального баланса. При дискретизации по времени уравнение приобретает вид

$$Q_L\Delta t+\sum_{i=1}^{N}(m_i^{n+1}-m_i^n)+\Delta t\sum_{i=1}^{N}Q_i=0, \tag{3.171}$$

что точно выражает материальный баланс между t^n и t^{n+1}, если Q_i и Q_L постоянны в этом промежутке времени.

Вне зависимости от того удовлетворяет или нет данная дискретизация по времени уравнению (3.171), она зависит от определения оператора $\Delta_t(cu)$, аппроксимирующего $\Delta t(cV\partial u/\partial t)_i$. Из уравнения (3.169) следует, что любая *аппроксимация* на одном временном слое *будет удовлетворять* уравнению (3.171), *если* Δ_t *удовлетворяет условию*

$$\Delta_t(c_iu_i)=m_i^{n+1}-m_i^n=V_i\left[\left(\frac{\phi}{B}\right)_i^{n+1}-\left(\frac{\phi}{B}\right)_i^n\right]. \tag{3.172}$$

Таким образом, аппроксимация, удовлетворяющая соотношению

$$\Delta_t(c_iu_i)=V_i[(c_iu_i)^{n+1}-(c_iu_i)^n],$$

не удовлетворяет условию (3.172), что легко проверить. Чтобы получить точное значение расширения слабо сжимаемого флюида, запишем $m_i{}^{n+1}-m^n{}_i$ как

$$m_i^{n+1}-m_i^n=V_i\left[\frac{(\phi^{n+1}-\phi^n)}{B^{n+1}}+\left(\frac{1}{B^{n+1}}-\frac{1}{B^n}\right)\phi^n\right]$$

$$\equiv V_i\left[\left(\frac{\phi}{B}\right)^{n+1}-\left(\frac{\phi}{B}\right)^n\right]_i.$$

Используя

$$\phi^{n+1}-\phi^n=\phi^0c_{\mathrm{R}}(u^{n+1}-u^n)$$

и

$$\left(\frac{1}{B^{n+1}}-\frac{1}{B^n}\right)=\frac{c_{\mathrm{f}}}{B^0}(u^{n+1}-u^n),$$

получим

$$m_i^{n+1} - m_i^n = V_i \left(\frac{\phi^n c_f}{B^0} + \frac{\phi^0 c_R}{B^{n+1}} \right)_i (u^{n+1} - u^n)_i = V_i \bar{c}_i (u^{n+1}) (u^{n+1} - u^n)_i. \tag{3.173}$$

Другой, одинаково обоснованной аппроксимацией является

$$m_i^{n+1} - m_i^n = V_i \left(\frac{\phi^{n+1} c_f}{B^0} + \frac{\phi^0 c_R}{B^n} \right)_i (u^{n+1} - u^n)_i = V_i \bar{\bar{c}}_i (u^{n+1}) (u^{n+1} - u^n)_i. \tag{3.174}$$

Очевидно, что если $c_R=0$, уравнение (3.173) предпочтительнее, а при $c_f=0$ предпочтительнее уравнение (3.174), поскольку соответствующий коэффициент становится явным.

При том или ином определении уравнения любого двухстадийного метода, в частности явного, с обратной разностью и Кранка — Николсона, будут удовлетворять условию материального баланса (3.171).

3.7.1.3. Общие замечания о материальном балансе

Были рассмотрены два существенных свойства разностных уравнений, обеспечивающих материальный баланс.

а) *Матрица фильтрационных коэффициентов* T *должна быть симметричной и иметь нулевые суммы по строкам за исключением границ.*

Хотя сказанное является достаточным условием, материальный баланс может удовлетворяться и для некоторых схем с несимметричными матрицами (см. гл. 5);

б) *Раскрытие членов, содержащих производную по времени, должно выполняться в виде, удовлетворяющем определению* (3.172).

Разностные схемы, удовлетворяющие условию сохранения материального баланса, называют «консервативными схемами». Следует отметить, что неконсервативные схемы не обязательно приводят к бессмысленным результатам. Например, если c_f мало, то в уравнении (3.173) мы можем заменить B^{n+1} на B^n, что позволяет избежать итерации по c и приводит к равнозначной аппроксимации. Аналогичным образом можно использовать несимметричную форму матрицы T, упомянутую в разделе 3.6.2.

Однако в том случае, когда уравнения сильно нелинейны, применение неконсервативных схем может не только привести к серьезным погрешностям в материальном балансе, но и послужить причиной неустойчивости. Это наблюдалось при численных расчетах задач динамики жидкостей (Аракава, 1966). Поэтому для нелинейных уравнений рекомендуются консервативные схемы.

3.7.2. Учет нелинейностей

Если дифференциальное уравнение нелинейно, проводимости и (или) коэффициент при временной производной — функции решения (т. е. зависимые переменные). Для данного случая уравнение (3.125) можно записать следующим образом:

$$T_{i+1/2}(x_i,\ x_{i+1},\ u_i, u_{i+1})\,(u_{i+1}-u_i)+T_{i-1/2}(x_i,\ x_{i-1},$$

$$u_i,\ u_{i-1})\,(u_{i-1}-u_i)=V_i c_i\ (x_i,u_i)\frac{du_i}{dt}+V_i q_i,\quad i=1,\ldots,N, \qquad (3.175)$$

где предполагается, что $T_{i+1/2}$ — функция только значений u и x в узлах i и $i+1$. Следовательно, в результате указанной полудискретизации возникает следующее нелинейное матричное уравнение:

$$-T(u)\,u=B(u)\frac{du}{dt}+q. \qquad (3.176)$$

В зависимости от способа аппроксимации производной по времени можно получить *либо линейные, либо нелинейные* алгебраические уравнения. Последние могут быть линеаризованы различными способами или решены итерационно. Вообще нелинейность при однофазной фильтрации влияет слабее, чем при многофазной. Соответственно и некоторые из методов, которые обсуждаются здесь, необходимы для решения задач многофазной фильтрации (см. гл. 5) и обычно не используются при расчетах однофазной фильтрации.

3.7.2.1. Явные аппроксимации по времени

Схемой с прямой разностью, удовлетворяющей условию материального баланса, является

$$-T(u^n)\,u^n=\frac{1}{\Delta t}B(u^{n+1})\,(u^{n+1}-u^n)+Q. \qquad (3.177)$$

Отметим, что матрица T может вычисляться явно, следовательно, единственная нелинейность заключена в матрице B и проявляется в результате условия материального баланса, представленного уравнением (3.173). Уравнение (3.177) включает N скалярных нелинейных уравнений вида $f(u_i^{n+1})$, которые можно решать любым из стандартных методов (Ортега и Рейнболдт, 1970; Островский, 1973). Нелинейность проявляется слабо, поэтому даже при простейшем методе получают удовлетворительный результат. Например, для выполнения отдельной итерации путем подстановки, можно представить i-е уравнение системы (3.177) в виде

$$u_i^{n+1}=\frac{\Delta t}{V_i\bar{c}_i(u^{n+1})}\{-Q_i+[T^n{}_{i+1/2}(u_{i+1}-u_i)^n+$$

$$+T^n{}_{i-1/2}(u_{i-1}-u_i)^n]\}+u^n{}_i=f(u_i^{n+1}) \qquad (3.178)$$

и итерировать (отметим, что $u^{(\nu)}$ всегда берется на неизвестном временном слое) как

$$u_i^{(\nu)} = f(u_i^{(\nu-1)}), \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

при начальном значении $f(u_i^{(0)}) = f(u^n{}_i)$ до тех пор, пока не удовлетворяется некоторый заданный критерий сходимости

$$\left| \frac{u_i^{(\nu)} - u_i^{(\nu+1)}}{u_i^{(\nu+1)}} \right| < \varepsilon.$$

Другие методы, такие, как метод ложного положения и метод Ньютона, приемлемы в равной степени.

Исследуем устойчивость явного метода. Для линейного случая условие устойчивости составит: $\alpha = \Delta t / h^2 \leqslant 1/2$. Легко видеть, что для линейного уравнения

$$\lambda \partial^2 u / \partial x^2 = c \partial u / \partial t$$

соответствующим условием является

$$C\alpha = \left(\frac{\lambda}{c}\right) \frac{\Delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Используя свойство разностных уравнений положительного типа (Форсайт и Вазов, 1960, раздел 14.1), можно обобщить результаты для уравнения (3.175). Запишем уравнение (3.175) в виде

$$u_i^{n+1} = \frac{\Delta t}{V_i c_i} \left[\mathrm{T}_{i-1/2} u^n{}_{i-1} + \left(\frac{V_i c_i}{\Delta t} - \mathrm{T}_{i-1/2} - \mathrm{T}_{i+1/2} \right) u^n{}_i + \right.$$

$$\left. + \mathrm{T}_{i+1/2} u^n{}_{i+1} - q_i V_i \right].$$

Если все коэффициенты правой части положительны, то разностная аппроксимация называется аппроксимацией положительного типа; она устойчива. Это приводит к условию

$$\frac{\mathrm{T}_{i+1/2} + \mathrm{T}_{i-1/2}}{V_i c_i} \Delta t \leq 1.$$

Поскольку такое условие соблюдается для всех i, то устойчивость явного метода будет сохранена, если

$$\max_i \left[\frac{(\mathrm{T}_{i+1/2} + \mathrm{T}_{i-1/2})}{V_i c_i} \right] \Delta t \leq 1 \qquad (3.179)$$

на каждом временном шаге.

Отметим, что предел устойчивости зависит от времени; он снижается с уменьшением сжимаемости системы. К сожалению, ограничение, накладываемое условием устойчивости (3.179), приводит к малым практически неприемлемым временным шагам для типичных значений сжимаемости пластовых флюидов (см. упр. 3.10).

Использовались другие, безусловно, устойчивые явные методы (Шеффилд, 1970), однако их применение ограниченно. Можно также применять явные методы типа Рунге—Кутта, поскольку в них

используются уравнения с коэффициентами, вычисленными на известном временном слое. Установлено, что для приведенной в разделе 3.5.1 задачи о фильтрации газа стандартная методика с использованием уравнений Рунге—Кутта четвертого порядка обеспечивает хорошую устойчивость и имеет преимущество по сравнению с методами с прямой и обратной разностями с точки зрения затрат машинного времени.

3.7.2.2. Неявные аппроксимации по времени

Рассмотрим аппроксимацию обратной разностью для уравнения (3.176)

$$-\mathrm{T}(u^{n+1})\,u^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}\,\mathrm{B}(u^{n+1})\,(u^{n+1} - u^n) + Q. \qquad (3.180)$$

В данном уравнении нелинейность обусловлена тем, что $\mathrm{T}(u^{n+1})$ и $\mathrm{B}(u^{n+1})$ — матрицы с элементами, являющимися функциями u^{n+1}. При обсуждении используем следующие обозначения:

$$\mathrm{T}(u^{n+1}) \equiv \mathrm{T}^{n+1},$$

$$\mathrm{B}(u^{n+1}) \equiv \mathrm{B}^{n+1}.$$

Верхний индекс в обозначении матрицы или вектора соответствует номеру временного слоя или итерации, для которой определяют элементы матрицы. Например, $\mathrm{T}^{(\nu)}$ означает, что элементы T вычисляют с использованием $u^{(\nu)}$.

Простая итерация. Простейший метод решения уравнения (3.180) можно получить, если записать

$$\left(\mathrm{T}^{(\nu-1)} + \frac{1}{\Delta t}\,\mathrm{B}^{(\nu-1)}\right) u^{(\nu)} = \frac{1}{\Delta t}\,\mathrm{B}^{(\nu-1)} u^n - Q, \quad \nu = 1,\ 2,\ldots \qquad (3.181)$$

при $u^0 = u^n$ в качестве начального приближения. Итерационный процесс продолжается до достижения сходимости результатов решения. Каждая итерация требует того же объема вычислений, что и решение на временном шаге для соответствующей линейной задачи. Для рассматриваемого простого однофазного случая нелинейность проявляется слабо и итерационный процесс оказывается быстро сходящимся.

Метод Ньютона. В методе Ньютона (Ньютона — Рафсона) используется более эффективная итерационная схема, также пригодная для сильно нелинейных задач, представленных далее. Систему нелинейных уравнений, заданную уравнением (3.180), можно записать как

$$\left(\mathrm{T}^{n+1} + \frac{1}{\Delta t}\,\mathrm{B}^{n+1}\right) u^{n+1} - \frac{1}{\Delta t}\,\mathrm{B}^{n+1} u^n + Q = 0. \qquad (3.182a)$$

Обозначив левую часть данного уравнения через f, получим

$$f(u^{n+1}) \equiv f^{n+1} = 0. \qquad (3.182b)$$

Систему нелинейных уравнений представленного вида можно решить методом Ньютона следующим образом (Генричи, 1962):

$$u^{(\nu)} - u^{(\nu-1)} = -[\mathrm{F}^{(\nu-1)}]^{-1} f^{(\nu-1)}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \tag{3.183}$$

где F — матрица Якоби векторной функции f:

$$\mathrm{F}^{(\nu)} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right)^{(\nu)}, \tag{3.184}$$

соответствующая векторному обобщению производной, используемой в классическом методе Ньютона для одного уравнения. Уравнение (3.183) можно записать в виде, более удобном для вычислений:

$$\mathrm{F}^{(\nu-1)}\delta^{\nu} = -f^{(\nu-1)}, \tag{3.185а}$$

и

$$u^{(\nu)} = u^{(\nu-1)} + \delta^{(\nu)}, \quad \nu = 1,2, \ldots \tag{3.185в}$$

при

$$u^{(0)} = u^{n}.$$

В ходе итераций, если результаты, полученные по методу, сходятся, то δ и f стремятся к нулю.

Возможны несколько вариантов метода Ньютона. Они рассматриваются, например, в работах Ортеги и Рейнболдта (1970) и Островского (1973). Описанный стандартный метод называют также *методом переменных касательных.*

При *методе переменных секущих или методе хорд* элементы F оценивают как

$$\frac{\partial f_i^{(\nu)}}{\partial u_j} = \frac{f_i(\ldots, u_j^{(\nu)}, \ldots) - f_i(\ldots, u_j^{(\nu-1)}, \ldots)}{u_j^{(\nu)} - u_j^{(\nu-1)}}. \tag{3.186}$$

Можно получить и два других метода, если якобиан определять только один раз и при дальнейших итерациях принимать постоянным. Эти методы называют соответственно методом *фиксированных касательных* и *фиксированных секущих.* Подобные итерационные схемы называются стационарными. Для каждого метода мы можем записать

$$\mathrm{F}^{n}\delta^{(\nu)} = -f^{(\nu-1)}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \tag{3.187}$$

где F — матрица, выраженная через u на старом временном слое n. При такой схеме снижается объем вычислений на одну итерацию, однако скорость сходимости также снижается.

Рассмотрим особенности применения метода Ньютона. Из уравнения (3.185) ясно, что основная задача заключается в вычислении матрицы F. Из рассмотрения уравнения (3.175) видно, что

F будет иметь такую же разреженную структуру, что и матрица T, поскольку для данной строки i

$$\frac{\partial f_i}{\partial u_{i-1}} \quad \frac{\partial f_i}{\partial u_i} \quad \text{и} \quad \frac{\partial f_i}{\partial u_{i+1}}$$

не будут равны нулю.

Для i-го рассматриваемого уравнения имеем:

$$\frac{\partial f_i}{\partial u_{i-1}} = T_{i-1/2} + \frac{\partial T_{i-1/2}}{\partial u_{i-1}} (u_{i-1} - u_i), \tag{3.188a}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial u_i} = -(T_{i-1/2} + T_{i+1/2}) + \frac{\partial T_{i-1/2}}{\partial u_i} (u_{i-1} - u_i) +$$

$$+ \frac{\partial T_{i+1/2}}{\partial u_i} (u_{i+1} - u_i) - \frac{V_i}{\Delta t} \left[c_i + \frac{\partial c_i}{\partial u_i} (u_i - u^n{}_i) \right], \tag{3.188b}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial u_{i+1}} = T_{i+1/2} + \frac{\partial T_{i+1/2}}{\partial u_{i+1}} (u_{i+1} - u_i). \tag{3.188c}$$

Запишем F в удобном виде:

$$F = T + T' + \frac{1}{\Delta t} (B + B'), \tag{3.189}$$

где ненулевыми элементами T и B являются

$$t'_{i,\,i-1} = \frac{\partial T_{i-1/2}}{\partial u_{i-1}} (u_{i-1} - u_i), \tag{3.190a}$$

$$t'_{i,\,i} = \frac{\partial T_{i-1/2}}{\partial u_i} (u_{i-1} - u_i) + \frac{\partial T_{i+1/2}}{\partial u_i} (u_{i+1} - u_i), \tag{3.190b}$$

$$t'_{i,\,i+1} = \frac{\partial T_{i+1/2}}{\partial u_{i+1}} (u_{i+1} - u_i), \tag{3.190c}$$

$$b'_{i,\,i} = V_i \frac{\partial c_i}{\partial u_i} (u_i - u^n{}_i). \tag{3.191}$$

Матричное уравнение метода Ньютона (3.185а) принимает вид

$$\left[T + \frac{1}{\Delta t} B + T' + \frac{1}{\Delta t} B' \right]^{(\nu)} \delta^{(\nu+1)} = - T^{(\nu)} u^{(\nu)} - \frac{1}{\Delta t} B^{(\nu)} (u^{(\nu)} - u^n) - Q. \tag{3.192}$$

Рассмотрим особый случай линейных уравнений, в которых $T' = B' \equiv 0$. При $u^{(0)} = u^n$ первая итерация для (3.192) имеет вид

$$\left(T + \frac{1}{\Delta t} B \right) (u^{(1)} - u^n) = - T u^n - Q. \tag{3.193}$$

Сравнение с (3.180) показывает, что эти два уравнения тождественны, если $u^{(1)} = u^{n+1}$. Следовательно, *первая итерация метода Ньютона* (3.183) *соответствует решению линеаризованного варианта краевой задачи.* Аналогичный подход возможен для метода Кранка — Николсона. Чтобы этот метод сохранил точность $O(\Delta t^2)$

в нелинейном случае, все нелинейности должны вычисляться на $n+1/2$ слое:

$$-\frac{1}{2}(\mathrm{T}^{n+1/2}u^{n+1}+\mathrm{T}^{n+1/2}u^{n})=\frac{1}{\Delta t}\mathrm{B}^{n+1/2}(u^{n+1}-u^{n})+Q. \quad (3.194)$$

Отметим, что уравнение (3.194) можно переписать в форме (3.182а)

$$\left(\mathrm{T}^{n+1/2}+\frac{2}{\Delta t}\mathrm{B}^{n+1/2}\right)(u^{n+1}-u^{n})=-2(\mathrm{T}^{n+1/2}u^{n}+Q). \quad (3.195)$$

Если слой $n+1/2$ аппроксимируется выражением

$$u^{n+1/2}=\frac{1}{2}(u^{n}+u^{n+1}),$$

то матрицы $\mathrm{T}^{n+1/2}$ и $\mathrm{B}^{n+1/2}$ снова становятся функциями u^{n+1} и для данной задачи можно записать уравнение метода Ньютона по прямой аналогии с уравнением (3.192)

$$\left[\mathrm{T}+\frac{2}{\Delta t}\mathrm{B}+\left(\mathrm{T}+\frac{2}{\Delta t}\mathrm{B}\right)'\right]^{(\nu)}(u^{(\nu+1)}-u^{(\nu)})=-2(\mathrm{T}^{(\nu)}u^{(\nu)}+Q)+$$
$$+\left(\mathrm{T}+\frac{2}{\Delta t}\mathrm{B}\right)^{(\nu)}(u^{(\nu)}-u^{n}). \quad (3.196)$$

Уравнение (3.194) также можно решать в две стадии. Как показано в разделе 3.3.2, его можно записать в виде

$$-\mathrm{T}^{n+1/2}u^{n}=\frac{2}{\Delta t}\mathrm{B}^{n+1/2}(u^{n+1/2}-u^{n})+Q, \quad (3.197а)$$

$$-\mathrm{T}^{n+1/2}u^{n+1}=\frac{2}{\Delta t}\mathrm{B}^{n+1/2}(u^{n+1}-u^{n+1/2})+Q. \quad (3.197b)$$

Уравнение (3.197а) явного типа, но матрицы коэффициентов находятся на неизвестном временном слое $\left(n+\frac{1}{2}\right)$. Даже в том случае, если данное уравнение нелинейно, оно решается проще, чем уравнение неявного типа (например, простой итерацией). Уравнение (3.197b) неявного типа линейно, поскольку $u^{n+1/2}$ теперь известно.

3.7.2.3. Методы линеаризации

Простая итерация. Простейший и наиболее часто используемый метод линеаризации заключается в том, что все нелинейности сдвигаются назад на один временной шаг. Таким образом, для метода с обратной разностью нужно решить

$$-T^{n}u^{n+1}=\frac{1}{\Delta t}\mathrm{B}^{n}(u^{n+1}-u^{n})+Q.$$

Важно учесть, что линеаризация данного вида будет снижать порядок аппроксимации до $O(\Delta t)$, и, следовательно, для методов высшего порядка ее применение не обосновано.

Экстраполяция. Экстраполяция решения на желаемый временной слой может сохранить порядок сходимости для методов высшего порядка. Предположим, что требуется определить u на слое $(n+l)$, где $0<l\leqslant 1$. Тогда, вводя линейную экстраполяцию и используя u^{n-1} и u^n, получим

$$u(t^{n+l}) \approx u^{n+l} = u^n + \frac{\Delta t^n}{\Delta t^{n-1}} l (u^n - u^{n-1}). \qquad (3.198)$$

Возможна экстраполяция с сохранением высокого порядка, но при этом повышаются требования к объему памяти. Поскольку уравнение (3.198) — аппроксимация $u(t^{n+l})$ с точностью $O(\Delta t)$, то методы второго порядка будут сохранять свой порядок, когда матрицы вычисляются на экстраполированных временных слоях. Подобный подход оправдывается в тех случаях, когда нелинейность «не слишком сильная» и ее можно использовать при однофазной фильтрации и фильтрации смешивающихся флюидов. Для многофазной фильтрации явный характер экстраполяции вызывает ограничения, связанные с устойчивостью, как в явной (либо линеаризованной с помощью сдвига назад), так и неявной схемах.

Следует отметить, что Дуглас (1961) и Дуглас и Джонс (1963) предложили модифицированный метод Кранка—Николсона типа «предиктор-корректор», который имеет точность $O(\Delta t^2)$ и не требует решения нелинейных уравнений.

Полунеявный метод. В заключение рассмотрим метод линеаризации, который является основой «полунеявного» учета проводимостей. Несмотря на то, что данный метод первоначально предназначался для сохранения устойчивости при решении задачи многофазной фильтрации (пояснения см. в гл. 5), он в одинаковой степени пригоден и для любой нелинейной задачи.

Рассмотрим типичный член $\mathrm{T}^{n+1}u^{n+1}$ в нелинейном уравнении (3.180)

$$\mathrm{T}_{i+1/2}(u_i^{n+1},\ u_{i+1}^{n+1})(u_{i+1} - u_i)^{n+1}. \qquad (3.199)$$

Разлагая $\mathrm{T}_{i+1/2}^{n+1}$ в ряд Тейлора и оставив только члены низшего порядка, получим

$$\mathrm{T}_{i+1/2}^{n+1} = \mathrm{T}_{i+1/2}^{n} + \left(\frac{\partial \mathrm{T}_{i+1/2}}{\partial u_i}\right)^n (u_{ii}^{n+1} - u_i^n) + \left(\frac{\partial \mathrm{T}_{i+1/2}}{\partial u_{i+1}}\right)^n (u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n). \qquad (3.200)$$

Подставив (3.200) в (3.199), получим нелинейные члены, подлежащие линеаризации. Это достигается следующим образом:

$$\left(\frac{\partial \mathrm{T}_{i+1/2}}{\partial u_i}\right)(u_i^{n+1} - u_i^n)(u_{i+1} - u_i)^{n+1} \approx$$

$$\approx \left(\frac{\partial \mathrm{T}_{i+1/2}}{\partial u_i}\right)^n (u_i^{n+1} - u_i^n)(u_{i+1} - u_i)^n,$$

где заменили $(u_{i+1}-u_i)^{n+1}$ на $(u_{i+1}-u_i)^n$. При этой аппроксимации уравнение (3.199) линеаризовано, поскольку

$$\mathrm{T}^{n+1}_{i+1/2}(u_{i+1}-u_i)^{n+1} \approx \mathrm{T}^{n}_{i+1/2}(u_{i+1}-u_i)^{n+1} + \\ + \left[\left(\frac{\partial \mathrm{T}_{i+1/2}}{\partial u_i}\right)^n (u_{i+1}-u_i)^n\right](u_i^{n+1}-u_i^n) + \\ + \left[\left(\frac{\partial \mathrm{T}_{i+1/2}}{\partial u_{i+1}}\right)^n (u_{i+1}-u_i)^n\right](u_{i+1}^{n+1}-u_{i+1}^n). \qquad (3.201)$$

Очевидно, что первый член является основной частью $\mathrm{T}^n u^{n+1}$, а два других — составными частями $\mathrm{T}'^n(u^{n+1}-u^n)$, где T' определяется уравнениями (3.190). Линеаризация $\mathrm{B}^{n+1}(u^{n+1}-u^n)$ совпадает с $\mathrm{B}^n(u^{n+1}-u^n)$, поскольку в нелинейных членах $(u^{n+1}-u^n)_i$ заменили на $(u^n-u^n)_i=0$. Следовательно, линеаризованная форма уравнения (3.180) будет иметь вид

$$\left[\mathrm{T}+\frac{1}{\Delta t}\mathrm{B}+\mathrm{T}'\right]^n (u^{n+1}-u^n) = \mathrm{T}^n u^n - Q. \qquad (3.202)$$

Уравнение (3.202) можно сопоставить с итерацией по Ньютону для $\nu=0$ [см. уравнение (3.192)]. Поскольку из уравнения (3.191) следует, что $\mathrm{B}'^n \equiv 0$, то уравнение (3.202) будет тождественно уравнению (3.192), если положить $u^{(1)}=u^{n+1}$. Следовательно, можно сделать следующий важный вывод. *Линеаризация (3.201) идентичная первой итерации в методе Ньютона.*

3.8. ВЫВОДЫ

В данной главе была сделана попытка ввести максимальное число понятий, необходимых при моделировании пластов, на примере простой задачи одномерной однофазной фильтрации. Существенная часть изложенного материала представляет интерес как основа для предстоящего излучения многофазной фильтрации.

Данная глава не содержит обзора конечно-разностных методов, однако в тексте упоминается несколько фундаментальных монографий, имеющих отношение к данному вопросу.

Читатель, пытающийся разработать машинные программы для задач одномерной однофазной фильтрации, должен познакомиться также с материалом следующей главы.

Упражнения

Упражнение 3.1

Получить «одностороннюю» аппроксимацию для U' на границе

$$U'_1 = (-U_3+4U_2-3U_1)/2h + O(h^2). \qquad (\mathrm{A})$$

Схема решения

Метод (а) — При разложении U_2 и U_3 относительно U_1 использовать ряды Тейлора.

Метод (b) — Показать, что интерполирующий полином второй степени, проходящий через U_1, U_2 и U_3, представляет выражение

$$P_2 = U_1 + (U_2 - U_1)\,\alpha + (U_3 - 2U_2 + U_1)\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}, \qquad \text{(B)}$$

где $\alpha = x/h$. После этого показать, что при $U'_1 \simeq P'_2(x=0)$ получим исходную формулу (A).

Упражнение 3.2

Получить разностное уравнение (3.20) вариационным методом, используя базисные функции-шапочки.

Схема решения

Вначале показать, что функция $v(x)$, заданная уравнением (3.24), линейна в каждом интервале, т. е. для $x \in (x_i,\ x_{i+1})$

$$v(x) = c_i + \xi(c_{i+1} - c_i),\quad \xi = (x - x_i)/h. \qquad \text{(A)}$$

Затем, используя уравнение (3.23), показать, что минимизируемый функционал может быть аппроксимирован выражением

$$I_A = \sum_i \left[\frac{1}{2h}(c_{i+1} - c_i)^2 - \frac{h}{2}(q_i c_i + q_{i+1} c_{i+1})\right]. \qquad \text{(B)}$$

Наконец, показать, что соотношения $\partial I_A/\partial c_i$ приводят к

$$\frac{1}{h^2}\Delta^2 c_i - q_i = 0, \qquad \text{(C)}$$

т. е. к желаемому уравнению.

Упражнение 3.3

Дано линейное уравнение $\nabla^2 u = q$, аппроксимированное $1/h^2 \Delta^2 u_i = q_i$ с граничными условиями $u_0 = u_{N+1} = 0$. Доказать, что $\|e\| \to 0$ при $h \to 0$.

Схема решения

Можно предположить, что решение уравнения (3.42) для погрешности имеет вид

$$e_i = \sum_k e_i^{(k)}, \qquad \text{(A)}$$

где $e_i^{(k)}$ удовлетворяет условию

$$\frac{1}{h^2}\Delta^2 e_i^{(k)} = -\delta_{ik} R_i. \qquad \text{(B)}$$

Решением (B) является

$$e_k^{(k)} = R_k \frac{k(N+1-k)}{N+1},$$

$$e_i^{(k)} = \frac{i}{k}\, e_k^{(k)},\quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1,$$

$$e_i^{(k)} = \frac{(N+1-i)}{(N+1-k)} e_k^{(k)},\quad i = k+1,\ \ldots,\ N,$$

и, следовательно,

$$\max_{i,\,k} |e_i^{(k)}| < C \max_k |R_k|.$$

Желаемый результат получен, так как $R_i = O(h^2)$.

Упражнение 3.4

Получить условия устойчивости для прямой (a) и обратной (b) разностных аппроксимаций, используя метод рядов Фурье.

Схема решения

а) подставить

$$u_i^{n\,(m)} = \zeta^n \exp(\sqrt{-1}mih) \tag{A}$$

в уравнение (3.30) и получить

$$\xi = 1 + \alpha(\exp(\sqrt{-1}\,mh) + \exp(-\sqrt{-1}mh) - 2). \tag{B}$$

Используя соотношения $\exp(\sqrt{-1}\,x) = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$ и $1 - \cos x = 2\sin^2(\alpha/2)$, получим

$$\xi = 1 - 2\alpha[1 - \cos(mh)] = 1 - 4\alpha \sin^2\left(\frac{mh}{2}\right). \tag{C}$$

Рассматривая все $m > 0$ и $h \to 0$, показать, что

$$|\xi| \leqslant 1, \text{ если } \alpha \leqslant \frac{1}{2}.$$

в) Используя ту же процедуру для уравнения (3.31), получить коэффициент усиления в виде

$$\xi = \frac{1}{1 + 2\alpha[1 - \cos(mh)]} = \frac{1}{1 + 4\alpha \sin^2(mh/2)}, \tag{Д}$$

при этом $|\xi| < 1$ для всех α.

Упражнение 3.5

Исследовать устойчивость методов с прямой (a) и обратной (в) разностями матричным методом.

Схема решения

Пусть M — матрица размера $N \times N$

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} a & -b & & & & \\ -b & a & -b & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & -b & a & -b \\ & & & & -b & a \end{bmatrix},$$

где $a=2b+c$ и a, b, $c>0$. Собственные значения λ_s и собственные векторы u_s матрицы M имеют вид

$$\lambda_s = -c - 4b\sin^2\frac{s\pi}{2(N+1)}, \quad s=1, 2, \ldots, N. \tag{A}$$

$$u_s = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{s\pi}{N+1}\right) \\ \vdots \\ \sin\left(\frac{is\pi}{N+1}\right) \\ \vdots \\ \sin\left(\frac{Ns\pi}{N+1}\right) \end{bmatrix}$$

а) используем формулу (A) с соответствующим выбором констант и получим собственные значения $B=\alpha A+I$ в уравнении метода с прямой разностью

$$\lambda_s = 1 - 4\alpha\sin^2\frac{s\pi}{2(N+1)}, \quad s=1, 2, \ldots, N \tag{B}$$

и условие устойчивости из $|\lambda_i|<1$;

в) собственные значения $B=-(\alpha A+I)^{-1}$ для уравнения метода с обратной разностью имеют вид

$$\lambda_s = \frac{1}{1+4\alpha\sin^2\left(\frac{s\pi}{2(N+1)}\right)}. \tag{C}$$

Указание. Если A имеет собственные значения λ_i, то для A^{-1} они соответствуют $1/\lambda_i$.

Упражнение 3.6

Исследовать согласованность аппроксимации Дюфора—Франкела [см. уравнение (3.58)].

Схема решения

Покажем, что локальная ошибка аппроксимации имеет вид

$$R_i = O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) + O\left[\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right]. \tag{A}$$

Сформулируем условие согласованности при $\Delta t\to 0$. Покажем, что для $\alpha=\text{const}$ аппроксимация (3.58) сходится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial t} + \alpha^2\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \tag{B}$$

Указанный результат можно использовать в обратном порядке. Вначале сформируем аппроксимацию центральной разностью для $a^2(\partial^2 u/\partial t^2)$. Затем покажем, что после добавления этого члена к аппроксимации Ричардсона получим схему Дюфора — Франкела. Подобные методы «возмущения» часто используются для получения новых методов.

Упражнение 3.7

Определить порядок аппроксимации уравнения (3.66).

Схема решения

Разложим члены в ряд Тейлора относительно $u^n{}_i$ и получим

$$R_l = -U^{\mathrm{IV}}\frac{h^2}{12} - U'''\frac{\Delta t^2}{3} + O(h^3) + O(\Delta t^3).$$

Упражнение 3.8

Вывести матричную форму метода Рунге—Кутта для линейного уравнения (3.69) и рассмотреть ее преимущества в вычислительном аспекте по сравнению с рекурсивным алгоритмом.

Схема решения

Обозначим $\mathrm{M} = -\frac{1}{h^2}\mathrm{E}$, тогда коэффициенты a_i будут иметь вид

$$a_1 = \mathrm{M}u^n,$$

$$a_2 = \left(\mathrm{M} + \frac{1}{2}\Delta t\mathrm{M}^2\right)u^n.$$

После подстановки a_1 и a_2 в уравнение (3.79) получим:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t\left[\mathrm{M} + \frac{1}{2}\Delta t M^2 + \frac{1}{6}\Delta t^2\mathrm{M}^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{24}\Delta t^3 M^4\right]u^n = u^n + \Delta t\mathrm{B}(\Delta t)\,u^n. \qquad \text{(A)}$$

Рекурсивный алгоритм можно записать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= Mu^n \\ a_2 &= a_1 + \frac{1}{2}\Delta t\mathrm{M}a_1 \\ a_3 &= a_1 + \frac{1}{2}\Delta t\mathrm{M}a_2 \\ a_4 &= a_1 + \Delta t\mathrm{M}a_3 \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(B)}$$

Если Δt=const, алгоритм (A) будет осуществляться быстрее, поскольку B — все еще трехдиагональная матрица. Реализация алгоритма (B) потребует приблизительно в четыре раза больше ма-

шинного времени. Если Δt — переменная, то оба алгоритма сравнимы, поскольку B может оцениваться как

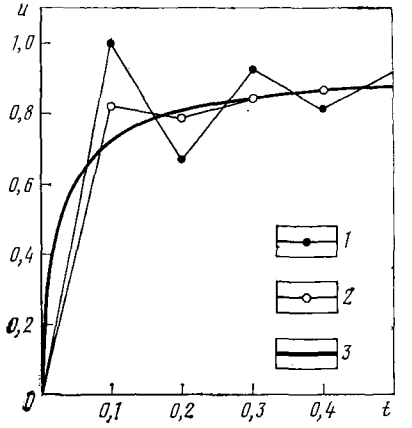
$$B = M\left[I + \frac{1}{2}\Delta t M\left(I + \frac{1}{3}\Delta t M\left(I + \frac{1}{4}\Delta t M\right)\right)\right]. \qquad (C)$$

Упражнение 3.9

Исследовать свойства схемы второго порядка Розенброка (3.89) и (3.90) и сравнить ее со схемой Кранка—Николсона.

Схема решения

Можно показать, что при $\Delta t \to \infty$ коэффициент усиления для схемы Кранка — Николсона стремится к -1, а для схемы Розенброка — к 0. Схемы, для которых $\xi \to 0$ при $\Delta t \to \infty$, называются L-допустимыми схемами (Эль, 1973). Поэтому осцилляции результатов по методу Кранка — Николсона значительно сильнее для больших Δt, как это показано на рисунке для простого уравнения диффузии $\partial^2 u/\partial x^2 = \partial u/\partial t$ с начальным условием $u(x, 0) = 0$ и граничными условиями $u(0, t) = 1$, $u_x(1, t) = 0$. На рисунке показаны результаты решения как функции времени при $x = 0{,}1$, $\Delta x = 0{,}1$ и $\Delta t = 0{,}1$.



1 — схема Кранка — Николсона; *2* — схема Розенброка; *3* — точное решение

Упражнение 3.10

Найти предел устойчивости для метода с прямой разностью, используемого при решении одномерной задачи со следующими параметрами:

$$\Delta x = 30{,}47 \text{ м}; \quad k = 100 \text{ мкм}^2; \quad \mu = 1 \text{ мПа·с}; \quad B = 1;$$

$$\phi = 0{,}1 \quad c_f = 5{,}8 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}; \quad c_R = 4{,}35 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}.$$

Схема решения

Для уравнения (3.179) с аппроксимацией

$$c \sim \frac{\phi}{B}(c_f + c_R), \qquad (A)$$

с постоянным поперечным сечением пласта получим

$$\Delta t \leq \frac{1}{2}\frac{\mu\phi\Delta x^2(c_f + c_R)}{k}. \qquad (B)$$

После подстановки численных значений в (B) имеем $\Delta t \leqslant 5{,}35 \times 10^{-3}$ сут.

ГЛАВА 4

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ

4.1. ВВЕДЕНИЕ

Все одномерные задачи фильтрации, которые были описаны в предыдущей главе (кроме случая периодических граничных условий), приводятся к системе из N совместных алгебраических уравнений следующего вида:

$$a_1u_1+b_1u_2=d_1,$$

$$c_iu_{i-1}+a_iu_i+b_iu_{i+1}=d_i, \quad i=2, 3, \ldots, N-1,$$

$$c_Nu_{N-1}+a_Nu_N=d_N. \tag{4.1}$$

В этих уравнениях известны коэффициенты a_i, b_i, c_i и d_i (для правых частей). Такую систему уравнений также можно записать в матричной форме:

$$Au=d, \tag{4.2}$$

где A — трехдиагональная матрица; $u^{\mathrm{T}}=[u_1, u_2, \ldots, u_N]$, $d^{\mathrm{T}}=[d_1, d_2, \ldots, d_N]$;

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & c_N & a_N \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

Для задач с граничными условиями четвертого рода (циклическими или периодическими граничными условиями) система уравнений имеет несколько отличающийся вид:

$$c_1u_N+a_1u_1+b_1u_2=d_1,$$

$$c_iu_{i-1}+a_iu_i+b_iu_{i+1}=d_i, \quad i=2, 3, \ldots, N-1,$$

$$c_Nu_{N-1}+a_Nu_N+b_Nu_1=d_N. \tag{4.4}$$

Эту систему уравнений можно записать в матричной форме

$$Cu=d, \tag{4.5}$$

где векторы u и d определены, как и в предыдущем случае, а

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & c_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_N & & & c_N & a_N \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

Рассмотрим методы решения уравнений (4.2) и (4.5). Эти уравнения решают методами прямого исключения неизвестных либо каким-нибудь итерационным методом.

Данная глава посвящена методам прямого исключения, а итерационные методы рассмотрим в последующих главах. Это объясняется тем, что ни один из известных итерационных методов не может конкурировать с методами прямого исключения неизвестных при решении одномерных задач.

Для всех случаев предполагается, что решение существует, условия существования решения рассмотрены в предыдущей главе.

4.2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

В начале этого раздела представим общий метод решения для уравнений (4.2) и (4.5), затем рассмотрим алгоритмы для решения некоторых специальных задач. Описать все методы решения различных форм уравнений (4.2) и (4.5) невозможно. Рассмотрим методы, наиболее важные для численного решения практически используемых дифференциальных уравнений в частных производных.

4.2.1. Алгоритм Томаса

Наиболее распространенный метод решения уравнения (4.2) можно получить, записывая A как произведение двух матриц:

$$A=WQ, \tag{4.7}$$

где W — нижняя треугольная матрица; Q — верхняя треугольная матрица. Для рассматриваемой специальной трехдиагональной матрицы A можно записать матрицы Q и W в следующем виде:

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix} w_1 & & & & \\ c_2 & w_2 & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & c_N & w_N \end{bmatrix}, \tag{4.8}$$

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} 1 & q_1 & & & \\ & 1 & q_2 & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & q_{N-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

Отметим, что нижняя диагональ W состоит из тех же самых элементов, что и нижняя диагональ A, а элементы главной диагонали A произвольно были приняты равными единице. Тогда, если элементы WQ равны соответствующим элементам A, можно получить $2N-1$ уравнений для неизвестных:

$$w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_N$$

и

$$q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_{N-1}.$$

Необходимые соотношения имеют вид:

$$w_1=a_1, \tag{4.10}$$

$$q_{i-1}=b_{i-1}/w_{i-1},\ i=2,\ 3,\ \ldots,\ N, \tag{4.11}$$

$$w_i=a_i-c_iq_{i-1},\ i=2,\ 3,\ \ldots,\ N. \tag{4.12}$$

Подставляя уравнение (4.7) в (4.2), получим

$$\mathrm{WQ}u=d. \tag{4.13}$$

Пусть

$$\mathrm{Q}u=g, \tag{4.14}$$

тогда

$$\mathrm{W}g=d. \tag{4.15}$$

Так как W — нижняя треугольная матрица, то первое уравнение системы (4.15) имеет только одно неизвестное и его можно разрешить относительно g_1.

$$g_1=\frac{d_1}{w_1}. \tag{4.16}$$

Остающиеся уравнения системы (4.15) можно решить прямым исключением неизвестных

$$g_i=\frac{d_i-c_ig_{i-1}}{w_i},\quad i=2,\ 3,\ \ldots,\ N. \tag{4.17}$$

Мы видим, что g — вектор правых частей для системы (4.14) с матрицей коэффициентов Q, уже известной из выражений (4.10)—(4.12). Вследствие того, что Q — верхняя треугольная матрица, в последнем уравнении этой системы имеется только одно неизвестное и его можно решить в первую очередь:

$$u_N = g_N.$$

Остающиеся уравнения решают с помощью обратной подстачовки

$$u_i = g_i - q_i u_{i+1} \quad i = N-1, N-2, \ldots, 1. \tag{4.18}$$

При машинных вычислениях не требуется хранить w_i, при этом алгоритм запишем в следующем виде:

1. Полагаем

$$q_1 = \frac{b_1}{a_1}, \quad g_1 = \frac{d_1}{a_1}.$$

2. Вычисляем для $i = 2, 3, \ldots, N$

$$p_i = a_i - c_i q_{i-1},$$

$$q_i = \frac{b_i}{p_i},$$

$$g_i = \frac{d_i - c_i g_{i-1}}{p_i}.$$

3. Полагаем $u_N = g_N$.
4. Вычисляем для $i = N-1, N-2, \ldots, 1$

$$u_i = g_i - q_i u_{i+1}.$$

В приведенном алгоритме для одного узла сетки требуется выполнить следующие арифметические действия: пять умножений или делений и три вычитания. Этот алгоритм в слегка измененном виде приведен в литературе (например, Лапидус, 1962; Рихтмайер и Мортон, 1967; Амес, 1969; фон Розенберг, 1969). В приложении В дана написанная на фортране программа для алгоритма Томаса. Этот алгоритм в сущности представляет собой разновидность алгоритма для метода исключения неизвестных Гаусса.

При использовании этого алгоритма необходимо, чтобы

$$a_1 \neq 0, \tag{4.19}$$

$$p_i = a_i - c_i q_{i-1} \neq 0. \tag{4.20}$$

Если указанные условия не удовлетворяются, можно понизить порядок системы. Необходимо также принимать соответствующие меры, исключающие быстрое нарастание ошибок округления в том случае, когда $|p_i|$ мало.

Эту проблему можно разрешить посредством метода исключения неизвестных с выбором ведущего элемента.

Альберг и др. (1967) обобщили алгоритм Томаса для решения уравнений (4.5), когда c_1 и b_N равны нулю. Алгоритм запишем в следующем виде.

1. Полагаем, что

$$q_1 = \frac{b_1}{a_1}, \quad g_1 = \frac{d_1}{a_1}, \quad s_1 = -\frac{c_1}{a_1}, \quad t_N = 1, \quad v_N = 0.$$

2. Вычисляем для $i=2, 3, \ldots, N$:

$$p_i = a_i - c_i q_{i-1},$$

$$s_i = -\frac{c_i s_{i-1}}{p_i},$$

$$q_i = \frac{b_i}{p_i},$$

$$g_i = \frac{d_i - c_i g_{i-1}}{p_i}.$$

3. Вычисляем для $i=N-1, N-2, \ldots, 1$:

$$t_i = -q_i t_{i+1} + s_i,$$

$$v_i = g_i - q_i v_{i+1}.$$

4. Вычисляем

$$u_N = \frac{d_N - c_N v_{N-1} - b_N v_1}{a_N + t_1 b_N + t_{N-1} c_N}.$$

5. Вычисляем для $i=N-1, N-2, \ldots, 1$:

$$u_i = v_i + t_i u_N.$$

В этом случае на один узел сетки приходится восемь умножений или делений и пять вычитаний.

4.2.2. Алгоритм Танга

Танг (1969) предложил алгоритм для решения уравнений (4.5), который можно получить способом, аналогичным приведенному для алгоритма Томаса.

1. Положим $\zeta_1=0$, $\beta_1=-1$, $\gamma_1=0$.
2. Вычислим

$$\zeta_2 = \frac{d_1}{b_1}, \quad \beta_2 = \frac{a_1}{b_1}, \quad \gamma_2 = \frac{c_1}{b_1}.$$

3. Вычислим для $i=2, 3, \ldots, N-1$:

$$\zeta_{i+1} = (d_i - a_i\zeta_i - c_i\zeta_{i-1}) / b_i,$$
$$\beta_{i+1} = -(a_i\beta_i + c_i\beta_{i-1}) / b_i,$$
$$\gamma_{i+1} = -(a_i\gamma_i + c_i\gamma_{i-1}) b_i.$$

4. Вычислим:

$$A = \zeta_N / (1+\gamma_N),$$
$$B = \beta_N / (1+\gamma_N),$$
$$C = (d_N - c_N\zeta_{N-1}) / (a_N - c_N\gamma_{N-1}),$$
$$D = (b_N - c_N\beta_{N-1}) / (a_N - c_N\gamma_{N-1}).$$

5. Вычислим первое и последнее значения вектора решения:

$$u_1=(A-C)/(B-D),$$

$$u_N=(BC-AD)/(B-D).$$

6. Вычислим промежуточные значения вектора решения для $i=2, 3, \ldots, N-1$:

$$u_i=\zeta_i-\beta_i u_1-\gamma_i u_N.$$

Алгоритм можно применить к решению уравнения (4.2). В этом случае

$$c_1=b_N=0.$$

Тогда матрица коэффициентов получается трехдиагональной. Приведенный шаг (6) сводится к следующему.

6а. Заметим, что $\gamma_i=0$ для всех i и для $i=2, \ldots, N-1$:

$$u_i=\zeta_i-\beta_i u_1.$$

Танг утверждает, что при определенных условиях этот метод превосходит метод Томаса. Ясно, что при выполнении шага (6а) ошибка округления накапливаться не будет. По методу Танга требуется выполнить 11 умножений или делений и 6 сложений или вычитаний для одного узла сетки.

Решение уравнений с трехдиагональными матрицами с помощью преобразованного алгоритма Танга получают в результате четырех умножений или делений и двух вычитаний для одного узла сетки. Это приводит к вычислительным затратам примерно в полтора раза большим, чем для алгоритма Томаса. Программа вычислений по алгоритму Танга приведена в приложении В.

Эванс (1971) для уравнения (4.5) предложил другой, очень похожий алгоритм. Здесь требуется такой же объем вычислительной работы, как и для алгоритма Танга (11 умножений или делений и 6 сложений или вычитаний). Однако на последнем шаге процесса исключения неизвестных u_i вычисляется по u_{i+1} и u_N. Поэтому в отношении накопления ошибок округления метод Эванса не имеет таких преимуществ, как метод Танга.

4.2.3. Решение систем уравнений с симметричными трехдиагональными матрицами

Как указывалось в предыдущей главе, для многих практических задач, конечно-разностные уравнения можно записать в виде

$$Su=d, \qquad (4.21)$$

где матрица коэффициентов трехдиагональная и симметричная

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & b_{N-2} & a_{N-1} & b_{N-1} \\ & & & & b_{N-1} & a_N \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

Для этого случая можно записать

$$S=WW^T,$$

где W имеет вид

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix} w_1 & & & & \\ q_1 & w_2 & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & q_{i-1} & w_i & \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & & q_{N-1} & w_N \end{bmatrix},$$

а W^T — транспонированная матрица W.

Алгоритм, использующий преимущества этого специального вида матрицы (алгоритм Холецкого), можно разбить на следующие этапы (Фокс, 1964; Уэстлейк, 1968; Уилкинсон и Райнш, 1971).

1. Полагаем $w_1=\sqrt{a_1}$.
2. Вычисляем для $i=1, \ldots, N-1$:

$$q_i=\frac{b_i}{w_i},$$

$$w_{i+1}=\sqrt{a_{i+1}-q^2{}_i}.$$

3. Полагаем

$$g_N=\frac{d_N}{w_N}.$$

4. Вычисляем для $i=N-1, \ldots, 1$

$$g_i=(d_i-q_ig_{i+1})/w_i.$$

5. Полагаем, что $u_1=g_1/w_1$.
6. Вычисляем для $i=2, \ldots, N$

$$u_i=(g_i-q_iu_{i-1})/w_i.$$

По алгоритму Холецкого требуется выполнить значительно больший объем вычислений, чем по алгоритму Томаса, а именно, шесть умножений или делений, однократное вычисление квадратного корня и три сложения или вычитания для одного узла сетки. Вначале это удивляет, так как можно ожидать, что для симметричного случая потребуется меньший объем вычислений. В гл. 8 будет показано, что описанное симметричное разложение оказывается полезным для ленточных матриц с большой шириной ленты.

4.2.4. Специальные случаи существования неединственного решения

В определенных случаях решение матричного уравнения получается вырожденным и не имеется единственного решения. Это характерно для эллиптических (стационарных) задач с граничными условиями типа Неймана. В таком случае решение существует, если $\Sigma d_i=0$. Для того, чтобы получить единственное решение, один из элементов u должен быть произвольно задан в некоторой граничной точке (см. упражнение 4.1).

С помощью методов, описанных в предыдущей главе, матрицу коэффициентов можно сделать симметричной. Вид ее такой же, как и матрицы S для уравнения (4.22) с элементами, определенными следующим образом:

$$a_1=-b_1,$$

$$a_i=-(b_i+b_{i-1}),\ i=2,\ \ldots,\ N-1,$$

$$a_N=-b_{N-1}.$$

Эту систему можно решить с помощью следующего алгоритма.

1. Пусть $u_N=0$ (или любой произвольной величине).
2. Вычислим для $i=N-1,\ \ldots,\ 1$

$$u_i=-\sum_{k=1}^{i} d_k/b_i-u_{i+1}. \tag{4.23}$$

Здесь в процессе вычислений требуется только одно деление и одно сложение для одного узла сетки (так как $\sum_{i=1}^{N-1} d_i=-d_N$ последующие суммы можно получить с помощью одного вычитания).

Для эллиптических задач с периодическими (циклическими) граничными условиями единственного решения не существует. В данном случае решение становится единственным, если u_i задано в любой точке i, а решение находят для оставшихся точек, причем u_i задается на обоих концах модели в качестве граничных условий. Для такого случая можно разработать специальный алгоритм исключения неизвестных, как описано в упражнении 4.2.

4.2.5. Другие специальные случаи

Можно еще сократить объем вычислений, если уравнение (4.2) многократно решается для различных d без изменений в A. В этом случае элементы разложения матриц W и Q, определяемые уравнениями (4.10)—(4.12), можно хранить, что приводит к модификации алгоритма Томаса. В этом процессе требуется выполнение только трех умножений или делений и двух сложений или вычитаний для одного узла сетки после однократного вычисления W и Q.

Дальнейшее сокращение объема вычислений возможно, если A — симметричная матрица и уравнение (4.2) решается многократно (Катхилл и Варга, 1959). При этом требуется только два умножения или деления и два сложения или вычитания для одного узла сетки.

Другие специальные случаи были рассмотрены Эвансом и Форрингтоном (1963), а также Бейксом (1965).

Однако для задач, рассматриваемых в данной книге, они не представляют интереса.

Упражнения

Упражнение 4.1.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} K\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = q(x), \quad x \in (0, L)$$

с граничными условиями $(\partial u/\partial x)=0$ при $x=0$ и $x=L$, для которых соответствующее матричное уравнение получается в виде (4.21). Необходимо найти: а) условия существования решения; б) показать, как решение можно сделать единственным, задавая u в произвольной точке.

Схема решения

а) Последовательно складывая строки уравнений, найдем условие существования решения

$$\sum_i d_i = 0, \tag{A}$$

эквивалентного решению (3.166). Покажем, что если (A) удовлетворено, то все решения $Su=d$ имеют вид

$$u = u_p + c, \tag{B}$$

где u_p — частное решение; $c=[c, c, \ldots]^T$ — постоянный вектор констант. (Нужно показать, что $Sc=d$);

в) Если решение задано для внутренней точки i, то матрица S становится строго диагонально преобладающей, но приводимой (Варга, 1962). (Заменить конечно-разностное уравнение для точки i уравнений $u_i=U$ и проанализировать полученную матрицу).

Физический смысл приводимости матрицы заключается в том, что задачу можно разделить на две независимые. Матрица S в этом случае может быть сокращена исключением строки и столбца с номером i. Приведенное уравнение имеет вид:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{S}_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{S}_2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{u}_1 \\ \hline \boldsymbol{u}_2 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{g}_1 \\ \boldsymbol{g}_2 \end{array}\right],$$

т. е.

$$S_1 u_1 = g_1,$$

$$S_2 u_2 = g_2,$$

где

$$u_1 = [u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}]^{\mathrm{T}},$$

$$u_2 = [u_{i+1}, \ldots, u_N]^{\mathrm{T}},$$

$$g_{1j} = d_j,\ j = 1, \ldots, i-2,\ g_{2j} = d_j,\ j = i+2, \ldots, N,$$

$$g_{1i-1} = d_{i-1} - b_{i-1}U,\ g_{2i+1} = d_{i+1} - b_i U;$$

S_1 и S_2 — подматрицы S.

Если решение определено при $i=1$ или $i=N$, порядок матрицы можно понизить до $N-1$. Приведенная матрица диагонально преобладающая и неприводимая, а задача имеет единственное решение.

Упражнение 4.2

Разработать алгоритм, аналогичный алгоритму (4.23), для эллиптических задач с периодическими граничными условиями, заданными в виде $Au=d$, где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & & & b_N \\ b_1 & a_2 & b_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ b_N & & & & & b_{N-1} & a_N \end{bmatrix}$$

$$a_1 = -(b_1 + b_N)$$
$$a_i = -(b_{i-1} + b_i)$$
$$i = 2, \ldots, N$$

Рассмотреть:

а) случай, когда $b_1 = b_2 = \ldots = b$;

б) общий случай;

в) объем вычислений.

Схема решения

С помощью сложения строк преобразуем A и d:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & & & & b_N \\ -b_N & -b_2 & b_2 & & & & & b_N \\ -b_N & & -b_3 & b_3 & & & & b_N \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ -b_N & & & & -b_i & b_i & & b_N \\ \cdot & & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot & \cdot \\ -b_N & & & & & & -b_{N-1} & (b_{N-1}+b_N) \\ b_N & & & & & & b_{N-1} & a_N \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{d}^1 = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_1 + d_2 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{i} d_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{N-1} d_j \\ d_N \end{bmatrix}$$

Последние две строки определяют условие существования решения $\sum_{i}^{N} d_j = 0$. Выберем

$$u_N = 0. \qquad \text{(A)}$$

Тогда $u_1, \ldots, u_{N-1}$ получают из решения системы $A^1 u = d^1$, порядок которой понижен выбрасыванием последней строки и последнего

столбца. а) Если $b_1=b_2=\ldots=b_N$, то алгоритм имеет вид:

$$u_1=\sum_{k=1}^{N-1}\left(\sum_{j=1}^{k}d_j\right)\Big/Nb,$$
$$u_i=\sum_{k=i}^{N-1}\left(\sum_{j=1}^{k}d_j\right)\Big/b-(N-i)\,u_1. \qquad \text{(B)}$$

Определить сумму всех строк $j=1, \ldots, N-1$, чтобы получить u_1, а для нахождения u_i установить сумму строк ($j=1, \ldots, i$). в) Если все значения b различны, умножить каждую строку на b_1/b_2, а затем продолжить, как указано в п. а.

с) При наилучшей организации вычислений для (В) требуется одно умножение и три сложения на каждое неизвестное.

Более общий случай для системы этого вида рассмотрен Эвансом (1971а).

ГЛАВА 5

ОДНОМЕРНАЯ МНОГОФАЗНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

5.1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей главе впервые рассматривается многофазная фильтрация. По сравнению с однофазным течением моделирование в данном случае требует более эффективных методов, поскольку рассматривается система *связанных* нелинейных уравнений. Будут представлены основные методы решения, использующиеся в настоящее время, а также те специальные методы, которые используются для задач, не поддающихся решению стандартными методами. Хотя такие задачи (например, о конусообразовании или о просачивании газа через нефтяной пласт) более характерны для многомерных систем, способы их решения все же удобнее рассмотреть здесь.

Со времени выхода в свет статьи Уэста и др. (1954), где впервые рассмотрен двухфазный случай, опубликовано множество статей, касающихся задач многофазной фильтрации. Ричардсон и Стоун (1973) сделали обзор на эту тему. Разделы 5.1 и 5.2 посвящены описанию двух основных методов решения уравнений многофазной фильтрации (SS-методу — совместного решения и IMPES-методу — решения неявного по давлению и явного по насыщенности). В разделе 5.5 обсуждаются некоторые способы учета нелинейностей, в разделе 5.6 представлен относительно новый метод, известный как SEQ-метод — метод последовательного решения. При рассмотрении двухфазной фильтрации смачивающая и несмачивающая фазы в соответствующих уравнениях отмечают индексами w и n; при этом уравнения (2.62) и (2.65) записываются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_l\left(\frac{\partial p_l}{\partial x}-\gamma_l\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi\frac{S_l}{B_l}\right)+q_l,\quad l=\mathrm{w},\ \mathrm{n}, \tag{5.1a}$$

$$P_c=p_{\mathrm{n}}-p_{\mathrm{w}},\quad S_{\mathrm{w}}+S_{\mathrm{n}}=1. \tag{5.1b}$$

Для трехфазного случая

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_{\mathrm{w}}\left(\frac{\partial p_{\mathrm{w}}}{\partial x}-\gamma_{\mathrm{w}}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi\frac{S_{\mathrm{w}}}{B_{\mathrm{w}}}\right)+q_{\mathrm{w}}\\
&\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_{\mathrm{o}}\left(\frac{\partial p_{\mathrm{o}}}{\partial x}-\gamma_{\mathrm{o}}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi\frac{(1-S_{\mathrm{w}}-S_{\mathrm{g}})}{B_{\mathrm{o}}}\right)+q_{\mathrm{o}}\\
&\frac{\partial}{\partial x}\left[R_s\lambda_{\mathrm{o}}\left(\frac{\partial p_{\mathrm{o}}}{\partial x}-\gamma_{\mathrm{o}}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_{\mathrm{g}}\left(\frac{\partial p_{\mathrm{g}}}{\partial x}-\gamma_{\mathrm{g}}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]=\\
&\quad=\frac{\partial}{\partial t}\left[\phi R_{\mathrm{s}}\frac{(1-S_{\mathrm{w}}-S_{\mathrm{g}})}{B_{\mathrm{o}}}+\phi\frac{S_{\mathrm{g}}}{B_{\mathrm{g}}}\right]+R_{\mathrm{s}}q_{\mathrm{o}}+q_{\mathrm{g}}
\end{aligned}\right\} \tag{5.2a}$$

$$p_{\mathrm{o}}-p_w=P_{\mathrm{cow}},\ p_g-p_{\mathrm{o}}=P_{\mathrm{cog}}. \tag{5.2в}$$

Поскольку большая часть главы посвящена аппроксимациям уравнений в заданной точке пространства, то пространственный индекс i иногда опускается.

5.2. МЕТОД СОВМЕСТНОГО РЕШЕНИЯ

Суть данного метода заключается в записи производных от насыщенностей в правой части уравнений (5.1а) и (5.2а) через производные от давлений и решении полученных уравнений для давлений. Впервые это было предложено Дугласом и др. (1959), а позднее обобщено и проанализировано несколькими исследователями (Коутс и др., 1967; Коутс, 1968 и Шеффилд, 1969).

5.2.1. SS-метод для двухфазной фильтрации

Для связанных уравнений выбор аппроксимации по времени имеет решающее значение. Поскольку уравнение (5.1а) параболическое, то представляются естественными попытки использования методов, изложенных в гл. 3 (см. раздел 3.3). Однако при решении систем нелинейных связанных уравнений данного типа по этим методам редко получают положительный результат. Как указывал Писман (1967), явный метод, как и неявный метод переменных направлений Писмана — Рэчфорда (ADI-метод), для задач данного типа неустойчив. Более надежен метод с аппроксимацией уравнений обратной разностью. Дуглас (1960) показал, что по этому методу получают устойчивые решения задач двухфазной фильтрации. Данный метод наиболее часто используется при моделировании нефтяных пластов.

Поэтому дискретизацию правой части уравнения (5.1а) будем проводить, используя разность «назад». В гл. 3 (см. раздел 3.7.1) обсуждалось понятие аппроксимации по времени, обеспечивающей сохранение массы. Здесь оно распространяется на многофазную фильтрацию при следующем определении временной разности:

$$\Delta_t\left(\phi\frac{S_l}{B_l}\right)\equiv\left(\phi\frac{S_l}{B_l}\right)^{n+1}-\left(\phi\frac{S_l}{B_l}\right)^{n}. \tag{5.3}$$

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi\frac{S_l}{B_l}\right)\approx\frac{1}{\Delta t}\Delta_t\left(\phi\frac{S_l}{B_l}\right). \tag{5.4}$$

В результате для уравнения (5.1а) можно записать конечно-разностные аппроксимации

$$[\Delta\mathrm{T}_l\Delta\,(p_l^{n+1}-\gamma_l z)]_i=\frac{1}{\Delta t}\Delta_t\left(V_p\frac{S_l}{B_l}\right)_i+Q_{li},\quad l=\mathrm{w},\ \mathrm{n}, \tag{5.5}$$

где

$$\begin{gathered}\Delta T\Delta(p-\gamma z)\equiv\Delta\mathrm{T}\Delta p-\Delta\mathrm{T}\gamma\Delta z\equiv\\ \equiv T_{i+1/2}\,[p_{i+1}-p_i-\gamma_{i+1/2}\,(z_{i+1}-z_i)\,]+\\ +\mathrm{T}_{i-1/2}[p_{i-1}-p_i-\gamma_{i-1/2}\,(z_{i-1}-z_i)\,],\\ V_{pi}=\phi_i A_i\Delta x_i=V_i\phi_i,\\ T_{i+1/2}=\lambda_{i+1/2}\,(A_{i+1/2}/\Delta x_{i+1/2});\end{gathered} \tag{5.6}$$

Q_{lt} — интенсивности закачки (отбора) для блоков. Указанные аппроксимации — непосредственное обобщение уравнений однофазной фильтрации (3.125) и (3.126).

Представление аппроксимаций производных по времени. Необходимый шаг к формулировке SS-метода — представление правой части уравнения (5.5) через p_w и p_n. Оператор Δ_t можно представить как

$$\Delta_t\left(\phi\frac{S_l}{B_l}\right)=S_l^n\Delta_t\left(\frac{\phi}{B_l}\right)+\left(\frac{\phi}{B_l}\right)^{n+1}\Delta_t S_l=$$
$$=S_l^n\phi^n\Delta_t\left(\frac{1}{B_l}\right)+\left(\frac{\phi}{B_l}\right)^{n+1}\Delta_t S_l+S_l^n\frac{1}{B_l^{n+1}}\Delta_t\phi. \qquad (5.7)$$

Производные (крутизна нелинейностей) определяются следующим образом:

$$b'_l=\left(\frac{1}{B_l}\right)'=\frac{d\left(\frac{1}{B_l}\right)}{d\,p_l}, \qquad (5.8)$$
$$S'_l=d\,S_l/d\,P_c,\quad l=\mathrm{w},\ \mathrm{n},$$
$$\phi'=d\,\phi/d\,p\ (=\phi^\circ c_R).$$

Если предположить, что пористость зависит от $p\approx\frac{1}{2}(p_w+p_n)$, то можно записать $\Delta_t\phi=\phi'\frac{1}{2}(\Delta_t p_w+\Delta_t p_n)$.

Тогда уравнение (5.7) приводится к следующему виду:

$$\Delta_t\left(\phi\frac{S_l}{B_l}\right)=(\phi S_l)^n b'_l\Delta_t p_l+(\phi b_l)^{n+1}S'_l\,(\Delta_t p_n-\Delta_t p_w)+$$
$$+\frac{1}{2}b_l^{n+1}S_l^n\phi'\,(\Delta_t p_n+\Delta_t p_w),\quad l=\mathrm{w},\ \mathrm{n}. \qquad (5.9)$$

Отметим, что производным S'_l и т. д. номер какого-либо временного слоя пока не присвоен. Уравнение (5.9) — это уравнение сохранения массы только в том случае, если члены вида $\Delta_t S$ раскрываются точно, т. е.

$$S'_l\Delta_t P_c\equiv S_l{}^{n+1}-S^n{}_l.$$

Это обычно происходит только тогда, когда производная S'_l определяется как тангенс угла наклона хорды между S^n и S^{n+1} (Писман, 1967; Коутс, 1968):

$$S'_l=\frac{S_l^{n+1}-S_l^n}{P_c^{n+1}-P_c^n}. \qquad (5.10)$$

Кроме случая капиллярного давления — линейной функции насыщенности, в уравнение (5.10) входят неявные коэффициенты, в результате чего для его решения требуются итерации. Это также относится к неявным коэффициентам, полученным по b'_l и ϕ'. Даже если бы P_c и b были линейными функциями, правая часть

разложения уравнения (5.9) содержала бы неявные коэффициенты вследствие того, что $(\phi b_l)^{n+1}$ во втором слагаемом и b^{n+1} в третьем слагаемом определены на $n+1$-м слое.

Матричная форма SS-уравнений. Учитывая (5.9), уравнение (5.5) можно записать следующим образом:

$$[\Delta T_{\text{w}}(\Delta p_{\text{w}} - \gamma_{\text{w}}\Delta z)]_i^{n+1} = [d_{11}|\Delta_t p_{\text{w}} + d_{12}\Delta_t p_n]_i + O_{\text{w}}, \qquad (5.11)$$
$$[\Delta T_{\text{n}}(\Delta p_{\text{n}} - \gamma_{\text{n}}\Delta z)]_i^{n+1} = [d_{21}\Delta_t p_{\text{w}} + d_{22}\Delta_t p_{\text{n}}]_i + O_{\text{n}},$$

где коэффициенты d_{kl} легко определяются из уравнения (5.9) (отметим, что $S'_n = -S'_w$):

$$d_{11} = \frac{V}{\Delta t}\left[(\phi S_{\text{w}})^n b'_{\text{w}} - (\phi b_{\text{w}})^{n+1} S'_{\text{w}} + \frac{1}{2} b_{\text{w}}^{n+1} S_{\text{w}}^n \phi'\right],$$

$$d_{12} = \frac{V}{\Delta t}\left[(\phi b_{\text{w}})^{n+1} S'_{\text{w}} + \frac{1}{2} b_{\text{w}}^{n+1} S_{\text{w}}^n \phi'\right],$$

$$d_{21} = \frac{V}{\Delta t}\left[(\phi b_{\text{n}})^{n+1} S'_{\text{w}} + \frac{1}{2} b_{\text{n}}^{n+1} (1 - S_{\text{w}}^n)\,\phi'\right],$$

$$d_{22} = \frac{V}{\Delta t}\left[(\phi (1 - S_{\text{w}}))^n b'_{\text{n}} - (\phi b_{\text{n}})^{n+1} S'_{\text{w}} + \frac{1}{2} b_{\text{n}}^{n+1} (1 - S_{\text{w}}^n)\,\phi'\right]. \qquad (5.12)$$

Таким образом, для каждого узла сетки существуют два разностных уравнения (5.11), которые должны решаться совместно; отсюда и название — SS-метод (метод совместного решения).

Пусть неизвестные упорядочены в виде вектора

$$P = [p_{1\text{w}},\ p_{1\text{n}},\ \ldots,\ p_{i\text{w}},\ p_{i\text{n}},\ \ldots,\ p_{N\text{w}},\ p_{N\text{n}}]^{\text{T}}.$$

Конечно-разностные уравнения для всех узлов можно записать в матричной форме

$$\text{T}P^{n+1} = \text{D}(P^{n+1} - P^n) + G + Q = \text{D}\Delta_t P + G + Q, \qquad (5.13)$$

где T — матрица проводимостей; D — аккумулятивная матрица; G — вектор гравитационных членов (которые, как предполагается, можно выразить явно на n-м временном слое); Q — вектор источников.

Поскольку уравнение (5.13) типичное для многофазной фильтрации, его структуру мы продемонстрируем подробно и распишем систему обозначений для матриц с блочной структурой.

Для матрицы T i-й «блок строк» — это диагональный блок

$T_{w_{i-1/2}}$	0	$-(T_{w_{i-1/2}} + T_{w_{i+1/2}})$	0	$T_{w_{i+1/2}}$	0
0	$T_{n_{i-1/2}}$	0	$-(T_{n_{i-1/2}} + T_{n_{i+1/2}})$	0	$T_{n_{i+1/2}}$

i-м блоком матрицы D является матрица размером 2×2

$$\mathbf{D_i} = \begin{bmatrix} d_{11i} & d_{12i} \\ d_{21i} & d_{22i} \end{bmatrix}, \qquad (5.14)$$

а для i-х составляющих G и Q соответственно:

$$\boldsymbol{G}_i = \begin{bmatrix} (\Delta T_W \gamma_W \Delta z)_i \\ (\Delta T_n \gamma_n \Delta z)_i \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{Q}_i = \begin{bmatrix} Q_{W_i} \\ Q_{n_i} \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

Если дополнительно к D_i определить матрицы размером 2×2

$$\mathbf{T}_{i-1/2} = \begin{bmatrix} T_{W_{i-1/2}} & 0 \\ 0 & T_{n_{i-1/2}} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}_i = -(\mathbf{T}_{i-1/2} + \mathbf{T}_{i+1/2}) \tag{5.16}$$

и двухэлементные векторы

$$\boldsymbol{P}_i = \begin{bmatrix} p_{W_i} \\ p_{n_i} \end{bmatrix} \quad \Delta_t \boldsymbol{P}_i^n = \begin{bmatrix} \Delta_t p_{W_i}^n \\ \Delta_t p_{n_i}^n \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} p_{W_i}^{n+1} - p_{W_i}^n \\ p_{n_i}^{n+1} - p_{n_i}^n \end{bmatrix},$$

то уравнение (5.13) можно записать в развернутой блочной форме как

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_{i+1/2} & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ & \mathbf{T}_{i-1/2} & \mathbf{T}_i & \mathbf{T}_{i+1/2} & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & \mathbf{T}_{N-1/2} & \mathbf{T}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{P}_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{P}_N \end{bmatrix}^{n+1}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & \mathbf{D}_i & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & \mathbf{D}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_t \mathbf{P}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta_t \mathbf{P}_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta_t \mathbf{P}_N \end{bmatrix}^n + \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{G}_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{G}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{Q}_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{Q}_N \end{bmatrix} \tag{5.17}$$

Указанная форма удобна, поскольку многие матричные алгоритмы можно легко представить с помощью матриц блочной структуры путем формальной замены арифметических операций на матричные (см. гл. 6).

Иногда уравнение (5.13) записывается с помощью невязок в форме, удобной для вычислений, в особенности при итерационных методах. Для произвольного P^k значение R^k определим с помощью выражения

$$R^k = \mathrm{T}P^k - \mathrm{D}(P^k - P^n) - G. \tag{5.18}$$

Тогда решение (5.13) удовлетворяет уравнению

$$R^{n+1} = Q.$$

Используя R^n, уравнение (5.13) можно записать в следующем виде:

$$(\mathrm{T} - \mathrm{D})(P^{n+1} - P^n) = -R^n + Q. \tag{5.19}$$

Часто для P^{n+1} мы располагаем некоторым его приближением P^k — вектором, взятым с последней итерации. Тогда можно записать

$$(\mathrm{T} - \mathrm{D})(P^{n+1} - P^k) = -R^k + Q. \tag{5.20}$$

Некоторые авторы вводят Q в определение R таким образом, чтобы $R^{n+1} = 0$.

Замечания относительно SS-*метода*

а) В SS-методе, в том виде, как он представлен в этом разделе, необходимо использовать ненулевые значения капиллярного давления, так как уравнение для p_w и p_n связаны через S'_w. По мере уменьшения крутизны кривой капиллярного давления матрица D становится преобладающей, а система уравнений — вырожденной (см. упражнение 5.1). Поэтому, если необходимо моделирование без учета капиллярного давления, следует использовать малое «фиктивное» P_c (лучше взять его линейную функцию). К счастью, отношение dP_c/dS, при котором результаты решения с помощью SS-метода еще не теряют смысл, достаточно мало (Коутс, 1968). В следующем разделе описан вариант SS-метода, приемлемый для нулевых P_c.

в) По завершении расчетов на временном шаге необходимо, скорректировать S_w для учета нелинейностей, связанных с капиллярным давлением, что будет обсуждаться в разделе 5.5.

с) Поскольку число неизвестных определяется произведением N на число фаз, то SS-метод невыгодно использовать для многомерных задач. Действительная ценность этого метода связана с неявным представлением проводимостей (см. раздел 5.5).

5.2.2. Использование SS-метода при расчетах трехфазной фильтрации

При раскрытии правых частей уравнений (5.2) для нефти и воды (в предположении, что ϕ зависит от p_w) получим:

$$\Delta_t\left(\phi\frac{S_o}{B_o}\right) = \phi^n(1 - S_w - S_g)^n b'_o \Delta_t p_o + (\phi b_o)^{n+1}[-S'_w(\Delta_t p_o - \Delta_t p_w) - S'_g(\Delta_t p_g - \Delta_t p_o)] + b_o^{n+1}(1 - S_w - S_g)^n \phi' \Delta_t p_w, \tag{5.21}$$

$$\Delta_t\left(\phi\frac{S_w}{B_w}\right)\phi^n S_w^n b_w' \Delta_t p_w + (\phi b_w)^{n+1} S_w' (\Delta_t p_o - \Delta_t p_w) + b_w^{n+1} S_w^n \phi' \Delta_t p_w. \tag{5.22}$$

В уравнениях для газа оператор, удовлетворяющий условию материального баланса, представляется следующим образом:

$$\Delta_t\left(\phi\frac{S_g}{B_g} + R_s\phi\frac{S_o}{B_o}\right) = \Delta_t\left(\phi\frac{S_g}{B_g}\right) + R_s^n\,\Delta_t\left(\phi\frac{S_o}{B_o}\right) + \left(\phi\frac{S_o}{B_o}\right)^{n+1}\Delta_t R_s. \tag{5.23}$$

Первое слагаемое

$$\Delta_t\left(\phi\frac{S_g}{B_g}\right) = \phi^n S_g^n b_g' \Delta_t p_g + (\phi b_g)^{n+1} S_g' (\Delta_t p_g - \Delta_t p_o) + b_g^{n+1} S_g^n \phi' \Delta_t p_w. \tag{5.24}$$

Второе слагаемое представлено уравнением (5.21), а $\Delta_t R_s$ выражено в виде

$$\Delta_t R_s = R_s' \Delta_t p_o,$$

где $R_s' = \dfrac{R_s^{n+1} - R_s^n}{p_o^{n+1} - p_o^n}$.

Второе слагаемое левой части уравнения (5.23) можно также представить в виде

$$\Delta_t\left(R_s\phi\frac{S_o}{B_o}\right) = (R_s b_o)^n \Delta_t(\phi S_o) + (\phi S_o)^{n+1}\Delta_t(R_s b_o),$$

используя определение

$$(R_s b_o)' = \frac{(R_s b_o)^{n+1} - (R_s b_o)^n}{p_o^{n+1} - p_o^n}.$$

В качестве разностных уравнений для нефти и воды применяем соотношение (5.5), где l=o, w; уравнение (5.21) или (5.22) соответственно используем в правой части. Разностную аппроксимацию уравнения для газа можно записать как

$$\Delta\left[T_g(\Delta p_g^{n+1} - \gamma_g \Delta z)\right]_i + \Delta\left[R_s T_o(\Delta p_o^{n+1} - \gamma_o \Delta z)\right]_i = \frac{1}{\Delta t}\Delta_t\left\{V_p\left[\frac{S_g}{B_g} + R_s\frac{S_o}{B_o}\right]\right\} + (R_s Q_o)_i + Q_{gi}, \tag{5.25}$$

где

$$\Delta[R_s T_o(\Delta p_o - \gamma_o \Delta z)]_i = (R_s T_o)_{i+1/2}[p_{oi+1} - p_{oi} - \gamma_{oi+1/2}(z_{i+1} - z_i)] + (R_s T_o)_{i-1/2}[p_{oi-1} - p_{oi} - \gamma_{oi-1/2}(z_{i-1} - z_i)]. \tag{5.26}$$

Другую формулировку уравнения для газа можно получить, умножая уравнение для нефти на R_s и вычитая из уравнения для газа. Эту операцию можно провести с дифференциальным или разностным уравнением, причем результат будет аналогичным (см. упражнение 5.2).

5.2.3. Другие формулировки SS-метода

Рассмотрим только случай двухфазной фильтрации.

Формулировка уравнений без явных гравитационных членов. При задании псевдопотенциалов Φ_w, Φ_n (см. раздел 2.4.3) в виде

$$\Phi_l = \int_{p^0}^{p} \frac{d\,p}{\gamma_l} - z, \quad l = \mathrm{w},\ \mathrm{n} \tag{5.27}$$

уравнение (5.1,а) преобразуется в

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_l \gamma_l \frac{\partial \Phi_l}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\phi \frac{S_l}{B_l}\right) + q_l, \quad l = \mathrm{w},\ \mathrm{n}, \tag{5.28}$$

которое можно аппроксимировать следующим разностным уравнением:

$$[\Delta \mathrm{T}_l \Delta \Phi_l^{n+1}]_i = \frac{1}{\Delta t} \Delta_t \left(V_p \frac{S_l}{B_l}\right)_i + Q_l, \quad l = \mathrm{w},\ \mathrm{n}, \tag{5.29}$$

где

$$\mathrm{T}_{li+1/2} = (\gamma_l \lambda_l)_{i+1/2} \frac{A_{i+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}}.$$

Правую часть можно раскрыть через Φ_l. Поскольку $\Delta_t \Phi_l = \Delta_t p_l / \bar{\gamma}_l$, где $\bar{\gamma}_l$ — среднее значение γ на временном интервале $(n,\ n+1)$, получим

$$\Delta_t\left(\phi \frac{S_l}{B_l}\right) = \bar{\gamma}_l [(\phi S_l)^n b_l' + b_l^{n+1} S_l^n \phi'] \Delta_t \Phi_l + \bar{\gamma}_l (\phi b_l)^{n+1} S_l' (\Delta_t \Phi_n - \Delta_t \Phi_w),$$

$$l = \mathrm{w},\ \mathrm{n}. \tag{5.30}$$

Предполагается, что $\Delta_t \phi \simeq \phi' \Delta_t p_o \simeq \phi' \Delta_t p_w$. Это хорошая аппроксимация для случая, когда P_c мало по сравнению с изменениями пластового давления. В матричной форме данная формулировка уравнения SS-метода приобретает вид

$$\mathrm{T}\Phi^{n+1} = \mathrm{D}(\Phi^{n+1} - \Phi^n) + Q,$$

где матрица D содержит элементы, определяемые уравнением (5.30). Переход от Φ_l к p_l и наоборот лучше всего выполняется, когда зависимость

$$\Phi_l \longleftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}\,p_l}{\gamma_l} \widehat{p}_l(p_l)$$

представлена в табличной форме, так как для любого z $\Phi_l = \hat{p}_l(p_l) - z$.

Формулировка метода с помощью p, S. Выберем в качестве зависимых переменных p_n и S_w.

Тогда уравнения (5.1) приобретают вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_{\text{w}}\left(\frac{\partial p_{\text{n}}}{\partial x}-\gamma_{\text{w}}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_{\text{w}}\frac{\partial P_c}{\partial x}\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi\frac{S_{\text{w}}}{B_{\text{w}}}\right)+q_{\text{w}};\ \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_{\text{n}}\left(\frac{\partial p_{\text{n}}}{\partial x}-\gamma_{\text{n}}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi\frac{(1-S_{\text{w}})}{B_{\text{n}}}\right)+q_{\text{n}}. \tag{5.31}$$

Раскроем правые части этих уравнений в предположении, что $\phi^{n+1}=\phi^n+\phi'\Delta_t p_{\text{n}}$ и, используя соотношение

$$\Delta_t p_{\text{w}}=\Delta_t p_{\text{n}}-\Delta_t P_{\text{c}}=\Delta_t p_{\text{n}}-P'_{\text{c}}\Delta_t S_{\text{w}},$$

где

$$P'_{\text{c}}=\mathrm{d}P_c/\mathrm{d}S_{\text{w}}.$$

Тогда

$$\Delta_t\left(\phi\frac{S_{\text{w}}}{B_{\text{w}}}\right)=(\phi b_{\text{w}})^{n+1}\Delta_t S_{\text{w}}+(\phi S_{\text{w}})^n b'_{\text{w}}\left[\Delta_t p_{\text{n}}-P'_c\Delta_t S_{\text{w}}\right]+S^n_{\text{w}}b^{n+1}_{\text{w}}\phi'\Delta_t p_{\text{n}},$$

$$\Delta_t\left(\phi\frac{S_{\text{n}}}{B_{\text{n}}}\right)=-(\phi b_{\text{n}})^{n+1}\Delta_t S_{\text{w}}+(1-S^n_{\text{w}})\left(\phi^n b'_{\text{n}}+\phi' b^{n+1}_{\text{n}}\right)\Delta_t p_{\text{n}}.$$

Аналогично выражение $\lambda_{\text{w}}(\partial P_c/\partial x)$ можно представить так же, как и $\lambda_{\text{w}}P'_c(\partial S_{\text{w}}/\partial x)$. Если неизвестные представить в виде вектора

$$P=[p_{\text{n}1},\ S_{\text{w}1},\ \ldots,\ p_{\text{n}i},\ S_{\text{w}i},\ \ldots,\ p_{\text{n}N},\ S_{\text{w}N}]^{\text{T}},$$

то конечно-разностную аппроксимацию с обратной разностью для уравнения (5.31) можно снова записать в форме (5.13).

В этом случае матрица D составляется из блоков D_i с элементами

$$d_{11}=\frac{V}{\Delta t}\left[S^n_{\text{w}}\left(\phi^n b'_{\text{w}}+\phi' b^{n+1}_{\text{w}}\right)\right],$$

$$d_{12}=\frac{V}{\Delta t}\left[(\phi b_{\text{w}})^{n+1}-(\phi S_{\text{w}})^n b_{\text{w}}P'_c\right],$$

$$d_{21}=\frac{V}{\Delta t}\left[(1-S^n_{\text{w}})\left(\phi^n b'_{\text{n}}+\phi' b^{n+1}_{\text{n}}\right)\right],$$

$$d_{22}=\frac{V}{\Delta t}\left[-(\phi b_{\text{n}})^{n+1}\right], \tag{5.32}$$

а матрица T из блоков

$$\mathbf{T}_{i+1/2}=\begin{bmatrix}T_{\text{w}i+1/2} & (T_{\text{w}}P'_c)_{i+1/2}\\ T_{\text{n}i+1/2} & 0\end{bmatrix}\qquad \mathbf{T}_i=-\left(\mathbf{T}_{i+1/2}+\mathbf{T}_{i-1/2}\right) \tag{5.33}$$

Отметим асимметричную структуру матрицы T в отличие от симметричной формы уравнения (5.16). Данная формулировка применима и при $P_c \equiv 0$, если $P'_c \equiv 0$. Подобные формулировки можно записать для любой пары p и S или эквивалентных переменных (см. упражнения 5.3 и 5.4).

5.3. МЕТОД, НЕЯВНЫЙ ПО ДАВЛЕНИЮ, ЯВНЫЙ ПО НАСЫЩЕННОСТИ (IMPES-МЕТОД)

Данный метод впервые изложен в работах Шелдона и др. (1959), а также Стоуна и Гарднера (1961). Основная его идея — получение одного уравнения для давлений комбинацией уравнений фильтрации отдельных флюидов. После прогноза изменения давления явно рассчитываются новые значения насыщенности. Аналогичная численная процедура (метод примитивной переменной) была предложена для уравнений Навье — Стокса (Фокс и Дирдоф, 1972). IMPES-метод также был предложен советскими авторами (Данилов и др., 1968).

Вначале представим стандартный способ получения трехфазных уравнений IMPES-метода (Брейтенбах и др., 1969; Коутс, 1968). Затем рассмотрим некоторые разновидности метода.

5.3.1. IMPES-метод для случая трехфазной фильтрации

Конечно-разностные уравнения, аппроксимирующие уравнения (5.1), можно записать через p_o и насыщенности следующим образом:

$$\Delta\left[T_w\left(\Delta p_o - \Delta P_{cow} - \gamma_w \Delta z\right)\right] = C_{1p}\Delta_t p_w + \sum_l C_{1l}\Delta_t S_l + Q_w,$$

$$\Delta\left[T_o\left(\Delta p_o - \gamma_o \Delta z\right)\right] = C_{2p}\Delta_t p_o + \sum_l C_{2l}\Delta_t S_l + Q_o,$$

$$\Delta\left[T_g\left(\Delta p_o + \Delta P_{cog} - \gamma_g \Delta z\right)\right] + \Delta\left[R_s T_o\left(\Delta p_o - \gamma_o \Delta z\right)\right] =$$

$$= C_{3p}\Delta_t p_g + \sum_l C_{3l}\Delta_t S_l + R_s Q_o + Q_g.$$

Главное допущение метода: капиллярное давление в потоковых членах левой части уравнений неизменно на временном шаге. Тогда члены, содержащие ΔP_{cow} и ΔP_{cog}, можно выразить явно на старом n-м временном слое. Кроме того, $\Delta_t p_w = \Delta_t p_o = \Delta_t p_g$. Поэтому можно обозначить p_o как p и записать

$$\begin{aligned}
\Delta\left[T_w\left(\Delta p^{n+1} - \gamma_w \Delta z - \Delta P^n{}_{cow}\right)\right] &= C_{1p}\Delta_t p + C_{1w}\Delta_t S_w + Q_w,\\
\Delta\left[T_o\left(\Delta p^{n+1} - \gamma_o \Delta z\right)\right] &= C_{2p}\Delta_t \pi + C_{20}\Delta_t S_o + Q_o,\\
\Delta\left[T_g\left(\Delta p^{n+1} - \gamma_g \Delta z + \Delta P^n{}_{cog}\right)\right] + \Delta\left[R_s T_o\left(\Delta p^{n+1} -\right.\right.&\\
\left.\left. - \gamma_o \Delta z\right)\right] &= C_{3p}\Delta_t p + C_{3o}\Delta_t S_o + C_{3g}\Delta_t S_g + R_s Q_o + Q_g, \qquad (5.34)
\end{aligned}$$

где в соответствии с (5.7)

$$C_{1p}=\frac{V}{\Delta t}[(S_w\phi)^n b'_w+S_w^n b_w^{n+1}\phi'],$$

$$C_{1w}=\frac{V}{\Delta t}(\phi b_w)^{n+1},$$

$$C_{2p}=\frac{V}{\Delta t}[(S_o\phi)^n b'_o+S_o^n b_o^{n+1}\phi']],$$

$$C_{2o}=\frac{V}{\Delta t}(\phi b_o)^{n+1},$$

$$C_{3p}=\frac{V}{\Delta t}[R_s^n(S_o^n\phi^n b'_o+S_o^n b_o^{n+1}\phi')+S_g^n\phi^n b'_g+S_g^n b_g^{n+1}\phi'+(\phi S_o b_o)^{n+1}R'_s],$$

$$C_{3o}=\frac{V}{\Delta t}[R_s^n(\phi b_o)^{n+1}],$$

$$C_{3g}=\frac{V}{\Delta t}(\phi b_g)^{n+1}. \qquad (5.35)$$

Скомбинируем три уравнения (5.34) так, чтобы все члены, содержащие $\Delta_t S_l$, исчезли. Это достигается умножением уравнения для воды на A, уравнения для газа на B и последующим сложением всех трех уравнений. Правая часть результирующего уравнения представляет собой

$$(AC_{1p}+C_{2p}+BC_{3p})\Delta_t p+(-AC_{1w}+C_{2o}+BC_{3o})\times$$
$$\times\Delta_t S_o+(-AC_{1w}+BC_{3g})\Delta_t S_g.$$

Множители A и B находят из

$$-AC_{1w}+C_{2o}+BC_{3o}=0,$$
$$-AC_{1w}+BC_{3g}=0.$$

В результате получим

$$B=C_{2o}/(C_{3g}-C_{3o}),$$
$$A=BC_{3g}/C_{1w}. \qquad (5.36)$$

В итоге уравнение для давления примет вид

$$\Delta[T_o(\Delta p^{n+1}-\gamma_o\Delta z)]_i+A_i\Delta[T_w(\Delta p^{n+1}-\gamma_w\Delta z)]_i+$$
$$+B_i\Delta[T_oR_s(\Delta p^{n+1}-\gamma_o\Delta z)+T_g(\Delta p^{n+1}-\gamma_g\Delta z)]_i=$$
$$=(C_{2p}+AC_{1p}+BC_{3p})_i\Delta_t p+A_i\Delta(T_w\Delta P^n{}_{cow})_i-$$
$$-B_i\Delta(T_g\Delta P^n{}_{cog})_i+Q_o+A_iQ_{wi}+B_i(R_sQ_o+Q_g)_i. \qquad (5.37)$$

Это конечно-разностное уравнение того же типа, что и полученное из одного параболического уравнения; его можно записать как

$$TP^{n+1}=D(P^{n+1}-P^n)+G+Q',$$

где T — трехдиагональная матрица; D — диагональная матрица.

В данном случае вектор G учитывает гравитационные и капиллярные члены. После решения уравнения для давления значения насыщенностей находятся явно после подстановки результатов в первые два уравнения (5.34). Когда S_i^{n+1} становятся известными, вычисляют новые капиллярные давления P_{cow}^{n+1} и P_{cog}^{n+1}, которые затем используются явно на следующем временном шаге.

Подобно тому, как это было для уравнений по SS-методу, большинство коэффициентов правой части определены на неизвестном временном слое, в результате чего необходимы итерации. Множители A и B во время итераций также должны пересчитываться.

Легко вывести уравнения для особых случаев двухфазной фильтрации.

5.3.2. Другие варианты IMPES-метода

Использование различных переменных.
Любые формы уравнения SS-метода можно использовать для формулировки IMPES-метода. Коэффициенты A и B будут немного различаться при разном выборе зависимых переменных. Рассмотрим, например, формулировку уравнений SS-метода с помощью p и S для двухфазной фильтрации (см. раздел 5.2.3):

$$\Delta\left[\mathrm{T_w}\left(\Delta p-\gamma_{\mathrm{w}}\Delta z-\Delta P_{\mathrm{c}}\right)^{n+1}\right]=d_{11}\Delta_t p+d_{12}\Delta_t S_{\mathrm{w}}+Q_{\mathrm{w}},$$
$$\Delta\left[T_{\mathrm{n}}\left(\Delta p-\gamma_{\mathrm{n}}\Delta z\right)^{n+1}\right]=d_{21}\Delta_t p+d_{22}\Delta_t S_{\mathrm{w}}+Q_{\mathrm{n}}. \tag{5.38}$$

Умножим первое уравнение на A, сложим уравнения и исключим члены с $\Delta_t S_{\mathrm{w}}$. В результате получим $A=-d_{22}/d_{12}$. При рассмотрении уравнения (5.32) видно, что d_{12} будет всегда положительно, поскольку $P'_c\leqslant 0$. Следовательно, расчет может быть выполнен.

Решение по IMPES-методу в рассматриваемом случае состоит из двух шагов:

а) При явно вычисляемом P_c найдем неявно определяемое P^{n+1} из следующего уравнения:

$$\begin{aligned}&-(d_{22}/d_{12})\Delta\left[\mathrm{T_w}\Delta p^{n+1}\right]+\Delta\left[\mathrm{T_n}\Delta p^{n+1}\right]=\\&=\left[-(d_{22}/d_{12})d_{11}+d_{21}\right]\Delta_t p-(d_{22}/d_{12})Q_{\mathrm{w}}+Q_n-\\&-(d_{22}/d_{12})\Delta\left[\mathrm{T_w}\left(\gamma_{\mathrm{w}}\Delta z+\Delta P^n{}_{\mathrm{c}}\right)\right]+\Delta\mathrm{T_n}\gamma_{\mathrm{n}}\Delta z.\end{aligned} \tag{5.39}$$

в) Найдем явно $\Delta_t S_{\mathrm{w}}$, например, из уравнения для воды:

$$\Delta_t S_{\mathrm{w}}=(1/d_{12})\left[-d_{11}\Delta_t p-Q_{\mathrm{w}}+\Delta\mathrm{T_w}\left(\Delta p^{n+1}-\gamma_{\mathrm{w}}\Delta z-\Delta P^n{}_{\mathrm{c}}\right)\right]. \tag{5.40}$$

Непосредственное использование уравнений для доли фаз в общем потоке. Наиболее простым способом IMPES-метод можно сформулировать с использованием гиперболических уравнений фильтрации (см. раздел 2.5.2, гл. 2). Для ясности рассмотрим двухфазную фильтрацию при ϕ=const и интенсивности источников

и стоков, равной нулю. В этом случае уравнение для давлений в дифференциальной форме получим из уравнения (2.94):

$$b_{\text{п}}\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_{\text{w}}\left(\frac{\partial p}{\partial x}-\gamma_{\text{w}}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial P_c}{\partial x}\right)\right]+b_{\text{w}}\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_{\text{п}}\left(\frac{\partial p}{\partial x}-\gamma_{\text{п}}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]=$$

$$=\phi\left[b_{\text{п}}S_{\text{w}}\frac{\partial b_{\text{w}}}{\partial t}+b_{\text{w}}(1-S_{\text{w}})\frac{\partial b_{\text{п}}}{\partial t}\right], \qquad (5.41)$$

где $p=p_n$. Дискретизируем члены потока обычным способом и аппроксимируем $\partial b/\partial t$ посредством $(b'/\Delta t)\Delta_t p$. В итоге $b_{\text{п}}$ и b_{w} аппроксимируются значениями $b_{\text{п}}{}^{n+1}$ и $b_{\text{w}}{}^{n+1}$. Такой подход, как показано ниже, приводит к разностным уравнениям, *тождественным* уравнению (5.39). Выполняя указанные действия, получим

$$b_{\text{п}}^{n+1}\Delta\left[\text{T}_{\text{w}}(\Delta p^{n+1}-\gamma_{\text{w}}\Delta z-\Delta P_c^n)\right]+b_{\text{w}}^{n+1}\Delta\left[\text{T}_{\text{п}}(\Delta p^{n+1}-\gamma_{\text{п}}\Delta z)\right]=$$

$$=\frac{V_p}{\Delta t}\left[b_{\text{п}}^{n+1}S_{\text{w}}^n b'_{\text{w}}+b_{\text{w}}^{n+1}(1-S_{\text{w}}^n)\,b'_{\text{п}}\right]\Delta_t p. \qquad (5.42)$$

При ϕ=const получим из уравнения (5.32)

$$A=-d_{22}/d_{12}=b_{\text{п}}{}^{n+1}/b_{\text{w}}{}^{n+1}.$$

Легко проверить, что уравнение (5.39) тождественно уравнению (5.42). Отсюда можно получить формулы IMPES-метода для трехфазных уравнений, записанных с применением p, S_{w}, S_{g} и т. д. (см. упражнение 5.5).

При вычислениях по IMPES-методу не используется уравнение для насыщенности (2.95), которое называется уравнением для доли фаз в общем потоке. Как будет показано в разделе 5.6, с помощью этого уравнения формулируется метод последовательного решения.

5.4. АНАЛИЗ SS- и IMPES-МЕТОДОВ

В двух предыдущих разделах были рассмотрены SS -и IMPES-методы без оценки имеющихся нелинейных зависимостей или существования решения. В данном разделе исследуются свойства этих методов в их основной форме, когда все коэффициенты разностных уравнений определены на старом временном слое (отстают по времени). Впервые анализ решений по SS-методу был дан Дугласом (1960) для двухфазной фильтрации. Лейтер и Коутс (1968) проанализировали устойчивость для SS- и IMPES-методов, а Шеффилд (1969) рассмотрел вопрос о существовании решения для SS-метода.

5.4.1. Устойчивость решений

Существуют два ограничения устойчивости, которые можно проанализировать независимо.

Причина первого ограничения — явный расчет основных переменных. SS-метод, безусловно, устойчив, так как по нему проводят неявный расчет всех основных переменных. Однако при IMPES-

методе капиллярное давление учитывается явно, поэтому предел устойчивости зависит от значения dP_c/dS.

Второе ограничение зависит от определения проводимостей, которые обычно сильно нелинейны, в явной форме. Методы их расчета одинаковы для SS- и IMPES-методов, поэтому одинаково их влияние на предел устойчивости.

Для простоты рассмотрим только двухфазный случай. Вывод для трехфазного случая приведен в упражнении 5.6. Наш анализ проводится в соответствии с работой Коутса (1968).

5.4.1.1. Устойчивость решения по отношению к P_c

При анализе предположим, что dP_c/dS и проводимости постоянны, а эффектами гравитации можно пренебречь.

