

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.Д.ГИРГИДОВ

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

*Рекомендовано Министерством общего и профессионального
образования Российской Федерации в качестве учебника
для студентов высших учебных заведений, обучающихся
по строительным направлениям и специальностям*

Санкт-Петербург
Издательство СПбГТУ
1999

Рецензенты:

кафедра гидравлики Московского государственного университета природообустройства (заведующий кафедрой, д-р техн. наук, профессор *Д.В. Штеренлихт*),

д-р техн. наук, профессор *А.А. Шейнак*.

Гиргидов А.Д. **Техническая механика жидкости и газа**: Учеб. для вузов. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999. 395 с.

ISBN 5-7422-0075-7

Содержание соответствует программе курса для строительных специальностей и направлений. Учебник дополнен факультативными материалами для хорошо успевающих студентов и аспирантов.

Для студентов вузов строительных специальностей.

© Гиргидов А.Д., 1999

© Санкт-Петербургский государственный
технический университет, 1999

ISBN 5-7422-0075-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	11
Глава 1. ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И МОДЕЛИ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ	13
◆ ▲ ▼ ● ■ 1.1. Модель сплошной среды	13
◆ ▲ ▼ ● ■ 1.2. Силы, действующие на жидкость	16
◆ ▲ ▼ ● ■ 1.3. Напряженное состояние в точке сплошной среды. Тензор напряжений	17
◆ ▲ ▼ ● ■ 1.4. Свойство текучести. Твердые и текучие вещества	21
◆ ▲ ▼ ● ■ 1.5. Сжимаемость жидкостей и газов	22
◆ ▲ ▼ ● ■ 1.6. Фазовые переходы в жидкости. Кипение и кавитация ...	23
◆ ▲ ▼ ● ■ 1.7. Отличительные особенности жидкостей и газов	24
◆ ▲ ▼ ● ■ 1.8. Вязкость жидкостей и газов. Реологические свойства жидкостей	25
Глава 2. ГИДРОСТАТИКА	28
◆ ▲ ▼ ● ■ 2.1. Гидростатическое давление в точке	28
◆ ▲ ▼ ● ■ 2.2. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости (уравнения Эйлера)	30
◆ ▲ ▼ ● ■ 2.3. Интегрирование уравнений Эйлера	32
◆ ▲ ▼ ● ■ 2.4. Сила гидростатического давления на произвольную плоскую фигуру	34
◆ ▲ ▼ ● ■ 2.5. Сила избыточного гидростатического давления на цилиндрические поверхности	37
◆ ▲ ▼ ● ■ 2.6. Способы измерения гидростатического давления	39
◇ ○ □ 2.7. Распределение давления в атмосфере Земли	42

◆ ▲ ▼ ● ■	2.8. Нормальные напряжения в стенках круглоцилиндрической трубы (котельная формула)	43
▼ ● ■	2.9. Закон Архимеда. Плавание тел	44
Глава 3. КИНЕМАТИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ		48
◆ ▲ ▼ ● ■	3.1. Методы описания движения сплошной среды	48
◆ ▲ ▼ ● ■	3.2. Линия тока и траектория	50
◆ ▲ ▼ ● ■	3.3. Метод контрольного объема	53
◆ ▲ ▼ ● ■	3.4. Гидромеханическая интерпретация теоремы Остроградского—Гаусса	55
○ □	3.5. Векторная форма теоремы Остроградского—Гаусса ...	58
□	3.6. Разложение движения элементарного объема сплошной среды на поступательное, вращательное и деформационное (теорема Гельмгольца)	60
◆ ▲ ▼ ● ■	3.7. Субстанциальная производная	68
◆ ▼ ● ■	3.8. Потенциал скорости и функция тока при плоском безвихревом движении	73
Глава 4. ОСНОВЫ ГИДРОДИНАМИКИ		76
◆ ▲ ▼ ● ■	4.1. Предварительные сведения	76
◆ ▲ ▼ ● ■	4.2. Закон сохранения массы	77
◆ ▲ ▼ ● ■	4.3. Закон изменения количества движения	78
◇ ▼ ● ■	4.4. Закон изменения момента количества движения	79
◆ ▲ ▼ ● ■	4.5. Закон изменения кинетической энергии	80
△ ○ ■	4.6. Общий закон сохранения энергии для контрольного объема сплошной среды	81
Глава 5. ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ (В ОДНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ)		82
◆ ▲ ▼ ● ■	5.1. Основные понятия и терминология	82
◆ ▲ ▼ ● ■	5.2. Гидравлические характеристики поперечного сечения потока	84
◆ ▲ ▼ ● ■	5.3. Уравнение неразрывности	86
◆ ▲ ▼ ● ■	5.4. Уравнение Бернулли для установившегося потока вязкой жидкости	89

◇ ○ ■	5.5. Уравнение Бернулли для неустановившегося напорного движения вязкой несжимаемой жидкости	91
◇ ○ □	5.6. Уравнение Бернулли для установившегося безнапорного движения вязкой жидкости	93
◆ ▲ ▼ ● ■	5.7. Геометрическая и энергетическая интерпретации слабых, входящих в уравнение Бернулли	94
◆ ▲ ▼ ● ■	5.8. Потенциальный и полный (гидродинамический) напоры. Пьезометрическая и напорная линии	96
◆ ▲ ● ■	5.9. Основное уравнение равномерного движения жидкости в поле силы тяжести	98
◆ ▲ ▼ ● ■	5.10. Два режима движения жидкости	101
◆ ▲ ▼ ● ■	5.11. Потери напора при установившемся равномерном движении жидкости (потери по длине)	106
◆ ● ■	5.12. Формула Шези	112
□	5.13. Потери энергии по длине в потоке сжимаемой жидкости (газа)	114
◆ ▲ ▼ ● ■	5.14. Местные потери напора	116
◆ ▲ ▼ ● ■	5.15. Справочные материалы для расчета местных потерь напора	122

Глава 6. УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТРУБОПРОВОДАХ

◆ ▲ ▼ ● ■	6.1. Классификация трубопроводов. Основные задачи расчета трубопроводов	125
◆ ▲ ▼ ● ■	6.2. Расчет коротких трубопроводов	126
◆ ● ■	6.3. Расчет длинных трубопроводов	130
◆ ▲ ▼ ● ■	6.4. Измерение расхода в трубопроводах	134
◇ △ ▽ □	6.5. Слияние и разделение потоков в трубопроводах	136
◆ ● ■	6.6. Справочные материалы для расчета длинных трубопроводов	142

Глава 7. НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В НАПОРНЫХ ТРУБОПРОВОДАХ (ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ УДАР)

◇ △ ▽ ● ■	7.1. Общее описание гидравлического удара	145
◇ ▽ ● ■	7.2. Основные уравнения гидравлического удара	148
○ ■	7.3. Скалярное волновое уравнение	152
○ ■	7.4. Векторные волновые уравнения	154

◇ △ ▽ ○ ■	7.5. Волновая скорость	156
◇ ▽ ○ ■	7.6. Постепенное закрытие задвижки	157
Глава 8. ИСТЕЧЕНИЕ ИЗ ОТВЕРСТИЙ И НАСАДКОВ		160
◆ ▲ ▼ ● ■	8.1. Основные понятия	160
◆ ▲ ▼ ● ■	8.2. Формулы для скорости и расхода при истечении из отверстий и насадков	161
◆ ▲ ▼ ● ■	8.3. Истечение через нецилиндрические насадки	164
◆ ▲ ▼ ● ■	8.4. Истечение через отверстия и насадки "под уровень"	165
◇ ▲ ▼ ● ■	8.5. Примеры использования нецилиндрических насадков	166
Глава 9. РАВНОМЕРНОЕ И ПЛАВНОИЗМЕНЯЮЩЕЕСЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТЫХ РУСЛАХ		168
◆ ● ■	9.1. Основные понятия и терминология	168
◆ ● ■	9.2. Трапцеидальные каналы	172
◆ ● ■	9.3. Ограничение скорости воды в каналах	175
◆ ● ■	9.4. Предотвращение заиливания каналов	175
◆ ● ■	9.5. Предотвращение размыва грунтовых каналов (метод влекущей силы)	177
◇ ○ ■	9.6. Очертание равномерно устойчивого откоса	180
◆ ● ■	9.7. Неравномерное установившееся движение воды в каналах	183
Глава 10. НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТЫХ РУСЛАХ (МОДЕЛЬ МЕЛКОЙ ВОДЫ)		188
◇ ○ ■	10.1. Предварительные замечания	188
◇ ○ ■	10.2. Основные уравнения неустановившегося движения в открытых руслах	188
◇ ○ ■	10.3. Упрощения и анализ уравнений мелкой воды	192
◇ ○ ■	10.4. Классификация длинных волн в каналах	198
Глава 11. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ ПРЫЖОК		200
◆ ● ■	11.1. Общее описание гидравлического прыжка	200
◆ ● ■	11.2. Основное уравнение гидравлического прыжка в цилиндрическом русле	202
◆ ● ■	11.3. Основное уравнение гидравлического прыжка и его длина в прямоугольном русле	204

◆	●■	11.4. Местоположение гидравлического прыжка в канале ..	205
		<i>Глава 12. ВОДОСЛИВЫ</i>	206
◆	●■	12.1. Основная терминология и классификации водосливов .	206
◆	●■	12.2. Формулы для расхода через водосливы	209
◆	●■	12.3. Водослив Кригера—Офицерова	210
◆	●■	12.4. Критерии подтопления и расчет подтопленных водосливов	212
◆	●■	12.5. Измерение расхода воды с помощью водосливов	213
◆	●■	12.6. Справочные материалы для расчета водосливов практического профиля	214
◆	●■	12.7. Справочные материалы для расчета водосливов с широким порогом	216
		<i>Глава 13. ДВИЖЕНИЕ ГРУНТОВЫХ ВОД</i>	219
◆	●■	13.1. Физико-механические предпосылки к описанию грунтовых вод	219
◆	●■	13.2. Скорость фильтрации. Основной закон ламинарной фильтрации (закон Дарси)	221
◆	●■	13.3. Способы определения коэффициента фильтрации ..	223
	●■	13.4. Плавноизменяющееся безнапорное движение грунтовых вод. Дифференциальное уравнение Дюпюи ...	224
◇	○■	13.5. Интегрирование дифференциального уравнения безнапорного плавноизменяющегося движения грунтовых вод	226
◆	●■	13.6. Фильтрация через прямоугольный однородный грунтовый массив	227
◇	○■	13.7. Два виртуальных способа расчета фильтрации через неоднородный (слоистый) грунт	228
◇	○■	13.8. Движение грунтовых вод в прямоугольном массиве при инфильтрации с поверхности земли	229
◆	●■	13.9. Приток воды к водосборной галерее	232
◆	●■	13.10. Приток воды к круглому колодезю	234
◇	○■	13.11. Фильтрация воды из земляных каналов	236
◇	○■	13.12. Фильтрация воды через однородную грунтовую плотину на водонепроницаемом основании	237
◇	○■	13.13. Фильтрация воды через однородную грунтовую плотину на водопроницаемом основании	240

◇	○ ■	13.14. Фильтрация через грунтовые плотины, имеющие устройства, предотвращающие высачивание воды на низовой откос	242
◇	○ ■	13.15. Фильтрация через неоднородные земляные плотины на водонепроницаемом основании	243
◇	○ ■	13.16. Дифференциальные уравнения резкоизменяющегося движения грунтовых вод	244
◇	○ ■	13.17. Плоская задача о фильтрации воды в однородном грунте. Функция тока, гидродинамическая сетка	246
◇	○ ■	13.18. Граничные условия для решения уравнения Лапласа и построения гидродинамической сетки	248
◇	○ ■	13.19. Метод решения фильтрационных задач, основанный на электрогидродинамической аналогии (ЭГДА)	250
◇	○ ■	13.20. Задачи расчета подземного контура плотины, решаемые с помощью гидродинамической сетки	251
◇	○ ■	13.21. Метод расчета подземного контура, основанный на использовании коэффициентов потерь напора (метод коэффициентов сопротивления)	253

Глава 14. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

◇ △ ▼ ○ ■	14.1. Предварительные замечания	256
◇ △ ▼ ○ ■	14.2. Дифференциальное уравнение, выражающее закон сохранения массы	256
◇ △ ▼ ○ ■	14.3. Дифференциальные уравнения, выражающие закон изменения количества движения (уравнения движения в напряжениях)	258
□	14.4. Дифференциальные уравнения, выражающие закон изменения момента количества движения	259
◇ △ ▼ ○ ■	14.5. Обобщенный закон Ньютона для вязких напряжений .	260
◇ △ ▼ ○ ■	14.6. Уравнения движения вязкой сжимаемой жидкости (уравнения Навье—Стокса)	263
■	14.7. Модель невязкой несжимаемой жидкости (гидродинамические уравнения Эйлера)	265
	14.8. Дифференциальные уравнения, выражающие закон изменения кинетической энергии	267

Глава 15. ОДНОМЕРНЫЕ ПОТОКИ ГАЗА

◇ △	○ ■	15.1. Скорость распространения возмущений в сжимаемой среде	271

◇ △ ○ ■	15.2. Уравнение Бернулли для установившегося потока газа	273
◇ △ □	15.3. Краткие сведения из термодинамики	275
◇ △ □	15.4. Зависимость скорости звука от термодинамических условий. Термодинамические формы уравнения Бернулли	276
◇ △ □	15.5. Параметры торможения. Критическая скорость. Число Маха	278
◇ △ □	15.6. Течение газа в конфузорах и диффузорах (в одномерном приближении)	280
◇ △ □	15.7. Истечение газа из резервуара через насадок (сопло Лавала)	282

Глава 16. ОБТЕКАНИЕ ТЕЛ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ ... 285

◇ △ ▽ ○ ■	16.1. Общие положения	285
◇ △ ▽ ○ ■	16.2. Силы, действующие на обтекаемое жидкостью тело	285
◇ △ ▽ ○ ■	16.3. Обтекание плоской пластины	287
◇ △ ○ □	16.4. Безотрывное обтекание цилиндра однородным потоком невязкой жидкости	290
○ □	16.5. Присоединенный вихрь и подъемная сила	293
◇ △ ○ ■	16.6. Пограничный слой	296
◇ △ ○ ■	16.7. Отрыв пограничного слоя. Кризис обтекания	298
◇ △ ▽ ○ □	16.8. Способы улучшения гидроаэродинамических характеристик движущихся объектов	303
□	16.9. Обтекание крыловых профилей	306
◇ ○ □	16.10. Обтекание шара	308
◇ ○ ■	16.11. Ветряной двигатель	311
▲ ○ ■	16.12. Основы расчета ветровой нагрузки на конструкции и сооружения	317

Глава 17. ОСРЕДНЕННАЯ МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА. УРАВНЕНИЯ РЕЙНОЛЬДСА ... 320

■	17.1. Простейшее решение уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости (уравнений Навье—Стокса)	320
◇ ○ □	17.2. Уравнения Рейнольдса	323
□	17.3. Проблема замыкания уравнений Рейнольдса. Цепочка уравнений Келлера—Фридмана. Уравнение баланса энергии	326

◇	○ □	17.4. Турбулентные касательные напряжения в пристеночном плоском продольно-однородном потоке	329
Глава 18. ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ			332
◇	○ □	18.1. Пристеночный турбулентный поток	332
◇	○ ■	18.2. Структура турбулентного потока в гладкой трубе	336
	□	18.3. Потери напора по длине в круглой трубе	341
◇	□	18.4. Полуэмпирические методы решения задач о свободной турбулентности	345
Глава 19. СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКОВ			352
	□	19.1. Основные понятия статистической гидромеханики ..	352
	□	19.2. Частотные характеристики турбулентности	358
Глава 20. МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ			363
◆ △	● ■	20.1. Задачи экспериментального изучения движения жидкостей	363
◇	○ ■	20.2. Предпосылки использования анализа размерностей ...	365
◇ △	○ ■	20.3. Основные положения анализа размерности. П-теорема	367
◆ △	● ■	20.4. Подobie гидромеханических явлений	373
◆ △	● ■	20.5. Особенности и основные приемы моделирования гидромеханических явлений	381
Список литературы			388
Предметный указатель			389

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебник основан на опыте многолетнего преподавания дисциплин гидравлического профиля в Санкт-Петербургском государственном техническом университете (СПбГТУ). К таким дисциплинам относятся трехсеместровые курсы «Гидравлика» и «Техническая механика жидкости» на гидротехническом факультете, одно- и двухсеместровые курсы с такими же названиями на гидротехническом и механико-машиностроительном факультетах. Большую роль в формировании принципов, положенных в основу учебника, сыграло преподавание таких дисциплин, как «Методика преподавания гидравлики», «Анализ размерностей», «Турбулентное течение жидкостей» на факультете повышения квалификации преподавателей (ФПКП), действующем при кафедре гидравлики СПбГТУ с 1973 года.

