
Г. ДЕЧ

Руководство
к практическому
применению
преобразования
Лапласа
и Z-преобразования

Физико-
Математическая
Библиотека
Инженера

Г. ДЁЧ

РУКОВОДСТВО К ПРАКТИЧЕСКОМУ ПРИМЕНЕНИЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА И Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

С ПРИЛОЖЕНИЕМ ТАБЛИЦ,
СОСТАВЛЕННЫХ Р. ГЕРШЕЛЕМ

ПЕРЕВОД С ТРЕТЬЕГО НЕМЕЦКОГО ИЗДАНИЯ
Г. А. ВОЛЬПЕРТА
С ПРЕДИСЛОВИЕМ Я. З. ЦЫПКИНА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1971

517.2
D 39
УДК 512.98

ANLEITUNG
ZUM PRAKTISCHEN GEBRAUCH
DER LAPLACE-TRANSFORMATION
UND DER Z-TRANSFORMATION

VON
GUSTAV DOETSCH

ord. Professor an der Universität Freiburg i. B.

MIT EINEM TABELLENANHANG VON
RUDOLF HERSCHEL

Dritte, neu bearbeitete Auflage

R. OLDENBOURG, MÜNCHEN, WIEN 1967

Густав Дёч

Руководство к практическому применению преобразования Лапласа
и Z-преобразования

(Серия «Физико-математическая библиотека инженера»)

М., 1971 г., 288 стр. с илл.

Редакторы *И. М. Овчинникова, Л. Я. Цлаф*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно*

Корректор *Н. Д. Дорохова*

Сдано в набор 1/II 1971 г.	Подписано к печати 14/VII 1971 г.	Бумага 60×90 ¹ / ₁₆ .
Физ. печ. л. 18.	Условн. печ. л. 18.	Тираж 18 500 экз.
Цена книги 1 р. 40 к.	Заказ 1021	

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР, Измайловский проспект, 29.

2-2-3

68-71

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому переводу	7
Из предисловия автора ко второму изданию	8
Предисловие автора к третьему изданию	9
Глава 1. Определение преобразования Лапласа	11
§ 1. Спектральное представление функций посредством ряда Фурье и интеграла Фурье	11
§ 2. Интеграл Лапласа и его физический смысл	25
§ 3. Некоторые свойства функций, получаемых из интеграла Лапласа. Примеры	28
§ 4. Интеграл Лапласа как преобразование	33
Глава 2. Правила выполнения операций при преобразовании Лапласа	38
§ 5. Отображение операций	38
§ 6. Линейные подстановки	39
§ 7. Дифференцирование	41
§ 8. Интегрирование	44
§ 9. Умножение и свертывание	45
Глава 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения	50
§ 10. Дифференциальное уравнение первого порядка	50
§ 11. Дифференциальное уравнение второго порядка	54
§ 12. Неоднородное дифференциальное уравнение n -го порядка с начальными значениями, равными нулю	61
§ 13. Отклики на специальные виды возбуждения	70
1. Отклик на единичный скачок (переходная функция)	70
2. Отклик на импульсное возбуждение	74
3. Частотная характеристика	76
§ 14. Однородное дифференциальное уравнение n -го порядка с произвольными начальными значениями. Собственные колебания	80
§ 15. Нормальная система совместных дифференциальных уравнений с любыми выполнимыми начальными условиями	85
§ 16. Аномальная система совместных дифференциальных уравнений с выполнимыми начальными условиями	95
§ 17. Аномальная система совместных дифференциальных уравнений с невыполнимыми начальными условиями. Решение посредством распределений	99
§ 18. Приведение системы дифференциальных уравнений к одному уравнению для одной неизвестной путем исключения остальных неизвестных (способ, принятый в технике)	103
§ 19. Система дифференциальных уравнений со структурой, различной в отдельных интервалах	106

§ 20. Система уравнений для электрической цепи	110
§ 21. Начальные значения для аномального случая уравнений электрической цепи	116
§ 22. Нелинейные дифференциальные уравнения	123
Глава 4. Уравнения в частных производных	127
§ 23. Общие указания о применении преобразования Лапласа к уравнениям в частных производных	127
§ 24. Уравнение теплопроводности	132
1. Начальная температура равна нулю, граничные температуры произвольны	135
2. Начальная температура произвольна, граничные температуры равны нулю	139
§ 25. Система уравнений для двухпроводной электрической линии с распределенными параметрами	141
Глава 5. Интегральные уравнения и интегральные соотношения	152
§ 26. Интегральные уравнения типа свертки	152
§ 27. Интегральные соотношения	156
Глава 6. Вычисление оригинала по изображению	159
§ 28. Комплексный интеграл, осуществляющий обратное преобразование Лапласа	159
§ 29. Разложение в ряды	163
1. Разложение в степенные ряды	164
2. Разложение в ряды по показательным функциям	166
3. Разложение в ряды по любым функциям	172
§ 30. Численное определение оригинала	176
§ 31. Определение максимума оригинала по известному изображению	179
Глава 7. Асимптотическое поведение функций и исследование устойчивости	182
§ 32. Некоторые теоремы о предельных значениях	182
§ 33. Общие понятия об асимптотическом представлении и асимптотическом разложении функций	184
§ 34. Асимптотическое разложение изображения	187
§ 35. Асимптотическое разложение оригинала	189
§ 36. Исследование устойчивости	195
Глава 8. З-преобразование и его применения	200
§ 37. Переход от преобразования Лапласа через дискретное преобразование Лапласа к З-преобразованию	200
§ 38. Правила выполнения операций при З-преобразовании	206
§ 39. Две теоремы о предельных значениях	208
§ 40. Общий случай линейного разностного уравнения	209
§ 41. Разностное уравнение второго порядка	214
§ 42. Краевая задача для разностного уравнения второго порядка	217
§ 43. Система совместных разностных уравнений с начальными или граничными условиями (цепочная схема)	218
§ 44. Получение последовательности при помощи импульсного элемента. Исследование прерывных процессов посредством З- и З-преобразований	225
§ 45. Импульсные системы	234

Добавление. Распределения и их преобразование по Лапласу	247
I. Функционал, определяемый функцией	248
II Распределение	250
III. Преобразование распределений по Лапласу	255
Приложение. Таблицы для преобразования Лапласа	231
1. Операции	261
2. Рациональные функции	264
3. Иррациональные функции	271
4. Трансцендентные функции	272
5. Кусочно-гладкие оригиналы	276
6. Распределения как оригиналы	286
7. Функции и обозначения, встречающиеся в таблицах	286
Предметный указатель	287

ОБОЗНАЧЕНИЯ

j — мнимая единица;

$z = x + jy$, $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$;

$z = re^{j\varphi}$, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$;

$\bar{z} = x - jy = re^{-j\varphi}$ — сопряженная с z комплексная величина¹⁾;

$[a]$ — наибольшее целое число $\leq a$;

\triangle — знак предостережения.

Для облегчения набора в некоторых местах книги дроби обозначены не посредством горизонтальной черты, а посредством косой. Для правильного понимания такого обозначения необходимо иметь в виду следующее правило. Если посредством скобок не предусмотрен иной порядок действий, то сначала выполняется умножение, затем деление и только после умножения и деления производится сложение или вычитание. Примеры:

$$a/bc = \frac{a}{bc}, \quad a + b/c = a + \frac{b}{c},$$

$$a/b + c = \frac{a}{b} + c, \quad a/bc + d = \frac{a}{bc} + d.$$

Выражение $\frac{a}{b}$ записывается в виде $(a/b)c$, а выражения:

$$\frac{a}{b+c} \text{ в виде } a/(b+c), \quad \frac{a}{b(c+d)} \text{ в виде } a/b(c+d),$$

$$\frac{a+b}{c} \text{ в виде } (a+b)'c, \quad \frac{a}{bc+d} \text{ в виде } a/(bc+d).$$

¹⁾ В дальнейшем следует иметь в виду, что основание натуральных логарифмов обозначается прямой буквой e , а напряжение в пространстве оригиналов — курсивной буквой e . В таблице соответствий (стр. 265—290) для обозначения основания натуральных логарифмов сохранена курсивная буква e (Прим. перев.)

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ

Предлагаемая вниманию советского читателя книга принадлежит крупному математику профессору Фрейбургского университета Густаву Дёчу, принимающему в течение многих лет непосредственное участие в развитии теории преобразования Лапласа и в широком применении его для решения разнообразных задач математики и техники. Густав Дёч является также автором фундаментального трехтомного руководства по преобразованию Лапласа¹⁾ и обстоятельного учебника по теории и применению преобразования Лапласа²⁾. Эти книги пользуются широкой известностью и являются, пожалуй, единственными в мировой литературе по полноте и глубине изложения.

Настоящая книга предназначена для инженеров. Она не содержит деталей доказательств, порой опускаются и сами доказательства, но зато методы применения преобразования Лапласа к различным задачам изложены здесь с исчерпывающей полнотой³⁾. Автор очень бережно относится к формулировке теорем и правил и во многих местах наглядно иллюстрирует, как неточная, расплывчатая формулировка того или иного правила приводит при применении его к ошибочным результатам.

Несмотря на сравнительно небольшой объем книги, в ней излагается материал, обычно не содержащийся даже в более подробных и полных книгах по преобразованию Лапласа. Отметим изложение \mathcal{Z} -преобразования и его применения к импульсным системам, численного метода определения оригинала по изображению, способа определения максимума оригинала

¹⁾ Doetsch G., Handbuch der Laplace-Transformation. Том первый: Theorie der Laplace-Transformation, Birkhäuser Verlag, Basel — Stuttgart, 1950, 581 стр. Том второй: Anwendungen der Laplace-Transformation (первый раздел), Birkhäuser Verlag, 1955, 436 стр. Том третий: Anwendungen der Laplace-Transformation (второй раздел), Birkhäuser Verlag, 1956, 300 стр.

²⁾ Doetsch G., Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Birkhäuser Verlag, 1958, 304 стр.

³⁾ Все доказательства имеются в учебнике Г. Дёча, цитированном в предыдущей сноске. На русском языке почти все доказательства можно найти в книге: Гарднер М. Ф. и Бэрнс Дж. А., Переходные процессы в линейных системах, перев. с англ., Физматгиз, Москва, 1963.

по изображению и т. д. Читатель встретит в книге много интересных замечаний по поводу неточных подходов, часто встречающихся в технической литературе при решении систем дифференциальных уравнений, при использовании спектральных представлений, при исследовании устойчивости.

Большую помощь при решении конкретных задач окажет весьма продуманно составленная Р. Гершелем таблица соответствий.

Книга Г. Дёча завоевала большую популярность. Ее первое издание (1956) было переведено на русский (1958), французский (1959) и японский (1959) языки, а второе издание (1961), переработанное и дополненное, — на английский (1961), польский (1964) и русский (1965) языки.

Предлагаемый вниманию читателя русский перевод сделан с третьего издания (1967), которое существенно переработано и дополнено автором. Использование теории обобщенных функций или, по терминологии автора, теории распределений позволило значительно проще и строже изложить способы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Большое внимание уделено методу \mathcal{Z} -преобразования для решения разностных уравнений. Изложению этого метода и его применений посвящена отдельная глава. Автору удалось без заметного увеличения объема книги изложить в простой и доступной форме многие вопросы преобразования Лапласа и \mathcal{Z} -преобразования.

Без сомнения, эта книга окажет большую помощь всем, кто пожелает не только получить представление о преобразовании Лапласа, но и сделать его действенным инструментом в своей работе.

Научные работники, инженеры, аспиранты, студенты найдут много интересного и полезного в этой книге.

Я. З. Цыпкин

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Для применения преобразования Лапласа к решению технических задач необходимо знать ряд теорем, относящихся к этому преобразованию. В значительной части случаев доказательства этих теорем далеко не простые, а в некоторых случаях даже довольно кропотливые. При том большом объеме математических знаний, который необходим для современного инженера, от него нельзя требовать, чтобы он изучал также все доказательства. Часто ему не остается ничего другого, как просить математика только привести необходимые теоремы в абсолютно безупречной формулировке и гарантировать возможность их доказательства. Абсолютно безупречная формулировка теорем особенно важна, так как любая расплывчатость или недоговоренность, умалчивающая о части допущений, лежащих в основе той или другой теоремы, таит в себе опасность ее ошибочного применения.

Именно такими соображениями я руководствовался при составлении настоящей книги. Поэтому теоремы, необходимые для выполнения основных операций, постоянно применяемых на протяжении всей книги, собраны во второй главе в виде ясных и точно сформулированных «правил» и не сопровождаются никакими доказательствами. Некоторые другие теоретические положения, необходимые для понимания излагаемого материала, приводятся, по мере необходимости в соответствующих местах книги в виде точно сформулированных теорем, выделенных курсивом для того, чтобы читатель имел возможность сразу обнаружить их среди остального текста. Те из допущений, которые, как показывает опыт, при применении преобразования Лапласа часто оставляются без внимания, что приводит иногда к серьезным ошибкам, отмечены на полях посредством знака предостережения.

Конечно, некоторые положения в книге все же доказываются. Сделано это в тех случаях, когда без доказательств изложение осталось бы непонятным или когда таких доказательств нельзя найти в других книгах.

Разгрузка изложения от теоретических рассуждений позволила выдвинуть на передний план методы применения преобра-

зования Лапласа и пояснить их на большом количестве численных примеров. При этом я стремился выделить на первый план наиболее существенные особенности. Если какая-либо техническая задача математически сформулирована в виде, например, системы дифференциальных уравнений, то преобразование Лапласа указывает совершенно однозначный путь решения этой задачи независимо от того, какой физический смысл имеют величины, входящие в уравнения. Это означает, что технические задачи, совершенно не похожие одна на другую по содержанию, но приводящие после математической формулировки к одним и тем же уравнениям, могут быть решены одинаковым способом.

Во втором издании учтена связь преобразования Лапласа со спектральным представлением функций (§ 1), поскольку спектральный подход к исследованию ряда задач особенно близок инженеру. Преобразование Лапласа включает в себя идеи спектрального представления, однако выходит далеко за рамки этих идей. Подлинное значение преобразования Лапласа заключается в том, что оно преобразует функцию времени в аналитическую функцию, которую можно рассматривать как распространение спектральной плотности на комплексную плоскость. Кроме того, эта аналитическая функция передает свойства функции времени значительно более совершенным образом, чем спектральная плотность, которая, кстати, для многих встречающихся на практике функций вообще не существует.

Фрейбург
в области Брайс

Густав Дёч

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Новое издание отличается от предыдущего, если не считать многочисленных отдельных изменений, прежде всего использованием теории распределений, к чему меня побудили неоднократные просьбы инженерных кругов. Теория распределений, краткие сведения о которой даны в добавлении в конце книги, позволяет в первую очередь строго рассмотреть понятия импульса и его производных, понятия, необходимые для техники, но не укладываемые в рамки классической математики. Кроме того, использование теории распределений неизбежно при решении систем совместных дифференциальных уравнений в том наиболее частом для практики случае, когда заданные начальные условия несовместимы со структурой рассматриваемой системы, и поэтому полученные решения не могут удовлетворять этим условиям.

Во втором издании настоящей книги такой случай был исследован лишь настолько, насколько это было возможно в

рамках классической математики. Излагаемый теперь метод, о котором я впервые сообщил на заседании Научного общества авиации и космонавтики, состоявшемся 21—25 октября 1963 г. в Брауншвейге, дает возможность получать окончательные решения указанных выше систем совместных дифференциальных уравнений и притом такие решения, которые не оставляют никаких сомнений в их правильности, в то время как раньше получаемые решения приводили к многочисленным дискуссиям в инженерной литературе. Использование понятия распределения потребовало полной переработки третьей главы, посвященной обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Следующее изменение касается так называемого \mathcal{Z} -преобразования, которому в предыдущем издании, при рассмотрении разностных уравнений и импульсных систем, было уделено сравнительно мало внимания. Между тем в последние годы применение \mathcal{Z} -преобразования в технике значительно возросло, в связи с чем в настоящем издании оно выделено в специальную главу как самостоятельный метод, причем кое-что удалось изложить проще и нагляднее, чем это было сделано раньше.

Из чисто внешних изменений особо следует упомянуть, что в новом издании я присоединился к ставшей широко распространенной записи функций времени малыми буквами, а отвечающих им функций, полученных в результате преобразования Лапласа, — соответствующими большими буквами (раньше я поступал наоборот).

Г. Дёч

Фрейбург
в области Брайс

ГЛАВА I

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

§ 1. Спектральное представление функций посредством ряда Фурье и интеграла Фурье

Инженеры, а также физики особенно охотно пользуются такими математическими понятиями, которые можно связать с каким-либо наглядным представлением. К числу таких понятий принадлежит, в частности, так называемый *интеграл Лапласа*

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Для того чтобы выяснить, какой физический смысл можно придать этому интегралу, рассмотрим известное разложение вещественной функции $f(t)$, имеющей период 2π , в ряд Фурье

$$f(t) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \quad (1.1)$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos nt \, dt, \\ b_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sin nt \, dt, \end{aligned} \right\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.2)$$

Если функция $f(t)$ удовлетворяет определенным условиям, например условиям Дирихле, т. е. если она на каждом конечном интервале имеет конечное число экстремумов и конечное число разрывов первого рода (рис. 1.1), то ряд (1.1) в точках непрерывности функции $f(t)$ сходится к значению функции, а в точках разрыва — к среднему арифметическому предельных значений

функции слева и справа, т. е. к значению

$$\frac{f(t-0) + f(t+0)}{2}.$$

Введя обозначения

$$a_n = r_n \cos \varphi_n, \quad b_n = r_n \sin \varphi_n, \quad (1.3)$$

где

$$r_n = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_n = \frac{b_n}{a_n},$$

мы приведем ряд (1.1) к виду

$$f(t) = r_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos (nt - \varphi_n). \quad (1.4)$$

Если переменная t означает время, то эту формулу можно наглядно толковать как разложение периодического явления $f(t)$ (например, отклонения материальной точки, движущейся вдоль

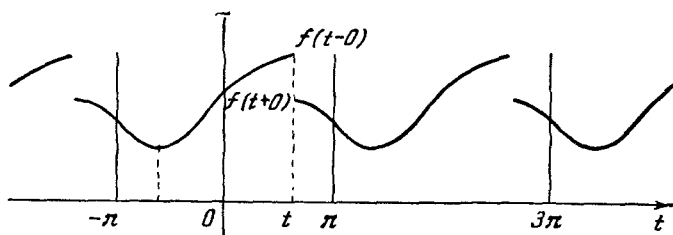


Рис. 1.1. Периодическая кусочно-непрерывная и кусочно-монотонная функция.

прямой, от некоторого центра, расположенного на этой же прямой) на сумму гармонических колебаний с целочисленными круговыми частотами $n = 1, 2, \dots$. Из этих составляющих колебаний n -е по счету имеет амплитуду $2r_n$ и начальную фазу $-\varphi_n$.

Функции, с которыми приходится иметь дело в физике, в большей части случаев удовлетворяют определенным дифференциальным уравнениям, следовательно, при вычислениях должны быть найдены производные этих функций. Однако ряды (1.1) и (1.4), рассматриваемые с этой точки зрения, обладают свойствами, усложняющими вычисления: при их дифференцировании косинусы превращаются в синусы, и наоборот. Можно избежать этих усложнений, если воспользоваться записью ряда Фурье в комплексной форме, т. е. в виде

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}. \quad (1.5)$$

Коэффициенты c_n этого ряда Фурье вычисляются по формуле¹⁾

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) e^{-jnt} dt \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (1.6)$$

Обе записи (1.1) и (1.5) в математическом отношении полностью эквивалентны, если функция $f(t)$ вещественная. В самом деле, в этом случае коэффициент c_0 также вещественный, а коэффициент $c_{-n} = \bar{c}_n$, следовательно,

$$\hat{f}(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jnt} + \bar{c}_n e^{-jnt}) = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(c_n e^{jnt}).$$

Положив в этом ряде

$$c_0 = a_0, \quad c_n = a_n - jb_n \quad (n=1, 2, \dots), \quad (1.7)$$

мы получим

$$\hat{f}(t) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

причем, согласно формуле (1.6),

$$a_n = \operatorname{Re} c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos nt dt,$$

$$b_n = -\operatorname{Im} c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sin nt dt.$$

Таким образом, при условиях (1.7) формулы (1.5) и (1.6) равносильны формулам (1.1) и (1.2).

Ряду Фурье и его комплексной форме (1.5) можно придать вид, аналогичный ряду (1.4). Для этой цели используем равенства (1.7) и (1.3). Из них следует, что

$$c_0 = r_0, \quad \varphi_0 = 0;$$

$$c_n = r_n (\cos \varphi_n - j \sin \varphi_n) = r_n e^{-j\varphi_n} \quad (n=1, 2, \dots).$$

Далее, мы имеем

$$c_{-n} = \bar{c}_n = r_n e^{j\varphi_n}.$$

¹⁾ Обратим внимание на следующее обстоятельство. В ряде (1.5) суммирование производится в отличие от ряда (1.1) не от 1 до ∞ , а от $-\infty$ до $+\infty$. Это связано с тем, что функции $\cos nt$ и $\sin nt$ с положительными целочисленными значениями $n=0, 1, 2, \dots$ образуют в промежутке $(-\pi, +\pi)$ полную ортогональную систему, в то время как ортогональная система для функции e^{jnt} будет полной только в том случае, когда n пробегает все целочисленные значения, т. е. не только положительные, но и отрицательные.

Так как $r_{-n} = r_n$, а $\varphi_{-n} = -\varphi_n$, то $c_{-n} = r_n e^{-j\varphi_n}$, и мы получим

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r_n e^{j(nt - \varphi_n)}. \quad (1.8)$$

Ряды (1.5) и (1.8) для дифференцирования удобнее рядов (1.1) и (1.4), однако они менее наглядны, чем последние, так

как дают $f(t)$ в виде суммы комплексных функций и потому не позволяют непосредственно видеть построение этой функции из вещественных гармонических колебаний. Вместо этого приходится прибегать к графическому построению в комплексной плоскости (рис. 1.2). Величина

$c_n e^{jnt} = r_n e^{j(nt - \varphi_n)}$ определяет в этой плоскости вектор, исходящий из нулевой точки, имеющий длину r_n и образующий с положительной вещественной осью угол $nt - \varphi_n$. Конец этого вектора при возрастании t описывает окружность радиуса r_n , причем при положительном n —

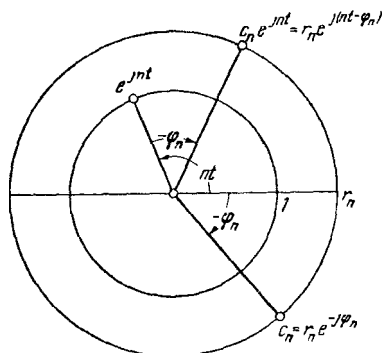


Рис. 1.2. Представление функции $c_n e^{jnt}$ в комплексной плоскости.

в направлении положительного вращения, а при отрицательном n — в направлении отрицательного вращения. Функция $f(t)$ получается посредством сложения всех этих векторов.

Однако можно вернуться опять к вещественным колебаниям $2r_n \cos(nt - \varphi_n)$, если каждый раз два вектора $c_n e^{jnt}$ и $c_{-n} e^{-jnt}$, из которых второй представляет собой зеркальное отражение первого относительно вещественной оси, складывать в один вектор, т. е. поступать так же, как мы это один раз уже сделали выше при доказательстве эквивалентности рядов (1.1) и (1.5). Тогда мы получим

$$c_n e^{jnt} + c_{-n} e^{-jnt} = 2 \operatorname{Re}(c_n e^{jnt}) = 2 \operatorname{Re}(r_n e^{j(nt - \varphi_n)}) = 2r_n \cos(nt - \varphi_n).$$

Эта операция сводится по существу к проектированию векторов $2c_n e^{jnt}$ и $2c_{-n} e^{-jnt}$ на вещественную ось. Если концы C и D обоих таких векторов \overline{OC} и \overline{OD} (рис. 1.3) будут описывать окружность радиуса $2r_n$ в противоположных направлениях, то точка F пересечения прямой, соединяющей концы C и D векторов \overline{OC} и \overline{OD} , с вещественной осью будет совершать колебания между точками $+2r_n$ и $-2r_n$ по закону $2r_n \cos(nt - \varphi_n)$.

Таким образом, складывая векторы $c_n e^{jnt}$ не в произвольном порядке, а всегда только попарно, один с индексом $+n$, а другой с индексом $-n$, мы приходим опять к представлению о вещественных колебаниях. Более того, связывая колебания точки F вдоль вещественной оси с движением точек C и D вдоль окружности в противоположных направлениях, мы получаем

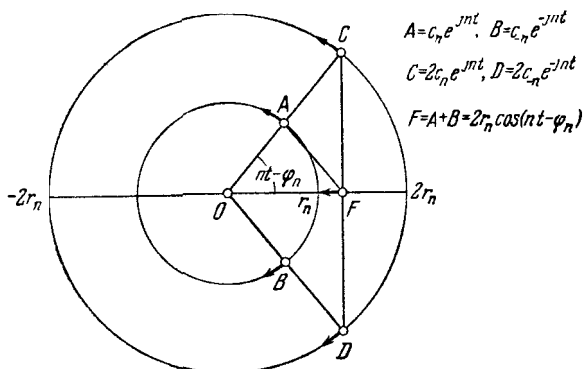


Рис. 1.3. Сложение двух векторов \overline{OA} и \overline{OB} , являющихся зеркальным отражением один другого относительно вещественной оси, в вещественный вектор \overline{OF} .

более наглядное представление о явлении, изображаемом функцией $f(t)$, чем только при рассмотрении самих колебаний вдоль вещественной оси. В самом деле, в то время как при прямолинейном движении точки вдоль вещественной оси зависимость движения от времени наглядно не видна, при движении по окружности переменная $nt - \varphi_n$ наглядно наблюдается в виде угла или дуги окружности, причем точки C и D на окружности движутся с постоянной скоростью. Движение связанной с ними точки F на вещественной оси происходит с переменной скоростью, зависящей от наклона относительно вещественной оси той дуги окружности, по которой в рассматриваемый момент времени движется точка C или D .

Формуле (1.5) можно дать и другое наглядное толкование, не связанное с представлением о колебаниях. Для этой цели поступим следующим образом. Совместим прямую, на которой располагаются значения функции $f(t)$, т. е. ту прямую, вдоль которой — если говорить на языке физики — движется материальная точка, с вещественной осью комплексной плоскости и используем в качестве составляющих, из которых складывается функция $f(t)$, не колебания $\cos nt$ и $\sin nt$, происходящие

вдоль прямой, а функции e^{jnt} ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Эти функции представляют в комплексной плоскости движение точки e^{jnt} по периферии единичного круга с круговыми частотами $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Следовательно, точка e^{jnt} обегает периферию единичного круга n раз в течение 2π единиц времени, причем в направлении положительного вращения, если частота положительная, и в направлении отрицательного вращения, если частота отрицательная.

Такое движение вокруг нулевой точки, совершаемое вдоль периферии единичного круга, можно рассматривать как комплексное колебание с положительной или отрицательной круговой частотой, в зависимости от направления движения (в электротехнике при расчетах переменного тока методом комплексных амплитуд понятие комплексного колебания используется уже давно). Подчеркнем, что отрицательные круговые частоты, не имеющие никакого смысла при колебаниях, совершающихся вдоль прямой, имеют вполне определенный смысл при комплексных колебаниях. Под амплитудой комплексного колебания следует понимать радиус окружности, а под начальной фазой — угол, под которым движущаяся по окружности точка видна в момент времени $t = 0$. Следовательно, член $c_n e^{jnt}$ ряда Фурье (1.5), где $c_n = r_n e^{-j\varphi_n}$, означает комплексное колебание с круговой частотой n , амплитудой r_n и начальной фазой $-\varphi_n$, т. е. для этого колебания

$$\text{амплитуда} = |c_n|, \text{ начальная фаза} = \arg c_n. \quad (1.9)$$

Из представления о комплексных колебаниях вытекает, что последовательность значений c_n можно назвать спектром функции $f(t)$. Эти значения указывают, какие круговые частоты фактически входят в функцию $f(t)$ ($c_n = 0$ означает, что колебание с круговой частотой n выпадает) и каковы амплитуды и начальные фазы составляющих колебаний. При таком толковании формулы (1.5) функция $f(t)$ не обязательно должна быть вещественной; теперь она может принимать также комплексные значения.

В дальнейшем мы всегда будем пользоваться представлением о комплексных колебаниях с положительными и отрицательными круговыми частотами, так как такие колебания значительно удобнее для оперирования, чем вещественные колебания. Все сказанное выше мы можем теперь подытожить следующими словами:

Для функции $f(t)$, заданной в промежутке $(-\pi, +\pi)$ и периодически продолженной за пределы этого промежутка, ее спектр c_n относительно совокупности колебаний e^{jnt} ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) определяется интегралом (1.6). Знание спектра может полностью заменить знание самой функции $f(t)$, так как

последняя может быть построена по ее спектру посредством формулы (1.5). Разложение на колебания дает наглядное представление о характере физического явления, описываемого функцией $f(t)$.

Если рассматриваемое физическое явление не периодическое, следовательно, если функция $f(t)$ как-либо задана для всех t ($-\infty < t < +\infty$), то для ее представления вместо ряда Фурье используется при определенных условиях интеграл Фурье

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(y) e^{iyt} dy, \quad (1.10)$$

причем функция $F(y)$, стоящая под знаком интеграла, определяется через $f(t)$ формулой:

$$F(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt} dt. \quad (1.11)$$

Для такого представления достаточно, чтобы интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$$

сходилсся, а сама функция $f(t)$ удовлетворяла условиям Дирихле (см. стр. 11). В точках разрыва функции $f(t)$ интеграл (1.10) сходится, как и в случае ряда Фурье, к значению

$$\frac{f(t-0) + f(t+0)}{2}.$$

Формулы (1.10) и (1.11) построены так же, как и формулы (1.5) и (1.6). Функция $F(y)$ соответствует коэффициенту c_n , но теперь вместо индекса n , пробегающего только целочисленные значения, имеется непрерывно изменяющаяся переменная y , и поэтому функция $f(t)$ определяется не суммой, а интегралом. Это означает, что функция $f(t)$ уже не может быть построена из колебаний только с целочисленными круговыми частотами; теперь для ее построения необходимы колебания *всех* частот.

Однако функцию $F(y)$ в отличие от c_n уже нельзя понимать как коэффициент при e^{iyt} , непосредственно определяющий амплитуду и начальную фазу колебания e^{iyt} , т. е. как спектр функции $f(t)$. В самом деле, теперь отдельное колебание не обладает конечной амплитудой, так как функция $F(y)$ под знаком интеграла умножается на бесконечно малую величину dy . Представление о колебании с бесконечно малой амплитудой, возможно, вызовет затруднение, поэтому для лучшего уяснения такого

представления обратимся к другой аналогии из механики, легче воспринимаемой. Вообразим, что вдоль оси y распределена масса с плотностью $F(y)$. Очевидно, что каждой отдельной точке не будет соответствовать никакая конечная масса. Линейный элемент dy будет иметь бесконечно малую массу $F(y)dy$. Конечной массой будет обладать всегда лишь конечный промежуток оси y . Следовательно, массу, рассматриваемую как функцию от y , можно определить только для промежутка оси y . Можно, например, ввести как функцию от y массу промежутка $(-\infty, y)$, т. е. положить

$$\int_{-\infty}^y F(\eta) d\eta = G(y). \quad (1.12)$$

В математике такую функцию называют *функцией распределения*, в данном случае — массы¹⁾.

Из формулы (1.12) следует, что

$$\frac{dG(y)}{dy} = F(y), \text{ или } F(y) dy = dG(y). \quad (1.13)$$

Функция распределения, понимаемая как масса промежутка, имеет наглядный смысл. Однако плотность, отнесенную к отдельной точке, можно рассматривать только как предельное понятие, а именно как предел отношения приращения массы к приращению y .

Если мы будем понимать спектр функции $f(t)$ только что указанным образом, т. е. как распределение массы, то функцию $G(y)$, определяемую равенством (1.12), можно назвать *спектральным распределением*. Она представляет собой «сумму» бесконечно малых составляющих спектра для промежутка частот от $-\infty$ до y . Функцию $F(y)$ можно назвать *плотностью спек-*

¹⁾ В проблеме моментов интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^n F(y) dy$$

называется n -м моментом функции F (относительно нулевой точки). И здесь в основе лежит представление о распределении вдоль оси y массы с плотностью $F(y)$. Так же как и выше, функция $G(y)$ определяемая этим интегралом, называется функцией распределения. В теории вероятностей интеграл

$$\int_{y_1}^{y_2} F(y) dy$$

определяет вероятность того, что величина y , которая может принимать значения между $-\infty$ и $+\infty$, окажется в интервале (y_1, y_2) . Функция $F(y)$ называется *плотностью вероятности*, а функция $G(y)$ — *распределением вероятности*.

трального распределения при частоте y или короче спектральной плотностью. Спектральное представление функции $f(t)$ можно выразить либо через спектральную плотность в виде (1.10), либо через спектральное распределение в виде

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyt} dG(y). \quad (1.14)$$

Представим комплексную величину $F(y)$ в виде

$$F(y) = r(y) e^{-i\varphi(y)},$$

где

$$r(y) = |F(y)|, \quad -\varphi(y) = \arg F(y).$$

Тогда вместо формулы (1.10) мы будем иметь

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(y) e^{i(yt - \varphi(y))} dy, \quad (1.15)$$

откуда следует, что колебание с частотой y имеет бесконечно малую амплитуду $r(y)dy = |F(y)|dy$ и начальную фазу $-\varphi(y) = \arg F(y)$. Это дает основание называть величину $r(y) = |F(y)|$ *плотностью амплитуды*. Таким образом,

$$\text{плотность амплитуды} = |F(y)|, \quad \text{начальная фаза} = \arg F(y). \quad (1.16)$$

Примеры

1. Рассмотрим прямоугольную функцию времени

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{при } |t| \leq t_0, \\ 0 & \text{при } |t| > t_0. \end{cases} \quad (1.17)$$

Ее спектральной плотностью будет

$$F(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-t_0}^{+t_0} A e^{-iyt} dt = \frac{A}{2\pi} \frac{e^{iyt_0} - e^{-iyt_0}}{iy} = \frac{A}{\pi} \frac{\sin t_0 y}{y}. \quad (1.18)$$

Следовательно, $F(y)$ представляет собой вещественную функцию и может принимать как положительные, так и отрицательные значения (рис. 1.4). Плотность амплитуды равна абсолютному значению $F(y)$, начальная фаза равна нулю при $F(y) > 0$ и равна π при $F(y) < 0$. Спектральное распределение определяется формулой

$$G(y) = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^y \frac{\sin t_0 \eta}{\eta} d\eta = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{t_0 y} \frac{\sin u}{u} du,$$

или

$$G(y) = \frac{A}{\pi} (\pi + \operatorname{si} t_0 y) = \frac{A}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{Si} t_0 y \right), \quad (1.19)$$

если ввести, как это принято в математике, интегральные синусы

$$\operatorname{si} x = - \int_x^{\infty} \frac{\sin u}{u} du, \quad \operatorname{Si} x = \int_0^x \frac{\sin u}{u} du = \operatorname{si} x + \frac{\pi}{2}. \quad (1.20)$$

2. Рассмотрим функцию времени

$$f(t) = e^{-|t|}.$$

Ее спектральной плотностью будет (рис. 1.5)

$$F(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyt} e^{-|t|} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-t} \cos yt dt = \frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

Следовательно, функция $F(y)$ при всех значениях y положительна, т. е. совпадает с плотностью амплитуды. Начальная

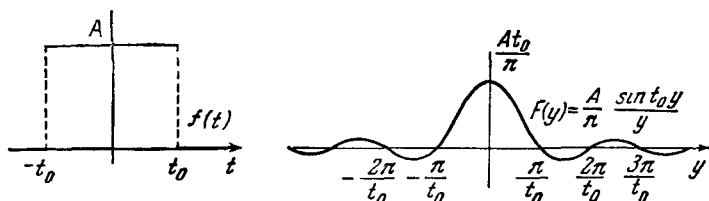


Рис. 1.4. Прямоугольная функция времени и соответствующая спектральная плотность.

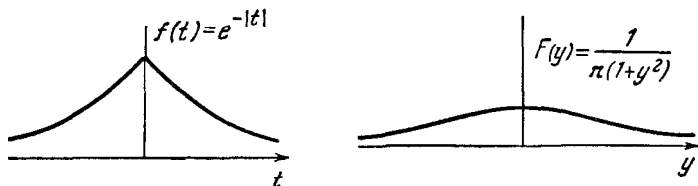


Рис. 1.5. Функция времени, сначала возрастающая по показательному закону, а затем уменьшающаяся по такому же закону, и соответствующая спектральная плотность.

фаза всех отдельных колебаний равна нулю. Спектральное распределение определяется формулой

$$G(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^y \frac{d\eta}{1+\eta^2} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} y + \frac{1}{2} \quad \left(\operatorname{arctg} (-\infty) = -\frac{\pi}{2} \right).$$

В рассмотренных примерах функция $f(t)$ при $t \rightarrow \pm\infty$ столь сильно убывает, что интеграл, определяющий $F(y)$, сходится, следовательно, спектральная плотность существует. Однако, если во втором примере мы определили бы функцию $f(t)$ при $t < 0$ и $t > 0$ не двумя различными величинами (величиной e^t при $t < 0$ и величиной e^{-t} при $t > 0$), а одной-единственной величиной e^{-t} для всех значений t , то интеграл, определяющий спектральную плотность, расходился бы, так как e^{-t} при $t \rightarrow -\infty$ стремится к бесконечности. Такой же результат получается и для особенно частого на практике случая, когда $f(t)$ представляет собой колебание с круговой частотой ω , т. е. когда $f(t) = e^{j\omega t}$. В самом деле, в этом случае интеграл

$$F(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyt} e^{j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\omega - y)t} dt, \quad (1.21)$$

определяющий спектральную плотность, расходится при любом y . Поскольку в технической литературе этот случай рассматривается всегда довольно нечетко и математически некорректно, остановимся на нем подробнее и покажем, каким образом и для такой функции времени можно получить спектральное представление.

Очевидно, что для функции $e^{j\omega t}$ спектральное разложение имеет особенно простой вид, а именно, для нее существует только одна-единственная «спектральная линия», т. е. одно-единственное колебание с круговой частотой ω и амплитудой, равной единице. Все колебания с другими частотами имеют амплитуды, равные нулю, т. е. вообще не встречаются. Но очевидно также и то, что такое «спектральное разложение» не может быть представлено интегралом Фурье (1.10). В самом деле, в интеграле Фурье каждой круговой частоте соответствует только бесконечно малая «масса» $F(y)dy$, между тем как в нашем случае круговой частоте ω соответствует конечная масса, равная единице. Следовательно, теперь теряет смысл также понятие спектральной плотности $F(y)$, что и объясняет, почему интеграл, определяющий $F(y)$, расходится. Однако понятие спектрального распределения $G(y)$ в рассматриваемом случае сохраняет смысл. В самом деле, $G(y)$ есть полная масса промежутка $(-\infty, y)$; когда y возрастает, начиная от $-\infty$, и приближается к точке ω слева, масса $G(y)$ все время равна нулю, так как частотам в промежутке $(-\infty, \omega)$ не соответствует никакая масса, но в тот момент времени, когда y достигает точки

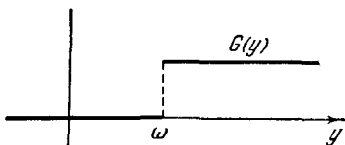


Рис. 1.6. Спектральное распределение функции времени $e^{j\omega t}$.

ω , масса $G(y)$ скачкообразно переходит от значения нуль к значению, равному единице, так как в точке ω сконцентрирована конечная масса, равная единице. Когда y продолжает увеличиваться дальше, принимая значения, большие ω , функция $G(y)$ остается постоянной и равной единице, так как при $y > \omega$ масса не увеличивается. Таким образом,

$$G(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y < \omega. \\ 1 & \text{при } y \geq \omega. \end{cases} \quad (1.22)$$

График функции $G(y)$ изображен на рис. 1.6.

Спектральная плотность $F(y)$, рассматриваемая как производная от $G(y)$ по y [см. равенство (1.13)], в точке $y = \omega$ теряет, очевидно, смысл, так как функция $G(y)$ в этой точке не дифференцируема. Можно сказать самое большее только то, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(\omega) - G(\omega - h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h},$$

т. е. левосторонняя производная функции $G(y)$ в точке ω равна ∞ . Это вполне согласуется и с физическим представлением, так как массе, равной единице и сконцентрированной в одной-единственной точке, должна соответствовать в этой точке бесконечно большая плотность.

В технической литературе из создавшейся ситуации обычно пытаются выйти следующим образом. Говорят, что на основании формулы (1.21) интеграл $F(\omega)$ равен

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot dt = +\infty,$$

и затем утверждают, что интеграл от функции

$$e^{j(\omega - y)t} = \cos(\omega - y)t + j \sin(\omega - y)t,$$

взятый в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ при $y \neq \omega$, равен нулю, так как площади, ограниченные соседними полуволнами синусоиды или косинусоиды, попеременно положительны и отрицательны, следовательно, в сумме дают нуль. Однако, если даже согласиться с этим неточным представлением, не совместимым с математическим понятием сходимости интеграла, полученную таким способом плотность

$$F(y) = \begin{cases} \infty & \text{при } y = \omega, \\ 0 & \text{при } y \neq \omega \end{cases} \quad (1.23)$$

нельзя использовать для спектрального представления (1.10) функции $f(t)$, так как такая функция $F(y)$ не является функ-

цией в обычном смысле и поэтому не может быть подставлена в интеграл, определяющий функцию $f(t)$.

В физике для таких случаев, часто встречающихся в приложениях, введено понятие *импульсной функции*, или *δ -функции Дирака*. Эта функция, не являющаяся с точки зрения классического анализа обычной функцией, обладает следующими свойствами: при всех значениях y , не равных нулю, она равна нулю, а при $y = 0$ принимает бесконечно большое значение¹⁾ и притом такое, что для любой непрерывной на всей оси y функции $h(y)$ имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(y) \delta(y) dy = h(0). \quad (1.24)$$

Смысл этого равенства заключается в том, что δ -функция ставит в соответствие каждой функции $h(y)$, непрерывной на оси y , число $h(0)$.

Положив в нашем случае $F(y) = \delta(y - \omega)$, мы приведем формулу (1.10) к виду

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyt} \delta(y - \omega) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(y+\omega)t} \delta(y) dy = e^{i\omega t}. \quad (1.25)$$

Таким образом, мы сохранили для функции $e^{i\omega t}$ ее представление через интеграл Фурье.

Несмотря на то, что такой прием придания осязаемости спектральному разложению функции $e^{i\omega t}$ ясен также с физической точки зрения, не следует забывать при этом, что, вводя δ -функцию, мы покидаем твердую почву математики и попадаем в условия, в которых при использовании интеграла (1.25) обычные математические правила (например, интегрирование по частям, подстановка нового переменного и т. д.) могут оказаться недействительными.

Эти трудности преодолены современной теорией распределений (см. Добавление, стр. 247—255). Распределения включают в себя не только все (интегрируемые) функции, но и такие понятия, как δ -функция Дирака и другие аналогичные понятия, введенные в физике, но не охватываемые классическим математическим анализом. В теории распределений показывается, что этими понятиями можно оперировать так же строго, как и обычными функциями в классическом анализе. Однако в рамках

¹⁾ В механике аналогичным образом интерпретируется понятие удара, а в электротехнике — понятие импульса тока и импульса напряжения. Отсюда и происходят термины *импульсная функция* и *ударная функция* (первый из них введен Хевисайдом).

этой теории интеграл

$$F(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt} dt,$$

называемый *преобразованием Фурье*, а также интеграл

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(y) e^{iyt} dy,$$

являющийся *обращением преобразования Фурье*, не имеют смысла, так как интегралы Римана, а также интегралы Лебега могут быть составлены только для обычных функций. Преобразование Фурье для распределений должно быть сформулировано по-иному и при этом, конечно, так, чтобы оно приводило к тому же результату, как и классическое преобразование Фурье в том случае, когда распределение является обычной функцией. Мы не будем приводить здесь довольно длительных пояснений, необходимых для формулировки преобразования Фурье в применении к распределениям, так как для нас преобразование Фурье представляет интерес только как средство для определения понятия спектра и в дальнейшем для целей настоящей книги оно нигде не используется¹⁾. Поэтому мы ограничимся только констатацией того, что преобразованием Фурье функции $e^{j\omega t}$, понимаемой как распределение, является распределение $\delta(y - \omega)$. Следовательно, в теории распределений поясненная выше лишь наглядно связь между $\delta(y - \omega)$ и $e^{j\omega t}$ приобретает полную законность.

Подытожим полученные результаты. Мы всегда можем получить спектральное представление, во-первых, для функций времени $f(t)$, заданных в промежутке $(-\infty, +\infty)$, удовлетворяющих условиям Дирихле (стр. 11) и притом таких, для которых интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$$

сходится, и, во-вторых, для колебаний $e^{j\omega t}$. Однако такие функции времени, как, например, затухающие или нарастающие колебания $e^{(\alpha + j\omega)t}$, не допускают представления посредством инте-

¹⁾ Легко понятное изложение теории распределений можно найти в следующих книгах: Zemanian A. H., *Distribution theory and transform analysis*, McGraw-Hill, New York, 1965 (гл. 7); Schwartz L., *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann, Paris, 1965 (гл. V) имеется русский перевод: Шварц Л., *Математические методы для физических наук*, «Мир», 1965; см. также Гельфанд И. М. и Шилев Г. Е., *Обобщенные функции и действия над ними*, Физматгиз, Москва, 1958. (*Прим. перев.*)

грала Фурье, так как интеграл (1.11), определяющий $F(y)$, в случае положительного α расходится при $t = +\infty$, а в случае отрицательного α — расходится при $t = -\infty$. Таким образом, для подобного рода функций времени не дает результатов и теория распределений¹⁾.

В следующем параграфе мы увидим, как эту трудность можно преодолеть, если ввести в рассмотрение интеграл Лапласа.

§ 2. Интеграл Лапласа и его физический смысл

До сих пор мы молча предполагали, что время t изменяется в промежутке $(-\infty, +\infty)$, между тем как в практических условиях вряд ли могут наблюдаться процессы, длящиеся от $t = -\infty$ до $t = +\infty$. Обычно какой-либо процесс начинается в конечный момент времени, который мы можем принять за нулевую точку, а затем продолжается в течение длительного промежутка времени, теоретически до $t = +\infty$. Следовательно, в практических условиях приходится иметь дело с промежутком времени $0 \leq t < \infty$, т. е. только с односторонне бесконечным промежутком. Но такой случай мы можем включить в случай двусторонне бесконечного промежутка, произвольно положив функцию $f(t)$ равной нулю при всех $t < 0$. Тогда нижним пределом интеграла (1.11), определяющего спектральную плотность, надо будет взять нуль, т. е. положить

$$F(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-iyt} f(t) dt, \quad (2.1)$$

следовательно, спектральным представлением функции $f(t)$ [равенство (1.10)] теперь будет²⁾

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyt} F(y) dy = \begin{cases} f(t) & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Теперь имеется возможность обойти затруднение, возникающее в том случае, когда интеграл (2.1) расходится. Введем для

¹⁾ В рамках теории распределений Л. Шварца, положенной в основу наших рассуждений, преобразование Фурье может быть определено только для распределений с «медленным возрастанием», между тем как распределение $e^{(\alpha+j\omega)t}$ таким не является. Об обобщении преобразования Фурье на любые распределения см. первую из книг (стр. 202), упомянутых в списке на стр. 24 [и указавшую там же книгу И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова. (Прим. перев.)].

²⁾ Интеграл Фурье (1.10) в точках разрыва равен, как и ряд Фурье, среднему арифметическому от предельных значений слева и справа от точки разрыва, следовательно, в рассматриваемом случае при $t = 0$ он равен среднему арифметическому от предельного значения 0 слева и от предельного значения $f(+0)$ справа, т. е. $f(+0)/2$.

этого вместо функции $f(t)$ *затухающую функцию* $e^{-xt}f(t)$ с параметром $x > 0$ и составим для последней спектральную плотность, которая теперь, конечно, будет зависеть от x . Обозначив ее поэтому через $F_x(y)$, мы будем иметь

$$F_x(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-lyt} [e^{-xt}f(t)] dt. \quad (2.3)$$

Очевидно, что вследствие очень быстрого убывания множителя e^{-xt} при $t \rightarrow +\infty$ интеграл (2.3) сходится для всех ограниченных функций $f(t)$, причем даже для таких, которые возрастают в бесконечности так же, как показательная функция $e^{\alpha t}$ ($\alpha > 0$), если только выбрать $x > \alpha$ ¹⁾. Следовательно, вводя вместо функции $f(t)$ функцию $e^{-xt}f(t)$, мы устраняем расходимость интеграла (2.1) для всех практически встречающихся функций. Спектральное представление (1.10) будет иметь теперь следующий вид:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyt} F_x(y) dy = \begin{cases} e^{-xt}f(t) & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Перепишем формулы (2.3) и (2.4) в несколько ином виде:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-(x+iy)t} f(t) dt = F_x(y), \quad (2.5)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(x+iy)t} F_x(y) dy = \begin{cases} f(t) & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Мы видим, что в эти формулы параметр x и частота y входят только в комбинации $x + jy$. Следовательно, сама собой появилась *комплексная переменная*, для обозначения которой можно использовать только одну букву. Взяв для этой цели, как это принято в математике, букву s ²⁾, мы будем иметь

$$s = x + jy.$$

¹⁾ Умножение функции $f(t)$ на e^{-xt} в случае первоначального промежутка $-\infty < t < +\infty$ не привело бы к желательной цели, так как множитель e^{-xt} при $t \rightarrow -\infty$ резко возрастает и поэтому даже ухудшает сходимость интеграла при $t = -\infty$.

²⁾ В технической литературе часто вместо s применяется буква p . Это обозначение заимствовано из исчисления Хевисайда, которое при его применении к дифференциальным уравнениям приводит к такому же формализму, как и преобразование Лапласа. Однако у Хевисайда буква p означает не переменную, а дифференциальный оператор D . Хевисайд взял букву p вместо D для того, чтобы избежать путаницы с диэлектрическим смещением, обозначавшимся им буквой D . Так как в математике при одновременном рассмотрении двух переменных принято применять для их обозначения две со-

Очевидно, что функция $F_x(y)$ зависит от этой комплексной переменной, поэтому целесообразно ввести обозначение

$$F_x(y) = F(x + jy) = F(s).$$

Конечно, переменную s следует ввести вместо y также в формулу (2.6) в качестве переменной, по которой производится интегрирование. Так как в формуле (2.6) y изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, в то время как x остается постоянным, то $s = x + jy$ будет изменяться от $x - j\infty$ до $x + j\infty$. Такому изменению переменной s соответствует в комплексной плоскости перемещение вдоль вертикальной прямой с абсциссой x (рис. 2.1).

Наконец, с целью обычного в математике нормирования заменим функцию $f(t)$ функцией $2\pi f(t)$. Тогда, имея в виду, что $ds = j dy$, мы можем переписать формулы (2.5) и (2.6) в следующем окончательном виде:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s), \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} e^{ts} F(s) ds = \begin{cases} f(t) & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

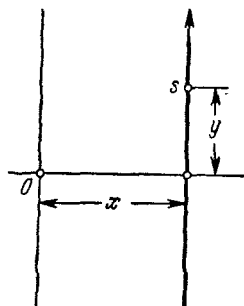


Рис. 2.1. Комплексная переменная $s = x + jy$.

Интеграл в левой части формулы (2.7) представляет собой не что иное, как *интеграл Лапласа*. Формула (2.8), если отвлечься от ее смысла как спектрального представления, называется *обращением интеграла Лапласа*.

Из сказанного выше вытекает следующий физический смысл совокупности формул (2.7) и (2.8).

Если в функции $F(s)$, определяемой интегралом Лапласа (2.7), рассматривать аргумент s как комплексную переменную ($s = x + jy$), то $F(x + jy)$ при постоянном x будет спектральной плотностью затухающей функции времени $e^{-xt}f(t)$, для которой круговой частотой является переменная y ¹⁾. Функцию времени

седине буквы алфавита (например, x и y или u и v), то для обозначения аргумента функции F естественно взять букву s , поскольку аргумент функции f обозначается буквой t . Пользоваться из исторических соображений буквой p тем более нецелесообразно, что теперь ее обычно применяют для обозначения положительной постоянной.

¹⁾ В технической литературе переменную s иногда называют *комплексной частотой*, что с физической точки зрения не имеет никакого смысла и только затемняет действительную сущность этой переменной. В самом деле, во всех случаях может идти речь только о вещественных частотах, которые определяются значением $\text{Im } s = y$. Величина же $\text{Re } s = x$ представляет собой параметр, определяющий затухание e^{-xt} функции $f(t)$.

$f(t)$ можно построить по спектральной плотности $F(s)$ при помощи формулы (2.8). Однако если эту формулу понимать как спектральное представление, то ее следует переписать в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} F(x + jy) d\omega = \begin{cases} 2\pi e^{-xt} f(t) & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

т. е. рассматривать как спектральное представление функции $2\pi e^{-xt} f(t)$ (дополненное нулем для отрицательных значений времени).

Перенеся множитель e^{xt} в левую часть, мы получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [e^{xt} e^{i\omega t}] F(x + jy) d\omega = 2\pi f(t). \quad (2.10)$$

Эту формулу, являющуюся спектральным представлением функции $2\pi f(t)$, можно понимать как суперпозицию нарастающих колебаний $e^{xte^{j\omega t}}$, что, однако, менее наглядно¹⁾.

§ 3. Некоторые свойства функций, получаемых из интеграла Лапласа. Примеры

Если при каком-либо значении x_0 параметра x спектральная плотность затухающей функции $e^{-x_0 t} f(t)$ существует, то из физических соображений очевидно, что она подавно существует и при более сильном затухании $x > x_0$. Математически это означает следующее: если интеграл (2.7) при $s = x_0 + jy$ сходится, то он сходится также при $s = x + jy$, где $x > x_0$. Отсюда можно вывести заключение, что точной областью сходимости интеграла (2.7) является полуплоскость $\operatorname{Re} s > \beta$, так называемая *полуплоскость сходимости*. Следовательно, функция $F(s) = F(x + jy)$ представляет собой бесконечно большое число спектральных плотностей, а именно бесконечно большое количество функций $e^{-xt} f(t)$, для которых $x > \beta$.

В физических приложениях функция $f(t)$ часто бывает вещественной (но не всегда — вспомним, например, функцию $f(t) \equiv e^{j\omega t}$). В таком случае

$$F(\bar{s}) = \int_0^{\infty} e^{-\bar{s}t} f(t) dt = \overline{\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt} = \overline{F(s)},$$

¹⁾ В электротехнической литературе иногда утверждается, что формулы (2.8) и соответственно (2.10) представляют функцию $f(t)$ как суперпозицию затухающих колебаний. Такое утверждение было бы правильным только в том случае, если бы параметр x был отрицательным. Но тогда не было бы никакой необходимости вводить интеграл Лапласа, так как при отрицательном x сошелся бы уже первоначальный интеграл (2.1).

т. е. значениям переменной s , являющимся взаимным зеркальным отражением относительно вещественной оси, соответствуют значения функции, также являющиеся взаимным зеркальным отражением относительно вещественной оси.

Если отвлечься от физического смысла функции $F(s)$ как спектральной плотности и рассматривать ее с чисто математической точки зрения, то прежде всего необходимо отметить следующее: если $F(s)$ вообще существует, то всегда в одной половине комплексной плоскости. Наиболее важное ее свойство заключается в том, что в этой полуплоскости она является *аналитической функцией*, т. е. ее, как комплексную функцию, можно любое число раз дифференцировать. Производные от функции $F(s)$ вычисляются путем дифференцирования под знаком интеграла:

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-st} t^n f(t) dt. \quad (3.1)$$

Следовательно, к функции $F(s)$ применимы мощные методы теории функций комплексного переменного. Из получаемых таким путем результатов, касающихся функции $F(s)$, можно вывести интересные следствия о функции времени $f(t)$, для исследования которой не существует общих методов.

Прежде чем перейти к изложению этих идей, вычислим для некоторых функций времени соответствующие функции $F(s)$.

Предварительно подчеркнем, что функцию $f(t)$ достаточно определить только для значений $t > 0$. Является ли функция $f(t)$ определенной также для $t < 0$ и как именно, для вычисления интеграла Лапласа безразлично. Если же ввести в рассмотрение также значения $t < 0$, как это, например, сделано в формуле (2.8) обращения интеграла Лапласа, то при этом необходимо помнить, что при $t < 0$ функция $f(t)$ всегда равна нулю (в смысле, разъясненном в § 2).

1. Пусть функцией времени будет $f(t) \equiv 1$. С этой функцией мы неоднократно будем встречаться в дальнейшем, причем выяснится, что практически целесообразно дополнить ее значением, равным нулю для всех $t < 0$. Будем называть ее *функцией единичного скачка* или просто *единичным скачком* и обозначим через $u(t)$. Таким образом,

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Вопрос об определении функции $u(t)$ в точке разрыва $t = 0$ оставим открытым, так как при вычислении интеграла Лапласа безразлично, какое значение имеет $u(t)$ при $t = 0$. В некоторых случаях будет целесообразно принимать $u(0) = 0$, а в других — полагать $u(0) = 1$ или $1/2$.

Вычислим для функции $u(t)$ спектральную плотность; она равна

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} u(t) dt = \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}, \quad (3.3)$$

причем тогда и только тогда, когда $e^{-st} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, т. е. если $\operatorname{Re} s > 0$. Следовательно, мы получили подтверждение сказанному выше, а именно, что областью сходимости функции $F(s)$ является полуплоскость (к такому же результату мы приходим и в следующих примерах). Таким образом, для функции времени $2\pi e^{-xt} u(t)$ спектральной плотностью будет $1/s = 1/(x + jy)$, а плотностью амплитуды $1/(x^2 + y^2)^{1/2}$. Выполнив обращение формулы (3.3), мы получим

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} e^{ts} \frac{1}{s} ds = u(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

или в форме спектрального представления

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i y t} \frac{1}{x + j y} dy = 2\pi e^{-xt} u(t) \quad (x > 0). \quad (3.5)$$

Сам единичный скачок $u(t)$ не имеет спектральной плотности и поэтому не допускает спектрального представления в смысле формулы (1.10)¹⁾. Если мы подставили бы в формулу (3.5) $x = 0$, то получили бы интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i y t} \frac{1}{j y} dy,$$

который расходится, так как функция $1/y$ при $y = 0$ не интегрируема.

В этой связи упомянем еще об одной часто используемой формуле для $u(t)$. Подстановка значения $x = 0$ в формулу (3.5) означает, что в интеграле (3.4) путь интегрирования следует выбрать вдоль мнимой оси. Однако при интегрировании по такому пути возникает трудность: в особой точке $s = 0$ интеграл

¹⁾ Это обстоятельство необходимо особо подчеркнуть, так как в технической литературе иногда встречается противоположное утверждение. Только в том случае, если рассматривать $u(t)$ как распределение, преобразование Фурье приводит к результату, который можно понимать как спектральную плотность (см. стр. 24). Однако этой спектральной плотностью будет отнюдь не $1/jy$, а некоторое распределение, пояснение которого завело бы нас слишком далеко.

(3.4) расходится. Для того чтобы устранить это затруднение, следует обойти нулевую точку справа по полуокружности (рис. 3.1). Тогда мы получим правильную формулу

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{e^{ts}}{s} ds = u(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

которую, однако, нельзя рассматривать как спектральное представление функции $u(t)$, так как на взятой полуокружности функция e^{ts} не является ни колебанием $e^{j\omega t}$, ни затухающим колебанием $e^{-\chi t}e^{j\omega t}$ с постоянным χ .

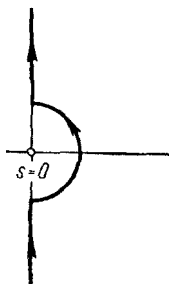


Рис. 3.1. Путь интегрирования с обходом особой точки $s=0$.

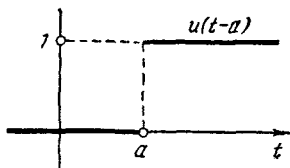


Рис. 3.2. Функция единичного скачка со скачком в точке a .

2. Пусть теперь единичный скачок происходит не в момент времени $t=0$, а в момент $t=a > 0$. В таком случае он описывается функцией $u(t-a)$ (рис. 3.2), для которой спектральной плотностью будет

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} u(t-a) dt = \int_a^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-as}}{s} \quad \text{при } \operatorname{Re} s > 0. \quad (3.7)$$

Следовательно, «запаздыванию» функции времени на промежутке a соответствует умножение спектральной плотности на множитель e^{-as} . К этому результату мы придем еще раз ниже из совершенно общих соображений.

3. Пусть функцией времени будет $e^{\alpha t}$ (α — произвольное комплексное число) или, точнее говоря, функция, равная $e^{\alpha t}$ при $t > 0$ и нулю при $t < 0$. Такую функцию можно обозначить через

$$u(t) e^{\alpha t}.$$

Если $\alpha = \sigma + j\omega$, то эта функция при $\omega \neq 0$ и $\sigma = 0$ означает комплексное колебание, при $\omega \neq 0$ и $\sigma < 0$ — затухающее

колебание, при $\omega \neq 0$ и $\sigma > 0$ — нарастающее колебание, а при $\omega = 0$ — аperiodическое (восходящее или нисходящее) движение. Спектральной плотностью будет

$$\int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a} \quad \text{при } \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a. \quad (3.8)$$

4. Пусть функцией времени будет $\cos \omega t$ или, точнее, функция $u(t) \cos \omega t$, т. е. вещественное колебание. Мы можем рассматривать ее — в смысле сказанного в § 1 — как сумму двух комплексных колебаний. Тогда, применив к каждому из этих колебаний формулу (3.8), мы получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos \omega t dt &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-st} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Этот интеграл сходится, если $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re}(j\omega)$ и одновременно $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re}(-j\omega)$, т. е. при $\operatorname{Re} s > 0$.

5. Для функции времени $\sin \omega t$ аналогичным образом получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st} \sin \omega t dt &= \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} e^{-st} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) dt = \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \text{при } \operatorname{Re} s > 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

6. Пусть функцией времени будет t^a , т. е. степенная функция (a — вещественное число). Для существования интеграла Лапласа при $t = 0$ необходимо, чтобы было $a > -1$. Положив $st = \tau$, мы получим

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^a dt = \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^a d\tau.$$

Для того чтобы переменная τ была вещественной и чтобы получившийся интеграл представлял собой гамма-функцию Эйлера, переменная s должна быть вещественной и, кроме того, должно быть $s > 0$. Тогда мы будем иметь

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^a dt = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}. \quad (3.11)$$

Так как интеграл Лапласа представляет собой аналитическую функцию, то формула (3.11) справедлива также для комплексного s при условии, что $\operatorname{Re} s > 0$.

Для t^n ($n = 0, 1, 2, \dots$) формула (3.11) принимает вид

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{при } \operatorname{Re} s > 0. \quad (3.12)$$

7. Пусть функцией времени будет $t^n e^{at}$ ($n = 0, 1, \dots$; α — произвольное комплексное число). Для этой функции интеграл Лапласа, как это следует из формулы (3.12) после замены в ней s на $s - \alpha$, равен

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^n e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} t^n dt = \frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}} \quad \text{при } \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \alpha. \quad (3.13)$$

§ 4. Интеграл Лапласа как преобразование

Мы видели, что каждой определенной при $t > 0$ функции времени $f(t)$, для которой интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-x_0 t} f(t) dt$$

при достаточно большом x_0 сходится, соответствует спектральная плотность

$$F(s) = F(x + jy),$$

определенная при $x > x_0$. Следовательно, каждой такой функции $f(t)$ соответствует функция $F(s)$, связанная с $f(t)$ соотношением

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (4.1)$$

Соотношение (4.1) можно рассматривать также, как преобразование, понимая под этим переход от функции $f(t)$ к функции $F(s)$, осуществляемый посредством интеграла (4.1). Это преобразование принято называть *преобразованием Лапласа*. Представление о преобразовании является типично математическим представлением, позволяющим к ранее сделанному физическому толкованию интеграла Лапласа добавить новое толкование, которое, как мы увидим ниже, окажется очень плодотворным. С представлением о соответствии или преобразовании тесно связано представление об *отображении*. Подобно тому как фотографическая камера позволяет получать из оригинала *изображение*, так и преобразование Лапласа переводит функцию-оригинал $f(t)$ в функцию-изображение $F(s)$ или короче *оригинал* $f(t)$ —

в изображение $F(s)$. Эта терминология особенно наглядна. В настоящее время она прочно привилась, и мы также будем ею пользоваться. Совокупность всех $f(t)$ называют также *пространством оригиналов*, а совокупность всех $F(s)$ — *пространством изображений* (происхождение этих терминов связано с принятым в настоящее время в математике представлением о множествах функций как абстрактных пространствах).

В дальнейшем мы будем обозначать оригиналы по возможности всегда малыми буквами, а отвечающие им изображения — соответствующими большими буквами, например $f(t)$ и $F(s)$, $y(t)$ и $Y(s)$. Некоторые авторы применяют вместо этих обозначений противоположные, т. е. $F(t)$ и $f(s)$; другие обозначают оригиналы и изображения одной и той же буквой, но отмечают изображение черточкой сверху [$f(t)$, $\bar{f}(s)$], что в ряде случаев может привести к путанице, поскольку черточка сверху применяется также для обозначения сопряженного комплексного значения. Встречаются также обозначения $\dot{f}(t)$ и $\dot{f}(s)$. В технической литературе иногда применяется обозначение и оригинала, и изображения одной и той же буквой, но с указанием в скобках аргументов t и s ; такое обозначение следует признать совершенно недопустимым, так как часто переменные t и s приходится заменять другими, в результате чего может возникнуть путаница.

Понятие преобразования или отображения имеет большое сходство с понятием функции. В самом деле, в основе понятия функции также лежит соответствие, а именно соответствие между двумя переменными, например z и ω . Подобно тому как для обозначения обычной функции применяют не слова « ω есть функция z », а символ функции, например $\omega = \varphi(z)$, так и для обозначения связи, устанавливаемой преобразованием Лапласа, вводят символ \mathfrak{L} и пишут

$$F(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\}.$$

Читается эта запись так: $F(s)$ есть функция, полученная из $f(t)$ посредством преобразования Лапласа [или короче: $F(s)$ есть \mathfrak{L} -изображение функции $f(t)$].

Формулу (2.8), дающую спектральное представление функции $f(t)$ через спектральную плотность $F(s)$ и названную выше обращением формулы (4.1), также можно рассматривать как преобразование, только не функции $f(t)$ в $F(s)$, а наоборот, функции $F(s)$ в $f(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} e^{ts} F(s) ds \quad \text{при } t > 0. \quad (4.2)$$

Будем называть это преобразование *обращением преобразования Лапласа* или *обратным преобразованием Лапласа* и обозначать символом \mathfrak{L}^{-1} :

$$\hat{f}(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

Связь между \hat{f} и F называется также *соответствием* и обозначается посредством *знака соответствия* $\circ \bullet$ следующим образом:

$$\hat{f}(t) \circ \bullet F(s) \quad \text{или} \quad F(s) \bullet \circ \hat{f}(t).$$

Преобразования \mathfrak{L} и \mathfrak{L}^{-1} отличаются одно от другого с точки зрения их *однозначности*. Совершенно очевидно, что каждому оригиналу \hat{f} соответствует одно-единственное изображение F . Но если мы рассмотрим все изображения $F(s)$, полученные посредством формулы (4.1), то увидим, что каждое изображение $F(s)$ может быть получено из бесконечно большого числа оригиналов $\hat{f}(t)$. В самом деле, если мы изменим определение функции $\hat{f}(t)$ в конечном числе точек, то, поскольку такое изменение не влияет на результат интегрирования интеграла (4.1), изображение не изменится. Однако совокупность всех оригиналов $\hat{f}(t)$, соответствующих какому-либо изображению $F(s)$, легко выявить: все они отличаются одно от другого на так называемые *нулевые функции* $n(t)$, т. е. на функции, обладающие свойством

$$\int_0^t n(\tau) d\tau \equiv 0 \quad \text{при всех } t \geq 0.$$

Если среди всех оригиналов $\hat{f}(t)$, соответствующих заданному изображению $F(s)$, имеется один, являющийся непрерывной функцией, то других таких оригиналов не существует. Так как в приложениях оригиналы часто с самого начала предполагаются дифференцируемыми, а потому и подавно непрерывными функциями, то только что указанное свойство оригиналов позволяет определить оригинал по заданному изображению в большей части случаев однозначно. Следовательно, если оригиналы, которые отличаются один от другого только на нулевые функции, не рассматривать как различные (как это обычно принято в математике), то обратное преобразование Лапласа также всегда будет однозначным.

Придав интегралу Лапласа смысл преобразования вместо прежнего смысла спектральной плотности $F(s) = F(x + jy)$, соответствующей функции $e^{-xt}\hat{f}(t)$, мы вступили на совершенно другой путь, который, как увидим ниже, для приложений окажется особенно плодотворным. Мы подробно рассмотрели спектральное представление с целью показать, что интеграл

Лапласа не является одним только абстрактным математическим понятием и что он, наоборот, допускает вполне наглядное толкование.

Понимание преобразования Лапласа как спектрального представления особенно близко образу мыслей инженера, для которого это представление часто является вполне реальным, как, например, в теории электрических фильтров. Однако преобразование Лапласа применимо также к функциям, для которых спектральное представление не имеет реального смысла. Более того, преобразование Лапласа вообще выходит далеко за пределы такой узкой постановки вопроса — попытки придания какой-либо функции вполне определенного наглядного смысла. Пока по этому поводу мы можем сделать только следующие предварительные замечания.

Функции, с которыми приходится иметь дело инженеру, являются всегда решениями функциональных уравнений — дифференциальных, разностных и интегральных, следовательно, над этими функциями должны производиться определенные операции, такие, как дифференцирование, составление разностей, интегрирование. *Подлинное значение преобразования Лапласа заключается в том, что оно имеет характер отображения, заменяющего функции из пространства оригиналов и производимые здесь над ними операции функциями и операциями в пространстве изображений, в котором и изображения функций, и выполняемые над ними операции значительно проще и нагляднее.* Это приводит к тому, что изображения указанных функциональных уравнений также получаются более простыми, чем исходные уравнения в пространстве оригиналов, и решаются эти отображенные уравнения значительно проще. Отображениями операций, совершаемых над функциями, мы займемся в следующей главе.

Преобразование Лапласа обладает еще одним важным свойством, на которое было уже указано в § 3, а именно: изображения, получаемые в результате \mathcal{L} -преобразования, представляют собой *аналитические функции*, к которым можно применять мощные методы теории функций комплексного переменного. Так, например, формулу (4.2), выражающую функцию $f(t)$ через $F(s)$, можно понимать как интеграл от аналитической функции $e^{ts}F(s)$, взятый вдоль прямой, лежащей в комплексной плоскости. Если заменить этот путь интегрирования на основании теоремы Коши другими кривыми, то таким способом можно выявить интересные свойства функции $f(t)$, например, ее асимптотическое поведение.

То обстоятельство, что переменная s изменяется в *комплексной плоскости*, всегда будет оказываться выгодным. Для того чтобы привести простой пример, иллюстрирующий эту выгоду,

напомним, что решения линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами представляют собой линейные комбинации функций вида $t^n e^{\alpha t}$, где α в общем случае есть комплексное число. Изображением функции такого вида является, как мы видели в примере 7 из § 3, рациональная функция $n!/(s - \alpha)^{n+1}$. Подлинное поведение такой функции можно выявить только в том случае, если рассматривать ее в комплексной плоскости как аналитическую функцию с полюсом α , имеющим кратность $n + 1$.

ГЛАВА 2

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ ОПЕРАЦИЙ ПРИ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЛАПЛАСА

§ 5. Отображение операций

При практическом применении преобразования Лапласа операции ведутся не над заданными функциями, а над их изображениями, подобно тому как при умножении вычисления ведутся часто не над самими числами, а над их логарифмами, что приводит к замене умножения более простой операцией — сложением. Весь процесс преобразования Лапласа можно представить себе как перевод с одного языка на другой. При таком переводе каждому слову одного языка соответствует определенное слово другого языка. Совершенно так же при преобразовании Лапласа каждой функции пространства оригиналов соответствует определенная функция в пространстве изображений. Роль *словаря*, необходимого для перевода с одного языка на другой, при преобразовании Лапласа играет *таблица соответствий между оригиналами и изображениями*. Несколько самых необходимых соответствий мы привели в § 3, в значительно большем количестве они даны в приложении, помещенном в конце книги. Но для того, чтобы перевести с одного языка на другой целое предложение, т. е. некоторую последовательность связанных между собой слов, недостаточно знать перевод отдельных слов; необходимо еще знать, как *грамматические образования* одного языка (например, изменение отдельных слов или связывание нескольких слов в одно более сложное понятие) передаются на другом языке. В применении к случаю преобразования Лапласа это означает следующее: если над функцией, например, в пространстве оригиналов производится какая-либо *операция*, например, дифференцирование или интегрирование, то в пространстве изображений этой операции должна отвечать вполне определенная другая операция. Аналогичным образом, если в пространстве оригиналов несколько функций *комбинируются* одна с другой, например перемножаются, то в пространстве изображений такой комбинации должна отвечать вполне определенная другая комбинация.

Таким образом, необходимо знать не только отображение (или перевод) отдельных функций, но и правила отображения выполняемых над ними операций. Именно в этом смысле и следует понимать приводимые ниже «грамматические правила» преобразования Лапласа (в § 6—9 указаны только самые важные из этих правил, необходимые во всех случаях; дальнейшие правила можно найти в разделе I Приложения).

Как эти правила используются для решения некоторых математических задач, будет показано в гл. 3—5¹⁾.

§ 6. Линейные подстановки

В этом параграфе мы рассмотрим операции, представляющие собой линейные преобразования аргумента в оригинале или в изображении.

Правило I (теорема подобия)

$$\text{или} \quad \left[\begin{array}{l} f(at) \circ \bullet \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \\ F(as) \bullet \circ \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right) \end{array} \right] \quad (a > 0).$$

Следовательно, умножение аргумента оригинала (изображения) на некоторое число приводит к делению аргумента изображения (оригинала) и одновременно самого изображения (оригинала) на то же число, т. е. к подобному изменению изображения (оригинала).

Правило II (первая теорема сдвига)

$$\left[u(t-a)f(t-a) \circ \bullet e^{-as}F(s) \right] \quad (a > 0).$$

¹⁾ Мы рекомендуем читателю для лучшего понимания механизма этих правил вывести самостоятельно некоторые из них. Для примера приведем вывод первого правила:

$$\mathfrak{L}\{f(at)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(at) dt = \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{a}\tau} f(\tau) \frac{d\tau}{a} = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{a}\tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).$$

Кроме того, читателю, желающему усвоить исключительно «технику» преобразования Лапласа, мы рекомендуем при первом чтении ограничиться только запоминанием формул, выражающих правила (эти формулы заключены в рамки), к чтению же пояснительного текста вернуться лишь после того, как он встретится с применением правил на примерах в гл. 3—5.

Оригинал $f(t-a)$ умножен на функцию единичного скачка $u(t-a)$, определяемую формулой (3.2), с целью показать, что функцию $f(t)$ при отрицательных значениях t следует принять равной нулю (см. стр. 29). При $t < a$ аргумент $t-a$ отрицателен, поэтому

$$f(t-a) = 0.$$

Следовательно, график функции $f(t-a)$ получается из графика функции $f(t)$ смещением последнего вправо на расстояние a и одновременным дополнением его в промежутке между 0 и a отрезком оси t (рис. 6.1, а).