Устойчивость IMPES-метода. Рассмотрим расчет фильтрации несжимаемых флюидов по IMPES-методу. При упомянутых допущениях уравнения (5.38) можно записать как

$$T_w \Delta^2 p^{n+1} = \frac{V_p}{\Delta t} \Delta_t S_w + T_w p_c' \Delta^2 S_w^n + Q_w, \tag{5.43a}$$

$$T_n \Delta^2 p^{n+1} = -\frac{V_p}{\Delta t} \Delta_t S_w + Q_n. \tag{5.43b}$$

Обозначим погрешность при определении S_w и p как e_1 и e_2:

$$e^n{}_1 = S^n{}_w - S^n{}_{w(\text{точн})}, \quad e^n{}_2 = p^n - p^n{}_{(\text{точн})}.$$

Как показано в гл. 3 (см. раздел 3.2.3), ошибки e_1 и e_2 соответствуют ошибкам разностных уравнений (5.43a), (5.43b) при условии, что погрешностями аппроксимации пренебрегаем. Результирующие уравнения для погрешностей имеют вид

$$T_w \Delta^2 e_2^{n+1} = \frac{V_p}{\Delta t} \Delta_t e_1 + T_w P_c' \Delta^2 e_1^n, \tag{5.44a}$$

$$T_n \Delta^2 e_2^{n+1} = -\frac{V_p}{\Delta t} \Delta_t e_1. \tag{5.44b}$$

Суммируя уравнения (5.44) и разрешая их относительно $e_2{}^{n+1}$, получим погрешность решения уравнения для давления

$$\Delta^2 e_2{}^{n+1} = [T_w (T_n + T_w)] P'_c \Delta^2 e^n{}_1. \tag{5.45}$$

Используя при анализе устойчивости метод рядов Фурье (см. раздел 3.23), найдем e_l в виде

$$e_{li}^n = \xi_l^n \exp(\sqrt{-1}\,\alpha_l i), \quad l = 1, 2,$$

где $\alpha_l = m_l \Delta x$, $m_l > 0$. Опуская нижний индекс i, можно записать

$$\Delta^2 e_l = -\gamma_l e_l,$$

где

$$\gamma_l = 4 \sin^2 \frac{\alpha_l}{2}.$$

После подстановки этого выражения в уравнение (5.45) получим

$$e_2^{n+1}=P'_c(T_w/T_T)(\gamma_1/\gamma_2)e^n_1, \tag{5.46}$$

где

$$T_T=T_w+T_n.$$

При подстановке e_2^{n+1} в уравнение (5.44b) имеем

$$e_1^{n+1}=e_1^n\left(\frac{T_wT_n}{T_T}P'_c\gamma_1\frac{\Delta t}{V_p}-1\right)=e_1^n\xi_1.$$

Условие $|\xi_1|<1$ приводит к тому, что

$$\Delta t<\frac{1}{2}\frac{V_p}{|P'_c|\dfrac{T_wT_n}{T_T}}. \tag{5.47}$$

В этом случае $P'_c<0$, $\gamma_1>0$ и $\gamma_1<4$. Легко видеть, что если e_1 ограничено, то в соответствии с уравнением (5.46) e_2 также ограничено. Условие (5.47) должно удовлетворяться для всех точек i и любого значения насыщенности S_w. Поэтому для регулярной сетки получим следующее условие устойчивости:

$$\Delta t<\frac{1}{2}\Delta x^2\min_i\left(\frac{\phi_i}{k_i}\right)\frac{1}{\max\limits_{S_w}|P'_c|}\min_{i,S_w}\left(\frac{\mu_n}{k_{rn}}+\frac{\mu_w}{k_{rw}}\right). \tag{5.48}$$

Исследуем влияние сжимаемости на устойчивость IMPES-метода. Для этой цели определим $\bar{T}_l=B_lT_l$ и запишем эквивалент уравнения (5.43) как

$$\bar{T}_w\Delta^2p^{n+1}=C_{wp}\Delta_tp+C_s\Delta_tS_w+\bar{T}_wP'_c\Delta^2S^n{}_w, \tag{5.49a}$$

$$\bar{T}\Delta^2p^{n+1}=C_{np}\Delta_tp-C_s\Delta_tS_w, \tag{5.49в}$$

где

$$C_{lp}=\frac{V_p}{\Delta t}S_lb'_lB_l,\quad C_s=\frac{V_p}{\Delta t}.$$

Применяя метод рядов Фурье для исследования устойчивости, получим уравнение для погрешностей e_1 и e_2:

$$C_se_l^{n+1}+(\bar{T}_w\gamma_2+C_{wp})e_2^{n+1}=(C_s+\bar{T}_wP'_c\gamma_1)e^n{}_1+C_{wp}e^n{}_2, \tag{5.50a}$$

$$C_se_1{}^{n+1}-(\bar{T}_n\gamma_2+C_{np})e_2^{n+1}=C_se^n{}_1-C_{np}e^n{}_2 \tag{5.50в}$$

Для определения коэффициентов усиления следует записать уравнения в матричной форме. Таким образом,

$$Ae^{n+1}=Ce^n, \tag{5.51}$$

$$e^{n+1}=A^{-1}Ce^n=Be^n.$$

После некоторых матричных преобразований (см. упражнение 5.6) находим, что

$$\mathbf{B}=\frac{1}{G_{\mathrm{T}}}\begin{bmatrix} G_{\mathrm{T}}+\dfrac{G_{\mathrm{n}}}{C_{\mathrm{s}}}C_{pc} & (G_{\mathrm{w}}C_{np}+G_{\mathrm{n}}C_{wp})/C_{\mathrm{s}} \\ C_{pc} & C_{wp}+C_{np} \end{bmatrix}$$

где

$$G_l=\bar{\mathrm{T}}_l\gamma_2+C_{lp},\quad G_{\mathrm{T}}=G_{\mathrm{w}}+G_{\mathrm{n}},$$
$$C_{pc}=\bar{\mathrm{T}}_{\mathrm{w}}P'_c\gamma_1.$$

Для обеспечения устойчивости решения должно соблюдаться условие: $|\max\lambda_i|<1$, где λ_i — собственные значения матрицы B (см. гл. 3, раздел 3.2. 3.3). Собственные значения получают после решения уравнения $|\mathrm{B}-\lambda\mathrm{I}|=0$, откуда

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2G_{\mathrm{T}}}[X\pm\sqrt{X^2-4Y}], \tag{5.52}$$

где

$$X=G_{\mathrm{T}}+(C_{pc}G_{\mathrm{n}})/C_{\mathrm{s}}+C_{wp}+C_{np},$$
$$Y=[G_{\mathrm{T}}+(C_{pc}G_{\mathrm{n}})/C_{\mathrm{s}}](C_{wp}+C_{np})-(G_{\mathrm{w}}C_{np}+$$
$$+G_{\mathrm{n}}C_{wp})C_{pc}/C_{\mathrm{s}}. \tag{5.53}$$

Поскольку сжимаемость флюидов в пластовых условиях незначительна (b'_{w}, $b'_{\mathrm{n}}\ll 1$), то при C_{np}, $C_{wp}\ll C_{\mathrm{s}}$ в уравнении (5.52) соблюдается условие $Y\ll X$, поскольку все члены Y умножаются на некоторую величину, характеризующую сжимаемость. Поэтому преобладающее собственное значение B следующее:

$$\lambda_1=\frac{1}{2G_{\mathrm{T}}}[X+\sqrt{X^2-4Y}]\approx\frac{1}{G_{\mathrm{T}}}[X-Y/X].$$

Отметим, что для $C_{wp}=C_{np}=0$ из вышеприведенного уравнения следует условие устойчивости $|X/G_{\mathrm{T}}|<1$, из которого вытекает условие, полученное в предыдущих выкладках — см. уравнение (5.47). Величина (X/G_{T}), обеспечивающая это условие, отрицательна. Поэтому, когда отыскивается решение для

$$\left|\frac{1}{G_{\mathrm{T}}}(X-Y/X)\right|<1,$$

можно использовать приближение $X/G_{\mathrm{T}}\approx -1$ для первого члена:

$$\left|\frac{X+Y/G_{\mathrm{T}}}{G_{\mathrm{T}}}\right|<1. \tag{5.54}$$

Общее решение этого неравенства довольно сложно, поэтому рассмотрим особый случай, когда сжимаема только несмачивающая фаза и $C_{wp}=C_p$, $C_{np}=0$. Можно снова воспользоваться тем,

что решение близко к решению для случая несжимаемых флюидов, и поэтому

$$\frac{X}{G_T} \approx \frac{1}{G_T}\left(G_T + \frac{G_n}{G_T} C_{pc}\right) \approx -1.$$

Далее можно вновь оценить Y из уравнения (5.53)

$$Y \approx -G_T C_p - G_n (C_{pc}/C_s) C_p \simeq G_T C_p$$

и из решения уравнения (5.54) для отрицательных $X+Y/G_T$ получить

$$\frac{C_n}{G_T} \frac{|C_{rc}|}{C_s} < 2\left(1 + \frac{C_p}{G_T}\right),$$

что после подстановки и замены $G_l \approx \bar{T}_l \gamma_2$ для максимального значения $\gamma_2 \to 1$ в конечном итоге приводит к условию

$$\Delta t \leqslant V_p \left(\frac{1}{2|P'_c| \dfrac{\bar{T}_w \bar{T}_n}{\bar{T}_T}} + \frac{S_w b'_w B_w}{\bar{T}_T} \right). \qquad (5.55)$$

Очевидно, что предел устойчивости возрастает по сравнению с уравнением (5.47), но улучшение в большинстве случаев несущественно.

Анализ устойчивости для фильтрации трехфазного флюида проводится таким же образом, однако становится сложней даже для случая несжимаемых флюидов (Коутс, 1968). Приведем конечные результаты анализа для трехфазной фильтрации несжимаемых флюидов.

Если обозначить через e_1, e_2 и e_3 погрешности при определении S_w, p и S_g и задать γ_l ($l=1, 2, 3$), то после громоздких выкладок (см. упражнение 5.6) получим:

$$\Delta t \leqslant \frac{4V_p}{\gamma_1 |P'_{cow}| T_w \dfrac{T_o + T_g}{T_T} + \gamma_3 |P'_{cog}| T_g \dfrac{T_o + T_w}{T_T} + \dfrac{1}{T_T} \sqrt{X}}, \qquad (5.56)$$

где

$$X = [\gamma_1 |P'_{cow}| T_w (T_o + T_g) - \gamma_3 |P'_{cog}| T_g (T_o + T_w)]^2 + 4 |P'_{cow}| |P'_{cog}| T^2_w T^2_g \gamma_1 \gamma_3.$$

Легко проверить, что для областей с двухфазным течением это выражение сводится к уравнению (5.47). При анализе трехфазных сжимаемых систем получили бы более сложные выражения. Однако по аналогии с двухфазным случаем, который рассмотрен выше, видно, что учет сжимаемости незначительно «смягчает» условие устойчивости. Для практических целей условие устойчивости, полученное для несжимаемой жидкости, можно использовать при рассмотрении сжимаемых систем.

Устойчивость SS-метода. Поскольку по SS-методу P_c учитывается неявно, то метод безусловно устойчив относительно основных переменных. Это положение можно легко доказать с помощью анализа Фурье (см. упражнение 5.7).

5.4.1.2. Устойчивость по отношению к проводимостям

Рассмотрим случай фильтрации несжимаемого двухфазного флюида при нулевых капиллярном давлении и гравитации. Как показано ранее, IMPES- и SS-методы в данном случае идентичны.

Для типичного потокового члена

$$u_{i+1/2}=\mathrm{T}_{i+1/2}(p_{i+1}-p_i)$$

нелинейную проводимость необходимо вычислить при некоторых значениях временной и пространственной координат. Несмотря на то, что все варианты выбора будут подробно обсуждены в разделе 5.5, рассмотрим схему со сносом значений проводимости вверх по потоку и явную по времени: $\mathrm{T}_{i+1/2}=\mathrm{T}^n{}_i$, если течение происходит от точки i до $i+1$, $\mathrm{T}_{i+1/2}=\mathrm{T}^n{}_{i+1}$, если течение происходит от точки $i+1$ до i. Можно предположить, что поток происходит в положительном направлении оси x. Тогда уравнения фильтрации выглядят следующим образом:

$$\mathrm{T}^n_{l_{i-1}}(p_{i-1}-p_i)^{n+1}+\mathrm{T}^n_{l_i}(p_{i+1}-p_i)^{n+1}=\frac{V_{P_i}}{\Delta t}(S_l^{n+1}-S_l^n),\ l=\mathrm{n},\ \mathrm{w}. \tag{5.57}$$

Хотя можно анализировать и это уравнение, все же более удобно рассмотреть эквивалентную систему уравнений (2.84) и (2.91). Для одномерного случая решение уравнения (2.84) тривиально ($u_\mathrm{T}=Q_\mathrm{T}/A$). Поэтому рассмотрим лишь уравнение для насыщенности

$$-u_\mathrm{T}\nabla f_\mathrm{w}=-u_\mathrm{T}\frac{df_\mathrm{w}}{dS_\mathrm{w}}\nabla S_\mathrm{w}=\phi\frac{\partial S_\mathrm{w}}{\partial t}+q_\mathrm{w}-f_\mathrm{w}q_\mathrm{T}.$$

Дискретная форма этого уравнения для блока, не содержащего источник, имеет вид

$$-Q_\mathrm{T}\left[\left(\frac{df_\mathrm{w}}{dS_\mathrm{w}}\right)_i S_{\mathrm{w}_i}-\left(\frac{df_\mathrm{w}}{dS_\mathrm{w}}\right)_{i-1}S_{\mathrm{w}_{i-1}}\right]^n=\frac{V_{p_i}}{\Delta t}(S_\mathrm{w}^{n+1}-S_\mathrm{w}^n)_i, \tag{5.58}$$

где взвешивание значений проводимости вверх по потоку заключается в том, что для их определения берутся явные значения насыщенности в узлах, расположенных против движения флюида. Показанная форма левой части уравнения консервативна и поэтому предпочтительнее дискретизации другого вида, например, такой, как

$$-Q_\mathrm{T}\left(\frac{df_\mathrm{w}}{dS_\mathrm{w}}\right)_{i-1/2}(S_{\mathrm{w}_i}-S_{\mathrm{w}_{i-1}})^n.$$

Легко показать, что в данном простом случае учет S_w в уравнении (5.58) в точности совпадает с учетом T_w в уравнении (5.57) (см. упражнение 5.8).

Если пренебречь изменениями df_w/dS_w, погрешность можно определить из уравнения

$$-Q_T \frac{df_w}{dS_w}(e_i - e_{i-1})^n = \frac{V_{p_i}}{\Delta t}(e^{n+1} - e^n)_i.$$

Применяя метод Фурье для анализа устойчивости, положим

$$e_i^n = \xi^n \exp(\sqrt{-1}\alpha i), \quad \alpha = m\Delta x$$

и после преобразований получим

$$\xi = 1 + C[\exp(-\sqrt{-1}\alpha) - 1], \tag{5.59}$$

где

$$C = Q_T \frac{df_w}{dS_w} \frac{\Delta t}{V_p}.$$

Для определения $|\xi|$ представим ξ в комплексной форме как $= a + \sqrt{-1}b$ и найдем

$$|\xi|^2 = a^2 + b^2 = 1 - 4C(1 - C)\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Условие устойчивости $|\xi| < 1$ для $\sin^2\alpha/2 \approx 1$ принимает вид

$$0 < C(1 - C) < \frac{1}{2},$$

что возможно при $C < 1$, т. е.

$$\Delta t < \frac{V_p}{\frac{df_w}{dS_w} Q_T}. \tag{5.60}$$

Данное неравенство имеет простую физическую интерпретацию. Если его поделить на $A\phi$, можно записать

$$\Delta t \frac{df_w}{dS_w} \frac{u_T}{\phi} < \Delta x. \tag{5.61}$$

Из теории двухфазной фильтрации Баклея — Леверетта следует, что левая часть неравенства выражает скорость продвижения поверхности с постоянной насыщенностью (например, Крафт и Хоукинс, 1959, с. 369):

$$\frac{u_T}{\phi} \frac{df_w}{dS_w} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{S_w = \text{const}} = u_s.$$

Тогда условие устойчивости можно выразить как

$$u_s \Delta t < \Delta x, \tag{5.62}$$

что означает, что фронт вытеснения за временной шаг может продвинуться только на один блок сетки или пропускная способность

любого блока за временной шаг должна быть менее его порового объема. Такая интерпретация предела устойчивости широко используется в литературе по численным методам в гидродинамике (Рихтмайер и Мортон, 1967, с 304).

5.4.2. Существование и единственность решения

5.4.2.1. SS-метод

Рассмотрим уравнения SS-метода для двухфазной фильтрации

$$(\mathrm{T}-\mathrm{D})\,(P^{n+1}-P^n) = -R^n+Q. \tag{5.63}$$

В данном разделе в дальнейшем будем предполагать, что в задаче заданы граничные условия непротекания, которые дискретизируются с помощью метода «отражения». Следовательно, если точка $i+1$ находится за границей области, то в уравнение (5.17) следует ввести $\mathrm{T}_{i+1/2}=0$ и $T_i=-(\mathrm{T}_{i-1/2})$. Для простоты порода пласта принята несжимаемой. Тогда матрицу D запишем как

$$\mathrm{D}_i = \mathrm{D}_{si} + \mathrm{D}_{\mathrm{B}i} = -\frac{V_p}{\Delta t}\begin{bmatrix} b_{\mathrm{w}}^{n+1}S'_{\mathrm{w}} & -b_{\mathrm{w}}^{n+1}S'_{\mathrm{w}} \\ -b_{\mathrm{n}}^{n+1}S'_{\mathrm{w}} & b_{\mathrm{n}}^{n+1}S'_{\mathrm{w}} \end{bmatrix} + \frac{V_p}{\Delta t}\begin{bmatrix} S_{\mathrm{w}}^n b'_{\mathrm{w}} & 0 \\ 0 & S_{\mathrm{n}}^n b'_{\mathrm{n}} \end{bmatrix}. \tag{5.64}$$

Теперь можно доказать следующие положения:

Теорема 1. Пусть $S'_{\mathrm{w}}<0$, $b'_{\mathrm{w}}>0$, $b'_{\mathrm{n}}>0$. Тогда уравнние (5.63) имеет единственное решение.

Доказательство. Матрица T — симметричная с диагональным преобладанием; элементы диагонали отрицательны, элементы вне диагонали положительны. Из этого следует, что T — отрицательна и полуопределенная. Матрица $\mathrm{D_s}$ также имеет нулевую сумму по строкам, но она не симметричная. При принятых допущениях по крайней мере один элемент $\mathrm{D}_{\mathrm{B}i}$ положителен. Поэтому матрица A=T—D строго диагонально преобладающая по крайней мере для одной строки. К тому же A имеет по крайней мере одну полную поддиагональ и одну полную наддиагональ. Легко показать, что A — неприводима и невырождена (Варга, 1962, приложение А.3.2). Отметим, что если $0<S_{\mathrm{wc}}<S_{\mathrm{w}}<S_{\mathrm{w\,max}}<1$, то A будет матрицей со строгим диагональным преобладанием и свойства неприводимости для нее не требуется.

Предположение о сжимаемости, как это показано в следующей теореме, существенно для единственности решения.

Теорема 2. Пусть $S'_{\mathrm{w}}<0$, $b'_{\mathrm{w}}=b'_{\mathrm{n}}=0$. Тогда решение уравнения (5.63) существует, если

$$B_{\mathrm{w}}\sum_i Q_{\mathrm{w}_i} + B_{\mathrm{n}}\sum_i Q_{\mathrm{n}i} = 0 \tag{5.65}$$

и оно определено с точностью до аддитивной константы.

Доказательство. В случае фильтрации несжимаемого флюида матрица D нулевая и поэтому все строки матрицы A имеют нуле-

вые суммы. Так как все диагональные элементы отрицательны, а элементы вне диагоналей положительны, то следует (см. приложение А.3.6), что А вырождена. Умножим каждое уравнение для смачивающей фазы на B_w, а каждое уравнение для несмачивающей фазы на B_n и обозначим полученную матрицу $\hat{A}=\hat{T}-\hat{D}$. Легко видеть, что $\hat{A}$ симметрична. Из свойств симметрии и нулевой суммы строк матрицы $\hat{T}$ следует, что для любого вектора P

$$\sum_i (TP)_{li} = \sum_i (\hat{T}P)_{li} = 0, \quad l = w, n. \tag{5.66}$$

Здесь $(\hat{T}P)_{li}$ — результат умножения i-й строки $\hat{T}$ для фазы l на вектор P.

Поскольку

$$\hat{D}_{s_i} = \frac{V_{P_i}}{\Delta t} S'_{w_i} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix},$$

справедливо, что

$$\sum_l \sum_i (\hat{D}_s P)_{li} = 0$$

для любых P. Из этого также следует, что

$$\sum_l \sum_i |R^k_{li} = 0 \tag{5.67}$$

для любых P^k.

Если записать уравнения (5.63) в виде

$$(\hat{T}-\hat{D})(P^{n+1}-P^n) = -\hat{R}^n + \hat{Q}, \tag{5.68}$$

просуммировать их и использовать полученные ранее результаты, то если решение существует, должно быть справедливым уравнением (5.65).

С другой стороны, легко показать, что каждый главный минор порядка $N-1$, где N — порядок А, является неприводимо диагонально преобладающим, следовательно, ранг А равен $N-1$. Это доказывает, что условие (5.65) также достаточно. Поскольку ясно, что любой постоянный вектор $P=C$ удовлетворяет уравнению (5.68), то все решения имеют вид $P=P_1+C$, где P_1 — некоторое частное решение.

Физически уравнение (5.65) — уравнение сохранения массы в замкнутой несжимаемой системе. Неопределенная константа соответствует произвольному характерному давлению, поскольку уровень давления в несжимаемой системе несущественен.

Получим некоторые соотношения, являющиеся прямым следствием результатов (см. раздел 3.7.1, гл. 3).

Вначале определим невязку на слое $n+1$ как

$$R^{n+1} = (T-D)(P^{n+1}-P^n) + R^n = Q. \tag{5.69}$$

Затем из уравнения (5.66) получим следующий вывод:

Теорема 3. Если существует решение (5.63), то оно удовлетворяет соотношению

$$\sum_i R_{li}^{n+1} = -\sum_i [\mathrm{D}(P^{n+1} - P^n)]_{li} = \sum_i Q_{li},$$

где выражение под вторым знаком суммы представляет собой составляющую i-го элемента вектора, относящуюся к l-й фазе.

Следующая теорема устанавливает соотношение между матрицей D и погрешностями материального баланса. Вначале определим вектор DS:

$$DS_{li}^{n,n+1} = \frac{V_{pi}}{\Delta t}[(S_l b_l)^{n+1} - (S_l b_l)^n]_i, \quad l = \mathrm{w, n}. \tag{5.70}$$

Отметим, что $\Delta t DS$ — вектор изменения массы. При этом уравнение (5.70) представляет собой обобщенное уравнение (3.172). Тогда погрешность материального баланса на временном шаге

$$E_l = \sum_i DS_{li}^{n,n+1} + \sum_i Q_{li}, \quad l = \mathrm{w, n}. \tag{5.71}$$

Из теоремы 3 непосредственно следует.

Теорема 4. Если решение уравнения (5.63) существует, то оно удовлетворяет соотношению

$$E_l = \sum_i DS_{li}^{n,n+1} - \sum_i [\mathrm{D}(P^{n+1} - P^n)]_{li}, \quad l = \mathrm{w, n}. \tag{5.72}$$

Таким образом, данная теорема строго доказывает наше предыдущее утверждение о том, что производные по времени, определяемые по уравнению (5.3), удовлетворяют условию сохранения массы, потому что в данном случае $\mathrm{D}(P^{n+1} - P^n) = DS^{n,n+1}$. С другой стороны, по уравнению (5.72) можно случайно получить $E_l = 0$ даже для неконсервативного оператора. Следовательно, при решении уравнений E_l не следует использовать для оценки сходимости. Вместо этого можно использовать норму

$$\| E_l \| = \sum_i | E_{li} |.$$

Анализ для трехфазной фильтрации совершенно аналогичен. Однако T и D в общем случае не являются матрицами с диагональным преобладанием из-за наличия дополнительных элементов вне диагонали, отражающих массообмен между нефтяной и газовой фазами. Шеффилд (1969) показал, что для достаточно малого Δt_l матрица A невырожденная, но его доказательство, по-видимому, ошибочно. Правильное доказательство, приведенное в упражнении 5.9, показывает, что уравнения SS-метода для

трехфазной фильтрации имеют единственное решение, если Δt удовлетворяет следующему условию:

$$\Delta t\,(b-a) < V_p \frac{S_o}{B_o} R'_s, \tag{5.73}$$

где a и b — некоторые константы. Отметим, что существование решения без учета массообмена не требует ограничения Δt.

Теоремы 3 и 4 обобщаются непосредственно, если третий элемент DS (при трехфазной фильтрации l=0, w, g) определяется как

$$DS_{gi}^{n,n+1} = \frac{V_{p_i}}{\Delta t}\left[S_g b_g)^{n+1} - (S_g b_g)^n + (S_o b_o R_s)^{n+1} - (S_o b_o R_s)^n\right]_i. \tag{5.74}$$

5.4.2.2. *IMPES-метод*

Анализ IMPES-метода можно провести теми же средствами, что и SS-метода. Поскольку вариант уравнений IMPES-метода можно с помощью алгебраических преобразований получить из уравнений SS-метода при фиксированных P_c, то все изложенные выше теоремы справедливы и для IMPES-метода. Это можно показать непосредственно. Уравнения для IMPES-метода в случае двухфазной фильтрации до их сведения в одно записываются следующим образом:

$$R_{wi} = \Delta\left[T_w\left(\Delta p_n - \gamma_w \Delta z - \Delta P_c\right)\right]_i - \frac{V_{pi}}{\Delta t}\left(S_w^n b'_w \Delta_t p_n + b_w^k \Delta_t S_w\right)_i = Q_{wi},$$

$$R_{ni} = \Delta\left[T_n\left(\Delta p_n - \gamma_n \Delta z\right)\right]_i - \frac{V_{pi}}{\Delta t}\left(S_n^n b'_n \Delta_t p_n - b_n^k \Delta_t S_w\right)_i = Q_{ni}.$$

при предположении, что $\Delta_t p_w = \Delta_t p_n$, ϕ — константа, $b^k{}_l$ — приближение $b_l{}^{n+1}$.

Конечно-разностное уравнение материального баланса (см. теорему 3) можно легко получить простым сложением всех уравнений для данной фазы:

$$\sum_i R_{li} = -\sum_i \frac{V_{pi}}{\Delta t}\left(S_l^n b'_l \Delta_t p_n + b_l^k \Delta_t S_l\right) = \sum_i Q_l, \quad l = w, n.$$

Ясно, что если $b^k{}_l = b_l{}^{n+1}$, слагаемые под вторым знаком суммы дают DS_{li}, определяемое уравнением (5.70), откуда следует и теорема 4. Подобным образом можно получить теоремы 1 и 2.

5.4.3. Сходимость решений

Поскольку все использованные аппроксимации согласованы с дифференциальными уравнениями, то условие сходимости (для достаточно малых Δt) следует из условия устойчивости (см. гл. 3, раздел 3.2.3). Однако это справедливо только тогда, когда дифференциальная задача правильно поставлена, а оператор линеен. Эти условия, как правило, не удовлетворяются, поэтому условия сходимости автоматически не обеспечиваются. В следующем разделе приводится пример, когда очевидная разностная схема сходится к неверному решению.

5.5. УЧЕТ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ

Нелинейности уравнения (5.20) возникают в матрицах T и D и в неявном виде в векторе R. Обозначим типичный элемент матрицы как

$$T_l = T_l(f_1(p_1),\ f_2(S_w)) = GC f_1 f_2, \tag{5.75}$$

где GC — постоянная часть проводимости; $f_1 = 1/\mu B$; $f_2 = k_{rl}$. Функции f_1 и f_2 могут аппроксимироваться на различных временных слоях, а между узлами сетки — различными способами. Обычно

$$T^{n+1}_{l_{i+1/2}} \simeq T_l\left[f^{k_1}_{1_{i_1}},\ f^{k_2}_{2_{i_2}}\right],$$

где

$$i \leqslant i_1,\ i_2 \leqslant i+1,\ n \leqslant k_1,\ k_2 \leqslant n+1.$$

О проблеме аппроксимации в промежуточной пространственной координате $i+\frac{1}{2}$ говорят, как о проблеме «взвешивания». Проблема аппроксимации временного слоя $n+1$ — проблема решения или локальной линеаризации системы нелинейных уравнений.

Аналогичная ситуация возникает при аппроксимации матрицы D.

Все виды нелинейностей уравнения (5.20) можно разбить на две группы: слабые и сильные.

а) *Слабые нелинейности.* Все переменные, являющиеся функциями давления только одной фазы, можно рассматривать как слабые нелинейности. К ним относятся: B_l^{n+1}, $(1/B_l)'$, R_s, γ_l^{n+1} и μ_l^{n+1}. Пример реальных зависимостей от давления приводится в гл. 2 (см. рис. 2.4). Влияние слабых нелинейностей уравнения зависит от степени изменения давления, оно исчезает в задачах, в которых давление остается постоянным. Вполне допустимо даже в задачах с изменяющимся давлением оценивать функции, зависящие от давления, на предыдущем слое, т. е. по p^n_l вместо p_l^{n+1}. Так как аппроксимация функции в точке $i+\frac{1}{2}$ не является решающей, можно например, принять

$$f_{1i+1/2} \simeq \frac{1}{2}(f_{1i} + f_{1i+1}).$$

в) *Сильные нелинейности.* Сильными нелинейностями мы называем переменные, зависящие от насыщенности или капиллярного давления, т. е. от k_{rl} и S'_w. Нелинейность уравнения, связанная с просачиванием газа через пласт, имеет специфические черты и будет рассмотрена отдельно. Примеры функций k_r и P_c можно найти в гл. 2. Из уравнения (5.10) следует, что нелинейность, связанная с S'_w, исчезает, если P_c — линейная функция насыщенности. Однако это не так для k_r. Следовательно, с k_r связана главная нелинейность уравнения (5.20).

Рассматриваемый в данном разделе вопрос иллюстрируется численными результатами, полученными при решении двух контрольных задач.

Контрольная задача 1

Рассматривается задача о заводнении пласта при отсутствии сжимаемости и нулевом капиллярном давлении (задача Баклея — Левереттa). Функции k_r заданы кривыми на рис. 2.9, а другие данные (см. Коутс, 1968; Тодд и др., 1972) следующие: L=304,8 м; B_w=B_n=1; μ_w=μ_n=1 МПа·с; k=3 мкм^2; ϕ=0,2. Несмачивающая фаза отбирается при x=L с расходом 12,08 м^3/сут, а смачивающая закачивается при x=0 с такой же интенсивностью. Пласт расположен горизонтально, площадь поперечного сечения составляет 929 м^2, а постоянная начальная насыщенность S_{wi}=0,16. Так как при SS-методе используются конечные значения P_c, то нулевое P_c аппроксимируется его линейной функцией, соответствующей P_c=0,7 кПа при S_w=0,16; P_c=0 при S_w=0,8. Это значение P_c — мало и не влияет на результат решения.

Контрольная задача 2

Рассматривается задача для сжимаемой нефтегазовой системы при просачивании газа через пласт и при нелинейных функциях, рассмотренных в гл. 2 (см. рис. 2.10). Другие данные следующие (Маккрири, 1971): L=41,15 м; k=0,20 мкм^2; ϕ=0,04. Плотности при нормальных условиях ρ_{wstc}=961,1 кг/м^3 и ρ_{nstc}=0,8 кг/м^3. Смачивающая фаза отбирается при x=L с дебитом 79,57 м^3/сут в нормальных условиях. Пласт представляет собой вертикальную колонку с площадью поперечного сечения 503046,9 м^2 и постоянной начальной насыщенностью S_w=0,99. Начальное давление задается условиями гравитационного равновесия с p_w=12,066 МПа в верхней части колонки.

5.5.1. Взвешивание проводимостей

Весовые соотношения связывают значения с S_w и S_{wi+1}. Наиболее приемлемую с точки зрения численного анализа аппроксимацию

$$k_{rl_{i+1/2}} = \frac{1}{2}\left[k_{rl}(S_{wi}) + k_{rl}(S_{wi+1})\right] \qquad (5.76)$$

можно назвать «средневзвешенной». Это аппроксимация второго порядка. В другом виде эту аппроксимацию можно представить как

$$k_{rl_{i+1/2}} = k_{rl}\left[\frac{1}{2}(S_{wi} + S_{wi+1})\right]. \qquad (5.77)$$

Хотя оба вида аппроксимации, как будет показано ниже, аппроксимации второго порядка, они приводят к ошибочным результатам.

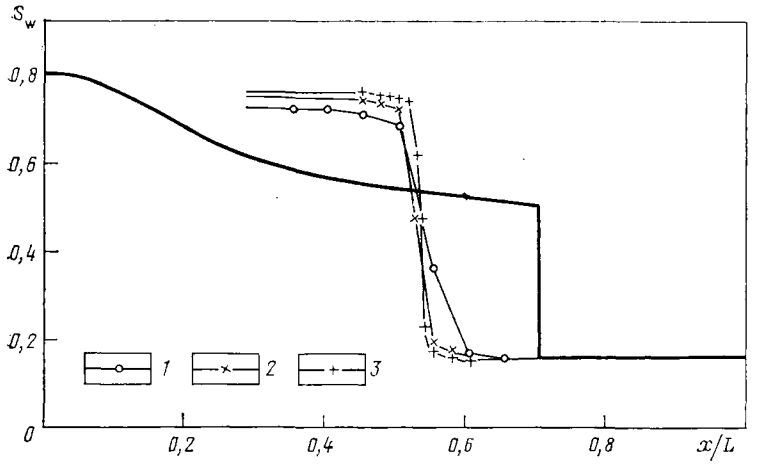


Рис. 5.1. Результаты сходимости «средневзвешенной» схемы — задача, близкая к гиперболической (контрольная задача 1) $t=1500$ сут)
1 — $N=20$, $\Delta t=10$ сут; *2* — $N=40$, $\Delta t=10$ сут; *3* — $N=60$, $\Delta t=5$ сут

Это проиллюстрировано на рис. 5.1 для численного решения задачи Баклея — Леверетта. При незначительных P_c в уравнениях SS-метода получаем почти гиперболическую задачу с верным решением, очень близким к решению Баклея — Леверетта (сплошная линия на рис. 5.1). Однако при измельчении сетки численные результаты, полученные по схеме со «взвешиванием» (см. уравнение 5.76), отличаются от реальных. Это происходит вследствие «ги-

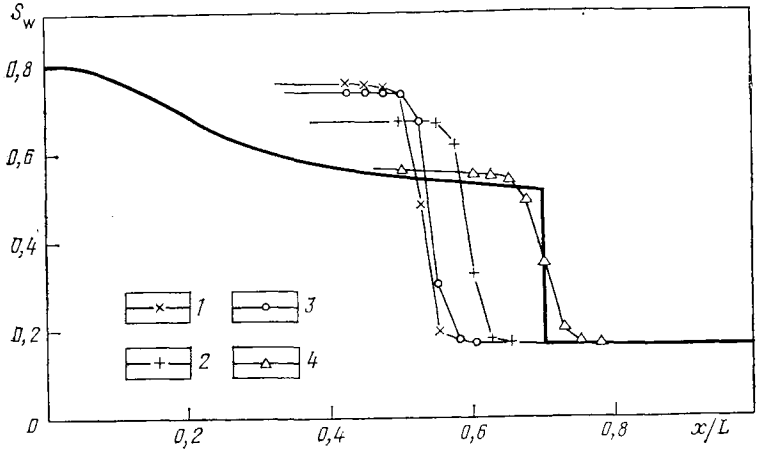


Рис. 5.2. Результаты решения по «среднезвешенной схеме» при различных P_c (контрольная задача 1: $\Delta x=L/40$; $\Delta t=10$ сут; $t=1500$ сут)
1 — P_c — измеренное; *2* — $P_c\times10$; *3* — $P_c\times50$; *4* — $P_c\times200$

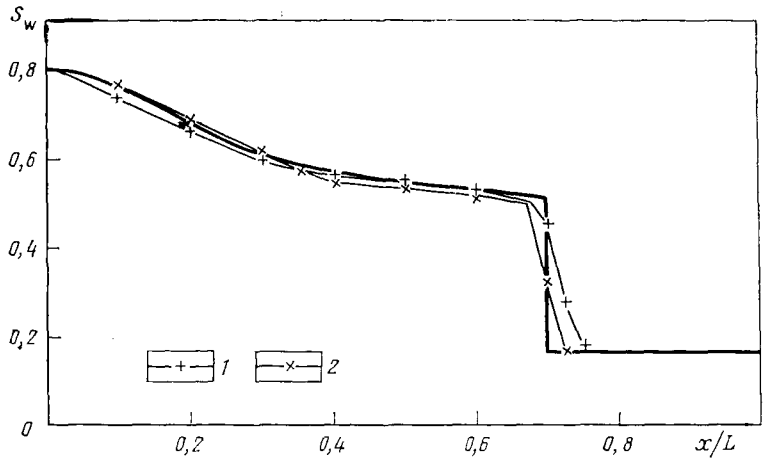


Рис. 5.3. Сравнение схем «взвешивания по потоку» (контрольная задача 1: $\Delta x = L/40$; $\Delta t = 10$ сут; $t = 1500$ сут (Сеттари и Азиз, 1975)

1 — «одноточечное взвешивание» вверх по потоку; *2* — «двухточечное взвешивание вверх по потоку

перболической природы» уравнения. В чисто гиперболическом случае ($P_c \equiv 0$) дифференциальная задача поставлена некорректно (Кардуэлл, 1959) и не имеет единственного решения. Решение со «средневзвешенной» аппроксимацией приводит к математически возможному, но физически неверному результату. С увеличением P'_c (уровень P_c несуществен) результаты приближаются к физически правильному решению (рис. 5.2). Однако при этом значение P'_c может быть больше действительного для рассматриваемой задачи; более того, оно зависит от величины шагов сетки.

Поэтому наиболее распространена схема со «взвешиванием вверх по потоку», задаваемая соотношением

$$k_{rl\,i+1/2} = \begin{cases} k_{rl}(S_{wi}), & \text{если поток направлен из } i\text{-й в } (i+1)\text{-ю ячейку} \\ k_{rl}(S_{w\,i+1}), & \text{если поток направлен из } (i+1)\text{-й в } i\text{-й ячейку} \end{cases} \quad (5.78)$$

Направление потока определяется знаком $\Delta\Phi$:

$$\Delta\Phi_{l\,i+1/2} = [p_{l\,i+1} - p_{li} - \gamma_{l\,i+1/2}(z_{i+1} - z_i)].$$

Поток направлен от ячеек i к $i+1$, если $\Delta\Phi < 0$, и наоборот. Указанная формула применяется только для аппроксимации первого порядка.

Тодд и другие (1972) предложили асимметричную аппроксимацию второго порядка, использующую два узла, расположенные вверх по потоку:

$$k_{rli+1/2}=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[3k_{rl}\left(S_{wi}\right)-k_{rl}\left(S_{wi-1}\right)\right]-\text{если поток направлен от } i\text{-й к } (i+1)\text{-й ячейке}\\ \frac{1}{2}\left[3k_{rl}\left(S_{wi+1}\right)-k_{rl}\left(S_{wi+2}\right)\right]-\text{если поток направлен от } (i+1)\text{-й к } i\text{-й ячейке}\end{cases} \tag{5.79}$$

При рассмотрении формулы (5.79) с учетом взвешивания насыщенностей, как это делалось ранее для анализа устойчивости уравнения (5.58), она становится эквивалентной аппроксимации второго порядка, предложенной Прайсом и др. (1960) для уравнений конвективной диффузии. Поскольку уравнение (5.79) описывает процесс экстраполяции, то подсчитанные значения необходимо ограничить физически допустимыми, т. е. $0\leqslant k_r\leqslant 1$.

На рис. 5.3 сравнивают две схемы «взвешивания» с аппроксимацией вверх по потоку. Результаты для обоих методов сходятся к правильному решению. При «двухточечном взвешивании» кривая фронта вытеснения получается более крутой, чем при одноточечной. Рейтби (1976) дал критическую оценку разностного дифференцирования «вверх по потоку» для различных задач фильтрации.

5.5.1.1. Погрешности аппроксимации

Анализ погрешностей аппроксимации облегчается, если уравнение представлено в гиперболической форме (см. раздел 5.4.1). Оператор, подлежащий аппроксимации, обозначается как

$$AS_w=-\frac{\partial S_w}{\partial x}-C_w\frac{\partial S_w}{\partial t}=0, \tag{5.80}$$

где

$$C_w=\frac{\phi}{u_T f'_w}.$$

Разностный оператор, аппроксимирующий A в точке x_i, обозначается как $L(S_{wi})$, а погрешность аппроксимации по L определяется по формуле $e=AS_w(x_i)-L(S_{wi})$. В работе Сеттари и Азиза (1975) приводится оценка погрешностей аппроксимации. Если обозначить $\partial S_w/\partial x=S'$ и $\partial S_w/\partial t=S^{\cdot}$, то конечные результаты линеаризованного анализа погрешностей имеют вид:

для обеих «средневзвешенных» аппроксимаций

$$R_m=-\frac{\Delta t}{2}S'^{\cdot}+\frac{\Delta t^2}{3}S'^{\cdot\cdot}+\frac{\Delta x^2}{6}S'''+O(\Delta^3), \tag{5.81}$$

для «одноточечного взвешивания» вверх по потоку

$$R_u=\left(-\frac{\Delta t}{2}+C_w\frac{\Delta x}{2}\right)S'^{\cdot}+\frac{\Delta t^2}{3}S'^{\cdot\cdot}+\frac{\Delta x\Delta t}{2}S''^{\cdot}+\frac{\Delta x^2}{6}S'''+O(\Delta^3) \tag{5.82}$$

и для двухточечного взвешивания вверх по потоку

$$R_{2u}=-\frac{\Delta t}{2}S'^{\cdot}+\frac{\Delta t^2}{3}S'^{\cdot\cdot}-\frac{\Delta x^2}{3}S'''+O(\Delta^3). \tag{5.83}$$

Все три выражения соответствуют явной аппроксимации k_{rl} во времени.

На примере взвешивания можно показать, что один лишь анализ погрешности аппроксимации может ввести в заблуждение. Погрешности аппроксимации для «средневзвешенной» и «двухточечной» схем с ориентацией вверх по потоку отличаются только коэффициентом при Δx^2, однако их качество различно. То, что схемы с ориентацией вверх по потоку лучше средневзвешенной аппроксимации более высокого порядка, также отмечено при решении уравнения Навье — Стокса (Ранчел и Уолфштейн, 1969; Херт, 1968).

При решении практических задач выбирают одноточечную или двухточечную схему. Отметим, что член первого порядка в уравнении (5.82) состоит из двух частей с разными знаками, так как $C_w > 0$. Поэтому член первого порядка исчезает при $\Delta t = C_{wl}\Delta x$, в точности соответствующем пределу устойчивости для схемы с явным определением проводимости, ориентированной вверх по потоку — см. уравнение (5.60). Это также характерно и для гиперболических уравнений, например, по схеме с центральной разностью получают точное решение линейной задачи, если $\Delta t = C_w \Delta x$ (фон Розенберг, 1969).

Погрешность аппроксимации при явном определении проводимости с ориентацией вверх по потоку будет минимальной при максимально возможном с точки зрения устойчивости временном шаге.

«Двухточечное взвешивание» вверх по потоку более точное, чем одноточечное, хотя и не обладает свойством уничтожения погрешности. При нем также уменьшается влияние нежелательного явления, называемого «эффектом ориентации сетки», которое встречается при решении многомерных задач (см. гл. 9). Объем вычислений тот же, что и для одноточечной схемы, если k_{rl} определяется во времени явно. При полунеявном определении k_{rl} или неявной аппроксимации уравнения (5.80) в случае использования метода «двухточечного взвешивания» увеличивается ширина ленты матрицы для многомерных задач.

5.5.2. Аппроксимация проводимостей во времени

Выбор временного слоя, по-видимому, имеет решающее значение для обеспечения устойчивости решения конечно-разностных уравнений. Явная аппроксимация, т. е. $T^{n+1} \approx T(f^n_2)$, как показано в разделе 5.4.1.2, лишь условно устойчивая. Поэтому здесь следует ограничивать временной шаг. Проблемы устойчивости становятся особенно острыми при моделировании процесса многомерной фильтрации около одиночной скважины, где возникают высокие скорости вследствие сходимости потоков к забою. Именно для данного случая (моделирования образования конуса обводнения) впервые была поставлена задача устойчивости решения (Уэлдж и Уэбер, 1964). Было показано, что проблема устойчивости возникает как результат явного определения проводимостей (Блэр и Уэйнауг, 1969). В настоящее время существует несколько методов решения

данной проблемы с помощью как линеаризованных (Макдональд и Коутс, 1970; Леткеман и Ридингс, 1970; Сонье и др.), 1973, так и нелинейных (Ноулен и Берри, 1972; Робинсон, 1971) аппроксимаций полностью неявных проводимостей. В данном разделе показано, что большинство этих методов тесно связано с решением нелинейных уравнений методом Ньютона. Существенное значение при этом имеют способы учета членов отбора. Чтобы обеспечить устойчивость решения при изменении насыщенностей вблизи добывающих скважин, члены отбора нужно аппроксимировать так же, как и межблочные проводимости. Это рассматривается в разделе 5.7.

Остальная часть данного раздела посвящается анализу пространственной аппроксимации k_{rl} для случая «одноточечного взвешивания» с ориентацией вверх по потоку — см. уравнение (5.7.8). При рассмотрении T и D на различных временных слоях необходимо также ввести новое обозначение вектора невязки, ранее определенного уравнением (5.18). Запишем

$$R^k{}_m = \mathrm{T}^m P^k - \mathrm{D}^m (P^k - P^n) - G^m, \tag{5.84}$$

где верхний индекс m в правой части равенства означает временной слой, на котором вычисляются коэффициенты. С учетом этого обозначения можно записать уравнение (5.20) с коэффициентами, вычисленными на временном слое m, как

$$(\mathrm{T}^m - \mathrm{D}^m)(P^{n+1} - \mathrm{P}^n) = -R^n{}_m + Q. \tag{5.85}$$

Необходимость различать временные слои появится в дальнейшем при рассмотрении способа учета матрицы D, поскольку она должна быть определена на $(n+1)$-м временном слое.

Из двух основных методов решения (SS и IMPES) для неявного определения матрицы T подходит только SS-метод. IMPES-метод по определению предполагает явный учет P_c и насыщенностей в матрице T. Однако неявный аналог IMPES-метода, известный как SEQ-метод (метод последовательного решения), будет рассматриваться в разделе 5.6.

В данном разделе для ясности рассмотрим только SS-метод для случая, когда в качестве зависимых переменных взяты давления. Однако будут сделаны особые замечания относительно хода вычислений в том случае, если в качестве переменных будут выбраны другие величины.

5.5.2.1. Некоторые основные методы

а) *Явные проводимости*

Как показано ранее, аппроксимация вида

$$\mathrm{T}^{n+1} \simeq \mathrm{T}(f^n{}_2) \tag{5.86}$$

лишь условно устойчивая. Это показано на рис. 5.4, где решение контрольной задачи 1, полученное при различных временных шагах, сравнивается с точным решением. Отметим, что в данном

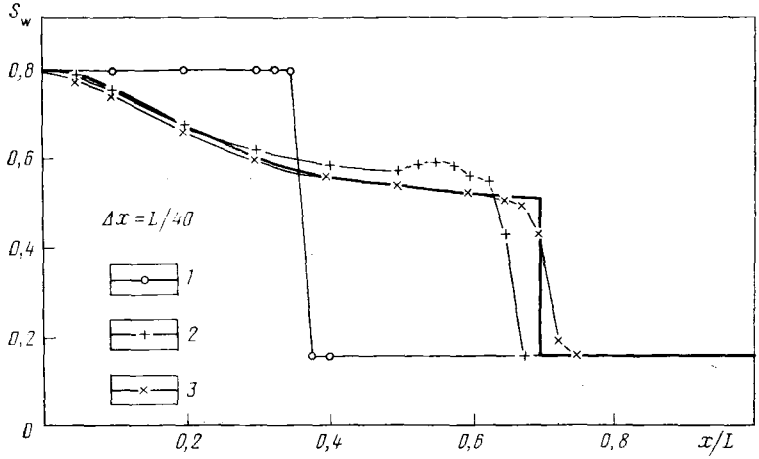


Рис. 5.4. Оценка устойчивости SS-метода с явными проводимостями для контрольной задачи 1 при $t = 1500$ сут.
Шаг Δt — в сут: *1* — 25; *2* — 50; *3* — 100

случае скорость продвижения фронта приблизительно равна 15 см/сут, а предел устойчивости по уравнению (5.62) $\Delta t \approx 50$ сут, что согласуется с численными результатами. Вместо подстановки P^n в уравнение (5.86) можно провести экстраполяцию давления и насыщенности с двух предыдущих временных шагов, т. е. вычислить

$$P^k = P^n + \frac{\Delta t^{n+1}}{\Delta t^n}(P^n - P^{n-1})$$

и использовать $\mathrm{T}(f^k_2)$. Указанные действия приводят только к несущественному улучшению устойчивости. Отметим, что результаты, показанные на рис. 5.4, справедливы и для IMPES-метода, поскольку для данного случая $P_c \approx 0$.

b) *Простая итерация для матрицы* T

Такой метод решения уравнения (5.20) с учетом T^{n+1} можно записать как

$$[\mathrm{T}^{(\nu)} - \mathrm{D}]\,[P^{(\nu+1)} - P^{(\nu)}] = -R^{(\nu)}_{(\nu)} + Q, \quad \nu = 0, 1, \ldots; \; P^{(0)} = P^{(n)}, \quad (5.87)$$

где $\mathrm{T}^{(\nu)} = \mathrm{T}(f^{(\nu)}_2)$. С помощью численных экспериментов было найдено, что уравнение (5.87) сходится при $\Delta t < \Delta t_{\text{кр}}$, где $\Delta t_{\text{кр}}$ — предел устойчивости для явной аппроксимации — см. уравнение (5.86). Во время итерационного процесса насыщенности колеблются с уменьшающейся амплитудой, если $\Delta t < \Delta t_{\text{кр}}$, и с возрастающей амплитудой, если $\Delta t > \Delta t_{\text{кр}}$. В последнем случае осцилляции можно ослабить, используя средневзвешенное значение для $\mathrm{T}^{(\nu)}$. Однако такие методы являются непрактичными.

c) *Линеаризованные неявные проводимости*

В этом случае исходная формулировка (Макдоналд и Коутс, 1970; Леткеман и Ридингс, 1970) заключается в экстраполяции T_l с аппроксимацией первого порядка точности для f_2^{n+1} в виде

$$T_l^{n+1} \simeq T_l(f_2^n) + \frac{\partial T_l}{\partial P_c}(P_c^{n+1} - P_c^n), \qquad (5.88)$$

где

$$\frac{\partial T_l}{\partial P_c} = GC f_1 \frac{df_2}{dS_w}\frac{dS_w}{dP_c}$$

является производной, относящейся к точке, расположенной вверх по потоку. Такие экстраполированные проводимости учитываются членом TP, а нелинейные члены линеаризуются. Например, нелинейная часть типичного члена TP ($T_{li+1/2}^{n+1}(p_{li+1} - p_{li})^{n+1}$) линеаризуется при следующем допущении:

$$(p_{li+1} - p_{li})^{n+1}\frac{\partial T_l}{\partial P_c}(P_c^{n+1} - P_c^n) \simeq (p_{li+1} - p_{li})^n \frac{\partial T_l}{\partial P_c}(P_c^{n+1} - P_c^n). \qquad (5.89)$$

Покажем, что данный метод линеаризации можно интерпретировать как первую итерацию метода Ньютона для уравнений с неявными проводимостями. При $m = n+1$ уравнение (5.85) имеет вид

$$R_{n+1}^{n+1} = T^{n+1}P^{n+1} - D^{n+1}(P^{n+1} - P^n) - G^{n+1} = Q, \qquad (5.90)$$

а в основу классического метода Ньютона положен итерационный процесс, определяемый посредством

$$DR^{(\nu)}[P^{(\nu+1)} - P^{(\nu)}] = -R_{(\nu)}^{(\nu)} + Q, \quad \nu = 0, 1, \ldots; \quad P^{(0)} = P^{(n)}, \qquad (5.91)$$

где DR — матрица Якоби для $R(P)$.

Предположим, что D и γ_l постоянны и рассмотрим матрицу Якоби DR. По определению элементы этой матрицы — частные производные вектора R. В обозначениях, приведенных ранее, блочный элемент DR в i-й строке и j-м столбце состоит из производных $\partial R_{li}/\partial P_{kj}$, где l, k=w, n:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial R_{wi}}{\partial p_{wi}} & \dfrac{\partial R_{wi}}{\partial p_{ni}} \\ \dfrac{\partial R_{ni}}{\partial p_{wi}} & \dfrac{\partial R_{ni}}{\partial p_{ni}} \end{bmatrix}$$

Легко видеть, что у матрицы DR ненулевые элементы могут быть расположены только на месте трех блочных диагоналей матрицы T. (Заметим, что это не так при использовании двухточечной схемы со взвешиванием вверх по потоку.) При соблюдении высказанных ранее допущений производные от γ_l являются нулями, а производные от DP снова образуют матрицу D.

i-е элементы вектора $TP-G$ можно записать как

$$-T_{li-1/2}[p_{li}-p_{li-1}-(\gamma_l\Delta z)_{i-1/2}]+$$
$$+T_{li+1/2}[p_{li+1}-p_{li}-(\gamma_l\Delta z)_{i+1/2}] \qquad (5.92a)$$

или в краткой форме

$$-(T\Delta\Phi)_{li-1/2}+(T\Delta\Phi)_{li+1/2},\quad l=\mathrm{w},\ \mathrm{n}. \qquad (5.92b)$$

Три ненулевых элемента типичной строки матрицы можно получить, продифференцировав три раза уравнение (5.92a) по p_{li-1}, p_{li} и p_{li+1}. Используя «взвешивание» вверх по потоку для проводимостей между i и $i\pm1$, можно записать производные как

$$\frac{\partial}{\partial p_{ki+1}}[T\Delta\Phi)_{li+1/2}-(T\Delta\Phi)_{li-1/2}]=\delta_{kl}T^l{}_{i+1/2},$$

$$\frac{\partial}{\partial p_{ki}}[(T\Delta\Phi)_{li+1/2}-(T\Delta\Phi)_{li-1/2}]=-\delta_{kl}T_{li+1/2}+T'_{li+1/2}\frac{\partial P_{ci}}{\partial p_{ki}}-\delta_{kl}T_{li-1/2},$$

$$\frac{\partial}{\partial p_{ki-1}}[(T\Delta\Phi)_{li+1/2}-(T\Delta\Phi)_{li-1/2}]=\delta_{kl}T_{li-1/2}-T'_{li-1/2}\frac{\partial P_{ci-1}}{\partial p_{ki-1}},\quad k=\mathrm{n},\ \mathrm{w},$$

где использовано определение

$$T'_{li+1/2}=\Delta\Phi_{li+1/2}\frac{\partial T_{li+1/2}}{\partial P_{ci}}. \qquad (5.93)$$

Отметим, что производные от T_l относятся к значению капиллярного давления в узле, расположенном вверх по потоку. Более того, легко видеть, что

$$\frac{\partial P_c}{\partial p_k}=\begin{cases}1 & \text{для } k=\mathrm{n}\\ -1 & \text{для } k=\mathrm{w},\end{cases}$$

поскольку $P_c=p_n-p_w$. Элементы матрицы DR содержат члены матрицы T—D и до четырех дополнительных членов T'_l в строке.

После приведения подобных членов легко видеть, что матрицу DR можно записать как

$$DR=T+T'-D, \qquad (5.94)$$

где T' — матрица, составленная из T'_l. Форма T' в общем зависит от направления фильтрации. Если течение происходит в направлении возрастания i для всех узлов и для обеих фаз, T' будет представлять собой нижнюю блочно-треугольную матрицу с ненулевыми элементами только на главной диагонали и поддиагонали. Если диагональный блочный элемент матрицы T' для строки i обозна-

чить как TC_i, а поддиагональный — как TX_i, то матрица приобретает вид

$$\mathbf{T}' = \begin{bmatrix} TC_1 & & & & & \\ TX_2 & TC_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & TX_i & TC_i & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & TX_N & TC_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{TX}_i = \begin{bmatrix} T'_w & -T'_w \\ T'_n & -T'_n \end{bmatrix}_{i-1/2} \qquad \mathbf{TC}_i = -\mathbf{TX}_{i+1} \quad i = 1, \ldots, N-1 \qquad \mathbf{TC}_N = \mathbf{0} \tag{5.95}$$

Производные $\partial T_l/\partial P_c$ и члены $\Delta\Phi$ в уравнении (5.93) можно определить на различных временных слоях m и k, тогда матрица T' будет обозначена как $T'^{k}{}_{m}$ по аналогии с определением R — см. уравнение (5.84).

Для классического ньютоновского метода касательных как k, так и m соответствуют номеру предыдущей итерации, т. е. $T'=T'^{(\nu)}_{(\nu)}$. В этом случае $\partial T_l/\partial P_c$ являются касательными при $P^{(\nu)}$. Если предположить, что на временном шаге будет выполняться только одна ньютоновская итерация — см. уравнение (5.91), $P^{(1)}=P^{n+1}$, то с учетом уравнения (5.94) можно получить матричную форму уравнения линеаризованного метода — см. уравнение (5.89):

$$(T^n + T'^{n}{}_{n} - D)\,(P^{n+1} - P^n) = -R^{n}{}_{n} + Q. \tag{5.96}$$

Следовательно, можно заключить, что *метод линеаризации является первой итерацией классического метода Ньютона.*

На рис. 5.5 представлены численные результаты для данного метода. Его устойчивость вдвое выше, чем для явного метода. Снова следует заметить, что рассматриваемая здесь одномерная задача не самая сложная с точки зрения устойчивости. В одномерных задачах неустойчивость при решении явных уравнений возникает в том случае, когда фронт насыщенности продвигается на одну узловую точку за временной шаг. В многомерных задачах (особенно для одиночных скважин) неустойчивость для явного метода возникает при гораздо меньших временных шагах, а эффект увеличения устойчивости при линеаризации уравнения (5.96) получают значительно больший, чем следует из результатов, приведенных на рис. 5.5.

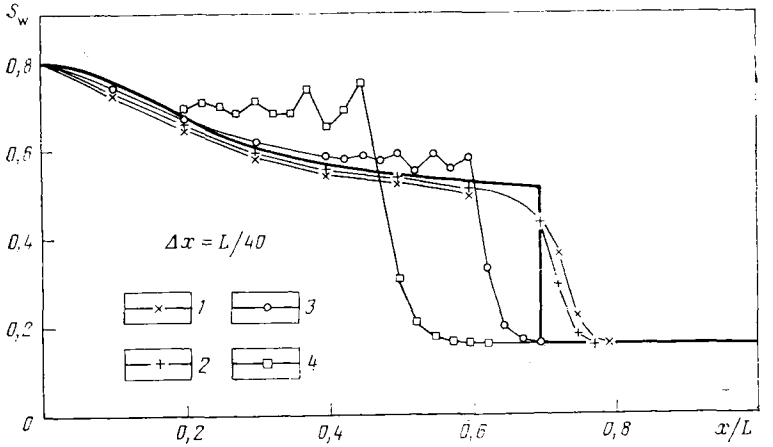


Рис. 5.5. Оценка устойчивости линеаризованного неявного SS-метода для контрольной задачи 1 при $t=1500$ сут (Сеттари и Азиз, 1975)
Шаг Δt в сут: *1* — 25; *2* — 50; *3* — 100; *4* — 187,5

d) *Полунеявный метод Ноулена и Берри* (1972)

Авторы сохраняют нелинейность в выражениях (5.89). Если предположить, что производные в T′ все еще вычисляются на слое n, то матричная формулировка метода представляется системой нелинейных уравнений

$$(\mathrm{T}^n + \mathrm{T'}_{\mathrm{n}}{}^{n+1} - \mathrm{D})\,(P^{n+1} - P^n) = -R^n{}_{\mathrm{n}} + Q. \qquad (5.97)$$

Нелинейность $\mathrm{T'}_{\mathrm{n}}{}^{n+1}(P^{n+1} - P^n)$ Ноулен и Берри (1972) учитывали с помощью ньютоновских итераций, что эквивалентно итерации в левой части уравнения (5.89) в виде

$$(p_{li+1} - p_{li})^{(\nu+1)} \frac{\partial \mathrm{T}_l}{\partial P_c}\,(P_c^{(\nu+1)} - p_c^n) = (p_{li+1} - p_{li})^{(\nu)} \frac{\partial \mathrm{T}_l}{\partial P_c}\,(p_c^{(\nu+1)} - P_c^{(\nu)}) +$$

$$+ [(p_{li+1} - p_{li})^{(\nu+1)} - (p_{li+1} - p_{li})^{(\nu)}] \frac{\partial \mathrm{T}_l}{\partial P_c}\,(P_c^{(\nu)} - P_c^n) +$$

$$+ (p_{li+1} - p_{li})^{(\nu)} \frac{\partial \mathrm{T}_l}{\partial P_c}\,(P_c^{(\nu)} - P_c^n), \quad \nu = 0, 1, 2,... \qquad (5.98)$$

В результате можно отметить следующие свойства данного метода.

1. *Если* $P^{(0)} = P^{(n)}$ *и выполняется только одна итерация* (5.89), *то метод Ноулена — Берри становится линеаризованным неявным методом* — см. уравнение (5.96).

2. *Если функции* $k_{rl}(S_w)$ *линейны, то по методу Ноулена — Берри осуществляют решение полностью неявных уравнений.*

Отметим, что второе заключение не справедливо для линеаризованного метода.

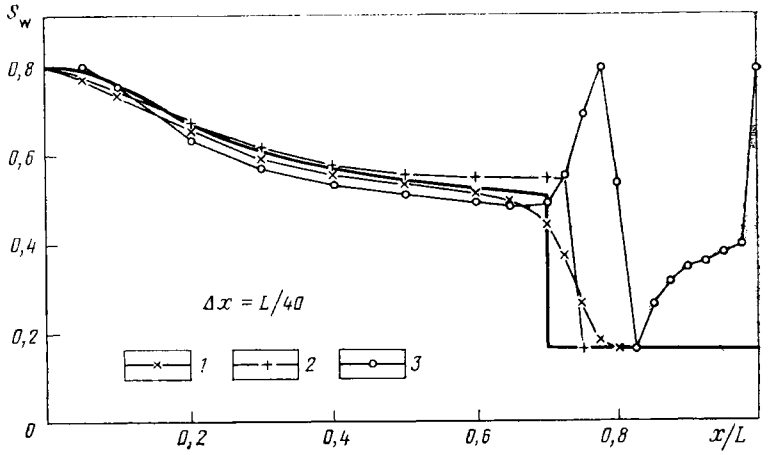


Рис. 5.6. Оценка устойчивости полунеявного SS-метода с использованием касательных для контрольной задачи 1 при $t=1500$ сут (Сеттари и Азиз, 1975)
1—3 — см. рис. 5.4

Метод определения производных $\partial T_l/\partial P_c$ решающий для сходимости итераций в уравнении (5.98). Это показано на рис. 5.6 и 5.7. На первом рисунке даны результаты для метода касательных, когда $\partial T_l/\partial P_c$ касательная в точке P^n. В этом случае итерации начинают расходиться для $\Delta t=100$ сут. Лучших результатов достигают, когда производная аппроксимируется секущей (хордой) между P^n и разумной оценкой P^{n+1}, обозначаемой P^k:

$$\frac{\partial T_l}{\partial P_c} \approx \frac{T_l(S_w^k) - T_l(S_w^n)}{S_w^k - S_w^n} \frac{d S_w}{d P_c}. \qquad (5.99)$$

На рис. 5.7 показаны результаты, полученные при постоянном значении $\delta S_w = S_w^k - S_w^n = 0{,}5$, при этом ясно видно превосходство по сравнению со всеми другими до сих пор рассмотренными методами.

е) *Полностью неявный метод*

Во всех рассмотренных ранее методах использовалось лишь некоторое приближение к полностью неявным уравнениям

$$(T^{n+1} - D^{n+1})(P^{n+1} - P^n) = -R^n{}_{n+1} + Q. \qquad (5.100)$$

Эти уравнения можно также решить методом Ньютона. Используя уже введенные обозначения, уравнения для метода касательных можно записать как

$$[T^{(\nu)} + T'^{(\nu)}_{(\nu)} - D][P^{(\nu+1)} - P^{(\nu)}] = -R^{(\nu)}_{(\nu)} + Q,$$
$$\nu = 0, 1, 2, \ldots; \quad P^{(0)} = P^n. \qquad (5.101)$$

Численные результаты для полностью неявных проводимостей приведены на рис. 5.8.

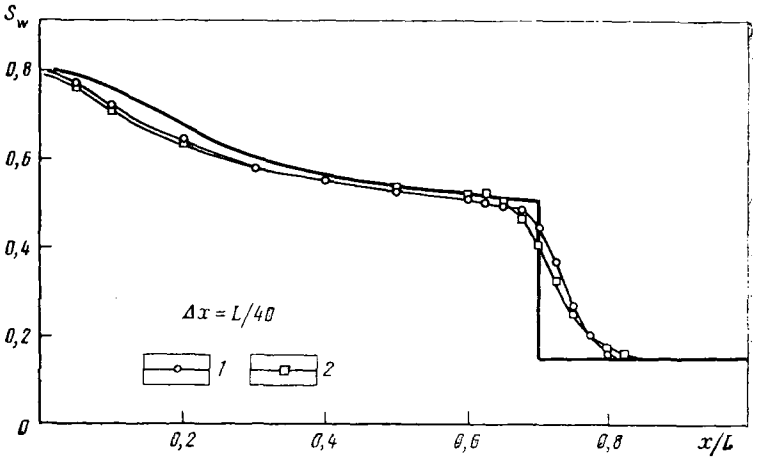


Рис. 5.7. Оценка устойчивости полунеявного SS-метода с использованием секущих для контрольной задачи 1 при $t=1500$ сут (Сеттари и Азиз, 1975)
Шаг Δt в сут: *1* — 100; *2* — 187.5

Когда уравнения сформулированы в p и S, вывод совершенно аналогичен, а форма матрицы T′ легко получается из T, приведенной в разделе 5.2.3. Производные берутся по S_w, а не по P_c.

5.5.2.2. Обсуждение основных методов

Из формы матрицы T′ вытекает, что хотя она и несимметрична, для нее справедливо уравнение (5.66). Из этого следует, что для сформулированных здесь уравнений всех методов справедливы

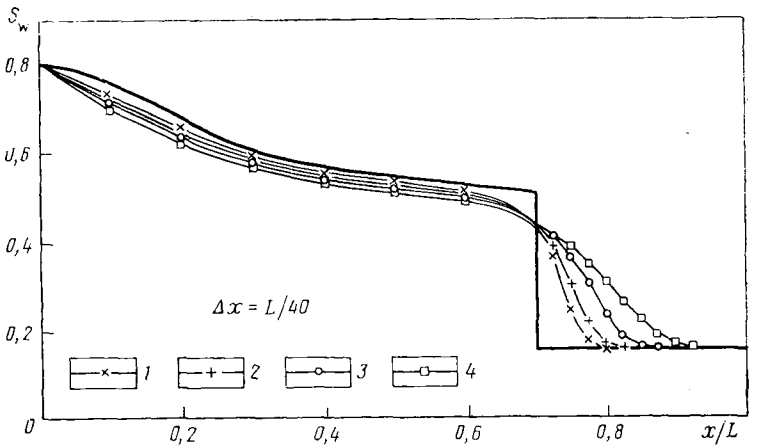


Рис. 5.8. Оценка устойчивости неявного метода для контрольной задачи 1 при $t=1500$ сут (Сеттари и Азиз, 1975).
1—4 — см. рис. 5.5

теоремы 3 и 4, приведенные в разделе 5.4.2. Следовательно, для этих методов *удовлетворяются условия материального баланса.*

Устойчивость можно исследовать так же, как это было сделано для случая явных проводимостей (см. раздел 5.4.1.2). Такой линеаризованный анализ устойчивости показывает, что все три метода (линеаризации, полунеявный, полностью неявный) безусловно устойчивы. Более совершенный нелинейный анализ устойчивости метода линеаризации был дан Писманом (1977). Им показано, что данный метод имеет предел устойчивости, зависящий от f''_w. Однако этот предел практически не налагает каких-либо существенных ограничений.

Необходимо исследовать сходимость итерационного процесса для полунеявного или полностью неявного метода. При рассмотрении систем уравнений теоретическая трактовка метода Ньютона становится довольно сложной (Ортега, Рейнболдт, 1970). Поэтому для практических задач нелегко получить условия сходимости, существования и единственности решения. Существенными условиями являются непрерывность вторых производных функций R_i^{n+1} и наличие у матрицы Якоби DR обратной матрицы. Обычно эти условия удовлетворяются в практических задачах. Отметим, что для итерационного процесса всегда имеем «хорошее» начальное приближение, в качестве которого берутся результаты вычислений на предыдущем временном шаге.

Быстрая сходимость — решающее условие практической осуществимости как полностью неявного, так и полунеявного метода, потому что для одной итерации требуется столько же вычислений, сколько необходимо для любого из методов линеаризации на одном временном шаге. Такое утверждение основано на предположении, что каждая итерация по методу Ньютона выполняется с той же степенью точности, что и процедура решения линеаризованных матричных уравнений. В то время как при использовании прямого метода для решения линеаризованных матричных уравнений это всегда справедливо, соотношение вычислительных затрат может быть более благоприятным для метода Ньютона с применением итерационного метода, поскольку уравнения для каждой ньютоновской итерации в последнем случае нужно решать лишь приближенно (Ноулен и Берри, 1972).

5.5.2.3. Сопоставление методов при неявном представлении проводимостей

Анализ результатов, представленных в настоящем разделе, указывает на то, что устойчивость возрастает с увеличением степени «неявности» метода по мере перехода от явного к полностью неявному представлению проводимостей. Однако это связано с увеличением погрешностей аппроксимации. При линеаризованном анализе погрешностей аппроксимации получим следующее (Сеттари и Азиз, 1975).

Погрешность для линеаризованного и полунеявного методов

$$R=\left[-\frac{3}{2}\Delta t+C_{\mathrm{w}}\frac{\Delta x}{2}\right]S'\cdot+\frac{4\Delta t^2}{3}S'\cdot\cdot+\frac{2\Delta x\Delta t}{3}S''\cdot+\frac{\Delta x^2}{6}S'''\cdot+O(\Delta^3). \tag{5.102}$$

В случае полностью неявного метода

$$R=\left[\frac{\Delta t}{2}+C_{\mathrm{w}}\frac{\Delta x}{2}\right]S'\cdot+\frac{\Delta t^2}{6}S'\cdot\cdot+\frac{\Delta x^2}{6}S'''+O(\Delta^3). \tag{5.103}$$

Отметим, что погрешность при явном методе — см. уравнение (5.8.2) всегда меньше, чем при неявном. Это впервые отмечено в работе Макдональда и Коутса (1970). Как видно из рис. 5.5, в случае линеаризованного метода наблюдается частичное «погашение» погрешности, тогда как в неявном случае они монотонно возрастают с увеличением Δt. Можно сформулировать уравнения и для других подобных методов. Сеттари и Азиз (1975), например, исследовали линеаризованный метод, основанный на методе Ньютона второго порядка. Рассмотрение всех полученных результатов приводит к следующему выводу.

По мере увеличения степени неявности метода устойчивость его увеличивается, однако погрешности аппроксимации также возрастают.

В заключение дадим краткую характеристику методов секущих (хорд) — см. уравнение (5.99). Если хорда выбрана надлежащим образом, то метод секущих обеспечивает большую скорость сходимости, нежели соответствующий метод касательных (Ортега и Рейнболдт, 1970, гл. 10). В идеальном случае изменение насыщенности $\Delta S_{\mathrm{w}}=S^k{}_{\mathrm{w}}-S^n{}_{\mathrm{w}}$ должно быть предсказано для каждого узла. Поскольку это выполнить трудно, то обычно используется постоянная хорда, определяемая по максимальному предполагаемому изменению насыщенности. Сеттари и Азиз (1975) провели сравнение методов хорд и касательных. «Выигрыш» для линеаризованного метода был несомненным, а скорость сходимости для метода Ньютона в незначительной степени зависела от выбора хорды. Выбор хорды давал определенный «выигрыш» лишь при использовании полунеявного метода Ноулена и Берри.

Для решения практических многомерных задач рекомендуется линеаризованный метод. Полностью неявные уравнения имеют большие погрешности аппроксимации. При этом «выигрыш» в устойчивости не может быть использован, так как временные шаги ограничиваются по другим соображениям. У полунеявного метода меньше погрешность аппроксимации, но он чувствителен к выбору хорд, что делает его менее пригодным в случае, когда изменения насыщенности не могут быть предсказаны (изменения направления фильтрации и т. д.).

5.5.3. Нелинейность, обусловленная функцией P_c

Если функция $S_w = f(P_c)$ нелинейна, элементы матрицы D становятся неявными: $D = D^{n+1}$. Для ясности рассмотрим фильтрацию несжимаемых флюидов, где p_w и p_n — зависимые переменные. В этом случае i-й блок матрицы D по SS-методу с p_w и p_n в качестве зависимых переменных имеет вид

$$D_i^{n+1} = \frac{V_{pi}}{\Delta t} (S'_w)_i^{n+1} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (5.104)$$

Нелинейность, обусловленная S'_w, может сказаться также на матрице T′, однако это влияние мало и может не учитываться. Для того, чтобы S'_w удовлетворяло уравнению (5.10), необходимо использовать какой-либо итерационный метод решения. При итерационном методе для решения задач с неявными проводимостями итерации по D могут рассматриваться как подытерации. Для краткости ограничимся обсуждением только линеаризованного метода.

a) *Простая итерация*

По результатам последней итерации $P^{(\nu)}$ производная от S_w представляется как

$$S_w^{(\nu)} = \frac{S_w(P_c^{(\nu)}) - S_w(P_c^n)}{P_c^{(\nu)} - P_c^n}. \qquad (5.105)$$

Если соответствующую матрицу D обозначить как $D^{(\nu)}$, то можно записать итерационную схему для линеаризованного метода — см. уравнение (5.96) в следующем виде

$$(T^n + T_n'^n - D^{(\nu)})(P^{(\nu+1)} - P^n) = -R_n^n + Q,$$
$$\nu = 0, 1, 2, \ldots; \quad P^{(0)} = P^n. \qquad (5.106)$$

Результаты данного метода сходятся для малых временных шагов, однако его устойчивость может быть даже хуже устойчивости для уравнений относительно явных проводимостей, поскольку она зависит от функции P_c. К тому же, чтобы результаты метода вообще сходились, производная S'_w должна быть непрерывной. В вычислительном аспекте это означает, что если функция P_c задана в виде таблицы, то нужна по крайней мере интерполяция второго порядка.

b) *Ньютоновская итерация*

По аналогии с уравнением (5.70) определим вектор

$$DS^{n,(\nu)} = \frac{V_{pi}}{\Delta t} [S_l^{(\nu)} - S_l^n], \quad l = w, n. \qquad (5.107)$$

Затем, считая для метода Ньютона единственной нелинейностью D^{n+1}, получим

$$(T^n + T_n'^n - D^{(\nu)})(P^{(\nu+1)} - P^{(\nu)}) = -R_n^n - (T^n + T_n'^n)(P^{(\nu)} - P^n) +$$
$$+ DS^{n,(\nu)} + Q, \quad \nu = 0, 1, \ldots; \quad P^{(0)} = P^n, \qquad (5.108)$$

где S'_{wi} в $D_i^{(\nu)}$ представляет касательную при $S_{wi}^{(\nu)}$, а не хорду. Результаты по уравнению (5.108) сходятся не всегда (Писман, 1967; Сеттари и Азиз, 1975). Результаты по методу Ньютона не сходятся, если на концах интервала функция S_w имеет очень малые значения производных (Островский, 1973).

c) *Модифицированный метод Ньютона*

Для обеспечения сходимости уравнение метода Ньютона необходимо модифицировать. Одним из решений данной проблемы, впервые предложенным Писманом (1967), является выполнение «обратной итерации» с использованием S_w в качестве основной переменной. Такой подход подробно рассматривался в работе Сеттари и Азиза (1975). После выполнения ν-й итерации для уравнения (5.108) обозначим капиллярное давление как $P_c^{(c)} = p_n^{(\nu+1)} - p_w^{(\nu+1)}$, а первое новое значение насыщенности $S_w^{(\nu+1)}$ вычислим как

$$S_{wi}^{(\nu+1)} = S_{wi}^{(\nu)} + S'^{(\nu)}_{wi} (P_c^{(c)} - P_c^{(\nu)})_i, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{5.109}$$

Затем снова определим капиллярное давление как

$$P_{ci}^{(\nu+1)} = f(S_{wi}^{\nu+1}) \tag{5.110}$$

и согласуем его с одним из фазовых давлений так, чтобы давление $p_n - p_w = P_c$.

Этот метод обеспечивает быструю сходимость, а для большинства задач в проведении итераций вообще нет необходимости.

В заключение рассмотрим способы учета нелинейности по P_c при различных выборах зависимых переменных. Если в качестве переменных используются p и P_c, процедура совершенно аналогична и подходит метод, определяемый уравнениями (5.109) и (5.110).

Когда используются p и S, то для данного простого случая матрица D приобретает вид

$$\mathbf{D}_i^{n+1} = \frac{V_p}{\Delta t} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Здесь нелинейность по P_c отсутствует. Этим объясняется быстрая сходимость результатов описанной модифицированной итерационной процедуры, что соответствует использованию S_w в качестве одной из зависимых переменных.

5.5.4. Просачивание газа

В фильтрационных задачах с растворенным газом при падении давления ниже давления насыщения из раствора выделяется свободный газ. Поскольку вязкость газа чрезвычайно мала, он очень подвижен и с относительно высокой скоростью устремляется вверх (просачивается). Если координатная ось наклонена или направлена вертикально, как только газовая фаза становится подвижной

($k_{rn}>0$), возникают серьезные проблемы, связанные с устойчивостью счета. Аналогичные проблемы имеют место и в других случаях, когда газ движется под воздействием гравитации. Такая неустойчивость, по существу, связана с явным представлением проводимостей; при этом она усугубляется за счет большой разницы плотностей нефти и газа и более ярко выраженной нелинейности функции для газа, зависящих от давления.

Первый метод, учитывающий указанную нелинейность, был разработан Коутсом (1968) до того, как была установлена важность неявного представления коэффициентов. Позднее Маккрири (1971) предложил подобный, но более простой метод. Несколько исследователей показали, что применение линеаризованного либо полунеявного метода также обеспечивает устойчивое решение задачи, связанной с просачиванием газа.

Чтобы проиллюстрировать это, сравним результаты решения контрольной задачи 2 с использованием линеаризованного метода — см. уравнение (5.96) — и методов Коутса и Маккрири (Маккрири, 1971). На рис. 5.9 показаны насыщенности, вычисленные по всем трем методам для выбранного момента времени t=900 сут, а линией *4* отмечен результат эталонного решения, полученного Маккрири при очень малых временных шагах и явных проводимостях. Видно, что с помощью линеаризованного метода получают более точное решение, чем по двум другим. Это особенно проявляется в нефтяной зоне, где значение газонасыщенности лишь слегка

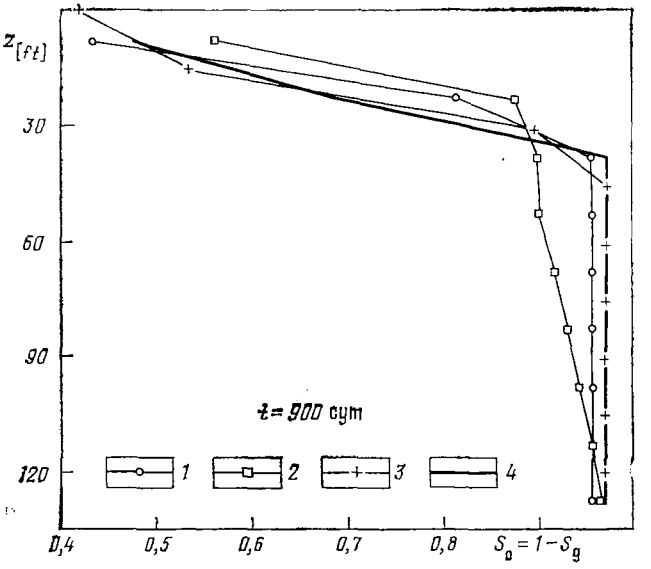


Рис. 5.9. Сравнение результатов по трем методам для контрольной задачи 2 Маккрири при просачивании газа (Сеттари и Азиз, 1975)

Методы: *1* — Коутса; *2* — Маккрири; *3* — линеаризованный; *4* — эталонное решение

превышает критическое значение, при котором начинается движение газа. Общим для методов Коутса и Маккрири является то, что ограничивается подвижность газа независимо от соотношения $k_{rn}=f(S_w)$, при котором допускается значительная газонасыщенность в нефтяной зоне. Это наиболее характерно для метода Маккрири.

Устойчивость решений при использовании линеаризованного метода и метода Коутса для данной задачи почти одинакова. По методу Маккрнри допускаются почти вдвое большие шаги по времени. Однако из-за невысокой точности метода Маккрири его преимущество в устойчивости решения несущественно.

Поэтому вместо прежних методов рекомендуется применять линеаризованный метод. Однако по результатам Ноулена и Берри (1972) полунеявный метод может оказаться лучшим при решении некоторых сложных задач.

5.6. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ SEQ-МЕТОД

В разделе 5.4 было показано, что как IMPES, так и явный SS-метод имеют довольно ограниченную устойчивость решения из-за явного определения проводимостей. Этого можно избежать в SS-методе с помощью неявного способа вычисления коэффициентов. Идея SEQ-метода заключается в улучшении устойчивости IMPES-метода за счет неявного учета насыщенностей, но без совместного решения уравнений для давлений и насыщенностей. Такая схема была впервые предложена Макдональдом и Коутсом (1970), но сообщения о ее практическом применении впервые появились значительно позднее в работах Спилетта и др. (1973), Коутса и др. (1974) и Коутса (1976). SEQ-метод двухэтапный. На первом этапе по неявной схеме получают решение для давления точно так же, как и по IMPES-методе. На втором осуществляется неявное решение относительно насыщенностей с использованием линеаризованных неявных проводимостей. Поэтому метод можно получить двумя путями: «расщепление» уравнений SS-метода при линеаризованных неявных проводимостях; неявная аппроксимация уравнения для насыщенности (для доли фаз в общем потоке, см. уравнение (2.95)).

5.6.1. SEQ-метод при двухфазной фильтрации

Рассмотрим SEQ-метод для простого случая, когда $c_R=0$ и $\Delta z=0$. Уравнения (5.11) SS-метода с линеаризованными неявными проводимостями можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} &T^n_{li-1/2}(p_{i-1}-p_i)^{n+1}_l - T'_{li-1/2}(S^{n+1}_w - S^n_w)_- + \\ &+ T^n_{li+1/2}(p_{i+1}-p_i)^{n+1}_l + T'_{li+1/2}(S^{n+1}_w - S^n_w)_+ = \\ &= \frac{V_p}{\Delta t}\left[b^{n+1}_l \Delta_t S_l + S^n_l b'_l \Delta_t p_l\right] + Q^n_l + Q'_{lw}\Delta_t S_w + Q'_{ip}\Delta_t p_l. \end{aligned} \quad (5.111)$$

Когда течение происходит от узла i к $i+1$

$$T'_{li+1/2}=(p_{i+1}-p_i)_l^n\frac{\partial T_{li+1/2}}{\partial S_{wi}},$$

$Q'_{lw}\Delta_t S_w$ и $Q'_{lp}\Delta_t p_l$ являются неявными составляющими дебита при S_w и p_l соответственно. Нижние индексы (+) и (—) у членов с $(S_w^{n+1}-S_w^n)$ означают, что берутся значения вверх по потоку. На первом шаге решения по SEQ-методу членами T'_l и Q'_{lw} пренебрегают, а уравнения для двух фаз объединяются так же, как и в IMPES-методе при $\Delta_t p_w=\Delta t p_n=\Delta_t p$, чтобы получить одно уравнение для давления с $p=p_n$:

$$(B_{wi}^{n+1}T_{wi-1/2}^n+B_{ni}^{n+1}T_{ni-1/2}^n)(p_{i-1}-p_i)^{n+1}+$$
$$+(B_{wi}^{n+1}T_{wi+1/2}^n+B_{ni}^{n+1}T_{ni+1/2}^n)(p_{i+1}-p_i)^{n+1}=$$
$$=\left\{\frac{V_p}{\Delta t}[S_w^nB_w^{n+1}b'_w+[1-S_w^n)B_n^{n+1}b'_n]+Q'_{wp}B_w^{n+1}+Q'_{np}B_n^{n+1}\right\}\times$$
$$\times(p^{n+1}-p^n)_i+B_{wi}^{n+1}(T_{wi-1/2}^n(P_{ci-1}-P_{ci})^n+T_{wi+1/2}^n(P_{ci+1}-P_{ci})^n]+$$
$$+Q_wB_w^{n+1}+Q_nB_n^{n+1}. \qquad (5.112)$$

Это параболическое уравнение, в котором выражение в фигурных скобках в правой части характеризует полную сжимаемость для блока (отметим, что члены Q'_{lp} входят в c_T и в принципе могут сделать его отрицательным).

После решения уравнения (5.112) можно решать явное (по IMPES-методу) уравнение для насыщенности (см. например 5.40), а результат обозначить через S^*_w. Однако такое явное решение для этого шага не обязательно — см. уравнение (5.115). Используя только что полученное уравнение для давления и начиная с уравнения (5.111), можно вывести неявное уравнение для насыщенности:

$$T_{wi-1/2}^n(p_{i-1}-p_i)^{n+1}+T_{wi+1/2}^n(p_{i+1}-p_i)^{n+1}=$$
$$=\frac{V_p}{\Delta t}[b_w^*(S_w^*-S_w^n)+S_w^nb'\Delta_t p]+T_{wi-1/2}^n(P_{ci-1}-P_{ci})^n+$$
$$+T_{wi+1/2}^n(P_{ci+1}-P_{ci})^n+Q_w^n+Q'_{wp}(p^{n+1}-p^n)_i, \qquad (5.113)$$

где b^* — значение b^{n+1} для первого шага решения относительно давления. После подстановки уравнения (5.113) в (5.111), записанное для $l=w$, получим уравнение для второго шага решения SEQ-методом:

$$-T'_{wi-1/2}(\Delta_t S_w)_-+T'_{wi+1/2}(\Delta_t S_w)_++T^n_{wi-1/2}\Delta_t P_{ci-1}-$$
$$-(T^n_{wi-1/2}+T^n_{wi+1/2})\Delta_t P_{ci}+T_{wi+1/2}\Delta_t P_{ci+1}=$$
$$=\frac{V_p}{\Delta t}[b_w^*(S_w^{n+1}-S_w^*]_i+Q'_{ww}\Delta_t S_{wi}. \qquad (5.114)$$

Данное уравнение содержит члены, неявные по отношению к изменениям насыщенности и капиллярного давления на временном шаге. Члены $\Delta_t P_c$ возникают здесь из-за того, что на шаге по IMPES-методу предполагается $P_c^{n+1}=P_c^n$. Для повышения устойчивости решения важно включить в расчеты на данном шаге члены, содержащие P_c (Спиллет и др., 1973). Уравнение (5.114) можно переписать, используя $\Delta_t S_w$:

$$-T'_{wi-1/2}(\Delta_t S_w)_- + T'_{wi+1/2}(\Delta_t S_w)_+ + [T^n_{wi-1/2}P'_{ci-1}\Delta_t S_{wi-1} - (T_{wi-1/2}+T_{wi+1/2})^n P'_{ci}\Delta_t S_{wi} + T^n_{wi+1/2}P'_{ci+1}\Delta_t S_{wi+1}] = \left[\frac{V_p}{\Delta t}b^*_w + Q'_{ww}\right]_i \Delta_t S_{wi} - \left[\frac{V_p}{\Delta t}b^*_w (S^*_w - S^n_w)\right]_i, \quad (5.115)$$

где значение последнего члена может быть получено из уравнения (5.113) без подсчета S^*_w. В матричной форме уравнение (5.115) можно записать как

$$(T'_s + T'_{P_c} - D_s)\Delta_t S_w = R_s, \quad (5.116)$$

где T'_s и T'_{P_c} — трехдиагональные матрицы членов потока, неявных из-за изменений относительной проницаемости и капиллярного давления на временном шаге; D_s — диагональная аккумулятивная матрица. Часть уравнения, связанная с изменениями k_r, имеет гиперболический, а связанная с изменениями P_c — параболический характер. Это станет ясным позднее после рассмотрения вывода из уравнения относительно доли фазы в общем потоке.

Последовательно при решении уравнения (5.112) получаем давления, а при решении уравнения (5.116) — новые значения насыщенности. Оба шага требуют решения матричного уравнения одного и того же порядка. Следовательно, объем вычислений на один временной шаг по SEQ-методу приблизительно вдвое больше, чем по IMPES-методу, независимо от размерности задачи. Это означает, что по SEQ-методу для двухмерных и трехмерных задач получают решение существенно быстрее, нежели по SS-методу (см. гл. 9).

Проведем подробный анализ расчета неявной насыщенности — см. уравнение (5.116). Во-первых, напомним, что на шаге по IMPES-методу сами по себе удовлетворяются условия материального баланса (см. раздел 5.4.2.2). Если просуммировать уравнение (5.115), то все члены с проводимостями в левой части уничтожаются. Результирующее уравнение имеет вид

$$\sum_i \left[\frac{V_p}{\Delta t}b^*_w (S^{n+1}_w - S^*_w)\right]_i + \sum_i (Q'_{ww}\Delta_t S_w)_i = 0.$$

Поскольку $b_w{}^{n+1}=b^*{}_w$, его можно записать

$$\sum_i \frac{V_{pi}}{\Delta t}[(b_w S_w)^{n+1} - (b_w S_w)^*]_i + \sum_i \Delta_t Q_{wi} = 0, \quad (5.117)$$

где $\Delta_t Q_{wi}$ — неявная составляющая дебита Q. Уравнение (5.117 — уравнение материального баланса по которому определяется влияние на процесс фильтрации смачивающей фазы неявных членов. Поэтому для смачивающей фазы схема расчета на временном шаге является консервативной.

Замена S^*_w на S_w^{n+1} также вызывает изменения в потоках и накоплении несмачивающей фазы. Изменение в аккумулятивном члене составляет $-(V_p/\Delta t) b^*_n (S_w^{n+1} - S^*_w)$, что можно получить из уравнения (5.115), умножив его на $a_i = (-b^*_n/b^*_w)$. Следовательно, проведение расчетов для смачивающей фазы в соответствии с уравнением (5.115) эквивалентно решению следующего уравнения для несмачивающей фазы:

$$-a_i T'_{wi-1/2} (\Delta_t S_w)_- + a_i T'_{wi+1/2} (\Delta_t S_w)_+ + a_i [T^n_{wi-1/2} P'_{ci-1} \Delta_t S_{wi-1} - (T_{wi-1/2} + T_{wi+1/2})^n P'_{ci} \Delta_t S_{wi} + T^n_{wi+1/2} P'_{ci+1} \Delta_t S_{wi+1}] =$$
$$= -\frac{V_p}{\Delta t} b^*_n (S_w^{n+1} - S^*_w)_i + a_i Q'_{wwi} \Delta_t S_{wi} = \frac{V_p}{\Delta t} b^*_n (S_n^{n+1} - S^*_n)_i + \Delta_t Q_{ni}. \quad (5.118)$$

В этом также можно убедиться, рассуждая следующим образом: поскольку на втором шаге решения по SEQ-методу *не учитывают сжимаемость*, то любое изменение перетока смачивающей фазы между блоками должно быть уравновешено противоположным изменением пластового *объема* несмачивающей фазы. Например, корректирование потока $q_{i+1/2}$ в пластовых единицах можно осуществить с помощью уравнения (5.115):

$$\Delta_t q_{i+1/2} = \frac{1}{b^*_{wi}} [T'_{wi+1/2} (\Delta_t S_w)_+ + T^n_{wi+1/2} (P'_{ci+1} \Delta_t S_{wi+1} - P'_{ci} \Delta_t S_{wi})].$$

Данное выражение состоит из двух частей: первая связана с относительной проницаемостью, а вторая — с изменением капиллярного давления. Каждое изменение потока независимо уравновешивается соответствующим членом уравнения (5.118), если для получения в единицах объема в пластовых условиях данное уравнение поделить на b^*_n. Аналогично уравновешиваются аккумулятивные члены.

Материальный баланс для несмачивающей фазы можно получить суммированием уравнений (5.118) для каждого блока. Чтобы сделать это, нужно учесть направление потока. Для потока, направленного слева направо (в направлении возрастания номеров i), получим

$$-\sum_{i=1}^{N-1} (a_{i+1} - a_i) T'_{wi+1/2} \Delta_t S_{wi} + \sum_{i=1}^{N-1} (a_{i+1} - a_i) T^n_{wi+1/2} \times$$
$$\times (P'_{ci} \Delta_t S_{wi} - P'_{ci+1} \Delta_t S_{wi+1}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{V_{ri}}{\Delta t} [(b_n S_n)^{n+1} - (b_n S_n)^*]_i + \sum_{i=1}^{N} \Delta_t Q_{ni}. \quad (5.119)$$

Правая часть этого уравнения представляет собой выражение для материального баланса, следовательно, суммы в левой части должны равняться нулю. К сожалению, это справедливо только в случае фильтрации несжимаемых флюидов. Следовательно, *неявный шаг по* SEQ-*методу в общем случае не удовлетворяет условию материального баланса несмачивающей фазы. Погрешность пропорциональна изменению значения* b_n/b_w *по площади пласта.*

На этот недостаток SEQ-метода впервые указали Коутс и др. (1974). Для водонефтяных систем погрешности в материальном балансе обычно несущественны, однако могут оказаться значительными для газонефтяных и, в особенности, для трехфазных систем, где погрешности зависят и от изменений R_s. Второй недостаток метода заключается в способе учета членов, связанных с отбором. Для обеспечения устойчивости решения на втором шаге (по насыщенности) необходим учет неявных членов отбора. Снова, поскольку на данном шаге предполагается, что флюиды несжимаемы, сумма неявных изменений отбора в пределах объема пласта должна равняться нулю:

$$B_w\Delta_t Q_{wi}+B_n\Delta_t Q_{ni}=0.$$

Следовательно, если задана скорость одной из фаз, то она не будет сохранена после неявного шага. Эту проблему можно решить только с помощью итерации, на которой скорость, используемая на шаге по IMPES-методу, берется равной заданной за вычетом неявного ее изменения во время последней итерации. Исходя из нашей практики, можно сказать, что двух итераций обычно бывает достаточно, однако время счета возрастает почти пропорционально количеству итераций и метод становится менее привлекательным.

5.6.2. Другие формы и способы получения уравнений SEQ-метода

a) Описанный выше способ для выявления неявного по насыщенности шага можно повторить, начиная с уравнения для несмачивающей фазы (5.111). Итоговое уравнение будет иметь коэффициенты, полученные по производным от T_n. Метод будет удовлетворять условию материального баланса несмачивающей фазы, для смачивающей фазы этот баланс не соблюдается.

b) Легко видеть, что формулировка уравнений метода последовательного решения может быть получена для других способов неявного учета проводимостей, рассмотренных в разделе 5.2.2. Например, для полностью неявного SEQ-метода следует проводить итерации, чтобы $T^n{}_w+T'_w\Delta_t S_w=T_w{}^{n+1}$. До сих пор в литературе не отражено практическое использование подобных методов. Интересно отметить, что без учета капиллярного давления структура матрицы $T'--D_s=T'_s—D_s$ позволяет преобразовать ее в треугольную путем переупорядочивания неизвестных. Это является следст-

вием «взвешивания» вверх по потоку. Тогда уравнения можно решать последовательно, а не одновременно, даже тогда, когда проводимости полностью неявные (Уоттс, 1972).

с) Приведенное выше замечание указывает на то, что неявный шаг по насыщенности — аппроксимация уравнений фильтрации относительно долей фаз в общем потоке. Действительно, уравнения, характеризующие SEQ-метод, можно получить непосредственно из уравнений, приведенных в гл. 2 (см. раздел 2.5.2). В разделе 5.4.1.2 была рассмотрена аппроксимация простой формы уравнения для насыщенности с явными проводимостями, как в уравнении (5.58):

$$-u\nabla f_w = \phi\frac{\partial S_w}{\partial t} + q_w - f_w q_T.$$

Следовательно, данное уравнение соответствует первому шагу по SEQ-методу и может быть записано как

$$Q_T(f'_{wi}S_{wi} - f'_{wi-1}S_{wi-1})^n = \frac{V_{pi}}{\Delta t}(S^*_{wi} - S^n_{wi}) + Q^n_w - f^n_{wi}Q_T.$$

Для полностью неявного шага можно записать это же уравнение в неявной форме:

$$Q_T(f'_{wi}S_{wi} - f'_{wi-1}S_{wi-1})^{n+1} = \frac{V_{pi}}{\Delta t}(S^{n+1}_{wi} - S^n_{wi}) + Q^{n+1}_w - f^{n+1}_{wi}Q_T.$$

В результате вычитания одного уравнения из другого получим

$$Q_T[f'_{wi}(S^{n+1}_w - S^n_w)_i - f'_{wi-1}(S^{n+1}_w - S^n_w)_{i-1}] = \frac{V_{pi}}{\Delta t}(S^{n+1}_w - S^*_w)_i + \Delta_t Q_w, \tag{5.120}$$

которое для данного упрощенного случая соответствует уравнению (5.115). Отметим, что поскольку из решения уравнения для давления следует $Q_T = (T_n + T_w)_{i+1/2}\Delta\Phi_{i+1/2}$, то здесь проводимость имеет вид

$$T'_{wi+1/2} = (T_n + T_w)_{i+1/2}f'_{wi}\Delta\Phi_{i+1/2}, \tag{5.121}$$

тогда как проводимость в уравнении (5.115)

$$T'_{wi+1/2} = \frac{dT_w}{dS_w}\Delta\Phi_{i+1/2}. \tag{5.122}$$

5.6.3. Численные результаты

В данном разделе сравнены результаты SEQ- и SS-методов. Некоторые результаты взяты из работы Ко (1977), другие получены Ко и его соавторами.

Все результаты получены для одноточечной аппроксимации со сдвигом вверх по потоку и $P_c = 0$ для задачи Баклея — Леверетта. Отметим, что в отличие от SS-метода значения P_c, не равные нулю, для SEQ-метода не нужны.

Отметим идентичность результатов для случая явного определения проводимостей и при решении задачи по IMPES-методу, так как SEQ-метод фактически сводится к IMPES-методу (второй

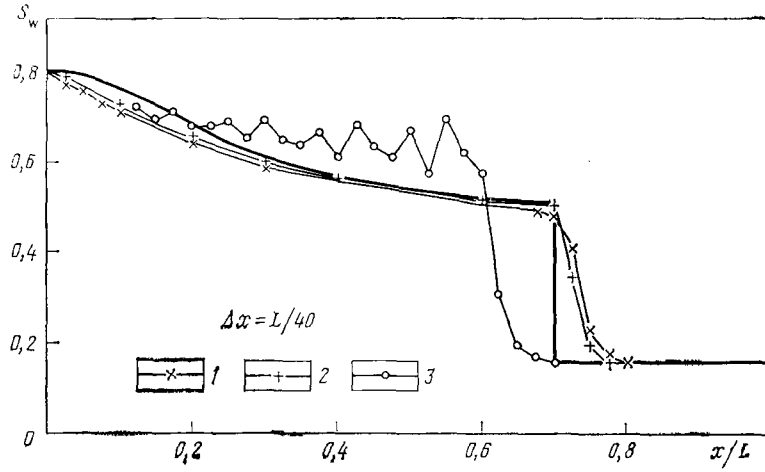


Рис. 5.10. Оценка устойчивости SEQ-метода при проводимостях линеаризованных по методу касательных (контрольная задача 1)
Шаг Δt в сут: *1* — 25; *2* — 50; *3* — 100

шаг опускается). Как отмечалось ранее, в SEQ-методе при программировании в качестве варианта может быть включен IMPES-метод.

Все нелинейности, обусловленные проводимостями, учитываются при использовании линеаризованного неявного метода, который соответствует одной итерации по методу Ньютона, как это и рассматривалось в разделе 5.5. На рис. 5.10 и 5.11 соответственно даны результаты решения задачи Баклея — Леверетта методами касательных и секущих. Для бо́льших временных шагов более

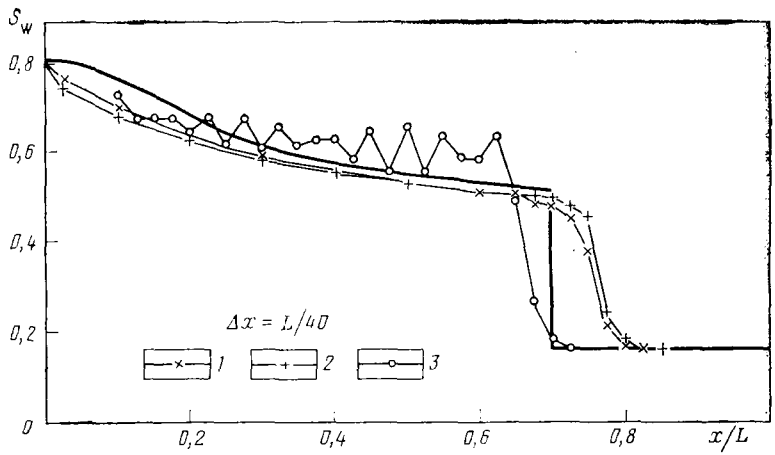


Рис. 5.11. Оценка устойчивости SEQ-метода при проводимостях, линеаризованных по методу секущих, и $\delta S_w = 0{,}32$ (контрольная задача 1) *1*—3 см. рис. 5.10

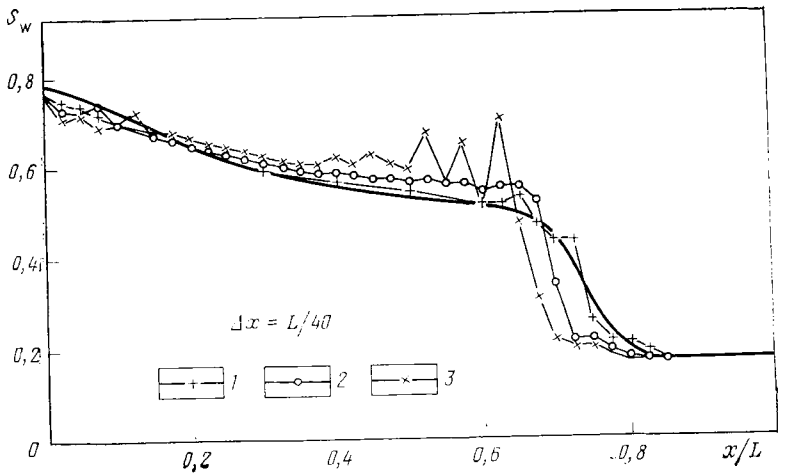


Рис. 5.12. Оценка устойчивости SEQ-метода при явном учете P_c для модифицированной контрольной задачи 1 при больших значениях P_c
Шаг Δt в сут: *1* — 75; *2* — 100; *3* — 125

устойчив метод секущих. Как показано на рис. 5.6 и 5.7, при использовании уравнений SS-метода с полунеявным представлением проводимостей различие в устойчивости решений по методам секущих и касательных невелико. Как следует из результатов решения для Δt=25 сут, при лучшей устойчивости метода секущих получают большую погрешность аппроксимации по пространству.