Учебник предназначен для подготовки в области технической механики жидкости и газа инженеров и магистров с учетом двухуровневой системы обучения, реализуемой в настоящее время в технических университетах (на первом уровне подготавливается бакалавр по направлению, на втором уровне — инженер по специальности или магистр).

Принципы, положенные в основу учебника.

1. *Фундаментальность изложения.* Все основные уравнения и зависимости, составляющие аппарат технической механики жидкости и газа, представлены как частные формы фундаментальных законов физики и механики. Единообразная методика вывода этих уравнений позволяет в каждом конкретном случае установить их связь с исходными фундаментальными законами.

2. *Соответствие используемого аппарата решаемым задачам.* Для решения профессиональных задач, возникающих в процессе производственной деятельности, инженерам (строителям, машиностроителям, металлургам и др.), как правило, вполне достаточны интегральные оценки тех или иных гидравлических явлений, основанные на одномерных моделях потоков жидкостей и газов. Поэтому основным методом, с помощью которого в учебнике решаются прикладные задачи, является метод контрольного объема.

3. *Рациональное сочетание профессионального и образовательного компонентов подготовки специалистов.* Наряду с разделами, предназначенными непосредственно для привития студентам умений и навыков, необходимых для профессиональной деятельности, в учебник включены материалы, способствующие:

развитию у студентов представлений о механике жидкости и газа в окружающей их повседневной жизни (на транспорте, в спорте, в быту и т.п.);

расширению их мировоззрения, ознакомлению их с научными проблемами механики жидкости и газа.

Эти разделы могут рассматриваться как факультативные или рекомендуемые для самостоятельного изучения при подготовке бакалавров. Вместе с тем на втором образовательном уровне, а также при обучении в аспирантуре эти разделы можно рассматривать как обязательные.

4. *Использование математического аппарата.* Предполагается знание студентами высшей математики в объеме программы для инженерных специальностей технических университетов (математический анализ, векторное исчисление, элементы матричного исчисления).

5. *Возможно большая независимость изложения разделов учебника.* Разделы учебника, посвященные прикладным и факультативным вопросам, изложены с таким расчетом, чтобы они могли по мере необходимости включаться в программу курса или исключаться из нее. Это позволяет преподавателю формировать «маршрут» изучения курса для потока студентов или составлять индивидуальный план для учащегося, рационально сочетая (в рамках лимита времени, предусмотренного учебным планом) профессиональный и образовательный компоненты.

6. *Учебная направленность.* Справочные материалы и примеры расчета, приведенные в учебнике, ориентированы главным образом на помощь студентам при выполнении ими учебных заданий. Учебник не может заменить руководство по проектированию.

Автор рассматривает свой учебник по стилю изложения и отбору материала, а также его практической направленности как продолжающий традиции научных и учебных изданий создателей гидравлической школы СПбГТУ — проф. Б.А. Бахметева, акад. Н.Н. Павловского, проф. М.Д. Чертоусова и проф. Р.Р. Чугаева. Основное место в формировании научного и педагогического мировоззрения автора, которое позволило составить настоящий учебник, занимает многолетняя работа на кафедре гидравлики СПбГТУ под руководством проф. Р.Р. Чугаева, чьим учеником автор себя считает. Особую роль в осмыслении места и методологии гидравлики как технической механики жидкости сыграла совместная работа на ФПКП с проф. Л.Г. Лойцянским, предоставившая возможность регулярного обсуждения научных и методических вопросов.

Опыт преподавания технической механики жидкости и газа (ТМЖГ) на различных факультетах СПбГТУ показал, что учебник может быть использован при подготовке бакалавров не только по направлению 550100 «Строительство», но и в качестве учебного пособия по ряду других направлений. В оглавлении учебника указаны разделы, предназначенные как для различных строительных специальностей, так и для некоторых направлений:

- — строительные специальности с объемом ТМЖГ от 150 до 200 часов;
- — то же с объемом от 90 до 150 часов;
- ▼ — 551800 «Технологические машины и оборудование»,
552900 «Технология, оборудование и автоматизация машиностроительных процессов»;
- ▲ — 550500 «Металлургия»,
551600 «Материаловедение и технология новых материалов»;
- ◆ — 553500 «Защита окружающей среды».

Знаки □ ○ ▽ △ ◇ означают, что соответствующий раздел рекомендуется для самостоятельного (факультативного) изучения.

Автор выражает глубокую благодарность сотрудникам кафедры гидравлики: М.Р. Петриченко, Б.А. Дергачеву, О.И. Зайцеву, Е.Н. Кожевниковой, Ю.В. Кокорину, А.И. Лаксбергу, Е.А. Локтионовой, В.П. Троицкому и А.С. Чернышеву; многолетнее сотрудничество и общение с ними оказало неоценимую помощь при формировании стиля и структуры учебника.

Особую благодарность автор приписывает проф. В.Т. Орлову за неоднократное критическое прочтение рукописи, позволившее внести в нее серьезные улучшения, И.В. Сорокиной, вложившей много высококвалифицированного труда в подготовку рукописи, и М.Л. Миндлину, благодаря высоким профессиональным и человеческим качествам которого рукопись приобрела вид представляемой книги.

ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И МОДЕЛИ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

1.1. Модель сплошной среды

Известно, что все физические тела состоят из молекул и атомов, которые, в свою очередь, имеют сложную структуру. В механике жидкости используют модель *сплошной среды*, т.е. считают, что материал, масса не сосредоточены в молекулах и атомах, а распределены («размазаны»), непрерывно рассредоточены в пространстве, занятом физическим телом. Это позволяет, с одной стороны, не принимать во внимание особенности молекулярного строения тех или иных жидкостей, а считать их одинаковыми или различными в зависимости от таких интегральных (не учитывающих непосредственно детали молекулярной структуры тела) характеристик, как плотность, вязкость, теплопроводность, скорость среды и т.п. С другой стороны, исключив дискретность строения вещества, можно использовать предельные переходы для определения указанных интегральных характеристик. Например, *плотность вещества* (субстанции) в точке пространства с координатами $\mathbf{r} = (x, y, z)$ определяется зависимостью

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{V \rightarrow V_0} \frac{M}{V}, \quad (1.1)$$

где V — объем, занятый веществом; M — масса этого объема; V_0 — наименьший объем, окружающий точку с координатами $\mathbf{r} = (x, y, z)$, содержащий достаточно большое (представительное) количество молекул. Чтобы объяснить физический смысл V_0 , представим на рис. 1.1 изменение средней плотности твердого или жидкого вещества в объеме V , т.е. величины $\rho_{\text{ср}} = M / V$ в зависимости от размеров объема V . Для простоты полагаем, что объем V в процессе изменения имеет форму куба, и его линейный размер равен $\sqrt[3]{V}$. При $\sqrt[3]{V} > \sqrt[3]{V_0}$ плотность вещества мало изменяется в зависимости от $\sqrt[3]{V}$, и это изменение связано с неоднородностью вещества (если вещество однородно, то $\rho_{\text{ср}}$ от размеров V не зависит). При $\sqrt[3]{V} < \sqrt[3]{V_0}$ изменение массы молекул, содержащихся

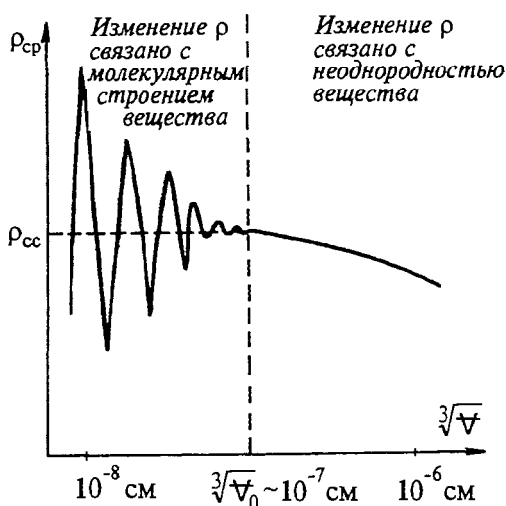


Рис. 1.1. Характер зависимости плотности материи от линейных размеров объема, когда они соизмеримы с межмолекулярным расстоянием

среды. Рассмотрим этот вопрос на примере движения воздуха в атмосфере. При обычных условиях скорость хаотического теплового движения молекул газа измеряется сотнями метров в секунду,

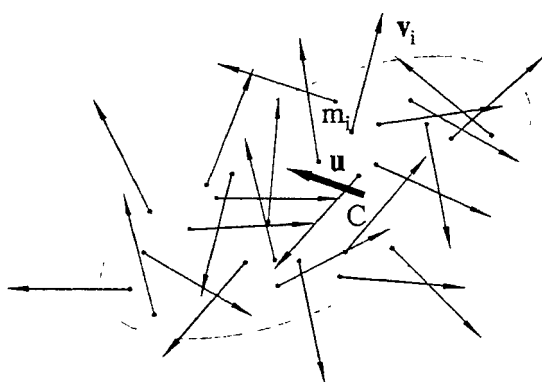


Рис. 1.2. Пояснение понятия скорости сплошной среды

молекулы, мало изменилось, если при его стягивании в точку несколько молекул останутся вне объема. Скорость сплошной среды u в точке C определим в виде

$$u = \frac{\sum m_i \cdot v_i}{\sum m_i} \quad (1.3)$$

(в числителе (1.3) сумма векторная).

Допустимость предельных переходов, хотя и с указанными выше ограничениями, позволяет при использовании модели сплошной среды

в V , оказывается чувствительным к исключению из объема отдельных молекул, и при этом модель сплошной среды становится неэффективной. Вместе с тем малые размеры объема V_0 ($\sqrt[3]{V_0} \sim 10^{-7}$ см) позволяют практически не учитывать указанное выше ограничение, считать $\sqrt[3]{V_0} \approx 0$, записать

$$\rho = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{M}{V} \quad (1.2)$$

и рассматривать V как бесконечно малую величину, полагая вместе с тем, что $\rho = \rho_{сс}$ (см. рис. 1.1), где $\rho_{сс}$ — плотность, определяемая в рамках модели сплошной среды.

Сходные ограничения следует ввести при определении скорости движения вещества с использованием модели сплошной

что намного превосходит скорость ветра. Поэтому когда говорят о скорости воздуха u в данной точке C пространства, то имеют в виду движение достаточно большого объема V (рис.1.2), выделенного вокруг точки C . Внутри этого объема должно содержаться столько молекул, чтобы его количество движения $u \sum m_i$, где m_i — масса i -й молекулы, равно сумме количеств движения молекул $\sum m_i v_i$; v_i — скорость i -й молекулы,

эффективно применять аппарат дифференциального и интегрального исчисления.

В дальнейшем изложении части объемов и поверхностей, выделенных в сплошной среде, в пределах которых можно пренебречь изменением какой-либо физической величины (плотности, скорости, температуры и т.п.), называются *элементарными* объемами и площадками (по отношению к той или иной физической величине).

Для оценки каких-либо количественных (скалярных, векторных) характеристик движущейся сплошной среды (например, массы, количества движения, энергии, распределенных сил и т.п.) будем использовать понятие *плотности распределения* той или иной гидродинамической характеристики (в пространстве или на поверхности) или количество этой характеристики, приходящееся на единицу объема или площади поверхности. Другими словами, плотность распределения какой-либо гидродинамической характеристики в пространстве (или на поверхности) — это такая функция координат и времени $\beta(\mathbf{r}, t)$, которая, будучи умножена на элементарный объем ΔV (или элементарную площадку ΔA), выразит количество рассматриваемой гидродинамической характеристики для этого объема ΔV (или площадки ΔA). Например, кинетическая энергия элементарного объема ΔV , имеющего массу $\Delta m = \rho \Delta V$ и скорость $\mathbf{u}$, равна

$$\Delta KЭ = \frac{\Delta m \cdot u^2}{2} = \frac{\rho \Delta V \cdot u^2}{2} = \frac{\rho u^2}{2} \Delta V. \quad (1.4)$$

Сомножитель $\frac{\rho u^2}{2}$, стоящий перед ΔV в последнем выражении, и есть *плотность распределения кинетической энергии*.

Эта функция может быть и векторной. Например, количество движения этого же элементарного объема ΔV равно

$$\Delta KД = \Delta m \cdot \mathbf{u} = \rho \Delta V \cdot \mathbf{u} = \rho \mathbf{u} \cdot \Delta V; \quad (1.5)$$

здесь $\rho \mathbf{u}$ — *плотность распределения количества движения*.

Пусть B — общее количество какой-либо гидродинамической характеристики (например, кинетической энергии) объема V (рис. 1.2), а $\beta(\mathbf{r}, t)$ — плотность распределения этой характеристики, где $\mathbf{r} = (x, y, z)$ — пространственные координаты, t — время. Разделим объем V на элементарные части (объемы) ΔV_i , где i — номер элементарного объема. Количество рассматриваемой гидродинамической характеристики в пределах i -го элементарного объема равно $\beta(\mathbf{r}_i, t) \Delta V_i$, где $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ — координаты любой внутренней точки объема ΔV_i . Очевидно, общее количество характеристики, относящееся к объему V , равно

$$B(t) = \sum_i \beta(\mathbf{r}_i, t) \Delta V_i. \quad (1.6)$$

Рассматривая элементарный объем как бесконечно малую величину, можно записать

$$B(t) = \int_V \beta(\mathbf{r}, t) dV. \quad (1.7)$$

Например, в соответствии с вышеизложенным плотность жидкости $\rho(\mathbf{r}, t)$ можно назвать *плотностью распределения массы* (в пространстве), при этом массу M объема V можно представить в виде

$$M = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV. \quad (1.8)$$

Подобный подход будем использовать и для характеристик сплошной среды, связанных с поверхностями (граничными или построенными внутри потока).

Функция плотности распределения $\beta(\mathbf{r}, t)$ может быть скалярной или векторной в зависимости от того, к какой (скалярной или векторной) гидродинамической характеристике она относится.

1.2. Силы, действующие на жидкость

Как и в теоретической механике, для данного объема жидкости (как механической системы) будем различать:

внешние силы, т.е. силы, действующие между элементами этой системы (частями данного объема жидкости) и элементами, не относящимися к этой системе (объему жидкости). Такие силы вызывают или могут вызвать изменение количества движения объема; типичным примером внешней силы для объектов, находящихся вблизи поверхности Земли, является сила тяжести;

внутренние силы, действующие между элементами рассматриваемой механической системы (частями данного объема жидкости). Они не могут изменить количество движения этого объема, так как внутри него каждая внутренняя сила уравнивается равной ей по модулю внутренней силой, имеющей противоположное направление. Вместе с тем работа внутренних сил может изменить кинетическую и (или) потенциальную энергию рассматриваемого объема жидкости. Примерами внутренних сил являются сила давления, действующая на поверхность, выделенную внутри объема жидкости; сила трения между слоями движущейся жидкости и т.п.

Применяя при изучении механики жидкости модель сплошной среды, различают объемные и поверхностные силы.

Объемные (массовые) силы: величина этих сил пропорциональна объему (массе) жидкости, на который они действуют. Характеристикой объемной (массовой) силы является *плотность распределения этой силы* в пространстве, это векторная величина $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$, которая равна силе, действующей на единицу объема (массы). Примером объемной силы является сила тяжести; в этом случае плотность распределения представляет собой силу, приходящуюся на единицу *массы* сплошной среды. Если принять оси x и y горизонтальными, а z направить вертикально вверх, то плотность распределения силы тяжести $\mathbf{f}_g = (0, 0, -g)$, где $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения. При этом вес F_g объема V равен

$$\mathbf{F}_g = \int_V \mathbf{f}_g \rho dV = \int_V (0, 0, -g) \rho dV = (0, 0, -\int_V g \rho dV) = (0, 0, -\rho g V). \quad (1.9)$$

Поверхностные силы: величина этих сил пропорциональна площади поверхности, на которую они действуют. Примером такой силы является сила взаимодействия между двумя соприкасающимися слоями жидкости, которые движутся друг относительно друга. Характеристикой поверхностной силы на заданной поверхности является плотность ее распределения, которую при использовании модели сплошной среды называют *напряжением*; это векторная величина. Напряжение в данной точке фиксированной поверхности обычно проектируют на нормаль к ней и на касательную плоскость, при этом различают нормальные и касательные напряжения.