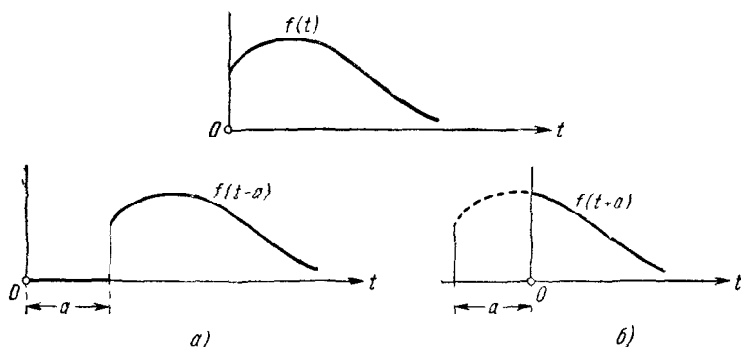


Рис. 6.1. Смещение графика функции вправо и влево.

Правило II играет особо важную роль для процессов, происходящих с отставанием (например, при регулировании с запаздыванием).

Если правило II читать справа налево, т. е. переходить от изображения к оригиналу, то не следует забывать, что оригинал $f(t-a)$ при $t < a$ должен быть равен нулю.

Так, например, если в результате вычислений получилось изображение

$$e^{-s} \frac{1}{s^2 + 1},$$

то при $t \geq 1$ оригиналом будет $\sin(t-1)$, а при $0 \leq t < 1$ — нуль.

Правило III (вторая теорема смещения)

$$f(t+a) \circ \bullet e^{as} \left(F(s) - \int_0^a e^{-st} f(t) dt \right) \quad (a > 0).$$

Это правило противоположно правилу II в том смысле, что теперь график функции $f(t)$ смещается на отрезок a не вправо, а влево (рис. 6.1, б). Такое смещение приводит к тому, что начальный кусок графика, соответствующий участку оси t от 0 до a , пропадает, так как новая функция по-прежнему может рассматриваться только при значениях $t \geq 0$. Очевидно, что изображение $F(s)$ не может быть связано непосредственно с новой, усеченной функцией $f(t+a)$. Именно поэтому и появляется в правой части соответствия «конечный» интеграл Лапласа, содержащий значения функции $f(t)$ при значениях аргумента $0 \leq t < a$.

Правило III играет важную роль при решении разностных уравнений, в которые наряду с $f(t)$ входят значения $f(t+a)$, $f(t+2a)$, ...

Правило IV (теорема затухания)

$$\boxed{e^{-\alpha t} f(t) \circ \bullet F(s + \alpha)} \quad (\alpha - \text{произвольное комплексное число})$$

Действительное затухание оригинала происходит, конечно, только в том случае, когда α представляет собой положительное вещественное число, а функция $f(t)$ — ограниченная.

§ 7. Дифференцирование

В предыдущем параграфе мы привели правила для простейших элементарных операций. В этом и следующем параграфах мы рассмотрим более сложные операции — дифференцирование и интегрирование, а также умножение.

Правило V (теорема дифференцирования для оригинала)

Если производная f' обладает изображением, то обладает изображением и первообразная функция f . Однако обратное имеет место не всегда. Например, функция $\ln t$ обладает изображением, т. е. $\mathfrak{L}\{\ln t\}$ существует, но производная от $\ln t$, равная $1/t$, изображением не обладает, т. е. $\mathfrak{L}\{1/t\}$ не существует, так как функция $1/t$ при $t = 0$ неинтегрируема. Поэтому при применении правила, которое сейчас будет сформулировано, всегда необходимо предполагать, что наивысшая встречающаяся производная существует при $t > 0$ и обладает изображением; тогда из этого предположения автоматически будет следовать, что производные более низких порядков, включая первообразную

Разница между «значением функции в точке» и «предельным значением при приближении к этой точке» играет особую важную роль при решении уравнений в частных производных.

2. Правило V предполагает, что наивысшая встречающаяся производная $f^{(n)}$ существует в каждой точке $t > 0$ ¹⁾. Покажем на примере, что если не учитывать это обстоятельство, то применение правила V может привести к неверному результату. Для единичного скачка $u(t-a)$, рассмотренного в примере 2 § 3 и происходящего в момент времени $t = a > 0$, мы имеем

$$\mathfrak{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}.$$

Предельное значение функции $u(t-a)$ при t , стремящемся к нулю справа, равно нулю. Применив неосторожно правило V, мы получим

$$\mathfrak{L}\{u'(t-a)\} = e^{-as}. \quad (7.1)$$

Если же мы вычислим это изображение, т. е. $\mathfrak{L}\{u'(t-a)\}$, прямым путем, т. е. составим сначала производную $u'(t-a)$ и только затем выполним преобразование Лапласа, то получим совсем другой результат. В самом деле, мы имеем

$$u'(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq a, \\ \text{не определяется при } t = a. \end{cases} \quad (7.2)$$

Следовательно,

$$\mathfrak{L}\{u'(t-a)\} = 0, \quad (7.3)$$

так как очевидно, что интегрирование функции, равной нулю всюду, за исключением одной-единственной точки, дает такой же результат, как и интегрирование функции, равной нулю всюду.

¹⁾ При $t = 0$ n -я производная не обязательно должна существовать. Такой случай встречается довольно часто. Для $n = 1$ примером может служить функция $f(t) = t^{1/2}$ с производной $f'(t) = \frac{1}{2} t^{-1/2}$. Для этой функции мы имеем

$$\mathfrak{L}\{f\} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{s^{3/2}}, \quad \mathfrak{L}\{f'\} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{1/2}}, \quad (f+0) = 0,$$

и правило V приводит к верному результату:

$$\frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{1/2}} = s \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{s^{3/2}},$$

так как $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.



Несовпадение результатов, даваемых формулами (7.1) и (7.3), объясняется тем, что функция $u(t-a)$ дифференцируема не при всех t , а именно в точке $t=a$ она не только не имеет производной, но даже не непрерывна. Следовательно, к такой функции правило V применять было нельзя.

О другой интерпретации формулы (7.2) и другом смысле формулы (7.1) см. Добавление, стр. 258, пример 2.

Правило VI (теорема дифференцирования для изображения)

В § 3 мы упомянули, что изображение является всегда аналитической функцией, следовательно, обладает всеми производными. Эти производные легко получить путем дифференцирования под знаком интеграла, что приводит к следующему правилу:

$$\begin{aligned} -tf(t) &\circ \bullet F'(s) \\ t^2 f(t) &\circ \bullet F''(s) \\ (-1)^n t^n f(t) &\circ \bullet F^{(n)}(s) \end{aligned}$$

Мы видим, что, как и в случае дифференцирования оригинала, сложная операция дифференцирования изображения заменяется в пространстве оригиналов совсем тривиальной операцией — умножением оригинала на независимую переменную, взятую с отрицательным знаком.

§ 8. Интегрирование

Правило VII (теорема интегрирования для оригинала)

Дифференцированию оригинала соответствует в пространстве изображений, если не считать прибавления постоянной, умножение изображения на s . Интегрированию оригинала от нуля до переменной точки t соответствует в пространстве изображений деление изображения на s :

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \circ \bullet \frac{1}{s} F(s)$$

В основе этого правила лежит предположение, что функция $f(t)$ обладает изображением. При таком предположении автоматически обладает изображением и интеграл от функции $f(t)$.

Правило VIII (теорема интегрирования для изображения)

Как мы видели в предыдущем параграфе, дифференцированию изображения соответствует умножение оригинала на $-t$. Интегрированию изображения соответствует обратное действие — деление оригинала на $-t$, при условии что в качестве постоянной начальной точки интегрирования берется точка

$s = \infty$. Поэтому, заменив \int_{∞}^s на $-\int_s^{\infty}$, мы получим

$$\boxed{\frac{\hat{f}(t)}{t} \longleftrightarrow \int_s^{\infty} F(\sigma) d\sigma}$$

Это правило основано на предположении, что функция $\hat{f}(t)/t$ обладает изображением, следовательно, функция $\hat{f}(t)$ и подавно имеет изображение. В качестве пути интегрирования при вычислении интеграла \int_s^{∞} можно взять любой исходящий из точки s

луч, образующий с вещественной осью острый угол.

Правило VIII в противоположность остальным правилам применяется крайне редко и приводится здесь только ради полноты.

§ 9. Умножение и свертывание

До сих пор мы занимались операциями, производимыми над одной функцией. Теперь рассмотрим операции над комбинациями нескольких функций.

Сумме конечного числа оригиналов отвечает сумма соответствующих изображений. Этот факт настолько очевиден, что мы не будем формулировать его в виде особого правила ¹⁾. Следующей наиболее простой комбинацией является произведение. Начнем с произведения изображений.

Правило IX (теорема свертывания)

Произведению изображений $F_1(s) \cdot F_2(s)$ соответствует своеобразная интегральная комбинация функций $\hat{f}_1(t)$ и $\hat{f}_2(t)$, часто

¹⁾ Конечно, для бесконечно большого числа слагаемых такое соответствие имеет место не всегда. См. по этому поводу § 29.

встречающаяся в физике ¹⁾, а именно

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau. \quad (9.1)$$

Эта интегральная комбинация называется *сверткой* функций f_1 и f_2 и символически обозначается через $f_1 * f_2$ (читается: функция f_1 , свернутая с функцией f_2). Таким образом,

$$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau.$$

Указанный символ свертки, напоминающей символ произведения, практически удобен потому, что свертка ведет себя так же, как и произведение. А именно, она обладает свойством *коммутативности*, т. е.

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1,$$

или в раскрытом виде

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_2(\tau) f_1(t - \tau) d\tau \quad (9.2)$$

и свойством *ассоциативности*, т. е.

$$(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3). \quad (9.3)$$

Следовательно, свертка нескольких функций

$$f_1 * f_2 * \dots * f_n$$

всегда дает одинаковый результат независимо от того, в каком порядке выполняется свертывание.

Итак, мы имеем следующее правило, устанавливающее соответствие между сверткой оригиналов и произведением изображений

$$f_1 * f_2 \circ \bullet F_1 \cdot F_2 \quad (9.4)$$

Это правило основано на предположении, что существуют интегралы Лапласа от функций f_1 и f_2 и что по крайней мере один

¹⁾ Если, например, в течение времени, длящегося от $\tau = 0$ до $\tau = t$, действуют некоторые факторы $f_1(\tau)$, то их суммарный эффект в простейшем

случае равен $\int_0^t f_1(\tau) d\tau$. Но если каждому фактору приписать весовой коэф-

фициент f_2 , зависящий от промежутка времени, прошедшего между моментом τ возникновения фактора и моментом t наблюдения, следовательно, от $t - \tau$, то суммарный эффект всех факторов будет определяться интегралом (9.1).

из них абсолютно сходится¹⁾. В таком случае интеграл Лапласа от свертки $f_1 * f_2$ сходится автоматически.

Правило IX является после правила V важнейшим для приложений.

Правило X (теорема комплексного свертывания)

Произведению двух оригиналов соответствует «комплексная свертка» изображений. Если предположить, что при двух фиксированных вещественных значениях x_1 и x_2 интегралы

$$\int_0^{\infty} e^{-x_v t} |f_v(t)| dt, \quad \int_0^{\infty} e^{-2x_v t} |f_v(t)|^2 dt \quad (v = 1, 2) \quad (9.5)$$

сходятся, то при всех s , для которых $\operatorname{Re} s \geq x_1 + x_2$, имеет место соответствие

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \longleftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} F_1(\sigma) F_2(s-\sigma) d\sigma & \text{при } x_1 \leq x \leq \operatorname{Re} s - x_2 \\ \text{или} \\ \frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} F_1(s-\sigma) F_2(\sigma) d\sigma & \text{при } x_2 \leq x \leq \operatorname{Re} s - x_1 \end{cases} \quad (9.6)$$

Если абсциссы x прямых, вдоль которых производится интегрирование, будут выбраны так, как указано, то переменные, входящие в функции F_1 и F_2 , будут перемещаться в полуплоскости абсолютной сходимости интегралов Лапласа $\mathcal{L}\{f_1\}$ и $\mathcal{L}\{f_2\}$.

¹⁾ Интеграл $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл

$$\int_0^{\infty} |e^{-st} f(t)| dt = \int_0^{\infty} e^{-\operatorname{Re} s \cdot t} |f(t)| dt.$$

Это соблюдается для всех функций, которые мажорируются показательной функцией $|f(t)| < A e^{at}$ при условии, что $\operatorname{Re} s > a$.

Предположение (9.5) сохранится, если заменить f_2 на \bar{f}_2 . Функции \bar{f}_2 соответствует изображение

$$\mathfrak{L}\{\bar{f}_2\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \overline{f_2(t)} dt = \int_0^{\infty} e^{-s\bar{t}} f_2(t) dt = \overline{F_2(\bar{s})}.$$

Заменим в первом из соответствий (9.6) f_2 на \bar{f}_2 и $F_2(s)$ на $\overline{F_2(\bar{s})}$ и примем, что $s = x_1 + x_2$ и $x = x_1$. Тогда, заменив знак соответствия явным выражением интеграла Лапласа, мы получим

$$\int_0^{\infty} e^{-(x_1+x_2)t} f_1(t) \overline{f_2(t)} dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{x_1-j\infty}^{x_1+j\infty} F_1(\sigma) \overline{F_2(x_1+x_2-\bar{\sigma})} d\sigma,$$

или, положив $\sigma = x_1 + jy$, $\bar{\sigma} = x_1 - jy$:

$$\boxed{\int_0^{\infty} e^{-(x_1+x_2)t} f_1(t) \overline{f_2(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x_1 + jy) \overline{F_2(x_2 + jy)} dy} \quad (9.7)$$

Это соотношение называется *обобщенным равенством Парсеваля* для преобразования Лапласа. Оно справедливо, если выполняются условия (9.5).

При $f_1 = f_2 = f$ и $x_1 = x_2 = x$ соотношение (9.7) принимает вид

$$\boxed{\int_0^{\infty} e^{-2xt} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x + jy)|^2 dy} \quad (9.8)$$

которое называется *равенством Парсеваля* и справедливо, если сходятся интегралы

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} |f(t)| dt, \quad \int_0^{\infty} e^{-2xt} |f(t)|^2 dt. \quad (9.9)$$

Если положить $x = 0$, следовательно, предположить, что сходятся интегралы

$$\int_0^{\infty} |f(t)| dt, \quad \int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt, \quad (9.10)$$

то равенство Парсеваля примет вид

$$\boxed{\int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(jy)|^2 dy} \quad (9.11)$$

Это соотношение находит широкое применение в технических приложениях. Если, например, $f(t)$ есть ток на выходе электрической цепи, то равенство (9.11) определяет выраженную через плотность амплитуды $|F(jy)|$ полную энергию, необходимую для преодоления сопротивления, равного одному ому. Если $f(t)$ есть регулируемая величина системы регулирования, то интеграл

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

представляет собой так называемый *квадратичный критерий* качества регулирования. Один из способов оптимизации в технике регулирования состоит в придании этому критерию минимального значения. Так как в этом случае функция $f(t)$ вещественная, то $\overline{F(jy)} = F(-jy)$, и равенство (9.11) принимает вид

$$\int_0^{\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(jy) F(-jy) dy = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} F(\sigma) F(-\sigma) d\sigma. \quad (9.12)$$

Если $F(s)$ есть дробно-рациональная функция, то комплексный интеграл в правой части этого равенства можно определить путем вычисления вычетов. Результат будет зависеть от конечного числа постоянных, определяющих дробно-рациональную функцию, и может быть сделан минимальным при помощи методов дифференциального исчисления путем подходящего выбора постоянных.

* * *

В следующих главах будет показано, как при помощи преобразования Лапласа и изложенных выше правил можно решать некоторые типы функциональных уравнений со значительно меньшей затратой усилий, чем при помощи классических методов.

ГЛАВА 3

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 10. Дифференциальное уравнение первого порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами, но с произвольной *возмущающей*, или *возбуждающей*, функцией $f(t)$:

$$y' + c_0 y = f(t). \quad (10.1)$$

Обозначая отдельные члены этого уравнения малыми буквами, мы подчеркиваем, согласно принятому ранее условию, что уравнение задано в пространстве оригиналов. До сих пор мы применяли преобразование Лапласа только к функциям. Применим его теперь непосредственно к уравнению (10.1) и будем говорить, что для заданного *исходного уравнения* мы ищем *изображающее уравнение*. Очевидно, что для этого прежде всего следует умножить обе части исходного уравнения на e^{-st} и проинтегрировать от 0 до ∞ . Однако для более быстрого приобретения навыка в выполнении преобразования Лапласа следует вместо явного введения интеграла Лапласа пользоваться только его символом \mathfrak{L} ; тогда мы будем иметь

$$\mathfrak{L}\{y'\} + c_0 \mathfrak{L}\{y\} = \mathfrak{L}\{f\}. \quad (10.2)$$

Второй и важнейший шаг преобразования состоит в том, что применяется правило V и $\mathfrak{L}\{y'\}$ выражается через $\mathfrak{L}\{y\}$, причем одновременно вводятся вместо малых букв большие. В результате мы получаем

$$sY(s) - y(+0) + c_0 Y(s) = F(s). \quad (10.3)$$

Конечно, после некоторых упражнений можно не прибегать к записи уравнения (10.2) и вместо этого переходить от уравнения (10.1) непосредственно к уравнению (10.3), говоря при этом: «Я преобразую исходное уравнение в изображающее уравнение» или «я отображаю исходное уравнение в пространство изображений».

В изображающем уравнении (10.3) бросаются в глаза две его особенности: во-первых, оно является линейным *алгебраи-*

ческим уравнением относительно $Y(s)$, т. е. представляет собой в математическом отношении нечто несравненно более простое, чем первоначальное дифференциальное уравнение; во-вторых, оно содержит в себе значение $y(+0)$. Последняя особенность, как мы сейчас увидим, для нас особенно выгодна. В самом деле, для того чтобы из бесконечно большого числа решений дифференциального уравнения отобрать вполне определенное решение, необходимо задать значение функции $y(t)$ в какой-либо точке. В приложениях это делается обычно для *начальной точки* $t=0$, и поэтому соответствующее значение $y(+0)$ функции $y(t)$ называется *начальным значением*. При этом имеется в виду, что переход от начального значения к соседним значениям функции $y(t)$ совершается непрерывно или, наоборот, что это начальное значение является предельным значением, к которому неограниченно приближается функция $y(t)$, когда в решении переменная t стремится к нулю справа. Следовательно, мы имеем здесь дело именно со значением $y(+0)$; т. е. с тем начальным значением, которое входит в правило V (см. в связи с этим примечание 1 на стр. 42).

Возвращаясь к уравнению (10.3), мы видим, что начальное значение, необходимое для придания определенности решению дифференциального уравнения, вошло в изображающее уравнение само собой и поэтому учитывается в дальнейшем автоматически. Это обстоятельство придает методу решения дифференциальных уравнений посредством преобразования Лапласа значительное преимущество перед классическим методом, при использовании которого сначала отыскивается так называемое общее решение, зависящее от произвольной постоянной, а затем эта постоянная определяется так, чтобы функция $y(t)$ при $t \rightarrow 0$ приняла предписанное значение. [Конечно, можно сказать, что при применении преобразования Лапласа также появляется постоянная; однако эта постоянная уже заранее определенным образом связана с решением, а именно, она равна $y(+0)$.]

Решение изображающего уравнения (10.3) получается сразу и имеет вид

$$Y(s) = F(s) \frac{1}{s + c_0} + y(+0) \frac{1}{s + c_0}. \quad (10.4)$$

Таким образом, изображение $Y(s)$ искомой функции $y(t)$ найдено, и остается только найти *соответствующий этому изображению оригинал*. Для этой цели можно было бы воспользоваться формулой обращения, т. е. комплексным интегралом (2.8). Однако такого способа определения оригинала следует по возможности избегать и вместо этого поступать так же, как это делается при необходимости вычислить какой-либо интеграл. Известно, что в таких случаях не производят вычисления

интеграла на основании его определения как предела суммы. Вместо этого обращаются в таблице заранее вычисленных интегралов, и если это сразу не ведет к цели, то пытаются так разложить или преобразовать подынтегральное выражение, чтобы можно было свести вычисление к известным интегралам. Совершенно аналогично поступают и в нашем случае: обращаются к *таблице соответствий* между изображениями и оригиналами (см. Приложение в конце книги) и отыскивают в ней для найденного изображения соответствующий оригинал. Если же в таблице найденное изображение отсутствует, то делают попытку построить оригинал из имеющихся в таблице функций путем использования «грамматических правил» преобразования Лапласа, изложенных в гл. 2.

В случае изображения (10.4) оригинал отыскивается очень просто. А именно, изображение $1/(s + c_0)$ имеется в таблице соответствий под № 35 и ему соответствует оригинал $e^{-c_0 t}$. Таким образом, для второго слагаемого решения $Y(s)$ оригинал находится сразу. Что касается первого слагаемого, то оно представляет собой произведение двух изображений, поэтому ему соответствует, согласно правилу IX, свертка оригиналов. Обоим слагаемым вместе соответствует оригинал

$$y(t) = f(t) * e^{-c_0 t} + y(+0) e^{-c_0 t} = e^{-c_0 t} \int_0^t f(\tau) e^{c_0 \tau} d\tau + y(+0) e^{-c_0 t}, \quad (10.5)$$

что и представляет собой решение дифференциального уравнения (10.1) при заданном начальном значении функции $y(t)$.

Подчеркнем, что мы сразу нашли решение неоднородного уравнения (с возмущающим членом f), в то время как при использовании классическим методом сначала решается однородное уравнение (с $f \equiv 0$) и только затем, путем вариации постоянных, отыскивается решение неоднородного уравнения.

Рассмотренный метод решения можно наглядно изобразить в виде следующей схемы¹⁾:

Схема

Пространство
оригиналов:

дифференциальное уравнение
+ начальное условие

решение

\mathfrak{L} -преобразование

\mathfrak{L}^{-1} -преобразование

Пространство
изображений:

алгебраическое уравнение

→ решение

¹⁾ Решение путем преобразования Лапласа других функциональных уравнений изображается такой же схемой.

Эта схема показывает, что непосредственное решение дифференциального уравнения, заданного вместе с начальным условием в пространстве оригиналов, заменяется косвенным решением в пространстве изображений, а именно: сначала от заданного дифференциального уравнения мы переходим посредством прямого преобразования Лапласа к изображающему уравнению, которое является алгебраическим уравнением, а затем, решив изображающее уравнение, переходим посредством обратного преобразования Лапласа назад в пространство оригиналов и получаем при этом решение первоначальной задачи.

Из формулы (10.5) мы видим, что изображение $F(s)$ возмущающей функции $f(t)$ понадобилось нам только для вывода результата, сам же результат, т. е. решение $y(t)$, получается без предварительного нахождения изображения $F(s)$. Тем не менее во многих случаях практически выгоднее вместо вычисления свертки, т. е. интеграла в формуле (10.5), найти изображение $F(s)$, а затем, рассматривая выражение $F(s)/(s + c_0)$ как *единое изображение*, перейти от него посредством обратного преобразования Лапласа назад в пространство оригиналов. Пусть, например, $f(t) \equiv u(t)$, следовательно,

$$F(s) = \frac{1}{s}$$

и

$$\frac{F(s)}{s + c_0} = \frac{1}{s(s + c_0)}. \quad (10.6)$$

Это изображение имеется в таблице соответствий под № 40 и ему соответствует оригинал

$$\frac{1}{c_0} (1 - e^{-c_0 t}).$$

Результат получается так же просто и в тех случаях, когда $f(t)$ представляет собой степенную или показательную функцию. Остановимся подробнее на случае, когда возбуждающей функцией $f(t)$ является *синусоидальное колебание* $e^{j\omega t}$. На основании примера 3, рассмотренного в § 4, мы имеем

$$F(s) \frac{1}{s + c_0} = \frac{1}{(s - j\omega)(s + c_0)}.$$

Это изображение значится в таблице соответствий под № 44 и ему соответствует оригинал

$$\frac{1}{c_0 + j\omega} (e^{j\omega t} - e^{-c_0 t}).$$

Для того чтобы найти решение для случая $f(t) \equiv \cos \omega t$ или $\sin \omega t$, представим это выражение в виде

$$\frac{c_0 - j\omega}{c_0^2 + \omega^2} (\cos \omega t + j \sin \omega t - e^{-c_0 t})$$

и разложим его на вещественную и мнимую части; мы получим:

$$\text{вещественная часть} = \frac{1}{c_0^2 + \omega^2} [\omega \sin \omega t + c_0 (\cos \omega t - e^{-c_0 t})],$$

$$\text{мнимая часть} = \frac{1}{c_0^2 + \omega^2} [c_0 \sin \omega t - \omega (\cos \omega t - e^{-c_0 t})].$$

Для получения полного решения остается добавить член $y(+0)e^{-c_0 t}$. При положительном c_0 члены полного решения, содержащие $e^{-c_0 t}$, с увеличением t затухают до нуля и остается только гармоническое колебание с такой же круговой частотой ω , как у возмущающего колебания, но с другими амплитудой и фазой.

§ 11. Дифференциальное уравнение второго порядка

Для дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + c_1 y' + c_0 y = f(t), \quad (11.1)$$

коэффициенты которого будем предполагать вещественными¹⁾, изображающим уравнением, согласно правилу V, будет

$$[s^2 Y - y(+0)s - y'(+0)] + c_1 [sY - y(+0)] + c_0 Y = F(s).$$

В него входят два начальных значения, а именно, начальное значение самой функции y и начальное значение ее производной y' . Именно столько значений и должно быть задано для того, чтобы решение дифференциального уравнения второго порядка было однозначно определено. Изображающее уравнение опять является линейным алгебраическим уравнением. Его решение получается сразу и имеет вид

$$Y(s) = F(s) \frac{1}{s^2 + c_1 s + c_0} + y(+0) \frac{s + c_1}{s^2 + c_1 s + c_0} + y'(+0) \frac{1}{s^2 + c_1 s + c_0}. \quad (11.2)$$

Хотя оригиналы, соответствующие отдельным слагаемым этого решения, можно взять прямо из таблицы соответствий, мы все же покажем, как их можно вычислить, так как это послу-

¹⁾ Мы разделили все члены уравнения на коэффициент при y'' , поэтому коэффициент при высшей производной стал равным единице. Это облегчит дальнейшие вычисления.

жит хорошим упражнением для решения дифференциального уравнения любого порядка. Дроби, входящие в формулу (11.2), суть рациональные функции, в которых степень числителя ниже степени знаменателя. Такие функции могут быть разложены на так называемые простейшие дроби совершенно так же, как это делается в интегральном исчислении при интегрировании дробно-рациональных функций. Для этого прежде всего найдем нули α_1 и α_2 многочлена, входящего в знаменатель функций, т. е. представим этот многочлен в виде произведения двух линейных множителей:

$$p(s) = s^2 + c_1 s + c_0 = (s - \alpha_1)(s - \alpha_2).$$

Дальнейшие вычисления будут различными в зависимости от того, будет ли $\alpha_1 \neq \alpha_2$ или $\alpha_1 = \alpha_2$.

Первый случай: $\alpha_1 \neq \alpha_2$

В этом случае дробно-рациональные функции, входящие в формулу (11.2), могут быть разложены на сумму двух дробей:

$$\frac{d_1}{s - \alpha_1} + \frac{d_2}{s - \alpha_2},$$

из которых каждая содержит в знаменателе только один линейный множитель. Применим такое разложение сначала к первой дробно-рациональной функции из формулы (11.2) и напишем

$$\frac{1}{p(s)} = \frac{1}{s^2 + c_1 s + c_0} = \frac{d_1}{s - \alpha_1} + \frac{d_2}{s - \alpha_2}. \quad (11.3)$$

Для определения пока неизвестных коэффициентов d_1 и d_2 сложим обе дроби в правой части равенства¹⁾:

$$\frac{1}{p(s)} = \frac{(d_1 + d_2)s - (d_1\alpha_2 + d_2\alpha_1)}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)}.$$

Приравняв множители при одинаковых степенях s в числителях слева и справа, мы получим для определения коэффициентов d_1 и d_2 уравнения

$$d_1 + d_2 = 0, \quad \alpha_2 d_1 + \alpha_1 d_2 = -1;$$

из которых найдем

$$d_1 = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad d_2 = -\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

Так как для каждой из полученных простейших дробей оригиналы известны, то оригиналом всей дробно-рациональной

¹⁾ В § 12 мы познакомимся с более изящным способом определения этих коэффициентов.

функции (11.3) будет

$$G(s) = \frac{1}{p(s)} \rightarrow \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} (e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}) = g(t), \quad (11.4)$$

причем α_1 и α_2 в явном виде равны соответственно

$$\alpha_1 = -\frac{c_1}{2} + \sqrt{-D}, \quad \alpha_2 = -\frac{c_1}{2} - \sqrt{-D},$$

где

$$D = c_0 - \frac{c_1^2}{4}$$

есть дискриминант уравнения $s^2 + c_1 s + c_0 = 0$.

Если $D < 0$, т. е. если

$$\frac{c_1^2}{4} > c_0,$$

то $k = \sqrt{-D}$ есть вещественное число, и

$$g(t) = \frac{1}{2k} e^{-c_1 t/2} (e^{kt} - e^{-kt}) = \frac{1}{k} e^{-c_1 t/2} \operatorname{sh} kt, \quad (11.5)$$

следовательно, движение, определяемое функцией $g(t)$, есть апериодическое движение.

Если же $D > 0$, т. е. если

$$\frac{c_1^2}{4} < c_0,$$

то нули α_1 и α_2 суть комплексно-сопряженные числа, и поэтому функция $g(t)$ записывается в комплексной форме. Однако в действительности функция $g(t)$ представляет собой вещественную функцию. В самом деле, положив $\sqrt{-D} = \omega j$, мы получим

$$g(t) = \frac{1}{2\omega j} e^{-c_1 t/2} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) = \frac{1}{\omega} e^{-c_1 t/2} \sin \omega t. \quad (11.6)$$

В этой вещественной форме функцию $g(t)$ можно получить также непосредственно, если преобразовать выражение $G(s) = 1/p(s)$ к виду

$$G(s) = \frac{1}{(s + c_1/2)^2 + (c_0 - c_1^2/4)} = \frac{1}{(s + c_1/2)^2 + D} = \frac{1}{(s + c_1/2)^2 + \omega^2}$$

и затем воспользоваться соответствием

$$\frac{1}{s^2 + \omega^2} \rightarrow \frac{1}{\omega} \sin \omega t$$

(см. таблицу соответствий, № 38). Применив это соответствие к нашему случаю, мы на основании правила IV (теорема

затухания) найдем

$$G(s) \rightarrow \frac{1}{\omega} e^{-c_1 t/2} \sin \omega t = g(t).$$

Таким образом, движение, определяемое функцией $g(t)$ в случае $D > 0$, есть периодическое колебание, которое вследствие наличия множителя $e^{-c_1 t/2}$ либо затухает, либо нарастает.

Если $c_1^2/4 < c_0$, то из практических соображений целесообразнее взять эти коэффициенты с самого начала в виде

$$c_1 = 2\delta, \quad c_0 = \delta^2 + \omega^2, \quad (11.7)$$

т. е. придать дифференциальному уравнению (11.1) вид

$$y'' + 2\delta y' + (\delta^2 + \omega^2) y = f(t). \quad (11.8)$$

Тогда мы будем иметь $D = \omega^2$, и

$$G(s) = \frac{1}{p(s)} \rightarrow \frac{1}{\omega} e^{-\delta t} \sin \omega t. \quad (11.9)$$

Следовательно, в этом случае запись дифференциального уравнения (11.8) сразу указывает круговую частоту ω и затухание δ , соответствующие функции $g(t)$. Кроме того, для отношения двух последовательных экстремальных амплитуд затухающего колебания получается постоянное значение $e^{-\pi\delta/\omega}$. Так называемый коэффициент затухания δ/ω позволяет сразу судить о затухании колебаний.

Перейдем к отысканию оригинала для второй дробно-рациональной функции из изображения (11.2). Представив ее в виде суммы простейших дробей, мы получим

$$\frac{s + c_1}{p(s)} = \frac{d_1}{s - \alpha_1} + \frac{d_2}{s - \alpha_2} = \frac{(d_1 + d_2)s - (d_1\alpha_2 + d_2\alpha_1)}{p(s)}$$

и для определения коэффициентов d_1 и d_2 будем иметь уравнения

$$d_1 + d_2 = 1, \quad \alpha_2 d_1 + \alpha_1 d_2 = -c_1,$$

откуда, имея в виду, что $-c_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, найдем

$$d_1 = \frac{-\alpha_1 - c_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}, \quad d_2 = \frac{\alpha_2 + c_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1},$$

следовательно,

$$\frac{s + c_1}{p(s)} \rightarrow \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} (\alpha_2 e^{\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{\alpha_2 t}) = g_1(t). \quad (11.10)$$

Если для случая $D > 0$ использовать запись коэффициентов c_1 и c_0 в виде (11.7), то обратный переход в пространство оригиналов осуществляется особенно просто (см. таблицу

соответствий, № 38 и 48, а также правило IV). А именно, мы получим

$$\frac{s+2\delta}{s^2+2\delta s+\delta^2+\omega^2} = \frac{s+\delta}{(s+\delta)^2+\omega^2} + \frac{\delta}{\omega} \frac{\omega}{(s+\delta)^2+\omega^2} \bullet \circ e^{-\delta t} \cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} e^{-\delta t} \sin \omega t = g_1(t). \quad (11.11)$$

Второй случай: $\alpha_1 = \alpha_2$ ($D = 0$)

В этом случае

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{c_1}{2}$$

и, согласно таблице соответствий, № 42, мы имеем

$$\frac{1}{p(s)} = \frac{1}{(s-\alpha_1)^2} \bullet \circ te^{\alpha_1 t} = te^{-c_1 t/2} = g(t), \quad (11.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{s+c_1}{p(s)} &= \frac{s+c_1}{(s+c_1/2)^2} = \\ &= \frac{1}{s+c_1/2} + \frac{c_1/2}{(s+c_1/2)^2} \bullet \circ e^{-c_1 t/2} + \frac{c_1}{2} te^{-c_1 t/2} = g_1(t). \end{aligned} \quad (11.13)$$

Итак, мы нашли оригиналы $g(t)$ и $g_1(t)$, соответствующие дробно-рациональным функциям, входящим в формулу (11.2). Теперь остается применить к первому члену правой части формулы (11.2) правило IX (теорему свертывания), и мы получим решение дифференциального уравнения (11.1) в следующем виде:

$$y(t) = f(t) * g(t) + y(+0)g_1(t) + y'(+0)g(t). \quad (11.14)$$

В практических расчетах выведенные здесь общие формулы не должны применяться; вместо этого следует каждый раз вновь выполнять указанные выше отдельные шаги решения.

Так поступать следует потому, что вычисление свертки $f * g$, определяемой интегралом (9.1), представляет собой очень неудобную операцию, между тем часто ее можно избежать путем явного определения изображения $F(s)$ и последующего перевода функции $F(s)/p(s)$ в ее «комплектном» виде из пространства изображений в пространство оригиналов. В самом деле, в практически наиболее частых случаях возбуждающая функция $f(t)$ имеет один из следующих видов: $u(t)$, e^{at} , $t^n e^{at}$, $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$. Во всех этих случаях изображение $F(s)$ представляет собой дробно-рациональную функцию, поэтому такой же функцией является и изображение $F(s)/p(s)$, следовательно, соответствующий оригинал можно определить непосредственно путем разложения $F(s)/p(s)$ на простейшие дроби. Рассмотрим численный пример, иллюстрирующий этот способ.

Численный пример

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y'' + 10y' + 74y = 28 \sin 4t$$

с начальными условиями

$$y(+0) = 0, \quad y'(+0) = 2.$$

Изображающим уравнением будет

$$s^2 Y - 2 + 10sY + 74Y = \frac{112}{s^2 + 16}.$$

Решив это уравнение, мы получим

$$Y = \frac{112}{(s^2 + 16)(s^2 + 10s + 74)} + \frac{2}{s^2 + 10s + 74}.$$

Рассмотрим сначала второе слагаемое и найдем корни уравнения

$$s^2 + 10s + 74 = 0.$$

Они равны

$$\alpha_1 = -5 + 7j, \quad \alpha_2 = -5 - 7j,$$

следовательно, мы должны принять, что

$$\frac{1}{s^2 + 10s + 74} = \frac{d_1}{s + 5 - 7j} + \frac{d_2}{s + 5 + 7j}.$$

Приравняв множители при одинаковых степенях s в числителях слева и справа, мы получим уравнения для определения коэффициентов d_1 и d_2 :

$$d_1 + d_2 = 0,$$

$$(5 + 7j)d_1 + (5 - 7j)d_2 = 1,$$

из которых найдем

$$d_1 = \frac{1}{14j}, \quad d_2 = -\frac{1}{14j}.$$

Изображению

$$\frac{1}{s^2 + 10s + 74} = \frac{\frac{1}{14j}}{s + 5 - 7j} - \frac{\frac{1}{14j}}{s + 5 + 7j}$$

соответствует оригинал

$$g(t) = \frac{1}{14j} (e^{(-5+7j)t} - e^{(-5-7j)t}) = \frac{1}{7} e^{-5t} \sin 7t.$$

При достаточном навыке в вычислениях к этому результату можно прийти, минуя комплексные величины. В самом деле, нетрудно видеть, что

$$\frac{1}{s^2 + 10s + 74} = \frac{1}{7} \frac{7}{(s+5)^2 + 49}.$$

На основании примера 5 из § 3 мы имеем

$$\frac{7}{s^2 + 49} \longleftrightarrow \sin 7t.$$

Применив теперь теорему затухания, мы сразу получим функцию $g(t)$.

Оригинал, соответствующий первому слагаемому изображения Y , можно было бы вычислить на основании теоремы свертывания. Однако поскольку это слагаемое, включающее в себя в явном виде изображение $F(s)$ возмущающей функции $f(t)$, представляет собой дробно-рациональную функцию, целесообразно воспользоваться опять разложением на простейшие дроби. Знаменатель имеет четыре различных нуля:

$$4j, \quad -4j, \quad -5 + 7j, \quad -5 - 7j,$$

поэтому разложение на простейшие дроби должно иметь вид

$$\frac{112}{(s^2 + 16)(s^2 + 10s + 74)} = \frac{d_1}{s - 4j} + \frac{d_2}{s + 4j} + \frac{d_3}{s + 5 - 7j} + \frac{d_4}{s + 5 + 7j}.$$

Приведя к общему знаменателю правую часть этого равенства, мы получим в числителе

$$\begin{aligned} & d_1(s + 4j)(s^2 + 10s + 74) + d_2(s - 4j)(s^2 + 10s + 74) + \\ & + d_3(s^2 + 16)(s + 5 + 7j) + d_4(s^2 + 16)(s + 5 - 7j) = \\ & = s^3(d_1 + d_2 + d_3 + d_4) + \\ & + s^2[(10 + 4j)d_1 + (10 - 4j)d_2 + (5 + 7j)d_3 + (5 - 7j)d_4] + \\ & + s[(74 + 40j)d_1 + (74 - 40j)d_2 + 16d_3 + 16d_4] + \\ & + [296jd_1 - 296jd_2 + (80 + 112j)d_3 + (80 - 112j)d_4], \end{aligned}$$

следовательно, d_1 , d_2 , d_3 и d_4 должны удовлетворять линейным уравнениям

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 + d_3 + d_4 &= 0, \\ (10 + 4j)d_1 + (10 - 4j)d_2 + (5 + 7j)d_3 + (5 - 7j)d_4 &= 0, \\ (74 + 40j)d_1 + (74 - 40j)d_2 + 16d_3 + 16d_4 &= 0, \\ 296jd_1 - 296jd_2 + (80 + 112j)d_3 + (80 - 112j)d_4 &= 112. \end{aligned}$$

Решив эти уравнения, мы найдем

$$\begin{aligned} d_1 &= -\frac{7}{1241}(20 + 29j), & d_2 &= -\frac{7}{1241}(20 - 29j), \\ d_3 &= \frac{4}{1241}(35 + 4j), & d_4 &= \frac{4}{1241}(35 - 4j). \end{aligned}$$

Таким образом, первому слагаемому изображения Y соответствует оригинал

$$\begin{aligned} & -\frac{7}{1241} (20 + 29j) e^{4jt} - \frac{7}{1241} (20 - 29j) e^{-4jt} + \\ & + \frac{4}{1241} (35 + 4j) e^{(-5+7j)t} + \frac{4}{1241} (35 - 4j) e^{(-5-7j)t} = \\ & = -\frac{7}{1241} [20 (e^{4jt} + e^{-4jt}) + 29j (e^{4jt} - e^{-4jt})] + \\ & + \frac{4}{1241} e^{-5t} [35 (e^{7jt} + e^{-7jt}) + 4j (e^{7jt} - e^{-7jt})] = \\ & = -\frac{14}{1241} (20 \cos 4t - 29 \sin 4t) + \frac{8}{1241} e^{-5t} (35 \cos 7t - 4 \sin 7t). \end{aligned}$$

Сложив с этим оригиналом ранее вычисленный оригинал для второго слагаемого изображения, мы получим полное решение.

Выполняя в рассмотренных примерах разложение дробно-рациональной функции на простейшие дроби, мы применяли каждый раз примитивный способ: складывали дроби и, приравнявая затем множители при одинаковых степенях s в числителях слева и справа, получали систему линейных уравнений для определения коэффициентов d_1, d_2, \dots . Решение такой системы уравнений при большом числе неизвестных требует много времени и весьма утомительно, поэтому в следующем параграфе мы покажем на примере дифференциального уравнения любого порядка, как можно выполнять разложение на простейшие дроби значительно более простым способом.

§ 12. Неоднородное дифференциальное уравнение n -го порядка с начальными значениями, равными нулю

Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение n -го порядка

$$y^{(n)} + c_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + c_1y' + c_0y = f(t) \quad (12.1)$$

(как и в ранее рассмотренных примерах, мы принимаем, что коэффициент при высшей производной равен единице; это не только упрощает последующие вычисления, но делает их, как показывает опыт, более надежными с точки зрения предохранения от случайных ошибок). Для однозначной определенности решения уравнения (12.1) необходимо задать n начальных значений, т. е. значения

$$y(+0), \quad y'(+0), \quad y''(+0), \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(+0).$$

Для упрощения записи будем обозначать их в дальнейшем просто через $y(0), y'(0)$ и т. д. Таким образом, нам необходимо

решить так называемую задачу с начальными значениями (задачу Коши) для дифференциального уравнения (12.1). Для большей обозримости решения разобьем эту задачу на два этапа. Сначала предположим, что дифференциальное уравнение неоднородное, т. е. возбуждающая функция $f(t)$ не равна тождественно нулю, но зато все начальные значения равны нулю (на практике такой случай встречается чаще всего). Затем в § 14 мы рассмотрим однородное дифференциальное уравнение, т. е. случай, когда $f(t) \equiv 0$, но начальные значения примем произвольными.

Сложив оба найденные решения, мы получим решение общей задачи, т. е. решение неоднородного дифференциального уравнения с произвольными начальными значениями.

Итак, рассмотрим дифференциальное уравнение (12.1) с начальными условиями

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0. \quad (12.2)$$

Тогда изображающим уравнением на основании правила V будет

$$s^n Y + c_{n-1} s^{n-1} Y + \dots + c_1 s Y + c_0 Y = F(s). \quad (12.3)$$

Его решение, если ввести для сокращения записи обозначение

$$s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_1 s + c_0 = p(s), \quad (12.4)$$

имеет вид

$$Y(s) = \frac{1}{p(s)} F(s). \quad (12.5)$$

Найдя теперь оригинал для изображения

$$G(s) = \frac{1}{p(s)}$$

и применив затем теорему свертывания, мы сразу получим искомое решение $y(t)$ заданного дифференциального уравнения.

Отыскание оригинала для изображения $G(s)$ выполним, как и в ранее рассмотренных случаях, посредством разложения функции $G(s)$ на простейшие дроби. Для этого прежде всего определим нули $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ многочлена $p(s)$, т. е. представим $p(s)$ в виде произведения линейных множителей¹⁾

$$p(s) = (s - \alpha_1)(s - \alpha_2) \dots (s - \alpha_n). \quad (12.6)$$

Определение нулей при больших значениях n посредством классического метода требует чрезвычайно много времени.

¹⁾ Определение нулей является первым шагом также в классическом методе решения дифференциального уравнения (12.1). Уравнение $p(s) = 0$, получающееся при пользовании этим методом, называется характеристическим уравнением.

Однако если в распоряжении имеется электронно-цифровая вычислительная машина, то даже при $n = 20$ или 30 нули могут быть вычислены с большой точностью в течение немногих минут¹⁾.

Уже при рассмотрении дифференциального уравнения второго порядка ($n = 2$) выяснилось, что наличие равных нулей требует особого подхода; поэтому и здесь мы рассмотрим этот случай отдельно.

Первый случай: все нули α_v различны

При неравных α_v разложение функции $G(s)$ на простейшие дроби имеет вид

$$G(s) = \frac{1}{p(s)} = \frac{d_1}{s - \alpha_1} + \frac{d_2}{s - \alpha_2} + \dots + \frac{d_n}{s - \alpha_n}. \quad (12.7)$$

Оно показывает, что функция $G(s)$ имеет простые полюсы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Коэффициенты d_1, d_2, \dots, d_n (вычеты полюсов) могут быть найдены значительно проще, чем это было сделано в § 11 при рассмотрении частных случаев, следующим образом. Умножим равенство (12.7) на $s - \alpha_1$; тогда первое слагаемое в правой части будет состоять только из коэффициента d_1 , в то время как все остальные слагаемые будут содержать множитель $s - \alpha_1$. Если мы будем приближать s к α_1 , то все слагаемые в правой части, кроме первого, исчезнут, т. е. в правой части останется только коэффициент d_1 без всякого множителя. Найдем теперь предел, к которому стремится левая часть при $s \rightarrow \alpha_1$. Имея в виду, что $p(\alpha_1) = 0$, мы получим

$$\lim_{s \rightarrow \alpha_1} \frac{s - \alpha_1}{p(s)} = \lim_{s \rightarrow \alpha_1} \frac{1}{\frac{p(s) - p(\alpha_1)}{s - \alpha_1}} = \frac{1}{p'(\alpha_1)},$$

следовательно,

$$d_1 = \frac{1}{p'(\alpha_1)}.$$

Аналогичным образом мы найдем остальные коэффициенты d_2, \dots, d_n :

$$d_2 = \frac{1}{p'(\alpha_2)}, \dots, d_n = \frac{1}{p'(\alpha_n)},$$

¹⁾ Muller D. E., A method of solving algebraic equations using an automatic computer, Math. Tables Aids Comp. **10** (1956), 208—215; Frank W. L., Finding zeros of arbitrary functions, Journ. of the Association for Computing Machinery **5** (1958), 154—160. Методы, изложенные в этих работах, с успехом используются, например, в Космической технологической лаборатории в Redondo Beach, California (письменное сообщение).

и разложение функции $G(s)$ на простейшие дроби будет иметь вид

$$G(s) = \frac{1}{p(s)} = \sum_{v=1}^n \frac{1}{p'(\alpha_v)} \frac{1}{s - \alpha_v}. \quad (12.8)$$

Таким образом, для разложения функции $G(s)$ на простейшие дроби следует составить производную многочлена $p(s)$ и вычислить значения $p'(\alpha_v)$, что гораздо проще решения системы линейных уравнений с n неизвестными.

Для практических вычислений иногда удобно использовать следующие формулы. Согласно правилу дифференцирования произведения, мы имеем

$$p'(s) = (s - \alpha_2)(s - \alpha_3) \dots (s - \alpha_n) + (s - \alpha_1)(s - \alpha_3) \dots (s - \alpha_n) + \dots,$$

следовательно,

$$p'(\alpha_1) = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3) \dots (\alpha_1 - \alpha_n),$$

$$p'(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3) \dots (\alpha_2 - \alpha_n)$$

и т. д. Таким образом, определение коэффициентов d_1, \dots, d_n сводится к вычислению произведений.

Применим эти формулы к численному примеру, рассмотренному в § 11. Мы имели там

$$p(s) = (s^2 + 16)(s^2 + 10s + 74),$$

поэтому

$$p'(\alpha_1) = 8j(5 - 3j)(5 + 11j) = -320 + 464j,$$

$$\frac{1}{p'(\alpha_1)} = \frac{1}{-320 + 464j} = \frac{-320 - 464j}{320^2 + 464^2} = \frac{-20 - 29j}{19856}.$$

Так как в том примере при функции $1/p(s)$ был еще множитель 112, то только что вычисленный коэффициент необходимо умножить на 112, после чего мы получим то же значение для d_1 , что и на стр. 60, но со значительно меньшей затратой времени на вычисления.

Вернемся к формуле (12.8). Изображению $G(s)$ соответствует оригинал

$$g(t) = \sum_{v=1}^n \frac{1}{p'(\alpha_v)} e^{\alpha_v t} \quad (12.9)$$

Оригинал $y(t)$, соответствующий изображению (12.5), т. е. решение дифференциального уравнения (12.1) при начальных условиях (12.2), мы можем представить теперь в следующем

простом виде:

$$\boxed{y(t) = g(t) * f(t)} \quad (12.10)$$

Таким образом, практическое применение полученных результатов разбивается на следующие операции: 1) вычисление нулей функции $p(s)$; 2) определение оригинала $g(t)$ по формуле (12.9); 3) вычисление свертки (12.10). Последней операции, как было показано в примере, разобранным на стр. 59—61, иногда можно избежать, если найти в явном виде изображение $F(s)$, а затем перевести решение $F(s)/p(s)$, рассматриваемое как единое целое, из пространства изображений в пространство оригиналов. Еще один пример такого рода мы приведем на стр. 71—73.

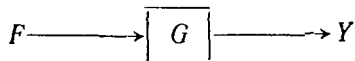
В электротехнике для функций $f(t)$ и $y(t)$ применяются названия, сразу подсказывающие их роль в рассматриваемом физическом процессе. Если дифференциальное уравнение описывает электрическую цепь, то функция $f(t)$ может означать, например, напряжение, приложенное к входным зажимам, а функция $y(t)$ — ток на выходе, в связи с чем в этом, а также в других случаях возбуждающую функцию $f(t)$ называют *входной функцией*, а функцию $y(t)$ — *выходной функцией*. Иногда функцию $f(t)$ называют также *возбуждением*, а функцию $y(t)$ — *откликом* на возбуждение. Эти названия переносят также в пространство изображений и называют $F(s)$ входной функцией или возбуждением, а $Y(s)$ — выходной функцией или откликом на возбуждение. В пространстве изображений связь между входной и выходной функциями имеет особенно простой вид:

$$\boxed{Y(s) = G(s) F(s)} \quad (12.11)$$

По этой причине при всех расчетах физической системы, описываемой дифференциальным уравнением, остаются возможно дольше в пространстве изображений и переходят в пространство оригиналов только после того, как возникает необходимость в получении численных данных о выходной функции $y(t)$. Ниже мы неоднократно встретимся с примерами подобного рода.

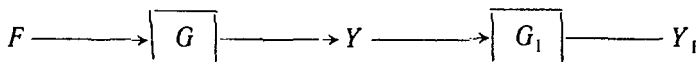
Функция $G(s)$, зависящая от постоянных c_{n-1}, \dots, c_0 , т. е. от внутренней структуры физической системы, и связывающая функции $F(s)$ и $Y(s)$ в формуле (12.11), называется *коэффициентом передачи*, или *передаточной функцией*. Соответствующая функция в пространстве оригиналов, т. е. $g(t)$, называется в математике *функцией Грина* для рассматриваемой задачи, а в электротехнике — *весовой функцией* (см. в связи с этим сноску на стр. 46).

Связь между функциями F , Y и G нагляднее всего изображается при помощи следующей блок-схемы:



Физическая система представлена в этой схеме блоком, обозначенным буквой G . Величина G является единственной, которую необходимо знать о рассматриваемой физической системе; последняя полностью характеризуется этой величиной. Функция F «входит» в блок, функция Y «выходит» из блока.

Блок-схема особенно удобна в случае нескольких физических систем, соединенных между собой. Так, например, если выходная функция первой системы с передаточной функцией G служит входной функцией второй системы с передаточной функцией G_1 , то при помощи блоков такая связь изображается схемой



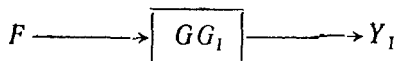
В этом случае

$$Y = GF, \quad Y_1 = G_1 Y,$$

следовательно,

$$Y_1 = GG_1 F;$$

поэтому обе системы могут быть заменены одной системой с передаточной функцией GG_1 :



Применение блок-схем в пространстве изображений приводит к очень наглядным соотношениям, особенно в случае автоматических систем с обратными связями. Поясним это на простом

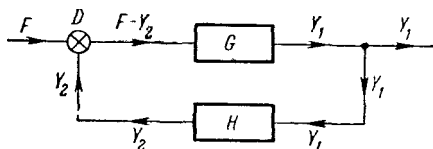


Рис. 12.1. Система с обратной связью.

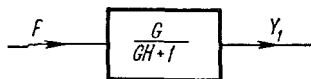


Рис. 12.2. Блок-схема для системы с обратной связью.

примере (рис. 12.1). Пусть выходная функция Y_1 блока G питает блок H , лежащий на линии обратной связи и создающий на своем выходе функцию Y_2 . Эта функция подводится к элементу D , к которому подается также входная функция F и который создает разность $F - Y_2$ (иногда также сумму $F + Y_2$).

Эта разность попадает в виде входной функции в блок G (рис. 12.1). Следовательно,

$$Y_1 = G(F - Y_2), \quad Y_2 = HY_1.$$

Исключив из этих соотношений Y_2 , мы получим

$$Y_1 = \frac{G}{GH + 1} F.$$

Таким образом, всю систему можно изобразить в виде одного-единственного блока с надписью $G/(GH + 1)$ (рис. 12.2). Рассматриваемая система с обратной связью обеспечивает деление передаточной функции G на $GH + 1$.

Второй случай: среди нулей α_v имеются равные

В этом случае некоторые нули являются кратными. Если обозначить различные нули через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, то каждому нулю α_v следует приписать кратность k_v , и разложение многочлена $p(s)$ на линейные множители будет иметь вид

$$p(s) = (s - \alpha_1)^{k_1} (s - \alpha_2)^{k_2} \dots (s - \alpha_m)^{k_m}. \quad (12.12)$$

Теперь при разложении функции $G(s) = 1/p(s)$ на простейшие дроби нулю α_v будет соответствовать не одна-единственная дробь с величиной $s - \alpha_v$ в знаменателе, а k_v дробей с величинами $s - \alpha_v, (s - \alpha_v)^2, \dots, (s - \alpha_v)^{k_v}$ в знаменателе. В результате мы будем иметь

$$G(s) = \frac{1}{p(s)} = \frac{d_1^{(1)}}{s - \alpha_1} + \frac{d_1^{(2)}}{(s - \alpha_1)^2} + \dots + \frac{d_1^{(k_1)}}{(s - \alpha_1)^{k_1}} +$$

$$\dots + \frac{d_m^{(1)}}{s - \alpha_m} + \frac{d_m^{(2)}}{(s - \alpha_m)^2} + \dots + \frac{d_m^{(k_m)}}{(s - \alpha_m)^{k_m}}. \quad (12.13)$$

Этому изображению соответствует оригинал

$$g(t) = e^{\alpha_1 t} \left(d_1^{(1)} + d_1^{(2)} \frac{t}{1!} + \dots + d_1^{(k_1)} \frac{t^{k_1-1}}{(k_1-1)!} \right) +$$

$$\dots + e^{\alpha_m t} \left(d_m^{(1)} + d_m^{(2)} \frac{t}{1!} + \dots + d_m^{(k_m)} \frac{t^{k_m-1}}{(k_m-1)!} \right) \quad (12.14)$$

(см. пример 7 в § 3). Имея этот оригинал, мы получим искомое решение дифференциального уравнения (12.1) опять в виде (12.10).

Для определения коэффициентов $d_v^{(\lambda)}$ служит формула

$$d_v^{(\lambda)} = \frac{1}{(k_v - \lambda)!} \left\{ \frac{d^{k_v - \lambda}}{ds^{k_v - \lambda}} \left[\frac{1}{r_v(s)} \right] \right\}_{s=\alpha_v}, \quad (12.15)$$

в которой $r_v(s)$ означает функцию, получаемую делением многочлена (12.12) на множитель $(s - \alpha_v)^{k_v}$, т. е.

$$r_v(s) = \frac{p(s)}{(s - \alpha_v)^{k_v}}.$$

Однако на практике часто проще пользоваться не этой формулой, а приемом, изложенным в следующем примере.

Численный пример

Пусть определение нулей привело к следующему разложению многочлена $p(s)$ на множители:

$$p(s) = (s - 2)^3 (s + 5) (s + 7),$$

т. е. кратность нуля 2 равна 3, а кратность нулей -5 и -7 равна 1. Из этого сразу следует, что

$$\begin{aligned} p(2) &= p'(2) = p''(2) = 0, & p'''(2) &\neq 0, \\ p(-5) &= 0, & p'(-5) &\neq 0, \\ p(-7) &= 0, & p'(-7) &\neq 0. \end{aligned}$$

Разложение на простейшие дроби должно иметь вид

$$\frac{1}{(s-2)^3(s+5)(s+7)} = \frac{g_3}{(s-2)^3} + \frac{g_2}{(s-2)^2} + \frac{g_1}{s-2} + \frac{h}{s+5} + \frac{k}{s+7}.$$

Для того чтобы изолировать коэффициент g_3 , умножим обе части этого равенства на $(s-2)^3$; мы получим

$$\frac{1}{(s+5)(s+7)} = g_3 + g_2(s-2) + g_1(s-2)^2 + \frac{h(s-2)^3}{s+5} + \frac{k(s-2)^3}{s+7}.$$

Положив здесь $s = 2$, найдем

$$\frac{1}{7 \cdot 9} = g_3.$$

Перенеся теперь известный член $g_3/(s-2)^3$ в левую часть разложения, придадим ей следующий вид:

$$\frac{1}{(s-2)^3(s+5)(s+7)} - \frac{1}{63(s-2)^3} = \frac{63 - (s+5)(s+7)}{63(s-2)^3(s+5)(s+7)}.$$

Числитель полученной дроби равен

$$-s^2 - 12s + 28 = -(s-2)(s+14),$$

т. е. он содержит множитель $(s-2)$, на который можно сократить дробь, после чего последняя приобретет вид

$$\frac{-(s+14)}{63(s-2)^2(s+5)(s+7)}.$$

Приравняв эту дробь оставшейся правой части разложения $p(s)$, будем иметь

$$\frac{-(s+14)}{63(s-2)^2(s+5)(s+7)} = \frac{g_2}{(s-2)^2} + \frac{g_1}{s-2} + \frac{h}{s+5} + \frac{k}{s+7}.$$

(Из этого равенства ясно, почему числитель в левой части должен был содержать до сокращения множитель $s-2$; в самом деле, в знаменатель правой части последнего равенства множитель $s-2$ входит в степени не выше второй, следовательно, то же самое должно иметь место и для левой части; но исчезновение в знаменателе левой части одного из множителей $s-2$ могло произойти только вследствие наличия такого же множителя в числителе.)

Теперь, умножив обе части последнего равенства на $(s-2)^2$, мы выделим коэффициент g_2 :

$$\frac{-(s+14)}{63(s+5)(s+7)} = g_2 + g_1(s-2) + \frac{h(s-2)^2}{s+5} + \frac{k(s-2)^2}{s+7}.$$

Положив $s=2$, получим

$$-\frac{16}{63 \cdot 7 \cdot 9} = g_2.$$

Перенеся член $g_2/(s-2)^2$ в левую часть, мы придадим ей вид

$$\frac{-(s+14)}{63(s-2)^2(s+5)(s+7)} + \frac{16}{63^2(s-2)^2} = \frac{-63(s+14) + 16(s+5)(s+7)}{63^2(s-2)^2(s+5)(s+7)}.$$

Числитель этой дроби равен

$$16s^2 + 129s - 322 = (s-2)(16s+161),$$

поэтому ее можно сократить на $s-2$. Опять приравняв эту левую часть оставшейся правой части разложения $p(s)$, мы получим

$$\frac{16s+161}{63^2(s-2)(s+5)(s+7)} = \frac{g_1}{s-2} + \frac{h}{s+5} + \frac{k}{s+7}.$$

Умножив это равенство на $s-2$ и положив $s=2$, найдем коэффициент g_1 :

$$\frac{193}{63^2 \cdot 7 \cdot 9} = g_1.$$

Перенеся член $g_1/(s-2)$ в левую часть, будем иметь

$$\frac{16s+161}{63^2(s-2)(s+5)(s+7)} - \frac{193}{63^2(s-2)} = \frac{63(16s+161) - 193(s+5)(s+7)}{63^3(s-2)(s+5)(s+7)}.$$

Числитель этой дроби равен

$$-193s^2 - 1308s + 3388 = -(s-2)(193s+1694),$$

следовательно, ее можно сократить на $s-2$, после чего мы получим

$$-\frac{193s+1694}{63^3(s+5)(s+7)} = \frac{h}{s+5} + \frac{k}{s+7}.$$

Умножив это равенство на $s+5$ и положив $s=-5$, мы найдем коэффициент h :

$$-\frac{1}{7^3 \cdot 2} = h.$$

Подставив это значение в предыдущее равенство, получим

$$-\frac{193s+1694}{63^3(s+5)(s+7)} = -\frac{729}{63^3 \cdot 2(s+5)} + \frac{k}{s+7}.$$

Наконец, положив $s=0$, найдем коэффициент k :

$$\frac{1}{9^3 \cdot 2} = k.$$

Итак, разложение функции $1/p(s)$ на простейшие дроби имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s-2)^3(s+5)(s+7)} &= \frac{1}{7 \cdot 9(s-2)^3} - \frac{16}{7^2 \cdot 9^2(s-2)^2} - \\ &- \frac{193}{7^3 \cdot 9^3(s-2)} - \frac{1}{7^3 \cdot 2(s+5)} + \frac{1}{9^3 \cdot 2(s+7)}. \end{aligned}$$

§ 13. Отклики на специальные виды возбуждения

О поведении физической системы можно получить хорошее представление, если определить ее отклики на некоторые возбуждения специального вида (так называемые проверочные возбуждения), легко осуществимые также технически. В качестве таких возбуждений используют функцию единичного скачка $u(t)$, импульс $\delta(t)$ и синусоидальное колебание $e^{j\omega t}$.

Как и в § 12, будем предполагать, что начальные значения равны нулю.

1. Отклик на единичный скачок (переходная функция)

Решение дифференциального уравнения (12.1), соответствующее возбуждению $f(t) \equiv u(t)$, называется откликом $y_u(t)$ на единичный скачок или, по более старой терминологии, *переходной функцией* системы (последнее название объясняется тем, что эта

функция показывает, как система под влиянием скачкообразного возбуждения переходит из состояния покоя в новое состояние). Согласно формуле (12.10), мы имеем

$$y_u(t) = g(t) * 1 = \int_0^t g(\tau) d\tau,$$

откуда находим простую связь между откликом на единичный скачок и весовой функцией:

$$g(t) = \frac{dy_u(t)}{dt}. \quad (13.1)$$

Еще проще связь между соответствующими функциями в пространстве изображений. В самом деле, имея в виду, что $\mathfrak{L}\{u\} = 1/s$, из формулы (12.11) находим

$$Y_u(s) = \frac{1}{s} G(s) = \frac{1}{sp(s)}. \quad (13.2)$$

Так как $1/p(s)$ есть дробно-рациональная функция, то такой же функцией является и $1/sp(s)$. Поэтому для вычисления решения $y_u(t)$ отнюдь не следует прибегать к применению формулы (13.1), т. е. к определению функции $g(t)$ с последующим ее интегрированием. Вместо этого достаточно произвести разложение дробно-рациональной функции $1/sp(s)$ на простейшие дроби и затем перевести эти дроби в пространство оригиналов. Особенно простая формула для $y_u(t)$ получается в том случае, когда многочлен $p(s)$ имеет различные нули, ни один из которых не исчезает (последнее означает, что $c_0 \neq 0$). Тогда будут различными и все нули $0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ функции $sp(s)$, и поэтому разложение на простейшие дроби будет иметь вид

$$\frac{1}{sp(s)} = \frac{d_0}{s} + \frac{d_1}{s - \alpha_1} + \dots + \frac{d_n}{s - \alpha_n},$$

откуда

$$\frac{1}{p(s)} = d_0 + \sum_{v=1}^n \frac{d_v}{s - \alpha_v} s,$$

следовательно,

$$d_0 = \frac{1}{p(0)}.$$

Далее из соотношения

$$\begin{aligned} \frac{s - \alpha_v}{sp(s)} &= \frac{1}{s \frac{p(s) - p(\alpha_v)}{s - \alpha_v}} = \\ &= \frac{d_0}{s} (s - \alpha_v) + \frac{d_1}{s - \alpha_1} (s - \alpha_v) + \dots + d_v + \dots + \frac{d_n}{s - \alpha_n} (s - \alpha_v) \end{aligned}$$

при $s \rightarrow \alpha_v$ находим

$$\frac{1}{\alpha_v p'(\alpha_v)} = d_v.$$

Таким образом, решением $Y_u(s)$ в пространстве изображений будет

$$Y_u(s) = \frac{1}{p(0)} \frac{1}{s} + \sum_{v=1}^n \frac{1}{\alpha_v p'(\alpha_v)} \frac{1}{s - \alpha_v},$$

переведя которое в пространство оригиналов, мы получим

$$y_u(t) = \frac{1}{p(0)} + \sum_{v=1}^n \frac{e^{\alpha_v t}}{\alpha_v p'(\alpha_v)} \quad (13.3)$$

В электротехнике эта формула известна под названием *разложения Хевисайда*. Если все нули α_v имеют отрицательные вещественные части, то $y_u(t)$ при возрастании t стремится к постоянной $1/p(0)$, т. е. система, приведенная скачкообразным возбуждением в довольно нерегулярное состояние (определяемое совокупностью собственных колебаний, см. стр. 82), приближается к новому равновесному состоянию $1/p(0) = 1/c_0$. Впрочем, этот результат получается также непосредственно из самого дифференциального уравнения (12.1). В самом деле, если функция y сглаживается, то производные $y', \dots, y^{(n)}$ стремятся к нулю и остается только член $c_0 y \approx 1$.

Так как формула (13.3) часто применяется в технике, то еще раз подчеркнем, что она справедлива только в том случае, когда все начальные значения равны нулю, а все корни функции $p(s)$ различны и отличны от нуля. Впрочем, при численных расчетах нарушения этих условий обнаруживаются автоматически. В самом деле, если нуль α_v кратный, то $p'(\alpha_v) = 0$, если же $\alpha_v = 0$, то $p(0) = 0$. В обоих случаях формула (13.3) становится бессмысленной.

Если отклик на единичный скачок определен численно или экспериментально (например, при помощи осциллографа), то можно определить отклик $y(t)$ на любое возбуждение $f(t)$. В самом деле, согласно формуле (12.10), $y(t) = g * f$, а согласно формуле (13.1), $g = y'_u$, следовательно,

$$y(t) = y'_u * f \quad (13.4)$$

(формула Дюамеля) или на основании теоремы (26.1) (см. стр. 154)

$$y(t) = \frac{d}{dt} [y_u * f] \quad (13.5)$$



Численный пример

Будем искать отклик на единичный скачок, или переходную функцию системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$y'' + 10y' + 74y = u(t)$$

(левая часть этого уравнения такая же, как и уравнения, приведенного на стр. 59) с начальными условиями

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Мы имеем

$$p(s) = s^2 + 10s + 74, \quad p'(s) = 2s + 10,$$

$$\alpha_1 = -5 + 7j, \quad \alpha_2 = -5 - 7j,$$

поэтому

$$p(0) = 74, \quad p'(\alpha_1) = 14j, \quad p'(\alpha_2) = -14j.$$

Согласно формуле (13.3), переходной функцией будет

$$y_u(t) = \frac{1}{74} + \frac{1}{(-5+7j)14j} e^{(-5+7j)t} - \frac{1}{(-5-7j)(-14j)} e^{(-5-7j)t}.$$

Второе и третье слагаемые суть комплексно-сопряженные величины, следовательно, их сумма равна удвоенной вещественной части:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \frac{1}{(-5+7j)14j} e^{(-5+7j)t} &\approx \frac{2}{14} e^{-5t} \operatorname{Re} \frac{(-5-7j)(-j)}{25+49} e^{7jt} = \\ &\approx \frac{1}{7 \cdot 74} e^{-5t} \operatorname{Re} (-7+5j)(\cos 7t + j \sin 7t) = \\ &\approx -\frac{1}{74 \cdot 7} e^{-5t} (7 \cos 7t + 5 \sin 7t). \end{aligned}$$

Окончательно мы получаем

$$y_u(t) = \frac{1}{74} \left[1 - \frac{1}{7} e^{-5t} (7 \cos 7t + 5 \sin 7t) \right].$$

Производные переходной функции равны

$$y'_u(t) = \frac{1}{7} e^{-5t} \sin 7t, \quad y''_u(t) = \frac{1}{7} e^{-5t} (7 \cos 7t - 5 \sin 7t).$$

Подставив найденные значения $y_u(t)$, $y'_u(t)$ и $y''_u(t)$ в заданное дифференциальное уравнение, мы увидим, что оно действительно удовлетворяется переходной функцией $y_u(t)$, и при этом $y_u(0) = y'_u(0) = 0$.

При $t \rightarrow \infty$ производные y'_u и y''_u стремятся к нулю, а сама функция y_u — к значению $1/74$, как это и должно быть на основании заданного дифференциального уравнения.

2. Отклик на импульсное возбуждение

Если в качестве возбуждения используется импульс $\delta(t)$, то решение дифференциального уравнения (12.1) называется *откликом y_δ на импульс*. Понятие импульса мы ввели наглядным образом уже в § 1. Импульс описывает возбуждение, которое во все моменты времени $t \neq 0$ равно нулю, а в момент времени $t = 0$ принимает скачкообразно бесконечно большое значение. Импульс δ (точнее, импульс с напряженностью, равной единице) можно понимать как идеализацию возбуждения s_ε , которое в небольшой окрестности ε точки $t = 0$ имеет величину порядка $1/\varepsilon$, а при всех других значениях t равно нулю, т. е.

$$s_\varepsilon = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{при } 0 \leq t \leq \varepsilon, \\ 0 & \text{при } t < 0 \text{ и } t > \varepsilon, \end{cases}$$

следовательно, интеграл от s_ε равен единице. Для того чтобы освободиться от произвольности в выборе величины ε , совершают предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0^*$). Полученный в результате такого перехода «предел» есть именно то, что физически понимается под единичным импульсом. Однако этот предел не является функцией в обычном смысле, и поэтому понятие импульса выходит за рамки классического математического анализа. Как уже было сказано в § 1, с импульсом δ можно связать точное математическое понятие только в рамках теории распределений. Краткое представление об этой теории дано в Добавлении к настоящей книге, к которому мы и отсылаем читателя, в частности к формулам (5), (8), (17) и (19).

Если возбуждение, следовательно, правая часть дифференциального уравнения представляет собой распределение δ , то и левая часть уравнения должна быть распределением. Это означает, что решение y_δ также должно быть распределением. Для того чтобы наглядно отметить это обстоятельство, перепишем уравнение (12.1), заменив в нем обычные производные на обобщенные производные; мы получим

$$D^n y_\delta + c_{n-1} D^{n-1} y_\delta + \dots + c_1 D y_\delta + c_0 y_\delta = \delta. \quad (13.6)$$

Прежнему условию о том, что дифференциальное уравнение рассматривается только в промежутке $t \geq 0$, теперь соответствует условие, что распределение y_δ принадлежит пространству \mathcal{D}'_+ , т. е. что носитель распределения лежит на полуоси $t \geq 0$. Применим

*) Аналогичным образом для того, чтобы освободиться от произвольности в выборе промежутка времени, совершают предельный переход от *средней скорости* в некотором промежутке времени к *мгновенной скорости* в данный момент времени.

к уравнению (13.6) преобразование Лапласа. Для определения решения $\mathfrak{L}\{y_\delta\} = Y_\delta$ мы получим, применив правило дифференцирования (см. Добавление, правило V') и учтя, что $\mathfrak{L}\{\delta\} = 1$, уравнение

$$p(s)Y_\delta = 1,$$

откуда найдем

$$Y_\delta = \frac{1}{p(s)} = G(s). \quad (13.7)$$

Следовательно, \mathfrak{L} -изображение распределения y_δ имеет такой же вид, как и \mathfrak{L} -изображение весовой функции $g(t)$. Но в то время как раньше $g(t)$ было обычной функцией, теперь $y_\delta = g(t)$ следует рассматривать как распределение, при дифференцировании которого вместо обычных производных следует составлять обобщенные производные. Для функции такого вида, как $g(t)$, т. е. имеющей производные во всех точках, за исключением одной, в которой производные имеют только предельные значения слева и справа, обобщенные производные и обычные производные связаны между собой соотношениями вида (Доб. 12). Из равенств (14.4) (стр. 81) видно, что $g(t)$, $g'(t)$, ..., $g^{(n-2)}(t)$ имеют при $t \rightarrow +0$ предельные значения, равные нулю, в то время как для $g^{(n-1)}(t)$ предельным значением при $t \rightarrow +0$ будет единица. Так как $g(t)$, рассматриваемое как распределение в пространстве \mathcal{D}'_+ , при $t < 0$ равно нулю, то предельные значения всех производных $g(t)$ при $t \rightarrow -0$ равны нулю. Таким образом, мы имеем

$$Dg = g'(t), \quad D^2g = g''(t), \quad \dots, \quad D^{n-1}g = g^{(n-1)}(t), \quad (13.8)$$

но

$$D^n g = g^{(n)}(t) + \delta. \quad (13.9)$$

Согласно соотношению (14.3) (см. стр. 81), функция $g(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению с правой частью, равной нулю:

$$g^{(n)}(t) + c_{n-1}g^{(n-1)}(t) + \dots + c_1g'(t) + c_0g(t) = 0. \quad (13.10)$$

Внеся выражения (13.8) и (13.9) в уравнение (13.10), мы получим

$$D^n g + c_{n-1}D^{n-1}g + \dots + c_1Dg + c_0g = \delta,$$

следовательно, $g(t)$, рассматриваемое как *распределение*, действительно удовлетворяет уравнению (13.6).

Таким образом, мы пришли к следующему результату: отклик y_δ на импульсное возбуждение равен весовой функции $g(t)$, если последнюю рассматривать как распределение, n -я обобщенная производная которого отличается от n -й обычной производной на импульс δ . Этот импульс δ появляется потому, что $n-1$ -я производная функции $g(t)$, равная при $t < 0$ по определению

нулю, в точке $t = 0$ имеет скачок высотой в единицу. На рис. 13.1 такой отклик на импульсное возбуждение показан для случая $n = 4$.

Пример. Колебания механического осциллятора (например, маятника на длинной нити) описываются известным дифференциальным уравнением второго порядка. Если в начальный момент времени осциллятор находится в покое, то $y(0) = y'(0) = 0$. Пусть в этот момент осциллятор получает кратковременный, но очень сильный удар. Тогда скорость $y'(t)$ скачкообразно возрастет от нуля до некоторого положительного значения, следовательно, ускорение теоретически будет равно бесконечности, но координата, определяющая положение осциллятора, т. е. сама функция $y(t)$, будет изменяться, начиная от нуля, непрерывно.

В технической литературе принято полностью отождествлять понятия отклика на импульсное возбуждение и весовой функции. Однако это не совсем правильно, но, правда, безопасно до тех пор, пока речь идет только об области времени $t > 0$. Разница между

Рис. 13.1. Отклик на импульсное возбуждение и его производные для случая $n = 4$.