Ко (1977) также представил результаты, полученные для различных методов, учитывающих нелинейность, обусловленную на-

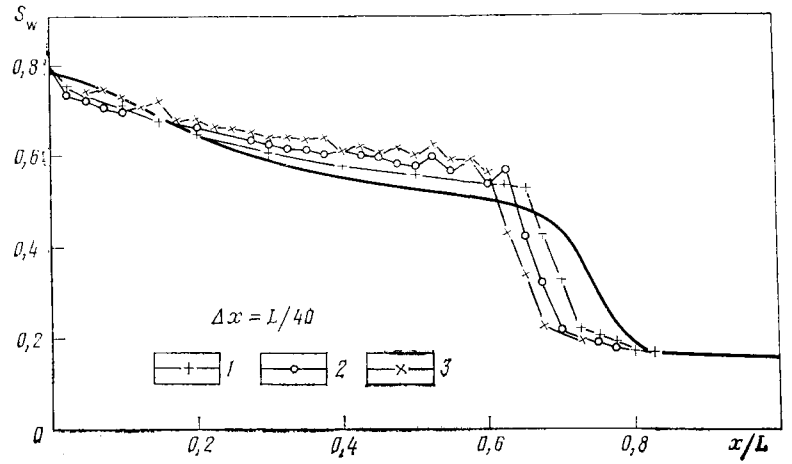


Рис. 5.13. Оценка устойчивости SEQ-метода при учете P_c по методу касательных для модифицированной контрольной задачи 1 при больших значениях P_c
1—3 — см. рис. 5.12

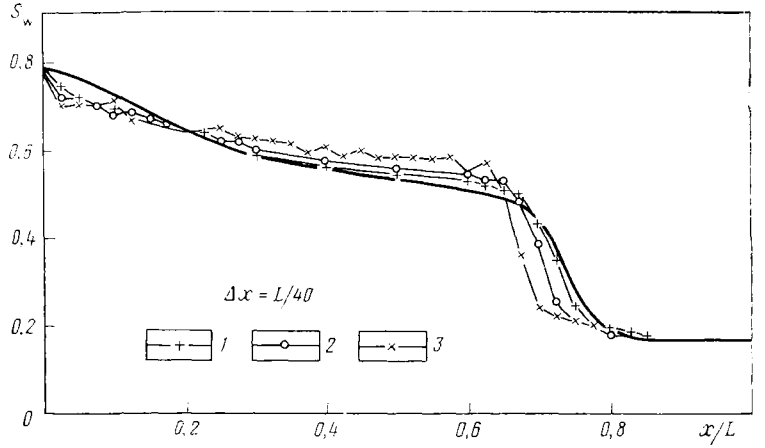


Рис. 5.14. Оценка устойчивости SEQ-метода при учете P_c по методу секущих для модифицированной контрольной задачи 1 при больших значениях P_c
1—3 — см. рис. 5.12

личием капиллярного давления. Он оценивал эти методы, решая контрольную задачу 1 при значительных капиллярных давлениях. Используемые значения P_c были получены умножением на 10 значений капиллярного давления по рис. 2.9. Эталонное решение было найдено с помощью IMPES-метода при небольшом временном шаге. На рис. 5.12—5.14 показаны результаты решения при $t=$ $=1500$ сут, полученные для явных и неявных P_c с использованием методов секущих и касательных для P'_c. Во всех случаях для учета проводимостей использовали метод касательных.

Результаты показывают следующее: 1) явное представление P_c приводит к возникновению проблемы устойчивости; 2) по методу секущих получают лучшие результаты по сравнению с методом касательных.

Следует заметить, что для учета P_c метод касательных предпочтительнее метода секущих. Данная схема (метод секущих — для T, касательных — для P_c) упоминалась также в работах Стиллета и др. (1973), но без обоснования.

Результаты решения двумерных задач SEQ-методом будут приведены в гл. 9 (см. раздел 9.8).

5.6.4. SEQ-метод в случае трехфазной фильтрации

Последовательное решение уравнений трехфазной фильтрации приводит к еще бо́льшему числу разновидностей метода. Рассмотрим для начала обычный случай, когда на неявном шаге определяют одновременно изменения двух насыщенностей.

Как мы могли видеть, можно определить коэффициенты различными способами в зависимости от вида уравнений. Это обычно

несущественно при двухфазной фильтрации. Не так обстоит дело для трехфазного случая. Например, использование уравнения (5.122) при трехфазной фильтрации может привести к возникновению проблем, связанных с устойчивостью решения.

Неявные коррекции межблочных расходов, обозначенные как $\Delta_t q_l$, должны удовлетворять соотношению

$$\Delta_t q_w + \Delta_t q_o + \Delta_t q_g = 0 \tag{5.123}$$

независимо на каждой границе блока. Изменения $\Delta_t q_l$ можно выразить так:

$$\Delta_t q_l = (T_l^{n+1} - T_l^n)\Delta\Phi_l \cong T'_{lw}\Delta_t S_w + T'_{lg}\Delta_t S_g, \tag{5.124}$$

где $\Delta_t S_w$ и $\Delta_t S_g$ — переменные. Поскольку обе переменные независимы, то определения T'_l должны удовлетворять условиям

$$\sum_l T'_{lw} = 0 \quad \text{и} \quad \sum_l T'_{lg} = 0, \tag{5.125}$$

полученным из уравнения (5.124) после подстановок $\Delta_t S_g = 0$ и $\Delta_t S_w = 0$ соответственно. Задача теперь состоит в том, чтобы найти два значения, скажем T'_{lw}, таких, чтобы третье значение, определяемое уравнением (5.125), было бы приемлемым. Определения, удовлетворяющие уравнению (5.125), получают из выражений для q_l в виде долей в потоке:

$$q_l = q_T \frac{\lambda_l}{\lambda_T} = q_T f_l,$$

где q_l, q_T — объемные расходы (в единицах объема в пластовых условиях). Следовательно,

$$T'_{lw} = q_T f'_{lw}, \quad T'_{lg} = q_T f'_{lg}. \tag{5.126}$$

Здесь

$$f'_{ww} = \frac{1}{\lambda_T}\left(k\frac{k'_{rw}}{\mu_w} - \frac{\lambda_w}{\lambda_T}\lambda'_{Tw}\right), \quad f'_{wg} = -\frac{\lambda_w}{\lambda_T^2}\lambda'_{Tg},$$

$$f'_{ow} = \frac{1}{\lambda_T}\left(k\frac{k'_{row}}{\mu_o} - \frac{\lambda_o}{\lambda_T}\lambda'_{Tw}\right), \quad f'_{og} = \frac{1}{\lambda_T}\left(k\frac{k'_{rog}}{\mu_o} - \frac{\lambda_o}{\lambda_T}\lambda'_{Tg}\right),$$

$$f'_{gw} = -\frac{\lambda_g}{\lambda_T^2}\lambda'_{Tw}, \quad f'_{gg} = \frac{1}{\lambda_T}\left(k\frac{k'_{rg}}{\mu_g} - \frac{\lambda_g}{\lambda_T}\lambda'_{Tg}\right) \tag{5.127}$$

и

$$\lambda'_{Tw} = k\left(\frac{k'_{rw}}{\mu_w} + \frac{k'_{row}}{\mu_o}\right), \quad \lambda'_{Tg} = k\left(\frac{k'_{rog}}{\mu_o} + \frac{k'_{rg}}{\mu_g}\right),$$

поскольку $k_{rw} = f(S_w)$ и $k_{rg} = f(S_g)$. Следует отметить, что

$$k'_{rol} \equiv \frac{\partial k_{ro}}{\partial S_l}, \quad l = w, g.$$

Производные в уравнениях (5.127) должны вычисляться при значениях насыщенности в узле вверх по потоку (т. е. в i, в $i+1$, в $i+1/2$) для каждой фазы. Отметим, что уравнения (5.127) удовлетворяют уравнению (5.125) для случая встречного течения флюидов.

Можно видеть, что формула (5.121) представляет собой разновидность уравнения (5.127), а (5.122) получено из уравнения (5.127) в *пренебрежении изменением общей подвижности флюида.* Уравнение для насыщенности можно представить в той же матричной форме, что и уравнение (5.116), однако элементы ее будут матрицами размера 2×2.

Другой метод расчета неявно выраженных потоков использовался Коутсом (1976). Он определяет T'_{lm}, используя в уравнении для доли фазы в потоке *секущие*, проведенные между насыщенностями $S^n{}_l$ и оцениваемым значением $S^k{}_l$ для $S_l{}^{n+1}$. Например, если S_w и S_g неизвестны,

$$T'_{lw}=[q_l(S^k{}_w,\ S^n{}_g)-q_l(S^n{}_w,\ S^n{}_g)]/(S^k{}_w-S^n{}_w), \qquad (5.128)$$

где снова $S^k{}_l$ и $S^n{}_l$ должны быть отнесены к узлу вверх по потоку. Например, если вода течет от узла i к $i+1$, а газ — в противоположном направлении, то

$$q_{wi+1/2}=q_w(S_{wi},\ S_{gi+1}),\quad q_{gi+1/2}=q_g(S_{wi},\ S_{gi+1}).$$

Если надо решить уравнения для воды и нефти, то необходимо определить нефтенасыщенность в узле вверх по потоку и записать уравнение (5.128) для q_w и q_o.

Преимущество уравнения (5.128) заключается в том, что с помощью итераций (без решения уравнения относительно давления) можно сформулировать уравнения метода *последовательного решения с полностью неявными проводимостями.*

Разновидности SEQ-*метода.* Возможны следующие разновидности основного метода, представленного выше.

a) Рассмотрение неявных проводимостей на шаге определения насыщенности. Проводимости можно определять с использованием метода касательных — см. уравнение (5.127) или метода секущих — см. уравнение (5.128). Полностью неявный учет при корректировании секущих в уравнении (5.128) увеличивает устойчивость решения, однако машинное время для каждого шага решения также возрастает. Неявный учет $\Delta\Phi$ в матрице T' приводит к возникновению нелинейных членов, включающих произведение производных насыщенности и капиллярного давления.

b) Выбор уравнений, решаемых на шаге определения насыщенности, влияет на материальный баланс, который не будет удовлетворен для третьей фазы. Поскольку одновременно решают два уравнения, то данный выбор существенно не влияет на устойчивость метода.

c) Уравнения для насыщенности можно развязать, если решать их сначала по неявной схеме относительно $\Delta_t S_w$, а затем осущест-

влять неявную корректировку S_g. Это приводит к решению трех систем уравнений одного и того же порядка, что оказывается быстрее, чем совместное решение относительно S_w и S_g. Однако в результате такой развязки насыщенностей наблюдается некоторое снижение устойчивости.

Другой вариант, предложенный Коутсом (1976а), состоит в одновременном решении уравнений относительно давлений и неявных значений насыщенности газом и последующей неявной корректировке водонасыщенности. Такая схема решения устраняет ошибки материального баланса, связанные с изменениями R_s, которые могут быть весьма существенными при моделировании закачки газа в недонасыщенные пласты (Страйт и др., 1977) и закачки пара (Коутс, 1976). В работе Коутса сообщается, что одновременное решение относительно p и S_g оказывается более устойчивым, чем относительно S_w и S_g, для большинства задач моделирования нефтяных пластов с нелетучей нефтью, в которых неустойчивости возникают в результате взаимодействия между газом и нефтью и нефтью и водой. Только при взаимодействии между газом и водой метод с решением относительно S_w—S_g оказывается наилучшим.

5.6.5. Выводы

Были представлены основные формы SEQ-метода для двух- и трехфазной фильтрации и обсуждены некоторые возможные разновидности метода. В целом метод последовательного решения требует меньше машинных затрат, нежели одновременное решение, но в первом случае используются уравнения, которые не «консервативны» для всех фаз и не так устойчивы, как уравнения SS-метода. Исходя из нашего опыта, можно утверждать, что SEQ-метод более всего подходит для задач «умеренной» сложности, которые нельзя решить при явно представленных проводимостях и (или) P_c, но не требуют полностью неявной процедуры. Оценку и сопоставление различных вариантов SEQ-метода, приведенных здесь, нельзя считать окончательными.

5.7. УЧЕТ ЧЛЕНОВ ОТБОРА

В гл. 3 (см. раздел 3.4) было показано, что для однофазного течения граничные условия в конечно-разностных уравнениях удобно представлять в виде членов, характеризующих источники (стоки). Это положение прямо распространяется и для многофазной фильтрации. Фактические граничные условия многомерны, и некоторые аспекты такого представления можно узнать лишь из опыта постановки двумерных задач. Поэтому детальное представление граничных условий приведено в гл. 9 (см. раздел 9.4). В настоящем разделе рассмотрен только одномерный случай, когда члены, связанные с отбором, характеризуют поток через границу блока (рис. 5.15). Если член, связанный с отбором, представляет собой скважину внутри довольно крупного блока, для обеспечения высо-

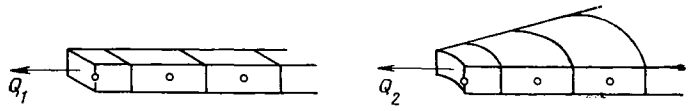


Рис. 5.15. Схема потока флюида через границы

кого порядка аппроксимации следует использовать методы, описанные в гл. 7 (см. раздел 7.7).

Однако, как только это сделано с уравнениями для членов, связанных с отбором, можно поступать так же, как это описано здесь.

5.7.1. Дифференциальная форма граничных условий

Предполагается, что фильтрация всех фаз на выходе из пористой среды происходит по закону Дарси:

$$q_l = -\lambda_l \left(\frac{\partial p_l}{\partial x} - \gamma_l \frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad l = \text{o, w, g,} \qquad (5.129)$$

где q_l — объемный расход флюида на единицу площади в пластовых условиях.

Следовательно, если давления и насыщенности на границах известны, то данные уравнения можно использовать для определения q_l. Проблема задания граничного условия состоит в том, чтобы распределить расход, не зная решения.

Граничные эффекты. Предположим, что граничные условия для двухфазной водонефтяной системы заданы q_w и q_o. Легко видеть, что при наличии капиллярного давления условие движения отдельных фаз в многофазном потоке

$$\frac{q_w}{q_o} = \frac{\lambda_w \left(\frac{\partial p_w}{\partial x} - \gamma_w \frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\lambda_o \left(\frac{\partial p_o}{\partial x} - \gamma_o \frac{\partial z}{\partial x} \right)}$$

может удовлетворяться при более чем одной комбинации S_w, $\partial p_w/\partial x$ и $\partial p_o/\partial x$. Требуемое дополнительное условие можно получить, рассмотрев физическую картину течения флюида у границы области. Физически совместная фильтрация двух фаз на ее выходе может происходить только, если капиллярное давление снижается до давления P_{co}, существующего вне пористой среды, либо до максимально близкого ему значения P_c в скважине или в трещине и т. п., которое приблизительно равно нулю. Такое явление называется *концевым (граничным) эффектом* (Коллинз, 1961, раздел 6.10). До того, как вторая фаза сможет вытекать, насыщенность на выходном конце должна достигнуть значения S_{wo}, соответствующего P_{co}. На рис. 5.16 показаны два вида кривой P_c в предположении, что $P_{co}=0$. Если рассмотреть условия, когда происходит отбор одной нефти, то на выходе водонасыщенность будет

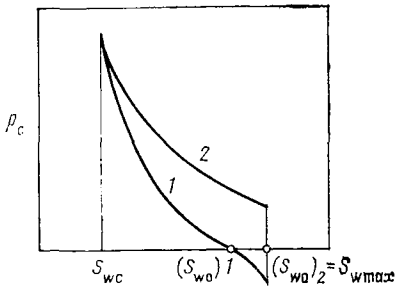


Рис. 5.16. Определение S_{wo} для двух различных кривых P_c

увеличиваться. Однако вода не начинает вытекать до тех пор, пока S_w не достигнет значения S_{wo}.

После прорыва воды *насыщенность на границе области остается постоянной.* Подробное исследование изменений значений давления и насыщенности вблизи границы проведено Коллинзом (1961) для линейной фильтрации и Сеттари и Азизом (1974а) для радиального течения. Соответствующие уравнения получены также Сонье и др. (1973). В данном анализе показано, что градиент насыщенности на выходе не равен нулю. Он становится бесконечно большим, когда k_{ro} при S_{wo} равняется нулю (кривая **2, рис. 5.16**). На рис. 5.17 показаны результаты расчета насыщенностей при одномерном радиальном течении в районе скважины для различных условий. Эти результаты отражены на графике в безразмерных координатах S_w и $\xi = (r/r_w)^c$, где $c = -q_o/2\pi k$; $q_o < 0$ — дебит добывающей скважины.

Из сказанного можно сделать следующие выводы.

1. С возрастанием q_o и q_w/q_o область влияния концевого эффекта уменьшается.

2. Протяженность зоны обычно несколько сантиметров или менее, и поэтому в масштабах пласта она может не приниматься во внимание. Однако эта область может стать больше, если капилляр-

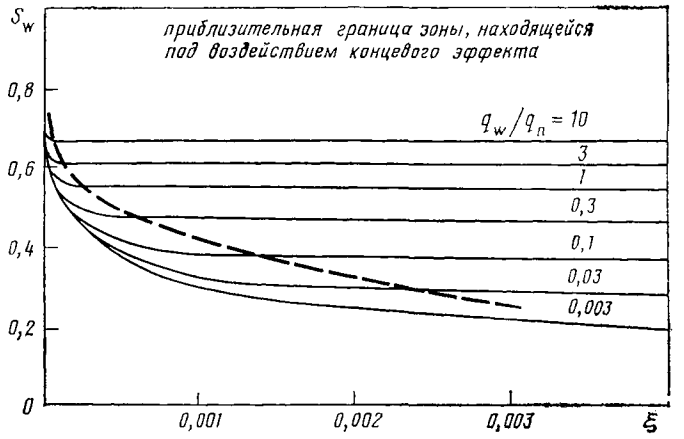


Рис. 5.17. Результаты расчета насыщенности на выходе при одномерном радиальном течении по данным Блэра и Уэйнауга (Сеттари и Азиз, 1974)

ные силы при фильтрации будут преобладать (капиллярная пропитка). Аналогично, для обеспечения физических условий на входной границе области требуется, чтобы *градиент насыщенности был равен нулю при совместном нагнетании двух фаз.*

Как правило, в процессе моделирования пластов концевым эффектом пренебрегают и предполагают, что градиент насыщенности по границе отбора равен нулю. Предположим, что при $\partial S_w/\partial x=0$ обеспечивается единственность решения, но это решение отличается от истинного. Это показано на рис. 5.18, где пунктирной линией показаны результаты решения при $\partial S_w/\partial x=0$. Отметим, что в данном случае получили два значения давления на границе, а истинное его значение находится между ними.

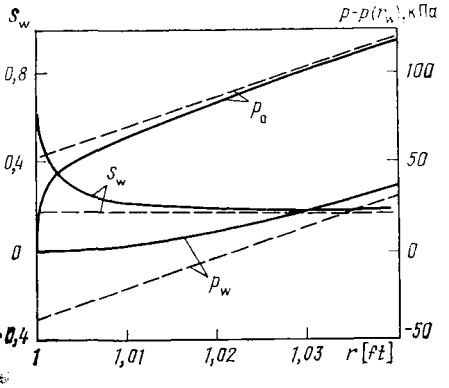


Рис. 5.18. Вычисленные распределения давления и насыщенности у скважины при наличии и отсутствии концевого эффекта (Азиз и Сеттари, 1974)

Указанное упрощение граничных эффектов справедливо для большинства задач, связанных с изучением поведения пластов, за исключением низкопроницаемых пластов с очень высокими значениями капиллярного давления, а также трещиноватых коллекторов, для которых явление капиллярной пропитки существенно при учете массообмена между трещинами и матрицей.

Граничные условия. Условия на границе могут быть следующими:

a) расход одной из фаз (обычно нефти);
b) расход жидкости (нефть+вода);
c) общий расход (нефть+вода+газ);
d) постоянное давление на границе.

Первые три условия фактически являются ограничениями, а не граничными условиями; это лучше всего видно при рассмотрении двумерной задачи (см. гл. 9, раздел 9.4.1). Указанные объемные расходы могут быть заданы как при пластовых, так и при нормальных условиях (эквивалент расхода массы). Поскольку расходы Q_l в разностных уравнениях всегда выражены в единицах объема при нормальных условиях за определенное время, то для рассматриваемых в данный момент времени условий на границе расходы в пластовых условиях должны быть преобразованы с помощью B_l и R_s.

5.7.2. Дискретизация граничных условий

5.7.2.1. Условия заданного расхода

При дискретизации уравнения (5.129) на границе, когда $i=1$, получим

$$Q_l = -A\left(k\frac{k_{rl}}{B_l\mu_l}\right)_1 \frac{1}{\Delta x_{1+1/2}}\left[p_{l2} - p_{l1} - \gamma_{l1+1/2}(z_2 - z_1)\right] = \\ = -\mathrm{T}Q_{l1}\Delta\Phi_{l1+1/2}, \qquad (5.130)$$

где разность давлений аппроксимирована между узлами сетки 1 и 2.

Данное уравнение имеет тот же вид, что и уравнение для межблочных расходов, за исключением того, что проводимость $\mathrm{T}Q_l$ отличается от $\mathrm{T}_{l+1/2}$, поскольку она оценивается в точке i, а не в соответствии со схемой «взвешивания» вверх по потоку.

Рассмотрим различные возможные способы задания дебита.

а) Заданный дебит нефти $Q=Q_\mathrm{o}$ в единицах объема при нормальных условиях. Поскольку

$$Q_\mathrm{o} = -\mathrm{T}Q_\mathrm{o}\Delta\Phi_\mathrm{o},$$

имеем

$$Q_\mathrm{w} = \frac{\mathrm{T}Q_\mathrm{w}\Delta\Phi_\mathrm{w}}{\mathrm{T}Q_\mathrm{o}\Delta\Phi_\mathrm{o}}Q_\mathrm{o}, \quad Q_\mathrm{g} = \frac{\mathrm{T}Q_\mathrm{g}\Delta\Phi_\mathrm{g}}{\mathrm{T}Q_\mathrm{o}\Delta\Phi_\mathrm{o}}Q_\mathrm{o}, \qquad (5.131)$$

b) Заданный дебит жидкости в единицах объема при нормальных условиях. Поскольку

$$Q_\mathrm{L} = \mathrm{T}Q_\mathrm{o}\Delta\Phi_\mathrm{o} + \mathrm{T}Q_\mathrm{w}\Delta\Phi_\mathrm{w}, \qquad (5.132)$$

$$Q_l = \frac{\mathrm{T}Q_l\Delta\Phi_l}{\mathrm{T}Q_\mathrm{o}\Delta\Phi_\mathrm{o} + \mathrm{T}Q_\mathrm{w}\Delta\Phi_\mathrm{w}}Q_\mathrm{L}, \quad l = \mathrm{o, w, g}.$$

c) Заданный суммарный дебит в единицах объема при пластовых условиях (интенсивность истощения пласта). Интенсивность истощения пласта

$$Q_\mathrm{VT} = \sum_l B_l\mathrm{T}Q_l\Delta\Phi_l,$$

а дебиты отдельных фаз (в нормальных условиях)

$$Q_l = \frac{\mathrm{T}Q_l\Delta\Phi_l}{\sum\limits_l B_l\mathrm{T}Q_l\Delta\Phi_l}Q_\mathrm{VT}. \qquad (5.133)$$

Легко видеть, как можно видоизменить приведенные соотношения в случае, когда дебиты задаются в пластовых, а не в нормальных условиях, и наоборот.

Из соотношений (5.132) — (5.133) видно, что Q_l в конечно-разностных уравнениях должны распределяться в соответствии с распределением *проводимостей и разностей потенциалов*. Для того чтобы уравнения, подобные (5.133), можно было включить

в матричные уравнения, разности потенциалов следует определять явно, т. е. при $\Delta\Phi=\Delta\Phi^n$, либо заменять их некоторой оценкой $\Delta\Phi^k$ величин $\Delta\Phi^{n+1}$. *Однако способ определения TQ должен быть согласован со способом определения межблочных проводимостей в применяемом методе решения.* Это будет обсуждаться ниже.

Определение расхода в соответствии с уравнениями (5.131)—(5.133) иногда называют «распределением отбора в соответствии с потенциалами». Такая формулировка правильная, однако в этом случае могут возникать проблемы, связанные с устойчивостью, в особенности, когда в схеме для получения $\Delta\Phi^{n+1}$ пытаются итерировать по $\Delta\Phi$.

Упрощенный процесс можно получить, положив

$$\Delta\Phi_o=\Delta\Phi_w=\Delta\Phi_g. \tag{5.134}$$

Такое предположение справедливо, если интенсивность капиллярных сил мала и $\gamma_l \frac{dZ}{dx}=0$ или пренебрежимо мала. По данному способу, который называют «распределением дебита в соответствии с проводимостями», получают уравнения, аналогичные (5.131)—(5.133):

для заданного дебита нефти

$$Q_w=\frac{TQ_w}{TQ_o}Q_o, \quad Q_g=\frac{TQ_g}{TQ_o}Q_o; \tag{5.135}$$

для заданного суммарного дебита жидкости

$$Q_l=\frac{TQ_l}{TQ_o+TQ_w}Q_L, \quad l=o, w, g; \tag{5.136}$$

для суммарного дебита в единицах объема при пластовых условиях

$$Q_l=\frac{TQ_l}{\sum\limits_l B_l TQ_l}Q_{VT}, \quad l=o, w, g. \tag{5.137}$$

Вкратце остановимся на реализации «концевого эффекта». Предположим, что в системе вода — нефть задан расход нефти и в начальном состоянии $S_{w1}<S_{wo}$ (рис. 5.19,*а*). Тогда в соответствии с изложенным в разделе 5.7.1 $Q_w=0$. Когда насыщенность первого блока достигает значения S_{wo}, происходит прорыв воды (рис. 5.19,*б*). С этого момента насыщенность в данном блоке *остается постоянной*, что является условием, определяющим расход воды. Условие постоянной насыщенности легко задать. Если уравнения записаны через p_o и S_w, то уравнение для расхода воды в продуктивном блоке заменяется на

$$S_{w1}=S_{wo}. \tag{5.138a}$$

Если используются p_o и p_w, уравнение для расхода воды приобретает вид

$$p_{o1}-p_{w1}=P_c(S_{wo}). \tag{5.138b}$$

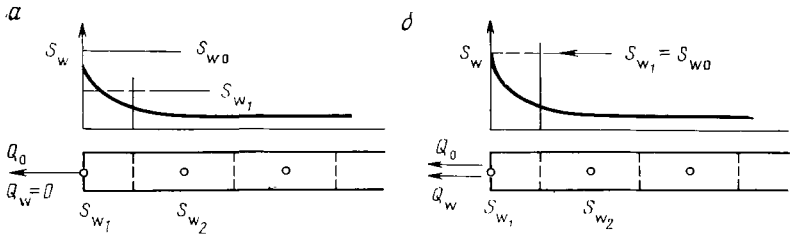


Рис. 5.19. Профиль насыщенности до (*а*) и после (*б*) прорыва воды

Чтобы дебит воды Q_w удовлетворял данному условию, его определяют подстановкой результата решения в уравнение для воды точно так же, как при подсчете насыщенностей по IMPES-методу.

Поскольку S_{w1} — средняя насыщенность по блоку, то фактическая насыщенность на границе в нашем случае будет выше, чем S_{w1}, как это показано на рис. 5.19,*а*. Следовательно, по данному методу получают бóльшее значение времени прорыва, чем фактическое. Не измельчая сетку, результаты можно улучшить, если определять насыщенность S_{w1}, как среднее значение аналитического решения в граничном блоке, исходя из q_w/q_o, вычисленного по S_{w2} (в предположении, что этот узел находится вне зоны влияния концевого эффекта).

5.7.2.2. Условия заданного давления

Иллюстрируя условия заданного давления, рассмотрим оба типа сеток — с распределенными узлами и блочно-центрированную. Гравитационные члены для простоты опустим.

Для сетки с распределенными узлами (рис. 5.20,*а*) *можно задать давление только в одной из фаз,* а расходы других фаз определять по отношению к расходу этой фазы. Если учитывается давление в нефти, то уравнение для нефти заменяют на

$$p_{o1}=p_{sf}, \tag{5.139}$$

где p_{sf} — давление на вскрытой поверхности забоя. Тогда расход нефти можно определять по уравнению для данного узла:

$$Q_o = T_{1+1/2}(p_{o2} - p_{sf}) - \frac{V_p}{\Delta t}\Delta_t (S_o b_o)_1.$$

Затем по формуле (5.135) определяют расходы воды и газа:

$$Q_l = \frac{TQ_l}{TQ_o} Q_o \quad l = w,\ g. \tag{5.140}$$

Значения Q_w и Q_g затем используют в соответствующих разностных уравнениях для определения S_{w1} и S_{g1}.

Для учета концевого эффекта поступают так же, как было описано для случая заданного расхода. Условия до прорыва воды задаются как $p_{o1}=p_{sf}$ и $Q_w=0$. После ее прорыва $p_{o1}=p_{sf}$, $p_w=$

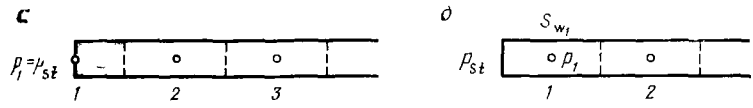


Рис. 5.20. Задание давления на границах

$=p_{sf}-P_c(S_{wo})$, т. е. будут зафиксированы оба давления. Расходы затем можно получить при подстановке результата решения в соответствующие разностные уравнения. С уравнением для газа поступают точно так же.

Рассмотрим блочно-центрированную сетку (рис. 5.20,*б*).

Расходы всех фаз задаются соотношениями

$$Q_l=T_{l1/2}(p_{l1}-p_{lsf}),\quad l=o,\ w,\ g, \tag{5.141}$$

где по коэффициенту $T_{l1/2}$ определяется проводимость между центром первого блока и границей. В данном случае учитывать концевой эффект, положив в основу насыщенность S_{w1}, не рекомендуется (если не выполнить интегрирование на подобие описанного в предыдущем разделе). В большинстве случаев можно предположить, что $p_{lsf}=p_{sf}$ для всех фаз. Выражение (5.141) легко вводится в матричное уравнение добавлением $T_{l1/2}$ к диагональному члену и $T_{l1/2}p_{sf}$ к вектору правой части. Затем обратной подстановкой p_{l1} в уравнение (5.141) получают расходы.

Уравнение (5.141) можно также использовать для скважины, расположенной во внутреннем узле i; в этом случае оно записывается как

$$Q_l=WI_l(p_{li}-p_{wf}), \tag{5.142}$$

где p_{wf} — давление в фонтанирующей скважине; WI_l — коэффициент продуктивности для фазы l, который можно подсчитать по коэффициенту продуктивности скважины для одной из фаз $(k_{rl}/\mu_l B_l)$.

5.7.2.3. Аппроксимация граничных условий во времени

Обычно учет граничных условий должен быть согласован с учетом насыщенностей и проводимостей или даже обладать большей степенью неявности. Например, для IMPES-метода условия заданного расхода (5.135) представляют собой явное выражение:

$$Q_l=Q_l^{n+1}\frac{TQ_l^n}{TQ_o^n}Q_o,\quad l=w,\ g,$$

тогда как по условию заданного давления (5.141) учитывается член с неявным давлением:

$$Q_l=Q_l{}^{n+1}=T_{l1/2}(p_{l1}{}^{n+1}-p_{sf})=T_{l1/2}(p^n{}_{l1}-p_{sf})+T_{l1/2}\Delta_t p_{l1},$$

который можно записать как

$$Q_l{}^{n+1}=Q^n{}_l+Q'_{lp}\Delta_t p_{l1}. \tag{5.143}$$

Для SS-метода при линеаризованных неявных проводимостях и при условиях заданного расхода значения дебитов также должны учитываться неявно:

$$Q_l = \left[\left(\frac{TQ_l}{TQ_o}\right)^n + \left(\frac{TQ_l}{TQ_o}\right)'_w \Delta_t S_w + \left(\frac{TQ_l}{TQ_o}\right)'_g \Delta_t S_g\right] Q_o$$

или

$$Q_l^{n+1} = Q^n{}_l + Q'_{lw}\Delta_t S_w + Q'_{lg}\Delta_t S_g. \qquad (5.144)$$

В выражениях такого вида производные можно вычислять различными способами. Например, можно предположить, что TQ_o не меняется в течение временного шага, тогда

$$\left(\frac{TQ_l}{TQ_o}\right)'_w \cong \frac{(TQ_l)'_w}{TQ_o^n}. \qquad (5.145)$$

Подобные аппроксимации могут использоваться при заданном расходе одной из фаз. Если задан суммарный расход, то производные вида

$$\left(\frac{TQ_l}{\sum\limits_l TQ_l}\right)'_w = \left(\frac{TQ_l}{TQ_T}\right)'_w$$

нельзя упростить наподобие уравнения (5.145), потому что на $n+1$ слое условие заданного суммарного расхода может быть не выполнено. В данном случае можно использовать формулы (5.127), приведенные в разделе 5.6.4.

$$\left(\frac{TQ_w}{TQ_T}\right)'_w = \frac{1}{TQ_T}\left[(TQ_w)'_w - \frac{TQ_w}{TQ_T}(TQ_T)'_w\right],$$

для которых справедливо соотношение

$$\sum_l Q'_{lw}\Delta_t S_w = \sum_l Q'_{lg}\Delta_t S_g = 0.$$

Условия заданного давления можно учитывать неявно по любому методу, поскольку все расходы переменные величины.

Наиболее общее выражение имеет вид

$$Q_l^{n+1} = Q^n{}_l + Q'_{lw}\Delta_l S_w + Q'_{lg}\Delta_t S_g + Q'_{lp}\Delta_t p, \qquad (5.146)$$

где некоторые или все неявные составляющие могут быть нулями.

Упражнения

Упражнение 5.1

Показать, что для $P_c \to 0$ уравнения SS-метода становятся вырожденными.

Схема решения

Типовым элементом блока матрицы D является

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{D}_{pi} + \frac{V_{pi}}{\Delta t} S'_{wi} \begin{bmatrix} b_w & -b_w \\ -b_n & b_n \end{bmatrix} = \mathbf{D}_{pi} + \mathbf{D}_{si},$$

где D_{pi} содержит члены, связанные со сжимаемостью. Поделив оба уравнения для блока i на S'_{wi}, получим

$$(\hat{T} - \hat{D}_p - \hat{D}_s)(P^{n+1} - P^n) = -\hat{R}^n, \qquad (A)$$

где элементами $\hat{D}_s$ являются $\hat{D}_{si} D_{si}/S'_{wi}$. Когда $\max\|P'_c\| \to 0$, $\hat{T}$, $\hat{D}_p \to 0$, $R^n \to 0$, тогда уравнение (A) в пределе сводится к вырожденной задаче:

$$-\hat{D}_s (P^{n+1} - P^n) = 0. \qquad (B)$$

Упражнение 5.2

Получить другой вид уравнения для газа SS-метода, использовав в качестве исходных:

a) разностные уравнения (5.25) и (5.26);

b) дифференциальные уравнения (5.2a).

Разобрать основные свойства уравнения для газа, полученного в (b) при отсутствии свободного газа. Учесть случаи постоянного и переменного давления насыщения в пласте.

Схема решения

a) Предположим, что $P_{si+1/2}$ в уравнении (5.26) можно записать как

$$R_{si+1/2} = \frac{1}{2}(R_{si+1} + R_{si})^n = R^n_{si} + \frac{1}{2}(R_{si+1} - R_{si})^n. \qquad (A)$$

Раскрывая члены в уравнении для газа

$$\Delta[R_s T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta z)] = R^n{}_s \Delta T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta z) + \\ + \Delta R^n{}_s T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta z),$$

$$\Delta_t (R_s \phi b_o S_o) = R^n{}_s \Delta_t (\phi b_o S_o) + (\phi b_o S_o)^{n+1} \Delta_t R_s$$

и вычитая уравнение для нефти, умноженное на $R^n{}_s$, получим

$$\Delta T_g (\Delta p_g - \gamma_g \Delta z) + \Delta R^n_s T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta z) = \\ = \frac{V_i}{\Delta t} [\Delta_t (\phi b_g S_g) + (\phi b_o S_o)^{n+1} \Delta_t R_s]_i + Q_{gi}, \qquad (B)$$

где

$$\Delta R^n_s T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta z) \equiv \frac{1}{2}[(R_{si+1} - R_{si})(T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta z))_{i+1/2} + \\ + (R_{si} - R_{si-1})(T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta z))_{i-1/2}].$$

в) Раскроем члены в уравнении (5.2а)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[R_s\lambda_o\left(\frac{\partial p_o}{\partial x}-\gamma_o\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]=R_s\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_o\left(\frac{\partial p_o}{\partial x}-\gamma_o\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]+$$

$$+\frac{\partial R_s}{\partial x}\lambda_o\left(\frac{\partial p_o}{\partial x}-\gamma_o\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial t}(\phi R_s b_o S_o)=R_s\frac{\partial}{\partial t}(\phi b_o S_o)+\phi b_o S_o\frac{\partial R_s}{\partial t}.$$

Получим уравнение для газа в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_g\left(\frac{\partial p_g}{\partial x}-\gamma_g\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial R_s}{\partial x}\lambda_o\left(\frac{\partial p_o}{\partial x}-\lambda_o\frac{\partial z}{\partial x}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}(\phi b_g S_g)+\phi b_o S_o\frac{\partial R_s}{\partial t}+q_g. \qquad (C)$$

Покажем, что если второй член в левой части (C) аппроксимируется при дискретизации

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial R_s}{\partial x}\lambda_o\left(\frac{\partial p_o}{\partial x}-\gamma_o\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]_{i+1/2}+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial R_s}{\partial x}\lambda_o\left(\frac{\partial p_o}{\partial x}-\gamma_o\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]_{i-1/2},$$

то конечно-разностное уравнение тождественно (B).

Упражнение 5.3

Сформулировать разностные уравнения для SS-метода в случае:

а) двухфазной фильтрации при $\bar{p}=p_n+p_w$ и $P_c=p_n-p_w$ (Дуглас и др., 1959), рассмотреть форму матриц T и D;

b) трехфазной фильтрации в терминах p_o, S_w и S_g; p_o, P_{cow} и P_{cog}.

Упражнение 5.4

Сформулировать двухфазные уравнения в терминах давления и массы смачивающей фазы, выраженных:

а) в молях на единицу объема;

в) через суммарную плотность.

Обсудить преимущества и недостатки обеих формулировок.

Упражнение 5.5

Сформулировать уравнения IMPES-метода для трехфазной фильтрации через p_o, S_w, S_g:

а) начиная с уравнений SS-метода;

в) приводя к дискретному виду уравнения, полученные в упражнении 2.3.

Схема решения

а) Уравнение можно получить из уравнения (5.37) подстановкой $\Delta P_{cow}=P'_{cow}\Delta S_w$ и т. д. На практике P_c определяют на каждом временном шаге, а член $\Delta P^n{}_c$ — непосредственно.

b) Приведем уравнение D (см. упражнение 2.3) к дискретному виду

$$\Delta\left[\mathrm{T_o}(\Delta p_o^{n+1}-\gamma_o\Delta z)\right]+(b_o/b_w)^{n+1}\Delta\left[\mathrm{T_w}(\Delta p_o^{n+1}-\gamma_w\Delta z)\right]+$$
$$+(b_o/b_g)^{n+1}\Delta\left[\mathrm{T_g}(\Delta p_o^{n+1}-\gamma_g\Delta z)\right]=$$
$$=\frac{V}{\Delta t}\{S_o^n[(\phi b_o)'+(b_o^2/b_g)^{n+1}\phi^{n+1}R_s']+S_w^n(b_o/b_w)^{n+1}(\phi b_w)'+$$
$$+S_g^n(b_o/b_g)^{n+1}(\phi b_g)'\}\Delta_t p_o+\text{явные члены с } P_c. \qquad \text{(A)}$$

После решения (A) для получения $\Delta_t S_w$ произвести подстановку p_o в уравнение для воды, а для получения $\Delta_t S_g$ — в уравнение для нефти.

Упражнение 5.6

Получить предел устойчивости IMPES-метода по отношению к P_c при трехфазной фильтрации (Коутс и др., 1968).

Схема решения

Пренебрегая растворенным в нефти газом, можно записать уравнения, равносильные (5.43a) и (5.43b):

$$\mathrm{T_w}\Delta^2 e_2^{n+1}=\frac{V_p}{\Delta t}\Delta_t e_1+P'_{cow}\mathrm{T_w}\Delta^2 e_1^n,$$
$$\mathrm{T_o}\Delta^2 e_2^{n+1}=-\frac{V_p}{\Delta t}[\Delta_t e_1+\Delta_t e_3], \qquad \text{(A)}$$
$$\mathrm{T_g}\Delta^2 e_2^{n+1}=\frac{V_p}{\Delta t}\Delta_t e_3-P'_{cog}\mathrm{T_g}\Delta^2 e_3^n,$$

где e_1, e_2 и e_3 — погрешности S_w, p_o и S_g соответственно. Подставим формальное решение для e_l, которое удовлетворяет условию

$$\mathrm{T}_l\Delta^2 e_m=-T_l\gamma_m e_m,\ l=o,\ \omega,\ g,\ m=1,\ 2,\ 3,$$

где

$$\gamma_m=4\sin^2\frac{\alpha_m}{2}.$$

Для получения двух уравнений исключим $\Delta_t e_l$:

$$\frac{V_p}{\Delta t}e_1^{n+1}=\left[\frac{V_p}{\Delta t}+\frac{P'_{cow}\mathrm{T_w}}{\mathrm{T_T}}(\mathrm{T_o}+\mathrm{T_g})\gamma_1\right]e_1^n+\frac{P'_{cog}\mathrm{T_g}}{\mathrm{T_T}}\gamma_3 e_3^n,$$
$$\frac{V_p}{\Delta t}(e_1^{n+1}+e_3^{n+1})=\left(\frac{V_p}{\Delta t}+\frac{P'_{cow}\mathrm{T_w}}{\mathrm{T_T}}\gamma_3\right)e_1^n+\left(\frac{V_p}{\Delta t}-\frac{P'_{cog}\mathrm{T_g}}{\mathrm{T_T}}\lambda_3\right)e_3^n. \qquad \text{(B)}$$

Выражая это в матричной форме при $e^{n+1}=\mathrm{B}e^n$, получим

$$\mathbf{B}=\frac{\Delta t}{V_p}\begin{bmatrix}\frac{V_p}{\Delta t}+\gamma_1 P'_{cow}\mathrm{T_w}\left(1-\frac{\mathrm{T_w}}{\mathrm{T_T}}\right) & \gamma_3 P'_{cog}\frac{\mathrm{T_w}\mathrm{T_g}}{\mathrm{T_T}}\\ -\gamma_1 P'_{cow}\frac{\mathrm{T_w}\mathrm{T_g}}{\mathrm{T_T}} & \frac{V_p}{\Delta t}-\gamma_3 P'_{cog}\frac{\mathrm{T_g}}{\mathrm{T_T}}(\mathrm{T_o}+\mathrm{T_w})\end{bmatrix} \qquad \text{(C)}$$

Собственные значения μ_i матрицы $B=\{b_{ij}\}$:

$$\mu_{1,2}=\frac{1}{2}\left[b_{11}+b_{22}\pm\sqrt{(b_{11}+b_{22})^2-4\,(b_{11}\,b_{22}-b_{12}b_{21})}\right].$$

Максимальное значение $|\mu|$ равно

$$\mu=1-\frac{\Delta t}{2V_p\mathrm{T_T}}\left[\gamma_3 P'_{\mathrm{cog}}\mathrm{T_g}\,(\mathrm{T_o}+\mathrm{T_w})-\gamma_1 P'_{\mathrm{cow}}\mathrm{T_w}\,(\mathrm{T_o}+\mathrm{T_g})+\sqrt{X}\right],$$

где

$$X=[\gamma_1 P'_{\mathrm{cow}}\mathrm{T_w}\,(\mathrm{T_o}+\mathrm{T_g})+\gamma_3 P'_{\mathrm{cog}}\mathrm{T_g}\,(\mathrm{T_o}+\mathrm{T_w})]^2-4\gamma_1\gamma_3 P'_{\mathrm{cow}}P'_{\mathrm{cog}}\mathrm{T_w^2}\mathrm{T_g^2}.$$

При $|\mu|<1$ получим

$$\Delta t\leqslant\frac{4V_p\mathrm{T_T}}{\gamma_3 P'_{\mathrm{cog}}\mathrm{T_g}\,(\mathrm{T_o}+\mathrm{T_w})-\gamma_1 P'_{\mathrm{cow}}\mathrm{T_w}\,(\mathrm{T_o}+\mathrm{T_g})+\sqrt{X}}. \tag{D}$$

Упражнение 5.7

Показать, что SS-метод безусловно устойчив относительно основных переменных. Для простоты считаем фильтрацию двухфазной, флюиды несжимаемыми.

Схема решения

Применяя линеаризованный анализ устойчивости в предположении, что $\Delta(\mathrm{T}\Delta p)=\mathrm{T}\Delta^2 p$ и т. д., локально линеаризуем уравнения. В пренебрежении гравитационными силами можно записать:

$$\begin{aligned}\mathrm{T_w}\Delta^2 p_{\mathrm{w}}^{n+1}&=\frac{V_p}{\Delta t}S'_{\mathrm{w}}\,(\Delta_t p_n-\Delta_t p_{\mathrm{w}})+q_{\mathrm{w}},\\ \mathrm{T_n}\Delta^2 p_{\mathrm{n}}^{n+1}&=-\frac{V_p}{\Delta t}S'_{\mathrm{w}}\,(\Delta_t p_{\mathrm{n}}-\Delta_t p_{\mathrm{w}})+q_{\mathrm{n}}.\end{aligned} \tag{A}$$

Погрешности удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}\mathrm{T_w}\Delta^2 e_1^{n+1}&=C\,(\Delta_t e_2-\Delta_t e_1),\\ \mathrm{T_n}\Delta^2 e_2^{n+1}&=-C\,(\Delta_t e_2-\Delta_t e_1),\end{aligned} \tag{B}$$

где $C=-V_p S'_{\mathrm{w}}/\Delta t>0$. Поскольку $\Delta^2 e_l=-\gamma_l e_l$,

$$e^{n+1}=Be^n,$$

где

$$e=[e_1,\ e_2]^{\mathrm{T}},$$

$$B=\frac{C}{C\,(\mathrm{T_w}\gamma_1+\mathrm{T_n}\gamma_2)+\mathrm{T_w}\mathrm{T_n}\gamma_1\gamma_2}\begin{bmatrix}\mathrm{T_n}\gamma_2 & -\mathrm{T_n}\gamma_2\\ -\mathrm{T_w}\gamma_1 & \mathrm{T_w}\gamma_1\end{bmatrix}. \tag{C}$$

Максимальное собственное значение B

$$\mu=\frac{C\,(\mathrm{T_n}\gamma_2+\mathrm{T_w}\gamma_1)}{C\,(\mathrm{T_n}\gamma_2+\mathrm{T_w}\gamma_1)+\mathrm{T_w}\mathrm{T_n}\gamma_1\gamma_2}<1. \tag{D}$$

Упражнение 5.8

Показать, что разностное уравнение (5.58) равносильно уравнению (5.57).

Схема решения

Исходное уравнение (5.57) для узла сетки без источника

$$-(\mathrm{T_w}+T_\mathrm{n})_{i+1/2}(p_{i+1}-p_i)=u_{\mathrm{T}i+1/2}=u_{\mathrm{T}i-1/2}=u_\mathrm{T}. \qquad \text{(A)}$$

С учетом этого уравнение для смачивающей фазы можно записать как

$$-\left(\frac{\mathrm{T_w}}{\mathrm{T_w}+\mathrm{T_n}}\right)_{i-\mathrm{T}1/2}u_\mathrm{T}+\left(\frac{\mathrm{T_w}}{\mathrm{T_w}+\mathrm{T_n}}\right)_{i-1/2}u_\mathrm{T}=\frac{V_{pi}}{\Delta t}\Delta_t S_{\mathrm{w}i}. \qquad \text{(B)}$$

При использовании «взвешивания» вверх по потоку для T_l получим

$$-u_\mathrm{T}(f_{\mathrm{w}i}-f_{\mathrm{w}i-1})=\frac{V_{pi}}{\Delta t}\Delta_t S_{\mathrm{w}i}, \qquad \text{(C)}$$

что равносильно уравнению (5.58).

Упражнение 5.9

Получить достаточные условия существования единственного решения для уравнений SS-метода при трехфазной фильтрации (указание — найти условия, когда все строки (—T+D) являются строками с диагональным преобладанием; использовать формулировку, данную в упражнении 5.2).

Схема решения

Обозначим

$$R\mathrm{T}_{i+1/2}=\frac{1}{2}(R_{\mathrm{s}i+1}-R_{\mathrm{s}i})\,\mathrm{T}_{\mathrm{o}i+1/2},$$

$$a\equiv\sum R\mathrm{T}=-R\mathrm{T}_{i+1/2}+R\mathrm{T}_{i-1/2},\quad b=|-R\mathrm{T}_{i+1/2}|+|R\mathrm{T}_{i-1/2}|\geqslant|\mathrm{a}|. \qquad \text{(A)}$$

Диагональными блоками —T и D будут:

$$-\mathbf{T}=\begin{vmatrix}\sum\mathrm{T_w} & 0 & 0\\ 0 & \sum\mathrm{T_o} & 0\\ 0 & \sum R\mathrm{T} & \sum\mathrm{T_g}\end{vmatrix}$$

$$\mathbf{D}=\frac{V_p}{\Delta t}\left\{\begin{vmatrix}-b_\mathrm{w}^{n+1}S'_\mathrm{w} & b_\mathrm{w}^{n+1}S'_\mathrm{w} & 0\\ b_\mathrm{o}^{n+1}S'_\mathrm{w} & -b_\mathrm{o}^{n+1}(S'_\mathrm{w}-S'_\mathrm{g}) & -b_\mathrm{o}^{n+1}S'_\mathrm{g}\\ 0 & -b_\mathrm{g}^{n+1}S'_\mathrm{g} & b_\mathrm{g}^{n+1}S'_\mathrm{g}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}S_\mathrm{w}^n b'_\mathrm{w} & 0 & 0\\ 0 & S_\mathrm{o}^n b'_\mathrm{o} & 0\\ 0 & R'_\mathrm{s}(S_\mathrm{o}b_\mathrm{o})^n & S_\mathrm{g}^n b'_\mathrm{g}\end{vmatrix}\right\}$$

При $S'_g > 0$, $S'_w < 0$, $R'_s > 0$ необходимо исследовать только элементы третьей строки и второго столбца. Это дает

$$\frac{V_p}{\Delta t}(b_g S'_g + S_g b'_g) \geqslant \left| \frac{V_p}{\Delta t}(S_o b_o R'_s - b_g S'_g) + a \right| + b = |A| + b. \quad \text{(B)}$$

Поскольку $S_g b'_g \geqslant 0$, то в левой части этим членом можно пренебречь. Рассмотрим сперва случай, когда $A > 0$. Тогда

$$b_g S'_g < S_o b_o R'_s + a \frac{\Delta t}{V_p}. \quad \text{(C)}$$

После подстановки (C) в (B) получим

$$\Delta t (b - a) < V_p S_o b_o R'_s. \quad \text{(D)}$$

Если $A < 0$, приходим к тому же условию. Отметим, что для существования решения условие (D) является достаточным, но не необходимым.

ГЛАВА 6

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С БЛОЧНО-ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ

6.1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей главе рассмотрим решение матричных уравнений, получающихся при дискретизации уравнений одно-, двух- и трехфазной фильтрации. В данном случае особенно интересна задача, в которой требуется одновременно определить несколько неизвестных в каждом узле сетки. Для двухфазной фильтрации при одновременном решении получают два неизвестных на сеточных узел, а для трехфазной — три неизвестных на узел. Самые общие уравнения трехфазной фильтрации можно записать в виде

где

$$\mathbf{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{d} \tag{6.1}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_1 & & & \\ \mathbf{c}_2 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{b}_2 & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \mathbf{c}_N & \mathbf{a}_N \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{u}_N \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_1 \\ \boldsymbol{d}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{d}_N \end{bmatrix} \tag{6.3a, b}$$

$$\boldsymbol{u}_i = \begin{bmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \\ u_i^3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} d_i^1 \\ d_i^2 \\ d_i^3 \end{bmatrix} \tag{6.4a,b}$$

$$\mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_i^{1,1} & a_i^{1,2} & a_i^{1,3} \\ a_i^{2,1} & a_i^{2,2} & a_i^{2,3} \\ a_i^{3,1} & a_i^{3,2} & a_i^{3,3} \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

$\mathbf{c}_i$ и $\mathbf{b}_i$ определяются аналогично.

Заметим, что уравнение (6.1) можно получить из уравнения (4.2), заменяя скалярные величины соответствующими матрицами или векторами. Уравнение в обычном узле сетки i имеет вид

$$\mathbf{c}_i u_{i-1} + \mathbf{a}_i u_i + \mathbf{b}_i u_{i+1} = d_i. \tag{6.6}$$

Для циклических или периодических граничных условий получили матрицу вида (4.6) после замены скалярных элементов на матрицы размера 3×3. Эта аналогия между однофазной и многофазной задачей позволяет распространить на решение рассматриваемой задачи некоторые методы (см. гл. 4). Во многих практических задачах матрицы $\mathbf{c}_i$, $\mathbf{b}_i$ и $\mathbf{a}_i$ не являются полными и, воспользовавшись в них нулями, можно существенно сэкономить машинное время.

6.2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Мы не ставим своей целью подробное рассмотрение (вместе с вычислительными алгоритмами) всех имеющихся методов. Вместо этого в общих чертах разберем несколько методов, а затем в приложении В представим некоторые основные программы.

6.2.1. Обобщение алгоритма Томаса

Обобщим алгоритм Томаса для уравнения (6.1). Уравнение данного вида Шехтер (1960) называет квазитрехдиагональным, а Варга (1962) — блочно-трехдиагональным. Его также рассматривали Рихтмайер и Мортон (1967). Запишем

$$\mathbf{A}=\mathbf{WQ}, \tag{6.7}$$

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & & & & \\ \mathbf{c}_2 & \mathbf{w}_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \mathbf{c}_{N-1} & \mathbf{w}_{N-1} & \\ & & & \mathbf{c}_N & \mathbf{w}_N \end{bmatrix}, \tag{6.8}$$

где $\mathbf{W}$ и $\mathbf{Q}$ определяются следующим образом:

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{q}_1 & & & \\ & \mathbf{I}_2 & \mathbf{q}_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \mathbf{I}_{N-1} & \mathbf{q}_{N-1} \\ & & & & \mathbf{I}_N \end{bmatrix}, \tag{6.9}$$

Соотношения для определения $\mathbf{w}_i$ и $\mathbf{q}_i$ получают приравниванием блочных элементов **WQ** соответствующим элементам **A**. В результате имеем следующие уравнения:

$$\mathbf{w}_1=\mathbf{a}_1,\ \mathbf{q}_1=\mathbf{w}^{-1}{}_1 b_1, \tag{6.10}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{q}_{i-1} &= \mathrm{w}_{i-1}^{-1}\mathrm{b}_{i-1} \qquad (6.11)\\ \mathrm{w}_i &= \mathrm{a}_i - \mathrm{c}_i\mathrm{q}_{i-1} \qquad (6.12)\end{aligned}\right\} \ i=2, \ldots, N.$$

Заметим, что $\mathbf{w}_i$ должны быть невырожденными и требуется знать их обратные матрицы.

Если $\mathbf{w}_i$ и $\mathbf{q}_i$ известны, решение можно получить, выполнив сначала прямое исключение

$$\mathbf{W}g=d. \tag{6.13}$$

Это осуществляется следующим образом:

$$g_1=\mathbf{w}^{-1}{}_1 d_1,$$

$$g_i=\mathbf{w}^{-1}{}_1 (d_i-\mathbf{c}_i g_{i-1}),\ i=2, \ldots, N. \tag{6.14}$$

Векторы решения u_i можно получить из

$$\mathbf{Q}u=g \tag{6.15}$$

обратным исключением. Это достигается при

$$u_N=g_N,$$

$$u_i=g_i-\mathbf{q}_i u_{i+1},\ i=N-1, \ldots, 1. \tag{6.16}$$

Еще раз заметим, что в алгоритме требуются w_i^{-1} и данные матрицы должны быть невырожденными. Немного отличное разложение **A** представлено Шехтером (1960). Возможны различные варианты данного алгоритма. Дуглас и другие (1959) предложили алгоритм для двухфазных задач (с битрехдиагональными матрицами), а фон Розенберг (1969) представил алгоритм для двух- и трехфазных (с трехдиагональными матрицами) задач. Главное отличие алгоритмов Дугласа и других и фон Розенберга от приведенного здесь состоит в том, что матричные операции представлены через матричные элементы. Следовательно, в данной формулировке проще воспользоваться систематически появляющимися нулями. В процессе разложения в качестве диагональных элементов были выбраны единичные матрицы I. Это только один из возможных путей. Так, например, для подматриц размера 2×2 Уайнштейн и другие (1970) использовали более предпочтительный вариант, в котором единичные матрицы заменяются матрицами вида

$$\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В результате получают нижние треугольные матрицы $\mathbf{w}_i$. Утверждается, что для данного вида ошибки округления уменьшаются.

Всесторонне проверенные программы для битрехдиагональных и трехдиагональных задач приведены в приложении В.

6.2.2. Применение методов, используемых для ленточных матриц

Матрица $\mathbf{A}$ — ленточная матрица, поэтому можно использовать любой из методов, разработанных для таких матриц. Однако эти методы не будут столь эффективными, как методы, рассмотренные в предыдущем разделе, поскольку в ленточном алгоритме со всеми нулями в ленте оперируют как ненулевыми элементами.

Подробно рассмотрим ленточные матрицы в гл. 8.

ГЛАВА 7

ОДНОФАЗНАЯ ДВУМЕРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

7.1. ВВЕДЕНИЕ

В данной главе понятия, изложенные в гл. 3, будут распространены на различные задачи моделирования пластов, в которых рассматривается фильтрация одного флюида в пространстве двух измерений. Здесь представлены некоторые новые задачи и методы, используемые только для расчетов двумерной (2-D) фильтрации. Все эти методы будут использованы при решении многофазных задач (см. гл. 9) и трехмерных задач (см. гл. 11). Хотя было уже рассмотрено много методов решения практических задач моделирования пластов, однако они применялись только для крайне идеализированного одномерного пространства. В этой главе будут рассмотрены детали некоторых практических моделей газовых месторождений и нефтяных месторождений с давлением выше давления насыщения. Здесь также будут представлены численные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих двумерную фильтрацию. Некоторые методы, которые могут быть применены для матричных уравнений, полученных в результате конечно-разностной аппроксимации дифференциальных уравнений в частных производных, приведены в следующей главе.

7.2. КЛАССИФИКАЦИЯ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ

Конечно, все месторождения по условиям залегания нефти трехмерны, однако во многих практических случаях можно предположить, что течением в одном из трех координатных направлений можно пренебречь, и исследовать фильтрацию в двух других направлениях. Есть три класса задач, которые можно трактовать подобным образом. Эти задачи и связанные с ними математические модели описываются ниже.

7.2.1. Задачи на площади с координатами x, y

Для незначительных по толщине и больших по простиранию пластов часто можно предположить, что градиенты давления, а следовательно, и фильтрация в направлении z пренебрежимо малы по сравнению с фильтрацией в двух других направлениях. Небольшие изменения толщины по вертикали можно учесть толщиной блока Δz и превышением пласта h в виде функций x и y. Типичный блок площадной модели показан на рис. 7.1.

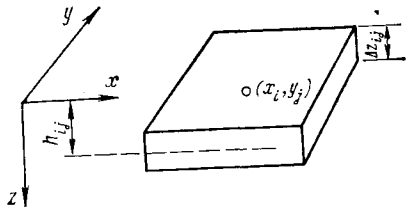


Рис. 7.1. Типичный блок площадной модели

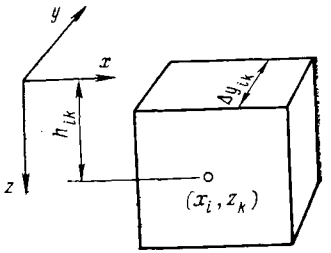


Рис. 7.2. Типичный блок профильной модели

В этом случае общее уравнение фильтрации можно записать в виде (см. уравнения (2.35), (2.42), (2.43), (2.44), (2.48), (2.51) и (2.53):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\Delta z \lambda X\left(\frac{\partial p}{\partial x}-\gamma \frac{\partial h}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\Delta z \lambda Y\left(\frac{\partial p}{\partial y}-\gamma \frac{\partial h}{\partial y}\right)\right]= \\ =\Delta z \beta \frac{\partial p}{\partial t}+\Delta z q, \tag{7.1}$$

$$p(x, y)=\frac{1}{\Delta z}\int_0^{\Delta z} p(x, y, z)\,\mathrm{d}z.$$

Коэффициенты λX, λY и β зависят от вида решаемого дифференциального уравнения в частных производных. Например, если рассматриваем уравнение (2.42), то

$$\lambda X=\frac{k_x}{\mu B}, \quad \lambda Y=\frac{k_y}{\mu B},$$

Причем пластовые свойства следует определять как средние по толщине. Удельный вес, используемый в гравитационных членах, определяется как

$$\gamma=\rho g.$$

Гравитационные члены тождественно равны нулю, если координаты x и y горизонтальны. Очевидно, что коэффициенты λX, λY и β могут зависеть от x, y, t, и p, в то время как γ зависит от p. Итак, задача нелинейна, хотя в данном случае нелинейность довольно слабая.

7.2.2. Задачи для вертикального сечения с координатами x, y

Пренебрегая фильтрацией в одном из горизонтальных направлений вместо вертикального, получим модель, которую называют профильной. Этот вид модели можно использовать в тех случаях, когда фильтрация происходит преимущественно в вертикальном и одном из горизонтальных направлений. Если запишем уравнения в координатах x, z, то небольшие изменения в направлении y

можно учесть, используя переменную ширину Δy для каждого блока. Типичный блок для модели данного вида показан на рис. 7.2.

Типичное уравнение для профильной задачи получается заменой y на z, λY на λZ и Δz на Δy в уравнении (7.1):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\Delta y \lambda X\left(\frac{\partial p}{\partial x}-\gamma \frac{\partial h}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\Delta y \lambda Z\left(\frac{\partial p}{\partial z}-\gamma \frac{\partial h}{\partial z}\right)\right]= \\ =\Delta y \beta \frac{\partial p}{\partial t}+\Delta y q, \tag{7.2}$$

где

$$p(x, z)=\frac{1}{\Delta y}\int_0^{\Delta y} p(x, y, z)\mathrm{d}y, \quad \lambda X=\frac{k_x}{\mu B}, \quad \lambda Z=\frac{k_z}{\mu B},$$

$$\beta=\left(\phi \frac{c_{\mathrm{f}}}{B^{\circ}}+\phi^{\circ} \frac{c_{\mathrm{R}}}{B}\right).$$

Если координата x строго горизонтальна, а Δy постоянно, уравнение упрощается:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda X \frac{\partial p}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda Z\left(\frac{\partial p}{\partial z}-\gamma\right)\right]=\beta \frac{\partial p}{\partial t}+q. \tag{7.3}$$

7.2.3. Задача с одной скважиной в координатах r, z

Одно из важных приложений уравнений фильтрации к проблемам разработки нефтяных месторождений — решение задач исследования скважин. Нефтяные и газовые скважины испытывают для определения их продуктивности. При большинстве испытаний задают последовательность постоянных дебитов добывающих скважин и наблюдают за изменениями забойного давления. В результате сравнения данных испытания с теоретическими определяют основные параметры пласта, а следовательно, и продуктивность скважины. Этот довольно специальный вопрос рассмотрен в работе Мэттьюса и Расселла (1967), в руководстве, опубликованном Комитетом по сохранению энергетических ресурсов провинции Альберта, Канада (ERCB, 1975), и в работе Эрлафера (1977).

В теории исследования скважин рассматривают однофазные одномерные радиальные течения, а также используют некоторые предположения, линеаризующие дифференциальное уравнение в частных производных (см. гл. 2). Если течение двумерно или уравнения не могут быть линеаризованы, аналитическое решение либо нецелесообразно, либо невозможно. Именно в таких случаях для анализа данных исследования скважин можно использовать машинную модель в координатах r, z. Ее типичный блок показан на рис. 7.3. Уравнение в координатах r, z легко получить из уравнения (7.2):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left[r \lambda R\left(\frac{\partial p}{\partial r}-\gamma \frac{\partial h}{\partial r}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda Z\left(\frac{\partial p}{\partial z}-\gamma \frac{\partial h}{\partial z}\right)\right]=\beta \frac{\partial p}{\partial t}+q, \tag{7.4}$$

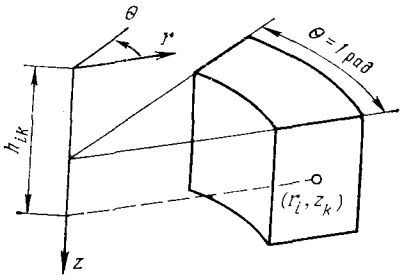


Рис. 7.3. Типичный блок модели со скважиной в координатах r, z

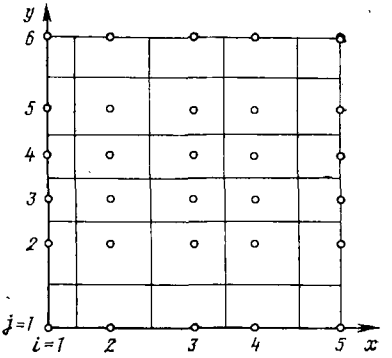


Рис. 7.4. Типичная сетка двумерных моделей с координатами x, y

где

$$p(r, z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(r, z, \theta)\, d\theta, \quad \lambda R = \frac{k_r}{\mu B}, \quad \lambda Z = \frac{k_z}{\mu B},$$

$$\beta = \left(\phi \frac{c_f}{B^0} + \phi^0 \frac{c_R}{B}\right).$$

(Способ преобразования координат описан в разделе 7.10.2). Уравнение фильтрации в виде (7.4) записано для угла, равного одному радиану, что должно быть учтено при задании q.

7.2.4. Комментарии к двумерным моделям

Анализ приведенных уравнений показывает, что для всех трех случаев может быть разработана единая математическая модель. Вид приведенных уравнений совершенно одинаков, и при соответствующем выборе коэффициентов с их помощью можно решать различные задачи фильтрации флюидов, рассмотренные в гл. 2. В следующем разделе покажем, как можно осуществить дискретизацию членов в уравнениях (7.1)—(7.4).

Для всех двумерных задач реальная ситуация упрощается. При анализе результатов моделирования об этом надо постоянно помнить. Трехмерный характер фильтрации учитывается лишь частично изменением размеров блока в направлении третьего измерения. Строго говоря, уравнения двумерной фильтрации с переменным размером в третьем измерении неточны, но они дают хорошее приближение при небольшом изменении этого параметра.

7.3. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В данном разделе получим разностные аппроксимации для различных случаев двумерной однофазной фильтрации. Будет также рассмотрено условие устойчивости явного метода.

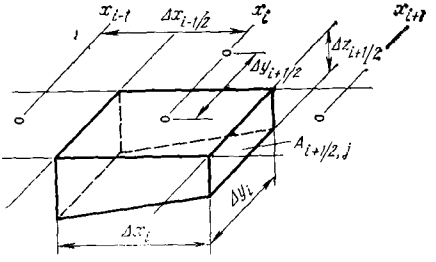


Рис. 7.5. Типичный блок сетки, приведенной на рис. 7.4

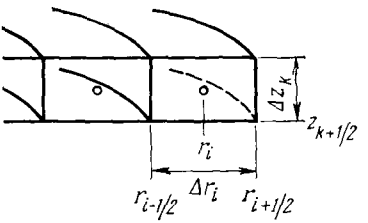


Рис. 7.6. Границы блока в радиальном направлении

7.3.1. Разностные аппроксимации

Детально рассмотрим дискретизацию уравнения (7.1) на сетке, показанной на рис. 7.4. Типичный блок этой сетки представлен на рис. 7.5. Используемая система обозначений — развитие системы обозначений, применяемой в гл. 3 (см. раздел 3.5). Потоковый член в направлении x аппроксимируется с помощью оператора, задаваемого уравнением (3.117). После умножения на $\Delta x_i \Delta y_i$ конечно-разностную аппроксимацию можно записать в виде

$$\Delta x_i \Delta y_j \frac{\partial}{\partial x}\left[\Delta z \lambda X\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \frac{\partial h}{\partial x}\right)\right] \approx \Delta_x T X \Delta_x (p - \gamma h) \equiv$$
$$\equiv T X_{(i+1/2),j}\left[p_{i+1} - p_i - \gamma_{i+1/2}(h_{i+1} - h_i)\right]_j +$$
$$+ T X_{(i-1/2),j}\left[p_{i-1} - p_i - \gamma_{i-1/2}(h_{i-1} - h_i)\right]_j. \qquad (7.5)$$

Проводимости определяют по формулам

$$T X_{(i+1/2),j} = \lambda X_{(i+1/2),j} \frac{\Delta y_j \Delta z_{(i+1/2),j}}{\Delta x_{i+1/2}} = \lambda X_{(i+1/2),j} \frac{A_{(i+1/2),j}}{\Delta x_{i+1/2}}, \qquad (7.6a)$$

$$T X_{(i-1/2),j} = \lambda X_{(i-1/2),j} \frac{A_{(i-1/2),j}}{\Delta x_{i-1/2}}. \qquad (7.6b)$$

Члены $\Delta x_{i+1/2}$ и $\Delta x_{i-1/2}$ определяют следующим образом:

$$\Delta x_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i,$$
$$\Delta x_{i-1/2} = x_i - x_{i-1}, \qquad (7.7)$$
$$\Delta x_i = \frac{1}{2}\left[\Delta x_{i+1/2} + \Delta x_{i-1/2}\right]. \qquad (7.8)$$

Используя аналогичные обозначения, можно записать аппроксимацию производной по y как

$$\Delta x_i \Delta y_j \frac{\partial}{\partial y}\left[\Delta z \lambda Y\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \gamma \frac{\partial h}{\partial y}\right)\right] \approx \Delta_y T Y \Delta_y (p - \gamma h) \equiv$$
$$\equiv T Y_{i,j+1/2}\left[p_{j+1} - p_j - \gamma_{j+1/2}(h_{j+1} - h_j)\right]_i +$$
$$+ T Y_{i,j-1/2}\left[p_{j-1} - p_j - \gamma_{j-1/2}(h_{j-1} - h_j)\right]_i, \qquad (7.9)$$

где

$$TY_{i,j+1/2}=\lambda Y_{i,j+1/2}\frac{\Delta x_i\Delta z_{i,j+1/2}}{\Delta y_{j+1/2}}=\lambda Y_{i,j+1/2}\frac{A_{i,j+1/2}}{\Delta y_{j+1/2}}, \quad (7.10)$$

$$TY_{i,j-1/2}=\lambda Y_{i,j-1/2}\frac{A_{i,j-1/2}}{\Delta y_{j-1/2}}. \quad (7.11)$$

Конечно-разностную аппроксимацию уравнения (7.1) в точке i, j можно записать в компактной форме

$$[\Delta T\Delta(p-\gamma h)]_{ij}=\frac{V_{ij}\beta_{ij}}{\Delta t}\Delta_t p_{ij}+Q_{ij}, \quad (7.12)$$

где

$$[\Delta T\Delta(p-\gamma h)]_{ij}\equiv[\Delta TX\Delta_x(p-\gamma h)+\Delta_y TY\Delta_y(p-\gamma h)]_{ij}, \quad (7.13)$$

$$\Delta_t p_{ij}=p_{ij}^{n+1}-p_{ij}^n, \quad (7.14)$$

$$V_{ij}=\Delta z_{ij}\Delta x_i\Delta y_j, \quad (7.15)$$

$$Q_{ij}=q_{ij}V_{ij}. \quad (7.16)$$

В записи уравнения (7.12) не обозначены временные слои. Для метода с прямой разностью (явного) левая часть берется на n-м временном слое, а для аппроксимации обратной разностью (неявной) — на $(n+1)$-м временном слое. Члены β_{ij} в правой части уравнения (7.12) должны оцениваться по схеме, удовлетворяющей условию материального баланса — см. уравнения (3.173) и (3.174). Одна из таких аппроксимаций следующая:

$$\beta_{ij}=\left(\frac{\phi^n c_f}{B^o}+\frac{\phi^o c_R}{B^{n+1}}\right)_{ij}. \quad (7.17)$$

Заметим, что один из членов выражения (7.17) должен быть взят на $(n+1)$-м слое даже при явном методе.

Для метода Кранка—Николсона левая часть уравнения (7.12) оценивается на слое $(n+1/2)$ путем осреднения

$$\Delta T\Delta\ (p-\gamma h)]_{ij}^{n+1/2}=\frac{1}{2}[\Delta T\Delta(p-\gamma h)]_{ij}^{n}+\frac{1}{2}[\Delta T\Delta(p-\gamma h)]_{ij}^{n+1}. \quad (7.18)$$

Из сказанного ясно, что для профильной модели (уравнение 7.2) аппроксимацию можно записать точно так же, как и для площадной модели — см. уравнение (7.1).

В гл. 3 (см. раздел 3.6) подробно рассматривалось, что при решении задач в цилиндрических координатах надо поступать несколько иначе. Границы блока для вычисления его объема выбирают следующим образом (рис. 7.6):

$$r_{i+1/2}=\left[\frac{r_{i+1}^2-r_i^2}{\ln\left(\frac{r_{i+1}^2}{r_i^2}\right)}\right]^{1/2}, \quad (7.19)$$

$$z_{k+1/2}=\frac{1}{2}(z_k+z_{k+1}). \quad (7.20)$$

Конечно-разностную аппроксимацию уравнения (7.4) можно записать в виде уравнения (7.12) со следующим выражением для оператора в левой части:

$$[\Delta T\Delta(p-\gamma h]_{ik} \equiv [\Delta_r TR\Delta_r(p-\gamma h) + \Delta_z TZ\Delta_z(p-\gamma h)]_{ik}, \quad (7.21)$$

где

$$TR_{(i+1/2),k} = 4\pi\left(\frac{r^2_{i+1/2}\Delta z_k}{r^2_{i+1}-r^2_i}\right)\lambda R_{(i+1/2),k}, \quad (7.22)$$

$$TZ_{i,k+1/2} = \pi\left(\frac{r^2_{i+1/2}-r^2_{i-1/2}}{\Delta z_{k+1/2}}\right)\lambda Z_{i,k+1/2}. \quad (7.23)$$

Другие проводимости ($TR_{(i-1/2),k}$ и $TZ_{i,k-1/2}$) определяют аналогичным образом. Объем блока (i, k) задается выражением

$$V_{ik} = \pi\Delta z_k(r^2_{i+1/2} - r^2_{i-1/2}), \quad (7.24)$$

а расход Q_{ik} определяется при $\theta = 2\pi$.

Можно видеть, что при соответствующем определении проводимостей, границ и объемов блоков конечно-разностные аппроксимации для площадной, радиальной и профильной моделей идентичны по форме. Поэтому далее будем рассматривать в основном площадную модель.

7.3.2. Устойчивость разностных схем

Раскрывая уравнение (7.12) и объединяя члены, получим явную аппроксимацию для площадной модели

$$TX_{(i-1/2),j}\, p^n_{i-1,j} + TY_{i,j-1/2}\, p^n_{i,j-1} -$$

$$- \left(TX_{(i-1/2),j} + TY_{i,j-1/2} + TX_{(i+1/2),j} + TY_{i,j+1/2} - \frac{V_{ij}\beta_{ij}}{\Delta t}\right) p^n_{ij} +$$

$$+ TX_{(i+1/2),j}\, p^n_{(i+1),j} + TY_{i,j+1/2} P_{i,j+1} - d_{ij} = \frac{V_{ij}\beta_{ij}}{\Delta t}\, p^{n+1}_{ij}, \quad (7.25)$$

где d_{ij} содержит гравитационные члены и члены, учитывающие источники. В данном уравнении p^{n+1}_{ij} в правой части — единственное неизвестное при условии, что β_{ij} можно оценить на n-м временном слое. Учет нелинейности, связанной с β, рассмотрен в гл. 3 (см. раздел 3.7.2.1). Итак, можно видеть, что вычислить p^{n+1}_{ij} по p^n_{ji} для всех значений i и j не составляет большого труда.

Однако, как и ожидалось, явный метод только условно устойчив. Условие устойчивости легко вывести, используя понятие разностных уравнений положительного типа (см. гл. 3, раздел 3.7.2.1). Условие, соответствующее (3.179) для одномерных задач, получим в виде

$$\max_{i,j,n}\left[\frac{\Delta t}{V_{ij}\beta_{ij}}(TX_{(i-1/2),j} + TY_{i,j-1/2} + TX_{(i+1/2),j} + TY_{i,j+1/2})\right] \leqslant 1. \quad (7.26)$$

Это условие более жесткое, чем соответствующее для одномерных задач. Как показано в гл. 3, при соблюдении условия устойчивости (7.26) явный метод во многих случаях становится непрактичным. Аналогичное условие можно записать для радиальной и профильной моделей.

Для линеаризованного варианта уравнения фильтрации неявный метод и метод Кранка-Николсона, конечно, безусловно устойчивы.

7.4. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Для моделирования необходимо знать начальное состояние пласта (начальные условия) и взаимодействие пласта с его окружением. Во многих важных случаях мы не представляем в деталях этих условий, и для получения разумных оценок требуется хорошее инженерное понимание ситуации.

Граничные условия должны задаваться на скважинах и на внешней границе пласта. Граничные условия могут быть трех типов: 1 — на границе задан расход; 2 — течение на границе отсутствует и 3 — на границе задано давление. За исключением односкважинных систем в цилиндрических координатах, скважины моделируют с помощью точечных или линейных источников, определяемых функцией Дирака. Данный подход необходим вследствие малости радиуса скважины в сравнении с размерами блока при исследованиях на площадной и профильной моделях.

Задание давления можно осуществить точно так же, как это описывается в гл. 3. В данном разделе рассмотрим случаи, когда задан нулевой или некоторый конечный расход через границу. Мы также покажем, что граничные условия «с расходом» и «без расхода» могут быть реализованы одинаково заменой действительных граничных условий однородными граничными условиями Неймана (отсутствие потока) и введением потока в систему или из нее через источники или стоки. На рис. 7.7 и 7.8 показаны типичные граничные условия для площадной и односкважинной моделей. Рассмотрим теперь детально границы «с расходом» и «без расхода».

7.4.1. Границы «без расхода» (непроницаемые границы)

Когда нет течения через границу (Γ_2 на рис. 7.7 и 7.8), компонента вектора скорости, нормальная к граничной поверхности, должна быть нулевой. Соответствующую компоненту получим, взяв скалярное произведение вектора скорости фильтрации на вектор нормали $\bar{n}$. На границе Γ_2

$$\frac{k}{\mu}(\nabla p - \gamma\nabla h)\cdot n = 0. \qquad (7.27)$$

При моделировании пластов границы обычно аппроксимируются границами блоков, параллельными одному из координатных на-

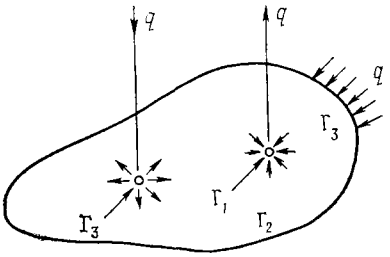


Рис. 7.7. Границы в площадных системах

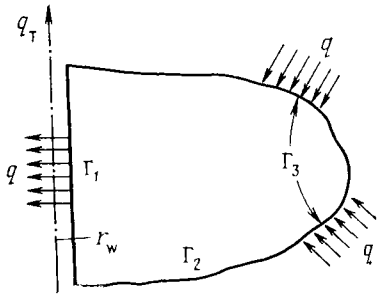


Рис. 7.8. Границы в односкважинных системах

правлений. Таким образом, в площадных (x, y) моделях для всех границ, нормальных направлению оси x,

$$\frac{k_x}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \frac{\partial h}{\partial x}\right) = 0, \tag{7.28}$$

а для всех границ, нормальных направлению оси y,

$$\frac{k_y}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \gamma \frac{\partial h}{\partial y}\right) = 0. \tag{7.29}$$

7.4.2. Границы «с расходом»

Если задан некоторый расход через границу (Γ_1 или Γ_3 на рис. 7.7 и 7.8), нормальная компонента вектора скорости на границе должна равняться этому расходу:

$$\frac{k}{\mu}(\nabla p - \gamma \nabla h) \cdot n = q(\Gamma), \tag{7.30}$$

а общий поток через границу получают интегрированием q в уравнении (7.30) по границе. Например, на границе Γ_3 (см. рис. 7.8) общий расход

$$q_\Gamma = \int_{\Gamma_3} q(\Gamma)\, d\Gamma. \tag{7.31}$$

Если реальная граница охватывает более одного блока и если задан общий расход q_Γ, то он должен быть соответствующим образом распределен по всем граничным блокам. Эта проблема будет обсуждаться в следующем разделе, где рассматриваются конечно-разностное или дискретное представление граничных условий.

7.4.3. Дискретизация граничных условий

Для примера рассмотрим точку (i, k) на вертикальной границе сетки в профильной модели (рис. 7.9). Если расход через границу нулевой, то $\partial p/\partial x = 0$ можно аппроксимировать с использованием

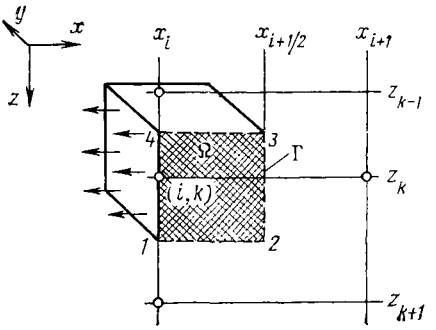


Рис. 7.9. Типичный граничный блок сетки в профильной модели

выражения второго порядка точности

$$\frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2(x_{i+1} - x_i)} = 0. \qquad (7.32)$$

В данном случае предполагается полная симметрия свойств по x_i, а сам метод известен как «метод отражения». Здесь сохраняются симметрия и порядок аппроксимации конечно-разностных уравнений.

Поток в систему или из нее можно учитывать двумя различными способами. В первом случае предполагается, что граница блока (*1—4*) изолирована, а в разностное уравнение вводится член источника (стока) соответствующей интенсивности, в другом, что источник (сток) нулевой, а градиент давления на границе блока $\partial p/\partial x_{x_i}$ имеет значение, при котором через границу протекает нужное количество флюида. Как показано ниже, эти, вроде бы два различных, подхода оказываются идентичными на конечно-разностном уровне.

Рассмотрим следующую упрощенную форму уравнения (2.35) или уравнения (7.3):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda X \frac{\partial p}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda Z \frac{\partial p}{\partial z}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B}\right) + q. \qquad (7.33)$$

Применим к данному уравнению интегральный метод получения разностных аппроксимаций, вкратце рассмотренный в гл. 3 (см. раздел 3.2.1.2). В результате интегрирования по объему блока (i, k) получим

$$\Delta y \iint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda X \frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda Z \frac{\partial p}{\partial z}\right)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}z =$$

$$= \Delta y \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}z + \Delta y \iint_{\Omega} q\,(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad (7.34)$$

Левая часть этого уравнения может быть с помощью теоремы Грина (см., например, Морсе и Фешбах, 1953, с. 34 и 803) преобразована в контурный интеграл

$$\Delta y \int_{\Gamma}\left(\lambda Z \frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}x - \lambda X \frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}z\right) = \Delta y \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + \Delta y \iint_{\Omega} q\mathrm{d}x\mathrm{d}z. \qquad (7.35)$$

Контурный интеграл по Г можно разделить на четыре части по четырем сторонам поперечного сечения блока в плоскости x, z. Предположим, что производные $\partial p/\partial z$ и $\partial p/\partial x$ постоянны на каж-

дой из этих сторон и могут быть аппроксимированы конечными разностями. Тогда получим следующие аппроксимации:

$$\int_2^1 \lambda Z \frac{\partial p}{\partial z}\,\mathrm{d}x = \lambda Z_{k+1/2}\left(\frac{x_{i+1/2}-x_i}{z_{k+1}-z_k}\right)(p_{k+1}-p_k), \tag{7.36}$$

$$-\int_2^3 \lambda X \frac{\partial p}{\partial x}\,\mathrm{d}z = \lambda X_{i+1/2}\left(\frac{z_{k+1/2}-z_{k-1/2}}{x_{i+1}-x_i}\right)(p_{i+1}-p_i), \tag{7.37}$$

$$\int_3^4 \lambda Z \frac{\partial p}{\partial z}\,\mathrm{d}x = \lambda Z_{k-1/2}\left(\frac{x_{i+1/2}-x_i}{z_k-z_{k-1}}\right)(p_{k-1}-p_k), \tag{7.38}$$

$$\int_4^1 \lambda X \frac{\partial p}{\partial x}\,\mathrm{d}z \begin{cases} = 0 \quad \text{если } \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 & (7.39a) \\ = \displaystyle\int_4^1 q_x(z)\,\mathrm{d}z, \text{ если } \frac{\partial p}{\partial x} \neq 0, & (7.39b) \end{cases}$$

где $\Delta y q_x(z)$ — расход на единицу длины границы (1—4) блока (i, k):

$$q_x(z) = -\lambda X \frac{\partial p}{\partial x}\bigg|_{x_i}. \tag{7.40}$$

Если расход учитывается с помощью уравнения (7.39b), последний член в уравнении (7.35) должен быть равен нулю, а общий расход через границу из уравнения (7.39) можно записать как

$$\bar{Q}_{ik} = \Delta y \int_4^1 q_x(z)\,\mathrm{d}z. \tag{7.41}$$

Однако, если используется уравнение (7.39a), общий расход из блока

$$Q_{ik} = \Delta y \iint_{\Omega} q(x, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z. \tag{7.42}$$

Эти два уравнения по-разному интерпретируют особые граничные условия «с источником». $\bar{Q}_{ik}$ и Q_{ik} должны быть равны, так как они представляют один и тот же суммарный отбор из блока (i, k). На конечно-разностном уровне, где $q(x, z)$ и $q_x(z)$ в уравнениях (7.41) и (7.42) должны предполагаться постоянными в блоке, нет различия между этими двумя интерпретациями граничных условий. Это подтверждает возможность использования уравнения (7.39a) при всех способах моделирования. Первый член правой части уравнения (7.34) может быть аппроксимирован выражением

$$\Delta y \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z \approx (x_{i+1/2}-x_i)(z_{k+1/2}-z_{k-1/2})\,\Delta y \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B}\right), \tag{7.43}$$

которое идентично соответствующему члену из уравнения (7.33), умноженному на фактический объем блока.

Запишем стандартную конечно-разностную аппроксимацию для уравнения (7.33), используя обозначения раздела 7.3:

$$[\Delta T\Delta p]_{ik} = \frac{V_{ik}}{\Delta t}\beta_{ik}\Delta_t p_{ik} + Q_{ik}, \tag{7.44}$$

где

$$[\Delta T\Delta p]_{ik} = \Delta_x TX\Delta_x p + \Delta_z TZ\Delta_z p =$$
$$= TX_{(i+1/2),k}[p_{i+1} - p_i]_k + TX_{(i-1/2),k}[p_{i-1} - p_i]_k +$$
$$+ TZ_{i,k+1/2}[p_{k+1} - p_k]_i + TZ_{i,k-1/2}[p_{k-1} - p_k]_i, \tag{7.45}$$

$$TX_{(i+1/2),k} = \lambda X_{(i+1/2),k}\frac{\Delta y(z_{k+1/2} - z_{k-1/2})}{x_{i+1} - x_i}, \tag{7.46}$$

$$TX_{(i-1/2),k} = \lambda X_{(i-1/2),k}\frac{\Delta y(z_{k+1/2} - z_{k-1/2})}{(x_i - x_{i-1})}, \tag{7.47}$$

$$TZ_{i,k+1/2} = \lambda Z_{i,k+1/2}\frac{\Delta y(x_{i+1/2} - x_{i-1/2})}{(z_{k+1} - z_k)}, \tag{7.48}$$

$$TZ_{ik-1/2} = \lambda Z_{ik-1/2}\frac{\Delta y(x_{i+1/2} - x_{i-1/2})}{(z_k - z_{k-1})}. \tag{7.49}$$

Эти выражения применимы к произвольному целому блоку внутри пласта. Сравнение уравнений (7.36) и (7.39) показывает, что общую форму можно использовать для граничного блока (i, k), если положить

$$TX_{i-1/2} = 0 \text{ и } x_{i-1/2} = x_i. \tag{7.50}$$

Подобным образом можно легко получить разновидности общего выражения (7.44) для других границ.

Единственная нерешенная проблема для граничных условий — задание расходов Q_{ik} для каждого блока при заданном общем расходе Q_T нескольких блоков в процессе моделирования профилей и для моделей о единичной скважине, вскрывающей несколько блоков. Простейшее ее решение — распределить расход в соответствии с проводимостью блока

$$Q_k = \frac{T_k}{\Sigma T_k}Q_T, \tag{7.51}$$

где T_k — определенная соответствующим образом проводимость. Данная проблема более сложна в случае многофазной фильтрации и вновь, более детально, будет рассмотрена в гл. 9.

7.5. НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Для неразрабатывавшихся месторождений естественно предположить, что градиент давления в пласте определяется гидростатическим напором флюида

$$\frac{dp}{dh} = \gamma.$$

Моделирование однофазного течения в пласте возможно, конечно, при любом заданном начальном распределении давления.

7.6. УЧЕТ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ

Рассмотренные в гл. 3 (см. раздел 3.7.2) способы учета нелинейных членов можно непосредственно применять для решения двумерных задач. Поэтому нет необходимости в дальнейшем обсуждении этого вопроса.

7.7. УЧЕТ ДАВЛЕНИЯ В ОТДЕЛЬНЫХ СКВАЖИНАХ

Давление, определяемое в узле сетки при моделировании пласта, — среднее давление в блоке, окружающем данный узел. Если в блоке сетки расположена скважина, давление в ней нельзя полагать равным давлению в блоке. Это особенно справедливо при больших размерах блока, содержащего скважину, и при больших дебитах скважины. Точное определение давления в скважине возможно для задач с одиночной скважиной при использовании координат r, z, как это обсуждалось в разделе 7.2.3. В площадных и профильных моделях требуются специальные методы для вычисления давления в скважине по давлению в блоке модели.

Приемлемый подход к решению данной проблемы заключается в предположении, что течение у скважины одномерно в радиальном направлении (в цилиндрических координатах). Аналитические решения одномерных задач однофазной фильтрации и их приложения детально рассматриваются Мэттьюсом и Расселлом (1967) и в Руководстве ERCB (1975). Здесь рассмотрим некоторые практические вопросы определения давления в скважине p_{wf} по давлению p_{ij} в блоке для площадной модели. Это непосредственно распространяется и на другие модели.

Для решения указанной задачи удобно применять понятие радиуса зоны дренирования. Данный подход, впервые использованный Аронофски и Дженкинсом (1954), подробно рассматривается в Руководстве ERCB (1975). Радиус зоны дренирования определяется выражением

$$\frac{p_{av} - p_{wf}}{p_i q_D} = \ln \frac{r_d}{r_w}, \tag{7.52}$$

где p_{av} — среднее пластовое давление.

С учетом этого радиуса приведенное выше решение уравнения стационарного режима становится пригодным для нестационарного случая. Для конечного замкнутого пласта с внешним радиусом r_e имеем

$$\ln \frac{r_d}{r_w} = \frac{1}{2}(\ln t_D + 0{,}809), \quad \text{если} \quad t_D \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{r_e}{r_w}\right)^2; \tag{7.53}$$

$$r_d = 0{,}472 r_e, \quad \text{если} \quad t_D > \frac{1}{4}\left(\frac{r_e}{r_w}\right)^2, \tag{7.54}$$

где для фильтрации газа

$$t_D = \frac{kt}{\phi\mu c r_w^2}, \tag{7.55}$$

$$q_D = \frac{p_{STC} Z T Q_{STC} \mu}{2\pi T_{STC} p_{av} k \Delta z p_i}; \tag{7.56}$$

для фильтрации жидкости

$$q_D = \frac{B Q_{STC}}{2\pi k \Delta z p_i}. \tag{7.57}$$

Перевод указанных величин в промысловые детально рассмотрен в Руководстве ERCB (1975). Эквивалентный радиус блока, показанного на рис. 7.10, можно определить как

$$r_e = \sqrt{\Delta x \Delta y / \pi}. \tag{7.58}$$

В приведенном способе используется аналитическое решение для случая эксплуатации с постоянным дебитом изолированного цилиндрического пласта при одномерном характере течения. Приемлемое приближение получается для квадратных и прямоугольных блоков при $\Delta x \approx \Delta y$. Для блоков иной формы имеются другие решения, которые можно использовать для определения давления в скважине (см. ERCB, 1975). Можно также модифицировать уравнение (7.52), чтобы учесть скин-эффект и инерционно-турбулентные эффекты, не учитываемые законом Дарси,

$$\frac{p_{av} - p_{wf}}{p_i q_D} = \ln \frac{r_d}{r_w} + S + D Q_{STC}. \tag{7.59}$$

Здесь S — коэффициент, учитывающий скин-эффект, D — коэффициент инерционности и турбулентности течения, который существен только при фильтрации газа. Приведенные формулы показывают, что радиус зоны дренирования для достаточно большого времени становится постоянным. Это соответствует псевдостационарным условиям, когда давление во всех частях падает с постоянной скоростью, тогда уравнение (7.52) можно переписать в виде

$$p_{wf} = p_{av} - \frac{Q}{2\pi\lambda\Delta z}\left[\ln \frac{r_e}{r_w} - \frac{3}{4}\right]. \tag{7.60}$$

Поскольку блок предполагается изолированным, среднее давление можно получить, исходя из уравнения материального баланса

$$p_{av} = p_i - \frac{qt}{\pi r_e^2 \Delta z \phi c_{av}}.$$

В уравнении (7.60) давление в скважине выражено через среднее давление в блоке p_{av} при дебите Q в объемных единицах в пла-

стовых условиях. До конца данного раздела будем полагать, что связь между p_{av} и p_{ij} имеет указанный вид. Для типичных пластовых условий время достижения стационарного состояния колеблется от нескольких часов до нескольких суток, тогда как используемые при моделировании типичные временные шаги составляют от нескольких суток до нескольких месяцев. Предположение о псевдостационарности обычно выполняется, поскольку моделируемый дебит должен быть постоянным по крайней мере на протяжении одного временного шага. Исключение составляют случаи моделирования кратковременных процессов, что, например, бывает при импульсных испытаниях.

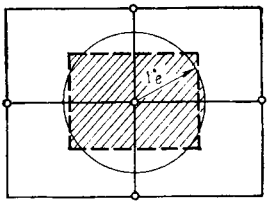


Рис. 7.10. К определению r_e в уравнениях (7.60), (7.63) и (7.64)

Имеются также другие, менее строгие методы, непосредственно основанные на стационарных решениях. Ван-Пуллен и другие (1968) получили уравнения как для псевдостационарного состояния в случае изолированного пласта, так и в предположении стационарности для течения несжимаемого флюида с притоком на внешней границе. Поскольку первый случай приводит к уравнению (7.60), выведенному выше, рассмотрим течение несжимаемого флюида.

Среднее давление между r_w и r_e

$$p_{av} = \frac{\int_{r_w}^{r_e} pr\,dr}{\int_{r_w}^{r_e} p\,dr} = \frac{2}{(r_e^2 - r_w^2)} \int_{r_w}^{r_e} pr\,dr, \tag{7.61}$$

а стационарное распределение давления

$$p = p_{wf} + \frac{Q}{2\pi\lambda\Delta z} \ln \frac{r}{r_w}. \tag{7.62}$$

Подставляя уравнение (7.62) в (7.61) и интегрируя, получим

$$p_{wf} = p_{av} - \frac{Q}{2\pi\lambda\Delta z\,(r_e^2 - r_w^2)} \left[r_e^2 \ln \frac{r_e}{r_w} - \frac{(r_e^2 - r_w^2)}{2} \right]. \tag{7.63}$$

Для $r_e \gg r_w$ формула упрощается:

$$p_{wf} = p_{av} - \frac{Q}{2\pi\lambda\Delta z} \left[\ln \frac{r_e}{r_w} - \frac{1}{2} \right]. \tag{7.64}$$

При стационарной фильтрации давление на границе задается в соответствии с уравнением (7.62):

$$p_e = p_{wf} + \frac{Q}{2\pi\lambda\Delta z} \ln \frac{r_e}{r_w}. \tag{7.65}$$

Кривые, построенные по данным решения уравнений (7.60), (7.63)

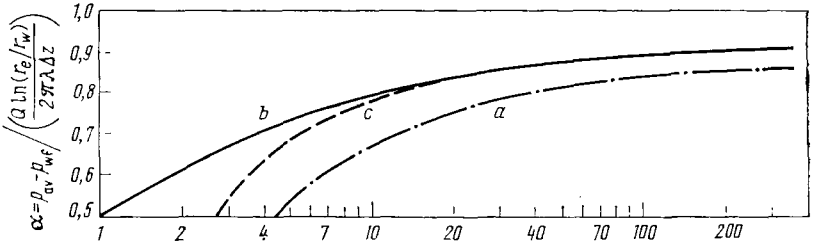


Рис. 7.11. Различные способы определения давления на скважине по среднему давлению: (*a*) уравнение (7.60); (*b*) уравнение (7.63); (*c*) уравнение (7.64)

и (7.64), показаны на рис. 7.11. Этот рисунок можно использовать для быстрой оценки p_{wf}. Сначала определяем величину

$$\frac{Q \ln (r_e/r_w)}{2\pi\lambda\Delta z},$$

которая для уравнений (7.63) и (7.64) равна $p_e - p_{wf}$, затем вычисляем p_{wf} по выражению

$$p_{wf} = p_{av} - \alpha\left(\frac{Q \ln (r_e/r_w)}{2\pi\lambda\Delta z}\right),$$

где α получаем из рис. 7.11. На данном рисунке показаны также погрешности при использовании приближенной формулы (7.64), которую нельзя применять, если $r_e/r_w < \sim 3$.

Формулы (7.60) и (7.64), хотя и получены при двух предельных предположениях, отличаются только константой, вычитаемой из логарифмического члена. В действительности в результате эксплуатации скважины падает давление и происходит приток флюида через границы блока. Поэтому действительное давление можно определить по общей формуле

$$p_{wf} = p_{av} - \frac{Q}{2\pi\lambda\Delta z}\left[\ln\frac{r_e}{r_w} - c\right], \qquad (7.66)$$

где $\frac{1}{2} \leqslant c \leqslant \frac{3}{4}$. Кумар (1977) показал, что интенсивность притока на границе влияет на значение c. Нестационарный характер течения можно также выразить с помощью $c = f(t)$.

До сих пор было представлено три соотношения между средним давлением p_{av} и давлением в скважине p_{wf}. Естественно спросить, равно ли p_{av} давлению в блоке p_{ij}. В большинстве моделей предполагается равенство этих значений. Однако Писман (1977а), используя численное и аналитическое решения, показал, что в условиях стационарной фильтрации $p_{av} \neq p_{ij}$. Для квадратной сетки соответствующее соотношение между p_{wf} и p_{ij}, основанное на работе Писмана, можно представить в виде уравнения (7.66) как

$$p_{wf} = p_{ij} - \frac{Q}{2\pi\lambda\Delta z}\left[\ln\frac{r_e}{r_w} - 1{,}037\right]. \qquad (7.67)$$

Для определения лучшего способа необходимы дальнейшие исследования, особенно, когда не оправдываются предположения о стационарности фильтрации у скважины.

Подобные идеи используются для учета водоносных пластов и будут рассмотрены в гл. 9.

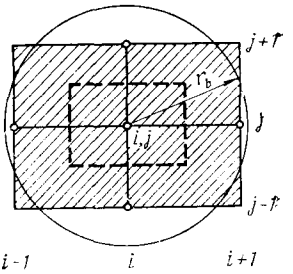


Рис. 7.12. К определению r_b в уравнении (7.71)

Другую формулу для p_{wf} можно вывести, исходя из конечно-разностных проводимостей для блока (i, j). Можно определить среднюю разность давлений между узлом (i, j) и соседними узлами как

$$Q=\bar{\Delta}p\Sigma\mathrm{T}=(\bar{p}-\overline{p_{ij}})\,\Sigma\mathrm{T}=$$
$$=[\mathrm{T}X_{i+1/2}(p_{i+1}-p_i)+\mathrm{T}X_{i-1/2}(p_{i-1}-p_i)]_j+$$
$$+[\mathrm{T}Y_{j-1/2}(p_{j-1}-p_j)+\mathrm{T}Y_{j+1/2}(p_{j+1}-p_j)]_i, \qquad (7.68)$$

где

$$\Sigma\mathrm{T}=\mathrm{T}X_{(i+1/2),j}+\mathrm{T}X_{(i-1/2),j}+\mathrm{T}Y_{i,j+1/2}+\mathrm{T}Y_{i,j-1/2}. \qquad (7.69)$$

Предположим, что $\bar{p}$ — давление на границе круга радиуса $r_в$, соответствующего площади, показанной на рис. 7.12. Заметим, что этот радиус, задаваемый выражением

$$r_b=\sqrt{(\Delta x_{i+1/2}+\Delta x_{i-1/2})\,(\Delta y_{j+1/2}+\Delta y_{j-1/2})/\pi}, \qquad (7.70)$$

отличается от радиуса, показанного на рис. 7.10. Воспользуемся формулой радиальной фильтрации, чтобы выразить

$$Q=(\bar{p}-p_{wf})\frac{2\pi\lambda\Delta z}{\ln\dfrac{r_b}{r_w}}=(\bar{p}-p_{wf})\,WI\lambda, \qquad (7.71)$$

где WI — коэффициент продуктивности скважины относительно r_b. Чтобы учесть частичное вскрытие пласта, способ обработки призабойной зоны скважины или скин-эффект, данный коэффициент можно модифицировать. Можно решить уравнения (7.71) и (7.68) и получить

$$p_{ij}-p_{wf}=Q\frac{1-\dfrac{WI}{\Sigma\mathrm{T}}\lambda}{WI}=Q/\mathrm{T}W. \qquad (7.72)$$

Это уравнение отличается от уравнения (7.63) или (7.64) тем, что оно учитывает не только проницаемость у скважины (через WI), но также и изменения проницаемости между узлами сетки вокруг скважины. Данное приближение справедливо, однако, лишь при $WI<\Sigma\mathrm{T}/\lambda$.