Физически поверхностные силы обусловлены силами ближнего взаимодействия молекул, расположенных по разные стороны от рассматриваемой поверхности, и переносом молекул сквозь эту поверхность в процессе их теплового движения.

1.3. Напряженное состояние в точке сплошной среды. Тензор напряжений

Разделим произвольную часть сплошной среды поверхностью АВ на две части (рис. 1.3), при этом часть 1 будет действовать на часть 2 с силой F_{AB} . Обозначив площадь поверхности АВ через A_{AB} , среднее на-

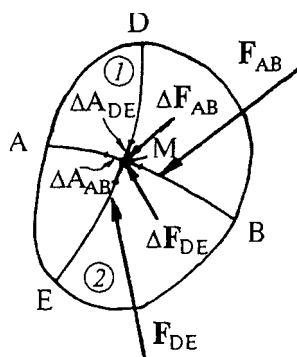


Рис. 1.3. Напряжение в точке сплошной среды

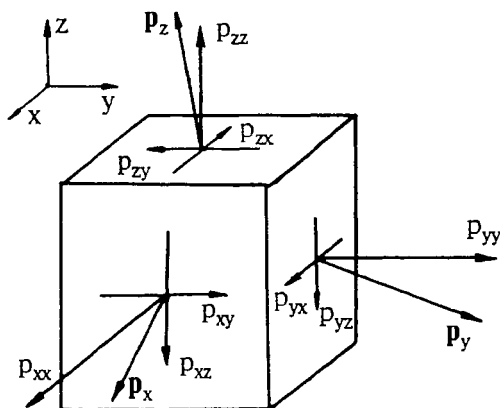


Рис. 1.4. Обозначения напряжений в сплошной среде и их проекций на оси координат

пряжение по АВ выразим вектором, имеющим то же направление, что и F_{AB} :

$$p_{AB} = \frac{F_{AB}}{A_{AB}}. \quad (1.10)$$

Обозначим произвольную малую часть поверхности АВ, содержащую точку М, через ΔA_{AB} ; на нее будет действовать сила ΔF_{AB} . Стягивая ΔA_{AB} в точку М, получаем вектор напряжения в этой точке

$$p_{AB}(M) = \lim_{\Delta A_{AB} \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{AB}}{\Delta A_{AB}}. \quad (1.11)$$

Очевидно, что, проведя через точку М другую поверхность, например DE, можно с помощью таких же рассуждений получить другой вектор напряжения $\mathbf{p}_{DE}(M)$. Таким образом, вектор напряжения (плотности распределения поверхностной силы) на поверхности, проходящей через данную точку, зависит от ориентации этой поверхности.

Выделим в пространстве элементарный куб, грани которого параллельны координатным плоскостям (рис. 1.4), и обозначим векторы напряжений на этих гранях $\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, \mathbf{p}_z$, где индекс соответствует координатной оси, к которой грань куба перпендикулярна. Для обозначения проекций векторов напряжений на координатные оси введем соответствующий оси второй подстрочный индекс. Например, p_{yx} — это проекция вектора напряжения $\mathbf{p}_y$ на ось x , p_{zz} — проекция $\mathbf{p}_z$ на ось z . Легко видеть, что p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} — *нормальные* напряжения; $p_{xy}, p_{xz}, p_{yx}, p_{yz}, p_{zx}, p_{zy}$ — *касательные* напряжения.

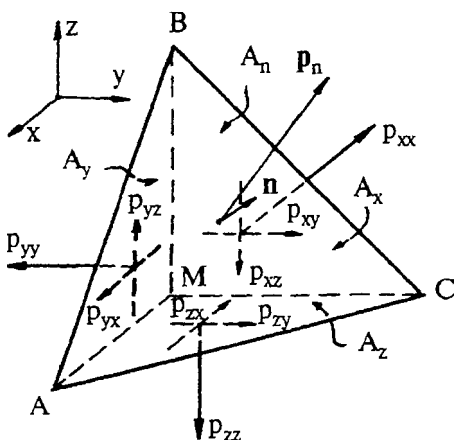


Рис. 1.5. Определение напряжения на произвольно-ориентированной площадке

Выделим в сплошной среде элементарную (в отношении напряжений) пирамиду с вершиной в точке М (рис. 1.5), три грани которой перпендикулярны осям координат x, y, z , а ориентация четвертой грани ABC определяется единичным вектором нормали $\mathbf{n}$, имеющим следующие проекции на координатные оси:

$$n_x = \cos(\mathbf{n}, x), \quad n_y = \cos(\mathbf{n}, y), \quad n_z = \cos(\mathbf{n}, z). \quad (1.12)$$

Обозначим площади граней пирамиды, ортогональных осям x, y, z , соответственно A_x, A_y, A_z , площадь грани ABC обозначим A_n , а напряжение на ней $\mathbf{p}_n$. Отметим, что p_{nx}, p_{ny}, p_{nz} не являются ни нормальными, ни касательными напряжениями. Из геометрических соображений легко получить

$$A_x = A_n n_x, \quad A_y = A_n n_y, \quad A_z = A_n n_z. \quad (1.13)$$

Считаем линейные размеры пирамиды бесконечно малыми; при этом объемные силы, действующие на пирамиду, бесконечно малые величины третьего порядка, и ими можно пренебречь по сравнению с поверхностными силами, которые являются бесконечно малыми второго порядка. Имея это в виду, приравняем нулю сумму проекций на ось x всех поверхностных сил, действующих на пирамиду ABCM

$$A_x p_{xx} + A_y p_{yx} + A_z p_{zx} - A_n p_{nx} = 0. \quad (1.14)$$

Подставляя (1.13) в (1.14) и сокращая на A_n , получаем проекцию вектора $\mathbf{p}_n$ на ось x

$$p_{nx} = n_x p_{xx} + n_y p_{yx} + n_z p_{zx}. \quad (1.15)$$

Исходя из равенства нулю сумм проекций сил на координатные оси y и z , найдем две другие проекции p_n :

$$p_{ny} = p_x p_{xy} + p_y p_{yy} + p_z p_{zy}; \quad (1.16)$$

$$p_{nz} = p_x p_{xz} + p_y p_{yz} + p_z p_{zz}. \quad (1.17)$$

Тем самым определим вектор напряжений на грани ABC:

$$\mathbf{p}_n = (p_{nx}, p_{ny}, p_{nz}).$$

Таким образом, зная три вектора напряжений на взаимно ортогональных площадках и используя уравнения статики, можно найти напряжение на произвольно ориентированной площадке.

Следовательно, три вектора напряжений $\mathbf{p}_x$, $\mathbf{p}_y$, $\mathbf{p}_z$ полностью характеризуют напряженное состояние в данной точке пространства.

Совокупность девяти проекций на координатные оси трех векторов, определяющих напряжения в точке сплошной среды, представленную в виде квадратной матрицы, обозначим буквой Π :

$$\Pi = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Используя матричную форму записи, представим равенства (1.15), (1.16) и (1.17) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{n}\Pi &= (n_x, n_y, n_z) \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} = \\ &= (n_x p_{xx} + n_y p_{yx} + n_z p_{zx}, n_x p_{xy} + n_y p_{yy} + n_z p_{zy}, n_x p_{xz} + n_y p_{yz} + n_z p_{zz}) = \\ &= (p_{nx}, p_{ny}, p_{nz}) = \mathbf{p}_n. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Если задать другую систему координатных осей (x', y', z') , то соответствующие этим осям три вектора напряжений $\mathbf{p}_{x'}$, $\mathbf{p}_{y'}$, $\mathbf{p}_{z'}$ также характеризовали бы напряженное состояние в этой же точке М. Очевидно, что каждый из векторов $\mathbf{p}_{x'}$, $\mathbf{p}_{y'}$ или $\mathbf{p}_{z'}$ можно найти, если известны $\mathbf{p}_x$, $\mathbf{p}_y$, $\mathbf{p}_z$, с помощью зависимости, аналогичной (1.19), если вместо $\mathbf{n}$ подставить единичный вектор, определяющий в системе координат x, y, z направление координатной оси x', y' или z' . Совокупность девяти составляющих векторов $\mathbf{p}_{x'}$, $\mathbf{p}_{y'}$, $\mathbf{p}_{z'}$ также можно представить в виде матрицы, которая, как и матрица (1.18), определяет напряженное состояние в точке М. Матрицы, которые определяют какую-либо физическую величину, т.е. величину, не зависящую от выбора системы координат (в данном случае напряжение в точке сплошной среды, а в общем это могут быть и другие величины), называют *тензорами*. Эти матрицы характеризуются тем, что при введении новой системы координат они преобразуются следующим образом.

1. Составляющие матрицы, образующие строки, считаются компонентами векторов, относящихся к площадкам, перпендикулярным соответствующим координатным осям (например, в нашем случае составляющие строки p_{yx} , p_{yy} , p_{yz} являются компонентами вектора напряжения $\mathbf{p}_y$, действующего на площадке, перпендикулярной оси y).

2. Проекция на координатные оси x, y, z векторов, действующих на площадки, перпендикулярные новым координатным осям x', y', z' , находим, считая, что векторы представляют собой плотности распределения поверхностных сил (напряжений) и что выполняются уравнения статики, т.е. по уравнениям (1.15)—(1.17). Как уже отмечалось, в общем случае матрица не обязательно характеризует напряженное состояние, она может определять и другие физические величины, например, изменчивость в пространстве поля скорости, а поэтому векторы, компоненты которых являются составляющими строки матрицы, могут и не являться силовыми характеристиками.

3. Определив проекции векторов $\mathbf{p}_{x'}, \mathbf{p}_{y'}, \mathbf{p}_{z'}$ на старые координатные оси x, y, z , из геометрических соображений находим их проекции на новые координатные оси и из этих проекций образуем матрицу тензора в новой системе координат.

В тензорных обозначениях равенство (1.18) можно представить в виде

$$\mathbf{p}_n = n\mathbf{P}. \quad (1.20)$$

Как доказывается в тензорном исчислении, сумма диагональных элементов матрицы не зависит от системы координат, в которой она записана. Эта величина называется линейным инвариантом тензора. В случае тензора напряжений $\mathbf{P}$ имеем

$$p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = p_{x'x'} + p_{y'y'} + p_{z'z'}.$$

Другими словами, сумма нормальных напряжений по трем взаимно ортогональным площадкам не зависит от их ориентации в пространстве. Благодаря этому обстоятельству важную роль в механике вязкой жидкости играет *гидродинамическое давление* p , которое определяется равенством

$$p = -\frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}). \quad (1.21)$$

Рассматривая равновесие элементарного (в отношении напряжений) кубика, представленного на рис. 1.4, из равенства нулю суммы моментов поверхностных сил относительно трех его взаимно ортогональных ребер (пренебрегая моментом от массовых сил как величиной более высокого порядка малости) получим

$$p_{xy} = p_{yx}, \quad p_{xz} = p_{zx}, \quad p_{yz} = p_{zy}. \quad (1.22)$$

Это известное свойство равенства касательных напряжений свидетельствует о симметричности матрицы тензора напряжений. Строгое доказательство равенств (1.22) приведено в п. 14.4.

В соответствии с определением (1.11) единицей напряжений является

$$[p_{ik}] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2}.$$

Размерность напряжения ньютон на метр квадратный называется паскаль и обозначается Па,

$$\text{Па} \equiv \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2}.$$

На практике часто пользуются гектопаскалями ($\text{гПа} = 100 \text{ Па}$) и килопаскалями ($\text{кПа} = 1000 \text{ Па}$). В этих же единицах измеряется и гидродинамическое давление p .

1.4. Свойство текучести. Твердые и текучие вещества

Жидкие и газообразные тела отличаются от твердых свойством текучести. Твердое тело обычно определяют так: если на него действуют малые (неразрушающие) силы, то они незначительно изменяют его форму, т.е. относительное положение частей. *Текучесть* — свойство, благодаря которому тело под действием сколь угодно малых внешних сил деформируется (неограниченно), пока внутренние касательные напряжения в нем не станут равными нулю.

Многие тела обладают двойственными свойствами. Например, стекло, которое обычно рассматривается как хрупкое твердое тело, при длительном действии нагрузки может вести себя как жидкость. Известно, что оконные стекла, простоявшие 100—150 лет, в нижней части толще, чем в верхней, так как под действием силы тяжести этот материал стекает вниз. А такая типичная жидкость, как вода, при быстром нагружении (ударе) ведет себя как твердое тело.

Чтобы эта двойственность стала понятной, обратимся к молекулярному строению вещества. Как известно, благодаря действию межмолекулярных сил притяжения и отталкивания расположение молекул в пространстве более или менее упорядочено друг относительно друга; среднее (характерное) расстояние между молекулами и в жидкости и в твердом теле примерно одинаково и имеет порядок $d = (3-4)10^{-8}$ см. Тепловое движение молекул имеет вид хаотических случайных колебаний вокруг положения равновесия, средняя амплитуда которых a увеличивается с температурой. В твердых телах $a \ll d$, в жидкостях a и d — величины одного порядка. Совершая колебания со сравнительно небольшой амплитудой, соизмеримой с расстоянием, на котором расположены места (ячейки) их устойчивого положения, молекулы могут перескакивать из одного такого места (ячейки) в другое. В одних жидкостях это может случаться часто, в других редко. Характерное время t_r нахождения молекулы в каждой ячейке между моментом, когда она туда попала, и моментом, когда она из этой ячейки перескочила в другую, определяет текучесть тела. Если $t_r \ll t_c$ — времени действия силы, то при этом за время t_c много молекул успеют многократно изменить свое положение в пространстве, обеспечивая возможность силе необратимо деформировать тело, и, следовательно, тело ведет себя как текучая среда, и его считают жидкостью. Если же $t_r \gg t_c$, то тело ведет себя как твердое. Естественно, что с увеличением температуры амплитуда теплового колебательного движения растет, t_r уменьшается, и тело становится более текучим.

В случае газообразного состояния вещества молекулы хаотически движутся в пространстве и взаимодействуют только посредством взаимных столкновений. Отсутствие сколько-нибудь длительных межмолекулярных связей обуславливает не только текучесть газа, но и его сжимаемость (отметим, что постоянно действующие межмолекулярные силы обеспечивают не только упорядоченность расположения молекул в пространстве (в виде кристаллических или квазикристаллических структур), но и малую (сравнительно с газами) сжимаемость твердых и жидких тел, так как, например, при сжатии тела должно уменьшаться межмолеку-

лярное расстояние, чему сопротивляются силы отталкивания между молекулами). Модель хаотического беспорядочного теплового движения молекул газа достаточно полно отражает основные особенности таких свойств реальных газов, как текучесть, сжимаемость, вязкость, теплопроводность и т.п. Столь эффективной молекулярно-кинетической теории жидкости пока не разработано.

1.5. Сжимаемость жидкостей и газов

Приложив силу ΔF , увеличим давление в объеме ∇ на величину Δp (рис. 1.6), при этом сплошная среда сожмется, ее объем уменьшится на $\Delta \nabla$. Как показывает опыт, зависимость между Δp и $\Delta \nabla$ линейная и для

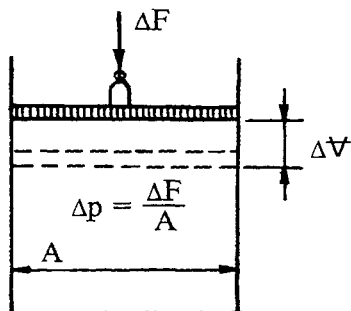


Рис. 1.6. К определению коэффициента объемного сжатия

газов и для жидкостей при условиях, далеких от возможных фазовых переходов (кипения), т.е. для каждого газа и каждой жидкости можно ввести постоянную — коэффициент объемного сжатия (при постоянной температуре T):

$$\beta_{\nabla} = - \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{(\frac{\Delta \nabla}{\nabla})}{\Delta p} = - \frac{1}{\nabla} \frac{\partial \nabla}{\partial p}. \quad (1.23)$$

β_{∇} имеет размерность $(\text{Па})^{-1}$. Знак минус вводится, так как при сжатии ($\Delta p > 0$) объем уменьшается ($\Delta \nabla < 0$), а удобно, чтобы коэффициент β_{∇} был положительным.