обоими указанными понятиями существенна лишь в точке $t = 0$.

Совпадение отклика y_δ на импульсное возбуждение и весовой функции $g(t)$ открывает возможность *экспериментального определения весовой функции $g(t)$* . Для этого на входе в систему прикладывается импульс δ , осуществляемый в виде сильного удара, а затем измеряется выходная функция, например, при помощи осциллографа.

3. Частотная характеристика

Особый интерес для практики представляет возбуждение, выражаемое функцией $f(t) \equiv e^{j\omega t}$. Этим возбуждением пользуются в тех случаях, когда необходимо выяснить, как рассматриваемая система реагирует на возбуждающие колебания различной круговой частоты.

При расчетах переменного тока такое исследование выполняется следующим образом. Хотя в действительности возбуждение, получаемое системой, влечет за собой возникновение, начиная с момента времени $t = 0$, переходного процесса с определенными начальными условиями, тем не менее будем предполагать, что рассматриваемая физическая система находится все время, от $t = -\infty$ до $t = +\infty$, в установившемся состоянии. Так как возбуждение представляет собой колебание, то примем, что отклик системы на это возбуждение также является колебанием с той же круговой частотой, но с другими амплитудой и начальной фазой. Следовательно, предположим, что отклик системы на возбуждение $f(t) = e^{j\omega t}$ выражается функцией

$$y(t) = H(\omega) e^{j\omega t},$$

где $H(\omega)$ есть комплексная величина, зависящая от ω . Подставив выражение $y(t)$ в дифференциальное уравнение (12.1) с правой частью $f(t) = e^{j\omega t}$, мы получим

$$H(\omega)(j\omega)^n e^{j\omega t} + c_{n-1}H(\omega)(j\omega)^{n-1} e^{j\omega t} + \dots + c_1 H(\omega)(j\omega) e^{j\omega t} + c_0 H(\omega) e^{j\omega t} = e^{j\omega t}$$

или, если для сокращения записи использовать такое же обозначение, как и (12.4),

$$H(\omega) e^{j\omega t} p(j\omega) = e^{j\omega t},$$

откуда

$$H(\omega) = \frac{1}{p(j\omega)} = G(j\omega).$$

Таким образом,

$$y(t) = G(j\omega) e^{j\omega t}. \quad (13.11)$$

Функция $G(j\omega)$, представляющая собой отношение

$$\frac{\text{отклик на возбуждение } e^{j\omega t}}{\text{возбуждение } e^{j\omega t}} = \frac{y(t)}{e^{j\omega t}},$$

называется *частотной характеристикой* физической системы. Представив $G(j\omega)$ в виде

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\psi(\omega)},$$

мы можем назвать $|G(j\omega)|$ *амплитудной характеристикой*, а $\psi(\omega)$ — *фазовой характеристикой*.

Из полученного результата следует, что частотная характеристика есть не что иное, как значение передаточной функции $G(s)$ (см. стр. 65) на мнимой оси¹⁾.

¹⁾ В электротехнической литературе частотной характеристикой иногда называют также функцию $G(s)$, что следует считать неправильным, так как смысл величины $G(s)$ как передаточной функции значительно шире смысла величины $G(j\omega)$ как частотной характеристики.

Предыдущий вывод, который привел нас к понятию частотной характеристики, основан на интуиции и опыте. Для математически строгого вывода понятия частотной характеристики следует прибегнуть к преобразованию Лапласа. По-прежнему будем считать, что начальные значения равны нулю. Тогда выходной функцией $y_{\omega}(t)$ для входной функции $e^{j\omega t}$, согласно формуле (12.10), будет

$$y_{\omega}(t) = g(t) * e^{j\omega t} = e^{j\omega t} \int_0^t e^{-j\omega \tau} g(\tau) d\tau. \quad (13.12)$$

Сделаем теперь существенное допущение, а именно предположим, что изображение $G(s) = \mathcal{L}\{g\}$ сходится также на мнимой оси, что равносильно предположению, что полюсы α_i дробно-рациональной функции $G(s)$ лежат *слева* от мнимой оси. В таком случае интеграл

$$G(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-j\omega \tau} g(\tau) d\tau$$

существует, и равенству (13.12) можно придать вид

$$\begin{aligned} y_{\omega}(t) &= e^{j\omega t} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-j\omega \tau} g(\tau) d\tau - \int_t^{\infty} e^{-j\omega \tau} g(\tau) d\tau \right\} = \\ &= G(j\omega) e^{j\omega t} - e^{j\omega t} \int_t^{\infty} e^{-j\omega \tau} g(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (13.13)$$

При $t \rightarrow \infty$ второе слагаемое в правой части стремится, очевидно, к нулю, и остается только первое слагаемое, тождественно совпадающее с выражением (13.11). Этому слагаемому соответствует *установившееся состояние* системы, к которому система приходит через достаточно большой промежуток времени после возбуждения. Обозначим это установившееся состояние через $\tilde{y}_{\omega}(t)$ и запишем

$$\boxed{\tilde{y}_{\omega}(t) = G(j\omega) e^{j\omega t}} \quad (13.14)$$

В тех случаях, когда не требуется знать значений функции $y_{\omega}(t)$ при малых t , т. е. когда не требуется знания *переходного процесса*, решение (13.14) вполне достаточно для практических целей, хотя оно, не будучи полным решением, передает только асимптотическое поведение системы.

Полученный результат особенно интересен потому, что он дает возможность определить установившееся состояние системы непосредственно по изображению $G(s)$, *не прибегая к переводу последнего в пространство оригиналов.*

Необходимо, однако, иметь в виду, что формулой (13.14) можно пользоваться только в том случае, когда полюсы функции $G(s)$ имеют отрицательные вещественные части. Это означает, что собственные колебания системы (см. стр. 82) при возрастании t затухают. Следовательно, рассматриваемая физическая система является «пассивной», т. е. не обладает внутренними источниками энергии и поэтому сама собой не может начать раскачиваться. Добавим к сказанному, что формула (13.14) описывает установившееся состояние также в том случае, когда начальные значения не равны нулю. В самом деле, ненулевые начальные значения добавляют к полученному решению только сложную совокупность собственных колебаний, которые при возрастании t затухают до нуля (см. § 14).



Связь между частотной характеристикой и откликом на единичный скачок

Технически частотную характеристику можно измерить обычно легче и точнее, чем отклик на единичный скачок. Поэтому целесообразно определять этот отклик путем вычисления из частотной характеристики, конечно, при условии, что последняя существует, для чего необходимо, чтобы полюсы дробно-рациональной функции $G(s)$ имели отрицательные вещественные части. Если выразить частотную характеристику $G(j\omega)$ через ее модуль и фазу, т. е. положить

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\psi(\omega)},$$

то можно вывести следующую формулу:

$$y_u(t) = \frac{G(0)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{|G(j\omega)|}{\omega} \sin[t\omega + \psi(\omega)] d\omega \quad (t > 0). \quad (13.15)$$

Если же разложить $G(j\omega)$ на вещественную и мнимую части, т. е. положить

$$G(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega),$$

то будут иметь место формулы

$$y_u(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{U(\omega)}{\omega} \sin t\omega d\omega \quad (13.16)$$

($t > 0$).

$$y_u(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{V(\omega)}{\omega} \cos t\omega d\omega \quad (13.17)$$

дроби, а затем перевести эти дроби в пространство оригиналов. В результате получится сложное выражение, составленное из функций $e^{\alpha_v t}$, умноженных, если нули α_v имеют кратность k_v , на t, t^2, \dots, t^{k_v-1} . Производные от $g(t)$ имеют такой же вид. Следовательно, $y(t)$ представляет собой линейную комбинацию таких функций с коэффициентами, составленными из начальных значений и коэффициентов c_v . Таким образом, если система не получает никакого внешнего возбуждения, то в решение $y(t)$ входят только функции

$$e^{\alpha_1 t}, te^{\alpha_1 t}, \dots, t^{k_1-1} e^{\alpha_1 t}; \quad e^{\alpha_2 t}, te^{\alpha_2 t}, \dots,$$

которые называются *собственными колебаниями* системы. Такая система, предоставленная самой себе при произвольных начальных значениях, совершает движение, складывающееся линейно из ее собственных колебаний.

Численный пример

На стр. 59 и 64 мы рассмотрели случай, когда

$$p(s) = (s^2 + 16)(s^2 + 10s + 74) = s^4 + 10s^3 + 90s^2 + 160s + 1184.$$

Такой функции $p(s)$ соответствует однородное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$y^{IV} + 10y''' + 90y'' + 160y' + 1184 = 0.$$

На стр. 61 мы нашли, что

$$g(t) = -\frac{1}{9928}(20 \cos 4t - 29 \sin 4t) + \frac{1}{17374} e^{-5t} (35 \cos 7t - 4 \sin 7t)$$

(напомним, что там у функции $1/p(s)$ был множитель 112, который здесь отсутствует). Следовательно,

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{1}{2482}(20 \sin 4t + 29 \cos 4t) - \\ &\quad - \frac{1}{17374} e^{-5t} (203 \cos 7t + 225 \sin 7t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g''(t) &= \frac{1}{1241}(40 \cos 4t - 58 \sin 4t) - \\ &\quad - \frac{1}{8687} e^{-5t} (280 \cos 7t - 1273 \sin 7t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'''(t) &= -\frac{1}{1241}(160 \sin 4t + 232 \cos 4t) + \\ &\quad + \frac{1}{8687} e^{-5t} (10311 \cos 7t - 4405 \sin 7t). \end{aligned}$$

Из этих функций можно составить оригиналы дробно-рациональных функций, входящих в решение изображающего урав-

нения и имеющих в качестве множителей начальные значения $y(+0)$, $y'(+0)$, $y''(+0)$ и $y'''(+0)$. Не выполняя вычислений, напомним эти оригиналы:

$$\begin{aligned} \text{при } y(+0): \quad & g'''(t) + c_3 g''(t) + c_2 g'(t) + c_1 g(t) = \\ & = g'''(t) + 10g''(t) + 90g'(t) + 160g(t), \\ \text{при } y'(+0): \quad & g''(t) + c_3 g'(t) + c_2 g(t) = g''(t) + 10g'(t) + 90g(t), \\ \text{при } y''(+0): \quad & g'(t) + c_3 g(t) = g'(t) + 10g(t), \\ \text{при } y'''(+0): \quad & g(t) = g(t). \end{aligned}$$

Предлагаем читателю убедиться на этом примере, что действительно имеют место равенства $g(0) = g'(0) = g''(0)$ и $g'''(0) = 1$.

В связи с некоторыми неясностями, встречающимися в литературе по преобразованию Лапласа, еще раз напомним, что *начальными значениями*, входящими в изображающее уравнение, являются числа $y(+0)$, $y'(+0)$, ... В самом деле, изображающее уравнение получается в результате применения правила V, а в это правило входят предельные значения справа. Как эти *начальные значения практически возникают*, это уже вопрос другого порядка. Естественно, что в физических системах они возникают из *прошедшего* системы (так, например, положение и скорость линейного осциллятора в момент времени $t = 0$ являются неизбежным следствием его движения в предшествующее время). Физическая система подходит к нулевому моменту времени слева с некоторыми значениями $y(-0)$, $y'(-0)$, ..., и единственное требование заключается в том, чтобы с этими же значениями система вступила в область значений $t \geq 0$. Это требование всегда может быть выполнено, так как полученное выше решение $y(t)$, как нетрудно убедиться путем проверки, всегда удовлетворяет предписанным начальным значениям, совершенно независимо от того, как они заданы и какой вид имеет возбуждающая функция (последняя может не иметь ничего общего с возбуждающей функцией, существовавшей до момента времени $t = 0$). С иным положением вещей мы встретимся при решении *систем* дифференциальных уравнений; там начальные значения не всегда могут быть заданы произвольно (см. § 16 и 17).

Еще раз сформулируем

преимущества метода преобразования Лапласа

1. При решении дифференциального уравнения классическим методом сначала находится общее решение, а затем его постоянные определяются так, чтобы найденное решение удовлетворяло начальным условиям. Определение постоянных требует



дополнительного решения системы линейных алгебраических уравнений с n неизвестными, что для случая $n \geq 3$ представляет собой громоздкую задачу. При решении же дифференциального уравнения посредством преобразования Лапласа начальные значения учитываются с самого начала и вводятся в решение автоматически. Это обстоятельство выгодно также потому, что позволяет ясно видеть влияние начальных значений заранее, т. е. до нахождения решения. Следовательно, такой метод особенно удобен для решения задачи Коши. Наиболее частый на практике случай нулевых начальных значений при классическом методе решения не приводит к какому-либо облегчению вычислений и не освобождает от решения упомянутой системы линейных алгебраических уравнений. Наоборот, при применении преобразования Лапласа нулевые начальные значения обеспечивают исключительно простой ход вычислений.

2. В то время как при классическом методе сначала решается однородное уравнение и только затем, путем вариации постоянных, неоднородное уравнение, применение преобразования Лапласа позволяет сразу решить неоднородное уравнение, практически более важное.

Замечание о составлении дифференциального уравнения

В § 10—14, если подходить к их содержанию с практической точки зрения, мы имели дело каждый раз с физической системой, характеризуемой одной-единственной функцией времени $y(t)$, удовлетворяющей одному-единственному дифференциальному уравнению. Однако в практических условиях приходится иметь дело также с такими физическими системами, поведение которых определяется несколькими функциями времени, удовлетворяющими нескольким дифференциальным уравнениям, причем в эти уравнения входят все или только некоторые характеризующие систему функции времени (системы совместных дифференциальных уравнений). В таких случаях в технических расчетах часто исключают все неизвестные функции времени, кроме одной, представляющей в рассматриваемых условиях наибольший интерес, и таким путем получают для оставшейся неизвестной функции одно единственное дифференциальное уравнение, которое в общем случае имеет более высокий порядок, чем первоначальные уравнения. Но тогда сразу же возникает весьма затруднительный вопрос о начальных значениях для производных более высоких порядков в оставшемся единственном уравнении. Этот вопрос, который для дифференциальных уравнений, рассмотренных в § 10—14, не возникал, мы подробно исследуем в § 18. Мы особо подчеркиваем это обстоятельство потому, что некоторые инженеры иногда считают, что

всякое дифференциальное уравнение с порядком более высоким, чем два, получается не иначе, как путем исключения всех неизвестных функций, кроме одной, из системы дифференциальных уравнений, имеющих самое большее второй порядок. Между тем существуют задачи, например, в теории упругости, когда физическая система определяется одной-единственной функцией, удовлетворяющей дифференциальному уравнению порядка выше второго.

На практике случай, когда физическая система описывается несколькими совместными дифференциальными уравнениями, встречается наиболее часто. Тем не менее мы рекомендуем читателю, интересующемуся только такими физическими системами, тщательно ознакомиться с рассуждениями, изложенными в § 10—14 и относящимися к одному-единственному дифференциальному уравнению, так как это облегчит понимание дальнейших сведений о решении систем совместных дифференциальных уравнений.

§ 15. Нормальная система совместных дифференциальных уравнений с любыми выполнимыми начальными условиями

Мы уже видели, что применение преобразования Лапласа существенно упрощает вычислительную работу по сравнению с классическим методом уже при решении одного-единственного дифференциального уравнения с порядком более высоким, чем два. Однако в полной мере преимущества преобразования Лапласа перед классическим методом проявляются только при решении систем дифференциальных уравнений. В этом случае классический метод практически невыполним из-за необходимости громоздких вычислений, между тем как применение преобразования Лапласа не только существенно сокращает вычислительную работу, но одновременно дает значительно большую обзорность решения.

Для получения ясного представления о формальной стороне решения систем дифференциальных уравнений рассмотрим сначала систему трех дифференциальных уравнений первого порядка. Во всех уравнениях выпишем все теоретически возможные члены, хотя в практических условиях часть этих членов обычно отсутствует, следовательно, коэффициенты при них должны быть приняты равными нулю. Итак, рассмотрим систему

$$(a_{11}y'_1 + b_{11}y_1) + (a_{12}y'_2 + b_{12}y_2) + (a_{13}y'_3 + b_{13}y_3) = f_1(t),$$

$$(a_{21}y'_1 + b_{21}y_1) + (a_{22}y'_2 + b_{22}y_2) + (a_{23}y'_3 + b_{23}y_3) = f_2(t),$$

$$(a_{31}y'_1 + b_{31}y_1) + (a_{32}y'_2 + b_{32}y_2) + (a_{33}y'_3 + b_{33}y_3) = f_3(t).$$

Выполнив преобразование Лапласа, мы получим изображающие уравнения

$$\begin{aligned} a_{11}[sY_1 - y_1(+0)] + b_{11}Y_1 + a_{12}[sY_2 - y_2(+0)] + b_{12}Y_2 + \\ + a_{13}[sY_3 - y_3(+0)] + b_{13}Y_3 = F_1(s), \\ a_{21}[sY_1 - y_1(+0)] + b_{21}Y_1 + a_{22}[sY_2 - y_2(+0)] + b_{22}Y_2 + \\ + a_{23}[sY_3 - y_3(+0)] + b_{23}Y_3 = F_2(s), \\ a_{31}[sY_1 - y_1(+0)] + b_{31}Y_1 + a_{32}[sY_2 - y_2(+0)] + b_{32}Y_2 + \\ + a_{33}[sY_3 - y_3(+0)] + b_{33}Y_3 = F_3(s). \end{aligned}$$

Введя для сокращения записи обозначения

$$a_{ik}s + b_{ik} = p_{ik}(s),$$

мы сумеем переписать изображающие уравнения в следующем более обобщим виде:

$$\left. \begin{aligned} p_{11}Y_1 + p_{12}Y_2 + p_{13}Y_3 &= F_1 + a_{11}y_1(+0) + a_{12}y_2(+0) + a_{13}y_3(+0), \\ p_{21}Y_1 + p_{22}Y_2 + p_{23}Y_3 &= F_2 + a_{21}y_1(+0) + a_{22}y_2(+0) + a_{23}y_3(+0), \\ p_{31}Y_1 + p_{32}Y_2 + p_{33}Y_3 &= F_3 + a_{31}y_1(+0) + a_{32}y_2(+0) + a_{33}y_3(+0). \end{aligned} \right\} \quad (15.1)$$

Если были бы заданы дифференциальные уравнения не первого, а второго порядка, то вместо линейных многочленов $p_{ik}(s)$ получились бы квадратичные, а правые части изображающих уравнений содержали бы кроме начальных значений $y_1(+0)$, ... также начальные значения $y'_1(+0)$, ... Но принципиально изображающие уравнения для системы дифференциальных уравнений любого порядка имеют один и тот же вид: они образуют систему линейных алгебраических уравнений для неизвестных Y_1, Y_2, Y_3 . Подобного рода системы теоретически решаются изящнее всего по правилу Крамера посредством определителей; практически же предпочтительнее прибегать к последовательному исключению неизвестных или, при большом количестве уравнений, к одному из многочисленных известных способов решения систем линейных уравнений.

Поскольку сейчас нас интересует формальная сторона метода, воспользуемся решением посредством определителей. В правой части каждого изображающего уравнения имеется изображение $F_i(s)$ входной функции и численная постоянная, зависящая от начальных значений. Для сокращения записи введем для суммы этих постоянных обозначения

$$a_{11}y_1(+0) + a_{12}y_2(+0) + a_{13}y_3(+0) = r_1,$$

а для определителя системы, составленного из коэффициентов $p_{ik}(s)$ и представляющего собой в раскрытом виде в общем слу-

чае многочлен третьей степени относительно s (об исключениях см. § 16), — обозначение $D(s)$. Применив правило Крамера, мы найдем

$$Y_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} F_1 + r_1 & p_{12} & p_{13} \\ F_2 + r_2 & p_{22} & p_{23} \\ F_3 + r_3 & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}, \quad Y_2 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} p_{11} & F_1 + r_1 & p_{13} \\ p_{21} & F_2 + r_2 & p_{23} \\ p_{31} & F_3 + r_3 & p_{33} \end{vmatrix}, \quad Y_3 = \dots \quad (15.2)$$

Для того чтобы яснее показать, как решения Y_1, Y_2, Y_3 зависят от возбуждающих функций и начальных значений, заменим r_i их явными выражениями и разложим каждый определитель на сумму четырех определителей (по слагаемым, которые входят в столбец, содержащий возбуждающие функции); для Y_1 мы получим

$$\begin{aligned} DY_1 &= \begin{vmatrix} F_1 + a_{11}y_1(+0) + a_{12}y_2(+0) + a_{13}y_3(+0) & p_{12} & p_{13} \\ F_2 + a_{21}y_1(+0) + a_{22}y_2(+0) + a_{23}y_3(+0) & p_{22} & p_{23} \\ F_3 + a_{31}y_1(+0) + a_{32}y_2(+0) + a_{33}y_3(+0) & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} F_1 & p_{12} & p_{13} \\ F_2 & p_{22} & p_{23} \\ F_3 & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} + y_1(+0) \begin{vmatrix} a_{11} & p_{12} & p_{13} \\ a_{21} & p_{22} & p_{23} \\ a_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} + \\ &+ y_2(+0) \begin{vmatrix} a_{12} & p_{12} & p_{13} \\ a_{22} & p_{22} & p_{23} \\ a_{32} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} + y_3(+0) \begin{vmatrix} a_{13} & p_{12} & p_{13} \\ a_{23} & p_{22} & p_{23} \\ a_{33} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}. \quad (15.3) \end{aligned}$$

Элементы первых столбцов второго, третьего и четвертого определителей представляют собой постоянные, а элементы второго и третьего столбцов — многочлены первой степени, следовательно, все эти определители в раскрытом виде дают многочлены второй степени. После деления на $D(s)$ получаются дробно-рациональные функции, в которых числители имеют меньшие степени, чем знаменатели. Разложив эти функции одним из указанных ранее способов на простейшие дроби, мы сумеем отобразить их назад в пространство оригиналов. Определитель, содержащий в себе изображения F_i , может быть представлен в виде

$$\begin{vmatrix} F_1 & p_{12} & p_{13} \\ F_2 & p_{22} & p_{23} \\ F_3 & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = F_1 \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} - F_2 \begin{vmatrix} p_{12} & p_{13} \\ p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} + F_3 \begin{vmatrix} p_{12} & p_{13} \\ p_{22} & p_{23} \end{vmatrix}. \quad (15.4)$$

Определители второго порядка после деления на $D(s)$ опять дают дробно-рациональные функции. Применив к произведению этих функций на множители F_i теорему свертывания, мы перейдем назад в пространство оригиналов.

то в результате преобразования Лапласа системы (15.5) мы получим систему линейных алгебраических уравнений с m неизвестными

$$Y_k(s) = \mathfrak{L}\{y_k(t)\}.$$

Эта система аналогична системе (15.1), только теперь многочлены $p_{ik}(s)$ будут не первой степени, а степени n , а в правые части изображающих уравнений войдут кроме функций $F_k(s) = \mathfrak{L}\{f_k(t)\}$ многочлены $r_i(s)$ степени $n - 1$, зависящие от начальных значений (15.6). Решения системы (15.5) будут иметь вид, аналогичный решениям (15.2), и так же, как и раньше [см. равенства (15.3) и (15.4)], могут быть представлены в виде суммы определителей. Порядок определителя

$$D(s) = \det \| p_{ik}(s) \|$$

равен m . Множителями при $F_k(s)$ будут миноры этого определителя порядка $m - 1$. Множителями при начальных значениях, если развернуть определитель $D(s)$ по элементам a_{ik} , b_{ik} , ... первых столбцов, также будут миноры порядка $m - 1$.

В этом параграфе мы введем следующее существенное предположение: *определитель, составленный из коэффициентов a_{ik} при старших производных дифференциальных уравнений, не равен нулю*, т. е.

$$\det \| a_{ik} \| \neq 0. \quad (15.7)$$

Будем называть такой случай *нормальным случаем*.

Из предположения (15.7) вытекают три важных следствия:

1. Если развернуть определитель $D(s)$, перемножив для этого многочлены $p_{ik}(s)$, то коэффициентом при наивысшей степени s^{mn} будет $\det \| a_{ik} \|$. Следовательно, $D(s)$ есть *многочлен степени mn* . Определители, входящие в правую часть равенства (15.3), после их развертывания будут многочленами относительно s самое большее степени $(m - 1)n$. Поэтому после деления определителей, входящих в правую часть равенства (15.3), на D будут получаться рациональные функции, числители которых будут иметь степени более низкие, чем знаменатели. Следовательно, эти рациональные функции обладают оригиналами, которые можно вычислить посредством разложения на простейшие дроби.

2. Члены, содержащие $F_i(s)$ [см. равенство (15.4)], дают при обратном преобразовании в пространство оригиналов интегралы типа свертки, составленные из $f_i(t)$ и оригиналов рациональных функций. Эти интегралы *непрерывны* даже в том случае, если $f_i(t)$ обладают разрывами. Следовательно, отклики $y_k(t)$ не совершают скачков вместе с возбуждениями $f_i(t)$ (если последние такие скачки совершают). Это означает, что соответствующая

физическая система не обладает способностью совершать скачки и действует стабилизирующим образом.

3. Можно убедиться¹⁾, что решения $y_k(t)$ действительно принимают заданные *тп начальных значений* (15.6) совершенно независимо от того, как эти начальные значения выбраны. Следовательно, в нормальном случае имеется полная свобода выбора начальных значений.

В случае системы совместных дифференциальных уравнений, не подходящей под категорию нормального случая, сформулированные следствия не выполняются, что всегда необходимо иметь в виду.

Можно сказать, что решения системы дифференциальных уравнений в нормальном случае ведут себя в точности так же, как решение отдельного дифференциального уравнения.

Вообще рациональные функции, на которые умножаются начальные условия [см. равенство (15.3)], дают при обратном преобразовании Лапласа показательные функции, иногда умноженные на степенные функции, причем в степени показательных функций входят нули определителя $D(s)$. Этот определитель в рассматриваемом случае играет такую же роль, как многочлен $p(s)$ в случае отдельного дифференциального уравнения. Указанным множителям при начальных значениях соответствуют *собственные колебания* физической системы, совершаемые ею при отсутствии возбуждений, т. е. такие колебания, которые физическая система совершает, будучи предоставлена самой себе.

Для нормальной системы совместных дифференциальных уравнений можно ввести такие же понятия, как и для отдельного дифференциального уравнения. Если все начальные значения (15.6) равны нулю, то из системы дифференциальных уравнений (15.5) после преобразования Лапласа получается система линейных алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} p_{11}(s)Y_1(s) + \dots + p_{1m}(s)Y_m(s) &= F_1(s), \\ \vdots & \\ p_{m1}(s)Y_1(s) + \dots + p_{mm}(s)Y_m(s) &= F_m(s). \end{aligned} \right\} \quad (15.8)$$

Предположим, что все функции в правых частях уравнений, за исключением одной, тождественно равны нулю. Пусть этой не равной нулю функцией будет $F_\mu(s)$. Решения, соответствующие этому частному случаю, обозначим через $Y_{1\mu}, \dots, Y_{m\mu}$. Для их вычисления воспользуемся правилом Крамера. С этой целью вычеркнем в определителе μ -ю строку и ν -й столбец, вычислим получившиеся миноры $D_{\mu\nu}(s)$ и составим выражения

$$Y_{\nu\mu}(s) = (-1)^{\mu+\nu} \frac{D_{\mu\nu}(s)}{D(s)} F_\mu(s) \quad (\nu = 1, \dots, m). \quad (15.9)$$

¹⁾ См. Doetsch G., Handbuch der Laplace-Transformation, т. II, стр. 315, Birkhäuser, Basel und Stuttgart, 1955.

Если ввести обозначение

$$(-1)^{\mu+\nu} \frac{D_{\mu\nu}(s)}{D(s)} = G_{\mu\nu}(s), \quad (15.10)$$

то решения $Y_{\nu\mu}(s)$ примут вид

$$Y_{\nu\mu}(s) = G_{\mu\nu}(s) F_{\mu}(s) \quad (\nu = 1, \dots, m), \quad (15.11)$$

аналогичный решению (12.11). Как уже было отмечено выше, миноры $D_{\mu\nu}(s)$, будучи многочленами относительно s , имеют степень более низкую, чем определитель $D(s)$, так как в нормальном случае $D(s)$ имеет самую высокую степень, равную m . Это означает, что для каждой рациональной функции $G_{\mu\nu}(s)$ существует оригинал $g_{\mu\nu}(t)$. Таким образом, в том частном случае, когда все возбуждения, за исключением $f_{\mu}(t)$, отсутствуют, мы получим после перевода уравнений (15.11) в пространство оригиналов решения рассматриваемой системы дифференциальных уравнений в виде

$$y_{\nu\mu}(t) = g_{\mu\nu}(t) * f_{\mu}(t) \quad (\nu = 1, \dots, m), \quad (15.12)$$

аналогичном решению (12.10) отдельного дифференциального уравнения.

В общем случае, когда имеются произвольные возбуждения, решения системы вследствие ее линейности получаются суммированием по μ решений (15.11) или (15.12).

Как и в случае отдельного дифференциального уравнения, выражения $G_{\mu\nu}(s)$ называются *передаточными функциями* (или *коэффициентами передачи*), а выражения $g_{\mu\nu}(t)$ — *весовыми функциями*, причем теперь имеется в виду действие μ -го входа на ν -й выход. Всего для системы из m дифференциальных уравнений имеется m^2 передаточных функций и m^2 весовых функций ($1 \leq \mu \leq m, 1 \leq \nu \leq m$).

Так же как и в случае отдельного дифференциального уравнения, в практике важную роль играют отклики на некоторые специальные возбуждения (см. § 13). Если μ -м возбуждением является импульс δ , в то время как остальные возбуждения отсутствуют, то в качестве отклика на ν -м выходе получается

$$y_{\mu\nu, \delta} = g_{\mu\nu}(t), \quad (15.13)$$

причем под $g_{\mu\nu}(t)$ следует понимать, как и в п. 2 § 13, распределение, полагая при этом $g_{\mu\nu}(t) = 0$ при $t < 0$, вследствие чего $(n-1)$ -я производная получает в точке $t = 0$ скачок высотой в единицу.

Возбуждениям $f_{\mu}(t) = u(t)$ соответствуют *отклики на единичный скачок*,

Если μ -м возбуждением является колебание $e^{j\omega t}$ и если все нули многочлена $D(s)$ лежат в левой полуплоскости $\operatorname{Re} s < 0$, то $y_{\mu\nu}(t)$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к установившемуся состоянию

$$\tilde{y}_{\mu\nu, \omega}(t) = G_{\mu\nu}(j\omega) e^{j\omega t}, \quad (15.14)$$

которое можно назвать *откликом на колебательное возбуждение* (откликом на ν -м выходе на синусоидальное возбуждение на μ -м входе). Картина изменения передаточной функции $G_{\mu\nu}(s)$ на мнимой оси, т. е. картина изменения функции $G_{\mu\nu}(j\omega)$, представляет собой *частотную характеристику*. Для системы из m дифференциальных уравнений существует m^2 частотных характеристик.

Конечно, указанные понятия имеют смысл только в том случае, когда система допускает свободное варьирование возбуждений. Однако, как показывает приводимый ниже пример нормальной системы, это бывает не всегда.

Пример из механики

Решим следующую задачу. Пусть материальная точка брошена из какого-нибудь пункта над поверхностью Земли под углом к горизонту с некоторой начальной скоростью. Найдем траекторию движения этой частицы с учетом влияния вращения Земли и в предположении, что сопротивление воздуха отсутствует. Введем систему координат, жестко связанную с земным шаром. Начало O этой системы координат поместим в точку, из которой начинается движение материальной частицы. Ось x направим на юг, ось y — на восток, а ось z совместим с направлением ускорения свободного падения, т. е. с вертикалью (которая лишь незначительно отклоняется от направления радиуса земного шара). Если точка O расположена на географической широте β , то уравнениями движения материальной частицы (независимо от ее массы), как известно, будут

$$\left. \begin{aligned} x'' &= 2\omega y' \sin \beta, \\ y'' &= -2\omega (x' \sin \beta + z' \cos \beta), \\ z'' &= 2\omega y' \cos \beta - g, \end{aligned} \right\} \quad (15.15)$$

где ω есть угловая скорость вращения Земли. Введем для сокращения записи обозначения

$$\cos \beta = a, \quad \sin \beta = b$$

и перепишем уравнения движения в таком же виде, как

уравнения (15.5). Мы получим

$$\left. \begin{aligned} (x'' + 0x' + 0x) + (0y'' - 2\omega by' + 0y) + (0z'' + 0z' + 0z) &= 0, \\ (0x'' + 2\omega bx' + 0x) + (y'' + 0y' + 0y) + (0z'' + 2\omega az' + 0z) &= 0, \\ (0x'' + 0x' + 0x) + (0y'' - 2\omega ay' + 0y) + (z'' + 0z' + 0z) &= -g. \end{aligned} \right\} \quad (15.16)$$

Определитель из коэффициентов при старших производных равен

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

т. е. не равен нулю, следовательно, перед нами нормальный случай. Поэтому могут быть заданы любые начальные значения, и полученные затем решения будут удовлетворять этим начальным значениям. Так как начальное положение материальной частицы совпадает с точкой O , то

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0.$$

Составляющими начальной скорости пусть будут

$$x'(0) = u, \quad y'(0) = v, \quad z'(0) = w.$$

После преобразования Лапласа система дифференциальных уравнений (15.16) перейдет в систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} s^2 X - u - 2\omega bs Y &= 0, \\ 2\omega bs X + s^2 Y - v + 2\omega as Z &= 0, \\ -2\omega as Y + s^2 Z - w &= -\frac{g}{s} \end{aligned}$$

или

$$\left. \begin{aligned} s^2 X - 2\omega bs Y &= u, \\ 2\omega bs X + s^2 Y + 2\omega as Z &= v, \\ -2\omega as Y + s^2 Z &= w - \frac{g}{s}. \end{aligned} \right\} \quad (15.17)$$

Определитель $D(s)$ равен

$$D(s) = \begin{vmatrix} s^2 & -2\omega bs & 0 \\ 2\omega bs & s^2 & 2\omega as \\ 0 & -2\omega as & s^2 \end{vmatrix},$$

или, так как $a^2 + b^2 = 1$,

$$D(s) = s^4(s^2 + 4\omega^2).$$

Согласно правилу Крамера, мы имеем

$$D(s) X(s) = \begin{vmatrix} u & -2\omega b s & 0 \\ v & s^2 & 2\omega a s \\ w - \frac{g}{s} & -2\omega a s & s^2 \end{vmatrix},$$

откуда

$$X(s) = u \left(\frac{1}{s^2 + 4\omega^2} + \frac{4\omega^2 a^2}{s^2 (s^2 + 4\omega^2)} \right) + v \frac{2\omega b}{s (s^2 + 4\omega^2)} - \\ - w \frac{4\omega^2 a b}{s^2 (s^2 + 4\omega^2)} + g \frac{4\omega^2 a b}{s^3 (s^2 + 4\omega^2)}. \quad (15.18)$$

Аналогичным образом мы получим

$$Y(s) = -u \frac{2\omega b}{s (s^2 + 4\omega^2)} + v \frac{1}{s^2 + 4\omega^2} - w \frac{2\omega a}{s (s^2 + 4\omega^2)} + g \frac{2\omega a}{s^2 (s^2 + 4\omega^2)}, \quad (15.19)$$

$$Z(s) = u \frac{4\omega^2 a b}{s^2 (s^2 + 4\omega^2)} + v \frac{2\omega a}{s (s^2 + 4\omega^2)} + \\ + w \left(\frac{1}{s^2 + 4\omega^2} + \frac{4\omega^2 b^2}{s^2 (s^2 + 4\omega^2)} \right) - g \left(\frac{1}{s (s^2 + 4\omega^2)} + \frac{4\omega^2 b^2}{s^3 (s^2 + 4\omega^2)} \right). \quad (15.20)$$

Имея в виду, что

$$\frac{4\omega^2}{s^3 (s^2 + 4\omega^2)} = \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s (s^2 + 4\omega^2)},$$

найдем оригиналы, отвечающие изображениям $X(s)$, $Y(s)$, $Z(s)$, в таблице соответствий под № 38, 54, 83 и 113 и окончательно получим

$$x(t) = \frac{u}{2\omega} (a^2 \cdot 2\omega t + b^2 \sin 2\omega t) + \frac{v}{\omega} b \sin^2 \omega t - \\ - \frac{w}{2\omega} a b (2\omega t - \sin 2\omega t) + \frac{g}{2\omega^2} a b (\omega^2 t^2 - \sin^2 \omega t), \quad (15.21)$$

$$y(t) = -\frac{u}{\omega} b \sin^2 \omega t + \frac{v}{2\omega} \sin 2\omega t - \frac{w}{\omega} a \sin^2 \omega t + \\ + \frac{g}{4\omega^2} a (2\omega t - \sin 2\omega t), \quad (15.22)$$

$$z(t) = \frac{u}{2\omega} a b (2\omega t - \sin 2\omega t) + \frac{v}{\omega} a \sin^2 \omega t + \\ + \frac{w}{2\omega} (b^2 \cdot 2\omega t + a^2 \sin 2\omega t) - \frac{g}{2\omega^2} (b^2 \omega^2 t^2 + a^2 \sin^2 \omega t). \quad (15.23)$$

При $\omega \rightarrow 0$, т. е. в случае, когда Земля принимается неподвижной, получим обычные уравнения движения материальной частицы в поле тяготения Земли:

$$x(t) = ut, \quad y(t) = vt, \quad z(t) = wt - \frac{g}{2} t^2.$$

§ 16. Аномальная система совместных дифференциальных уравнений с выполнимыми начальными условиями

Если коэффициенты при старших производных системы совместных дифференциальных уравнений удовлетворяют условию

$$\det \| a_{ik} \| = 0, \quad (16.1)$$

то такую систему будем называть *аномальной*. Аномальная система обладает совсем иными свойствами, чем нормальная система (см. п. 1—3 на стр. 89 и 90). А именно, определитель

$$D(s) = \det \| p_{ik}(s) \|$$

при допущении (16.1) является многочленом относительно s степени, меньшей mn , поэтому при составлении дробей в решениях в пространстве изображений могут получаться рациональные функции, числитель которых имеет одинаковую или даже большую степень, чем знаменатель. Таким рациональным дробям соответствуют в пространстве оригиналов не обычные функции, а обобщенные функции [см. Добавление, формулу (19)], вследствие чего решения обладают свойствами иными, чем в нормальном случае. Далее в аномальном случае заданные *начальные значения*, если им действительно должны удовлетворять решения, должны подчиняться определенным условиям, следовательно, они не могут быть выбраны совершенно произвольно. Если начальные значения, требуемые физической постановкой задачи, не удовлетворяют этим условиям, то поставленная задача в традиционном математическом смысле неразрешима. Однако с таким результатом практика не может примириться, так как даже при подобного рода начальных значениях физическое явление все же должно как-то протекать. Как мы увидим ниже, теория распределений указывает выход из этого положения.

Сказанное проще всего пояснить на частном примере, позволяющем проследить за решениями во всех деталях. Рассмотрим следующую систему двух совместных дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями:

$$y_1' + y_1 + 2y_2 = f(t), \quad (16.2)$$

$$y_1'' + 5y_1 + 3y_2' = 0. \quad (16.3)$$

Относительно возбуждения $f(t)$ предположим, что оно непрерывно, за исключением изолированных точек, в которых оно изменяется скачкообразно, следовательно, обладает предельными значениями слева и справа. В частности, должно существовать предельное значение $f(+0)$ (что, например, в случае возбуждения $f(t) = t^{-1/2}$ не соблюдается). Так как в уравнения (16.2)

и (16.3) входят и первая и вторая производные от y_1 , но только первая производная от y_2 , то может идти речь лишь о начальных значениях $y_1(+0)$, $y_1'(+0)$ и $y_2(+0)$. Определитель, составленный из коэффициентов при старших производных y_1'' и y_2'' , равен

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, перед нами аномальный случай.

Сразу видно, что указанные три начальных значения, если потребовать, чтобы они были совместимы со структурой уравнений (16.2) и (16.3), не могут быть выбраны произвольно. В самом деле, в уравнение (16.2) входят только величины, для которых должны быть заданы начальные значения, вторые же производные в нем отсутствуют. Приближая в уравнении (16.2) t к нулю, мы получим

$$y_1'(+0) + y_1(+0) + 2y_2(+0) = f(+0). \quad (16.4)$$

Если начальные значения действительно должны приниматься решениями системы уравнений (16.2) и (16.3), то они должны удовлетворять соотношению (16.4).

Заметим, что такого рода связи между начальными значениями существуют для *любой* аномальной системы. Если для системы (15.5) определитель m -го порядка $\det \|a_{ik}\|$, составленный из коэффициентов при высших производных, равен нулю, то ранг¹⁾ этого определителя будет $r < m$. В этом случае, как известно из линейной алгебры, можно из $m - r$ уравнений полностью исключить высшие производные. Следовательно, в этих уравнениях будут содержаться только такие производные, которым можно задать начальные значения (15.6). Если в этих уравнениях мы будем приближать t к нулю, то получим определенные соотношения, которым должны удовлетворять только что указанные начальные значения. При определенных условиях, именно когда такой метод допускает повторение, могут существовать и другие соотношения, которым также должны удовлетворять начальные значения.

В рассмотренном примере нам не пришлось прибегать к исключению высших производных, так как одно из уравнений системы с самого начала не содержало вторых производных.

С учетом того, что нам понадобится в следующих параграфах, введем обозначения

$$y_1(+0) = a, \quad y_1'(+0) = b, \quad y_2(+0) = c$$

¹⁾ Рангом определителя называется число строк (или столбцов) в наименьшем не равном нулю миноре.

и предположим, что a, b, c действительно удовлетворяют соотношению

$$a + b + 2c = f(+0). \quad (16.5)$$

Это соотношение будет выполнено, если мы, например, примем, что $a = b = c = f(+0) = 0$.

Применив к системе уравнений (16.2) и (16.3) преобразование Лапласа, мы получим для определения функций $Y_1(s)$ и $Y_2(s)$ в пространстве изображений систему линейных алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} (s+1)Y_1(s) + 2Y_2(s) &= F(s) + a, \\ (s^2+5)Y_1(s) + 3sY_2(s) &= as + b + 3c. \end{aligned} \right\} \quad (16.6)$$

Определитель $D(s)$ равен

$$D(s) = s^2 + 3s - 10 = (s-2)(s+5).$$

Следовательно, решениями в пространстве изображений будут

$$Y_1(s) = \frac{1}{D(s)} (3sF(s) + as - 2b - 6c),$$

$$Y_2(s) = \frac{1}{D(s)} [-(s^2+5)F(s) + (a+b+3c)s - 5a + b + 3c].$$

Путем разложения на простейшие дроби мы получим

$$Y_1(s) = F(s) \left(\frac{6/7}{s-2} + \frac{15/7}{s+5} \right) + \frac{2}{7} \frac{a-b-3c}{s-2} + \frac{1}{7} \frac{5a+2b+6c}{s+5}. \quad (16.7)$$

Перейдя в пространство оригиналов, мы найдем для функции $y_1(t)$ выражение

$$\begin{aligned} y_1(t) = \frac{1}{7} f(t) * (6e^{2t} + 15e^{-5t}) + \frac{2}{7} (a-b-3c) e^{2t} + \\ + \frac{1}{7} (5a+2b+6c) e^{-5t}. \end{aligned} \quad (16.8)$$

Функция $y_1(t)$ по своему характеру ничем не отличается от функций, полученных в качестве решений в нормальном случае.

Совершенно иной характер имеет решение $y_2(t)$. В решении $Y_2(s)$, полученном в пространстве изображений, множитель при $F(s)$ представляет собой рациональную функцию, числитель которой имеет такую же степень, как и знаменатель, следовательно, оригинал, соответствующий этой функции, будет распределением. Однако перевод решения $Y_2(s)$ в пространство оригиналов можно осуществить также элементарным путем. Для этого при разложении множителя при $F(s)$ на простейшие дроби следует выделить из него постоянную часть, после чего останется рациональная функция с числителем, степень которого будет ниже

степени знаменателя. Выполнив такое разложение, мы получим

$$Y_2(s) = -F(s) \left(1 + \frac{9/7}{s-2} - \frac{30/7}{s+5} \right) + \frac{3}{7} \frac{-a+b+3c}{s-2} + \frac{2}{7} \frac{5a+2b+6c}{s+5}. \quad (16.9)$$

Переведя это решение в пространство оригиналов, мы найдем решение $y_2(t)$:

$$y_2(t) = -f(t) - \frac{1}{7} f(t) * (9e^{2t} - 30e^{-5t}) + \\ + \frac{3}{7} (-a+b+3c) e^{2t} + \frac{2}{7} (5a+2b+6c) e^{-5t}. \quad (16.10)$$

Мы видим, что теперь в противоположность нормальному случаю возбуждение $f(t)$ входит в решение $y_2(t)$ не только под интегралом типа свертки, который остается непрерывным даже в случае прерывного возбуждения $f(t)$, но также в качестве отдельного слагаемого. Следовательно, *решение $y_2(t)$ имеет те же разрывы, что и возбуждение $f(t)$* . Если возбуждение в какой-нибудь точке изменяется скачкообразно, то такой же скачок совершает и решение $y_2(t)$. Таким образом, в случае аномальной системы среди откликов на возбуждения могут быть скачкообразные отклики. Для нормальной системы это невозможно.

Для того чтобы выяснить, какие начальные значения имеют решения, составим сначала производную y_1' . Воспользовавшись теоремой 26.1, мы получим

$$y_1'(t) = 3f(t) + \frac{1}{7} f(t) * (12e^{2t} - 75e^{-5t}) + \\ + \frac{4}{7} (a-b-3c) e^{2t} - \frac{5}{7} (5a+2b+6c) e^{-5t}. \quad (16.11)$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} y_1(+0) &= a, \\ y_1'(+0) &= 3f(+0) - 3a - 2b - 6c, \\ y_2(+0) &= -f(+0) + a + b + 3c. \end{aligned} \right\} \quad (16.12)$$

Так как a , b , c должны удовлетворять соотношению (16.5), то

$$y_1'(+0) = b, \quad y_2(+0) = c,$$

т. е. решения действительно принимают заданные начальные значения.

Примечание. Начальные значения можно найти также непосредственно по изображениям $Y_1(s)$ и $Y_2(s)$, если воспользоваться теоремой 32.2 о начальных значениях.

§ 17. Аномальная система совместных дифференциальных уравнений с невыполнимыми начальными условиями. Решение посредством распределений

Случай, когда начальные значения не удовлетворяют условиям, требуемым структурой аномальной системы дифференциальных уравнений, встречается особенно часто именно на практике. Это легко понять, если вспомнить сказанное на стр. 83 об отдельном дифференциальном уравнении. Начальные значения, задаваемые при решении какой-либо задачи, описывают то состояние физической системы в момент времени $t = 0$, которое определяется *прошлым системы*. Следовательно, начальные значения — это те значения, с которыми функции подходят от отрицательных t к нулевой точке. Поэтому их целесообразно называть *предельными значениями слева* и обозначать через $y(-0)$, $y'(-0)$ и т. д. Требование, чтобы они совпадали с предельными значениями справа, т. е. с $y(+0)$, $y'(+0)$ и т. д., определяемыми функциями при $t > 0$ (именно эти предельные значения требуются при преобразовании Лапласа) в общем случае, очевидно, невыполнимо. В самом деле, это требование означает, чтобы будущее состояние ($t > 0$) непрерывно смыкалось с прошедшим состоянием. Но с физической точки зрения нельзя ожидать непрерывного смыкания прошедшего с будущим, так как прошедшее состояние является откликом на какие-то неизвестные бывшие возбуждения, в то время как будущее состояние зависит от заданных возбуждений $f(t)$, которые совсем не должны быть связаны с прежними возбуждениями. Только в том случае, когда начальные значения, обусловленные прошедшим ($t < 0$), и возбуждения, действующие при $t > 0$ и связанные с начальными значениями условиями совместности [в которые входят те и другие, см. соотношение (16.5)], согласованы между собой, возможен непрерывный переход от прошедшего к будущему¹⁾.

Мы видим отсюда, что с физической точки зрения не оправдано опираться на классическое математическое представление и требовать, чтобы функции при $t \rightarrow +0$ непрерывно переходили в начальные значения, т. е. требовать, чтобы эти начальные значения представляли собой предельные значения справа. При

¹⁾ Как уже было подчеркнуто на стр. 83, в случае отдельного дифференциального уравнения всегда происходит непрерывное смыкание прошедшего с будущим. Причина этого заключается в том, что для отдельного дифференциального уравнения определитель $\det \|a_{ik}\|$ состоит только из коэффициента при $y^{(n)}$, который всегда не равен нулю, и, следовательно, всегда имеет место нормальный случай.

таким подходе решение аномальной системы дифференциальных уравнений в общем случае невозможно.

Если же ввести в рассмотрение также прошедшее, т. е. значения $t < 0$, и понимать под начальными значениями предельные значения слева, то рассматриваемые функции и их производные будут иметь в нулевой точке скачки, т. е. разности между $y(-0)$ и $y(+0)$, между $y'(-0)$ и $y'(+0)$ и т. д. Вследствие этого теряется дифференцируемость в классическом смысле, та дифференцируемость, которая является необходимым допущением для каждого дифференциального уравнения. Эта трудность отпадает, если *решения дифференциальных уравнений рассматривать не как обычные функции, а как распределения*, и в соответствии с этим заменить обычные производные на обобщенные производные [см. Добавление, формулу (11)], так как обобщенные производные имеют смысл также для функций со скачками. Такой подход позволяет получать математическое описание безусловно существующих физических явлений также в тех случаях, когда на основе классического анализа это совершенно невозможно. Далее выяснилось, что понятие распределения допускает применение преобразования Лапласа, хотя на первый взгляд это кажется невозможным вследствие незнания правосторонних начальных значений.

Разобьем решение системы совместных дифференциальных уравнений с невыполнимыми начальными условиями посредством теории распределений на два этапа.

1. Начальные значения равны нулю

Достаточно рассмотреть одно из решений системы. Обозначим его через $y(t)$. Если все начальные значения (15.6), которые теперь мы будем рассматривать как *предельные значения слева* $y^{(v)}(-0)$ ($v = 0, 1, \dots, n-1$), равны нулю, то это равносильно допущению, что функция $y(t)$, следовательно, и ее производные, а также возбуждения при $t < 0$ равны нулю. В таком случае функция $y(t)$ определена в промежутке $-\infty < t < \infty$. Будем рассматривать теперь $y(t)$ как *распределение из пространства \mathcal{D}'_+* (см. Добавление, раздел III), элементы которого как раз обладают свойством быть равными нулю при $t < 0$ (точнее, регулярно распределению, равному нулю). В соответствии с этим обычные производные следует заменить *обобщенными производными*, которые существуют и в том случае, когда вследствие неравенства нулю правосторонних производных (предварительно неизвестных) в точке $t = 0$ имеются скачки. Конечно, возбуждения следует рассматривать теперь так же как распределения.

Система дифференциальных уравнений (16.2) и (16.3), рассмотренная на стр. 95, в новом понимании принимает вид

$$\left. \begin{aligned} Dy_1 + y_1 + 2y_2 &= f(t), \\ D^2y_1 + 5y_1 + 3Dy_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.1)$$

Применив к этим уравнениям преобразование Лапласа в смысле теории распределений, мы получим в пространстве изображений на основании правила V' (см. Добавление, раздел III) следующую систему алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (s+1)Y_1(s) + 2Y_2(s) &= F(s), \\ (s^2+5)Y_1(s) + 3sY_2(s) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.2)$$

Так как эта система совпадает с системой (16.6), если в последней положить $a = b = c = 0$, то мы получим решения Y_1, Y_2 и соответствующие оригиналы y_1, y_2 , положив $a = b = c = 0$ также в уравнениях (16.7) — (16.10), но при этом будем понимать y_1, y_2 как распределения из пространства \mathcal{D}'_+ .

Мы видим, что, отвлекаясь от этого нового толкования, мы могли бы получить тот же самый результат, если бы применили преобразование Лапласа к первоначальным дифференциальным уравнениям, но вместо правосторонних начальных значений использовали бы заданные левосторонние начальные значения (равные нулю).

Выясним, какие *правосторонние начальные значения* имеют решения системы (17.1). Эти начальные значения можно получить из ранее вычисленных значений (16.12), если в последние подставить $a = b = c = 0$. Тогда мы получим

$$y_1(+0) = 0, \quad y'_1(+0) = 3f(+0), \quad y_2(+0) = -f(+0). \quad (17.3)$$

Следовательно, решение $y_1(t)$ примыкает непрерывно к значению $y_1(-0) = 0$, но зато, если $f(+0) \neq 0$, производная $y'_1(+0)$ имеет в точке $t = 0$ скачок $3f(+0)$, а решение $y_2(t)$ в той же точке $t = 0$ имеет скачок $-f(+0)$.

Небезынтересно выяснить, каким образом решения, рассматриваемые как распределения, удовлетворяют системе уравнений (17.1). Для этого воспользуемся формулой (12) из Добавления. Если левосторонние предельные значения равны нулю, то формула (12) принимает вид

$$D^v y = y^{(v)} + y(+0)\delta^{(v-1)} + \dots + y^{(v-1)}(+0)\delta. \quad (17.4)$$

С учетом равенств (17.3) мы получим

$$Dy_1 = y'_1, \quad D^2y_1 = y''_1 + 3f(+0)\delta, \quad Dy_2 = y'_2 - f(+0)\delta,$$

где величины со штрихами представляют собой обычные производные для значений $t > 0$. Подставив эти выражения в уравнения (17.1), мы будем иметь

$$\begin{aligned} y_1' + y_1 + 2y_2 &= f(t), \\ y_1'' + 3f(+0)\delta + 5y_1 + 3y_2' - 3f(+0)\delta &= 0. \end{aligned}$$

Члены, содержащие δ , взаимно уничтожаются и остается система уравнений (16.2) и (16.3), которая действительно удовлетворяется обычными функциями.

2. Произвольные начальные значения

Если не все заданные начальные значения $y(-0)$, $y'(-0)$, ... равны нулю, то решение y при $t < 0$ не может быть тождественно равно нулю. Следовательно, теперь нельзя рассматривать y как распределение из пространства \mathcal{D}'_+ и пользоваться для обобщенных производных формулой (17.4). Вместо этой формулы теперь следует взять формулу (12) из Добавления в ее полном виде:

$$\begin{aligned} D^v y = y^{(v)} + [y(+0) - y(-0)]\delta^{(v-1)} + \dots \\ \dots + [y^{(v-1)}(+0) - y^{(v-1)}(-0)]\delta. \end{aligned} \quad (17.5)$$

Это означает, что правую часть соотношения (17.4) надо дополнить выражением, учитывающим левосторонние производные, следовательно, заменить $y^{(v)}$ не просто через D^v , а через

$$D^v y - y(-0)\delta^{(v-1)} - \dots - y^{(v-1)}(-0)\delta. \quad (17.6)$$

Таким путем в рассмотрение вводится прошедшее состояние и учитываются не равные нулю левосторонние предельные значения. Только после такого изменения дифференциальных уравнений они будут математически правильно описывать физическое явление. С наглядной точки зрения эта процедура вполне понятна: для значений $t > 0$ дифференциальные уравнения совершенно не изменяются, так как δ , δ' и т. д. при $t > 0$ равны нулю, но зато скачкообразные изменения производных в нулевой точке описываются правильно.

Заменяя в рассматриваемой системе уравнений все производные выражениями вида (17.6) и выполнив преобразование Лапласа в смысле теории распределений, мы получим, на основании правила V' (Добавление, раздел III) и формулы (19) Добавления, из каждого выражения вида (17.6) выражение

$$s^v Y(s) - y(-0)s^{v-1} - \dots - y^{(v-1)}(-0). \quad (17.7)$$

В точности такое же выражение мы получили бы и в том случае, если бы правильно применили к первоначальной производной $y^{(v)}$ правило V для обычных функций и вместо получающихся при этом правосторонних начальных значений подставили заданные левосторонние начальные значения.

Вывод. Таким образом, при преобразовании Лапласа в любом случае, даже если система аномальная, следует применять прежнее правило V и в качестве начальных значений брать заданные начальные значения. Однако полученные решения следует рассматривать как распределения из пространства \mathcal{D}'_+ , что для значений $t > 0$ не играет никакой роли, но зато приводит к математически правильному описанию скачкообразного поведения функций и их производных в нулевой точке.

Применяя сказанное к системе уравнений (16.2) и (16.3), мы получим при совершенно произвольных начальных значениях a, b, c решения (16.8) и (16.10). Правосторонние начальные значения определяются формулами (16.12), а скачки в точке $t = 0$ — формулами

$$y_1(+0) - a = 0, \quad y'_1(+0) - b = 3[f(+0) - (a + b + 2c)],$$

$$y_2(+0) - c = -f(+0) + (a + b + 2c).$$

Если выполняется условие (16.5), то скачки равны нулю. Так как значения a, b, c определяются прошедшим состоянием, то отсюда видно, что скачки являются следствием несоответствия между значением $f(+0)$ и значениями a, b, c . В этом случае переход функций от начальных значений к их дальнейшим значениям, предписываемым дифференциальными уравнениями, может осуществляться только посредством скачков.

§ 18. Приведение системы дифференциальных уравнений к одному уравнению для одной неизвестной путем исключения остальных неизвестных (способ, принятый в технике)

В технической литературе даже в настоящее время иногда применяется способ решения системы дифференциальных уравнений, хотя и использующей в конечном счете преобразование Лапласа, но основанной на процедуре, ведущей свое начало из тех времен, когда еще не знали непосредственного решения систем дифференциальных уравнений при помощи преобразования Лапласа. Так как классический метод решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений, указываемый в чисто математической литературе, практически невыполним, то выход находят в приведении системы к одному-единственному дифференциальному уравнению для одной неизвестной, что достигается

исключением остальных неизвестных. Этот способ требует введения допущений, часто невыполнимых, и, кроме того, связан с трудностями, касающимися начальных значений. Покажем это на примере системы второго порядка с двумя неизвестными функциями, но только с одной не равной нулю возбуждающей функцией. Итак, пусть задана система

$$\left. \begin{aligned} p_{11} \left(\frac{d}{dt} \right) y_1 + p_{12} \left(\frac{d}{dt} \right) y_2 &= f(t), \\ p_{21} \left(\frac{d}{dt} \right) y_1 + p_{22} \left(\frac{d}{dt} \right) y_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (18.1)$$

где

$$p_{ik} \left(\frac{d}{dt} \right) = a_{ik} \frac{d^2}{dt^2} + b_{ik} \frac{d}{dt} + c_{ik},$$

причем предполагается, что система нормальная, что, впрочем, для хода дальнейших рассуждений несущественно. Далее, пусть заданы начальные значения

$$y_1(0), \quad y_1'(0); \quad y_2(0), \quad y_2'(0). \quad (18.2)$$

Путем исключения из заданной системы функции y_2 получим одно-единственное дифференциальное уравнение для определения функции y_1 . В некоторых частных случаях это выполняется очень просто, однако это можно всегда сделать и в общем случае, если рассматривать операторы $p_{ik}(d/dt)$ как коэффициенты перед неизвестными и затем применить к системе (18.1) правило Крамера. Тогда мы будем иметь

$$\left| \begin{array}{cc} p_{11} \left(\frac{d}{dt} \right) & p_{12} \left(\frac{d}{dt} \right) \\ p_{21} \left(\frac{d}{dt} \right) & p_{22} \left(\frac{d}{dt} \right) \end{array} \right| y_1 = \left| \begin{array}{cc} f(t) & p_{12} \left(\frac{d}{dt} \right) \\ 0 & p_{22} \left(\frac{d}{dt} \right) \end{array} \right| \quad (18.3)$$

Развернув определители, мы получим слева многочлен четвертой степени, а справа многочлен второй степени относительно d/dt , следовательно, уравнение для определения y_1 будет иметь вид

$$\begin{aligned} a_4 \frac{d^4}{dt^4} y_1 + a_3 \frac{d^3}{dt^3} y_1 + a_2 \frac{d^2}{dt^2} y_1 + a_1 \frac{d}{dt} y_1 + a_0 y_1 = \\ = b_2 \frac{d^2}{dt^2} f + b_1 \frac{d}{dt} f + b_0 f. \end{aligned} \quad (18.4)$$

При выводе этого дифференциального уравнения молча предполагается, что функция $f(t)$ дважды дифференцируема, что на практике часто не оправдывается, например, в тех случаях, когда $f(t)$ имеет скачки. (В таких случаях следовало бы заменить обычные производные на обобщенные производные; тогда в уравнение вошли бы δ -импульс и его обобщенные производные.) Однако некоторые инженеры, не задумываясь над этим

обстоятельством, применяют к уравнению (18.4) преобразование Лапласа. Для выполнения этого преобразования требуются начальные значения $f(0)$, $f'(0)$ возмущающей функции $f(t)$, которые следует считать известными, так как функция $f(t)$ задана; кроме того, для функции y_1 требуется знать начальные значения $y_1(0)$, $y_1'(0)$, $y_1''(0)$, $y_1'''(0)$, из которых известны только два первых. Можно было бы определить недостающие начальные значения, положив в уравнениях (18.1) $t = 0$, и таким путем дополнительно к четырем начальным значениям (18.2) вычислить значения $y_1''(0)$ и $y_2''(0)$, а затем, продифференцировав уравнения (18.1), вычислить $y_1'''(0)$. Однако такое вычисление требует очень много времени и на практике никогда не производится. Вместо этого ограничиваются случаем, когда физическая система возбуждается из состояния покоя, следовательно, все начальные значения (18.2) принимаются равными нулю. Затем, не долго думая, принимают, что равны нулю также начальные значения $y_1''(0)$ и $y_1'''(0)$ и, кроме того, полагают, что $f(0) = f'(0) = 0$, после чего, применив к уравнению (18.4) преобразование Лапласа, получают изображающее уравнение

$$(a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0)Y_1(s) = (b_2s^2 + b_1s + b_0)F(s), \quad (18.5)$$

откуда вычисляют $Y_1(s)$. Однако такой вывод изображающего уравнения, очевидно, неправилен, так как из уравнений (18.1), если принять начальные значения (18.2) равными нулю, в общем случае совсем не следует, что равны нулю также $y_1''(0)$ и $y_1'''(0)$. Кроме того, предположение, что $f(0) = f'(0) = 0$, в общем случае также не выполняется.

Несмотря на эту ошибку, полученное уравнение (18.5) при равных нулю начальных значениях (18.2) случайно оказывается правильным. В самом деле, применив преобразование Лапласа при нулевых начальных значениях непосредственно к системе (18.1), мы получим

$$\left. \begin{aligned} p_{11}(s)Y_1 + p_{12}(s)Y_2 &= F(s), \\ p_{21}(s)Y_1 + p_{22}(s)Y_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (18.6)$$

что формально совпадает с системой (18.1), если в последней заменить оператор d/dt на s , а вместо малых букв y_1 , y_2 и f подставить большие. Поэтому для решения системы уравнений (18.6) относительно Y_1 достаточно произвести такую же замену малых букв на большие и в уравнениях (18.3) и (18.4), в результате чего получается опять уравнение (18.5). Так как теперь это уравнение получено безупречно правильным путем, то отсюда следует, что в частном случае равных нулю начальных

значений способ исключения всех неизвестных, кроме одной, приводит к правильному результату, но незаконным путем.

К такому же результату можно прийти и более сложным путем, если неизвестные начальные значения $y_1''(0)$ и $y_1'''(0)$ вычислить так, как было указано выше, и затем при преобразовании Лапласа уравнения (18.4) подставить эти начальные значения в изображающее уравнение. Тогда окажется, что дополнительные члены, которые появятся в изображающем уравнении от этих начальных значений, и члены, в которые войдут начальные значения возмущающей функции $f(t)$, взаимно уничтожатся. Однако при этом следует предполагать, что функция $f(t)$ допускает многократное дифференцирование.

Если заданные начальные значения (18.2) не равны нулю, то изложенный незаконный путь, т. е. приведение системы дифференциальных уравнений к одному-единственному уравнению с последующим преобразованием Лапласа, конечно, не приводит к цели. Между тем непосредственное применение преобразования Лапласа к заданной системе дифференциальных уравнений представляет собой безупречный способ решения, применимый в любом случае и требующий наименьшей затраты времени. Поэтому следует предостеречь от пока еще широко распространенного способа решения системы дифференциальных уравнений путем приведения ее к одному-единственному уравнению для одной неизвестной.

Некоторые авторы — инженеры считают дифференциальное уравнение вида (18.4), в котором слева и справа применяется к искомому и заданным функциям один и тот же оператор, «правильным» уравнением и посвящают ему подробные исследования, между тем как при по-настоящему правильном подходе к решению системы дифференциальных уравнений уравнение (18.4) вообще не появляется.

§ 19. Система дифференциальных уравнений со структурой, различной в отдельных интервалах

Как мы неоднократно видели, одним из преимуществ преобразования Лапласа по сравнению с классическим методом решения дифференциальных уравнений является автоматический учет начальных значений. Это преимущество особенно выгодно проявляется, например, в тех случаях, когда *постоянные системы и возбуждающие функции не универсальны, т. е. не остаются неизменными для всех $t > 0$* , а скачкообразно изменяются, как только одна из неизвестных становится больше или меньше некоторых определенных значений. Так происходит, например, в случае системы регулирования, обладающей зоной нечувствительности, внутри которой регулируемая величина мо-

жет изменяться, не вызывая включения регулятора. Интегрирование уравнений, описывающих такую систему, следует выполнять только до того состояния, при котором соответствующая неизвестная достигает своего критического значения; затем, определив здесь значения неизвестных и приняв их за новые начальные значения, надо продолжить интегрирование до следующего критического состояния и т. д.

Проиллюстрируем этот способ на примере, взятом из практики расчета системы регулирования с зоной нечувствительности¹⁾. Пусть исследуемая система описывается двумя дифференциальными уравнениями с двумя неизвестными $y_1(t)$ и $y_2(t)$:

$$y_1' + 2\delta y_1 - (\delta^2 + \omega^2) y_2 = cu(t),$$

$$y_2' = \begin{cases} 0 & \text{при } |y_1| \leq \eta, \\ -y_1 + (\operatorname{sign} y_1) \eta & \text{при } |y_1| > \eta, \end{cases}$$

где δ есть мера затухания, а ω — круговая частота. Начальные значения пусть равны

$$y_1(+0) = 0, \quad y_2(+0) = 0.$$

Первое уравнение имеет обычный вид и содержит в правой части возбуждающую функцию, равную кратному от единичного скачка. Второе же уравнение иного рода: оно предписывает, чтобы производная y_2' была равна нулю до тех пор, пока функция $y_1(t)$ изменяется в промежутке от $-\eta$ до $+\eta$, и становилась равной $-y_1(t) \pm \eta$, как только $y_1(t)$ выходит из границ указанного промежутка, причем знак перед величиной η должен совпадать со знаком величины $y_1(t)$.

Так как $y_1(+0) = 0$, то вначале безусловно будет $|y_1| \leq \eta$, следовательно, $y_2'(t) = 0$, а потому на основании условия $y_2(+0) = 0$ функция $y_2(t)$ в течение некоторого промежутка времени равна нулю. Таким образом, первое уравнение для некоторого промежутка времени справа от $t = 0$ приводится к уравнению

$$y_1' + 2\delta y_1 = cu(t).$$

Предположим, что это уравнение имеет место для всех $t > 0$, и применим преобразование Лапласа, что не мешает нам затем использовать полученное решение только до определенного значения $t = T_1$. Изображающее уравнение вследствие условия

¹⁾ Описание этой системы регулирования, вывод ее уравнений и последующий расчет см. в статье: Oldenbourg R., Anwendung der Laplace-Transformation bei abschnittsweise linearen Regelvorgängen, помещенной в книге: Die Laplace-Transformation und ihre Anwendung in der Regelungstechnik (приложение к журналу «Regelungstechnik»), стр. 104—114, Oldenbourg-Verlag, München, 1955.

$y_1(+0) = 0$ имеет вид

$$sY_1 + 2\delta Y_1 = \frac{c}{s}.$$

Его решению

$$Y_1 = \frac{c}{s(s+2\delta)} = \frac{c}{2\delta} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2\delta} \right)$$

соответствует оригинал

$$y_1(t) = \frac{c}{2\delta} (1 - e^{-2\delta t}).$$

Для $\delta > 0$ эта функция возрастает монотонно от нуля до значения $c/2\delta$. Если

$$\eta \geq \frac{c}{2\delta}$$

(рис. 19.1), то всегда будет $y_1(t) < \eta$, и во втором дифференциальном уравнении всегда надо брать для правой части первую строку. Это означает, что функция $y_1(t)$ имеет только что найденное выражение, а функция $y_2(t) = 0$ при всех $t > 0$. Если же

$$\eta < \frac{c}{2\delta},$$

то имеется такое значение $t = T_1$, при котором функция $y_1(T_1)$ становится равной η . Это значение T_1 определяется уравнением

$$\frac{c}{2\delta} (1 - e^{-2\delta T_1}) = \eta,$$

откуда имеем

$$T_1 = \frac{1}{2\delta} \ln \frac{c}{c - 2\delta\eta}.$$

Рис. 19.1. Графики регулируемой и регулирующей величин для системы регулирования с зоной нечувствительности.

Время t_1 , положив для этого $t = t_1 + T_1$. Штрихи, отмечающие дифференцирование, теперь будут означать дифференцирование по t_1 . Так как, начиная с момента времени T_1 , функция $y_1 \geq \eta$, то теперь во втором дифференциальном уравнении следует взять для правой части вторую строку, и система примет вид

$$\begin{aligned} y_1' + 2\delta y_1 - (\delta^2 + \omega^2) y_2 &= cu(T_1 + t_1), \\ y_1 &+ y_2' = \eta, \end{aligned}$$

Выберем теперь момент времени T_1 за начальную точку новой шка-

причем начальными условиями будут

$$y_1(T_1 + 0) = \eta, \quad y_2(T_1 + 0) = 0$$

(так как до момента времени T_1 функция y_2 все время была равна нулю). Опять предположим, что эта система имеет место для всех моментов времени $t_1 > 0$, и выполним преобразование Лапласа; мы получим изображающие уравнения

$$sY_1 - \eta + 2\delta Y_1 - (\delta^2 + \omega^2)Y_2 = \frac{c}{s},$$

$$Y_1 + sY_2 = \frac{\eta}{s},$$

из которых найдем

$$Y_1 = \eta \frac{s + \frac{c}{\eta} + (\delta^2 + \omega^2) \frac{1}{s}}{s^2 + 2\delta s + \delta^2 + \omega^2},$$

$$Y_2 = \frac{2\delta\eta - c}{s(s^2 + 2\delta s + \delta^2 + \omega^2)}.$$

Для обратного перехода в пространство оригиналов воспользуемся соответствиями № 47 и 48 из таблицы в конце книги и правилами IV и V:

$$\frac{1}{(s + \delta)^2 + \omega^2} \bullet \circ \frac{1}{\omega} e^{-\delta t_1} \sin \omega t_1,$$

$$\frac{s}{(s + \delta)^2 + \omega^2} \bullet \circ \frac{d}{dt_1} \left(\frac{1}{\omega} e^{-\delta t_1} \sin \omega t_1 \right) = \frac{1}{\omega} e^{-\delta t_1} (-\delta \sin \omega t_1 + \omega \cos \omega t_1),$$

$$\frac{\delta^2 + \omega^2}{s[(s + \delta)^2 + \omega^2]} = \frac{1}{s} - \frac{s + \delta}{(s + \delta)^2 + \omega^2} - \frac{\delta}{(s + \delta)^2 + \omega^2} \bullet \circ$$

$$\bullet \circ 1 - e^{-\delta t_1} \cos \omega t_1 - \frac{\delta}{\omega} e^{-\delta t_1} \sin \omega t_1.$$

Выполнив вычисления, мы получим

$$y_1(t_1 + T_1) = \eta \left[1 + \frac{1}{\omega} \left(\frac{c}{\eta} - 2\delta \right) e^{-\delta t_1} \sin \omega t_1 \right],$$

$$y_2(t_1 + T_1) = \frac{2\delta\eta - c}{\delta^2 + \omega^2} \left[1 - e^{-\delta t_1} \left(\frac{\delta}{\omega} \sin \omega t_1 + \cos \omega t_1 \right) \right].$$

Мы видим, что функция y_1 , имея в момент времени $t_1 = 0$ значение η , в дальнейшем изменяется как затухающая синусоида, следовательно, сначала возрастает, а затем уменьшается, вновь достигая значения η в некоторый момент времени $t_1 = T_2$. Этот момент времени, определяемый из уравнения $\sin \omega T_2 = 0$ и равный

$$T_2 = \frac{\pi}{\omega},$$

мы опять примем за начальную точку новой шкалы времени t_2 . Начиная с момента времени $t_1 = T_2$, т. е. с $t_2 = 0$, во втором дифференциальном уравнении следует взять для правой части опять первую строку, так как теперь $y_1 < \eta$. Новыми начальными значениями будут

$$y_1(T_1 + T_2 + 0) = \eta, \quad y_2(T_1 + T_2 + 0) = \frac{2\delta\eta - c}{\delta^2 + \omega^2} \left[1 + \frac{\delta}{\omega} e^{-\delta \frac{\pi}{\omega}} \right].$$

Так как y'_2 , начиная с момента времени $t_2 = 0$, равно нулю, то y_2 сохраняет при $t_2 > 0$ найденное постоянное начальное значение, а функция y_1 определяется из уравнения

$$y'_1 + 2\delta y_1 - (\delta^2 + \omega^2) y_2(T_1 + T_2) = cu(T_1 + T_2 + t_2).$$

Из предыдущего ясно, как этот процесс должен быть продолжен дальше.

§ 20. Система уравнений для электрической цепи

При определении токов и напряжений в электрических цепях получается система функциональных уравнений, очень похожая на систему дифференциальных уравнений, рассмотренную в § 15, но в одном отношении существенно от нее отличающаяся. Вследствие важной роли, которую в современной технике играет теория электрических цепей, выполним решение этой системы при помощи преобразования Лапласа.

Рассмотрим сначала одиночный замкнутый электрический контур с сосредоточенными параметрами: индуктивностью L , активным сопротивлением R и емкостью C . В этом контуре находится генератор, создающий переменное во времени напряжение $e(t)$, которое вызывает в контуре ток $i(t)$. Падение напряжения равно $L di/dt$ на индуктивности, Ri — на сопротивлении и

$\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$ — на емкости. Согласно закону Кирхгофа, суммарное падение напряжения в контуре равно приложенной электродвижущей силе $e(t)$, следовательно, имеет место уравнение

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = e(t). \quad (20.1)$$

Это *интегро-дифференциальное уравнение*, определяющее ток $i(t)$, можно преобразовать в дифференциальное уравнение второго порядка

$$L \frac{d^2k}{dt^2} + R \frac{dk}{dt} + \frac{1}{C} k = e(t), \quad (20.2)$$

если в качестве новой переменной ввести заряд конденсатора

$$k(t) = \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

или если продифференцировать уравнение по t . Последний прием возможен только в том случае, когда функция $e(t)$ дифференцируема, но именно этого часто не бывает, например, если $e(t)$ является разрывной функцией. Однако для применения преобразования Лапласа нет никакой необходимости заменять уравнение (20.1) дифференциальным уравнением. В самом деле, положив

$$\int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = \int_0^t i(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^0 i(\tau) d\tau = \int_0^t i(\tau) d\tau + \gamma$$

и применив к левой части этого соотношения правило VII, мы получим

$$\int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \rightarrow \frac{1}{s} I(s) + \frac{\gamma}{s},$$

после чего сразу сумеем перевести уравнение (20.1) в пространство изображений.