7.8. УРАВНЕНИЯ В МАТРИЧНОЙ ФОРМЕ

Дискретное уравнение для любой из двумерных неявных моделей, рассмотренных в предыдущих разделах данной главы, можно записать в виде

$$c_{ij}p^{n+1}_{i-1,j}+ax_{ij}p^{n+1}_{ij}+b_{ij}p^{n+1}_{i+1,j}+g_{ij}p^{n+1}_{i,j-1}+ay_{ij}p^{n+1}_{ij}+$$
$$+f_{ij}p^{n+1}_{i,j+1}+\varphi_{ij}p^{n+1}_{ij}=d_{ij}, \tag{7.73}$$

где коэффициенты c_{ij}, ax_{ij}, b_{ij}, g_{ij}, ay_{ij}, f_{ij}, φ_{ij} и d_{ij} зависят от типа модели и способа дискретизации. Например, для площадной (x, y) модели с аппроксимацией производной по времени обратной разностью (см. уравнение (7.12)) получают следующие соотношения:

$$c_{ij}=-TX_{(i-1/2),j}, \tag{7.74}$$
$$b_{ij}=-TX_{(i+1/2),j}, \tag{7.75}$$
$$g_{ij}=-TY_{i,j-1/2}, \tag{7.76}$$
$$f_{ij}=-TY_{i,j+1/2}, \tag{7.77}$$
$$ax_{ij}=TX_{(i-1/2),j}+TX_{(i+1/2),j}=-(c_{ij}+b_{ij}), \tag{7.78}$$
$$ay_{ij}=TY_{i,j-1/2}+TY_{i,j+1/2}=-(g_{ij}+f_{ij}), \tag{7.79}$$
$$\varphi_{ij}=\frac{V_{ij}\beta_{ij}}{\Delta t}, \tag{7.80}$$
$$d_{ij}=-Q_{ij}+\varphi_{ij}p^{n}_{ij}. \tag{7.81}$$

Удобно также ввести коэффициенты

$$a_{ij}=ax_{ij}+ay_{ij}+\varphi_{ij}. \tag{7.82}$$

Данные уравнения можно записать в матричной форме, выбрав некоторый порядок нумерации неизвестных. Естественное упорядочение состоит в нумерации неизвестных по линиям сетки в направлении x, начиная с линии для $j=1$. Тогда вектор неизвестных будет

$$(P^{n+1})^{T}=[p_{1,1}, p_{2,1}, p_{3,1}, p_{4,1}, p_{5,1}, p_{1,2}, \ldots, p_{5,6}]^{n+1}, \tag{7.83}$$

а матричное уравнение можно записать в виде

$$AP^{n+1}=d. \tag{7.84}$$

Вид матрицы коэффициентов показан на рис. 7.13. Уравнения для радиальной и профильной моделей при соответствующем определении коэффициентов имеют один и тот же вид.

В следующей главе рассмотрим прямые и итерационные методы решения уравнения (7.84). В следующем разделе данной главы представлены некоторые методы получения приближения к вектору решения P. Эти методы тесно связаны с видом дифференциального уравнения в частных производных и поэтому рассмотрены в настоящей главе.

7.9. СПЕЦИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ

Здесь обсуждаются методы двух типов. В методах первого типа, называемых *явными методами переменных направлений* (ADE), не используют матричные вычисления и задача сводится

к решению явных разностных уравнений. Однако, в отличие от классического явного метода, решения по ADE-методу безусловно устойчивы (для линейных задач.) По методам второго типа, называемых *неявными методами переменных направлений* (ADI), решают трехдиагональные матричные уравнения. Такие методы относятся к группе, включающей классические неявные методы и метод Кранка — Николсона.

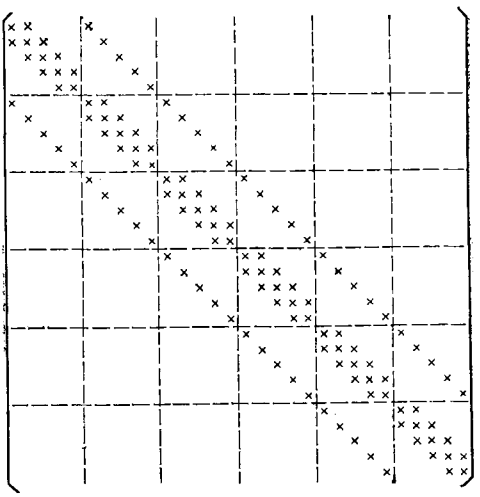


Рис. 7.13. Вид матрицы коэффициентов уравнения (7.84)

Получаемую по ADE и ADI-методам систему разностных уравнений решить гораздо проще, чем представленное в предыдущем разделе матричное уравнение. Это упрощение достигается за счет некоторых потерь в точности решения и устойчивости. Практическое применение данных методов ограничено задачами однофазной фильтрации и относительно простыми задачами многофазной фильтрации.

7.9.1. Явные методы переменных направлений (ADE-методы)

На начальной стадии развития цифровые вычислительные машины обладали очень ограниченной оперативной памятью, были сравнительно медленны. Это вызвало необходимость разработки устойчивых явных разностных аппроксимаций дифференциальных уравнений в частных производных, имеющих практическое значение. В книге Саульева (1960) дается исчерпывающее изложение разновидностей ADE-метода. Использование этих методов для решения двумерных задач рассматривается также Ларкином (1964) и Баракатом и Кларком (1966), применение их к моделированию газовых месторождений обсуждается Квон и другими (1966) и Картером (1966). ADE-метод имеет очевидные преимущества перед обычным явным методом.

Основой для разработки ADE-методов может служить неявная схема с обратной разностью или неявная схема Кранка — Николсона. Пусть u и v — два приближения к решению разностного уравнения (см. уравнение (7.12) с левой частью, взятой на неизвестном временном слое. Для простоты предположим, что координаты x и y расположены в горизонтальной плоскости, следовательно, гра-

витационные члены исчезают. Можно написать разностную аппроксимацию (7.12) в виде

$$\varphi_{ij}\Delta_t p_{ij}^{n+1} = TX_{(i-1/2),j}\,(p_{i-1,j} - p_{i,j})^{n+l_1} + TX_{(i+1/2),j}\,(p_{i+1,j} - p_{i,j})^{n+l_2} + \\ + TY_{i,j-1/2}\,(p_{i,j-1} - p_{i,j})^{n+l_3} + TY_{i,j+1/2}\,(p_{i,j+1} - p_{i,j})^{n+l_4}, \quad (7.85)$$

где для обычной аппроксимации обратной разностью

$$l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 1,$$

$$\Delta_t p_{ij}^{n+1} = p_{ij}^{n+1} - p_{ij}^{n}.$$

При стандартном упорядочении неизвестных уравнение (7.85) становится явным с одним неизвестным при $l_1 = l_3 = 1$ и $l_2 = l_4 = 0$. Легко заметить, что вместо того, чтобы начать вычисления с нижнего левого угла (см. рис. 7.4), можно начать их с любого другого угла при ином выборе значений l. Приближения разностных уравнений, полученные таким образом, можно записать следующим образом.

Аппроксимация 1 ($l_1 = l_3 = 1$, $l_2 = l_4 = 0$):

$$\varphi_{ij}\Delta_t v_{ij}^{n+1} = TX_{(i-1/2),j}\,(v_{i-1,j} - v_{ij})^{n+1} + TX_{(i+1/2),j}\,(v_{i+1,j} - v_{ij})^{n} + \\ + TY_{i,j-1/2}\,(v_{i,j-1} - v_{ij})^{n+1} - TY_{i,j+1/2}\,(v_{i,j+1} - v_{ij})^{n}. \quad (7.86)$$

Аппроксимация 2 ($l_1 = l_3 = 0$, $l_2 = l_4 = 1$):

$$\varphi_{ij}\Delta_t u_{ij}^{n+1} = TX_{(i-1/2),j}\,(u_{i-1,j} - u_{ij})^{n} + TX_{(i+1/2),j}\,(u_{i+1,j} - u_{ij})^{n+1} + \\ + TY_{i,j-1/2}\,(u_{i,j-1} - u_{ij})^{n} + TY_{i,j+1/2}\,(u_{i,j+1} - u_{ij})^{n+1}. \quad (7.87)$$

В каждой из данных аппроксимаций возникают погрешности, которые частично компенсируются при попеременном использовании уравнений (7.86) и (7.87) для разных временных шагов. Поскольку уравнения (7.86) и (7.87) следует применять при различном упорядочении неизвестных (при изменении направления обхода), этот метод известен как *явный метод переменных направлений*.

Использование обоих уравнений для каждого временного шага и последующее осреднение результатов рассматривалось также Ларкином (1964):

$$w_{ij}^{n+1} = \frac{u_{ij}^{n+1} + v_{ij}^{n+1}}{2},$$

где w_{ij}^{n+1} — новое приближение для p_{ij}^{n+1}, причем в данной схеме вместо v_{ij}^{n} и u_{ij}^{n} в уравнениях (7.86) и (7.87) надо использовать w_{ij}^{n}.

Две другие аппроксимации получают выбором следующих значений l в уравнении (7.85):

Аппроксимация 3

$$l_1 = l_4 = 0,$$

$$l_2 = l_3 = 1.$$

Аппроксимация 4

$$l_2=l_3=0,$$

$$l_1=l_4=1.$$

Ясно, что можно использовать различные комбинации приведенных четырех аппроксимаций. Можно также получить подобные схемы, исходя из уравнений метода Кранка — Николсона вместо уравнения (7.85). В современных исследованиях по моделированию пластов, когда в распоряжении исследователя имеются быстродействующие вычислительные машины с большой оперативной памятью, ADE-методы имеют ограниченное применение.

7.9.2. Неявный метод переменных направлений (ADT-метод) и связанные с ним методы

Решение двумерных задач моделирования пластов можно свести к решению одномерных задач. Поскольку ранее рассмотрен способ решения уравнения с трехдиагональной матрицей, для решения задач, рассматриваемых в данной главе, изложение новых матричных методов не потребуется. Методы указанного типа также известны в литературе как *методы расщепления* (Марчук, 1973), *методы дробных шагов* (Яненко, 1967) и *локально-одномерные методы* (Митчелл, 1969).

ADI-метод впервые был предложен Писманом и Рэчфордом (1955) и Дугласом (1955), а затем развивался этими и многими другими исследователями. Рассматриваемые здесь ADI-методы иногда называются «безытерационными» в отличие от тех ADI-методов, в которых для решения матричных уравнений используются итерации (см. гл. 8). В данном разделе покажем, как можно применить эти методы для решения двумерных задач однофазной фильтрации.

Метод Писмана — Рэчфорда (1955). Для площадной задачи рассмотрим следующую аппроксимацию обратной разностью:

$$\Delta_x T_X \Delta_x p_{ij}^{n+1} + \Delta_y T_Y \Delta_y p_{ij}^{n+1} = \varphi_{ij}\,(p_{ij}^{n+1} - p_{ij}^{n}) + Q_{ij}. \qquad (7.88)$$

Чтобы свести данную задачу к решению системы одномерных задач, на неизвестном временном слое нужно взять только один из членов левой части уравнения (7.88). Это приводит к двушаговому процессу. Первый шаг следующий:

$$\Delta_x T_X \Delta_x p_{ij}^{*} + \Delta_y T_Y \Delta_y p_{ij}^{n} = V_{ij}\beta_{ij}\,\frac{p_{ij}^{*} - p_{ij}^{n}}{\frac{1}{2}\,\Delta t} + Q_{ij}, \qquad (7.89)$$

где p^*_{ij} — промежуточное решение, которое можно рассматривать как аппроксимацию $p_{ij}^{n+1/2}$.

Уравнение (7.89) можно решить для всех сеточных узлов, рассматривая в каждый момент времени неизвестные только для одного значения j (или одной линии сетки в направлении

оси x) и применяя алгоритм Томаса (см. гл. 4). Как показано Дугласом (1961), использование лишь уравнения (7.89) приводит к методу с ограниченной устойчивостью. Для получения безусловно устойчивого метода вводится второй шаг, содержащий неявную аппроксимацию второго члена левой части уравнения (7.88):

$$\Delta_x T_X \Delta_x p^*_{ij} + \Delta_y T_Y \Delta_y p^{n+1}_{ij} = V_{ij}\beta_{ij}\frac{p^{n+1}_{ij} - p^*_{ij}}{\frac{1}{2}\Delta t} + Q_{ij}. \qquad (7.90)$$

Уравнение (7.90) можно решить для всех сеточных узлов, рассматривая в каждый момент времени неизвестные только для одного значения i (или одной линии сетки в направлении оси y). Неизвестные вдоль каждой сеточной линии входят в матричное уравнение с трехдиагональной матрицей коэффициентов.

Данная двухшаговая процедура решения, в которой уравнения (7.89) и (7.90) используются попеременно, безусловно устойчива. Для исследования точности из этих двух уравнений надо исключить результат промежуточного решения. Для линейного уравнения диффузии в прямоугольнике итоговое уравнение локально имеет второй порядок точности и по времени, и по пространству и может рассматриваться как видоизмененное уравнение метода Кранка — Николсона (Дуглас, 1961). Для данного ADI-метода подобный анализ показывает, что нелинейные коэффициенты и источники должны оцениваться на временном слое $n+1/2$.

Бриггс и Диксон (1968) рассмотрели применение данного метода при моделировании пластов. Они обнаружили, что при больших временных шагах возникают осцилляции. Это характерно и для метода Кранка — Николсона (CN), поскольку ADI-метод — разновидность CN-метода.

Метод Дугласа (1962). Так как уравнение метода Писмана и Рэчфорда (1955) — разновидность аппроксимации Кранка — Николсона, по-видимому, можно исходить непосредственно из аппроксимации Кранка — Николсона, а не из аппроксимации обратной разностью.

Промежуточное решение можно получить по формуле

$$\frac{1}{2}\Delta_x T_X \Delta_x (p^*_{ij} + p^*_{ij}) + \Delta_y T_Y \Delta_y p^n_{ij} = \varphi_{ij}(p^*_{ij} - p^*_{ij}) + Q_{ij}, \quad (7.91)$$

а окончательное решение на новом временном слое — по формуле

$$\frac{1}{2}\Delta_x T_X \Delta_x (p^*_{ij} + p^n_{ij}) + \frac{1}{2}\Delta_y T_Y \Delta_y (p^{n+1}_{ij} + p^n_{ij}) = \varphi_{ij}(p^{n+1}_{ij} - p^n_{ij}) + Q_{ij}. \qquad (7.92)$$

Метод Дугласа — разновидность метода Кранка — Николсона и для прямоугольной области эквивалентен методу Писмана — Рэчфорда. С вычислительной точки зрения удобнее заменить уравне-

ние (7.92) уравнением, которое получают вычитанием одного уравнения из другого:

$$\frac{1}{2}\Delta_y T Y \Delta_y p_{ij}^{n+1} - \frac{1}{2}\Delta_y T Y \Delta_y p_{ij}^{n} = \varphi_{ij}\,(p_{ij}^{n+1} - p_{ij}^{*}). \qquad (7.93)$$

Для двумерных задач данный метод не имеет реальных преимуществ перед методом Писмана — Рэчфорда. При рассмотрении трехмерных задач будут показаны преимущества метода Дугласа.

Метод Дугласа и Рэчфорда (1956). Оба рассмотренных выше метода — разновидности метода Кранка — Николсона. Вариант аппроксимации с обратной разностью получается по следующей схеме:

$$\Delta_x T X \Delta_x p_{ij}^{*} + \Delta_y T Y \Delta_y p_{ij}^{n} = \varphi_{ij}\,(p_{ij}^{*} - p_{ij}^{n}) + Q_{ij}, \qquad (7.94)$$

$$\Delta_y T Y \Delta_y p_{ij}^{n+1} - \Delta_y T Y \Delta_y p_{ij}^{n} = \varphi_{ij}\,(p_{ij}^{n+1} - p_{ij}^{*}). \qquad (7.95)$$

Для данного метода зависящие от времени нелинейные коэффициенты и источники, если они есть, должны оцениваться на временном слое $n+1$.

Методы расщепления и локально-одномерные методы (LOD-методы). Определим

$$F^{n}{}_{ij} = (\Delta T \Delta p^{n}{}_{ij} - Q_{ij}) / (V_{ij}\beta_{ij}). \qquad (7.96)$$

Тогда решение площадной задачи, рассматриваемой в данном разделе, можно получить по следующей схеме:

$$\Delta_x T X \Delta_x \xi^{n+1/2} = 2\varphi_{ij}\,(F_{ij}^{n} - \xi^{n+1/2}), \qquad (7.97)$$

$$\Delta_y T Y \Delta_y \xi^{n+1} = 2\varphi_{ij}\,(\xi^{n+1} - \xi^{n+1/2}), \qquad (7.98)$$

$$p_{ij}^{n+1} = p_{ij}^{n} + \Delta t \xi^{n+1}. \qquad (7.99)$$

Эта схема также разновидность схемы по методу Кранка — Николсона (Марчук, 1973). Другие модификации указанного метода рассматриваются Марчуком (1973) и Митчеллом (1969). Ясно, что уравнение (7.97) должно применяться на сеточных линиях, параллельных оси x, а (7.98) — параллельных оси y. В этом сходство данного метода с ADI-методом.

Методы типа предиктор — корректор. Сначала получим решение на временном слое $(n+1/2)$, используя следующую двухшаговую процедуру:

$$\Delta_x T X \Delta_x p_{ij}^{*} = 2\varphi_{ij}\,(p_{ij}^{*} - p_{ij}^{n}) + Q_{ij}^{n+1/2}, \qquad (7.100)$$

$$\Delta_y T Y \Delta_y p_{ij}^{n+1/2} = 2\varphi_{ij}\,(p_{ij}^{n+1/2} - p_{ij}^{*}). \qquad (7.101)$$

Для временного слоя $(n+1)$

$$p_{ij}^{n+1} = p_{ij}^{n} + \frac{1}{2\varphi_{ij}}\,[\Delta T \Delta p_{ij}^{n+1/2} - Q_{ij}^{n+1/2}]. \qquad (7.102)$$

Этот метод подробно рассматривается Марчуком (1973). Это также разновидность метода Кранка — Николсона.

7.9.3. Сравнение методов

Коутс и Терхьюн (1966) сравнивают ADE- и ADI-методы для канонического диффузионного уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + q = \frac{\partial U}{\partial t}.$$

в прямоугольной области. Авторы показывают, что с помощью ADE-метода при блочно-центрированной сетке не удается на внешних границах выполнить условия отсутствия течения флюида через них, что приводит к погрешностям в материальном балансе. Коутс и Терхьюн также установили, что ADI-метод значительно точнее ADE-метода, а вычислений для первого требуется лишь на 60% больше.

Не так давно оценку того же уравнения осуществил Шеффилд (1970). Он рассматривает метод Саульева „по линиям", эквивалентный двум шагам при использовании уравнения (7.85) с $\Delta t/2$. На первом шаге p_{ij}^{n+1} в левой части уравнения заменяется на $p_{ij}^{n+1/2}$ при следующих значениях параметров: $l_1 = l_2 = l_3 = \frac{1}{2}$, $l_4 = 0$. На втором шаге вычисляется p_{ij}^{n+1} при $l_1 = l_2 = l_4 = 1$, $l_3 = 0$. Таким образом, на обоих шагах решение осуществляется по линиям в направлении x, но с изменением порядка для j. Шеффилд сравнил данный метод с методом Саульева (попеременное использование уравнений (7.86) и (7.87) и с ADI-методом. ADI-метод оказался точнее в сравнении с методом Саульева «по линиям» для задачи с квадратной сеткой, но метод Саульева «по линиям» был значительно точнее для задачи с вытянутой сеткой. «Поточечный» метод Саульева был наименее точен в обоих случаях. Это характерно для ADI-методов. Данный метод не годится для задач с анизотропией коэффициентов (вызванной либо вытянутой сеткой, либо большим различием k_x и k_y). Подобные недостатки присущи и итерационным ADI-методам, плохо сходящимся для таких задач (см. гл. 8, рис. 8.19).

В новых публикациях интерес к ADE- и ADI-методам не проявлялся.

7.10. СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ СЕТОК

В этом разделе рассмотрим различные способы построения двумерных сеток. Ограничимся прямоугольными сетками (или топологически эквивалентными сетками), соответствующими пятиточечной разностной аппроксимации. К настоящему времени другие виды сеток (треугольные, шестиугольные и т. д.) при моделировании пластов применяют редко.

7.10.1. Неравномерные двумерные сетки

Применение неравномерных сеток объясняется желанием достичь хороших результатов, используя малые шаги по пространству в местах, где ожидаются большие градиенты давления, и большие в остальных. Обычно строят неравномерные сетки в каждом направлении и налагают их друг на друга. В результате получают сетку с шагами Δx_i, Δy_j, которую и рассматривают в данной главе. На рис. 7.14 показан пример площадной сетки, измельченной у скважин. Другим характерным примером служит сетка с координатами r—z и переменными шагами в радиальном направлении. Такой вид неравномерной сетки является обычным при моделировании пластов. Описать данную сетку просто, а затраты на программирование примерно такие же, как и для равномерной сетки.

Легко, однако, заметить, что такая стандартная сетка не оптимальна, поскольку число узлов, необходимых для покрытия области, может быть очень большим. К примеру, сетка на рис. 7.14 измельчается также в круге A, где было бы достаточно и грубой сетки. Для получения более «оптимальной» сетки надо использовать составные (или локально измельченные) сетки, как, например, показано на рис. 7.15. Такие способы измельчения сетки изучались Сайментом (1971) и Сайментом и Свитом (1973). К сожалению, получающиеся разностные аппроксимации значительно сложнее, а их вид неодинаков для разных сеточных узлов. По этой причине локальное измельчение сетки при моделировании месторождений широко не использовалось.

В этой связи отметим, что другие системы сеток, такие, как треугольные, более пригодны для локального измельчения, чем прямоугольная сетка. Дополнительную информацию об измельчении сеток можно найти у Кафки (1968), Ошера (1970), Браунинга и других (1973) и Жиро (1974).

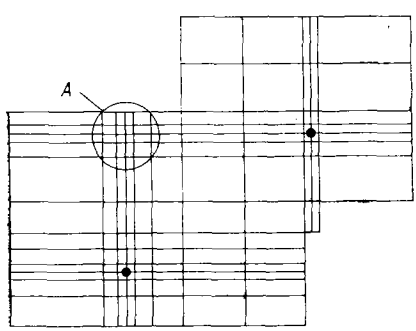


Рис. 7.14. Типичная неравномерная сетка для площадной модели

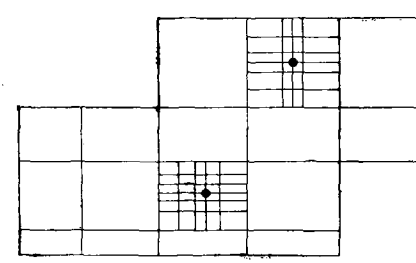


Рис. 7.15. Локальное измельчение сетки

В заключение заметим, что если не применять специальные методы, использование неравномерных сеток уменьшает точность аппроксимации до $O(\Delta x)+O(\Delta y)$.

7.10.2. Использование криволинейной сетки

Хотя большинство пластовых задач можно промоделировать на прямоугольных сетках, имеется много примеров, в которых форму пласта более естественно представить в криволинейной системе координат. К примеру, профиль пласта со значительным углом падения лучше описать с помощью сетки, представленной на рис. 7.16,*б*, а не обычной сетки, показанной на рис. 7.16,*а*.

Аналогично плоское течение в пятиточечной системе скважин лучше описать с помощью сетки (рис. 7.17,*б*) определяемой линиями тока, а не прямоугольной сетки (рис. 7.17,*а*).

В классической гидродинамике обычно используют систему криволинейных координат. Для моделирования пластов применение криволинейных сеток при решении задач многофазной фильтрации изучалось несколькими авторами (Хирасаки и О'Делл 1970, Сонье и Шомэ, 1974, Робертсон и Ву, 1976). Рассмотрим это на примере более понятного случая однофазной фильтрации. Особые комментарии, относящиеся к многофазной фильтрации, будут сделаны в гл. 9 (см. раздел 9.7).

Рассмотрим кратко преобразование уравнений при переходе к криволинейным координатам. Подробности можно найти в книгах по тензорному анализу, например Макконелла (1957), Ариса (1962), Сокольникова (1951).

Рассмотрим две координатные системы: прямоугольную систему (x, y), координаты которой обозначим через y^1, y^2, и некоторую систему координат (x^1, x^2). Две системы связаны уравнениями

$$x^i=f^i(y^1, y^2),\ i=1, 2. \qquad (7.103)$$

Функции f^i определяют данное преобразование координатой системы. От них же зависит вид дифференциального уравнения в коор-

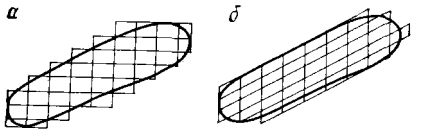


Рис. 7.16. Сетка для продольной модели наклонного пласта

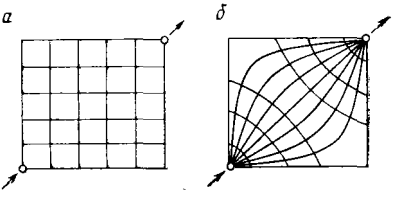


Рис. 7.17. Сетка для моделирования пятиточечной системы заводнения

динатах x^i. Новая координатная система будет хорошо определенной, если определитель преобразования не равен нулю, т. е.

$$\left|\frac{\partial x^r}{\partial y^s}\right| \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \frac{\partial x^2}{\partial y^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial y^2} & \frac{\partial x^2}{\partial y^2} \end{vmatrix} \neq 0$$

Оператор A для потоковых членов можно записать, используя соглашение о суммировании

$$A = \frac{\partial}{\partial y^i}\left[\lambda \frac{\partial}{\partial y^i}\right] \equiv \frac{\partial}{\partial y^1}\left[\lambda \frac{\partial}{\partial y^1}\right] + \frac{\partial}{\partial y^2}\left[\lambda \frac{\partial}{\partial y^2}\right].$$

В координатах x^i это можно представить как

$$A = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\sqrt{g} g^{ij} \lambda \frac{\partial}{\partial x^j}\right] \equiv \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{g} g^{11} \lambda \frac{\partial}{\partial x^1}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\sqrt{g} g^{22} \lambda \frac{\partial}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{g} g^{12} \lambda \frac{\partial}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\sqrt{g} g^{21} \frac{\partial}{\partial x^1}\right)\right], \quad (7.104)$$

где g — определитель метрического тензора g_{ij}:

$$g_{ij} = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^k}{\partial x^j}, \quad g = |g_{ij}|, \quad (7.105)$$

а g^{ij} — компонетны ассоциированного метрического тензора $g^{ij} = \frac{G^{ij}}{g}$, где G^{ij} — алгебраические дополнения g_{ij} в матрице $\{g_{ij}\}$. Более удобно их можно также выразить в виде (Макконелл, 1957)

$$g^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial x^j}{\partial y^k} = \frac{\partial f^i}{\partial y^k} \frac{\partial f^j}{\partial y^k}, \quad (7.106)$$

не требующем функций, обратных к f^i.

Оператор A в форме (7.104) содержит члены со смешанными производными. Однако для важного класса координатных систем, называемых *ортогональными,* они исчезнут.

Система x^i называется ортогональной, если координатные линии везде взаимно ортогональны (рис. 7.18).

Любая ортогональная система обладает следующими важными свойствами.

1. Для того, чтобы система x^i была ортогональной, необходимо и достаточно соблюдение условия:

$$g_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j. \quad (7.107)$$

2. Если система ортогональна, то

$$g_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j, \quad (7.108)$$

$$g = g_{11} g_{22} g_{33}, \quad g^{ii} = \frac{1}{g_{ii}}. \quad (7.109)$$

Поэтому для ортогональной системы оператор A будет иметь вид

$$A \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\sqrt{g} g^{ii} \lambda \frac{\partial}{\partial x^i}\right] \equiv \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{g} g^{11} \lambda \frac{\partial}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\sqrt{g} g^{22} \lambda \frac{\partial}{\partial x^2}\right)\right]. \tag{7.110}$$

Заметим, что в предшествующих выкладках предполагалось, что λ — скалярная функция x. Анализ становится более сложным, когда учитывается тензорный характер k (в λ).

Примером ортогональной системы может служить полярная (или в трехмерном случае — цилиндрическая) система координат, в которой $x^1=r$, $x^2=\theta$. Преобразование рассматривается в упражнении 7.1; в результате получают члены, относящиеся к направлению r, которые были ранее приведены в уравнении (7.4).

Хирасаки и О'Делл (1970) осуществили аккуратную дискретизацию уравнений сохранения в форме (7.104) и (7.110). Для ортогональной системы проводимости можно определить, исходя из интуитивных геометрических представлений (рис. 7.19).

Так как $T=\lambda A/\Delta L$, где A — площадь поперечного сечения, а ΔL — расстояние между узлами сетки, можно записать

$$\begin{aligned} TX^1_{(i+1/2),j} &= \lambda X^1_{(i+1/2),j} \frac{\Delta x^2_{(i+1/2),j} \Delta z_{(i+1/2),j}}{\Delta x^1_{(i+1/2),j}}, \\ TX^2_{i,j+1/2} &= \lambda X^2_{i,j+1/2} \frac{\Delta x^1_{ij+1/2} \Delta z_{i,j+1/2}}{\Delta x^2_{i,j+1/2}}. \end{aligned} \tag{7.111}$$

По аналогии поровый объем

$$V_{pij} = \Delta z_{ij} \Delta x^1{}_{ij} \Delta x^2{}_{ij}. \tag{7.112}$$

Такой подход был использован Сонье и Шомэ (1974), которые в дополнение к этому пренебрегли различием между $A_{(i+1/2)j}$, $A_{i,j+1/2}$ и A_{ij}. Конечно-разностное моделирование задач теплопроводности в общих криволинейных системах координат рассматривалось также Шнейдером и другими (1975).

Как мы видели выше, уравнения (7.111) и (7.112) применимы только для сетки, полученной с помощью ортогональной системы координат. Удобный способ построения такой сетки состоит в использовании решения задачи о потенциальном течении с источниками и стоками в местах расположения скважин. Как хорошо известно, линии равного потенциала и линии тока взаимно ортогональны (Ламб, 1932). Есть публикации, в которых приведены решения, определяющие распределение потенциала при различном расположении скважин (Маскет, 1937; Морель-Сето, 1966).

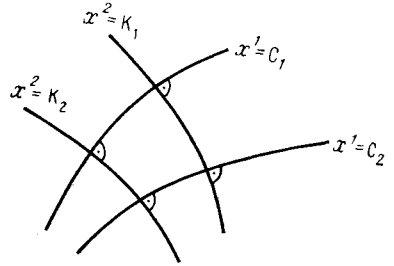


Рис. 7.18. Ортогональная система координат

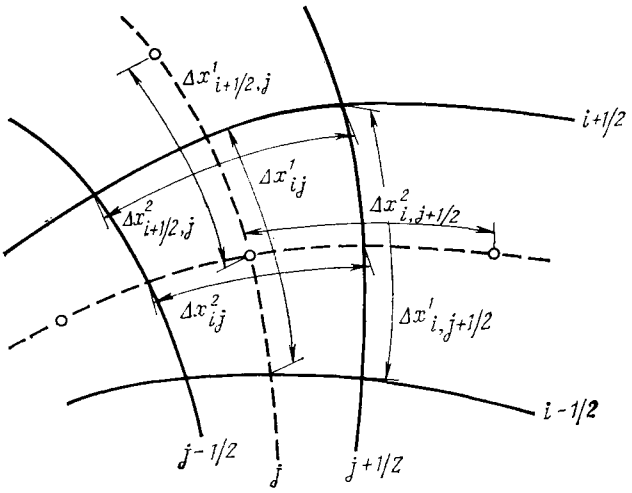


Рис. 7.19. Сетка в криволинейной системе координат

Действительное направление течения в пласте не совпадает с потенциальными линиями тока, так как потенциальное решение основано на предположениях о постоянстве проницаемости, пористости и несжимаемости флюида. Это, однако, не имеет значения, поскольку предположение о потенциальности течения используется только для построения сетки и не мешает учитывать в численной модели течения в направлении, перпендикулярном линиям сетки, являющимся линиями тока потенциального течения. Это отличает данный метод от так называемого «метода трубок тока», в котором пренебрегают перетоками между линиями тока.

Только что описанный способ построения сетки был предложен Сонье и Шомэ (1974) применительно к площадному моделированию многофазной фильтрации, но его также успешно можно использовать и для произвольной конфигурации пласта.

Более подробный анализ криволинейных сеток можно найти у Хирасаки и О'Делла (1970). Эти авторы показывают, что можно получить значительные погрешности при моделировании наклонного пласта, когда он аппроксимируется системой блоков таким образом, как это показано для одного конкретного вертикального сечения на рис. 7.20,*а*.

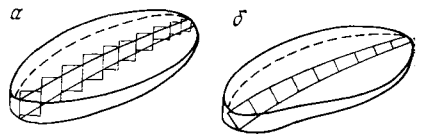


Рис. 7.20. Виды сетки в профильной модели

Последнее происходит из-за того, что площадь поперечного сечения при вычислении проводимости определяется неверно. Сетку надо строить так, чтобы координатная поверхность совпада-

ла с кровлей и подошвой пласта. Авторы отмечают, что данный подход приводит к малым погрешностям, даже когда для неортогональной сетки пренебрегают членами со смешанными производными при условии, что все расстояния измеряются по поверхности и перпендикулярно ей. Приближенно ортогональную сетку можно построить численно, графически или с помощью аналоговой вычислительной машины (Карплюс, 1958).

Одной из проблем, связанных с применением криволинейных сеток, является правильное определение проницаемости вдоль нужного направления. Когда проницаемость не изотропна, даже для ортогональной сетки потребуются члены со смешанными производными. В упражнении 7.2 рассматривается вывод членов — проводимостей для случая, когда главные значения тензора проницаемости суть проницаемости k_x и k_y вдоль осей декартовых координат. Значение члена со смешанной производной пропорционально $|k_x - k_y|$, однако влияние его, по-видимому, не изучалось. Как следствие этого, использование криволинейных сеток не рекомендуется для профильных задач и задач с одиночной скважиной, в которых часто отмечается слоистость пласта. Линии сетки в таких случаях должны соответствовать геологическим слоям. В таких задачах, поскольку реальный характер течения флюида не соответствует потенциальному, выигрыш от использования криволинейных сеток будет невелик, вносимые же погрешности, если в разностное уравнение не включать члены со смешанными производными, будут большими. С другой стороны, криволинейная сетка может быть достаточно эффективной для площадных задач и дает дополнительный выигрыш в случае многофазной фильтрации (см. гл. 9, раздел 9.7).

7.11. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Материал, содержащийся в данной главе, важен для понимания следующих глав. Хотя собственно однофазная фильтрация моделируется редко, некоторые методы решения задач многофазной фильтрации приводят к уравнениям типа однофазных (IMPES-, SEQ-методы). Одно уравнение для давления решается также в задачах смешивающегося вытеснение и композиционных задачах.

Так как уравнения однофазной фильтрации характерны не только для подземной гидромеханики, следовательно, существует обширная литература по их численному решению в других областях.

Упражнения

Упражнение 7.1

Представить левую часть уравнения

$$\nabla [\lambda (\nabla p - \lambda \nabla z)] = \beta \frac{\partial p}{\partial t} + q \qquad \text{(A)}$$

в полярных координатах (r, θ).

Схема решения

Используем уравнение (7.110) при $x^1=r$, $x^2=\theta$.

Так как

$$y^1=x=x^1\cos x^2,$$

$$y^2=y=x^1\sin x^2,$$

то метрический тензор будет

$$\{g_{ij}\}=\begin{bmatrix}\cos^2\theta+\sin^2\theta & 0\\ 0 & r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\end{bmatrix},\quad g=r^2,$$

$$g^{11}=G^{11}/g=1,\quad g^{22}=G^{22}/g=1/r^2,\quad g^{12}=g^{21}=0.$$

Поэтому после подстановки уравнения (7.104) в (А) получим

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\lambda r\left(\frac{\partial p}{\partial r}-\gamma\frac{\partial z}{\partial r}\right)\right]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\lambda\left(\frac{\partial p}{\partial\theta}-\gamma\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)\right]=\beta\frac{\partial p}{\partial t}+q. \quad (B)$$

Упражнение 7.2

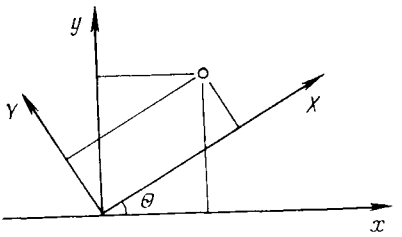
Раскрыть выражение

$$\nabla(\lambda\nabla\Phi)$$

для декартовой системы координат, повернутой на угол θ по отношению к главным осям тензора λ.

Схема решения

Рассмотрим две системы с координатами: x, y и X, Y и предположим, что главные оси λ направлены по X и Y:



$$\nabla(\lambda\nabla\Phi)=\frac{\partial}{\partial X}\left(\lambda_X\frac{\partial\Phi}{\partial X}\right)+\frac{\partial}{\partial Y}\left(\lambda_Y\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\right). \quad (A)$$

Так как

$$x=X\cos\theta-Y\sin\theta,$$

$$y=X\sin\theta-Y\cos\theta,$$

$$\frac{\partial}{\partial X}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial X}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial Y}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y}=-\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial y},$$

после подстановки получим

$$\nabla(\lambda\nabla\Phi)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_{xx}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_{xy}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_{yx}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_{yy}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right), \quad \text{(B)}$$

где

$$\begin{aligned}\lambda_{xx}&=\lambda_X\cos^2\theta+\lambda_Y\sin^2\theta,\\ \lambda_{yy}&=\lambda_X\sin^2\theta+\lambda_Y\cos^2\theta,\\ \lambda_{xy}&=\lambda_{yx}=(\lambda_X-\lambda_Y)\sin\theta\cos\theta.\end{aligned} \quad \text{(C)}$$

ГЛАВА 8

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ПЯТИДИАГОНАЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ

8.1. ВВЕДЕНИЕ

Многие из рассмотренных в предыдущей главе уравнений однофазной фильтрации можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda X \frac{\partial U}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda Y \frac{\partial U}{\partial y}\right]=q+P\frac{\partial U}{\partial t}, \tag{8.1}$$

где λX, λY, q и P — произвольные функции x и y для линейных задач. Для нелинейных задач все эти коэффициенты или некоторые из них могут зависеть также от U. Для большинства задач моделирования пластов задаются граничные условия типа Неймана, т. е.

$$\frac{\partial U}{\partial n}=0, \tag{8.2}$$

где n — нормаль к граничной поверхности. Как рассматривалось в предыдущей главе, дискретизация данной краевой задачи приводит к системе конечно-разностных уравнений вида

$$g_{ij}u^n_{i,j-1}+c_{ij}u^n_{i-1,j}+a_{ij}u^n_{ij}+b_{ij}u^n_{i+1,j}+f_{ij}u^n_{i,j+1}=d_{ij}. \tag{8.3}$$

Матричная форма разностных уравнений зависит от сетки и схемы, используемой для упорядочения уравнений. Для однородной сет-

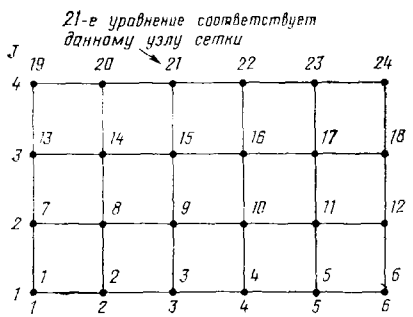


Рис. 8.1a. Стандартное упорядочение по строкам (или по индексу i)



Рис. 8.1b. Стандартное упорядочение по столбцам (или по индексу j)

ки, показанной на рис. 8.1,*а* и *в*, коэффициенты определятся следующим образом:

$$g_{ij} = -\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)\lambda Y_{i,j-1/2},$$

$$c_{ij} = -\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\lambda X_{(i-1/2),j},$$

$$a_{ij} = -(g_{ij} + f_{ij} + c_{ij} + b_{ij}) + \varphi_{ij},$$

$$b_{ij} = -\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\lambda X_{(i+1/2),j}$$

$$f_{ij} = -\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)\lambda Y_{i,j+1/2},$$

$$d_{ij} = -\Delta x \Delta y q_{ij} + \varphi_{ij} u_{ij}^{n-1},$$

$$\varphi_{ij} = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} P_{ij}.$$

При расчетах также используют выражения

$$ax_{ij} = -(c_{ij} + b_{ij}),$$

$$ay_{ij} = -(g_{ij} + f_{ij}).$$

Отметим, что при $\Delta x = \Delta y = h$ и $P = \lambda X = \lambda Y = 1$ коэффициенты принимают следующие значения:

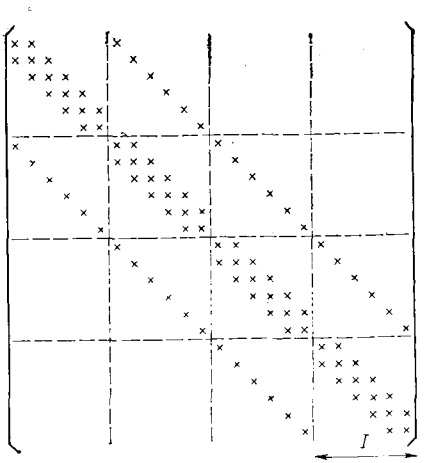


Рис. 8.2а. Вид матрицы А для стандартного упорядочения неизвестных по строкам, показанного на рис. 8.1,*а*. Элементы, не равные нулю, отмечены знаками ×. К примеру, для девятой строки ($i=3$, $j=2$) эти элементы следующие: $g_{3,2}$; $c_{3,2}$; $a_{3,2}$; $b_{3,2}$; $f_{3,2}$

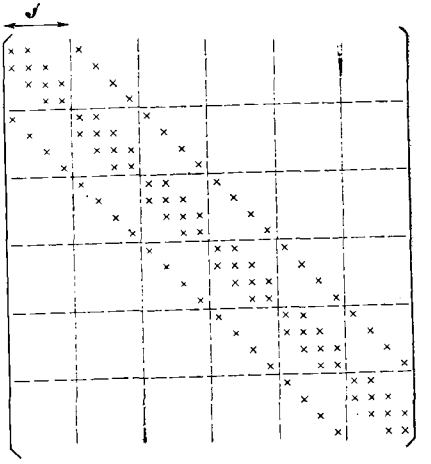


Рис. 8.2,*b*. Вид матрицы А, показанной на рис. 8.1,*b* для стандартного упорядочения неизвестных по столбцам. Элементы, не равные нулю, отмечены знаком ×. К примеру, для десятой строки ($i=3$, $j=2$) эти элементы следующие: $c_{3,2}$; $g_{3,2}$; $a_{3,2}$; $f_{3,2}$; $b_{3,2}$

$$g_{ij}=c_{ij}=b_{ij}=f_{ij}=-1,$$

$$a_{ij}=4+\frac{h^2}{\Delta t},\quad \varphi_{ij}=\frac{h^2}{\Delta t}.$$

Интерпретация коэффициентов уравнения (8 3) для неравномерной сетки подробно рассматривалась в предыдущей главе.

Стандартное (Прайс и Коутс, 1974) или естественное упорядочение неизвестных достигается упорядочением по линиям (строкам или столбцам). Это показано на рис. 8.1,*а* и 8.1,*b* (номера от 1 до 24 на узлах сетки), а вид получающихся матриц представлен на рис. 8.2,*а* и 8.2,*b* соответственно. Вид данных матриц показывает, что упорядочение по столбцам (более короткому направлению) приводит к матрице с меньшей шириной ленты. Матрицу на рис. 8.2,*а* можно представить в блочно-трехдиагональном виде с каждым блоком размером 6×6 (или $I\times I$) и числом блочных строк 4 (или J). Аналогично на рис. 8.2,*b* видим, что размер подматриц составляет 4×4 (или $J\times J$), а число блочных строк равно шести (или I).

Заметим, что все элементы в данной строке имеют один и тот же нижний индекс. Это удобное обозначение введено Стоуном (1968) и Дюпоном и другими (1968) и использовалось многими исследователями, включая Сеттари и Азиза (1973).

Решаемое матричное уравнение можно записать в виде

$$Au=d, \tag{8.4}$$

где A — ленточная матрица, показанная на рис. 8.2. Для схемы упорядочения неизвестных, показанной на рис. 8.1,*b*, блочно-трехдиагональная форма будет следующей:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 & & & & \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 & & & \\ & \mathbf{C}_3 & \mathbf{A}_3 & \mathbf{B}_3 & & \\ & & \mathbf{C}_4 & \mathbf{A}_4 & \mathbf{B}_4 & \\ & & & \mathbf{C}_5 & \mathbf{A}_5 & \mathbf{B}_5 \\ & & & & \mathbf{C}_6 & \mathbf{A}_6 \end{bmatrix} \tag{8.5}$$

где A_i — трехдиагональные матрицы размерами 4×4, а C_i и B_i — диагональные матрицы размерами 4×4.

В этом случае можно применить матричный вариант алгоритма Томаса, рассмотренного в гл. 4, однако его использование сравнительно неэффективно для данной задачи и по существу эквивалентно ленточному исключению.

Матрица A на рис. 8.2 получена для сетки, когда исходная область является прямоугольником, т. е. при числе узлов в каждой строке сетки, равном I, а в каждом столбце — J. Для сетки, пока-

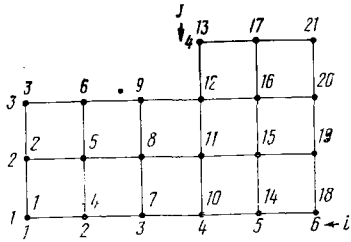


Рис. 8.3. Сетка, состоящая более чем из одного прямоугольника

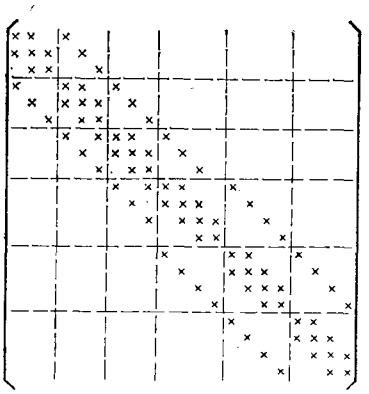


Рис. 8.4. Вид матрицы A для упорядочения неизвестных

занной на рис. 8.3, вид получающейся матрицы дан на рис. 8.4. В данном случае ширина ленты матрицы переменная.

Можно получить эффективные методы решения, если матрицы на главной диагонали и матрицы на нижней диагонали равны, например метод нечетно-четной редукции и разложения, разработанный Бузби и другими (1970). Однако методы данного типа не применяют при решении сложных задач моделирования пластов.

В настоящей главе рассмотрим общие методы решения уравнения (8.4) для матрицы A различного вида.

8.2. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

8.2.1. LU-разложение матрицы

Матрицы, получаемые при моделировании пластов, можно представить в виде произведения нижней и верхней треугольных матриц (как для трехдиагональной матрицы, см. гл. 4). Такую форму матриц часто называют LU-разложением — см. уравнение (4.7). Главный недостаток данного подхода заключается в том, что элементы в ленте, равные нулю, учитываются так же, как и элементы, не равные нулю, а матрица L+U, вообще говоря, полнее матрицы A, хотя ширина ее ленты не больше ширины ленты исходной матрицы. Точнее, элементы, не равные нулю, в матрице L+U заключены в оболочку * матрицы A. Размеры оболочки определяют позиции вправо от первого ненулевого элемента в каждой строке и вниз от первого ненулевого элемента в каждом столбце (Джордж и Лю, 1975).

Алгоритм LU-разложения можно получить таким же самым образом, каким выводили алгоритм Томаса (см. гл. 4), т. е. умножая L на U и приравнивая элементы произведения к элементам A.

* В оригинале: envelope (Прим. перев.).

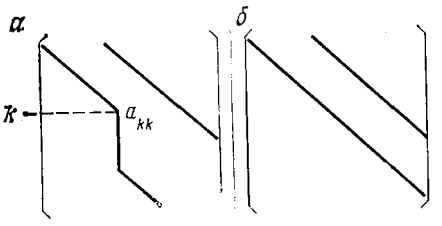


Рис. 8.5. Матрицы:
$а$ — $A^{(k-1)}$ после k—1 шагов; $б$ — $A^{(N-1)}$ после N—1 шагов

Это громоздкий способ. Вместо него можно формально выполнить на оболочке матрицы A классическое исключение Гаусса (Фаддеев и Фаддеева, 1963). Поскольку данный процесс (часто называемый «ленточным исключением») играет фундаментальную роль, рассмотрим его подробно.

Рассмотрим матрицу A размером $N \times N$ с шириной ленты $B = 2M+1$. В стандартных матричных обозначениях $A=\{a_{ij}\}$, т. е.

$$a_{ij}=0 \text{ при } |j-i|>M.$$

Например, для матрицы на рис. 8.2,*b* $M=4$. Исключение неизвестных элементов производится по строкам матрицы с целью преобразования A в верхнюю треугольную матрицу.

Поэтому на первом шаге формируется матрица $A^{(1)}$ с нулями в первом столбце ниже главной диагонали:

$$a^{(1)}{}_{ij}=a_{ij}-a_{1j}(a_{i1}/a_{11}) \text{ для строк } j=1,\ldots, M+1,$$
$$i=2, \ldots, M+1, \qquad (8.6)$$

в остальных случаях

$$a^{(1)}{}_{ij}=a_{ij}.$$

Если указанный процесс продолжить для второго и последующих столбцов, матрица $A^{(k-1)}$ после шага k—1 примет вид, показанный на рис. 8.5,*а*. Тогда k-й шаг определяется следующим образом:

$$a_{ij}^{(k)}=a_{ij}^{(k-1)}-a_{kj}^{(k-1)}[a_{ik}^{(k-1)}/a_{kk}^{(k-1)}] \text{ для строк}$$
$$j=k, \ldots, \min(k+M, N),$$
$$i=k+1, \ldots, \min(k+M, N), \qquad (8.7)$$

в остальных случаях $a_{ij}^{(k)}=a_{ij}^{(k-1)}$.

После шагов N—1 матрица A преобразуется в $A^{(N-1)}\equiv U$. Отметим, что матрица L формировалась не явно. Вместо этого, выполняя те же манипуляции над вектором d в правой части, фактически определяли $g=L^{-1}d$. Это достигается последовательным вычислением векторов $d(k)$ с учетом $A^{(k)}$:

$$d_i^{(1)}=d_i-d_1(a_{i1}/a_{11}) \text{ для } i=2,\ldots, M+1,$$
$$d_i^{(1)}=d_i \text{ в остальных случаях,} \qquad (8.8)$$

$$d_i^{(k)} = d_{i-1}^{(k+1)} - d_k^{(k-1)} [a_{ik}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}] \quad \text{для } i = k+1, \ldots \min(k+M, N)$$

$$d_i^{(k)} = d_i^{(k-1)} \text{ в остальных случаях.}$$

Тогда $d^{(N-1)} = g$. Окончательный результат получим после решения

$$Uu = g. \tag{8.9}$$

Количество вычислений, зависящее от числа умножений, равно

$$W = (N - 2M + 1)[(M+1)^2 + M] + \frac{M(M-1)(2M-1)}{3} + M(M-1) + (M+2)^2 - M - 9, \tag{8.10}$$

что соответствует результатам, полученным в упражнении 8.1. Существуют многочисленные разновидности этого процесса решения. Кратко опишем некоторые из них, имеющие практическую ценность.

a) *Повторные решения с постоянной матрицей.* Если нужно решить несколько систем уравнений $Au = d$ при различных d, прямое исключение элементов требуется проделать только один раз при условии, что нижняя лента сохраняется. Если на k-й ступени элементы нижней ленты в столбце k не замещаются нулями, они в точности представляют собой элементы, необходимые для решения уравнения (8.7). Это справедливо, если уравнение (8.7) решают, начиная с $j = k+1$. Результаты решения для различных d получают при повторном использовании уравнений (8.8) и (8.9).

b) *Выбор ведущего элемента.* В этом случае, очевидно, необходимо, чтобы диагональный элемент $a_{kk}^{(k-1)}$ не был равным нулю. Для минимизации ошибок округления значение этого элемента должно быть по возможности большим. Выбор ведущего элемента заключается в том, что на каждой ступени исключения находим наибольший элемент среди $a_{kk}^{(k-1)}$, $a_{k+1,k}^{(k-1)}$, а затем меняем местами строку с наибольшим элементом со строкой k, чтобы максимизировать диагональный элемент. Хотя выбор ведущего элемента необходим для плохо обусловленных матриц, этот элемент обычно не требуется для матриц, получаемых при моделировании пластов. Теоретические исследования влияния ошибок округления можно найти у Уилкинсона (1963).

c) Точность решения можно увеличить, вычисляя вектор невязки $R = Au - d$ и решая уравнение относительно поправки $A\delta u = R$ методом, описанным в (a). Необходимость в этом возникает редко.

d) Можно осуществить описанный выше процесс по столбцам, а не по строкам или свести матрицу к диагональному виду вместо верхней треугольной. В некоторых случаях использование таких методов приводит к «экономии памяти».

e) Для симметричной матрицы можно применять различные виды алгоритма исключения. При этом вычислительные затраты для больших матриц приближаются к половине затрат, требую-

щихся для стандартного алгоритма (см. раздел 4.2.3 гл. 4 и упражнение 8.2).

В литературе описано много алгоритмов ленточного исключения. Тырнау (1963) в своей работе привел один такой алгоритм, где ведущий элемент выбирается по столбцам. Было, однако, установлено (Ву и др., 1973), что выбирать ведущий элемент в задачах по моделированию пластов по столбцам или по строкам не обязательно. В приложении В представлена программа «GBAND» для решения ленточных уравнений без выбора ведущего элемента. Эта программа основана на алгоритме, разработанном Грушкой и Поляком (1967). Алгоритмы для симметричных матриц с переменной шириной ленты приведены в работах Дженингса (1971) и Уилсона (1975). Другие алгоритмы рассмотрены в работах у Шварца (1968) и Уилкинсона и Райнша (1971).

8.2.2. Упорядочение уравнений

Как упоминалось ранее, вид матрицы зависит от упорядочения неизвестных. В данном разделе вкратце оценим несколько распространенных схем их упорядочения. Различные схемы рассматривались ранее Ву и другими (1973), Прайсом и Коутсом (1974) и Макдональдом и Гримблом (1977). Некоторые из этих схем представлены на рис. 8.6,*a*, b—8.8,*a*, b вместе с соответствующими матрицами коэффициентов. В следующем разделе покажем, как можно использовать преимущество от упорядочения неизвестных с целью экономии времени вычислений и машинной памяти.

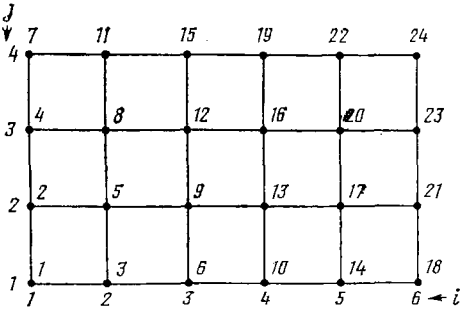


Рис. 8.6a. Схема упорядочения D2

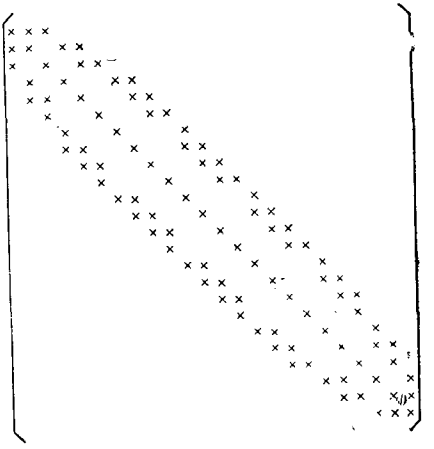


Рис. 8.6b. Матрица A для упорядочения D2

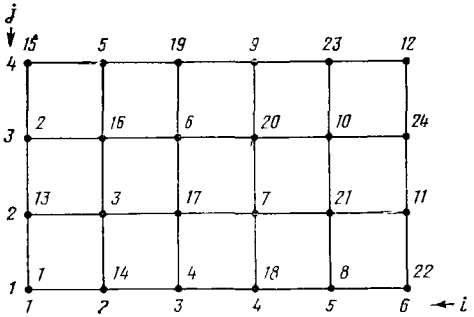


Рис. 8.7a. Схема упорядочения D4

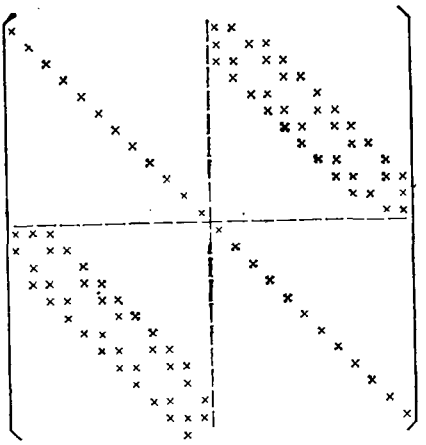


Рис. 8.7b. Матрица A для упорядочения D4

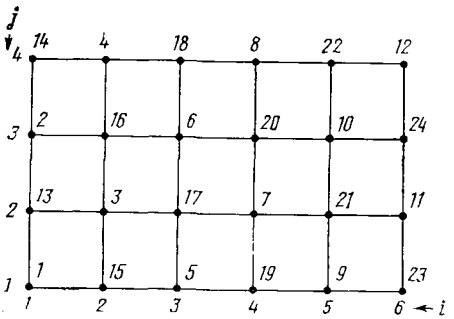


Рис. 8.8a. Схема двухциклического упорядочения

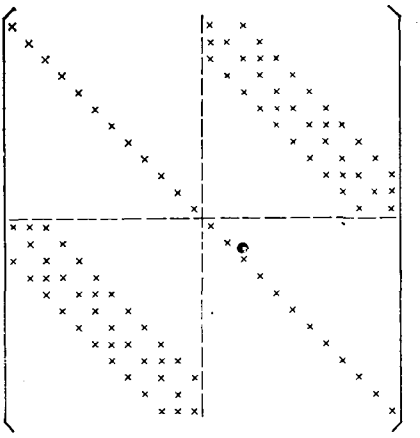


Рис. 8.8b. Матрица A для двухциклического упорядочения

8.2.3. Методы для разреженных матриц

Мы уже видели, что в задачах моделирования пластов в матрицах большинство элементов равно нулю. Такие матрицы называют разреженными. Они появляются при решении задач в самых разных областях (Роуз и Уилафби, 1972). В данном разделе рассмотрим некоторые методы, в которых используются преимущества разреженности матриц.

Операции для разреженных матриц осуществляют в два этапа.

1. Упорядочение уравнения с целью уменьшения размеров оболочки матрицы A.

2. Решение полученных уравнений с помощью эффективного метода исключения по Гауссу или алгоритма разложения, в котором избегают операций с нулями.

В предыдущем разделе мы видели, как упорядочение уравнений меняет оболочку матрицы A. Некоторые пути уменьшения оболочки матриц рассматривались Катхиллом (1972), Джорджем (1973) и Прайсом и Коутсом (1974). Для симметричных положительно определенных матриц размером $(n+1)\times(n+1)$ Джорджем показано, что при стандартном симметричном разложении и стандартном упорядочении общее число арифметических операций составляет $O(n^4)$, а объем памяти $O(n^3)$. Джордж утверждает, что переупорядочивая уравнения, то же стандартное разложение можно выполнить за $O(n^3)$ операций, при этом потребуется только $O(n^2 \log_2 n)$ ячеек памяти. Этот поразительный результат показывает, что ради такого сокращения объема вычислений и памяти стоит упорядочивать уравнения.

Рассматриваемая здесь матрица A в общем случае асимметричная матрица с диагональным преобладанием. Ее матрица инцидентности M симметрична (Тодд, 1962). Матрица инцидентности M определяется следующим образом:

$$m_{ij}=1 \text{ при } a_{ij}\neq 0,$$
$$m_{ij}=0 \text{ при } a_{ij}=0.$$

Прайс и Коутс (1974) показали, что для матриц данного типа объем вычислений по методу исключения Гаусса составляет

$$W=\sum_{i=1}^{N}[(w_i+1)^2+w_i], \tag{8.11}$$

а минимальный объем памяти

$$S=\sum_{i=1}^{N}w_i, \tag{8.12}$$

где N — число неизвестных, w_i — число ненулевых позиций в i-й строке вправо от диагонали на i-й ступени исключения. Схемы упорядочения выбирают так, чтобы сократить объемы вычислений за счет уменьшения $\sum_{i=1}^{N} w^2_i$. Такие схемы называются схемами упорядочения, сохраняющими разреженность матрицы. Их можно подразделить на два класса: 1) матрично-ленточные схемы и 2) псевдо-оптимальные схемы упорядочения.

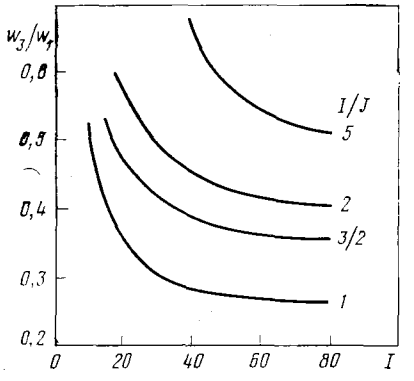


Рис. 8.9. Сравнение объемов вычислений при упорядочении по схеме D4 и стандартном упорядочении

Матрично-ленточные схемы. Схемы данного класса приводят к матрице с ненулевыми позициями, ограниченными относительно узкой лентой около одной из диагоналей (от верхнего левого элемента к нижнему правому или от верхнего правого к нижнему левому). В данном разделе подытожим результаты Прайса и Коутса (1974). Для двумерной задачи уравнение (8.10), выражающее объем вычислений по стандартному методу (методу исключения Гаусса, можно переписать в виде зависимости от общего числа узлов сетки в направлении $x(I)$ и общего числа узлов сетки в направлении $y(J)$. Так как $N=IJ$, а $M=J$, для больших I и $J(J<I)$ справедливо следующее приближение:

$$W_1 \simeq IJ^3. \tag{8.13}$$

Для вычислений необходим объем памяти

$$S_1 = IJ^2. \tag{8.14}$$

Для показанной на рис. 8.6 схемы упорядочения D2 и для больших I и J объем вычислений и объем памяти составляют

$$W_2 = IJ^3 - \frac{J^4}{2}, \tag{8.15}$$

$$S_2 = IJ^2 - \frac{J^3}{3}. \tag{8.16}$$

При $I=J$ для данной схемы объем вычислений составляет половину, а объем памяти — две трети от величин, требуемых при стандартном упорядочении.

Для упорядочения D4 (см. рис. 8.7,а в) при больших I и J

$$W_3 = \frac{IJ^3}{2} - \frac{J^4}{4}, \tag{8.17}$$

$$S_3 = \frac{IJ^2}{2} - \frac{J^3}{6}. \tag{8.18}$$

Поэтому при $I=J$ для данной схемы требуется одна четверть объема вычислений и одна треть объема памяти от соответствующих величин при стандартном упорядочении.

Для упорядочения с двойным циклом (см. рис. 8.8,*а в*)

$$W_4 = \frac{IJ^3}{2}, \tag{8.19}$$

$$S_4 = \frac{IJ^2}{2}. \tag{8.20}$$

Ясно, что схема D4 обладает наибольшими преимуществами. Прайс и Коутс подсчитали отношение W_3/W_1 для различных значений I и J (не предполагая I и J большими). По их результатам построены кривые рис. 8.9, на котором показано возможное сокращение объема вычислений как функция I и отношение I/J при упорядочении и по схеме D4. Заметим, что данное улучшение максимально при $J=I$, т. е. для квадратной сетки.

Подытожив результаты, рассмотрим подробно, как осуществляется упорядочение по схеме D4. Это поможет также выяснить основную идею всех методов упорядочения.

Рассмотрев матрицу на рис. 8.7в, заметим, что матричное уравнение можно разбить следующим образом:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_1 \\ \boldsymbol{d}_2 \end{bmatrix} \tag{8.21}$$

где A_1 и A_4 — диагональные, а A_2 и A_3 — разреженные матрицы. На первом шаге выполним прямое исключение на нижней половине A, в результате чего матрица A_3 станет нулевой, т. е.

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_4 \end{bmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{d}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_1 \\ \bar{\boldsymbol{d}}_2 \end{bmatrix}$$

Заметим, что A_1, A_2 и d_1 не изменились, в то время как A_4 превратилась в ленточную матрицу $\bar{A}_4$. Для нашего примера структура матрицы $\bar{A}$ показана на рис. 8.10, где элементы, получающиеся в результате заполнения нулей, обозначены кружками. Важно отметить, что максимальная ширина ленты матрицы $\bar{A}_4$ та же самая, что и для исходной матрицы A. Теперь можно решить уравнения для нижней половины матрицы

$$\bar{\mathbf{A}}_4 u_2 = \bar{d}_2 \tag{8.22}$$

независимо с помощью стандартного ленточного исключения. После определения u_2 можно легко вычислить u_1 путем обратной подстановки

$$u_1 = \mathrm{A}_1^{-1} d_1 - \mathrm{A}_1^{-1} \mathrm{A}_2 u_2, \tag{8.23}$$

так как A_1 — диагональная матрица. Таким образом, после упорядочения размер матричной ленты уменьшается в два раза. При ленточном способе исключения из уравнения (8.13) видно, что

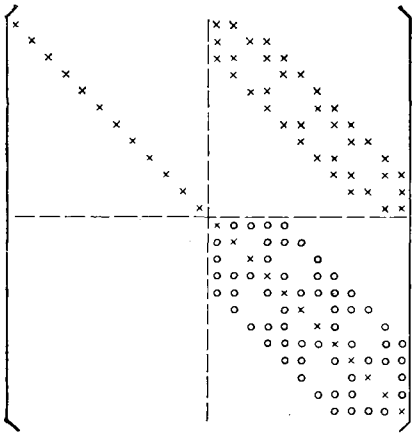


Рис. 8.10. Преобразованная матрица для упорядочения по схеме D4

объем вычислений для половины неизвестных будет сокращен в два раза в случае матрицы с постоянной шириной ленты. Хотя из нашего примера это явно и не следует, матрица A_4 будет иметь переменную ширину ленты при больших I и J с максимумом, равным ширине ленты исходной матрицы. Это приводит к дальнейшему сокращению объема вычислений, причем сокращение максимально для $I=J$. Для больших $I=J$ получим еще одно сокращение объема вычислений в два раза; полное отношение объемов вычислений при этом стремится к 1/4.

Аналогичным образом оценивается и экономия памяти.

Псевдооптимальные схемы упорядочения. Прайс и Коутс (1974) рассмотрели три схемы, описанные Тинни и Уолкером (1967) для оптимального сохранения разреженности матрицы при способе исключения по методу Гаусса. Хотя полагают, что для задач об электрических сетях данные схемы более эффективны, чем схемы с ленточными матрицами, не обязательно считать, что для алгебраических уравнений, получающихся из дифференциальных уравнений в частных производных, по таким схемам получают лучшие результаты. Прайс и Коутс показали, что при $I=J$ возможна существенная экономия объема вычислений по сравнению с объемом вычислений по схеме D4, но при $I=2J$ или $I=3J$ это не подтверждается. Программирование для указанных схем вызывает значительные трудности.

Схемы данного типа требуют дальнейшего исследования и в этой книге рассматриваться не будут. Такие схемы приведены в работе Брейтона и др. (1970), Густавсона и Хэчтела (1973), Ву и др. (1973) и Густавсона (1973).

8.3. Итерационные методы

Часто более экономно, с точки зрения затрат машинного времени и памяти, можно решать задачу каким-либо итерационным методом, а не методом прямого исключения. В этом разделе приведем основные понятия итерационных методов и рассмотрим некоторые из них. По данному вопросу имеется несколько отличных книг, поэтому детально рассматриваться он не будет. Книги Варги (1962), Уачспресса (1966) и Янга (1971) будут особенно интересны для читателя.

Рассматриваемые методы можно подразделить на две категории: 1) *поточечные итерационные* и 2) *блочно-итерационные*. Поточечные итерационные методы не требуют матричных вычислений, и их применение в моделировании пластов ограничено относительно простыми случаями. Блочно-итерационные методы включают одновременное решение блока уравнений, которые решить просто. Хотя только блочно-итерационные методы требуют матричных вычислений, с целью проведения анализа в матричной форме должны быть записаны обе категории методов. Перед обсуждением конкретных итерационных методов представим некоторые основные результаты из их теории.

Рассмотрим матричное уравнение вида

$$Au=d, \tag{8.24}$$

где матрица коэффициентов A может иметь вид (8.5). Любую итерационную схему для данной задачи можно записать как

$$u^{(\nu+1)}=\mathrm{B}u^{(\nu)}+b, \tag{8.25}$$

где матрица B и вектор b зависят от решаемой задачи и итерационного метода. Если B не зависит от ν, итерационная схема называется *стационарной*.

Итерационная схема сходится, если

$$\lim_{\nu\to\infty} u^{(\nu)}=u, \tag{8.26}$$

где u — результат точного решения уравнения (8.24). Очевидно, что для сходимости схемы необходимо (но не достаточно!), чтобы выполнялось условие

$$u=\mathrm{B}u+b. \tag{8.27}$$

Если погрешность на различных стадиях итерационного процесса определим, как

$$\varepsilon^{(\nu)}=u^{(\nu)}-u, \tag{8.28}$$

а затем вычтем уравнение (8.27) из (8.25) и подставим его в уравнение (8.28), получим

$$\varepsilon^{(\nu+1)}=\mathrm{B}\varepsilon^{(\nu)} \tag{8.29}$$

или, выражая через вектор начальной погрешности $\varepsilon^{(0)}$,

$$\varepsilon^{(\nu)}=\mathrm{B}^{\nu}\varepsilon^{(0)}. \tag{8.30}$$

Чтобы уравнение (8.25) сходилось, $\varepsilon^{(\nu)}$ должна стремиться к нулю при произвольном значении $\varepsilon^{(0)}$. Это означает, что $\|\mathrm{B}^{\nu}\|$ должна стремиться к нулю (см. приложение А).

Теорема. Итерационная схема

$$u^{(\nu+1)} = \mathrm{B}\,u^{(\nu)} + b \tag{8.31}$$

сходится тогда и только тогда, когда

$$\rho(\mathrm{B}) < 1.$$

Скорость сходимости также связана с $\rho(\mathrm{B})$. Отношение нормы погрешности на слое (ν) к норме погрешности на слое (0) получается из уравнения (8.30):

$$\frac{\| \varepsilon^{(\nu)} \|}{\| \varepsilon^{(0)} \|} \leqslant \| \mathrm{B}^{\nu} \|, \tag{8.32}$$

где значения $\| \mathrm{B}^{\nu} \|$ служат для сравнения результатов решения по различным итерационным методам.

Определение (Варга, 1962, с. 62). Пусть B_1 и B_2 — матрицы, тогда, если для некоторого целого положительного $\nu \| \mathrm{B}_1^{\nu} \| < 1$, то средняя скорость сходимости на ν итерациях для матрицы B_1

$$R(\mathrm{B}_1^{\nu}) \equiv \ln [(\| \mathrm{B}_1^{\nu} \|)^{1/\nu}] = \frac{-\ln \| \mathrm{B}_1^{\nu} \|}{\nu}.$$

Если

$$R(\mathrm{B}_1^{\nu}) < R(\mathrm{B}_2^{\nu}),$$

то на ν итерациях итерационный процесс для B_2 сходится быстрее, чем для B_1.

Другой полезный результат получаем из следующей теоремы.

Теорема (Варга, 1962, с. 67). Для сходящегося итерационного процесса для матрицы B

$$\lim_{\nu \to \infty} R(\mathrm{B}^{\nu}) = -\ln \rho(\mathrm{B}) = R_{\infty}(\mathrm{B}),$$

где $R_{\infty}(\mathrm{B})$ — асимптотическая скорость сходимости решения. Непосредственным следствием данного результата является следующее утверждение.

При любом положительном целом ν, для которого $\| \mathrm{B}^{\nu} \| < 1$,

$$R_{\infty}(\mathrm{B}) \geqslant R(\mathrm{B}^{\nu}).$$

8.3.1. Поточечный метод Якоби

В системе уравнений (8.3) i-е уравнение можно представить в виде

$$u_{ij}^{n} = -\frac{1}{a_{ij}} [g_{ij} u_{i-1,j}^{n} + c_{ij} u_{i,j-1}^{n} + b_{ij} u_{i,j+1}^{n} + f_{ij} u_{i+1,j}^{n} + d_{ij}], \tag{8.33}$$

где известные члены на старом временном слое и члены источника объединены в d_{ij}. В матричной форме данных уравнений в d также входят известные граничные значения u. Поскольку в уравнении (8.33) все значения u берутся на n-м временном слое, при дальнейшем рассмотрении не будем указывать верхний индекс. Так как

не все значения u в правой части уравнения (8.33) известны, рассмотрим следующую итерационную схему:

$$u_{ij}^{(\nu+1)} = -\frac{1}{a_{ij}}\left[g_{ij}u_{i-1,j}^{(\nu)} + c_{ij}u_{i,j-1}^{(\nu)} + b_{ij}u_{ij+1}^{(\nu)} + f_{ij}u_{i+1,j}^{(\nu)} + d_{ij}\right]$$
$$\nu = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (8.34)$$

Это уравнение поточечного метода Якоби.

Итерация начинается при $\nu=0$ с некоторого предполагаемого значения $u^{(0)}$ и продолжается до тех пор, пока

$$\| u^{(\nu+1)} - u^{(\nu)} \| < e, \qquad (8.35)$$

где e — некоторое допустимое отклонение. Другой критерий сходимости можно определить как

$$\frac{\| u^{(\nu+1)} - u^{(\nu)} \|}{\| u^{\nu} \|} < e. \qquad (8.36)$$

К сожалению, приведенные простые критерии могут быть ошибочными, так как с их помощью нельзя определить, насколько полученное решение удовлетворяет исходному уравнению. Если $\rho(B)$ лишь ненамного меньше единицы, изменение $u^{(\nu)}$ на двух итерациях будет незначительным, даже если значение $u^{(\nu)}$ далеко от конечного результата u. Другой подход заключается в наблюдении за вектором невязки: удовлетворяет ли он условию

$$\| Au^{(\nu)} - d \| < e. \qquad (8.37)$$

Этот критерий также может оказаться неудачным для плохо обусловленных матриц (Гаулт и др., 1974, с. 101). В результате вычисления невязки с двойной точностью можно улучшить проверку по этому критерию.

Для нестационарных задач начальный вектор можно получить по формуле

$$u^{(0)} = u^{n-1}.$$

Матрицу B для итерационного поточечного метода Якоби можно получить, записав

$$A = D - L - H,$$

где D — диагональная матрица, содержащая диагональные элементы A; L и H — строго верхняя и строго нижняя треугольные матрицы. Запишем уравнение (8.24) как

$$(D - L - H)\, u^n = d, \qquad (8.38)$$

а уравнение (8.33) как

$$u^n = D^{-1}(L + H)\, u^n + D^{-1}d. \qquad (8.39)$$

Уравнение поточечного метода Якоби в матричной форме имеет следующий вид:

$$u^{(\nu+1)} = D^{-1}(L + H)\, u^{(\nu)} + D^{-1}d \qquad (8.40)$$

$$u^{(\nu+1)} = B_J u^{(\nu)} + b, \tag{8.41}$$

где $B_J = D^{-1}(L+H)$. Для некоторых простых случаев собственные значения данной матрицы можно выразить через элементы D, H и L, чтобы удостовериться в соблюдении условия $\rho(B) < 1$ (см. упражнение 8.3).

8.3.2. Поточечный метод Гаусса — Зейделя

Этот метод отличается от поточечного метода Якоби только тем, что в правой части уравнения (8.34) используются самые последние имеющиеся значения u. Например, если используется естественное упорядочение, при определении $u_{ij}^{(\nu+1)}$ известны значения $u_{i-1,j}^{(\nu+1)}$ и $u_{i,j-1}^{(\nu+1)}$. Следовательно, формулу поточечного метода Гаусса — Зейделя можно записать как

$$u_{ij}^{(\nu+1)} = \frac{1}{a_{ij}} [g_{ij} u_{i-1,j}^{(\nu+1)} + c_{ij} u_{i,j-1}^{(\nu+1)} + b_{ij} u_{i,j+1}^{(\nu)} + f_{ij} u_{i+1,j}^{(\nu)} + d_{ij}],$$

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots . \tag{8.42}$$

Уравнения данного метода проще программировать, чем уравнения поточечного метода Якоби, к тому же скорость сходимости его результатов выше. Итерационный процесс начинается и заканчивается точно так, как и при поточечном методе Якоби.

Уравнение можно записать в форме уравнения (8.25)

$$u^{(\nu+1)} = B_{GS} u^{(\nu)} + b, \tag{8.43}$$

где $B_{GS} = (D-L)^{-1}H$. Если $0 < \rho(B_J) < 1$, то $R_\infty(B_{GS}) > R_\infty(B_j)$ (теорема Штайна — Розенберга, Варга, 1962, с. 70).

8.3.3. Поточечный метод верхней релаксации (SOR-метод)

В уравнении (8.42) по методу Гаусса-Зейделя при вычислении $u_{ij}^{(\nu+1)}$ значение $u_{ij}^{(\nu)}$ не используется. Если определяемое из уравнения (8.42) значение $u_{ij}^{(\nu+1)}$ обозначить как $u_{ij}^{*(\nu+1)}$, то можно улучшить итерационный процесс, взяв значения с весовыми коэффициентами

$$u_{ij}^{(\nu+1)} = (1-\omega) u_{ij}^{(\nu)} + \omega u_{ij}^{*(\nu+1)}. \tag{8.44}$$

Зададим вопрос: «Можно ли найти такой весовой коэффициент ω, чтобы скорость сходимости для данного метода была больше, чем для метода Гаусса — Зейделя?». Чтобы ответить на этот вопрос, следует уравнение (8.44) записать в форме уравнения (8.25):

$$u^{(\nu+1)} = B_{SOR} u^{(\nu)} + b, \tag{8.45}$$

где

$$B_{SOR} = (D - \omega L)^{-1} [(1-\omega) D + \omega H]. \tag{8.46}$$

Скорость сходимости для SOR-метода зависит от ω и способа упорядочения неизвестных. Все упорядочения, рассмотренные

в настоящей главе, называются *согласованными* (подробнее об этом см. Варга (1962) и Янг (1971). Для согласованного упорядочения неизвестных оптимальное значение ω, обозначенное как ω_b, определяется выражением

$$\omega_b = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2(B_J)}} = 1 + \left[\frac{\rho(B_J)}{1+\sqrt{1-\rho^2(B_J)}}\right]^2. \qquad (8.47)$$

Кроме того,

$$\rho(B_{GS}) = \rho^2(B_J). \qquad (8.48)$$

Варга (1962, с. 112) дает следующую оценку асимптотической скорости сходимости решений для двухциклических матриц, естественным образом возникающих в задачах моделирования пластов (см. рис. 8.7b):

$$R_\infty \simeq \sqrt{8}\,[R_\infty(B_J)]^{1/2}. \qquad (8.49)$$

Увеличение скорости сходимости по сравнению со скоростями для методов Якоби и Гаусса — Зейделя становится значительным при $\rho(B_J)$, близком к единице. Рассмотрим случай, когда $\rho(B_J) = 0{,}9999$. Тогда

$$R_\infty(B_J) \simeq 0{,}0001,$$

$$R_\infty(B_{GS}) \simeq 0{,}0002,$$

$$R_\infty(B_{SOR}) \simeq 0{,}0283 \text{ (с учетом } \omega_b).$$

Эти результаты показывают, что для достижения одинаковой точности методом Гаусса — Зейделя потребуется в сто раз больше итераций, чем SOR-методом. Практически часто трудно найти оптимальное значение ω. На рис. 8.11 показано влияние ω на $\rho(B_{SOR})$. Из данного рисунка видно, что при небольшом завышении ω скорость сходимости не так понижается, как при ее занижении на подобную же величину.

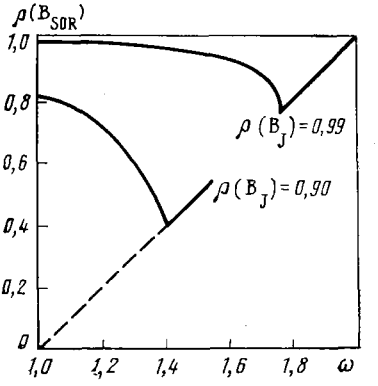


Рис. 8.11. Зависимость спектрального радиуса ρB_{SOR} от ω

Значение ω, близкое к оптимальному, можно определить методами, рассмотренными в книгах Варги (1962), Уачспресса (1966) и Янга (1971) и статьях Карре (1961), Рейда (1966) и Хейджмена и Келлога (1968).

Один из самых распространенных методов, используемых для оценки ω_b — степенной метод. По этому методу итерации выпол-

няются с $\omega=1$ (Гаусс — Зейдель) и берется отношение соответствующих элементов $\delta^{(\nu+1)}$ и $\delta^{(\nu)}$, где

$$\delta^{\nu} = u^{(\nu+1)} - u^{(\nu)}. \tag{8.50}$$

При большом числе итераций это отношение приближается к $\rho(B_{GS})$ и может быть использовано в уравнении (8.47) для оценки ω. Для определения ω_b особенно удобен вариант степенного метода, по которому итерации осуществляются со значением ω, меньшим оптимального. Этот метод в общих чертах описывается ниже (Янг, 1971).

Пусть $\delta^{(\nu)}$ определяется по уравнению (8.50) и

$$\theta^{(\nu)} = \| \delta^{(\nu+1)} \|_{\infty} / \| \delta^{(\nu)} \|_{\infty}. \tag{8.51}$$

Тогда спектральный радиус матрицы Якоби можно найти по формуле

$$\rho(B_J) \approx (\bar{\theta} + \omega - 1)/(\omega \bar{\theta}^{1/2}), \tag{8.52}$$

где ω—оценочное значение ω_b, используемое при определении $u^{(\nu)}$, $\bar{\theta}$ — установившееся значение $\theta^{(\nu)}$ по уравнению (8.51). Если $\omega \geqslant \omega_b$, величина $\theta^{(\nu)}$ будет осциллировать. В таких случаях ω надо уменьшать, тока $\theta^{(\nu)}$ не сойдется.

Уачспресс (1966, с. 109) привел три практических метода вычисления ω_b, а также рассмотрел достоинства и недостатки этих методов. Третий метод, предложенный Уачспрессом, следует применять, когда оба рассмотренных выше метода оказываются непригодными.

8.3.4. Линейный и блочный SOR-методы

Большие возможности SOR-метода при моделировании пластов выявляются в случае использования линейного SOR (LSOR) или блочного SOR (BSOR)-методов. По LSOR-методу матрицу A записывают в форме уравнения (8.5). Рассмотрим простой пример:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_3 & \mathbf{A}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_1 \\ \boldsymbol{d}_2 \\ \boldsymbol{d}_3 \end{bmatrix} \tag{8.53}$$

Теперь SOR-метод можно применить к блочным элементам следующим образом. На первом шаге определим $u_1^{(\nu+1)}$:

$$A_1 u^*_1 = -B_1 u_2^{(\nu)} + d_1, \tag{8.54а}$$

$$u_1^{(\nu+1)} = \omega u^*_1 + (1-\omega) u_1^{(\nu)}. \tag{8.54в}$$

Затем вычислим $u_2^{(\nu+1)}$

$$A_2 u^*_2 = -C_2 u_1^{(\nu+1)} - B_2 u_3^{(\nu)} + d_2, \tag{8.55а}$$

$$u_2^{(\nu+1)} = \omega u^*_2 + (1-\omega)\, u_2^{(\nu)}. \tag{8.55в}$$

Наконец найдем $u_3^{(\nu+1)}$.

$$A_3 u^*_3 = -C_3 u_2^{(\nu+1)} + d_3, \tag{8.56а}$$

$$u_3^{(\nu+1)} = \omega u^*_3 + (1-\omega)\, u_3^{(\nu)}. \tag{8.56в}$$

Для конкретного примера этот процесс на каждой итерации требует решения трех систем уравнений с трехдиагональными матрицами. Распространение этого метода на уравнения с числом блочных строк более трех очевидно.

Поскольку каждое разбиение матрицы A соответствует одной линии (строке) неизвестных, во время итерации решение для этой линии получают одновременно, что и дает имя методу. Оптимальное значение итерационного параметра ω_b можно оценить способами, описанными для поточечного SOR-метода.

Блочный SOR-метод — более общий вид метода SOR. Здесь рассматривается более, чем одна строка (две или три как единый блок). Свойства сходимости по SOR-методу улучшаются по мере увеличения размера блока, участвующего в прямом исключении. Однако при этом также увеличивается объем вычислений, производимых на каждом шаге итерации. Эти методы могут быть очень эффективными в случае, когда размерность задачи допускает хранение в памяти вычислительной машины обратных матриц для всех блоков (в нашем примере A_i^{-1}).

Наконец, отметим, что блоки по блочному SOR-методу могут быть выбраны произвольно, их не обязательно ограничивать линиями или плоскостями, хотя обычно это удобнее.

8.3.5. Методы аддитивной коррекции

Эти методы основаны на идее, заключающейся в том, что применение некоторой аддитивной поправки к величинам, полученным по некоторой итерационной схеме на некоторой итерации (ν), может ускорить сходимость итерационной схемы. Существует несколько способов получения значения аддитивной поправки. Они рассматриваются в статьях Пуссена (1968); Уоттса (1971, 1973); Азиза и Сеттари (1972) и Сеттари и Азиза (1973). В двух статьях авторов настоящей книги рассмотрены методы Пуссена и Уоттса. Достоинства метода аддитивной коррекции были продемонстрированы для SOR-метода, хотя подобный подход применим к любой итерационной схеме.

Метод Уоттса (1DC-метод). Простейший метод отыскания аддитивной поправки предложен Уоттсом (1971). Здесь мы будем

называть его как метод одномерной коррекции (1DC) по причинам, которые станут ясными позже.

Предположим, что получено решение $u^{(\nu)}$ после ν итераций по LSOR-методу. Наша цель — осуществить коррекцию $u^{(\nu)}$ таким образом, чтобы скорректированное значение было в некотором смысле «ближе» к решению. Это значение можно считать исходным для $(\nu+1)$-й итерации. Коррекция выполняется следующим образом:

$$u_{ij}^{(\nu c)} = u_{ij}^{(\nu)} + \alpha_j, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, I, \\ j = 1, 2, \ldots, J, \end{matrix} \tag{8.57}$$

т. е. различные корректирующие величины добавляются к элементам каждой строки в направлении x. Совершенно аналогично формулируется уравнение метода в случае, когда линии выбраны в направлении оси y.

Уравнения для α_j получают приравниванием к нулю суммы невязок вдоль каждой строки в направлении оси x при подстановке $u^{(\nu c)}$ в уравнение для невязки вместо $u^{(\nu)}$:

$$R_{ij}^{(\nu)} = -g_{ij}u_{i,j-1}^{(\nu)} - c_{ij}u_{i-1,j}^{(\nu)} - a_{ij}u_{ij}^{(\nu)} - b_{ij}u_{i+1,j}^{(\nu)} - f_{ij}u_{i,j+1}^{(\nu)} + d_{ij}. \tag{8.58}$$

Условие для невязки можно записать как

$$\sum_{i=1}^{I} R_{ij}^{(\nu c)} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, J, \tag{8.59}$$

что приводит к следующему уравнению для корректирующего вектора α:

$$g^x{}_j\alpha_{j-1} + h^x{}_j\alpha_j + f^x{}_j\alpha_{j+1} = R^x{}_j, \quad j = 1, 2. \ldots, J, \tag{8.60}$$

где

$$h^x{}_j = \sum_{i=1}^{I} (a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}).$$

Аналогично верхний индекс x у других переменных указывает на суммирование одинаковой переменной по всем i. Например.

$$g^x{}_j = \sum_{i=1}^{I} g_{ij}.$$

Уравнения для α — уравнение (8.60) — можно записать в матричном виде

$$S^x\alpha = R^x, \tag{8.61}$$

где S^x — трехдиагональная симметричная матрица, так как

$$g^x{}_j = f^x{}_{j-1}.$$

Матрица S^x положительно определенная. Поэтому уравнение (8.61) имеет единственное решение. По данному методу операции выполняют в следующей последовательности.

1. Выполняют l итерацией по LSOR-методу или по какой-либо другой итерационной схеме.

2. По уравнению (8.61) находят α.

3. В соответствии с уравнением (8.57) корректируют последнее значение u.

4. Переходят к шагу (1) и повторяют операции до достижения сходимости решения.

Заметим, что хотя направление линий для коррекции по невязкам произвольное, его выбор влияет на сходимость. Так, например, по LSOR-методу естественнее (и лучше) выбирать для коррекции то же направление линий, что и для LSOR-итераций.

Метод двумерной коррекции. Этот метод, подробно описанный Азизом и Сеттари (1972) и Сеттари и Азизом (1973),— развитие предыдущего метода. По такому методу применяют два корректирующих вектора α и β:

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_J\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_I\end{bmatrix} \tag{8.62}$$

Скорректированный результат решения для каждого узла сетки определяют по формуле

$$u_{ij}^{(\text{vc})}=u_{ij}^{(\text{v})}+\alpha_j+\beta_i, \quad \begin{matrix} i=1,\ 2,\ \ldots,\ I \\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ J. \end{matrix} \tag{8.63}$$

Соответствующие уравнения для α и β получают приравниванием к нулю суммы невязок по каждой из линий одновременно для обоих направлений. Это приводит к сложному матричному уравнению относительно α и β. Достаточно хорошее приближение можно получить, решая две независимые системы уравнений:

$$S^x\alpha=R^x, \tag{8.64}$$

$$S^y\beta=R^y. \tag{8.65}$$

В уравнении (8.65) произвольную строку можно записать как

$$c^y{}_i\beta_{i-1}+h^y{}_i\beta_i+b^y{}_i\beta_{i+1}=R^y{}_i. \tag{8.66}$$

При этом

$$h^y{}_i=\sum_{j=1}^{J}(g_{ij}+a_{ij}+f_{ij}).$$

Верхний индекс y указывает на суммирование по j. Отметим, что для получения корректирующих векторов надо решить две системы уравнений (8.64) и (8.65) с трехдиагональными матрицами. Определяемый данными уравнениями приближенный метод стано-

вится точным для эллиптической задачи, т. е. при $P=0$ в уравнении (8.1).

Другие методы. Непосредственное обобщение приведенных выше методов, по которым коррекция выполняется по областям произвольной формы, представлено в работе Азиза и Сеттари (1973). Один такой метод (SLOT-метод щели), например, предложен Пуссеном (1968); он основан на том, что приравнивается к нулю сумма невязок по двумерной области (щели). Данный метод здесь подробно не рассмотрен, однако в конце настоящей главы мы сравним его с другими.

8.3.6. Итерационные неявные методы переменных направлений (ADI-методы)

В предыдущей главе уже рассматривался класс методов, известных как безытерационные методы переменных направлений. Они тесно связаны с видом дифференциального уравнения в частных производных и не могут быть применены к эллиптическим уравнениям. В данном разделе представим некоторые методы переменных направлений, которые можно использовать для конечно-разностных уравнений, имеющих вид уравнения (8.25). Эти методы рассматриваются в нескольких книгах (например, Варги (1962), Уачспресса (1966), Амеса (1969), Янга (1977); здесь мы вкратце рассмотрим исходный метод Писмана и Рэчфорда (1955) и один близкий к нему метод.

Перепишем уравнение (8.3), разделив две пространственные производные на a_{ij}:

$$[c_{ij}u_{i-1,j}+ax_{ij}u_{ij}+b_{ij}u_{i+1,j}]+$$
$$+[g_{ij}u_{i,j-1}+ay_{ij}u_{ij}+f_{ij}u_{i,j+1}]+[\varphi_{ij}u_{ij}]=d_{ij}, \qquad (8.67)$$

где все коэффициенты имеют то же значение, что и в уравнении (8.3). Отметим, что c, b, g и f отрицательны, в то время как ax, ay и φ положительны. Также отметим, что все значения u взяты на неизвестном временном слое, а в d_{ij} учитывается вся правая часть уравнения. Позже, записывая уравнения в матричном виде, мы также включим в d_{ij} и граничные условия. Очевидно, что левую часть уравнения (8.67) можно переписать в виде матричного уравнения (8.4), разбив при этом матрицу A на три части, соответствующие разным членам в квадратных скобках в левой части уравнения (8.67):

$$(H+V+\Sigma)u=d, \qquad (8.68)$$

где H учитывает в матрице A член $\partial/\partial x[\lambda X(\partial U/\partial x)]$; V учитывает в матрице A член $\partial/\partial y[\lambda Y(\partial U/\partial y)]$; Σ соответствует производной по времени. Если используется стандартное упорядочение, показанное на рис. 8.1а, H и V примут вид, показанный на рис. 8.12 и 8.13 соответственно, в то время как Σ будет диагональной матрицей, содержащей φ_{ij}. Если же используется упорядочение, по-

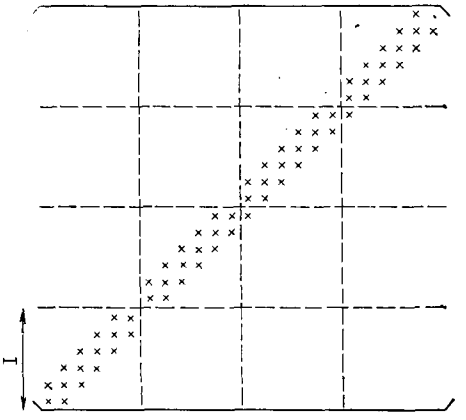


Рис. 8.12. Матрица H в уравнении (8.68) при использовании упорядочения по строкам. Элементы, не равные нулю, обозначены ×. К примеру, для десятой строки эти элементы следующие: $c_{3,2}$; $ax_{3,2}$; $b_{3,2}$

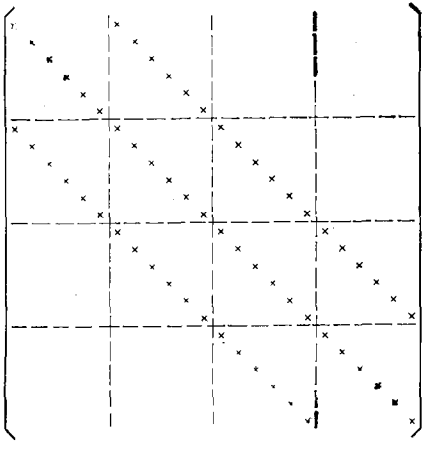


Рис. 8.13. Матрица V в уравнении (8.68) при использовании упорядочения по строкам. Элементы, не равные нулю, обозначены ×. К примеру, для десятой строки эти элементы следующие: $g_{3,2}$; $ay_{3,2}$; $f_{3,2}$

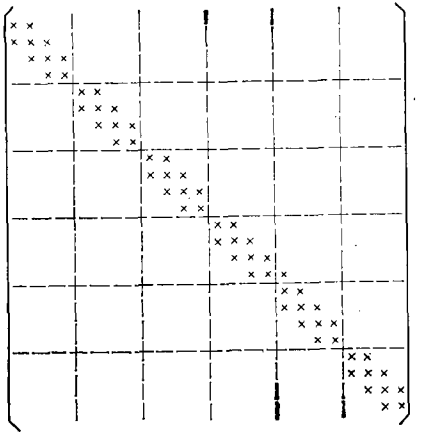


Рис. 8.14. Матрица V в уравнении (8.68) при использовании упорядочения по столбцам. Элементы, не равные нулю, обозначены ×. К примеру, для десятой строки эти элементы следующие: $g_{3,2}$; $ay_{3,2}$; $f_{3,2}$

казанное на рис. 8.1в, матрица V принимает вид, показанный на рис. 8.14. Из этих рисунков видно, что: уравнение вида

$$Hu=k \tag{8.69}$$

можно решить при повторном применении какого-либо алгоритма решения уравнения с трехдиагональной матрицей, а уравнение вида

$$Vu=k \tag{8.70}$$

сведется к уравнению вида (8.68), матрица коэффициентов которого показана на рис. 8.14, если вектор неизвестных u переупорядочить по столбцам (см. рис. 8.1b). Исходя из этого можно записать уравнение (8.68) так (Варга, 1962):

$$\left(H+\frac{1}{2}\Sigma+rI\right)u=\left(rI-V-\frac{1}{2}\Sigma\right)u+d \tag{8.71a}$$

или

$$\left(V+\frac{1}{2}\Sigma+rI\right)u=\left(rI-H-\frac{1}{2}\Sigma\right)u+d, \tag{8.71b}$$

где r — некоторая скалярная положительная величина, которая будет рассмотрена позже. Если определить

$$H_1=H+\frac{1}{2}\Sigma, \tag{8.72a}$$

$$V_1=V+\frac{1}{2}\Sigma, \tag{8.72b}$$

можно записать схему итерационного процесса для решения уравнения (8.4):

$$(H_1+r^{(\nu+1)}I)\,u^*=(r^{(\nu+1)}I-V_1)\,u^{(\nu)}+d, \tag{8.73a}$$

$$(V_1+r^{(\nu+1)}I)\,u^{(\nu+1)}=(r^{(\nu+1)}I-H_1)\,u^*+d,$$

$$\nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{8.73b}$$

где $u^{(0)}$ — произвольное приближение вектора u; $r^{(\nu)}$ — итерационные параметры, выбранные для ускорения сходимости итерационного процесса. Это уравнение метода Писмана и Рэчфорда (1955). Первым решаем уравнение (8.73a), рассматривая неизвестные для каждой линии в направлении оси x. В итоге на этом шаге (называемом также «прогонкой») получим u^*. Затем изменим направление упорядочения неизвестных и с помощью уравнения (8.73a) найдем $u^{(\nu+1)}$, рассматривая неизвестные вдоль каждой линии в направлении оси y. Процесс продолжается до достижения сходимости результатов. Возможности указанных методов могут быть реализованы только при использовании в цикле последовательно параметров $r^{(m)}$ и повторении циклов до тех пор, пока $u^{(\nu)}$ не сойдется с u. В этом заключается основная проблема, возникающая при использовании ADI-методов,— установить, каково оптимальное число итераций в цикле и каковы оптимальные параметры для цикла? Существует много практических способов выбора итерационных параметров, некоторые из них описаны в упомянутых ра-

нее книгах, где рассматриваются ADI-методы. Широко распространены следующие способы оценки итерационных параметров.

Оценка итерационных параметров методом Писмана — Рэчфорда. Пусть a — нижняя граница для собственных значений V, а b — верхняя граница для собственных значений H. Следует определить:

1) a и b и вычислить $c=a/b$;
2) наименьшее целое M, при котором $(0{,}414)^{2M} \leqslant c$;
3) итерационный параметр $r^{(m)}$

$$r^{(m)}=b\,(c)^{(2m-1)/2M},\quad m=1, 2, \ldots, M; \tag{8.74}$$

4) асимптотическую скорость сходимости

$$R_\infty(\mathrm{ADI}) = -\frac{2}{M}\ln\left[\frac{1-c^{1/(2M)}}{1+c^{1/(2M)}}\right].$$

Оценка итерационных параметров методом Уачспресса (1962). Следует определить:

1) a, b и вычислить $c=a/b$;
2) наименьшее M, при котором $(0{,}172)^{M-1} \leqslant c$;
3) итерационный параметр $r^{(m)}$ по геометрической прогрессии

$$r^{(m)}=b\,(c)^{(m-1)/(M-1)},\ M>2;\ m=1, 2, \ldots, M; \tag{8.75}$$

4) асимптотическую скорость сходимости

$$R_\infty(\mathrm{ADI}) = -\frac{2}{M}\ln\left[\frac{1-c^{(1/2)\,(M-1)}}{1+c^{(1/2)\,(M-1)}}\right]^2.$$

Для большинства практических задач метод Уачспресса (1962) считается более предпочтительным. Часто на практике трудно оценить a и b. В таких случаях наибольшее значение $r^{(m)}$ выбирается близким к 1, а параметры распределяются в геометрической прогрессии:

$$r^{(1)}=r_{\min},\quad r^{(M)}=r_{\max},$$

$$\frac{r^{(m+1)}}{r^{(m)}}=\gamma\quad m=1, 2, \ldots, M-1,$$

$$\gamma=\left(\frac{r_{\max}}{r_{\min}}\right)^{1/M-1}.$$

Уравнение данного метода, так же как и уравнение (8.75), рассмотрено в работе Уачспресса (1962) при $r_{\min}=a$ и $r_{\max}=b$. Наименьший элемент последовательности M подбирается опытным путем (Писман, 1962).