Модулем объемной упругости E_{∇} называется величина, обратная β_{∇} :

$$E_{\nabla} = \frac{1}{\beta_{\nabla}}. \quad (1.24)$$

Величины β_{∇} и E_{∇} зависят от рода жидкости и от температуры. Например, для воды при $T = 293 \text{ K}$

$$E_{\nabla} = 2 \cdot 10^9 \text{ Па} \approx 20\,000 \text{ кгс/см}^2$$

Если на воду, находящуюся при атмосферном давлении ($101\,325 \text{ Па}$ или $1,033 \text{ кгс/см}^2$), приложить дополнительно (сверх атмосферного) такое же давление p_a , то объем воды уменьшится приблизительно на $1/20\,000$, т.е. практически незаметно. Следовательно, воду и другие жидкости можно считать несжимаемыми и принимать их плотность ρ постоянной ($\rho = \text{const}$), не зависящей от давления.

В случае газов обычно достаточно эффективно можно использовать модель идеального газа, для которой справедливо уравнение Клапейрона — Менделеева

$$\rho = \frac{p}{RT} \quad \text{или} \quad \frac{p}{\rho T} = R, \quad (1.25)$$

где R — удельная газовая постоянная, не зависящая от ρ и T , но различная для различных газов (для воздуха $R = 287 \text{ Дж/кг K}$). С помощью этого уравнения легко найти плотность воздуха при атмосферном давлении и температуре, равной 20°C :

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{101325}{287 \cdot 293} = 1,2 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Из этого уравнения следует закон Бойля—Мариотта (*изотермическая* связь давления и плотности)

$$\frac{p}{\rho} = \text{const} \quad (1.26)$$

для заданного объема газа при постоянной температуре.

Для *адиабатического* процесса (когда отсутствует теплообмен между выделенным объемом газа и окружающей средой) известна из курса общей физики другая зависимость:

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \text{const}, \quad (1.27)$$

где $\kappa = c_p/c_v$ — адиабатическая постоянная газа; c_v — теплоемкость газа при постоянном объеме; c_p — то же при постоянном давлении (см. гл. 15).

1.6. Фазовые переходы в жидкости.

Кипение и кавитация

Одна из особенностей, отличающая жидкость и газ, — это возможность *фазовых переходов*. Например, при повышении температуры T (при постоянном давлении на свободной поверхности покоящейся жидкости) жидкость при $T = T_{\text{кип}}$ начинает кипеть, т.е. во всем объеме жидкости и в особенности на стенках сосуда образуются пузырьки пара, которые всплывают на свободную поверхность жидкости и соединяются с газом, находящимся над этой поверхностью. В частности, при нормальном атмосферном давлении p_a вода начинает кипеть при $T_{\text{кип}} = 373 \text{ К}$. При такой температуре, как известно из курса физики, давление насыщающих паров воды $p_{\text{нп}} = p_{\text{нп}}(T)$, которое зависит от T , становится равным атмосферному давлению

$$p_{\text{нп}}(T_{\text{кип}}) = p_a. \quad (1.28)$$

Такой же *процесс кипения* может происходить и при более низкой температуре $T < T_{\text{кип}}$, но при понижении давления на свободной поверхности p_0 , когда это давление становится равным

$$p_0 = p_{\text{нп}}(T). \quad (1.29)$$

Фазовые переходы при понижении давления в движущейся жидкости иногда порождают процесс, не похожий на кипение. Рассмотрим (изотермическое с температурой T) течение в трубе, имеющей конфузорно-диффузорный участок (рис. 1.7). В области II скорость жидкости увеличивается, давление при этом уменьшается, и если оказывается, что $p_2 < p_{\text{нп}}(T)$, то в области II начинают во всем объеме жидкости образовываться паровоздушные пузырьки (в них содержится воздух, растворенный в воде, и пары воды).

Эти пузырьки не успевают всплыть и уносятся жидкостью в область III, где $p_3 > p_{нп}$, и здесь начинается обратный фазовый переход: паровоздушные пузырьки под давлением начинают сжиматься и “захлопываются” внутри жидкости или на поверхности трубы. Это явление носит название *кавитации*. Подобное же явление имеет место иногда не только в трубе, но и при движении с большой скоростью тел в жидкости (колеса гидравлических турбин, подводные лодки, торпеды, гребные винты судов и т.п.).

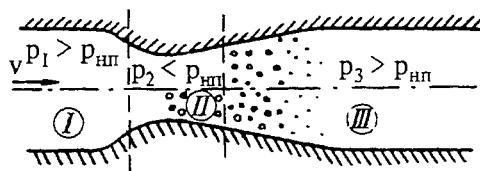


Рис. 1.7. Схема возникновения кавитации в потоке жидкости

“Захлопывание” пузырьков сопровождается образованием в точке захлопывания зон повышенного давления, которое распространяется в жидкости со скоростью звука. При наличии большого числа захлопывающихся пузырьков в результате интерференции образуются высокочастотные интенсивные (ударные) колебания давления в жидкости, которые порождают акустические эффекты (шум, удары и т.п.).

Порожденное кавитацией воздействие интенсивной высокочастотной знакопеременной нагрузки на твердые граничные поверхности иногда оказывается настолько эффективным, что даже очень прочные материалы могут разрушаться. Происходит так называемая *кавитационная эрозия*. В результате, например, колесо гидромашины, запроектированное без учета возможности такого эффекта, может разрушиться за счет кавитационной эрозии за один-два года. Кроме того, кавитация может существенно снизить коэффициент полезного действия гидромашин, гребных винтов и других механизмов или их деталей.

1.7. Отличительные особенности жидкостей и газов

Если считать, что свойство текучести является основным, определяющим главные особенности объекта изучения в механике жидкости и газа, то часто, понимая под термином “жидкость” текучую среду, механику жидкости и газа называют просто механикой жидкости, или гидромеханикой. Поступая так же в дальнейшем, отметим, при изучении каких явлений следует отличать жидкости от газов.

Первое основное отличие заключается в том, что газ — это тело, которое легко сжимается и в котором скорость распространения звука (а следовательно, и всех механических возмущений) значительно меньше, чем в жидкости. Эта особенность газа должна учитываться, когда скорость его движения (или скорость движения в нем твердого тела) становится соизмеримой со скоростью звука или превышает ее. Область механики жидкости и газа, в которой возникает необходимость учитывать сжимаемость среды, выделяется в отдельный раздел, называемый газовой динамикой. В рамках этого раздела изучается движение сверхзвуковых самолетов, космических объектов, высокоскоростных паровых и газовых турбин.

Второе отличие жидкости от газа заключается в ее способности иметь граничную поверхность между нею и окружающим ее газом, которая

обычно называется *свободной поверхностью*. В поле силы тяжести покоящаяся жидкость имеет свободную поверхность в виде горизонтальной плоскости. В условиях невесомости свободная поверхность покоящейся жидкости в результате действия силы поверхностного натяжения является сферической. Это свойство жидкости, как и ее малая сжимаемость, обусловлено постоянным взаимодействием соседних молекул. В газе молекулы взаимодействуют только в моменты столкновений друг с другом, большую часть времени они свободно движутся в пространстве, поэтому вследствие хаотического характера теплового движения молекул газа он стремится равномерно распределиться по всей замкнутой части пространства, в которой он находится (эта часть пространства ограничивается поверхностями твердых и жидких тел). Если часть пространства не замкнута, то объем газа может неограниченно возрастать.

Третье отличие жидкости от газа заключается в том, что в газе можно неограниченно уменьшать давление или повышать температуру, и при этом свойства газа изменяются непрерывно. В жидкости давление может уменьшаться до некоторого определенного значения, ниже которого начинается образование внутри нее паровоздушных пузырьков — возникают фазовые переходы (см. п. 1.6), что качественно изменяет как текучесть среды, так и общую картину течения (аналогичное явление имеет место и при повышении температуры жидкости).

Излагая вопросы механики жидкости, будем иметь в виду, что все результаты можно отнести как собственно к жидкостям, так и к газам, но с учетом трех отмеченных выше особенностей (сжимаемость газа, наличие свободных поверхностей и фазовых переходов у жидкостей). Как правило, ограничения, накладываемые этими отличиями, сравнительно легко устанавливаются.

1.8. Вязкость жидкостей и газов.

Реологические свойства жидкостей

Вязкостью называется свойство текучей среды, заключающееся в возникновении в ней внутренних сил, препятствующих ее деформации, т.е. изменению относительного положения ее частей. Поясним возникновение вязкости газа с помощью молекулярно-кинетической теории на примере частного случая деформации — *простого сдвига* (рис. 1.8). Элемент поверхности $\delta x \delta y$ движется вместе с жидкостью, а слой жидкости 1 скользит по слою 2 с относительной скоростью du_x . Молекулы газа участвуют в двух видах движения: а) упорядоченном (продольном) со скоростью u_x или $u_x + du_x$ в зависимости от того, в каком они слое находятся; б) хаотическом, неупорядоченном (в том числе поперечном) тепловом движении, скорость кото-

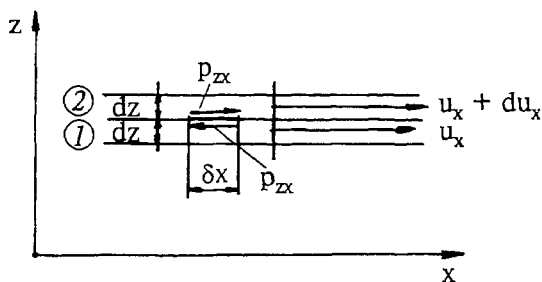


Рис. 1.8. Вязкие напряжения в жидкостях и газах

рого обычно на два порядка выше скорости упорядоченного движения.

Вязкость газа обусловлена переносом молекулами при их тепловом движении через элемент поверхности $\delta x \delta y$ (который разделяет два слоя, имеющие различные продольные скорости u_x и $u_x + du_x$) количества движения, обусловленного скоростями этих слоев. Молекулы движутся хаотически беспорядочно, при этом они переходят из одного слоя в другой, пересекая площадку $\delta x \delta y$. Молекулы, имеющие упорядоченную скорость u_x , переходят в слой 2 и замедляют его, а молекулы, попавшие в слой 1 из слоя 2, ускоряют слой 1.

Переходя к сплошной среде (отбрасывая молекулярное строение вещества), считают, что на площадке $\delta x \delta y$ действует касательное напряжение, компенсирующее перенос количества движения, отброшенный нами вместе с молекулами. Согласно молекулярно-кинетической теории касательное напряжение

$$p_{zx} = \eta \frac{du_x}{dz}, \quad (1.30)$$

где η — динамический коэффициент вязкости, или просто динамическая вязкость. Знак напряжения таков, как будто оно “пытается” уменьшить разность скоростей слоев. С увеличением температуры скорость хаотического движения молекул возрастает, что приводит к увеличению количества молекул, пересекающих в единицу времени площадку $\delta x \delta y$; следовательно, растет и перенос количества движения из одного слоя в другой и, соответственно, касательное напряжение p_{zx} . Согласно (1.30) это означает, что с увеличением температуры динамический коэффициент вязкости возрастает.

Отметим дополнительно, что перенос молекул в газах (диффузия) также осуществляется вследствие теплового движения молекул и, следовательно, коэффициент молекулярной диффузии и коэффициент вязкости газа имеют один порядок.

В жидкости основной причиной воздействия одного слоя на другой (т.е. переноса количества движения) является взаимодействие молекул по границе слоев, а не перенос молекул через эту границу. Как уже отмечалось, молекулярно-кинетическая теория жидкости еще недостаточно развита, поэтому механизм вязкости в жидкости изучен значительно хуже, чем в газах. Обычно считают, что в жидкости непрерывно образуются и разрушаются при относительном скольжении слоев квазикристаллические структуры, а силы, необходимые для их разрушения, и обуславливают вязкость. Естественно, с увеличением температуры молекулы жидкости становятся более подвижными и разрушение структур происходит с меньшими затратами энергии. Таким образом, вязкость жидкости с увеличением температуры уменьшается (в отличие от газов — см. выше). То, что вязкость жидкости имеет иную природу, чем у газов, подтверждается также тем, что коэффициент диффузии в жидкости, характеризующий массоперенос, связанный с перемещением молекул при их тепловом движении, на три порядка меньше, чем соответствующий коэффициент вязкости (у газов, как отмечалось, они имеют один порядок).

Несмотря на различный молекулярный механизм возникновения напряжений в жидкостях и в газах, в обеих этих средах касательные на-

пряжения связываются с изменчивостью поля скорости одной и той же зависимостью (1.30), которая называется *законом Ньютона для вязких напряжений*. В отличие от закона для сухого трения в жидкостях и газах касательное напряжение не зависит от нормального напряжения.

Согласно определению (1.30) динамический коэффициент вязкости η имеет следующую единицу измерения:

$$[\eta] = \frac{[p_{zx}]}{\left[\frac{du}{dz}\right]} = \frac{[p][z]}{[u]} = \frac{\frac{H}{M^2} \cdot M}{\frac{M}{c}} = \frac{кг}{м \cdot с}.$$

Размерность г/(см·с) называется пуаз (в честь французского врача А. Пуазейля, выполнившего фундаментальные исследования движения вязкой жидкости) и обозначается П. Часто вместо пуаза для измерения динамического коэффициента вязкости используют Па·с = кг/(м·с).

Наряду с динамическим коэффициентом вязкости η в механике жидкости вязкость характеризуют также отношением η к плотности жидкости ρ , которое обозначают через ν :

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}. \quad (1.31)$$

Эта величина имеет размерность:

$$[\nu] = \frac{[\eta]}{[\rho]} = \frac{кг \cdot м^3}{мс \cdot кг} = \frac{м^2}{с}.$$

Ввиду того, что в размерность ν входят только метры и секунды (и не входит размерность массы), эту величину называют *кинематическим коэффициентом вязкости* (или кинематической вязкостью). Размерность см²/с называют стокс (в честь английского гидромеханика Дж. Стокса, который сформулировал дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости) и обозначают Ст:

$$1 \text{ Ст} = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}.$$

В табл. 1.1 приведены значения η , ρ и ν для некоторых жидкостей и газов.

Таблица 1.1

Жидкость,	t, °C	η , Па·с	ρ , кг/м ³	ν , Ст
Вода	0	0,00179	$1,0 \cdot 10^3$	0,0179
	20	0,0010	$1,0 \cdot 10^3$	0,010
	100	0,000273	$1,0 \cdot 10^3$	0,00273
Глицерин	20	0,510	$1,25 \cdot 10^3$	4,10
Бензин	15	0,0006	$0,70 \cdot 10^3$	0,0085
Ртуть	20	0,0015	$13,6 \cdot 10^3$	0,00111
Спирт этиловый	20	0,00120	$0,8 \cdot 10^3$	0,0151
Воздух (атмосферное давление)	20	$1,84 \cdot 10^{-5}$	1,38	0,133
Воздух (атмосферное давление)	50	$2,18 \cdot 10^{-5}$	1,22	0,178

Из приведенных значений коэффициентов вязкости следует, что вязкость воды уменьшается с увеличением температуры от 0 до 100°C почти в семь раз, а вязкость воздуха возрастает с увеличением температуры от 20 до 50°C на 25%. Для расчетов в инженерно-строительной практике пользуются значением кинематического коэффициента вязкости воды $\nu = 0,01 \text{ см}^2/\text{с} = 0,01 \text{ Ст}$.

Жидкости, для которых справедлива зависимость (1.30), называются ньютоновскими. Однако существует много жидкостей, для которых закон Ньютона не выполняется. Наука о характере зависимости

$p_{zx} = f\left(\frac{du_x}{dz}\right)$ называется реологией (рео — течь, лоγος — учение).

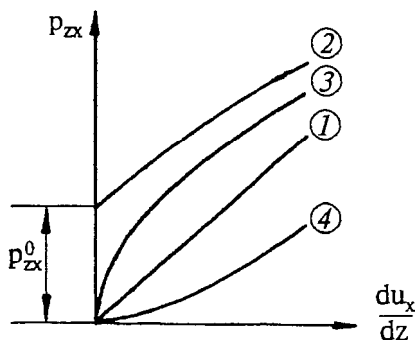


Рис. 1.9. Реологические законы в жидкостях:

1 — ньютоновская; 2 — жидкость Бингама—Шведова; 3 — псевдопластическая; 4 — дилатантная

они подчиняются зависимостям 3, то они называются псевдопластическими, а если следуют зависимости 4 — дилатантными. Механика движения таких жидкостей (это смолы, нефтепродукты, растворы полимеров и т.п.) очень сложна.