В дальнейшем в целях лучшей обозримости вычислений примем, что контур в момент времени $t = 0$ находился в состоянии покоя, т. е. что

$$i(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \leq 0,$$

следовательно, $\gamma = 0$. Тогда для уравнения (20.1) соответствующим ему изображающим уравнением будет

$$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{Cs} I(s) = E(s).$$

Введя для сокращения записи обозначение

$$Ls + R + \frac{1}{Cs} = Z(s), \quad (20.2')$$

мы получим

$$Z(s) I(s) = E(s). \quad (20.3)$$

В § 12 мы ввели для функций $f(t)$ и $y(t)$ в пространстве оригиналов названия «входная функция» и «выходная функция» и затем перенесли эти названия на соответствующие функции в пространстве изображений. Поступим так же и здесь и назовем функцию $I(s)$ *током*, а функцию $E(s)$ — *напряжением*.

Тогда на языке пространства изображений уравнение (20.3) будет выражать не что иное, как закон Ома, если только функцию $Z(s)$ назвать *сопротивлением*. Однако вместо этого названия для функции $Z(s)$ принят термин *импеданс*. Обратное значение импеданса, т. е. $Y(s) = 1/Z(s)$, характеризует проводимость и называется *адмитансом*. Итак, мы видим, что замкнутый

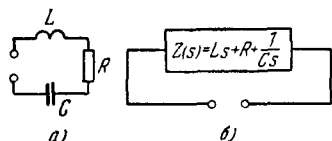


Рис. 20.1. Контур с индуктивностью L , сопротивлением R и емкостью C и эквивалентный импеданс.

электрический контур, обладающий индуктивностью, сопротивлением и емкостью и описываемый в пространстве оригиналов интегро-дифференциальным уравнением (20.1), в пространстве изображений заменяется контуром, обладающим *только сопротивлением* $Z(s)$ и *подчиняющимся закону Ома*. Поэтому для схематического изображения контура в пространстве изображений не

требуется отмечать на схеме условными знаками индуктивности L , сопротивления R и емкости C (рис. 20.1, а). Вместо этого достаточно начертить блок и вписать в него выражение функции $Z(s)$ (рис. 20.1, б), т. е. поступить так же, как было сделано раньше с передаточной функцией $G(s)$ при исследовании системы, описываемой одним дифференциальным уравнением.

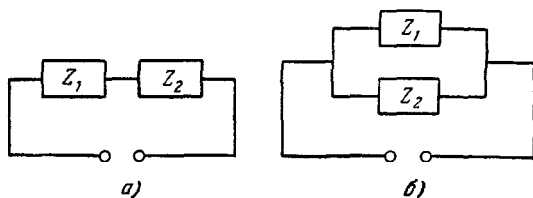


Рис. 20.2. Импедансы при последовательном и параллельном включении.

Если два контура с импедансами Z_1 и Z_2 соединены последовательно, то получается контур с импедансом $Z = Z_1 + Z_2$ (рис. 20.2, а). Если два контура с адмитансами $Y_1 = 1/Z_1$ и $Y_2 = 1/Z_2$ соединены параллельно, то получается контур с адмитансом $Y_1 + Y_2$ (рис. 20.2, б).

Описание связей на языке пространства изображений особенно оправдывается в тех случаях, когда несколько контуров соединены в *цепь*, так как переход из пространства оригиналов в пространство изображений приводит к замене сложных дифференциальных и интегральных соотношений линейными алгебраическими соотношениями. Покажем это на примере цепи,

изображенной на рис. 20.3. Эта цепь имеет два входных и два выходных зажима, следовательно, представляет собой четырех-полюсник. На входе имеется генератор с напряжением e_1 ; требуется найти напряжение e_0 на выходе.

Прежде всего отметим в каждом контуре величину $i_v(t)$ протекающего в нем тока и произвольно установим положительное направление тока (на схеме — везде по движению стрелки часов). Затем к каждому контуру применим закон Кирхгофа. При этом учтем, что в контуре, отмеченном через i_1 , ток в C_1 равен $i_1 - i_2$; в контуре, отмеченном через i_2 , ток в L_2 равен $i_2 - i_4$ и т. д. Следовательно, уравнения Кирхгофа будут иметь вид

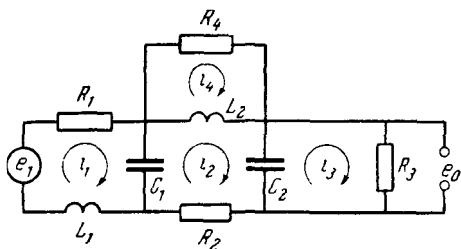


Рис. 20.3. Электрическая цепь из пяти контуров.

$$R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int_0^t (i_1 - i_2) d\tau + L_1 \frac{d}{dt} i_1 = e_1$$

$$L_2 \frac{d}{dt} (i_2 - i_4) + \frac{1}{C_2} \int_0^t (i_2 - i_3) d\tau + R_2 i_2 + \frac{1}{C_1} \int_0^t (i_2 - i_1) d\tau = 0$$

$$R_3 i_3 + \frac{1}{C_2} \int_0^t (i_3 - i_2) d\tau = 0$$

$$R_4 i_4 + L_2 \frac{d}{dt} (i_4 - i_2) = 0$$

$$R_3 i_3 = e_0$$

Применим к этим уравнениям преобразование Лапласа. Учтя, что, согласно сделанному выше предположению, цепь до момента времени $t = 0$ находилась в состоянии покоя, мы получим в пространстве изображений следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \left(L_1 s + R_1 + \frac{1}{C_1 s} \right) I_1 & - \frac{1}{C_1 s} I_2 & & = E_1 \\ - \frac{1}{C_1 s} I_1 + \left(L_2 s + R_2 + \frac{1}{C_2 s} + \frac{1}{C_1 s} \right) I_2 & - \frac{1}{C_2 s} I_3 - L_2 s I_4 & & = 0 \\ - \frac{1}{C_2 s} I_2 + \left(R_3 + \frac{1}{C_2 s} \right) I_3 & & & = 0 \\ & - L_2 s I_2 & + (L_2 s + R_4) I_4 & = 0 \\ & & R_3 I_3 & - E_0 = 0 \end{aligned}$$

равен

$$D(s) = \begin{vmatrix} Z_{11} & \dots & Z_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ Z_{n1} & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix}. \quad (20.5)$$

В развернутом виде он представляет собой сумму произведений функций вида (20.2'). Для вычисления тока $I_v(s)$ в v -м контуре при помощи правила Крамера заменим величины v -го столбца величинами, стоящими в правых частях уравнений (20.4), т. е. величинами $E_1 \neq 0$, $E_2 = E_3 = \dots = E_n = 0$. Развернув новый определитель по элементам v -го столбца, мы получим умноженное на $(-1)^{1+v}$ произведение напряжения $E_1(s)$ на минор

$$D_{1v}(s) = \begin{vmatrix} Z_{21} & \dots & Z_{2v-1} & Z_{2v+1} & \dots & Z_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Z_{n1} & \dots & Z_{nv-1} & Z_{nv+1} & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix},$$

который получается из определителя $D(s)$ вычеркиванием первой строки и v -го столбца. Разделив это произведение на первоначальный определитель $D(s)$, мы найдем искомый ток

$$I_v^{(1)}(s) = (-1)^{1+v} \frac{D_{1v}(s)}{D(s)} E_1(s).$$

Если теперь мы примем не равным нулю произвольное напряжение $E_\mu(s)$, остальные же $E(s)$ положим равными нулю, то аналогичным образом получим

$$I_v^{(\mu)}(s) = (-1)^{\mu+v} \frac{D_{\mu v}(s)}{D(s)} E_\mu(s), \quad (20.6)$$

где минор $D_{\mu v}$ получается из определителя D вычеркиванием μ -й строки и v -го столбца.

Введя обозначение

$$(-1)^{\mu+v} \frac{D_{\mu v}(s)}{D(s)} = G_{\mu v}(s), \quad (20.7)$$

мы придадим формуле, определяющей $I_v^{(\mu)}$, вид

$$I_v^{(\mu)}(s) = G_{\mu v}(s) E_\mu(s). \quad (20.8)$$

Так же как и в § 12, функция $G_{\mu v}(s)$ называется *передаточной функцией* системы, однако теперь в отличие от того, что было в § 12, приходится иметь дело с n^2 такими функциями.

Определив токи $I_v^{(\mu)}(s)$ при сделанных частных допущениях, мы получим токи $I_v(s)$ для произвольных напряжений E_1, E_2, \dots, E_n в виде суммы

$$I_v(s) = \sum_{\mu=1}^n G_{\mu v}(s) E_\mu(s). \quad (20.9)$$

Если в качестве напряжения (действительного, а не преобразованного) в μ -м контуре взять импульсную функцию

$$e_{\mu}(t) = \delta(t),$$

то ток $i_{\nu}^{(\mu)}(t)$ в ν -м контуре следует назвать *откликом на импульсное возбуждение*. В этом случае $E_{\mu}(s) = 1$, следовательно,

$$I_{\nu}^{(\mu)}(s) = G_{\mu\nu}(s),$$

т. е. передаточная функция $G_{\mu\nu}(s)$ является \mathcal{L} -изображением отклика ν -го контура на импульсное возбуждение в μ -м контуре.

Пусть оригинал, соответствующий изображению $G_{\mu\nu}(s)$, равен $g_{\mu\nu}(t)$; тогда, выполнив перевод уравнения (20.8) в пространство оригиналов, мы увидим, что действительный ток в ν -м контуре при наличии напряжения только в μ -м контуре равен

$$i_{\nu}^{(\mu)}(t) = g_{\mu\nu}(t) * e_{\mu}(t). \quad (20.10)$$

Следовательно, величину $g_{\mu\nu}(t)$ можно назвать *весовой функцией* для воздействия μ -го контура на ν -й контур (см. в связи с этим стр. 65 и сноску на стр. 46).

§ 21. Начальные значения для аномального случая уравнений электрической цепи

Если в уравнения электрической цепи ввести, как это было сделано в § 20 [см. уравнение (20.2)], вместо токов заряды конденсатора, то система интегро-дифференциальных уравнений заменится системой дифференциальных уравнений. В § 20 мы молчаливо предположили, что для этой системы имеет место нормальный случай (см. § 15). В соответствии с этим мы приняли, что числители всех встречавшихся там рациональных передаточных функций $G_{\mu\nu}(s)$ имели меньшую степень, чем знаменатели, и поэтому соответствующие весовые функции $g_{\mu\nu}(t)$ были обычными функциями. Кроме того, мы без всяких сомнений считали, что решения уравнений электрической цепи удовлетворяют заданным начальным значениям. Между тем и для уравнений электрической цепи может иметь место аномальный случай (§ 16, 17), и притом даже довольно часто. Так, например, для электрической цепи, рассмотренной на стр. 113 и 114, ток i_3 входит в уравнения либо сам, либо под знаком интеграла, поэтому при введении зарядов конденсатора ни в одном из уравнений не может появиться вторая производная заряда конденсатора. Это означает, что определитель (16.1), составленный из коэффициентов при высших производных, имеет в одной из строк только нули, следовательно, он равен нулю, и поэтому рассматриваемая система аномальна.

Для того чтобы наглядно пояснить, какие соотношения возникают в таком случае, рассмотрим пример более простой, чем на стр. 113, а именно электрическую цепь, состоящую только из двух контуров (четыреполюсник с индуктивностью, сопротивлением и емкостью, рис. 21.1). Пусть до момента времени $t = 0$ электрическая цепь находится в состоянии покоя, т. е. в ней до этого момента нет ни тока, ни напряжения, ни заряда. В момент времени $t = 0$ на входе цепи прикладывается напряжение $e(t)$. Требуется найти напряжение $e_0(t)$ на свободном выходе. Обозначим через i и i_0 контурные токи; тогда, согласно сказанному в § 20 и с учетом того, что $i(t) = i_0(t) = 0$ при $t < 0$, уравнения Кирхгофа будут иметь вид

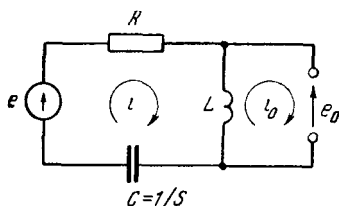


Рис. 21.1. Четыреполюсник с индуктивностью L , сопротивлением R и емкостью C .

$$\left. \begin{aligned} L \frac{d}{dt} (i - i_0) + Ri + S \int_0^t i(\tau) d\tau &= e(t), \\ L \frac{d}{dt} (i_0 - i) &= -e_0(t), \end{aligned} \right\} \quad (21.1)$$

где для сокращения записи величина $1/C$ (обратная емкость) обозначена через S (по американской терминологии — *эластанс*). Так как второй контур открытый, то $i_0(t) = 0$. Следовательно, мы имеем только две неизвестные функции i и e_0 , определяемые одним интегро-дифференциальным и одним дифференциальным уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} Li' + Ri + S \int_0^t i(\tau) d\tau &= e(t), \\ Li' &= -e_0(t). \end{aligned} \right\} \quad (21.2)$$

Заменим эту систему с входящим в нее интегро-дифференциальным уравнением системой дифференциальных уравнений. Для этой цели введем в качестве новой переменной заряд конденсатора

$$k(t) = \int_0^t i(\tau) d\tau.$$

Тогда мы получим систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} Lk'' + Rk' + Sk &= e(t), \\ Lk'' &= -e_0(t). \end{aligned}$$

В эту систему неизвестная e_0 входит только сама, без своих производных. Следовательно, определитель (16.1) равен нулю, т. е. полученная система аномальна.

Поэтому мы должны считаться с возможностью, что искомые функции в момент времени $t = 0$ изменяются скачкообразно, причем при $t < 0$ эти функции равны нулю. В этом случае целесообразно искать решение системы (21.2) среди распределений из пространства \mathcal{D}'_+ и соответственно этому заменить обычные производные обобщенными, а интеграл — сверткой. Мы получим

$$\begin{aligned} L Di + Ri + Si * 1 &= e(t), \\ L Di &- e_0 = 0. \end{aligned}$$

Применив правила V' и IX' (см. Добавление), мы перейдем к изображающим уравнениям¹⁾

$$\begin{aligned} LsI + RI + S \frac{1}{s} I &= E, \\ LsI &- E_0 = 0, \end{aligned}$$

или

$$\left. \begin{aligned} (Ls^2 + Rs + S) I &= sE, \\ LsI - E_0 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (21.3)$$

решениями которых будут

$$I(s) = \frac{s}{Ls^2 + Rs + S} E(s), \quad (21.4)$$

$$E_0(s) = \frac{Ls^2}{Ls^2 + Rs + S} E(s). \quad (21.5)$$

Хотя ток $i(t)$ нас не интересует, все же вычислим его. В уравнении (21.4) множитель $A(s)$ перед $E(s)$ имеет в числителе степень, меньшую чем в знаменателе, поэтому для него существует оригинал $a(t)$. После перевода уравнения (21.4) в пространство оригиналов мы получим

$$i(t) = a(t) * e(t). \quad (21.6)$$

Так как при $t < 0$ ток $i(t)$ был равен нулю, то, рассматривая $i(t)$ как обычную функцию, а не как распределение, мы должны считать для $i(t)$ заданным начальное условие

$$i(-0) = 0. \quad (21.7)$$

Далее, уравнение (21.6) показывает, что

$$i(+0) = 0, \quad (21.8)$$

¹⁾ Такие же изображающие уравнения мы могли бы получить, если бы к уравнениям (21.2) применили правила V и IX для обычных функций и, кроме того, вместо правостороннего предельного значения $i(+0)$, необходимого при преобразовании Лапласа производной i' , использовали бы левостороннее предельное значение $i(-0)$, равное нулю.

следовательно, $i(+0) = i(-0)$. Таким образом, ток подходит к своему начальному значению непрерывно.

Множитель перед $E(s)$ в уравнении (21.5) имеет числитель, степень которого равна степени знаменателя, следовательно, этому множителю соответствует распределение. Для того чтобы избежать оперирования с распределением, разложим множитель перед $E(s)$ на два слагаемых:

$$\frac{Ls^2}{Ls^2 + Rs + S} = 1 - \frac{Rs + S}{Ls^2 + Rs + S} = 1 - B(s).$$

Слагаемое $B(s)$ обладает оригиналом, следовательно, после перевода уравнения (21.5) в пространство оригиналов мы получим

$$e_0(t) = e(t) - b(t) * e(t). \quad (21.9)$$

Так как в это соотношение $e(t)$ входит не только под знаком интеграла типа свертки, но также изолированно, то напряжение на выходе повторяет все скачки напряжения, которые возможны на входе. Таким образом, четырехполюсник представляет собой систему, допускающую скачкообразные изменения напряжения (см. § 16).

Из уравнения (21.9) следует, в частности, что ¹⁾

$$e_0(+0) = e(+0). \quad (21.10)$$

Так как четырехполюсник при $t < 0$ был в состоянии покоя, то

$$e_0(-0) = 0. \quad (21.11)$$

Итак, мы пришли к выводу, что правостороннее начальное значение напряжения не совпадает с левосторонним начальным значением [за исключением того частного случая, когда $e(+0) = 0$], следовательно, напряжение $e_0(t)$ изменяется при $t = 0$ скачкообразно от нуля до значения $e(+0)$.

Таким образом, аномальная система уравнений электрической цепи ведет себя в отношении начальных значений в точности так же, как аномальная система дифференциальных уравнений. А именно, при включении напряжения в электрическую цепь, находившуюся до этого в состоянии покоя и, следовательно, имевшую нулевые левосторонние начальные значения токов и напряжений, правосторонние начальные значения ни в коем случае не должны быть все равны нулю. С математической точки зрения этот результат после сказанного в § 16 и 17 не является неожиданным. Однако в технической литературе он дал повод к дискуссиям — к попытке увидеть за этим результатом какую-то проблему, хотя в действительности никакой проблемы здесь

¹⁾ Это соответствует физически наглядному представлению. В самом деле, поскольку конденсатор был без заряда, входное напряжение сразу передается на выход.

нет. Кажущаяся проблема возникает только в том случае, если исследование электрической цепи производится математически некорректно. А именно, вместо того, чтобы заданную систему уравнений электрической цепи непосредственно подвергнуть преобразованию Лапласа, поступают так же, как это иногда делают при решении системы дифференциальных уравнений (см. § 18): путем исключения оставляют из заданной системы одно-единственное уравнение для той неизвестной, которая представляет наибольший интерес для проводимого исследования.

Покажем для наглядности на конкретном примере, к чему приводит такой некорректный прием. Возьмем систему

$$\left(L \frac{d}{dt} + R + S \int_0^t d\tau \right) i(t) = e(t),$$

$$L \frac{d}{dt} i(t) - e_0(t) = 0.$$

Будем рассматривать операторы при неизвестных как обычные коэффициенты и вычислим неизвестные путем исключения, применив, например, правило Крамера. Для e_0 мы получим уравнение

$$\begin{vmatrix} L \frac{d}{dt} + R + S \int_0^t d\tau & 0 \\ L \frac{d}{dt} & -1 \end{vmatrix} e_0(t) = \begin{vmatrix} L \frac{d}{dt} + R + S \int_0^t d\tau & e(t) \\ L \frac{d}{dt} & 0 \end{vmatrix},$$

или в развернутом виде

$$L \frac{d}{dt} e_0(t) + R e_0(t) + S \int_0^t e_0(\tau) d\tau = L \frac{d}{dt} e(t), \quad (21.12)$$

причем молча предполагается, что функция $e(t)$ дифференцируема, что в действительности часто не выполняется [например, если $e(t)$ имеет скачки].

Для применения к уравнению (21.12) преобразования Лапласа требуется знать начальное значение $e_0(+0)$, которое неизвестно, и начальное значение $e(+0)$, которое известно, так как $e(t)$ задано. После преобразования получим изображающее уравнение

$$L(sE_0 - e_0(+0)) + RE_0 + S \frac{1}{s} E_0 = L(sE - e(+0)). \quad (21.13)$$

Решением его будет

$$E_0(s) = \frac{Ls^2}{Ls^2 + Rs + S} E(s) + [e_0(+0) - e(+0)] \frac{Ls}{Ls^2 + Rs + S}. \quad (21.14)$$

Сравнив это решение с правильным результатом (21.5), мы увидим:

1. Результат (21.14) правилен только в том случае, если $e_0(+0) = e(+0)$. Однако о возможности такого равенства при примененном способе решения заранее знать нельзя.

2. Если отождествить $e_0(+0)$ со значением $e_0(-0)$, которое равно нулю, то получится неверный результат, за исключением того частного случая, когда $e(+0) = 0$.

3. Если, как иногда не долго думая, приравнивают неизвестное начальное значение $e_0(+0)$ начальному значению $e_0(-0)$, равному нулю, и, кроме того, полагают равным нулю также известное начальное значение $e(+0)$, что противоречит физической сущности явления, за исключением частного случая, когда $e(+0) = 0$, то случайно получают верное уравнение для определения $E_0(s)$. Но тогда из уравнения (21.14) после перехода в пространство оригиналов получают для функции времени $e_0(t)$ выражение (21.9), из которого тотчас же следует, что предположение о равенстве нулю начального значения $e_0(+0)$ было неверным [см. равенство (21.10)]. Это противоречие между выводом и результатом, дававшее иногда повод к дискуссиям, просто разъясняется, если учесть, что две последовательно сделанные ошибки компенсируют одна другую. В самом деле, если в выражении $e_0(+0) - e(+0)$ ошибочно положить $e_0(+0) = 0$ и $e(+0) = 0$, то эффект получится таким же, как если бы правильно принять, что $e_0(+0) = e(+0)$.

Таким образом, вывод правильного уравнения на основе действий, изложенных в пункте 3, незаконен и, кроме того, основан на предположении о дифференцируемости функции $e(t)$, что не всегда имеет место. Поэтому следует избегать решения системы уравнений электрической цепи путем приведения к одному уравнению для одной неизвестной.

Электрическая цепь находится под током еще до момента времени $t = 0$

Если четырехполюсник в момент времени $t = 0$ не находится в состоянии покоя, т. е. по нему уже проходит ток, то в общем случае $i(-0) \neq 0$. Теперь уже нельзя рассматривать i как распределение из пространства \mathcal{D}'_+ : необходимо еще заменить в уравнениях электрической цепи производную $\frac{d}{dt} i$ на $Di - i(-0)\delta$ [см. выражение (17.6)], чтобы таким путем математически учесть прерывное изменение тока от значения $i(-0)$ до значения $i(+0)$. Тогда после преобразования Лапласа вместо $sI(s)$ мы получим в соответствии с выражением (17.7)

$$sI(s) - i(-0),$$

т. е. такое же выражение, какое получилось бы после преобразования дифференциального оператора $\frac{d}{dt} i$ как функции с использованием значения $i(-0)$ вместо $i(+0)$. Кроме того, в соответствии с уравнением (20.1) следует заменить

$$\int_0^t i(\tau) d\tau$$

на

$$\int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = \int_0^t i(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^0 i(\tau) d\tau = \int_0^t i(\tau) d\tau + \gamma.$$

В качестве начальных условий теперь необходимо задать определяемые прошедшим значения $i(-0)$ и γ , где γ есть начальное значение $k(-0)$ заряда конденсатора

$$k(t) = \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau.$$

Следовательно, уравнениями электрической цепи будут

$$\left. \begin{aligned} L(Di - i(-0)\delta) + Ri + S \left(\int_0^t i(\tau) d\tau + \gamma \right) &= e(t), \\ L(Di - i(-0)\delta) &- e_0 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (21.15)$$

которые после преобразования Лапласа перейдут в изображающие уравнения

$$\left. \begin{aligned} L(sI - i(-0)) + RI + S \left(\frac{I}{s} + \frac{\gamma}{s} \right) &= E(s), \\ L(sI - i(-0)) &- E_0 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (21.16)$$

Отсюда мы найдем

$$E_0(s) = \frac{LS^2}{LS^2 + Rs + S} E(s) - \frac{L(Rs + S)}{LS^2 + Rs + S} i(-0) - \frac{LSs}{LS^2 + Rs + S} \gamma. \quad (21.17)$$

Первый член правой части совпадает с правой частью равенства (21.5), следовательно, ему соответствует напряжение, определяемое равенством (21.9). Коэффициенты при $i(-0)$ и γ представляют собой рациональные функции с числителями, степень которых ниже степени знаменателей, поэтому этим функциям соответствуют некоторые оригиналы $p(t)$ и $q(t)$. Таким образом, для напряжения $e_0(t)$ мы получаем формулу

$$e_0(t) = e(t) - b(t) * e(t) - i(-0)p(t) - \gamma q(t). \quad (21.18)$$

Так как на основании этой формулы значение $e_0(+0)$ существует, то его можно вычислить из равенства (21.17) как предел $\lim_{s \rightarrow \infty} sE_0(s)$ при помощи теоремы 32.2 о начальном значении.

В результате мы найдем

$$e_0(+0) = e(+0) - Ri(-0) - Sy. \quad (21.19)$$

Изложенный выше способ решения системы уравнений путем приведения ее к одному уравнению для одной неизвестной в рассматриваемом случае совершенно непригоден.

§ 22. Нелинейные дифференциальные уравнения

Для нелинейных дифференциальных уравнений не существует общих, всегда применимых методов интегрирования; не существует также формул, дающих решение в замкнутом виде. Кроме того, в общем случае решения не могут быть выражены через классические трансцендентные функции. Поэтому приходится удовлетворяться приближенными методами. При применении приближенных методов может оказаться полезным преобразованием Лапласа, хотя оно, будучи линейным преобразованием, естественно, «приспособлено» к линейным задачам. Конечно, способ применения преобразования Лапласа к нелинейным уравнениям иной, чем к линейным уравнениям.

Обычно левая часть нелинейного дифференциального уравнения состоит из линейной части такого же вида, как и в § 12, и из нелинейной части $\Phi(y, y', \dots, y^{(m)})$, следовательно, уравнение имеет вид

$$\sum_{v=0}^n c_v y^{(v)} + \Phi(y, y', \dots, y^{(m)}) = f(t). \quad (22.1)$$

В случае электрического контура в левой части вместо линейного дифференциального выражения может стоять интегро-дифференциальное выражение вида (20.1). Применив к уравнению (22.1) преобразование Лапласа и введя для сокращения записи обозначение

$$\sum_{v=0}^n c_v s^v = p(s),$$

мы получим изображающее уравнение

$$p(s)Y(s) - q(s, y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)) + \mathcal{L}\{\Phi(y, \dots)\} = F(s), \quad (22.2)$$

где q есть многочлен относительно s , зависящий от начальных значений (см. § 14). Решив уравнение (22.2) относительно $Y(s)$ и введя для сокращения записи обозначения

$$\frac{1}{p(s)} = G(s), \quad F(s) + q(s, y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)) = H(s),$$

мы будем иметь

$$Y(s) = G(s)H(s) - G(s)\mathfrak{L}\{\Phi(y, \dots)\}. \quad (22.3)$$

Изображению $Y(s)$ соответствует в пространстве оригиналов функция

$$\begin{aligned} y(t) &= g(t) * h(t) - g(t) * \Phi(y, \dots) = \\ &= g(t) * h(t) - \int_0^t g(t-\tau) \Phi(y(\tau), \dots) d\tau, \end{aligned} \quad (22.4)$$

где $h(t)$ есть оригинал, отвечающий известному изображению $H(s)$.

Уравнение (22.4), определяющее $y(t)$, представляет собой *нелинейное интегральное уравнение*, которое можно решить обычным образом путем последовательных приближений. Если пренебречь нелинейным членом Φ , то в первом приближении получается решение линейной задачи, уже известное из § 12 и 14, а именно:

$$y_0(t) = g * h.$$

Введя эту функцию в правую часть уравнения (22.4), мы найдем второе приближение:

$$y_1(t) = y_0(t) - \int_0^t g(t-\tau) \Phi(y_0(\tau), \dots) d\tau.$$

Повторив эту операцию n раз, мы получим

$$y_n(t) = y_0(t) - \int_0^t g(t-\tau) \Phi(y_{n-1}(\tau), \dots) d\tau. \quad (22.5)$$

Если функция Φ достаточно регулярная, то решение $y(t)$ получится как $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t)$. На практике ограничиваются вычислением лишь нескольких приближений и затем выясняют, приближаются ли они к предельной функции, что, конечно, может иметь место только в некотором промежутке $0 \leq t \leq t_0$. Такой метод, пригодный для расчета переходного процесса, не позволяет сделать никаких выводов об устойчивости системы (о ее асимптотическом поведении).

Рассмотренный процесс аппроксимации можно упростить, если прибегнуть к преобразованию Лапласа. Применив это преобразование к уравнению (22.5) и используя теорему свертывания, мы будем иметь

$$Y_n(s) = Y_0(s) - \mathfrak{L}\{g\} \mathfrak{L}\{\Phi(y_{n-1}, \dots)\}. \quad (22.6)$$

Возвратимся в пространство оригиналов, но уже без применения теоремы свертывания; тогда мы получим

$$y_n(t) = y_0(t) - \mathfrak{L}^{-1} \{ G(s) \mathfrak{L} \{ \Phi(y_{n-1}, \dots) \} \}. \quad (22.7)$$

Если для изображения $G(s) \mathfrak{L} \{ \Phi(y_{n-1}, \dots) \}$ легко определить соответствующий ему оригинал, то вычисление функции $y_n(t)$ по формулам (22.6) и (22.7) осуществляется значительно проще, чем по формуле (22.5), так как отпадает необходимость трудного интегрирования.

Поясним этот способ на конкретном примере.

Пример

Исследование одной системы регулирования привело к нелинейному уравнению¹⁾

$$y'' + (2 + ay^2)y' + (1 + by^2)y = 0.$$

Выделив линейную и нелинейную части, перепишем это уравнение в таком же виде, как и уравнение (22.1):

$$(y'' + 2y' + y) + (ay^2y' + by^3) = 0. \quad (22.8)$$

Выполнив преобразование Лапласа²⁾, мы получим изображающее уравнение

$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) - y(0)s - y'(0) - 2y(0) + \mathfrak{L}\{ay^2y' + by^3\} = 0,$$

откуда найдем

$$Y(s) = \frac{y(0)s + y'(0) + 2y(0)}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^2} \mathfrak{L}\{ay^2y' + by^3\}.$$

Предположим, что начальными значениями будут

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = c \neq 0.$$

Тогда

$$Y(s) = \frac{c}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^2} \mathfrak{L}\{ay^2y' + by^3\}.$$

¹⁾ Описание этой системы см. в статье Matuschka H., Nichtlinearitäten im Regler zur Verbesserung der Regelgüte, помещенной в книге Regelungstechnik, Moderne Theorien und ihre Verwendbarkeit (Bericht über die Tagung in Heidelberg, 1956), Oldenbourg Verlag, 1957, стр. 172—177. В этой статье нелинейное дифференциальное уравнение заменено разностным уравнением, решение которого выполнено численным путем для различных значений параметра. Полученные результаты представлены в виде кривых.

²⁾ Решение этого уравнения посредством преобразования Лапласа дано в статье Nowacki P. J., Die Behandlung von nichtlinearen Problemen in der Regelungstechnik, Regelungstechnik 8 (1960), стр. 47—50. В этой работе полученные первые приближения для отрезка $0 \leq t \leq 1.5$ изображены в виде кривых и сравнены с результатами, найденными посредством исчисления конечных разностей.

Отбросив второй член справа, мы получим первое приближение

$$Y_0(s) = \frac{c}{(s+1)^2},$$

которому в пространстве оригиналов соответствует приближение

$$y_0(t) = cte^{-t}.$$

Получив это приближение, вычислим нелинейную часть уравнения (22.8). Мы имеем

$$y_0^2 = c^2 t^2 e^{-2t}, \quad y_0^3 = c^3 t^3 e^{-3t}, \quad y_0' = c(1-t)e^{-t}.$$

следовательно,

$$ay_0^2 y_0' + by_0^3 = c^3 (at^2 + (b-a)t^3) e^{-3t},$$

или, после выполнения преобразования Лапласа,

$$\mathfrak{L}\{ay_0^2 y_0' + by_0^3\} = c^3 \left(\frac{2a}{(s+3)^3} + \frac{6(b-a)}{(s+3)^4} \right).$$

Таким образом, вторым приближением в пространстве изображений будет

$$Y_1(s) = \frac{c}{(s+1)^2} - \frac{2ac^3}{(s+1)^2(s+3)^3} - \frac{6(b-a)c^3}{(s+1)^2(s+3)^4}.$$

Соответствующий оригинал $y_1(t)$ мы найдем способом, изложенным в § 12, после разложения дробно-рациональной функции на простейшие дроби. Для сокращения необходимых вычислений примем, что $b = a$, вследствие чего последний член в правой части отпадет. Тогда после разложения на простейшие дроби мы получим

$$Y_1(s) = \frac{c}{(s+1)^2} - 2ac^3 \left(\frac{-3/16}{s+1} + \frac{1/8}{(s+1)^2} + \frac{3/16}{s+3} + \frac{1/4}{(s+3)^2} + \frac{1/4}{(s+3)^3} \right).$$

Оригиналом для этого изображения будет

$$y_1(t) = cte^{-t} - 2ac^3 \left[\left(-\frac{3}{16} + \frac{1}{8}t \right) e^{-t} + \left(\frac{3}{16} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{8}t^2 \right) e^{-3t} \right].$$

При вычислении следующих приближений мы получим, очевидно, ряд по показательным функциям, умноженным на многочлены относительно t ¹⁾.

¹⁾ Другой приближенный метод, также основанный на использовании преобразования Лапласа, см. в статье: Наумов Б. Н. Приближенный метод вычисления переходных процессов в системах автоматического регулирования, содержащих нелинейные элементы, помещенной в книге, цитированной в сноске 1 на стр. 125. Краткое изложение этого метода можно найти в статье Новацкого, цитированной в сноске 2 на стр. 125. О различных способах, позволяющих получать с помощью преобразования Лапласа решения нелинейных дифференциальных уравнений в смысле теории возмущений в виде рядов по степеням некоторого параметра, см. в книге: Pipes L. A., Operational methods in nonlinear mechanics, Dover Publications, New York, 1965.

ГЛАВА 4

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

§ 23. Общие указания о применении преобразования Лапласа к уравнениям в частных производных¹⁾

В уравнении в частных производных неизвестной является функция нескольких независимых переменных. Мы рассмотрим здесь только случай двух независимых переменных, которые обозначим через x и t ; неизвестную функцию обозначим через $u(x, t)$. Для уравнения в частных производных всегда необходимо заранее указать область определения функции $u(x, t)$, т. е. ту область плоскости xt , внутри которой должна быть определена неизвестная функция. Для уравнений которые мы будем

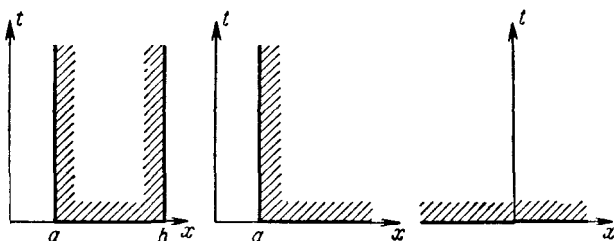


Рис. 23.1. Различные области определения функции.

рассматривать в этой главе, введем следующее принципиальное условие: примем, что переменная t изменяется на полупрямой $0 \leq t < \infty$, а переменная x — в конечном или бесконечном промежутке. Следовательно, в зависимости от того, изменяется ли x в конечном промежутке, на полупрямой или на всей прямой, областью определения функции $u(x, t)$ в плоскости xt будет либо полуполоса, либо четверть плоскости, либо полуплоскость (рис. 23.1).

¹⁾ Читателю, совершенно незнакомому с материалом настоящей главы, рекомендуется прочитать § 23 сначала только бегло, затем разобрать пример, решенный в § 24, и только потом вновь вернуться к § 23 для его тщательного изучения.

Для того чтобы из бесконечного множества функций, удовлетворяющих уравнению в частных производных, выбрать вполне определенную, необходимо задать на *границах* области определения искомой функции некоторые *условия*. На практике встречаются условия двух родов: либо задаются значения самой функции или некоторых ее частных производных, либо задаются некоторые соотношения, связывающие между собой эти величины. Сказать что-либо общее о числе и виде этих условий заранее нельзя. Однако для уравнений в частных производных, встречающихся на практике, всегда можно указать, исходя из физических особенностей рассматриваемой задачи, какие условия могут и должны быть предписаны для того, чтобы существовало однозначное решение.

Если переменной t является время, то условия, существующие на горизонтальной границе $t = 0$ области определения (т. е. вдоль промежутка на оси x), называются *начальными условиями*, а условия на вертикальных границах (если таковые существуют) — *граничными условиями*.

Если мы хотим применить к уравнению в частных производных преобразование Лапласа, то мы должны выполнить его для функции $u(x, t)$ и для всех ее производных, входящих в уравнение. Но так как преобразование Лапласа представляет собой интегрирование по *одной-единственной* переменной, то, применяя его к функции $u(x, t)$, мы должны выполнить его только для *одной* независимой переменной, оставляя другую независимую переменную неизменной. Выберем в качестве переменной, относительно которой производится преобразование Лапласа, переменную t ; именно поэтому мы с самого начала предположили, что она изменяется от 0 до ∞ , т. е. в том промежутке, в котором берется интеграл Лапласа. Переменную x будем считать при выполнении преобразования неизменной. Это означает, что каждому определенному значению x соответствует свое изображение функции $u(x, t)$. Следовательно, это изображение зависит не только от s , как было раньше, но также от x , т. е. оно является функцией от s и от x :

$$\mathfrak{L}\{u(x, t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} u(x, t) dt = U(x, s). \quad (23.1)$$

Подвергая преобразованию Лапласа *частные производные по t* , мы можем применять правило V, но при этом мы должны каждый раз оставлять переменную x неизменной. Таким путем мы получим

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right\} = sU(x, s) - u(x, +0), \quad (23.2)$$

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}\right\} = s^2 U(x, s) - u(x, +0)s - u_t(x, +0), \quad (23.3)$$

где $u_t = \partial u / \partial t$. Что касается *частных производных по x* , то для возможности применения к решению уравнения преобразования Лапласа необходимо принять, что операция составления таких производных и операция составления интеграла Лапласа могут меняться местами. Так, например, необходимо принять, что

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right\} = \frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{L}\{u(x, t)\} = \frac{\partial U(x, s)}{\partial x}, \quad (23.4)$$

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t}\right\} = \frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{L}\left\{\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right\} = \frac{\partial}{\partial x} [sU(x, s) - u(x, +0)]. \quad (23.5)$$

Мы видим, что при преобразовании частных производных появляются значения $u(x, +0)$, $u_t(x, +0)$, ... Следовательно, необходимое количество этих «начальных значений» должно быть задано в качестве начальных условий. Здесь мы опять встречаемся с тем же преимуществом, с которым уже встречались при решении обыкновенных дифференциальных уравнений: начальные значения входят в изображающее уравнение сами собой и поэтому учитываются автоматически.

Так как в результате преобразования Лапласа частные производные по t устраняются, то в изображающем уравнении остаются только частные производные по x . Это означает, что *изображающее уравнение представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение*. Решение такого уравнения является несравненно более простой задачей, чем решение уравнения в частных производных. Следовательно, применение преобразования Лапласа к уравнению в частных производных чрезвычайно упрощает задачу интегрирования. Отсюда становится ясным, что посредством преобразования Лапласа можно решать много задач, которые при применении других методов либо совсем не могут быть решены, либо могут быть решены только с очень большим трудом.

Остается сказать несколько слов о *граничных условиях* на вертикальных границах области определения искомой функции (если только эти границы имеются). Пусть, например, $x = a$ есть левая граница промежутка изменения x и пусть на этой границе задано значение функции $u(x, t)$, т. е. $u(a, t)$. По этому поводу необходимо сразу же оговорить, что такое граничное значение следует понимать в точности так же, как мы в свое время понимали начальные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений, т. е. рассматривать его в смысле предельного значения. Иными словами, это означает следующее: если обозначить функцию, заданную на границе $x = a$ и зависящую здесь только от t , через $a(t)$, то должно быть

$$\lim_{x \rightarrow a+0} u(x, t) = a(t), \text{ или короче } u(a+0, t) = a(t). \quad (23.6)$$

Для уравнений в частных производных такое понимание

граничных значений еще важнее, чем для обыкновенных дифференциальных уравнений. В самом деле, в большей части задач решение при $x = a$ вообще не имеет смысла, поэтому значение $u(a, t)$ даже и нельзя определить. Единственное требование, которое может быть реализовано, заключается в том, чтобы предельное значение для $x \rightarrow a$ (и притом справа, поэтому мы пишем $x \rightarrow a + 0$) существовало и имело заданное значение.

Примем теперь, что операция предельного перехода $x \rightarrow a + 0$ и операция составления интеграла Лапласа могут меняться местами. Тогда мы будем иметь

$$\lim_{x \rightarrow a+0} U(x, s) = \lim_{x \rightarrow a+0} \mathfrak{L}\{u(x, t)\} = \mathfrak{L}\left\{\lim_{x \rightarrow a+0} u(x, t) = a(t)\right\} = A(s),$$

следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow a+0} U(x, s) = A(s). \quad (23.7)$$

Это означает, что в качестве *граничного значения изображения* $U(x, s)$ при $x = a$ следует взять изображение граничного значения $a(t)$. Это можно представить наглядно на рис. 23.2, из которого видно, что предельный переход от $U(x, s)$ к $A(s)$ можно заменить предельным переходом от $u(x, t)$ к $a(t)$ и последующим преобразованием функции $a(t)$

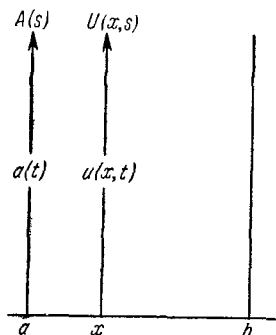


Рис. 23.2. \mathfrak{L} -преобразование функции $u(x, t)$ при постоянном x .

в ее изображение $A(s)$ (преобразование исходных функций в соответствующие изображения на вертикалях x и $x = a$ совершается одинаково). Если имеется также правая граница $x = b$ промежутка изменения x , то все сказанное о граничном значении для левой границы следует отнести и к правой границе. Таким образом, граничное значение изображения $U(x, s)$ получается путем преобразования Лапласа граничного значения исходной функции $u(x, t)$.

В том, что применение преобразования Лапласа к решению уравнений в частных производных требует введения некоторых *допущений* (а именно возможности перемены местами операции преобразования Лапласа, с одной стороны, и операций дифференцирования и предельного перехода $x \rightarrow a + 0$ — с другой), нет ничего удивительного. В самом деле, без введения допущений не обходится ни один метод. Правда, очень часто допущения вводятся не явно, а скрыто, например, принимается, что решение должно иметь определенный вид, может быть разложено в ряд и т. д. В связи с этим после выполнения решения всегда следует проверить, действи-

Если неизвестная функция, определяемая уравнением в частных производных, зависит от *трех переменных*, т. е. если $u = u(x, y, t)$, где t изменяется в промежутке $0 \leq t < \infty$, а x и y — в некоторой области плоскости xy , то, применив преобразование Лапласа, мы опять освободимся от частных производных по t и останутся только частные производные по x и y . Следовательно, мы получим уравнение в частных производных с двумя независимыми переменными, решение которого представляет собой опять значительно более простую задачу, чем решение уравнения в частных производных с тремя независимыми переменными.

Наиболее трудным шагом при решении уравнения в частных производных посредством преобразования Лапласа является обычно *определение оригинала* для решения, найденного в пространстве изображений. Если имеющиеся таблицы соответствий недостаточны для этого определения, то можно воспользоваться способами, указанными в гл. 6 и в § 35.

На практике чаще всего встречаются уравнения в частных производных второго порядка, которые подразделяются на следующие три типа (в скобках указаны наиболее важные представители каждого типа):

эллиптический тип (уравнение Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$),

гиперболический тип (волновое уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$),

параболический тип (уравнение теплопроводности $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$).

При решении уравнений в частных производных эллиптического типа посредством преобразования Лапласа возникают большие трудности, поэтому на этом типе мы останавливаться не будем. Из двух других типов сначала рассмотрим параболический тип на примере уравнения теплопроводности, так как для этого типа применение преобразования Лапласа особенно эффективно.

§ 24. Уравнение теплопроводности

Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (24.1)$$

Randwertproblemen nebst Tabellen von Korrespondenzen), Birkhäuser Verlag, Basel, 1950. [См. также Диткин В. А. и Прудников А. П., Операционное исчисление по двум переменным и его приложения, Физматгиз, Москва, 1958 (Прим. перев.)]

представляет интерес не только для инженера-теплотехника, но и для инженера-электрика, так как в электротехнике тепловые явления часто играют большую роль (так, например, транзисторы могут эксплуатироваться только до вполне определенной максимальной температуры, после превышения которой полупроводник либо меняет свои свойства, либо разрушается). Между прочим, уравнение (24.1) известно также в электротехнике под названием уравнения *кабеля Томсона*. В те годы, когда впервые был проложен подводный телеграфный кабель между Европой и Америкой, решение телеграфного уравнения еще не было известно. Между тем это уравнение, если пренебречь индуктивностью и утечкой, переходит в уравнение теплопроводности. Решение последнего было давно известно, и Томсон использовал его в качестве приближенного решения для расчета подводного телеграфного кабеля.

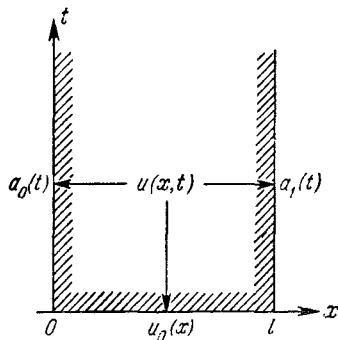


Рис. 24.1. Граничные и начальные значения функции $u(x, t)$.

Покажем, как выполняется решение уравнения (24.1) посредством преобразования Лапласа, причем будем пользоваться языком теории теплопроводности. В таком случае $u(x, t)$ будет температурой линейного проводника тепла (или пространственного, но такого, температура которого зависит только от одной координаты, т. е. остается постоянной на площади каждого отдельного сечения тела). Пусть проводник тепла простирается от $x = 0$ до $x = l$. Переменная t означает время, которое изменяется от $t = 0$ до $t = \infty$. Следовательно, областью определения искомой функции $u(x, t)$ в плоскости xt является полуполоса, если l конечно, и четверть плоскости, если $l = \infty$ (рис. 24.1).

Пусть в момент времени $t = 0$ проводник имеет определенную температуру, которая может зависеть от x ; обозначим ее через $u_0(x)$. Она представляет собой «начальное значение» функции $u(x, t)$ в смысле, разъясненном в § 23, т. е. функция $u(x, t)$ должна удовлетворять условию

$$u(x, +0) = u_0(x). \quad (24.2)$$

Из физических соображений можно предвидеть — и дальнейший ход решения это подтвердит, — что в рассматриваемой задаче мы можем обойтись одним-единственным начальным условием; следовательно, начальные значения $u_t(x, +0), \dots$ нам не понадобятся. Причина этого заключается, конечно, в том, что

уравнение в частных производных (24.1) является уравнением первого порядка относительно t .

Пусть оба конца проводника $x = 0$ и $x = l$ соединены с некоторыми источниками тепла, поддерживающими температуру концов на определенных уровнях, которые могут зависеть от времени. Следовательно, должны иметь место условия (см. рис. 24.1)

$$u(+0, t) = a_0(t) \quad u(l-0, t) = a_1(t), \quad (24.3)$$

которые и представляют собой «граничные условия» в смысле, разъясненном в § 23. Конечно, эти условия не являются единственно возможными; при других физических допущениях граничные условия будут иными. Например, если на одном конце проводника тепло излучается в окружающую среду, то там будет иметь место линейная связь между u и $\partial u / \partial x$.

Составим теперь для уравнения (24.1) при начальном условии (24.2) и граничных условиях (24.3) изображающее уравнение. Положив $\mathfrak{L}\{u(x, t)\} = U(x, s)$ и приняв во внимание начальное условие (24.2), мы получим

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = sU(x, s) - u(x, +0) = sU(x, s) - u_0(x).$$

Далее, так как принимается, что дифференцирование по x и преобразование Лапласа можно менять местами, то мы будем иметь

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathfrak{L}\{u\} = \frac{\partial^2 U(x, s)}{\partial x^2}.$$

Так как после перехода в пространство изображений остается только частная производная по x , то мы можем заменить ее обыкновенной производной, после чего изображающее уравнение примет вид

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = sU - u_0(x). \quad (24.4)$$

В этом уравнении переменная s играет роль параметра, от которого зависит решение U ; именно поэтому мы и ввели для него обозначение $U(x, s)$.

Применим теперь преобразование Лапласа к граничным условиям (24.3); мы получим

$$\mathfrak{L}\{u(+0, t)\} = \mathfrak{L}\{a_0(t)\} = A_0(s), \quad \mathfrak{L}\{u(l-0, t)\} = \mathfrak{L}\{a_1(t)\} = A_1(s),$$

следовательно, с учетом равенства (23.7) граничными условиями для изображающего уравнения (24.4) будут

$$U(+0, s) = A_0(s), \quad U(l-0, s) = A_1(s). \quad (24.5)$$

Заданное начальное условие (24.2) вошло в изображающее уравнение и, следовательно, учитывается в дальнейшем автома-

тически, что представляет собой важное преимущество рассматриваемого метода решения по сравнению с классическим методом.

Дифференциальное уравнение вида (24.4) при заданных граничных условиях интегрируется обычно следующим образом. Сначала решается однородное уравнение при произвольных граничных значениях; это означает, что член $u_0(x)$, делающий заданное уравнение неоднородным, т. е. начальная температура, предполагается равным нулю. Затем решается неоднородное уравнение для равных нулю граничных значений $A_0(s)$ и $A_1(s)$; это равносильно тому, что граничные температуры $a_0(t)$ и $a_1(t)$ принимаются равными нулю. Сумма обоих решений дает, очевидно, решение заданного уравнения.

1. Начальная температура равна нулю, граничные температуры произвольны

Решение однородного уравнения

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = sU \quad (24.6)$$

выполняется обычным способом: делается подстановка $U = e^{\alpha x}$, которая приводит к характеристическому уравнению $\alpha^2 = s$. Оба решения

$$\alpha = \pm \sqrt{s}$$

этого уравнения дают частные интегралы

$$e^{x\sqrt{s}} \text{ и } e^{-x\sqrt{s}},$$

из которых получается общий интеграл в виде суммы

$$c_1 e^{x\sqrt{s}} + c_2 e^{-x\sqrt{s}}.$$

Постоянные c_1 и c_2 следует определить так, чтобы были удовлетворены граничные условия (24.5). Проще всего сначала составить два частных решения, из которых одно имеет на левой границе значение 1, а на правой — значение 0, второе же решение имеет на левой границе значение 0, а на правой — значение 1. Такими решениями будут

$$U_0(x, s) = \frac{e^{(l-x)\sqrt{s}} - e^{-(l-x)\sqrt{s}}}{e^{l\sqrt{s}} - e^{-l\sqrt{s}}} = \frac{\text{sh } (l-x)\sqrt{s}}{\text{sh } l\sqrt{s}},$$

$$U_1(x, s) = \frac{e^{x\sqrt{s}} - e^{-x\sqrt{s}}}{e^{l\sqrt{s}} - e^{-l\sqrt{s}}} = \frac{\text{sh } x\sqrt{s}}{\text{sh } l\sqrt{s}}.$$

Введя эти функции, мы можем придать искомому решению изображающего уравнения следующий вид:

$$U(x, s) = A_0(s) U_0(x, s) + A_1(s) U_1(x, s).$$

Теперь остается определить оригинал, соответствующий изображению $U(x, s)$. Сначала рассмотрим предельный случай $l = \infty$. При $l \rightarrow \infty$ функция $U_1(x, s)$ равна нулю, а для функции $U_0(x, s)$ мы получим

$$U_0(x, s) = \frac{e^{-x\sqrt{s}} - e^{-(2l-x)\sqrt{s}}}{1 - e^{-2l\sqrt{s}}} \rightarrow e^{-x\sqrt{s}}.$$

Следовательно, в пространстве изображений решение имеет вид

$$U(x, s) = A_0(s) e^{-x\sqrt{s}}. \quad (24.7)$$

Из соответствия

$$e^{-x\sqrt{s}} \longleftrightarrow \frac{x}{2\sqrt{\pi t^{3/2}}} e^{-x^2/4t} = \psi(x, t) \quad (x > 0) \quad (24.8)$$

(см. таблицу в конце книги, соответствие № 167)¹⁾ и теоремы свертывания (правило IX) мы имеем

$$u(x, t) = a_0(t) * \psi(x, t). \quad (24.9)$$

Переписав правую часть этого равенства в явном виде, мы получим

$$u(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t a_0(t-\tau) \frac{e^{-x^2/4\tau}}{\tau^{3/2}} d\tau. \quad (24.10)$$

Мы видим отсюда, насколько было оправдано формулировать граничное условие в виде предельного соотношения

$$\lim_{x \rightarrow +0} u(x, t) = a_0(t),$$

а не в виде $u(0, t) = a_0(t)$. В самом деле, если мы подставим в выражение под знаком интеграла просто $x = 0$, то для $\tau = 0$ интеграл вследствие наличия знаменателя $\tau^{3/2}$ будет расходиться. Но и в том случае, если бы он имел вполне определенное значение, то все же вследствие множителя x он получился бы равным не $a_0(t)$, а нулю. С другой стороны, путем несколько длинных рассуждений можно доказать, что функция (24.10) при $x \rightarrow 0$ имеет предельное значение $a_0(t)$, если только функция a_0 непрерывна в точке t .

¹⁾ Здесь ψ означает функцию, называемую в теории теплопроводности *функцией двойного источника*. Ниже на стр. 143 мы встретимся с функцией χ , которую принято называть *функцией источника*.

В том, что начальное условие $u(x, +0)$ удовлетворяется, мы убеждаемся непосредственно.

В случае, когда длина l конечна, оригиналы $u_0(x, t)$, $u_1(x, t)$, соответствующие изображениям $U_0(x, s)$, $U_1(x, s)$, можно взять в готовом виде из таблицы в конце книги (соответствия № 186 и 185). Если бы такой таблицы не было, то следовало бы попытаться определить оригиналы путем разложения изображений в ряды (см. § 29). Так, например, для изображения $U_0(x, s)$ мы имеем

$$\begin{aligned} U_0(x, s) &= \frac{e^{-x\sqrt{s}} - e^{-(2l-x)\sqrt{s}}}{1 - e^{-2l\sqrt{s}}} = \\ &= (e^{-x\sqrt{s}} - e^{-(2l-x)\sqrt{s}}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nl\sqrt{s}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2nl+x)\sqrt{s}} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2(n+1)l-x)\sqrt{s}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2nl+x)\sqrt{s}} - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(2nl-x)\sqrt{s}}. \end{aligned} \quad (24.11)$$

При $0 < x < l$ имеют место неравенства

$$2nl + x > 0 \quad (n = 0, 1, \dots) \text{ и } 2nl - x > 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

следовательно, применимо соответствие (24.8). Далее с помощью теоремы 29.4 можно доказать, что в данном случае допустимо поменять местами суммирование и вычисление интеграла Лапласа (см. стр. 175). В результате мы получим

$$u_0(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi(2nl + x, t) - \sum_{n=1}^{\infty} \psi(2nl - x, t),$$

или

$$u_0(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi(2nl + x, t), \quad (24.12)$$

так как на основании формулы (24.8)

$$-\psi(2nl - x, t) = \psi(-2nl + x, t).$$

В рассмотренном выше случае проводника бесконечной длины l в правой части равенства (24.12) остается только член, для которого $n = 0$.

Аналогичным образом найдем оригинал, соответствующий изображению $U_1(x, s)$:

$$u_1(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi(2nl + l - x, t). \quad (24.13)$$

Оба ряда (24.12) и (24.13) пригодны для практических вычислений при малых t , так как тогда множители $e^{-(2nl+x)^2/4t}$ входящие в каждый член обоих рядов, малы. При больших для вычислений более удобны выражения оригиналов, указанные в конце книги в таблице соответствий под №№ 186 и 185.

Определив функции u_0 и u_1 , мы получим оригинал, соответствующий изображению $U(x, s)$, в следующем виде:

$$u(x, t) = u_0(x, t) * a_0(t) + u_1(x, t) * a_1(t). \quad (24.14)$$

Частные случаи граничных значений

Приведем решения уравнения теплопроводности для случаев, когда на правом конце проводника тепла температура $a_1(t) \equiv 0$, а температура $a_0(t)$ на левом конце изменяется по законам, выражаемым некоторыми простыми, часто встречающимися функциями.

1. Пусть $a_0(t) = \delta(t)$ = импульсу, следовательно, $A_0(s) = 1$. Тогда при бесконечной длине l проводника мы будем иметь

$$u(x, t) = \psi(x, t),$$

а при конечной длине l

$$u(x, t) = u_0(x, t).$$

В рассматриваемом случае граничная функция $\delta(t)$ дает идеализированное описание теплового взрыва в точке $x = 0$ в момент времени $t = 0$. Функцию Грина ψ или соответственно функцию u_0 можно понимать как распределение температуры, возникающее вследствие этого взрыва.

2. Пусть $a_0(t) \equiv u(t)$, следовательно, $A_0(s) = 1/s$. Тогда при бесконечной длине проводника изображение $U(x, s)$ равно

$$U(x, s) = \frac{1}{s} e^{-x\sqrt{s}}.$$

Этому изображению соответствует оригинал

$$u(x, t) = \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{t}} \quad (x \geq 0, t > 0) \quad (24.15)$$

(см. соответствие № 168 в таблице в конце книги).

При конечном l изображением $U(x, s)$ на основании равенства (24.11) будет

$$U(x, s) = \frac{1}{s} U_0(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s} e^{-(2nl+x)\sqrt{s}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s} e^{-(2nl-x)\sqrt{s}},$$

следовательно,

$$u(x, t) = \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{t}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{erfc} \frac{2nl+x}{2\sqrt{t}} - \operatorname{erfc} \frac{2nl-x}{2\sqrt{t}} \right]. \quad (24.16)$$

3. Пусть $a_0(t) \equiv e^{j\omega t}$. Тогда при бесконечной длине проводника решением будет

$$u(x, t) = e^{j\omega t} * \psi(x, t) = e^{j\omega t} \int_0^t e^{-j\omega \tau} \psi(x, \tau) d\tau. \quad (24.17)$$

Установившееся состояние, к которому стремится $u(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$, можно определить аналогично тому, как мы это сделали в § 13 при рассмотрении частотной характеристики. Так как изображение $\mathfrak{L}\{\psi(x, t)\}$ при $s = j\omega$ сходится, то

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^{j\omega t} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-j\omega \tau} \psi(x, \tau) d\tau - \int_t^{\infty} e^{-j\omega \tau} \psi(x, \tau) d\tau \right\} = \\ &= e^{j\omega t} \left\{ e^{-x(j\omega)^{1/2}} - \int_t^{\infty} e^{-j\omega \tau} \psi(x, \tau) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Второе слагаемое в скобках при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю, следовательно, установившееся состояние определяется функцией

$$\tilde{u}(x, t) = e^{-x(j\omega)^{1/2}} e^{j\omega t}, \quad (24.18)$$

или

$$\tilde{u}(x, t) = e^{-\sqrt{\omega/2} x} e^{j(\omega t - \sqrt{\omega/2} x)}, \quad (24.19)$$

так как

$$j = e^{j\pi/2}, \quad j^{1/2} = e^{j\pi/4} = \cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + j).$$

Таким образом, функция \tilde{u} представляет собой колебание с такой же круговой частотой, как у граничной функции, но с амплитудой и начальной фазой, зависящими от x и ω . Множитель

$$G(j\omega) = e^{-x(j\omega)^{1/2}} = \mathfrak{L}\{\psi(x, t)\}_{s=j\omega}$$

может быть назван, как и в § 13, частотной характеристикой температуры в бесконечно длинном проводнике тепла.

2. Начальная температура произвольна, граничные температуры равны нулю

Теперь необходимо решить неоднородное уравнение (24.4) при граничных условиях

$$U(+0, t) = 0, \quad U(l-0, t) = 0.$$

Если у читателя не имеется под руками какой-либо книги по

дифференциальным уравнениям, из которой он мог бы взять решение этой краевой задачи в готовом виде, то для отыскания решения можно поступить следующим образом. Найдем посредством преобразования Лапласа решение уравнения

$$U'' - sU = -u_0(x)$$

при заданных начальных условиях $U(0) = 0$ и $U_x(0)$ и затем подставим в это решение $x = l$. Мы получим соотношение между $U_x(0)$ и $U(l)$, которое позволит выразить $U_x(0)$ через $U(l)$. Подставив это значение $U_x(0)$ в найденное решение, мы будем иметь

$$U(x, s) = \int_0^l \Gamma(x, \xi; s) u_0(\xi) d\xi, \quad (24.20)$$

где

$$\Gamma(x, \xi; s) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} \xi \sqrt{s} \operatorname{sh} (l-x) \sqrt{s}}{\sqrt{s} \operatorname{sh} l \sqrt{s}} & \text{при } 0 \leq \xi \leq x, \\ \frac{\operatorname{sh} x \sqrt{s} \operatorname{sh} (l-\xi) \sqrt{s}}{\sqrt{s} \operatorname{sh} l \sqrt{s}} & \text{при } x \leq \xi \leq l. \end{cases} \quad (24.21)$$

Рассмотрим сначала случай $l = \infty$, для которого Γ принимает вид

$$\Gamma(x, \xi; s) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-x\sqrt{s}} \operatorname{sh} \xi \sqrt{s} & \text{при } 0 \leq \xi \leq x, \\ \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\xi\sqrt{s}} \operatorname{sh} x \sqrt{s} & \text{при } x \leq \xi \leq \infty. \end{cases} \quad (24.22)$$

Выразив гиперболический синус через показательные функции и используя соответствие

$$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-k\sqrt{s}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-k^2/4t} = \chi(k, t) \quad k \geq 0 \quad (24.23)$$

(см. таблицу в конце книги, соответствие № 169), мы найдем для изображения Γ оригинал

$$\gamma(x, \xi; t) = \frac{1}{2} [\chi(\xi - x, t) - \chi(\xi + x, t)], \quad (24.24)$$

который в противоположность изображению имеет во всем промежутке $(0, \infty)$ одинаковый вид. Наконец, заменив в интеграле (24.20) верхний предел на ∞ и перейдя в пространство оригиналов, мы получим

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty [\chi(\xi - x, t) - \chi(\xi + x, t)] u_0(\xi) d\xi. \quad (24.25)$$

Если $u_0(x)$ при $x \rightarrow \infty$ имеет предельное значение, то этот интеграл сходится при $x > 0$, $t > 0$.

В случае конечной длины проводника поступим так же, как и на стр. 136. Заменяем в выражении $\Gamma(x, \xi; s)$ гиперболические синусы показательными функциями, развернем получившееся выражение в ряд и применим к каждому члену этого ряда обратное преобразование Лапласа. Тогда в качестве оригинала для изображения Γ мы найдем

$$\gamma(x, \xi; t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\chi(2nl + x - \xi; t) - \chi(2nl + x + \xi, t)], \quad (24.26)$$

следовательно решением краевой задачи будет

$$u(x, t) = \int_0^l \gamma(x, \xi; t) u_0(\xi) d\xi. \quad (24.27)$$

Выражение для γ в виде (24.26) особенно удобно при малых t . При больших t лучше пользоваться для γ другим выражением, указанным во второй строке соответствия № 188 из таблицы в конце книги. Функции $\gamma(x, \xi; t)$, $u_0(x, t)$ и $u_1(x, t)$ могут быть выражены также через тета-функцию ϑ_3 , известную из теории эллиптических функций.

§ 25. Система уравнений для двухпроводной электрической линии с распределенными параметрами

Если электрическая линия настолько длинная, что ее параметры (сопротивление и т. д.) не могут рассматриваться сосредоточенными в отдельных точках, то в такой линии напряжение e и ток i зависят не только от времени t , но и от координаты x , измеряющей длину, следовательно, являются функциями $e(x, t)$ и $i(x, t)$. Если линия состоит из двух параллельных проводов, то токи $i(x, t)$ в точках обоих проводов с одинаковой координатой x равны по величине, но направлены в противоположные стороны. Функция $e(x, t)$ определяет разность потенциалов между проводами в точке x .

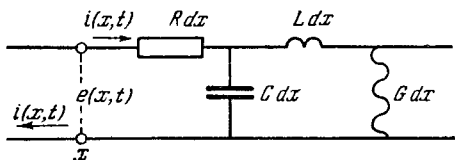


Рис. 25.1. Электрическая двухпроводная линия с распределенными параметрами.

Пусть R есть сопротивление, L — индуктивность, C — емкость, G — утечка из одного провода в другой (рис. 25.1), причем все эти величины отнесены к единице длины. Тогда для

рассматриваемой двухпроводной линии имеет место следующая система уравнений в частных производных первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri &= 0, \\ \frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial e}{\partial t} + Ge &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (25.1)$$

Для того чтобы привести эту систему к одному уравнению в частных производных второго порядка для функции $e(x, t)$, перепишем уравнение (25.1) в виде

$$\begin{aligned} -\frac{\partial e}{\partial x} &= \left(L \frac{\partial}{\partial t} + R \right) i, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= \left(C \frac{\partial}{\partial t} + G \right) e. \end{aligned}$$

Продифференцировав первое уравнение по x , мы найдем

$$-\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = \left(L \frac{\partial}{\partial t} + R \right) \frac{\partial i}{\partial x}.$$

Подставив сюда $\partial i / \partial x$ из второго уравнения, мы получим так называемое *телеграфное уравнение*

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = \left(L \frac{\partial}{\partial t} + R \right) \left(C \frac{\partial}{\partial t} + G \right) e,$$

или

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} + (LG + RC) \frac{\partial e}{\partial t} + RGe. \quad (25.2)$$

Такое же уравнение получится и для тока $i(x, t)$. При $R = G = 0$ телеграфное уравнение переходит в волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 e}{\partial t^2},$$

а при $L = G = 0$ — в уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = RC \frac{\partial e}{\partial t}$$

(уравнение кабеля Томсона, см. § 24).

Однако для дальнейшего исследования мы будем пользоваться не уравнением (25.2), а системой уравнений (25.1), причем предположим, что в момент времени $t = 0$ двухпроводная линия была в покое¹⁾, т. е. примем, что

$$e(x, +0) = i(x, +0) = 0. \quad (25.3)$$

¹⁾ Полное решение для случая произвольного начального состояния бесконечно длинной линии можно найти в книге: Voelker D. und Doetsch G., Die zweidimensionale Laplace-Transformation, Birkhäuser Verlag, Basel, 1950, стр. 74, а также в книге: Doetsch G., Handbuch der Laplace-Transformation, т. 3, Birkhäuser Verlag, Basel, 1956, стр. 49.

Применив к уравнению (25.1) преобразование Лапласа, мы получим изображающие уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE(x, s)}{dx} + LsI(x, s) + RI(x, s) &= 0, \\ \frac{dI(x, s)}{dx} + CsE(x, s) + GE(x, s) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (25.4)$$

Это есть система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которую мы можем решить, применив еще раз преобразование Лапласа (на этот раз по x), при условии, что начальные значения $E(0, s)$ и $I(0, s)$ можно рассматривать как известные. Это означает, что соответствующие им оригиналы $e(0, t)$ и $i(0, t)$, т. е. напряжение и ток, в начале линии заданы. Введем обозначения

$$\int_0^{\infty} e^{-yx} E(x, s) dx = E_1(y, s), \quad \int_0^{\infty} e^{-yx} I(x, s) dx = I_1(y, s).$$

Применив теперь к системе (25.4) преобразование Лапласа по x , мы получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} yE_1(y, s) - E(0, s) + (Ls + R)I_1(y, s) &= 0, \\ yI_1(y, s) - I(0, s) + (Cs + G)E_1(y, s) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (25.5)$$

из которой легко найдем

$$\left. \begin{aligned} E_1(y, s) &= \frac{E(0, s)y - I(0, s)(Ls + R)}{y^2 - (Ls + R)(Cs + G)}, \\ I_1(y, s) &= \frac{I(0, s)y - E(0, s)(Cs + G)}{y^2 - (Ls + R)(Cs + G)}. \end{aligned} \right\} \quad (25.6)$$

Введем для сокращения записи обозначение

$$(Ls + R)(Cs + G) = h^2(s) \quad (25.7)$$

и перейдем от изображения с переменной y к оригиналу с переменной x . Воспользовавшись соответствиями № 49 и 39 из таблицы в конце книги, мы получим

$$E(x, s) = E(0, s) \operatorname{ch} xh(s) - I(0, s) \frac{Ls + R}{h(s)} \operatorname{sh} xh(s), \quad (25.8)$$

$$I(x, s) = I(0, s) \operatorname{ch} xh(s) - E(0, s) \frac{Cs + G}{h(s)} \operatorname{sh} xh(s). \quad (25.9)$$

Величина

$$Z(s) = \frac{Ls + R}{h(s)} = \frac{h(s)}{Cs + G} = \sqrt{\frac{Ls + R}{Cs + G}}$$

называется характеристическим импедансом линии. Полученные формулы (25.8) и (25.9) и являются решением системы

уравнений (25.4), если считать, что $E(0, s)$ и $I(0, s)$ известны, следовательно, функции $e(0, t)$ и $i(0, t)$ заданы. Если линия имеет конечную длину l , то обычно вместо одной из этих функций задается значение e или i на конце линии $x = l$. Рассмотрим случай, когда заданы напряжения в начале и конце линии, т. е. $e(0, t)$ и $e(l, t)$, причем будем считать, что $e(l, t) = 0$, т. е. что конец линии коротко замкнут. Выполнив вычисления при таком частном предположении, мы из полученного решения найдем сначала путем замены x на $l - x$ решение для $e(0, t) = 0$ и произвольного $e(l, t)$, а затем путем сложения обоих решений — общее решение.

Для того чтобы исключить из равенства (25.8) $I(0, s)$, а взамен ввести $E(0, s)$, подставим в равенство (25.8) $x = l$ и $E(l, s) = 0$; мы получим

$$0 = E(0, s) \operatorname{ch} lh(s) - I(0, s) \frac{Ls + R}{h(s)} \operatorname{sh} lh(s),$$

откуда найдем

$$I(0, s) = \frac{h(s)}{Ls + R} \frac{\operatorname{ch} lh(s)}{\operatorname{sh} lh(s)} E(0, s).$$

Внеся это значение в уравнение (25.8) и применив правило сложения гиперболических синусов, мы получим

$$E(x, s) = E(0, s) \frac{\operatorname{sh}(l-x)h(s)}{\operatorname{sh} lh(s)}. \quad (25.10)$$

Аналогичным образом из равенства (25.9) с учетом равенства (25.7), определяющего $h(s)$, найдем

$$I(x, s) = E(0, s) \sqrt{\frac{Cs + G}{Ls + R}} \frac{\operatorname{ch}(l-x)h(s)}{\operatorname{sh} lh(s)}. \quad (25.11)$$

Прежде чем приступить к переводу изображений $E(x, s)$ и $I(x, s)$ в пространство оригиналов, рассмотрим частный случай.

Линия без искажений

Полученные формулы значительно упрощаются, когда $h(s)$ является линейной функцией. Так как

$$\begin{aligned} h^2(s) &= (Ls + R)(Cs + G) = \\ &= \frac{1}{LC} \left\{ \left(LCs + \frac{LG + RC}{2} \right)^2 + \left[LCRG - \left(\frac{LG + RC}{2} \right)^2 \right] \right\}, \end{aligned}$$

то такой случай будет иметь место тогда и только тогда, когда

$$LCRG - \left(\frac{LG + RC}{2} \right)^2 = - \left(\frac{LG - RC}{2} \right)^2 = 0,$$

т. е. при соблюдении соотношения

$$LG = RC. \quad (25.12)$$

Используя это соотношение, мы получим

$$h(s) = (LC)^{-1/2} \left(LCs + \frac{LG + RC}{2} \right) = (LC)^{-1/2} (LCs + RC) = \\ = (LC)^{-1/2} (LCs + LG),$$

следовательно,

$$h(s) = \left(\frac{C}{L} \right)^{1/2} (Ls + R) = \left(\frac{L}{C} \right)^{1/2} (Cs + G) \quad (25.13)$$

и далее

$$\frac{Cs + G}{Ls + R} = \frac{G}{R} = \frac{C}{L}.$$

Положив для сокращения записи

$$\left(\frac{C}{L} \right)^{1/2} = a \quad (25.14)$$

и имея в виду соотношение (25.12), мы получим вместо равенств (25.10) и (25.11) следующие:

$$E(x, s) = E(0, s) \frac{\operatorname{sh} a(l-x)(Ls+R)}{\operatorname{sh} al(Ls+R)} = E(0, s) V_0(x, s), \quad (25.15)$$

$$I(x, s) = E(0, s) a \frac{\operatorname{ch} a(l-x)(Ls+R)}{\operatorname{sh} al(Ls+R)}. \quad (25.16)$$

Решение уравнения теплопроводности привело нас к функции $U_0(x, s)$ (см. стр. 137), в которую входило такое же отношение двух гиперболических синусов, как и теперь в функцию $V_0(x, s)$, только там вместо линейной функции $Ls + R$ был радикал \sqrt{s} . Там это отношение представляло собой \mathfrak{L} -изображение, что позволило нам при переходе в пространство оригиналов воспользоваться теоремой свертывания. Теперь функция $V_0(x, s)$ не является \mathfrak{L} -изображением, поэтому для определения соответствующего ей оригинала необходимо применить другой способ. Преобразуем функцию $V_0(x, s)$ следующим образом:

$$V_0(x, s) = \frac{e^{a(l-x)(Ls+R)} - e^{-a(l-x)(Ls+R)}}{e^{al(Ls+R)} - e^{-al(Ls+R)}} = \frac{e^{-ax(Ls+R)} - e^{-a(2l-x)(Ls+R)}}{1 - e^{-2al(Ls+R)}}, \quad (25.17)$$

и рассмотрим сначала случай $l = \infty$, для которого функция $V_0(x, s)$ принимает простой вид

$$V_0(x, s) = e^{-ax(Ls+R)}.$$

Подставив это выражение в равенство (25.15), применив затем правило II и приняв во внимание равенство (25.14), мы получим

$$e(x, t) = \begin{cases} e^{-R(C/L)^{1/2}x} e(0, t - (CL)^{1/2}x) & \text{при } t \geq (CL)^{1/2}x, \\ 0 & \text{при } 0 \leq t < (CL)^{1/2}x. \end{cases} \quad (25.18)$$

Это решение показывает, что происходит распространение входного напряжения $e(0, t)$ в направлении возрастающих значений x со скоростью $(CL)^{-1/2}$. В самом деле, напряжение $e(0, t_0)$, возникшее в момент времени t_0 в точке $x = 0$, достигает точки $x(>0)$ в момент времени t , удовлетворяющий соотношению

$$t - (CL)^{1/2}x = t_0,$$

следовательно, для прохождения пути x этому напряжению требуется время $t - t_0$, и поэтому

$$\frac{x}{t - t_0} = (CL)^{-1/2}.$$

До момента времени $t_0 = 0$, когда напряжение впервые достигает точки x ($t_0 = 0$), проходит время $t = (CL)^{1/2}x$, следовательно, до этого момента времени в точке x напряжение $e(x, t) = 0$. Такое состояние соответствует второй строке решения (25.18). При распространении напряжения по проводу оно затухает вследствие наличия множителя $e^{-R(C/L)^{1/2}x}$.

В фиксированную точку линии в определенный момент времени доходит только одно-единственное входное напряжение, следовательно, в этой точке не происходит наложения этого напряжения на предшествующие напряжения, как это имеет место в линии с произвольными параметрами (см. стр. 149). Именно по этой причине линия, удовлетворяющая условию (25.12), называется линией без искажений.