Существует много других вариантов ADI-методов, но здесь их рассматривать не будем. Интересующиеся должны обратиться к упомянутым ранее источникам. Здесь мы представим еще одну

схему, являющуюся разновидностью рассмотренной ранее схемы Писмана — Рэчфорда (Варга, 1962):

$$\begin{aligned}(\mathrm{H}_1 - r^{(\nu+1)}\mathrm{D})\,u^* &= -(\mathrm{V}_1 + r^{(\nu+1)}\mathrm{D})\,u^{(\nu)} + d,\\ (\mathrm{V}_1 - r^{(\nu+1)}\mathrm{D})\,u^{(\nu+1)} &= -(\mathrm{H}_1 + r^{(\nu+1)}\mathrm{D})\,u^* + d,\end{aligned} \tag{8.76}$$

где D — диагональная матрица, содержащая $(ax_{ij}+ay_{ij})$. Данная разновидность уравнений ADI-метода предложена Уачспрессом и Хабетлером (1960). При моделировании пластов часто используют следующие уравнения (Варга, 1962, с. 242):

$$\begin{aligned}(\mathrm{H} + \Sigma + r^{(\nu+1)}\mathrm{D})\,u^* &= (r^{(\nu+1)}\mathrm{D} - \mathrm{V})\,u^{(\nu)} + d,\\ (\mathrm{V} + \Sigma + r^{(\nu+1)}\mathrm{D})\,u^{(\nu+1)} &= (r^{(\nu+1)}\mathrm{D} - \mathrm{H})\,u^* + d.\end{aligned} \tag{8.77}$$

В данных уравнениях Σ не распределяется симметрично между двумя частями, как это делается в уравнении (8.76). Уравнения метода, обобщенные для многофазной фильтрации, широко используются при моделировании пластов (см. гл. 10 и 11).

Итерационные параметры в данном случае можно выбирать по схеме, описанной ранее для метода Писмана и Рэчфорда. Бьердаммен и Коутс (1969) высказали предположение, что $r_{\min}$ можно оценить из условия:

$r_{\min}$ — минимуму по всей сетке для выражения

$$\left[\frac{\pi^2}{(2I^2)\left(1+\dfrac{(\Delta x)^2\lambda Y}{(\Delta y)^2\lambda X}\right)},\ \frac{\pi^2}{(2I^2)\left(1+\dfrac{(\Delta y)^2\lambda X}{(\Delta x)^2\lambda Y}\right)}\right] \tag{8.78а}$$

$r_{\max}=1$

при $\lambda X(\Delta y/\Delta x)\simeq\lambda Y(\Delta x/\Delta y)$. Для двумерных профильных задач, когда $\lambda X(\Delta z/\Delta x)<\lambda Z(\Delta x/\Delta z)$ они рекомендуют выбирать $r_{\min}$ — минимуму по всей сетке для выражения

$$\left[\frac{\pi^2}{(2I^2)\left(1+\dfrac{(\Delta x)^2\lambda Z}{(\Delta z)^2\lambda X}\right)}\right], \tag{8.78в}$$

а $r_{\max}=2$.

Выбор $r_{\max}=2$, по-видимому, эмпирический. При вычислении $r_{\min}$ узлы, в которых λX, λY или λZ равны нулю, надо исключить. В обоих случаях параметры распределяются в соответствии с геометрической прогрессией между минимальным и максимальным значениями, как это описано ранее. Число параметров можно также определить методом Уачспресса, вычисляя минимальное целое, удовлетворяющее условию

$$(0{,}172)^{M-1} \leqslant \frac{r_{\min}}{r_{\max}}.$$

8.3.7. Строго неявный метод

Как рассматривалось ранее, матричное уравнение (8.4) можно решить путем прямого исключения элементов, разлагая A на произведение нижней треугольной матрицы L и верхней треугольной

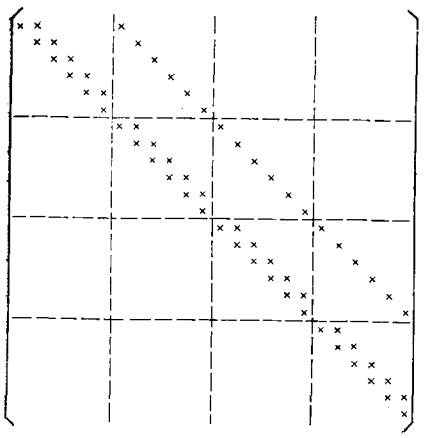


Рис. 8.15. Вид матрицы U по методу Стоуна. Элементы, не равные нулю, обозначены ×. К примеру, для десятой строки эти элементы следующие: 1; $b_{3,2}$; $f_{3,2}$

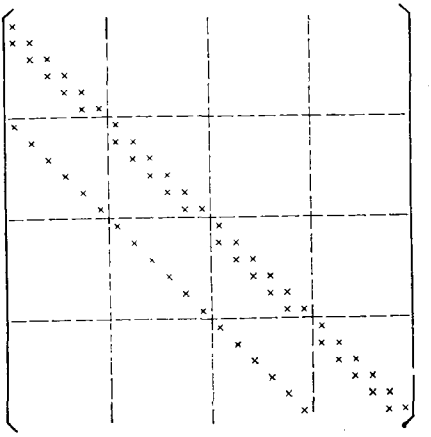


Рис. 8.16. Вид матрицы L по методу Стоуна. Элементы, не равные нулю, обозначены ×. К примеру, для десятой строки эти элементы следующие: $g_{3,2}$; $c_{3,2}$; $a_{3,2}$

матрицы U. В общем случае L имеет элементы, не равные нулю, между главной диагональю и диагональю, соответствующей диагонали значений f на рис. 8.2а. Аналогично матрица U имеет элементы, не равные нулю, между главной диагональю и диагональю, соответствующей значениям g на рис. 8.2а. В процессе исключения каждый из элементов U надо вычислить и сохранить для последующего использования. Как указывает Стоун (1968), для каждого узла сетки следует вычислять приблизительно $I+J$ таких элементов, в результате чего процесс исключения проходит медленно при больших I и J. Основная идея *строго неявного метода* (SIP) состоит в видоизменении A таким образом, чтобы разложение измененной матрицы было проще, и в дальнейшем использовании этой измененной матрицы при определении итерационной схемы для решения уравнения (8.4).

Рассмотрим уравнение (8.4):

$$Au=d$$

и добавим Nu к его обеим частям, а затем добавим и вычтем Au из правой части; при этом получим

$$(A+N)u=(A+N)u-(Au-d). \tag{8.79}$$

Стоун (1968) предложил метод определения матрицы N, когда A+N легко разлагается на произведение LU, причем L и U имеют лишь по три не равных нулю элемента в каждой строке, как это показано на рис. 8.15 и 8.16 для сетки, приведенной на рис. 8.1а.

Элементы матриц L и U можно вычислить рекурсивно по формулам:

$$
\begin{gathered}
g_{ij}=g_{ij}/(1+\alpha b_{i,j-1}),\\
c_{ij}=c_{ij}/(1+\alpha f_{i-1,j}),\\
a_{ij}=a_{ij}+\alpha g_{ij}b_{i,j-1}+\alpha c_{ij}f_{i-1,j}-g_{ij}f_{i,j-1}-c_{ij}b_{i-1,j},\\
b_{ij}=(b_{ij}-\alpha g_{ij}b_{i,j-1})/a_{ij},\\
f_{ij}=(f_{ij}-\alpha c_{ij}f_{i-1,j})/a_{ij},
\end{gathered}
\tag{8.80}
$$

где α — итерационный параметр, рассматриваемый ниже. Используя уравнение (8.79), можно записать итерационную схему

$$(A+N)\,u^{(\nu+1)}=(A+N)\,u^{(\nu)}-(Au^{(\nu)}-d). \tag{8.81}$$

С вычислительной точки зрения лучше написать уравнение (8.81) в форме невязки. Пусть

$$R^{(\nu)}=Au^{(\nu)}-d, \tag{8.82}$$

$$\delta^{(\nu+1)}=u^{(\nu+1)}-u^{(\nu)}. \tag{8.83}$$

Перепишем уравнение (8.81) как

$$(A+N)\,\delta^{(\nu+1)}=-R^{(\nu)} \tag{8.84}$$

или

$$LU\,\delta^{(\nu+1)}=-R^{(\nu)}. \tag{8.85}$$

Элементы L и U вычисляют по уравнению (8.80). Решение (8.85) получаем, определяя такой вектор v, когда

$$Lv=-R^{(\nu)}. \tag{8.86}$$

Элементы вектора v можно вычислить прямой подстановкой. Из уравнений (8.85) и (8.86) видно, что

$$U\delta^{(\nu+1)}=v. \tag{8.87}$$

Данное уравнение можно использовать для вычисления $\delta^{(\nu+1)}$ обратной подстановкой. Стоун (1968) рекомендует использовать последовательность итерационных параметров в цикле. Эти параметры распределены в соответствии с геометрической прогрессией в интервале между 0 и $\alpha_{\max}$, где $(1-\alpha_{\max})$=минимуму по сетке для выражения

$$\left[\frac{\pi^2}{(2I^2)\left(1+\dfrac{(\Delta x)^2\lambda Y}{(\Delta y)^2\lambda X}\right)},\ \frac{\pi^2}{(2I^2)\left(1+\dfrac{(\Delta y)^2\lambda X}{(\Delta x)^2\lambda Y}\right)}\right]. \tag{8.88}$$

Итерационные параметры вычисляют по формуле

$$(1-\alpha_m)=(1-\alpha_{\max})^{m/(M-1)},\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ M-1, \tag{8.89}$$

где M — число параметров для одного цикла. Стоун (1968) рекомендует использовать минимум четыре параметра, причем каждый параметр дважды за цикл (см. гл. 10, раздел 10.3.3). Заметим, что правые части уравнений (8.78а) и (8.88) совпадают.

В каждой итерации элементы матриц L, U и вектора v можно получать рекурсивным способом в соответствии с упорядочением неизвестных (в нашем случае в порядке возрастания i для строк $j=1, 2, ..., J$). Элементы δ в таком случае определяют в обратном порядке. При практическом применении указанной процедуры упорядочение уравнений изменяется на каждой итерации. Это изменение заключается в выполнении описанных выше вычислений в обратном порядке для j при том же изменении i. Таким образом, для нечетных итераций

$$i=1, 2, \ldots, I$$

для каждого значения j в порядке

$$j=1, 2, \ldots, J,$$

а для четных итераций i меняется, как и раньше,

$$i=1, 2, \ldots, I,$$

но это делается для каждого значения j в обратном порядке

$$j=J, J-1, \ldots, 1.$$

Данная перемена направления в некоторых случаях важна для улучшения сходимости решений и может быть осуществлена без отдельного кодирования для четных итераций. Кроме того, можно использовать более двух упорядочений, изменяя также и направление i.

Леткеман (1976) предложил аналогичный метод с иным способом изменения A с целью получения простого LU-разложения. Он считает, что для некоторых задач его метод предпочтительнее метода Стоуна.

8.3.8. Другие методы

В такой книге, как эта, невозможно даже кратко рассмотреть все имеющиеся методы решения уравнения (8.4). Методы, представленные в предыдущих разделах, широко используются в задачах моделирования пластов. В данном разделе упоминаются и другие методы, которые при некоторых условиях можно использовать в задачах пластового моделирования.

Все рассмотренные до сих пор уравнения итерационных методов имели вид

$$u^{(\nu+1)} = Bu^{(\nu)} + k. \tag{8.90}$$

Их можно обобщить, используя результаты решения с нескольких предыдущих итерационных слоев, что можно записать как

$$v^{(\nu)} = Bv^{(\nu-1)} + k, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \text{ а } v^{(0)} \text{ произвольно,}$$

$$u^{(\nu)} = b_\nu v^{(\nu)} + \sum_{i=0}^{\nu-1} b_{i,\nu} v^{(i)}$$

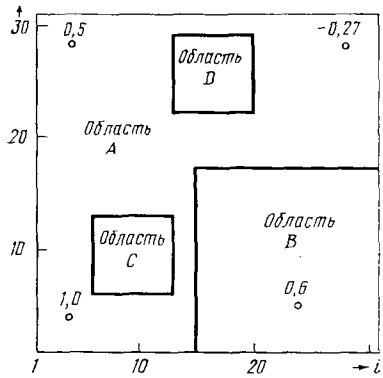


Рис. 8.17. К задаче 3 (Стоун, 1968) $q_{4,4}=1{,}0$; $q_{15,16}=-1{,}83$; $q_{4,28}=0{,}5$; $q_{28,28}=-0{,}27$; $q_{24,5}=0{,}6$

Обычно из суммы требуется взять только один или два члена. Различные подходы к выбору значений в данных уравнениях приводят к разным методам. Среди них метод Ланцоша (1950, 1952), методы наименьших итераций, сопряженных градиентов и скорейшего спуска (Уачсперс, 1966, Энджели и другие, 1959, Фаддеев и Фаддеева, 1963).

Другой класс методов, основанных на подходе, аналогичном использованному Стоуном (1968), предложен Майеринком и Ван дер Форстом (1977). Они называют их методами неполного LU-разложения и комбинируют некоторые из них с методами сопряженных градиентов. Наиболее значительные результаты получены для симметричных матриц. Подходы данного типа заслуживают детального исследования.

8.3.9. Сравнение итерационных методов

Сеттари и Азиз (1973) провели сравнение LSOR-, ADI-, SIP-методов и LSOR-методов с различными схемами коррекции. Ими представлены результаты для семи различных задач. В данном разделе мы подытожим эти результаты, а также сравним их с результатами, полученными по некоторым новым методам. Здесь используется уравнение (8.76) ADI-метода.

Тестовые задачи

Используемые тестовые задачи — модификации задач, рассмотренных Стоуном (1968). Во всех случаях на единичном квадрате бралась равномерная сетка размером 31×31.

Задача 1

$$KX=KY=1,$$
$$P=0.$$

Однородные граничные условия Неймана.

Задача 2

$$KX=1,\quad KY=0{,}01,$$
$$P=0.$$

Однородные граничные условия Неймана.

Задача 3 (рис. 8.17)

$$KX=KY=1 \text{ в области } A,$$
$$KX=1,\quad KY=100 \text{ в области } B,$$
$$KX=100,\quad KY=1 \text{ в области } C,$$
$$KX=KY=0 \text{ в области } D.$$

Однородные граничные условия Неймана.

Задача 4

$$KX_{(1+1/2),j}=0{,}01,\quad KX_{(30+1/2),j}=1{,}0,$$
$$KY_{i,1+1/2}=0{,}01,\quad KY_{i,30+1/2}=1{,}0$$

при линейном изменении параметров между указанными значениями. (Такое поле может быть связано с задачами в цилиндрических координатах.)

$P=0$.

Однородные граничные условия Неймана.

Задача 5

$KX=KY=100$ в двух прямоугольных областях, ограниченных $i=6{,}20$; $j=7{,}16$ и i, $j=23{,}29$.

$KX=KY=1$ в оставшейся области.

$P=0$.

Однородные граничные условия Неймана.

Задача 6

KX и KY те же, что и в задаче 3, но теперь область B ограничена $i=15{,}29$ и $j=3{,}17$.

$P=0$.

Однородные граничные условия Дирихле.

Задача 7

KX и KY те же, что и в задаче 3.

$P=100$.

Однородные граничные условия Неймана.

На рис. 8.18—8.24 сравниваются результаты, полученные при различных итерационных методах для описанных семи задач. На этих рисунках $\|R\|_\infty$—l_∞ — норма вектора невязки, поделенная на сумму источников, а n — эквивалентное число LSOR-итераций, подсчитанное с помощью коэффициентов вычислительных затрат, приведенных в табл. 8.1. Результаты для каждой задачи подытожены ниже.

Задача 1 (рис. 8.18)

Вследствие однородности поля коэффициентов при одномерной коррекции (1DC) почти не улучшаются результаты LSOR-метода, а при 2DC улучшаются лишь ненамного. Поэтому расчеты по этим методам проводятся медленнее, чем по методу LSOR. Наилучшие результаты получают по ADI-методу, затем по методу SIP.

Задача 2 (рис. 8.19)

Как и ожидалось, наиболее эффективен 1DC-метод коррекции, при 2DC получают тот же абсолютный результат, но за бóльшее машинное время. ADI-метод «самый медленный». По данной задаче можно судить о трудностях, связанных с применением ADI-метода для решения анизотропных задач.

Задача 3 (рис. 8.20)

Это первая неоднородная задача. По 1DC скорость сходимости результатов по методу LSOR не улучшается. Применением 2DC для LSOR достигается заметное увеличение скорости сходимости, что приближает эффективность метода к эффективности метода SIP.

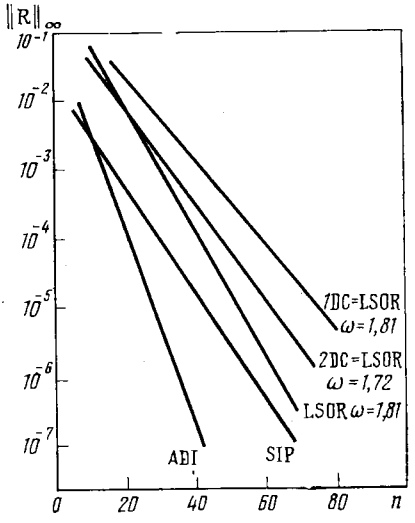


Рис. 8.18. Результаты тестовых расчетов для задачи 1 (Сеттари и Азиз, 1974)

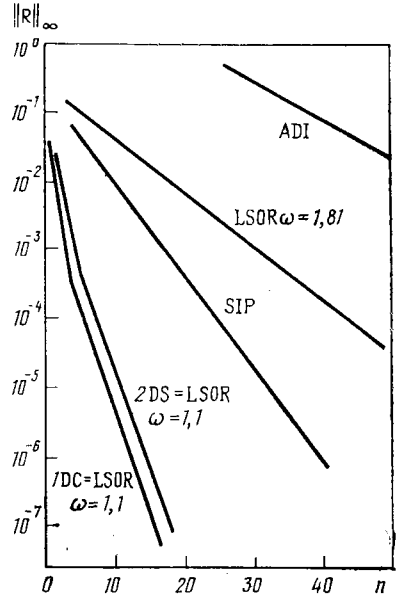


Рис. 8.19. Результаты тестовых расчетов для задачи 2 (Сеттари и Азиз, 1973)

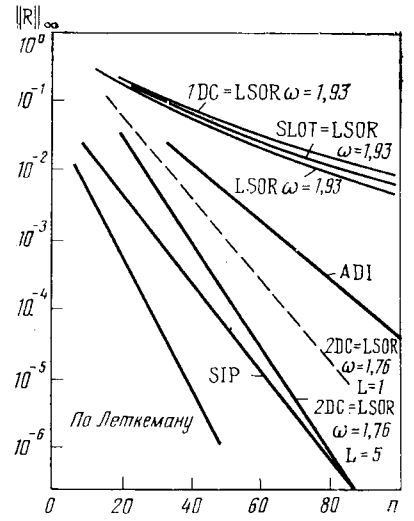


Рис. 8.20. Результаты тестовых расчетов для задачи 3 (Сеттари и Азиз, 1973)

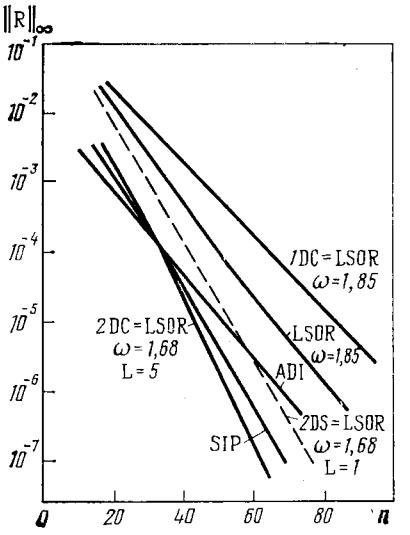


Рис. 8.21. Результаты тестовых расчетов для задачи 4 (Сеттари и Азиз, 1973)

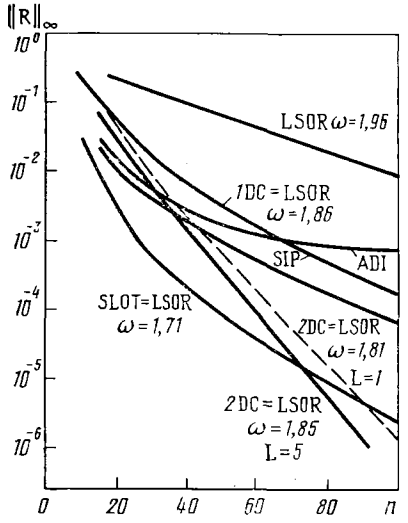


Рис. 8.22. Результаты тестовых расчетов для задачи 5 (Сеттари и Азиз, 1973)

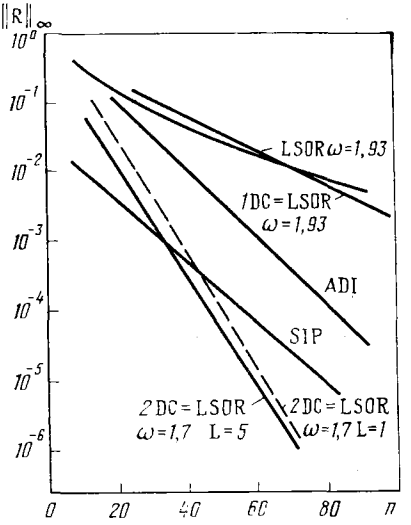


Рис. 8.23. Результаты тестовых расчетов для задачи 6 (Сеттари и Азиз, 1973)

Пример показывает, что одномерная коррекция в самых общих случаях не достаточна. В данном случае применялась и SLOT-коррекция с каждой из однородных подобластей, взятой в качестве отдельного разбиения. По 2DC-методу получают скорость сходимости, близкую к скорости в методе SIP. По методу Леткемана (1976) получают наилучшую для этой задачи сходимость решений.

Задача 4 (рис. 8.21)

Ситуация в основном та же, что и в задаче 3, за исключением того, что методы ADI и LSOR в данном случае эффективнее, чем в задаче 3. Это объясняется тем, что коэффициенты в задаче 4 изменяются намного плавнее, чем в задаче 3. При 1DC также не получают улучшения.

Задача 5 (рис. 8.22)

Как и ожидалось, SLOT-метод Пуссена (1966) оказался очень эффективным для этой задачи, но 2DC еще эффективнее. Все другие методы (включая SIP) показали меньшую скорость сходимости. Заметим, что по 1DC получили лучшие результаты по сравнению с LSOR.

Задача 6 (рис. 8.23)

Данная задача показывает, что метод 2DC также эффективен для задач с граничным условием Дирихле и успешно конкурирует с SIP.

Задача 7 (рис. 8.24)

Эта задача — разновидность задачи 3 и результаты их аналогичны, за исключением результатов по ADI-методу (см. уравнение

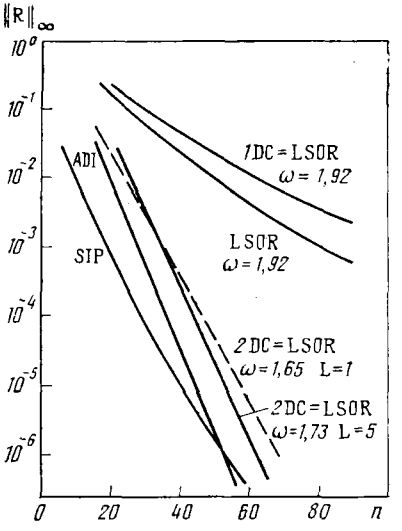


Рис. 8.24. Результаты тестовых расчетов для задачи 7 (Сеттари и Азиз, 1973)

8.76), по которому они намного лучшие при наибольшей для данной задачи скорости сходимости.

Ни один из испытанных методов не был заметно лучше остальных во всех случаях. Однако SIP и 2DC, по-видимому, наиболее эффективны при решении трудных задач, подобных задачам 3, 5 и 6.

Трейлор и Шеффилд (1971) приводят результаты сравнения итерационных методов для некоторых реальных пластовых задач. Эти авторы сравнили различные способы решения уравнения для давления по IMPES-методу с двумерной коррекцией Их результаты подтверждают выводы, основанные на наших собственных результатах, представленных выше, и вновь показывают, что *не существует какого-либо одного, наилучшего для всех задач метода.* Они нашли, что SIP был наилучшим для площадных задач, в то время как LSOR и полуитерационные блочные методы Якоби были наилучшими для профильной задачи.

8.3.10. Практические выводы об использовании итерационных методов

Эффективное применение итерационных методов — дело опыта и во многих случаях требует численного экспериментирования. Рассмотрим некоторые аспекты данной проблемы, важные с практической точки зрения. Это первая и единственная глава, где подробно обсуждаются итерационные методы. По этой причине некоторые из сделанных здесь комментариев справедливы в случае решения уравнений с пятидиагональными матрицами, возникающих при применении методов IMPES или SEQ для решения многофазных (см. гл. 9) и трехмерных задач (см. гл. 11). Это относится также и к вопросам, рассматриваемым в разделах 8.4 и 8.5.

а) Большинство уравнений поточечных итерационных методов могут быть сформулированы и должны всегда решаться с помощью линейных (или в общем случае блочных) итерационных схем.

При использовании LSOR-метода для решения неоднородных задач направление линий может в значительной степени влиять на скорость сходимости. Нужное направление можно оценить аналитически, если интересующая нас область аппроксимируется прямо-

Таблица 8.1

Отношения объемов вычислений для сравнения результатов, полученных при различных итерационных методах

Метод	Отношение объемов вычислений
LSOR	1
SLOT-LSOR	1,1
1DC-LSOR	1,3
2DC-LSOR	1,5
SIP	2
ADI	2
Леткемана	4,3

угольником с постоянными λX и λY, а скорости сходимости определяются и сравниваются для идеализированной задачи. Наиболее часто лучшее направление выбирается путем сравнения расчетных данных с использованием обоих направлений. Заметим, что оптимальные итерационные параметры также различны для разных направлений. По методу LSOR, например, не решая задачу полностью, надо только предсказать ω_b для каждого случая, а затем выбрать направление, дающее наименьшее ω_b.

Как правило, *линии должны выбираться в направлении наибольших проводимостей.* Так, например, для профильных задач (и трехмерных) наилучшим почти всегда является вертикальное направление.

b) Для заданного направления линий имеются два возможных направления обхода области. Во многих случаях изменение этого направления улучшает сходимость. Этот прием хорошо известен для метода SIP, однако его следует использовать и с другими методами. Выбирать направления обхода особенно важно для уравнений гиперболического типа, таких как неявное уравнение для насыщенности по SEQ-методу (см. гл. 5 и 9). В таких случаях направление обхода должно совпадать с направлением течения флюидов.

c) Направление линий по LSOR-методу может также меняться после каждой итерации. Таким образом для изменения направления обхода и направления линий существуют четыре возможности. В литературе не сообщается о приемах их выбора, хотя эти приемы могут оказаться ценными для некоторых задач.

d) Другая разновидность SOR-методов получается с помощью изменения способа упорядочения узлов, линий или блоков. Эта идея связана с методом Хопскотча (см. Гаурлей, 1970; Гаурлей и Макгир, 1971). В литературе также не сообщается об опыте их применения для задач моделирования пластов. Янг (1971) приводит несколько разновидностей SOR-метода и связанных с ним методов.

e) Специальный случай BSOR-метода, когда рассматриваются две линии (2LSOR). Здесь при определенных условиях получают некоторые преимущества по сравнению с методом LSOR, в котором используются одиночные линии (Партер, 1959, 1961; Варга, 1962).

f) Опыт применения ADI-методов показывает, что распределение параметров между $r_{\min}$ и $r_{\max}$ и их порядок не являются решающими, и их сходимость можно оптимизировать только подбором $r_{\min}$. (В самом деле, по уравнениям (8.74) и (8.75) двух методов получают значения $r^{(m)}$, сгущающиеся у разных концов интервала). Коутс (1968) рекомендует использовать геометрическую последовательность с четырьмя-пятью параметрами для задач с $r_{\min} \geqslant 0{,}01$ и с шестью — восемью параметрами, если $r_{\min} \approx \approx 0{,}0001$—$0{,}001$. Те же замечания относятся и к параметрам SIP-метода, о чем свидетельствуют Стин и Фарук Али (1971) и Суарес и Фарук Али (1976), которым не удалось найти общего правила для выбора таких параметров.

g) Подбирая оптимальные итерационные параметры, надо для каждого набора определить асимптотическую скорость сходимости (аппроксимированную средней скоростью сходимости после того, как сходимость становится асимптотической). Во многих случаях вполне достаточно определить изменения вектора невязки $\|R\|$ после некоторого фиксированного, довольно большого числа итераций в зависимости от итерационных параметров и найти оптимальное значение параметра по минимуму этой кривой. Примеры таких кривых, полученных для различных методов в их приложении к задачам 3 и 4 предыдущего раздела, приведены на рис. 8.25. Заметим, что для задачи 4 эти кривые для методов, основанных на LSOR-методе, имеют такой же характер, как и теоретическая кривая зависимости спектрального радиуса от ω (см. рис. 8.11). Другой вид имеет кривая для LSOR-метода в задаче 3. В данном случае сходимость настолько медленная, что даже после 80 итераций интервал асимптотической сходимости не достигается. В действительности для этого случая оптимальное значение ω равно 1,93,

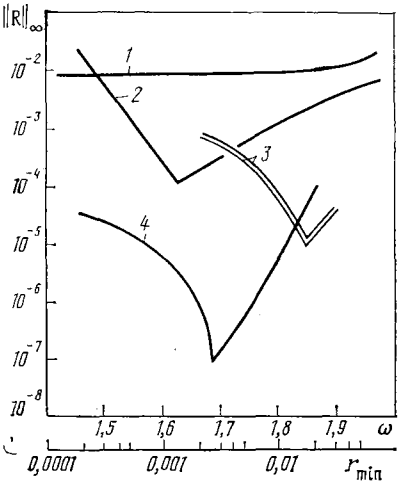


Рис. 8.25. Оптимальные итерационные параметры, определенные опытным способом с помощью графиков $\|R\|$ для фиксированного числа итераций

Методы: *1* — LSOR (80 итераций, задача 3); *2* — ADI (40 итераций, задача 3); *3* — LSOR (80 итераций, задача 4), 1DC-LSOR (80 итераций, задача 4); *4* — 2DC-LSOR (50 итераций, задача 4)

но при 80 итерациях получают худшие результаты, чем при любом другом значении $\omega<\omega_b$. По этой причине оценка ω_b для задач, в которых решения сходятся медленно, более трудна. Это равно относится и к медленно сходящимся методам, описанным в разделе 8.3.3. Сходимость результатов по ADI-методу показана в виде функций минимального параметра $r_{\min}$ в геометрической последовательности шести параметров, определяемых уравнением (8.75) между $a=r_{\min}$ и $b=r_{\max}=1$. На этой кривой отчетливо виден минимум.

h) На сходимость существенно влияет и начальное приближение. Плохое начальное приближение может увеличить число итераций на начальной стадии до того, как будет достигнут асимптотический характер сходимости. О чувствительности SIP к выбору начального приближения сообщали Трейлор и Шеффилд (1971). О чувствительности LSOR-метода к выбору начального приближения, а также к выбору направления обхода можно судить по решению упражнения (8.4). Начальное приближение менее существенно при использовании методов коррекции, поскольку применение коррекции исключает среднее значение большой начальной ошибки.

i) Критерии сходимости, как правило, основаны на опыте. Контроль сходимости обычно сопровождается контролем материального баланса (хотя само по себе соблюдение материального баланса не гарантирует сходимости). Такого рода практический прием рассматривают Трейлор и Шеффилд (1971). Более желательным было бы связать критерий сходимости с погрешностью аппроксимации, поскольку истинную погрешность решения нельзя сделать ниже уровня погрешностей аппроксимации. В литературе по моделированию, имеющейся на настоящий момент, об использовании такого подхода (Брандт, 1977) не сообщалось.

8.4. СРАВНЕНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ И ПРЯМЫХ МЕТОДОВ

У прямых методов, так же как и у итерационных, есть свои достоинства и недостатки. Главным недостатком прямых методов с практической точки зрения является то, что они требуют большой памяти. Кроме этого, при их использовании для решения больших многофазных задач отрицательно сказываются ошибки округления. Главным их достоинством является надежность. Прямым методом неоднородная задача решается так же легко, как и однородная, а объем вычислений и требуемая память зависят только от применяемого метода. Для оптимизации метода решения не нужны пробные решения.

Главный недостаток итерационных методов — их чувствительность к тому, какая задача решается и какие выбраны итерационные параметры (которые также зависят от задачи). Для многих трудных задач сходимость решений некоторых итерационных методов настолько медленная, что их использование становится практически неприемлемым. Обычно поставленную задачу можно ре-

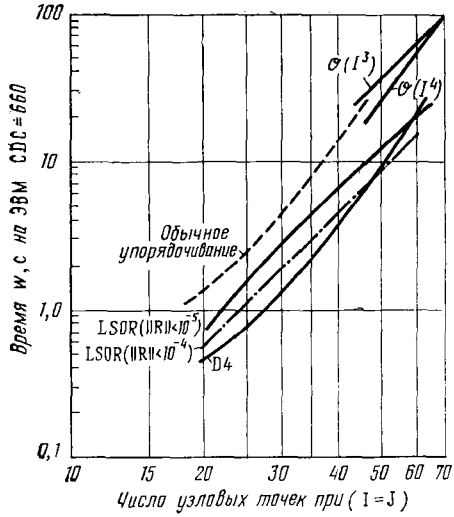


Рис. 8.26. Сравнение эффективности прямых методов (D4 и обычное упорядочение) и метода LSOR

шить итерационным способом с помощью соответствующего выбора метода и связанных с ним итерационных параметров. Однако на выбор метода могут потребоваться значительное время и большие затраты. С другой стороны, для итерационных методов требуется обычно очень небольшая машинная память дополнительно к памяти, нужной для хранения коэффициентов разностных уравнений. Поэтому такие методы можно применять для расчета очень больших систем.

Сравнение объема вычислений, необходимого для решения задачи 1 (см. раздел 8.3.9) LSOR-методом и прямыми методами, приведено на рис. 8.26. Задача решалась на сетках различных размеров от 21×21 до 41×41; при этом источники и стоки сносились в ближайший сеточный узел. Для каждой сетки определялось оптимальное значение ω. Объем вычислений определяется временем работы (в секундах) центрального процессора ЭВМ CDC-6600. Кривая для метода исключения с естественным упорядочением получена по замерам времени для упорядочения D4 по данным рис. 8.9. Заметим, что при больших $I=J$ машинные затраты при прямых методах приближаются к $O(I^4)$, в то время как для итерационных методов они составляют только $O(I^3)$. По этой причине прямое исключение при упорядочении D4 происходит быстрее для меньших сеток, а по LSOR-методу быстрее для больших сеток. Точка пересечения зависит от допустимой погрешности. В первом приближении для погрешности, равной 10^{-5}, результаты по методу LSOR получают быстрее при сетке размером 58×58, в то время как для погрешности, равной 10^{-4}, решение получают быстрее при упорядочении D4 уже на сетке 44×44. Из рис. 8.25 видно, что для рассматриваемой задачи метод естественного упорядочения «не конкурирует» с методом LSOR. Кроме того, данный рисунок можно использовать для сравнительной оценки эффективности итерационных и прямых методов применительно к другим задачам, рассмотренным в разделе 8.3.9.

Некоторые результаты Прайса и Коутса (1974), которые будут приведены в гл. 11 (см. раздел 11.2.5), также подтверждают существование точки пересечения графиков для итерационных и прямых методов. В типичных задачах моделирования пластов при $I>J$ для полных систем при отсутствии недействующих блоков ме-

тод прямого исключения при упорядочении, что и итерационные методы при $J>38$. Если число недействующих блоков значительно, схема D4 может конкурировать с итерационными методами для гораздо больших значений J (приблизительно до 70).

Ву и другие (1973) и Прайс и Коутс (1974) привели результаты сравнения прямых и итерационных методов для практических задач моделирования пластов. Результаты трудно обобщить, поскольку объем вычислений по конкретному итерационному методу зависит от числа итераций, на которые, в свою очередь, влияют: 1) допустимая погрешность, при которой обеспечивается сходимость решений; 2) «природа» задачи (неоднородность, форма и т. д.); 3) значение временного шага (для нестационарных задач). В общем случае при больших временных шагах уменьшается диагональное преобладание матрицы и поэтому увеличивается требуемое число итераций. Кроме того, число итераций зависит от изменения давления за временной шаг. Так, например, для пластов с поддержанием давления число итераций на временной шаг значительно сокращается после начального переходного периода установления давления. Такой же эффект можно наблюдать после каждого изменения дебита.

Все данные, представленные Прайсом и Коутсом (1974), относятся к трехмерным задачам и будут рассмотрены в гл. 11.

Ву и другие (1973) рассмотрели несколько задач моделирования пластов различной трудности и применили при их решении несколько итерационных и прямых методов. Среди рассмотренных были задачи площадного и профильного моделирования пластов, а также моделирования конусообразования. Число решаемых уравнений в различных случаях колебалось от 100 до 2500. Кроме того, эти авторы применили схему псевдооптимального упорядочения и к естественному упорядочению, и к упорядочению D4. Данная оптимальная схема упорядочения основана на модификации критерия Марковича (1957). В ней осуществляется выбор ведущего элемента на диагоналях. Из итерационных методов рассмотрены методы LSOR, LSOR при одномерной коррекции и SIP. По их работе сделаны следующие выводы.

1. Упорядочение D4 может способствовать значительному улучшению результатов при почти квадратной сетке при использовании модифицированного критерия Марковича.

2. Методы, использующие разреженность матриц, более надежны и в общем случае и имеют большую скорость сходимости, чем рассмотренные итерационные методы.

В литературе имеются и другие результаты сравнения итерационных и прямых методов, однако эти результаты трудно сопоставимы из-за различия тестовых условий.

Например, Брэндон (1974) установил, что для «хорошей» параболической задачи методы прямого исключения и SIP дали наилучшие результаты для сетки 5×5, в то время, как для сетки 15×15 был наилучшим метод Гаусса — Зейделя с изменением направления обхода.

На практике прямые методы всегда предпочтительнее для решения малых и средних систем уравнений, возникающих при решении двумерных профильных или радиальных задач. Итерационные методы в конечном итоге становятся быстрее для больших матриц, возникающих при решении площадных и трехмерных задач (будут рассмотрены в гл. 11). Для таких задач применение прямых методов наталкивается на серьезные проблемы, связанные с объемом памяти ЭВМ.

8.5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Литература по решению матричных уравнений очень обширна, и ее объем продолжает быстро расти. В данной главе были подробно рассмотрены только методы, успешно применявшиеся при моделировании пластов. Многие из них, а также другие методы описаны в книгах, выпущенных под редакцией Рейда (1971), Роуза и Уиллафби (1972), Банча и Роуза (1976).

Наибольшие усилия в настоящее время сосредоточены в области исследования прямых методов, среди которых вновь фигурирует метод «выхватывания»* Крона (1963) (см. Харари, 1971, Ледет и Химмельблау, 1970). Методы данного типа, называемые также «шагающими методами»**, являются быстрыми (например, для метода, предложенного Шахамом и Кехатом (1976), объем вычислений составляет $O(I^3)$ для $I=J$), но они безусловно неустойчивы по отношению к ошибкам округления (Банк, 1976). Айзенштат и другие (1976) рассмотрели метод увеличения эффективности гауссова исключения за счет использования нулей внутри оболочки матрицы.

В области итерационных методов Николидис (1975) и Бранд (1977) предложили многослойные методы, полученные в результате обобщения методов коррекции, рассмотренных в разделе 8.3.5. Утверждается, что вычислительные затраты для этих методов оптимальны (т. е. пропорциональны числу неизвестных).

Проводятся также исследования полуитерационных методов, методов сопряженных градиентов (Винсам, 1976) и методов, родственных SIP (Леткеман, 1976).

Упражнения

Упражнение 8.1

Определить требуемый объем вычислений по стандартному гауссовому исключению для матрицы A, если:

a) A — полная матрица;

b) A — пятидиагональная матрица, соответствующая конечно-разностным уравнениям для двумерного случая.

---

* В оригинале — «tearing» — method (прим. перев.)

** В оригинале — «marching methods» (прим. перев.)

Схема решения

a) Число умножений или делений, нужных для исключения первого столбца, равно

$$(N-1)N+(N-1)=N^2-1.$$

Для второго столбца

$$(N-2)(N-1)+(N-2)=(N-1)^2-1$$

и т. д. Суммарный объем вычислений при прямой подстановке, таким образом, составляет

$$W_F=\sum_{i=1}^{N}(i^2-1). \tag{A}$$

Поскольку

$$\sum_{i=1}^{I} i^2=\frac{I(I+1)(2I+1)}{6}, \tag{B}$$

объем вычислений

$$W_F=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}-N. \tag{C}$$

Объем вычислений при обратной подстановке

$$W_B=\sum_{i=1}^{N} i=N(N+1)/2. \tag{D}$$

Поэтому общий объем вычислений

$$W=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}+\frac{N(N-1)}{2}. \tag{E}$$

b) Для ленточной матрицы объем вычислений на исключение неизвестных и обратную подстановку последних M строк

$$W_M=\sum_{i=1}^{M}(i^2+i-1)=\frac{M(M+1)(2M+1)}{6}+\frac{M(M-1)}{2},$$

а для остальных

$$W=\sum_{i=1}^{N-M}[(M+1)^2+M]=(N-M)[(M+1)^2+M].$$

Поэтому общий объем вычислений

$$W=\frac{M(M+1)(2M+1)}{6}+\frac{M(M-1)}{2}+(N-M)[(M+1)^2+M]. \tag{F}$$

В данной формуле пренебрегается тем фактом, что при исключении первых M строк остальные заполняются не полностью. Если учитывать это, затраты будут немного меньше, т. е.

$$W=(N-2M+1)\,[(M+1)^2+M]+\frac{M(M+1)(2M+1)}{3}+$$
$$+M(M-1)+(M+2)^2-M-9.$$

Данную формулу (немного неточно) приводят Прайс и Коутс (1974).

Упражнение 8.2

a) Построить алгоритм для симметричного разложения ленточной матрицы с произвольной шириной ленты.

b) Определить требуемый объем вычислений и сравнить его с объемом вычислений при стандартном исключении в зависимости от ширины ленты.

Схема решения

a) Для симметричной матрицы S с шириной ленты $B=2M+1$, $S=WW^T$, где

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix} w_{11} & & & & & & & \\ w_{21} & w & & & & & & \\ w_{31} & w & w & & & & & \\ \cdot & \vdots & & \cdot & & & & \\ w_{M+1,1} & w_{M+1,2} & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & w_{NN} & \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}^T=\begin{bmatrix} w_{11} & w_{21} & w_{31} & \cdot & w_{M+1,1} & \cdot & \cdot & \\ & w_{22} & w_{32} & & & & \cdot & \\ & & w_{33} & & & & \cdot & \\ & & & \cdot & & & \cdot & \\ & & & & \cdot & & \cdot & \\ & & & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & & & w_{NN} & \end{bmatrix}$$

Из сравнения членов получим:

для всех $i=1, \ldots, N$

$$w_{ij}=\frac{1}{w_{jj}}\left(s_{ij}-\sum_{r=I}^{j-1} w_{ir}w_{jr}\right), \quad \begin{matrix} I=\max(1,\ j-M), \\ j=I,\ \ldots,\ i-1, \end{matrix} \qquad \text{(A)}$$

$$w_{ii}=\left(s_{ii}-\sum_{r=I}^{i-1} w^2_{ir}\right)^{1/2}, \quad I=\max(1,\ i-M). \qquad \text{(B)}$$

b) Для полной матрицы вычислительные затраты для получения элементов i-й строки по (A) и (B) составляют

$$i+(i-1)+(i-2)+\ldots=\frac{i(i+1)}{2}=\frac{1}{2}(i^2+i),$$

а затраты на обратную подстановку равны $2i$, так как следует решить $W^{\mathrm{T}}g=d$ и $Wu=g$.

Общий объем вычислений поэтому равен

$$W_s=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}i^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}i+2\sum_{i=1}^{N}i$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}+\frac{1}{2}N(N+1)\right]+N(N+1) \qquad \text{(C)}$$

Для ленточной матрицы затраты на получение первых M строк составляют

$$\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{2}i(i+1),$$

для оставшихся элементов

$$\sum_{i=M+1}^{N}\frac{1}{2}(M+1)(M+2),$$

а затраты на обратную подстановку будут вдвое больше

$$\sum_{i=1}^{M}i+(N-M)(M+1).$$

Поэтому

$$W_s=\frac{1}{2}\left[\frac{M(M+1)(2M+1)}{6}+\frac{1}{2}M(M+1)+(N-M)(M+1)(M+2)\right]$$
$$+M(M+1)+2(N-M)(M+1) \qquad \text{(D)}$$

Сравнение формул (C) и (D) с уравнениями (E) и (F) упражнения 8.1 показывает, что $w_s/w\to\frac{1}{2}$ при $N\to\infty$. Для фиксированного N симметричное разложение матрицы становится эффективнее с увеличением M, как показано в таблице для $N=10$ и $N=100$:

M	$N=10$		$N=100$	
	W	W_s	W	W_s
1	46	66	496	686
2	94	106	1 084	1 186
3	150	148	1 860	1 768
5	270	230	3 960	3 200
10			12 220	8 250
20			39 940	23 800

Упражнение 8.3

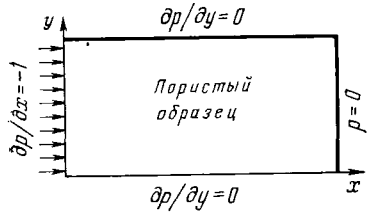
Найти собственные значения матрицы для поточечного метода Якоби (Янг, 1971, раздел 4.6)

$$B_J=D^{-1}(L+H).$$

Упражнение 8.4

Рассмотреть процесс стационарной двумерной фильтрации флюида в показанной ниже системе, описываемый уравнением

$$k_x\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+k_y\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=0,\quad \begin{matrix}0\leqslant x\leqslant L_x,\\ 0\leqslant y\leqslant L_y.\end{matrix} \tag{A}$$



Решить матричное уравнение LSOR-методом при разных начальных приближениях и различных направлениях линий и обхода. Рассмотреть случай, когда $k_x\approx k_y$ и при $k_x\gg k_y$, $L_x\approx L_y$ и $L_x\gg L_y$, а также их комбинации.

ГЛАВА 9

МНОГОФАЗНАЯ ДВУМЕРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

9.1. ВВЕДЕНИЕ

В данной главе рассматривается многофазная двумерная фильтрация. Поскольку все основные постановки и необходимые для моделирования пластов методы решения уже были представлены в гл. 5, в настоящей главе мы будем иметь дело главным образом с некоторыми практическими сторонами двумерного (2-D) моделирования. Вместе с другими новыми понятиями здесь будут рассмотрены вопросы учета нагнетания и отбора, моделирования водоносных пластов и взаимодействия между стволом скважины и пластом в задачах о конусе. Эти понятия больше присущи многомерным задачам и не могли рассматриваться при изучении одномерной (1-D) фильтрации. Поскольку моделирование двумерных задач широко применяется на практике при моделировании реальных двумерных задач попутно рассмотрены многие аспекты разработки месторождений. Более того, можно сказать, что почти каждая задача разработки обладает какой-либо отличительной особенностью, которую необходимо отразить в численной модели. В той или иной степени эти вопросы рассмотрены в гл. 12.

9.2. КЛАССИФИКАЦИЯ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ

Поскольку реальные физические пласты трехмерны, любая постановка математической задачи как двумерной задачи представляет собой некоторое упрощение (это, конечно, еще более справедливо для одномерной постановки). Важно хорошо понимать сделанные в каждом случае допущения, чтобы можно было оценить ограниченные возможности модели.

Двумерное моделирование пластов наиболее распространено. Во многих случаях двумерные модели дают адекватную информацию, стоимость же двумерного моделирования в сравнении с трехмерным намного меньше. Как отмечалось в гл. 7, существует три основных типа двумерных моделей. Здесь будут описаны эти модели для многофазного случая.

9.2.1. Площадные задачи ($x - y$)

У большинства пластов толщина мала в сравнении с их простиранием по площади. Такие пласты похожи на «одеяла» (Коутс и др., 1971), и, естественно, представлять их следует с помощью площадной сетки, схематически показанной на рис. 9.1. В площадных моделях не может быть рассмотрена фильтрация в вертикальном направлении, в направлении z предполагается однородность свойств и отсутствие течения. Трехмерный характер задачи, одна-

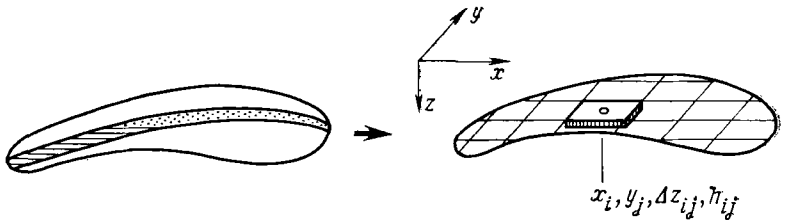


Рис. 9.1. Площадная сетка

ко, частично учитывается в модели заданием толщины Δz и высоты h как функций x и y. Все свойства пласта и такие переменные, как S и p, также функции только x и y и поэтому должны представляться интегральными средними (осредненными по толщине пласта Δz).

С учетом этого можно написать уравнения двухфазной фильтрации в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\Delta z \lambda X_l \left(\frac{\partial p_l}{\partial x} - \gamma_l \frac{\partial h}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\Delta z \lambda Y_l \left(\frac{\partial p_l}{\partial y} - \gamma_l \frac{\partial h}{\partial y}\right)\right] =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi \frac{S_l}{B_l}\right) + q_l\right]\Delta z, \quad l = \mathrm{w},\ \mathrm{n}, \tag{9.1}$$

где

$$S(x, y) = \left[\int_0^{\Delta z} S(x, y, z)\, dz\right] \Big/ \Delta z, \text{ и т. д.}$$

$$\lambda X_l = \frac{k_x k_{rl}}{\mu_l B_l}, \qquad \lambda Y_l = \frac{k_y k_{rl}}{\mu_l B_l}.$$

Предположение об однородности свойств (полное перемешивание в вертикальном направлении) справедливо, если толщина Δz мала по сравнению с шириной переходной зоны. Если это не так, для правильного моделирования течения между блоками k_{rl} и P_c необходимо модифицировать в соответствии со степенью вертикальной сегрегации флюидов. Методы определения этих псевдофункций (называемых также функциями «вертикального равновесия» или VE-функциями), отличных от получаемых в лабораториях зависимостей, характеризующих свойства породы, рассматриваются в гл. 12.

Площадные модели используют при моделировании трехмерных задач с учетом концепции вертикального равновесия и при исследовании эффективности вытеснения по площади.

9.2.2. Профильные задачи ($x - z$)

Профильные модели используют для описания пласта, в котором существенна фильтрация в вертикальном направлении, а фильтрация по горизонтали происходит преимущественно в направле-

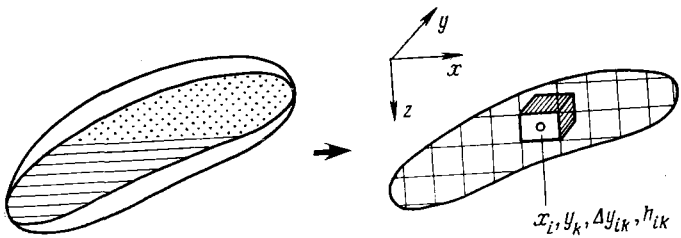


Рис. 9.2. Профильная сетка

нии одной из осей, например оси x (рис. 9.2). Мы пренебрегаем течением в направлении y и учитываем изменение свойств в этом направлении, вводя ширину Δy и другие переменные, как функции x и z. Это означает, что все переменные теперь осреднены в направлении оси y. Тогда дифференциальные уравнения фильтрации в частных производных можно записать как

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\Delta y \lambda X_l \left(\frac{\partial p_l}{\partial x} - \gamma_l \frac{\partial h}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\Delta y \lambda Z_l \left(\frac{\partial p_l}{\partial z} - \gamma_l \frac{\partial h}{\partial z}\right)\right] =$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi \frac{S_l}{B_l}\right) + q_l\right] \Delta y, \quad l = \text{w, n.} \tag{9.2}$$

Заметим, что в данном случае сегрегация флюидов по вертикали может быть смоделирована непосредственно и поэтому функции k_{rl} и P_c должны характеризовать действительные свойства породы. Однако, когда ширина переходной зоны мала в сравнении с вертикальным размером блоков, внутри интервала Δz должны использоваться псевдофункции (см. гл. 12).

Профильные модели часто применяют для определения псевдофункций в целях последующего их использования в площадных моделях, а также при исследовании эффективности охвата пласта вытеснением по его толщине.

9.2.3. Задачи с одиночной скважиной ($r - z$)

Насыщенности и давления наиболее быстро меняются вблизи скважин. Часто необходимо проследить детально за движением воды или газа к добывающим скважинам. Именно с этой целью были первоначально разработаны методы решения задач с одиночной скважиной, обычно называемых «задачами о конусе».

Поскольку течение у скважин в декартовых координатах всегда трехмерно, его нельзя аппроксимировать с помощью рассмотренных двумерных моделей. В данном случае естественно предположение о симметричности течения у ствола скважины и использование цилиндрических координат с осью z, совпадающей с осью скважины (рис. 9.3).

В данной модели предполагается, что область решения осесимметрична, а все свойства породы, так же как и граничные условия,

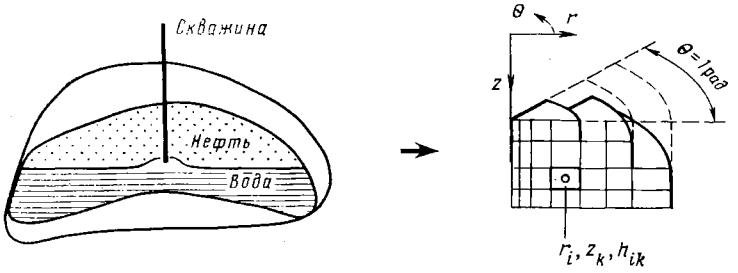


Рис. 9.3. Представление пласта сеткой в цилиндрических координатах

являются функциями лишь r, z и t. Кроме того, при начальных условиях с учетом гравитационных сил также должна поддерживаться симметрия относительно оси z, которая подразумевается вертикальной. После перехода к цилиндрическим координатам уравнения принимают вид (см. гл. 7, раздел 7.10)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\lambda R_l\left(\frac{\partial p_l}{\partial r}-\gamma_l\frac{\partial h}{\partial r}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda Z_l\left(\frac{\partial p_l}{\partial z}-\gamma_l\frac{\partial h}{\partial z}\right)\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi\frac{S_l}{B_l}\right)+q_l,\quad l=\text{w, n.} \tag{9.3}$$

Уравнение (9.3) написано для сектора с углом $\theta=1$ рад, поэтому для вычисления фактических объемов его надо умножить на 2π. Кроме того, все свойства пласта надо осреднить по этому углу.

С помощью моделей конусообразования, как правило, моделируется лишь небольшая часть пласта (эквивалентная нескольким блокам площадной модели). Связь рассматриваемой части с остальным пластом должна быть представлена граничными условиями (поток через внешние границы).

Моделирование конусов воды и газа, моделирование исследования скважин — вот типичные примеры использования моделей с одиночной скважиной.

9.2.4. Общие замечания

a) При записи уравнений фильтрации предполагалось, что k_x, k_y, k_z — проницаемости вдоль главных осей тензора проницаемости. В случае с одиночной скважиной при использовании k_r также предполагается $k_x=k_y=k_r$ (см. гл. 2, раздел 2.3.1).

b) В некоторых случаях мы сохранили гравитационные члены, несмотря на то, что они, как правило, равны нулю, например $\gamma_l(\partial h/\partial x)$ в уравнении (9.2) и $\gamma_l(\partial h/\partial r)$ в уравнении (9.3). Это сделано потому, что данные члены могут быть ненулевыми в общем случае в криволинейной или наклонной системе координат.

9.3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ И ИХ СРАВНЕНИЕ

9.3.1. Дискретизация в двумерном случае

Разработанные в гл. 5 методы дискретизации и решения уравнений могут быть непосредственно применены к двумерным и трехмерным задачам. Единственное отличие составляют дополнительные члены, учитывающие течение в рассматриваемых дополнительных направлениях.

Рассмотрим двумерные уравнения (9.1). Типичный конечно-разностный элемент показан на рис. 9.4.

Заметим, что

$$\Delta x_i = \frac{1}{2}\left[(x_{i+1} - x_i) + (x_i - x_{i-1})\right] = \frac{1}{2}\left[\Delta x_{i+1/2} + \Delta x_{i-1/2}\right]. \quad (9.4)$$

Аналогично находится и Δy (см. гл. 3, раздел 3.5).

Потоковый член в направлении x аппроксимируется так же, как и в одномерном случае,— см. уравнение (5.6). После умножения этого уравнения на $\Delta x_i \Delta y_j$ получим

$$\Delta x_i \Delta y_j \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda X_l \left(\frac{\partial p_l}{\partial x} - \gamma_l \frac{\partial h}{\partial z}\right)\right] \approx \Delta_x \mathrm{T} X_l \Delta_x (p_l - \gamma_l l_l) \equiv$$

$$\equiv \mathrm{T}X_{l\,(i+1/2),\,j}\left[p_{li+1} - p_{li} - \gamma_{li+1/2}(h_{i+1} - h_i)\right]_j +$$
$$+ \mathrm{T}X_{l\,(i-1/2),\,j}\left[p_{li-1} - p_{li} - \gamma_{li-1/2}(h_{i-1} - h_i)\right]_j. \quad (9.5)$$

Проводимость для фазы l

$$\mathrm{T}X_{l\,(i+1/2)\,j} = \lambda X_{(i+1/2),\,j} \frac{A_{(i+1/2),\,j}}{\Delta x_{i+1/2}} = \lambda X_{(i+1/2),\,j} \frac{\Delta y_j \Delta z_{(i+1/2),\,j}}{\Delta x_{i+1/2}}. \quad (9.6)$$

В направлении y

$$\Delta_y \mathrm{T}Y_l \Delta_y (p_l - \gamma_l z) \equiv \mathrm{T}Y_{li,\,j+1/2}\left[p_{lj+1} - p_{lj} - \gamma_{lj+1/2}(h_{j+1} - h_j)\right]_i +$$
$$+ \mathrm{T}Y_{li,\,j-1/2}\left[p_{lj-1} - p_{lj} - \gamma_{lj-1/2}(h_{j-1} - h_j)\right]_i, \quad (9.7)$$

где

$$\mathrm{T}Y_{li,\,j+1/2} = \lambda Y_{i,\,j+1/2} \frac{\Delta x_i \Delta z_{i,\,j+1/2}}{\Delta y_{j+1/2}}. \quad (9.8)$$

Теперь конечно-разностные уравнения можно записать в компактном виде:

$$\left[\Delta \mathrm{T}_l \Delta (p_l - \gamma_l h)\right]_{ij} = \left[\Delta_x \mathrm{T} X_l \Delta_x (p_l - \gamma_l h) + \Delta_y \mathrm{T} Y_l \Delta_y (p_l - \gamma_l h)\right]_{ij} =$$
$$= \frac{V_{ij}}{\Delta t}\Delta_t \left(\phi \frac{S_l}{B_l}\right)_{ij} + Q_{lij}, \quad l = \mathrm{w},\ \mathrm{n}, \quad (9.9)$$

где соответствующий объем блока

$$V_{ij} = \Delta z_{ij} \Delta x_i \Delta y_j, \quad (9.10)$$

Q_{ij} — общий член для блока, учитывающий действие источника.

Конечно-разностные уравнения для (9.3) формально те же. Как

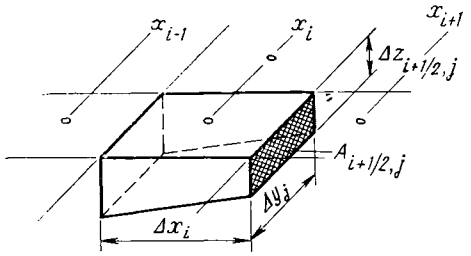


Рис. 9.4. Типичный элемент площадной сетки

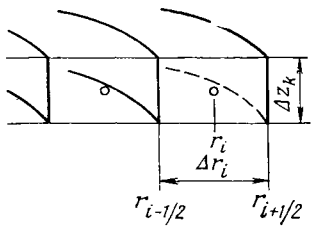


Рис. 9.5. Типичный элемент цилиндрической сетки

подробно обсуждалось в гл. 3 (см. раздел 3.6), границы блоков для определения объема выбирают следующим образом (рис. 9.5):

$$r_{i+1/2} = \left(\frac{r^2_{i+1} - r^2_i}{\ln (r^2_{i+1}/r^2_i)}\right)^{1/2},$$

$$z_{k+1/2} = \frac{1}{2}(z_k + z_{k+1}).$$

Проводимости TR и TZ в данном случае определяются как

$$TR_{l\,(i+1/2),\,k} = 4\pi \frac{r^2_{i+1/2}\Delta z_k}{r^2_{i+1} - r^2_i} \lambda R_{l\,(i+1/2),\,k}, \tag{9.11}$$

$$TZ_{li,\,k+1/2} = \pi \frac{r^2_{i+1/2} - r^2_{i-1/2}}{\Delta z_{k+1/2}} \lambda Z_{li,\,k+1/2}. \tag{9.12}$$

Объем блока

$$V_{ik} = \pi \Delta z (r^2_{i+1/2} - r^2_{i-1/2}). \tag{9.13}$$

Становится ясно, что единственное отличие уравнений (5.5) и (9.9) заключается в членах левой части уравнений. Уравнение (9.9) можно записать в любой из матричных форм (см. гл. 5). Единственное отличие заключается в форме матрицы **T** (и **T′** для методов с неявными проводимостями). Для SS-метода матрица **T** будет блочно-пятидиагональной, а для IMPES-метода — пятидиагональной. Очевидно, что результаты, связанные с существованием и единственностью решения (см. гл. 5, раздел 5.4.2), одинаково справедливы и для двумерного случая. Это следует из симметрии коэффициентов. Однако пределы устойчивости будут различными.

9.3.2. Устойчивость решений SS и IMPES-методов при двумерной фильтрации

Устойчивость решения по отношению к P_c. Оценим пределы устойчивости IMPES-метода при фильтрации несжимаемых флюи-

дов. Применяя линеаризацию, можно вновь записать уравнение, эквивалентное (5.43), в виде:

$$T_w \Delta^2 p^{n+1} = \frac{V_p}{\Delta t} \Delta_t S_w + T_w P'_c \Delta^2 S^n{}_w + Q_w, \tag{9.14a}$$

$$T_n \Delta^2 p^{n+1} = -\frac{V_p}{\Delta t} \Delta_t S_w + Q_n, \tag{9.14в}$$

где

$$T_l \Delta^2 p \equiv T X_l \Delta^2_x p + T Y_l \Delta^2_y p, \tag{9.15a}$$

$$T_w P'_c \Delta^2 S_w \equiv T X_w P'_c \Delta^2_x S_w + T Y_w P'_c \Delta^2_y S_w. \tag{9.15b}$$

Используя указанные обозначения, можно написать уравнения для определения погрешностей e_1, e_2 в виде (5.44). Складывая эти уравнения, получим

$$T_n \Delta^2 e_2^{n+1} + T_w \Delta^2 e_2^{n+1} = T_w P'_c \Delta^2 e_1^n. \tag{9.16}$$

Найдем решение относительно

$$e^n{}_{kij} = \xi^n{}_{kij} \exp(\sqrt{-1}\alpha_{xk} i) \exp(\sqrt{-1}\alpha_{yk} j), \quad k = 1, 2,$$

где

$$\alpha_{xk} = m_{xk} \Delta x, \quad \alpha_{yk} = m_{yk} \Delta y \text{ при } m_{xk}, m_{yk} > 0.$$

Опуская индексы «i» и «j», можно записать

$$T_l \Delta^2 e_2 = -\gamma_{l2} e_2, \quad l = w, n, \quad T_w \Delta^2 e_1 = -\gamma_{w1} e_1,$$

где

$$\gamma_{lk} = T X_l 4 \sin^2 \frac{\alpha_{xk}}{2} + T Y_l 4 \sin^2 \frac{\alpha_{yk}}{2}, \quad l = w, n, \quad k = 1, 2. \tag{9.17}$$

В результате подстановки в уравнение (9.16) получим обобщение уравнения (5.46)

$$e_2^{n+1} = P'_c [\gamma_{w1} / (\gamma_{w2} + \gamma_{n2})] e_1^n. \tag{9.18}$$

После подстановки данного выражения во второе уравнение (5.44)

$$\gamma_{n2} e_2^{n+1} = -\frac{V_p}{\Delta t} (e_1^{n+1} - e_1^n)$$

получим коэффициент усиления для погрешности e_1 в виде

$$\xi_1 = P'_c \gamma_{w1} \frac{\gamma_{n2}}{\gamma_{w2} + \gamma_{n2}} \frac{\Delta t}{V_p} - 1.$$

Наиболее сильное ограничение на Δt получается в случае, если все члены в уравнении (9.17), содержащие $\sin^2$, близки к 1 (Коутс, 1968). Тогда для выполнения условия $|\xi| < 1$ должно быть

$$\Delta t < \frac{1}{2} \frac{V_p}{|P'_c| \dfrac{\Sigma T_w \Sigma T_n}{(\Sigma T_w + \Sigma T_n)}}, \tag{9.19}$$

где

$$\Sigma T_l = T X_l + T Y_l.$$

Это выражение — обобщенное уравнение (5.47) — общее условие, полученное Коутсом. Важное следствие условия (9.19) заключается в том, что при разных Δx и Δy устойчивость решения определяется в соответствии с меньшим размером сетки.

Чтобы продемонстрировать это, перепишем выражение (9.19), используя (9.6) и (9.8), в виде

$$\Delta t < \frac{1}{2}\frac{V_p}{|P'_c|}\left(\frac{1}{\Sigma T_w}+\frac{1}{\Sigma T_n}\right) \leqslant \frac{1}{2}\frac{V_p}{\Delta z\left(k_x\frac{\Delta y}{\Delta x}+k_y\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)}\min\frac{\left(\frac{\mu_w}{k_{rw}}+\frac{\mu_n}{k_{rn}}\right)}{|P'_c|}. \tag{9.20}$$

Уравнение (9.20) справедливо для случая фильтрации флюида в координатах x, y. Его аналог в профильной задаче можно получить заменой Δy на z:

$$\Delta t < \frac{1}{2}\frac{V_p}{\Delta y\left(k_x\frac{\Delta z}{\Delta x}+k_z\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)}\min\frac{\left(\frac{\mu_w}{k_{rw}}+\frac{\mu_n}{k_{rn}}\right)}{|P'_c|}. \tag{9.21}$$

Предположим, что нужно промоделировать процессы в пласте с помощью площадной модели с размерами блоков Δx и Δy_A и толщиной Δz и с помощью профильной модели с размерами блоков Δx и Δz_C и шириной Δy. Обычно $\Delta x \approx \Delta y$, но $\Delta z \ll \Delta x$. Если $k_x \approx k_y \simeq k$, из выражений (9.20) и (9.21) получим

$$R = \frac{\Delta t_{\text{проф}}}{\Delta t_{\text{площ.}}} = 2\frac{k\Delta z^2_C}{k_z \Delta x \Delta y_A}\frac{K}{J}, \tag{9.22}$$

где K — число блоков по вертикали в профильной модели; J — число блоков по направлению y в площадной модели. Мы предположили, что в формуле (9.20) $\Delta z = K\Delta z_C$, а в формуле (9.21) $\Delta y = K\Delta y_A$.

Отношение R часто очень мало. Так, например, если $\Delta z = 3$ м, $\Delta x = \Delta y = 300$ м, $k = 10k_z$ и $K = J$, то $R = 0{,}002$. Это приводит к следующему условию. Чтобы обеспечить устойчивость решения для профильных (или трехмерных) моделей, могут потребоваться более мелкие шаги по времени, чем для площадных моделей. Такое ограничение устойчивости решения — серьезный недостаток IMPES-метода. В противоположность этому SS-метод безусловно устойчив по отношению к P_c.

Определяя в (9.19)

$$\Sigma T_l = T_o + T_w + T_g,$$

получим уравнение для одномерной трехфазной фильтрации.

Устойчивость по отношению к проводимостям. Здесь также легко использовать результаты, полученные для одномерной филь-

трации флюидов. Приведем уравнения для насыщенности (5.58) для двумерной фильтрации:

$$-\frac{df_w}{dS_w}[Q_x(S_{wi}-S_{wi-1})^n_j+Q_y(S_{wj}-S_{wj-1})^n_i]=\frac{V_p}{\Delta t}(S_w^{n+1}-S_w^n)_i, \tag{9.23}$$

где Q_x и Q_y связаны с общими скоростями фильтрации:

$$Q_x=u_x\Delta z\Delta y,\quad Q_y=u_y\Delta z\Delta x.$$

Можно повторить анализ Фурье, приведенный в гл. 5 (см. раздел 5.4), и получить

$$C=\frac{df_w\Delta t}{dS_wV_p}(Q_x+Q_y)<1. \tag{9.24}$$

В результате получим следующее условие устойчивости решения:

$$\Delta t\leqslant\frac{V_p}{\frac{df_w}{dS_w}(Q_x+Q_y)}. \tag{9.25}$$

Данное уравнение можно выразить через скорость продвижения фронта вытеснения. По аналогии с одномерным случаем предположим, что скорость продвижения линии постоянной насыщенности в плоскости x—y определяется выражениями

$$u_{xs}=\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{S_w}=\frac{u_x}{\phi}\frac{df_w}{dS_w},\quad u_{ys}=\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{S_w}=\frac{u_y}{\phi}\frac{df_w}{dS_w}.$$

Тогда можно переписать (9.25) в виде

$$\Delta t\left(\frac{u_{xs}}{\Delta x}+\frac{u_{ys}}{\Delta y}\right)=\frac{l_x}{\Delta x}+\frac{l_y}{\Delta y}\leqslant 1, \tag{9.26}$$

где l_x и l_y — расстояния, проходимые фронтом в направлении x и y. Для сравнения можно написать условие для одномерной фильтрации:

$$\frac{l_x}{\Delta x}\leqslant 1, \tag{9.27}$$

Очевидно, что *ограничение устойчивости решения при двумерной фильтрации сильнее, чем в соответствующем случае при одномерной.* Это легко показать сравнением устойчивости для одномерной радиальной модели и двумерной модели с одиночной скважиной. Поскольку Δz обычно мало, ограничение устойчивости решения в двумерном случае может быть в значительной мере усилено при существенных потоках в вертикальном направлении (см. гл. 5, раздел 5.5).

9.3.3. Сравнение различных методов решения уравнений

Существует четыре основных метода решения: IMPES; явный (по отношению к проводимостям) SS-метод, метод последовательного решения (SEQ) и неявный SS-метод.

Выбор наиболее эффективного для данной задачи метода зависит от двух основных факторов:

а) от объема вычислений, необходимых для получения решения разностных уравнений на одном временном шаге, в свою очередь, зависящего от размера сетки, самого метода и алгоритма, используемого для решения алгебраических уравнений;

в) от предела устойчивости, а следовательно, от максимально возможного шага по времени, используемого в данном методе. Это же определяется характером решаемой задачи. Заметим, что требования к точности также могут ограничить максимальный временной шаг.

9.3.3.1. Объем вычислений на временном шаге и требования к памяти

Для сравнения объема вычислений на временном шаге W_{TS} рассмотрим двумерную прямоугольную сетку с $I \times J$ сеточными узлами и предположим, что объем вычислений определяется главным образом решением матричного уравнения (что справедливо для конечно-разностных методов при достаточно больших I и J). Предположим также, что решение получается с помощью прямого исключения, для которого объем вычислений оценивается как

$$W = CB^2N, \tag{9.28}$$

где C — константа, зависящая от типа ЭВМ и эффективности программы; B — ширина ленты; N — общее число неизвестных. Затем можно определить объем вычислений для всех четырех методов. Результаты их сравнения для задачи двухфазной фильтрации представлены в табл. 9.1, а для трехфазной — в табл. 9.2. В обоих случаях предполагалось, что $I \geqslant J$. В последней графе таблиц показаны объемы вычислений в сравнении с объемами по IMPES-методу. Можно сделать несколько важных замечаний.

а) Объем вычислений сильно зависит от меньшей координаты (J). Можно сравнить объемы вычислений, приходящиеся на один узел за один временной шаг $W_1 = W_{TS}/IJ$. Тогда $W_1 \approx J^2$, т. е. задача будет решена при сетке 50×5 в четыре раза быстрее, чем при сетке 25×10.

b) Объем вычислений для SS-метода наибольший, причем он одинаков для явной и неявной форм. Поэтому, если из-за неустойчивости решения по P_c требуется применение SS-метода, мож-

Таблица 9.1

Сравнение объемов вычислений для двумерной фильтрации

Метод	Ширина ленты B	Число неизвестных N	Объем вычислений на одном временном шаге W_{TS}	W_{TS}/W_{TS} (IMPES)
IMPES	J	IJ	CIJ^3	1
SEQ	J	IJ	$C(IJ^3 + IJ^3)$	2
SS	$2J$	$2IJ$	$8CIJ^3$	8

Таблица 9.2

Сравнение объемов вычислений для двумерной трехфазной фильтрации

Метод	Ширина ленты B	Число неизвестных N	Объем вычислений на одном временном шаге W_{TS}	$W_{TS}/W_{TS\,(IMPES)}$
IMPES	J	IJ	CIJ^3	1
SEQ	J, $2J$	IJ, $2IJ$	$C(IJ^3+8IJ^3)$	9
SS	$3J$	$3IJ$	$27CIJ^3$	27

но использовать его неявную модификацию без существенного увеличения времени счета.

c) Операции по последовательному методу (SEQ) выполняются в 3 — 4 раза быстрее, чем по SS-методу. Это существенно, поскольку при SEQ-методе устраняется неустойчивость, присущая IMPES-методу по отношению к P_c.

d) Объем вычислений для IMPES-метода не зависит от числа фаз, в то время как для SS- и SEQ-методов он значительно возрастает при переходе от двухфазных задач к трехфазным. При решении SS- и SEQ-методами для трехфазных задач требуется в 3 — 4 раза больше вычислений на один временной шаг, чем для двухфазных.

Вообще объем вычислений для SS-метода возрастает в третьей степени числа фаз (числа решаемых дифференциальных уравнений). По этой причине SS-методы пока еще очень мало применяются при решении более трех уравнений.

Подобный анализ можно провести для оценки требуемого объема памяти. И здесь для SS-метода требуется наибольшая память, причем объем памяти возрастает с увеличением числа фаз.

Таблица 9.3

Затраты памяти для дзумерной двухфазной фильтрации

Метод	Объем памяти S	S/S_{IMPES}
IMPES	$2IJ^2$	1
SEQ	$2IJ^2$	1
SS	$8IJ^2$	4

Таблица 9.4

Затраты памяти для двумерной трехфазной фильтрации

Метод	Объем памяти S	S/S_{IMPES}
IMPES	$2IJ^2$	1
SEQ	$8IJ^2$	4
SS	$18IJ^2$	9

В предположении, что требуется запомнить данные для всей ленты матрицы, в табл. 9.3 и 9.4 приводится объем памяти S, нужной при решении задач двух- и трехфазной фильтрации.

Приведенные здесь оценки W_{TS} и S основаны на некоторых упрощающих предположениях, когда не принимается во внимание симметрия матриц и использование методов более эффективных, чем метод обычного исключения неизвестных. Хотя относительные оценки W_{TS} остаются справедливыми для различных способов упорядочения уравнений, они будут отличаться для больших матриц, когда объем вычислений для эфективного прямого или итерационного метода приближается к CN^3 (см. гл. 8). Тем не менее это сравнение достаточно хорошо иллюстрирует соотношение между тремя методами с точки зрения необходимого объема вычислений и требуемой памяти.

9.3.3.2. Общая эффективность

Общая эффективность зависит от объема вычислений на одном шаге по времени и общего числа временных шагов, нужного для получения окончательного решения, т. е. общие затраты определяются выражением

$$W = W_{TS} \times \text{число требующихся временных шагов.}$$

Число временных шагов, нужных для моделирования, зависит от устойчивости метода решения этой задачи. Вообще говоря, без проведения численных экспериментов или не имея опыта решения аналогичных задач невозможно предсказать потребное число шагов по времени. Поэтому можно привести лишь общие соображения.

Для большинства плоских задач пригоден IMPES-метод. Благодаря его быстродействию и небольшим затратам памяти могут быть использованы сетки с большим числом блоков. С помощью этого метода можно решать профильные задачи при незначительных P_c. При большом P_c или мелкой сетке SEQ-метод эффективнее IMPES-метода. Для большинства профильных задач SEQ-метод достаточно устойчив и поэтому будет быстрее SS-метода. Однако для таких трудных задач, как задача о нагнетании газа в законтурную зону пласта или трехфазные задачи, может потребоваться SS-метод.

Наконец, для задач с одиночной скважиной наиболее надежен линеаризованный неявный SS-метод. Некоторые авторы (Спиллет и др., 1973) утверждают, что SEQ-метод можно использовать для моделей общего назначения. По нашему опыту SEQ-метод лишь немного хуже по сравнению с SS-методом для относительно «легких» задач о конусе, но может значительно уступать ему при очень трудных задачах. Кроме того, тот факт, что по SEQ-методу не соблюдается строго материальный баланс, может иногда препятствовать его использованию. Однако SEQ-метод всегда дает значительную экономию в сравнении с SS-методом.

И, наконец, можно повысить эффективность моделирования, используя неявные уравнения лишь там, где это необходимо. Такую идею довольно просто осуществить для комбинации SEQ- и IMPES-методов (Макдональд, Коутс, 1970), но ее воплощение становится затруднительным, когда используется SS-метод (Сет, 1974).

9.4. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

В литературе по разработке нефтяных месторождений вопрос правильного представления граничных условий не подвергался тщательному теоретическому анализу. Граничные условия, характерные для задач гидрогеологии, подробно рассмотрены Бэром (1972).

При моделировании пласта втекание флюидов в систему и вытекание из нее происходят только на внешних границах пласта и на границах-скважинах. При профильном или площадном моделировании скважины должны быть представлены с помощью линейных или точечных источников Дирака, поскольку радиус скважины очень мал в сравнении с размерами сетки. В модели с одиночной скважиной границу можно представить точно. При моделировании пласта поток через все границы обычно отображают с помощью членов-источников (стоков), а действительные граничные условия заменяют однородными граничными условиями Неймана (условиями непротекания) на всей границе. В гл. 7 (см. раздел 7.4.3) мы показали, что данный подход на конечно-разностном уровне эквивалентен дискретизации исходных граничных условий и позволяет одинаково учитывать все границы (т. е. внешние и границы скважин). Поэтому источниковые члены в уравнениях (9.1) — (9.3) всегда будут сингулярными функциями (функциями Дирака), определенными таким образом, чтобы можно было представить истинные граничные условия.

9.4.1. Дифференциальная постановка

Граничные условия для уравнений (9.1) — (9.3) получаются так же, как и для однофазного случая, рассмотренного в гл. 7 (см. раздел 7.4).

При однофазной фильтрации задание расхода через границу обеспечивает единственность решения. В случае многофазной фильтрации ситуация намного сложнее. Здесь должны быть заданы расходы всех фаз, хотя они могут быть и зависимыми. Как указывалось в гл. 7, существует два основных типа границ (см. рис. 7.7 и 7.8).

1. *Непроницаемая граница* (Γ_2). Через непроницаемую границу не течет ни одна из фаз; произведение скорости фильтрации и нормального вектора обращается в нуль:

$$q_l=\lambda_l(\nabla p_l-\gamma_l\nabla h),\ n=0,\ l=\text{o, w, g для } \Gamma_2, \qquad (9.29)$$

где n — нормаль к границе; $\lambda_l=kk_{rl}/\mu_l$ — проводимость по нор-

мали. Заметим, что градиент потенциала должен обращаться в нуль только тогда, когда данная фаза подвижна на границе ($\lambda_l > 0$). Уравнение (9.29) записывается через q при пластовых условиях, поскольку λ_l не содержит объемного коэффициента B_l.

2. *Проницаемая граница* (Γ_1 и Γ_3). В этом случае заданы расходы q_l через границу. Поток в пластовых условиях равен

$$\lambda_l(\nabla p_l - \gamma_l \nabla h)\cdot n = q_l(\Gamma),\ \Gamma = \Gamma_1,\ \Gamma_3. \tag{9.30}$$

На границе Γ_3, где нагнетаются флюиды, расход каждой фазы регулируется, а следовательно, известен. Обычно нагнетается лишь одна фаза или известен состав смеси. Условие нагнетания также часто используют для того, чтобы учесть влияние частей пласта вне выбранной границы Г. В этом случае граница обычно делится на зоны, где нагнетается лишь одна фаза. В обоих случаях известен общий расход Q_{Tl} для данной границы Γ_3, представляющей скважину или зону нагнетания. Поэтому, несмотря на то, что q_l (Г) в уравнении (9.30) неизвестно, можно задать

$$Q_{Tl} = \int_{\Gamma_3} q_l(\Gamma)\, d\Gamma, \tag{9.31}$$

где l — нагнетаемая фаза. Это уравнение скорее характеризует ограничение расхода, чем граничное условие.

Другая ситуация существует на границе Γ_1, где флюиды отбираются (обычно на скважине). На этой границе распределение фаз не может регулироваться, в действительности ищется распределение потоков добываемых флюидов, например, при моделировании конуса. Используется условие, которое опять скорее ограничение, а не граничное условие — это заданный общий дебит нефти на скважине

$$Q_{TO} = \int_{\Gamma_1} q_o(\Gamma)\, d\Gamma, \tag{9.32}$$

или общий дебит жидкости

$$Q_{TL} = \int_{\Gamma_1} (q_o + q_w)\, d\Gamma, \tag{9.33}$$

или общий дебит флюидов

$$Q_{TT} = \int_{\Gamma_1} (q_o + q_w + q_g)\, d\Gamma. \tag{9.34}$$

Можно также задать дебиты при стандартных, а не пластовых условиях.

Проблема определения граничных условий $q_l(z)$ как для границы, где отбираются флюиды, так и для границы с нагнетанием имеет поэтому два аспекта.

1. В данной точке границы расход флюида должен быть разбит на фазы. Эта проблема подробно рассматривалась в гл. 5 (см. раздел 5.7).

2. Расход каждой фазы должен быть распределен по границе. Точное распределение расходов должно, конечно, удовлетворять закону Дарси. Для заданного расхода жидкости можно, например, написать

$$\frac{q_l(\Gamma)}{q_0(\Gamma)}=\frac{\left[\lambda_l\left(\frac{\partial p_l}{\partial n}-\gamma_l\frac{\partial h}{\partial n}\right)\right]_{\Gamma_1}}{\left[\lambda_0\left[\frac{\partial p_l}{\partial n}-\gamma_0\frac{\partial h}{\partial n}\right)\right]_{\Gamma_1}}, \quad l=\mathrm{w},\ \mathrm{g}, \tag{9.35}$$

$$Q_{\mathrm{TL}}=\int\limits_{\Gamma_1}\left[\lambda_{\mathrm{w}}\left(\frac{\partial p_{\mathrm{w}}}{\partial n}-\gamma_{\mathrm{w}}\frac{\partial h}{\partial n}\right)+\lambda_0\left(\frac{\partial p_0}{\partial n}-\gamma_0\frac{\partial h}{\partial n}\right)\right]\mathrm{d}\Gamma. \tag{9.36}$$

Поэтому, если давления и насыщенности на границе известны, данные уравнения можно использовать для определения q_l. Проблема задания граничного условия заключается в распределении расходов при неизвестном решении.

9.4.2. Условия совместимости и ограничения

Распределение расходов вдоль границы не всегда произвольно. Так, например, для добывающей скважины давление на границе должно быть тем же самым, что в ее стволе. В соответствии с распределением давления в стволе скважины, которое можно найти из уравнений многофазного течения в вертикальных трубах, распределяется и отбор вдоль перфорированной границы. Данное условие совместимости должно учитываться, особенно в профильных задачах и задачах о конусе, и будет более подробно рассмотрено в разделе 9.8.

Аналогично этому совместимостью давлений будут определяться перетоки между матрицей и трещиной в трещиноватых пластах.

Подобные условия могут также возникать на линиях нагнетания в случаях, когда используются граничные условия, учитывающие влияние окружающей, немоделируемой части системы, и когда граничные условия для данной модели определяются с помощью моделирования большей части пласта на другой модели.

На практике часто бывает важным другое ограничение, когда скважина работает с заданным дебитом только при достижении минимального забойного давления фонтанирования. В таком случае задают граничные условия в виде комбинации дебита и давления.

9.4.3. Конечно-разностная формулировка граничных условий

9.4.3.1. Разностные уравнения для граничных узлов

Учет граничных условий в конечно-разностном уравнении тот же самый, что и при однофазной фильтрации. Как подробно рассматривалось в гл. 7 (см. раздел 7.4), границы предполагаются непроницаемыми, а расход учитывается с помощью источников.

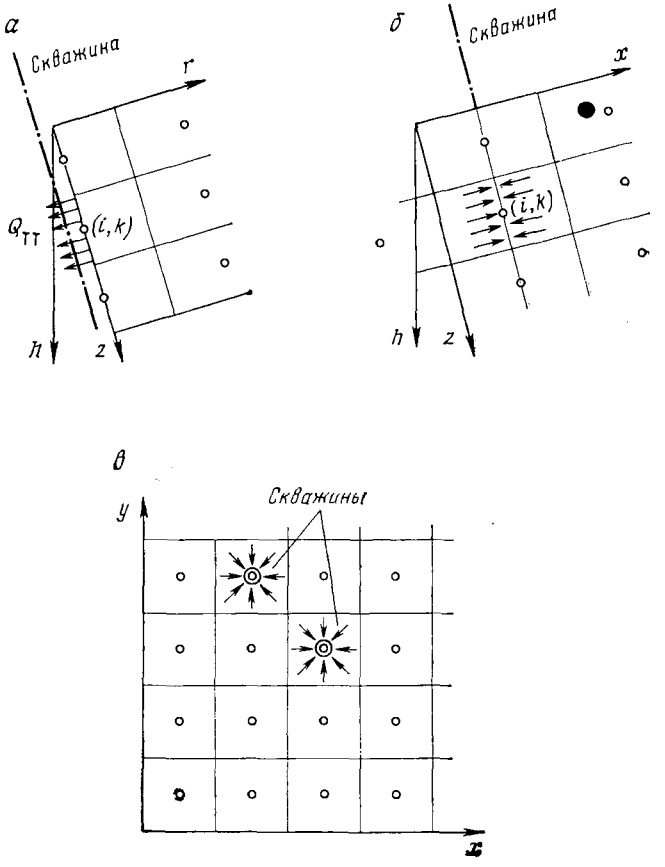


Рис. 9.6. Представление скважин в сетках различного типа
Модели: *а* — одиночной скважины; *б* — профильная; *в* — площадная

Уравнения для граничных узлов вновь можно записать в виде (9.9) при условии, что коэффициенты изменены нужным образом. Так, например, для случая, показанного на рис. 7.9, достаточно определить

$$TX_{li-1/2}=0,\ x_{i-1/2}=x_i$$

и использовать уравнения вида (9.6) и (9.8) для определения TX_l и TZ_l.

Определим *источники* q_l *для данного граничного узла*. Это делается аналогично одномерному случаю (см. гл. 5, раздел 5.7).

Рассмотрим сначала отбор через поверхность отдельного блока (i, k), как показано на рис. 9.6, *а*. Она может представлять собой границу скважины в модели конуса или границу, через которую происходит движение флюида. Тогда уравнение (9.30), как

и в одномерном случае, можно дискретизировать следующим образом:

$$Q_l = -\lambda X_{li}\frac{\Delta z \Delta y}{\Delta x_{i+1/2}}[p_{li+1} - p_{li} - \gamma_{li+1/2}(h_{i+1} - h_i)] = \\ = -\mathrm{T}Q_{li}\Delta\Phi_{li+1/2}. \qquad (9.37)$$

Для скважины, расположенной внутри сетки, в профильной модели (рис. 9.6, *б*) или в площадной модели (рис. 9.6, *в*) расход можно выразить как

$$Q_l = -WI\bar{\lambda}_l\Delta\Phi_l = -\mathrm{T}Q_l\Delta\Phi_l, \qquad (9.38)$$

где WI — известный коэффициент; $\bar{\lambda}_l = \bar{k}\bar{k}_{rl}/\mu_l$ — подвижность, характерная для площади вокруг скважины; $\Delta\Phi$ — разность между динамическим забойным давлением и средним давлением в блоке. Коэффициент WI пропорционален обычному коэффициенту продуктивности скважины, но не учитывает влияния подвижности флюида. Уравнение (9.38) для нефтяной фазы превращается в знакомое уравнение для коэффициента продуктивности

$$Q_o = PI\Delta\Phi_o,$$

если давление в блоке близко к давлению на границе зоны дренирования скважины и если $S_w = S_{wc}$ и $S_g = 0$. Коэффициент WI можно определить через PI при $\lambda_o(S_{wc}, S_g = 0)$ и, если необходимо, учитывая размер блока (который может быть меньше радиуса зоны дренирования). Это можно сделать с помощью методов, рассмотренных в гл. 7, см. раздел 7.7.

Определив проводимости TQ в (9.37) или (9.38), можно непосредственно применять различные варианты и методы распределения расходов, рассмотренные в гл. 5.

9.4.3.2. Распределение отбора между блоками

Формула для распределения отбора между блоками получается из формул для отдельного блока суммированием отборов по всем блокам. При моделировании вертикального сечения пласта или в модели конуса скважина обычно проходит через столбец блоков, и для общего расхода Q_{TT} можно записать:

по методу «распределения в соответствии с потенциалами»

$$Q_{lk} = \frac{(B_l\mathrm{T}Q_l)_k\,\Delta\Phi_{lk}}{\sum_k\sum_l (B_l\mathrm{T}Q_l)_k\,\Delta\Phi_{lk}}\,Q_{\mathrm{TT}}, \qquad (9.39)$$

по методу «распределения в соответствии с проводимостями»

$$Q_{lk} = \frac{(B_l\mathrm{T}Q_l)_k}{\sum_k\sum_l (B_l\mathrm{T}Q_l)_k}\,Q_{\mathrm{TT}}. \qquad (9.40)$$

Надо отметить, что в уравнении (9.40) предполагается не только нулевой градиент насыщенности (т. е. одинаковый градиент потенциала для всех фаз), но также и одинаковый градиент потенциала

во всех слоях. Поэтому при распределении отбора в соответствии с подвижностями можно получить ошибочные результаты в случае большой неоднородности по вертикали и особенно, когда имеются несообщающиеся слои (Нолен и Бэрри, 1972).

Ни один из рассмотренных выше методов не учитывает совместимости условий течения в пласте с условиями течения в стволе скважины. Поскольку строгое решение данной проблемы дается в разделе 9.8, здесь мы опишем приближенную процедуру, которую с успехом можно использовать в профильных и в трехмерных моделях.

Рассмотрим снова вертикальный столбец продуктивных блоков. Предположим, что $\Delta\Phi_{lk}=\Delta\Phi_k=p^{\mathrm{w}}{}_k-p_{ek}$, где $p^{\mathrm{w}}{}_k$—давление в стволе скважин, а p_{lk} известно. Предположив, что перепад давления в стволе скважины определяется гидростатическим напором, условие совместимости получим в виде

$$p^{\mathrm{w}}{}_{k+1}=p^{\mathrm{w}}{}_k+(\bar{\rho}\Delta z)_{k+1/2}, \tag{9.41}$$

где $\bar{\rho}$ — средняя плотность.

В таком случае расходы можно выразить через $p^{\mathrm{w}}{}_k$—давления в стволе скважины у самого верхнего перфорированного блока ($k=K$). Общий расход поэтому

$$Q_{\mathrm{TT}}=\sum_k\sum_l (B_l\mathrm{T}Q_l)_k\left[p_K^{\mathrm{w}}-p_{ek}+\sum_{m=K}^{k-1}(\bar{\rho}g\Delta z)_{m+1/2}\right]. \tag{9.42}$$

Данное уравнение можно решить относительно $p^{\mathrm{w}}{}_k$, тогда из (9.41) получим $p^{\mathrm{w}}{}_k$ и $\Delta\Phi_k$ для каждого слоя для определения

$$Q_{lk}=(B_lTQ_l)_k(p^{\mathrm{w}}{}_k-p_{lk}). \tag{9.43}$$

Уравнение (9.42) решается с использованием давлений на известном временном слое n и поэтому $p^{\mathrm{w}}{}_k=p^{\mathrm{wn}}{}_k$. Учет давления в уравнении (9.43) в явной форме вызывает неустойчивость. Поэтому расходы нужно задавать неявно:

$$\begin{aligned}Q_{lk}&=(B_lTQ_l)_k(p^{\mathrm{wn}}{}_k-p^{\mathrm{n}}{}_{ek})+\\&+(B_lTQ_l)_k(p_{ek}{}^{n+1}-p^n{}_{ek})=\\&=Q^n{}_{lk}+Q'_{lp}\Delta_l p_{ek}.\end{aligned} \tag{9.44}$$

Данная формулировка удовлетворительна при явном учете проводимостей. Однако при выполнении (9.44) не будет выдерживаться общий расход через скважину. Отклонение от нужного расхода пропорционально изменениям давления за временной шаг, и, если требуется точное задание расхода, необходимо использовать итерационную процедуру.

При неявном способе учета проводимостей в расходы также должны входить неявные члены относительно $\Delta_l S_l$, как рассматривалось в гл. 5 (см. раздел 5.7).

9.5. НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Обычным начальным условием для пласта, впервые в литературе рассмотренным Маскетом (1949а), является состояние статического равновесия, при котором скорости всех фаз равны нулю. При этом давления являются только функциями z:

$$\frac{dp_l}{dz} = \gamma_l, \quad l = o, w, g. \tag{9.45}$$

Благодаря капиллярным силам и различию плотностей флюиды разделяются (рис. 9.7). Если предположить, что кривые капиллярного давления и критические насыщенности, характерные для процесса разработки, можно использовать и для оценки состояния равновесия системы, то распределения давления и насыщенности однозначно определяются заданием одного давления и двух значений насыщенностей: $S^r_w > S_{wc}$ на глубине z_{ow} в водонефтяной переходной зоне и $S^r_g > S_{gc}$ на глубине z_{og} в газонефтяной переходной зоне. В переходной зоне обе фазы подвижны. В областях, где фаза неподвижна, силы не обязательно находятся в равновесии. Так, например, для отметок выше z_{wc} (см. рис. 9.7) водонасыщенность равна S_{wc} и поэтому $P_{cow} = P_{cow}(S_{wc})$. Распределение воды в данной зоне определяется градиентом, соответствующим плотности нефти, как это показано на рисунке пунктирной линией. Аналогично, когда водонасыщенность достигает $S_{w\,max}$ и, следовательно, $k_{ro} = 0$, градиент давления в нефти соответствует градиенту, определяемому плотностью воды. Однако обычно нет оснований предполагать существование некоторой конечной критической нефтенасыщенности в водяной законтурной части пласта, где $S_w = 1$. Распределение насыщенности, показанное в левой части рис. 9.7 пунктирной линией, можно получить в результате предшествующей

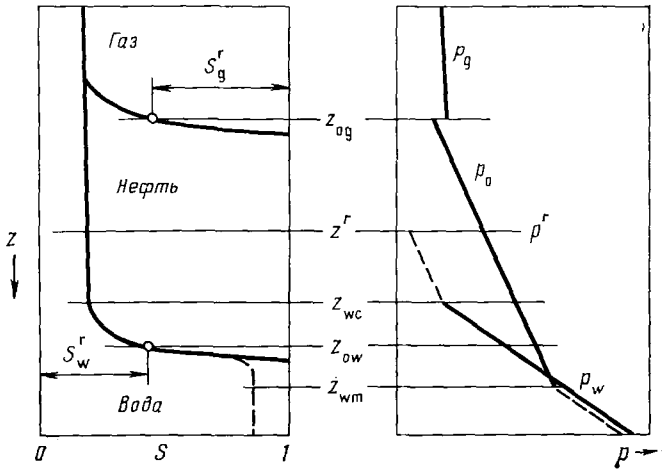


Рис. 9.7. Распределение начальной насыщенности и давления в пласте

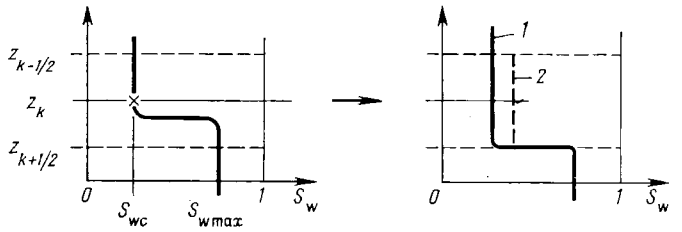


Рис. 9.8. Дискретизация начальных условий:
1 — задание начального состояния модели; *2* — фактическая средняя насыщенность в блоке

разработки пласта в режиме вытеснения нефти подошвенной водой с последующим прекращением этого режима.

В конечно-разностной модели обычно вычисляют $P_{ck}=P_c(z_k)$, а затем определяют $S_{wk}=S_w(P_{ck})$. При этом не учитывается осреднение по толщине блока. В крайнем случае, если $P_c\to 0$, можно получить погрешность в оценке начального объема в пласте, доходящую до $(V_p/2)(S_{wmax}-S_{wc})$. Это иллюстрируется рис. 9.8, где действительная средняя насыщенность для блока показана пунктирной линией. В большинстве случаев такая ошибка не опасна, так как параметры пласта и его объемы определяются не точно. При необходимости осреднение параметров следует проводить, определяя псевдофункции для каждого слоя в пределах его толщины. Затем эти функции должны использовать при моделировании фильтрации флюидов по крайней мере в начальный период. В таком случае результаты моделирования горизонтального течения в пласте будут также согласовываться с данными осредненных насыщенностей. Понятие псевдофункции будет рассмотрено в гл. 12.

9.6. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОДОНОСНЫХ ПЛАСТОВ

Для многих продуктивных пластов источником энергии при добыче из них нефти являются примыкающие к ним водоносные пласты. Водоносные пласты всегда можно промоделировать включением их в расчетную сетку. Поскольку в водоносном пласте происходит лишь однофазная фильтрация, можно использовать более грубую сетку, как это показано на рис. 9.9. Однако в таком случае существенно увеличивается число блоков сетки, требующихся даже тогда, когда для водоносного пласта используется грубая сетка. Увеличение времени расчета, а также необходимой памяти редко бывает оправдано, поскольку характеристики водоносного пласта обычно не так хорошо определены, как для продуктивного.

Так как наличие водоносного пласта вызывает притоки воды в продуктивный пласт, его влияние можно промоделировать, используя сетку только для продуктивного пласта и оценивая соответствующим образом приток воды в блоках, находящихся на его границе с водоносным пластом. Можно также расширить сетку

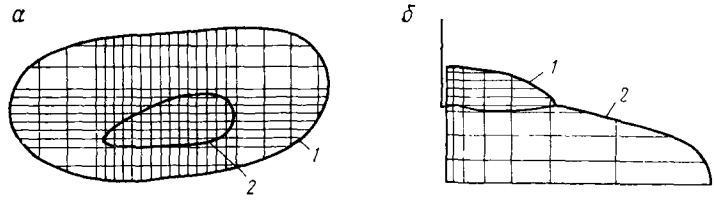


Рис. 9.9. Примеры сеток, охватывающих продуктивный и водоносный пласты
1 — граница продуктивного пласта; *2* — граница водоносного пласта; *а* — площадная сетка; *б* — цилиндрическая сетка

таким образом, чтобы граничные блоки фактически приходились на водоносный пласт (Коутс, 1968).

Ниже опишем способы вычисления притока из водоносного пласта.

а) *Водоносный пласт в виде «горшка».* Если водоносный пласт относительно мал и имеет непроницаемые границы, он во все моменты времени будет находиться в приблизительном равновесном состоянии с продуктивным пластом. Поэтому фильтрация будет наблюдаться только при изменении давления на границе продуктивного и водоносного пластов, т. е. при

$$Q_{\text{A}} = -cV_{p\text{A}}\partial\bar{p}/\partial t, \tag{9.46}$$

где Q_{A} — интенсивность притока в единицах объема в пластовых условиях, сут; c — общая сжимаемость (воды и породы) в водоносном пласте ($c = c_{\text{w}} + c_{\text{R}}$); $V_{p\text{A}}$ — поровый объем водоносного пласта; $\bar{p}$ — среднее давление на границе водоносного и продуктивного пластов (предполагается равным среднему давлению $\bar{p}_{\text{A}}$ в водоносном пласте).

Конечное разностное уравнение (9.46) принимает вид

$$Q^{n+1}_{\text{A}ij} = -cV_{p\text{A}ij}\frac{(p^{n+1} - p^{n})_{ij}}{\Delta t}, \tag{9.47}$$

где $\bar{p}$ заменено давлением в блоке p_{ij}, а $V_{p\text{A}ij}$ — часть объема $V_{p\text{A}}$, относящаяся к блоку ij. Для площадного случая

$$V_{p\text{A}ij} = V_{p\text{A}}\frac{A_{ij}}{\Sigma A_i} = \alpha_{ij}V_{p\text{A}}, \tag{9.48}$$

где A_{ij} — площадь сечения, через которую происходит приток из водоносного пласта в блоке ij; суммирование площадей осуществляется по всем блокам, где имеется приток из водоносного пласта. В неоднородном пласте приток, по-видимому, лучше распределять в соответствии с проводимостями.