Если представить зависимость (1.30) в виде графика (рис. 1.9), то она будет иметь вид прямой линии 1. При экспериментальном исследовании некоторых жидкостей зависимость

$p_{zx} = f\left(\frac{du_x}{dz}\right)$ может иметь вид 2. Такие жидкости, которые сопротивляются небольшим ($p_{zx} < p_{zx}^0$) сдвигающим напряжениям как твердое тело, а при $p_{zx} > p_{zx}^0$ ведут себя как жидкие тела, называются жидкостями Бингама—Шведова.

Жидкости, поведение которых описывается кривыми 3, 4, называются жидкостями Оствальда—Вейля. Если

ГЛАВА 2

ГИДРОСТАТИКА

Гидростатика — раздел гидромеханики, в котором изучают жидкости, находящиеся в условиях равновесия (покоя).

2.1. Гидростатическое давление в точке

Из определения текучести среды следует, что в состоянии покоя в жидкости касательные напряжения равны нулю, и в каждой точке произвольно ориентированной в пространстве площадки действуют только нормальные напряжения. Возьмем произвольную площадку (рис. 2.1),

имеющую единичный вектор нормали $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$. Так как вектор напряжений на этой площадке $\mathbf{p}_n$ параллелен $\mathbf{n}$, то можно записать

$$\mathbf{p}_n = p_{nn} \mathbf{n} = (p_{nn} n_x, p_{nn} n_y, p_{nn} n_z), \quad (2.1)$$

где p_{nn} — проекция $\mathbf{p}_n$ на нормаль к площадке; очевидно, $|p_{nn}| = |\mathbf{p}_n|$.

С другой стороны, согласно (1.19) имеем

$$\mathbf{p}_n = (n_x, n_y, n_z) \begin{pmatrix} p_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & p_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & p_{zz} \end{pmatrix} = (p_{xx} n_x, p_{yy} n_y, p_{zz} n_z). \quad (2.2)$$

Сравнивая выражения (2.1) и (2.2), найдем

$$p_{xx} = p_{nn}, \quad p_{yy} = p_{nn}, \quad p_{zz} = p_{nn}. \quad (2.3)$$

Это означает, что значение нормального напряжения в фиксированной точке покоящейся жидкости не зависит от ориентации площадки.

При рассмотрении напряженного состояния сплошной среды принято растягивающие напряжения считать положительными. В то же время в большинстве задач технической механики жидкости во избежание разрывов сплошности (см., например, п. 1.6) растягивающие напряжения в жидкой среде считаются недопустимыми — это еще в большей степени относится к газообразной среде. Поэтому в гидростатике в качестве основной величины, характеризующей напряженное состояние жидкости, вводят взятое со знаком плюс нормальное напряжение (которое по всем площадкам в данной точке имеет одинаковое значение). Эта величина, являющаяся частным случаем гидродинамического давления (1.21), называется *гидростатическим давлением* и также обозначается через p :

$$p = -p_{nn} = -p_{xx} = -p_{yy} = -p_{zz}. \quad (2.4)$$

Вышеизложенное объясняет появление знака минус в зависимости (1.21), определяющей величину гидродинамического давления.

Матрица тензора напряжений в условиях гидростатики имеет вид

$$\Pi = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Если обозначить через E тензорную единицу

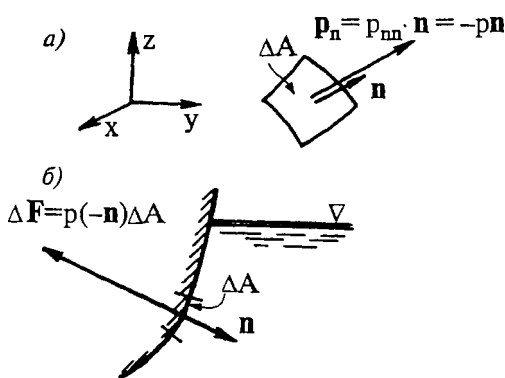


Рис. 2.1. Гидростатическое давление: а — в точке сплошной среды; б — на поверхности произвольной формы

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

то тензор напряжения в покоящейся жидкости можно представить в виде

$$\Pi = -pE. \quad (2.7)$$

Как видно, напряженное состояние в покоящейся жидкости определяется величиной p , поэтому его характеризуют не тензором Π , а считают, что оно полностью описывается величиной гидростатического давления, которое можно рассматривать как скаляр.

Сила гидростатического давления ΔF (рис. 2.1,б), действующая на малую площадку ΔA , — это вектор, направленный со стороны жидкости по нормали к этой площадке [такая нормаль обычно называется внутренней, и ее единичный вектор равен $(-n)$]

$$\Delta F = -n \cdot p \cdot \Delta A. \quad (2.8)$$

Если давление на площадке конечных размеров A (рис. 2.1,б) зависит от координат, то сила давления на эту площадку определяется следующим образом:

$$F = \int_A (-n) p dA. \quad (2.9)$$

2.2. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости (уравнения Эйлера)

Пусть $p = p(x, y, z)$ — давление в жидкости; выделим внутри жидкости куб с бесконечно малыми ребрами dx, dy, dz и рассмотрим его равновесие под действием объемных и поверхностных сил (рис. 2.2).

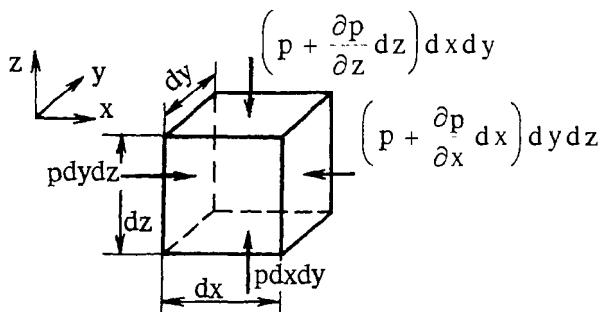


Рис. 2.2. К выводу дифференциальных уравнений гидростатики

Приравняем нулю сумму проекций на ось x всех сил, действующих на куб.

Плотность распределения массовой (объемной) силы обозначим $f = (f_x, f_y, f_z)$, тогда объемная сила, действующая на куб, имеет проекцию на ось x , равную $f_x \rho dx dy dz$.

Поверхностные силы на грани, нормальные

осям y и z , дают нулевую проекцию на ось x , так как касательные напряжения в условиях гидростатики равны нулю. В пределах куба (ввиду того, что он мал) считаем, что в разложении $p(x, y, z)$ в ряд Тейлора можно принять в расчет лишь члены, линейно зависящие от приращения координат. Обозначим давление на левую грань куба, перпендикулярную оси x , через $p(x, y, z)$, при этом на правой грани давление будет

равно $p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$. Если считать эти грани элементарными площадками в отношении давления, то проекция на ось x силы давления на левую грань будет равна $p dy dz$, а на правую $\left[- \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz \right]$. Сумма проекций всех поверхностных сил на ось x при этом окажется равной

$$p dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz.$$

Приравняв нулю сумму проекций поверхностных и объемных сил на ось x , имеем

$$f_x \rho dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz = 0. \quad (2.10)$$

Разделив все слагаемые на $\rho dx dy dz$, получаем первое уравнение равновесия. Два других уравнения выведем аналогичным образом, проектируя силы на оси y и z . В результате получим систему дифференциальных уравнений покоя жидкости (уравнений гидростатики Эйлера)

$$\left. \begin{aligned} f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0; \\ f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0; \\ f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Введем единичные векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$, соответствующие координатным осям x , y и z :

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0), \mathbf{k} = (0, 0, 1). \quad (2.12)$$

Умножим уравнения системы (2.11) на $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ соответственно и сложим их. Получим

$$f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k} \right) = 0$$

или в векторной форме

$$\mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = 0. \quad (2.13)$$

Векторное уравнение (2.13) равносильно системе трех уравнений (2.12), где вектор $\text{grad } p$ определяется через свои проекции на координатные оси в виде

$$\text{grad } p = \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k} \quad (2.14)$$

либо в матричной форме

$$\text{grad } p = \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \right). \quad (2.15)$$

2.3. Интегрирование уравнений Эйлера

Пусть вектор $\mathbf{f}$ имеет потенциал, т.е. существует такая функция $U(x, y, z)$, что

$$\mathbf{f} = \text{grad } U \text{ или } f_x = \frac{\partial U}{\partial x}, f_y = \frac{\partial U}{\partial y}, f_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (2.16)$$

При этом уравнение (2.13) в случае однородной несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) примет вид

$$\text{grad}[U - p/\rho] = 0. \quad (2.17)$$

Интеграл уравнения (2.17) дает равенство

$$U - p/\rho = \text{const}, \quad (2.18)$$

которое представляет собой общую форму интеграла уравнений гидростатики в случае, когда объемные силы имеют потенциал.

Рассмотрим частные случаи объемных сил.

Внешняя объемная сила — сила тяжести. Пусть в декартовой системе координат ось z направлена вверх. Используя (2.16), легко установить, что потенциал силы тяжести

$$U_g = -gz, \quad (2.19)$$

где g — ускорение свободного падения, $g = 9,81 \text{ м/с}^2$, при этом

$$f_x = 0, f_y = 0, f_z = -g.$$

Подставим (2.19) в (2.18):

$$-gz - \frac{p}{\rho} = \text{const}.$$

Обозначив через γ удельный вес ($\gamma = \rho g$), получим

$$z + \frac{p}{\rho g} = \text{const} \text{ или } z + \frac{p}{\gamma} = \text{const}. \quad (2.20)$$

Это закон распределения гидростатического давления. Обозначим через p_0 давление на свободной поверхности, или *поверхностное давление*, и найдем форму свободной поверхности из условия, что на ней $p = p_0 = \text{const}$. Из (2.20) следует, что такая поверхность, координаты которой обозначим через z_0 , представляет собой горизонтальную плоскость

$$z_0 = \text{const} - p_0/\gamma. \quad (2.21)$$

Если h — это расстояние до свободной поверхности (заглубление точки), а начало координат расположено на свободной поверхности, так что $h = -z$ (рис. 2.3), то давление в точке C равно

$$p_C = p_0 + \gamma h_C = p_0 + (p_b)_C, \quad (2.22)$$

где $p_b = \gamma h$ — *весовое давление*, т.е. давление, обусловленное весом жидкости.

Обычно в инженерно-строительной практике используют не *абсолютное* давление p_A (выше оно обозначалось p), а его отклонение от *атмосферного* давления p_a . Если $p_A > p_a$,

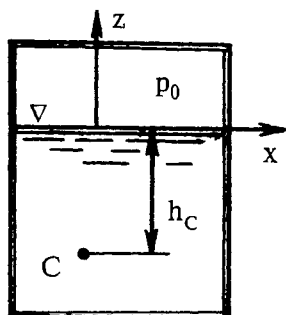


Рис. 2.3. Гидростатическое давление в поле силы тяжести

то *избыточным* давлением $p_{\text{и}}$ называется превышение давления в точке над атмосферным

$$p_{\text{и}} = p_A - p_a. \quad (2.23)$$

При условии $p_A < p_a$ недостаток давления в точке до атмосферного называется *вакуумом*

$$p_{\text{вак}} = p_a - p_A. \quad (2.24)$$

Относительный покой жидкости во вращающемся сосуде. Если привести во вращение сосуд вокруг вертикальной оси z с угловой скоростью Ω , то через некоторое время жидкость будет вращаться вместе с сосудом как одно твердое тело, т.е. жидкость будет находиться в покое относительно сосуда. Чтобы воспользоваться уравнением гидростатики (2.18), надо, чтобы жидкость была неподвижной относительно системы координат, т.е. следует принять вращающуюся со скоростью Ω систему координат. Но такая система не является инерционной, при переходе к ней необходимо ввести соответствующие силы инерции как внешние объемные силы. На элементарную частицу жидкости (рис. 2.4) с массой δm действует центробежная сила

$$\delta F_{\text{цб}} = \delta m \Omega^2 r, \quad (2.25)$$

где $\mathbf{r}$ — вектор-радиус, определяющий положение элементарной частицы относительно оси вращения; $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ или $\mathbf{r} = (x, y)$; x, y — координаты частицы. Очевидно, что $\delta F_{\text{цб}}$ и $\mathbf{r}$ имеют одинаковое направление. Найдем проекции $\delta F_{\text{цб}}$ на координатные оси:

$$(\delta F_{\text{цб}})_x = \delta m \Omega^2 x, \quad (\delta F_{\text{цб}})_y = \delta m \Omega^2 y. \quad (2.26)$$

Плотность распределения массовой центробежной силы (т.е. сила на единицу массы) имеет вид

$$\mathbf{f}_{\text{цб}} = \frac{\delta F_{\text{цб}}}{\delta m} = \Omega^2 \mathbf{r}, \quad (f_{\text{цб}})_x = \Omega^2 x, \quad (f_{\text{цб}})_y = \Omega^2 y. \quad (2.27)$$

Центробежные силы с плотностью распределения $\mathbf{f}_{\text{цб}}$ нужно ввести в качестве дополнительной внешней силы при решении уравнения (2.18). Но, как было показано, интегрирование уравнения (2.13) осуществляется, если объемные силы имеют потенциал. Непосредственным интегрированием выражений для $(f_{\text{цб}})_x$ и $(f_{\text{цб}})_y$ легко найти функцию, являющуюся потенциалом $U_{\text{цб}}$:

$$U_{\text{цб}} = \Omega^2 \frac{x^2 + y^2}{2}. \quad (2.28)$$

Кроме центробежных сил на жидкость действует и сила тяжести, потенциал которой, как и ранее, $U_g = -gz$.

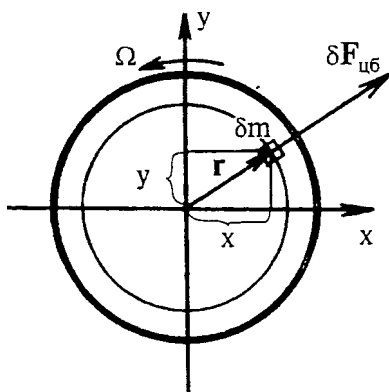


Рис. 2.4. Относительный покой жидкости во вращающемся сосуде; центробежная сила, действующая на элементарный объем вращающейся жидкости

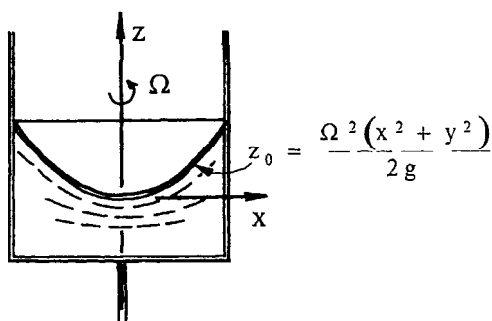
Потенциал суммарной объемной силы, действующей на жидкость во вращающейся системе координат, имеет вид

$$U = U_g + U_{\text{цб}} = -gz + \Omega^2 \frac{x^2 + y^2}{2} \quad (2.29)$$

Подставляя (2.29) в (2.18), получаем уравнение для определения давления в любой точке вращающегося объема жидкости

$$-gz + \Omega^2 \frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{p}{\rho} = \text{const} \quad (2.30)$$

Обозначим, как и в предыдущем случае, координаты свободной поверхности через z_0 . Уравнение свободной поверхности найдем, подставив $p = p_0$ в (2.30). Получим уравнение параболоида вращения



$$-gz_0 + \Omega^2 \frac{x^2 + y^2}{2} = \text{const} + \frac{p_0}{\rho}$$

Если поместить начало координат в вершине этого параболоида (рис. 2.5), получим уравнение свободной поверхности в виде

$$z_0 = \Omega^2 \frac{x^2 + y^2}{2g} \quad (2.31)$$

Рис. 2.5 Осевое сечение жидкости, вращающейся вместе с сосудом

Как видно, очертание параболоида не зависит от плотности жидкости. Распределение давления внутри объема жидкости при этом имеет вид

$$p = p_0 - \gamma z + \rho \Omega^2 \frac{x^2 + y^2}{2} \quad (2.32)$$

Согласно (2.32) на каждой вертикали давление распределяется по гидростатическому закону (2.20)

2.4. Сила гидростатического давления на произвольную плоскую фигуру

Сила гидростатического давления на произвольную плоскую фигуру площадью A (рис. 2.6) характеризуется значением, направлением и точкой приложения. Значение силы определим согласно (2.9)

$$\begin{aligned} |F| &= \int_A p dA = \int_A (p_0 + p_b) dA = \int_A p_0 dA + \int_A \gamma h dA = \\ &= p_0 \int_A dA + \int_A \gamma y \sin \alpha dA = p_0 A + \gamma \sin \alpha \int_A y dA = \\ &= p_0 A + \gamma \sin \alpha y_C A = (p_0 + \gamma h_C) A = p_C A, \end{aligned} \quad (2.33)$$

где y_C — координата центра тяжести фигуры $\left(y_C = \frac{\int y dA}{A} \right)$, h_C — заглубление центра тяжести, p_C — давление в центре тяжести

Сила F направлена по нормали к площадке, так как на ней в условиях статики отсутствуют касательные напряжения. Точку приложения определим для силы весового давления F_B ; сила, обусловленная поверхностным давлением, приложена в центре тяжести фигуры C , так как оно равномерно распределено по поверхности площадки.