Для получения решения в случае линии конечной длины l разложим функцию (25.17) в ряд; мы получим

$$\begin{aligned} V_0(x, s) &= e^{-ax(Ls+R)} - e^{-a(2l-x)(Ls+R)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nla(Ls+R)} = \\ &= \sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-(2n_1l+x)a(Ls+R)} - \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-(2n_2l-x)a(Ls+R)}. \end{aligned}$$

Умножив все члены этого ряда на $E(0, s)$ и выполнив для каждого члена обратное преобразование Лапласа, мы найдем оригинал, соответствующий изображению (25.15):

$$\begin{aligned} e(x, t) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-R(C/L)^{1/2}(2n_1l+x)} e(0, t - (CL)^{1/2}(2n_1l+x)) - \\ &- \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-R(C/L)^{1/2}(2n_2l-x)} e(0, t - (CL)^{1/2}(2n_2l-x)), \quad (25.19) \end{aligned}$$

причем для значений $t < 0$ следует положить $e(0, t) = 0$. Поэтому при фиксированной паре значений x, t каждая из обеих сумм содержит только конечное число слагаемых. Определенное входное напряжение $e(0, t_0)$ появляется в точках x, t , для

которых

$$t - (CL)^{1/2}(2n_1l + x) = t_0,$$

с положительным знаком, а в точках x, t , для которых

$$t - (CL)^{1/2}(2n_2l - x) = t_0,$$

с отрицательным знаком. Этим уравнениям соответствуют в плоскости xt прямые, расположенные в виде зигзагов в полосе $0 \leq x \leq l$ (рис. 25.2). Следовательно, входное напряжение распространяется от $x = 0$ до $x = l$, где отражается, меняя при этом

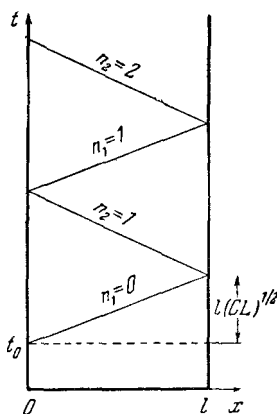


Рис. 25.2. Распространение граничного возбуждения.

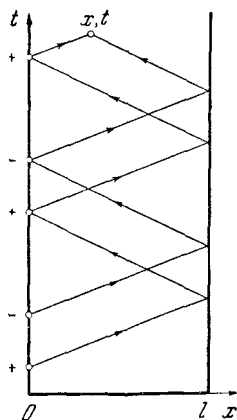


Рис. 25.3. Граничные возбуждения, достигающие точки x в один и тот же момент времени.

знак (скачок фазы на π), затем распространяется назад до $x = 0$, где опять отражается с переменой знака, и т. д. При этом происходит затухание входного напряжения, возрастающее пропорционально пройденному пути. В точке x, t налагаются одно на другое все значения входного напряжения, вносимые обоими зигзагообразными полигонами, проходящими через точку x, t , причем знак определяется числом отражений (рис. 25.3). Аналогичным образом вычисляется по изображению (25.16) ток $i(x, t)$.

Линия с произвольными параметрами

Пусть теперь $LG \neq RC$. Рассмотрим сначала случай $l = \infty$, когда изображение $E(x, s)$, определяемое формулой (25.10), принимает более простой вид:

$$E(x, s) = E(0, s) e^{-xh(s)} = E(0, s) e^{-x\sqrt{(Ls+R)(Cs+G)}}. \quad (25.20)$$

Для обратного перехода в пространство оригиналов воспользуемся формулой, связанной с модифицированной функцией Бесселя

$$I_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!},$$

а именно:

$$e^{-x\sqrt{as^2+bs+c}} = e^{-(b/2\sqrt{a})x} e^{-\sqrt{a}xs} + \\ + \sqrt{\frac{d}{a}} \int_{\sqrt{ax}}^{\infty} e^{-st} e^{-(b/2a)t} \frac{I_1\left(\frac{\sqrt{d}}{a} \sqrt{t^2 - ax^2}\right)}{\sqrt{t^2 - ax^2}} dt, \quad (25.20')$$

где $d = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$. В этой формуле мы должны положить

$$a = LC, \quad b = LG + RC, \quad c = RG, \quad d = (LG - RC)^2/4.$$

Введя для сокращения записи обозначения

$$\sqrt{LC} = \alpha, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L} \right) = \beta_1, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{G}{C} - \frac{R}{L} \right) = \beta_2,$$

$$\frac{1}{2} \left(G \sqrt{\frac{L}{C}} + R \sqrt{\frac{C}{L}} \right) = \gamma_1, \quad \frac{1}{2} \left(G \sqrt{\frac{L}{C}} - R \sqrt{\frac{C}{L}} \right) = \gamma_2,$$

придадим формуле (25.20') более простой вид:

$$e^{-x\sqrt{(Ls+R)(Cs+G)}} = e^{-\gamma_1 x} e^{-\alpha x s} + \gamma_2 x \int_{\alpha x}^{\infty} e^{-st} e^{-\beta_1 t} \frac{I_1(\beta_2 \sqrt{t^2 - \alpha^2 x^2})}{\sqrt{t^2 - \alpha^2 x^2}} dt. \quad (25.21)$$

Первое слагаемое в правой части, умноженное на $E(0, s)$, обусловливает в пространстве оригиналов смещение напряжения $e(0, t)$. Второе слагаемое представляет собой \mathfrak{L} -изображение функции

$$v(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t < \alpha x, \\ \gamma_2 x e^{-\beta_1 t} \frac{I_1(\beta_2 \sqrt{t^2 - \alpha^2 x^2})}{\sqrt{t^2 - \alpha^2 x^2}} & \text{при } t \geq \alpha x. \end{cases} \quad (25.22)$$

Следовательно, к произведению этого слагаемого на $E(0, s)$ можно применить теорему свертывания. В результате мы

¹⁾ Интеграл, входящий в правые части формул (25.21) и (25.23), можно выразить через (протабулированные) цилиндрические функции от двух мнимых переменных; см. Кузнецов П. И., О представлении одного контурного интеграла, ПММ, 1947, № 2. (Прим. ред.)

получим ¹⁾

$$e(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t < ax, \\ e^{-\gamma_1 x} e(0, t - ax) + \\ + \gamma_2 x \int_{ax}^t e(0, t - \tau) e^{-\beta_1 \tau} \frac{I_1(\beta_2 \sqrt{\tau^2 - a^2 x^2})}{\sqrt{\tau^2 - a^2 x^2}} d\tau & \text{при } t \geq ax \end{cases} \quad (25.23)$$

Первый член второй строки правой части формулы (25.23) соответствует распространению входного напряжения вправо, причем происходит затухание, увеличивающееся по мере возрастания x . Второй член представляет собой сумму всех входных напряжений, поступивших в точку x до момента времени t , т. е. напряжений, начиная от $e(0, 0)$ и кончая $e(0, t - ax)$, умноженных при этом каждое на некоторую весовую функцию. Эти напряжения вызывают искажение передачи.

В случае линии конечной длины l расчет ведется в точности так же, как и для аналогичного случая линии без искажений, а именно: разлагают множитель при $E(0, s)$ в формуле (25.10) в ряд и переводят этот ряд почленно в пространство оригиналов. Отдельные члены ряда получаются такими же, как и в формуле (25.23), но с заменой x на $2n_1 l + x$ и соответственно на $2n_2 l - x$. Как и в случае, рассмотренном на стр. 147, это означает, что входные напряжения распространяются по линии и постоянно отражаются от ее концов, оставляя каждый раз в точке x некоторый «остаток». Все эти «остатки» суммируются и дают в результате интеграл такого же вида, как и в формуле (25.23).

Электрическая линия с источником питания и нагрузкой на концах

Выше мы предполагали, что напряжения на входе и выходе заданы и что конец линии коротко замкнут. Это означает, во-первых, что непосредственно между входными зажимами имеется разность потенциалов (электродвижущая сила) $e(t)$, следовательно, $e(0, t) = e(t)$ и, во-вторых, что $e(l, t) = 0$. Однако на практике напряжение подается к входным зажимам в общем случае из сети, которая содержит в себе источник электродвижущей силы $e(t)$ и состоит из одного или нескольких контуров с сопротивлениями, индуктивностями и емкостями. Аналогичным образом к выходным зажимам в общем случае присоединена сеть из нескольких контуров.

¹⁾ Этот результат можно вывести несколько короче при помощи распределения δ , используя для этого соответствие № 260 из таблицы в конце книги.

Источник питания (сеть при входе) и объект потребления (сеть при выходе) могут быть охарактеризованы посредством импедансов $Z_0(s)$ и $Z_l(s)$. Если $E(s)$ есть \mathcal{L} -изображение электродвижущей силы $e(t)$ и к входным зажимам присоединен источник

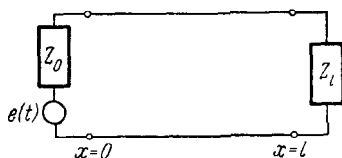


Рис. 25.4. Электрическая двухпроводная линия с источником питания и нагрузкой на концах.

питания так, как показано на рис. 25.4, то в пространстве изображений на концах линии мы будем иметь вместо значений $E(0, s) = E(s)$ и $E(l, s) = 0$ значения¹⁾

$$E(0, s) = E(s) - Z_0(s)I(0, s), \quad (25.24)$$

$$E(l, s) = Z_l(s)I(l, s). \quad (25.25)$$

Для определения этих граничных значений мы можем использовать прежние результаты. Подставив в равенства (25.8) и (25.9) $x = l$ и введя полученные выражения для $E(l, s)$ и $I(l, s)$ в равенство (25.25), мы найдем

$$E(0, s) \left[\operatorname{ch} lh(s) + \frac{Z_l}{Z} \operatorname{sh} lh(s) \right] - I(0, s) [Z \operatorname{sh} lh(s) + Z_l \operatorname{ch} lh(s)] = 0.$$

Присоединив уравнение (25.24), мы получим систему из двух уравнений для определения двух неизвестных $E(0, s)$ и $I(0, s)$. Определитель этой системы равен

$$D(s) = (Z_0 + Z_l) \operatorname{ch} lh(s) + \frac{Z_0 Z_l + Z^2}{Z} \operatorname{sh} lh(s),$$

и решениями будут

$$E(0, s) = \frac{1}{D(s)} [Z \operatorname{sh} lh(s) + Z_l \operatorname{ch} lh(s)] E(s),$$

$$I(0, s) = \frac{1}{D(s)} \left[\operatorname{ch} lh(s) + \frac{Z_l}{Z} \operatorname{sh} lh(s) \right] E(s).$$

Подставив эти выражения в уравнение (25.8), мы получим

$$\begin{aligned} E(x, s) &= \frac{1}{D(s)} [Z \operatorname{sh} lh(s) \operatorname{ch} xh(s) + Z_l \operatorname{ch} lh(s) \operatorname{ch} xh(s) - \\ &\quad - Z \operatorname{ch} lh(s) \operatorname{sh} xh(s) - Z_l \operatorname{sh} lh(s) \operatorname{sh} xh(s)] E(s) = \\ &= \frac{Z(s) \operatorname{sh}(l-x)h(s) + Z_l(s) \operatorname{ch}(l-x)h(s)}{(Z_0(s) + Z_l(s)) \operatorname{ch} lh(s) + \frac{1}{Z(s)} (Z_0(s) Z_l(s) + Z^2(s)) \operatorname{sh} lh(s)} E(s). \end{aligned} \quad (25.26)$$

Таким образом, мы определим \mathcal{L} -изображение напряжения $e(x, t)$.

Для перевода этого изображения в пространство оригиналов целесообразно заменить гиперболические функции

¹⁾ Если источник электродвижущей силы находится во внутренней ветви питающей сети, то соотношения (25.24) и (25.25) могут иметь несколько иной вид.

показательными; тогда мы будем иметь

$$E(x, s) = Z \frac{(Z + Z_l) e^{(l-x)h(s)} - (Z - Z_l) e^{(l-x)h(s)}}{(Z + Z_0)(Z + Z_l) e^{lh(s)} - (Z - Z_0)(Z - Z_l) e^{-2lh(s)}} E(s) = \\ = \frac{Z(s)}{Z(s) + Z_0(s)} \frac{e^{-xh(s)} - \rho_l(s) e^{-(2l-x)h(s)}}{1 - \rho_0(s) \rho_l(s) e^{-2lh(s)}} E(s), \quad (25.27)$$

где

$$\rho_0(s) = \frac{Z(s) - Z_0(s)}{Z(s) + Z_0(s)}, \quad \rho_l(s) = \frac{Z(s) - Z_l(s)}{Z(s) + Z_l(s)}$$

суть так называемые коэффициенты отражения¹⁾.

Дальше можно поступить так же, как было сделано при переходе от формулы (25.17) к формуле (25.19), т. е. разложить $E(x, s)$ в ряд и затем почленным переходом из пространства изображений в пространство оригиналов получить искомый оригинал $e(x, t)$ ²⁾.

Интересный частный случай получается при $Z_l(s) = Z(s)$. Тогда коэффициент отражения $\rho_l(s) = 0$, и изображение напряжения принимает вид

$$E(x, s) = \frac{Z(s)}{Z(s) + Z_0(s)} e^{-xh(s)} E(s). \quad (25.28)$$

Это означает, что если линия на стороне потребления тока нагружена характеристическим импедансом, то возникает распространение напряжения без отражений. Однако в общем случае функция $Z(s)$ не является дробно-рациональной и поэтому не может быть точно реализована посредством электрической цепи.

* * *

Рассмотренные примеры показывают, что преобразование Лапласа дает возможность легко и автоматически свести краевую задачу и задачу Коши для уравнения в частных производных от двух независимых переменных с постоянными коэффициентами к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения. Последняя задача обычно легко решается. Трудность возникает только при переходе от решения в пространстве изображений к решению в пространстве оригиналов. Способы такого перехода, проиллюстрированные на рассмотренных примерах и заключающиеся в использовании таблиц и разложений в ряды, могут быть применены также к решению многих других задач. Другие способы определения оригиналов по известным изображениям будут изложены в гл. 6.

¹⁾ Обе формулы (25.26) и (25.27) получены в работе Di Pasquantonio F., Applicazione della teoria delle distribuzioni all'analisi dei transitori delle linee elettriche. I. Problema della linea inizialmente a riposo. Alta Frequenza 34 (1965), стр. 707—738 [формулы (3.3.20), (3.3.16)].

²⁾ Выполнение этой операции см. в работе, цитированной в предыдущей сноске (стр. 719).

ГЛАВА 5

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

§ 26. Интегральные уравнения типа свертки

В физике часто встречаются интегральные уравнения следующих типов:

$$\int_0^t k(t-\tau) f(\tau) d\tau = g(t), \quad (26.1)$$

$$f(t) = g(t) + \int_0^t k(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad (26.2)$$

где $f(t)$ есть искомая функция, а $k(t)$ и $g(t)$ — заданные функции. Уравнение (26.1) называется *интегральным уравнением первого рода*, а уравнение (26.2) — *интегральным уравнением второго рода*. Так как интегралы, входящие в эти уравнения, представляют собой свертку, то оба уравнения называются интегральными уравнениями типа свертки.

Рассмотрим сначала *интегральное уравнение второго рода*, так как оно проще с точки зрения возможности решения. Если интеграл $\mathfrak{L}\{k\}$ абсолютно сходится, то преобразование Лапласа переводит свертку $k * f$ на основании теоремы свертывания (правило IX) в алгебраическое произведение изображений, которые мы будем обозначать, как всегда, соответствующими большими буквами. Следовательно, уравнение (26.2) после преобразования перейдет в изображающее уравнение

$$F(s) = G(s) + K(s)F(s),$$

решением которого будет

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 - K(s)}. \quad (26.3)$$

В этом виде функция $F(s)$ не допускает непосредственного применения обратного преобразования Лапласа. Но если придать

ей вид

$$F(s) = G(s) + \frac{K(s)}{1 - K(s)} G(s), \quad (26.4)$$

то можно показать, что функции

$$Q(s) = \frac{K(s)}{1 - K(s)}$$

всегда соответствует оригинал $q(t)$. Следовательно, решение (26.4) легко перевести назад в пространство оригиналов, после чего мы будем иметь

$$f(t) = g(t) + q(t) * g(t). \quad (26.5)$$

Перенеся свертку $q * g$ в другую часть равенства, мы придадим соотношению (26.5) вид

$$g(t) = f(t) + (-q) * g,$$

сходный с первоначальным интегральным уравнением, но с переменной ролей функций f и g и с заменой ядра $k(t)$ на *взаимное* ядро $-q(t)$.

Для вычисления оригинала $q(t)$ можно воспользоваться его представлением в виде бесконечного ряда. В самом деле, из равенства

$$Q(s) = \sum_{n=1}^{\infty} [K(s)]^n$$

следует, что

$$q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} k(t)^{*n}, \quad (26.6)$$

где $k^{*1} = k$, $k(t)^{*2} = k(t) * k(t)$ и вообще

$$k(t)^{*n} = \underbrace{k * k * \dots * k}_n \quad (n = 2, 3, \dots).$$

В теории интегральных уравнений ряд (26.6) называется *рядом Неймана*.

Иногда удается найти для изображения $Q(s)$ соответствующий оригинал непосредственно. Если, например, ядро $k(t)$ представляет собой многочлен

$$k(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_r t^r$$

(или аппроксимируется таким многочленом), то

$$K(s) = \frac{a_0}{s} + \frac{1!a_1}{s^2} + \dots + \frac{r!a_r}{s^{r+1}}$$

и, следовательно,

$$Q(s) = \frac{K(s)}{1 - K(s)} = \frac{a_0 s^r + 1!a_1 s^{r-1} + \dots + r!a_r}{s^{r+1} - a_0 s^r - 1!a_1 s^{r-1} - \dots - r!a_r},$$

т. е. изображение $Q(s)$ представляет собой дробно-рациональную функцию, числитель которой имеет степень, меньшую степени знаменателя. Отыскание для такого изображения соответствующего оригинала поризводится одним из способов, указанных в § 12.

Интегральное уравнение первого рода допускает решение только в некоторых специальных случаях, в общем же виде его решение невозможно. Изображающее уравнение для уравнения (26.1) имеет вид

$$K(s) F(s) = G(s).$$

Его решение

$$F(s) = \frac{G(s)}{K(s)} \quad (26.7)$$

нельзя перевести назад в пространство оригиналов посредством теоремы свертывания, так как функция $1/K(s)$ не является \mathcal{L} -изображением. Однако в некоторых случаях интегральное уравнение первого рода можно преобразовать в интегральное уравнение второго рода. Для этого можно воспользоваться следующей теоремой:

Теорема 26.1. Пусть функция $f_1(t)$ при $t > 0$ дифференцируема и при $t = 0$ непрерывна; далее, пусть $f'_1(t)$ и $f_2(t)$ в каждой промежуточной $0 \leq t \leq T$ абсолютно интегрируемы и в каждой промежуточной $0 \leq T_1 \leq t \leq T_2$ ограничены. В таком случае в каждой точке $t > 0$, где функция f_2 справа (слева) непрерывна, свертка $f(t) = f_1 * f_2$ справа (слева) дифференцируема, и производная $f'(t)$ равна

$$f'(t) = f_1(0) f_2(t) + f'_1 * f_2.$$

Если $f_1(0) = 0$, то допущение о непрерывности функции f_2 излишне.

(В такой весьма общей формулировке приведенная теорема используется, например, в теории обыкновенных дифференциальных уравнений в тех случаях, когда возбуждающая функция обладает точками разрыва.)

Если функции $k(t)$ и $g(t)$ дифференцируемы и $k(0) \neq 0$, то, продифференцировав уравнение (26.1), мы получим интегральное уравнение второго рода

$$k(0) f(t) + \int_0^t k'(t-\tau) f(\tau) d\tau = g'(t),$$

которое можно решить указанным выше способом. Если

$$k(0) = k'(0) = \dots = k^{(n-1)}(0),$$

но

$$k^{(n)}(0) \neq 0,$$

то после $(n+1)$ -кратного дифференцирования уравнения (26.1) мы будем иметь

$$k^{(n)}(0) f(t) + \int_0^t k^{(n+1)}(t-\tau) f(\tau) d\tau = g^{(n+1)}(t),$$

т. е. опять интегральное уравнение второго рода.

Однако указанный способ решения уравнения (26.1) не дает результата, если ядро $k(t)$ при $t=0$ недифференцируемо. Примером такого ядра может служить

$$k(t) = t^{-\alpha} \quad (0 < \alpha < 1).$$

В этом случае иногда приводит к цели следующий способ. Положим

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = \varphi(t).$$

Так как, согласно правилу VII,

$$\mathfrak{L}\{\varphi\} = \Phi(s) = \frac{1}{s} F(s),$$

то решение (26.7) принимает вид

$$\Phi(s) = \frac{1}{sK(s)} G(s).$$

В то время как функция $1/K(s)$ никак не может быть \mathfrak{L} -изображением, функция $1/sK(s)$ может быть таким изображением и, следовательно, в этом случае допустимо применение теоремы свертывания.

Такой случай имеет место, например, для *интегрального уравнения Абеля*

$$\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau = g(t) \quad (0 < \alpha < 1), \quad (26.8)$$

встречающегося во многих областях физики. Положив

$$f * 1 = \varphi(t)$$

и имея в виду соответствис

$$t^{-\alpha} \circ \frac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{1-\alpha}} = K(s) \quad (\alpha < 1),$$

мы получим для $\Phi(s)$ изображающее уравнение

$$\frac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{-\alpha}} \Phi(s) = G(s),$$

решением которого будет

$$\Phi(s) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha) s^\alpha} G(s).$$

Так как

$$\frac{1}{s^\alpha} \xrightarrow{s \rightarrow 0} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad (\alpha > 0),$$

то изображению $\Phi(s)$ соответствует оригинал

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha)} t^{\alpha-1} * g(t)$$

(Обратим внимание на то, что при прямом преобразовании мы приняли $\alpha < 1$, а при обратном преобразовании $\alpha > 0$, следовательно, в целом $0 < \alpha < 1$.)

Так как, согласно известной формуле,

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha)} = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi},$$

то явным выражением для функции $\varphi(t)$ будет

$$\varphi(t) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^t \tau^{\alpha-1} g(t-\tau) d\tau.$$

Отсюда на основании теоремы 26.1 и при условии, что функция $g(t)$ дифференцируема и при $t = 0$ непрерывна, следует

$$f(t) = \varphi'(t) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left[g(0) t^{\alpha-1} + \int_0^t \tau^{\alpha-1} g'(t-\tau) d\tau \right]. \quad (26.9)$$

§ 27. Интегральные соотношения

В § 26 мы исходили из уравнения для неизвестной функции, в состав которого входил интеграл типа свертки, и переводили это уравнение посредством преобразования Лапласа в алгебраическое уравнение. Теперь поступим наоборот: будем исходить из *алгебраического уравнения* для *известных* функций и переведем его посредством обратного преобразования Лапласа в соотношение, содержащее интегралы типа свертки. Такой прием позволяет просто получать некоторые важные *интегральные соотношения* для функций, встречающихся в физике, в то время как вывод таких соотношений прямым путем иногда крайне труден. Приведем несколько примеров.

В теории теплопроводности приходится иметь дело с *функцией двойного источника*

$$\psi(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} t^{3/2} e^{-x^2/4t}$$

[см. формулу (24.8)]. Для нее мы имеем соответствие

$$\psi(x, t) \circ \bullet e^{-x\sqrt{s}} \quad (x > 0).$$

Применив к равенству

$$e^{-x_1\sqrt{s}} \cdot e^{-x_2\sqrt{s}} = e^{-(x_1+x_2)\sqrt{s}} \quad (x_1 > 0, x_2 > 0)$$

обратное преобразование Лапласа, мы получим для функции ψ интегральное соотношение

$$\psi(x_1, t) * \psi(x_2, t) = \psi(x_1 + x_2, t), \quad (27.1)$$

которое в явной записи имеет довольно сложный вид. Если мы попытаемся получить это соотношение прямым вычислением его левой части, то увидим, что для этого понадобится весьма кропотливая работа.

Для функции Бесселя

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n},$$

часто встречающейся в физике, мы имеем соответствие

$$J_0(t) \circ \bullet \frac{1}{(s^2 + 1)^{1/2}}.$$

Разложим изображение на множители следующим образом:

$$\frac{1}{(s^2 + 1)^{1/2}} = \frac{1}{(s + j)^{1/2}} \frac{1}{(s - j)^{1/2}}.$$

Тогда, приняв во внимание, что

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(s + \alpha)^{1/2}} \circ \bullet t^{-1/2} e^{-\alpha t} \quad \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \right],$$

и применив теорему свертывания, мы будем иметь

$$\begin{aligned} I_0(t) &= \frac{1}{\pi} (t^{-1/2} e^{-it}) * (t^{-1/2} e^{it}) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \tau^{-1/2} e^{-i\tau} (t - \tau)^{-1/2} e^{i(t-\tau)} d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi} e^{it} \int_0^t \tau^{-1/2} (t - \tau)^{-1/2} e^{-2i\tau} d\tau, \end{aligned}$$

или после подстановки $\tau = tu$

$$\begin{aligned} J_1(t) &= \frac{1}{\pi} e^{jt} \int_0^1 u^{-1/2} (1-u)^{-1/2} e^{-2jtu} du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 e^{jt(1-2u)} [u(1-u)]^{-1/2} du. \end{aligned}$$

Положив

$$1 - 2u = v,$$

следовательно, приняв

$$u = \frac{1-v}{2}, \quad 1-u = \frac{1+v}{2},$$

мы получим формулу

$$J_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} e^{jtv} (1-v^2)^{-1/2} dv, \quad (27.2)$$

которая после подстановки

$$v = \cos \varphi, \quad 1 - v^2 = \sin^2 \varphi$$

переходит в так называемый *интеграл Пуассона*

$$J_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{jt \cos \varphi} d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(t \cos \varphi) d\varphi. \quad (27.3)$$

Приведенные примеры достаточно убедительно показывают, что глубоко скрытые свойства некоторых функций часто могут быть очень просто и наглядно обнаружены посредством преобразования Лапласа.

ГЛАВА 6

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОРИГИНАЛА ПО ИЗОБРАЖЕНИЮ

§ 28. Комплексный интеграл, осуществляющий обратное преобразование Лапласа

Решение функциональных уравнений (дифференциальных, разностных, интегральных) посредством преобразования Лапласа производится всегда таким образом, что заданное уравнение отображается из пространства оригиналов в пространство изображений, а затем решается изображающее уравнение. Последний и обычно самый трудный шаг состоит в вычислении оригинала, соответствующего найденному изображению. Важнейшим средством для вычисления оригинала по изображению является комплексный интеграл (2.8)

$$f(t) = \lim_{Y \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - jY}^{\alpha + jY} e^{ts} F(s) ds \quad (t > 0), \quad (28.1)$$

где α есть абсцисса в полуплоскости абсолютной сходимости интеграла Лапласа $\mathfrak{L}\{f\}$. Правда, для непосредственного вычисления функции $f(t)$ формула (28.1) мало пригодна, так как она требует знания функции $F(s)$ для комплексных значений $s = \alpha + jy$ ($-\infty < y < +\infty$). Но поскольку она представляет собой интеграл от аналитической функции, взятый по пути интегрирования в комплексной плоскости, ее можно преобразовать, применив для этого методы, известные из теории функций комплексного переменного, например изменение пути интегрирования, вычисление вычетов и т. п. Такого рода преобразования иногда позволяют вскрыть важные свойства функции, определяемой комплексным интегралом.

Поясним использование формулы (28.1) на следующем примере. Пусть проводник тепла, рассмотренный в § 24 и простирающийся от $x = 0$ до $x = \infty$, имеет начальную температуру, равную нулю, и пусть на его конце $x = 0$ граничная температура изменяется по закону $\cos \omega t$. В таком случае формула (24.9) для температуры в сечении x в момент времени t примет вид

$$u(x, t) = \cos \omega t * \psi(x, t).$$

Эта формула внешне очень изящна, однако она не позволяет получить никакого представления о поведении функции $u(x, t)$. Поэтому вернемся к изображению (24.7), которое вследствие соответствия

$$\cos \omega t \circ \bullet \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

принимает вид

$$U(x, s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} e^{-x\sqrt{s}}.$$

Подставив это изображение в комплексный интеграл (28.1), мы получим

$$u(x, t) = \lim_{Y \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - jY}^{\alpha + jY} e^{ts} \frac{s}{s^2 + \omega^2} e^{-x\sqrt{s}} ds. \quad (28.2)$$

Изображение $U(x, s)$ имеет вследствие наличия в подынтегральном выражении знаменателя $s^2 + \omega^2$ простые полюсы в точках $s = \pm j\omega$ и, кроме того, вследствие наличия показателя степени \sqrt{s} — точку разветвления в $s = 0$. В качестве абсциссы α можно взять любое вещественное число, большее нуля.

Рассмотрим изображенный на рис. 28.1 замкнутый контур \mathcal{C} , состоящий из вертикальной прямой, проходящей через точку $s = \alpha$, из трех дуг двух окружностей, имеющих радиусы ε и R и общий центр в нулевой точке, и из двух горизонтальных отрезков, проходящих выше и ниже отрицательной вещественной оси. Внутри этого контура функция $U(x, s)$ остается однозначной и аналитической всюду, за исключением полюсов $s = \pm j\omega$;

Рис. 28.1. Контур, внутри которого функция $U(x, s)$ остается однозначной и аналитической всюду, за исключением полюсов $s = \pm j\omega$.

поэтому, согласно теореме Коши о вычетах, мы имеем

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\mathcal{C}} e^{ts} U(x, s) ds = \text{сумме вычетов функции } e^{ts} U(x, s)$$

в точках $s = \pm j\omega$.

Вычисление этих вычетов производится на основании следующей теоремы:

Теорема 28.1. Пусть функции $F_1(s)$ и $F_2(s)$ в окрестности точки s_0 аналитические и пусть $F_1(s_0) \neq 0$, в то время как $F_2(s)$ имеет в s_0 простой нуль; тогда вычет функции $F_1(s)/F_2(s)$ в точке s_0 равен

$$\frac{F_1(s_0)}{F_2'(s_0)}.$$

Представив функцию $e^{ts}U(x, s)$ в виде

$$\frac{e^{ts}se^{-x\sqrt{s}}}{s^2 + \omega^2} = \frac{F_1(s)}{F_2(s)},$$

мы будем иметь: $F_2'(s) = 2s$, следовательно, ее **вычеты будут равны**

$$\frac{e^{tj\omega}j\omega e^{-x\sqrt{j\omega}}}{2j\omega} \quad \text{в точке } s_0 = j\omega,$$

$$\frac{e^{-tj\omega}(-j\omega)e^{-x\sqrt{-j\omega}}}{-2j\omega} \quad \text{в точке } s_0 = -j\omega.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\mathcal{C}} e^{ts}U(x, s) ds = \frac{1}{2} (e^{j\omega t - x\sqrt{j\omega}} + e^{-j\omega t - x\sqrt{-j\omega}}).$$

Так как

$$\sqrt{j} = \cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1+j}{\sqrt{2}},$$

$$\sqrt{-j} = \cos \frac{\pi}{4} - j \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1-j}{\sqrt{2}},$$

то полученный результат можно представить в более простом виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \int_{\mathcal{C}} e^{ts}U(x, s) ds &= \frac{1}{2} e^{-x\sqrt{\omega/2}} (e^{t(\omega t - x\sqrt{\omega/2})} + e^{-t(\omega t - x\sqrt{\omega/2})}) = \\ &= e^{-x\sqrt{\omega/2}} \cos(\omega t - x\sqrt{\omega/2}). \end{aligned} \quad (28.3)$$

Будем теперь устремлять ε к нулю, а R к бесконечности. Очевидно, что при этом интеграл (28.3), если его взять только по пути AB , будет стремиться на основании формулы (28.2) к $u(x, t)$. Для того чтобы выяснить поведение этого интеграла на обеих круговых дугах CD и GH , воспользуемся следующей теоремой, очень часто с успехом применяемой при подобного рода исследованиях.

Теорема 28.2. Пусть при $r \rightarrow \infty$ функция $F(s) = F(re^{i\varphi})$ стремится в левой полуплоскости $\operatorname{Re} s \leq 0$ (т. е. при $\pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2$) равномерно относительно φ к нулю. В таком случае, если \mathcal{C} есть полуокружность радиуса r , имеющая центр в точке O и расположенная в левой полуплоскости, то при условии, что $t > 0$,

интеграл

$$\int_{\Phi} e^{ts} F(s) ds \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty.$$

То же самое имеет место и в том случае, если вместо полной полукруглости взять какую-либо ее дугу, но при этом при изменении r оставлять неизменным центральный угол¹⁾.

Если точка s расположена в левой полуплоскости, то точка \sqrt{s} лежит в правой полуплоскости, следовательно, $\operatorname{Re} \sqrt{s} \geq 0$ и

$$|e^{-x\sqrt{s}}| = e^{-x\operatorname{Re} \sqrt{s}} \leq 1.$$

Далее, для больших $|s|$ мы имеем

$$\frac{s}{s^2 + \omega^2} \approx \frac{1}{s},$$

и поэтому функция $U(x, s)$ в левой полуплоскости при $|s| \rightarrow \infty$ равномерно стремится к нулю относительно φ . Таким образом, на основании сформулированной теоремы интегралы, взятые вдоль дуг CD и GH , при $R \rightarrow \infty$ стремятся к нулю, если только $t > 0$, что в нашем случае и имеет место.

На дугах BC и HA функции e^{ts} и $e^{-x\sqrt{s}}$ ограничены, а множитель $s/(s^2 + \omega^2)$ обеспечивает равномерное стремление подынтегрального выражения к нулю. Длина самих дуг BC и HA при $R \rightarrow \infty$ остается ограниченной. Поэтому интеграл (28.3), взятый вдоль каждой из этих дуг, при $R \rightarrow \infty$ стремится к нулю.

На круговой дуге EF все подынтегральное выражение ограничено, а длина пути интегрирования стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, следовательно, интеграл (28.3), взятый вдоль дуги EF , также исчезает.

Таким образом, в левой части равенства (28.3) остаются только: интеграл, взятый вдоль проходящей через точку α вертикальной прямой и равный $u(x, t)$, и два интеграла, взятые вдоль горизонтальных лучей. Эти два последних интеграла следует заменить теперь интегралами, взятыми вдоль верхнего и нижнего берегов отрицательной вещественной оси. Перенеся их в правую часть равенства (28.3), мы будем иметь

$$u(x, t) = e^{-x\sqrt{\omega/2}} \cos \left(\omega t - x \sqrt{\frac{\omega}{2}} \right) - \\ - \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^0 e^{ts} U(x, s) ds - \frac{1}{2\pi j} \int_0^{-\infty} e^{ts} U(x, s) ds.$$

¹⁾ Эта теорема, часто называемая леммой Жордана, конечно, не является самоочевидной. В самом деле, хотя функция e^{ts} в левой полуплоскости при $t > 0$ остается ограниченной и поэтому подынтегральное выражение равномерно стремится к нулю, но зато неограниченно возрастает длина пути интегрирования.

Внеся $s = re^{j\pi}$ в интеграл, взятый вдоль верхнего берега отрицательной вещественной оси, и $s = re^{-j\pi}$ — в интеграл, взятый вдоль нижнего берега этой оси, мы получим

$$\int_{-\infty}^0 e^{ts} U(x, s) ds = - \int_0^{\infty} e^{-tr} \frac{r}{r^2 + \omega^2} e^{-lx\sqrt{r}} dr,$$

$$\int_0^{\infty} e^{ts} U(x, s) ds = \int_0^{\infty} e^{-tr} \frac{r}{r^2 + \omega^2} e^{+lx\sqrt{r}} dr,$$

и формула (28.3) примет следующий окончательный вид:

$$u(x, t) = e^{-x\sqrt{\omega/2}} \cos\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-tr} \frac{r}{r^2 + \omega^2} \sin x\sqrt{r} dr. \quad (28.4)$$

Эта форма решения, выведенная путем использования комплексного интеграла (28.1), позволяет получить о поведении функции $u(x, t)$ значительно более глубокое представление, чем форма решения, найденная в § 24. Интеграл, входящий в правую часть формулы (28.4), представляет собой интеграл Лапласа, только в нем s заменено на t , а t — на r . При $t \rightarrow \infty$ он стремится к нулю (см. теорему 32.1), следовательно, изображает затухающий с увеличением времени переходный процесс, поведение которого можно описать, как будет показано в § 34, еще более точно посредством асимптотического разложения. Таким образом, функция $u(x, t)$ определяется в основном своим первым членом, который показывает, что температура в точке $x > 0$ колеблется так же, как температура на границе $x = 0$, но со сдвигом фазы $x\sqrt{\omega/2}$ и с амплитудой, равной $e^{-x\sqrt{\omega/2}}$. (См. в связи с этим результат (24.19), при выводе которого переходный процесс изображался интегралом, взятым от t до ∞ .)

Аналогичным способом можно получить практически удобное выражение для оригинала и во многих других задачах.

§ 29. Разложение в ряды

Другим, очень часто применяемым на практике способом для получения функции $f(t)$ из функции $F(s)$, т. е. для обратного преобразования Лапласа, является разложение функции $F(s)$ в ряд

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(s),$$

члены которого $F_n(s)$ представляют собой \mathfrak{L} -изображения, т. е.

$$F_n(s) = \mathfrak{L}\{f_n(t)\},$$

с последующим применением к каждому $F_n(s)$ обратного преобразования Лапласа. Таким путем получается ряд

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$$

в пространстве оригиналов. Очевидно, что такой способ будет давать правильный результат не всегда. В самом деле, суть этого способа сводится по существу к перемене местами суммирования бесконечного ряда и вычисления интеграла (к тому же несобственного). Однако имеются некоторые виды рядов, для которых почленный переход из пространства изображений в пространство оригиналов может выполняться без всяких опасений.

1. Разложение в степенные ряды

Теорема 29.1. Если изображение $F(s)$ может быть разложено в ряд

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s^{n+1}}, \quad (29.1)$$

расположенный по понижающимся степеням s ¹⁾ и сходящийся при $|s| > R$, то возможен почленный переход в пространство оригиналов, в результате чего получается ряд

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n, \quad (29.2)$$

сходящийся при всех вещественных и комплексных t .

Эта теорема применима только к очень специальному классу функций. В самом деле, для осуществления разложения (29.1) изображение $F(s)$ должно представлять собой аналитическую функцию, обращающуюся в нуль при $s \rightarrow \infty$, а оригинал $f(t)$ — целую функцию экспоненциального типа, т. е. функцию, допускающую оценку вида

$$|f(t)| < Ce^{c|t|}.$$

¹⁾ Обратим внимание на то, что этот ряд начинается с члена, содержащего по крайней мере $1/s$, следовательно, в нем отсутствует член, свободный от s . Причина этого заключается в том, что любая функция, представляющая собой результат преобразования Лапласа, при $s \rightarrow +\infty$ должна обязательно стремиться к нулю (см. теорему 32.1).

Примером может служить функция Бесселя $J_0(t)$, рассмотренная на стр. 157. Ее изображение можно разложить в ряд

$$\frac{1}{(s^2 + 1)^{1/2}} = \frac{1}{s} (1 + s^{-2})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} s^{-2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{1}{s^{2n+1}},$$

следовательно,

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

Так как

$$\begin{aligned} \binom{-\frac{1}{2}}{n} &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-n+\frac{1}{2}\right)}{n!} = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{n! 2^n} = \\ &= \frac{(-1)^n (2n)!}{n! 2^n \cdot 2 \cdot 4 \cdots 2n} = \frac{(-1)^n (2n)!}{n! 2^{2n} n!}, \end{aligned}$$

то полученный ряд можно представить также в виде

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}.$$

Теорема 29.1 может быть обобщена на степенные ряды с нецелочисленными показателями.

Теорема 29.2. Если изображение $F(s)$ можно разложить в абсолютно сходящийся при $|s| > R$ ряд

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s^{\lambda_n}}, \quad (29.3)$$

где λ_n представляет собой любую возрастающую последовательность чисел $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots \rightarrow \infty$, то возможен почленный переход от этого ряда к ряду

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^{\lambda_n-1}}{\Gamma(\lambda_n)} \quad (29.4)$$

в пространстве оригиналов. Этот ряд сходится при всех вещественных и комплексных значениях t , не равных нулю.

Теорема 29.2 применима, например, к функциям Бесселя $J_\nu(t)$ любого порядка $\nu > -1/2$. Мы имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{t^\nu J_\nu(t)\} &= \frac{\Gamma(2\nu+1)}{\Gamma(\nu+1) 2^\nu} \frac{1}{(s^2+1)^{\nu+1/2}} = \frac{\Gamma(2\nu+1)}{\Gamma(\nu+1) 2^\nu} \frac{1}{s^{2\nu+1}} (1+s^{-2})^{-\nu-1/2} = \\ &= \frac{\Gamma(2\nu+1)}{\Gamma(\nu+1) 2^\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\nu-\frac{1}{2}}{n} \frac{1}{s^{2n+2\nu+1}}, \end{aligned}$$

откуда путем почленного перехода в пространство **оригиналов** найдем

$$J_v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(v+n+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+v}.$$

2. Разложение в ряды по показательным функциям

Если изображение $F(s)$ представляет собой *дробно-рациональную функцию*

$$F(s) = \frac{r_1(s)}{r_2(s)},$$

числитель которой $r_1(s)$ имеет степень, *меньшую* степени знаменателя $r_2(s)$, то эту функцию можно представить в виде суммы конечного числа простейших дробей. Если знаменатель имеет простые нули $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, т. е. если

$$r_2(s) = (s - \alpha_1) \cdots (s - \alpha_n),$$

то коэффициентами такого разложения будут вычеты функции $F(s)$ в ее полюсах α_v . Согласно теореме 28.1, эти вычеты равны

$$\frac{r_1(\alpha_v)}{r_2'(\alpha_v)}.$$

[Если $r_1(\alpha_v) = 0$, то числитель $r_1(s)$ содержит также множитель $s - \alpha_v$, следовательно, дробь $r_1(s)/r_2(s)$ сокращается на этот множитель; это означает, что точка α_v не является полюсом и поэтому для нее не получается никакого вычета.] Таким образом, изображение $F(s)$ может быть представлено в виде ряда

$$F(s) = \sum_{v=1}^n \frac{r_1(\alpha_v)}{r_2'(\alpha_v)} \frac{1}{s - \alpha_v}. \quad (29.5)$$

Так как этот ряд содержит только конечное число членов, то можно выполнить почленный переход в пространство оригиналов; в результате мы получим ряд

$$f(t) = \sum_{v=1}^n \frac{r_1(\alpha_v)}{r_2'(\alpha_v)} e^{\alpha_v t}. \quad (29.6)$$

Если имеются кратные нули, то показательные функции необходимо умножить на степенные многочлены относительно t [см. формулу (12.14)]. С выражениями вида (29.6) мы неодно-

кратно встречались при решении обыкновенных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений (см. § 11 и 12 и рассмотренные там примеры).

При решении уравнений в частных производных вместо дробно-рациональных функций часто появляются *мероморфные функции*, которые, подобно дробно-рациональным функциям, являются аналитическими во всей плоскости, за исключением изолированных полюсов. Число этих полюсов может быть конечным или бесконечным. Так, например, при решении уравнения теплопроводности (стр. 136) мы получили функцию $U_0(x, s)$, которая, если положить $l = \pi$, имеет вид

$$U_0(x, s) = \frac{e^{(\pi-x)\sqrt{s}} - e^{-(\pi-x)\sqrt{s}}}{e^{\pi\sqrt{s}} - e^{-\pi\sqrt{s}}}.$$

В окрестности точки $s = 0$ эта функция отнюдь не двузначная, как это может показаться на первый взгляд из-за наличия показателя \sqrt{s} в степенях. В самом деле, после одного обхода точки $s = 0$, т. е. после замены \sqrt{s} на $-\sqrt{s}$, функция $U_0(x, s)$ становится равной

$$\frac{e^{-(\pi-x)\sqrt{s}} - e^{(\pi-x)\sqrt{s}}}{e^{-\pi\sqrt{s}} - e^{\pi\sqrt{s}}} = \frac{e^{(\pi-x)\sqrt{s}} - e^{-(\pi-x)\sqrt{s}}}{e^{\pi\sqrt{s}} - e^{-\pi\sqrt{s}}},$$

т. е. принимает свое первоначальное значение.

Единственными особыми точками являются простые нули знаменателя. Из равенства

$$e^{\pi\sqrt{s}} - e^{-\pi\sqrt{s}} = 0,$$

или

$$e^{2\pi\sqrt{s}} = 1$$

следует, что

$$2\pi\sqrt{s} = v \cdot 2\pi j \quad (v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

т. е.

$$s = -v^2.$$

Так как отрицательные v дают для s те же значения, что и положительные v , то первые можно не учитывать. Далее, при $s = 0$ обращается в нуль также числитель функции $U_0(x, s)$, следовательно, точка $s = 0$ не является особой. Таким образом, мы должны учитывать только полюсы

$$a_v = -v^2 \quad (v = 1, 2, \dots).$$

Вычет функции $U_0(x, s)$ в точке α_v , согласно теореме 28.1, равен

$$\begin{aligned} \frac{e^{(\pi-x)\sqrt{s}} - e^{-(\pi-x)\sqrt{s}}}{2\sqrt{s}} \bigg|_{s=\alpha_v} &= \frac{e^{(\pi-x)vj} - e^{-(\pi-x)vj}}{2vj} = \\ &= \frac{\pi}{2vj} (e^{\pi vj} + e^{-\pi vj}) = \\ &= \frac{2j \sin(\pi-x)v}{\frac{\pi}{vj} \cos \pi v} = \frac{2}{\pi} v \sin vx. \end{aligned}$$

Следовательно, так называемой главной частью функции $U_0(x, s)$ в полюсе $\alpha_v = -v^2$ будет простейшая дробь

$$\frac{2}{\pi} v \sin vx \frac{1}{s + v^2}.$$

При чисто формальном мышлении можно было бы думать, что мероморфная функция $U_0(x, s)$ может быть построена, подобно дробно-рациональной функции, из простейших дробей только что указанного вида и, следовательно, может быть представлена в виде ряда

$$U_0(x, s) = \frac{2}{\pi} \sum_{v=1}^{\infty} v \sin vx \frac{1}{s + v^2}, \quad (29.7)$$

который после почленного обратного преобразования Лапласа переходит в ряд

$$u_0(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{v=1}^{\infty} v \sin vx e^{-v^2 t}, \quad (29.8)$$

определяющий оригинал. Такой способ вычисления оригинала часто встречается в технических публикациях. Между тем в рассмотренном случае он приводит к правильному результату *случайно*, в других же случаях он может давать неверные результаты. В самом деле, прежде всего является сомнительным само разложение (29.7), относительно которого можно сказать только следующее: если из функции $U_0(x, s)$ вычесть все главные части, то останется функция, не имеющая особых точек, т. е. целая функция. Однако определение этой целой функции, которая в рассмотренном случае случайно равна нулю, обычно представляет собой очень сложную задачу.

Может случиться, что такая целая функция представляет собой важнейшую составную часть изображения. Если изображение содержит в качестве слагаемого конечное \mathfrak{L} -изображение, например,

$$\int_0^1 e^{-st} dt = \frac{1 - e^{-s}}{s}$$

(эта функция является аналитически определенной также при $s = 0$), то это слагаемое представляет собой целую функцию и поэтому не имеет никаких особенностей в конечной области. Следовательно, присутствие такой функции в составе изображения при рассмотренном выше способе вычисления оригиналов остается совершенно неучтенным.

Сомнительность разложения на простейшие дроби становится особенно очевидной в том случае, когда мероморфная функция имеет только конечное число полюсов, не будучи в то же время рациональной функцией, что, вообще говоря, может иметь место. Если в таком случае просто составить разложение на простейшие дроби, то из этого следовало бы, что рассматриваемая функция представляет собой рациональную функцию. Наконец, сомнительным является, как об этом уже было упомянуто в начале этого параграфа, переход от ряда (29.7) к ряду (29.8) путем почленного обратного преобразования Лапласа.

Тем не менее рассмотренный способ можно поставить на твердое основание, если воспользоваться комплексным интегралом, осуществляющим обратное преобразование Лапласа. При этом выясняется, что разложение функции $U_0(x, s)$ на простейшие дроби, понадобившееся выше только как промежуточная стадия, вообще не играет никакой роли, так как сразу получается разложение вида (29.8). Для получения этого разложения надо воспользоваться теорией вычетов Коши, поступив следующим образом. После того как оригинал $u(x, t)$ представлен в виде

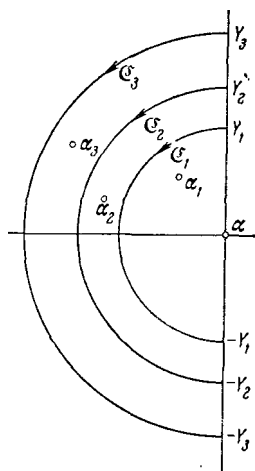


Рис. 29.1. Вспомогательные кривые G_n , между которыми располагаются полюсы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

$$u(x, t) = \lim_{Y \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - jY}^{\alpha + jY} e^{ts} U(x, s) ds, \quad (29.9)$$

следует провести слева от вертикали, определяемой абсциссой α (рис. 29.1), вспомогательные кривые G_1, G_2, \dots , начинающиеся в точках Y_1, Y_2, \dots вертикали над вещественной осью и заканчивающиеся в точках $-Y_1, -Y_2, \dots$ вертикали под вещественной осью. Эти кривые (ими могут быть полуокружности, прямоугольники и т. д.) необходимо расположить так, чтобы между каждой из них и вертикальной прямой был расположен

один полюс $\alpha_1, \alpha_2, \dots$. Тогда мы будем иметь

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - jY_n}^{\alpha + jY_n} e^{ts} U(x, s) ds + \frac{1}{2\pi j} \int_{\mathbb{E}_n} e^{ts} U(x, s) ds = \text{сумме вычетов}$$

функции $e^{ts} U(x, s)$ в полюсах $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Если функция $U(x, s)$ обладает в α_v простым полюсом, то ее главная часть имеет вид

$$\frac{b_v}{s - \alpha_v},$$

причем b_v зависит от x , а вычет функции $e^{ts} U(x, s)$ равен

$$b_v e^{\alpha_v t}.$$

Если функция $U(x, s)$ обладает в α_v кратным полюсом, например, третьего порядка, то ее главная часть имеет вид

$$\frac{b_v}{s - \alpha_v} + \frac{c_v}{(s - \alpha_v)^2} + \frac{d_v}{(s - \alpha_v)^3},$$

а вычет функции $e^{ts} U(x, s)$ равен

$$\left(b_v + \frac{c_v}{1!} t + \frac{d_v}{2!} t^2 \right) e^{\alpha_v t}.$$

Для упрощения последующих записей предположим, что все полюсы функции $U(x, s)$ простые. Тогда мы будем иметь

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - jY_n}^{\alpha + jY_n} e^{ts} U(x, s) ds = \sum_{v=1}^n b_v(x) e^{\alpha_v t} - \frac{1}{2\pi j} \int_{\mathbb{E}_n} e^{ts} U(x, s) ds. \quad (29.10)$$

Если при возрастании n будет $Y_n \rightarrow \infty$, а

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\mathbb{E}_n} e^{ts} U(x, s) ds \rightarrow 0, \quad (29.11)$$

то на основании формулы (29.9) мы получим

$$u(x, t) = \sum_{v=1}^{\infty} b_v(x) e^{\alpha_v t}. \quad (29.12)$$

Итак, мы нашли искомое разложение оригинала. Однако применять это разложение можно только в том случае, когда выполняется условие (29.11). При этом многое зависит от того, как выбраны кривые \mathbb{E}_n . Они должны соответствовать характеру изменения функции $U(x, s)$ в том смысле, чтобы изме-

нение $U(x, s)$ вдоль выбранных кривых было легко обозримым. Так, например, для разложения (29.8) выполнение условия (29.11) доказывается легче всего, если в качестве кривых \mathfrak{C}_n выбрать параболы¹⁾. Конечно, не всегда удастся доказать, что условие (29.11) выполняется. В этих случаях правильность разложения (29.12) остается под сомнением.

Существует видоизменение рассмотренного метода. Проходящую через точку α прямую, вдоль которой производится интегрирование, последовательно заменяют другой вертикальной прямой с перемещающейся влево абсциссой и притом таким образом, чтобы эти прямые проходили между полюсами (рис. 29.2). Это можно сделать в тех случаях, когда при перемещении s вверх или вниз функция $U(x, s)$ в полосах, заключенных между каждой из вновь проведенных прямых и первоначальной прямой, равномерно стремится к нулю. Тогда в качестве «остаточного члена» получится интеграл, для которого путь интегрирования расположен между n -м и $(n+1)$ -м полюсами. Для того чтобы разложение (29.12) было обеспечено, указанный интеграл при $n \rightarrow \infty$ должен стремиться к нулю.

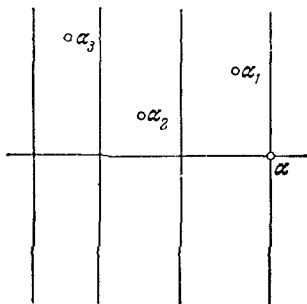


Рис. 29.2. Замена пути интегрирования параллельными прямыми.

Изложенный метод применим только при условии, что функция $U(x, s)$ однозначная, так как иначе нельзя пользоваться теоремой Коши о вычетах. Если среди особых точек функции $U(x, s)$ имеются особые точки неоднозначного характера, то необходимо либо изменить путь интегрирования примерно так, как это было сделано в § 28, либо воспользоваться способом, который будет изложен ниже в § 35.

Ввиду ограниченного объема книги мы не приводим специальных примеров, иллюстрирующих рассмотренный метод. Читателей, желающих ознакомиться с применением этого метода в более сложных случаях, отсылаем к литературе, указанной в сноске на этой странице.

¹⁾ См. по этому поводу: Doetsch G., *Handbuch der Laplace-Transformation*, т. I, Birkhäuser Verlag, Basel, 1950, стр. 277—281. Пример, в котором в качестве кривых \mathfrak{C}_n выбраны круговые дуги, рассмотрен в книге: Doetsch G., *Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*, Birkhäuser Verlag, 1958, стр. 169. Другие примеры можно найти в книгах: Carslaw H. S. and Jaeger J. C., *Operational methods in applied mathematics*, Oxford University Press, 1941 [имеется русский перевод: Карлслю Х. и Егер Дж., *Операционные методы в прикладной математике*, ИЛ, Москва, 1948 (прим. перев.)] и Churchill R. V., *Operational mathematics*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1958.

В технических публикациях изложенный метод иногда применяется для изображений, представляющих собой *дробно-рациональную функцию*, что, однако, совершенно нецелесообразно, так как в этом случае изображение просто разлагается на конечное число простейших дробей и затем почленно переводится в пространство оригиналов. Если изображение представляет собой *мероморфную функцию*, то доказательство выполнения условия (29.11) обычно весьма затруднительно, поэтому в технической литературе этим доказательством часто пренебрегают. Обычно ограничиваются тем, что выполняют только первые шаги метода, доходя до уравнения (29.10) включительно, а самое главное — проверку условия (29.11) не выполняют. Но в таком случае результат (29.12) имеет только эвристический смысл. Без доказательства выполнения условия (29.11) рассмотренный метод не точнее, чем более простой прием, изложенный на стр. 168 и основанный на разложении изображения в бесконечный ряд простейших дробей (на сумму главных частей) с последующим почленным переводом этого ряда в пространство оригиналов. Если нет возможности или желания доказать выполнение условия (29.11), то бессмысленно применять тонкий аппарат теории вычетов, так как достигаемая при этом большая точность не реальная, а только кажущаяся.

Так как всегда может случиться, что условие (29.11), следовательно, и равенство (29.12) вообще не выполняются, то те, кто почему-либо не доказывают условие (29.11), должны помнить, что изложенный метод обеспечивает нужный результат только в том случае, когда выполнение условия (29.11) может быть доказано.

3. Разложение в ряды по любым функциям

Рассмотренные выше разложения относятся к функциям специального вида, а именно к степенным и показательным функциям. Приведем теперь две теоремы, касающиеся разложения по любым функциям и находящие применение во многих практических случаях.

Теорема 29.3. Пусть функцию $F(s)$ можно представить в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geq x_0$ в виде бесконечного ряда, членами которого являются \mathcal{L} -изображения

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(s), \quad F_n(s) \longleftrightarrow f_n(t).$$

Конечно, при этом должны существовать все интегралы

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f_n(t) dt = F_n(s) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

в общей полуплоскости $\operatorname{Re} s \geq x_0$. Пусть, далее, выполняются еще два условия:

а) интегралы

$$\int_0^{\infty} e^{-st} |f_n(t)| dt = \Phi_n(s) \quad (n=0, 1, \dots)$$

также существуют в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geq x_0$;

б) ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x_0)$$

сходится.

В таком случае ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$$

сходится, и притом даже абсолютно, стремясь к $f(t)$ почти для всех $t \geq 0$, причем

$$\mathfrak{L}\{f\} = F(s),$$

т. е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(s) \xrightarrow{\bullet} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t).$$

Выражение «почти все t », взятое из теории интеграла Лебега, означает следующее: для всех t , за исключением, быть может, некоторого множества меры нуль, т. е. множества, точки которого можно покрыть счетной системой интервалов с произвольно малой суммой длин. В практических случаях полученный ряд сходится обычно для всех t .

Покажем применение этой теоремы не на каком-либо отдельном ряде, а на целом классе рядов.

Важный класс рядов образуют так называемые *факториальные ряды*, имеющие вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n!}{s(s+1) \cdots (s+n)}. \quad (29.13)$$

С этими рядами часто приходится иметь дело при интегрировании дифференциальных и разностных уравнений. Каждый член факториального ряда может рассматриваться как изображение, полученное в результате преобразования Лапласа. В самом деле,

$$\frac{n!}{s(s+1) \cdots (s+n)} \xrightarrow{\bullet} (1 - e^{-t})^n \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Так как соответствующий оригинал положителен, то

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st} |f_n(t)| dt &= \int_0^{\infty} e^{-st} |a_n| (1 - e^{-t})^n dt = \\ &= |a_n| \frac{n!}{s(s+1) \cdots (s+n)} = \Phi_n(s) \quad \text{при } \operatorname{Re} s > 0. \end{aligned}$$

Условие б) сформулированной выше теоремы требует, чтобы ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n| n!}{x_0(x_0+1) \cdots (x_0+n)} \quad (29.14)$$

сходился при некотором значении $x_0 > 0$. Но этот ряд совпадает с рядом (29.13) при $s = x_0 > 0$ после замены в последнем a_n на $|a_n|$. Существует весьма общая теорема, согласно которой факториальный ряд, подобно интегралу Лапласа, всегда сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \lambda$ (если только он вообще имеет точку сходимости) и, более того, сходится абсолютно по крайней мере для $\operatorname{Re} s > \lambda + 1$. Если выбрать значение x_0 так, чтобы оно было не только больше нуля, но и больше $\lambda + 1$, то для ряда (29.14) условие б) будет выполнено. Следовательно, факториальный ряд (29.13) всегда можно рассматривать как \mathfrak{L} -изображение (если только он где-либо сходится), и соответствующий этому ряду оригинал почти везде равен

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (1 - e^{-t})^n. \quad (29.15)$$

Но это есть степенной ряд относительно $1 - e^{-t}$. Если какой-либо степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

сходится при $z_0 > 0$, то он подавно сходится и при $0 \leq z \leq z_0$. Так как

$$0 \leq 1 - e^{-t} \leq 1 - e^{-t_0}$$

при $0 \leq t \leq t_0$, то из сходимости ряда (29.15) при $t_0 > 0$ следует его сходимость при $0 \leq t \leq t_0$. Таким образом, ряд (29.15) сходится для всех t , а не только для почти всех t .

Всякое \mathfrak{L} -изображение можно разложить при весьма общих допущениях в факториальный ряд. Коэффициенты этого ряда определяются следующим образом:

$$sF(s) \rightarrow a_0, \quad \frac{1}{1!} s(s+1) \left[F(s) - \frac{a_0}{s} \right] \rightarrow a_1,$$

$$\frac{1}{2!} s(s+1)(s+2) \left[F(s) - \frac{a_0}{s} - \frac{a_1 \cdot 1!}{s(s+1)} \right] \rightarrow a_2, \dots \quad \text{при } s \rightarrow \infty.$$

Если эти коэффициенты легко вычисляются, то ряд (29.15) дает удобную формулу для определения оригинала.

Этот способ, играющий в теории преобразования Лапласа важную роль¹⁾, заслуживает применения и в практике, где, однако, он до настоящего времени почти не используется.

Теорема 29.4. Пусть изображения $\mathfrak{L}\{f_1\} = F_1(s)$ и $\mathfrak{L}\{f_2\} = F_2(s)$ абсолютно сходятся. Далее пусть $\varphi(z_1, z_2)$ есть функция двух переменных, аналитическая в окрестности $z_1 = z_2 = 0$ и равная нулю в $z_1 = z_2 = 0$, т. е. функция

$$\varphi(z_1, z_2) = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} a_{n_1 n_2} z_1^{n_1} z_2^{n_2} \quad (\text{где } a_{00} = 0)$$

сходится при $|z_1| < r$, $|z_2| < r$. В таком случае функция $\varphi(F_1(s), F_2(s))$ представляет собой \mathfrak{L} -изображение, оригинал которого получается почленным переводом в пространство оригиналов ряда

$$\sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} a_{n_1 n_2} F_1(s)^{n_1} F_2(s)^{n_2}.$$

Аналогичная теорема имеет место и в том случае, когда функция φ зависит от одной или от более чем двух переменных.

Теорема 29.4 позволяет чрезвычайно просто доказать, например, правильность разложения (24.12) для функции $u_0(x, t)$, с которой мы встретились при решении уравнения теплопроводности. В § 24 мы имели изображение

$$U_0(x, s) = \frac{\operatorname{sh}(l-x)\sqrt{s}}{\operatorname{sh} l \sqrt{s}} = \frac{e^{(l-x)\sqrt{s}} - e^{-(l-x)\sqrt{s}}}{e^{l\sqrt{s}} - e^{-l\sqrt{s}}} = \frac{e^{-x\sqrt{s}} - e^{-(2l-x)\sqrt{s}}}{1 - e^{-2l\sqrt{s}}}.$$

Положив

$$F_1(s) = e^{-x\sqrt{s}}, \quad F_2(s) = e^{-(2l-x)\sqrt{s}},$$

мы представим это изображение в виде

$$U_0(x, s) = \frac{F_1(s) - F_2(s)}{1 - F_1(s)F_2(s)}.$$

Примем теперь, что

$$\begin{aligned} \varphi(z_1, z_2) &= \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1 z_2} = (z_1 - z_2) \sum_{n=0}^{\infty} z_1^n z_2^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z_1^{n+1} z_2^n - z_1^n z_2^{n+1}) \quad (\text{причем } |z_1 z_2| < 1). \end{aligned}$$

¹⁾ См. Doetsch G., Handbuch der Laplace-Transformation, т. 2, гл. II, Birkhäuser Verlag, Basel, 1955.

Эта функция удовлетворяет условиям теоремы 29.4. Следовательно, $U_0(x, s)$ представляет собой такое \mathfrak{L} -изображение, которое, будучи разложено в ряд

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} [e^{-(n+1)x} \sqrt{s} e^{-n(2l-x)} \sqrt{s} - e^{-nx} \sqrt{s} e^{-(n+1)(2l-x)} \sqrt{s}] = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} [e^{-(2nl+x)} \sqrt{s} - e^{-(2(n+1)l-x)} \sqrt{s}], \end{aligned}$$

может быть переведено в пространство оригиналов почленным преобразованием этого ряда, причем в результате получится ряд (24.12).

§ 30. Численное определение оригинала

Способы определения оригинала по изображению, изложенные в § 29, основаны на предположении, что изображение представляет собой функцию, теоретически настолько известную, что можно, например, определить ее особенности или разложить ее в ряд определенного вида. Тогда для оригинала можно получить выражение в общем виде, пригодном, например, для таких теоретических целей, как исследование поведения оригинала при малых или больших t . Однако во многих случаях требуется знать только численные значения оригинала в некоторых промежутках. Конечно, результаты, полученные в § 29, можно использовать также для численных расчетов, но такой путь является с точки зрения практики окольным, поэтому нерациональным. Наиболее рациональным путем является *численное определение оригинала $f(t)$ непосредственно по некоторому количеству численных значений изображения $F(s)$ при помощи некоторой стандартной схемы*. Однако необходимо отдавать себе отчет, что такое вычисление оригинала связано с ненадежностью. В самом деле, небольшим изменениям изображения $F(s)$ может соответствовать значительное изменение оригинала $f(t)$ (обращение преобразования Лапласа не обладает свойством «устойчивости»). В этом можно убедиться из следующего примера. Оригиналу $f(t) = \sin \omega t$ соответствует изображение

$$\mathfrak{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Очевидно, что $|F(s)| < 1/\omega$ при $s > 0$, поэтому изображение $F(s)$ при $\omega \rightarrow \infty$ стремится равномерно к нулю. Напротив, оригинал $f(t) = \sin \omega t$ при $\omega \rightarrow \infty$ колеблется все быстрее и быстрее, сохраняя при этом неизменной свою амплитуду, равную единице. Следовательно, если изображению при большом ω сообщается малое возмущение, то оригинал $\sin \omega t$ может получиться сильно искаженным.

Предложено столь много способов численного определения оригинала по изображению, что нет возможности всем им уделить внимание. Мы ограничимся изложением только одного из них, довольно быстро дающего пригодное для практических целей численное выражение оригинала $f(t)$ и требующего для своего применения только обычного математического аппарата¹⁾.

Этот способ основан на следующих двух допущениях, не ограничивающих, однако, его общности: 1) Предполагается, что изображение $F(s)$ существует при $\operatorname{Re} s > 0$. Этого всегда можно достичь, если вместо изображения $F(s)$ рассматривать изображение $F(s+a)$ при достаточно большом a , что равносильно умножению оригинала $f(t)$ на e^{-at} . 2) Предполагается, что $f(+0) = 0$. Если это не имеет места, то следует определить $f(+0)$, пользуясь теоремой 32.2, и вычесть это значение из $f(t)$, что равносильно замене изображения $F(s)$ изображением $F(s) - f(+0)/s$.

Рассматриваемый способ дает для оригинала $f(t)$ выражение, для вычисления которого требуются только значения изображения $F(s)$ при равноотстоящих значениях $s = (2n+1)\sigma$, где σ есть произвольное число, большее нуля, а $n = 0, 1, \dots$ ²⁾. Прежде всего преобразуем интеграл Лапласа

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

посредством подстановки

$$e^{-\sigma t} = \cos \vartheta, \quad f(t) = f\left(-\frac{1}{\sigma} \ln \cos \vartheta\right) = \varphi(\vartheta), \quad (30.1)$$

в интеграл

$$\sigma F(s) = \int_0^{\pi/2} (\cos \vartheta)^{s/\sigma-1} \sin \vartheta \varphi(\vartheta) d\vartheta. \quad (30.2)$$

Тогда мы будем иметь

$$\sigma (F(2n+1)\sigma) = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} \vartheta \sin \vartheta \varphi(\vartheta) d\vartheta. \quad (30.3)$$

¹⁾ Этот способ предложен А. Папулисом; см. Papoulis A., A new method of inversion of the Laplace transform, Quarterly of applied mathematics 14 (1957), стр. 405—414. В этой же статье даны еще два способа численного определения оригинала, основанные на разложениях по функциям Лежандра и Лагерра. По поводу таких разложений см., например, Doetsch G., Handbuch der Laplace-Transformation, т. I, Birkhäuser Verlag, Basel, 1950, стр. 301.

²⁾ Для однозначного определения \mathfrak{F} -изображения достаточно задать его значения в последовательности равноотстоящих одна от другой точек, расположенных вдоль прямой, параллельной вещественной оси.

Такой вид интеграла наводит на мысль представить функцию $\varphi(\theta)$ в виде разложения в ряд Фурье по функциям $\sin(2\nu + 1)\theta$, образующим в промежутке $(0, \pi/2)$ полную ортогональную систему:

$$\varphi(\theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} \sin(2\nu + 1)\theta. \quad (30.4)$$

В самом деле, ядро интеграла (30.3) может быть представлено в виде линейной комбинации функций $\sin(2\nu + 1)\theta$:

$$\begin{aligned} \cos^{2n}\theta \sin\theta = \\ = 2^{-2n} \sum_{k=0}^n \left[\binom{2n}{k} - \binom{2n}{k-1} \right] \sin[2(n-k)+1]\theta, \text{ причем } \binom{2n}{-1} = 0. \end{aligned} \quad (30.5)$$

Внесем выражения (30.4) и (30.5) в интеграл (30.3). Так как

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2\mu + 1)\theta \sin(2\nu + 1)\theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{при } \mu \neq \nu, \\ \pi/4 & \text{при } \mu = \nu, \end{cases}$$

то при фиксированном n останутся только члены, для которых $\nu = n - k$ ($k = 0, \dots, n$), т. е.

$$\sigma F((2n+1)\sigma) = 2^{-2n} \frac{\pi}{4} \sum_{k=0}^n \left[\binom{2n}{k} - \binom{2n}{k-1} \right] c_{n-k},$$

или

$$\begin{aligned} \left[\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} \right] c_0 + \dots + \left[\binom{2n}{k} - \binom{2n}{k-1} \right] c_{n-k} + \dots + c_n = \\ = \frac{4^{n+1}}{\pi} \sigma F((2n+1)\sigma). \end{aligned} \quad (30.6)$$

Подставив в это равенство последовательно $n = 0, 1, \dots$, мы получим линейную рекуррентную систему уравнений

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{4}{\pi} \sigma F(\sigma), \\ c_0 + c_1 &= \frac{4^2}{\pi} \sigma F(3\sigma), \\ 2c_0 + 3c_1 + c_2 &= \frac{4^3}{\pi} \sigma F(5\sigma), \\ &\dots \end{aligned}$$

позволяющую легко вычислить величины c_{ν} . В таблице 30.1 даны значения коэффициентов при c_0, \dots, c_n для $n = 0, 1, 2, \dots, 6^*$.

*) Таблица взята из статьи А. Папулиса, цитированной в сноске 1 на стр. 177. А. Папулис приводит значения коэффициентов при c_{ν} для значений n до 10 включительно. В статье А. Папулиса для коэффициента при c_0 , соответствующего значению $n = 4$, дано неправильное значение 19 (вместо 14).

Таблица 30.1. Значения коэффициентов при c_n из уравнения (30.6)

n	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6
0	1						
1	1	1					
2	2	3	1				
3	5	9	5	1			
4	14	28	20	7	1		
5	42	90	75	35	9	1	
6	132	297	275	154	54	11	1

Взяв конечное число коэффициентов c_n , мы получим частичную сумму ряда (30.4), следовательно, приближенное значение функций $\varphi(\vartheta)$. Если требуется знать оригинал $f(t)$ для некоторых значений t , то следует вычислить $\varphi(\vartheta)$ для значений $\vartheta = \arccos e^{-\sigma t}$. Выбор значения σ обуславливается величиной промежутка, внутри которого необходимо вычислить значения оригинала $f(t)$; а именно, следует выбирать σ для малых t большим, а для больших t , наоборот, малым, так как при $t \rightarrow 0$ переменная $s \rightarrow \infty$, а при $t \rightarrow \infty$, наоборот, $s \rightarrow 0$ (см. теоремы 32.2 и 32.3).

§ 31. Определение максимума оригинала по известному изображению

В некоторых случаях представляет интерес не все поведение функции времени $f(t)$ в том или ином промежутке, а только ее абсолютный максимум. В качестве примера можно указать на случай, когда требуется выяснить, не превышает ли напряжение некоторого допустимого предела. В связи с этим возникает заманчивая задача определения максимума оригинала непосредственно по изображению, т. е. без вычисления оригинала. Однако эта задача достаточно трудная и поэтому нет ничего удивительного в том, что она до настоящего времени не решена. Даже если известно явное выражение функции $f(t)$, заданной на отрезке, то и в этом случае невозможно сразу определить абсолютный максимум. Сначала необходимо по правилам дифференциального исчисления определить нули производной $f'(t)$, затем найти те значения t , в которых производная не существует, и, наконец, вычислить значения функции $f(t)$ при найденных значениях t и на концах отрезка. Наибольшее из всех этих значений $f(t)$ и будет абсолютным максимумом.

Можно поставить более узкую задачу: по известному \mathfrak{L} -изображению $F(s)$ определить те значения t , при которых

оригинал $f(t)$ имеет относительные экстремумы. Эта задача может быть решена, если воспользоваться следующей теоремой¹⁾.

Теорема 31.1. Пусть $f(t)$ есть вещественная функция, n раз меняющая знак при значениях $t > 0$. В таком случае производные $F^{(k)}(s)$ для всех достаточно больших k имеют в точности n вещественных нулей. Если функция $f(t)$ меняет знак при t_0 , то производная $F^{(k)}(s)$ имеет нуль s_k , причем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{s_k} = t_0.$$

Необходимо иметь в виду, что для непрерывной функции значение аргумента, при котором происходит перемена знака, всегда является нулем, в то время как при нуле функция не обязательно должна менять знак.

Для наших целей применим эту теорему не к самой функции $f(t)$, а к ее производной $f'(t)$. Мы имеем

$$\mathfrak{L}\{f'\} = sF(s) - f(+0) = F_1(s),$$

причем начальное значение $f(+0)$ может быть определено согласно теореме 32.2 по изображению $F(s)$ как $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$. Следовательно, функцию $F_1(s)$ можно считать известной. Теперь

мы должны вычислить некоторое число производных $F_1^{(k)}(s)$ и для каждой производной найти нули $s_k^{(1)}, \dots, s_k^{(n)}$. Тогда предельные значения отношений $k/s_k^{(1)}, \dots, k/s_k^{(n)}$ дадут значения t_1, \dots, t_n , при которых производная $f'(t)$ меняет знак, т. е. имеет нули, а функция $f(t)$ обладает относительным максимумом или минимумом. (Точек перегиба с горизонтальной касательной при этих значениях t_1, \dots, t_n не может быть.) Сами значения функции $f(t)$ могут быть вычислены, например, способом, указанным в § 30.

Изложенный метод определения относительных экстремумов требует большой вычислительной работы и для некоторых функций представляет собой очень медленно сходящийся процесс. Однако имеются и такие функции, для которых сходимость получается хорошей. Для примера рассмотрим функцию

$$f(t) = te^{-t}.$$

Производная $f'(t) = e^{-t}(1-t)$ сразу показывает, что единственный максимум имеется при $t_0 = 1$. Если бы было известно только \mathfrak{L} -изображение функции $f(t)$, т. е.

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^2},$$

¹⁾ Доказательство можно найти в статье: Widder D. V., The inversion of the Laplace integral and the related moment problem, Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934), стр. 107—200 (стр. 156).