в) *Стационарный бесконечный водоносный пласт.* В данной модели (Шилтуис, 1936, Катц и др. 1963) предполагается, что давле-

ние на внешней границе водоносного пласта не меняется. Тогда интенсивность притока вычисляется как

$$Q_A = C_A (p^{(i)}_A - \bar{p}), \tag{9.49}$$

где $p^{(i)}_A$ — давление на внешней границе пласта, предполагаемое постоянным.

В конечно-разностном виде по аналогии с (9.48) определим $C_{Aij} = C_A \alpha_{ij}$, где α_{ij} — коэффициент распределения притока по блокам. Положим $\bar{p} = \frac{1}{2}(p^{n+1} + p^n)_{ij}$ для интервала от t^n до t^{n+1}. Тогда

$$Q^{n+1}_{Aij} = \left[C_{Aij} (p^{(i)}_A - p^n_{ij}) - \frac{1}{2} C_{Aij} (p^{n+1} - p^n)_{ij} \right]. \tag{9.50}$$

с) *Нестационарный водоносный пласт.* Выше описаны два крайних случая. Для водоносного пласта в виде «горшка» приток не зависит от давления (среднее давление в водоносном пласте $\bar{p}_A$ меняется вслед за давлением $\bar{p}$). Для стационарного водоносного пласта $\bar{p}_A$ не изменяется: $\bar{p}_A = p^{(i)}_A$. В действительности интенсивность притока зависит от промежуточных условий, ее можно получить решением уравнения нестационарной фильтрации в водоносном пласте. Данный подход был развит Ван Эвердингеном и Херстом (1949) и Херстом (1958) для аналитических расчетов, что позволяет определить $Q_A(t)$ для некоторых простых случаев. Аналитические решения можно получить для двух основных случаев при постоянном перепаде давления $(p^{(i)}_A - \bar{p})$ или постоянном расходе Q_A (которые называют случаями с постоянным давлением и постоянным расходом на границе). Обычно эти результаты получают с помощью «функции влияния» $QI(t)$ и $PI(t)$ по формулам:

для постоянного давления

$$W(t) = \int_0^t Q_A(t) = QI(t)\,(p^{(i)}_A - \bar{p}); \tag{9.51}$$

для постоянного расхода

$$p^{(i)}_A - \bar{p}(t) = PI(t)\, Q_A. \tag{9.52}$$

Функции QI и PI зависят от геометрии и свойств водоносного пласта. Так, например, для цилиндрического водоносного пласта с внешним радиусом r_e приближенное решение уравнения (9.52) дано в гл. 7 (см. раздел 7.7). Для многих случаев функции влияния табулированы (Катц и др., 1963, Катц и Коутс, 1968). Так как для реального водоносного пласта $\bar{p}$ и Q_A переменны, точное решение можно получить по принципу суперпозиции в сочетании с расчетом материального баланса по пласту (Ван Эвердинген и Херст, 1949). Упрощенный, пригодный для применения на ЭВМ метод предложен Картером и Грейси (1960). По этому методу для

расхода на границе используется функция влияния $PI(t)$ и в результате получено выражение

$$Q_{\mathrm{A}ij}^{n+1}=\alpha_{ij}\,[a(t)+b(t)\,(p^{n+1}-p^{n})_{ij}], \tag{9.53}$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — функции $PI(t)$ и полного притока $W(t)$ (определение a и b — см. в упражнении 9.1).

Простой подход, пригодный для произвольного конечного водоносного пласта, предложен Фетковичем (1971). По его методу интенсивность притока в течение временного шага n определяется из уравнения для расхода

$$\Delta t^{n}Q_{\mathrm{A}ij}^{n+1}=\Delta t^{n}\alpha_{ij}J_{\mathrm{A}}^{n}\,(\bar{p}_{\mathrm{A}}^{n}-p_{ij}^{n+1}), \tag{9.54}$$

где $\bar{p}^{n}{}_{A}$ — среднее давление в водоносном пласте в момент t^{n}; J^{n} — коэффициент продуктивности для водоносного пласта. После завершения шага по времени определяют полный приток W^{n+1} и с помощью уравнения материального баланса подсчитывают новое значение $\bar{p}_{\mathrm{A}}{}^{n+1}$ для водоносного пласта. Феткович показал, что для определения J_{A} на временном шаге, даже для нестационарного режима водоносного пласта, можно использовать псевдостационарные или стационарные уравнения (см. гл. 7, раздел 7.7). Таким образом, его метод совершенно аналогичен методу учета отдельных скважин, приведенному в гл. 7, и при соответствующем выборе функции расхода (9.54) учитывает все три типа поведения водоносного пласта, рассмотренные выше.

9.7. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОЩАДНЫХ И ПРОФИЛЬНЫХ ЗАДАЧ

В данном разделе рассмотрим некоторые специальные методы, пригодные и для площадных, и для профильных задач.

9.7.1. Использование криволинейной сетки

Криволинейная сетка подробно рассматривалась в гл. 7 (см. раздел 7.10.2). Такую сетку можно использовать для расчетов многофазной фильтрации флюидов. Сонье и Шомэ (1974) использовали ортогональную криволинейную сетку при площадном моделировании. Они предположили, что решение для случая стационарного однофазного (потенциального) течения с источниками и стоками в местах расположения скважин можно использовать для получения эквипотенциалей и линий тока и затем применить эти линии для построения ортогональной сетки. Это приводит к большему измельчению сетки около скважин, что, в свою очередь, может потребовать неявного учета проводимостей.

Сетку данного типа удобно использовать при исследованиях процесса вытеснения нефти при площадной системе заводнения. С помощью такой сетки можно точно предсказать время прорыва воды и давление в скважинах при меньшем числе блоков, чем с помощью обычной неравномерной декартовой сетки, сгущающейся у скважин. Согласно Робертсону и Ву (1976), дополнительный

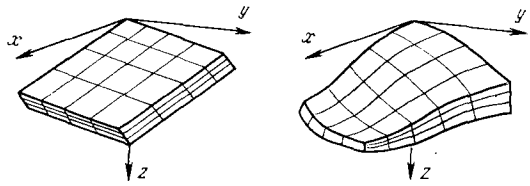


Рис. 9.10. Построение сетки для наклонных пластов

выигрыш от применения криволинейной сетки состоит в уменьшении ориентационного эффекта (см. раздел 9.7.3).

Построение сетки для моделирования всей области при большом числе произвольно расположенных скважин — более трудная задача. Поскольку число блоков, которое можно использовать, обычно ограничено возможностями машины, криволинейная сетка используется редко, а особенности течения в окрестности скважин изучают с помощью методов, рассматриваемых в следующем разделе. Хирасаки и О'Делл (1970) рассмотрели более общий случай трехмерного пласта с переменными углом наклона и толщиной. Они показали, что при определении проводимостей по размерам блоков, полученным их проекцией на горизонтальную плоскость, а толщины блоков — измерением по вертикали, можно получить большие погрешности. Точное же решение достигается при использовании криволинейной сетки и разностного оператора общего вида, включающего члены со смешанными производными.

На практике, если угол наклона пласта мал или почти постоянен, хорошие результаты получают при повороте декартовых координат и совмещении их с плоскостью напластования, как это показано на рис. 9.10 (слева). При переменных угле наклона и толщине пласта, как это показано на рис. 9.10 (справа), приближенно ортогональную сетку можно построить, проектируя площадную декартовую сетку на среднюю плоскость напластования, а затем строя вертикальную сетку, перпендикулярную действительной плоскости напластования. Вертикальную сетку, построенную таким образом, можно использовать для профильных моделей. Координата z указывает направление, в котором определяется толщина блоков для площадных моделей. Во всех случаях для вычисления проводимостей можно использовать уравнения (7.111) при условии, что все размеры на площади определяются не в горизонтальном и вертикальном направлениях, а в направлении координат x, y и Δz — перпендикулярно к ним.

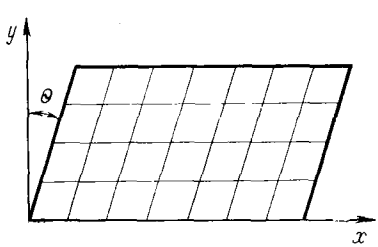


Рис. 9.11. Скошенная система координат

Хирасаки и О'Делл (1970) также указали на погрешности, связан-

ные с использованием скошенных координат в плоскости площадной модели (рис. 9.11). Такая сетка удобна для моделирования скважин, расположенных в линию, сбросов и трещин. Они показали, что пренебрежение членами со смешанными производными при $\theta \geqslant 15°$ приводит к большим погрешностям. Следовательно, данную сетку можно использовать при обычных разностных уравнениях только при малых углах падения пласта ($\theta < 5°$).

9.7.2. Учет отдельных скважин

Поскольку размер блока велик в сравнении с радиусом скважины, с помощью площадной и профильной моделей нельзя предсказывать насыщенности и давления в скважине без специальных приемов.

9.7.2.1. Предсказание давления на скважине

В задачах однофазной фильтрации динамическое давление на скважине можно определить по давлению в блоке, предполагая радиальность течения в пределах площади блока. Соответствующие этому условию уравнения получены в гл. 7 (см. раздел 7.7).

Такой же подход одинаково применим и для многофазной фильтрации, если Q — общий расход в пластовых условиях, а λ — общая подвижность:

$$\bar{\lambda}_{\mathrm{T}} = k\left[\frac{k_{\mathrm{ro}}}{\mu_{\mathrm{o}}} + \frac{k_{\mathrm{rw}}}{\mu_{\mathrm{w}}} + \frac{k_{\mathrm{rg}}}{\mu_{\mathrm{g}}}\right].$$

Расходы отдельных фаз при этом определяют так, как описано в разделе 9.4. Уравнения (7.60), (7.63), (7.64) или (7.72) полезны в случае, когда необходимо моделировать работу скважины при фиксированном забойном давлении p_{w} (граничное условие с заданным давлением). Неизвестный расход Q_l^{n+1} в соответствии с этими уравнениями выражается в виде

$$Q_l^{n+1} = \mathrm{C}_l\,(p_{\mathrm{wf}} - p_{l\,ij}^{n+1}). \tag{9.55}$$

Чтобы использовать это выражение, нужно включить $C_l p_{\mathrm{wf}}$ в вектор Q и изменить соответствующий диагональный элемент матрицы Т.

При использовании формулы (9.55) нужно точно определить значения подвижности $\bar{\lambda}_{\mathrm{T}}$. В этом случае следует принимать во внимание изменения насыщенности в окрестности скважины, которые нельзя определить по средним насыщенностям блока. В следующем разделе будут описаны методы определения насыщенностей на скважине (или распределения расходов) по насыщенностям блока. Некоторые из них можно также использовать для получения точного давления на скважине и для определения $\bar{\lambda}_{\mathrm{T}}$.

9.7.2.2. Отбор в случае многофазной фильтрации

Относительный отбор каждой фазы (ВНФ, ГНФ) зависит от насыщенностей на скважине. Поскольку насыщенность S_{lij}—средняя по блоку сетки, рассчитанная на основе подвижностей, определенных по S_{lij}, значения ВНФ и ГНФ обычно слишком низки. Такие расчеты приводят к оптимистическому прогнозу темпов добычи нефти. Эта проблема — общая для двумерных и трехмерных моделей.

Существует несколько методов, которые можно использовать для получения достоверного прогноза. Их общая идея состоит в получении соотношений, описывающих конусообразование у скважины, в виде функции средней насыщенности блока $S_{av}=S_{ij}$ (возможно, и некоторых других параметров). При этом методы отличаются способом предсказания поведения конуса. Результат можно использовать в модели пласта двояко:

а) Определяя кривые псевдофазовой проницаемости для скважин, которые отличаются от кривых для фильтрации в пласте. Эти кривые затем используют для распределения отбора. Сдвиг кривых псевдофазовой проницаемости относительно кривых для пласта зависит от процесса вытеснения. Пример показан на рис. 9.12. При вытеснении подошвенной водой псевдокривая k_{rw} будет выше пластовой кривой (кривая *1* на рис. 9.12). Однако при вытеснении краевой водой псевдокривая располагается ниже кривой для пласта (кривая *2*), поскольку вода будет вторгаться в блоки на периферии (Страйт, 1973). Данное понятие псевдофункции рассматривается в гл. 12.

в) Представляя соотношения для ВНФ (ГНФ) в виде функции от S_{av}. Хотя для каждой скважины должно быть свое единственное соотношение, часто можно вывести общее соотношение с такими параметрами, как толщина пласта и т. д. (Страйт, 1973, Блейдс и Страйт, 1975).

Очевидно, что оба способа отображения поведения конуса эквивалентны. Кратко рассмотрим три типа методов для получения указанных соотношений, представляющих также три различных уровня сложности:

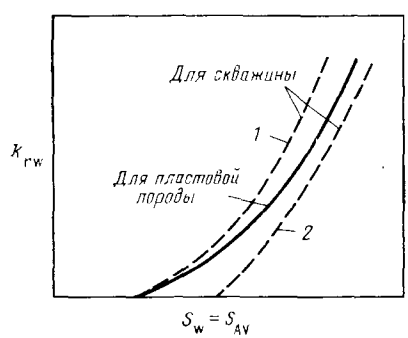


Рис. 9.12. Псевдоотносительные проницаемости для скважины

а) *Аналитические соотношения для расчета конусообразования.*

Классическое соотношение Собосински и Корнелиуса (1965), с помощью которого можно предсказать только момент прорыва, распространено Бурназелем и Джинсоном (1971), Телковым (1971) и Коттином (1971)

на случай прогноза ВНФ. Однако в общем случае эти соотношения не надежны, если не имеется достаточной информации об истории разработки для их уточнения в зависимости от эксплуатационных характеристик. Метод данного типа был также предложен Шапелером и Хирасаки (1976). Результаты, полученные по эмпирическому квадратному уравнению относительно доли воды по этому методу, хорошо согласуются с результатами некоторых исследований на модели конуса.

в) *Соотношения, основанные на моделировании конусообразования.*

Поскольку при получении аналитических соотношений делается ряд упрощенных предположений, для практических задач соотношения обычно получают с помощью двумерного моделирования конусов. Общий поровый объем модели конуса должен быть равен поровому объему соответствующего блока на площадной модели. Приток в модель конуса приближенно можно определить при площадном моделировании с использованием пластовых кривых k_r скважины. При использовании различных псевдокривых для данной скважины на площадной модели эти притоки будут меняться. Поэтому псевдофазовые соотношения должны итерационно обновляться до тех пор, пока обе модели не предскажут одинаковое поведение ВНФ и ГНФ. В большинстве случаев чувствительность соотношений к интенсивности притока мала и в итерациях нет необходимости.

с) *Соединение модели скважины (конуса) с моделью пласта.*

Это наиболее строгий, но и наиболее дорогой подход. В работе Акбара и других (1974) описывается использование одномерной радиальной модели совместно с двумерной площадной моделью. При данном подходе получают приемлемое распределение давления. Однако, в результате пренебрежения вертикальным размером, в этом случае не прогнозируется характер конусообразования. Мрозовски и Ридингс (1974) разработали способ соединения двумерных радиальных моделей с трехмерной (или двумерной) моделью пласта. По этой процедуре на скважине определяют и давления, и насыщенности. По данному методу для получения точного значения притока в модели конуса на временном шаге осуществляются итерации между двумя моделями. Такой подход может оказаться недопустимо дорогим.

9.7.3. Явления, связанные с ориентацией сетки

Рассмотрим результаты моделирования вытеснения в ограниченной пятиточечной схеме. Вследствие симметрии разностную сетку можно сориентировать двумя способами (рис. 9.13). Соответственно их называют диагональной и параллельной сеткой. Поскольку наименьшим элементом симметрии является половина диагональной сетки, ее использование с вычислительной точки зрения наиболее

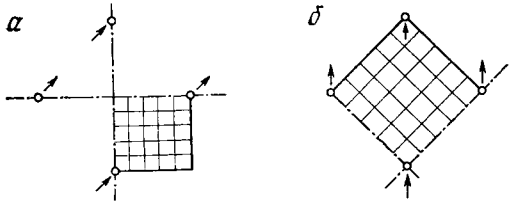


Рис. 9.13. Определение диагональной и параллельной сеток:
а — диагональная сетка; *б* — параллельная сетка

эффективно. Однако обнаружено, что при некоторых условиях при двух ориентациях сетки получают совершенно различные ответы, что и было названо *влиянием ориентации сетки*. Если моделируется нагнетание в отдельно взятой скважине, контуры насыщенности будут выглядеть так, как на рис. 9.14,*а* и *б*. Оба эти решения *неверны*, поскольку фронт должен быть по существу радиальным, пока он не подойдет достаточно близко к добывающим скважинам. Для ранних моментов времени два полученных численно профиля насыщенности, если повернуть систему координат, почти совпадают. Очевидно, что предсказанный прорыв будет *«ранним»* для параллельной сетки и *«поздним»* для диагональной сетки. Важный факт, впервые отмеченный Коутсом и другими (1974) и подтвержденный другими исследователями, состоит в том, что при измельчении сетки результаты конечно-разностного решения сходятся к двум различным значениям при двух ориентациях сетки. Это указывает на то, что данное явление не может быть лишь результатом погрешностей аппроксимации (подробный пример был рассмотрен в гл. 5, см. раздел 5.5.1).

На характерную остроугольную форму фронтов насыщенности впервые указали Тодд и другие (1972). Эти авторы установили, что при «несмешивающемся вытеснении» с отношением подвижностей между 1 и 10 (неблагоприятном) ориентационный эффект относительно слаб, и показали, что двухточечное взвешивание относительной проницаемости вверх по потоку уменьшает данный эффект, но решение все же сходится к двум различным результатам. Из работ Тодда и других (1972) и Спивака и других (1977) следует, что ориентационный эффект при моделировании заводнения относительно слаб. Однако Коутс и другие (1974) показали, что этот эффект может быть очень большим при моделировании вытеснения паром с очень высоким, неблагоприятным отношением подвижностей. Данная проблема еще более осложняется при моделировании «смешивающегося вытеснения», где результаты непри-

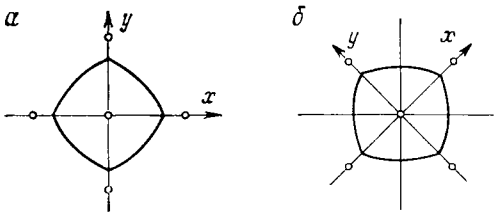


Рис. 9.14. Расчетные контуры насыщенности около нагнетательной скважины
а — диагональная сетка; *б* — параллельная сетка

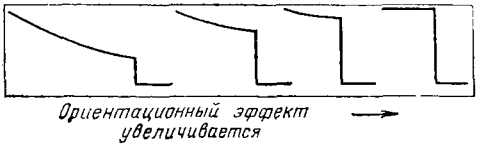


Рис. 9.15. Зависимость ориентационного эффекта от характеристик, определяющих долю в потоке

емлемы даже для умеренных отношений подвижностей (Сеттари и др., 1977).

9.7.3.1. Факторы, влияющие на ориентационный эффект

В общем случае ориентационный эффект возрастает с увеличением фронтовой насыщенности, наиболее сильно он проявляется при поршневом (или смешивающемся) вытеснении (рис. 9.15). Форма фронта зависит от кривых k_r и отношения подвижностей.

С другой стороны, ориентационный эффект снижается при наличии членов дисперсионного типа (капиллярное давление и гравитация при фильтрации несмешивающихся флюидов и физическая дисперсия в смешивающемся вытеснении), стремящихся сгладить фронт (рис. 9.16).

При решении задач смешивающегося вытеснения ориентационная ошибка возрастает с увеличением «неблагоприятного» отношения подвижностей и убывает с увеличением дисперсии. Этот эффект почти отсутствует в случае единичного, или «благоприятного», отношения подвижностей.

Ориентационный эффект в профильных задачах трудно оценить из-за отсутствия аналитических решений. Мы верим, однако, что здесь этот эффект при обычной конечно-разностной аппроксимации играет положительную роль. В профильных задачах трудно правильно смоделировать гравитационные языки вдоль кровли или подошвы пласта. В результате численной дисперсии (погрешностей аппроксимации (иногда для получения требуемой точности приходится использовать большое число блоков в вертикальном направлении (рис. 9.17). Ориентационный эффект сетки приводит к преимущественному течению вдоль линий сетки, препятствующему в данном случае вертикальному перемешиванию, вызванному численной дисперсией.



Рис. 9.16. Зависимость ориентационного эффекта от дисперсионных членов

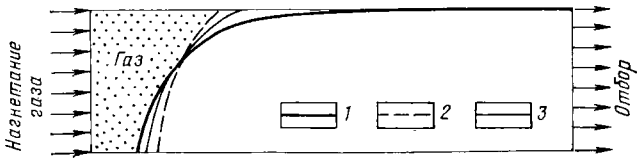


Рис. 9.17. Эффект численной дисперсии в профильной задаче о нагнетании газа.
1 — точное решение; *2* — конечно-разностное решение, грубая сетка; *3* — конечно-разностное решение, мелкая сетка

9.7.3.2. Методы исключения ориентационного эффекта

Происхождение ориентационного эффекта можно показать с помощью следующего рассуждения.

Рассмотрим нагнетание воды в нефтяной пласт и предположим, что используется явный относительно проводимостей метод. В этом случае водонасыщенность в произвольном блоке сетки может стать больше насыщенности связанной водой только тогда, когда одна из проводимостей для данного блока станет не равной нулю. На первом шаге по времени может измениться только насыщенность блока, где осуществляется нагнетание. На втором временном шаге вода становится подвижной в двух соседних узлах и т. д., как это показано на рис. 9.18.

Фронт подвижной воды продвигается в виде прямой линии, расположенной по диагонали относительно координатной системы. Такой фронт получается при очень сильном ориентационном эффекте (см. Коутс и др., 1974). Причина заключается в том, что подвижное состояние воды в узле (i, j) на следующем шаге по времени может обеспечить ее подвижность в узлах $(i+1, j)$ и $(i, j+1)$, но не в $(i+1, j+1)$. Это является следствием применения пятиточечной конечно-разностной аппроксимации. Данную проблему, по-видимому, нельзя решить удовлетворительно без использования в разностном шаблоне диагональных (угловых) узлов, что подтверждается рассматриваемыми ниже результатами проведенных недавно исследований.

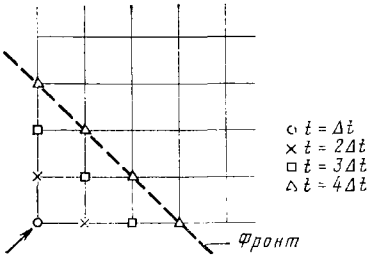


Рис. 9.18. Распространение подвижного состояния при явном определении проводимостей

Холлоуэй и другие (1975) предложили метод, по которому осуществляется коррекция потоковых членов, учитывающая течение по диагонали. В сочетании с двухточечным взвешиванием это приводило к уменьшению ориентационной ошибки. Их метод, по-видимому, не приводит к полному решению проблемы. В основном улучшение достигалось благодаря использованию метода двухточечного

взвешивания вверх по потоку Тодда и других (1972). Однако было получено лишь частичное уменьшение ошибки и, хотя оно существенно в случае умеренного ориентационного эффекта, в наиболее тяжелых условиях улучшение не достигнуто, что для случая смешивающегося вытеснения показали Сеттари и другие (1977). Это же подтвердили Холлоуэй и другие (1977), оказавшиеся не в состоянии исключить ориентационный эффект сетки для задачи о нагнетании газа. Решения без ориентационного эффекта можно получить с помощью либо вариационных, либо девятиточечных конечно-разностных аппроксимаций. Было показано, что вариационные аппроксимации эффективны для смешивающегося (Сеттари и др., 1977) и несмешивающегося (Спивак и др., 1977) вытеснения.

Конечно-разностный метод, использующий девятиточечную аппроксимацию, разработан Яношиком и Маккракеном (1976). Следует заметить, что данный метод аналогичен методу вариационной аппроксимации с использованием базисных функций-шапочек, которая, как было установлено, также не обладает ориентационным эффектом (Сеттари и др., 1977).

При необходимости моделирования неустойчивого вытеснения с помощью обычной пятиточечной аппроксимации использование параллельной сетки дает более реалистические результаты как для случая вытеснения паром (Коутс и др., 1974), так и для смешивающегося вытеснения (Сеттари и др., 1977). Другой подход предложен Робертсоном и Ву (1976), утверждающими, что использование криволинейной сетки (см. гл. 7, раздел 7.10) исключает ориентационные эффекты в случае несмешивающегося вытеснения. Однако результатов сравнения численного решения с истинным в доказательно сделанного утверждения они не приводят.

9.8. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ С ОДИНОЧНОЙ СКВАЖИНОЙ

Главной проблемой при решении задач с одиночной скважиной является устойчивость конечно-разностных уравнений. Вследствие того, что в модели используется радиальная сетка, поровые объемы наименьших блоков около скважины и наибольших блоков, расположенных на расстоянии внешнего радиуса, обычно отличаются на несколько порядков. Поскольку устойчивость уравнений с явным учетом проводимостей (см. раздел 9.3.2) будет определяться размером наименьшего блока, этот метод обычно требует использования неприемлемо малых временных шагов. Впервые это было экспериментально показано Уэлджем и Уэбером (1964). Как показали Блэр и Уэйнауг (1969), для данного типа задач необходим неявный учет проводимостей (рассмотренный в гл. 5, раздел 5.5.2). Фактически все методы неявного учета проводимостей, рассмотренные в гл. 5, были разработаны для решения задач о конусе. Наряду с этими методами можно также использовать метод последовательного решения, рассмотренный в гл. 5.

9.8.1. Учет членов отбора (модель скважины)

Особенно важен учет членов отбора. Спивак и Коутс (1970) показали, что в случае неявного учета членов отбора многократно увеличивается устойчивость решения при явном вычислении проводимостей.

Проводимости в членах отбора можно учесть неявным способом, описанным в гл. 5 (см. раздел 5.7.2). Если продукция отбирается из нескольких слоев, следует также учитывать характер падения давления в стволе скважины (условие совместимости, см. раздел 9.4.2).

Уравнения для членов отбора называют также «моделью скважины» (Шаппелер и Роджерс, 1974).

Простейшую модель скважины получают при распределении расходов с учетом подвижностей — см. уравнение (9.40). Нолен и Берри (1972) исследовали погрешности, вызванные этим упрощением, сравнивая его с правильным распределением отбора в соответствии с уравнением (9.39). Для задачи о конусе Блэра и Уэйнауга (1969) они установили, что погрешности незначительны пока скважина вскрывает зону с очень низкой проницаемостью. Они также отметили, что явная оценка $\Delta\Phi$ в (9.39) приводит к неустойчивости решения, которая устраняется с помощью модели скважины, состоящей из дополнительного столбца блоков, представляющих ствол скважины с очень высокой проводимостью по вертикали. Шаппелер и Роджерс (1974) представили модель скважины, основанную на уравнении (9.41) и (9.43), с учетом уравнения для расхода (9.43) в неявном виде:

$$Q_{lk}^{n+1} = (B_l \mathrm{T} Q_l)_k^n (p_k^{\mathrm{w}} - p_{ek}^n) + (B_l \mathrm{T} Q_l)'_{s} \cdot (p_k^{\mathrm{w}} - p_{ek}^{n+1}) \Delta_t S + (B_l \mathrm{T} Q_l)_k^n \Delta_t p_{ek}.$$

Как $p^{\mathrm{w}}{}_k$, так и нелинейный член в данном уравнении итеративно пересчитываются так, чтобы реализовывался нужный расход.

Сонье и другие (1973) предложили модель скважины, в которой условие совместимости также учитывается с помощью уравнения (9.41), но вместе с этим моделируется и концевой эффект (см. гл. 5, раздел 5.7). Однако условия на выходе модели у них не учитываются в конечно-разностной схеме и требуют итерации.

Модель скважины, согласованную с дискретизацией уравнений, представили Сеттари и Азиз (1974а). Здесь одинаково строго учитывается и течение флюидов в стволе скважины, и концевой эффект. Эта модель рассматривается ниже. Использование сетки с распределенными узлами и узлами, расположенными на контуре скважины, дает возможность естественным образом включить уравнения, описывающие модель скважины, в конечно-разностные уравнения. Ниже мы опустим нижний индекс i для узлов сетки (i, k), в которых расположены скважины, и для простоты рассмотрим только случай двухфазной фильтрации.

9.8.1.1. Модель для центральной скважины (сетка с распределенными узлами)

Рассмотрим сначала распределение расходов из блока в слое k. До прорыва воды, т. е. если $S_{wk}<S_{wo}$, отбор ее равен нулю: $Q_{wk}=0$. После прорыва выполняется условие $S_{wk}=S_{wo}$ или, если уравнения решаются относительно давлений,

$$p_{ok}-p_{wk}=P_{ck}=P_c(S_{wo}). \tag{9.56}$$

Уравнение для водной фазы в точке k после прорыва воды заменяется уравнением (9.56). После получения решения отбор воды можно определить, подставляя результаты решения в исходное конечно-разностное уравнение для данной точки. В соответствии с определением невязки по уравнению (5.18) его можно записать как

$$Q_{wk}^{n+1}=R_{wk}^{n+1}. \tag{9.57}$$

Поскольку

$$Q_{ok}^{n+1}=R_{ok}^{n+1}, \tag{9.58}$$

в случае заданного полного отбора нефти решение будет удовлетворять

$$Q_{ok}^{n+1}=\left(\frac{R_{ok}}{\sum\limits_k R_{ok}}\right)^{n+1} Q_{To}, \tag{9.59}$$

$$Q_{wk}^{n+1}=\begin{cases}0, & \text{если } S_{wk}<S_{wo}\\ Q_{ok}^{n+1}\left(\dfrac{R_{wk}}{R_{ok}}\right)^{n+1}, & \text{если } S_{wk}=S_{wo}.\end{cases} \tag{9.60}$$

По этим уравнениям в отличие от уравнения (9.39) можно распределить расход другим способом.

Теперь рассмотрим отбор флюидов из нескольких слоев. Давление в стволе скважины p^w должно удовлетворять уравнениям многофазного течения в трубах. Течение в вертикальных трубах рассматривается Говье и Азизом (1972). Пренебрегая эффектами, связанными с кинетической энергией, общее падение давления можно выразить в виде

$$dp^w=H_g dz+dp_f, \tag{9.61}$$

где $H_g dz$ — гидростатический напор; dp_f — падение давления, обусловленное трением. Член, связанный с трением, можно представить как

$$dp_f=Q^w{}_o F_f,$$

где $Q^w{}_o$ — расход нефти в стволе скважины; F_f — функция трения, которая может быть определена одним из известных методов.

Уравнение (9.61) можно теперь дискретизировать как

$$p^{w}{}_{k+1/2}=p^{w}{}_{k+1}-p^{w}{}_{k}=H_{gk+1/2}(z_{k+1}-z_k)+$$
$$+F_{fk+1/2}Q^{w}{}_{ok+1/2}. \qquad (9.62)$$

Это соотношение заменяет аппроксимацию (9.41). В сетке с распределенными узлами давление в узлах сетки, в которых расположены скважины, предполагается тем же самым, что и в стволе скважины, т. е. $p_k=p^{w}{}_{k}$. Используя это условие, можно решить (9.62) относительно $Q^{w}{}_{o}$:

$$Q^{w}_{ok+1/2}=\frac{1}{F_{fk+1/2}}[p_{k+1}-p_k-H_{gk+1/2}(z_{k+1}-z_k)]. \qquad (9.63)$$

Уравнение материального баланса в стволе скважины можно теперь записать в виде (рис. 9.19)

$$Q^{w}{}_{ok+1/2}-Q^{w}{}_{ok-1/2}+Q_{ok}{}^{n+1}=0, \qquad (9.64)$$

где $Q_{ok}{}^{n+1}$ — дебит слоя k.

Конечно-разностное уравнение (9.58) для продуктивного блока можно записать как

$$q_{or}+q_{oz\,k+1/2}-q_{oz\,k-1/2}-q_{oacc}=Q_{ok}{}^{n+1}, \qquad (9.65)$$

где q_{or} и q_{oz} — расходы между блоками, определяемые по рис. 9.19, q_{oacc} — аккумулятивный член. Используя (9.64), можно исключить $Q_{ok}{}^{n+1}$ из (9.65). Как это показано на рис. 9.19, результирующее уравнение можно записать в виде

$$q_{or}+\bar{q}_{oz\,k+1/2}+\bar{q}_{oz\,k-1/2}-q_{oacc}=0, \qquad (9.66)$$

где

$$\bar{q}_{oz\,k+1/2}=q_{oz\,k+1/2}+Q^{w}{}_{ok+1/2}.$$

Поскольку $Q^{w}{}_{o}$, выраженные с помощью (9.63), имеют тот же вид, что и члены, описывающие фильтрацию в вертикальном направлении, уравнение (9.66), представляющее модель скважины, можно получить из (9.65), опуская член, учитывающий отбор, и изменяя проводимость и силы гравитации в членах, определяющих фильтрацию в вертикальном направлении, следующим образом:

(а) заменить TZ_o на $TZ_o+\frac{1}{F_f}=TZ_o+TW$,

(в) заменить γ_o на $\gamma_o+\frac{TW}{TZ_o+TW}H_g$.

Только в уравнении для верхнего блока, из которого отбирается продукция, будет член, учитывающий отбор нефти и представляющий суммарный отбор нефти Q_{To}, как это показано на рис. 9.19. Отбор по слоям можно определить из (9.57) и (9.58) после получения решения. Члены TW и H_g зависят от неизвестных расходов, и теоретически для решения требуются итерации. Эта зависимость, однако, слабая и на практике итерации не производятся.

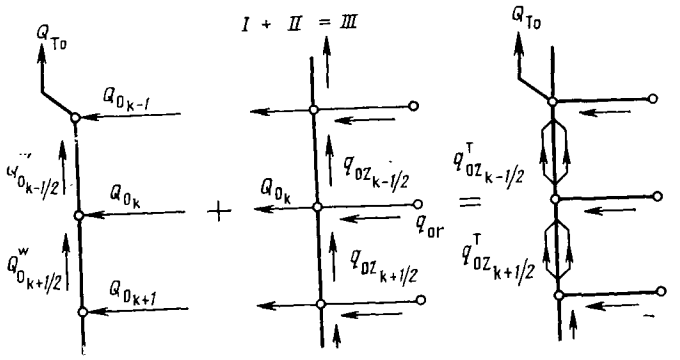


Рис. 9.19. Комбинация уравнений для ствола скважины и уравнений для пласта (II).

I — уравнение для ствола скважины; *II* — уравнение для пласта; *III* — модифицированное уравнение

Описанная модель обладает следующими свойствами.

1. Единственный член отбора, встречающийся в уравнениях, представляет полный отбор Q_{To}.

2. И концевой эффект, и падение давления в стволе скважины описываются строго.

3. Уравнение модели скважины не меняет структуры уравнений.

4. Члены, относящиеся к скважине, автоматически учитываются неявно точно так же, как и межблочные проводимости, полный расход же всегда обеспечивается.

Модель можно использовать и в случае трехфазной фильтрации, если задать отбор газа в виде

$$Q_{gk}^{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad S_g < S_{go} \\ Q_{ok}^{n+1} \left(\dfrac{R_{gk}}{R_{ok}} \right)^{n+1} & \text{if} \quad S_g = S_{go} \end{cases}$$

где S_{go} — газонасыщенность, при которой газонефтяное капиллярное давление минимально.

При задании вместо дебита забойного давления уравнение для нефтяной фазы для верхнего отбирающего блока K заменяется уравнением

$$p_{oK} = p_{wf}.$$

Если задается полный отбор жидкости, данная формулировка потребует итераций, поскольку Q_{To} не фиксирован.

9.8.1.2. Модель скважины для блочно-центрированной сетки или для случая нецентральной скважины

Рассмотрим случай либо блочно-центрированной сетки, либо скважины, вскрывающей внутреннюю колонку блоков. В обоих случаях давление на скважине будет отличаться от давления в блоках, как это видно из уравнения (9.55). Тогда вследствие большого размера блока должен использоваться обычный способ распределения отбора, по которому пренебрегают концевым эффектом. Если скважина эксплуатируется при заданном забойном давлении, условие совместимости выполнить легко. Если известно давление $p^{w}{}_{K}$ в верхнем продуктивном блоке, $p^{w}{}_{k}$ для всех слоев можно вычислить из (9.62), используя расходы на предыдущем временном шаге. Затем расходы определяются независимо для каждого слоя. Если использовать обозначения уравнения (9.55), неявно учитываемый расход можно представить в виде

$$Q^{n+1}_{lk} \approx C^{n}_{lk}(p^{w}_{k} - p^{n}_{lk}) - C^{n}_{lk}\Delta_t p_{lk} + (C_{lk})'_s (p^{w}_{k} - p^{n}_{lk})\,\Delta_t S_{wk} = \\ = Q^{n}{}_{lk} + (Q_{lk})'_p \Delta_t p_{l\,k} + (Q_{lk})'_s\,\Delta_t S_{wk}, \qquad (9.67)$$

где C_{lk} — либо проводимость между центром блока и стволом скважины для задачи о конусообразовании на блочно-центрированной сетке, либо коэффициент продуктивности для скважины, расположенной внутри блока.

Если задан постоянный расход, можно использовать тот же метод при условии, что для обеспечения предписанного расхода неизвестное давление $p^{w}{}_{k}$ уточняется с помощью итераций. По другому методу $p^{w}{}_{k}$ рассматривается в качестве неизвестной величины в (9.67), к системе же добавляется уравнение для расхода. Данный подход использовался при однофазном моделировании газовой скважины Коутсом и другими (1971); он также был рассмотрен Тримблом и Макдональдом (1976). Дополнительное уравнение получается суммированием (9.67):

$$p^{w}_{K}\sum C_{ok} + \sum (Q_{ok})'_p \Delta_t p_{ok} + \sum (Q_{ok})'_s \Delta_t S_{wk} = \\ = Q_{To} - \sum_{k=K+1}^{k_{max}} \left[C_{ok} \left(\sum_{m=K}^{k-1} \Delta p^{w}_{k+1/2} - p^{n}_{ok} \right) \right], \qquad (9.68)$$

где $\Delta p^{w}{}_{k+1/2}$ в правой части можно определить из (9.62). Хотя мы могли бы решить расширенную задачу, удобнее использовать приведенное выше уравнение для исключения $p^{w}{}_{k}$ как неизвестного в каждом из уравнений, содержащих $Q_{lk}{}^{n+1}$. Поскольку (9.68) содержит $\Delta_t p$ и $\Delta_t S_w$ для всех продуцирующих блоков, данная операция приведет к заполнению матрицы таким образом, что уравнение для произвольного блока с отбором будет иметь ненулевые коэффициенты при всех неизвестных для всех блоков $k=K, \ldots, k_{max}$. Если $k_{max}-K>1$, измененная структура матрицы может увеличить ширину ленты для некоторых способов упорядочения

неизвестных, что потребует модификации алгоритмов для итерационных методов. Например, для любого линейного метода с линиями, взятыми в направлении оси z, система уравнений, соответствующая линии, содержащей скважину, не может быть решена с помощью алгоритма Томаса, так как ширина ленты подматрицы равна $2(k_{max}-K)+1$.

9.8.2. Сопоставление устойчивости решения и эффективности различных способов учета проводимостей

Некоторые авторы исследовали способы неявного учета коэффициентов для двухфазной задачи, рассмотренной Блэром и Уэйнаугом (1969). Полные данные можно найти у Сеттари и Азиза (1974а). С использованием различных версий SS-метода решение этой задачи получили Леткеман и Ридингс (1970), Нолен и Берри (1972) и Сеттари и Азиз (1974а). Леткеман и Ридингс использовали постановку в p, S с линеаризованными неявными проводимостями, Нолен и Берри — ту же постановку с линеаризованным и полунеявным учетом проводимостей, а Сеттари и Азиз использовали постановку относительно p_o, p_w с ньютоновскими итерациями по матрице проводимостей, а также модель скважины, описанную в разделе 9.8.1.1. Все авторы установили, что модели устойчивы при временных шагах вплоть до 100 сут. Влияние временных шагов на результаты показано на рис. 9.20 и 9.21. Результаты на

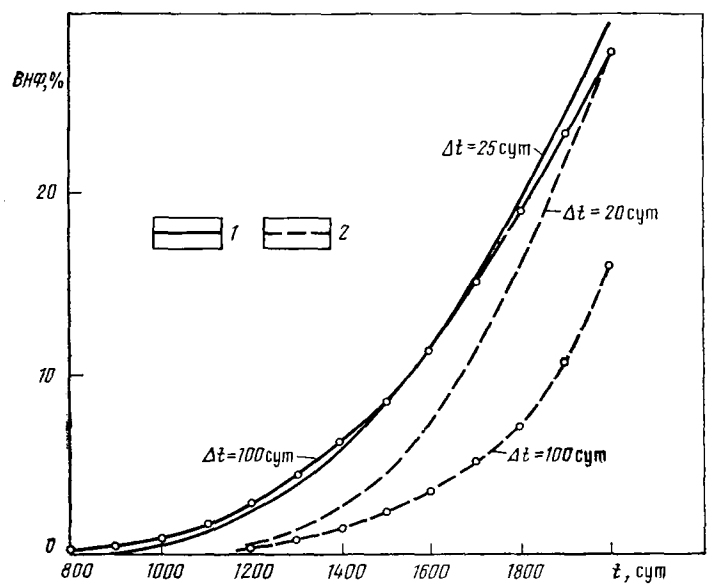


Рис. 9.20. Чувствительность моделей Леткемана и Ридингса, а также Нолена и Берри к временному шагу для задачи Блэра и Уэйнауга

Модели: *1* — **Нолена и Берри (полунеявный метод);** *2* — **Леткемана и Ридингса**

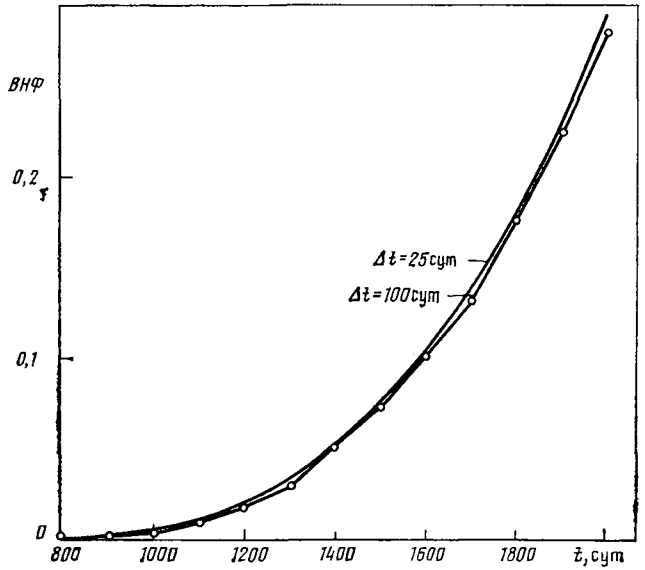


Рис. 9.21. Чувствительность модели Сеттари и Азиза к временному шагу для задачи Блэра и Уэйнауга

рис. 9.21 получены при одной ньютоновской итерации и поэтому эквивалентны результатам при линеаризации. Слабая чувствительность модели Сеттари и Азиза к значению временного шага определяется способом учета скважины, описанным в разделе 9.8.1.1. Стоит отметить большие расхождения результатов, полученных в трех указанных работах с использованием, по существу, одного и того же линеаризованного метода. У модели Леткемана и Ридингса очень большая чувствительность к значению шага по времени. Линеаризованная модель Нолена и Берри дает осцилляции насыщенности для Δt=100 сут, в то время как модель Сеттари и Азиза дает гладкое решение. Это показывает, что на работу модели могут сильно влиять «небольшие» различия в реализации метода (см. раздел 9.8.3) и модель скважины.

Возможности ньютоновской итерации. Сеттари (1973) исследовал возможности метода Ньютона в сравнении с линеаризованным методом. Хотя метод Ньютона позволяет использовать практически неограниченные шаги по времени, число требуемых для обеспечения сходимости итераций на одном временном шаге с увеличением шага возрастает и приблизительно равно числу меньших временных шагов, которые нужно было бы сделать с помощью линеаризованной модели для получения решения на тот же момент времени. (Например, по методу Ньютона с временным шагом в 150 сут потребуется три итерации, в то время как по линеаризованному методу понадобится сделать три шага по 50 сут). Поскольку погрешность аппроксимации для полностью неявных методов может

быть очень большой (см. гл. 5, раздел 5.5.2), лучшие результаты (для того же объема вычислений) обычно получаются с помощью линеаризованного метода и с меньшими шагами по времени, чем по методу Ньютона с большим временным шагом. Погрешности аппроксимации можно контролировать, выбирая временной шаг таким образом, чтобы максимальное значение насыщенности в течение временного шага не превышало заданного значения (обычно 5—10%).

Сравнение SS- и SEQ-*моделей.* В литературе не имеется сведений о результатах сравнения этих двух моделей. Здесь представлены результаты, полученные с помощью коммерческих (INTERCOMP) моделей. На рис. 9.22 сравниваются три модели для задачи Блэра и Уэйнауга. SS-модель базируется на постановке в p, S, с блочно-центрированной сеткой при обычном распределении отбора. SEQ-модель I — модификация SS-модели с проводимостями в уравнении для насыщенности, вычисленными в соответствии с уравнением (5.127). Кривая для SEQ-модели II (Коутс, 1976 в) получена с помощью описанной Коутсом модели, в которой для вычисления проводимостей используются уравнение (5.128), а также описанная в разделе 9.8.1.2 модель скважины. ВНФ, полученный с помощью обеих моделей при последовательном методе решения, немного меньше, чем ВНФ по SS-модели. На рис. 9.23 показана чувствительность SEQ-модели I к шагу по времени. Отметим гладкость ВНФ, получаемого при временных шагах до 75 сут. В расчете с шагом в 100 сут проявляется некоторая неустойчивость.

Результаты решения данной задачи, полученные с помощью модели с последовательным методом решения, представил также Ко (1977). Его модель аналогична модели Сеттари и Азиза (1974), и в ней использована модель скважины из раздела 9.8.1.1, модифицированная для случая последовательного решения. Результаты его расчетов являются гладкими для Δt вплоть до 100 сут, но чувствительность к временному шагу больше показанной на рис. 9.23. Ко также установил, что устойчивость решения для двумерных задач увеличивалась при опускании нелинейного члена, включающего произведение производных насыщенности и капиллярного давления.

9.8.3. Практические соображения

Учет крутизны кривых для коэффициентов проводимости. Данная проблема уже обсуждалась в разделе 5.5 (см. гл. 5). Обычно пользуются полученными по таблицам для k_r тангенсами угла наклона, являющимися при линейной интерполяции кусочно-постоянными функциями. Если применяют тангенсы углов наклона секущих, их значения нужно брать в направлении ожидаемого изменения насыщенности. Это особенно важно в случаях, когда насыщенность достигает значения, при котором одна из фаз становится неподвижной (в системе нефть — вода $S_w=S_{wc}$ или $S_w=1-S_{oirr}$).

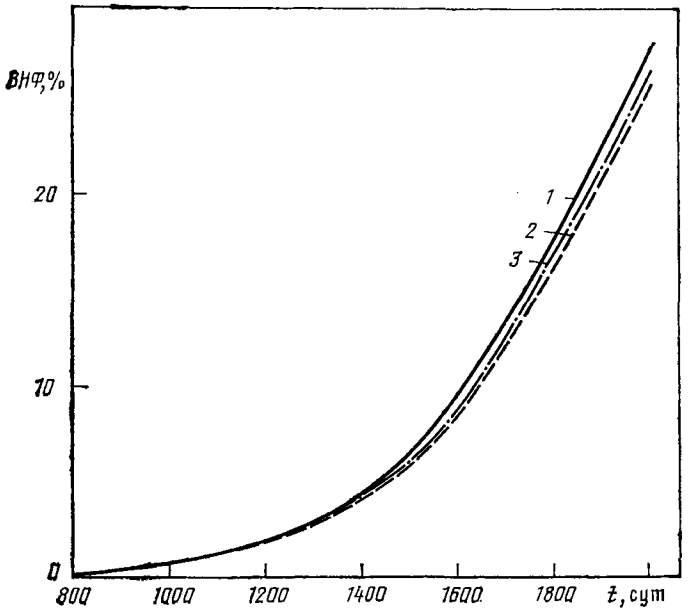


Рис. 9.22. Сравнение SS и SEQ-моделей для задачи Блэра и Уэйнауга.
Модели: *1* — SS; *2* — SEQ (модель I); *3* — SEQ (модель II)

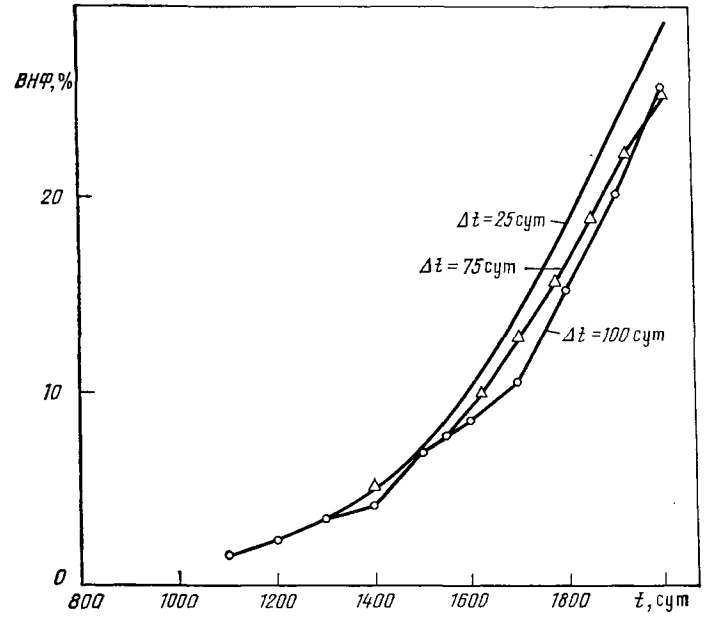


Рис. 9.23. Чувствительность SEQ-модели I к временному шагу

Рассмотрим случай вытеснения нефти водой. Если $S_w = S_{wc}$, угол наклона секущей k_{rw} должен быть не равным нулю, а при достижении S_w максимального значения угол наклона секущей k_{ro} должен быть равен нулю (рис. 9.24). При нулевом наклоне секущей при S_{oirr} предотвращаются выбросы, поскольку S_o не изменяется. Если тангенс угла наклона k_{rw} принимается равным нулю при S_{wc}, проводимости для воды в данной точке будут учтены явно с возможной при этом потерей устойчивости. Аналогичная проблема возникает в случае, когда насыщенности близки к предельным значениям. Коутс (1976) предложил способ вычисления тангенсов угла наклона секущей, предотвращающей появление выбросов; Шаппелер и Роджерс (1975) описывают способ учета тангенса угла наклона для фильтрации газа вблизи точки S_{gc}.

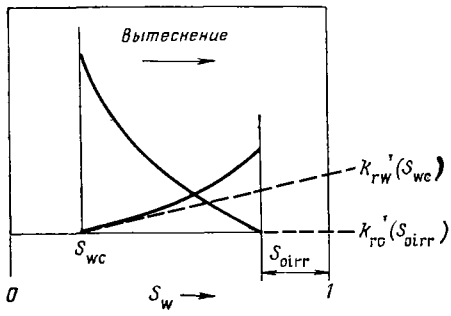


Рис. 9.24. Схема учета наклона кривых k_r в концевых точках

Выбросы (в значениях насыщенности). Данная проблема связана с выбором временного шага и учетом крутизны секущих, рассмотренных выше. Ее можно решить, уменьшая шаги по времени, но на практике это может быть невыгодно. Шаппелер и Роджерс (1974) рассматривают проблему выбора временного шага и его влияние на выбросы. Небольшие выбросы могут быть «оставлены», в противном случае при правильном установлении значения насыщенности получим погрешности в определении материального баланса.

Другие соображения. Некоторые другие соображения рассматриваются Тримблом и Макдональдом (1976). Они увеличивают надежность за счет неявного способа учета тех переменных, которые обычно учитываются явно (например, свойств, зависящих от давления), при использовании ньютоновской итерации. Надо отметить, что надежность результатов достигается за счет увеличения затрат машинного времени на одном временном шаге, а «оптимальная неявность» модели зависит от решаемой задачи.

9.9. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Многие изложенные в данной главе идеи являются общими для двумерных задач различного типа, а также могут быть непосредственно распространены на трехмерные задачи и другие виды моделей, не рассмотренные в настоящей книге. Разделение материала на разделы 9.7 и 9.8 было условным лишь для того, чтобы выделить типичные ситуации. Так, например, модель скважины, рассматриваемая в разделе 9.8.1, одинаково важна в профильных и трех-

фазных моделях, как и в случае одиночной скважины. Это же относится и ко многим вопросам гл. 12.

В настоящее время основная тенденция в моделировании заключается в разработке моделей общего назначения, пригодных для решения задач различного вида. Спиллет и другие (1973) считают, что в основу такой модели можно положить метод последовательного решения. Однако, на наш взгляд, с помощью единственной модели нельзя достигнуть максимальной эффективности для задач различной трудности.

Упражнение 9.1

Вывести уравнение (9.53) для определения притока воды методом Картера—Трейси.

Схема решения

Для бесконечного водоносного пласта, окружающего круговой пласт радиусом r_e, безразмерную функцию влияния можно записать в виде

$$\Delta p = p_A^{(i)} - \bar{p}(t_D) = \frac{Q_A}{B} PI(t_D), \qquad (A)$$

где

$$t_D = t\frac{k}{\phi \bar{c} r_e^2}, \quad B = \phi \bar{c} h r_e^2,$$

PI — функция влияния при заданном расходе на границе; $\bar{c}$ — общая сжимаемость; k — проницаемость; h — толщина водоносного пласта.

Картер и Трейси (1960) показывают, что общий приток приближенно можно выразить как

$$W(t^{n+1}) - W(t^n) = \left[\frac{B\Delta p^{n+1} - W(t^n)\, PI'(t_D^{n+1})}{PI(t_D^{n+1}) - t_D^n\, PI'(t_D^{n+1})}\right](t_D^{n+1} - t_D^n). \qquad (B)$$

В результате можно записать уравнение (9.53) так:

$$a = \frac{B\Delta p^n - W^n PI'^{n+1}\Delta t_D}{PI^{n+1} - t_D^n\, PI'^{n+1}\Delta t}, \qquad (C)$$

$$b = \frac{B}{PI^{n+1} - t_D^n\, PI'^{n+1}}\frac{\Delta t_D}{\Delta t}. \qquad (D)$$

ГЛАВА 10

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С БЛОЧНО-ПЯТИДИАГОНАЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ

10.1. ВВЕДЕНИЕ

В гл. 6 было показано, как методы решения уравнений с трехдиагональными матрицами (см. гл. 4) можно использовать для решения уравнений с блочно-трехдиагональными матрицами. В настоящей главе рассмотрены способы использования методов решения уравнений с пятидиагональными матрицами (см. гл. 8) для уравнений с блочно-пятидиагональными матрицами. Рассмотрены как прямые, так и итерационные методы.

В наиболее общем виде решаемую систему L дифференциальных уравнений в частных производных можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda X_{lk}\frac{\partial U_k}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda Y_{lk}\frac{\partial U_k}{\partial y}\right]=\beta_{lk}q_k+P_{lk}\frac{\partial U_k}{\partial t},\quad l,\ k=1,2,3,\ldots,L, \tag{10.1}$$

где повторяющийся нижний индекс у членов уравнений указывает на суммирование по всем его значениям, как, например, для $L=3$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda X_{lk}\frac{\partial U_k}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda X_{l1}\frac{\partial U_1}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda X_{l2}\frac{\partial U_2}{\partial x}\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda X_{l3}\frac{\partial U_3}{\partial x}\right]\quad l=1,2,3. \tag{10.2}$$

Для какой-либо конкретной задачи многие из коэффициентов λX_{lk}, λY_{lk}, β_{lk} или P_{lk} могут быть равны нулю. Это становится очевидным при сравнении уравнения (10.1), например, с уравнением (9.3). Заметим, что при двухфазной фильтрации используются лишь индексы l, k=1,2. Дополнительные члены, учитывающие действие гравитации, здесь не рассматриваются. По аналогии с уравнением (8.3) разностные уравнения для отдельного узла сетки (i, j) можно записать в виде

$$c_{ij}u^n_{i-1,j}+g_{ij}u^n_{ij-1}+a_{ij}u^n_{ij}+f_{ij}u^n_{i,j+1}+b_{ij}u^n_{i+1,j}=d_{ij}. \tag{10.3}$$

Размерность u^n_{ij} будет зависеть от числа решаемых совместно дифференциальных уравнений в частных производных, равного L — числу одновременно рассматриваемых фаз. Все коэффициенты этих разностных уравнений образуют подматрицы $(L\times L)$. В моделях нелетучей нефти самое большее значение L будет равно 3 для уравнений SS-метода и 2 для SEQ-метода. Например, для SS-метода подматрицы будут размером (3×3) при трехфазной фильтрации и (2×2) при двухфазной.

Разностное уравнение для этой системы уравнений можно записать в матричной форме в виде

$$Au=d. \tag{10.4}$$

Например, при естественном упорядочении (см. рис. 8.1) матрица A примет вид, показанный на рис. 8.2,*a* и *b*. На этих рисунках каждый символ x обозначает подматрицу размером либо (2×2), либо (3×3) в зависимости от числа рассматриваемых фаз.

Вектор u при естественном упорядочении с элементами, пронумерованными сначала в направлении оси x, определяется как

$$u=\begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ \vdots \\ u_{I,J} \end{bmatrix} \tag{10.5}$$

Элементы u_{ij} содержат значения зависимой переменной в узле (i, j) для всех фаз, т. е. для $L=3$:

$$u_{ij}=\begin{bmatrix} u_{1ij} \\ u_{2ij} \\ u_{3ij} \end{bmatrix} \tag{10.6}$$

Вектор d в уравнении (10.4) определяется аналогичным образом.

10.2. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ

Вид уравнения (10.4) такой же, как и уравнения (8.4), за исключением того, что все элементы матрицы A являются подматрицами (2×2) или (3×3), а не скалярными величинами. Это означает, что все прямые методы, приведенные в гл. 8 (см. раздел 8.2), можно использовать для решения уравнения (10.3), заменив в процессе исключения неизвестных матричными операциями операциями над скалярами. Поскольку матрицы в определенных позициях могут содержать большое число нулей, алгоритмы решения должны быть сконструированы таким образом, чтобы в них использовалось это свойство. Как указывалось в гл. 6, существует несколько возможных вариантов процесса разложения матриц и некоторые из них менее подвержены влиянию ошибок округления. В настоящее время не имеем результатов сравнения фактического объема вычислений, требующегося при различных способах упоря-

дочения матриц. Пока такое сравнение не будет проделано, можно пользоваться оценками машинных затрат, приведенными в гл. 3. В первом приближении эти оценки годны и в случае многофазной фильтрации. Если заменить I на IL, а J на JL, результаты приближаются к точным при больших I и J (см. упражнение 10.1). В частности, это означает, что асимптотические отношения затрат для D4 к затратам при стандартном упорядочении (см. рис. 8.9) справедливы также для многофазных задач.

10.3. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

Многие из рассмотренных в гл. 8 (см. раздел 8.3.3) итерационных методов непосредственно применимы для решения уравнений с блочно-пятидиагональными матрицами. Однако теперь у нас имеется больше возможностей для выбора методов, чем при решении уравнения (8.5). К примеру, можно обобщить рассмотренные ранее поточечные итерационные методы, заменяя скалярные операции операциями с подматрицами. Детальное обсуждение этой проблемы имеет, однако, лишь академический интерес, поскольку поточечные итерационные методы оказываются практически непригодными при решении трудных задач моделирования пластов. Обобщение же блочно-итерационных методов на случай решения уравнения (10.3) имеет практическое значение. В частности, широко используются блочный SOR (BSOR), ADI и SIP-методы.

10.3.1. Метод BSOR

Рассмотрим простой пример решения уравнения (8.52) для двухфазной фильтрации. Можно непосредственно использовать описанную в гл. 8 (см. раздел 8.3.4) процедуру, если заметить, что для каждой линии нужно решить уравнение вида

$$A_i u_i = d_i, \tag{10.7}$$

где A_i — блочно-трехдиагональные матрицы, для которых нужно использовать методы, рассмотренные в гл. 6. Данный метод описан также Бьердамменом и Коутсом (1969).

Таким образом, в принципе по методу BSOR можно решать задачи многофазной фильтрации. Реальная трудность возникает при оценке ω_b. Так как какие-либо опубликованные результаты отсутствуют, можно дать следующие рекомендации, основанные на интуиции и опыте.

1. Когда используется метод совместного решения уравнений при давлениях в фазах, взятых в качестве зависимых переменных, ω_b выбирают теми же способами, что и в случае однофазной фильтрации. Эффективные значения итерационного параметра могут, однако, заметно отличаться от предсказанных оптимальных значений для однофазных задач (см. гл. 8). Для задач двухфазной фильтрации Бьердаммен и Коутс (1969) установили, что опти-

мально значение $\omega_b=1$ (т. е. метод превращается в метод Гаусса—Зейделя).

2. Когда решаются совместно уравнения для двух насыщенностей, значение ω_b будет ближе к 1 из-за гиперболического характера уравнений. Скорость сходимости зависит от направления обхода области. Как указано в гл. 5 (см. раздел 5.6.3), в случае одномерной фильтрации и при $P_c \equiv 0$ уравнения для насыщенности можно упорядочить таким образом, что матрица коэффициентов будет треугольной. Такую систему можно решить непосредственно, не применяя итераций, с помощью прямой и обратной подстановок. Это соответствует одному проходу в соответствующем направлении по методу Гаусса—Зейделя. Поэтому даже в общем случае ω_b нужно брать близким к 1.

3. Когда уравнения для давления и насыщенности одной из фаз рассматриваются совместно, ω_b, по-видимому, должно находиться между двумя значениями, определенными для указанных выше случаев (1) и (2). Можно также использовать различные значения ω_b в уравнениях для разных фаз. Можно ожидать, что ω_b для уравнения относительно насыщенности будет близко к 1, в то время как оно может принимать значение между 1 и 2 для уравнения относительно давления. Для данного подхода в литературе результаты не приводятся.

Почти во всех случаях для получения ω_b, близкого к оптимальному, требуются численные эксперименты.

Ву и Эмануэль (1976) получили хорошие результаты при использовании LSOR-метода с одномерной коррекцией. Однако в их статье не приводятся необходимые подробности.

10.3.2. Итерационный метод ADI

Итерационные ADI-методы рассматривались в гл. 8 (см. раздел 8.3.6). Элементы матриц V и H, например, в уравнении (8.73а) теперь становятся подматрицами размером (2×2) или (3×3) в зависимости от числа совместно решаемых уравнений. Для каждой линии в каждом проходе должна быть решена система уравнений (10.7) с блочно-трехдиагональной матрицей.

Оптимальную систему параметров и число итераций в цикле выбирать наиболее трудно. Дуглас и другие (1959) для решения двух совместных дифференциальных уравнений в частных производных применили обобщенный метод Писмена и Рэчфорда (1955).

Уравнение по методу Дугласа и других (1959) получается в результате обобщения уравнения (8.77). Вид уравнения точно такой же, но теперь все матрицы в качестве элементов имеют подматрицы размером $(L\times L)$. Упорядочивая u в соответствии с выражением (10.5), уравнения ADI-метода можно записать как

$$\begin{aligned}(\mathrm{H}+\Sigma+r^{(\nu+1)}\mathrm{D})\,u^{*} &= (r^{(\nu+1)}\mathrm{D}-\mathrm{V})\,u^{(\nu)}+d,\\ (\mathrm{V}+\Sigma+r^{(\nu+1)}\mathrm{D})\,u^{(\nu+1)} &= (r^{(\nu+1)}\mathrm{D}-\mathrm{H})\,u^{*}+d.\end{aligned} \tag{10.8}$$

10.3.3. Метод SIP

Уайнштейн и другие (1970) показали, как предложенный Стоуном (1968) SIP-метод решения одного дифференциального уравнения в частных производных можно применить для решения системы уравнений. Как и для других итерационных процедур, обобщение SIP-метода, рассмотренного в гл. 8 (см. раздел 8.3.7), осуществляется непосредственно. Элементы в уравнении (8.80) становятся подматрицами размером (2×2) или (3×3), при этом процедура деления должна быть заменена обращением матриц. Уайнштейн и другие приводят детали алгоритма и показывают, как можно воспользоваться наличием нулей в подматрицах.

Итерационные параметры выбирают с помощью процедуры, рассмотренной в гл. 8 (см. раздел 8.3.7). Уравнения (8.88) и (8.89) используют с учетом того, что для λX должны быть подставлены λX_{lk} и т. д. Рекомендуется использовать в цикле 4—10 параметров. Если такая последовательность итерационных параметров приводит к расходимости результатов, $(1-\alpha_{\max})$ в уравнении (8.88) следует умножить на коэффициент, изменяющийся в пределах 2—20. Эти параметры пригодны для задач фильтрации несжимаемых флюидов. Для задач с учетом сжимаемости к последовательности итерационных параметров надо добавить дополнительный параметр, равный единице. Было установлено, что использование одного и того же параметра дважды, как при однофазной фильтрации, нежелательно. Таким образом, каждый параметр используется в цикле только один раз. Изменение числа и последовательности итерационных параметров может существенно повлиять на свойства сходимости метода. Об аналогичных наблюдениях, основанных на тестовых расчетах двухфазных задач в однородных и неоднородных областях, сообщают Суарес и Фарук Али (1976).

10.3.4. Сравнение результатов итерационных методов

Результатов сравнения всех основных итерационных методов для решения стандартного набора тестовых задач фактически не имеется.

Сравнение ADI- и SOR-методов приводится Бьердамменом и Коутсом (1969). Для задач с поддержанием давления при вытеснении нефти водой (площадные модели) они установили, что по итерационному ADI-методу потребовалось лишь 45—75% затрат машинного времени, необходимых для LSOR-метода (использовалось $\omega=1$). Однако было установлено, что при моделировании вертикального сечения пласта для газонефтяной системы LSOR был немного лучше ADI.

Уайнштейн и другие (1970) представили результаты сравнения итерационных методов ADI и SIP для трех двухфазных задач и некоторые результаты для трехфазных задач. В качестве двухфазных задач были рассмотрены: 1) фильтрация несжимаемой газонефтяной системы в вертикальном сечении пласта, 2) режим раст-

воренного газа в вертикальном сечении пласта и 3) радиальная задача об образовании конуса воды в нефтяном пласте. Рассмотрены следующие трехфазные задачи: 1) поддержание давления, 2) лабораторное моделирование системы с режимом растворенного газа и 3) промысловый режим растворенного газа. Основываясь на этих тестах, авторы заключили, что при использовании SIP-метода для указанных трудных задач машинные затраты значительно меньше, чем для итерационного ADI-методу. Действительно, для задач с большим отношением проводимостей по двум направлениям результаты по ADI-методу во многих случаях не сходились, в то время как по методу SIP сходились. Нужно помнить, что в алгоритме SIP-метода требуется больше вычислений на итерацию, чем в ADI. Однако для трудных задач SIP-метод намного лучше, так как здесь требуется меньшее количество итераций. Эти выводы согласуются с результатами, приведенными в гл. 8 для отдельных уравнений (см., например, рис. 8.20). Пока нет более полных результатов, можно руководствоваться материалом, приведенным в гл. 8 (см. раздел 8.3.9).

10.4. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИТЕРАЦИОННЫХ И ПРЯМЫХ МЕТОДОВ

В отсутствие опубликованного сопоставления результатов применения прямых и итерационных методов для связанных уравнений мы можем только отметить, что многие идеи, рассмотренные в гл. 8 (см. раздел 8.4), применимы также в случае многофазной фильтрации.

10.5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Для относительно простых задач по моделированию пластов обычно нет необходимости в совместном решении уравнений фильтрации. Для сложных задач, когда уравнения должны решаться совместно, некоторые успехи были достигнуты при использовании SIP-метода и LSOR-метода, дополненного одномерной коррекцией. Подробные результаты эксперимента с итерационными методами еще не опубликованы.

Для большинства практических задач способ прямого исключения неизвестных по схеме упорядочения D4, по-видимому, лучше, чем все итерационные методы, при условии, что имеется достаточная оперативная память.

Необходима дополнительная работа по сравнению эффективности применения различных итерационных методов при решении практических задач моделирования пластов.

Упражнение 10.1

Определить необходимый объем вычислений для уравнения с блочно-пятидиагональной матрицей с блоками размером $L \times L$.

Схема решения

Ширина ленты матрицы A размером $LN \times LN$ равна $(2M+L) \times L+L-1$ (или $2M+1$ блоков), и из уравнения (8.11) следует:

$$W_L = \sum_{i=1}^{N-M} [(ML+L)^2+(ML+L-1)] + \sum_{i=1}^{N-M} [(ML+L-1)^2 +$$

$$+(ML+L-2)+\ldots] + \sum_{i=1}^{N-M} [(ML+1)^2+ML] +$$

$$+\sum_{i=1}^{ML} (i^2+i-1) = L(N-M)[(ML+1)^2+ML] + (N-M)\{2ML[(L-$$

$$-1)+(L-2)\ldots+1]+[L^2+(L-1)^2+\ldots+1]-(L-1)\}+$$

$$+(N-M)[(L-1)+(L-2)+\ldots+1]+\frac{ML(ML+1)(2ML+1)}{6}+$$

$$+\frac{ML(ML-1)}{3} = \frac{ML(ML+1)(2ML+1)}{6}+\frac{ML(ML-1)}{2}+$$

$$+L(N-M)[(ML+1)^2+ML]+(N-M)\left\{2ML\frac{L(L-1)}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{L(L+1)(2L+1)}{6}+\frac{L(L-1)}{2}-(L-1)\right\} = W+\Delta W,$$

где W — та же величина, что и в упражнении 8.1 (см. уравнение F), если подставить M вместо ML, N вместо NL; ΔW — член меньшего порядка, т. е. $W_L \to W$ по мере увеличения N и M при фиксированном L.

ГЛАВА 11

ТРЕХМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

11.1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей книге было показано, как модели однофазной и многофазной фильтрации для одномерного случая (см. гл. 3 и 5) можно использовать в случае двух измерений пространства (см. гл. 7 и 9). Как увидим далее из содержания данной главы, при распространении этих моделей на трехмерный случай новые понятия не вводятся. Связь между однофазными одномерными и многофазными одномерными моделями была показана в гл. 3, 4 и 5. Аналогично многофазные двумерные задачи рассматривались в гл. 9 на основе материала, представленного в гл. 5 и 7. Были рассмотрены также матричные уравнения (составные части этих моделей), от простейших уравнений с трехдиагональными матрицами для однофазной одномерной фильтрации (см. гл. 4) до уравнений с блочно-трехдиагональными матрицами для многофазной одномерной фильтрации (см. гл. 6), от уравнений с пятидиагональными матрицами для однофазной двумерной фильтрации (см. гл. 8) до уравнений с блочно-пятидиагональными матрицами для многофазной двумерной фильтрации (см. гл. 10). Материал в гл. 3—10 поэтому излагался так, чтобы было ясно, что нужно сделать для перехода от моделей однофазной фильтрации к трехфазной, от одного измерения к нескольким. Поэтому нет необходимости в подробном рассмотрении трехфазных задач, как было сделано для одномерных и двумерных задач.

В настоящей главе показано, как можно использовать изложенные методы для решения трехмерных задач. Это не означает, что трехмерные задачи решить легко. Наоборот, решение трехмерных задач может оказаться делом трудным и дорогим. Многие трехмерные задачи можно адекватно решить с помощью двумерных моделей с использованием псевдофункций, рассмотренных в гл. 12. Некоторые общие аспекты трехмерных задач обсуждаются Азизом (1968).

11.2. ОДНОФАЗНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

11.2.1. Основное уравнение и его дискретизация

Общее дифференциальное уравнение в частных производных для однофазной трехмерной фильтрации в декартовых координатах можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda X\left(\frac{\partial p}{\partial x}-\gamma\frac{\partial h}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda Y\left(\frac{\partial p}{\partial y}-\gamma\frac{\partial h}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda Z\left(\frac{\partial p}{\partial z}-\gamma\frac{\partial h}{\partial z}\right)\right]=$$
$$=\beta\frac{\partial p}{\partial t}+q. \qquad (11.1)$$

При определенном выборе λX, λY, λZ, β, γ и q данное уравнение может соответствовать различным моделям фильтрации газа или жидкости, как это было показано в гл. 2.

При детальном исследовании трехмерного течения флюидов вокруг скважины уравнение фильтрации (11.1) можно также записать в цилиндрических координатах (см. упражнение 11.1). Для краткости здесь рассматриваются только уравнения в декартовых координатах.

По аналогии с уравнением (7.12) конечно-разностную аппроксимацию для уравнения (11.1) возьмем в виде

$$[\Delta T\Delta(p-\gamma h)]_{ijk}=\frac{V_{ijk}\beta_{ijk}}{\Delta t}\Delta_t p_{ijk}+Q_{ijk},$$
$$i=1, 2, \ldots, I,$$
$$j=1, 2, \ldots, J, \qquad (11.2)$$
$$k=1, 2, \ldots, K,$$

где

$$[\Delta T\Delta(p-\gamma h)]_{ijk}=[\Delta_x TX\Delta_x(p-\gamma h)+\Delta_y TY\Delta_y(p-\gamma h)+$$
$$+\Delta_z TZ\Delta_z(p-\gamma h)]_{ijk}; \qquad (11.3)$$

$V_{ijk}=\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k$ — объем блока (i, j, k),

$$Q_{ijk}=V_{ijk}q_{ijk}.$$

Первый член в правой части уравнения (11.3) можно представить следующим образом:

$$[\Delta_x TX\Delta_x(p-\gamma h)]_{ijk}=TX_{(i+1/2),j,k}[p_{i+1}-p_i-$$
$$-\gamma_{i+1/2}(h_{i+1}-h_i)]_{jk}+TX_{(i-1/2),j,k}[p_{i-1}-p_i-$$
$$-\gamma_{i-1/2}(h_{i-1}-h_i)]_{jk}.$$

Второй и третий члены в правой части уравнения (11.3) можно определить аналогично. Коэффициенты TX, TY и TZ можно определить с помощью процедуры, использованной для двумерных задач. В гл. 9 (см. раздел 9.3.1). Коэффициенты для задачи в цилиндрических координатах рассматриваются в упражнении 11.1.

Раскрыв все члены в уравнении (11.2) и определив коэффициенты при $p_{i,j,k}$, результирующее уравнение можно записать в следующем виде (нижние индексы i, j и k опущены):

$$zp_{k-1}+gp_{j-1}+cp_{i-1}+ap+bp_{i+1}+$$
$$+fp_{j+1}+sp_{k+1}=d. \qquad (11.4)$$

Это разностное уравнение можно записать для каждого узла сетки, а получающиеся уравнения выразить в матричной форме как

$$Ap=d. \qquad (11.5)$$

Для произвольного внутреннего узла сетки в разностное уравнение входят семь неизвестных; таким образом, у матрицы имеется семь диагоналей, как это показано на рис. 11.1. Для данного случая узлы сетки (i, j, k) упорядочиваются таким образом, что сначала

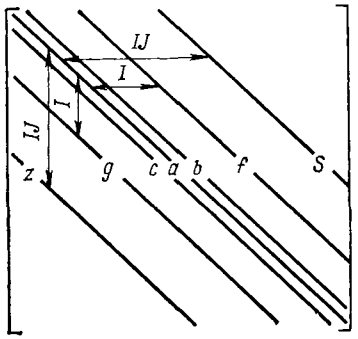


Рис. 11.1. Вид матрицы A в уравнении (11.5)

совершается обход по i (i=1, 2, ..., I), затем по j (j=1, 2, ..., J) и, наконец, по k (k=1, 2, ..., K). Элементы вектора для данного упорядочения неизвестных следующие:

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_{1.1.1} \\ p_{2.1.1} \\ \vdots \\ p_{I.1.1} \\ p_{1.2.1} \\ p_{2.2.1} \\ \vdots \\ p_{1.J.K} \\ \vdots \\ p_{I-1.J.K} \\ p_{I.J.K} \end{bmatrix} \qquad (11.6)$$

Уравнение (11.5) можно решить либо прямыми, либо итерационными методами, например полученными в результате обобщения методов, представленных в гл. 8. Рассмотрим некоторые из наиболее важных методов.

11.2.2. Специальные методы для решения трехмерных задач

В гл. 7 (см. раздел 7.9) были рассмотрены некоторые специальные методы для решения двумерных задач, известные как ADI- и ADE-методы. Оба эти метода можно использовать и при решении трехмерных задач. Однако способы применения ADE-методов к задачам моделирования трехмерных пластов не имеют боль-

шого практического значения и не будут рассматриваться. Относительно простые трехмерные задачи можно решить с помощью безытерационных ADI-методов, рассмотренных ниже.

11.2.2.1. ADI-методы

Как и в гл. 7, рассмотрим аппроксимацию уравнения (11.1) без гравитационных членов с помощью обратной разности. Получающееся уравнение можно записать в виде

$$\Delta_x T X \Delta_x p^{n+1} + \Delta_y T Y \Delta_y p^{n+1} + \Delta_z T Z \Delta_z p^{n+1} = \\ = \varphi (p^{n+1} - p^n) + Q. \qquad (11.7)$$

Чтобы обозначения были по возможности простыми, нижние индексы i, j, k в настоящей главе опустим. Результаты по методу Писмена и Рэчфорда (1955) для данной задачи оказываются лишь условно устойчивыми даже для линейной задачи (Дуглас, 1961). Некоторые методы решения уравнения (11.7), являющиеся безусловно устойчивыми для линейной задачи, приводятся ниже.

Метод Дугласа и Рэчфорда (1956). Этому методу соответствуют следующие уравнения:

$$\Delta_x T X \Delta_x p^* + \Delta_y T Y \Delta_y p^n + \Delta_z T Z \Delta_z p^n = \varphi (p^* - p^n) + Q,$$
$$\Delta_y T Y \Delta_y p^{**} = \Delta_y T Y \Delta_y p^n + \varphi (p^{**} - p^*),$$
$$\Delta_z T Z \Delta_z p^{n+1} = \Delta_z T Z \Delta_z p^n + \varphi (p^{n+1} - p^{**}). \qquad (11.8)$$

По данному методу используется разновидность аппроксимации обратной разностью.

Метод Брайэна (1961). Для получения метода, являющегося разновидностью метода Кранка—Николсона, Брайэн использовал метод экстраполяции:

$$\Delta_x T X \Delta_x p^* + \Delta_y T Y \Delta_y p^n + \Delta_z T Z \Delta_z p^n = 2\varphi (p^* - p^n) + Q,$$
$$\Delta_y T Y \Delta_y p^{**} = \Delta_y T Y \Delta_y p^n + 2\varphi (p^{**} - p^*),$$
$$\Delta_z T Z \Delta_z p^{n+1/2} = \Delta_z T Z \Delta_z p^n + 2\varphi (p^{n+1/2} - p^{**}),$$
$$p^{n+1} = p^n + 2 (p^{n+1/2} - p^n). \qquad (11.9)$$

Метод Дугласа (1962). Для вывода уравнений ADI-метода Дуглас использовал аппроксимацию Кранка — Николсона. Приведем уравнения для данного, удобного при расчетах метода:

$$\frac{1}{2} [\Delta_x T X \Delta_x (p^* + p^n)] + \Delta_y T Y \Delta_y p^n + \Delta_z T Z \Delta_z p^n = \varphi (p^* - p^n) + Q,$$

$$\frac{1}{2} [\Delta_y T Y \Delta_y (p^{**} - p^n)] = \varphi (p^{**} - p^*),$$

$$\frac{1}{2} [\Delta_z T Z \Delta_z (p^{n+1} - p^n)] = \varphi (p^{n+1} - p^{**}). \qquad (11.10)$$

Этот метод — другая разновидность метода Кранка—Николсона.

Нелинейные члены следует взять на слое $n+1$ для метода Дугласа—Рэчфорда и на слое $n+1/2$ для других методов.

Вследствие довольно ограниченного использования данных методов в практике моделирования пластов они в дальнейшем рассматриваться не будут.

11.2.3. Прямые методы решения

Для эффективного применения метода прямого исключения неизвестных с показанным на рис. 11.1 стандартным упорядочением и с упорядочением с чередующимися узлами требуется, чтобы узлы были занумерованы сначала в кратчайшем направлении. Поэтому, если

$$I \geqslant J \geqslant K,$$

для минимизации объема вычислений узлы должны быть сначала упорядочены в направлении k, а затем по j и i. Если это правило соблюдается, максимальная ширина ленты для стандартного упорядочения будет равна JK, а оценки объема вычислений и требующейся памяти для больших I, J и K будут следующими (Прайс и Коутс, 1974):

$$W_1 = IJ^3K^3, \tag{11.11}$$

$$S_1 = IJ^2K^2. \tag{11.12}$$

Для бициклических матриц при упорядочении элементов с чередующимися узлами получим

$$W_4 = \frac{IJ^3K^3}{2}, \tag{11.13}$$

$$S_4 = \frac{IJ^2K^2}{2}. \tag{11.14}$$

Упорядочение, заданное уравнением (11.6), оптимально при

$$I \leqslant J \leqslant K.$$

Другие схемы, рассмотренные в гл. 8, также можно использовать при решении трехмерных задач. Например, в таком случае схема D4 с чередующимися диагональными линиями становится схемой с чередующимися диагональными плоскостями. Эту схему рассмотрели Прайс и Коутс (1974), здесь приведены их результаты.

Пусть m — диагональная плоскость, на которой узлы сетки удовлетворяют условию

$$i+j+k=m, \quad m=3, 4, \ldots, M,$$

а

$$M = I+J+K.$$

Если M четно, плоскости должны быть взяты в следующем порядке:

$$3, 5, 7, \ldots, M-1, 4, 6, 8, \ldots, M.$$

Если M нечетно, порядок должен быть следующий:

$$3, 5, 7, \ldots, M, 4, 6, \ldots, M-1.$$

Узлы в плоскости m должны быть занумерованы в порядке убывания k, а для каждого постоянного значения k — в порядке убывания j и возрастания i при условии, что $I \geqslant J \geqslant K$. Оценки объема вычислений и требующейся памяти для трех различных соотношений координат области приводятся в табл. 11.1. В данной таблице также сравниваются результаты упорядочения по схеме D4 со стандартным упорядочением.

Таблица 11.1

Оценка объемов вычислений при упорядочении неизвестных по схеме D4 и сравнение его со стандартным упорядочением (по Прайсу и Коутсу, 1974)

Случай	Соотношение координат области	Объем вычислений при упорядочении по схеме D4	Отношение f объемов вычислений при упорядочении D4 и стандартном упорядочении
1	$I=J=K$	$\frac{23}{90}I^6+\frac{6}{35}I^7$	$0{,}171+\frac{0{,}582}{I}$
2	$I-J \geqslant K$	$\frac{IJ^3K^3}{2}-\frac{J^4K^3}{4}-$ $-\frac{J^2K^5}{8}+\frac{JK^6}{40}$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\frac{J}{I}-$ $-\frac{1}{8}\frac{K^2}{IJ}+\frac{K^3}{40IJ^2}$
3	$I=J,\ J=lK$	$\left(\frac{l^4}{4}-\frac{l^2}{8}+\right.$ $\left.+\frac{l}{20}-\frac{1}{280}\right)K^7$	$\frac{1}{4}-\frac{1}{8l^2}+$ $+\frac{1}{20l^3}-\frac{1}{280l^4}$

Значения f при упорядочении по схеме D4 изменяются в пределах 0,171—0,5.

Чтобы представить результаты табл. 11.1 графически, следует предположить для второго случая в таблице, что $J \simeq K$. Тогда отношение затрат на вычисления можно записать как

$$f=0{,}5-\frac{14}{40r},$$

где $r=I/J$ (так как $I-J \geqslant K$ для данного случая, $r \geqslant 2$). Затем можно графически отобразить соотношение вычислительных затрат для трехмерных задач, как и для двумерного случая (см. рис. 8.8). Однако для трехмерных задач каждый из трех случаев в табл. 11.1 следует рассматривать отдельно. Результаты приведены на рис. 11.2. В данном разделе рассматриваются уравнения в декартовых координатах. Подобные результаты, хотя и отличающиеся от описанных, можно получить при моделировании задач в цилиндрических координатах (см. упражнение 11.2).

11.2.4. Итерационные методы

Достижения при решении трехмерных задач итерационными методами, относящимися к трем разным классам, различны. Эти классы следующие: 1) BSOR (или LSOR) с коррекцией или без нее, 2) итерационные ADI-методы и 3) SIP-методы. Ниже следует краткое обсуждение данных методов.

11.2.4.1. Метод BSOR и связанные с ним методы

Возможны различные варианты использования BSOR-метода для решения трехмерных задач. Рассмотрим, например, вариант с непосредственным применением LSOR-метода. Линии обхода области нужно выбрать так, чтобы ω_b — оптимальное значение ω было минимальным. Наименьшее значение ω_b обычно получают при выборе этих линий в направлении наибольших проводимостей, как и в двумерных задачах (см. гл. 8, раздел 8.3.9). В качестве такого направления почти всегда выбирают вертикальное направление.

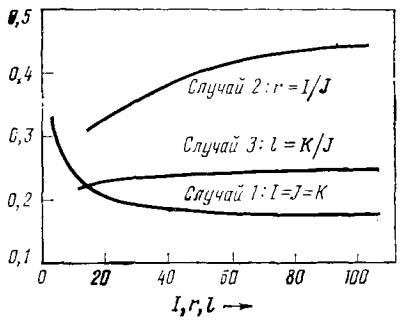


Рис. 11.2. Отношение объемов вычислений для различных трехмерных задач

При решении по методу BSOR можно также использовать одновременно неизвестные, взятые на одном вмеренном слое. Соберем все значения p_{ijk} для данного значения k в вектор p_k. Тогда вектор p, заданный уравнением (11.6), можно записать как

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_k \\ \vdots \\ p_K \end{bmatrix} \tag{11.15}$$

При естественном упорядочении неизвестных

$$p_k = \begin{bmatrix} p_{1.1.k} \\ p_{2.1.k} \\ \vdots \\ p_{1.2.k} \\ \vdots \\ p_{I.J.k} \end{bmatrix} \tag{11.16}$$

В результате уравнение (11.5) можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 & & & & \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \mathbf{C}_K & \mathbf{A}_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{p}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{p}_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_1 \\ \boldsymbol{d}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{d}_K \end{bmatrix}$$

По форме это уравнение аналогично уравнению (8.52), за исключением того, что здесь A_k — пятидиагональные подматрицы. Вид их будет зависеть от упорядочения неизвестных на временном слое, как и при решении двумерных задач (см. гл. 8, разделы 8.1 и 8.2). Если, например, используется естественное упорядочение неизвестных, A_k примут вид, показанный на рис. 8.12. Уравнения для вычисления значений на итерации $(\nu+1)$ по значениям на ν-й итерации по методу BSOR, когда одновременно определяются неизвестные на одном слое, можно записать как

$$A_k p^*_k = -C_k p^{(\nu+1)}_{k-1} - B_k p^{(\nu)}_{k+1} + d_k, \tag{11.18а}$$

$$\left.\begin{aligned} p^{(\nu+1)}_k &= \omega p^*_k + (1-\omega)\, p^{(\nu)}_k, \\ k &= 1, 2, \ldots, K \end{aligned}\right\} \tag{11.18в}$$

при условии, что $p_0 = p_{K+1} = 0$. Это уравнение выводится аналогично уравнению (8.54). Поскольку приведенные выше уравнения решаются многократно, крайне важно решать матричное уравнение (11.18а) с минимальными затратами машинного времени. Для его решения может быть применен любой из рассмотренных в гл. 8 (см. раздел 8.2) быстродействующих прямых методов. Если матрицы, полученные после прямого хода исключения неизвестных, сохраняются, то во второй и последующей итерациях нужно выполнить только обратную подстановку. Данный подход применим как при стандартном исключении, так и при различных схемах упорядочения, что обеспечивает эффективное использование BSOR-метода. Оптимальное значение ω можно определить с помощью методов, рассмотренных в гл. 8 (см. раздел 8.3.3)

Уоттенбаргером и Тырнау (1976) был использован метод BSOR с вертикальными плоскостями обхода и схемой упорядочения D4 для решения уравнения (11.18а). Они также применили этот метод с двумерной коррекцией и нашли, что использование коррекции необходимо для получения хорошей сходимости решения для задач с неоднородной областью.

11.2.4.2. Итерационные ADI-методы

Как и для двумерных задач (см. гл. 8, раздел 8.3.6), существует много вариантов итерационных ADI-методов, по которым можно решать трехмерные задачи. Матричное уравнение (11.5), полу-

чающееся после разностной аппроксимации (11.2) с использованием семиточечного шаблона, можно записать в виде

$$(X+Y+Z+\Sigma)\,p=d, \tag{11.19}$$

где элементы X получают из $\Delta_x T X \Delta_x p$, элементы Y — из $\Delta_y T Y \Delta_y p$, элементы Z — из $\Delta_z T Z \Delta_z p$, а элементы Σ — из производной по времени. С помощью соответствующего упорядочения p каждую из X, Y или Z можно преобразовать в блочно-диагональную матрицу, в которой каждый блок является трехдиагональной матрицей размерами $(I\times I)$, $(J\times J)$ или $(K\times K)$.

Теперь можно обобщить уравнения любого из рассмотренных в гл. 8 итерационных ADI-методов. Например, для метода соответствующего модификации Варги для метода Писмана—Рэчфорда уравнение (8.77), можно записать

$$\begin{aligned}
(X+\Sigma+r^{(\nu+1)}D)\,p^{*} &= (r^{(\nu+1)}D-Y-Z)\,p^{(\nu)}+d,\\
(Y+\Sigma+r^{(\nu+1)}D)\,p^{**} &= (r^{(\nu+1)}D-Z)\,p^{(\nu)}-Xp^{*}+d,\\
(Z+\Sigma+r^{(\nu+1)}D)\,p^{(\nu+1)} &= r^{(\nu+1)}Dp^{(\nu)}-Xp^{*}-Yp^{**}.
\end{aligned} \tag{11.20}$$

Здесь, как и для двумерных задач, D — диагональная матрица, содержащая сумму диагональных элементов X, Y и Z.

Дуглас (1962) предложил другой метод (Варга, 1962, с. 244), который можно использовать для расчета параболических систем и выразить в виде следующих уравнений:

$$\begin{aligned}
(X+\Sigma+r^{(\nu+1)}D)\,p^{*} &= (r^{(\nu+1)}D-X-2Y-2Z)\,p^{(\nu)}+2d,\\
(Y+\Sigma+r^{(\nu+1)}D)\,p^{**} &= (r^{(\nu+1)}D-X-Y-2Z)\,p^{(\nu)}-Xp^{*}+2d,\\
(Z+\Sigma+r^{(\nu+1)}D)\,p^{(\nu+1)} &= (r^{(\nu+1)}D-X-Y-Z)\,p^{(\nu)}-\\
&\quad -Xp^{*}-Yp^{**}+2d.
\end{aligned} \tag{11.21}$$

Указанный метод сводится к методу Дугласа (1962), если $\Sigma=0$ (эллиптические уравнения) и $D=I$.

В литературе мало сведений о выборе итерационных параметров для данных методов. Вполне пригоден подход, при котором для оценки $r_{\min}$ используется уравнение (8.77), а затем вычисляются параметры в геометрической последовательности, расположенной в пределах $r_{\min}$ и $r_{\max}=1\div 2$. Уравнение для определения $r_{\min}$ по всей сетке следующее (Уайнштейн и др. 1969):

$$\left[\frac{\pi^2}{2I^2(1+\rho_1)},\ \frac{\pi^2}{2J^2(1+\rho_2)},\ \frac{\pi^2}{2K^2(1+\rho_3)}\right], \tag{11.22}$$

где

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \frac{\lambda Y}{\lambda X}\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2+\frac{\lambda Z}{\lambda X}\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2,\\
\rho_2 &= \frac{\lambda X}{\lambda Y}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\frac{\lambda Z}{\lambda Y}\left(\frac{\Delta y}{\Delta z}\right)^2,\\
\rho_3 &= \frac{\lambda X}{\lambda Z}\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2+\frac{\lambda Y}{\lambda Z}\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)^2.
\end{aligned}$$

При оценке $r_{\min}$ значения ρ_p, равные нулю и бесконечности ($p=1, 2, 3$), рассматриваться не должны.

11.2.4.3. SIP-метод

Этот метод уже рассматривался для однофазной двумерной фильтрации в гл. 8 (см. раздел 8.3.7) и для многофазной двумерной фильтрации в гл. 10 (см. раздел 10.3.3). Обобщение метода SIP для решения трехмерных задач было предложено Уайнштейном и др. (1969). Как и для двумерного случая, матрица A видоизменяется добавлением матрицы N таким образом, чтобы A+N разлагалась на произведение матриц L и U, являющихся разреженными матрицами и имеющих вид, показанный на рис. 11.3 и 11.4. Уравнение (11.5) можно записать для невязки как

$$(\mathrm{A}+\mathrm{N})\,\delta^{(\nu+1)} \equiv (\mathrm{LU})\,\delta^{(\nu+1)} = -R^{(\nu)}, \tag{11.23}$$

где

$$R^{(\nu)} = \mathrm{A}p^{(\nu)} - d, \tag{11.24a}$$

$$\delta^{(\nu+1)} = p^{(\nu+1)} - p^{(\nu)}. \tag{11.24b}$$

Выражения для элементов L и U получают аналогично тому, как это делалось в гл. 8 (см. раздел 8.3.7). Окончательный алгоритм приводится Уайнштейном и другими (1969) в виде:

$$\begin{aligned}
\mathrm{z}_{ijk} &= z_{ijk}\left[1+\alpha\left(\mathrm{b}_{i,j,k-1}+\mathrm{f}_{i,j,k-1}\right)^{-1}\right],\\
\mathrm{g}_{ijk} &= g_{ijk}\left[1+\alpha\left(\mathrm{s}_{i,j-1,k}+\mathrm{b}_{i,j-1,k}\right)^{-1}\right],\\
\mathrm{c}_{ijk} &= c_{ijk}\left[1+\alpha\left(\mathrm{s}_{i-1,j,k}+\mathrm{f}_{i-1,j,k}\right)^{-1}\right],\\
A_{ijk} &= \mathrm{z}_{ijk}\mathrm{b}_{i,j,k-1},\\
C_{ijk} &= \mathrm{g}_{ijk}\mathrm{b}_{i,j-1,k},\\
G_{ijk} &= \mathrm{c}_{ijk}\mathrm{f}_{i-1,j,k},\\
W_{ijk} &= \mathrm{c}_{ijk}\mathrm{s}_{i-1,j,k},\\
T_{ijk} &= \mathrm{z}_{ijk}\mathrm{f}_{i,j,k-1},\\
U_{ijk} &= \mathrm{g}_{ijk}\mathrm{s}_{i,j-1,k},\\
\mathrm{a}_{ijk} &= a_{ijk}+\alpha\left[A_{ijk}+C_{ijk}+G_{ijk}+W_{ijk}+\right.\\
&\quad \left.+T_{ijk}+U_{ijk}\right]-\mathrm{c}_{ijk}\mathrm{b}_{i-1,j,k}-\\
&\quad -\mathrm{g}_{ijk}\mathrm{f}_{i,j-1,k}-\mathrm{z}_{ijk}\mathrm{s}_{i,j,k-1}\\
\mathrm{b}_{ijk} &= \mathrm{a}^{-1}{}_{ijk}\left[b_{ijk}-\alpha\left(A_{ijk}+C_{ijk}\right)\right],\\
\mathrm{f}_{ijk} &= \mathrm{a}^{-1}{}_{ijk}\left[f_{ijk}-\alpha\left(T_{ijk}+C_{ijk}\right)\right],\\
\mathrm{s}_{ijk} &= \mathrm{a}^{-1}{}_{ijk}\left[s_{ijk}-\alpha\left(W_{ijk}+U_{ijk}\right)\right].
\end{aligned} \tag{11.25}$$

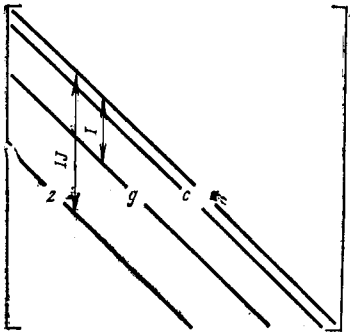


Рис. 11.3. Матрица L

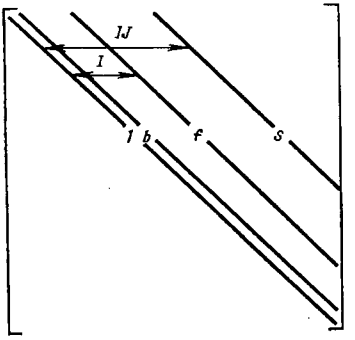


Рис. 11.4. Матрица U

После определения элементов L и U получают вектор v

$$Lv = -R^{(\nu)} \tag{11.26}$$

прямой подстановкой, решая уравнение

$$v_{ijk} = a_{ijk}^{-1}[R_{ijk}^{(\nu)} - z_{ijk}^{-1}v_{i,\,j,\,k-1} - g_{ijk}v_{i,\,j-1,\,k} - c_{ijk}v_{i-1,\,j,\,k}]. \tag{11.27}$$

Вектор δ находят из

$$U\delta = v \tag{11.28}$$

обратной подстановкой, решая уравнение

$$\delta_{ijk}^{(\nu+1)} = v_{ijk} - b_{ijk}\delta_{i+1,\,j,\,k}^{(\nu+1)} - f_{ijk}\delta_{i,\,j+1,\,k}^{(\nu+1)} - s_{ijk}\delta_{i,\,j,\,k+1}^{(\nu+1)} \tag{11.29}$$

Уравнения (11.25), (11.27) и (11.29) составляют алгоритм SIP-метода для трехмерных задач, если положить

$$z_{ij1} = s_{ijk} = 0;\ i = 1, 2, \ldots, I;\ j = 1, 2, \ldots, J;$$
$$g_{i1k} = f_{iJk} = 0;\ i = 1, 2, \ldots, I;\ k = 1, 2, \ldots, K;$$
$$c_{1jk} = b_{Ijk} = 0;\ j = 1, 2, \ldots, J;\ k = 1, 2, \ldots, K.$$

При этом на каждой итерации можно использовать различные значения итерационных параметров. Такой обобщенный алгоритм был представлен Уайнштейном и др. (1969). Однако результаты по этому варианту метода SIP не приводились.

Как и в случае использования SIP-метода для решения двумерных задач, Уайнштейн и другие рекомендовали использовать упомянутое выше упорядочение неизвестных для нечетных итераций, для четных же итераций эта последовательность менялась на следующую:

$$i = 1, 2, \ldots, I,$$
$$j = J, J-1, \ldots, 1,$$
$$k = K, K-1, \ldots, 1.$$

Изменение последовательности упорядочения увеличивает скорость сходимости решения. Использовать другие независимые способы

упорядочения (в данном случае возможны два способа), согласно Уайнштейну и другим (1969), не обязательно.

Оценить итерационные параметры можно, приравнивая к $(1-\alpha_{max})$ правую часть уравнения (11.22). Значение α_m можно определить с помощью уравнения (8.89). В общем случае число параметров на цикл M колеблется в пределах 4—10. Если при определенной выше последовательности решения возникает расходимость результатов, вычисленное значение $(1-\alpha_{max})$ следует умножить на коэффициент, изменяющийся от 2 до 10, а если итерации сходятся, но медленно, это значение нужно разделить на тот же коэффициент.

11.2.5. Сравнение методов

В гл. 9 (см. разделы 9.2.2.—9.2.4) были рассмотрены три класса методов: 1) безытерационные ADI, 2) прямые и 3) итерационные. На первый взгляд безытерационные ADI-методы могут показаться удобными для моделирования пластов благодаря их простоте и относительно малым вычислительным затратам на один шаг по времени. Однако это не всегда так. Реальные расчеты по таким методам показывают, что могут потребоваться неприемлемо малые временные шаги (Бриггс и Диксон, 1968).

Для решения матричного уравнения (11.5) можно выбрать как прямой, так и итерационный методы. Для достаточно больших задач надлежащим образом выбранному итерационному методу требуется меньший объем вычислений. Момент перехода от одного метода к другому зависит от выбора рассматриваемых методов и критерия сходимости для итерационного метода.

Прайс и Коутс (1974) представили результаты, которые могут оказаться ценными при выборе метода. Приведем краткое изложение этих результатов. Кое-что из изложенного применимо также и к двумерным задачам, рассмотренным в гл. 8 и 10.

Объем вычислений в итерационном методе можно выразить как

$$W_{it}=cN_iIJK, \tag{11.30}$$

где c — число умножений и делений на одну итерацию для одного узла сетки; N_i — число итераций, требующихся для достижения сходимости решения. Вычислительные затраты для прямых методов можно аппроксимировать выражением

$$W=fI(JK)^3, \tag{11.31}$$

где коэффициент $f=1$ при естественном упорядочении неизвестных и находится в пределах 0,17—0,5 при упорядочении по схеме D4.

Отношение затрат можно аппроксимировать следующим образом:

$$\frac{W}{W_{it}}=\frac{f(JK)^2}{cN_i}=\frac{fw^2}{cN_i}, \tag{11.32}$$

где $w=JK$ — номинальная ширина ленты матрицы ($w=J$ для двумерных задач). Критическая ширина ленты, при которой $W=W_{it}$,

$$w_c=(cN_i/f)^{1/2}. \qquad (11.33)$$

К примеру, это значение w_c для двумерной задачи приведено на рис. 8.26 в точке пересечения линий, соответствующих прямому и итерационному методам. Это значение, очевидно, зависит от используемых методов и допустимой погрешности для итерационных методов. При решении трехмерных задач прямые методы со стандартным упорядочением обычно дают худшие результаты, чем итерационные методы. Работа Прайса и Коутса, однако, показывает, что для многих практических задач прямые методы с упорядочением по схеме D4 требуют меньших затрат времени, чем итерационные методы.