Точка приложения D силы весового (а в случае $p_0 = p_a$ силы избыточного) гидростатического давления называется *центром давления*. Эту точку найдем, используя теорему о моменте равнодействующей. С одной стороны, момент относительно оси Ox (см. рис. 2.6) силы F_B равен

$$M_0(F_B) = (F_B) y_D, \quad (2.34)$$

с другой стороны, этот же момент можно представить в виде

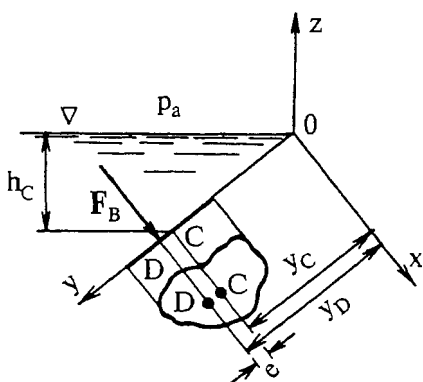


Рис. 2.6. Сила весового давления на плоскую фигуру произвольной формы (плоскость (x, y) , в которой находится фигура, условно повернута на 90° так, чтобы горизонтальная ось x и сама фигура оказались в плоскости чертежа)

$$\begin{aligned} M_0(F_B) &= \int_A y \cdot d|F_B| = \int_A y \cdot p_a dA = \int_A y \gamma h \cdot dA = \\ &= \gamma \int_A y^2 \sin \alpha \cdot dA = \gamma \sin \alpha \int_A y^2 dA = \\ &= \gamma \sin \alpha \left[y_C^2 A + \int_A (y - y_C)^2 dA \right] = \gamma \sin \alpha [y_C^2 A + I]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Здесь I — момент инерции фигуры относительно горизонтальной оси, проходящей через ее центр тяжести C .

Сравнивая два выражения для M_0 — (2.34) и (2.35), найдем

$$y_D = \frac{\gamma \sin \alpha [y_C^2 A + I]}{|F_B|} = \frac{\gamma \sin \alpha [y_C^2 A + I]}{\gamma \sin \alpha A y_C} = y_C + \frac{I}{y_C A}. \quad (2.36)$$

Из этой формулы следует

$$y_D = y_C + e, \quad (2.37)$$

$e = I/y_C A \geq 0$ называют *эксцентриситетом*. Очевидно, что $y_D \geq y_C$.

Рассмотрим важный частный случай силы гидростатического давления на плоскую прямоугольную поверхность. Найдем силу избыточного давления, действующую на плоский щит в прямоугольном лотке шириной b (рис. 2.7). Согласно (2.22) давление p линейно увеличивается с глубиной. В случае вертикального щита (см. рис. 2.7, а) отложим на нормали к поверхности щита в точке B отрезок BE , равный заглублению этой точки h_B , и, соединив точки A и E , получим эпюру избыточного гидростатического давления, выраженного

в единицах длины (метрах) столба жидкости. Согласно (2.9) сила давления равна

$$F = \int_A (-n) p dA = -n \int_{h_B}^0 (-\rho g z) b dz = -n \rho g \frac{h_B^2}{2} b ,$$

где $dA = b dz$ — элементарная площадка (рис. 2.7, в). Другими словами, значение силы F равно площади построенного треугольника ABE (в m^2), умноженной на $\rho g b$, или весу призмы с основанием ABE и высотой b , заполненной жидкостью. Сила направлена со стороны жидкости на щит

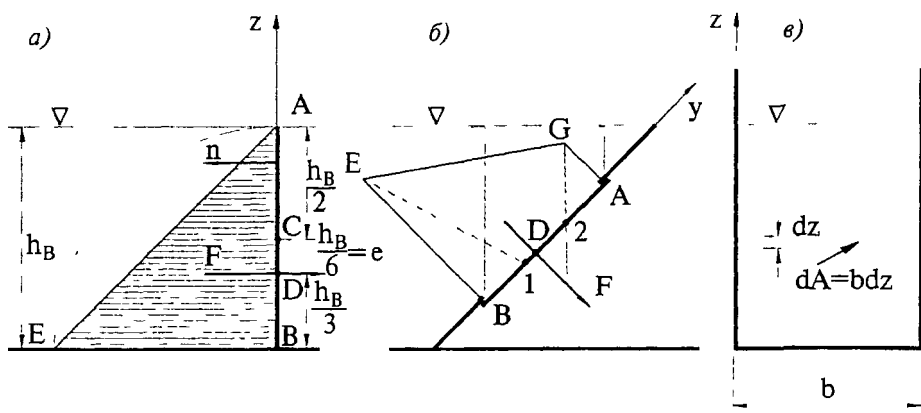


Рис. 2.7. Определение силы гидростатического давления на плоские прямоугольные фигуры: *а* — вертикальный щит, перегораживающий прямоугольный канал; *б* — наклонный щит; *в* — поперечное сечение канала

по нормали n к его поверхности и проходит через центр тяжести треугольника ABE , так как согласно (2.37) центр давления D расположен ниже центра тяжести прямоугольного щита C на величину эксцентриситета

$$e = \frac{I}{y_C A} = \frac{\frac{b h_B^3}{12}}{\frac{h_B}{2} \cdot b \cdot h_B} = \frac{h_B}{6} .$$

В случае наклонного щита (рис. 2.7, б) для построения *эпюры гидростатического давления* отложим по нормальям к поверхности AB , восстановленным в точках A и B , заглубления этих точек и соединим прямой линией полученные точки E и G . Направим вспомогательную ось y вдоль AB и примем в качестве элементарной площадку $dA = b dy$. Силу избыточного гидростатического давления найдем по формуле (2.9):

$$F = \int_A (-n) p dA = -n \int_{y_B}^{y_A} (-\rho g z) b dy = n \rho g b \int_{y_B}^{y_A} z dy .$$

Заглубление z в полученном интеграле отложено на рис. 2.7, б по нормали к поверхности AB ; следовательно, интеграл численно равен

площади эпюры АВЕГ. Таким образом, значение силы F равно весу призмы с основанием АВЕГ и высотой b ; эта сила направлена по нормали к поверхности щита и проходит через центр тяжести фигуры АВЕГ. Для определения линии действия силы рекомендуется следующий прием. Отрезок АВ делится на три равные части точками 1 и 2, из точек Е и G через точки 1 и 2 проводятся лучи, точка пересечения лучей определяет линию действия силы, нормальной к АВ.

Полученные выше результаты, согласно которым сила гидростатического давления на выделенную поверхность не зависит от формы резервуара или сосуда, частью поверхности которого является выделенная поверхность, объясняют так называемый *гидростатический парадокс*. Он иллюстрируется на примере силы, действующей на дно сосуда (рис. 2.8). Три раз-

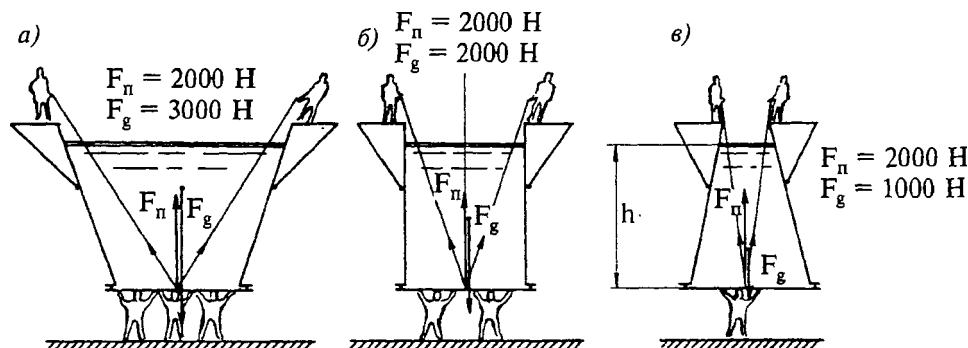


Рис. 2.8. Иллюстрация гидростатического парадокса: сила, действующая на дно сосудов, не зависит от веса воды в сосудах

личных по форме сосуда имеют одинаковую площадь A_n плиты, закрывающей дно. Сила избыточного гидростатического давления, отрывающая плиту от сосуда, во всех трех сосудах одинакова, и ее значение равно

$$F_n = \rho g h A_n,$$

в то же время вес F_g воды, содержащейся в сосудах, различается в несколько раз.

2.5. Сила избыточного гидростатического давления на цилиндрические поверхности

Для того чтобы найти силу, действующую на цилиндрическую поверхность АВ (рис. 2.9), образующая которой имеет длину b , рассмотрим равновесие отсека жидкости ABCD, где CD — вертикальная плоскость. Обозначим через $R = (R_x, R_z)$ реакцию цилиндрической поверхности на силу давления воды; $F = (F_x, 0)$ — реакция плоскости CD.

В проекции на ось x имеем

$$F_x - R_x = 0 \text{ или } R_x = F_x. \quad (2.38)$$

Используя (2.22) и (2.33), легко найти, что значение и точка приложения F определяются треугольной эпюрой давления на поверхность CD. В проекции на ось z

$$R_x + R_z - G = 0, \quad (2.39)$$

где реакция дна $R_d = \gamma h_d \cdot BC \cdot b = \gamma A_{B'BCD} b$, а вес рассматриваемого отсека $G = \gamma A_{ABCD} b$.

Из (2.39) получим

$$R_z = G - R_d = (A_{ABCD} - A_{B'BCD}) \gamma b = \gamma A_{ABV} b. \quad (2.40)$$

Так как R_x и R_z — это проекции реакции цилиндрической поверхности, то проекции силы давления воды на эту поверхность имеют противоположное направление.

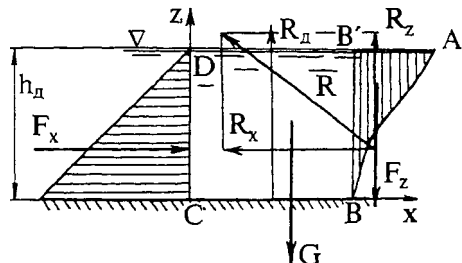


Рис. 2.9. Определение силы гидростатического давления на цилиндрическую поверхность

Исходя из вышеизложенного, можно сформулировать алгоритм графического определения силы избыточного гидростатического давления (рис. 2.10).

1. Выделить цилиндрическую поверхность, сила давления на которую подлежит определению, и обозначить концы ее направляющей через А и В.

2. Через точку свободной поверхности или ее продолжения провести вертикаль и линию EF под углом 45° к вертикали.

3. Из точек А и В провести два горизонтальных луча так, чтобы они из построенных в п. 2 клиньев вырезали замкнутую фигуру (или две фигуры). На рис. 2.10 это трапеция 1234. Горизонтальная составляющая силы избыточного гидростатического давления F

$$F_x = \gamma b A_{1234}. \quad (2.41)$$

Эта составляющая силы F приложена в центре тяжести фигуры 1234 и направлена со стороны жидкости на цилиндрическую поверхность, если фигура 1234 расположена ниже свободной поверхности жидкости (на рис. 2.10 слева направо).

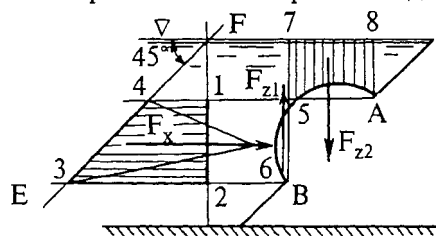


Рис. 2.10. Графические построения для определения силы давления на цилиндрическую поверхность

4. Из точек А и В опустить перпендикуляры на свободную поверхность жидкости или ее продолжение. Фигура (или несколько фигур, на рис. 2.10 их две: 56В и 5А87), ограниченная построенными перпендикулярами, свободной поверхностью жидкости и направляющей цилиндрической

поверхности, определяет вертикальную составляющую F. Значения этих составляющих равны:

$$F_{z1} = \gamma b A_{56B}, \quad F_{z2} = \gamma b A_{5A87}. \quad (2.42)$$

Вертикальная составляющая направлена вверх, если определяющая ее фигура и жидкость расположены по разные стороны от цилиндрической поверхности (на рис. 2.10 — F_{z1}), или направлена вниз, если фигура и жидкость расположены по одну сторону (на рис. 2.10 — F_{z2}).

Эти составляющие приложены в центрах тяжести соответствующих фигур. Вектор F находится геометрическим сложением составляющих (F_x, F_{z1}, F_{z2} на рис. 2.10).

2.6. Способы измерения гидростатического давления

Наиболее простой и надежный способ измерения давления в поле силы тяжести основан на использовании гидростатического закона распределения давления (2.20). Отметим два наиболее важных в данном случае следствия этого закона:

распределение давления в жидкости (или газе) не зависит от формы сосуда, в котором она покоится;

на любой горизонтальной плоскости, пересекающей рассматриваемый (покоящийся) объем однородной жидкости или газа, давление постоянно.

Приборы для измерения давления называют *пьезометрами* (пьеzo — давление) или манометрами.

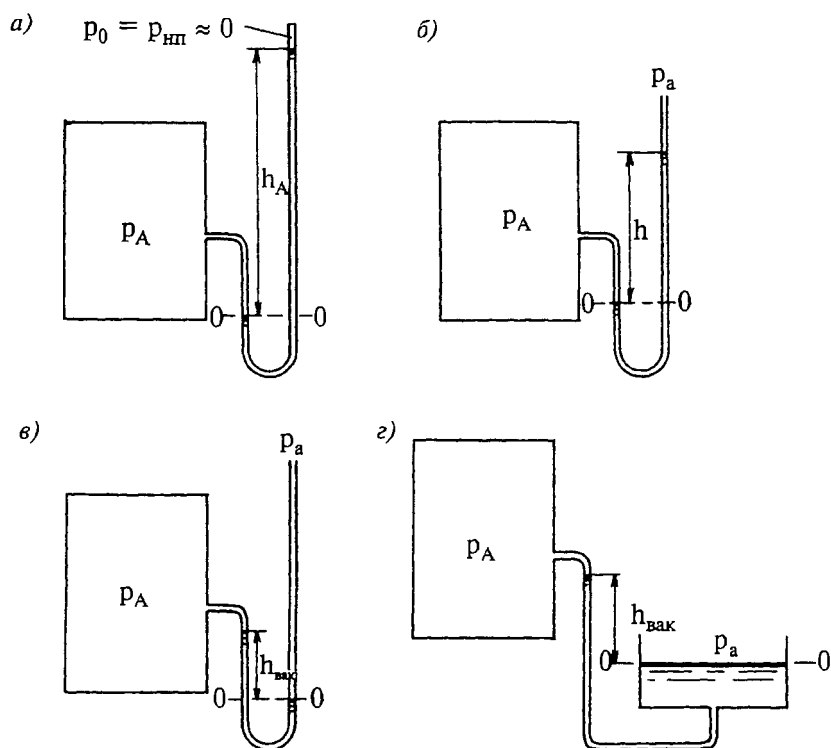


Рис. 2.11. U-образные пьезометры для измерения: абсолютного (а) и избыточного (б) давления; вакуума (в); U-образный пьезометр с одной измерительной трубкой (г)

Самым распространенным прибором для измерения небольших (имеющих порядок атмосферного) давлений является U-образный пьезометр. Пусть необходимо измерить давление в газе, содержащемся в замкнутом объеме (рис.2.11). Присоединим к сосуду один конец U-образной

трубки, заполненной частично жидкостью с плотностью ρ (рис. 2.11,а). Второй свободный конец трубки запаян, и на свободной поверхности жидкости создано поверхностное давление $p_0 \approx 0$. Приравняв давление в коленях трубки в точках, лежащих на горизонтальной плоскости 0—0, получим значение абсолютного давления в сосуде p_A :

$$p_A = p_0 + \rho gh_A = \rho gh_A. \quad (2.43)$$

При этом следует иметь в виду две вносимые этим методом измерений погрешности:

погрешность, связанную с пренебрежением изменением весового давления в газе, заполняющем сосуд и часть измерительной трубки. Это, как правило, допустимо, так как плотность газов на три порядка меньше плотности жидкостей;

погрешность, обусловленную наличием насыщающих паров жидкости над свободной поверхностью рабочей жидкости в свободном колене с запаянным концом; давление насыщающих паров $p_{\text{нп}} = p_{\text{нп}}(T)$ может быть учтено при вычислении p_A , но во многих случаях им можно пренебречь, так как оно на два порядка меньше атмосферного давления.