но не сама функция $f(t)$, то прежде всего следовало бы определить

$$f(+0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{(s+1)^2} = 0$$

и затем рассмотреть функцию

$$F_1(s) = \frac{s}{(s+1)^2}.$$

Согласно правилу Лейбница,

$$F_1^{(k)} = s \frac{d^k}{ds^k} (s+1)^{-2} + k \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} (s+1)^{-2}.$$

Так как

$$\frac{d^k}{ds^k} (s+1)^{-2} = (-1)^k (k+1)! (s+1)^{-(k+2)},$$

то

$$\begin{aligned} F_1^{(k)} &= s (-1)^k (k+1)! (s+1)^{-(k+2)} + k (-1)^{k-1} k! (s+1)^{-(k+1)} = \\ &= (-1)^{k-1} k! \frac{k-s}{(s+1)^{k+2}}. \end{aligned}$$

Следовательно, каждая k -я производная имеет единственный нуль $s_k = k$, и поэтому $k/s_k = 1$. Таким образом, в рассматриваемом случае все приближения дают точные значения

$$\frac{k}{s_k} = t_0.$$

ГЛАВА 7

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

§ 32. Некоторые теоремы о предельных значениях

Часто решение $y(t)$ дифференциального уравнения в явном виде, т. е. *полная* картина исследуемого процесса, не представляет особого интереса для практики. Вместо такого решения практику достаточно знать только некоторые *свойства* функции $y(t)$, например, ее поведение вблизи $t = 0$, т. е. непосредственно после «включения», или вблизи $t = \infty$, т. е. для больших t , когда в особенности важно выяснить, устойчиво или неустойчиво состояние системы. Естественно, что было бы весьма желательно выявлять подобного рода свойства функции $y(t)$ только на основе рассмотрения ее изображения, т. е. без составления явного выражения функции $y(t)$. С примером возможности такого определения свойства оригинала мы уже встретились в § 28, когда в результате вычисления комплексного интеграла (28.1) путем деформирования пути интегрирования получили формулу (28.4); в состав этой формулы вошел интеграл Лапласа, который позволил получить представление о поведении оригинала при больших значениях аргумента. Наоборот, могут быть и такие случаи, когда желательно установить свойства изображения непосредственно из поведения оригинала.

В переводе на математический язык сказанное выше означает следующее: можно ли на основании свойств некоторой функции судить об *асимптотическом поведении* другой функции, связанной с первой прямым или обратным преобразованием Лапласа, при приближении аргумента последней функции к нулю или к бесконечности. Прежде чем заняться этим вопросом, приведем несколько простых теорем, часто очень полезных в практических применениях.

Теорема 32.1. *Все \mathfrak{L} -изображения $F(s)$ обладают следующим общим свойством: они стремятся к нулю, когда переменная s , пробегая вещественные значения, стремится к $+\infty$; это свойство сохраняется даже в том случае, когда s стремится к ∞*

вдоль луча комплексной плоскости, образующего с положительной вещественной осью угол, по абсолютному значению меньший $\pi/2$.

Сформулированная теорема дает *необходимое* условие, которому должно удовлетворять каждое \mathfrak{L} -изображение; часто она позволяет непосредственно установить, что та или иная функция не может представлять собой результат преобразования Лапласа какой-либо исходной функции. Так, например, сразу можно сказать, что постоянная $c \neq 0$ или степень s^α с положительным α не могут быть \mathfrak{L} -изображениями никаких исходных функций.

Однако условие $F(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow +\infty$ ни в коем случае *не является достаточным* для того, чтобы функция $F(s)$ представляла собой \mathfrak{L} -изображение. Так, например, функция e^{-s} стремится к нулю на каждом луче, наклоненном к положительной вещественной оси на угол, меньший $\pi/2$, но тем не менее она не является \mathfrak{L} -изображением никакой исходной функции.

Теорема 32.2 (теорема о начальном значении). *Если $\lim_{t \rightarrow 0} y(t)$ существует, то*

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s).$$

Эта теорема дает возможность, зная только изображение $Y(s)$, определить $\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = y(+0)$, но только в том случае, когда заранее известно, что $y(+0)$ существует [хотя само значение $y(+0)$ неизвестно].

Однако возможны случаи, когда существует $\lim_{s \rightarrow \infty} sY(s)$, но не существует $\lim_{t \rightarrow 0} y(t)$. Например, оригиналу

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \cos \frac{1}{t}$$

соответствует изображение

$$Y(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}} e^{-\sqrt{2s}} \cos \sqrt{2s}.$$

Очевидно, что $\lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = 0$, но $\lim_{t \rightarrow 0} y(t)$ не существует.

Теорема 32.3 (теорема о конечном значении). *Если $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ существует, то*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s).$$

Эта теорема позволяет, имея изображение $Y(s)$, определить $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y(+\infty)$, если только заранее известно, что $y(+\infty)$ существует.





При пользовании этой теоремой необходимо соблюдать ту же предосторожность, как и при пользовании теоремой 32.2. Например, оригиналу

$$y(t) = \sin t$$

соответствует изображение

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Очевидно, что $\lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = 0$, но $y(+\infty)$ не существует.

§ 33. Общие понятия об асимптотическом представлении и асимптотическом разложении функций

Если функция $\varphi(z)$ при приближении к точке z_0 (которая может быть также бесконечно удаленной точкой) стремится к предельному значению l , то можно сказать, что она ведет себя вблизи z_0 как постоянная l . Однако часто возникает необходимость еще более точного описания функции $\varphi(z)$. Так, например, $\sin z$ стремится к нулю при $z \rightarrow 0$, но значительно важнее то обстоятельство, что $\sin z$ при $z \rightarrow 0$ изменяется так же, как и z , т. е. что

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

Иногда функция $\varphi(z)$ вообще не имеет предельного значения при $z \rightarrow z_0$, но, несмотря на это, ее поведение здесь может быть описано другой, более простой функцией. Так, например, функция

$$\frac{2z^2 + 3z + 4}{5z + 6}$$

при $z \rightarrow \infty$ не имеет предельного значения, но она изменяется здесь так же, как функция $2z/5$ (ведет себя при приближении к бесконечности как $2z/5$), т. е.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z^2 + 3z + 4}{5z + 6} : \frac{2}{5} z = 1.$$

Вообще говорят, что функция $\varphi(z)$ ведет себя при $z \rightarrow z_0$ так же, как функция сравнения $\psi(z)$, или, иначе, что функция $\varphi(z)$ при $z \rightarrow z_0$ представляется асимптотически функцией $\psi(z)$, если имеет место соотношение

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \rightarrow 1 \quad \text{при } z \rightarrow z_0.$$

Записывается это следующим образом:

$$\varphi(z) \sim \psi(z) \quad \text{при } z \rightarrow z_0.$$

В некоторых случаях возможно подобрать для функции $\varphi(z)$ не одну функцию сравнения, а последовательность функций сравнения, имеющих вид

$$\psi_0(z), \quad \psi_0(z) + \psi_1(z), \quad \psi_0(z) + \psi_1(z) + \psi_2(z), \dots,$$

и представляющих с возрастанием числа членов функцию $\varphi(z)$ все «лучше и лучше». Точнее, это означает следующее. Если составление функций сравнения доведено до n членов, т. е. до

$$\sum_{v=0}^{n-1} \psi_v(z),$$

то разность между $\varphi(z)$ и этой суммой изменяется так же, как ближайший следующий член $\psi_n(z)$ (в смысле определения, сделанного выше), т. е.

$$\varphi(z) - \sum_{v=0}^{n-1} \psi_v(z) \sim \psi_n(z) \quad \text{при } z \rightarrow z_0. \quad (33.1)$$

Достигнув определенной степени приближения посредством функции $\sum_{v=0}^{n-1} \psi_v(z)$ и получив таким путем «остаток», т. е. разность между заданной функцией и функцией сравнения, мы можем искать для остатка свою функцию сравнения, чтобы использовать ее затем для следующего улучшения приближения.

Соотношение (33.1) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\varphi(z) - \sum_{v=0}^{n-1} \psi_v(z)}{\psi_n(z)} \rightarrow 1,$$

или

$$\frac{\varphi(z) - \sum_{v=0}^{n-1} \psi_v(z)}{\psi_n(z)} - \frac{\psi_n(z)}{\psi_n(z)} \rightarrow 0,$$

откуда

$$\frac{\varphi(z) - \sum_{v=0}^n \psi_v(z)}{\psi_n(z)} \rightarrow 0. \quad (33.2)$$

Пусть отношение $f_1(z)/f_2(z)$ стремится к нулю; запишем это в виде равенства

$$f_1(z) = o(f_2(z)),$$

которое должно означать, что порядок величины функции $f_1(z)$ меньше, чем функции $f_2(z)$. Применяв такую запись для

соотношения (33.2), мы получим

$$\varphi(z) - \sum_{v=0}^n \psi_v(z) = o(\psi_n(z)) \quad \text{при } z \rightarrow z_0. \quad (33.3)$$

Следовательно, порядок величины «остатка», или «ошибки», возникающей при замене функции $\varphi(z)$ суммой членов $\psi_v(z)$, меньше, чем порядок величины последнего использованного члена $\psi_n(z)$.

Если можно найти сколь угодно большое число функций $\psi_v(z)$, обладающих свойством (33.1) или (33.3), то говорят, что функция $\varphi(z)$ имеет при $z \rightarrow z_0$ асимптотическое разложение

$$\sum_{v=0}^{\infty} \psi_v(z),$$

что записывается следующим образом:

$$\varphi(z) \sim \sum_{v=0}^{\infty} \psi_v(z) \quad \text{при } z \rightarrow z_0.$$

Примерами наиболее часто встречающихся асимптотических разложений могут служить: для конечного z_0 — ряды по возрастающим степеням $z - z_0$ с любыми, в том числе и не целочисленными показателями:

$$\varphi(z) \sim \sum_{v=0}^{\infty} c_v (z - z_0)^{\lambda_v} \quad (-N < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots \rightarrow +\infty); \quad (33.4)$$

для $z_0 = \infty$ — ряды по убывающим степеням z с любыми показателями:

$$\varphi(z) \sim \sum_{v=0}^{\infty} \frac{c_v}{z^{\lambda_v}} \quad (-N < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots \rightarrow +\infty). \quad (33.5)$$

Для таких рядов особенно отчетливо видно, какой смысл имеет асимптотическое разложение. Так, например, в случае разложения (33.5) мы имеем

$$\varphi(z) - \sum_{v=0}^n \frac{c_v}{z^{\lambda_v}} = o\left(\frac{1}{z^{\lambda_n}}\right),$$

или

$$z^{\lambda_n} \left[\varphi(z) - \sum_{v=0}^n \frac{c_v}{z^{\lambda_v}} \right] \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty.$$

Последнее соотношение показывает, что ошибка

$$\varphi(z) - \sum_{v=0}^n \frac{c_v}{z^{\lambda_v}}$$

не просто стремится к нулю, но стремится столь сильно, что даже ее произведение на z^{λ_n} также стремится к нулю.

Теорема 33.1. Если ряды (33.4) и (33.5) абсолютно сходятся внутри и соответственно вне некоторого круга, то они являются одновременно и асимптотическими разложениями.

К числу основных свойств преобразования Лапласа принадлежат следующие: асимптотическому разложению оригинала при $t = 0$ соответствует некоторое асимптотическое разложение изображения при $s \rightarrow \infty$ и, наоборот, асимптотическому разложению изображения при конечном s_0 соответствует некоторое асимптотическое разложение оригинала при $t \rightarrow \infty$ ¹⁾. Рассмотрению этих свойств посвящены два следующих параграфа. В практических применениях обычно бывает так, что исходный ряд дает не только асимптотическое разложение, но, кроме того, является даже сходящимся. В связи с этим при формулировке приводимых в § 34 и 35 теорем мы ограничимся только таким случаем.

§ 34. Асимптотическое разложение изображения

Начнем с составления асимптотического разложения для изображения, поскольку такое составление осуществляется особенно просто.

Теорема 34.1. Пусть изображение $\mathfrak{F}\{f\} = F(s)$ где-либо сходится. Если оригинал $f(t)$ может быть разложен в окрестности точки $t = 0$ в абсолютно сходящийся ряд вида

$$f(t) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v t^{\lambda_v} \quad (-1 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots \rightarrow \infty),$$

то изображение $F(s)$ имеет при $s \rightarrow \infty$ асимптотическое разложение

$$F(s) \sim \sum_{v=0}^{\infty} c_v \frac{\Gamma(\lambda_v + 1)}{s^{\lambda_v + 1}}.$$

Ряд для $F(s)$ получается почленным переходом от ряда $f(t)$ путем преобразования Лапласа (см. пример 6 в § 3). В связи

¹⁾ Теоремы 32.3 и 32.4 являются простейшими следствиями этого свойства. В самом деле, обе эти теоремы можно сформулировать в терминах настоящего параграфа следующим образом: из $g(t) \sim l$ при $t \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) вытекает, что $Y(s) \sim l/s$ при $s \rightarrow \infty$ ($s \rightarrow 0$).

с этим возникает вопрос, всегда ли возможен такой почленный переход от ряда в пространстве оригиналов к ряду в пространстве изображений. Если рассматривать ряды только с точки зрения их сходимости, то уже простейшие примеры показывают, что такой почленный переход возможен не всегда. Так, например, для функции

$$f(t) = e^{-t^2}$$

интеграл Лапласа существует во всей плоскости s , и степенной ряд

$$e^{-t^2} = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{t^{2v}}{v!}$$

сходится при всех t . Однако если мы применим к этому ряду преобразование Лапласа и выполним его для каждого члена в отдельности, то получим ряд

$$\sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{(2v!)}{v!} \frac{1}{s^{2v+1}},$$

который не сходится ни для какого s , так как абсолютные значения его членов увеличиваются, начиная с определенного номера для любого s . Тем не менее полученный ряд не является совсем бессмысленным. В самом деле, на основании сформулированной выше теоремы он представляет собой асимптотическое разложение изображения $F(s)$ при $s \rightarrow \infty$. Заметим кстати, что функция

$$F(s) = e^{(s/2)^2} \int_{s/2}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

часто встречается в приложениях.

Приведем пример, показывающий целесообразность асимптотического разложения изображения. В § 28 мы вычислили комплексный интеграл, осуществляющий обратное преобразование Лапласа, изменив надлежащим образом путь интегрирования, и получили формулу (28.4). Эта формула представляет собой разложение температуры проводника тепла на установившиеся колебания с той же частотой, как у косинусоидального колебания, приложенного к границе проводника, и на затухающие колебания, определяемые интегралом Лапласа и выражаемые посредством формулы

$$F(s) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{t}{t^2 + \omega^2} \sin x \sqrt{t} dt. \quad (34.1)$$

На основании теоремы 32.1 мы знаем, что $F(s)$ стремится к нулю при $s \rightarrow \infty$. Если необходимо знать более точно, как сильна сходимость функции $F(s)$ к нулю, то следует воспользоваться теоремой настоящего параграфа. Мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{t}{t^2 + \omega^2} &= \frac{t}{\omega^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{\omega}\right)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{\omega^{2n+2}} = \\ &= \frac{t}{\omega^2} - \frac{t^3}{\omega^4} + \frac{t^5}{\omega^6} - \dots \quad \text{при } |t| < \omega, \end{aligned}$$

$$\sin x \sqrt{t} = \frac{x}{1!} t^{1/2} - \frac{x^3}{3!} t^{3/2} + \frac{x^5}{5!} t^{5/2} - \dots \quad \text{при всех } t,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \frac{t}{t^2 + \omega^2} \sin x \sqrt{t} &= \\ &= \frac{x}{\omega^2} t^{3/2} - \frac{x^3}{3! \omega^2} t^{5/2} + \left(\frac{x^5}{5! \omega^2} - \frac{x}{\omega^4} \right) t^{7/2} + \dots \quad \text{при } |t| < \omega. \quad (34.2) \end{aligned}$$

Выполнив необходимые вычисления, мы получим асимптотическое разложение изображения $F(s)$ при $s \rightarrow \infty$ в следующем виде:

$$F(s) \sim -\frac{1}{\pi} \left\{ \frac{x}{\omega^2} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{s^{5/2}} - \frac{x^3}{3! \omega^2} \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{s^{7/2}} + \left(\frac{x^5}{5! \omega^2} - \frac{x}{\omega^4} \right) \frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}{s^{9/2}} + \dots \right\}. \quad (34.3)$$

Это разложение позволяет видеть такие свойства функции $F(s)$, которые нельзя обнаружить из ее определения (34.1), а именно: функция $F(s)$ стремится к нулю так же, как величина $\text{const}/s^{5/2}$; ошибка, возникающая при замене функции $F(s)$ функцией сравнения, стремится к нулю так же, как величина $\text{const}/s^{7/2}$, и т. д.

§ 35. Асимптотическое разложение оригинала

Необходимость определения оригинала по изображению возникает значительно чаще, чем обратная задача. Объясняется это тем, что при решении всех функциональных уравнений посредством преобразования Лапласа решается всегда сначала изображающее уравнение, а уже затем для полученного изображения отыскивается оригинал. Задачей определения оригинала по изображению мы подробно занимались в гл. 6. Если методы, указанные там, не приводят к результату, то не остается ничего другого, как удовлетвориться по крайней мере асимптотическим разложением оригинала. Впрочем, во многих случаях практик даже и не заинтересован в том, чтобы иметь полное решение; вместо этого ему вполне достаточно знать, как ведет

себя решение при больших t , например, остается ли оно при таких t ограниченным, т. е. имеет ли место устройчивость. В случае более сложных изображений, получающихся, например, при решении краевых задач для уравнений в частных производных, приводимая ниже теорема, основанная на сравнительно простых допущениях, часто является единственным средством для получения некоторого представления о решении. Этой теоремой следовало бы пользоваться в практических расчетах значительно чаще, чем это делается в современной литературе.

Если желательно получить представление об оригинале $y(t)$ по изображению $Y(s)$, то прежде всего необходимо выразить $y(t)$ через $Y(s)$ посредством формулы обращения

$$y(t) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\omega}^{x+j\omega} e^{ts} Y(s) ds. \quad (35.1)$$

Пусть это сделано. Функция $Y(s)$ как результат преобразования Лапласа является аналитической функцией в правой полуплоскости, в которой проходит также путь интегрирования. Все особые точки функции $Y(s)$ лежат в левой полуплоскости. Пусть из

всех особых точек точка α_0 расположена наиболее далеко вправо (сначала мы будем предполагать, что имеется только одна такая точка, т. е. что не существует нескольких особых точек с наибольшей вещественной частью).

Допустим, что можно изменить прямолинейный путь интегрирования, определяемый абсциссой x , угловым путем \mathcal{C} , состоящим из двух лучей, образующих с положительной вещественной осью углы $\pm \vartheta$ ($\pi/2 < \vartheta \leq \pi$), и из круговой дуги, огибающей особую точку α_0 справа (рис. 35.1). Такую замену безусловно можно сделать, если изображение $Y(s)$ в области между старым и новым путями интегрирования равномерно стремится к нулю при $s \rightarrow \infty$.

В самом деле, вообразим, что оба пути интегрирования соединены один с другим двумя большими круговыми дугами сверху и снизу; так как в ограниченной таким образом области функция $e^{ts}Y(s)$ аналитическая, то интеграл от нее, взятый по замкнутому контуру, равен нулю. Если мы теперь будем стремить радиус проведенных круговых дуг к бесконечности, то на основании теоремы 28.2 интегралы, взятые вдоль этих дуг, будут стремиться к нулю. В результате

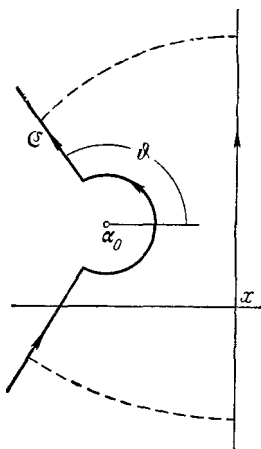


Рис. 35.1. Замена прямолинейного пути интегрирования угловым путем.

у нас останется только равная нулю сумма интеграла, взятого вдоль старого пути интегрирования снизу вверх, и интеграла, взятого вдоль нового пути интегрирования сверху вниз. Но это означает, что оба эти интеграла, если в каждом из них путь интегрирования пробегается снизу вверх, равны один другому.

На основании этого результата будем считать, что для определения оригинала $y(t)$ можно пользоваться вместо формулы (35.1) также формулой

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\mathfrak{C}} e^{ts} Y(s) ds. \quad (35.2)$$

В таком случае можно сформулировать следующую теорему:

Теорема 35.1. Если изображение $Y(s)$ можно разложить в окрестности точки α_0 в абсолютно сходящийся степенной ряд

$$Y(s) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v (s - \alpha_0)^{\lambda_v} \quad (-N < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots \rightarrow \infty) \quad (35.3)$$

с произвольными показателями (не обязательно целочисленными), то оригинал $y(t)$, определяемый формулой (35.2), можно представить при $t \rightarrow \infty$ в виде асимптотического разложения

$$y(t) \sim e^{\alpha_0 t} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{c_v}{\Gamma(-\lambda_v)} t^{-\lambda_v-1}, \quad (35.4)$$

в котором необходимо положить

$$\frac{1}{\Gamma(-\lambda_v)} = 0,$$

когда λ_v принимает значения 0, 1, 2, ... [как известно, $\Gamma(0) = \Gamma(-1) = \Gamma(-2) = \dots = \infty$].

Следовательно, те члены ряда, представляющего изображение $Y(s)$, которые имеют положительные целочисленные показатели, ничего не вносят в асимптотическое разложение оригинала $y(t)$. Такая роль этих членов объясняется тем, что они в своей совокупности представляют аналитическую функцию, не влияющую как-либо на поведение функции $Y(s)$ в окрестности особой точки α_0 [именно это свойство функции $Y(s)$ в точке α_0 и является источником асимптотического поведения функции $y(t)$].

Первые показатели степени λ_v могут быть отрицательными. Для них мы имеем соответствие

$$(s - \alpha_0)^{\lambda_v} \rightarrow \frac{t^{-\lambda_v-1}}{\Gamma(-\lambda_v)} e^{\alpha_0 t}.$$

Для положительных λ_v , которые нас главным образом и интересуют, это соответствие не имеет места, так как функция $t^{-\lambda_v-1}$ при $t=0$ неинтегрируема. Если же считать, что указанное соответствие формально применимо и для положительных λ_v , то тогда на ряд (35.4) можно смотреть как на результат почленного перехода от ряда (35.3) в пространство оригиналов.

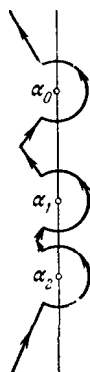


Рис. 35.2. Угловой путь интегрирования при наличии нескольких особых точек.

В приложениях показатели λ_v чаще всего равны кратному от $1/2$. В этом случае с целью облегчения вычисления коэффициентов разложения (35.4) можно воспользоваться для $\lambda_v = v - 1/2$ формулой

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - v\right)} = \frac{(-1)^v}{\pi} \Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^v (2v)!}{4^v v! \sqrt{\pi}}. \quad (35.5)$$

Рассмотрим теперь случай, когда *наибольшей вещественной частью обладают несколько особых точек* функции $Y(s)$, например точки $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$. Прежде всего необходимо выяснить, можно ли заменить в формуле (35.1) прямолинейный путь интегрирования угловым путем, состоящим из двух наклоненных один к другому лучей и трех небольших круговых дуг, обходящих особые точки справа (рис. 35.2). Конечно, как и прежде, для возможности такой замены достаточно, чтобы изображение $Y(s)$ равномерно стремилось к нулю при $s \rightarrow \infty$ в области между обоими путями интегрирования. Если изображение $Y(s)$ можно разложить в окрестности точки α_0 в ряд по степеням $s - \alpha_0$, в окрестности точки α_1 — в ряд по степеням $s - \alpha_1$ и в окрестности точки α_2 — в ряд по степеням $s - \alpha_2$, то для получения асимптотического разложения оригинала $y(t)$ при $t \rightarrow \infty$ следует к каждому из трех перечисленных рядов применить почленно обратное преобразование Лапласа и затем полученные результаты наложить один на другой. При этом следует иметь в виду, что показательные множители $e^{\alpha_0 t}, e^{\alpha_1 t}, e^{\alpha_2 t}$, стоящие перед рядами, хотя и различны, но все имеют одно и то же абсолютное значение, так как

$$\operatorname{Re} \alpha_0 = \operatorname{Re} \alpha_1 = \operatorname{Re} \alpha_2.$$

Эти показательные множители при $t \rightarrow +\infty$ возрастают или убывают в зависимости от того, больше или меньше нуля $\operatorname{Re} \alpha_0$, и притом значительно быстрее возрастания или убывания степеней $t^{-\lambda_v-1}$ (возрастание имеет место для $\lambda_v < -1$, а убывание — для $\lambda_v > -1$). Следовательно, показательные множители $e^{\alpha_0 t}, e^{\alpha_1 t}, e^{\alpha_2 t}$ оказывают решающее влияние на поведение оригинала $y(t)$.

Если изображение $Y(s)$ имеет еще другие особенности, лежащие дальше влево, то для асимптотического разложения оригинала $y(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ они не играют никакой роли¹⁾.

Для иллюстрации изложенного метода рассмотрим опять односторонне бесконечно длинный проводник тепла, на конце которого приложена температура $\cos \omega t$. На основании формулы (28.2) температура в точке x в момент времени t равна

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} e^{ts} \frac{s}{s^2 + \omega^2} e^{-x\sqrt{s}} ds \quad (\alpha > 0).$$

Если мы вырежем около отрицательной вещественной оси из плоскости s узкий угол, то при $x > 0$ функция $e^{-x\sqrt{s}}$ во всей остальной плоскости будет равномерно стремиться к нулю при $s \rightarrow \infty$, так как там $\operatorname{Re} \sqrt{s} > 0$. Второй множитель $s/(s^2 + \omega^2)$ стремится равномерно к нулю во всей плоскости. Следовательно, можно без всяких сомнений заменить прямолинейный путь интегрирования угловым путем, состоящим из двух наклоненных один к другому лучей и трех небольших круговых дуг, обходящих справа три особые точки: оба полюса $s = \pm j\omega$ и точку разветвления $s = 0$. Все эти точки имеют одинаковую вещественную часть, равную нулю. В окрестности каждой из этих точек изображение $Y(s)$ можно разложить в степенной ряд. Рассмотрим сначала полюс $s = j\omega$ и представим изображение $Y(s)$ в виде

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} e^{-x\sqrt{s}} = \frac{1}{s - j\omega} \frac{s}{s + j\omega} e^{-x\sqrt{s}} = \frac{1}{s - j\omega} Z(s).$$

Тогда функция $Z(s)$ в окрестности точки $s = j\omega$ будет аналитической и поэтому ее можно разложить здесь в ряд Тэйлора

$$Z(s) = Z(j\omega) + \frac{Z'(j\omega)}{1!} (s - j\omega) + \frac{Z''(j\omega)}{2!} (s - j\omega)^2 + \dots$$

После деления этого ряда на $s - j\omega$ [это необходимо для получения функции $Y(s)$] все члены, начиная с третьего, будут иметь целочисленные показатели, большие нуля, а второй член будет иметь показатель, равный нулю. Все такие члены при переходе к ряду вида (35.4) выпадут, следовательно, необходимо учитывать только первый член, равный

$$\frac{Z(j\omega)}{s - j\omega} = \frac{j\omega}{j\omega + j\omega} e^{-x\sqrt{j\omega}} \frac{1}{s - j\omega} = \frac{e^{-x\sqrt{j\omega}}}{2(s - j\omega)}.$$

¹⁾ В технической литературе иногда ошибочно утверждается противоположное.

Так как для этого члена $\lambda_0 = -1$, то соответствующий оригинал равен

$$\frac{1}{2} e^{-x \sqrt{j\omega}} e^{j\omega t}. \quad (35.6)$$

Аналогичным образом разложение изображения в ряд в окрестности точки $s = -j\omega$ и последующий переход в пространство оригиналов дают

$$\frac{1}{2} e^{-x \sqrt{-j\omega}} e^{-j\omega t}. \quad (35.7)$$

В точке разветвления $s = 0$ мы имеем (ср. со сказанным на стр. 189)

$$\begin{aligned} \frac{s}{s^2 + \omega^2} &= \frac{s}{\omega^2} - \frac{s^3}{\omega^4} + \frac{s^5}{\omega^6} - \dots, \\ e^{-x \sqrt{s}} &= 1 - \frac{x}{1!} s^{1/2} + \frac{x^2}{2!} s - \frac{x^3}{3!} s^{3/2} + \frac{x^4}{4!} s^2 - \dots, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{s}{s^2 + \omega^2} e^{-x \sqrt{s}} &= \frac{1}{\omega^2} s - \frac{x}{1! \omega^2} s^{3/2} + \frac{x^2}{2! \omega^2} s^2 - \frac{x^3}{3! \omega^2} s^{5/2} + \\ &+ \left(\frac{x^4}{4! \omega^2} - \frac{1}{\omega^4} \right) s^3 + \dots \end{aligned}$$

При почленном переходе в пространство оригиналов выпадают все члены с целочисленными показателями и получается асимптотическое разложение

$$- \frac{x}{1! \omega^2} \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)} t^{-5/2} - \frac{x^3}{3! \omega^2} \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)} t^{-7/2} + \dots,$$

которое, если воспользоваться формулой (35.5), можно представить в виде

$$- \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{x}{\omega^2} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{t^{5/2}} - \frac{x^3}{3! \omega^2} \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{t^{7/2}} + \dots \right\}. \quad (35.8)$$

Наложив одно на другое асимптотические разложения (35.6), (35.7) и (35.8), мы получим полное асимптотическое разложение оригинала $u(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$. Функции (35.6) и (35.7) можно объединить так же, как и на стр. 161, в одну функцию вещественного переменного

$$e^{-x \sqrt{\omega/2}} \cos\left(\omega t - x \sqrt{\frac{\omega}{2}}\right).$$

В результате мы получим для решения $u(x, t)$ такую же формулу, как и ранее выведенную формулу (28.4) с заменой в последней интеграла Лапласа его выражением (34.3). Однако теперешний вывод значительно более цельный и более простой.

§ 36. Исследование устойчивости

Если физическая система описывается некоторыми функциональными уравнениями (дифференциальными, разностными или комбинацией таких уравнений), то во многих отраслях знания, например в технике регулирования, на первом плане стоит вопрос: является ли решение уравнений *устойчивым*, т. е. стремится ли оно при возрастании времени t к какому-либо конечному предельному значению или по крайней мере остается ли оно ограниченным. Ответ на этот вопрос дает асимптотическое поведение функции, определяющей решение, при $t \rightarrow \infty$. Если задача решается посредством преобразования Лапласа, то всегда желательно получить представление об асимптотическом поведении оригинала непосредственно по изображению, т. е. не прибегая к явному определению оригинала. Для этой цели весьма полезна теорема 35.1, приведенная в предыдущем параграфе. Вообще можно было бы просто сослаться на эту теорему, но поскольку в литературе исследование устойчивости на основе свойств изображения выполняется часто довольно беззаботно, приведем здесь несколько дополнительных соображений.

Если физическая система описывается *обыкновенным* дифференциальным уравнением, то никаких сложностей при исследовании устойчивости вообще не возникает. Примем для большей определенности, что система вначале находится в покое, т. е. что все начальные значения $y(+0)$, $y'(+0)$, ..., $y^{(n-1)}(+0)$ равны нулю. Кроме того, предположим, что возбуждающей, или входной, функцией является единичный скачок $u(t)$, следовательно, решением будет отклик на единичный скачок, или переходная функция. Согласно формуле (13.2), решение изображающего уравнения имеет вид

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{p(s)},$$

где $p(s)$ есть многочлен, определяемый равенством (12.4). Функция $Y(s)$ представляет собой дробно-рациональную функцию, которую можно разложить на простейшие дроби. Если все нули многочлена $p(s)$ простые, то таким разложением будет

$$Y(s) = \sum_v \frac{b_v}{s - \alpha_v}; \quad (36.1)$$

если же имеются нули кратности l_v , то мы будем иметь

$$Y(s) = \sum_v \left(\frac{b_v^{(1)}}{s - \alpha_v} + \dots + \frac{b_v^{(l_v)}}{(s - \alpha_v)^{l_v}} \right). \quad (36.2)$$

Представив решение изображающего уравнения в таком виде, мы можем сразу перевести его в пространство оригиналов, где получим

$$y(t) = \sum_v b_v e^{\alpha_v t}, \quad (36.3)$$

или соответственно

$$y(t) = \sum_v \left(b_v^{(1)} + \frac{b_v^{(2)}}{1!} t + \dots + \frac{b_v^{(l_v)}}{(l_v-1)!} t^{l_v-1} \right) e^{\alpha_v t}. \quad (36.4)$$

Решение $y(t)$ принято называть *устойчивым*, если оно при $t \rightarrow \infty$ стремится к своему начальному значению, равному нулю (собственная устойчивость), или к какому-либо другому постоянному значению (несобственная устойчивость) или, наконец, если оно колеблется в конечных границах (квазиустойчивость). В противном случае оно называется *неустойчивым*. Решающее влияние на поведение решения $y(t)$ имеет нуль α_0 с наибольшей вещественной частью (будем сначала считать, что имеется только один такой нуль). В самом деле, в таком случае

$$|e^{\alpha_v t}| = e^{\operatorname{Re} \alpha_v t}$$

и

$$|e^{\alpha_v t}| < |e^{\alpha_0 t}| \quad \text{при } v \neq 0,$$

и решение $y(t)$ будет:

при $\operatorname{Re} \alpha_0 > 0$ *неустойчивым*;

при $\operatorname{Re} \alpha_0 < 0$ *устойчивым*;

при $\operatorname{Re} \alpha_0 = 0$ в случае $\alpha_0 = 0$ *несобственно устойчивым*,

если нуль α_0 простой,
неустойчивым, если нуль α_0
кратный;

в случае $\operatorname{Im} \alpha_0 \neq 0$ *квазиустойчивым*, если нуль α_0
простой,
неустойчивым, если нуль α_0
кратный.

Аналогичным образом определяется поведение решения $y(t)$ и в том случае, когда несколько нулей многочлена имеют одинаковую наибольшую вещественную часть. А именно, *решение $y(t)$ только тогда будет устойчивым* (в указанном выше смысле), *когда ни один из нулей знаменателя функции $Y(s)$, т. е. ни один из полюсов функции $Y(s)$, не лежит в правой полуплоскости, а нули, расположенные на мнимой оси, являются простыми.*

Для того чтобы обнаружить все эти свойства решения $y(t)$, совсем не требуется иметь явное выражение функции $y(t)$; вполне достаточно знать только изображение $Y(s)$.

Совершенно так же обстоит дело и в том случае, когда физическое явление описывается *системой* обыкновенных дифференциальных уравнений, так как, согласно сказанному в § 15, и здесь решение изображающего уравнения определяется только дробно-рациональными функциями (при условии что входными функциями являются единичные скачки).

Однако кроме указанных простых случаев встречаются и более сложные, когда решением $Y(s)$ изображающего уравнения является не дробно-рациональная, а *мероморфная* функция, а иногда — например, в случае уравнения в частных производных — даже *многозначная* функция (см. примеры, разобранные в гл. 4). Впрочем, трансцендентные функции появляются также при решении обыкновенных дифференциальных уравнений. Так получается, например, для систем регулирования, реагирующих на отклонение не мгновенно, а только по прошествии некоторого промежутка времени. В этих случаях в технической литературе для исследования устойчивости часто применяют тот же критерий, который был применен выше для случая дробно-рациональной функции $Y(s)$: определяют особую точку знаменателя $p(s)$, имеющую наибольшую вещественную часть, и по положению этой точки относительно мнимой оси судят об устойчивости оригинала. В основе такого неосторожного приема лежит то же самое наивное представление, о котором мы говорили уже на стр. 168, а именно, предполагается само собой очевидным, что решение $Y(s)$ изображающего уравнения можно представить в виде ряда из простейших дробей, позволяющего сразу видеть все полюсы, и затем совершить почленный переход к показательному ряду в пространстве оригиналов. На стр. 168 мы уже подчеркнули, что к ряду из простейших дробей в общем случае может прибавляться еще целая функция. Такая функция является аналитической во всей плоскости за исключением бесконечно удаленной точки, где она имеет особенность, обычно трудно исследуемую, причем свойства этой особенности могут сильно влиять на асимптотическое поведение решения $y(t)$.

Для иллюстрации приведем один характерный пример. Можно показать, что оригиналу

$$y(t) = \sin t^\alpha \quad (\alpha > 1) \quad (36.5)$$

соответствует изображение $Y(s)$, представляющее собой целую функцию, следовательно, не обладающее в конечности никакими особенностями. При $\alpha \neq 2$ изображение $Y(s)$ не может быть

выражено через классические функции. При $\alpha = 2$ мы имеем

$$Y(s) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \cos \frac{s^2}{4} \int_0^{s/2} \cos x^2 dx - \sin \frac{s^2}{4} \int_0^{s/2} \sin x^2 dx.$$

Интегралы в правой части этого соотношения известны под названием интегралов Френеля.

Далее, оригиналу

$$t^n y(t) = t^n \sin t^\alpha \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (36.6)$$

соответствует, согласно формуле (3.1), изображение $(-1)^n Y^{(n)}(s)$. Так как изображение $Y(s)$ представляет собой целую функцию, то такой же функцией является и изображение $Y^{(n)}(s)$. Таким образом, изображение, соответствующее функции $t^n \sin t^\alpha$, принимающей при $t \rightarrow \infty$ сколь угодно большие значения и, следовательно, описывающей неустойчивое явление, не обладает в конечности никакими особенностями.

Очевидно, что для такой функции приведенный выше критерий устойчивости становится совершенно обманчивым. В самом деле, если при решении какой-нибудь задачи получено изображение, содержащее такого рода функцию в качестве слагаемого, то остальные слагаемые, если они обладают только полюсами с отрицательной вещественной частью, будут создавать видимость устойчивости, в то время как неустойчивость, вызываемая первым слагаемым, останется совершенно незамеченной.

Заметим кстати, что функция (36.5) интересна с физической точки зрения тем, что если выбрать α очень близким к единице, то $\sin t^\alpha$ в произвольно большом промежутке будет сколь угодно мало отличаться от $\sin t$, для которого \mathfrak{L} -изображение равно

$$\mathfrak{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2 + 1},$$

следовательно, имеет особые точки $s = \pm j$.

Применение разложения на простейшие дроби особенно опасно в тех случаях, когда для изображения $Y(s)$ получается многозначная функция, как это было, в частности, в примере, рассмотренном в § 35. Этот пример отнюдь не является надуманным упражнением, а представляет собой математическую формулировку конкретной физической задачи. В подобного рода задачах нельзя пользоваться разложением изображения $Y(s)$ на простейшие дроби и тем более нельзя представлять оригинал $y(t)$ в виде показательного ряда.

Во всех случаях, когда изображение не является дробно-рациональной функцией, для уверенного суждения об асимпто-

тическом поведении, следовательно, и об устойчивости пригодны лишь теоремы такого же типа, как и теорема (35.1)¹⁾. Таким образом, устойчивость решения определяется не только поведением изображения $Y(s)$ в его особых точках, лежащих в конечности, но и поведением $Y(s)$ в бесконечности, так как именно от последнего поведения зависит, можно или нельзя заменить в формуле обращения прямолинейный путь интегрирования угловым путем, составленным из двух наклоненных один к другому лучей и круговых дуг.

¹⁾ Существуют и другие теоремы такого типа, относящиеся к более сложным особенностям. См. по этому поводу: Doetsch G., Handbuch der Laplace-Transformation, т. 2, гл. 6 и 7.

ГЛАВА 8

З-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

§ 37. Переход от преобразования Лапласа через дискретное преобразование Лапласа к З-преобразованию

В приложениях часто вместо функции времени $f(t)$ задается последовательность значений $f_n (n = 0, 1, \dots)$, измеренных через определенные промежутки времени, например, в моменты времени $t = 0, 1, \dots$. Преобразование Лапласа применимо к функциям, а не к последовательностям. Тем не менее это преобразование можно применять и к последовательностям f_n , если последние заменять ступенчатой функцией $f_0(t)$, определенной условиями

$$f_0(t) = f_n \text{ при } n \leq t < n+1 \quad (n = 0, 1, \dots)$$

(рис. 37.1). Так как функция $f_0(t)$ кусочно-постоянная, то ее З-изображение можно вычислить следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{f_0(t)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-st} f_n dt = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{e^{-ns} - e^{-(n+1)s}}{s} = \\ &= \frac{1 - e^{-s}}{s} \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-ns}. \end{aligned} \quad (37.1)$$

Каждый раз, когда составляется такая ступенчатая функция и выполняется соответствующее преобразование Лапласа, появляется множитель $(1 - e^{-s})/s$. Можно упростить запись, если отбросить этот множитель. Тогда в правой части соотношения (37.1) останется только сумма

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-ns}$$

как результат непосредственного преобразования последовательности f_n . Такое преобразование обозначается символом \mathfrak{D} и на-

зывается *дискретным преобразованием Лапласа*¹⁾. Итак мы имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-ns} \equiv \mathfrak{D}\{f_n\}. \quad (37.2)$$

\mathfrak{D} -преобразование можно рассматривать так же, как \mathfrak{L} -преобразование, но не функции, а распределения. В самом деле, последовательность $f_n = f(n)$, выделенная из непрерывно заданной

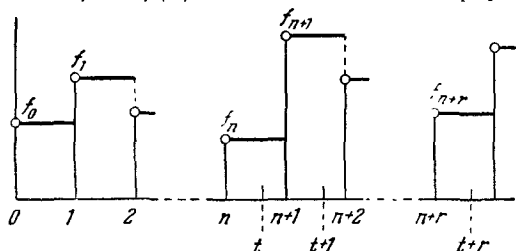


Рис. 37.1. Замена последовательности ступенчатой функцией.

функции $f(t)$, может рассматриваться как результат действия импульсов $\delta(t-n)$, извлекающих из $f(t)$ в моменты времени $t=n$ значения $f(n)$. Иными словами, совокупность этих импульсов, представляемая распределением

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-n),$$

модулируется посредством функции $f(t)$, в результате чего получается соотношение

$$f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-n) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \delta(t-n) = f^*(t),$$

где $f^*(t)$ есть распределение [см. формулу (10) в Добавлении]. Применив к распределению $f^*(t)$ преобразование Лапласа, мы получим, согласно формуле (18) Добавления,

$$\mathfrak{L} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \delta(t-n) \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \mathfrak{L} \{ \delta(t-n) \} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) e^{-ns} = \mathfrak{D}\{f(n)\}.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{D}\{f(n)\} = \mathfrak{L}\{f^*(t)\}. \quad (37.3)$$

¹⁾ Это название введено Я. З. Цыпкиным; см. его книгу: «Переходные и установившиеся процессы в импульсных цепях» (Госэнергониздат, Москва, 1951), в которой можно найти доказательства приводимых ниже теорем. [См. также Цыпкин Я. З., Теория линейных импульсных систем, Физматгиз, Москва, 1963. (Прим. перев.)]

Такое физически понятное толкование \mathfrak{D} -преобразования как \mathfrak{L} -преобразования некоторого распределения играет важную роль в теории импульсных элементов (§ 44).

Итак, задачи, возникающие в связи с исследованием последовательностей, могут решаться либо применением преобразования Лапласа к соответствующим ступенчатым функциям, либо более кратким путем, посредством дискретного преобразования Лапласа самих последовательностей. Однако вычисления становятся еще более простыми, если вместо переменной s ввести новую переменную z посредством подстановки $e^s = z$. Тогда ряд (37.2) переходит в ряд по понижающимся степеням z , и преобразование принимает вид

$$F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n} \equiv \mathfrak{Z}\{f_n\}. \quad (37.4)$$

Мы присвоили этому преобразованию символ \mathfrak{Z} , поскольку в технической литературе, где оно стало применяться примерно с 1950 г., его принято называть *z-преобразованием* (по букве z , выбранной для обозначения переменной). Правда, такое название противоречит существующему обычаю называть часто применяемые преобразования по имени ученого, но поскольку оно укоренилось, его уже трудно изменить¹⁾. В дальнейшем мы будем говорить о нем, как о \mathfrak{Z} -преобразовании, применяя для обозначения готическую букву в соответствии с тем, как это принято для \mathfrak{L} -преобразования и \mathfrak{D} -преобразования.

\mathfrak{Z} -преобразование переводит последовательность-оригинал f_n в изображение $F^*(z)$ ²⁾. И в этом случае вместо записи $\mathfrak{Z}\{f_n\} = F^*(z)$ мы иногда будем пользоваться знаком соответствия

$$f_n \circ \bullet F^*(z).$$

Три преобразования \mathfrak{L} , \mathfrak{D} и \mathfrak{Z} связаны между собой важными соотношениями

$$\mathfrak{L}\{f^*\} = \mathfrak{D}\{f_n\} = \mathfrak{Z}\{f_n\}_{z=e^s} = F^*(e^s). \quad (37.5)$$

Как известно из теории аналитических функций, ряд (37.4) сходится вне некоторого круга в комплексной плоскости, т. е. при $|z| > R \geq 0$ (рис. 37.2). Необходимым и достаточным условием существования такого круга (т. е. чтобы его радиус R не

¹⁾ Было бы более уместным называть z -преобразование *преобразованием Лорана*, так как ряд (37.4) представляет собой не что иное, как ряд Лорана, в котором коэффициенты при положительных степенях z равны нулю.

²⁾ Так как при некоторых исследованиях \mathfrak{Z} -преобразование применяется наряду с \mathfrak{L} -преобразованием, а при последнем изображение обозначается буквой F , то во избежание путаницы принято обозначать изображение при \mathfrak{Z} -преобразовании символом F^* .

был равен бесконечности) является наличие двух таких положительных постоянных K и k , что

$$|f_n| < Kk^n. \quad (37.6)$$

Изображение F^* представляет собой при $|z| > R$, включая $z = \infty$, аналитическую функцию, поэтому все ее особенности лежат внутри круга $|z| \leq R$.

Пример:

$$\begin{aligned} f_n = e^{\alpha n}, \quad F^*(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (e^{\alpha} z^{-1})^n = \\ &= \frac{1}{1 - e^{\alpha} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{\alpha}}. \end{aligned}$$

при $|z| > e^{\operatorname{Re} \alpha}$.

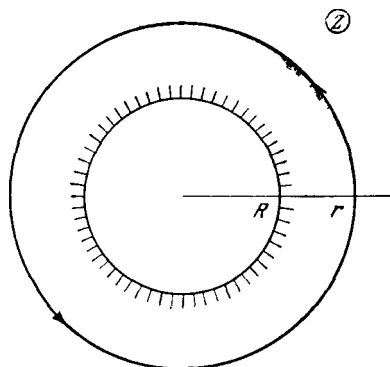


Рис. 37.2. Область сходимости изображения $F^*(z)$.

Отсюда, положив $\alpha = 0$, мы получим изображение для последовательности $f_n \equiv 1$; далее, путем линейных комбинаций мы найдем изображения для последовательностей $\cos \alpha n$, $\sinh \alpha n$ и т. д. (см. таблицу 37.1 на стр. 204).

Каждой последовательности f_n , удовлетворяющей условию (37.6), однозначно соответствует функция $F^*(z)$, аналитическая во внешности круга $|z| > R$, включая ∞ (но при этом $R \leq k$). Обратно, каждая такая функция однозначно¹⁾ определяет последовательность f_n , которую можно найти одним из следующих способов.

¹⁾ В технической литературе иногда утверждается противоположное. Так, например, в книге: T r u x a l J. G., Automatic feedback control system synthesis, MacGraw-Hill, New York, 1955 [имеется русский перевод: Траксел Дж., Синтез систем автоматического регулирования. Машгиз, Москва, 1959 (Прим. перев.)] можно прочесть, что изображению $z/(z-1)$ соответствует не только последовательность $f_n = 1$, но также последовательность импульсов

$$d^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-n).$$

Это ошибочное утверждение является следствием отождествления двух различных преобразований. Правильным будет, согласно соотношению (37.5), равенство

$$\mathfrak{Z}\{1\}_{z=e^s} = \mathfrak{Z}\{d^*\}.$$

Следовательно, если в дроби $z/(z-1)$ заменить переменную z на e^s и результат рассматривать как изображение совсем другого \mathfrak{Z} -преобразования, то величина d^* будет оригиналом.

Таблица 37.1. Соответствия при З-преобразовании

№	$F^*(z)$	f_n
1	$\frac{z}{z-1}$	1
2	$\frac{z}{z+1}$	$(-1)^n$
3	$\frac{z}{(z-1)^2}$	n
4	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	n^2
5	$\frac{z}{z-a}$	a^n
6	$\frac{z}{(z-a)^2}$	na^{n-1}
7	$\frac{z}{(z-1)^{k+1}}$	$\binom{n}{k}$
8	$\frac{az \sin \tau}{z^2 - 2az \cos \tau + a^2}$	$a^n \sin n\tau$
9	$\frac{z(z-a \cos \tau)}{z^2 - 2az \cos \tau + a^2}$	$a^n \cos n\tau$
10	$\frac{z(z-2a \cos \tau) \sin \tau}{z^2 - 2az \cos \tau + a^2}$	$-a^n \sin(n-1)\tau$
11	$\frac{az \operatorname{sh} \tau}{z^2 - 2az \operatorname{ch} \tau + a^2}$	$a^n \operatorname{sh} n\tau$
12	$\frac{z(z-a \operatorname{ch} \tau)}{z^2 - 2az \operatorname{ch} \tau + a^2}$	$a^n \operatorname{ch} n\tau$
13	$\frac{z(z-2a \operatorname{ch} \tau) \operatorname{sh} \tau}{z^2 - 2az \operatorname{ch} \tau + a^2}$	$-a^n \operatorname{sh}(n-1)\tau$
14	$\frac{z(z-x)}{z^2 - 2xz + 1}$	$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ (полином Чебышева, ср. с № 9)
15	$\ln \frac{1}{z-1}$	$f_0 = 0, f_n = \frac{1}{n} \quad (n \geq 1)$
16	$\ln \frac{z+1}{z}$	$f_0 = 0, f_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad (n \geq 1)$
17	$\frac{a}{e^z}$	$\frac{a^n}{n!}$

Обращение \mathfrak{Z} -преобразования

1. Согласно формуле для коэффициентов ряда Лорана, мы имеем

$$f_n = \frac{1}{2\pi j} \int F^*(z) z^{n-1} dz \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (37.7)$$

причем интеграл следует взять по окружности радиуса $r > R$ или по эквивалентной кривой, содержащей внутри себя все особенности функции $F^*(z)$ (см. рис. 37.2 на стр. 203).

Формулу (37.7) можно получить непосредственно, если вместо $F^*(z)$ подставить степенной ряд (37.4) и затем почленно проинтегрировать его, что допустимо, поскольку этот ряд сходится равномерно. Так как

$$\int z^v dz = 0$$

при всех v , кроме $v = -1$, то остается только один член

$$\frac{1}{2\pi j} \int z^{-1} dz = 1,$$

все же остальные отпадают.

2. Положив в формуле (37.7) $z = re^{j\varphi}$, мы получим

$$f_n = \frac{r^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F^*(re^{j\varphi}) e^{jn\varphi} d\varphi \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (37.8)$$

где f_n/r^n суть коэффициенты Фурье функции $F^*(re^{j\varphi})$.

3. Так как $F^*(z^{-1})$ представляет собой ряд по возрастающим степеням z , то, согласно формуле Тэйлора, мы имеем

$$f_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n F^*(z^{-1})}{dz^n} \right]_{z=0} \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (37.9)$$

4. В практических расчетах $F^*(z)$ часто представляет собой рациональную функцию, т. е. отношение двух многочленов:

$$F^*(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

где степень многочлена $P(z)$ равна самое большее степени многочлена $Q(z)$, так как функция $F^*(z)$ при $z = \infty$ должна быть аналитической. Если разделить многочлен $P(z)$ одним из обычных способов на $Q(z)$, то хотя это и не даст общего выражения для f_n , но зато позволит элементарным численным путем определить сколь угодно большое число значений f_n .

5. Еще один способ определения последовательности по изобразению $F^*(z)$ дает теорема 39.1.

§ 38. Правила выполнения операций при З-преобразовании

Как и при преобразовании Лапласа, так и при З-преобразовании для приложений важнее всего знать, какие операции в пространстве изображений соответствуют определенным операциям над последовательностями-оригиналами, и наоборот. Доказательства приводимых ниже *грамматических правил* З-преобразования весьма простые и совершенно элементарные.

Смещение

1. Первая теорема смещения:

$$f_{n-k} \circ \bullet z^{-k} F^*(z) \text{ при } k=0, 1, 2, \dots, \quad (38.1)$$

и при условии, что при $n-k < 0$ принимается $f_{n-k} = 0$.

2. Вторая теорема смещения:

$$f_{n+k} \circ \bullet z^k \left[F^*(z) - \sum_{v=0}^{k-1} f_v z^{-v} \right] \text{ при } k=1, 2, \dots \quad (38.2)$$

Составление разностей

Составлению разностей

$$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n, \quad \Delta^m f_n = \Delta(\Delta^{m-1} f_n) \quad (m=1, 2, \dots; \Delta^0 f_n = f_n)$$

в пространстве оригиналов соответствуют операции

$$\left. \begin{aligned} \Delta f_n \circ \bullet (z-1) F^*(z) - f_0 z, \\ \Delta^2 f_n \circ \bullet (z-1)^2 F^*(z) - f_0 z(z-1) + \Delta f_0 z, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (38.3)$$

в пространстве изображений.

Суммирование

$$\sum_{v=0}^{n-1} f_v \circ \bullet \frac{1}{z-1} F^*(z), \quad \sum_{v=0}^n f_v \circ \bullet \frac{z}{z-1} F^*(z). \quad (38.4)$$

Затухание

$$\alpha^{-n} f_n \circ \bullet F^*(\alpha z) \quad (\alpha \neq 0 - \text{произвольное комплексное число}). \quad (38.5)$$

Дифференцирование изображений

$$n f_n \circ \bullet - z \frac{dF^*(z)}{dz}. \quad (38.6)$$

Свертывание и умножение

1. Свертке двух оригиналов-последовательностей соответствует умножение изображений

$$\sum_{v=0}^n f_v g_{n-v} \circ \bullet F^*(z) G^*(z). \quad (38.7)$$

Это соотношение представляет собой не что иное, как выражение произведения двух степенных рядов в смысле Коши. Сумма в левой части соотношения называется *сверткой последовательностей* f_n и g_n .

2. Произведению двух оригиналов-последовательностей соответствует комплексная свертка изображений:

$$f_n g_n \circ \bullet \frac{1}{2\pi j} \int F^*(\xi) G^*\left(\frac{z}{\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi}. \quad (38.8)$$

Если радиусы кругов сходимости изображений F^* и G^* суть соответственно R_F и R_G , то правая часть соотношения представляет собой изображение, определенное для $|z| > R_F R_G$. Интеграл следует взять по окружности радиуса r , причем этот радиус должен удовлетворять условию

$$R_F < r < \frac{z}{R_G}$$

(при $R_G = 0$ это условие принимает вид: $R_F < r < \infty$). Тогда вследствие соотношений

$$|\xi| = r > R_F, \quad \left| \frac{z}{\xi} \right| = \frac{|z|}{r} > R_G$$

изображения $F^*(\xi)$ и $G^*\left(\frac{z}{\xi}\right)$ будут определены.

Интеграл в правой части соотношения (38.8) называется комплексной сверткой изображений F^* и G^* потому, что после подстановок $z = e^s$, $\xi = e^\sigma$ и с учетом того, что

$$F^*(e^s) = F(s), \quad G^*(e^s) = G(s),$$

он принимает вид комплексной свертки в обычном смысле (см. правило X в § 9), а именно:

$$\frac{1}{2\pi j} \int F(\sigma) G(s - \sigma) d\sigma.$$

Этот интеграл следует взять вдоль вертикального отрезка, простирающегося от $\ln r - j\pi$ до $\ln r + j\pi$ (этот отрезок после преобразования $\xi = e^\sigma$, $\sigma = \ln \xi$ переходит в дугу окружности от $re^{-j\pi}$ до $re^{+j\pi}$).

Для доказательства правильности соответствия (38.8) ¹⁾ учтем, что

$$\begin{aligned} F^*(\xi) G^*\left(\frac{z}{\xi}\right) \xi^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n \xi^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} g_m \left(\frac{\xi}{z}\right)^m \xi^{-1} = \\ &= \sum_{n, m=0}^{\infty} f_n g_m \xi^{m-n-1} z^{-m}, \end{aligned}$$

причем в последнем ряде вследствие его абсолютной сходимости можно произвольно переставлять и объединять его члены. Если проинтегрировать этот ряд вдоль окружности радиуса r почленно (что допустимо вследствие его равномерной сходимости), то исчезнут все члены, за исключением только тех, для которых $m - n - 1 = -1$, т. е. $m = n$ [ср. с доказательством формулы (37.7)]. Эти члены после деления на $2\pi j$ дают сумму

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n z^{-n},$$

которая и является изображением последовательности $f_n g_n$.

§ 39. Две теоремы о предельных значениях

Для \mathfrak{Z} -преобразования существуют теоремы, аналогичные теоремам 32.2 и 32.3, имеющим место для преобразования Лапласа.

Теорема 39.1 (теорема о начальном значении). *Если изображение $F^*(z) = \mathfrak{Z}\{f_n\}$ существует, то*

$$f_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} F^*(z),$$

причем z может стремиться к бесконечности либо вдоль вещественной оси, либо вдоль произвольного пути, так как функция $F^*(z)$ при $z = \infty$ аналитическая.

Из этой теоремы вытекает способ обращения \mathfrak{Z} -преобразования (см. § 37). Очевидно, что ряды

$$\begin{aligned} z(F^*(z) - f_0) &= f_1 + f_2 z^{-1} + f_3 z^{-2} + \dots, \\ z^2(F^*(z) - f_0 - f_1 z^{-1}) &= f_2 + f_3 z^{-1} + \dots \end{aligned}$$

и т. д. также представляют собой \mathfrak{Z} -изображения; поэтому, после того как начальное значение f_0 будет определено на основании

¹⁾ Доказательство, имеющееся в книге Juri E. I., Theory and application of the z -transform method, Wiley, New York, 1964, стр. 142—145, 167—168, в высшей степени трудное и без принятия дополнительных допущений вообще незаконное.

теоремы 39.1, мы получим

$$\begin{aligned} f_1 &= \lim_{z \rightarrow \infty} z (F^*(z) - f_0), \\ f_2 &= \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 (F^*(z) - f_0 - f_1 z^{-1}) \end{aligned}$$

и т. д.

Теорема 39.2 (теорема о конечном значении). *Если $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ существует, то*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{z \rightarrow 1+0} (z-1) F^*(z).$$

При помощи этой теоремы можно вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ по изображению, но только в том случае, когда можно утверждать, что это предельное значение существует, хотя и остается неизвестным. В самом деле, сформулированная теорема необратима. Так, например,

$$\mathfrak{Z}\{(-1)^n\} = \frac{z}{z+1},$$

следовательно,

$$\lim_{z \rightarrow 1+0} (z-1) \frac{z}{z+1}$$

существует и равен нулю. Однако $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ не существует.

§ 40. Общий случай линейного разностного уравнения

В то время как для решения дифференциальных уравнений удобным инструментом является преобразование Лапласа, для решения разностных уравнений более эффективно \mathfrak{Z} -преобразование.

Линейное разностное уравнение порядка r с постоянными коэффициентами, содержащее в левой части линейную комбинацию искомой последовательности y_n и ее разностей $\Delta y_n, \dots, \Delta^r y_n$, а в правой части заданную последовательность f_n , можно путем перехода к явным выражениям разностей привести к виду

$$y_{n+r} + c_{r-1} y_{n+r-1} + \dots + c_1 y_{n+1} + c_0 y_n = f_n \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (40.1)$$

Коэффициент c_r при наивысшей разности y_{n+r} целесообразно принять, как и в случае дифференциальных уравнений, равным единице. Для того чтобы решение уравнения (40.1) получилось вполне определенным, должны быть заданы *начальные значения* y_0, y_1, \dots, y_{r-1} . Тогда, положив в уравнении (40.1) $n = 0$, мы сумеем вычислить из него следующее за y_{r-1} значение y_r . Далее, положив в уравнении (40.1) $n = 1$ и имея значения y_1, \dots, y_r ,



мы найдем значение y_{r+1} и т. д. Следовательно, все значения y_n можно вычислить последовательно, поэтому уравнение (40.1) называется также *рекуррентным уравнением*. Однако мы пойдем по другому пути — выведем для y_n общую формулу. Проще всего это сделать при помощи З-преобразования.

Согласно второй теореме смещения (38.2), разностное уравнение (40.1) после З-преобразования переходит в изображающее уравнение

$$z^r[Y^*(z) - y_0 - y_1 z^{-1} - \dots - y_{r-1} z^{-(r-1)}] + \dots + c_1 z[Y^*(z) - y_0] + c_0 Y^*(z) = F^*(z),$$

где $Y^*(z) = \mathcal{Z}\{y_n\}$ и $F^*(z) = \mathcal{Z}\{f_n\}$. Как и при решении дифференциальных уравнений посредством преобразования Лапласа, так и теперь в изображающее уравнение входят, а потому автоматически учитываются начальные значения, что является большим преимуществом по сравнению с классическим методом решения разностных уравнений.

Введя обозначение

$$z^r + c_{r-1} z^{r-1} + \dots + c_1 z + c_0 = p(z),$$

мы получим решение изображающего уравнения в виде¹⁾

$$Y^*(z) = \frac{1}{p(z)} F^*(z) + \frac{1}{p(z)} \sum_{i=0}^{r-1} y_i \sum_{k=i+1}^r c_k z^{k-i} \quad (c_r = 1). \quad (40.2)$$

¹⁾ Здесь становится ясным, почему при переходе от Д-преобразования к З-преобразованию мы ввели подстановку $z = e^s$, а не $z = e^{-s}$, хотя последняя приводит к ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n = \eta(z)$$

с положительными показателями степени, который на первый взгляд проще ряда с отрицательными показателями степени. Для такого ряда с положительными показателями, который можно было бы назвать преобразованием Тэйлора $\mathcal{T}\{y_n\}$, вторая теорема смещения выражается соотношением

$$y_{n+k} \circ \bullet z^{-k} \left[\eta(z) - \sum_{v=0}^{k-1} y_v z^v \right].$$

Следовательно, коэффициентом при $\eta(z)$ в изображающем уравнении разностного уравнения будет

$$z^{-r} + c_{n-1} z^{-r+1} + \dots + c_1 z^{-1} + c_0 = p(z^{-1}),$$

т. е. не целый многочлен, а дробно-рациональная функция. Из-за этого обстоятельства все расчеты становятся кропотливее, чем при З-преобразовании, так как всюду, где при З-преобразовании получается z , при \mathcal{T} -преобразовании будет получаться z^{-1} .

Входящие в это решение функции $z^\mu/p(z)$ ($\mu = 0, 1, \dots, r$) — аналитические вне круга, содержащего особенности многочлена, причем также в бесконечности, следовательно, представляя собой изображения. Соответствующие им оригиналы-последовательности изящнее всего определить следующим образом. В частном случае $f_n \equiv 0$ мы имеем однородное разностное уравнение

$$y_{n+r} + c_{r-1}y_{n+r-1} + \dots + c_1y_{n+1} + c_0y_n = 0, \quad (40.3)$$

поэтому $F^*(z) \equiv 0$. Пусть заданы начальные значения

$$y_0 = y_1 = \dots = y_{r-2} = 0, \quad y_{r-1} = 1. \quad (40.4)$$

Тогда искомой последовательности y_n соответствует, согласно формуле (40.2), изображение

$$Y^*(z) = \frac{z}{p(z)}. \quad (40.5)$$

С другой стороны, искомое решение y_n можно определить в явном виде на основе результатов, полученных для дифференциальных уравнений. В самом деле, положив, как и в § 14,

$$\frac{1}{p(s)} = G(s),$$

мы найдем, что в области преобразования Лапласа оригинал $g(t)$, названный тогда весовой функцией, обладает в соответствии с равенствами (14.3) и (14.4) свойствами¹⁾:

$$g^{(r)}(t) + c_{r-1}g^{(r-1)}(t) + \dots + c_1g'(t) + c_0g(t) = 0, \quad (40.6)$$

$$g(0) = g'(0) = \dots = g^{(r-2)}(0) = 0, \quad g^{(r-1)}(0) = 1. \quad (40.7)$$

Если мы продифференцируем уравнение (40.6) n раз и затем положим $t = 0$, то получим

$$g^{(n+r)}(0) + c_{r-1}g^{(n+r-1)}(0) + \dots + c_1g^{(n+1)}(0) + c_0g^{(n)}(0) = 0. \quad (40.8)$$

Это соотношение означает следующее: если рассматривать $g^{(n)}(0)$ как последовательность, зависящую от индекса n (иными словами, мысленно опустить верхний индекс вниз), то эта последовательность будет удовлетворять разностному уравнению (40.3). Далее, равенства (40.7) показывают, что эта последовательность имеет начальные значения (40.4). Так как решение задачи Коши единственно (это следует из упомянутого выше рекуррентного характера вычислений), то $g^{(n)}(0)$ есть решение разностного уравнения (40.3) с начальными условиями (40.4), причем относительно этого решения мы знаем, что ему

¹⁾ Раньше мы обозначали порядок уравнения через n . Теперь мы применяем букву r , так как в исчислении конечных разностей буква n используется в качестве индекса для последовательностей.

соответствует изображению (40.5). Следовательно, при 3-преобразовании имеет место соответствие

$$\frac{z}{p(z)} \bullet \circ g^{(n)}(0). \quad (40.9)$$

Эта на первый взгляд, может быть, непривычная форма оригинала-последовательности обладает большим преимуществом: она имеет совершенно общий характер и совершенно не зависит от того, являются ли все нули многочлена $p(z)$ разными или же среди них встречаются кратные. К этому обстоятельству мы вернемся в следующем параграфе.

Для обратного перевода решения (40.2) изображающего уравнения в пространство оригиналов необходимо найти оригиналы-последовательности, соответствующие изображениям $1/p(z)$ и $z^\mu/p(z)$ ($\mu = 1, \dots, r$). Согласно первой теореме смещения (38.1), мы имеем

$$\frac{1}{p(z)} = z^{-1} \frac{z}{p(z)} \bullet \circ g^{(n-1)}(0), \quad (40.10)$$

при условии если при $n-1 < 0$ принять $g^{(n-1)}(0) = 0$, т. е. положить $g^{(-1)}(0) = 0$. Далее, согласно второй теореме смещения (38.2),

$$z^{\mu-1} \left[\frac{z}{p(z)} - \sum_{v=0}^{\mu-2} g^{(v)}(0) z^{-v} \right] \bullet \circ g^{(n+\mu-1)}(0) \quad (\mu = 2, 3, \dots, r).$$

Так как $0 \leq v \leq \mu-2 \leq r-2$, то на основании равенств (40.7) все $g^{(v)}(0) = 0$, следовательно,

$$\frac{z^\mu}{p(z)} \bullet \circ g^{(n+\mu-1)}(0),$$

причем прежде всего при $\mu = 2, \dots, r$, но затем на основании соответствия (40.9) также при $\mu = 1$, а на основании соответствия (40.10) также при $\mu = 0$, если принять, что $g^{(-1)}(0) = 0$.

Таким образом,

$$\frac{z^\mu}{p(z)} \bullet \circ g^{(n+\mu-1)}(0) \quad \text{при } \mu = 0, 1, \dots, r \quad (g^{(-1)}(0) = 0). \quad (40.11)$$

Применив к первому члену изображения (40.2) теорему свертывания [соответствие (38.7)], мы получим

$$\sum_{v=0}^n g^{(v-1)}(0) f_{n-v}.$$

Однако суммирование следует вести только от индекса $v = r$ до n , так как $g^{(-1)}(0) = 0$ и, кроме того, на основании равенств (40.7) $g^{(v-1)}(0) = 0$ при $v = 1, \dots, r-1$: при $n = 0, 1, \dots, r-1$

указанная сумма равна нулю. Окончательно обратный перевод решения (40.2) изображающего уравнения в пространство оригиналов приводит к результату¹⁾

$$y_n = \sum_{v=r}^n g^{(v-1)}(0) f_{n-v} + \sum_{i=0}^{r-1} y_i \sum_{k=i+1}^r c_k g^{(n+k-i-1)}(0),$$

или, если положить $k - i - 1 = l$,

$$y_n = \sum_{v=r}^n g^{(v-1)}(0) f_{n-v} + \sum_{i=0}^{r-1} y_i \sum_{l=0}^{r-i-1} c_{l+i+1} g^{(n+l)}(0) \quad (40.12)$$

Если нули многочлена $p(z)$ известны, то функцию $g(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{1/p(s)\}$ можно вычислить одним из способов, указанных в § 12. Если все нули $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ различные, следовательно, простые, то, согласно формуле (12.9),

$$g(t) = \sum_{\mu=1}^r \frac{1}{p'(\alpha_\mu)} e^{\alpha_\mu t},$$

поэтому

$$g^{(\lambda)}(0) = \sum_{\mu=1}^r \frac{\alpha_\mu^\lambda}{p'(\alpha_\mu)}.$$

В этом случае решение имеет вид

$$y_n = \sum_{v=r}^n f_{n-v} \sum_{\mu=1}^r \frac{\alpha_\mu^{v-1}}{p'(\alpha_\mu)} + \sum_{i=0}^{r-1} y_i \sum_{l=0}^{r-i-1} c_{l+i+1} \sum_{\mu=1}^r \frac{\alpha_\mu^{n+l}}{p'(\alpha_\mu)} \quad (40.13)$$

Первая часть этой формулы дает решение неоднородного разностного уравнения, если все начальные значения равны нулю, т. е. когда система, описываемая разностным уравнением, выходит из состояния равновесия под влиянием внешнего воздействия. Вторая часть формулы дает решение однородного разностного уравнения, когда система, не подверженная внешним воздействиям, при каких-то начальных значениях свободно предоставляется самой себе. В этом случае решение y_n представляет собой линейную комбинацию «собственных решений» α_μ^n . В то время как в случае дифференциальных уравнений вопрос об асимптотическом поведении собственных колебаний при $t \rightarrow \infty$ решает вещественная часть величины α_μ , в случае

¹⁾ Сравнив эту формулу с формулами (12.10) и (14.6), мы увидим, что последовательность $g^{(n)}(0)$ играет для разностного уравнения такую же роль, какую функция $g(t)$ для соответствующего дифференциального уравнения.

разностных уравнений эту роль играет абсолютное значение величины α_μ . В самом деле α_μ^n при $n \rightarrow \infty$ либо стремится к нулю, либо стремится к бесконечности, либо колеблется в зависимости от того, будет ли $|\alpha_\mu| < 1$ или > 1 или $= 1$.

§ 41. Разностное уравнение второго порядка

На практике приходится иметь дело чаще всего с разностными уравнениями второго порядка, т. е. со случаем $r = 2$. Поэтому выполним решение для этого случая еще раз, и при этом полностью. Для перевода изображения в последовательность-оригинал используем способ разложения на простейшие дроби. Этот способ применим и к разностным уравнениям более высоких порядков, однако тогда необходимо особо рассматривать случай, когда многочлен $p(z)$ имеет кратные нули. Кроме того, этот способ покажется некоторым читателям более легким, чем способ, изложенный в предыдущем параграфе.

Разностное уравнение второго порядка имеет вид

$$y_{n+2} + c_1 y_{n+1} + c_0 y_n = f_n. \quad (41.1)$$

В качестве начальных значений пусть заданы y_0 и y_1 . Изображающим уравнением на основании второй теоремы смещения будет

$$z^2 [Y^*(z) - y_0 - y_1 z^{-1}] + c_1 z [Y^*(z) - y_0] + c_0 Y^*(z) = F^*(z).$$

Введя для сокращения записи обозначение

$$z^2 + c_1 z + c_0 = p(z),$$

мы получим в качестве решения изображающего уравнения

$$Y^*(z) = \frac{1}{p(z)} F^*(z) + y_0 \frac{z(z+c_1)}{p(z)} + y_1 \frac{z}{p(z)}. \quad (41.2)$$

Пусть

$$p(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)$$

и пусть ни один из нулей α_1 и α_2 не равен нулю, так как иначе было бы $c_0 = 0$, и уравнение (41.1) свелось бы к уравнению первого порядка для y_{n+1} . Выполним разложение на простейшие дроби сначала для множителя при y_1 . Мы получим

$$\frac{z}{p(z)} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \left(\frac{z}{z - \alpha_1} - \frac{z}{z - \alpha_2} \right) & \text{при } \alpha_1 \neq \alpha_2 \\ \frac{z}{(z - \alpha_1)^2} & \text{при } \alpha_1 = \alpha_2. \end{cases}$$

Согласно таблице 37.1, № 5 и 6, мы имеем

$$\frac{z}{p(z)} \bullet \circ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\alpha_1 - \alpha_2} & \text{при } \alpha_1 \neq \alpha_2 \\ n\alpha_1^{n-1} & \text{при } \alpha_1 = \alpha_2 \end{array} \right\} = q_n. \quad (41.3)$$

Так как $q_0 = 0$, то на основании второй теоремы смещения (38.2)

$$\frac{z^2}{p(z)} = z \frac{z}{p(z)} \bullet \circ q_{n+1}, \quad (41.4)$$

а на основании первой теоремы смещения (38.1)

$$\frac{1}{p(z)} = z^{-1} \frac{z}{p(z)} \bullet \circ q_{n-1}, \quad (41.5)$$

при условии что q_{-1} принимается равным нулю. Тогда на основании теоремы свертывания (38.7) оригиналом-последовательностью для изображения (41.2) будет

$$y_n = \sum_{v=0}^n q_{v-1} f_{n-v} + y_0 (q_{n+1} + c_1 q_n) + y_1 q_n. \quad (41.6)$$

Так как $q_{-1} = q_0 = 0$, то суммирование в действительности следует произвести только от индекса $v = 2$ до n . При $n = 0$ и $n = 1$ эта сумма равна нулю. В раскрытом виде решение (41.6) при $\alpha_1 \neq \alpha_2$ имеет вид

$$y_n = \sum_{v=2}^n f_{n-v} \frac{\alpha_1^{v-1} - \alpha_2^{v-1}}{\alpha_1 - \alpha_2} - y_0 \left[\frac{\alpha_1^{n+1} - \alpha_2^{n+1}}{\alpha_1 - \alpha_2} + c_1 \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\alpha_1 - \alpha_2} \right] + y_1 \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

Если учесть, что $c_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2)$ и $\alpha_1 \alpha_2 = c_0$, то для случая, когда $\alpha_1 \neq \alpha_2$, вместо этой формулы мы получим более простую:

$$y_n = \sum_{v=2}^n f_{n-v} \frac{\alpha_1^{v-1} - \alpha_2^{v-1}}{\alpha_1 - \alpha_2} - y_0 c_0 \frac{\alpha_1^{n-1} - \alpha_2^{n-1}}{\alpha_1 - \alpha_2} + y_1 \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad (41.7)$$

Аналогичным образом для $\alpha_1 = \alpha_2$ найдем

$$y_n = \sum_{v=2}^n f_{n-v} (v-1) \alpha_1^{v-2} - y_0 c_0 (n-1) \alpha_1^{n-2} + y_1 n \alpha_1^{n-1} \quad (41.8)$$

В случае разностного уравнения второго порядка обратное преобразование решения из пространства изображений в пространство оригиналов можно осуществить, не прибегая к разложению на простейшие дроби [так же, как это было сделано для

дифференциального уравнения второго порядка, см. формулы (11.6) — (11.9)]. При этом, однако, нет смысла рассматривать случай $\alpha_1 = \alpha_2$, имеющий место при $c_0 - c_1^2/4 = 0$, так как он не допускает дальнейшего упрощения формулы (41.8). Предположим, что $a \neq 0$ и $\text{sh } \tau \neq 0$, и воспользуемся соответствиями № 11 и 13 из таблицы 37.1, которые перепишем в следующем виде:

$$\frac{z}{z^2 - 2az \operatorname{ch} \tau + a^2} \bullet \circ a^{n-1} \frac{\operatorname{sh} \tau n}{\operatorname{sh} \tau}, \quad (41.9)$$

$$\frac{z(z - 2a \operatorname{ch} \tau)}{z^2 - 2az \operatorname{ch} \tau + a^2} \bullet \circ - a^n \frac{\operatorname{sh} \tau (n-1)}{\operatorname{sh} \tau}. \quad (41.10)$$

На основании второй теоремы смещения (38.2) из соответствия (41.9), если его правую часть при $n = 0$ положить равной нулю, получаем

$$\frac{1}{z^2 - 2az \operatorname{ch} \tau + a^2} \bullet \circ a^{n-2} \frac{\operatorname{sh} \tau (n-1)}{\operatorname{sh} \tau} \quad (41.11)$$

[при $n = 1$ правая часть соответствия (41.9) сама собой равна нулю]. Знаменатели в соответствиях (41.10) и (41.11) совпадут с многочленом $p(z)$, если положить

$$-2a \operatorname{ch} \tau = c_1, \quad a^2 = c_0. \quad (41.12)$$

Тогда мы будем иметь

$$c_0 - \frac{c_1^2}{4} = a^2(1 - \operatorname{ch}^2 \tau) = -a^2 \operatorname{sh}^2 \tau.$$

Так как $c_0 - c_1^2/4 \neq 0$ (случай $\alpha_1 \neq \alpha_2$), то также $\operatorname{sh} \tau \neq 0$, поэтому формулы (41.7) — (41.9) имеют смысл. Теперь решению (41.2) изображающего уравнения соответствует в пространстве оригиналов последовательность

$$y_n = \frac{1}{\operatorname{sh} \tau} \left\{ \sum_{v=2}^n a^{v-2} \operatorname{sh} \tau (v-1) f_{n-v} - y_0 a^n \operatorname{sh} \tau (n-1) + y_1 a^{n-1} \operatorname{sh} \tau n \right\} \quad (41.13)$$

причем a и τ в соответствии с равенством (41.12) должны быть выражены через коэффициенты c_0 и c_1 . Формула (41.13) более удобна для численных расчетов, чем формула (41.6), особенно в тех случаях, когда коэффициенты c_0 и c_1 суть комплексные числа, что может иметь место, например, в случае задачи, которой посвящен § 42. Гиперболические функции табулированы также для комплексных аргументов.