Приближенную оценку для w_c можно получить из уравнения (11.33), определяя f по формуле в табл. 11.1 или по табл. 11.2.

Таблица 11.2

Число умножений и делений за одну итерацию на один узел сетки для различных итерационных методов (Прайс и Коутс, 1974)

Итерационный метод	Значение c	
	двумерные задачи	трехмерные задачи
SIP	24	37
ADI	19	28
LSOR	9	11

Значение константы c можно оценить по табл. 11.2, где в целях сравнения приводятся также значения данной константы и для двумерных задач. Число итераций, требующихся для достижения сходимости решения, сильно зависит от типа решаемой задачи, используемого метода и допустимой погрешности.

Прайс и Коутс (1974) сравнили между собой методы ADI, LSOR, SIP и метод прямого исключения неизвестных с упорядочением по схеме D4 для практических трехмерных задач. Они установили, что данный метод является лучшим из прямых методов и может применяться наряду с итерационными методами. Решение по этому методу получают быстрее, чем по итерационным методам для полных систем (в отсутствие неактивных блоков) с номинальной шириной ленты вплоть до 38. На практике при решении задач обычно имеют дело с большим числом неактивных блоков. Было установлено, что для таких случаев схема D4 — более быстрая при номинальной ширине ленты вплоть до 72. Прямые методы при наличии достаточной оперативной памяти становятся даже более эффективными для задач, когда трудно **получить нужные** итерационные параметры.

11.3. МНОГОФАЗНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

11.3.1. Основные методы решения и необходимые машинные затраты

Приведенные в гл. 5 методы решения (IMPES, SS и SEQ) распространяются на трехмерный случай точно так же, как это делалось в гл. 9 для двумерных задач. Единственное отличие заключается в дополнительных фильтрационных членах в третьем пространственном измерении.

Вычислительные затраты на временной шаг в трехмерном случае возрастают при переходе от IMPES к SS-методу точно так же, как и в двумерном случае. Если предположить, что затраты определяются уравнением (9.28), то для $I \geqslant J \geqslant K$ по оценкам, приведенным в табл. 9.1 и 9.2, можно получить оценки затрат для трехмерного случая, умножая B и N на K, а W_{TS} на K^3. Поэтому затраты, по отношению к вычислительным затратам для IMPES-метода, одни и те же для двумерных и трехмерных задач.

Отсюда следует, что отношение объемов вычислений для трехмерных и двумерных задач при одинаковых значениях I и J составит

$$W_{3D}/W_{2D}=K^3, \tag{11.34}$$

т. е. затраты возрастают в третьей степени от числа слоев. Аналогично можно определить требования к объему оперативной памяти, умножая значения S в табл. 9.3 и 9.4 на K^2. Поэтому для прямого метода

$$S_{3D}/S_{2D}=K^2. \tag{11.35}$$

Приведенные рассуждения справедливы только при использовании во всех случаях одного и того же метода решения матричных уравнений. На практике это часто не так. Например, при использовании SEQ-метода в задачах трехфазной фильтрации уравнение для давления может решаться прямым методом, а уравнение для насыщенности — либо прямым методом, либо итерационно. Отношения объемов вычислений W_{SEQ}/W_{IMPES} будут в этом случае отличаться от приведенных в табл. 9.1 и 9.2. В другом примере задача, решаемая в двумерном случае по LSOR-методу, в трехмерном случае может быть решена более эффективно BSOR-методом. Бóльшая скорость сходимости при этом приведет к отношению вычислительных затрат, отличающемуся от полученного по уравнению (11.34). Уоттенбаргер и Тырнау (1976) сообщили, что при использовании для BSOR-метода вертикальных плокостей отношение объемов вычислений для трехмерной и площадной двумерной задач, решаемых IMPES-методом, равно

$$W_{3D}/W_{2D}=CK, \tag{11.36}$$

где $C \simeq (2{,}12—2{,}5)N_{3D}/N_{2D}$; N — число итераций, необходимых для решения задачи. Отношение N_{3D}/N_{2D} будет стремиться к 1 для задач с однородными областями и увеличиваться для задач с неоднородными областями.

11.3.2. Методы решения матричных уравнений

11.3.2.1. Методы решения

Единственное отличие матричных задач в трехмерном случае от двумерных задач заключается в том, что матрицы являются блочно-семидиагональными, а не блочно-пятидиагональными. Все приведенные в разделе 11.2 методы были развиты с целью их использования для решения задач многофазной фильтрации точно так же, как методы гл. 8 были развиты в гл. 10. Например, уравнения SS-метода для решения двухфазных трехмерных задач на основе уравнения (11.20) приводятся Коутсом и др. (1967). Обобщение на случай трехфазной фильтрации осуществляется простой заменой элементов p в уравнении (11.6) и d подвекторами вида — (см. уравнение (10.6) —

$$\boldsymbol{p}_{ijk} = \begin{bmatrix} p_{1ijk} \\ p_{2ijk} \\ p_{3ijk} \end{bmatrix} \tag{11.37}$$

и заменой всех элементов всех матриц подматрицами размером 3×3. Эта процедура полностью аналогична процедуре, используемой в гл. 5, 9 и 10.

В литературе приводятся детали SIP-алгоритма для решения многофазных трехмерных задач (см. Уайнштейн и др., 1969; Суарес и Фарук Али, 1976).

11.3.2.2. Сравнение результатов методов

Результаты сравнения, представленные в разделе 11.2.5, справедливы и для многофазных задач, решаемых IMPES-методом, и для двухфазных задач, решаемых SEQ-методами.

Применение SS-метода к двух- или трехфазным задачам и SEQ-метода к трехфазным задачам приводит к системам уравнений с матрицами, имеющими блочную структуру. Для этих задач в литературе не приводится результатов систематического сопоставления методов. Для того чтобы сделать выбор, приходится использовать любую доступную информацию по двумерным задачам (см. гл. 8 и 10) и по однофазным трехмерным задачам (см. раздел 11.2.5).

11.4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Решение трехмерных задач может оказаться очень дорогим в смысле требуемых человеческих усилий и вычислительных затрат. По этой причине всегда всегда следует попытаться упростить задачу так, чтобы можно было провести исследование с помощью двумерной модели. Подобные методы рассматриваются

в гл. 12. Другой подход, уменьшающий усилия, нужные для решения трехмерных задач, представлен Уоттсом и Хуангом (1976). Они предложили метод решения трехмерных задач, который может быть отнесен к методам аддитивной коррекции, рассмотренным в гл. 8 (см. раздел 8.3.5).

Упражнение 11.1

a) Вывести эквивалент уравнения (11.1) в трехмерных цилиндрических координатах.

b) Определить вид конечно-разностных проводимостей

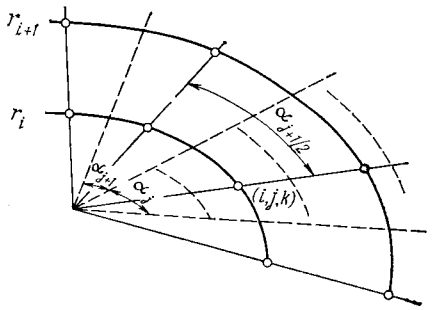
Схема решения

a) Применяя подход, использованный в упражнении 7.1, получим

$$\frac{1}{r}\left[r\lambda R\left(\frac{\partial p}{\partial r}-\gamma\frac{\partial h}{\partial r}\right)\right]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\lambda T\left(\frac{\partial p}{\partial\theta}-\gamma\frac{\partial h}{\partial\theta}\right)\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda Z\left(\frac{\partial p}{\partial z}-\gamma\frac{\partial h}{\partial z}\right)\right]=\beta\frac{\partial p}{\partial t}+q, \qquad \text{(A)}$$

где λR, λT и λZ — проводимости в направлениях r, θ и z. В уравнении (A) предполагается, что эти направления являются главными направлениями тензора λ.

b) Обозначим угол сегмента j в радианах через α_j (см. ниже).



Тогда, обобщая результаты гл. 3 (см. раздел 3.6), получим:

$$TR_{(i+1/2),\,j,\,k}=\alpha_j r^L_{i+1/2}\frac{\Delta z_k}{(r_{i+1}-r_i)}\lambda R_{(i+1/2),\,j,\,k}, \qquad \text{(B)}$$

$$TT_{i\,(j+1/2),\,k}=\frac{(r_{i+1}-r_i)\,\Delta z_k}{\alpha_{j+1/2}r_i}\lambda T_{i,\,(j+1/2),\,k}, \qquad \text{(C)}$$

$$TZ_{i,\,j,\,k+1/2}=\frac{\alpha_j\,(r^2_{i+1/2}-r^2_{i-1/2})}{2\Delta z_{k+1/2}}\lambda Z_{i,\,j,\,k+1/2}, \qquad \text{(D)}$$

где $r_{i+1/2}$ и $r^L_{i+1/2}$ определяются по уравнениям (3.156) и (3.157), а

$$\alpha_j=\frac{1}{2}(\alpha_{j+1/2}+\alpha_{j-1/2}), \qquad \text{(E)}$$

$$\Delta z_k=\frac{1}{2}(\Delta z_{k+1/2}+\Delta z_{k-1/2}). \qquad \text{(F)}$$

Объем блока

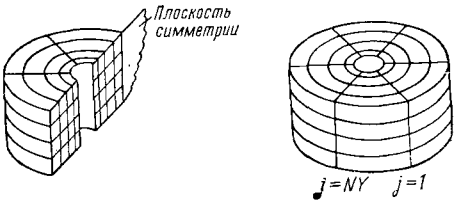
$$V_{ijk} = \frac{\alpha_j}{2} \Delta z_k \, (r^2_{i+1/2} - r^2_{i-1/2}). \qquad \text{(G)}$$

Упражнение 11.2

Исследовать применение прямых методов для уравнений в трехмерных цилиндрических координатах. Рассмотреть: (а) стандартное упорядочение и (*b*) D4 — упорядочение.

Схема решения

Обозначим через NR, NY, NZ число узлов в направлениях r, θ и Z. Когда геометрия задачи в направлении θ является незамкнутой (см. внизу, слева), не существует различий между использованием цилиндрических и декартовых координат. Поэтому рассмотрим случай, представленный на рисунке справа.



а) Соединение между $j=1$ и $j=NY$ не увеличивает ширины ленты только тогда, когда направление j выбирается в качестве второго при упорядочении. Поэтому узлы должны быть занумерованы в порядке

$$i, j, k, \text{ если } NR \leqslant NZ,$$

$$k, i, j, \text{ если } NZ \leqslant NR.$$

b) Для упорядочения по D4 необходимо, чтобы NY было четным, иначе подматрицы A_1 и A_4 уравнения (8.21) не будут диагональными. Теперь найдем правила для оптимального упорядочения в пределах диагональных плоскостей.

ГЛАВА 12

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

12.1. ВВЕДЕНИЕ

Данная глава посвящена методам решения задач, которые не рассматривались до сих пор, но часто встречаются в практике моделирования. Это методы с использованием псевдофункций для моделирования с помощью бета-моделей пластов, которые не относятся к системам с нелетучей нефтью, и некоторые другие специальные методы. Общая черта многих из рассматриваемых методов — стремление приближенно решить сложные задачи, сводя их при некоторых предположениях к более простым. Например, использование предположения о «вертикальном равновесии» (VE) при определенных условиях позволяет свести трехмерную задачу к двумерной.

Данный подход применяется в следующих случаях:

a) если выполняются предположения, лежащие в основе приближенного метода, а его применение приводит к снижению стоимости расчетов на ЭВМ;

b) если стоимость применения более сложных моделей недопустимо высокая, а с помощью упрощенной модели можно получить некоторую полезную информацию;

c) если более «строгих» моделей нет.

12.2. ПСЕВДОФУНКЦИИ

При моделировании трехмерной фильтрации в пластах или достаточно подробном исследовании течения в окрестности отдельных скважин с помощью дву- или грехмерных моделей может потребоваться большое число блоков. Подобные способы моделирования могут оказаться очень дорогими, а их реализация зачастую невозможной из-за нехватки вычислительных мощностей. Путем введения псевдофункций можно проводить приближенные расчеты:

а) фильтрации в вертикальном направлении или в направлении, перпендикулярном плоскости напластования в двумерных площадных моделях;

б) радиальной фильтрации в окрестности скважин в дву- или трехмерных моделях пластов.

Предлагаемые упрощения заключаются в замене функций относительной проницаемости и капиллярного давления для породы пласта некоторыми зависимостями, приближенно передающими характеристики, опущенные в модели. Для получения псевдофункций относительной проницаемости и капиллярного давления используют простые аналитические или численные модели. В данной главе для моделирования трехмерных пластов с помощью двумерных моделей используется представленное в работе Коутса и дру-

гих (1971) понятие о вертикальном равновесии. Будут рассмотрены возможности развития данного понятия, а также ряд других псевдофункций.

12.2.1. Модель вертикального равновесия (Коутс и др., 1971)

Для пластов, размеры которых по простиранию значительно больше толщины, целесообразнее предположить, что равновесие флюидов в вертикальном направлении устанавливается мгновенно (вязкостью флюидов пренебрегают). Фильтрационные расчеты в таком случае можно выполнять только в двух направлениях по площади пласта. Это и есть предположение о вертикальном равновесии (VE). Простейшую модель с вертикальным равновесием можно получить, если пренебречь также действием капиллярных сил. Такое предположение особенно справедливо для водогазовых пластов, где происходит полное гравитационное разделение флюидов. Однако поверхность их раздела в пласте не будет горизонтальна, поскольку предположений о равновесии по горизонтали не делалось.

Рассмотрим вертикальное сечение одного блока горизонтального однородного пласта и фильтрацию в нем двухфазной системы «газ — вода». Если протяженность переходной зоны, образующейся благодаря действию капиллярных сил, мала (скажем, менее, чем 10% от толщины пласта), то можно предположить, что в состоянии гравитационного равновесия флюиды будут полностью разделены, как это показано на рис. 12.1.

Чтобы отразить такое распределение в двухмерной площадной модели, задают средние значения $\bar{S}_w$, $\bar{P}_c$ и $\bar{k}_{rl}$ так, чтобы можно было получить правильные распределения потоков и масс флюидов. В этом случае усредненная по вертикали насыщенность определяется соотношением

$$\overline{\phi S}_w h = \int_0^h \phi(z)\, S_w(z)\, dz, \qquad (12.1)$$

где $\bar{\phi}$ — средняя пористость, используемая в площадной модели.

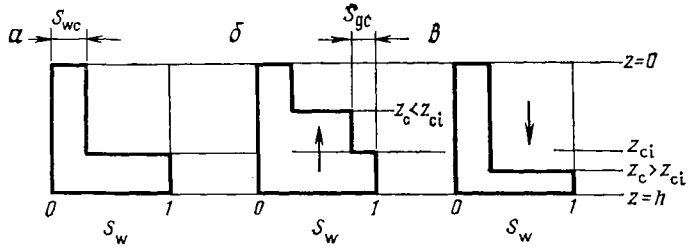


Рис. 12.1. Распределение флюидов по вертикали в состоянии гравитационного равновесия

Для постоянной ϕ начальная насыщенность $\bar{S}_{wi}$ (см. рис. 12.1,*а*) равна

$$\bar{S}_{wi} = \frac{S_{wc} z_{ci} + h - z_{ci}}{h}. \tag{12.2}$$

Если газоводяной контакт (GWC) поднимается до высоты z_c ($z_c < z_{ci}$), средняя насыщенность (см. рис. 12.1,*б*)

$$\bar{S}_w = \frac{S_{wc} z_c + (1 - S_{gc})(z_{ci} - z_c) + (h - z_{ci})}{h}. \tag{12.3}$$

Если газоводяной контакт опускается ниже начального положения ($z > z_{ci}$), то усредненная по вертикали насыщенность определяется соотношением (см. рис. 12.1,*с*)

$$\bar{S}_w = \frac{(S_{wc} z_c + h - z_c)}{h}. \tag{12.4}$$

Если для решения площадных двумерных задач в качестве базисной выбирается плоскость $z_c = 0$, то для определения потоков по горизонтали используются значения давлений на этой плоскости. Поскольку мы уже предположили, что капиллярное давление равно нулю, то в зоне газоводяного контакта (z_c) давления воды и газа должны быть равными:

$$p_{wc} = p_{gc}. \tag{12.5}$$

Для любого положения z давления в двух фазах следующие:

$$p_w(z) = p_{wc} + \gamma_w (z - z_c), \tag{12.6a}$$

$$p_g(z) = p_{gc} + \gamma_g (z - z_c) \tag{12.6b}$$

Разность двух давлений в базисной плоскости

$$p_g(0) - p_w(0) \equiv \tilde{P}_c = \Delta\gamma z_c, \tag{12.7}$$

где $\Delta\gamma = \gamma_w - \gamma_g$. Коутс и другие называют эту разность «псевдокапиллярным давлением», хотя эта величина и не имеет никакого отношения к капиллярным силам. Подставляя z_c из уравнения (12.7) в уравнения (12.3) и (12.4), получим

$$\bar{S}_w = -\frac{(1 - S_{wc} - S_{gc})\,\bar{P}_c}{h\Delta\gamma} + \frac{(1 - S_{gc})\, z_{ci}}{h}, \quad z_c < z_{ci} \tag{12.8}$$

$$\bar{S}_w = 1 - \frac{(1 - S_{wc})\,\bar{P}_c}{h\Delta\gamma}, \quad z_c > z_{ci}, \tag{12.9}$$

Псевдокапиллярное давление, подсчитанное по этим соотношениям для $h = 91{,}4$ м, $S_{wc} = 0{,}15$, $S_{gc} = 0{,}25$, $z_{ci} = 30{,}5$ м и $\Delta\gamma = 0{,}00764$ Н/см^3, приведено на рис. 12.2.

Псевдоотносительные проницаемости получены при условии, что поток в горизонтальном направлении между блоками, подсчитанный с учетом псевдоотносительной проницаемости, равен истинному потоку, проинтегрированному по толщине h, т. е.

$$h\bar{k}\bar{k}_{rl}(\bar{S}_w) = \int_0^h k(z)\, k_{rl}(S_w)\, dz, \tag{12.10}$$

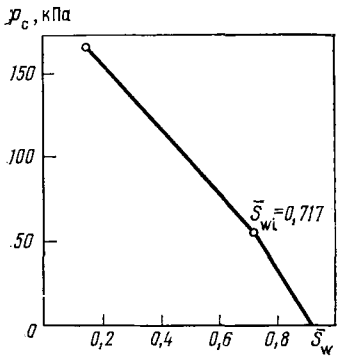


Рис. 12.2. Зависимость псевдокапиллярного давления от средней насыщенности (Коутс и др., 1971)

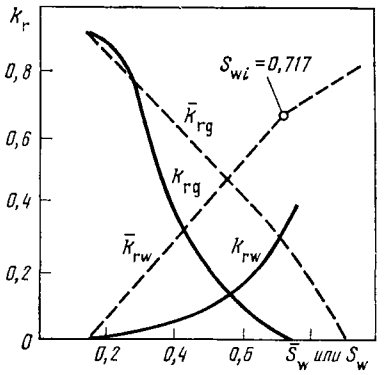


Рис. 12.3. Зависимость относительных и псевдоотносительных проницаемостей от насыщенностей (Коутс и др., 1971)

где $\bar{k}$ и $\bar{k}_{rl}$ — соответственно проницаемость по горизонтали и относительная проницаемость, полученные для схемы двумерного вертикального равновесия. Для постоянного k имеем

$$\bar{k}_{rw} = \frac{k_{rwrg}(z_{ci} - z_c) + (h - z_{ci})}{h}, \quad z_c < z_{ci}, \tag{12.11}$$

$$\bar{k}_{rw} = \frac{h - z_c}{h}, \quad z_c > z_{ci}, \tag{12.12}$$

где k_{rwrg} соответствует k_{rw} при остаточной газонасыщенности S_{gc}.

Используя уравнения (12.3) и (12.4) и исключив z_c из указанных выше соотношений, получим

$$\bar{k}_{rw} = \frac{k_{rwrg}\bar{S}_w}{(1 - S_{gc} - S_{wc})} + \frac{k_{rwrg}[z_c(1 - S_{gc} - S_{wc}) - h + S_{gc}z_{ci}]}{h(1 - S_{gc} - S_{wc})} + \\ + \frac{(h - z_{ci})(1 - S_{gc} - S_{wc})}{h(1 - S_{gc} - S_{wc})}, \quad z_c < z_{ci}, \tag{12.13}$$

$$\bar{k}_{rw} = \frac{\bar{S}_w - S_{wc}}{1 - S_{wc}}, \quad z_c > z_{ci}. \tag{12.14}$$

Аналогичным образом

$$\bar{k}_{rg} = \frac{k_{rgcw}}{1 - S_{gc} - S_{wc}}\left[1 - \frac{S_{gc}z_{ci}}{h} - \bar{S}_w\right], \quad z < z_{ci}, \tag{12.15}$$

$$\bar{k}_{rg} = \frac{k_{rgcw}}{1 - S_{wc}}(1 - \bar{S}_w), \quad z > z_{ci}, \tag{12.16}$$

где k_{rgcw} соответствует k_{rg} при критической водонасыщенности S_{wc}.

На рис. 12.3 показаны кривые псевдоотносительной проницаемости и кривые, характеризующие свойства породы при $h = 91{,}5$ м,

z_{ci}=30,5 м, S_{gc}=0,25, S_{wc}=0,15, k_{rwrg}=0,4 и k_{rgcw}=0,9. Отметим, что псевдофункции зависят только от конечных точек кривых относительной проницаемости для породы пласта (а не от их формы) и от начального положения контакта z_{ci}. Следовательно, в пластах со значительным изменением свойств по вертикали они могут быть различными для каждого из сеточных блоков.

В своей работе Коутс и другие (1971) показывают, как с помощью данного подхода можно учесть структуру пласта и его слоистость. Практическая приемлемость такого подхода зависит от скорости, с какой устанавливается равновесие по вертикали в сравнении со скоростью движения в горизонтальных направлениях. Коутс и другие (1971) ввели безразмерный параметр, величина которого характеризует справедливость допущения о вертикальном равновесии. В настоящее время отсутствует критическая оценка данного критерия.

12.2.2. Другие псевдофункции

а) *Обобщение понятия вертикального равновесия флюидов.* Уравнения (12.1) и (12.10) можно использовать для получения функций, отражающих состояние вертикального равновесия флюидов при условии, что их распределение определяется равновесием капиллярных сил и сил гравитации. Коутс и другие (1967) предложили применять такой метод для случая, когда не пренебрегают переходной зоной, и определили пределы его применимости. Подобный подход представляет особую ценность при моделировании фильтрации нефти и воды в пластах с хорошей вертикальной сообщаемостью.

Мартин (1968) разработал теоретическую основу применения псевдофункций вертикального равновесия, показав, как можно уравнения трехмерной фильтрации свести к двумерным уравнениям. Это достигается с помощью частичного интегрирования уравнений. Соотношения, выведенные Мартином, учитывают капиллярно-гравитационное равновесие в вертикальном направлении, с их помощью для двухфазного случая с пренебрежимо малой капиллярной переходной зоной можно снизить порядок уравнений, приведенных в предыдущем разделе.

Обобщенные функции вертикального равновесия в однородных пластах зависят только от начального положения контактов между флюидами и кривых P_c и k_r, характеризующих породу. Для неоднородных сред эти функции зависят также от слоистости ($\phi(z)$, $k(z)$) и могут различаться для каждого блока по площади пласта.

b) *Псевдофункции, учитывающие вязкости, для моделирования слоистых пластов.* Хирн (1971) разработал метод получения расчетных кривых псевдоотносительных проницаемостей для моделирования заводнения в слоистых пластах, по которому распределение флюида в вертикальном направлении зависит в большей мере от вязкости, а не от гравитационных и капиллярных сил. Построе-

ние модели проводилось с учетом результатов, полученных в работах Хиатта (1958), Уоррена и Косгроува (1964); модель действительна для случая, когда градиенты давления в вертикальном направлении, обусловленные вязкостью флюидов, незначительны в сравнении с градиентами давления в горизонтальном направлении. В модели Хирна флюиды предполагаются несжимаемыми, вытеснение их «поршневым». Хоторн (1974) показал, как можно видоизменить модель Хирна, чтобы учесть влияние капиллярного давления.

c) *Динамические псевдофункции.* Рассмотренные ранее модели нельзя использовать при моделировании пластов, для которых не выполняются условия равновесия по причине плохой вертикальной сообщаемости, больших вертикальных перетоков, изменений дебитов и т. д.

Несмотря на то, что в общем случае пласт можно представить как двумерный, для точного определения соответствующих псевдофункций потребовалось бы использовать полную трехмерную модель. Это нежелательно, поскольку с помощью псевдофункций мы как раз пытаемся избежать использования таких моделей. В такой ситуации псевдофункции для данного блока изменялись бы во времени и были бы различными для каждой совокупности моделируемых условий. В качестве приближенного Джексом и другими (1971) был разработан метод получения таких «динамических» псевдофункций по результатам решения двумерных профильных задач. Такие функции применимы в широком диапазоне условий фильтрации и начальной насыщенности флюидами и могут быть переменными во времени и пространстве. Динамические псевдофункции строятся по результатам исследования поведения пласта с помощью профильных моделей при условиях, ожидаемых для площадной модели.

Результаты профильного моделирования обрабатываются с целью получения усредненных по толщине пласта значений насыщенности и псевдоотносительной проницаемости. Кайт и Берри (1975) усовершенствовали методику Джекса и других (1973) с целью определения динамического псевдокапиллярного давления и компенсации различия в размерах сеток, используемых в профильных и площадных моделях.

d) *Псевдофункции для отдельных скважин.* Как упоминалось в гл. 9 (см. раздел 9.7.3), для достоверного прогноза эксплуатационных характеристик скважины в площадной модели необходимо использовать модифицированные функции k_{rl}, которые также можно назвать псевдофункциями. Дополняя методы, рассмотренные в гл. 9, Эммануэль и Кук (1974) показали возможность использования площадной модели для получения псевдокривых. Вудс и Курана (1977) путем частичного интегрирования уравнений фильтрации усовершенствовали этот метод так, чтобы его можно было использовать для моделирования процесса образования конуса обводнения в трехмерных моделях пласта. При подобном подходе не предполагается вертикальное равновесие в пласте — здесь учитываются только вязкости и геометрия потока, оказывающие

преимущественное влияние на эксплуатационные характеристики скважин. Псевдофункции определяют по результатам, полученным с применением двумерной модели конусообразования. При выводе ограничиваются случаем двухфазной фильтрации.

12.3 МЕТОД ТРУБОК ТОКА И СВЯЗАННЫЕ С НИМ МОДЕЛИ

Модели трубок тока предшествовали современным математическим моделям. Метод трубок тока можно использовать для ручного расчета двумерных схем вытеснения. По известному распределению давления или по его оценке пласт делится на трубки тока; при этом предполагается, что перетоков между отдельными трубками нет. Затем процесс вытеснения в каждой трубке рассчитывается отдельно, в результате чего двумерная задача сводится к нескольким одномерным. Расчет является точным только в том случае, если границы трубок совпадают с линиями тока, а сами линии тока во времени не меняются.

Модели такого вида были предложены Маскетом (1937), Фейем и Пратцем (1951), Херстом (1953), Хиггинсом и Лейтоном (1962), Хаубером (1964), Паттоном и др. (1971) и Ле Бланком (1971).

Первые модели предназначались для расчета вручную, однако модели Хиггинса и Лейтона и более поздние ориентированы на машинный расчет. Самой универсальной является модель Ле Бланка.

Если распределение давлений описывается стационарным уравнением (типа уравнения Лапласа), то такой подход является точным. Указанное справедливо для однофазной фильтрации несжимаемого флюида. При использовании потенциала или псевдодавления (как это рассматривалось в гл. 2) в моделях трубок тока также могут быть учтены гравитационные эффекты и изменения плотности и вязкости в зависимости от давления. Данный метод можно использовать как точный для расчета «смешивающегося» вытеснения при отношении подвижностей, равном единице. В более сложных случаях положение трубок тока определяется решением в потенциалах, а поскольку в этом случае трубки тока уже не соответствуют линиям тока, модель дает лишь приближенное решение задачи.

Распределение линий тока можно определить либо аналитическими, либо численными методами. Аналитические решения известны для ряда схем расположения скважины (Маскет, 1937, Морель — Сейту, 1966). Методы численного решения эллиптических уравнений рассматриваются во многих работах.

После определения положения трубок тока с помощью аналитических или численных методов, производится расчет распределения насыщенности или концентрации вещества вдоль линий тока.

Применение моделей трубок тока ограничивается двумерными схемами и задачами, где упомянутые выше допущения приближен-

но удовлетворяются. Паттон и другие (1971) представили интересное решение задачи получения прогнозных характеристик вытеснения с использованием полимеров методом трубок тока. Подробное описание решения выходит за рамки данной книги.

12.4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ С ПЕРЕМЕННЫМ ДАВЛЕНИЕМ НАСЫЩЕНИЯ

Давлением разгазирования p_b пласта, содержащего недостаточно насыщенную газом нефть, называется давление, при котором начинают выделяться первые пузырьки газа, если давление в пласте снижается (рис. 12.4). Это также такое давление, при котором весь газ системы «газ — жидкость» растворяется (или переходит в раствор), при повышении давления. Ясно, что при $p > p_b$ растворимость газа в нефти R_s должна быть постоянной. Однако, если по мере возрастания давления постоянно поступает достаточное количество газа, то нефтяная фаза будет насыщаться (см. пунктирную кривую увеличения объема нефти вследствие его обогащения газом — кривую набухания на рис. 12.4).

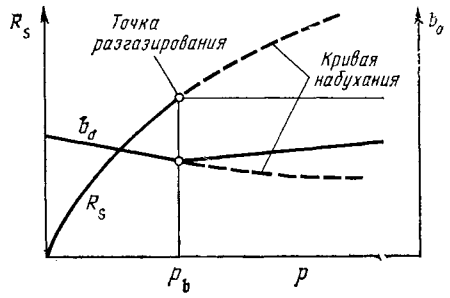


Рис. 12.4. Зависимость растворимости газа в нефти от давления

В уравнениях трехфазной фильтрации, полученных в гл. 5, предполагалось, что при моделировании для пласта повсюду можно использовать одни и те же кривые R_s и b_o. Это справедливо для случая, когда в процессе разработки падение давления происходит повсеместно. Однако иногда это допущение не выполняется.

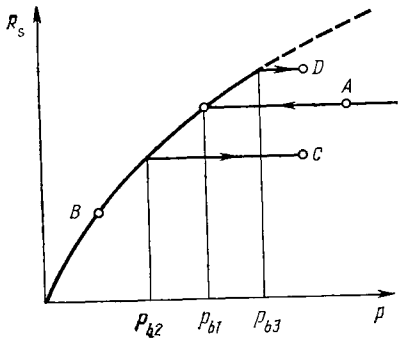


Рис. 12.5. Положения точки разгазирования при изменениях давления

Рассмотрим залежь, в которой нефть первоначально недонасыщена газом, с начальными условиями, соответствующими точке A на рис. 12.5. Если давление снижается ниже начального значения давления разгазирования p_{b1}, то будет выделяться свободный газ. Допустим, что затем пластовое давление возрастает за счет закачки воды, начатой в точке B. В результате вертикальной миграции газа блок у подошвы пласта будет меньше насыщен газом и, следовательно, давление разгази-

рования смеси p_{b2} для данного блока будет ниже начального давления разгазирования p_{b1}. Поэтому при восстановлении пластового давления могут установиться условия, определяемые в точке C. В противоположность этому, условия в блоке у кровли пласта, имеющем большую газонасыщенность, будут изменяться в соответствии с кривой набухания выше исходного давления разгазирования до точки D, где $p_{b3}>p_{b1}$.

Нагнетание газа в залежь, недонасыщенную газом, также приведет к формированию различных давлений разгазирования в разных частях пласта.

И, наконец, даже в неразрабатывавшихся пластах давление разгазирования увеличивается с увеличением глубины. Подобными изменениями нельзя пренебречь для пластов большой толщины.

Для моделирования переменного давления разгазирования требуется особая форма уравнения для газа. Стеффенсен (1973), Каземи (1975), Томас и другие (1976) представили методы решения этой задачи, считая давление разгазирования переменной величиной только в аккумулятивных членах уравнения. Страйт и другие (1977) представили полностью неявную формулировку, рассматриваемую нами ниже. Вместо давления разгазирования в качестве переменной удобно использовать давление насыщения p_s. Давление насыщения в расчетной ячейке определяется как давление в блоке, если в нем имеется свободный газ, и как давление разгазирования нефтяной фазы в том случае, если ячейка содержит нефть, недонасыщенную газом. При этом соблюдаются следующие условия:

а) $p\geqslant p_s$;

в) если $p>p_s$, то $S_g=0$;

с) если $S_g>0$, то $p=p_s$.

Данные соотношения показывают, что p_s и S_g не могут изменяться независимо. Свойства нефти определяются значениями p и p_s на кривых набухания и сжимаемостью нефти выше давления разгазирования:

$$R_s=f(p_s),\ b_o=f(p,\ p_s).$$

Рассмотрим консервативную форму для конечно-разностного разложения члена массообмена $\partial/\partial t(S_o b_o R_s)$ в уравнении для газа:

$$\Delta_t(S_o b_o R_s)=(b_o R_s)^{n+1}(S_o{}^{n+1}-S^n{}_o)+$$
$$+S^n{}_o[(b_o R_s)^{n+1}-(b_o R_s)^n], \qquad (12.17)$$

где
$$(b_o R_s)^k=b_o(p^k,\ p^k{}_s)R_s(p^k{}_s). \qquad (12.18)$$

Для простоты сжимаемость породы положим равной нулю. Второй член разложения представляет собой функцию как изменения давления p, так и изменения давления насыщения p_s.

$$\Delta_t(b_o R_s)=f(\Delta_t p,\ \Delta_t p_s). \qquad (12.19)$$

Поскольку значение этого члена зависит от неизвестных изменений p и p_s, то при решении следует использовать итерационную про-

цедуру. Страйт и другие (1977) пренебрегают величиной $\Delta_t p_s$ на первой итерации, представляя уравнение (12.17) в следующем виде:

$$\Delta_t (S_o b_o R_s) = (b_o R_s)^n \Delta_t S_o + S^n{}_o b'_o R^n{}_s \Delta_t p, \qquad (12.20)$$

где

$$b'_o = [b_o(p^n + \Delta p,\ p^n{}_s) - b_o(p^n,\ p^n{}_s)]/\Delta p. \qquad (12.21)$$

Результаты первой итерации обозначаются как $p^{(1)}$, $S^{(1)}{}_o$, $S^{(1)}{}_g$. Теперь имеется несколько возможностей определить изменение величины давления насыщения:

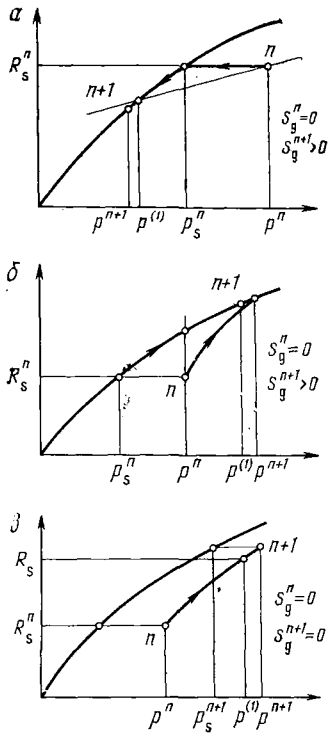


Рис. 12.6. Схема моделирования переменного давления насыщения (Страйт и др., 1977)

а) $p^{(1)} < p^{(n)}{}_s$, в этом случае $p_s{}^{n+1} = p^{n+1}$ и S_g возрастает за счет выделения газа;

b) $p^{(1)} \geqslant p^{(n)}$ и $S_g{}^{(1)} > 0$, при этом некоторое количество газа (или весь газ) может быть растворено, а p_s может возрасти до p^{n+1};

c) $S^{(1)}{}_g < 0$, в этом случае p_s должно быть снижено для того, чтобы получить $S_g{}^{n+1} = 0$.

Последний случай возможен при смешивании флюидов, когда фильтрация происходит в направлении увеличения R_s. Остальные случаи возможны при отсутствии изменения давления насыщения.

Случай (а). Является обычным для разработки залежи при падающем давлении. Страйт и др. (1977) дают два эквивалентных разложения, аппроксимирующих наклон секущей, проведенной между точками n и $n+1$ (см. рис. 12.6,*а*).

Случай (b). В зависимости от величин $S^{(1)}{}_g$ и $p^{(1)}$ ячейка может стать или не стать насыщенной. Давление p^*, при котором в соответствии со значением $S^{(1)}{}_g$ свободный газ будет растворен (т. е. давление разгазирования), можно определить следующим образом. При этом давлении $S^*{}_g = 0$, $S^*{}_o = 1 - S^{(1)}{}_w$ и из условия сохранения для нефтяной фазы следует

$$b^*{}_o S^*{}_o = b^{(1)}{}_o S^{(1)}{}_o. \qquad (12.22)$$

Аналогично после первой итерации подсчитывается общее количество газа в ячейке

$$b^{(1)}{}_o R^n{}_s S^{(1)}{}_o + b^{(1)}{}_g S^{(1)}{}_g. \qquad (12.23)$$

Если весь газ растворен, то его количество должно быть равным $b^*{}_o R^*{}_s S^*{}_o$. Используя уравнение (12.22), получим

$$R^*{}_s = (b^{(1)}{}_o R^n{}_s S^{(1)}{}_o + b^{(1)}{}_g S^{(1)}{}_g)/b^{(1)}{}_o S^{(1)}{}_o, \qquad (12.24)$$

что соответствует определенному давлению разгазирования p^*. Теперь имеем две следующие возможности.

1. Если $p^{(1)}<p^*$, раствориться может только часть газа, при этом $p_s{}^{n+1}=p^{n+1}$. Значение давления $p^{(1)}$ — «хорошее» приближение для $p_s{}^{n+1}$. Для учета растворенного газа снова пересчитывается насыщенность $S^{(1)}{}_g$:

$$S^{(1)}{}_g \simeq S^{(1)}{}_g - \delta S_g = S^{(1)}{}_g - $$
$$-[R_s(p^{(1)})\, b_o(p^{(1)}, p^{(1)}) - R_s(p^n)\, b_o(p^n,\ p^n{}_s)]\, S^n{}_o / b^{(1)}{}_g. \quad (12.25)$$

Раскрывая уравнение (12.17), получим

$$\Delta_t(S_o b_o R_s) = b_o{}^{(1)} R_s{}^{(1)} (S_o{}^{n+1} - S_o{}^n) + S_o{}^n [\Delta(b_o R_s)_{p_s} +$$
$$+ (b_o R_s)'_p (p^{n+1} - p^n)], \quad (12.26)$$

где в соответствии с рис. 12.6,*б*

$$\Delta(b_o R_s)_{p_s} = [b_o(p^n,\ p^n) R_s(p^n) - b_o(p^n,\ p^n{}_s) R_s(p^n{}_s)];$$
$$(b_o R_s)'_p = [b_o(p^{(1)},\ p^{(1)}) R_s(p^{(1)}) - b_o(p^n,\ p^n) R_s(p^n)] / (p^{(1)} - p^n).$$

2. Если $p^{(1)}>p^*$, весь имеющийся газ растворится, давление насыщения будет меньше давления в блоке ($p_s{}^{n+1}<p^{n+1}$). Тогда мы полагаем $S_g{}^{n+1}=0$, $\delta S_g = -S_g{}^n$, а изменение давления насыщения определяется в предположении, что $p_s{}^{(n+1)} \simeq p^*$. Теперь, раскрывая уравнение (12.17), получим

$$\Delta_t(S_o b_o R_s) = b_o(p^{(1)},\ p^*) R_s(p^*)\, (S_o{}^{n+1} - S_o{}^n) +$$
$$+ S_o{}^n [\Delta(b_o R_s)_{p_s} + (b_o R_s)'_{p_s} (p_s{}^{n+1} - p^n) +$$
$$+ (b_o R_s)'_p (p^{n+1} - p_s{}^{n+1})], \quad (12.27)$$

где в соответствии с рис. 12.6,*в*

$$\Delta(b_o R_s)_{p_s} = [b_o(p^n,\ p^n) R_s(p^n) - b_o(p^n,\ p^n{}_s) R_s(p^n{}_s)],$$
$$(b_o R_s)'_{p_s} = [b_o(p^*,\ p^*) R_s(p^*) - b_o(p^n,\ p^n) R_s(p^n)] / (p^* - p^n),$$
$$(b_o R_s)'_p = [b_o(p^{(1)},\ p^*) - b_o(p^*,\ p^*)] R_s(p^*) / (p^{(1)} - p^*).$$

Случай (с). В данном варианте используется алгоритм, рассмотренный в предыдущем случае. Отметим, что по уравнениям (12.22)—(12.24) при отрицательных $S^{(1)}{}_g$ давление разгазирования снижается.

Во всех случаях уравнение для второй итерации можно записать в общем виде

$$\Delta_t(S_o b_o R_s) = (b_o R_s)^k \Delta_t S_o + S^n{}_o [(b_o R_s)'_p \Delta_t p +$$
$$+ (b_o R_s)'_{p_s} \Delta_t p_s] + R, \quad (12.28)$$

где R — явный член. Значения R и коэффициентов зависят от состояния ячейки, определенного по первой итерации.

Решение по описанному нами методу обычно сходится за две итерации. Способ учета аккумулятивных членов оказывается достаточным для площадных и трехмерных моделей. В случае применения метода в расчетах процесса образования конусов с целью обеспечения устойчивости вычислительного процесса необходимо

для потоковых членов, содержащих R_s, вводить неявные составляющие относительно p_s. Эти члены заменяют в уравнении для газа неявные коэффициенты относительно $\Delta_t S_g$ без изменения структуры уравнения. Таким же образом можно модифицировать и неявные члены отбора.

В заключение следует упомянуть, что те же вычислительные трудности возникают при моделировании процесса вытеснения нефти паром и моделировании геотермальных пластов. В данных случаях двумя переменными, связанными фазовым соотношением, являются температура блока и насыщенность паром.

12.5. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ, НЕ ОПИСЫВАЕМЫХ С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛЕЙ НЕЛЕТУЧЕЙ НЕФТИ

Некоторые процессы, происходящие в пласте, невозможно описать с помощью моделей нелетучей нефти, поскольку не соблюдаются основные допущения, на которых базируются эти модели. Однако в этом случае можно использовать более общие уравнения для многокомпонентных систем, в которых учитывается как конвективный, так и диффузионный массоперенос. Если мы рассматриваем только нефтяную и газовую фазы, каждая из которых состоит из N углеводородных компонентов, то уравнения имеют вид (Берд и др., 1960)

$$-\nabla(\rho_o\omega_{oi}u_o+\rho_g\omega_{gi}u_g)+\nabla(\phi S_o\rho_o K_{oi}\nabla\omega_{oi}+\phi S_g\rho_g K_{gi}\nabla\omega_{gi})=$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}(\phi S_o\rho_o\omega_{oi}+\phi S_g\rho_g\omega_{gi})+q_i,\quad i=1,\ldots,N. \qquad (12.29)$$

Здесь ω_{oi} и ω_{gi} — массовые доли компонента i в нефтяной и газовых фазах, K_{li} — тензоры коэффициентов диффузии, l=o, g. Дополнительными уравнениями являются известные двухфазные соотношения ограничения для массовых долей:

$$u_l=-\lambda_l(\nabla p_l-\gamma_l\nabla z),\ P_c=p_g-p_o,\quad S_o+S_g=1, \qquad (12.30)$$

$$\sum_{i=1}^{N}\omega_{oi}=1,\quad \sum_{i=1}^{N}\omega_{gi}=1 \qquad (12.31)$$

и уравнения, описывающие массообмен между фазами

$$\frac{\omega_{gi}}{\omega_{oi}}\equiv K_i=f(p_l,\ \omega_i),\quad i=1,\ldots,N, \qquad (12.32)$$

где ω_i — доля i-го компонента в двухфазной смеси; K_i — константы фазового равновесия (Катц и др., 1959), называемые также K-величинами или коэффициентами распределения. Плотности и вязкости фаз сложным образом зависят от состава каждой фазы, а последние зависят от общего состава и давления (в данном изложении температура предполагается постоянной).

Уравнения (12.29)—(12.32) представляют собой замкнутую систему из $2N+6$ уравнений с $2N+6$ неизвестными: ω_{oi}, ω_{gi}, u_o, u_g,

p_o, p_g, S_o, S_g. Легко видеть, как можно обобщить эту формулировку для случая трехфазной фильтрации.

Ниже рассматриваются два способа упрощения общих уравнений, приводящие к широко известным моделям.

12.5.1. Моделирование «смешивающегося» вытеснения

Эффект «смешивающегося» вытеснения возникает при фильтрации двух или более компонентов в одной фазе. Такие процессы описываются уравнением конвективной диффузии и находят применение во многих областях, в том числе при рассмотрении процессов «смешивающегося» заводнения переноса солей в воде, заводнения с применением полимеров и химреагентов, а также при моделировании загрязнения воды и воздуха.

Рассмотрим два компонента — нефть и растворитель, смешивающиеся в любых пропорциях. Если предположить, что:

а) компоненты флюидов и порода несжимаемы;

б) изменения объема при смешивании компонентов не происходит. Тогда общий баланс компонентов может быть представлен в следующем упрощенном виде (Писман и Рэчфорд, 1962; Лантц, 1970; Сеттари и др., 1977):

$$-\nabla u = \nabla\left[\frac{k}{\mu}(\nabla p - \gamma\nabla z)\right] = q, \tag{12.33}$$

$$\nabla(\phi K \nabla C) - \nabla uC = \phi\frac{\partial C}{\partial t} + C_q q. \tag{12.34}$$

Здесь u — скорость фильтрации единственной фазы; K — тензор диффузии, учитывающий молекулярную диффузию и гидродинамическую дисперсию; C — объемная концентрация растворителя в пласте; C_q — концентрация растворителя в источнике (стоке), C_q равняется концентрации на входе для нагнетательных скважин и $C_q = C$ для добывающих скважин. Вязкость смеси μ и плотность ρ задаются соотношениями

$$\gamma = \gamma_o(1-C) + \gamma_s C, \tag{12.35}$$

$$\mu = f(\mu_o, \mu_s, C). \tag{12.36}$$

В уравнении (12.35) учитывается сделанное выше предположение (а). Функция вязкости (12.36) обычно отражает логарифмический или степенной закон смешивания (Писман и Рэчфорд, 1962; Сеттари и др., 1977). Аналогичные уравнения можно вывести для многокомпонентных систем. Обращение с ними, однако, осложняется взаимодействием коэффициентов диффузии (Уитейкер, 1967; Бэр, 1972; Зигмунд, 1976).

12.5.1.1. Решение уравнений конвективной диффузии

Прямое решение этих уравнений затруднено по двум причинам. Первая, общая для всех уравнений данного типа, заключается в том, что численное решение уравнения конвективного переноса должно быть достаточно точным, чтобы погрешности численного

решения (называемые численной дисперсией) не «скрывали» воздействия физической дисперсии. Особенность численных методов заключается в том, что получают либо сглаженные решения с большой численной дисперсией, либо решения, которые являются точными только для сеток с малым шагом и осциллируют при большом шаге сетки. Эта проблема многократно обсуждалась в литературе по численным методам решения уравнений динамики жидкостей (например, Ван-Леер, 1977; Форстер, 1977). При моделировании процесса разработки нефтяных месторождений эти уравнения решаются как конечно-разностными, так и вариационными методами. Обзор этих методов дан в работе Сеттари и др. (1977).

Вторая причина связана со спецификой задач разработки нефтяных месторождений. Для большего числа процессов «смешивающегося» вытеснения отношение подвижностей $M=\mu_o/\mu_s$ крайне неблагоприятно (значение M изменяется от 10 до 100). Это, как указывалось в гл. 9 (см. раздел 9.7.3), может вызвать погрешности, связанные с ориентацией сетки. При достаточно большом значении M фильтрация становится физически неустойчивой, что приводит к образованию языков вытесняющей фазы, пронизывающих нефть. Такие процессы можно моделировать (это было показано в работах Писмана и Рэчфорда, 1962 и Сеттари и др., 1977). Однако для исследования тонкой структуры потока нужно использовать мелкую сетку, которая, в свою очередь, может оказаться практически неприемлемой и нежелательной при моделировании крупных нефтяных месторождений.

12.5.1.2. Моделирование «смешивающегося» вытеснения с помощью моделей фильтрации несмешивающихся флюидов

Существует серьезное основание для развития методов, которые можно использовать для моделирования «смешивающегося» вытеснения с помощью моделей нелетучей нефти (β-моделей).

Дело в том, что модели нелетучей нефти широко распространены, а непосредственное решение уравнений «смешивающегося» вытеснения затруднительно. За использование таких моделей говорит также и то, что некоторые смеси флюидов могут относиться к категории смешивающихся или несмешивающихся (двухфазных) в зависимости от концентрации и давления. Следовательно, процесс фильтрации в пласте изменяется от несмешивающегося до смешивающегося и наоборот, что не дает возможности описать его с помощью уравнений (12.33) и (12.34).

На аналогию между «смешивающимся» и «несмешивающимся» вытеснением впервые указал Лантц, 1970. Он показал, что в случае постоянного коэффициента диффузии K фильтрация смешивающихся флюидов может быть смоделирована точно с помощью уравнений фильтрации несмешивающихся флюидов. Если обозначить несмешивающиеся фазы индексами «w» и «п», то аналогичными переменными будут:

$$\mu_w=\mu_o;\quad \mu_n=\mu_s;\quad S_n=C,$$

Лантц показал, что основной поток в смешивающемся вытеснении может быть выражен через основной поток в несмешивающемся вытеснении, а диффузионный поток можно представить с помощью капиллярного потока.

При $\mu_s=\mu_o=\mu$ (т. е. $M=1$) для аналогии процессов вытеснения требуется:

$$k_{rw}=S_w, \tag{12.37a}$$

$$k_{rn}=S_n, \tag{12.37b}$$

$$P_c=\frac{\phi K\mu}{k}\ln\left(\frac{1-S_w}{S_w}\right). \tag{12.38}$$

Относительные проницаемости пропорциональны насыщенности, поскольку скорость фильтрации обеих фаз одна и та же. При $M\neq 1$, k_{rl} и P_c сильно зависят от вязкости, что для больших M вызывает осложнения, связанные с устойчивостью.

Тодд и Лонгстаф (1972) разработали более практичный подход. Они показали, что с помощью эмпирической модели можно получить достоверный прогноз процесса смешивающегося заводнения, не рассматривая детальную структуру течения. Относительные проницаемости в их модели всегда определяются уравнением (12.37). Однако эффективные вязкости и плотности флюидов в блоках сетки определяются эмпирическими законами смешивания, отражающими эффективные свойства флюида, усредненные по блоку. Смешиваемость зависит от интенсивности диффузии. Если интенсивность диффузии велика, то флюиды внутри блока можно считать полностью смешанными, при этом их свойства определяются законами смешиваемости (12.35)—(12.36). С другой стороны, если диффузия мала, то зона смеси по сравнению с размером блока пренебрежимо мала, а эффективные характеристики нефти и растворителя близки к характеристикам чистых компонентов. Тодд и Лонгстафф (1972) предложили следующую модель эффективных вязкостей μ_{oe} и μ_{se} для общего случая:

$$\mu_w=\mu_{oe}=\mu_o^{1-\omega}\mu^{\omega}, \tag{12.39}$$

$$\mu_n=\mu_{se}=\mu_s^{1-\omega}\mu^{\omega}, \tag{12.39b}$$

где ω — параметр смешиваемости, μ — вязкость в условиях полной смешиваемости. Отметим, что $\mu_{le}=\mu_l$ для $\omega=0$ и $\mu_{le}=\mu$ для $\omega=1$.

Эффективные плотности получены следующим образом. Зададим закон изменения вязкости для условия полной смешиваемости $\mu=f(\mu_o, \mu_s)$, $C=S_w$ и, используя данное соотношение, определим эффективные насыщенности S_{le} при следующих соотношениях, где μ_l определяется по формулам (12.39):

$$\mu_w=f(\mu_o, \mu_s, S_{we}),$$

$$\mu_n=f(\mu_o, \mu_s, 1-S_{ne}).$$

Другими словами, S_{le} — это насыщенности, для которых по закону полной смешиваемости получаются значения вязкостей для условия частичной смешиваемости. Теперь эффективные плотности получают из соотношений:

$$\gamma_w=\gamma_{oe}=\gamma_o S_{we}+\gamma_s(1-S_{we}), \tag{12.40a}$$

$$\gamma_n=\gamma_{se}=\gamma_o(1-S_{ne})+\gamma_s S_{ne}. \tag{12.40b}$$

Данная модель неприменима для степенного закона смешивания, когда $M=1$. Для этого случая предлагается закон, аналогичный (12.39):

$$\gamma_w=(1-\omega)\gamma_o+\omega\gamma, \tag{12.41a}$$

$$\gamma_n=(1-\omega)\gamma_s+\omega\gamma. \tag{12.41b}$$

При практическом использовании данной схемы главной задачей остается выбор соответствующего параметра смешивания ω. Тодд и Лонгстафф (1972), чтобы удовлетворить условиям лабораторных экспериментов, использовали $\omega=2/3$. Однако для промысловых условий они рекомендовали выбирать $\omega=1/3$. Из анализа, проведенного Уорнером (1977), следует, что рекомендуемое значение $\omega=0{,}8$.

12.5.2. Моделирование композиционных эффектов

При рассмотрении общих уравнений, когда в многокомпонентных системах не учитывается диффузионный перенос, получена особая разновидность модели, которую называют композиционной. Обычно воду считают как бы отдельным компонентом, присутствующим только в водной фазе. Также предполагается, что отсутствует массоперенос между водой и нефтяной или газовой фазами (Ван-Ки и др., 1972; Нолен, 1973).

Композиционную модель можно свести к модели нелетучей нефти, если предположить, что углеводороды состоят только из двух компонентов (нефти и газа), при этом считается, что только газ может быть в жидкой и газовой фазах. Композиционные свойства могут быть получены из свойств нелетучей нефти и наоборот (см. упражнение 12.1).

12.5.2.1. Композиционные модели

Основной трудностью при использовании композиционной модели фильтрации является эффективное предсказание характеристик «давление — объем — температура» (данных pVT) сложных смесей. Наилучшие современные методы прогноза основаны на модификации и обобщении уравнения состояния Редлиха — Квонга (Уилсон, 1969; Соув, 1972; Пенг и Робинсон, 1976), однако вычисления с их использованием проходят медленно, поскольку решение обычно получают с использованием итераций. В работах Фассела и Яносика (1976), Каземи и других (1977), Фассел и Фаселла (1977) сделаны попытки улучшения эффективности учета харак-

теристик pVT при формировании моделей. В большинстве численных композиционных моделей используется IMPES-метод. В этом случае учет массовых долей компонента в потоковых членах производится явно, что приводит к ограничению устойчивости метода. Для большинства задач, рассматриваемых в декартовых координатах, это ограничение не так обременительно, как ограничение, обусловленное явным учетом фазовых проводимостей. Однако оно становится серьезным, если проводимости необходимо учитывать неявно. Опыт использования полностью неявных композиционных моделей до сих пор не нашел отражения в литературе.

12.5.2.2. Моделирование композиционных эффектов с помощью моделей нелетучей нефти

В литературе приведено несколько методов приближенного моделирования композиционных эффектов в модели нелетучей нефти. Основным преимуществом такого подхода является то, что в данном случае вычислительные затраты значительно меньше, чем при использовании полностью композиционной модели.

Спивак и Диксон (1973) предложили метод расчета для газоконденсатных пластов в предположении, что конденсат и газ можно представить двумя псевдокомпонентами. В данной модели предполагалось, что сухой газ как компонент существует только в газовой фазе, а конденсат, являющийся при нормальных условиях жидкостью, присутствует при пластовых условиях как в газовой, так и в жидкой фазе. Массообмен между фазами зависит от содержания жидкости в газовой фазе, которое определяется соотношением

$$r_s = \left(\frac{V_c}{V_g}\right)_{STC} = f(p). \qquad (12.42)$$

Таким образом, r_s — аналог R_s, а модель сходна с моделью нелетучей нефти, если поменять местами газовую и жидкую углеводородную фазы.

Кук и другие (1974) предложили метод учета композиционных эффектов во время нагнетания газа в пласты, насыщенные летучей нефтью, или в газоконденсатные пласты. В этой модели зависимости b_o, b_g, R_s (или r_s), μ_o, μ_g, ρ_o и ρ_g связаны с параметром G_i, где G_i — суммарный закачанный объем газа, заполняющего ячейку. Ими были получены требуемые соотношения по результатам одномерного «композиционного» моделирования нагнетания газа. Поскольку эти соотношения, как оказалось, не зависят от расположения блока, авторы использовали полученные зависимости в многомерных моделях.

Генри (1976) показал, что предположение о зависимости свойств флюидов только от G_i, как это предлагали Кук и другие (1974), несправедливо в случае, когда величины K являются функциями состава. В модели Кука и других предполагалось, что ко-

эффициенты распределения K только функции p. По этой причине, если предвидятся большие изменения состава, использовать модифицированную β-модель не рекомендуется.

12.6. ФУНКЦИИ ОТ НАСЫЩЕННОСТИ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ИСТОРИИ ПРОЦЕССА РАЗРАБОТКИ

Явление гистерезиса капиллярного давления и относительных проницаемостей приобретает особое значение при точном моделировании ситуаций, связанных с изменением направления фильтрации, таких как циклическая закачка газа и обработка паром (см. Катлер и Рис, 1970; Ленд, 1968; Эвренос и Комер, 1969; Дандона и Морзе, 1973). Вместе с описанием физики этого явления здесь представлена и численная модель.

12.6.1. Физическая модель гистерезиса

Физические модели, построенные по экспериментальным данным о гистерезисе, представлены в работах Эвреноса и Комера (1969) и Киллафа (1976). В основу наших рассуждений положена работа Киллафа.

Вначале рассмотрим гистерезис капиллярного давления в системе со смачивающей (w) и несмачивающей (n) фазами. Рассмотрим кривые, приведенные на рис. 12.7: a — первичная кривая вытеснения; b — кривая капельной пропитки; c — вторичная кривая вытеснения.

Эти кривые получены в условиях, когда вытеснение в каждом из направлений осуществляется полностью до получения остаточного значения насыщенности. Поэтому кривые называют предельными.

Если процесс вытеснения обратить до того, как S_w достигнет значения S_{wc}, то изменение P_c происходит по кривой d, показанной на рис. 12.8 (левый рисунок). Аналогично, если обратить процесс первичной пропитки, то новое P_c будет следовать по кривой (e), показанной на рис. 12.8 (левая часть). Экспериментальные наблюдения показывают, что концевые точки этих промежуточных кривых совпадают со значениями остаточных насыщенностей.

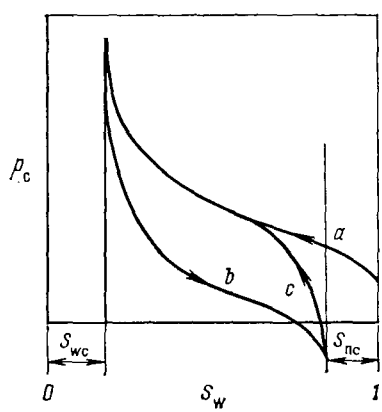


Рис. 12.7. Кривые гистерезиса капиллярного давления

Иная ситуация возникает, если вновь обратить процесс, начатый в точке A первичной кривой вытеснения (см. рис. 12.8, правая часть). В этом случае образуется новая промежуточная кривая, которая

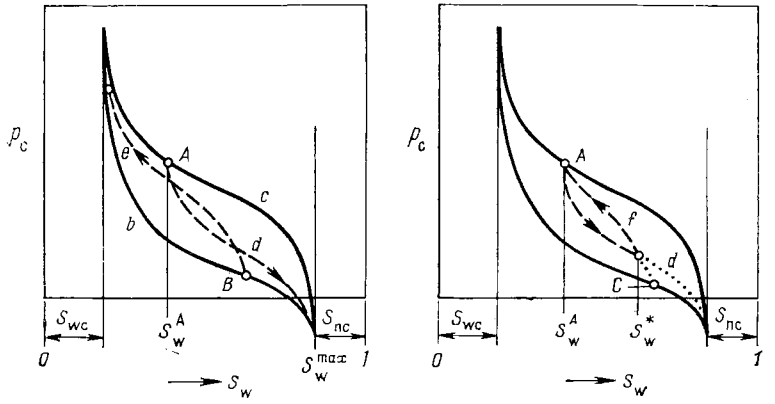


Рис. 12.8. Промежуточные кривые P_c. Слева возврат начинается на предельных кривых, справа — возврат начинается на промежуточной кривой

достигает предельной кривой в начальной точке A. Аналогично, если процесс начинается на кривой пропитки, то промежуточные кривые вытеснения пойдут в направлении S_{wc}, а кривые пропитки — к точке B (см. рис. 12.8, левая часть).

Описанный процесс имеет место только в том случае, когда в системе было предварительно осуществлено полное вытеснение несмачивающей фазы и поэтому все циклы вытеснения пойдут по кривой c (см. рис. 12.7). Однако, если процесс первичного вытеснения обратить, то промежуточная кривая пропитки пойдет к остаточной насыщенности $S^*_{nc} < S_{nc}$ (рис. 12.9). Это происходит из-за того, что остаточная насыщенность несмачивающей фазой зависит от максимальной насыщенности несмачивающей фазой S_n^{max}, пред-

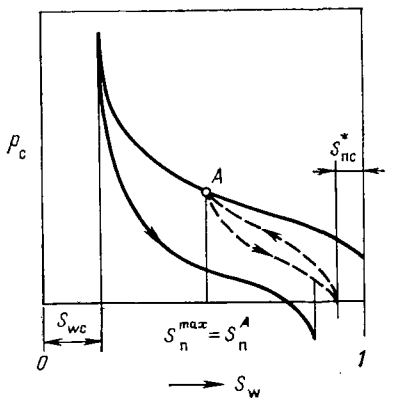


Рис. 12.9. Промежуточная кривая P_c, берущая начало на кривой первичного вытеснения

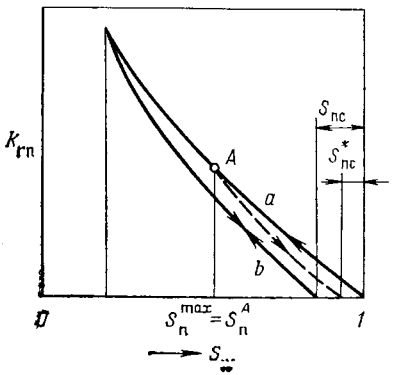


Рис. 12.10. Модель гистерезиса для k_{rn}

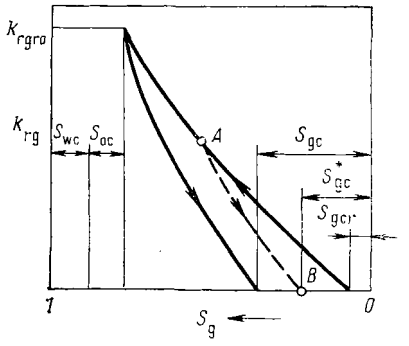


Рис. 12.11. Гистерезис k_{rn} по Коутсу (1976 а)

варительно достигаемой в цикле вытеснения. Это значение увеличивается с ростом S_n^{max}. Такое поведение согласуется с моделью гистерезиса относительной проницаемости, которая рассматривается ниже. Типичная модель гистерезиса k_{rn} показана на рис. 12.10. Остаточная насыщенность S^*_{nc} в цикле пропитки вызывается «захватыванием» несмачивающей фазы продвигающейся смачивающей фазой. Экспериментально определено, что $S^*_{nc}=f(S_n^{max})$. При переходе от пропитки к вытеснению кривая k_{rn} будет следовать по кривой пропитки до тех пор, пока в процессе разработки S_n не достигает максимальной насыщенности несмачивающей фазой S_n^{max}. До значений насыщенностей несмачивающей фазой, бóльших этого максимального значения, кривая k_{rn} совпадает с кривой вытеснения. Таким образом, в соответствии с данной моделью.

$$S_{nc}=f(S_w^{max}=1-S_{wc}).$$

Аналогичную модель можно построить для k_{rw}, однако зависимость этой величины от остаточной насыщенности несмачивающей фазой значительно слабее.

12.6.2. Учет гистерезиса в численных расчетах

С помощью численных моделей пытаются количественно воспроизвести описанные выше процессы, учитывая только характер кривых пропитки и вытеснения. Киллаф (1976) предлагает следующие уравнения для промежуточных кривых P_c. Для кривой d (см. рис. 12.8).

$$P_c(S_w)=P^c{}_c(S_w)-F(S_w)\,[P^c{}_c(S_w)-P^b{}_c(S_w)], \quad (12.43)$$

где

$$F=\frac{\dfrac{1}{S_w-S_w^A+\varepsilon}-\dfrac{1}{\varepsilon}}{\dfrac{1}{S_w^{max}-S_w^A+\varepsilon}-\dfrac{1}{\varepsilon}}, \quad (12.44)$$

$P^s{}_c(S_w)$ и $P^b{}_c(S_w)$ — значения P_c и S_w, взятые с предельных кривых c и b (см. рис. 12.8); $S^A{}_w$ — значение насыщенности в точке обращения; ε — параметр, влияющий на форму кривой. Аналогично кривая e (см. рис. 12.8) аппроксимируется уравнением

$$P_c(S_w)=P^b{}_c(S_w)+F(S_w)\,[P^c{}_c(S_w)-P^b{}_c(S_w)], \quad (12.45)$$

где

$$F=\frac{\dfrac{1}{S_w^B-S_w+\varepsilon}-\dfrac{1}{\varepsilon}}{\dfrac{1}{S_w^B-S_{wc}+\varepsilon}-\dfrac{1}{\varepsilon}}. \quad (12.46)$$

Форма второй обратной кривой в гистерезисной петле (кривая f на рис 12.8 справа) определяется уравнением

$$P_c(S_w)=P^b{}_c(S_w)+F^*(S_w)\,[P^c{}_c(S_w)-P^b{}_c(S_w)], \qquad (12.47)$$

где

$$F^*=\frac{\dfrac{1}{S^*{}_w-S^C_w+\varepsilon}-\dfrac{1}{\varepsilon}}{\dfrac{1}{S^A_w-S^C_w+\varepsilon}-\dfrac{1}{\varepsilon}}. \qquad (12.48)$$

Неизвестное значение насыщенности $S^C{}_w$ в точке C определяется из условия пересечения кривых d и f в точке $S^*{}_w$. Это приводит к уравнению $F^*=1-F$, которое можно разрешить относительно $S^C{}_w$.

Кривые, показанные на рис. 12.9, можно описать теми же самыми уравнениями, но при этом предельные кривые $P^C{}_c$ и $P^b{}_c$ преобразуются (нормализуются) в кривые $\bar{P}^C{}_c$ и $\bar{P}^b{}_c$ таким образом, что областью их определения становится интервал $(S_{wc},\ 1-S^*{}_{nc})$. Отметим, что первичная кривая вытеснения не используется. Насыщенность $S^*{}_{nc}$, возникшая в результате захвата несмачивающей фазы, рассчитывается по уравнению Ланда (1968а)

$$S^*{}_{nc}=\frac{S^A_n}{1+\left(\dfrac{1}{S_{nc}}-\dfrac{1}{(1-S_{wc})}\right)S^A_n}. \qquad (12.49)$$

Промежуточные кривые k_r определяются интерполяцией с учетом параметра формы λ.

$$k_{rn}(S_n)=k^a_{rn}(S^A_n)\left(\frac{S_n-S^*{}_{nc}}{S^A_n-S^*{}_{nc}}\right)^{\lambda}, \qquad (12.50)$$

где $k^a{}_{rn}$ — получена с помощью кривой a (см. рис. 12.10).

Аналогичная модель гистерезиса k_{rn} предложена Коутсом (1976). Его модель учитывает гистерезис k_{rg} в системе «нефть — газ» и критическую газонасыщенность S_{gcr} в цикле вытеснения. Экспериментальная кривая вытеснения, полученная при наличии S_{wc}, сначала представляется в нормализованном виде как $\bar{k}_{rg}=f(S_g)$, где

$$\bar{k}_{rg}=k_{rg}/k_{rgro}=f(\bar{S}_g), \qquad (12.51a)$$

$$\bar{S}_g=\frac{S_g-S_{gcr}}{1-S_{oc}-S_{wc}-S_{gcr}}, \qquad (12.51b)$$

S_{oc} — остаточная нефтенасыщенность в цикле вытеснения; $k_{rgro}=k_{rg}$ при S_{oc} (рис. 12.11).

Текущее значение остаточной насыщенности подсчитывается как функция максимальной достигаемой газонасыщенности S^{A}_{g}:

$$S^{*}_{gc} = S_{gc} \frac{S^{A}_{g}}{1 - S_{wc} - S_{oc}}. \tag{12.52}$$

Если насыщенность уменьшается от S^{A}_{g} до $S_g < S^{A}_{g}$, эффективная остаточная насыщенность определяется выражением

$$S^{eff}_{gc} = \omega S^{*}_{gc} + (1 - \omega) S_{gcr}, \tag{12.53}$$

где

$$\omega = \frac{S^{A}_{g} - S_{g}}{S^{A}_{g} - S^{*}_{gc}}. \tag{12.54}$$

Значение k_{rg} получают из уравнения (12.51а) как функцию от

$$\bar{S}_{g} = \frac{S_{g} - S^{eff}_{gc}}{1 - S_{wc} - S_{ger}}. \tag{12.55}$$

Если данная процедура используется при возрастании S_g, ω будет равняться нулю, $S^{eff}{}_{g} = S_{gcr}$ и кривая k_{rg} будет совпадать с исходной кривой вытеснения. Если S_g уменьшается, ω будет возрастать до единицы, а S^{eff}_{gc} будет, увеличиваясь, стремиться к S^{*}_{gc}. Если S_g достигает значения S^{*}_{gc}, то $k_{gc} = k_{rg} = 0$ (точка B).

Эвренос и Комер (1969) предложили другую модель, однако возможности ее ограничены по той причине, что они использовали аналитическую форму для кривых относительных проницаемостей.

Гистерезис относительной проницаемости для нефти при трехфазной фильтрации можно учесть, используя для получения трехфазных кривых k_{ro}, зависящих от истории разработки, двухфазные данные, рассмотренные в гл. 2 (см. раздел 2.7).

12.7. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕЩИНОВАТЫХ ПЛАСТОВ

Поровая структура породы пласта достаточно сложна. Как показано в работе Уоррена и Рута (1963), пористость пластовых пород можно отнести к двум классам:

а) первичная пористость, которая обусловлена наличием хорошо связанных пор и которую можно скоррелировать с проницаемостью (пористость данного класса характерна для однородных пород, таких, как песчаники);

б) вторичная пористость, образованная трещинами, вымытыми каналами и кавернами в пористой среде (пористость данного вида — продукт геологических и химических процессов). Хотя в пористой среде данного типа обычно не содержится больших запасов углеводородов, ее влияние на процесс фильтрации велико.

Поскольку в используемых при моделировании дифференциальных уравнениях предполагается непрерывность свойств (включая пористость и проницаемость), их применение к системам с двой-

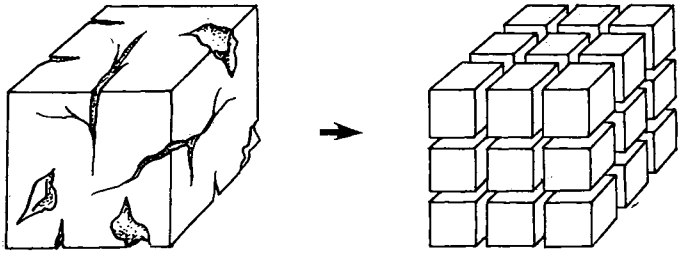


Рис. 12.12. Идеализированное представление трещиноватого пласта

ной пористостью не является строгим. Отдельные трещины можно моделировать рядом блоков сетки с $\phi=1$ (пространство пустот) и с соответствующей проницаемостью (Крафт и Хокинс, 1959, с. 188). Однако осреднение ϕ и k в пределах больших блоков, содержащих несколько трещин, может привести к неверному результату, поскольку характер фильтрации в трещинах и матрице различен.

Подобная система с двойной пористостью обычно идеализируется и сводится к системе, изображенной на рис. 12.12. Здесь пористая среда представлена отдельными блоками матрицы с первичной пористостью, связанными регулярной системой трещин. Эти блоки обладают наибольшей пористостью и сравнительно небольшой проницаемостью. Поскольку перепад давления в системе определяется проницаемостью трещин, которая достаточно высока, нефтеотдача матрицы зависит от капиллярной пропитки, либо действия гравитации и увеличения объема нефти при снижении давления. С другой стороны, несмотря на то, что объем трещин невелик, их проводимость для потока достаточно велика. Следовательно, течение в бóльшей степени происходит по трещинам. Вследствие низкого значения P_c флюиды, текущие в трещинах, можно считать полностью разделенными. В некоторых случаях для вертикально расположенных трещин естественная конвекция также может иметь существенное значение (Писман, 1976).

В методах моделирования систем с двойной пористостью, предложенных некоторыми авторами (Клеппе и Морзе, 1974; Ямамото и др., 1971; Асфари и Уитерспуном, 1973; Каземи и др., 1976; Розеном, 1977 и другими), предполагается, что систему трещин можно представить в виде сплошной среды. При этом течение в трещинах описывается уравнением материального баланса, включающим члены, отражающие процесс накопления флюидов в трещинах и массообмен между блоками матрицы и трещинами. Поскольку блоки не связаны между собой, уравнения материального баланса для матричных блоков записываются только с учетом накопления и массопереноса к трещинам. При данной процедуре

каждый расчетный блок может содержать несколько блоков матрицы (например, элемент, изображенный на рис. 12.12, может рассматриваться при машинных расчетах как отдельный блок). Россен (1977) использует тот же подход, но вместо осуществления одновременного решения для блоков матрицы учитывает массообмен в виде неявных членов отбора. Таким образом, трещиноватые пласты можно моделировать, используя методы, разработанные для обычных пластов с зернистым строением пористой среды. Особенность модели заключается в наличии распределенных, *зависящих от времени источников (стоков)*, учитывающих обмен флюидами между трещинами и матрицей.

12.8. АВТОМАТИЧЕСКИЙ ВЫБОР ВРЕМЕННОГО ШАГА

Выбор временных шагов, осуществляемый во время исследования на модели вручную, может оказаться неудачным, особенно когда при расчетах резко изменяется производительность скважины. При правильном выборе временного шага должны обеспечиваться: a) устойчивость решения, b) допустимые погрешности аппроксимации по времени.

Эти требования могут быть, по крайней мере, качественно связаны со скоростью изменения давлений и насыщенностей в пласте. *Чем быстрее происходят изменения, тем меньшим следует выбирать временной шаг.* Например, временной шаг при моделировании одиночной скважины может меняться от 0,01 сут после значительного изменения дебита до нескольких месяцев в случае, если пласт близок к истощению.

Процедуры автоматического выбора временного шага были предложены для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (Карнахан и др., 1969, с. 363; Крог, 1973; Бирн и Хиндмарш, 1975). Общий недостаток указанных методов — существенное увеличение затрат машинного времени.

Для всей группы IMPES-методов за счет использования наибольших, обеспечивающих устойчивое решение временных шагов, можно получить минимальные ошибки аппроксимации (см. гл. 5, раздел 5.5.2). Максимальный, обеспечивающий устойчивость вычислительного процесса, временной шаг можно определить из уравнений, представленных в гл. 5 и 9. Опыт показывает, что устойчивость также сохраняется, если максимальное изменение насыщенности в блоках сетки на каждом шаге по времени не превосходит некоторого заданного предельного значения DSLIM. Оно обычно составляет 5—10% и до некоторой степени зависит от особенностей задачи.

Для SS- и SEQ-методов используется такой же способ выбора временного шага. Ограничение значений $\Delta_t S_l$ также влияет на погрешность аппроксимации. Поэтому величину временного шага можно также ограничивать с помощью DPLIM максимального изменения давления на временном шаге (Тодд и др., 1972).

Алгоритм автоматического выбора временного шага можно записать следующим образом:

a) Вычислить

$$\mathrm{DSMAX}^n = \max_{ijk}\{|\Delta_t S^n_{ijk}|\}$$

$$\mathrm{DPMAX}^n = \max_{ijk}\{|\Delta_t p^n_{ijk}|\}$$

b) Подсчитать Δt^{n+1}:

$$\Delta t^{n+1} = \min\{\Delta t_S,\ \Delta t_p\},$$

где

$$\Delta t_S = \Delta t^{n+1}\frac{\mathrm{DSLIM}}{\mathrm{DSMAX}^{n+1}} \qquad \Delta t_p = \Delta t^{n+1}\frac{\mathrm{DPLIM}}{\mathrm{DPMAX}^{n+1}}$$

По данному алгоритму изменения насыщенности и давления будут поддерживаться близкими к значениям DSLIM и DPLIM. Поскольку фактические изменения величин нелинейны, то предельные значения могут быть существенно превышены за прогнозируемый шаг. Этого можно избежать, добавляя следующий шаг;

c) Подсчитать DSMAX^{n+1}, DPMAX^{n+1} по завершении временного шага $n+1$. Временной шаг приемлем, если

$$\mathrm{DSMAX}^{n+1} \le C_1\,\mathrm{DSLIM} \qquad \mathrm{DPMAX}^{n+1} \le C_2\,\mathrm{DPLIM}$$

где C_1 и $C_2 > 1$. В противном случае найти Δt^* как $\Delta t^* = \min\{\Delta t_S, \Delta t_p\}$, где

$$\Delta t_S = \Delta t^n\frac{\mathrm{DSLIM}}{\mathrm{DSMAX}^n} \qquad \Delta t_p = \Delta t^n\frac{\mathrm{DPLIM}}{\mathrm{DPMAX}^n}$$

Принять Δt^{n+1} равным Δt^* и решить уравнение для временного шага $n+1$. Действуя по этому алгоритму, можно гарантировать, что максимальные изменения насыщенности и давления не превышают C_1DSLIM или C_2DPLIM. Процедуры такого вида можно улучшить, вводя дополнительные константы и контролируя дополнительные переменные (например, величины выброса, Тодд и др., 1972; Шапелье и Роджерс, 1974).

12.9. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Кроме методов, изложенных в настоящей главе, существуют еще и другие, представляющие интерес для разработки или практического применения моделей в специальных случаях. Особое внимание следует уделять некоторым разновидностям метода характеристик (известным так же, как метод перемещения точки, метод частиц в ячейке и т. п.).

Ссылки на метод встречаются, например, в работах Харлоу и Амсдена (1971), Роуча (1972), Херта и др. (1974) и Сеттари и др. (1977). Пример моделирования заводнения с использованием полимеров дан в работе Вела и др. (1976).

Упражнение 12.1

Получить соотношения между плотностями, приведенными к нормальным условиям, R_S и композиционными свойствами двухкомпонентной системы.

Схема решения

Пусть ω_{o1} и ω_{g1} — массовые доли нефтяного компонента, а ω_{o2}; ω_{g2} — газового компонента соответственно в нефтяной и газовой фазах; m_o и m_g — массы компонентов.

Тогда:

$$\omega_{g1}=0,\ \omega_{g2}=1,\ K_1=0, \tag{A}$$

$$\omega_{o2}=\frac{m_g}{m_o+m_g},\qquad \omega_{o1}=\frac{m_o}{m_o+m_g}. \tag{B}$$

Используя соотношения

$$B_o=V_o\rho_{oSTC}/m_o,\quad V_o=(m_o+m_g)/\rho_o,$$
$$R_s=V_{gSTC}/V_{oSTC}=(m_g\rho_{oSTC}/(m_o\rho_{gSTC}),$$

получим

$$\omega_{o1}=\rho_{oSTC}/\rho_oB_o,$$
$$\omega_{o2}=\omega_{o1}R_s\rho_{gSTC}/\rho_{oSTC}=R_s\rho_{gSCT}/(\rho_oB_o),$$
$$K_2=1/\omega_{o2}.$$

с учетом уравнения (2.12) ω_{o1}, ω_{o2} и K_2 можно выразить через плотности, приведенные к нормальным условиям, и R_S:

$$\omega_{o1}=\frac{\rho_{oSTC}}{\rho_{oSTC}+R_s\rho_{gSTC}}, \tag{C}$$

$$\omega_{o2}=\frac{R_s\rho_{gSTC}}{\rho_{oSTC}+R_s\rho_{gSTC}}, \tag{D}$$

$$K_2=\frac{\rho_{oSTC}+R_s\,\rho_{gSTC}}{R_s\,\rho_{gSTC}}. \tag{E}$$

ГЛАВА 13

ПРАКТИЧЕСКИЕ СООБРАЖЕНИЯ

В этой главе кратко обсудим некоторые практические вопросы, возникающие при написании или использовании моделирующих программ. Краткое изложение необходимо для того, чтобы дать читателю представление о возможных этапах и особенностях принимаемых решений. Детальное рассмотрение этих тем выходит за рамки книги.

13.1. РАЗРАБОТКА ПРОГРАММ

13.1.1. Разработка математической модели

Этап, включающий выбор системы уравнений в частных производных и вспомогательных зависимостей, в основном рассмотрен в гл. 2. Так как математическая модель может отражать только те явления, которые были учтены при выводе дифференциальных уравнений, данный шаг требует понимания физических процессов, протекающих в пласте, и степени их влияния на его разработку. Для конкретных пластов эта информация часто бывает неполной, тем не менее большинство пластовых процессов можно описать с помощью одного из нескольких основных типов моделей, таких, как, например, модель нелетучей нефти. Выбор математической модели определяет, в свою очередь, класс задач, которые можно решать с помощью программ, базирующихся на данной конкретной модели. Таким образом, модели пласта можно классифицировать несколькими способами в соответствии с их характеристиками и возможностями.

A. *Учет* pVT

1. Модели нелетучей нефти или газоконденсатные модели (см. Спивак и Диксон, 1973).
2. Композиционные модели.
3. Однофазные (например, газовые) модели.

C. *Тепломассоперенос*

1. Модели фильтрации для несмешивающихся флюидов (нелетучей нефти).
2. Модели фильтрации смешивающихся флюидов.
3. Изотермические модели.
4. Термические модели (закачка пара и внутрипластовое горение).
5. Другие специальные модели (заводнение с применением химреагентов и т. д.).

B. *Закон фильтрации*

1. Обычный (закон Дарси).
2. Модели, в которых учитывается закон Дарси, обобщенный на случай больших скоростей фильтрации.
3. Модели трещиновато-пористой среды.

D. *Геометрия*

1. Одномерные модели.
2. Двумерные модели (площадные, профильные, радиальные).
3. Трехмерные модели.

E. *Системы координат*
1. Декартова.
2. Цилиндрическая.
3. Сферическая.
4. Криволинейная общего вида.

F. *Учет наземного оборудования*
1. Модель собственного пласта.
2. Пласт+течение в стволе скважины.
3. Пласт+ствол скважины+наземные системы сбора и оборудование.

Эта классификация является произвольной, и ее главная цель — показать многообразие существующих моделей. Некоторые характеристики могут быть объединены в одной модели (в особенности характеристики, связанные с размерностью (см. п. D).

13.1.2. Разработка численной модели

Описание эффективных численных методов (численных моделей) — основная цель нашей книги. Были проанализированы ограничения для различных методов, показаны способы их применения к решению задач. При создании численных моделей учитывают следующее.

1. Выбор схемы пространственной дискретизации (пятиточечный или девятиточечный шаблон) и способа учета нелинейностей в пространстве.
2. Выбор метода расчета процесса многофазной фильтрации (IMPES, SEQ или SS-методы).
3. Аппроксимацию по времени и способ учета нелинейности во времени.
4. Метод решения алгебраических уравнений.
5. Способ моделирования скважин.
6. Организацию текущего контроля процесса вычислений.

13.1.3. Разработка машинной модели (программы)

При разработке программы, особенно в случаях, когда предполагается, что они будут предназначены для массового использования, программист должен учитывать следующее.

1. Скорость вычислений (эффективность программирования).
2. Оптимальное использование имеющейся в наличии памяти (в последнее время с появлением ЭВМ с виртуальной памятью данная проблема стала не столь серьезной).
3. Удобную для пользования организацию ввода — вывода данных.
4. Универсальность программ.
5. Возможность повторного пуска программ.
6. Диагностические сообщения.

Многие из этих требований противоречивы. Например, оптимизация времени счета почти всегда исключает требование минимального объема памяти. При этом хорошие программы моделиро-

вания пластов основаны на компромиссных решениях (Керниган и Плаугер, 1974).

Большинство современных программ пишется на языке ФОРТРАН. Поэтому в рассматриваемых в данной главе примерах будет использоваться этот язык.

13.1.3.1. Эффективность программирования

Скорость выполнения какой-либо части программы в значительной степени зависит от эффективности программирования. Ниже представлены некоторые наиболее полезные методы повышения эффективности программ.

Преобразование индексов. Всюду, где возможно, для решения двумерных и трехмерных задач рекомендуется использовать массивы с одним индексом (векторные массивы).

Рассмотрим следующие простые случаи.

```
(a)     DIMENSION SW(10, 10, 10), SO(10, 10, 10), SG(10, 10, 10)
        DO 100 I = 1, NX
        DO 100 J = 1, NY
        DO 100 K = 1, NZ
        SO(I,J,K) = 1.-SW(I,J,K) -SG(I,J,K)
    100 CONTINUE
```

Так как транслятор переводит несколько индексов в один (скажем M), вычисление

$$M=100*(K-1)+10*(J-1)+I$$

будет производиться внутри цикла при каждом обращении к нему.

Тот же самый цикл можно записать в следующем виде:

```
(b)     DIMENSION  SW(1000), SO(1000), SG(1000)
        M = 0
        DO  100 I = 1, NX
        DO  100 J = 1, NY
        DO  100 K = 1, NZ
        M = M + 1
        SO(M) = 1. -SW(M)-SG(M)
    100 CONTINUE
```

В этом случае для формирования индекса требуется только одно сложение. Дополнительное сокращение объема вычислений можно получить, программируя цикл следующим образом:

```
        NXYZ = NX*NY*NZ
        DO  100 M = 1, NXYZ
        SO(M)= 1. -SW(M)-SG(M)
    100 CONTINUE
```

При этом сокращается время на приращение и проверку переменных цикла I и J (в NX*NY+NX раз). Еще большую экономию времени можно получить за счет «развертывания» циклов (Шефер, 1973).

Даже если необходимо использовать циклы с индексами (I, J, K) вложенные в любом порядке, вычислить M по *n*, b, можно за время, немногим большее времени одного сложения на каждом проходе цикла. Хотя большинство трансляторов обладает способностью оптимизировать работу с несколькими индексами, эффективность оптимизации существенно уменьшается при трансляции больших программ (см. Шефер, 1973, обзор оптимизации вычислений).

Поэтому *рекомендуется использовать переменные с одним индексом во всех случаях, где это возможно.*

Использование табулированных функций. Большинство физических параметров (свойств флюидов, породы и т. д.) представлено в виде таблиц. Значения зависимой переменной для любого произвольного значения соответствующей независимой переменной находят интерполяцией между табличными значениями. Этот процесс поиска в таблице аргументов (независимой переменной) называется «табличным поиском». Различные алгоритмы поиска проанализированы Кнутом (1973). Он показал, что для малых таблиц наиболее эффективен последовательный поиск, в то время как для больших таблиц оптимален двоичный поиск. Например, для таблиц с 10 — 20 аргументами рекомендуется последовательный табличный поиск (Кнут, 1973, см. раздел 6.2.1). Эффективность табличного поиска значительно увеличивается при *равномерном расположении аргументов.* Тогда независимо от числа входов для поиска нужного аргумента (входа) потребуется только одно умножение. В этих случаях предполагается, что аргументы в таблице расположены в порядке возрастания, но интервалы между ними могут быть произвольными.

Использование подпрограмм. При вызове подпрограммы требуется определенное время для внутренней «бухгалтерии», которое возрастает с увеличением числа передаваемых аргументов. Поэтому следует избегать частого вызова подпрограммы (особенно внутри циклов). Так, например, выгоднее повторить программирование табличного поиска там, где это требуется, чем оформлять его в виде подпрограммы. Если необходим частый вызов подпрограммы, аргументы удобнее передавать посредством общих блоков, а не с помощью списка аргументов. Некоторые аспекты разработки подпрограмм рассмотрены Коли (1974).

Организация ввода — вывода данных. В основном предпочтительнее использовать бесформатный ввод и вывод. Это особенно важно для файлов, используемых для чтения и записи рекордов, необходимых для повторного пуска и для рабочих (вспомогательных) файлов. Время, необходимое для выполнения операторов ввода — вывода данных (форматных и бесформатных), зависит от количества элементов в списке ввода — вывода. Если массив A

нужно записать для дальнейшего использования на рабочей ленте, это можно выполнить следующим образом:

(a)
```
DIMENSION A(1000)
NB = 850
WRITE (6) (A(I), I = 1, NB)
```

Оператор WRITE представляет 850 элементов данных. Этот же результат значительно быстрее можно получить с помощью оператора

(b)
```
DIMENSION A(1000)
WRITE (6) A
```

представляющего только один элемент данных. Необходимо отметить, что здесь, однако, нужно записать 150 дополнительных слов массива A, в которых нет необходимости. В результате размер записи вывода данных увеличивается.

Разное.

1. Необходимо избегать «смешанной арифметики» (т. е. преобразований данных из INTEGER в REAL).
2. Следует заменять 2*A операцией A+A.
3. В большинстве машин умножение выполняется быстрее, чем деление, поэтому необходимо заменять A/2 на A*5 и т. д.
4. Следует использовать A*A вместо A**2.
5. Следует удалить все постоянные выражения из циклов.

Большинство трансляторов в состоянии выполнить некоторые действия, указанные выше, однако всегда это лучше делать при программировании. Следует рекомендовать уделять наибольшее внимание частям программы, выполняемым наиболее часто. Подробно оптимизация программ на Фортране рассмотрена в работе Ларсона (1971).

Дальнейшего повышения скорости вычислений можно добиться с помощью оптимизации программ с учетом типа машины. Например, сегмент программы, выполняющий наибольшую часть работы, следует запрограммировать таким образом, чтобы была использована возможность параллельных вычислений, или запрограммировать его в кодах машины. Организация параллельных вычислений (Фернбах, 1973) позволяет увеличить скорость решения задач пропорционально количеству используемых процессоров. Однако для этого пригодны далеко не все алгоритмы. Программирование в кодах машины по сравнению с программированием на алгоритмических языках позволяет повысить скорость вычислений по крайней мере в 2—3 раза.

13.1.3.2. Оптимизация памяти

Объем необходимой памяти можно снизить следующим образом.

1. Используя эквивалентность массивов, хранящих временную информацию, и других массивов.

2. Используя переменные в общем блоке названий локальных (вспомогательных) переменных, которые применяются только внутри подпрограммы.

3. Предпочитая повторные вычисления величин хранению их в памяти.

4. Повторно используя части памяти во время вычислений. Обычно часть памяти занята двоичными кодами программ, используемыми для задания начального состояния модели. Эту часть памяти можно использовать для других целей после задания начального состояния.

5. В некоторых машинах можно задать размер буферов ввода — вывода таким образом, чтобы они были меньше значений, принятых по умолчанию.

6. Организуя внутренние обмены с внешней памятью (производя запись и считывание с рабочей ленты). Это может оказаться необходимым при использовании гауссова исключения в случае, когда для матричной ленты большой ширины требуется объем памяти больше имеющегося в наличии.

7. Применяя динамистическое распределение памяти во время работы программы.

Почти все из указанных операций снижают скорость вычислений. Использование виртуальной памяти лишь незначительно увеличивает время выполнения программы по сравнению со временем выполнения ее при использовании лишь оперативной памяти. Однако время нахождения программы в машине (т. е. полное время активности данного задания) возрастает в несколько раз из-за внутренних обменов между виртуальной и оперативной памятью.

13.1.3.3. Эксплуатационные особенности моделей

Хорошие модели должны обладать возможностями:

1) организации ограниченной или расширенной распечатки данных на произвольном временном шаге;

2) организации ввода данных различными способами при минимальных затратах на их подготовку;

3) программным способом проверки правильности последовательности и физического смысла входных данных. Эта возможность наиболее полезна при отладке программ;

4) возможностью повторного пуска.

Очень полезно иметь возможность выводить результаты в графической форме (в виде графиков или карт). Очевидно, что числу таких особенностей нет предела, и решение о включении их в каждую конкретную программу является компромиссным.

13.1.3.4. Универсальность программы

Для уменьшения трудностей, возникающих из-за различий между трансляторами, программисту следует избегать использования тех особенностей Фортрана, которые характерны только для данного транслятора. При этом необходимо учитывать следующие правила:

1. Следует избегать использования специальных символов в названиях переменных.
2. Для названия переменных следует использовать не более 6 символов.
3. Следует применять операторы Холлерита при работе с текстом; при хранении текста использовать только упаковку по формату А 4.
4. Не следует превышать 132 позиции печати при выводе данных с использованием оператора FORMAT.
5. Следует избегать использования любых поразрядных операций (таких как маскирование и т. д.).
6. Следует избегать программирования в кодах машины и использования индивидуальных особенностей ввода — вывода (таких, как BUFFER I/O на машинах CDC или ASYNCHRONEOUS I/O на машинах IBM). Однако последнее требование противоречит условию повышения скорости вычислений, рассмотренному выше (см. Эрд и др., 1977).

13.2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОГРАММ

Типичный пример применения программ моделирования — использование их при составлении проектов разработки нефтяных месторождений. Этот процесс называется *модельным исследованием* и обычно планируется в виде описанных ниже этапов. Большинство вопросов, которые необходимо разрешить при исследовании, сходны с вопросами, возникающими при разработке программы (см. разделы 13.1.1 и 13.1.2), но они рассматриваются с другой точки зрения. Вначале перечислим все необходимые этапы, а затем некоторые из них рассмотрим более подробно. Как увидит читатель после чтения данного раздела, в применении техники моделирования больше элементов искусства, чем науки. Поэтому приводимые здесь указания следует рассматривать критически, с учетом специфики поставленной задачи (Коутс, 1969).

13.2.1. Этапы модельного исследования

Для типичного исследования характерны следующие этапы:

а) определение задачи разработки пласта, технических и экономических целей исследования;

b) сбор имеющихся данных и в случае необходимости принятие решения о получении дополнительных данных;

c) интерпретация имеющейся в наличии геологической и петрофизической информации;

d) анализ pV1-характеристик присутствующих флюидов;

e) выбор типа используемой модели и ее разработка (т. е. размерности, сетки, метода решения и т. д.);

f) подгонка параметров модели с использованием данных об истории разработки пласта;

g) прогнозирование поведения пласта при различных условиях, исходя из целей исследования;

h) интерпретация результатов, выдача рекомендаций, редактирование выходной информации и отчета.

Хотя указанные этапы достаточно типичны, они могут сильно отличаться для различных задач. Модельные исследования по своей сложности различаются от простеньких прикидок с помощью моделей, «взятых с книжной полки», до большого комплекса расчетов, требующих применения нескольких моделей и больших объемов специального программирования. Кроме того, направление исследования может меняться по мере достижения лучшего понимания моделируемого процесса разработки и относительной важности различных параметров. В результате могут потребоваться не только некоторые изменения размерности и типа используемой модели, но и может возникнуть необходимость получения дополнительных промысловых или лабораторных данных. Эти вопросы рассматривались Коутсом (1969) и отражены во многих статьях, описывающих модельные исследования. Статьи Маккаллоча и др. (1969), Уивера (1972), Дандона и Морзе (1975) являются хорошими примерами применения моделей нелетучей нефти.

Кратко рассмотрим указанные этапы, за исключением этапов (e, f), которые будут обсуждены в последующих разделах.

Этап (a). Важно четко поставить вопросы, на которые нужно получить ответы при моделировании. Подход к исследованию существенно зависит от его целей. Обычно рассматриваются следующие вопросы экономики.

Какая система разработки пласта наилучшая?

Каковы оптимальные дебиты?

Какова оптимальная плотность сетки скважин?

Является ли экономически оправданным уплотнение сетки скважин?

В других ситуациях необходимо ответить на вопросы, связанные с осуществимостью проекта:

Будут ли управляющие параметры в некотором процессе находиться в приемлемом диапазоне?

Могут быть заданы вопросы оперативного управления:

В чем причина какой-либо возникшей проблемы и как ее разрешить?

Этап (b). Для пластов больших размеров сбор данных может занимать много времени. Необходимо проверять имеющиеся в наличии данные на их полноту и надежность. Все «подозрительные» данные необходимо проверить, если они неправильны — отбросить.

Этап (c). Имеющиеся геологические и петрофизические данные используются для построения «геологической модели» пласта, определяющей структуру, толщину, пористость, проницаемость, слоистость, тектонические нарушения и другие его физические характеристики. «Геологическая картина» пласта очень важна и часто заново определяется в процессе подгонки истории его разработки. Способы использования геологических данных для моделирования описаны Харрисом (1975).

Этап (d). Анализ данных pVT призван показать, нужно ли учитывать состав флюидов или их можно представить как единую нелетучую нефть. Композиционные модели, безусловно, более сложны, чем модели нелетучей нефти, рассмотренные в настоящей книге. Все данные должны быть проверены и «сглажены».

Этап (g). Прогон моделирующей программы для прогноза поведения пласта составляет относительно простую часть исследования. Если месторождения близки к полному истощению, необходимо проявлять осторожность при моделировании таких практических моментов, как учет действия насосов и компрессоров, проведение ремонтных работ. Для этого может потребоваться специальное программирование.

Этап (h). Для интерпретации результатов могут потребоваться некоторые дополнительные расчеты, такие как определение материального баланса в работающем оборудовании, расчеты трубопроводов, экономических показателей. Поскольку распечатки выходной информации обычно очень объемны, перед включением в отчеты необходимо провести их редактирование с целью сокращения. Однако все полученные данные и результаты должны быть где-то сохранены, например на магнитной ленте. Это особенно важно для тех случаев, когда в будущем предполагается проведение нового исследования.

13.2.2. Выбор и разработка модели

Конструирование численной модели пласта — одна из сложных областей, в которой сходятся наука и искусство моделирования. Наилучшей является самая простая модель пласта, реально отражающая все важные аспекты интересующего нас физического процесса. Однако обычно из-за ограниченной изученности свойств пласта и флюидов существует тенденция к использованию более сложной модели, чем это действительно необходимо. Поэтому сначала всегда следует определить, нельзя ли получить ответ на интересующий нас вопрос с помощью аналитического метода или простой машинной модели. Проведение такого предварительного исследования обычно приводит к лучшему пониманию задачи. При выборе модели нужно учесть следующее:

вид требуемых ответов;
точность требуемых ответов;
неопределенность в определении границ пласта;
неопределенность имеющихся промысловых данных;

неопределенность свойств породы и флюидов;

понимание физики реальных процессов (математическая модель);

погрешности, вытекающие из-за допущений, принятых при разработке численной модели;

погрешности аппроксимации.

Влияние большинства из этих факторов трудно оценить количественно, и, следовательно, обоснованность выбора и разработки модели пласта будет в разных случаях различной.

Некоторые, наиболее важные моменты рассмотрим более детально.

13.2.2.1. Размерность модели

Поскольку машинное время и объем необходимой памяти существенно возрастают с ростом числа измерений, по возможности следует использовать модель с наименьшей размерностью.

По моделям, состоящим из одного блока, и одномерным моделям в некоторых случаях расчеты могут быть проделаны аналитически. Часто одномерные модели используются для оценки в упрощенных ситуациях, например при наличии лишь очень ограниченных сведений о пласте и для моделирования лабораторных экспериментов. Одномерные модели могут быть также адекватными в ситуациях, когда нужно определить лишь степень влияния отдельных переменных на результаты.

Двумерные модели адекватны реальным ситуациям в различных условиях. Пласты с хорошей вертикальной сообщаемостью обычно можно представить с помощью двумерных площадных моделей, в которых применяется концепция вертикального равновесия (см. гл. 12). Поведение отдельных скважин в большинстве случаев может изучаться с помощью двумерных радиальных моделей. Исключение составляют скважины, расположенные близко к границам пласта или к контактам флюидов при заводнении в горизонтальном направлении, когда несправедливо предположение о наличии симметрии. Большинство пластов можно с успехом изучать, рассматривая только характерную их часть с помощью двумерной модели. Такие модели более просты и значительно дешевле полных трехмерных моделей. Классическим примером является моделирование четвертой части элемента пятиточечной системы с помощью двумерной площадной модели.

Вопросы выбора соответствующей размерности и связанные с этим погрешности рассмотрены Коутсом (1969) и Прайсом (1971). Примеры исследований рифогенных пластов с помощью профильных моделей рассматриваются в работах Маккаллоча и др. (1969) и Де Брисей и др. (1975). Отметим, что часто при модельном исследовании предполагается применение нескольких моделей. Типичным примером является применение двумерной профильной модели для получения кривых с учетом вертикального равновесия и (или) двумерной радиальной модели для получения кривых с уче-

том конусообразования и их последующего использования в двумерной площадной модели. Пример исследования с последовательным усложнением модели от одномерной до трехмерной можно найти у Спивака и др. (1975).