Чаще всего на практике требуется измерить отклонение абсолютного давления от атмосферного, т.е. избыточное давление $p_{\text{и}}$ или вакуум $p_{\text{вак}}$. В дальнейшем изложении для избыточного давления вместо $p_{\text{и}}$ будем использовать обозначение p . Для измерения отклонения абсолютного давления p_A от атмосферного p_a используют U-образную трубку со свободным концом, открытым для атмосферного давления (рис. 2.11,б). Приравняв давления в точках на плоскости 0—0, найдем избыточное давление p (рис. 2.11,б):

$$p_A = p_a + \rho gh; \quad p_A - p_a = p = \rho gh; \quad (2.44)$$

или вакуум $p_{\text{вак}}$ (рис. 2.11,в):

$$p_a = p_A + \rho gh_{\text{вак}}; \quad p_a - p_A = \rho gh_{\text{вак}}. \quad (2.45)$$

В некоторых случаях, когда диапазон изменения измеряемого давления невелик по сравнению с атмосферным, используют U-образную трубку, свободное колено которой имеет площадь поперечного сечения во много раз (на два-три порядка) больше, чем колено, присоединяемое к точке, в которой измеряется давление (рис. 2.11,г). При такой конструкции U-образной трубки изменение уровня свободной поверхности левого колена под действием изменения давления p_A в резервуаре практически не изменяет уровня жидкости в правом (широком) колене. Это позволяет следить за давлением в резервуаре, контролируя уровень жидкости в одном (левом) колене (а не в обоих, как в случае с обычным U-образным пьезометром).

Подобная конструкция используется в приборах для измерения атмосферного давления, которые называются *барометрами* (рис. 2.12). Они состоят из широкой чашки, в которой на свободную поверхность рабочей жидкости действует атмосферное давление, и присоединенной к ней вертикальной трубки с запаянным свободным концом; эта трубка заполнена жидкостью, и на свободной поверхности в ней создают давление $p_0 = p_{\text{нп}} \approx 0$. Приравняв давление в точках на плоскости 0—0, имеем

$$p_a = p_0 + \rho g h_a \approx \rho g h_a. \quad (2.46)$$

Согласно (2.46), измеряя h_a , легко вычислить атмосферное давление p_a .

При конструировании пьезометров и барометров важен рациональный выбор рабочей жидкости. Так, нормальное атмосферное давление

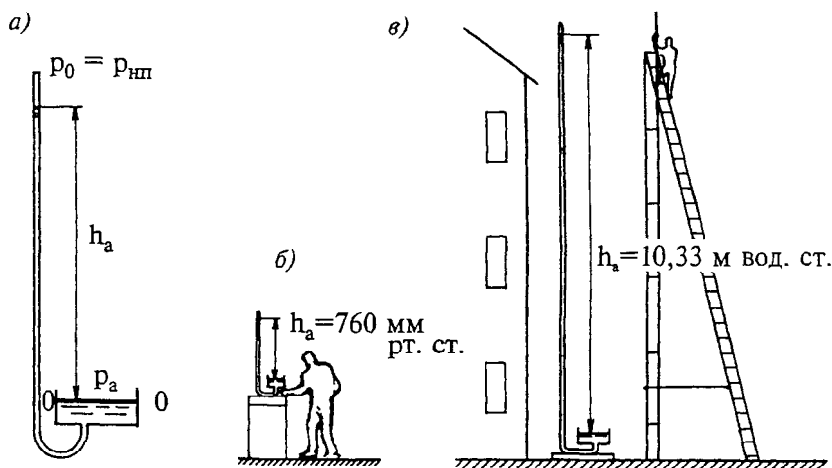


Рис. 2.12. Барометры: а — принципиальная схема; б — ртутный; в — водяной

на уровне моря равно $p_a = 1,012 \cdot 10^5$ Па. Если выбрать в качестве рабочей жидкости воду ($\rho = 0,001 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$), то

$$h_a = \frac{p_a}{\rho g} = \frac{1,012 \cdot 10^5}{0,001 \cdot 9,8} = 10,33 \text{ м}$$

и, следовательно, высота водяного барометра будет более 10 м (рис. 2.12, в). Чтобы уменьшить габарит барометра, в качестве рабочей жидкости ис-

пользуют ртуть ($\rho = 0,0136 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$). При этом

$$h_a = \frac{p_a}{\rho g} = \frac{1,012 \cdot 10^5}{0,0136 \cdot 9,8} = 0,760 \text{ м.}$$

Высота ртутного барометра не превышает 1 м (рис. 2.12, б).

Отметим, что зависимости (2.44) и (2.45) позволяют выражать значение давления не только в паскалях, но и в единицах высоты столба рабочей жидкости. В частности, атмосферное давление измеряют, как правило, в миллиметрах ртутного столба.

Для измерения абсолютного и избыточного давлений используют разнообразные механические приборы, называемые *манометрами*.

В зависимости от чувствительного элемента различают поршневые, деформационные, пружинные манометры и манометры, использующие пьезоэлектрические и пьезомагнитные эффекты. Манометры тарируются (калибруются) в основном с помощью U-образных пьезометров.

2.7. Распределение давления в атмосфере Земли

Атмосферу Земли обычно разделяют:

на тропосферу — слой толщиной 11 000 м, примыкающий непосредственно к земной поверхности;

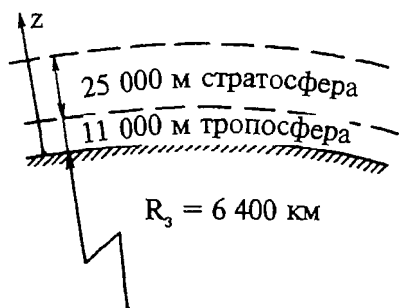


Рис. 2.13. Схематизация атмосферы Земли

стратосферу — слой толщиной 25 000 м, расположенный над тропосферой (рис. 2.13).

Рассчитаем распределение давления в атмосфере, полагая, что движение атмосферного воздуха (ветер) оказывает пренебрежимо малое влияние на распределение давления, которое в основном определяется физическими свойствами воздуха (его плотностью, температурой) и силой земного притяжения. Кроме того, воздух считаем совершенным газом.

В тропосфере температура воздуха уменьшается; в зависимости от расстояния z от уровня моря эта зависимость может быть аппроксимирована в виде

$$T = T_{\text{ум}} - \lambda z; \quad (2.47)$$

где $T_{\text{ум}}$ — температура на уровне моря; $\lambda = 6,5^\circ\text{C}/\text{км}$.

Распределение давления в поле силы тяжести согласно закону гидростатики подчиняется уравнению

$$\frac{dp_a}{dz} = -\rho g. \quad (2.48)$$

Из уравнения состояния (1.25) имеем

$$\rho = \frac{p_a}{RT}, \quad (2.49)$$

где для воздуха $R = 0,287 \text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$.

Подставим (2.47) и (2.49) в (2.48) и запишем

$$\frac{dp_a}{p_a} = -\frac{g}{R} \frac{dz}{T_{\text{ум}} - \lambda z}. \quad (2.50)$$

Интегрируя (2.50), получаем

$$\ln p_a \Big|_{p_{\text{ум}}}^{p_a(z)} = \frac{g}{R\lambda} \ln(T_{\text{ум}} - \lambda z) \Big|_0^z.$$

Отсюда

$$p_a(z) = p_{\text{ум}} \left(1 - \frac{\lambda z}{T_{\text{ум}}} \right)^{\frac{g}{R\lambda}}.$$

Приняв $T_{\text{ум}} = 15^\circ\text{C} = 288 \text{ К}$, $p_{\text{ум}} \cong 100 \text{ кПа}$, имеем

$$p_a(z) = p_{\text{ум}} \left(1 - \frac{0,0065z}{288} \right)^{\frac{9,81}{287 \cdot 0,0065}}$$

или

$$p_a(z) = 100(1 - 0,226 \cdot 10^{-4} z)^{5,260}. \quad (2.51)$$

Вычислим температуру и давление на высоте $z = 11\,000$ м, используя (2.47) и (2.51):

$$T(11000) = -56,5^\circ\text{C} \cong 217\text{ K};$$

$$p_a(11000) = 22,5\text{ кПа}.$$

В стратосфере температуру можно считать постоянной и равной температуре на границе с тропосферой: $T = -56,5^\circ\text{C} = \text{const}$. При этом уравнение для давления имеет вид

$$\frac{dp_a}{p_a} = -\frac{g}{RT} dz. \quad (2.52)$$

Интегрируя, получаем

$$\ln p_a \Big|_{p_a(11000)}^{p_a(z)} = -\frac{g}{RT(11000)} z \Big|_{11000}^z;$$

$$\ln \frac{p_a}{22,5} = -\frac{9,81 \cdot (z - 11000)}{287 \cdot 217\text{ K}}.$$

Окончательно для стратосферы имеем

$$p_a = 22,5 e^{-0,0001575(z-11000)}. \quad (2.53)$$

Зависимости (2.51) и (2.53) представлены на рис. 2.14.

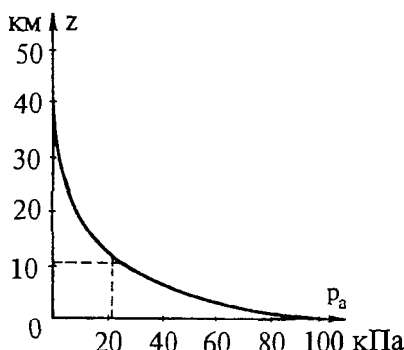


Рис. 2.14. Распределение атмосферного давления по вертикали

2.8. Нормальные напряжения в стенках круглоцилиндрической трубы (котельная формула)

Рассмотрим круглоцилиндрическую трубу длиной L , диаметром D и с толщиной стенок δ , внутри которой жидкость (или газ) находится под избыточным давлением p (рис. 2.15). Очевидно, под действием этого

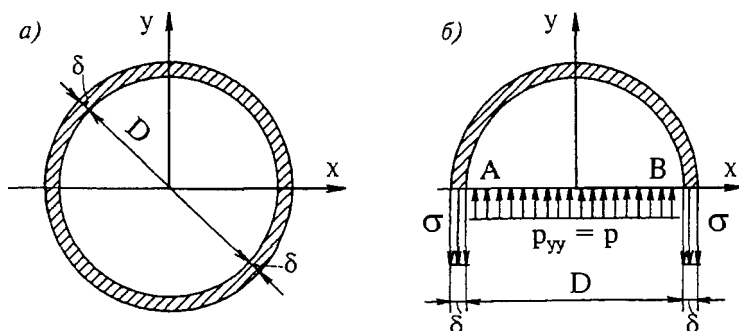


Рис. 2.15. Напряжения в стенках круглоцилиндрической трубы:
а — поперечное сечение трубы; б — расчетная схема

давления стенки трубопровода оказываются растянутыми, и для выполнения, в частности, расчетов на прочность необходимо знать нормальные напряжения в стенках. Разрежем мысленно трубопровод плоско-

стью, проходящей через его ось, и приравняем нулю силы, действующие на половину трубопровода и заполняющую ее жидкость.

В проекции на ось y имеем:

нормальные сжимающие напряжения p_{yy} на поверхность жидкости АВ со стороны отброшенной части равны p ($p_{yy} = -p$), они действуют на площадь $A_{\text{ж}} = DL$ и определяют силу давления в направлении оси y в виде

$$(F_{\text{ж}})_y = pDL; \quad (2.54)$$

нормальные растягивающие напряжения в стенках трубопровода, которые в соответствии с обозначениями, принятыми в курсе “Сопротивление материалов”, обозначим σ ; эти напряжения на площадке $A_{\text{т}} = 2\delta \cdot D$ определяют силу, действующую в направлении противоположном y :

$$(F_{\text{т}})_y = -\sigma \cdot 2\delta \cdot L. \quad (2.55)$$

Приравняв нулю сумму этих проекций, после очевидных преобразований получим

$$\sigma = \frac{pD}{2\delta}. \quad (2.56)$$

Это формула, позволяющая связать нормальные напряжения в стенках трубопровода с давлением внутри него, называется *котельной формулой*.

2.9. Закон Архимеда.

Плавание тел

Вычислим силу избыточного гидростатического давления, действующую на неподвижное тело, погруженное в покоящуюся в поле силы тяжести жидкость. Разделим тело вертикальными плоскостями на призмы, ограниченные сверху и снизу элементарными площадками (принадлежа-

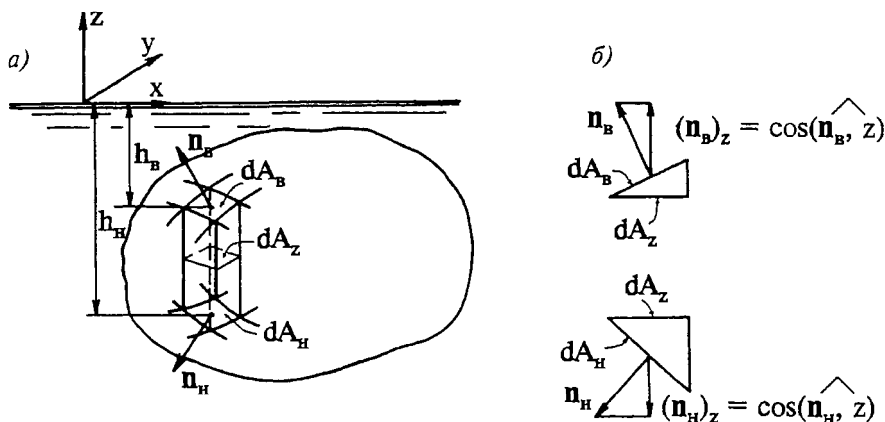


Рис. 2.16. Схема для доказательства закона Архимеда

щими поверхности тела) dA_B и dA_H (рис. 2.16); единичные нормали к этим площадкам обозначим $\mathbf{n}_B$ и $\mathbf{n}_H$. Из геометрических соображений (рис. 2.16, б) найдем

$$\begin{aligned} dA_B \cdot \cos(\hat{n}_B, z) &= dA_B (n_B)_z = dA_z; \\ dA_H \left[-\cos(\hat{n}_H, z) \right] &= -dA_H (n_H)_z = dA_z. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Здесь dA_z — площадь сечения призмы горизонтальной плоскостью. Знак минус во втором выражении (2.57) связан с тем, что вектор $\mathbf{n}_H$ направлен вниз, так что $(n_H)_z < 0$.

Рассмотрим сумму поверхностных сил, действующих на выделенную элементарную призму. В соответствии с (2.8) сила гидростатического давления на площадки dA_B и dA_H равна:

$$dF_B = -n_B p_B dA_B, \quad dF_H = -n_H p_H dA_H, \quad (2.58)$$

где избыточное гидростатическое давление

$$p_B = \rho g h_B = -\rho g z_B, \quad p_H = \rho g h_H = -\rho g z_H. \quad (2.59)$$

На вертикальные грани призмы действуют силы со стороны соседних призм, сумму которых обозначим dF_{Br} .