Соответствия (41.9) — (41.11) применимы также для разностных уравнений с порядком выше второго, если при разложе-

нии на простейшие дроби кроме линейных знаменателей получаются также квадратичные знаменатели, как это имеет место, например, при объединении сопряженных комплексных линейных множителей многочлена $p(z)$ в один квадратичный множитель.

§ 42. Краевая задача для разностного уравнения второго порядка

В приложениях часто бывает, что значения неизвестной последовательности y_n , определяемой разностным уравнением, требуются не для *всех* $n \geq 0$, а только для конечного числа индексов $0 \leq n \leq N$. В таких случаях, для того чтобы сделать решение разностного уравнения определенным, обычно задают не начальные значения, а другие. В наиболее часто встречающемся случае, когда порядок разностного уравнения равен двум, задают, как правило, два значения y_0 и y_N , т. е. *граничные значения*, вследствие чего рассматриваемая задача решения разностного уравнения называется *краевой задачей*. Однако могут быть и другие возможности; например, в теории цепочных схем, составленных из четырехполюсников, иногда задается линейное соотношение между y_0 и y_1 и такое же соотношение между y_{N-1} и y_N .

Рассмотрим следующую задачу. Дано разностное уравнение второго порядка

$$y_{n+2} + c_1 y_{n+1} + c_0 y_n = f_n \quad (42.1)$$

и два граничных значения y_0 и y_N (конечно, должно быть $N \geq 2$). Будем считать, что нули α_1 и α_2 многочлена

$$p(z) = z^2 + c_1 z + c_0$$

различные (случай одинаковых нулей проще, и на нем мы не будем останавливаться). Для решения этой задачи не требуется каких-либо новых приемов, достаточно использовать общее решение (41.7) задачи Коши, которое для случая $\alpha_1 \neq \alpha_2$ принимает вид

$$y_n = \sum_{v=2}^n f_{n-v} \frac{\alpha_1^{v-1} - \alpha_2^{v-1}}{\alpha_1 - \alpha_2} - y_0 c_0 \frac{\alpha_1^{n-1} - \alpha_2^{n-1}}{\alpha_1 - \alpha_2} + y_1 \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad (n \geq 2). \quad (42.2)$$

В это решение мы должны ввести вместо неизвестного значения y_1 заданное значение y_N . Для этого подставим в равенство (42.2) $n = N$. Тогда мы получим соотношение между y_0 , y_1 и y_N ,

из которого определим y_1 в зависимости от y_0 и y_N :

$$y_1 = \frac{1}{\alpha_1^N - \alpha_2^N} \left\{ y_0 c_0 (\alpha_1^{N-1} - \alpha_2^{N-1}) + y_N (\alpha_1 - \alpha_2) - \sum_{v=2}^N (\alpha_1^{v-1} - \alpha_2^{v-1}) f_{N-v} \right\}.$$

Внеся это значение y_1 в формулу (42.2), мы будем иметь

$$\begin{aligned} y_n = & \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \sum_{v=2}^n (\alpha_1^{v-1} - \alpha_2^{v-1}) f_{n-v} - \\ & - \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\alpha_1^N - \alpha_2^N} \sum_{v=2}^N (\alpha_1^{v-1} - \alpha_2^{v-1}) f_{N-v} + \\ & + \frac{1}{\alpha_1^N - \alpha_2^N} \{ y_0 (\alpha_1^N \alpha_2^n - \alpha_1^n \alpha_2^N) + y_N (\alpha_1^n - \alpha_2^n) \} \end{aligned} \quad (42.3)$$

Это решение справедливо прежде всего для $2 \leq n \leq N$, однако правильный результат получится также для $n=0$ и $n=1$, если только первую сумму для $n=0$ и $n=1$ заменить нулем.

Конечно, полученное решение имеет смысл только в том случае, если

$$\alpha_1^N - \alpha_2^N \neq 0.$$

Если заданная длина промежутка N так связана с постоянными, входящими в разностное уравнение, что $\alpha_1^N - \alpha_2^N = 0$, то рассматриваемая краевая задача в общем случае не имеет решения. В этом случае в полной аналогии с известными соотношениями, получающимися при решении дифференциальных уравнений, появляются собственные значения и собственные решения, которые представляют интерес также для практики, но на которых здесь мы не имеем возможности останавливаться.

§ 43. Система совместных разностных уравнений с начальными или граничными условиями (цепочная схема)

Предварительное замечание

Продолжим исследование электрических цепей, начатое в § 20. Там мы рассмотрели сначала *отдельный контур* и составили интегро-дифференциальное уравнение (20.1) для определения тока $i(t)$, вызванного включением напряжения $e(t)$ со-

вершенно произвольного вида. Для связи между изображениями $E(s)$ и $I(s)$ мы получили линейное алгебраическое уравнение (20.3). При расчетах переменного тока методом комплексных амплитуд ограничиваются специальным случаем *переменного напряжения* $e(t) = E e^{j\omega t}$ и принимают, что такое напряжение вызывает *переменный ток* с той же частотой, т. е. полагают, что $i(t) = I e^{j\omega t}$ (здесь E и I суть комплексные постоянные, определяющие амплитуду и начальную фазу). Строго говоря, это возможно только для установившегося состояния ($-\infty < t < +\infty$). В том же случае, когда происходит включение напряжения, т. е. когда возникает переходный процесс ($0 \leq t < \infty$), установившееся состояние достигается только спустя достаточно длительный промежуток времени (выражаясь математически, включение напряжения вызывает асимптотическое поведение, см. в связи с этим § 13).

Продифференцировав уравнение (20.1) по t , мы получим

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = e'(t).$$

Подставив сюда $i(t) = I e^{j\omega t}$ и $e(t) = E e^{j\omega t}$, будем иметь ¹⁾

$$I \left(L(j\omega)^2 + Rj\omega + \frac{1}{C} \right) e^{j\omega t} = E j\omega e^{j\omega t},$$

или

$$\left(Lj\omega + R + \frac{1}{Cj\omega} \right) I = E. \quad (43.1)$$

Введя импеданс $Z(s)$, определенный равенством (20.2), мы приведем это уравнение к виду

$$Z(j\omega) I = E, \quad (43.2)$$

где

$$Z(j\omega) = Lj\omega + R + \frac{1}{Cj\omega}. \quad (43.3)$$

Уравнение (43.2) формально совпадает с уравнением (20.3), связывающим между собой \mathfrak{F} -изображения $I(s)$ и $E(s)$ *произвольного* тока $i(t)$ и *произвольного* напряжения $e(t)$, т. е. таких тока и напряжения, которые выражаются функциями *общего* вида. Только теперь в уравнение вместо $I(s)$ и $E(s)$ входят постоянные I и E , которые принято называть *комплексными током и напряжением*, а вместо импеданса $Z(s)$ общего вида — его

¹⁾ Если мы подставили бы $e(t) = E e^{j\omega t}$ непосредственно в уравнение (20.1), то получили бы в нем расходящийся интеграл $\int_{-\infty}^t I e^{j\omega \tau} d\tau$.

специальное значение $Z(j\omega)$. В случае тока $i(t)$ общего вида мы должны были от изображения $I(s) = E(s)/Z(s)$ перейти к оригиналу $i(t)$. Теперь же при расчете переменного тока методом комплексных амплитуд вычисления заканчиваются на составлении уравнения (43.2), так как единственной неизвестной является комплексная постоянная I , которая зависит от частоты ω и для которой из уравнения (43.2) получается значение

$$I = \frac{E}{Z(j\omega)}.$$

Метод комплексных амплитуд может быть распространен на *электрические цепи* типа, рассмотренного в § 20. Только теперь за напряжение в v -м контуре следует принять не произвольную функцию $e_v(t)$, а функцию специального вида $e_v(t) = E_v e^{j\omega t}$, следовательно, частота во всех контурах будет одинаковая. В установившемся состоянии токи в контурах будут представлять собой колебания с одной и той же частотой, т. е. будут выражаться функциями вида $i_v(t) = I_v e^{j\omega t}$. Легко видеть, что при подстановке этих выражений для тока и напряжения в интегро-дифференциальные уравнения электрической цепи получается система линейных алгебраических уравнений, которая формально совпадает с системой (20.4), полученной для \mathfrak{E} -изображений токов и напряжений произвольного вида. В самом деле, теперь мы имеем

$$\left. \begin{aligned} Z_{11}(j\omega) I_1 + \dots + Z_{1n}(j\omega) I_n &= E_1, \\ \vdots & \\ Z_{n1}(j\omega) I_1 + \dots + Z_{nn}(j\omega) I_n &= E_n. \end{aligned} \right\} \quad (43.4)$$

Поэтому все, что было сказано в § 20 в связи с уравнениями (20.4)—(20.8), можно перенести на комплексные напряжения и комплексные токи. Решение системы уравнений (43.4) полностью решает задачу описания поведения электрической цепи, находящейся, при наличии в ней синусоидальных колебаний одинаковой частоты, в установившемся состоянии¹⁾.

¹⁾ Некоторые авторы, выступающие в технической литературе и вынужденные с целью более глубокого проникновения в исследуемые ими задачи прибегать к преобразованию Лапласа, тем не менее используют, в силу старых привычек, в качестве возбуждения не произвольные функции, а функцию $e^{j\omega t}$ (в технике это называют «спектральным подходом») и рассматривают уравнения (20.3) и (20.4), в которые входит переменная s , только как «формальное обобщение» уравнений (43.2) и (43.4), содержащих вместо s величину $j\omega$. Другие авторы идут еще дальше, а именно переносят уравнения (43.2) и (43.4) в комплексную плоскость s , делая это весьма «просто»: без достаточной мотивировки и не применяя преобразования Лапласа, заменяют в уравнениях (43.2) и (43.4) чисто мнимую переменную $j\omega$ комплексной переменной s , а затем, чтобы сделать эту не особенно приятную для них комплексную переменную более привлекательной для инженера, дают ей хорошо звучащее, но бессмысленное название «комплексной частоты». Такие некоррект-

Мы начали с этого предварительного замечания потому, что в этом параграфе мы рассмотрим специальный вид электрической цепи, исследование которой выполняется особенно просто методом комплексных амплитуд. При этом мы используем изложенную выше теорию разностных уравнений.

Цепочной схемой называется электрическая цепь, в которой все контуры (за исключением, быть может, первого и последнего) имеют одинаковую структуру и расположены один за другим так, что каждый предшествующий имеет общую ветвь с последующим (рис. 43.1). У каждого из контуров, образующих

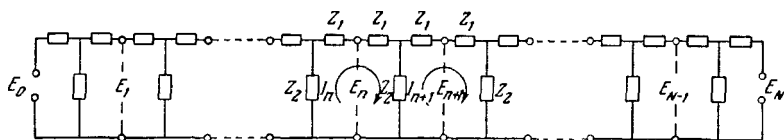


Рис. 43.1. Цепочная схема из Т-образных четырехполюсников.

такую цепочную схему, в верхней продольной ветви имеется по два одинаковых импеданса Z_1 , а в поперечной ветви — один импеданс Z_2 ; нижняя продольная ветвь импедансов не содержит.

Нашей целью является определение только установившегося состояния цепочной схемы: поэтому для вычислений мы можем

ности объясняются, очевидно, тем, что требуется некоторое время, прежде чем новые, улучшенные представления вытеснят старые, неточные, но ставшие привычными представления. До тех пор пока преобразование Лапласа не было введено в электротехнику, при расчете электрических цепей не оставалось иного выхода, как пользоваться возбуждениями и откликами на них только вида $e^{i\omega t}$. Между тем преобразование Лапласа позволяет с самого начала рассматривать совершенно произвольные возбуждения и отклики и дает возможность получать полное решение, охватывающее как переходный процесс, так и установившееся состояние. Однако роль преобразования Лапласа на этом не заканчивается: оно позволяет выявлять глубокие свойства часто весьма сложных решений по значительно более простым \mathcal{Z} -изображениям этих решений (в гл. 6 и 7 мы познакомились с примерами такого выявления свойств оригинала по изображению). Метод комплексных амплитуд, применяемый при расчете переменного тока, является составной частью теории преобразования Лапласа и находит в последней свое обоснование (см. § 13). Если возбуждения изменяются синусообразно и при этом все имеют одинаковую частоту, то метод комплексных амплитуд дает некоторую *часть точного решения*, получаемого при помощи преобразования Лапласа, именно ту часть точного решения, которая определяет асимптотическое поведение рассматриваемой системы, или, выражаясь языком техники, ее установившееся состояние. Однако все это справедливо только при условии, что нули множителя $1/G(s)$ [в случае системы уравнений — нули определителя (20.5)] имеют отрицательные вещественные части. Если рассматривается только переменный ток и определяется только установившееся состояние, то при сделанном предположении относительно нулей можно спокойно применять метод комплексных амплитуд, поскольку он сокращает вычислительную работу.

применить метод комплексных амплитуд. Мы могли бы воспользоваться уравнениями (43.4), составленными для электрической цепи. Однако для упрощения вычислений заменим контуры, образующие цепочную схему, так называемыми Т-образными четырехполюсниками (рис. 43.2). При этом для еще большего упрощения вычислений целесообразно

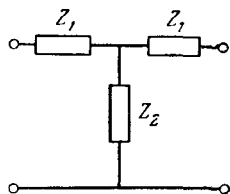


Рис. 43.2. Т-образный четырехполюсник.

дополнить начало и конец цепочной схемы до полных Т-образных четырехполюсников, вследствие чего там окажется только по половине контура. Число четырехполюсников пусть равно N , текущий номер четырехполюсника будем обозначать буквой n . Пусть комплексное напряжение на выходе из n -го четырехполюсника и, следовательно, одновременно на входе в $(n+1)$ -й четырехполюсник равно E_n , а соответствующий комплексный ток пусть равен I_n .

Приняв во внимание направления контурных токов, отмеченные на рис. 43.1 стрелками, мы получим для левой и правой половины $(n+1)$ -го четырехполюсника следующие уравнения Кирхгофа:

$$\left. \begin{aligned} (Z_1 + Z_2)I_n - Z_2I_{n+1} &= E_n, \\ Z_2I_n - (Z_1 + Z_2)I_{n+1} &= E_{n+1}, \end{aligned} \right\} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1). \quad (43.5)$$

Таким образом, мы имеем $2N$ линейных уравнения, связывающих между собой $2N + 2$ величины $I_0, \dots, I_n, E_0, \dots, E_n$. Если две из этих величин заданы, то остальные $2N$ величин могут быть вычислены.

Вместо того чтобы выполнить такое решение обычным приемом при помощи определителей, поступим следующим образом: будем рассматривать оба уравнения (43.5), справедливые для любого индекса $n = 0, 1, \dots, N-1$, как систему двух разностных уравнений первого порядка с двумя неизвестными последовательностями E_n и I_n , причем будем различать две возможные постановки задачи решения этой системы, а именно задачу Коши и краевую задачу.

1. Задачи Коши

Так как оба уравнения системы (43.5) первого порядка, то для каждой неизвестной необходимо задать одно начальное значение, в нашем случае E_0 и I_0 . Задача Коши соответствует следующей технической задаче: заданы напряжение и ток на входе цепочной схемы, требуется найти напряжение и ток на выходе из произвольного контура цепочной схемы.

Обозначим \mathcal{Z} -изображения последовательностей E_n , I_n через $E^*(z)$, $I^*(z)$ и применим к уравнениям (43.5) вторую теорему смещения (38.2); мы получим

$$\begin{aligned}(Z_1 + Z_2) I^*(z) - Z_2 z [I^*(z) - I_0] &= E^*(z), \\ Z_2 I^*(z) - (Z_1 + Z_2) z [I^*(z) - I_0] &= z [E^*(z) - E_0],\end{aligned}$$

или

$$\left. \begin{aligned}E^*(z) - (Z_1 + Z_2 - Z_2 z) I^*(z) &= I_0 Z_2 z, \\ z E^*(z) - (Z_2 - (Z_1 + Z_2) z) I^*(z) &= E_0 z + I_0 (Z_1 + Z_2) z.\end{aligned} \right\} \quad (43.6)$$

Определитель этой системы уравнений, линейной относительно E^* и I^* , равен

$$\begin{aligned}D(z) &= -[Z_2 - (Z_1 + Z_2) z] + (Z_1 + Z_2 - Z_2 z) z = \\ &= -Z_2 z^2 + 2(Z_1 + Z_2) z - Z_2.\end{aligned} \quad (43.7)$$

Для того чтобы коэффициент при старшем члене этого определителя в дальнейшем был равен единице, разделим при вычислении E^* и I^* числитель и знаменатель на $-Z_2$. В результате мы получим

$$\left. \begin{aligned}E^*(z) &= \frac{E_0 z \left[z - \left(\frac{Z_1}{Z_2} + 1 \right) \right] - I_0 Z_1 \left(\frac{Z_1}{Z_2} + 2 \right) z}{z^2 - 2 \left(\frac{Z_1}{Z_2} + 1 \right) z + 1}, \\ I^*(z) &= \frac{-E_0 \frac{1}{Z_2} z + I_0 z \left[z - \left(\frac{Z_1}{Z_2} + 1 \right) \right]}{z^2 - 2 \left(\frac{Z_1}{Z_2} + 1 \right) z + 1}.\end{aligned} \right\} \quad (43.8)$$

Так же, как и в § 41, введем величину τ посредством соотношения

$$\operatorname{ch} \tau = \frac{Z_1}{Z_2} + 1. \quad (43.9)$$

Тогда, воспользовавшись соответствиями № 11 и 12 из таблицы 37.1 (положив в них $a = 1$), найдем последовательность-оригинал

$$E_n = E_0 \operatorname{ch} \tau n - I_0 Z_1 \left(\frac{Z_1}{Z_2} + 2 \right) \frac{\operatorname{sh} \tau n}{\operatorname{sh} \tau},$$

отвечающую изображению $E^*(z)$. Множитель при $-I_0$ можно преобразовать следующим образом:

$$Z_1 \left(\frac{Z_1}{Z_2} + 2 \right) = Z_2 \left[\left(\frac{Z_1}{Z_2} + 1 \right)^2 - 1 \right] = Z_2 (\operatorname{ch}^2 \tau - 1) = Z_2 \operatorname{sh}^2 \tau.$$

Таким образом, окончательно для E_n и I_n мы получим

$$\left. \begin{aligned}E_n &= E_0 \operatorname{ch} \tau n - I_0 Z_2 \operatorname{sh} \tau \operatorname{sh} \tau n, \\ I_n &= -E_0 \frac{1}{Z_2} \frac{\operatorname{sh} \tau n}{\operatorname{sh} \tau} + I_0 \operatorname{ch} \tau n.\end{aligned} \right\} \quad (43.10)$$

Вряд ли можно было бы вывести эти изящные формулы решением системы $2N$ уравнений (43.5) при помощи определителей.

В формулах (43.10) букву n можно рассматривать либо как текущий индекс, либо как индекс N последнего контура цепочной схемы. В последнем случае E_n и I_n будут представлять собой комплексное напряжение на выходе и комплексный ток на выходе. Формулы (43.10) удобны для численных расчетов. Величины $Z_1 = Z_1(j\omega)$ и $Z_2 = Z_2(j\omega)$ суть комплексные числа, следовательно, τ также представляет собой комплексное число. Для гиперболических функций комплексного аргумента существуют подробные таблицы.

Отметим, что определитель системы уравнений (43.10)

$$\begin{vmatrix} \operatorname{ch} \tau n & -Z_2 \operatorname{sh} \tau \operatorname{sh} \tau n \\ -\frac{\operatorname{sh} \tau n}{Z_2 \operatorname{sh} \tau} & \operatorname{ch} \tau n \end{vmatrix} = \operatorname{ch}^2 \tau n - \operatorname{sh}^2 \tau n$$

равен единице. Этим свойством обладают все пассивные четырехполюсники.

Как было отмечено выше, решения (43.10) относятся к случаю, когда входное напряжение и входной ток изменяются по закону синуса и отыскивается только установившееся состояние. Если же рассматривается цепочная схема (первоначально находящаяся в состоянии покоя) с произвольными входными напряжением и током и требуется найти полное решение (включая и переходной процесс), то в формулах (43.10) следует заменить E_n , I_n , $Z_1(j\omega)$, $Z_2(j\omega)$ на $E_n(s)$, $I_n(s)$, $Z_1(s)$, $Z_2(s)$ и для полученных таким путем функций s определить последовательности-оригиналы посредством преобразования Лапласа.

II. Краевая задача

Предположим, что цепочная схема состоит из N четырехполюсников, причем N есть фиксированное число. Пусть теперь заданы не начальные значения, а для одной переменной — начальное значение и для нее же или другой переменной — конечное значение. Другими словами, пусть заданы два граничных значения, например E_0 и E_N или E_0 и I_N . Ограничимся рассмотрением технически наиболее важного случая, когда правое граничное значение равно нулю.

Первый подслучай: E_0 произвольное, $E_N = 0$.

Это означает, что цепочная схема на выходе коротко замкнута. Используем формулы (43.10), в которых для сокращения записи положим

$$Z_2 \operatorname{sh} \tau = W \text{ (волновое сопротивление).}$$

Для того чтобы исключить из этих формул неизвестное значение I_0 , подставим в первую формулу $n = N$ и $E_N = 0$; мы получим

$$0 = E_0 \operatorname{ch} N\tau - I_0 W \operatorname{sh} N\tau.$$

Отсюда найдем

$$I_0 = E_0 \frac{\operatorname{ch} N\tau}{W \operatorname{sh} N\tau},$$

и формулы (43.10) примут вид

$$\left. \begin{aligned} E_n &= E_0 \operatorname{ch} n\tau - E_0 \frac{\operatorname{ch} N\tau}{\operatorname{sh} N\tau} \operatorname{sh} n\tau = E_0 \frac{\operatorname{sh} (N-n)\tau}{\operatorname{sh} N\tau}, \\ I_n &= -E_0 \frac{1}{W} \operatorname{sh} n\tau + E_0 \frac{\operatorname{ch} N\tau}{W \operatorname{sh} N\tau} \operatorname{ch} n\tau = E_0 \frac{\operatorname{ch} (N-n)\tau}{W \operatorname{sh} N\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (43.11)$$

Второй подслучай: E_0 произвольное, $I_N = 0$.

Это означает, что цепочная схема на выходе разомкнута. Подставив во вторую из формул (43.10) $n = N$ и $I_N = 0$, мы получим

$$0 = -E_0 \frac{1}{W} \operatorname{sh} N\tau + I_0 \operatorname{ch} N\tau,$$

откуда

$$I_0 = E_0 \frac{\operatorname{sh} N\tau}{W \operatorname{ch} N\tau}.$$

Внеся это значение в формулы (43.10), мы будем иметь

$$\left. \begin{aligned} E_n &= E_0 \operatorname{ch} n\tau - E_0 \frac{\operatorname{sh} N\tau}{\operatorname{ch} N\tau} \operatorname{sh} n\tau = E_0 \frac{\operatorname{ch} (N-n)\tau}{\operatorname{ch} N\tau}, \\ I_n &= -E_0 \frac{1}{W} \operatorname{sh} n\tau + E_0 \frac{\operatorname{sh} N\tau}{W \operatorname{ch} N\tau} \operatorname{ch} n\tau = E_0 \frac{\operatorname{sh} (N-n)\tau}{W \operatorname{ch} N\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (43.12)$$

§ 44. Получение последовательности при помощи импульсного элемента. Исследование прерывных процессов посредством \mathfrak{L} - и \mathfrak{Z} -преобразований

В некоторых областях техники в последние десятилетия получили большое значение прерывные процессы. При таких процессах проявляют себя только некоторые дискретные значения функции времени, а не все ее поведение в целом, следовательно, вместо функций приходится рассматривать последовательности. Для исследования этих процессов \mathfrak{Z} -преобразование играет такую же роль, как \mathfrak{L} -преобразование для исследования непрерывных процессов.

На практике дискретные значения функций получают при помощи так называемого импульсного элемента.

Импульсный элемент представляет собой приспособление, преобразующее непрерывную входную функцию $f(t)$ в ступенчатую функцию следующим образом: значения функции $f(t)$ отсчитываются в дискретные моменты времени nT ($n = 0, 1, \dots$), т. е. периодически, умножаются на постоянную величину k (усиливаются) и затем каждое отсчитанное значение удерживается на постоянном уровне в течение промежутка времени ϑ ($0 < \vartheta \leq T$). В оставшиеся промежутки времени функция $f(t)$

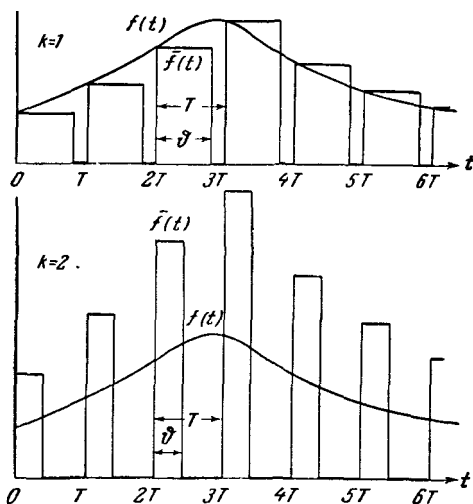


Рис. 44.1. Преобразование непрерывной функции в ступенчатую посредством периодического импульсного элемента.

не отсчитывается совсем, т. е. принимается равной нулю. Следовательно, выходной функцией импульсного элемента является ступенчатая функция (рис. 44.1)

$$\bar{f}(t) = \begin{cases} kf(nT) & \text{при } nT \leq t < nT + \vartheta, \\ 0 & \text{при } nT + \vartheta \leq t < (n+1)T \end{cases} \quad (44.1)$$

(при $\vartheta = T$ вторая строка делается излишней). Величина T называется *периодом повторения импульсов*, ϑ — *длительностью импульса* и k — *коэффициентом усиления импульсного элемента*.

Если ввести в рассмотрение функцию единичного скачка $u(t)$, то ступенчатую функцию $\bar{f}(t)$ можно представить в виде

$$\bar{f}(t) = k \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) [u(t - nT) - u(t - nT - \vartheta)]. \quad (44.2)$$

Применив к этой функции преобразование Лапласа, мы получим

$$\begin{aligned}\bar{F}(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{nT+\vartheta} e^{-st} \bar{f}(t) dt = \\ &= k \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \int_{nT}^{nT+\vartheta} e^{-st} dt = k \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \frac{e^{-nTs} - e^{-(nT+\vartheta)s}}{s},\end{aligned}$$

следовательно,

$$\bar{F}(s) = k \frac{1 - e^{\vartheta s}}{s} \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-nTs}. \quad (44.3)$$

При $k = 1$, $T = 1$ и $\vartheta = 1$ ступенчатая функция $\bar{f}(t)$ имеет вид, изображенный на рис. 37.1.

Площадь, ограниченная ступенчатой функцией $\bar{f}(t)$ и осью t , состоит из последовательности прямоугольников. Если k и ϑ выбраны так, что $k\vartheta = 1$, то площадь отдельного прямоугольника равна

$$kf(nT)\vartheta = f(nT),$$

следовательно, в этом случае отсчитанное импульсным элементом значение $f(nT)$ можно рассматривать как площадь ступени. Такое представление окажется очень удобным для понимания дальнейшего.

На практике обычно выбирают длительность импульса ϑ малой, а коэффициент усиления k большим. Для того чтобы сделать математическое исследование не зависящим от специального выбора значений ϑ и k , идеализируют соотношения, возникающие вследствие такого выбора значений ϑ и k , посредством предельного перехода $\vartheta \rightarrow 0$, следовательно, $k \rightarrow \infty$. Тогда функция $\lim \bar{f}(t)$, получающаяся в результате этого предельного перехода, будет равна ∞ при значениях аргумента nT и нулю при всех остальных значениях аргумента, однако при этом площадь отдельных прямоугольников в окрестности точек $t = nT$ должна сохранять свое прежнее значение $f(nT)$, или на языке математики: интеграл от предельной функции при переходе через значения nT должен изменяться скачкообразно на значение $f(nT)$. Следовательно, функция $\lim \bar{f}(t)$ совпадает с введенным в § 37 распределением $f^*(t)$, получающимся в результате модулирования последовательности импульсов

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

функцией $f(t)$ (в § 37 было $T = 1$), т. е.

$$\lim_{\theta \rightarrow 0, k \rightarrow \infty} \bar{f}(t) = f^*(t) = f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT). \quad (44.4)$$

Осуществление предельного перехода $\theta \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ можно рассматривать как математическое описание физического процесса, посредством которого от функции $f(t)$ в моменты времени nT берутся *мгновенные отсчеты* («выборки»).

\mathfrak{L} -изображение распределения $f^*(t)$, согласно формуле (18) Добавления, равно

$$\mathfrak{L}\{f^*(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-nTs} = \mathfrak{Z}\{f(nT)\}_{z=e^{Ts}}, \quad (44.5)$$

откуда, имея в виду, что

$$\mathfrak{Z}\{f(nT)\} = F^*(z), \quad (44.6)$$

мы получим

$$\boxed{\mathfrak{L}\{f^*(t)\} = F^*(e^{Ts})} \quad (44.7)$$

Это же соотношение можно вывести из равенства (44.3) путем предельного перехода. Так как $k\theta = 1$ и

$$k \frac{1 - e^{\theta s}}{s} = k\theta \frac{1 - e^{-\theta s}}{\theta s} \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \theta \rightarrow 0,$$

то

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \mathfrak{L}\{\bar{f}(t)\} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \bar{F}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-nTs} = F^*(e^{Ts}). \quad (44.8)$$

Из соотношений (44.7) и (44.8) следует, что

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \mathfrak{L}\{\bar{f}(t)\} = \mathfrak{L}\{f^*(t)\}. \quad (44.9)$$

Этот результат имеет важное значение для того случая, когда непрерывная физическая система должна приводиться в действие путем подачи дискретных значений $f(nT)$, создаваемых импульсным элементом. Так как для расчета процессов, происходящих на выходе такой физической системы необходимо применять преобразование Лапласа, то такому же преобразованию следует подвергать и входные функции. Между тем на вход системы поступают не функции, а дискретные последовательности, применять к которым преобразование Лапласа бессмысленно. Эту дилемму можно разрешить следующим путем. Заменяю последовательность $f(nT)$ сначала ступенчатой функцией $\bar{f}(t)$, причем такой, для которой $k\theta = 1$, и составляют \mathfrak{L} -изображение этой функции, т. е. $\mathfrak{L}\{\bar{f}\} = \bar{F}(s)$. Для того чтобы вновь вернуться

к последовательности, совершают предельный переход $\lim \bar{f} = f^*$ и такой же переход по формуле (44.9) от $\lim \mathfrak{L}\{\bar{f}\}$ к $\mathfrak{L}\{f^*\}$. Это сводится к тому, что последовательность $f(nT)$ в целях возможности применения преобразования Лапласа заменяется распределением $f(nT)\delta(t - nT)$ ¹⁾.

После появления импульсной техники слово *импульс* приобрело, к сожалению, двойной смысл. Во-первых, это слово уже давнѣе используется для бесконечно сильного удара, длящегося бесконечно малый промежуток времени, т. е. для явления, описываемого распределением $\delta(t - nT)$. В этом смысле слово импульс применялось Хевисайдом. Во-вторых, в настоящее время под словом импульс стали понимать явление, при котором какое-то значение функции отсчитывается и затем удерживается неизменным в течение конечного промежутка времени θ . Такой импульс называют иногда прямоугольным импульсом. В последнее время рассматривают также случай, когда отсчитанное значение функции $f(nT)$ в течение промежутка времени θ не остается постоянным, а изменяется по закону, определяемому некоторой функцией $\psi(t - nT)$ (рис. 44.2). Для того чтобы отличать один от другого оба смысла слова импульс, можно импульс, длящийся бесконечно малый промежуток времени, называть *мгновенным импульсом*, а импульс, длящийся конечный промежуток времени, — *длительным импульсом* (в американской литературе длительный импульс называют *пульсом*, мгновенный импульс — просто импульсом²⁾).

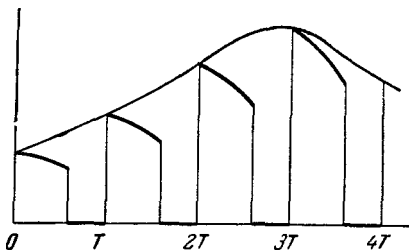


Рис. 44.2. Длительный импульс непрямоугольной формы.

Импульсный элемент, создающий мгновенные импульсы, преобразует входную функцию $f(t)$ в выходную функцию $f^*(t)$. Импульсный же элемент, создающий длительные прямоугольные импульсы, преобразует входную функцию $f(t)$ в выходную функцию $\bar{f}(t)$. Выясним, как связаны между собой функции $f^*(t)$ и $\bar{f}(t)$. В пространстве изображений эта связь очень

простой. Импульсный элемент, создающий мгновенные импульсы, преобразует входную функцию $f(t)$ в выходную функцию $f^*(t)$. Импульсный же элемент, создающий длительные прямоугольные импульсы, преобразует входную функцию $f(t)$ в выходную функцию $\bar{f}(t)$. Выясним, как связаны между собой функции $f^*(t)$ и $\bar{f}(t)$. В пространстве изображений эта связь очень

¹⁾ В основе этой операции лежит перемена местами предельного перехода и интеграла Лапласа:

$$\mathfrak{L}\{\lim \bar{f}(t)\} = \lim \mathfrak{L}\{\bar{f}(t)\}.$$

Эта замена, которая в рамках классического анализа бессмысленна, так как $\bar{f}(t)$ не является обычной функцией, в теории распределений становится законной.

²⁾ Автор также пользуется этой терминологией, однако мы сочли более целесообразным сохранить прежнюю терминологию. (Прим. перев.)

простая, а именно:

$$\bar{F}(s) = k \frac{1 - e^{-\vartheta s}}{s} F^*(e^{Ts}). \quad (44.10)$$

Множитель при изображении $F^*(e^{Ts})$, т. е. величину

$$G_{\vartheta}(s) = k \frac{1 - e^{-\vartheta s}}{s}, \quad (44.11)$$

можно понимать как передаточную функцию $G_{\vartheta}(s)$ цепи, включенной между входом $f^*(t)$ и выходом $\bar{f}(t)$ (см. блок-схему на

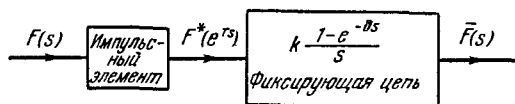


Рис. 44.3. Преобразование мгновенного импульса в длительный импульс.

рис. 44.3). Так как эта цепь в течение промежутка времени ϑ сохраняет неизменным значение функции $f(nT)$, даваемое функцией $f^*(t)$, то она называется *фиксирующей цепью* или *удлинителем импульсов*. Оригинал, соответствующим изображению $G_{\vartheta}(s)$, является весовая функция $g_{\vartheta}(t)$ цепи, определяемая формулой

$$g_{\vartheta}(t) = k[u(t) - u(t - \vartheta)]. \quad (44.12)$$

График этой функции изображен на рис. 44.4. Применив теперь теорему свертывания для преобразования Лапласа, мы найдем искомую связь между функциями \bar{f} и f^* в виде соотношения

$$\bar{f}(t) = g_{\vartheta}(t) * f^*(t). \quad (44.13)$$

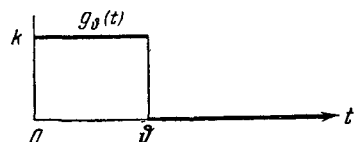


Рис. 44.4. Весовая функция фиксирующей цепи.

Если вычислить интеграл, выражающий свертку, в явном виде, то для $\bar{f}(t)$ получится ранее выведенная формула (44.2). Изображение $G_{\vartheta}(s)$ не является дробно-рациональной

функцией, поэтому удлинитель импульсов может быть реализован посредством электрической цепи только приближенно.

Так как функция $f^*(t)$ однозначно определяется функцией $f(t)$ (но не наоборот), то должна существовать также возможность для вычисления изображения $\mathcal{L}\{f^*(t)\} = F^*(e^{Ts})$ по изображению $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Прежде чем выполнить это вычисление, сделаем еще один шаг в отношении мгновенных отсчетов значений функции $f(t)$, а именно произведем эти мгновенные от-

счеты не только в моменты времени nT , но и в промежуточные равноотстоящие один от другого моменты $nT + \tau$, где τ имеет фиксированное значение, причем $0 \leq \tau < T$. Каждое фиксированное значение τ дает последовательность $f(nT + \tau)$, а совокупность этих последовательностей при переменном τ дает все значения функции $f(t)$. Последовательности $f(nT + \tau)$ соответствует \mathcal{Z} -изображение¹⁾

$$F^*(z, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT + \tau) z^{-n}. \quad (44.14)$$

Для функций

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT)$$

и

$$f^*(t, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT + \tau) \delta(t - nT - \tau)$$

\mathcal{Z} -изображениями будут

$$\mathcal{Z}\{f^*(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-nTs} = F^*(e^{Ts}),$$

$$\mathcal{Z}\{f^*(t, \tau)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT + \tau) e^{-(nT + \tau)s} = e^{-\tau s} F^*(e^{Ts}, \tau).$$

При определенных допущениях имеют место следующие соотношения:

$$F^*(e^{Ts}) = \frac{f(0)}{2} + \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F\left(s + jm \frac{2\pi}{T}\right) \quad (44.15)$$

$$F^*(e^{Ts}, \tau) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F\left(s + jm \frac{2\pi}{T}\right) e^{(s + jm \frac{2\pi}{T})\tau} \quad (0 < \tau < T) \quad (44.16)$$

В литературе можно встретить различные выводы этих формул. Однако в большей части случаев не оговариваются условия, при которых эти выводы возможны. В некоторых же случаях предлагаемые выводы математически просто бессмысленны.

¹⁾ Некоторые авторы называют изображение $F^*(z, \tau)$ «модифицированным \mathcal{Z} -изображением» (см., например, цитированную в сноске на стр. 208 книгу Э. Джурн), причем вместо τ используют величину $(m-1)T$ ($0 < m < 1$). Так как $F^*(z, \tau)$ есть не что иное, как настоящее \mathcal{Z} -изображение последовательности $f(nT + \tau)$, то указанное выше название имеет смысл только в том случае, когда объектом преобразования является не последовательность, а функция.

Приведем особенно простой вывод этих формул, разъясняющий одновременно их смысл.

Согласно формуле обращения преобразования Лапласа (2.8), мы имеем

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} e^{nTs} F(s) ds = \frac{1}{2\pi j} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{x+j(2m-1)T}^{x+j(2m+1)T} e^{nTs} F(s) ds$$

при $n \geq 1$.

Подставив $s = \sigma + jm \frac{2\pi}{T}$, мы получим

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi j} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{x-j\frac{\pi}{T}}^{x+j\frac{\pi}{T}} e^{nT\sigma} e^{nm2\pi j} F\left(\sigma + jm \frac{2\pi}{T}\right) d\sigma,$$

откуда, имея в виду, что $e^{nm2\pi j} = 1$, и обозначив переменную интегрирования снова через s , найдем

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi j} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{x-j\frac{\pi}{T}}^{x+j\frac{\pi}{T}} e^{nTs} F\left(s + jm \frac{2\pi}{T}\right) ds. \quad (44.17)$$

Если ряд

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} F\left(s + jm \frac{2\pi}{T}\right) \quad (44.18)$$

в промежутке $\left(x - j\frac{\pi}{T}, x + j\frac{\pi}{T}\right)$ равномерно сходится, то в равенстве (44.17) можно поменять местами суммирование и интегрирование; тогда мы будем иметь

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\frac{\pi}{T}}^{x+j\frac{\pi}{T}} e^{nTs} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F\left(s + jm \frac{2\pi}{T}\right) ds.$$

Это равенство справедливо при $n \geq 1$. Согласно сноске²⁾ на стр. 25, формула обращения дает при $t = 0$ не $f(0)$, а $f(0)/2$. Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\frac{\pi}{T}}^{x+j\frac{\pi}{T}} e^{nTs} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F\left(s + jm \frac{2\pi}{T}\right) ds = \begin{cases} \frac{f(0)}{2} & \text{при } n = 0, \\ f(nT) & \text{при } n \geq 1. \end{cases} \quad (44.19)$$

Далее, имея в виду, что $s = x + jy$, мы найдем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\frac{\pi}{T}}^{x+j\frac{\pi}{T}} e^{nTs} T \frac{f(0)}{2} ds &= \frac{T}{2\pi} e^{nTx} \frac{f(0)}{2} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} e^{jnTy} dy = \\ &= \begin{cases} \frac{f(0)}{2} & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n \geq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (44.20)$$

Сложив равенства (44.19) и (44.20), мы получим равенство

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\frac{\pi}{T}}^{x+j\frac{\pi}{T}} e^{nTs} \left\{ T \frac{f(0)}{2} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F\left(s + jm \frac{2\pi}{T}\right) \right\} ds = f(nT), \quad (44.21)$$

справедливое при всех $n \geq 0$. Согласно формуле обращения (37.7),

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi j} \int z^{n-1} F^*(z) dz,$$

причем интеграл следует взять вдоль окружности радиуса r ($z = re^{j\varphi}$, $-\pi < \varphi \leq \pi$). После подстановки $z = e^{Ts}$ окружность переходит в вертикальный отрезок, расположенный в плоскости s на расстоянии $x = \ln r/T$ от оси y и имеющий ординатами своих конечных точек $\pm j\frac{\pi}{T}$. В результате мы получим

$$\frac{T}{2\pi j} \int_{x-j\frac{\pi}{T}}^{x+j\frac{\pi}{T}} e^{nTs} F^*(e^{Ts}) ds = f(nT). \quad (44.22)$$

Левая часть каждого из равенств (44.21) и (44.22) представляет собой не что иное, как выражение для коэффициентов Фурье. В самом деле, имея в виду, что $s = x + jy$, мы можем представить левую часть, например, последнего равенства в виде

$$\frac{T}{2\pi j} \int_{x-j\frac{\pi}{T}}^{x+j\frac{\pi}{T}} e^{nTs} F^*(e^{Ts}) ds = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} e^{jnTy} [e^{nTx} F^*(e^{T(x+jy)})] dy.$$

На основании теоремы единственности для рядов Фурье из равенства коэффициентов Фурье вытекает равенство функций,

представляемых этими рядами¹⁾. Следовательно,

$$TF^*(e^{Ts}) = T \frac{f(0)}{2} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F\left(s + jm \frac{2\pi}{T}\right),$$

но это есть не что иное, как равенство (44.15). Аналогичным образом выводится и равенство (44.16), причем в него значение $\hat{f}(0)$ не входит и поэтому при $n = 0$ указанное выше осложнение не возникает²⁾.

Равенство (44.17) можно понимать как представление функции $f(nT)$ в виде изображения, полученного в результате преобразования Фурье. Поэтому из приведенного вывода следует, что изображения, получаемые в результате преобразования Фурье из некоторой функции при целочисленных значениях ее аргумента, представляют собой коэффициенты Фурье другой функции.

§ 45. Импульсные системы

Перейдем к рассмотрению систем, представляющих собой сочетание периодических импульсных элементов с электрическими цепями или, в более общем случае, с линейными системами. Напомним, что линейная система характеризуется своей передаточной функцией $G(s)$ или соответственно своей весовой функцией $g(t)$, причем символически передаточная функция изображается блоком, внутри которого помещается надпись $G(s)$. Напомним также, что выходная функция $Y(s)$ [или $y(t)$ в пространстве оригиналов], соответствующая входной функции $F(s)$ [в пространстве оригиналов — функции $f(t)$], определяется при нулевых начальных значениях в пространстве изображений формулой

$$Y(s) = G(s)F(s),$$

¹⁾ Если две непрерывные функции имеют одинаковые коэффициенты Фурье, то эти функции тождественны. Изображение $F^*(e^{Ts})$, представляя собой степенной ряд относительно e^{Ts} , непрерывно. Ряд (44.18) мы предположили равномерно сходящимся, и так как его члены являются непрерывными функциями, то и сам этот ряд также представляет собой непрерывную функцию.

²⁾ Приведенное доказательство основано на определенном допущении относительно ряда (44.18), следовательно, и относительно функции $F(s)$. Если для доказательства применить формулу суммирования Пуассона, то в отношении функции $f(t)$ необходимо сделать следующие допущения: 1) функция $f(t)$ имеет в каждом конечном промежутке ограниченную производную; 2) изображение $\mathfrak{L}\{|f|\}$ существует. См. Doetsch G., Der Zusammenhang zwischen den Laplace-Transformierten einer Funktion und der zugeordneten Treppenfunktion, Regelungstechnik 5 (1957), стр. 86—88

а в пространстве оригиналов — формулой

$$y(t) = g(t) * f(t)$$

[см. соотношения (12.10), (12.11), (15.11), (15.12), (20.8) и (20.10)].

Линейные системы рассчитываются при помощи преобразования Лапласа, в то время как для исследования импульсных элементов наиболее удобным инструментом является \mathcal{Z} -преобразование; поэтому для расчета импульсных систем применяются одновременно оба преобразования.

Из большого числа возможных комбинаций линейных систем и периодических импульсных элементов рассмотрим только основные.

1. Импульсный элемент, создающий мгновенные импульсы

1. Импульсный элемент расположен до линейной системы (рис. 45.1).

Входная функция $F(s)$ разбивается на импульсы; система, характеризуемая передаточной функцией $G(s)$, возбуждается выходной функцией $F^*(e^{Ts})$ импульсного элемента [см. сказанное на стр. 228 по поводу формулы (44.9)]. Следовательно, на

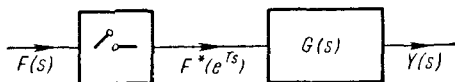


Рис. 45.1. Импульсный элемент до линейной системы.

языке преобразования Лапласа выходная функция $Y(s)$ системы определяется формулой

$$Y(s) = G(s) F^*(e^{Ts}) \quad (45.1)$$

или в явном виде

$$Y(s) = G(s) \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-nTs} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) [e^{-nTs} G(s)].$$

На основании первой теоремы сдвига для преобразования Лапласа изображению $Y(s)$ соответствует оригинал

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) g(t - nT),$$

причем $g(t - nT) = 0$ при $nT > t$. Следовательно, члены с $n > t/T$ отпадают, и поэтому в пространстве оригиналов мы

имеем

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\lfloor t/T \rfloor} f(nT) g(t - nT) \quad (45.2)$$

Эту формулу можно вывести также следующим образом. Согласно сказанному в п. 2 § 13, отклик на импульс мощностью в единицу, происходящий в момент времени $t = 0$, равен $g(t)$; следовательно, отклик на импульс мощностью в $f(nT)$, происходящий в момент времени $t = nT$, равен

$$f(nT) g(t - nT).$$

До момента времени t импульсы возникают в моменты $0, T, 2T, \dots, \lfloor t/T \rfloor T$. Весовая функция $g(t)$ есть отклик на единичный скачок, следовательно, $g(0) = 0$, и поэтому выходная функция $y(t)$ непрерывна также при переходных значениях $t = nT$, так как при этих t весовая функция $g(t - nT) = g(0)$.

Описание рассмотренного процесса на языке \mathfrak{Z} -преобразования — см. на стр. 237 в конце подпункта 3.

2. Синхронно работающие импульсные элементы, расположенные до и после линейной системы (рис. 45.2)

Импульсный элемент, расположенный после линейной системы, приводит к тому, что выходная функция $y(t)$ отсчитывается

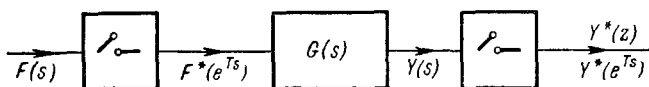


Рис. 45.2. Синхронно работающие импульсные элементы до и после линейной системы.

не непрерывно, как в предыдущем случае, а только в моменты времени $t = nT$. Формула (45.2) принимает вид

$$y(nT) = \sum_{v=0}^n f(vT) g((n - v)T) \quad (45.3)$$

Положив

$$\sum_{n=0}^{\infty} y(nT) z^{-n} = Y^*(z), \quad \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n} = F^*(z), \quad \sum_{n=0}^{\infty} g(nT) z^{-n} = G^*(z),$$

мы получим из формулы (45.3) после применения теоремы свертывания (38.7) для \mathfrak{Z} -преобразования соотношение

$$Y^*(z) = F^*(z) G^*(z) \quad (45.4)$$

Это соотношение, выведенное с помощью \mathcal{Z} -преобразования, дает очень простое описание процесса в том случае, когда он происходит прерывно и на входе, и на выходе¹⁾. Оно является аналогом соотношения $Y(s) = F(s)G(s)$, имеющего место для непрерывного процесса, в связи с чем функцию $G^*(z)$ можно назвать передаточной функцией для случая синхронно работающих импульсных элементов.

Если известно, что $y(nT)$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к установившемуся состоянию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y(nT) = y(\infty),$$

то можно применить теорему 39.2, и мы получим

$$y(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1+0} (z-1)F^*(z)G^*(z). \quad (45.5)$$

3. Несинхронно работающие импульсные элементы, расположенные до и после линейной системы

От входной функции импульсы берутся в моменты времени nT , а от выходной функции — в моменты времени $nT + \tau$ ($0 < \tau < T$). И в этом случае можно использовать результат, полученный в подпункте 1. Достаточно подставить в соотношение (45.2) $t = nT + \tau$; тогда мы будем иметь

$$y(nT + \tau) = \sum_{v=0}^n f(vT)g((n-v)T + \tau) \quad (45.6)$$

Введя по образцу формулы (44.14) \mathcal{Z} -изображения

$$\sum_{n=0}^{\infty} y(nT + \tau)z^{-n} = Y^*(z, \tau), \quad \sum_{n=0}^{\infty} g(nT + \tau)z^{-n} = G^*(z, \tau),$$

мы получим из равенства (45.6) на основании теоремы свертывания (38.7) соотношение

$$Y^*(z, \tau) = F^*(z)G^*(z, \tau) \quad (45.7)$$

Мы видим, что описание процесса на языке \mathcal{Z} -преобразования получается особенно простым. Функцию $G^*(z, \tau)$ можно рассматривать как передаточную функцию для случая несинхронно работающих импульсных элементов.

Варьируя τ от нуля до T , мы получим описание случая 1 на языке \mathcal{Z} -преобразования. Такое описание целесообразно для процессов, протекающих частично непрерывно, а частично прерывно.

¹⁾ В литературе соотношение (45.4) доказывается иногда очень сложным путем, например, на основе равенства (44.15).

4. Импульсный элемент расположен между двумя линейными системами (рис. 45.3)

Пусть обе системы характеризуются своими весовыми функциями $g_1(t)$ и $g_2(t)$ или соответственно передаточными функциями $G_1(s)$ и $G_2(s)$. Если входная функция $h(t)$ [или $H(s)$]

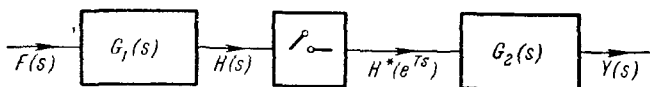


Рис. 45.3. Импульсный элемент между двумя линейными системами.

поступает через импульсный элемент в систему g_2 (или G_2), то выходной функцией будет: в пространстве оригиналов, согласно формуле (45.2),

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\lfloor t/T \rfloor} h(nT) g_2(t - nT),$$

а в пространстве изображений, согласно формуле (45.1),

$$Y(s) = G_2(s) H^*(e^{Ts}) = G_2(s) \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) e^{-nTs}.$$

В нашем случае функция $h(t)$ [или $H(s)$] является выходной функцией из системы g_1 (или G_1), следовательно,

$$h(t) = g_1(t) * f(t), \quad H(s) = G_1(s) F(s).$$

Таким образом,

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\lfloor t/T \rfloor} g_2(t - nT) [g_1(t) * f(t)]_{t=nT} = \sum_{n=0}^{\lfloor t/T \rfloor} g_2(t - nT) \int_0^{nT} g_1(nT - \tau) f(\tau) d\tau \quad (45.8)$$

$$Y(s) = G_2(s) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} \int_0^{nT} g_1(nT - \tau) f(\tau) d\tau \quad (45.9)$$

Примечание. Как мы видим, основным является случай, рассмотренный в подпункте 1. Из него простым путем получаются остальные комбинации.

II. Импульсный элемент, создающий длительные импульсы

1. Импульсный элемент расположен до линейной системы

Импульсный элемент создает функцию $\bar{F}(s)$, определяемую формулой (44.4). Эта функция возбуждает систему. Выходная функция системы на языке преобразования Лапласа имеет вид

$$Y(s) = k \frac{1 - e^{-\vartheta s}}{s} G(s) F^*(e^{Ts}) \quad (45.10)$$

Функция

$$G_{\vartheta}(s) = k \frac{1 - e^{-\vartheta s}}{s}$$

представляет собой \mathcal{L} -изображение длительного импульса $g_{\vartheta}(t)$, изображенного на рис. 44.4. Следовательно,

$$G_{\vartheta}(s) G(s) = R(s)$$

есть \mathcal{L} -изображение отклика $r(t)$ системы на длительный импульс $g_{\vartheta}(t)$, рассматриваемый как возбуждение. Из равенства (45.10), переписанного в виде

$$Y(s) = R(s) F^*(e^{Ts}),$$

получаем для выходной функции в пространстве оригиналов формулу

$$y(t) = \sum_{n=0}^{[t/T]} f(nT) r(t - nT) \quad (45.11)$$

сходную с формулой (45.2).

Отклик $r(t)$ системы на длительный импульс можно выразить также через более привычный отклик на единичный скачок системы, который раньше мы обозначали через $y_u(t)$, а теперь будем обозначать через $h(t)$. Так как

$$g_{\vartheta}(t) = k[u(t) - u(t - \vartheta)], \quad \text{причем } u(t - \vartheta) = 0 \quad \text{при } t - \vartheta < 0,$$

то

$$r(t) = k[h(t) - h(t - \vartheta)], \quad \text{причем } h(t - \vartheta) = 0 \quad \text{при } t - \vartheta < 0.$$

Следовательно, в равенстве (45.11) следует заменить $r(t - nT)$ на

$$h(t - nT) - h(t - nT - \vartheta).$$

Положив в последнем члене $n = [t/T]$, мы получим

$$t - nT - \vartheta = t - [t/T]T - \vartheta = t - [t] - \vartheta \begin{cases} \geq 0 & \text{при } t - [t] \geq \vartheta \\ < 0 & \text{при } t - [t] < \vartheta. \end{cases}$$

Так как функция h при отрицательных значениях аргумента равна нулю, то последний член суммы при $t - [t] < \theta$ дает только слагаемое $k f([t]) h(t - [t])$. Следовательно, окончательно мы будем иметь

$$y(t) = \begin{cases} k \sum_{n=0}^{[t/T]} f(nT) [h(t - nT) - h(t - nT - \theta)] & \text{при } t - [t] \geq \theta \\ k \sum_{n=0}^{[t/T]-1} f(nT) [h(t - nT) - h(t - nT - \theta)] + \\ + k f([t]) h(t - [t]) & \text{при } t - [t] < \theta \end{cases} \quad (45.12)$$

2. Синхронно работающие импульсные элементы, расположенные до и после линейной системы

В этом случае выходная функция в формуле (45.11) отсчитывается только в моменты времени $t = nT$ и в течение длительности импульса θ сохраняется постоянной. Обозначив ее через $\bar{y}(t)$, мы будем иметь

$$\bar{y}(t) = \begin{cases} y(nT) = \sum_{v=0}^n f(vT) r((n-v)T) & \text{при } nT \leq t \leq nT + \theta \\ 0 & \text{при } nT + \theta < t < (n+1)T \end{cases} \quad (45.13)$$

Если учесть только значения $y(nT)$ и составить \mathcal{Z} -изображения последовательностей, получившихся в результате действия импульсных элементов, то после применения теоремы свертывания мы получим из первой строки формулы (45.13) соотношение

$$Y^*(z) = F^*(z) R^*(z) \quad (45.14)$$

Это соотношение, представляющее собой описание процесса на языке \mathcal{Z} -преобразования, аналогично соотношению (45.4), только теперь в правую часть вместо \mathcal{Z} -изображения $G^*(z)$ отклика на мгновенный импульс входит \mathcal{Z} -изображение $R^*(z)$ отклика на длительный импульс.

От соотношения (45.14) можно перейти к преобразованию Лапласа. Для этой цели сделаем подстановку $z = e^{Ts}$ и одновременно умножим обе части соотношения (45.14) на $G_0(s)$; мы получим

$$G_0(s) Y^*(e^{Ts}) = G_0(s) F^*(e^{Ts}) R^*(e^{Ts}),$$

откуда, имея в виду равенство (44.10), найдем

$$\bar{Y}(s) = \bar{F}(s) R^*(e^{Ts}) \quad (45.15)$$

Это есть описание процесса на языке \mathcal{L} -преобразования. Величина $R^*(e^{Ts})$ играет роль передаточной функции линейной системы, если входная функция F до входа и выходная функция Y после выхода преобразуются в длительные импульсы.

3. Несинхронно работающие импульсные элементы, расположенные до и после линейной системы

Если от входной функции длительные импульсы берутся в моменты времени nT , а от выходной функции — в моменты времени $nT + \tau$ ($0 < \tau < T$), причем те и другие импульсы с длительностью ϑ , то получается ступенчатая функция. Обозначим ее через $\bar{y}(t, \tau)$. Подставив в равенство (45.11) $t = nT + \tau$, мы будем иметь

$$\bar{y}(t, \tau) = \begin{cases} y(nT + \tau) = \sum_{v=0}^n f(vT) r((n-v)T + \tau) & \text{при } nT + \tau \leq t \leq nT + \tau + \vartheta \\ 0 & \text{при } nT + \tau + \vartheta < t < (n+1)T + \tau \end{cases} \quad (45.16)$$

Положив

$$\sum_{n=0}^{\infty} y(nT + \tau) z^{-n} = Y^*(z, \tau), \quad \sum_{n=0}^{\infty} r(nT + \tau) z^{-n} = R^*(z, \tau),$$

мы получим из соотношения (45.16) описание процесса на языке \mathcal{Z} -преобразования:

$$Y^*(z, \tau) = F^*(z) R^*(z, \tau) \quad (45.17)$$

Варьируя в этом равенстве τ , мы получим описание случая 1 на языке \mathcal{Z} -преобразования.

III. Длительные импульсы прямоугольной формы

Формулы для такого случая лишь незначительно отличаются от формул, полученных для импульсного элемента, создающего прямоугольные импульсы. Пусть искажение прямоугольных импульсов осуществляется посредством произвольной функции

$\psi(t)$, определенной в промежутке $0 \leq t < T$. Тогда функция времени $f(t)$ преобразуется в последовательность длительных импульсов

$$\bar{f}(t) = f(nT) \psi(t - nT) \quad \text{при} \quad nT \leq t < (n+1)T, \quad (45.18)$$

которые будем называть ψ -импульсами (рис. 44.2 на стр. 229). Прямоугольные импульсы соответствуют случаю

$$\psi(t) = \begin{cases} k & \text{при } 0 \leq t < \vartheta, \\ 0 & \text{при } \vartheta \leq t < T. \end{cases}$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{\bar{f}\} = \bar{F}(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(nT) \psi(t - nT) dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T e^{-s(\tau+nT)} f(nT) \psi(\tau) d\tau = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-nTs} \int_0^T e^{-st} \psi(t) dt. \end{aligned}$$

В правую часть входит «конечное» \mathfrak{L} -изображение

$$\int_0^T e^{-st} \psi(t) dt.$$

Обозначив его через $\Psi(s)$, мы получим

$$\bar{F}(s) = \Psi(s) \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-nTs} = \Psi(s) F^*(e^{Ts}). \quad (45.19)$$

Таким образом, единственная разница по сравнению со случаем прямоугольных импульсов состоит в том, что функция $G_0(s)$ заменяется функцией $\Psi(s)$.

1. Импульсный элемент расположен до линейной системы

Выходная функция системы равна

$$Y(s) = G(s) \bar{F}(s) = \Psi(s) G(s) F^*(e^{Ts}).$$

Введем обозначение

$$\Psi(s) G(s) = R(s). \quad (45.20)$$

Соответствующий оригинал равен

$$r(t) = \psi(t) * g(t),$$

причем при $t \geq T$ следует положить $\psi(t) = 0$; поэтому

$$r(t) = \begin{cases} \int_0^t \psi(x) g(t-x) dx & \text{при } t < T, \\ \int_0^T \psi(x) g(t-x) dx & \text{при } t \geq T. \end{cases} \quad (45.21)$$

В пространстве \mathfrak{L} -изображений процесс описывается соотношением

$$Y(s) = R(s) F^*(e^{Ts}) \quad (45.22)$$

откуда, как и в случае формулы (45.2), вытекает, что оригинал равен

$$y(t) = \sum_{v=0}^{[t/T]} r(t-vT) f(vT) \quad (45.23)$$

Из сказанного по поводу формулы (45.7) следует, что рассматриваемый процесс можно описать также посредством соотношения

$$y(nT + \tau) = \sum_{v=0}^n r((n-v)T + \tau) f(vT) \quad (0 \leq \tau < T) \quad (45.24)$$

или на языке \mathfrak{Z} -преобразования

$$Y^*(z, \tau) = R^*(z, \tau) F^*(z) \quad (45.25)$$

2. Импульсные элементы расположены до и после линейной системы

Все рассуждения остаются в точности такими же, как и в случае прямоугольных импульсов, только функцию $R(s) = G_0(s)G(s)$ следует заменить функцией $R(s) = \Psi(s)G(s)$. Формулы (45.13) — (45.15), если иметь в виду новый смысл функции $R(s)$ или соответственно $r(t)$, остаются неизменными.

Пример к подпункту 1

Пусть цепь представляет собой I -систему (интегрирующее звено) с передаточной функцией $G(s) = a/s$. В этом случае

$$R(s) = a \frac{\Psi(s)}{s}$$

и

$$r(t) = a \int_0^t \psi(x) dx = \begin{cases} a \int_0^t \psi(x) dx = a\varphi(t) & \text{при } t < T, \\ a \int_0^T \psi(x) dx = a\varphi(T) & \text{при } t \geq T. \end{cases}$$

Согласно равенству (45.23), мы имеем

$$\begin{aligned} y(nT + \tau) &= \sum_{v=0}^{n-1} r((n-v)T + \tau) f(vT) + r(\tau) f(nT) = \\ &= a\varphi(T) \sum_{v=0}^{n-1} f(vT) + a\varphi(\tau) f(nT) \end{aligned}$$

(при $n = 0$, т. е. при $0 \leq t < T$, сумма не существует).

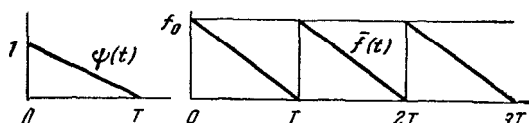


Рис. 45.4. Длительные импульсы входной функции $f(t) \equiv f_0$, искаженные посредством функции $\psi(t)$.

В частном случае, когда $f(t) \equiv f_0$, мы получим «отклик на скачок»

$$y(nT + \tau) = af_0 [n\varphi(T) + \varphi(\tau)].$$

Если в качестве функции ψ , осуществляющей искажение прямоугольных импульсов, выбрать функцию

$$\psi = 1 - \frac{t}{T}$$

(рис. 45.4), то для $\varphi(\tau)$ и $\varphi(T)$ мы будем иметь выражения

$$\varphi(\tau) = \tau - \frac{\tau^2}{2T}, \quad \varphi(T) = \frac{T}{2},$$

следовательно (рис. 45.5),

$$y(nT + \tau) = af_0 \left(n \frac{T}{2} + \tau - \frac{\tau^2}{2T} \right).$$

Различные изображения для рассматриваемого частного случая имеют вид

$$\Psi(s) = \int_0^T e^{-st} \left(1 - \frac{t}{T}\right) dt = \frac{1}{s} - \frac{1}{T} \frac{1 - e^{-Ts}}{s^2},$$

$$R(s) = a \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{T} \frac{1 - e^{-Ts}}{s^3} \right),$$

$$F^*(z) = f_0 \frac{z}{z-1},$$

$$\begin{aligned} R^*(z, \tau) &= r(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} r(nT + \tau) z^{-n} = a \left(\tau - \frac{\tau^2}{2T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T}{2} z^{-n} \right) = \\ &= a \left(\tau - \frac{\tau^2}{2T} + \frac{T}{2} \frac{1}{z-1} \right). \end{aligned}$$

Описанием явления в пространстве изображений на языке \mathcal{Z} -преобразования, согласно равенству (45.22), будет

$$Y(s) = af_0 \frac{1}{s} \frac{\Psi(s)}{1 - e^{-Ts}},$$

а на языке \mathcal{Z} -преобразования, согласно равенству (45.25), —

$$Y^*(z, \tau) = af_0 \left(\tau - \frac{\tau^2}{2T} + \frac{T}{2} \frac{1}{z-1} \right) \frac{z}{z-1}.$$

Если исходить не из готовых формул (45.23) и (45.24), то необходимо перевести в пространство оригиналов изображение $Y(s)$ или $Y^*(z, \tau)$. В таком случае для Y^* следует воспользоваться соответствиями

$$\frac{z}{z-1} \rightarrow 1, \quad \frac{z}{(z-1)^2} \rightarrow n.$$

В результате получится такое же выражение, как выше. Для перевода в пространство оригиналов изображения Y необходимо воспользоваться приводимой ниже теоремой, полезной во всех задачах импульсной техники, в кото-

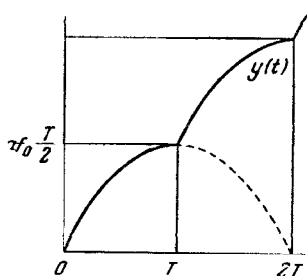


Рис. 45.5. Выходная функция I -системы при возбуждении посредством длительных импульсов, изображенных на рис. 45.4.

$$F^*(e^{Ts}) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}},$$

следовательно, $f(t) \equiv 1$.

Теорема 45.1. Пусть функция $\psi(t)$, определенная при значениях $0 \leq t < T$, периодически продолжена с периодом T , в результате чего получается функция $\psi_p(t)$, определенная при

значениях $t \geq 0$, и пусть

$$\Psi(s) = \int_0^T e^{-st} \psi(t) dt, \quad \Psi_p(s) = \int_0^\infty e^{-st} \psi_p(t) dt.$$

В таком случае

$$\Psi_p(s) = \frac{\Psi(s)}{1 - e^{-Ts}}.$$

Отсюда вытекает, что изображению $Y(s)$ соответствует оригинал

$$y(t) = af_0 \int_0^t \psi_p(x) dx,$$

причем $\psi_p(t)$ есть периодическое продолжение функции $1 - t/T$, следовательно, тождественно совпадает с функцией $\bar{f}(t)$ (см. рис. 45.4). Это означает, что $y(t)$ совпадает с ранее полученным выражением для $y(nT + \tau)$, так как

$$\int_0^T \left(1 - \frac{x}{T}\right) dx = \frac{T}{2}, \quad \int_0^\tau \left(1 - \frac{x}{T}\right) dx = \tau - \frac{\tau^2}{2T} \quad (0 \leq \tau < T).$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПО ЛАПЛАСУ

Понятие распределения, введенное примерно в 1945 г. французским математиком Лораном Шварцем, представляет собой обобщение понятия функции. Это новое понятие оказалось весьма плодотворным в инженерных науках и позволило придать точный математический смысл некоторым противоречивым образам, встречающимся в физике и технике, например функции Дирака δ . Кроме того, теория распределений дала возможность избавиться от многих трудностей, накопившихся в классическом математическом анализе.

Понятие распределения легче всего пояснить, если сначала рассмотреть классическое понятие функции с новой точки зрения. При обычном понимании под функцией $y = f(x)$ имеют в виду соответствие между отдельными значениями y и отдельными значениями x . Такому пониманию отвечает физическое представление о возможности установления точного значения переменной величины y , например напряжения для каждого отдельного момента времени. Между тем то, что в действительности определяется измерением, является не самим напряжением, а его воздействием на измерительную аппаратуру. Каждое измерение дает лишь среднее или средневзвешенное значение величины по некоторому промежутку, содержащему данную точку, причем весовая функция $\varphi(x)$ и промежуток измерения зависят от измерительной аппаратуры. Функции $\varphi(x)$ мы будем называть в дальнейшем основными. Таким образом, измерения дают значения интегралов

$$\int f(x) \varphi(x) dx,$$

распространенных на подходящие (большие или малые) промежутки. При таком интегрировании играют роль не отдельные значения $f(x)$, а весь ход изменения значений $f(x)$, иными

словами «распределение» $f(x)$ над всеми x . Поэтому совокупность указанных интегралов называют *распределением*. После такого упрощенного определения понятия распределения перейдем к точному математическому определению¹⁾.

I. Функционал, определяемый функцией

Пусть функция $f(x)$ определена на всей оси $-\infty < x < \infty$, которую для краткости будем обозначать через R^1 . Для того чтобы все последующие утверждения были верны в общем виде, предположим, что функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу в каждом конечном промежутке, или, как принято говорить, локально интегрируема в смысле Лебега. Это предположение вводится только ради построения общей теории; функции, встречающиеся в технических приложениях, всегда интегрируемы в смысле Римана и поэтому инженеру не следует пугаться введения более общего понятия.

Основные функции $\varphi(x)$ выбираются так, чтобы операции над ними не вызывали никаких трудностей. Для этого вводится предположение, что каждая функция $\varphi(x)$, хотя и определена на всей оси R^1 , но вне некоторого конечного промежутка (который для разных функций φ может быть различным) равна нулю. Далее, функция $\varphi(x)$ принимается бесконечно дифференцируемой. Отсюда вытекает существенное для дальнейшего следствие: функция $\varphi(x)$ и все ее производные равны нулю на концах конечных промежутков, на которых φ определена, так как в этих точках равны нулю «внешние» производные. Совокупность всех этих φ составляет так называемое пространство функций \mathscr{D} , которое будем обозначать через \mathscr{D} .

Вследствие предположения, сделанного о функции φ , интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx$$

в действительности следует распространить только на конечный промежуток, поэтому не возникает никаких трудностей в отношении сходимости в бесконечности, следовательно, интеграл существует для всякой функции f и для всякой функции φ из пространства \mathscr{D} . Этот интеграл можно понимать как «внутреннее произведение» f и φ , что позволяет воспользоваться обычной

¹⁾ Оригинальные работы Л. Шварца предназначены для чистых математиков и требуют для своего понимания довольно больших математических знаний. Доступное введение в теорию распределений содержится в книге: Zemanian A. H., *Distribution theory and transform analysis*, McGraw-Hill, New York, 1965, 371 стр.

символикой и ввести обозначение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx = \langle f, \varphi \rangle.$$

Таким образом, если функция f фиксирована, то каждой функции φ из пространства \mathcal{D} можно сопоставить некоторое число. Это обстоятельство выражают словами: функция f определяет на пространстве \mathcal{D} функционал $\langle f, \varphi \rangle$. Этот функционал обладает свойством линейности, т. е.

$$\langle f, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \langle f, \varphi_1 \rangle + \langle f, \varphi_2 \rangle. \quad (1)$$

Основная идея теории Шварца состоит в представлении функции f значениями функционала $\langle f, \varphi \rangle$. К сколь глубоким последствиям приводит эта идея, сразу видно из того, что она позволяет указать производную для каждой локально интегрируемой функции $f(x)$, даже если эта функция недифференцируема. В самом деле, если функция $f(x)$ обладает локально интегрируемой производной $f'(x)$ в классическом смысле, то, согласно сказанному выше, эта производная представляется функционалом

$$\langle f', \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \varphi(x) dx.$$

Если преобразовать этот интеграл посредством интегрирования по частям, то вклады, даваемые концами промежутков, отпадут, так как там φ исчезает, и остается только

$$\langle f', \varphi \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx = - \langle f, \varphi' \rangle.$$

Правая часть этого равенства имеет для каждой локально интегрируемой функции f вполне определенный смысл и представляет собой функционал на пространстве \mathcal{D} . Поэтому сама собой напрашивается мысль приписать каждой такой функции f *обобщенную производную*. Для того чтобы отличать обобщенную производную от обычной (классической) производной, будем обозначать ее через D . Таким образом, мы можем написать

$$\langle Df, \varphi \rangle = - \langle f, \varphi' \rangle. \quad (2)$$

Обратим внимание на то, что введение такого условия только устанавливает, какое значение Df сопоставляется с каждой функцией φ . Следовательно, обобщенная производная Df в отличие от классической производной $f'(x)$ не имеет смысла числа.

Пример. Пусть $f(x)$ есть функция единичного скачка, т. е.

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

В классическом смысле эта функция недифференцируема, так как в точке $x = 0$ она претерпевает разрыв. По-другому обстоит дело с точки зрения теории распределений. В самом деле,

$$\langle Du, \varphi \rangle = - \langle u, \varphi' \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0). \quad (3)$$

Следовательно, функционал, представляющий обобщенную производную Du , имеет для каждой функции φ из пространства \mathcal{D} значение $\varphi(0)$. Что это означает, станет ясно из дальнейшего.

Повторяя указанный процесс, мы приходим к определению k -й обобщенной производной D^k функции f :

$$\langle D^k f, \varphi \rangle = (-1)^k \langle f, \varphi^{(k)} \rangle \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (4)$$

Каждая локально интегрируемая функция сколь угодно раз может быть дифференцируема в обобщенном смысле.

Пример:

$$\langle D^k u, \varphi \rangle = (-1)^k \langle u, \varphi^{(k)} \rangle = (-1)^k \int_0^{\infty} \varphi^{(k)}(x) dx = (-1)^{k-1} \varphi^{(k-1)}(0).$$

Новое понятие дифференцируемости охватывает старое понятие, т. е. если функция $f(x)$ имеет k -ю производную $f^{(k)}(x)$, то эта производная определяет тот же функционал, что и обобщенная производная $D^k f$.