При выборе размерности модели необходимо также учитывать и способ учета водоносных пластов.

13.2.2.2. Учет характеристик пластовых флюидов

И в этом случае следует использовать простейшее представление, согласующееся с целями исследования. Для модели нелетучей нефти время вычислений по методу SS или SEQ резко возрастает с увеличением числа фаз, но оно практически не меняется при использовании метода IMPES (см. гл. 9, раздел 9.3.3). Поэтому исключение из модели неподвижной фазы может в ряде случаев привести к значительной экономии.

При существенном влиянии состава флюидов его часто можно учесть с помощью модели нелетучей нефти. Из-за большей стоимости расчетов с применением композиционных моделей такой подход может привести к значительной экономии. Подобные приемы используются для моделирования нефтяных и газоконденсатных пластов.

С помощью модели нелетучей нефти можно также исследовать и процесс «смешивающегося» вытеснения.

13.2.2.3. Выбор сетки

При выборе сетки следует руководствоваться следующими простыми правилами:

a) ориентацию сетки по возможности следует согласовывать с направлением главных осей тензора проницаемости, в профильных задачах слои модели должны соответствовать геологическим слоям;

b) шаг сетки следует измельчать в областях, представляющих наибольший интерес, и (или) там, где ожидается наибольшее изменение результатов решения (обычно вокруг скважин) требуются блоки меньшего размера;

c) если требуются точные результаты, шаг сетки следует измельчать в местах неоднородных включений;

d) резкие и большие изменения шагов сетки приводят к большим погрешностям аппроксимации, при использовании неравномерных сеток таких изменений следует избегать;

e) при исследовании влияния сетки скважин, уплотняющего бурения и т. п. с помощью площадных моделей все скважины следует отделять друг от друга несколькими блоками.

Наиболее важное правило заключается в следующем: там, где это возможно, сетку следует выбирать *на основе исследования ее влияния на результаты решения.*

Такое исследование требует проведения серии модельных расчетов с уменьшающимся шагом сетки до тех пор, пока вычисленные результаты не будут меняться в пределах требуемой точности. Исследование влияния шага сеток на результаты особенно важно для случая многофазной фильтрации. Оно обычно выполняется для профильных задач с целью определения минимального числа требующихся слоев. Для площадных и трехмерных задач часто размеры моделируемой области слишком велики для проведения экспериментов с измельчением сетки. В таких случаях влияние шага сетки можно изучать на небольшом выбранном участке пласта.

Во множестве случаев точность решения определить нельзя, так как шаги сетки ограничены либо возможностями ЭВМ, либо соображениями стоимости. Только в простых случаях можно определить погрешности пространственной аппроксимации сравнением с точными решениями. Погрешности аппроксимации, часто называемые «численной дисперсией» (Лантц, 1971), наиболее существенны при моделировании смешивающегося вытеснения нефти, моделировании композиционных эффектов и других задач, где требуется высокая точность. В подобных ситуациях часто становятся непригодными обычные конечно-разностные методы, так как необходимое число узлов становится слишком большим. В таких случаях следует применять специальные модели, не описанные в данной книге (метод прослеживания точек, вариационные методы).

13.2.2.4. Выбор метода решения и способа решения системы алгебраических уравнений

Когда возможен выбор, какой метод применить: IMPES, SEQ или SS, следует выбирать наиболее дешевый метод решения. При этом может потребоваться проведение нескольких проверок его устойчивости с характерным набором данных.

Как было показано в гл. 9 (см. раздел 9.3.3), переход от IMPES к SEQ и SS-методам приводит к резкому возрастанию затрат машинного времени на временной шаг. На практике для того, чтобы устранить влияние размеров сетки, скорость вычислений выражают в виде затрат времени на одном временном шаге, приходящихся на один блок.

Поскольку устойчивость возрастает при переходе к «более неявным» методам, наивысшая общая эффективность достигается при использовании IMPES-метода для более «легких» задач и SS-метода (с неявным вычислением проводимостей) для «сложных» задач.

Выбор способа решения матричного уравнения также весьма существен. Как показано в гл. 8 (см. разделы 8.3 и 8.4) и в гл. 10 и 11, прямые методы предпочтительны для задач меньшей, а итерационные — для задач большей размерности. Итерационные ме-

тоды также более эффективны, когда необходимо проводить итерации на временном шаге (пересчитывать коэффициенты). С помощью итерационных методов этот пересчет можно делать в процессе решения, лишь незначительно снижая скорость сходимости, в то время как для прямых методов объем вычислений растет пропорционально количеству итераций, выполняемых на каждом временном шаге.

Кроме приведенных соображений об оптимизации скорости вычислений, на выбор метода влияет характер выполняемого исследования. Для решения задачи с ограниченным числом вариантов дешевле использовать более неявный метод и процедуру прямого исключения благодаря их надежности. С другой стороны, для крупного исследования с большим количеством вариантов по подгонке по истории разработки может оказаться целесообразным подобрать как степень «неявности» метода, так и способ решения системы уравнений.

13.2.2.5. Выбор временных шагов и параметров контроля процесса решения

Временной шаг необходимо выбирать из соображений обеспечения устойчивости и точности решения. Первое требование связывает максимальное значение временного шага, дающее устойчивое решение, с размерами шагов сетки. Например, для IMPES-метода это соотношение дается уравнением (5.60) и (9.25), когда устойчивость ограничивается способом учета проводимостей. Максимально допустимый временной шаг пропорционален шагу сетки также и для других методов решения. Поэтому с измельчением сетки стоимость решения на ЭВМ увеличится в большей степени, чем меняется шаг сетки, поскольку временной шаг также надо уменьшить.

На практике и устойчивость, и точность решения могут быть обеспечены автоматическим выбором временного шага способами, рассмотренными в гл. 12.

Среди выбираемых параметров контроля могут быть: максимальные изменения давления и насыщенности на временном шаге, критерии сходимости, максимальное число итераций и число итераций без пересчета коэффициентов и т. д. Их выбор для разных случаев будет различным, и для минимизации времени расчетов может понадобиться экспериментирование. Вообще при решении более сложных задач допуски должны быть «жестче».

13.2.3. Подгонка параметров модели по истории разработки

Подгонка по истории разработки — важная часть любого исследования. Сопоставление результатов, полученных на модели, с результатами истории разработки дает единственно возможный

способ проверки обоснованности машинной модели пласта. Подгонка по истории разработки заключается в настройке параметров модели (таких, как проницаемсть, пористость и т. д.) таким образом, чтобы результаты расчетов за период истории разработки были близки к фактическим данным. Информация об истории разработки может быть различной. Если задана добыча нефти, для подгонки модели обычно используются: наблюдаемые водонефтяной и газовый факторы; наблюдаемые средние давления (давления в остановленных скважинах) или давления в наблюдательных скважинах; наблюдаемые давления в фонтанирующих скважинах.

В тех случаях, когда задан общий постоянный темп отбора флюидов из скважин или постоянное давление, можно подгонять дебиты нефти.

Реже подгоняются:

время прорыва

динамика давления при исследовании скважин методом понижения уровня и методом восстановления давления (Чейн и др., 1976).

Процесс подгонки модели по истории разработки требует времени, иногда оказывается безрезультатным и обычно составляет значительную часть общей стоимости исследования. Подгонка по истории обычно производится вручную корректированием данных методом проб и ошибок. Значительные усилия исследователей были направлены на автоматизацию этого процесса с помощью решения обратных задач. При этом уравнения решаются относительно значений выбранных параметров пласта так, чтобы минимизировать различие между результатами расчета и результатами наблюдений (Коутс и др., 1970; Дюпюи и др., 1971; Слейтер и Дюррер, 1971; Томас и Хеллумс, 1972; Чен и др., 1974; Картер и др., 1974; Шаван и др., 1975; Галавас и др., 1976; Вассерман и Эммануэль, 1976; Бишоп и др., 1976). Однако на современной стадии развития возможности практического использования этих методов ограничены, за исключением простых случаев, например для однофазных (газовых) пластов.

Общее правило при ручной подгонке по истории заключается в том, что в первую очередь *изменяют те параметры модели, которые имеют наибольшую неопределенность и также наибольшее влияние на решение.* Чувствительность решения к некоторым параметрам часто устанавливается в процессе подгонки по истории разработки.

Однако не существует твердо установленных правил, которыми можно было бы руководствоваться в каждом конкретном случае. Могут быть полезными следующие указания.

1. На подгонку среднего давления влияют объемы флюидов в пласте, размеры водоносного пласта и степень сообщаемости между продуктивным и водоносным пластами. Однако при недостаточной подгонке водонефтяного и газового факторов плохо совпадают данные о среднем давлении.

2. Перепад давления в основном определяется горизонтальной проницаемостью и скин-эффектами.

3. Водонефтяной и газовый факторы зависят главным образом от депрессии (т. е. снова от проницаемостей) и от положения контакта флюидов и толщины переходной зоны (которая зависит от P_c). Форма кривых для этих факторов после прорыва флюида в скважину зависит от формы кривых относительных проницаемостей. При этом момент прорыва в основном зависит от предельных точек этих кривых, т. е. от эффективных проницаемостей при фильтрации одной из фаз. Во время исследований на площадных и трехмерных моделях нельзя точно воспроизвести характер поведения отдельных скважин, не применяя специального подхода, рассмотренного в гл. 9 (см. раздел 9.7). В таких случаях подгонка заключается в определении соответствующих псевдофункций. Исследования такого типа с целью улучшения точности описания пласта могут быть дополнены подгонкой показателей для отдельных скважин.

4. Подгонка момента прорыва — одна из наиболее сложных задач. На момент прорыва сильно влияют погрешности аппроксимации (численная дисперсия), при этом для точной подгонки момента прорыва требуется более мелкая разностная сетка.

Качество подгонки и вследствие этого степень доверия к модели существенно зависит от количества данных, доступных для подгонки по истории. Если данных недостаточно (например, при отсутствии данных о давлении), можно осуществить подгонку, описывая свойства пласта различными способами. С другой стороны, если данных много, то неудачная попытка подгонки указывает на необходимость пересмотра основных предположений, принятых при разработке модели (геологическое строение, pVT-характеристик, размеры пласта, наличие водоносного пласта и т. д.).

В некоторых случаях неудачная подгонка может также указывать на неточность в исходных данных.

В большинстве моделей нелетучей нефти для хорошей подгонки необходимо иметь данные по давлениям, дебитам (водонефтяному и газовому факторам).

Даже при хорошей подгонке с одним набором данных нет никакой гарантии, что модель точно воспроизведет дополнительные данные об истории разработки без дополнительной коррекции параметров пласта. Поэтому в процессе подгонки важно использовать максимум имеющейся информации.

Очевидно, что достоверность прогноза эксплуатационных характеристик также зависит от объема данных для подгонки. Даже при хорошем воспроизведении истории разработки, достоверность прогноза снижается при увеличении его срока. Поэтому желательно через определенный промежуток времени повторять модельные исследования, производя подгонку по новым данным об истории разработки. Это обычно приводит к некоторой коррекции прогнозируемых показателей.

Приемы подгонки по истории разработки можно также использовать для интерпретации лабораторных данных (например, Арчер и Вонг, 1973).

13.3. Заключительные замечания

Для того чтобы в полной мере использовать методы моделирования пластов, нужно иметь большой практический опыт в области разработки месторождений и моделирования на ЭВМ.

Поскольку на разных стадиях процесса разработки модели делаются различные допущения, а уравнения фильтрации можно решить приближенно, при проведении исследований пластов и интерпретации результатов необходимо полагаться на интуицию инженера.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ

А. 1. ВВЕДЕНИЕ

В приложении дан обзор наиболее существенных свойств векторов и матриц. По этому предмету имеется много хорошей литературы, к которой следует обратиться, чтобы лучше усвоить приведенные здесь понятия. В частности, это книги Беллмана (1960), Писа (1965) и Ланкастера (1969).

В приложении приведены основные понятия и определения, а также есть раздел, в котором представлены фундаментальные теоремы, используемые при моделировании пластов.

А.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

А.2.1. Поле

Определение: *Полем* F называется такая совокупность чисел, с которыми всегда можно выполнить операции сложения, вычитания, умножения и деления (за исключением деления на ноль) и получить единственный элемент поля. Заметим, что действительные числа образуют поле, в то время как положительные действительные числа — нет (так как не всегда возможно вычитание).

А.2.2. Вектор

Определение: *Вектором* называется набор n чисел из F, расположенных в определенном порядке. Числа, упорядоченные таким образом, называются *элементами или компонентами* вектора. Стандартное расположение элементов вектора имеет вид

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad x_i \in F \ , \tag{A.1}$$

где символ $\in$ обозначает «является элементом». Записывая те же элементы в строку, получим *транспонированный* к x вектор

$$x^{\mathrm{T}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где n — размерность x или x^{T}.

Определение. Говорят, что два вектора равны, если равны их соответствующие компоненты.

Пусть x и y — два вектора с n элементами, каждый из которых принадлежит полю F. Пусть α и β — два скаляра из поля F. Тогда можно сформулировать:

Определение: $z=x+y$, $z_i=x_i+y_i$ $i=1,...,n$
и
Определение: $z=\alpha x$, $z_i=\alpha x_i$ $i=1,...,n$.

Из данных определений следуют свойства:

$x+y=y+x$	(коммутативность),	(A.2)
$x+(y+z)=(x+y)+z$	(ассоциативность),	(A.3)
$x+0=x$	(0 — нулевой вектор),	(A.4)
$x+(-x)=0$	($-x$ — противоположный x),	(A.5)
$\alpha(\beta x)=\alpha\beta(x)$	(ассоциативность),	(A.6)
$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$	(дистрибутивность),	(A.7)
$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$	(дистрибутивность),	(A.8)
$\alpha x=x\alpha$	(коммутативность),	(A.9)
$\alpha x=x$,	если $\alpha=1$.	(A.10)

A.2.3. Линейные векторные пространства

Определение: *Линейным векторным пространством* называется такое множество векторов S, для которого: 1) сумма двух произвольных векторов из S также будет принадлежать S; 2) произведение произвольного скаляра α на элемент S также будет принадлежать S.

Линейное векторное пространство определено над полем F, если элементы всех векторов в S и скаляры α принадлежат полю F.

Определение: Система j векторов x_1, x_2, $x_3,...,x_j$ называется *линейно независимой* над полем F, если в нем не существует совокупности одновременно не равных нулю скаляров α_1, $\alpha_2,...,\alpha_j$, таких как

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ ...\ +\alpha_jx_j=0. \tag{A.11}$$

В противном случае векторы называются линейно зависимыми. Отметим, что если решение для (A.11) существует при $\alpha_i\neq0$, то справедливо

$$x_i=-\frac{1}{\alpha_i}\sum_{k=1,\ k\neq1}^{j}\alpha_kx_k. \tag{A.12}$$

В уравнении (A.12) x_i выражается в виде линейной комбинации других векторов системы и, следовательно, она не является линейно независимой.

Определение: Линейное векторное пространство имеет *размерность* k, если оно содержит по крайней мере одну систему из k линейно независимых векторов (за исключением нулевых векторов), но не содержит ни одной системы из $k+1$ линейно независимых векторов.

Определение: Система из k линейно независимых векторов в векторном пространстве S размерности k называется *базисом в* S. Заметим, что все другие векторы в S можно получить линейной комбинацией базисных векторов.

А.2.4. Системы линейных уравнений. Матрицы

Систему линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = k_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{A.13}$$

можно записать в виде

$$Ax = k, \tag{A.14}$$

где x, k — n-мерные векторы; A — квадратная $(n \times n)$ таблица чисел, состоящая из n строк и n столбцов.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{A.15}$$

Операция Ax *определяется таким образом,* что она приводит к системе уравнений (А.13). А можно также записать в виде

$$A = [a_{ij}].$$

Главной диагональю А называется множество элементов, расположенных на диагонали, проходящей от верхнего левого до нижнего правого угла матрицы. Матрица называется *диагональной,* если

$$a_{ij} = 0, \quad i \neq j. \tag{A.16}$$

Матрица называется *единичной матрицей* I, если

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}. \tag{A.17}$$

Матрица В с элементами b_{ij} следующего вида:

$$b_{ij} = a_{ji} \text{ для всех } i \text{ и } j \tag{A.18}$$

называется *транспонированной* к А и обозначается $A^{т}$. *Нулевая* матрица 0 имеет элементы, равные нулю.

Определение: Суммой двух матриц А, В называется матрица С с элементами

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,n, \tag{A.19}$$

где А, В, С — матрицы размером $n \times n$.

Определение: Произведением скаляра α на матрицу A называется матрица C с элементами:

$$c_{ij}=\alpha a_{ij}. \tag{A.20}$$

Определение: Произведением матриц A и B называется матрица C, определяемая следующим образом:

$$C=BA, \quad c_{ij}=\sum_k b_{ik}a_{kj}. \tag{A.21}$$

Заметим, что в общем случае $AB\neq BA$.

Определение: Матрицы A и B *коммутируют*, если

$$AB=BA. \tag{A.22}$$

Определение: Обратной к A (если она существует) называется матрица A^{-1}, определяемая как

$$A^{-1}A=I. \tag{A.23}$$

Из приведенных выше определений можно вывести следующие свойства:

$$(A+B)\,x=Ax+Bx, \tag{A.24}$$
$$A(x+y)=Ax+Ay, \tag{A.25}$$
$$\alpha Ax=(\alpha A)x=A(\alpha x)=(Ax)\alpha, \tag{A.26}$$
$$(Ax)^T=x^T A^T, \tag{A.27}$$
$$(A+B)C=AC+BC, \tag{A.28}$$
$$A(B+C)=AB+AC, \tag{A.29}$$
$$A(BC)=(AB)C, \tag{A.30}$$
$$0A=A0=0, \tag{A.31}$$
$$IA=AI=A, \tag{A.32}$$
$$A^{-1}A=AA^{-1}=I, \tag{A.33}$$
$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}, \tag{A.34}$$
$$(ABC...)^{-1}=(...C^{-1}B^{-1}A^{-1}, \tag{A.35}$$

A.2.5. Определитель матрицы

Определителем матрицы называется число, обозначаемое det (A). Для матрицы размером 2×2:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \det(\mathbf{A})=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

Для любой строки i и любого столбца j произвольной матрицы A

$$\det(A)=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ik}=\sum_{k=1}^{n} a_{kj}a_{kj},$$

где α_{ik} представляет собой *алгебраическое дополнение* a_{ik},

$$\alpha_{ik} = (-1)^{i+k} \det (M_{ik}),$$

M_{ik} — матрица размером $(n-1) \times (n-1)$, получаемая из исходной матрицы вычерчиванием i-й строки и k-го столбца. Такая матрица называется *минором* a_{ik}.

Определение: Матрица A называется вырожденной, если $\det (A) = 0$.

A.2.6. Собственные значения и собственные векторы

Вектор x_i, удовлетворяющий соотношению

$$Ax_i = \lambda_i x_i,$$

называется *собственным вектором* A, а скаляр λ_i — соответствующим *собственным значением.*

Характеристическим уравнением для матрицы A размером $(n \times n)$ называется уравнение

$$\det (A - \lambda I) = 0.$$

Определитель представляет собой полином степени n относительно λ. Корни характеристического уравнения являются собственными значениями матрицы A.

Определение: *Спектральным радиусом* A называется максимальное по модулю собственное значение матрицы

$$\rho (A) = \max_i |\lambda_i|.$$

A.2.7. Нормы векторов и матриц

Норма вектора x — это действительное число, обозначаемое $\|x\|$, которое удовлетворяет всем следующим условиям:

a) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$, где α — скаляр;

b) $\|x\| + \|y\| \geqslant \|x+y\|$ для всех x и y;

c) $\|x\| \geqslant 0$, равенство нулю удовлетворяется тогда и только тогда, когда $x = 0$.

l_p — норма вектора, обозначаемая $\| \ \|_p$, для всех $p \geqslant 1$ определяется как

$$\| x \|_p = \left(\sum_i |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Часто используются следующие три нормы:

$$l_1 : \| x \|_1 = \sum_i |x_i|,$$

$$l_2 : \| x \|_2 = \left(\sum_i x^2{}_i \right)^{1/2},$$

(Евклидова норма)

$$l_\infty : \| x \|_\infty = \max_i |x_i|.$$

Нормой матрицы называется действительное число, удовлетворяющее соответствующим условиям (a), (b), (c), а также удовлетворяющее дополнительному условию

$$\|A\|\ \|B\| \geqslant \|AB\|.$$

Матричная норма называется согласованной с векторной нормой, если она удовлетворяет условию

$$\|Ax\| \leqslant \|A\|\ \|x\| \text{ для всех } x.$$

Если равенство не выполняется хотя бы для одного $x=0$, матричную норму называют подчиненной векторной норме.

Следующие матричные нормы A являются подчиненными векторным нормам l_1, l_2 и l_∞:

$$\|A\|_1 = \max_k \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| \text{ (максимальная сумма по столбцам)}$$

$$\|A\|_2 = [\rho(A^T A)]^{1/2}$$

$$\|A\|_\infty = \max \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \text{ (максимальная сумма по строкам)}$$

Приведем некоторые свойства норм:

1. $\|x-y\| \geqslant |\|x\| - \|y\||$, где x и y — векторы.
2. $\|A\| \geqslant \rho(A)$ — для любой нормы матрицы A.
3. $\|A\|_2 = \rho(A)$, если A — симметричная матрица.
4. $\frac{1}{\|A^{-1}\|} \leqslant |\lambda| \leqslant \|A\|$, где A — невырожденная матрица, а λ — любое собственное значение A.

A.2.8. Дополнительные определения

Отметим, что при дальнейшем изложении A имеет размер $n \times n$ и все векторы имеют размерность n, если нет особых оговорок.

1. *Внутреннее* или *скалярное* произведение двух элементов x и y векторного пространства определяется следующим выражением:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Заметим, что

$$\langle x, x\rangle = \|x\|_2^2.$$

2. Матрица A называется *ортогональной*, если

$$A^{-1} = A^T.$$

3. Матрица A называется *матрицей с диагональным преобладанием*, если для всех i

$$\| a_{ii} \| \geqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} | a_{ij} | = \alpha_i,$$

и *матрицей со строгим диагональным преобладанием*, если для всех i справедливо строгое неравенство.

4. Матрица A называется *трехдиагональной*, если для $|i-j|>1$

$$a_{ij}=0.$$

5. Матрица называется *блочно-диагональной,* если

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B_1} & & \\ & \mathbf{B_2} & \\ & & \mathbf{B_k} \end{bmatrix}$$

Здесь B_i $(i=1,2,...,k)$ — квадратные матрицы не обязательно одинакового *порядка.*

6. Матрица A — *верхняя треугольная*, если при $i>j$

$$a_{ij}=0,$$

и *нижняя треугольная,* если при $j>i$

$$a_{ij}=0.$$

7. Матрица называется *неприводимой*, если не существует преобразования перестановки

$$PAP^{-1},$$

в результате которого A приводится к виду

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{bmatrix}$$

Здесь S и Q — соответственно квадратные подматрицы порядка s и q, причем $s+q=n$; 0 — нулевая матрица размером $s \times q$. Матрица перестановок P в каждом столбце и каждой строке имеет один ненулевой элемент, равный единице.

8. Матрица A называется *неприводимо диагонально преобладающей*, если она неприводимая и с диагональным преобладанием при

$|a_{ii}|>\alpha_i$ по крайней мере для одного i

9. Матрицы A и B называются *подобными*, если

$$B = T^{-1} AT,$$

а T — невырожденная матрица. Приведенная операция над A называется *преобразованием подобия*. Подобные матрицы обладают одинаковыми собственными значениями.

10. Два вектора x и y называются *ортогональными*, если

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

Ортогональные векторы линейно независимы.

11. Матрица A называется *положительно определенной*, если для всех $x \neq 0$

$$\langle x, Ax \rangle > 0,$$

и *положительной полуопределенной*, если

$$\langle x, Ax \rangle \geqslant 0 \text{ для всех } x$$

$$\langle x, Ax \rangle = 0 \text{ по крайней мере для одного } x \neq 0.$$

A. 3. НЕКОТОРЫЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Заметим, что при дальнейшем изложении A — действительная матрица размером $n \times n$.

A.3.1. Симметричная матрица имеет n действительных собственных значений и n взаимно ортогональных собственных векторов.

A.3.2. Если матрица A *строго* или *неприводимо диагонально преобладающая*, то она представляет собой невырожденную матрицу. Если, кроме того, все диагональные элементы A положительны, то действительная часть собственных значений A также положительна (Варга, 1962, с. 22).

A.3.3. Если матрица A является *симметричной* и *строго диагонально преобладающей или непроизводимо диагонально преобладающей* с положительными диагональными элементами, то она *положительно определенная матрица.*

A.3.4. Система линейных уравнений $Ax = k$ имеет единственное решение, если $\det(A) = 0$.

A.3.5. Если A является *строго или неприводимо диагонально преобладающей*, то $Ax = k$ имеет единственное решение.

A.3.6. Если A — действительная матрица, такая что $a_{ii} \geqslant 0$ и $a_{ij} \leqslant 0$ для $i \neq j$, то A вырождена тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

(Таусски, 1949).

А.3.7. $Ax=k$ имеет единственное решение, если A — *положительно определенная матрица.*

А.3.8. (Фаддеева, 1959, с. 60)

$$\lim_{m\to\infty} A^m = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } \rho(A) < 1.$$

А.3.9. (Фаддеева, 1959, с. 61)

$$\lim_{m\to\infty} A^m = 0, \text{ если } \|A\| < 1,$$

где $\|A\|$ — произвольная норма матрицы A.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Ahlberg, J. H., Nilson, E. N. and Walsh, J. L. (1967). *The Theory of Splines and their Applications*, Academic Press, New York.

Aird, T. J., Battiste, E. L. and Gregory, W. C. (1977). Portability of mathematical software coded in FORTRAN, *ACM Trans. Math. Software*, **3**, No. 2, pp. 113–27.

Akbar, A. M., Arnold, M. D. and Harvey, A. H. (1974). Numerical simulation of individual wells in a field simulation model, *Soc. Petrol. Eng. J.*, **14**, No. 4, pp. 315–20.

Al-Hussainy, R., Ramey, H. J., Jr. and Crawford, P. B. (1966). The flow of real gases through porous media, *Trans. SPE of AIME*, **18**, pp. 624–36 (JPT).

Ames, W. F. (1969). *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Thomas Nelson & Sons, Don Mills.

Arakawa, A. (1966). Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: two-dimensional incompressible flow. Part 1, *J. Compt. Phys.*, **1**, pp. 119–43.

Archer, J. S. and Wong, S. W. (1973). Use of a reservoir simulator to interpret laboratory waterflood data, *Soc. Petrol. Eng. J.*, **13**, No. 6, pp. 343–7.

Aris, R. (1962). *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Prentice-Hall, New Jersey.

Aronofsky, J. S. and Jenkins, R. (1954). A simplified analysis of unsteady radial gas flow, *Trans. SPE of AIME*, **201**, pp. 149–54.

Asfari, A. and Witherspoon, P. A. (1973). Numerical simulation of naturally fractured reservoirs, *SPE* 4290, *3rd Symposium on Numerical Simulation of Reservoir Performance*, Houston.

Ashford, F. E. (1969). Computed relative permeability drainage and imbibition, *SPE* 2582, *44th Annual Meeting*, Denver.

Aziz, K. (1968). Numerical methods for three dimensional reservoir models, *J. Can. Petrol. Technol.*, **7**, No. 1, pp. 41–6.

Aziz, K. and Settari, A. (1972). A new iterative method for solving reservoir simulation equations, *J. Can. Petrol. Technol.*, **11**, No. 1, pp. 62–8.

Bakes, M. D. (1965). An alternative method of solution of certain tridiagonal systems of linear equations, *Compt. J.*, **7**, pp. 135–6.

Bank, R. E. (1976). Marching algorithms and block Gaussian elimination, in: *Sparse Matrix Computations*, ed. J. R. Bunch and D. J. Rose, Academic Press, New York, pp. 292–308.

Barakat, J. Z. and Clark, J. A. (1966). On the solution of the diffusion equations by numerical methods, *J. Heat Transfer*, **88**, pp. 421–7.

Bear, J. (1972). *Dynamics of Fluids in Porous Media*, American Elsevier, New York.

Bellman, R. (1960). *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, New York.

Bird, R. B., Stewart, W. E. and Lightfoot, E. N. (1960). *Transport Phenomena*, J. Wiley & Sons, New York.

Bishop, K. A., Brett, V. S., Green, D. W. and McElhiney, J. E. (1976). The application of sensitivity analysis to reservoir simulation, *SPE* 6102, *51st Annual Fall Meeting*, New Orleans.

Björdammen, J. B. and Coats, K. H. (1969). Comparison of alternating direction and successive overrelaxation techniques in simulation of reservoir fluid flow, *Soc. Petrol. Eng. J.*, **9**, No. 1, pp. 47–58.

Blades, D. N. and Stright, D. H., Jr. (1975). Predicting high volume lift performance in wells coning water, *J. Can. Petrol. Technol.*, **14**, No. 4, pp. 62–70.

Blair, P. M. and Weinaug, C. F. (1969). Solution of two-phase flow problems using implicit difference equations, *Trans. SPE of AIME*, **246**, pp. 417–24 (SPEJ).

Blum, E. K. (1972). *Numerical Analysis and Computation: Theory and Practice*, Addison-Wesley, Mass.
Bondor, P. L., Hirasaki, G. J. and Tham, M. J. (1972). Mathematical simulation of polymer flooding in complex reservoirs, *Soc. Petrol. Eng. J.*, **12**, No. 5, pp. 369–82.
Botset, H. G. (1946). Electrolytic model and its applications to study of recovery problems, *Trans. SPE of AIME*, **165**, pp. 15–25.
Bournazel, C. and Jeanson, B. (1971). Fast water-coning evaluation method, *SPE* 3628, *46th Annual Fall Meeting*, New Orleans.
Brandon, D. M., Jr. (1974). The implementation and use of sparse matrix techniques in general simulation programs, *Compt. J.*, **17**, pp. 165–71.
Brandt, A. (1977). Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems, *Math. of Compt.*, **31**, No. 138, pp. 333–90.
Brayton, R. K., Gustavson, F. G. and Willoughby, R. A. (1970). Some results on sparse matrices, *Math. of Compt.*, **24**, No. 112, pp. 937–54.
Breitenbach, E. A., Thurnau, D. H. and Van Poolen, H. K. (1969). The fluid flow simulation equations, *Soc. Petrol. Eng. J.*, **9**, No. 2, pp. 155–69.
Brian, P. L. T. (1961). A finite difference method of high order accuracy for the solution of three-dimensional transient heat conduction problems, *A.I.Ch.E. J.*, **7**, No. 3, pp. 367–70.
Briggs, J. E. and Dixon, T. N. (1968). Some practical considerations in the numerical solution of two dimensional reservoir problems, *Trans. SPE of AIME*, **243**, pp. 185–94.
Browning, G., Kreiss, H. O. and Oliger, J. (1973). Mesh refinement, *Math. of Compt.*, **27**, No. 121, pp. 29–40.
Bruce, W. A. (1943). An electrical device for analyzing oil-reservoir behaviour, *Trans. SPE of AIME*, **151**, pp. 112–24.
Bruce, G. H., Peaceman, D. W., Rachford, H. H., Jr. and Rice, J. D. (1953). Calculations of unsteady-state gas flow through porous media, *Trans. SPE of AIME*, **198**, pp. 79–92 (JPT).
Bunch, J. R. and Rose, D. J. (eds.) (1976). *Sparse Matrix Computations*, Academic Press, New York.
Buzbee, B. L., Golub, G. H. and Nielson, C. W. (1970). On direct methods for solving Poisson's equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, **7**, No. 4, pp. 627–56.
Byrne, G. D. and Hindmarsh, A. C. (1975). Polyalgorithm for the numerical solution of ordinary differential equations, *ACM Trans. on Mathematical Software*, **1**, No. 1, pp. 71–96.
Calahan, D. A. (1968). A stable accurate method of numerical integration for non linear systems, *IEEE Proc.*, **56**, pp. 744–5.
Calhoun, J. C., Jr., Lewis, M., Jr. and Newman, R. C. (1949). Experiments on the capillary properties of porous solids, *Trans. SPE of AIME*, **186**, pp. 180–96.
Cardenas, A. F. (1973). The PDEL language and its use to solve field problems—user's manual, *University of California*, Los Angeles.
Cardwell, W. T., Jr. (1959). The meaning of the triple value in non-capillary Buckley–Leverett theory, *Trans. SPE of AIME*, **216**, pp. 271–6.
Carnahan, B., Luther, H. A. and Wilkes, J. O. (1969). *Applied Numerical Methods*, J. Wiley & Sons, New York.
Carre, B. D. (1961). The determination of the optimum accelerating factor for successive overrelaxation, *Compt. J.*, **4**, pp. 73–8.
Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C. (1959). *Conduction of Heat in Solids*, 2nd edn., Clarendon Press, Oxford.
Carter, R. D. and Tracy, C. W. (1960). An improved method for calculating water influx, *Trans. SPE of AIME*, **219**, pp. 415–17 (JPT).
Carter, R. D. (1966). Performance predictions for gas reservoirs considering two dimensional unsteady state flow, *Trans. SPE of AIME*, **237**, pp. 35–43 (SPEJ).
Carter, R. D., Kemp, L. F., Jr., Pierce, A. C. and Williams, D. L. (1974). Performance matching with constraints, *Trans. SPE of AIME*, **257**, pp. 187–96

(SPEJ).
Carver, M. B. (1973). A FORTRAN oriented simulation system for the general solution of sets of implicitly coupled partial differential equations, *Proceedings 1974 Summer Computer Simulation Conference*, Houston, pp. 104–12.
Chain, R., Mounford, C. J., Raghavan, R. and Thomas, G. W. (1976). Determination of reservoir properties from back pressure tests with applications to reservoir simulation, *J. Petrol. Technol.*, **28,** pp. 603–10.
Chappelear, J. E. and Rogers, W. (1974). Some practical considerations in the construction of a semi-implicit simulator, *Soc. Petrol. Eng. J.*, **14,** No. 3, pp. 216–20.
Chappelear, J. E. and Hirasaki, G. J. (1976). A model of oil–water coning for 2-D areal reservoir simulation, *Trans. SPE of AIME*, **261,** pp. 65–72 (SPEJ).
Chavent, G., Dupuy, M. and Lemonnier, P. (1975). History matching by use of optimal control theory, *Trans. SPE of AIME*, **259,** pp. 74–86 (SPEJ).
Chen, W. H., Gavalas, G. R., Seinfeld, J. H. and Wasserman, M. L. (1974). A new algorithm for automatic history matching, *Trans. SPE of AIME*, **257,** pp. 593–608 (SPEJ).
Ciment, M. (1971). Stable difference schemes with uneven mesh spacings, *Math. of Compt.*, **25,** No. 114, pp. 219–27.
Ciment, M. and Sweet, R. A. (1973). Mesh refinements for parabolic equations, *J. Compt. Phys.*, **12,** pp. 513–25.
Coats, K. H. and Terhune, M. H. (1966). Comparison of alternating direction explicit and implicit procedures in two dimensional flow calculations, *Trans. SPE of AIME*, **237,** pp. 350–62 (SPEJ).
Coats, K. H., Nielsen, R. L., Terhune, M. H. and Weber, A. G. (1967). Simulation of three-dimensional, two-phase flow in oil and gas reservoirs, *Trans. SPE of AIME*, **240,** pp. 377–88 (SPEJ).
Coats, K. H. (1968). *Elements of Reservoir Simulation*, Lecture Notes, University of Texas, reprinted by Intercomp Resources Development and Engineering Inc., Houston.
Coats, K. H. (1968a). An analysis for simulating reservoir performance under pressure maintenance by gas and/or water injection, *Soc. Petrol. Eng. J.*, **8,** No. 4, pp. 331–40.
Coats, K. H. (1968b). A treatment of the gas percolation problem in simulation of three-dimensional three-phase flow in reservoirs, *Trans. SPE of AIME*, **243,** pp. 413–19 (SPEJ).
Coats, K. H. (1969). Use and misuse of reservoir simulation models, *J. Petrol. Technol.*, **21,** pp. 1391–8.
Coats, K. H., Dempsey, J. R. and Henderson, J. H. (1970). A new technique for determining reservoir description from field performance data, *Trans. SPE of AIME*, **249,** pp. 66–74 (SPEJ).
Coats, K. H., Dempsey, J. R., Ancell, K. L. and Gibbs, D. E. (1971). Analysis and prediction of gas well performance, *SPE* 3474, *46th Annual Fall Meeting*, New Orleans.
Coats, K. H., Dempsey, J. R. and Henderson, J. H. (1971a). The use of vertical equilibrium in two-dimensional simulation of three-dimensional reservoir performance, *Trans. SPE of AIME*, **251,** pp. 63–71 (SPEJ).
Coats, K. H., George, W. D. and Marcum, B. E. (1974). Three-dimensional simulation of steamflooding, *Trans. SPE of AIME*, **257,** pp. 573–92 (SPEJ).
Coats, K. H. (1976). Simulation of steamflooding with distillation and solution gas, *Soc. Petrol Eng. J.*, **16,** No. 5, pp. 235–47.
Coats, K. H. (1976a). A fully implicit steamflood model, *SPE* 6105, *51st Annual Fall Meeting*, New Orleans.
Coats, K. H. (1976b). Private communication.
Cody, W. J. (1974). Construction of numerical subroutine libraries, *SIAM Rev.*, **16,** No. 1, pp. 36–46.
Collatz, L. (1966). *The Numerical Treatment of Differential Equations*, 3rd edn.,

Springer-Verlag, Berlin.
Collins, R. E. (1961). *Flow of Fluids Through Porous Materials*, Van Nostrand Reinhold, New York.
Cook, R. E., Jacoby, R. H. and Ramesh, A. B. (1974). A beta-type reservoir simulator for approximating compositional effects during gas injection, *Soc. Petrol. Eng. J.*, **14**, No. 5, pp. 471–81.
Corey, A. T., Rathjens, C. H., Henderson, J. H. and Wyllie, M. R. J. (1956). Three-phase relative permeability, *Trans. SPE of AIME*, **207**, pp. 349–51 (JPT).
Cornell, D. and Katz, D. L. (1953). Pressure gradients in natural gas reservoirs, *Trans. SPE of AIME*, **198**, pp. 61–71 (JPT).
Cottin, R. H. (1971). Optimization of the completion and exploitation of a well under two phase coning, *Rev. L'Inst. Franc. Petrol.*, **26**, pp. 171–97 (in French).
Courant, R. and Hilbert, D. (1953). *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1 and 2, Interscience Publishers, New York.
Craft, B. C. and Hawkins, M. F. (1959). *Applied Petroleum Reservoir Engineering*, Prentice-Hall, New Jersey.
Craig, F. F., Jr. (1971). *The Reservoir Engineering Aspects of Waterflooding*, SPE Monograph Series, **3**, SPE-AIME, Dallas.
Crandall, S. H. (1955). An optimum implicit recurrence formula for the heat conduction equation, *Quart. Appl. Math.*, **13**, pp. 318–20.
Culham, W. E. and Varga, R. S. (1971). Numerical methods for time-dependent nonlinear boundary value problems, *Soc. Petrol. Eng. J.*, **11**, No. 4, pp. 374–88.
Cuthill, E. H. and Varga, R. S. (1959). A method of normalized block iteration, *J. Assoc. Compt. Mach.*, **6**, pp. 236–44.
Cuthill, E. (1972). Several strategies for reducing the band-width of matrices, in: *Sparse Matrices, and Their Applications*, eds. D. J. Rose and R. A. Willoughby, Plenum Press, New York, pp. 157–66.
Cutler, J. M. and Rees, W. A. (1970). A study of water coning in the oil creek reservoir, North Antioch Field, Oklahoma, *SPE* 2814, *2nd Symposium on Numerical Simulation of Reservoir Performance*, Dallas.
Dandona, A. K. and Morse, R. A. (1973). How flooding rate and gas saturation affect waterflood performance, *Oil Gas J.*, **71**, No. 27, pp. 60–4; and Vol. **71**, No. 28, pp. 69–73.
Dandona, A. K. and Morse, R. A. (1975). Down-dip waterflooding of an oil reservoir having a gas cap, *Trans. SPE of AIME*, **259**, pp. 1005–16 (JPT).
Danilov, D. L., Konovalov, A. N. and Yakuba, S. I. (1968). Equations and boundary value problems in the theory of two phase flows through porous media, *Dokl. Akad. Nauk. USSR*, **183**, No. 2, pp. 307–10 (in Russian).
Darcy, H (1856). Les Fontaines publiques de la Ville de Dijon, Dalmount, Paris (reprinted in Hubbert, 1969).
DesBrisay, C. L., Gray, J. W. and Spivak, A. (1975). Miscible flood performance of the intisar 'D' Field, Libyan Arab Republic, *J. Can. Petrol. Technol.*, pp. 935–43.
Dietrich, J. K. and Bondor, P. L. (1976). Three-phase oil relative permeability models, *SPE* 6044, *51st Annual Fall Meeting*, New Orleans.
Douglas, J., Jr. (1955). On the numerical integration of $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = \partial u/\partial t$ by implicit methods, *J. SIAM*, **3**, No. 1, pp. 42–65.
Douglas, J., Jr and Rachford, H. H., Jr. (1956). On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables, *Amer. Math. Soc. Trans.*, **82**, No. 2, pp. 421–39.
Douglas, J., Jr., Peaceman, D. W. and Rachford, H. H., Jr. (1959). A method for calculating multi-dimensional immiscible displacement, *Trans. SPE of AIME*, **216**, pp. 297–306.
Douglas, J., Jr., (1960). A numerical method for the solution of a parabolic system, *Numer. Math.*, **2**, pp. 91–8.
Douglas, J., Jr., (1961). A survey of numerical methods for parabolic differential equations, in: *Advances in Computers*, **2**, pp. 1–54, ed. F. L. Alt, Academic Press, New York.

Douglas, J., Jr. (1962). Alternating direction methods for three space variables, *Numer. Math.*, **4**, pp. 41–63.

Douglas, J., Jr. and Jones, B. F., Jr. (1963). On predictor–corrector methods for nonlinear parabolic differential equations, *J. SIAM*, **11**, No. 1, pp. 195–204.

DuFort, E. C. and Frankel, S. P. (1953) Stability conditions in the numerical treatment of parabolic differential equations, *Math. Tables Aids Compt.*, **7**, pp. 135–52.

Dupont, T., Kendall, R. P. and Rachford, H. H., Jr. (1968). An approximate factorization procedure for solving self-adjoint elliptic difference equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, **5**, No. 3, pp. 559 73.

Dupuy, M., Jain, C. and Besset, P. (1971). Automatic adjustment possibilities for reservoir model in single-period production, *Rev. L'Inst. Franc. Petrol.*, **26**, No. 4, pp. 269 300 (in French).

Earlougher, R. C., Jr. (1977). *Advances in Well Test Analysis*, SPE Monograph Series, **5**.

Ehle, B. L. (1973). A-stable methods and Padé approximations to the exponential, *SIAM J. Math. Anal.*, **4**, No. 4, pp. 671-80.

Eisenstat, S. C., Schultz, M. H. and Sherman, A. H. (1976). Considerations in the design of software for sparse Gaussian elimination, in: *Sparse Matrix Computations*, eds. J. R. Bunch and D. J. Rose, Academic Press, New York, pp. 263-73.

Elenbaas, J. R. and Katz, D. L. (1947). A radial turbulent flow formula, *Trans. SPE of AIME*, **174**, pp. 25-40.

Emmanuel, A. E. and Cook, G. W. (1974). Pseudo-relative permeability for well modeling, *Soc. Petrol. Eng. J.*, **14**, No. 1, pp. 7–9.

Engeli, M., Ginsburg, T., Ruthishauser, H. and Stiefel, E. (1959). Refined iterative methods for computation of the solution and the eigenvalues of self-adjoint boundary value problems, *Mitteilungen aus dem Institut für Angewandte Mathematik*, Nr. 8, Birkhauser-Verlag, Basel/Stuttgart, **107**, pp. 206–7.

ERCB (1975). *The Theory and Practice of the Testing of Gas Wells*, 3rd edn., Energy Resources Conservation Board.

Evans, D. J. and Forrington, C. V. D. (1963). Notes on the solution of certain tri-diagonal systems of linear equations, *Compt. J.*, **5**, pp. 327–8.

Evans, D. J. (1971). The numerical solution of the fourth boundary value problem for parabolic partial differential equations, *J. Inst. Math. Appl.*, **7**, pp. 61–75.

Evans, D. J. (1971*a*). An algorithm for the solution of symmetric general three term linear systems, *Compt. J.*, **14**, No. 4, pp. 444–5.

Evrenos, A. I. and Comer, A. G. (1969). Sensitivity studies of gas–water relative permeability and capillarity in reservoir modeling, *SPE* 2608, 44*th Annual Fall Meeting*, Denver.

Evenros, A. I. and Comer, A. G. (1969a). Numerical simulation of hysteretic flow in porous media, *SPE* 2693, 44*th Annual Fall Meeting*, Denver.

Faddeev, D. K. and Faddeeva, V. N. (1963). *Computational Methods of Linear Algebra*, translated by R. C. Williams, W. H. Freeman, San Francisco.

Faddeeva, V. N. (1959). *Computational Methods of Linear Algebra*, Dover Publications, New York.

Fancher, G. H. and Lewis, J. A. (1933). Flow of simple fluids through porous materials, *Ind. Eng. Chem. Fund.*, **24**, pp. 1139–47.

Fay, C. H. and Prats, M. (1951). The application of numerical methods to cycling and flooding problems, *Proc. 3rd World Petroleum Congress*, Section II, pp. 555–64.

Fayers, F. J. and Sheldon, J. W. (1959). The effect of capillary pressure and gravity on two-phase fluid flow in a porous medium, *Trans. SPE of AIME*, **216**, pp. 147–55.

Fernbach, S. (1973). Class V computers to challenge mathematicians, *SIAM News*, **6**, No. 6.

Fetkovich, M. J. (1971). A simplified approach to water influx calculations—finite aquifer systems, *J. Petrol. Technol.*, **23**, pp. 814–28.
Finol, A. and Farouq Ali, S. M. (1975). Numerical simulation of oil production with simultaneous ground subsidence, *Trans. SPE of AIME*, **259**, pp. 411–24 (SPEJ).
Forester, C. K. (1977). Higher order monotonic convective difference schemes, *J. Compt. Phys.*, **23**, No. 1, pp. 1–22
Forschheimer, P. (1901). Wasserbewegung durch Boden, *Z. Ver. Deut. Ing.*, **45**, pp. 1782–8 (in German).
Forsythe, G. E. and Wasow, W. (1960). *Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations*, J. Wiley & Sons, New York.
Fox, L. (1964). *An Introduction to Numerical Linear Algebra*, Clarendon Press, Oxford.
Fox, D. G. and Deardorff, J. W. (1972). Computer methods for simulation of multidimensional, nonlinear, subsonic, incompressible flow, *J. Heat Transfer*, **94**, pp. 337–46.
Frick, T. C. and Taylor, R. W. (1962). *Petroleum Production Handbook*, Vol. II, *Reservoir Engineering*, SPE–AIME, Dallas.
Fussell, D. D. and Yanosik, J. L. (1976). An iterative sequence for phase equilibrium calculations incorporating the Redlich–Kwong equation of state, *SPE* 6050, 51*st Annual Fall Technical Conference and Exhibition*, New Orleans.
Fussell, L. T. and Fussell, D. D. (1977). A new mathematical technique for compositional models incorporating the Redlich–Kwong equation of state, *SPE* 6891, 52*nd Annual Technical Conference and Exhibition*, Denver.
Gavalas, G. R., Shah, P. C. and Seinfeld, J. H. (1976). Reservoir history matching by Bayesian estimation, *Trans. SPE of AIME*, **261**, pp. 337–50 (SPEJ).
Gear, C. W. (1971). *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, New Jersey.
Geertsma, J., Craes, G. A. and Schwarz, N. (1956). Theory of dimensionally scaled models of petroleum reservoirs, *Trans. SPE of AIME*, **207**, pp. 118–27 (JPT).
Geertsma, J. (1974). Estimating the coefficient of inertial resistance in fluid flow through porous media, *Soc. Petrol. Eng. J.*, **14**, No. 5, pp. 445–50.
George, A. (1973). Nested dissection of a regular finite element mesh, *SIAM J. Numer. Anal.*, **10**, No. 2, pp. 345–63.
George, A. and Liu, W. H. (1975). A note on fill for sparse matrices, *SIAM J. Numer. Anal.*, **12**, No. 3, pp. 452–5.
Girault, V. (1974). Theory of a finite difference method on irregular networks, *SIAM J. Numer. Anal.*, **11**, No. 2, pp. 260–82.
Goult, R. J., Hoskins, R. F., Milner, J. A. and Pratt, M. J. (1974). *Computational Methods in Linear Algebra*, Stanley Thornes (Publishers), London.
Gourlay, A. R. (1970). Hopscotch: A fast second order partial differential equation solver, *J. Inst. Math. Appl.*, **6**, pp. 375–90.
Gourlay, A. R. and McGuire, G. R. (1971). General hopscotch algorithm for the numerical solution of partial differential equations, *J. Inst. Math. Appl.*, **7**, pp. 216–27.
Govier, G. W. (1961). Interpretation of the results of the back pressure testing of gas wells, *CIM Trans.*, **64**, pp. 511–14.
Govier, G. W. and Aziz, K. (1972). *The Flow of Complex Mixtures in Pipes*, Van Nostrand Reinhold, New York.
Greenspan, D. (1965). *Introductory Numerical Analysis of Elliptic Boundary Value Problems*, Harper and Row, New York.
Gruska, J. and Poliak, P. (1967). Riešienie systémov linearných rovníc s pásovými maticami, *Aplikace Matematiky*, **12**, No. 6, pp. 439–98 (in Czech).
Gustavson, F. G. and Hachtel, G. D. (1973). Program implementation of a network design program based on the sparse tableau adjoint method, *Proceedings of the* 16*th Midwest Symposium on Circuit Theory*, **1**, University of Waterloo, Ontario.
Gustavson, F. (1975). Finding the block lower triangular form of a sparse matrix, *IBM Research* RC 5667, (No. 24420), *Computer Science Mathematics*.

Hageman, L. A. and Kellogg, R. B. (1968). Estimating optimum overrelaxation parameters, *Math. of Compt.*, **22**, No. 101, pp. 60–8.
Harary, F. (1971). Sparse matrices and graph theory, in: *Large Sparse Sets of Linear Equations*, ed. J. K. Reid, Academic Press, London, pp. 139–50.
Harlow, F. H. and Amsden, A. A. (1971). *Fluid Dynamics*, Report No. LA 4700, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, New Mexico.
Harris, D. G. (1975). The role of geology in reservoir simulation studies, *J. Petrol. Technol.*, **27**, pp. 625–32.
Hauber, W. C. (1964). Prediction of waterflood performance for arbitrary well patterns and mobility ratios, *Trans. SPE of AIME*, **231**, pp. 95–103 (JPT).
Hawthorne, R. G. (1974). A model of fluid displacement in multilayer porous media including capillary pressure effects between layers, *SPE* 5126, 49*th Annual Fall Meeting*, Houston.
Hearn, C. L. (1971). Simulation of stratified waterflooding by pseudo relative permeability curves, *J. Petrol. Technol.*, **23**, pp. 805–13.
Henrici, P. (1962). *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*, J. Wiley & Sons, New York.
Henry, R. L. (1976). Effect of including composition-dependent K values to generate data for a modified beta-type simulator, *J. Petrol. Technol.*, **28**, pp. 1180–2.
Hiatt, W. N. (1958). Injected fluid coverage of multi-well reservoirs with permeability stratification, *Drilling and Production Practice, API*, pp. 165–94.
Hiatt, W. N. (1968). Mathematical basis of two-phase, incompressible, vertical flow through porous media and its implications in the study of gravity-drainage-type petroleum reservoirs, *Trans. SPE of AIME*, **243**, pp. 225–30 (SPEJ).
Higgins, R. V. and Leighton, A. J. (1962). A computer method to calculate two-phase flow in irregularly bounded porous medium, *Trans. SPE of AIME*, **225**, pp. 679–83 (JPT).
Higgins, R. V. and Leighton, A. J. (1962a). Computer prediction of water drive of oil and gas mixtures through irregularly bonded porous media—Three-phase flow, *Trans. SPE of AIME*, **225**, pp. 1048–54 (JPT).
Hildebrand, F. B. (1956). *Introduction to Numerical Analysis*, McGraw-Hill, New York.
Hildebrand, F. B. (1965). *Methods of Applied Mathematics*, 2nd edn., Prentice-Hall, New Jersey.
Hirasaki, G. J. and O'Dell, P. M. (1970). Representation of reservoir geometry for numerical simulation, *Trans. SPE of AIME*, **249**, pp. 393–404 (SPEJ).
Hirt, C. W. (1968). Heuristic stability theory for finite-difference equations, *J. Compt. Phys.*, **2**, pp. 339–55.
Hirt, C. W., Amsden, A. A. and Cook, J. L. (1974). An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds, *J. Compt. Phys.*, **14**, pp. 227–53.
Holloway, C. C., Thomas, L. K. and Pierson, R. G. (1975). Reduction of grid orientation effects in reservoir simulation, *SPE* 5522, 50*th Annual Fall Meeting*, Dallas.
Houpeurt, A. (1959). On the flow of gases in porous media, *Rev. L'Inst. Franc. Petrol.*, **14**, No. 11, pp. 1468–97; No. 12, pp. 1637–84.
Hubbert, M. K. (1940). The theory of ground-water motion, *J. Geol.*, **48**, No. 8, part 1, pp. 785–944 (reprinted with corrections in Hubbert, 1969).
Hubbert, M. K. (1956). Darcy's Law and the field equations of the flow of underground fluids, *Trans. SPE of AIME*, **207**, pp. 222–39 (JPT), (reprinted in Hubbert, 1969).
Hubbert, M. K. (1969). *The Theory of Ground-Water Motion and Related Papers*, Hafner Publishing, New York.
Hurst, W. (1953). Determination of performance curve in five-spot waterflood, *Petrol. Eng.*, **25**, pp. B40–B48.
Hurst, W. (1958). Simplifications of the material balance formulas by the Laplace transformation, *Trans. SPE of AIME*, **213**, pp. 292–303.

Jacks, H. H., Smith, O. J. E. and Mattax, C. C. (1973). The modelling of a three-dimensional reservoir with a two-dimensional reservoir simulator—The use of dynamic pseudo functions, *Soc. Petrol. Eng. J.*, **13**, No. 3, pp. 175–85.

Jennings, A. (1971). Solution of variable bandwidth positive definite simultaneous equations, *Compt. J.*, **14**, No. 4, p. 446.

Kafka, J. (1968). Nets with subdivided meshes in the numerical solution of Dirichlet's Problem, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **48**, Heft 8 und Sonderheft, S. T79.

Karplus, W. J. (1956). Water coning before breakthrough—an electronic analog treatment, *Trans. SPE of AIME*, **207**, pp. 240–5 (JPT).

Karplus, W. J. (1958). *Analog Simulation*. McGraw-Hill, New York.

Katz, D. L., Cornell, D., Kobayashi, R., Poettman, F. H., Vary, J. A., Elenbaas, J. R. and Weinaug, C. F. (1959). *Handbook on Natural Gas Engineering*, McGraw-Hill, New York.

Katz, D. L., Tek, M. R., Coats, K. H., Katz, M. L., Jones, S. C. and Miller, M. C. (1963). Movement of underground water in contact with natural gas, *AGA Monograph on Project No.* 31, American Gas Association, New York.

Katz, D. L. and Coats, K. H. (1968). *Underground Storage of Fluids*, Ulrich Books Inc., Ann Arbor, Michigan.

Kazemi, H. (1975). A reservoir simulator for studying productivity variation and transient behavior of a well in a reservoir undergoing gas evolution, *Trans. SPE of AIME*, **259**, pp. 1401–12 (JPT).

Kazemi, H., Merrill, L. S., Jr., Porterfield, K. L. and Zeman, P. R. (1976). Numerical simulation of water–oil flow in naturally fractured reservoirs, *Trans. SPE of AIME*, **261**, pp. 317–26 (SPEJ).

Kazemi, H., Shank, G. D. and Vestal, C. R. (1977). An efficient multicomponent numerical simulator, *SPE* 6890, *52nd Annual Technical Conference and Exhibition*, Denver.

Keast, P. and Mitchell, A. R. (1966). On the instability of the Crank Nicholson formula under derivative boundary conditions, *Compt. J.*, **9**, No. 1, pp. 110–14.

Kelley, L. G. (1968). *Handbook of Numerical Methods and Applications*, Addison-Wesley, Mass.

Kernighan, B. W. and Plauger, P. J. (1974). *The Elements of Programming Style*, McGraw-Hill, New York.

Killough, J. E. (1976). Reservoir simulation with history-dependent saturation functions, *Trans. SPE of AIME*, **261**, pp. 37–48 (SPEJ).

Kleppe, J. and Morse, R. A. (1974). Oil production from fractured reservoirs by water displacement, *SPE* 5084, *49th Annual Fall Meeting*, Houston.

Knuth, D. E. (1973). *The Art of Computer Programming*, **3**, Addison-Wesley, Mass.

Ko, S. C. M. (1977). A sequential solution approach for the simulation of coning behavior in petroleum reservoirs, *M.Sc. Thesis*, University of Calgary.

Krogh, F. T. (1973). Algorithms for changing the step size, *SIAM J. Numer. Anal.*, **10**, No. 5, pp. 949–65.

Kron, G. (1963). *Diacoptics, Piecewise Solution of Large Scale Systems*, McDonald, New York.

Kumar, A. (1977). Steady flow equations for wells in partial water-drive reservoirs, *J. Petrol. Technol.*, **29**, pp. 1654–6.

Kyte, J. R. and Berry, D. W. (1975). New pseudo functions to control numerical dispersion, *SPE* 5105, *49th Annual Fall Meeting*, Houston.

Lamb, Sir Horace (1932). *Hydrodynamics*, 6th edn., Dover Publications, New York.

Lancaster, P. (1969). *Theory of Matrices*, Academic Press, New York.

Lanczos, C. (1950). An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators, *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, **45**, No. 159, pp. 255–82.

Lanczos, C. (1952). Solution of systems of linear equations by minimized iterations,

J. Res. Nat. Bur. Stand., **49,** No. 159, pp. 33–53.
Land, C. S. (1968). The optimum gas saturation for maximum oil recovery from displacement by water, *SPE* 2216, 43*rd Annual Fall Meeting*, Houston.
Land, C. S. (1968a). Calculation of imbibition relative permeability for two- and three-phase flow from rock properties, *Trans. SPE of AIME*, **243,** pp. 149–56 (SPEJ).
Lantz, R. B. (1970). Rigorous calculation of miscible displacement using immiscible reservoir simulators, *Trans. SPE of AIME*, **249,** pp. 192–202 (SPEJ).
Lantz, R. B. (1971). Quantative evaluation of numerical diffusion (truncation error), *Trans. SPE of AIME*, **251,** pp. 315–20 (SPEJ).
Lapidus, L. (1962). *Digital Computation for Chemical Engineers*, McGraw-Hill, New York.
Lapidus, L. and Seinfeld, J. H. (1971). *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*, Academic Press, New York.
Larkin, B. K. (1964). Some stable explicit difference approximations to the diffusion equation, *Math. of Compt.*, **18,** No. 84, pp. 196–202.
Larson, C. (1971). The efficient use of FORTRAN, *Datamation*, **17,** pp. 24–31.
Le Blanc, J. L. (1971). A streamline simulation model for predicting the secondary recovery of oil, *Ph.D. Thesis*, University of Texas, Austin.
Ledet, W. P. and Himmelblau, D. M. (1970). *Decomposition Procedures for Solving of Large Scale Systems*, Academic Press, New York.
Lees, M. (1966). A linear three level difference scheme for quasilinear parabolic equations, *Math. of Compt.*, **20,** pp. 516–22.
Letkeman, J. P. and Ridings, R. L. (1970). A numerical coning model, *Soc. Petrol. Eng. J.*, **19,** No. 4, pp. 418–24.
Letkeman, J. P. (1976). Semi-direct iterative methods in numerical reservoir simulation, *SPE* 5730, 4*th Symposium on Numerical Simulation of Reservoir Performance*, Los Angeles.
Leverett, M. C. and Lewis, W. B. (1941). Steady flow of gas–oil–water mixtures through unconsolidated sands, *Trans. SPE of AIME*, **142,** pp. 107–16.
MacDonald, R. C. and Coats, K. H. (1970). Methods for numerical simulation of water and gas coning, *Trans. SPE of AIME*, **249,** pp. 425–36 (SPEJ).
Marchuk, G. I. (1975). *Methods of Numerical Mathematics*, Springer-Verlag, New York.
Markowitz, H. M. (1957). The elimination form of the inverse and its applications to linear programming, *Management Science*, **3,** pp. 255–69.
Martin, J. C. (1968). Partial integration of equations of multiphase flow, *Trans. SPE of AIME*, **243,** pp. 370–80 (SPEJ).
Matthews, C. S. and Russell, D. G. (1967). *Pressure Buildup and Flow Tests in Wells*, SPE Monograph Series, **1.**
McConnell, A. J. (1957). *Applications of Tensor Analysis*, Dover Publications, New York.
McCreary, J. G. (1971). A simple method for controlling gas percolation in numerical simulation of solution gas drive reservoirs, *Trans. SPE of AIME*, **251,** pp. 85–91 (SPEJ).
McCulloch, R. C., Langton, J. R. and Spivak, A. (1969). Simulation of high relief reservoirs, Rainbow field, Alberta, Canada, *J. Petrol. Technol.*, **21,** pp. 1399–408.
McDonald, A. E. and Trimble, R. H. (1977). Efficient use of mass storage during elimination for sparse sets of simulation equations, *Soc. Petrol. Eng. J.*, **17,** No. 4, pp. 300–16.
Meijerink, J. A. and Van der Vorst, H. A. (1977). An iterative solution method for linear systems of which the coefficient matrix is a symmetric M-matrix, *Math. of Compt.*, **31,** No. 137, pp. 148–62.
Mikhlin, S. G. (1964). *Variational Methods in Mathematical Physics*, translated by T. Boddington, Pergamon Press, London.
Mikhlin, S. G. and Smolitskiy, K. L. (1967). *Approximate Methods for Solution of*

Differential and Integral Equations, American Elsevier, New York.
Mitchell, A. R. (1969). *Computational Methods in Partial Differential Equations*, J. Wiley & Sons, New York.
Monin, A. S. and Yaglom, A. M. (1971). *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence*, MIT Press, Cambridge, Mass.
Morel-Seytoux, H. J. (1966). Unit mobility ratio displacement calculations for pattern floods in homogeneous medium, *Trans. SPE of AIME*, **237**, pp. 217–27 (SPEJ).
Morrow, N. R. and Harris, C. C. (1965). Capillary equilibrium in porous materials, *Trans. SPE of AIME*, **234**, pp. 15–24 (SPEJ).
Morrow, N. R. (1970). Irreducible wetting-phase saturations in porous media, *Chem. Eng. Sci.*, **25**, No. 11, pp. 1799–816.
Morse, P. M. and Feshbach, H. (1953). *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, New York.
Mrosovsky, I. and Ridings, R. L. (1974). Two-dimensional radial treatment of wells within a three-dimensional reservoir model, *Soc. Petrol. Eng. J.*, **14**, No. 2, pp. 127–31.
Mungan, N. (1972). Relative permeability measurements using reservoir fluids, *Trans. SPE of AIME*, **253**, pp. 398–402 (SPEJ).
Muskat, M. (1937). *Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media*, McGraw-Hill, New York.
Muskat, M. (1949). *Physical Principles of Oil Production*, McGraw-Hill, New York.
Muskat, M. (1949a). Calculation of initial fluid distribution in oil reservoirs, *Trans. SPE of AIME*, **179**, pp. 119–27.
Nicolaides, R. A. (1975). On multiple grid and related techniques for solving discrete elliptic systems, *J. Compt. Phys.*, **19**, pp. 418–31.
Nolen, J. S. and Berry, D. W. (1972). Tests of the stability and time-step sensitivity of semi-implicit reservoir simulation techniques, *Trans. SPE of AIME*, **253**, pp. 253–66 (SPEJ).
Nolen, J. S. (1973). Numerical simulation of compositional phenomena in petroleum reservoirs, *SPE* 4274, *3rd Symposium on Numerical Simulation of Reservoir Performance*, Houston.
Ortega, J. M. and Rheinboldt, W. C. (1970). *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York.
Osher, S. (1970). Mesh refinements for the heat equation, *SIAM J. Numer. Anal.*, **7**, No. 2, pp. 199–205.
Ostrowski, A. M. (1973). *Solution of Equations in Euclidean and Banach Spaces*, 3rd edn., Academic Press, New York.
Owens, W. W. and Archer, D. L. (1971). The effect of rock wettability on oil-water relative permeability relationships, *Trans. SPE of AIME*, **251**, pp. 873–8 (JPT).
Parter, S. V. (1959). On 'Two-line' iterative methods for the Laplace and biharmonic difference equations, *Numer. Math.*, **1**, pp. 240–52.
Parter, S. V. (1961). Multi-line iterative methods for elliptic difference equations and fundamental frequencies, *Numer. Math.*, **3**, pp. 22–34.
Patton, J. T., Coats, K. H. and Colegrove, G. T. (1971). Prediction of polymer flood performance, *Trans. SPE of AIME*, **251**, pp. 72–84 (SPEJ).
Peaceman, D. W. and Rachford, H. H., Jr., (1955). The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations, *J. SIAM*, **3**, No. 1, pp. 28–41.
Peaceman, D. W. and Rachford, H. H., Jr., (1962). Numerical calculation of multidimensional miscible displacement, *Trans. SPE of AIME*, **225**, pp. 327–39 (SPEJ).
Peaceman, D. W. (1966). *Lecture Notes on Numerical Solution of Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations*, Esso Production Research Company.
Peaceman, D. W. (1967). Numerical solution of the nonlinear equations for two-phase flow through porous media, in: *Nonlinear Partial Differential Equations—Methods of Solutions*, ed. W. F. Ames, Academic Press, New York,

pp. 79–91.
Peaceman, D. W. (1976). Convection in fractured reservoirs—Numerical calculation of convection in a vertical fissure, including the effect of matrix-fissure transfer, *Trans. SPE of AIME*, **261**, pp. 281–301 (SPEJ).
Peaceman, D. W. (1977). A nonlinear stability analysis for difference equations using semi-implicit mobility, *Soc. Petrol. Eng. J.*, **17**, No. 1, pp. 79–91.
Peaceman, D. W. (1977a). Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation, *SPE* 6893, *52nd Annual Fall Technical Conference and Exhibition*, Denver.
Pease, M. C., III (1965). *Methods of Matrix Algebra*, Academic Press, New York.
Peng, D-Y. and Robinson, D. B. (1976). A new two-constant equation of state, *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, **15**, No. 1, pp. 59–64.
Perkins, F. M., Jr., and Collins, R. E. (1960). Scaling laws for laboratory flow models of oil reservoirs, *Trans. SPE of AIME*, **219**, pp. 383–5 (JPT).
Polubarinova-Kochina, P. Ya. (1962). *Theory of Ground-Water Movement*, translated by J. M. Roger de Wiest, Princeton University Press, New Jersey.
Poston, S. W., Ysrael, S. C., Hossain, A. K. M. S., Montgomery, E. F., III and Ramey, H. J., Jr. (1970). The effect of temperature on irreducible water saturation and relative permeability of unconsolidated sands, *Trans. SPE of AIME*, **249**, pp. 171–80.
Poussin, F., de la Vallée (1968). An acceleration relaxation algorithm for iterative solution of elliptic equations, *SIAM. J. Numer. Anal.*, **5**, No. 2, pp. 340–51.
Pozzi, A. L. and Blackwell, R. J. (1963). Design of laboratory models for study of miscible displacement, *Trans. SPE of AIME*, **228**, pp. 28–40 (SPEJ).
Price, H. S., Varga, R. S. and Warren, J. E. (1966). Application of oscillation matrices to diffusion–convection equations, *J. Math. and Physics*, **45**, No. 3, pp. 301–11.
Price, H. S. (1971). Let the problem dictate the degree of sophistication to use in reservoir simulation, Paper 7110, *22nd Annual Technical Meeting Petrol. Soc. of CIM*, Banff.
Price, H. S. and Coats, K. H. (1974). Direct methods in reservoir simulation, *Trans. SPE of AIME*, **257**, pp. 295–308 (SPEJ).
Price, H. S., Settari, A. and Varga, R. S. (1978). Higher-order time approximations for nonlinear differential equations, to be published.
Quon, D., Dranchuk, P. M., Allada, S. R. and Leung, P. K. (1966). Application of the alternating direction explicit procedure to two-dimensional natural gas reservoirs, *Trans. SPE of AIME*, **237**, pp. 137–42 (SPEJ).
Raithby, G. D. (1976). A critical evaluation of upstream differencing applied to problems involving fluid flow, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engineering*, **9**, No. 1, pp. 75–103.
Rapoport, L. A. (1955). Scaling laws for use in design and operation of water–oil flow models, *Trans. SPE of AIME*, **204**, pp. 143–50 (JPT).
Redford, D. A., Flock, D. L., Peters, E. and Lee, J. (1976). Laboratory model flow test systems of *in situ* recovery from Alberta Oil Sands, *26th Can. Chem. Eng. Conf., Symposium on Tar Sands*, Toronto.
Reid, J. K. (1966). A method for finding optimum successive overrelaxation factor, *Compt. J.*, **9**, pp. 200–4.
Reid, J. K. (ed.) (1971). *Large Sparse Sets of Linear Equations*, Academic Press, London.
Richardson, L. F. (1910). The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam, *Philos., Trans. Roy. Soc. London Ser. A.*, **210**, pp. 307–57, and *Proc. Roy. Soc. London Ser. A.*, **83**, pp. 335–6.
Richardson, J. G. and Stone, H. L. (1973). A quarter century of progress in the application of reservoir engineering, *J. Petrol. Technol.*, **25**, pp. 1371–9.
Richtmyer, R. D. and Morton, K. W. (1967). *Difference Methods for Initial-Value*

Problems, 2nd edn., Interscience Publishers, New York.
Roache, P. J. (1972). *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa Publishers, New Mexico.
Robertson, G. E. and Woo, P. T. (1976). Grid orientation effects and the use of orthogonal curvilinear coordinate in reservoir simulation, *SPE* 6100, 51*st Annual Fall Meeting*, New Orleans.
Robinson, R. M. (1971). Numerical simulation of coning and free gas percolation in a solution-gas-drive reservoir around a single well, *Ph.D. Thesis*, University of Texas, Austin.
Rose, D. J. and Willoughby, R. A. (eds.) (1972). *Sparse Matrices and Their Applications*, Plenum Press, New York.
Rosenbrock, H. H. (1963). Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations, *Compt. J.*, **5**, pp. 329–30.
Rossen, R. H. (1977). Simulation of naturally fractured reservoirs with semi-implicit source terms, *Soc. Petrol. Eng. J.*, **17**, No. 3, pp. 201–10.
Runchal, A. K. and Wolfstein, M. (1969). Numerical integration procedure for steady state Navier–Stokes equations, *J. Mech. Eng. Sci.*, **11**, No. 5, pp. 445–53.
Saul'jev, V. K. (1964). *Integration of Equations of Parabolic Type by the Method of Nets*, Pergamon Press, London.
Schaefer, M. (1973). *A Mathematical Theory of Global Program Optimization*, Prentice-Hall, New Jersey.
Schechter, S. (1960). Quasi-tridiagonal matrices and type-insensitive difference equations, *Quart. Appl. Math.*, **18**, pp. 285–95.
Schechter, R. S. (1967). *The Variational Method in Engineering*, McGraw-Hill, New York.
Scheidegger, A. E. (1974). *Physics of Flow Through Porous Media*, 3rd edn., University of Toronto Press, Toronto.
Schilthuis, R. J. (1936). Active oil and reservoir energy, *Trans. SPE of AIME*, **118**, pp. 33–52.
Schlichting, H. (1968). *Boundary Layer Theory*, 6th edn., McGraw-Hill, New York.
Schneider, G. E., Strong, A. B. and Yovanovich, M. M. (1975). Finite difference modelling of the heat conduction equation in general orthogonal coordinates using Taylor series expansion: in *Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations*, ed. R. Vichnevetsky, AICA, Belgium.
Schwarz, H. R. (1968). *Numerik Symmetrischen Matrizen*, Springer-Verlag, Berlin (in German).
Seth, M. S. (1974). A semi-implicit method for simulating reservoir behaviour, *SPE* 4979, 49*th Annual Fall Meeting*, Houston.
Settari, A. and Aziz, K. (1972). Use of irregular grid in reservoir simulation, *Soc. Petrol. Eng. J.*, **12**, No. 2, pp. 103–14.
Settari, A. (1973). Numerical simulation of three-phase coning in petroleum reservoirs, *Ph.D. Thesis*, The University of Calgary, Calgary.
Settari, A. and Aziz, K. (1973). A generalization of the additive correction methods for the iterative solution of matrix equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, **10**, No. 3, pp. 506–21.
Settari, A. and Aziz, K. (1974). Use of irregular grid in cylindrical coordinates, *Trans. SPE of AIME*, **257**, pp. 396–412 (SPEJ).
Settari, A. and Aziz, K. (1974a). A computer model for two phase coning simulation, *Soc. Petrol. Eng. J.*, **14**, No. 3, pp. 221–36.
Settari, A. and Aziz, K. (1975). Treatment of nonlinear terms in the numerical solution of partial differential equations for multiphase flow in porous media, *Int. J. Multiphase Flow*, **1**, pp. 817–44.
Settari, A., Price, H. S. and Dupont, T. (1977). Development and application of variational methods for simulation of miscible displacement in porous media, *Soc. Petrol. Eng. J.*, **17**, No. 3, pp. 228–46.
Shacham, M. and Kehat, E. (1976). A direct method for the solution of large sparse systems of linear equations, *Compt. J.*, **10**, No. 4, pp. 353–9.

Sheffield, M. (1969). Three phase flow including gravitational, viscous, and capillary forces, *Trans. SPE of AIME*, **246**, pp. 255–69 (SPEJ).
Sheffield, M. (1970). A non-iterative technique for solving parabolic partial differential equation problems, *SPE* 2803, *2nd Symposium on Numerical Simulation of Reservoir Performance*, Dallas.
Sheldon, J. W., Zondek, B. and Cardwell, W. T. (1959). One-dimensional, incompressible, non-capillary, two-phase fluid flow in a porous medium, *Trans. SPE of AIME*, **216**, pp. 290–6.
Shutler, N. D. (1969). Numerical, three-phase simulation of the linear steamflood process, *Trans. SPE of AIME*, **246**, pp. 232–46 (SPEJ).
Sigmund, P. M. (1976). Prediction of molecular diffusion at reservoir conditions. Part II. Estimating the effects of molecular diffusion and convective mixing in multicomponent systems, *J. Can. Petrol. Technol.*, **15**, No. 3, pp. 53–62.
Slater, G. E. and Durrer, E. J. (1971). Adjustment of reservoir simulation models to match field performance, *Trans. SPE of AIME*, **251**, pp. 295–305 (SPEJ).
Smith, G. D. (1965). *Numerical Solution of Partial Differential Equations with Exercises and Worked Solutions*, Oxford University Press, New York.
Snell, R. W. (1962). Three-phase relative permeability in unconstituted sand, *J. Inst. Petrol.*, **84**, pp. 80–8.
Soave, G. (1972). Equilibrium constants from a modified Redlich–Kwong equation of state, *Chem. Eng. Sci.*, **27**, pp. 1197–203.
Sobocinski, D. P. and Cornelius, A. J. (1965). A correlation for predicting water coning time, *Trans. SPE of AIME*, **234**, pp. 594–600 (JPT).
Sokolnikoff, I. S. (1951). *Tensor Analysis: Theory and Application*, J. Wiley & Sons, New York.
Sonier, F., Besset, P. H. and Ombret, R. (1973). A numerical model of multiphase flow around a well, *Soc. Petrol. Eng. J.*, **13**, No. 6, pp. 311–20.
Sonier, F. and Chaumet, P. (1974). A fully implicit three-dimensional model in curvilinear coordinates, *Trans. SPE of AIME*, **257**, pp. 361–70 (SPEJ).
Spillette, A. G., Hillestad, J. G. and Stone, H. L. (1973). A high-stability sequential solution approach to reservoir simulation, *SPE* 4542, *48th Annual Fall Meeting*, Las Vegas.
Spivak, A. and Coats, K. H. (1970). Numerical simulation of coning using implicit production terms, *Trans. SPE of AIME*, **249**, pp. 257–67 (SPEJ).
Spivak, A. and Dixon, T. N. (1973). Simulation of gas condensate reservoirs, *SPE* 4271, *3rd Symposium on Numerical Simulation of Reservoir Performance*, Houston.
Spivak, A. (1974). Gravity segregation in two phase processes, *Trans. SPE of AIME*, **257**, pp. 619–32 (SPEJ).
Spivak, A., Perryman, T. L. and Norris, R. A. (1975). A compositional simulation study of the Sacroc Unit CO_2 Project, *9th World Petrol. Congress Proceedings*, Tokyo, **4**, Applied Science Publishers, London, pp. 187–200.
Spivak, A., Price, H. S. and Settari, A. (1977). Solution of the equations for multidimensional two phase immiscible flow by variational methods, *Soc. Petrol. Eng. J.*, **17**, No. 1, pp. 27–41.
Staggs, H. M. and Herbeck, E. F. (1971). Reservoir simulation models—An engineering overview, *J. Petrol. Technol.*, **23**, pp. 1428–36.
Steen, H. D. and Farouq Ali, S. M. (1971). Comparative evaluation of the strongly implicit procedure (SIP) for gas reservoir simulation, *J. Can. Petrol. Technol.*, **10**, No. 4, pp. 35–9.
Stensen, R. J. and Sheffield, M. (1973). Reservoir simulation of a collapsing gas saturation requiring areal variation in bubble-point pressure, *SPE* 4275, *3rd Symposium on Numerical Simulation of Reservoir Performance*, Houston.
Stone, H. L. and Garder, A. O., Jr. (1961). Analysis of gas-cap or dissolved-gas reservoirs, *Trans. SPE of AIME*, **222**, pp. 92–104 (SPEJ).
Stone, H. L. (1968). Iterative solution of implicit approximations of multi-

dimensional partial differential equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, **5**, No. 3, pp. 530–58.

Stone, H. L. (1970). Probability model for estimating three-phase relative permeability, *Trans. SPE of AIME*, **249**, pp. 214–18 (JPT).

Stone, H. L. (1973). Estimation of three-phase relative permeability and residual oil data, *J. Can. Petrol. Technol.*, **12**, No. 4, pp. 53–61.

Stright, D. S., Jr. (1973). Grand Forks—Modelling a three-dimensional reservoir with two-dimensional reservoir simulators, *J. Can. Petrol. Technol.*, **12**, No. 4, pp. 46–52.

Stright, D. H., Jr., Aziz, K., Settari, A. and Starratt, F. (1977). Carbon dioxide injection into bottom-water, undersaturated viscous oil reservoirs, *J. Petrol. Technol.*, **29**, pp. 1248–58.

Suarez, A. and Farouq Ali, S. M. (1976). A comparative evaluation of different versions of the strongly implicit procedure (SIP), *4th Symposium on Numerical Simulation of Reservoir Performance*, Los Angeles.

Tang, I. C. (1969). A simple algorithm for solving linear equations of a certain type, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Heft **8**, Band 49, S. 508.

Taussky, O. (1949). A recurring theorem on determinants, *Amer. Math. Monthly*, **56**, pp. 672–5.

Telkov, A. O. (1971). Solution of static problems in coning with account of changes in thickness of the oil-saturated portion of a formation, *Neft. Khoz.* **49**, No. 1, pp. 34–7 (in Russian).

Thomas, L. K., Katz, D. L. and Tek, M. R. (1968). Threshold pressure phenomena in porous media, *Trans. SPE of AIME*, **243**, pp. 174–84 (SPEJ).

Thomas, L. K. and Hellums, L. J. (1972). A non linear automatic history matching technique for reservoir simulation models, *Trans. SPE of AIME*, **253**, pp. 508–14 (SPEJ).

Thomas, L. K., Lumpkin, W. B. and Reheis, G. M. (1976). Reservoir simulation of variable bubble-point problems, *Trans. SPE of AIME*, **261**, pp. 10–16 (SPEJ).

Thurnau, D. H. (1963). Algorithm 195, BANDSOLVE, *Comm. ACM*, **6**, No. 8, p. 441.

Tinney, W. F. and Walker, J. W. (1967). Direct solutions of sparse network equations by optimally ordered triangular factorization, *IEEE Proc.*, **55**, pp. 1801–9.

Todd, J. (1962). *Survey of Numerical Analysis*, McGraw-Hill, New York.

Todd, M. R. and Longstaff, W. J. (1972). The development, testing and application of a numerical simulator for predicting miscible flood performance, *Trans. SPE of AIME*, **253**, pp. 874–82 (JPT).

Todd, M. R., O'Dell, P. M. and Hirasaki, G. J. (1972). Methods for increased accuracy in numerical reservoir simulators, *Trans. SPE of AIME*, **253**, pp. 515–30 (SPEJ).

Toronyi, R. M. and Farouq Ali, S. M. (1974). Determining interblock transmissibility in reservoir simulators, *J. Petrol. Technol.*, **26**, No. 1, pp. 77–8.

Traylor, C. and Sheffield, M. (1971). The comparable efficiency of mathematical techniques used in reservoir simulation, *SPE* 3560, *46th Annual Fall Meeting*, New Orleans.

Trimble, R. H. and McDonald, A. E. (1976). A strongly coupled, implicit well coning model, *SPE* 5738, *4th Symposium on Numerical Simulation of Reservoir Performance*, Los Angeles.

Van-Quy, N., Simandoux, P. and Corteville, J. (1972). A numerical study of diphasic multicomponent flow, *Trans. SPE of AIME*, **253**, pp. 171–84 (SPEJ).

Van Everdingen, A. F. and Hurst, W. (1949). Application of the Laplace transformation to flow problems in reservoirs, *Trans. SPE of AIME*, **186**, pp. 305–24.

Van Leer, B. (1977). Towards the ultimate conservative difference scheme. IV. A new approach to numerical convection, *J. Compt. Phys.*, **23**, pp. 276–99.

Van Poollen, H. K., Breitenbach, E. A. and Thurnau, D. H. (1968). Treatment of individual wells and grids in reservoir modelling, *Soc. Petrol. Eng. J.*, **8**, No. **4**, pp. 341–6.

Varga, R. S. (1962). *Matrix Iterative Analysis*, Prentice-Hall, New York.
Vela, S., Peaceman, D. W. and Sandvik, E. I. (1976). Evaluation of polymer flooding in a layered reservoir with crossflow, retention, and degradation, *Soc. Petrol. Eng. J.*, **16**, No. 2, pp. 82–96.
Vinsome, P. K. W. (1976). Orthomin, an iterative method for solving sparse banded sets of simultaneous linear equations, *SPE* 5279, *4th Symposium on Numerical Simulation of Reservoir Performance*, Los Angeles.
Von Rosenberg, D. U. (1969). *Methods for the Numerical Solution of Partial-Differential Equations*, American Elsevier, New York.
Wachspress, E. L. and Habetler, G. J. (1960). An alternating-direction-implicit iteration technique, *J. SIAM*, **8**, pp. 403–24.
Wachspress, E. L. (1962). Optimum alternating-direction iteration parameters for a model problem, *J. SIAM*, **10**, pp. 339–50.
Wachspress, E. L. (1966). *Iterative Solution of Elliptic Systems*, Prentice-Hall, New Jersey.
Wallis, J. and Aziz, K. (1975). Some aspects of the computer modelling of pollution from an atmospheric source, *J. Can. Petrol. Technol.*, **14**, No. 1, pp. 21–5.
Warner, H. R., Jr. (1977). An evaluation of miscible CO_2 flooding in waterflooded sandstone reservoirs, *J. Petrol. Technol.*, **29**, pp. 1339–48.
Warren, J. E. and Root, P. J. (1963). The behaviour of naturally fractured reservoirs, *Trans. SPE of AIME*, **228**, pp. 245–55 (SPEJ).
Warren, J. E. and Cosgrove, J. J. (1964). Prediction of waterflood behavior in a stratified system, *Trans. SPE of AIME*, **231**, pp. 149–57 (SPEJ).
Wasserman, M. L. and Emanuel, A. S. (1976). History matching three dimensional models using optimal control theory, *J. Can. Petrol. Technol.*, **15**, No. 4, pp. 70–7.
Wattenbarger, R. A. and Ramey, H. J. (1968). Gas well testing with turbulence, damage and wellbore storage, *Trans. SPE of AIME*, **243**, pp. 877–87 (JPT).
Wattenbarger, R. A. and Thurnau, D. H. (1976). Application of SSOR to three-dimensional reservoir problems, *SPE* 5728, *4th Symposium on Numerical Simulation of Reservoir Performance*, Los Angeles.
Watts, J. W. (1971). An iterative matrix solution method suitable for anisotropic problems, *Trans. SPE of AIME*, **251**, pp. 47–51 (SPEJ).
Watts, J. W. (1972). Private communication.
Watts, J. W. (1973). A method for improving line successive overrelaxation in anisotropic problems—A theoretical analysis, *Trans. SPE of AIME*, **255**, pp. 105–18 (SPEJ).
Watts, J. W. and Huang, H. Y. (1976). An approximate three dimensional reservoir simulation model, *SPE* 6103, *51st Annual Fall Technical Conference and Exhibition*, New Orleans.
Weaver, R. H. (1972). Simulation of waterflood behavior in a reservoir previously invaded by water, *J. Petrol. Technol.*, **24**, pp. 909–15.
Weinstein, H. G., Stone, H. R. and Kwan, T. V. (1969). Iterative procedure for solution of parabolic and elliptic equations in three dimensions, *Ind. Eng. Chem. Fund.*, **8**, pp. 281–7.
Weinstein, H. G., Stone, H. L. and Kwan, T. V. (1970). Simultaneous solution of multiphase reservoir flow equations, *Soc. Petrol. Eng. J.*, **16**, No. 2, pp. 99–110.
Welge, H. J. (1949). Displacement of oil from porous media by water or gas, *Trans. SPE of AIME*, **179**, pp. 133–45.
Welge, H. and Weber, A. G. (1964). Use of two-dimensional methods for calculating well coning behavior, *Trans. SPE of AIME*, **231**, pp. 344–55 (SPEJ).
West, W. J., Garvin, W. W. and Sheldon, S. W. (1954). Solution of the equations of unsteady state two-phase flow in oil reservoirs, *Trans. SPE of AIME*, **201**, pp. 217–29.
Westlake, J. R. (1968). *A Handbook of Numerical Matrix Inversion and Solution of Linear Equations*, John Wiley & Sons, New York.
Whitaker, S. (1966). The equations of motion in porous media, *Chem. Eng. Sci.*, **21**,

pp. 291–300.
Whitaker, S. (1967). Diffusion and dispersion in porous media, *A.I.Ch.E. J.*, **13**, No. 3, pp. 420–7.
Whitaker, S. (1969). Advances in theory of fluid motion in porous media, *Indust. and Engineering Chemistry*, **61**, No. 12, pp. 14–28.
Wilkinson, J. H. (1963). *Rounding Errors in Algebraic Processes*, Prentice-Hall, New Jersey.
Wilkinson, J. H. and Reinsch, C. (1971). *Linear Algebra Handbook for Automatic Computation*, Vol. **2**, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzelldarstellungen, Band. **186**, Springer-Verlag, New York.
Wilson, G. M. (1969). A modified Redlich–Kwong equation of state, application to general physical data calculations, Paper 15C, 65*th National A.I.Ch.E. Meeting*, Cleveland.
Wilson, E. A. (1975). A special version of the Crout reduction for variable bandwidth matrices, *Summer Computer Simulation Conference*, San Francisco, pp. 104–12.
Woo, P. T., Roberts, S. J. and Gustavson, F. G. (1973). Application of sparse matrix techniques in reservoir simulation, *SPE* 4544, 48*th Annual Fall Meeting*, Las Vegas.
Woo, P. T. and Emanuel, A. S. (1976). A block successive overrelaxation method for coupled equations, *SPE* 6106, 51*st Annual Fall Technical Conference and Exhibition*, New Orleans.
Woods, E. G. and Khurana, A. K. (1977). Pseudofunctions for water coning in a three dimensional reservoir simulator, *Soc. Petrol. Eng. J.*, **17**, No. 4, pp. 251–62.
Wright, D. E. (1968). Nonlinear flow through granular media, *J. Hydraulics Division, Proc. Amer. Soc. Civ. Engrs.*, **94**, pp. 851–72.
Yamamoto, R. H., Ford, W. T., Padgett, J. B. and Boubeguira, A. (1971). Compositional reservoir simulator for fissured systems—The single block model, *Soc. Petrol. Eng. J.*, **11**, No. 2, pp. 113–28.
Yanenko, N. N. (1971). *The Method of Fractional Steps*, Springer-Verlag, New York.
Yanosik, J. L. and McCracken, T. A. (1976). A nine-point finite difference reservoir simulator for realistic prediction of unfavourable mobility ratio displacements, *SPE* 5734, 4*th Symposium on Numerical Simulation of Reservoir Performance*, Los Angeles.
Young, D. M. (1971). *Iterative Solution of Large Linear Systems*, Academic Press, New York.
Young, D. M. and Gregory, R. T. (1973). *A Survey of Numerical Mathematics*, **1**, and **2**, Addison-Wesley, Mass.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5
Условные обозначения 7

Глава 1.

Введение

1.1. Что такое машинная модель? 12
1.1.1. Математическая модель 12
1.1.2. Численная модель 13
1.1.3. Машинная модель 13
1.2. Другие модели 13
1.3. На какие вопросы может ответить машинная модель? 14
1.4. Заключительные замечания 15

Глава 2.

Уравнения фильтрации флюидов

2.1. Введение 16
2.2. Закон сохранения массы 17
2.2.1. Однофазная фильтрация 17
2.2.2. Многофазная фильтрация 19
2.3. Закон Дарси 21
2.3.1. Однофазная фильтрация 21
2.3.2. Многофазная фильтрация 22
2.4. Основные уравнения фильтрации 22
2.4.1. Однофазная фильтрация 23
2.4.2. Многофазная фильтрация 25
2.4.3. Использование псевдопотенциала 26
2.4.4. Граничные условия 26
2.5. Другие формы уравнений многофазной фильтрации 27
2.5.1. Представление в параболической форме 27
2.5.2. Представление в гиперболической форме 29
2.6. Уравнения фильтрации, не подчиняющейся закону Дарси . . . 32
2.6.1. Большие скорости фильтрации (инерционные и турбулентные эффекты) 32
2.6.2. Пороговые явления и явления проскальзывания 33
2.6.3. Неньютоновская фильтрация 34
2.6.4. Другие эффекты 34
2.7. Свойства флюидов и породы 34
2.7.1. Свойства флюидов 35
2.7.2. Свойства породы 36
2.8. Заключительные замечания 43
Упражнения 43

Глава 3.

Одномерная однофазная фильтрация

3.1. Введение 47
3.2. Конечно-разностные аппроксимации 48
3.2.1. Дискретизация по пространству 49

3.2.2. Дискретизация во времени 54
3.2.3. Погрешности дискретизации 56
3.3. Другие избранные методы 63
3.3.1. Явные методы 63
3.3.2. Другие неявные методы 64
3.3.3. Методы с использованием системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ODE-методы) 65
3.3.4. Сравнение методов 69
3.4. Типы сеток и граничные условия 70
3.4.1. Два способа построения сетки 71
3.4.2. Граничные условия 72
3.5. Дискретизация уравнений одномерного течения флюидов в декартовых координатах 76
3.5.1. Разностные уравнения для неравномерной сетки 76
3.5.2. Разностные уравнения в матричной форме 81
3.5.3. Учет переменных коэффициентов 83
3.6. Дискретизация одномерных уравнений фильтрации в радиальных цилиндрических координатах 85
3.6.1. Разностные уравнения для неравномерной сетки 87
3.6.2. Разностные уравнения в матричной форме 90
3.6.3. Учет переменных коэффициентов 90
3.7. Некоторые свойства конечно-разностных уравнений 91
3.7.1. Существование решения и материальный баланс 91
3.7.2. Учет нелинейностей 96
3.8. Выводы 103
Упражнения 103

Глава 4.

Решение систем уравнений с трехдиагональными матрицами

4.1. Введение 109
4.2. Методы решения 110
4.2.1. Алгоритм Томаса 110
4.2.2. Алгоритм Танга 113
4.2.3. Решение систем уравнений с симметричными трехдиагональными матрицами 114
4.2.4. Специальные случаи существования неединственного решения 116
4.2.5. Другие специальные случаи 117
Упражнения 117

Глава 5.

Одномерная многофазная фильтрация

5.1. Введение 121
5.2. Метод совместного решения 122
5.2.1. SS-метод для двухфазной фильтрации 122
5.2.2. Использование SS-метода при расчетах трехфазной фильтрации 126
5.2.3. Другие формулировки SS-метода 128
5.3. Метод, неявный по давлению, явный по насыщенности (IMPES-метод) 130
5.3.1. IMPES-метод для случая трехфазной фильтрации . . . 130
5.3.2. Другие варианты IMPES-метода 132
5.4. Анализ SS- и IMPES-методов 133
5.4.1. Устойчивость решений 133
5.4.2. Существование и единственность решения 140
5.4.3. Сходимость решений 143

5.5. Учет нелинейностей 144
5.5.1. Взвешивание проводимостей 145
5.5.2. Аппроксимация проводимостей во времени 149
5.5.3. Нелинейность, обусловленная функцией P_c 160
5.5.4. Просачивание газа 161
5.6. Метод последовательного решения (SEQ-метод) 163
5.6.1. SEQ-метод при двухфазной фильтрации 163
5.6.2. Другие формы и способы получения уравнений SEQ-метода 167
5.6.3. Численные результаты 168
5.6.4. SEQ-метод в случае трехфазной фильтрации 171
5.6.5. Выводы 174
5.7. Учет членов отбора 174
5.7.1. Дифференциальная форма граничных условий 175
5.7.2. Дискретизация граничных условий 178
Упражнения 182

Глава 6.

Решение систем уравнений с блочно-трехдиагональными матрицами

6.1. Введение 189
6.2. Методы решения 190
6.2.1. Обобщение алгоритма Томаса 190
6.2.2. Применение методов, используемых для ленточных матриц . 192

Глава 7.

Однофазная двумерная фильтрация

7.1. Введение 193
7.2. Классификация двумерных задач 193
7.2.1. Задачи на площади с координатами x, y 193
7.2.2. Задачи для вертикального сечения с координатами x, z . . 194
7.2.3. Задача с одной скважиной в координатах r, z 195
7.2.4. Комментарии к двумерным моделям 196
7.3. Дискретизация уравнений фильтрации 196
7.3.1. Разностные аппроксимации 197
7.3.2. Устойчивость разностных схем 199
7.4. Граничные условия 200
7.4.1.Границы «без расхода» (непроницаемые границы) 200
7.4.2. Границы «с расходом» 201
7.4.3. Дискретизация граничных условий 201
7.5. Начальные условия 204
7.6. Учет нелинейностей 205
7.7. Учет давления в отдельных скважинах 205
7.8. Уравнения в матричной форме 210
7.9. Специальные методы для двумерных задач 210
7.9.1. Явные методы переменных направлений (ADE-методы) . . 211
7.9.2. Неявный метод переменных направлений (ADE-метод) и связанные с ним методы 213
7.9.3. Сравнение методов 216
7.10. Способы построения сеток 216
7.10.1. Неравномерные двумерные сетки 217
7.10.2. Использование криволинейной сетки 218
7.11. Заключительные замечания 222
Упражнения 222

Глава 8.

Решение систем уравнений с пятидиагональными матрицами

8.1. Введение 225
8.2. Прямые методы решения 228
8.2.1. LU-разложение матрицы 228
8.2.2. Упорядочение уравнений 231
8.2.3. Методы для разреженных матриц 232
8.3. Итерационные методы 236
8.3.1. Поточечный метод Якоби 238
8.3.2. Поточечный метод Гаусса — Зейделя 240
8.3.3. Поточечный метод верхней релаксации (SOR-метод) . . 240
8.3.4. Линейный и блочный SOR-методы 242
8.3.5. Методы аддитивной коррекции 243
8.3.6. Итерационные неявные методы переменных направлений (ADI-методы) 246
8.3.7. Строго неявный метод 250
8.3.8. Другие методы 253
8.3.9. Сравнение итерационных методов 254
8.3.10. Практические выводы об использовании итерационных методов 258
8.4. Сравнение итерационных и прямых методов 261
8.5. Заключительные замечания 264
Упражнения 264

Глава 9.

Многофазная двумерная фильтрация

9.1. Введение 269
9.2. Классификация двумерных задач 269
9.2.1. Площадные задачи (x—y) 269
9.2.2. Профильные задачи (x—z) 270
9.2.3. Задачи с одиночной скважиной (r—z) 271
9.2.4. Общие замечания 272
9.3. Методы решения и их сравнение 273
9.3.1. Дискретизация в двумерном случае 273
9.3.2. Устойчивость решений SS и IMPES-методов при двумерной фильтрации 274
9.3.3. Сравнение различных методов решения уравнений . . . 277
9.4. Граничные условия 281
9.4.1. Дифференциальная постановка 281
9.4.2. Условия совместимости и ограничения 283
9.4.3. Конечно-разностная формулировка граничных условий . . 283
9.5. Начальные условия 287
9.6. Моделирование водоносных пластов 288
9.7. Моделирование площадных и профильных задач 291
9.7.1. Использование криволинейной сетки 291
9.7.2. Учет отдельных скважин 293
9.7.3. Явления, связанные с ориентацией сетки 295
9.8. Моделирование задач с одиночной скважиной 299
9.8.1. Учет членов отбора (модель скважины) 300
9.8.2. Сопоставление устойчивости решения и эффективности различных способов учета проводимостей 305
9.8.3. Практические соображения 307
9.9. Заключительные замечания 309

Глава 10.

Решение уравнений с блочно-пятидиагональными матрицами

10.1. Введение 311
10.2. Прямые методы 312
10.3. Итерационные методы 313
10.3.1. Метод BSOR 313
10.3.2. Итерационный метод ADI 314
10.3.3. Метод SIP 315
10.3.4. Сравнение результатов итерационных методов 315
10.4. Сравнение результатов итерационных и прямых методов . . . 316
10.5. Заключительные замечания 316

Глава 11.

Трехмерные задачи и методы их решения

11.1. Введение 318
11.2. Однофазная фильтрация 318
11.2.1. Основное уравнение и его дискретизация 318
11.2.2. Специальные методы для решения трехмерных задач . . 320
11.2.3. Прямые методы решения 322
11.2.4. Итерационные методы 324
11.2.5. Сравнение методов 329
11.3. Многофазная фильтрация 331
11.3.1. Основные методы решения и необходимые машинные затраты 331
11.3.2. Методы решения матричных уравнений 332
11.4. Заключительные замечания 332

Глава 12.

Специальные вопросы

12.1. Введение 335
12.2. Псевдофункции 335
12.2.1. Модель вертикального равновесия (Коутс и др., 1971) . . 336
12.2.2. Другие псевдофункции 339
12.3. Метод трубок тока и связанные с ним модели 341
12.4. Моделирование задач с переменным давлением насыщения . . 342
12.5. Моделирование систем, не описываемых с помощью моделей нелетучей нефти 346
12.5.1. Моделирование «смешивающегося» вытеснения 347
12.5.2. Моделирование композиционных эффектов 350
12.6. Функции от насыщенности, зависящие от истории процесса разработки 352
12.6.1. Физическая модель гистерезиса 352
12.6.2. Учет гистерезиса в численных расчетах 354
12.7. Моделирование трещиноватых пластов 356
12.8. Автоматический выбор временного шага 358
12.9. Заключительные замечания 360

Глава 13.

Практические соображения

13.1. Разработка программ 361
13.1.1. Разработка математической модели 361
13.1.2. Разработка численной модели 362

13.1.3. Разработка машинной модели (программы) 362
13.2. Использование программ 367
13.2.1. Этапы модельного исследования 367
13.2.2. Выбор и разработка модели 369
13.2.3. Подгонка параметров модели по истории разработки . . 373
13.3. Заключительные замечания 376
Приложение А. Элементы матричной алгебры 377
А.1. Введение 377
А.2. Основные понятия 377
А.2.1. Поле 377
А.2.2. Вектор 377
А.2.3. Линейные векторные пространства 378
А.2.4. Системы линейных уравнений. Матрицы 379
А.2.5. Определитель матрицы 380
А.2.6. Собственные значения и собственные векторы 381
А.2.7. Нормы векторов и матриц 381
А.2.8. Дополнительные определения 382
А.3. Некоторые фундаментальные теоремы 384
Список литературы 386

Халид Азиз
Энтонин Сеттари

Математическое моделирование пластовых систем

Художественный редактор В. В. Шутько
Технический редактор Л. Н. Шиманова
Корректоры Е. В. Мухина, К. С. Торопцева

Подписано в печать 31.05.04. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Печать офсетная. Бумага офсетная №1.
Усл. печ. л. 24,18. Уч. изд. л. 24,56.
Гарнитура Таймс. Тираж 700 экз. Заказ №

АНО «Институт компьютерных исследований»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.
http://rcd.ru E-mail: borisov@rcd.ru

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов в ОАО «Дом печати-Вятка».
610033, г. Киров, ул. Московская, 122.