II. Распределение

Предыдущие объяснения имели своей целью подготовить переход от классического анализа к современной теории распределений. Исходя от частного случая — от функционала, определяемого функцией f и сопоставляющего каждой функции φ из пространства \mathcal{D} значение $\langle f, \varphi \rangle$, рассмотрим теперь *абстрактный функционал* T , сопоставляющий каждой функции φ из \mathcal{D} число, которое будем обозначать через $\langle T, \varphi \rangle$. При этом потребуем, чтобы этот функционал был *линейным* [определение такое же, как и выше; см. соотношение (1)] и *непрерывным*. Последнее свойство требует специального определения. Будем ориентироваться при этом на определение непрерывности обычной функции $g(x)$. Последняя называется непрерывной в точке x , если для каждой сходящейся к x последовательности x_n ($n = 0, 1, \dots$) имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x).$$

Смысл выражения « x_n при $n \rightarrow \infty$ сходится к x или в символической записи $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ » должен быть известен читателю из классического анализа. Что же касается смысла выражения $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$ в пространстве \mathcal{D} , то, конечно, сначала необходимо определить этот смысл. Введем следующее определение.

Последовательность φ_n из пространства \mathcal{D} сходится при $n \rightarrow \infty$ к φ из пространства \mathcal{D} , если все φ_n , лежащие вне фиксированного отрезка I , равны нулю и если для каждого отдельного $k = 0, 1, \dots$ выполняется условие: $\varphi_n^{(k)}$ при $n \rightarrow \infty$ стремится на отрезке I равномерно к $\varphi^{(k)}(x)$.

Для того чтобы четко различать это понятие сходимости от понятия $x_n \rightarrow x$ классического анализа, будем писать

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{D}) \varphi_n = \varphi.$$

Теперь, аналогично понятию непрерывности обычной функции $g(x)$, мы можем ввести определение:

Функционал T называется непрерывным в элементе φ из пространства \mathcal{D} , если для каждой сходящейся к φ последовательности φ_n имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T, \varphi_n \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

Теперь мы имеем все необходимое для следующего определения:

Определенный над пространством \mathcal{D} функционал T , линейный и во всех элементах φ пространства \mathcal{D} непрерывный, называется распределением.

Приведем конкретный пример этого абстрактного понятия. Можно доказать¹⁾, что функционал $\langle f, \varphi \rangle$, определенный локально интегрируемой функцией $f(x)$, представляет собой распределение. Будем называть такое распределение *регулярным распределением* и обозначать его через \tilde{f} , а в тех случаях, когда надо отличить его от функции f в классическом смысле, — через $[f]$.

Множество всех распределений можно рассматривать как пространство, которое будем обозначать через \mathcal{D}' (пространство, двойственное по отношению к пространству \mathcal{D}). Это пространство содержит все регулярные распределения, но безусловно также другие элементы, как сейчас мы это покажем на конкретном примере. Выше [см. формулу (3)] мы установили, что

¹⁾ В этом месте необходимо предположение об интегрируемости функции $f(x)$ по Лебегу, так как интегрируемости по Риману в общем случае недостаточно для доказательства непрерывности.

обобщенная производная единичного скачка $u(x)$ обладает свойством

$$\langle Du, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Du есть функционал, так как он сопоставляет каждому φ число, а именно $\varphi(0)$. Очевидно, что функционал Du не только линейный, но и непрерывный, так как когда φ_n в определенном выше смысле сходится к φ , то $\varphi_n(0)$ тривиальным образом стремится к $\varphi(0)$. Следовательно, Du есть распределение. Будем обозначать его буквой δ . Для этого распределения справедливы соотношения:

$$\delta = Du, \quad (5)$$

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0). \quad (6)$$

Тем не менее δ безусловно не является регулярным распределением. В самом деле, если бы δ представляла собой функцию $\delta(x)$, то должно было бы соблюдаться равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0). \quad (7)$$

Однако не существует локально интегрируемой функции $\delta(x)$, которая обладала бы таким свойством¹⁾.

Теперь понятно, почему мы обозначили распределение, определенное равенством (6), буквой δ , т. е. той буквой, которой уже давно принято обозначать образ, введенный Дираком. Этот образ должен был иметь именно то свойство, которое выражается соотношением (7), хотя было ясно, что такой образ не мог существовать в виде функции в классическом понимании. Этот образ представлял себе в виде предельного понятия, как об этом было разъяснено в § 1 и в п. 2 § 13. Естественно, что когда этим в действительности не существующим образом оперировали по правилам классического анализа как функцией, то покидали твердую почву точной математики. Напротив, понимая δ как распределение, которому можно было бы дать и старое название «импульс», мы получаем в наше распоряжение непротиворечивый математический объект, позволяющий достигать именно того, чего раньше напрасно ожидали от «функции» $\delta(x)$. «Выведение» значения $\varphi(0)$ из функции $\varphi(x)$ теперь следует понимать в смысле равенства (6), причем, однако, образ $\langle \delta, \varphi \rangle$ нельзя понимать как интеграл.

Равенство (5) совершенно точно выражает и другое свойство, которое раньше приписывалось «функции» Дирака δ ,

¹⁾ См., например, книгу: Гельфанд И. М. и Шплов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, Москва, 1958, гл. I, § 1. (Прим. перев.)

а именно, δ является «производной» от функции $u(x)$, причем эта «производная» равна нулю всюду, кроме точки $x=0$, а в точке $x=0$ она равна бесконечности. «Производную» теперь следует понимать в смысле обобщенной производной.

Обобщением распределения δ является распределение δ_h , определяемое равенством

$$\langle \delta_h, \varphi \rangle = \varphi(h). \quad (8)$$

Распределение δ_h соответствует постулированному в прежнее время понятию импульса, действующего не в точке $x=0$, а в точке $x=h$ (сдвиг δ -функции).

Вернемся к общей теории. Кроме сложения распределений, определяемого посредством равенства

$$\langle T_1 + T_2, \varphi \rangle = \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle,$$

нас интересует *умножение* двух распределений. Специально для регулярных распределений оно должно было бы определяться равенством

$$\langle f_1 f_2, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(x) \varphi(x) dx.$$

Однако этот интеграл имеет смысл не всегда, так как произведение двух локально интегрируемых функций не всегда является локально интегрируемым (пример: $x^{-1/2} \cdot x^{-1/2} = x^{-1}$). Поэтому произведение двух распределений не допускает определения в общем виде. Приходится ограничиваться случаем, когда одно из распределений является функцией.

Произведение распределения T на функцию $\alpha(x)$, бесконечно дифференцируемую на R^1 , определяется равенством

$$\langle \alpha(x) T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha \varphi \rangle. \quad (9)$$

Обратим внимание на следующее: поскольку $\alpha(x)$ предполагается принадлежащей пространству \mathcal{D} , то этому же пространству принадлежит и $\alpha \varphi$, и в частном случае, когда $T = f$, определение произведения сводится к тривиальному равенству

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\alpha(x) f(x)] \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) [\alpha(x) \varphi(x)] dx.$$

В частном случае, когда $T = \delta$, мы получаем

$$\langle \alpha(x) \delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \alpha \varphi \rangle = \alpha(0) \varphi(0) = \langle \alpha(0) \delta, \varphi \rangle,$$

следовательно,

$$\alpha(x) \delta = \alpha(0) \delta. \quad (10)$$

Это соотношение раньше считалось для «функции» Дирака δ само собой понятным и притом для *каждой* функции $\alpha(x)$.

Для того чтобы на основе понятия о распределении можно было построить соответствующий анализ, необходимо, естественно, ввести для распределений понятие дифференцирования. Это можно сделать на базе соотношения (4). Хотя это соотношение установлено для функций, оно сразу допускает распространение на случай распределений.

Производная k -го порядка распределения T определяется равенством

$$\langle D^k T, \varphi(x) \rangle = (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)}(x) \rangle. \quad (11)$$

При таком определении производной *каждое распределение может быть сколь угодно раз продифференцировано.*

Пример. Для $T = \delta$, согласно формуле (6), мы имеем

$$\langle D^k \delta, \varphi(x) \rangle = (-1)^k \langle \delta, \varphi^{(k)}(x) \rangle = (-1)^k \varphi^{(k)}(0).$$

Таким образом, мы получили точное определение производных распределения δ , тех производных, которые раньше владели неопределенное существование (под названием диполя и т. п.).

В общем случае мы будем обозначать производные символом D . Однако для производных распределения δ будем пользоваться — в виде уступки обычаю, принятому в физике в течение десятилетий, — обозначением, принятым для обычных производных, т. е. посредством верхнего индекса, причем иногда одновременно будем указывать в скобках и соответствующую переменную на R^1 , например $\delta(x)$, $\delta^{(k)}(x)$ или $\delta(t)$, $\delta^{(k)}(t)$. Соответственно этому будем писать $\delta(x - h)$ вместо δ_h .

Если функция $f(x)$ k раз дифференцируема на всей оси R^1 , то регулярное распределение, определяемое k -й производной $f^{(k)}(x)$ (в предположении ее локальной интегрируемости), совпадает с обобщенной производной $D^k f$, в чем легко убедиться, если записать $\langle f^{(k)}, \varphi \rangle$ в виде интеграла и k раз проинтегрировать этот интеграл по частям. Важно отметить, что между $f^{(k)}(x)$ и $D^k f$ также существует связь, если имеет место следующий, часто встречающийся в приложениях случай.

Пусть функция $f(x)$ имеет одну-единственную особую точку a , в которой $f^{(k)}(x)$ не существует, в то время как $f(x)$ при $x < a$ и $x > a$ обладает производными до k -го порядка включительно; далее, пусть $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{(k-1)}(x)$ имеют в точке $x = a$ только разрывы первого рода, следовательно, они имеют слева и справа от $x = a$ предельные значения:

$$\begin{aligned} f(a-0), f'(a-0), \dots, f^{(k-1)}(a-0); \\ f(a+0), f'(a+0), \dots, f^{(k-1)}(a+0). \end{aligned}$$

Как уже было сказано, $f^{(k)}(x)$ обозначает k -ю производную функции $f(x)$, существующую везде, кроме как в точке $x = a$.

В таком случае имеет место соотношение

$$\begin{aligned} D^k f = & [f^{(k)}(x)] + [f^{(k-1)}(a+0) - f^{(k-1)}(a-0)] \delta(x-a) + \\ & + [f^{(k-2)}(a+0) - f^{(k-2)}(a-0)] \delta'(x-a) + \dots \\ & + [f(a+0) - f(a-0)] \delta^{(k-1)}(x-a). \end{aligned} \quad (12)$$

В первой части мы применили для $[f^{(h)}(x)]$ полное обозначение с целью четко показать, что в обе части соотношения входят только распределения. В самом деле, распределение может быть равно только распределению. Правда, иногда для краткости говорят, что распределение в открытом промежутке I равно функции. Под этим подразумевается следующее.

Распределение $\langle T, \varphi \rangle$ равно $\langle f, \varphi \rangle$ для каждого φ , равного нулю вне промежутка I . В этом смысле можно, например, сказать: распределение δ равно функции нуль в промежутках $-\infty < x < 0$ и $0 < x < \infty$. В самом деле, если φ , например, вне промежутка $-\infty < x < 0$, т. е. в промежутке $0 \leq x < \infty$, равно нулю, то $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) = 0$. С другой стороны, $\langle 0, \varphi \rangle = 0$, следовательно, $\langle \delta, \varphi \rangle = \langle 0, \varphi \rangle$, т. е. $\delta = 0$ в промежутке $-\infty < x < 0$. (См. в связи с этим сказанное в разделе III по поводу «носителя».)

III. Преобразование распределений по Лапласу

Классическое преобразование Лапласа применимо к функциям, определенным только при $t \geq 0$. Если же рассматривать функции на всей оси t (что целесообразно, например, при использовании комплексного интеграла, осуществляющего обратное преобразование Лапласа), то при $t < 0$ их следует принять равными нулю. Что касается преобразования по Лапласу распределений, то в соответствии со смыслом этого преобразования оно возможно только для таких распределений, которые обладают аналогичным свойством. Для точной формулировки этого свойства необходимо ввести следующие понятия.

Носителем непрерывной на R^1 функции $\varphi(x)$ называется наименьшее замкнутое множество, содержащее в себе точки x , для которых $\varphi(x) \neq 0$, т. е. он представляет собой множество значений x , удовлетворяющих условию $\varphi(x) \neq 0$, дополненное предельными точками. Иными словами, носителем функции $\varphi(x)$ является наименьшее замкнутое множество, вне которого $\varphi(x) = 0$.

Для того чтобы сформулировать аналогичное понятие для распределений, прежде всего необходимо найти для распределения аналог понятия о равенстве нулю функции.

Распределение принимается равным нулю на открытом множестве I , если $\langle T, \varphi \rangle = 0$ для всякой функции φ , носитель кото-

рой лежит в I . Введение такого понятия позволяет сформулировать определение:

Носителем распределения T является наименьшее замкнутое множество, вне которого $T = 0$.

Пример. Распределение $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$ равно нулю для всех φ , носители которых лежат на открытом множестве $|x| > 0$, так как в этом случае $\varphi(0) = 0$. Следовательно, $\delta = 0$ на открытом множестве $|x| > 0$. Дополнительным множеством к $|x| > 0$ является точка $x = 0$. Она представляет собой наименьшее замкнутое множество, вне которого $\delta = 0$. Таким образом, δ имеет в качестве носителя единственную точку $x = 0$. То же самое имеет место и для $\delta^{(k)}$.

Распределение определено всегда на всей оси R^1 , но преобразование Лапласа возможно только для таких распределений, носители которых лежат на полуоси $0 \leq t < \infty$ ¹⁾. Пространство этих распределений обозначается через \mathcal{D}'_+ . Этому пространству принадлежат те понимаемые как распределения функции, которые при $t < 0$ равны нулю.

\mathcal{L} -изображение распределения можно определить различными способами, каждый из которых пригоден для некоторого подпространства пространства \mathcal{D}'_+ . Мы выберем такое определение, которое применимо к распределениям *конечного порядка*. Так называются распределения T , которые являются обобщенной производной конечного порядка k непрерывной на R^1 функции $h(t)$, т. е. $T = D^k h(t)$ ²⁾.

Пример. Как мы знаем, $\delta = Du$. Однако этого равенства недостаточно, чтобы считать распределение δ имеющим конечный порядок, так как функция $u(t)$ не непрерывна. Необходимо составить еще интеграл $h(t)$ от функции $u(t)$, причем

$$\begin{aligned} h(t) &= 0 & \text{при } t \leq 0, \\ h(t) &= t & \text{при } t > 0. \end{aligned}$$

Эта функция на R^1 непрерывна. В точке $t = 0$ она недифференцируема, но зато существует Dh . В самом деле,

$$\begin{aligned} \langle Dh, \varphi \rangle &= -\langle h, \varphi' \rangle = -\int_0^{\infty} t \varphi'(t) dt = -t \varphi(t) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \varphi(t) dt = \\ &= 0 + \int_0^{\infty} \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \varphi(t) dt = \langle u, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

¹⁾ Начиная отсюда мы будем обозначать переменную на R^1 вместо x через t , т. е. так, как это принято при преобразовании Лапласа.

²⁾ Согласно довольно трудно доказываемой теореме, *каждое* распределение на каждом *конечном* промежутке I (т. е. если в $\langle T, \varphi \rangle$ допускаются только такие основные функции, носители которых лежат в I) является k -й обобщенной производной непрерывной функции.

поэтому $Dh = u(t)$ и, следовательно, на основании формулы (5)

$$D^2h = Du = \delta. \quad (13)$$

Таким образом, распределение δ имеет конечный порядок.

Из распределений конечного порядка выберем подпространство \mathcal{D}_0' , которое входит в состав пространства $\mathcal{D}_+'^*$ и элементы которого удовлетворяют условиям:

Функции $h(t)$, определяющие рассматриваемые распределения, равны нулю при $t < 0$, т. е.

$$h(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0, \quad (14)$$

и, кроме того, для этих функций

$$\mathfrak{L}\{h(t)\} \text{ существует при } \operatorname{Re} s > \sigma. \quad (15)$$

Если распределение T принадлежит к \mathcal{D}_0' и $T = D^k h(t)$, то \mathfrak{L} -изображение этого распределения определяется равенством

$$\mathfrak{L}\{T\} = s^k \mathfrak{L}\{h(t)\}. \quad (16)$$

Правая часть существует при $\operatorname{Re} s > \sigma$ и представляет там аналитическую функцию $F(s)$.

Примеры. Как мы уже знаем, распределение δ имеет конечный порядок, причем $\delta = D^2 h$, где h есть функция из предыдущего примера, удовлетворяющая условиям (14) и (15). Следовательно, распределение δ имеет \mathfrak{L} -изображение, которое равно

$$\mathfrak{L}\{\delta\} = s^2 \mathfrak{L}\{h\} = s^2 \mathfrak{L}\{t\} = s^2 \frac{1}{s^2} = 1. \quad (17)$$

Очевидно, что $\delta(t - t_0) = D^2 h(t - t_0)$, следовательно,

$$\mathfrak{L}\{\delta(t - t_0)\} = s^2 \mathfrak{L}\{h(t - t_0)\} = s^2 e^{-t_0 s} \mathfrak{L}\{h(t)\} = e^{-t_0 s}. \quad (18)$$

Далее, мы имеем

$$\mathfrak{L}\{\delta^{(k)}\} = \mathfrak{L}\{D^{k+2} h(t)\} = s^{k+2} \mathfrak{L}\{h\} = s^k. \quad (19)$$

Появление степеней s с неотрицательными целыми показателями в качестве изображений распределений особенно примечательно, так как в классическом преобразовании Лапласа встречаются только степени с отрицательными показателями.

Правила выполнения преобразования Лапласа для распределений

Важнейшим правилом отображения операций при классическом преобразовании Лапласа является теорема дифференцирования (правило V). Аналогичное правило для распределений гласит:

Правило V'. Если $\mathfrak{L}\{T\} = F(s)$ существует, то

$$D^n T \rightarrow s^n F(s).$$

Доказательство. Если $T = D^k h(t)$, то $D^n T = D^{n+k} h(t)$, поэтому

$$\mathfrak{L}\{T\} = F(s) = s^k \mathfrak{L}\{h\} \quad \text{и} \quad \mathfrak{L}\{D^n T\} = s^{n+k} \mathfrak{L}\{h\},$$

следовательно,

$$\mathfrak{L}\{D^n T\} = s^n F(s).$$

Правило V' отличается от классического правила V отсутствием начальных значений, которые для распределения, впрочем, не имели бы никакого смысла, так как распределение в каком-либо месте не имеет определенного значения. Тем не менее правило V' в том случае, когда T является функцией $f(t)$, совпадает с правилом V . В самом деле, $f(t)$ как распределение из \mathcal{D}'_+ при $t < 0$ определяется как нуль, поэтому все левосторонние значения f, f', \dots в точке $t = 0$ равны нулю. С другой стороны, если f, f', \dots при $t > 0$ существуют в обычном смысле и имеют при $t \rightarrow +0$ предельные значения $f(+0), f'(+0), \dots$, то, согласно формуле (12),

$$D^n f = f^{(n)} + f^{(n-1)}(+0) \delta + \dots + f(+0) \delta^{(n-1)}. \quad (20)$$

Если $\mathfrak{L}\{f^{(n)}\}$, следовательно, и $\mathfrak{L}\{f\}$ существуют в классическом смысле, то они существуют и в смысле теории распределений. Поэтому, применив к равенству (20) преобразование Лапласа и приняв во внимание равенства (17) и (19), мы получим на основании правила V'

$$s^n \mathfrak{L}\{f\} = \mathfrak{L}\{f^{(n)}\} + f^{(n-1)}(+0) + \dots + f(+0) s^{n-1},$$

т. е. такой же результат, как и при применении правила V .

Примеры. 1. Пусть $T = u(t)$, следовательно, $DT = \delta$. Правило V' дает

$$\mathfrak{L}(\delta) = s \mathfrak{L}\{u\} = s \frac{1}{s} = 1,$$

что совпадает с ранее полученным результатом (17).

2. Пусть $T = u(t - t_0)$, следовательно, $DT = \delta(t - t_0)$. На стр. 44 уже было отмечено, что правило V к функции $u(t - t_0)$ неприменимо, так как эта функция в точке t_0 недифференцируема. Однако если понимать $u(t - t_0)$ как распределение и применить правило V' , то получится правильный результат:

$$\mathfrak{L}\{Du(t - t_0)\} = \mathfrak{L}\{\delta(t - t_0)\} = s \mathfrak{L}\{u(t - t_0)\} = s \frac{e^{-t_0 s}}{s} = e^{-t_0 s}.$$

В приложениях наряду с правилом дифференцирования важную роль играет также правило свертывания. Естественно, что было бы желательно иметь такое правило также для распределений. Однако для распределений правило свертывания можно сформулировать только довольно сложным образом. Кроме

того, свертка распределений существует не во всех случаях, а правило свертывания также не носит общего характера. Однако для распределений конечного порядка из пространства \mathcal{D}'_0 понятие свертки можно определить простым образом и в соответствии с этим определением можно сформулировать и правило свертывания.

Определение свертки

Пусть $T_1 = D^{k_1} h_1(t)$ и $T_2 = D^{k_2} h_2(t)$ суть два распределения из пространства \mathcal{D}'_0 . Для таких распределений их *свертка* определяется равенством

$$T_1 * T_2 = D^{k_1+k_2} [h_1(t) * h_2(t)], \quad (21)$$

в котором выражение $h_1 * h_2$ следует понимать в классическом смысле, а именно:

$$h_1 * h_2 = \int_0^t h_1(\tau) h_2(t - \tau) d\tau. \quad (22)$$

Такая свертка распределений существует всегда и совпадает с классической сверткой в том случае, когда T_1 и T_2 определяются локально интегрируемыми функциями f_1 и f_2 , равными нулю при $t < 0$ (следовательно, принимается $T_1 = [f_1]$, $T_2 = [f_2]$).

Для доказательства составим функции

$$h_1(t) = \int_0^t f_1(\tau) d\tau = f_1 * 1, \quad h_2(t) = \int_0^t f_2(\tau) d\tau = f_2 * 1.$$

Они непрерывны при всех t и равны нулю при $t < 0$. Для последнего нам потребуется следующая *общая теорема*:

Пусть $g(t)$ есть локально интегрируемая функция, определенная при всех t . Тогда для

$$G(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau = g * 1$$

имеет место соотношение ¹⁾ $DG = g$, где g понимается как распределение $[g]$.

В самом деле,

$$\langle DG, \varphi \rangle = - \langle G, \varphi' \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tau) \varphi'(\tau) d\tau.$$

¹⁾ Если интеграл понимается в смысле Лебега, как это и необходимо в теории распределений, то обычная производная от G существует «почти везде» и «почти везде» равна g . Если же интеграл понимать в смысле Римана, то утверждение, что $G' = g$, в общем случае возможно только при условии непрерывности g .

Применим к интегралу обобщенное интегрирование по частям¹⁾. Имея в виду, что $\varphi(t)$ равно нулю вне некоторого конечного интервала, получим

$$\langle DG, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) \varphi(\tau) d\tau = \langle g, \varphi \rangle, \quad \text{т. е.} \quad DG = g.$$

Согласно этой теореме,

$$Dh_1 = f_1, \quad Dh_2 = f_2;$$

следовательно, на основании определения (21) и доказанной теоремы

$$T_1 * T_2 = D^2(h_1 * h_2) = D^2(f_1 * 1 * f_2 * 1) = D^2(f_1 * f_2 * 1 * 1) = f_1 * f_2.$$

Применив к свертке (21) преобразование Лапласа, мы получим на основании правил V' и IX:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{T_1 * T_2\} &= s^{k_1+k_2} \mathfrak{L}\{h_1 * h_2\} = s^{k_1+k_2} \mathfrak{L}\{h_1\} \cdot \mathfrak{L}\{h_2\} = \\ &= s^{k_1} \mathfrak{L}\{h_1\} \cdot s^{k_2} \mathfrak{L}\{h_2\} = \mathfrak{L}\{T_1\} \cdot \mathfrak{L}\{T_2\}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Правило IX' (теорема свертывания). Если T_1 и T_2 суть распределения из пространства \mathcal{D}'_0 и $\mathfrak{L}\{T_1\} = F_1(s)$, $\mathfrak{L}\{T_2\} = F_2(s)$, то имеет место соответствие $T_1 * T_2 \circ \bullet F_1(s) \cdot F_2(s)$.

Пример. Пусть распределение T принадлежит к пространству \mathcal{D}'_0 , тогда $\mathfrak{L}\{T * \delta\} = \mathfrak{L}\{T\} \cdot \mathfrak{L}\{\delta\} = \mathfrak{L}\{T\} \cdot 1 = \mathfrak{L}\{T\}$, следовательно

$$T * \delta = T, \quad (23)$$

т. е. δ играет при свертывании роль «единичного элемента». В частности, $\delta * \delta = \delta$.

¹⁾ Кроме обычного правила интегрирования по частям

$$\int_a^b U(\tau) V'(\tau) d\tau = UV \Big|_a^b - \int_a^b U'(\tau) V(\tau) d\tau$$

существует обобщение этого правила. Пусть

$$U(t) = \int_a^t u(\tau) d\tau, \quad V(t) = \int_a^t v(\tau) d\tau.$$

Тогда

$$\int_a^b U(\tau) v(\tau) d\tau = U(\tau) V(\tau) \Big|_a^b - \int_a^b u(\tau) V(\tau) d\tau.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

ТАБЛИЦЫ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

1. ОПЕРАЦИИ

№	$F(s)$	$f(t)$
1	$F(as) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right)$
2	$F(s - \alpha)$	$e^{\alpha t} f(t)$
3	$F(s + \alpha)$	$e^{-\alpha t} f(t)$
4	$F(as - \beta) \quad (a > 0, \beta - \text{комплексное число})$	$\frac{1}{a} e^{\frac{\beta}{a} t} f\left(\frac{t}{a}\right)$
5	$\frac{1}{2j} [F(s - ja) - F(s + ja)]$	$f(t) \sin at$
6	$\frac{1}{2} [F(s - ja) + F(s + ja)]$	$f(t) \cos at$
7	$\frac{1}{2} [F(s - a) - F(s + a)]$	$f(t) \operatorname{sh} at$
8	$\frac{1}{2} [F(s - a) + F(s + a)]$	$f(t) \operatorname{ch} at$
9	$e^{-as} F(s)$	$\begin{cases} f(t - a) & \text{при } t > a \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < a \end{cases}$
10	$\frac{1}{2} e^{-\frac{b}{a}s} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (a, b > 0)$	$\begin{cases} f(at - b) & \text{при } t > \frac{b}{a}, \\ 0 & \text{при } t < \frac{b}{a} \end{cases}$

№	$F(s)$	$f(t)$
11	$e^{as} \left[F(s) - \int_0^a e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \right]$	$f(t+a) \quad (a \geq 0)$
12	$e^{ks} \left[Y(s) - \frac{1-e^{-s}}{s} \sum_{v=0}^{k-1} y_v e^{-vs} \right]$	$y(t+k)$, причем $y(t) = y_n$ при $n \leq t < n+1$
13	$\frac{dF(s)}{ds}$	$-tf(t)$
14	$\frac{d^n F(s)}{ds^n}$	$(-t)^n f(t)$
15	$sF(s) - f(+0)$	$\frac{df(t)}{dt}$
16	$s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(+0) s^{n-k-1}$	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$
17	$\int_s^\infty F(\sigma) d\sigma$	$\frac{f(t)}{t}$
18	$\left(\int_s^\infty d\sigma \right)^n F(\sigma)$	$\frac{f(t)}{t^n}$
19	$\frac{1}{s} \int_s^\infty F(\sigma) d\sigma$	$\int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau$
20	$\frac{1}{s} \int_0^s F(\sigma) d\sigma$	$\int_t^\infty \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau$
21	$\frac{1}{s} F(s)$	$\int_0^t f(\tau) d\tau = f(t) * 1$
22	$\frac{1}{s^n} F(s)$	$\left(\int_0^t d\tau \right)^n f(\tau)$

№	$F(s)$	$f(t)$
23	$F_1(s) \cdot F_2(s)$	$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$
24	$\frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} F_1(\sigma) F_2(s-\sigma) d\sigma$	$f_1(t) \cdot f_2(t)$
25	$\frac{1}{\sqrt{s}} F\left(\frac{1}{s}\right)$	$\int_0^\infty \frac{\cos(2\sqrt{t\tau})}{\sqrt{\pi t}} f(\tau) d\tau$
26	$\frac{1}{s\sqrt{s}} F\left(\frac{1}{s}\right)$	$\int_0^\infty \frac{\sin(2\sqrt{t\tau})}{\sqrt{\pi \tau}} f(\tau) d\tau$
27	$\frac{1}{s} F\left(\frac{1}{s}\right)$	$\int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\tau}) f(\tau) d\tau$
28	$\frac{1}{s} F\left(s + \frac{1}{s}\right)$	$\int_0^t J_0(2\sqrt{(t-\tau)\tau}) f(\tau) d\tau$
29	$F(\sqrt{s})$	$\int_0^\infty \frac{\tau}{2\sqrt{\pi}} t^{3/2} e^{-\frac{\tau^2}{4t}} f(\tau) d\tau$
30	$F(\ln s)$	$\int_0^\infty \frac{t^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)} f(\tau) d\tau$
31	$\frac{1}{s} F(\ln s)$	$\int_0^\infty \frac{t^\tau}{\Gamma(\tau+1)} f(\tau) d\tau$
32	$F(\sqrt{(s+a)^2 - b^2})$	$e^{-at} f(t) +$ $+ be^{-at} \int_0^t f(\sqrt{t^2 - \tau^2}) I_1(b\tau) d\tau$

№	$F(s)$	$f(t)$
33	1	$\delta(t)$
34	$\frac{1}{s}$	
35	$\frac{1}{s-a}$ $\frac{1}{s+a}$	e^{at} $e^{-at} = e^{-at}$
36	$\frac{1}{1+as}$	$\frac{1}{a} e^{-\frac{t}{a}}$
37	$\frac{1}{s^2}$	t
38	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin at$
39	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\operatorname{sh} at$
40	$\frac{1}{s(s-a)}$	$\frac{1}{a} (e^{at} - 1)$
41	$\frac{1}{s(1+as)}$	$1 - e^{-\frac{t}{a}}$
42	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
43	$\frac{1}{(1+as)^2}$	$\frac{1}{a^2} te^{-\frac{t}{a}}$
44	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$
45	$\frac{1}{(1+as)(1+bs)}$	$\frac{e^{-\frac{t}{a}} - e^{-\frac{t}{b}}}{a-b}$
46	$\frac{1}{s^2 + c_1 s + c_0}$ $\left(D = c_0 - \frac{c_1^2}{4}\right)$	$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-D}} e^{-\frac{c_1}{2}t} \operatorname{sh} \sqrt{-D} t & (D < 0) \\ \frac{1}{\omega} e^{-\frac{c_1}{2}t} \sin \omega t & (D > 0, \sqrt{-D} = j\omega) \end{cases}$
47	$\frac{1}{s^2 + 2\delta s + (\delta^2 + \omega^2)}$	$\frac{1}{\omega} e^{-\delta t} \sin \omega t$
48	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$

№	$F(s)$	$f(t)$
49	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\operatorname{ch} at$
50	$\frac{s}{(s - a)^2}$	$(1 + at) e^a$
51	$\frac{s}{(1 + as)^2}$	$\frac{1}{a^3} (a - t) e^{-\frac{t}{a}}$
52	$\frac{s}{(s - a)(s - b)}$	$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a - b}$
53	$\frac{s}{(1 + as)(1 + bs)}$	$\frac{ae^{-\frac{t}{b}} - be^{-\frac{t}{a}}}{ab(a - b)}$
54	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2} t^2$
55	$\frac{1}{s^2(s - a)}$	$\frac{1}{a^2} (e^{at} - 1 - at)$
56	$\frac{1}{s^2(1 + as)}$	$ae^{-\frac{t}{a}} + t - a$
57	$\frac{1}{s(s - a)^2}$	$\frac{1}{a^2} [1 + (at - 1) e^{at}]$
58	$\frac{1}{s(1 + as)^2}$	$1 - \frac{a + t}{a} e^{-\frac{t}{a}}$
59	$\frac{1}{s(s - a)(s - b)}$	$\frac{1}{ab} + \frac{be^{at} - ae^{bt}}{ab(a - b)}$
60	$\frac{1}{s(1 + as)(1 + bs)}$	$1 + \frac{ae^{-\frac{t}{a}} - be^{-\frac{t}{b}}}{b - a}$
61	$\frac{1}{(s - a)(s - b)(s - c)}$	$\frac{(c - b)e^{at} + (a - c)e^{bt} + (b - a)e^{ct}}{(a - b)(a - c)(c - b)}$
62	$\frac{1}{(1 + as)(1 + bs)(1 + cs)}$	$\frac{a(b - c)e^{-\frac{t}{a}} + b(c - a)e^{-\frac{t}{b}} + c(a - b)e^{-\frac{t}{c}}}{(a - b)(a - c)(b - c)}$
63	$\frac{1}{(s - a)(s - b)^2}$	$\frac{e^{at} - [1 + (a - b)t] e^{bt}}{(a - b)^2}$
64	$\frac{1}{(1 + as)(1 + bs)^2}$	$\frac{abe^{-\frac{t}{a}} - [ab + (a - b)t] e^{-\frac{t}{b}}}{b(a - b)^2}$

№	$F(s)$	$f(t)$
65	$\frac{1}{(s-a)^3}$	$\frac{1}{2} t^2 e^{at}$
66	$\frac{1}{(1+as)^3}$	$\frac{1}{2a^3} t^2 e^{-\frac{t}{a}}$
67	$\frac{1}{s(s^2+a^2)}$	$\frac{1}{a^2} (1 - \cos at)$
68	$\frac{1}{s(s^2-a^2)}$	$\frac{1}{a^2} (\operatorname{ch} at - 1)$
69	$\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$\frac{a(b-c)e^{at} + b(c-a)e^{bt} + c(a-b)e^{ct}}{(a-b)(b-c)(a-c)}$
70	$\frac{s^2}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$\frac{a^2(b-c)e^{at} + b^2(c-a)e^{bt} + c^2(a-b)e^{ct}}{(a-b)(b-c)(a-c)}$
71	$\frac{s}{(1+as)(1+bs)(1+cs)}$	$\frac{(c-b)e^{-\frac{t}{a}} + (a-c)e^{-\frac{t}{b}} + (b-a)e^{-\frac{t}{c}}}{(a-b)(b-c)(a-c)}$
72	$\frac{s^2}{(1+as)(1+bs)(1+cs)}$	$\frac{bc(b-c)e^{-\frac{t}{a}} + ac(c-a)e^{-\frac{t}{b}} + ab(a-b)e^{-\frac{t}{c}}}{abc(a-b)(b-c)(a-c)}$
73	$\frac{s}{(s-a)(s-b)^2}$	$\frac{ae^{at} - [a + b(a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$
74	$\frac{s^2}{(s-a)(s-b)^2}$	$\frac{a^2e^{at} - [2ab - b^2 + b^2(a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$
75	$\frac{s}{(1+as)(1+bs)^2}$	$\frac{-b^2e^{-\frac{t}{a}} + [b^2 + (a-b)t]e^{-\frac{t}{b}}}{b^2(a-b)^2}$
76	$\frac{s^2}{(1+as)(1+bs)^2}$	$\frac{b^3e^{-\frac{t}{a}} + [ab(a-2b) - (a-b)at]e^{-\frac{t}{b}}}{ab^3(a-b)^2}$

№	$F(s)$	$f(t)$
77	$\frac{s}{(s-a)^3}$	$\left(t + \frac{1}{2} at^2\right) e^{at}$
78	$\frac{s^2}{(s-a)^3}$	$\left(1 + 2at + \frac{1}{2} a^2 t^2\right) e^{at}$
79	$\frac{s}{(1+as)^3}$	$\left(\frac{t}{a^3} - \frac{t^2}{2a^4}\right) e^{-\frac{t}{a}}$
80	$\frac{s^2}{(1+as)^3}$	$\left(\frac{1}{a^3} - \frac{2t}{a^4} + \frac{t^2}{2a^5}\right) e^{-\frac{t}{a}}$
81	$\frac{s^2 + 2a^2}{s(s^2 + 4a^2)}$	$\cos^2 at$
82	$\frac{s^2 - 2a^2}{s(s^2 - 4a^2)}$	$\operatorname{ch}^2 at$
83	$\frac{2a^2}{s(s^2 + 4a^2)}$	$\sin^2 at$
84	$\frac{2a^2}{s(s^2 - 4a^2)}$	$\operatorname{sh}^2 at$
85	$\frac{a^3}{s^4 + a^4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{ch} \frac{a}{\sqrt{2}} t \sin \frac{a}{\sqrt{2}} t - \operatorname{sh} \frac{a}{\sqrt{2}} t \cos \frac{a}{\sqrt{2}} t \right)$
86	$\frac{a^2 s}{s^4 + a^4}$	$\sin \frac{a}{\sqrt{2}} t \operatorname{sh} \frac{a}{\sqrt{2}} t$
87	$\frac{as^2}{s^4 + a^4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{a}{\sqrt{2}} t \operatorname{sh} \frac{a}{\sqrt{2}} t + \sin \frac{a}{\sqrt{2}} t \operatorname{ch} \frac{a}{\sqrt{2}} t \right)$
88	$\frac{s^3}{s^4 + a^4}$	$\cos \frac{a}{\sqrt{2}} t \operatorname{ch} \frac{a}{\sqrt{2}} t$
89	$\frac{a^3}{s^4 - a^4}$	$\frac{1}{2} (\operatorname{sh} at - \sin at)$
90	$\frac{a^2 s}{s^4 - a^4}$	$\frac{1}{2} (\operatorname{ch} at - \cos at)$
91	$\frac{as^2}{s^4 - a^4}$	$\frac{1}{2} (\operatorname{sh} at + \sin at)$
92	$\frac{s^3}{s^4 - a^4}$	$\frac{1}{2} (\operatorname{ch} at + \cos at)$

№	$F(s)$	$f(t)$
93	$\frac{2a^2s}{s^4 + 4a^4}$	$\sin at \operatorname{sh} at$
94	$\frac{a(s^2 - 2a^2)}{s^4 + 4a^4}$	$\cos at \operatorname{sh} at$
95	$\frac{a(s^2 + 2a^2)}{s^4 + 4a^4}$	$\sin at \operatorname{ch} at$
96	$\frac{s^3}{s^4 + 4a^4}$	$\cos at \operatorname{ch} at$
97	$\frac{a^3}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{2} (\sin at - at \cos at)$
98	$\frac{as}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{t}{2} \sin at$
99	$\frac{as^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{2} (\sin at + at \cos at)$
100	$\frac{s^3}{(s^2 + a^2)^2}$	$\cos at - \frac{at}{2} \sin at$
101	$\frac{a^3}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{1}{2} (at \operatorname{ch} at - \operatorname{sh} at)$
102	$\frac{as}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{t}{2} \operatorname{sh} at$
103	$\frac{as^2}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{1}{2} (\operatorname{sh} at + at \operatorname{ch} at)$

№	$F(s)$	$f(t)$
104	$\frac{s^3}{(s^2 - a^2)^2}$	$\operatorname{ch} at + \frac{at}{2} \operatorname{sh} at$
105	$\frac{ab}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$	$\frac{a \sin bt - b \sin at}{a^2 - b^2}$
106	$\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$	$\frac{\cos bt - \cos at}{a^2 - b^2}$
107	$\frac{s^2}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$	$\frac{a \sin at - b \sin bt}{a^2 - b^2}$
108	$\frac{s^3}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$	$\frac{a^2 \cos at - b^2 \cos bt}{a^2 - b^2}$
109	$\frac{ab}{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)}$	$\frac{b \operatorname{sh} at - a \operatorname{sh} bt}{a^2 - b^2}$
110	$\frac{s}{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)}$	$\frac{\operatorname{ch} at - \operatorname{ch} bt}{a^2 - b^2}$
111	$\frac{s^2}{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)}$	$\frac{a \operatorname{sh} at - b \operatorname{sh} bt}{a^2 - b^2}$
112	$\frac{s^3}{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)}$	$\frac{a^2 \operatorname{ch} at - b^2 \operatorname{ch} bt}{a^2 - b^2}$
113	$\frac{a^2}{s^2(s^2 + a^2)}$	$t - \frac{1}{a} \sin at$
114	$\frac{a^2}{s^2(s^2 - a^2)}$	$\frac{1}{a} \operatorname{sh} at - t$
115	$\frac{a^4}{s(s^2 + a^2)^2}$	$1 - \cos at - \frac{at}{2} \sin at$
116	$\frac{a^4}{s(s^2 - a^2)^2}$	$1 - \operatorname{ch} at + \frac{at}{2} \operatorname{sh} at$
117	$\frac{a^2 b^2}{s(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$	$1 + \frac{b^2 \cos at - a^2 \cos bt}{a^2 - b^2}$

№	$F(s)$	$f(t)$
118	$\frac{a^2 b^2}{s(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)}$	$1 + \frac{b^2 \operatorname{ch} at - a^2 \operatorname{ch} bt}{a^2 - b^2}$
119	$\frac{a^5}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{1}{8} [(3 - a^2 t^2) \sin at - 3at \cos at]$
120	$\frac{a^3 s}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{t}{8} (\sin at - at \cos at)$
121	$\frac{a^3 s^2}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{1}{8} [(1 + a^2 t^2) \sin at - at \cos at]$
122	$\frac{a^5}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{1}{8} [(3 + a^2 t^2) \operatorname{sh} at - 3at \operatorname{ch} at]$
123	$\frac{a^3 s}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{t}{8} (at \operatorname{ch} at - \operatorname{sh} at)$
124	$\frac{a^3 s^2}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{1}{8} [at \operatorname{ch} at - (1 - a^2 t^2) \operatorname{sh} at]$
125	$\frac{1}{s^n} \quad (n > 0, \text{ целое число})$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}$
126	$\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}$	$L_n(t)$
127	$\frac{\left(s - \frac{1}{2}\right)^n}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^{n+1}}$	$e^{-\frac{t}{2}} L_n(t)$
128	$\frac{1}{s(as+1) \cdots (as+n)}$	$\frac{1}{n!} \left(1 - e^{-\frac{t}{a}}\right)^n$
129	$\frac{s \sin b + a \cos b}{s^2 + a^2}$	$\sin(at + b)$
130	$\frac{s \cos b - a \sin b}{s^2 + a^2}$	$\cos(at + b)$
131	$\frac{1}{p(s)}$	$\sum_{k=1}^n \frac{1}{p'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t}$
132	$\frac{1}{sp(s)}$	$\frac{1}{p(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k p'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t}$
133	$\frac{g(s)}{p(s)}$ $p(s) = (s - \alpha_1) \cdots (s - \alpha_n)$, все α_k различны	$\sum_{k=1}^n \frac{g(\alpha_k)}{p'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t}$

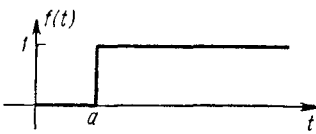
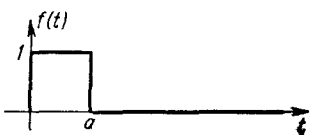
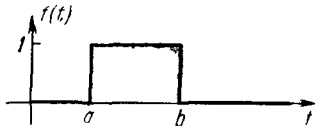
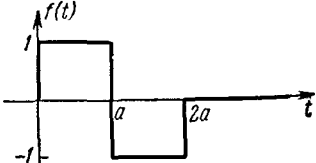
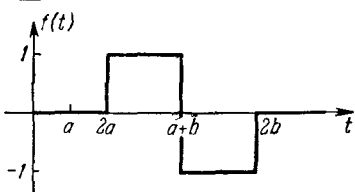
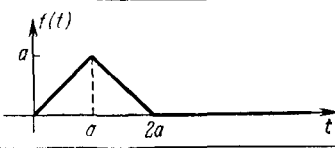
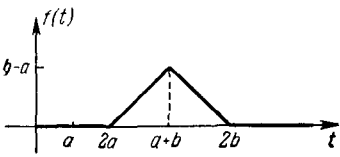
№	$F(s)$	$f(t)$
134	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
135	$\frac{1}{s\sqrt{s}}$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
136	$\frac{s+a}{s\sqrt{s}}$	$\frac{1+2at}{\sqrt{\pi t}}$
137	$\frac{1}{\sqrt{s+a}}$	$\frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}$
138	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	$\frac{1}{2t\sqrt{\pi t}}(e^{bt} - e^{at})$
139	$\sqrt{\sqrt{s^2+a^2}-s}$	$\frac{\sin at}{t\sqrt{2\pi t}}$
140	$\sqrt{\frac{\sqrt{s^2+a^2}-s}{s^2+a^2}}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin at$
141	$\sqrt{\frac{\sqrt{s^2+a^2}+s}{s^2+a^2}}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos at$
142	$\sqrt{\frac{s-\sqrt{s^2-a^2}}{s^2-a^2}}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \operatorname{sh} at$
143	$\sqrt{\frac{\sqrt{s^2-a^2}+s}{s^2-a^2}}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \operatorname{ch} at$
144	$\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$	$J_0(t)$
145	$\frac{(\sqrt{s^2+1}-s)^{\nu}}{\sqrt{s^2+1}}$	$I_{\nu}(t) \quad (\operatorname{Re} \nu > -1)$
146	$\frac{(2a)^{\nu} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} (s^2+a^2)^{\nu+1/2}}$	$t^{\nu} I_{\nu}(at) \quad \left(\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}\right)$
147	$\frac{1}{s^{\nu}}$	$\frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} \quad (\operatorname{Re} \nu > 0)$
148	$\frac{1}{s^n \sqrt{s}}$	$\frac{4^n n!}{(2n)! \sqrt{\pi}} t^{n-1/2}$
149	$\frac{1}{(s+a)^{\nu}}$	$\frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} e^{-at}$

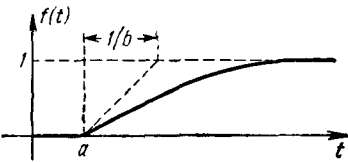
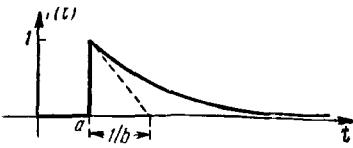
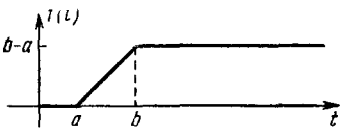
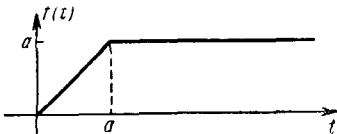
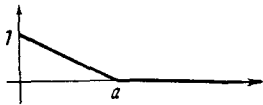
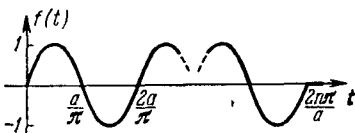
№	$F(s)$	$f(t)$
150	$\frac{\ln s}{s}$	$-\ln t - C$
151	$-\sqrt{\frac{\pi}{s}} (\ln 4s + C)$	$\frac{\ln t}{\sqrt{t}}$
152	$\frac{(\ln s)^2}{s}$	$(\ln t + C)^2 - \frac{\pi^2}{6}$
153	$\frac{1}{\ln s}$	$\int_0^\infty \frac{t^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)} d\tau$
154	$\ln \frac{s-a}{s}$	$\frac{1 - e^{at}}{t}$
155	$\ln \frac{s-a}{s-b}$	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{t}$
156	$\ln \frac{s+a}{s-a}$	$\frac{2}{t} \operatorname{sh} at$
157	$\ln \frac{s^2 + a^2}{s^2}$	$\frac{2}{t} (1 - \cos at)$
158	$\ln \frac{s^2 + a^2}{s^2 + b^2}$	$\frac{2}{t} (\cos bt - \cos at)$
159	e^{-as}	$\delta(t-a)$
160	$\frac{e^{-as}}{s}$	$U(t-a)$
161	$\frac{e^{-\frac{a^2}{4s}}}{s}$	$J_0(a\sqrt{t})$
162	$\frac{a^v}{2^v s^{v+1}} e^{-\frac{a^2}{4s}}$	$t^{\frac{v}{2}} J_v(a\sqrt{t}) \quad (\operatorname{Re} v > -1)$

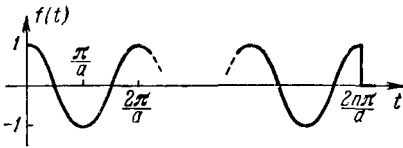
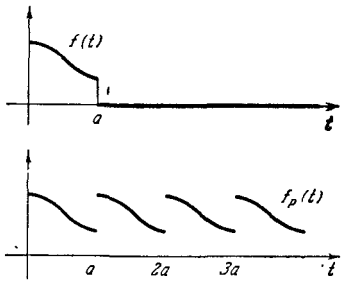
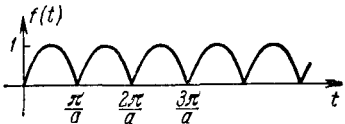
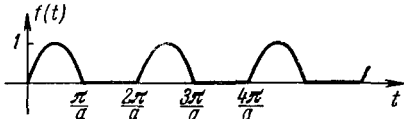
№	$F(s)$	$f(t)$
163	$\chi(a, s)$	$\frac{\cos a\sqrt{t}}{\pi\sqrt{t}}$
164	$\psi(a, s)$	$\frac{\sin a\sqrt{t}}{\pi}$
165	$\frac{1}{\sqrt{s}} \frac{e^{\frac{s}{s}}}{\sqrt{s}}$	$\frac{\operatorname{ch} 2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi t}}$
166	$\frac{1}{s\sqrt{s}} \frac{e^{\frac{s}{s}}}{\sqrt{s}}$	$\frac{\operatorname{sh} 2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$
167	$e^{-a\sqrt{s}}$	$\psi(a, t)$
168	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	$\operatorname{erfc} \frac{a}{2\sqrt{t}}$
169	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	$\chi(a, t)$
170	$\frac{1}{s(b+\sqrt{s})} e^{-a\sqrt{s}}$	$\frac{1}{b} \operatorname{erfc} \left(\frac{a}{2\sqrt{t}} \right) -$ $-\frac{1}{b} e^{b^2 t + ab} \operatorname{erfc} \left(\frac{a}{2\sqrt{t}} + b\sqrt{t} \right)$
171	$\frac{1}{\sqrt{s}(b+\sqrt{s})} e^{-a\sqrt{s}}$	$e^{b^2 t + ab} \operatorname{erfc} \left(\frac{a}{2\sqrt{t}} + b\sqrt{t} \right)$
172	$e^{-x\sqrt{as^2+bs+c}} - e^{-(b/2\sqrt{a})x} e^{-\sqrt{a}xs}$ $\left(d = \left(\frac{b}{2} \right)^2 - ac \right)$	$\begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t \leq \sqrt{a}x, \\ \sqrt{\frac{d}{a}} x e^{-(b/2a)t} \frac{I_1 \left(\frac{\sqrt{d}}{a} \sqrt{t^2 - ax^2} \right)}{\sqrt{t^2 - ax^2}} & \text{при } t \geq \sqrt{a}x \end{cases}$

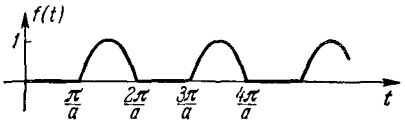
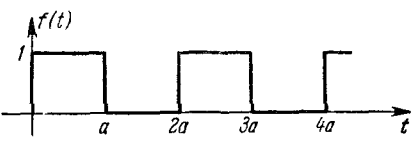
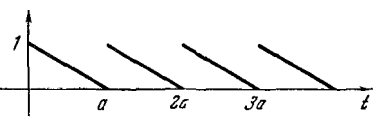

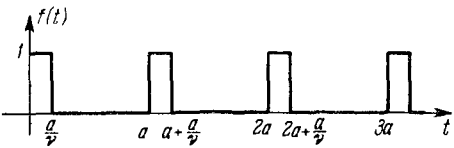
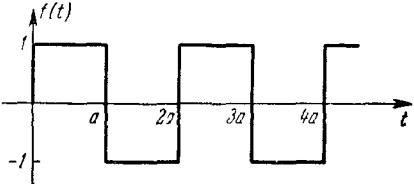
№	$F(s)$	$f(t)$
173	$\frac{1}{\sqrt{s}} \sin \frac{a}{s}$	$\frac{\text{sh } \sqrt{2at} \sin \sqrt{2at}}{\sqrt{\pi t}}$
174	$\frac{1}{s \sqrt{2s}} \left(\cos \frac{a}{s} + \sin \frac{a}{s} \right)$	$\frac{\text{ch } \sqrt{2at} \sin \sqrt{2at}}{\sqrt{a\pi}}$
175	$\frac{1}{\sqrt{s}} \cos \frac{a}{s}$	$\frac{\text{ch } \sqrt{2at} \cos \sqrt{2at}}{\sqrt{\pi t}}$
176	$\frac{1}{s \sqrt{2s}} \left(\cos \frac{a}{s} - \sin \frac{a}{s} \right)$	$\frac{\text{sh } \sqrt{2at} \cos \sqrt{2at}}{\sqrt{a\pi}}$
177	$\frac{1}{\sqrt{s}} \text{sh } \frac{a}{s}$	$\frac{\text{ch } 2\sqrt{at} - \cos 2\sqrt{at}}{2\sqrt{\pi t}}$
178	$\frac{1}{s \sqrt{s}} \text{sh } \frac{a}{s}$	$\frac{\text{sh } 2\sqrt{at} - \sin 2\sqrt{at}}{2\sqrt{a\pi}}$
179	$\frac{1}{\sqrt{s}} \text{ch } \frac{a}{s}$	$\frac{\text{ch } 2\sqrt{at} + \cos 2\sqrt{at}}{2\sqrt{\pi t}}$
180	$\frac{1}{s \sqrt{s}} \text{ch } \frac{a}{s}$	$\frac{\text{sh } 2\sqrt{at} + \sin 2\sqrt{at}}{2\sqrt{a\pi}}$
181	$\text{arctg } \frac{a}{s}$	$\frac{\sin at}{t}$
182	$\text{arctg } \frac{2as}{s^2 - a^2 + b^2}$	$\frac{2}{t} \sin at \cos bt$
183	$\text{arctg } \frac{ab}{s^2 - as + b^2}$	$\frac{e^{at} - 1}{t} \sin bt$
184	$\frac{\text{ch}(2v-1)\sqrt{s}}{\sqrt{s} \text{sh } \sqrt{s}} \quad (0 \leq v \leq 1)$	$\theta_3(v, t)$

№	$F(s)$	$f(t)$
185	$\frac{\operatorname{sh} x \sqrt{s}}{\operatorname{sh} l \sqrt{s}} \quad (-l < x < +l)$	$\frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x} \theta_3 \left(\frac{l-x}{2l}, \frac{t}{l^2} \right) =$ $= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi(2nl + l - x, t) =$ $= -\frac{2\pi}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \sin n \frac{\pi}{l} x e^{-n^2 \frac{\pi^2}{l^2} t}$
186	$\frac{\operatorname{sh}(l-x) \sqrt{s}}{\operatorname{sh} l \sqrt{s}} \quad (0 < x < 2l)$	$-\frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x} \theta_3 \left(\frac{x}{2l}, \frac{t}{l^2} \right) =$ $= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi(2nl + x, t) =$ $= \frac{2\pi}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \sin n \frac{\pi}{l} x e^{-n^2 \frac{\pi^2}{l^2} t}$
187	$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-x \sqrt{s}} \operatorname{sh} \xi \sqrt{s} & (0 \leq \xi \leq x), \\ \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\xi \sqrt{s}} \operatorname{sh} x \sqrt{s} & (x \leq \xi < \infty) \end{cases}$	$\frac{1}{2} [\chi(x - \xi, t) - \chi(x + \xi, t)]$
188	$\begin{cases} \frac{\operatorname{sh} \xi \sqrt{s} \operatorname{sh}(l-x) \sqrt{s}}{\sqrt{s} \operatorname{sh} l \sqrt{s}} & (0 \leq \xi \leq x), \\ \frac{\operatorname{sh} x \sqrt{s} \operatorname{sh}(l-\xi) \sqrt{s}}{\sqrt{s} \operatorname{sh} l \sqrt{s}} & (x \leq \xi \leq l) \end{cases}$	$\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\chi(2nl + x - \xi, t) - \chi(2nl + x + \xi, t)] =$ $= \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \frac{\pi^2}{l^2} t} \sin n \frac{\pi}{l} x \sin n \frac{\pi}{l} \xi$
189	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\left(\frac{s}{2}\right)^2} \operatorname{erfc} \frac{s}{2}$	e^{-t^2}

№	$F(s)$	$f(t)$
190	$\frac{e^{-as}}{s}$	
191	$\frac{1 - e^{-as}}{s}$	
192	$\frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}$	
193	$\frac{(1 - e^{-as})^2}{s}$	
194	$\frac{(e^{-as} - e^{-bs})^2}{s}$	
195	$\frac{(1 - e^{-as})^2}{s^2}$	
196	$\frac{(e^{-as} - e^{-bs})^2}{s^2}$	

№	$F(s)$	$f(t)$
197	$\frac{be^{-as}}{s(s+b)}$	 $\begin{cases} 0 & \text{при } 0 < t < a, \\ 1 - e^{-b(t-a)} & \text{при } a < t \end{cases}$
198	$\frac{e^{-as}}{s+b}$	 $\begin{cases} 0 & \text{при } 0 < t < a, \\ e^{-b(t-a)} & \text{при } a < t \end{cases}$
199	$\frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s^2}$	
200	$\frac{1 - e^{-as}}{s^2}$	
201	$\frac{e^{-as} + as - 1}{as^2}$	
202	$\frac{a \left(1 - e^{-\frac{2n\pi s}{a}} \right)}{s^2 + a^2}$	 $\begin{cases} \sin at & \text{при } 0 < t < \frac{2n\pi}{a}, \\ 0 & \text{при } \frac{2n\pi}{a} < t \end{cases}$

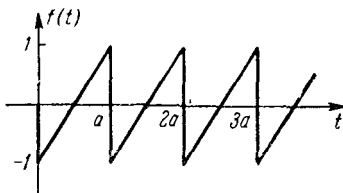
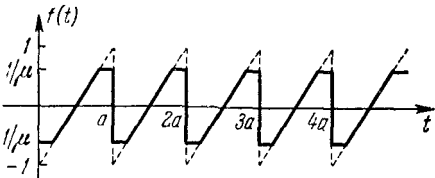
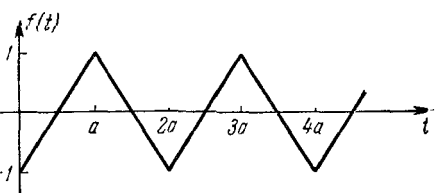
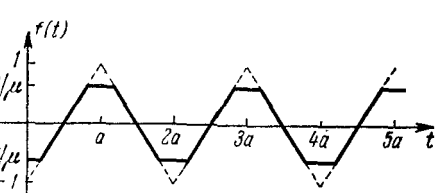
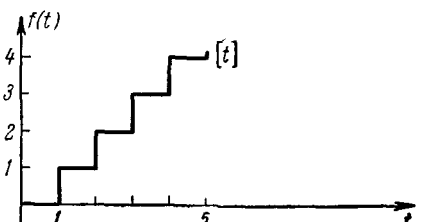
№	$F(s)$	$f(t)$
203	$\frac{s \left(1 - e^{-\frac{2n\pi s}{a}} \right)}{s^2 + a^2}$	 $\begin{cases} \cos at & \text{при } 0 < t < \frac{2n\pi}{a}, \\ 0 & \text{при } \frac{2n\pi}{a} < t \end{cases}$
204	$f_p(s) = \frac{f(s)}{1 - e^{-as}}$	
205	$\frac{a}{s^2 + a^2} \cdot \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{a}s}}{1 - e^{-\frac{\pi}{a}s}}$	 $ \sin at $
206	$\frac{a}{s^2 + a^2} \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi}{a}s}}$	 $\begin{cases} \sin at & \text{при } \frac{2n\pi}{a} < t < \frac{(2n+1)\pi}{a}, \\ 0 & \text{при } \frac{(2n+1)\pi}{a} < t < \frac{(2n+2)\pi}{a}, \end{cases}$ $n = 0, 1, \dots$

№	$F(s)$	$f(t)$
207	$\frac{a}{s^2 + a^2} \frac{1}{e^{\frac{\pi}{a}s} - 1}$	 $\begin{cases} 0 & \text{при } \frac{2n\pi}{a} < t < \frac{(2n+1)\pi}{a}, \\ -\sin at & \text{при } \frac{(2n+1)\pi}{a} < t < \frac{(2n+2)\pi}{a}, \end{cases}$ $n = 0, 1, \dots$
208	$\frac{1}{s(1 + e^{-as})}$	
209	$\frac{e^{-as} + as - 1}{as^2(1 - e^{-as})}$	
210	$\frac{1}{s(1 + e^{as})}$	
211	$\frac{1 - e^{-\frac{a}{v}s}}{s(1 - e^{-as})}$	
212	$\frac{1 - e^{-as}}{s(1 + e^{-as})}$	

№	$F(s)$	$f(t)$
213	$\frac{e^{-as} - 1}{s(1 + e^{-as})}$	
214	$\frac{1 - e^{-as}}{s(1 + e^{as})}$	
215	$\frac{4 - e^{-as}}{s(4 + 2e^{-as})}$	
		$\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{при } na < t < (n+1)a$
216	$\frac{1 - e^{-as}}{s(e^{as} + e^{-as})}$	
217	$\frac{e^{-\frac{as}{\alpha}} - e^{-\frac{as}{\lambda}} + e^{-as} - e^{-\frac{as}{\mu}}}{s(1 - e^{-as})}$	
218	$\frac{1 - e^{-as}}{as^2(1 + e^{-as})}$	

№	$F(s)$	$f(t)$
219	$\frac{(1 - e^{-as})^2}{as^2(1 - e^{-4as})}$	
220	$\frac{2v \left(1 - e^{-\frac{as}{2v}}\right)^2}{as^2(1 - e^{-as})}$	
221	$\frac{\left(1 - e^{-\frac{as}{\mu}}\right) \left(1 - e^{-\left(2 - \frac{1}{\mu}\right)as}\right)}{as^2(1 - e^{-2as})}$	
222	$\frac{\left(1 - e^{-\frac{as}{\mu}}\right) \left(1 - e^{-\left(2 - \frac{1}{\mu}\right)as}\right)}{as^2(1 - e^{-4as})}$	
223	$\frac{2v \left(1 - e^{-\frac{as}{2v\mu}} - e^{-\frac{(2\mu-1)as}{2v\mu}} + e^{-\frac{as}{v}}\right)}{as^2(1 - e^{-as})}$	
224	$\frac{v(v-1) + ve^{-as} - v^2 e^{-\frac{as}{v}}}{(v-1)as^2(1 - e^{-as})}$	
225	$\frac{v(v-1) + ve^{-as} - v^2 e^{-\frac{as}{v}}}{(v-1)as^2(1 - e^{-2as})}$	

№	$F(s)$	$f(t)$
226	$\frac{\lambda v(v-1) + \lambda v e^{-\frac{as}{\lambda}} - \lambda v^2 e^{-\frac{as}{\lambda}}}{as^2(v-1)(1-e^{-as})}$	
227	$\frac{as + 1 - e^{as}}{as^2(1 - e^{as})}$	
228	$\frac{1 - (1 + as)e^{-as}}{as^2(1 - e^{-2as})}$	
229	$\frac{v - (v + as)e^{-\frac{as}{v}}}{as^2(1 - e^{-as})}$	
230	$\frac{\mu - \mu e^{-\frac{as}{\mu}} - ase^{-as}}{a\mu s^2(1 - e^{-as})}$	
231	$\frac{\mu - \mu e^{-\frac{as}{\mu}} - ase^{-as}}{a\mu s^2(1 - e^{-2as})}$	
232	$\frac{\mu v - \mu v e^{-\frac{as}{\mu v}} - ase^{-\frac{as}{v}}}{a\mu s^2(1 - e^{-as})}$	

№	$F(s)$	$f(t)$
233	$\frac{2 - as - (2 + as)e^{-as}}{as^2(1 - e^{-as})}$	
234	$\frac{2\mu e^{-\frac{as}{2}} \left(\frac{as}{e^{2\mu} - 1} - \frac{as}{2\mu} \right) - as(1 + e^{-as})}{a\mu s^2(1 - e^{-as})}$	
235	$\frac{2(1 - e^{-as})}{as^2(1 + e^{-as})} - \frac{1}{s}$	
236	$\frac{2 \left(e^{-\frac{\mu-1}{2\mu}as} - e^{-\frac{\mu+1}{2\mu}as} \right)}{as^2(1 + e^{-as})} - \frac{1}{\mu s}$	
237	$\frac{1}{s(e^s - 1)}$	

№	$F(s)$	$f(t)$
238	$\frac{1}{s(e^{as} - 1)}$	
239	$\frac{1}{s(1 - e^{-s})}$	
240	$\frac{1}{s(1 - e^{-as})}$	
241	$\frac{1}{s^2(e^{as} - 1)}$	
242	$\frac{1}{s(e^s - \alpha)} \quad (\alpha \neq 1)$	$\frac{\alpha^{[t]} - 1}{\alpha - 1}$
243	$\frac{e^s - 1}{s} \frac{1}{e^s - \alpha}$	$\alpha^{[t]}$
244	$\frac{e^s - 1}{s} \frac{1}{(e^s - \alpha)^2}$	$[t] \alpha^{[t]-1}$

$n \left(t - \frac{(n+1)a}{2} \right)$ при $na < t < (n+1)a$

№	$F(s)$	$f(t)$
245	$\frac{e^s - 1}{s} \frac{1}{(e^s - \alpha)^3}$	$\frac{1}{2} [t] ([t] - 1) \alpha^{[t]-2}$
246	$\frac{e^s - 1}{s} \frac{1}{(e^s - \alpha)(e^s - \beta)}$	$\frac{\alpha^{[t]} - \beta^{[t]}}{\alpha - \beta} \quad (\alpha \neq \beta)$
247	$\frac{e^s - 1}{s} \frac{e^s - (\alpha + \beta)}{(e^s - \alpha)(e^s - \beta)}$	$-\alpha\beta \frac{\alpha^{[t]-1} - \beta^{[t]-1}}{\alpha - \beta} \quad (\alpha \neq \beta)$
248	$\frac{e^s - 1}{s} \frac{e^{\mu s}}{p(e^s)} \quad (\mu = 0, 1, \dots, r-1)$ $(p(z) = z^r + c_{r-1}z^{r-1} + \dots + c_0)$	$Q^{([t]+\mu)}(0)$ $\left(Q(t) \circ \frac{1}{p(s)} \right)$
249	$\frac{1 - e^{-s}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} F_k e^{-ks}$	$F([t])$
250	$\frac{e^s - 1}{s} \frac{e^s + 1}{(e^s - 1)^3}$	$[t]^2$
251	$\frac{e^s - 1}{s} \frac{e^s + \alpha}{(e^s - \alpha)^3}$	$[t]^2 \alpha^{[t]-1}$
252	$\frac{e^s - 1}{s} \frac{(c-d)e^s - (c\beta - d\alpha)}{(e^s - \alpha)(e^s - \beta)}$	$c\alpha^{[t]} - d\beta^{[t]}$
253	$\frac{e^s - 1}{s} \frac{\sin \beta}{e^{2s} - 2e^s \cos \beta + 1}$	$\sin \beta [t]$
254	$\frac{e^s - 1}{s} \frac{e^s - \cos \beta}{e^{2s} - 2e^s \cos \beta + 1}$	$\cos \beta [t]$
255	$\frac{e^s - 1}{s} \frac{\alpha \sin \beta}{e^{2s} - 2\alpha e^s \cos \beta + \alpha^2}$	$\alpha^{[t]} \sin \beta [t]$
256	$\frac{e^s - 1}{s} \frac{e^s - \alpha \cos \beta}{e^{2s} - 2\alpha e^s \cos \beta + \alpha^2}$	$\alpha^{[t]} \cos \beta [t]$

№	$F(s)$	$f(t)$
257	1	$\delta(t)$
258	$s^n \quad (n=1, 2, \dots)$	$\delta^{(n)}(t)$
259	$e^{-Ts} \quad (T>0)$	$\delta(t-T)$
260	$e^{-x\sqrt{as^2+bs+c}}$	$e^{-(b/2\sqrt{a})x} \delta(t-\sqrt{a}x) +$ $+ \sqrt{\frac{d}{a}} x e^{-(b/2a)t} \frac{I_1\left(\frac{\sqrt{d}}{a} \sqrt{t^2-ax^2}\right)}{\sqrt{t^2-ax^2}},$ <p style="text-align: right;">где $d=(b/2)^2-ac$</p>

7. ФУНКЦИИ И ОБОЗНАЧЕНИЯ ВСТРЕЧАЮЩИЕСЯ В ТАБЛИЦАХ

$$U(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0 \\ 1 & \text{при } t > 0 \end{cases}$$

$\delta(t)$ — функция Дирака, импульсная функция

$$L_n(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{t^k}{k!} \quad (\text{полином Лагерра})$$

$$\chi(a, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$$

$$\psi(a, t) = \frac{a}{2\sqrt{\pi t^{3/2}}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$$

$$\operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2} du$$

$$\left. \begin{aligned} J_0(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} \\ J_\nu(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \\ I_1(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+1}}{k! (k+1)!} \end{aligned} \right\} \quad (\text{функции Бесселя})$$

$$\begin{aligned} \Theta_3(v, t) &= 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 \pi^2 t} \cos 2k\pi v = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(v+n)^2}{t}} \end{aligned}$$

$[t]$ — наибольшее целое число $\leq t$
 $C = 0,577 \dots$ (постоянная Эйлера)

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адмитанс 112
Амплитуда гармонического колебания 12
— комплексного колебания 16
- Блок-схема 66
- Взрыв тепловой 138
Возбуждение 65
Вычет функции 160
- Гамма-функция 32
- Длительность импульса 226
- Задачи Коши 62
— — для разностного уравнения 222
— — крайная для разностного уравнения 217, 224
Значения начальные 42, 51, 83, 129, 209
— собственные 218
- Изображение (функция) 33
Импеданс 112
Импульс 229
— длительный 229
— мгновенный 229
— непрямоугольный 229, 241
— прямоугольный 229, 239
Интеграл комплексный, осуществляющий обратное преобразование Лапласа 158
— Лапласа 11, 27, 33
— —, его обращение 27
— —, его физический смысл 27
— —, как преобразование 33
— Пуассона 158
— Френеля 198
— Фурье 17, 25
Источник 136
— двойной 136, 157
- Квазиустойчивость 196
Колебание гармоническое 12
— комплексное 16
Колебания собственные 82, 90
Контур электрический 110, 218
Коэффициент затухания 57
— передачи 65, 91
— усиления импульсного элемента 226
Критерий квадратичный качества регулирования 49
- Лемма Жордана 162
Линия электрическая двухпроводная 141
- Метод комплексных амплитуд 219, 220, 221
- Напряжение комплексное 219
Носитель непрерывной функции 255
— распределения 256
- Область определения функции 127
Обращение интеграла Лапласа 27
— преобразования Лапласа 35
— — Фурье 24
— \mathcal{L} -преобразования 205
Оригинал (функция) 33
Отклик на возбуждение 65
— на единичный скачок 70, 79, 91
— на импульсное возбуждение 74, 116
— на колебательное возбуждение 92
Отображение операций 38
- Парсеваля равенство 48
— — обобщенное 48
Период повторения импульсов 226
Плотность амплитуды 19
— вероятности 18
— массы 18
— спектральная 19
— спектрального распределения 19
Поведение функции асимптотическое 182
Подпространство \mathcal{D}'_6 257
Полуплоскость сходимости 28
Последовательность 200
Правила грамматические для преобразования Лапласа 39
— — для \mathcal{L} преобразования 206
Представление функции асимптотическое 184
Преобразование Лапласа 33
— — двумерное 131
— — дискретное 201
— — для распределений 255
— —, его обращение 35
— — как отображение 34, 36
— — обратное 35
— — Жордана 202
— — Тэйлора 210
— — Фурье 24
— —, его обращение 24
Производная обобщенная 74, 100, 249
Пространство \mathcal{D} 248
— \mathcal{D}' 251
— \mathcal{D}'_+ 251
— изображений 34
— оригиналов 34
- Равенство Парсеваля 48
— — обобщенное 48

- Разложение в ряды по любым функциям 172
 — — — по показательным функциям 166
 — в степенные ряды 164
 — на простейшие дроби 55
 — функции асимптотическое 184, 187, 189
 — Хевисайда 72
 Распределение 23, 247, 248, 251
 — вероятности 18
 — конечного порядка 256
 — регулярное 251
 — спектральное 18
 Решение неустойчивое 196
 — устойчивое 196
 Решения собственные 218
 Ряд Лорана 202
 — Неймана 153
 — факториальный 173
 — Фурье 11, 12
 — —, его коэффициенты 11, 12
- Свертка 46
 — комплексная 207
 — последовательностей 207
 — распределений 259
 Система импульсная 234
 — совместных дифференциальных уравнений, аномальный случай 95, 99
 — — —, нормальный случай 89
 — — —, приведение к одному уравнению 103
 — — — со структурой, различной в отдельных интервалах 106
 — — разностных уравнений 218
 — уравнений для двухпроводной электрической линии 141
 Скачок единичный 29, 31
 Сложение распределений 253
 Соотношения интегральные 156
 Спектр функции 16
 Схема цепочная 221
- Таблица соответствий для преобразования Лапласа 261—286
 — — для \mathcal{Z} -преобразования 204
 Теорема дифференцирования для изображения 44
 — — для оригинала 41
 — интегрирования для изображения 45
 — для оригинала 44
 — Коши о вычетах 160
 — о конечном значении 183, 209
 — о начальном значении 183, 208
 — подобия 39
 — свертывания 45
 — комплексного 47
 — смещения вторая 40
 — — для \mathcal{Z} -преобразования 206
 — — первая 39
 — — для \mathcal{Z} -преобразования 206
 Теория распределений 23, 247—261
 Ток комплексный 219
- Удлинитель импульсов 230
 Умножение распределений 253
 Уравнение волновое 132, 142
 — дифференциальное второго порядка 54
 — — нелинейное 123
 — n -го порядка однородное 80
 — — — неоднородное 61
 — первого порядка 50
 — изображающее 50, 51
 — интегральное 155
- Уравнение интегральное второго рода 152
 — — первого рода 152, 154
 — кабеля Томпсона 133, 142
 — Лапласа 132
 — разностное второго порядка 214
 — —, общий случай 209
 — рекуррентное 210
 — телеграфное 142
 — теплопроводности 132, 142
 Уравнения в частных производных 127
 — дифференциальные совместные, аномальная система 95, 99
 — —, нормальная система 85
 — Кирхгофа 113
 — электрической цепи 110, 116
 Условия, граничные для уравнений в частных производных 128, 129
 — Дирихле 11
 — начальные для уравнений в частных производных 128
 Устойчивость, ее исследование 195
 — неособенная 196
 — собственная 196
- Фаза начальная гармонического колебания 12
 — — комплексного колебания 16
 Формула Дюамеля 72
 Функционал 249
 — абстрактный 250, 251
 Функция аналитическая 29, 36
 — Бесселя 157, 165
 — весовая 65, 81, 91, 116, 247
 — возбуждающая 50, 65
 — возмущающая 50
 — входная 65, 111
 — выходная 65, 111
 — Грина 65
 — двойного источника 136, 157
 — единичного скачка 29, 250
 — импульсная 23
 — источника 136
 — мероморфная 167, 169, 172, 197
 — нулевая 35
 — основная 247
 — передаточная 65, 77, 91, 115
 — переходная 70
 — распределения 18
 — сравнения 184
 — ступенчатая 200
 — ударная 23
 — целая 168, 197
- Характеристика амплитудная 77
 — фазовая 77
 — частотная 77, 79, 92
- Цепь фиксирующая 230
 — электрическая 110, 221
- Частота «комплексная» 220
 Часть функции главная 168
 Четырехполосник T -образный 222
- Эластанс 117
 Элемент импульсный 226
 — —, создающий длительные импульсы 239
 — —, — мгновенные импульсы 235
 — —, — прямоугольные импульсы 241
 — —, — прямоугольные импульсы 239
- Ядро интегрального уравнения 153