Проекция на ось z всех поверхностных сил, действующих на призму, равна

$$(dF_a)_z = (dF_B)_z + (dF_H)_z + (dF_{Br})_z. \quad (2.60)$$

Подставив в это равенство (2.58), (2.59), (2.60) и (2.57), найдем

$$(dF_a)_z = \rho g z_B dA_z - \rho g z_H dA_z + (dF_{Br})_z. \quad (2.61)$$

Запишем аналогичные уравнения для всех элементарных призм, на которые было разделено рассматриваемое тело, и сложим все эти уравнения; при этом силы взаимодействия соседних призм по вертикальным граням компенсируют друг друга, и слагаемые $(dF_{Br})_z$ взаимно уничтожаются. Сумма первых двух слагаемых представляет собой вес жидкости в объеме призмы

$$\rho g (z_B - z_H) dA_z = \rho g dV, \quad (2.62)$$

где $dV = (z_B - z_H) dA_z$ — объем призмы.

Таким образом, подставляя (2.62) в (2.61), в результате суммирования всех элементарных сил $(dF_a)_z$ получим

$$(F_a)_z = \rho g V, \quad (2.63)$$

где $V = \int_V dV$ — объем тела.

Выражение (2.63) представляет собой знаменитый *закон Архимеда*: на неподвижное тело, погруженное в покоящуюся в поле силы тяжести жидкость, действует выталкивающая сила, равная весу жидкости в объеме данного тела. Иногда эту силу называют архимедовой.

Проделав аналогичные вычисления (т.е. разбив тело на элементарные призмы плоскостями, параллельными координатным осям x и y), можно доказать практически очевидный факт — равенство нулю суммы горизонтальных составляющих силы избыточного гидростатического давления, действующих на погруженное тело.

Точку приложения архимедовой (выталкивающей) силы W называют центром водоизмещения. Можно доказать (доказательство не приводим, хотя оно сравнительно простое и требует лишь использования теоремы о моменте равнодействующей), что центр водоизмещения тела совпадает с центром тяжести тела, если тело однородное.

Если вес тела больше, чем выталкивающая сила, то тело тонет. Если вес тела равен выталкивающей силе, то тело плавает внутри жидкости; если вес тела меньше выталкивающей силы, то оно всплывает и, достигнув свободной поверхности, выходит из воды настолько, чтобы выталкивающая сила, действующая на погруженную часть, была равна весу тела.

При рассмотрении плавания тел представляет интерес вопрос об устойчивости плавающего тела. Различают *устойчивое* равновесие плавающего тела, при котором сила тяжести приложена ниже центра водоизмещения, и *неустойчивое* равновесие в противном случае (на рис. 2.17 и на всех последующих в этом пункте круглоцилиндрические тела считаются полыми и невесомыми).

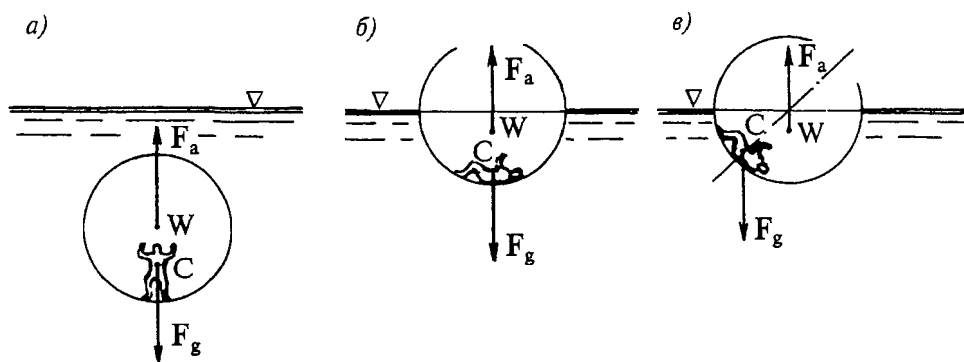


Рис. 2.17. Устойчивое равновесие плавающих тел: а — внутри жидкости; б — на свободной поверхности; в — момент сил возвращает тело к состоянию равновесия

На рис. 2.17, а и б показаны плавающие тела в условиях устойчивого равновесия. Если по каким-либо причинам равновесие нарушается (рис. 2.17, в), то архимедова сила F_a и сила тяжести F_g создают момент, возвращающий плавающее тело в исходное устойчивое состояние.

Когда парусные корабли имели легкие деревянные корпуса и надстройки, то их проектировали и строили так, чтобы они были устойчивы при любом крене (рис. 2.18). Для этого устраивали большой киль, который заполняли балластом. Киль, кроме того, был необходим парусным судам для эффективного использования бокового и встречного ветра, чтобы они могли плыть в направлении, не совпадающем с направлением ветра.

С появлением пароходов и теплоходов необходимость в киле больших размеров отпала, более того, большой киль создавал дополнительное сопротивление движению и требовал больших глубин у причальных сооружений. Вместе с тем использование ме-

талла для корпусов и появление тяжелых надстроек (например, оружейных башен на военных кораблях) поставило вопрос о возможности плавания при центре тяжести, расположенном выше центра водоизмещения. В простейшем случае неустойчивого равновесия пла-

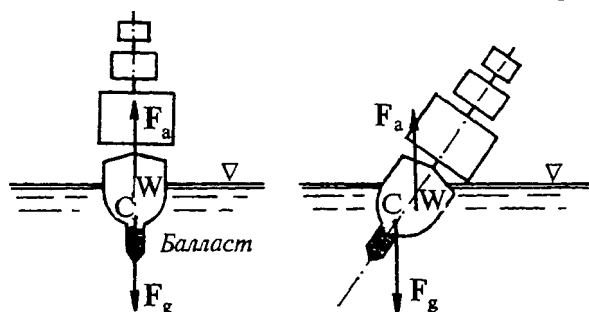


Рис. 2.18. Устойчивость парусного судна

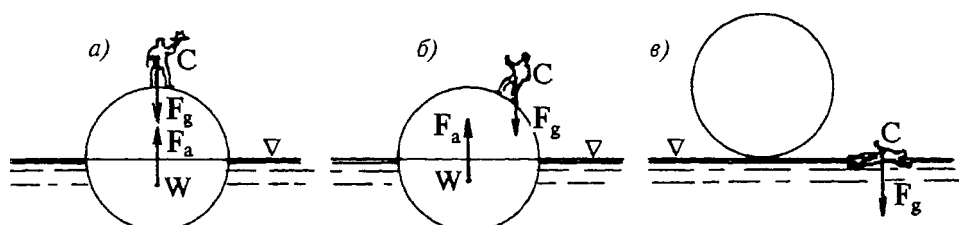


Рис. 2.19. Неустойчивое равновесие тел, плавающих на свободной поверхности:
а — равновесное состояние; б — момент сил опрокидывает тело;
в — заключительное состояние

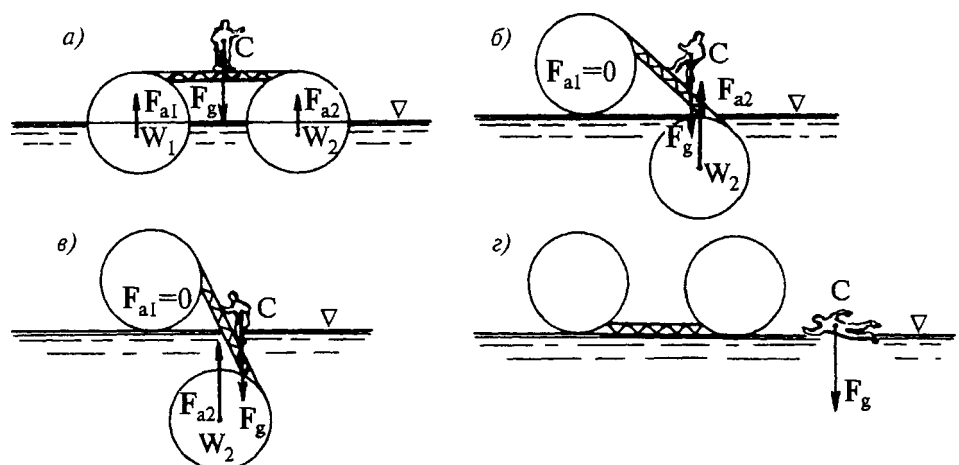


Рис. 2.20. Остойчивость плавающих тел: а — равновесное состояние; б — момент сил при малом крене возвращает тело к состоянию равновесия; в — момент сил при большом крене опрокидывает тело; г — последствия большого крена

вающего тела (рис. 2.19) при любом отклонении от равновесия архимедова сила F_a и вес тела F_g создают момент, который увеличивает это отклонение и приводит к опрокидыванию судна. Однако система из двух плавающих тел, называемая катамараном (рис. 2.20),

которая также, строго говоря, не является устойчивой (центр тяжести выше центра водоизмещения), при небольших кренах не опрокидывается. Как видно на рис. 2.20,б, при небольшом крене возникает момент сил F_a и F_g , который возвращает систему в исходное положение. При очень сильном крене (рис. 2.20,в) возникает момент, опрокидывающий систему; таким образом, ее нельзя назвать устойчивой в полном смысле. Такие тела, которые плавают в условиях неустойчивого равновесия, но при небольшом крене возвращаются в исходное положение, называются *остойчивыми*. Современные корабли, как правило, проектируются исходя не из условий устойчивого равновесия (они при этом были бы очень низкими), а из условия обеспечения остойчивости при крене до 35—45° (рис. 2.21).

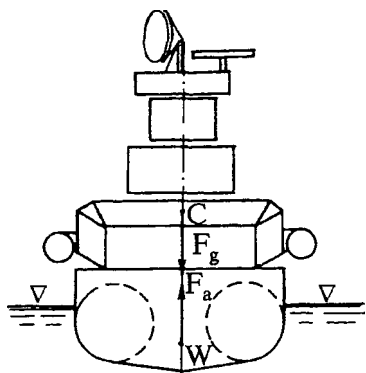


Рис. 2.21. Остойчивость современных кораблей

кает момент сил F_a и F_g , который возвращает систему в исходное положение. При очень сильном крене (рис. 2.20,в) возникает момент, опрокидывающий систему; таким образом, ее нельзя назвать устойчивой в полном смысле. Такие тела, которые плавают в условиях неустойчивого равновесия, но при небольшом крене возвращаются в исходное положение, называются *остойчивыми*. Современные корабли, как правило, проектируются исходя не из ус-

ловий устойчивого равновесия (они при этом были бы очень низкими), а из условия обеспечения остойчивости при крене до 35—45° (рис. 2.21).

ГЛАВА 3

КИНЕМАТИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

3.1. Методы описания движения сплошной среды

Когда в теоретической механике рассматривается движение материальной точки, то для полного описания движения необходимо знать уравнение движения точки, т.е. $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, где $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$ — вектор-радиус точки. Чтобы найти скорость точки, надо взять производную от правой части уравнения движения (рис. 3.1, а)

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}. \quad (3.1)$$

Ускорение материальной точки определяется зависимостью (рис. 3.1,б)

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}. \quad (3.2)$$

Ускорение материальной точки $\mathbf{a}$ входит во второй закон Ньютона, согласно которому сила $\mathbf{F}$, приложенная к материальной точке с массой m , придает ей ускорение $\mathbf{a}$ в соответствии с равенством

$$\frac{\mathbf{F}}{m} = \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (3.3)$$

При изучении движения сплошной среды можно также выделить бесконечно малые объемы, положение которых в пространстве характе-

ризуется тремя координатами или величиной одного вектор-радиуса $\mathbf{r} = (x, y, z)$, и рассматривать движение сплошной среды как движение совокупности взаимно связанных и взаимодействующих бесконечно малых (точечных) объемов.

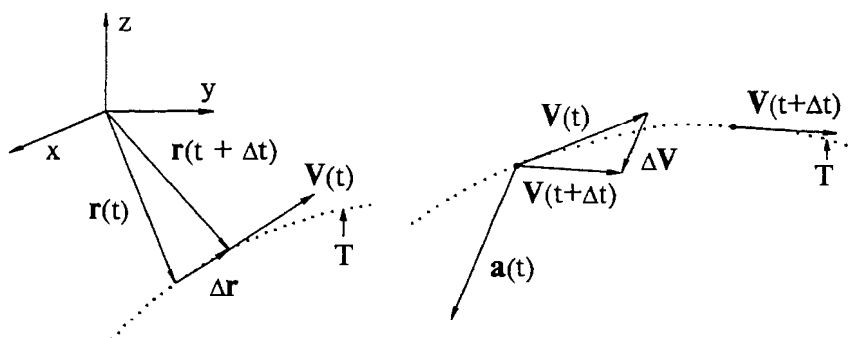


Рис. 3.1. Скорость $\mathbf{V}$ и ускорение $\mathbf{a}$ материальной точки

Обозначим координаты начального (т.е. в момент времени t_0) положения каждой частицы сплошной среды через $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Для полного описания движения сплошной среды необходимо знать траектории всех частиц, т.е. положения каждой частицы в любой момент времени $t > t_0$. Это означает, что для каждой частицы надо знать уравнение движения $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. При этом одну частицу от другой отличает начальное положение частицы и, следовательно, величина $\mathbf{r}_0$ войдет в уравнение движения жидкой частицы как параметр

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0). \quad (3.4)$$

Изложенный выше подход называется методом *Лагранжа* описания движения сплошной среды, а характеристики сплошной среды (скорость, плотность, давление и т.п.), связанные с движущимися элементарными объемами сплошной среды, как и координаты этого объема, называют *лагранжевыми* переменными.

Если принять такой подход к описанию движения сплошной среды, то, используя равенства

$$\mathbf{V}(t, \mathbf{r}_0) = \frac{\partial \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0)}{\partial t} \quad \text{и} \quad \mathbf{a}(t, \mathbf{r}_0) = \frac{\partial \mathbf{V}(t, \mathbf{r}_0)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0)}{\partial t^2},$$

можно вычислить скорость и ускорение каждой частицы, а затем, определив величину внешних (поверхностных и объемных) сил, действующих на каждую частицу, записать уравнения движения для сплошной среды.

Несмотря на кажущуюся простоту метода Лагранжа, уравнения движения, получаемые на основе этого метода, очень сложны, и он используется сравнительно редко.

Более удобен (и потому значительно шире применяется) другой подход, называемый методом *Эйлера* описания движения сплошной среды. Согласно этому подходу фиксируют не частицы жидкости, а точки пространства, через которые проходят в разные моменты различные части-

цы жидкости. В этих точках пространства определяют значения скорости движения сплошной среды; таким образом, средством описания движения сплошной среды является поле скорости движения жидких частиц в фиксированных точках пространства:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(x, y, z, t). \quad (3.5)$$

Характеристики сплошной среды (поле скорости, поле давлений, поле напряжений и т.п.), отнесенные к фиксированным неподвижным элементам геометрического пространства (точкам, линиям, поверхностям, объемам), и сами эти элементы называют *эйлеровыми* переменными.

Этот метод удобен по следующим причинам. Во-первых, наблюдать за характеристиками движения в фиксированных точках пространства проще, чем за движущимися (например, в трубе) фиксированными (мечеными) частицами. Для этого можно установить в какой-либо точке датчик скорости или давления и, снимая показания, изучать движение сплошной среды. Во-вторых, соответствующие этому методу уравнения движения оказываются проще для анализа. Подчеркнем, что если в методе Лагранжа $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ — это искомые функции времени, то в методе Эйлера пространственные координаты $\mathbf{r} = (x, y, z)$ — не функции времени, а независимые переменные, декартовы координаты пространства, в котором перемещается сплошная среда. Учитывая, что в методе Эйлера описание движения отличается от принятого в теоретической механике, следует ожидать и некоторого отличия в определении ускорения, входящего в уравнение (3.3), выражающего второй закон Ньютона. Дело в том, что в это уравнение входит ускорение материальной точки, которое в случае сплошной среды определяется, как и в теоретической механике, второй производной пути по времени только при использовании метода Лагранжа. При использовании метода Эйлера ускорение, которое входит в уравнение (3.3), а также другие гидромеханические величины изменяются вместе с движением объема жидкости, выражаются через специальный вид производной, которая определенным образом должна быть связана с полем скорости (3.5); вместе с тем эта производная должна быть связана с движением частиц жидкости, газа, т.е. с движением субстанции. Такую производную называют субстанциальной (см п. 3.7).

3.2. Линия тока и траектория

Линией тока в поле скорости сплошной среды называется такая кривая, в каждой точке которой вектор скорости направлен по касательной к ней (в фиксированный момент времени). Линия тока является эйлеровой характеристикой потока; ее не следует отождествлять с *траекторией*, т.е. геометрическим местом последовательных положений материальной точки (элементарной жидкой частицы) при ее движении в пространстве, которая является лагранжевой характеристикой потока (рис. 3.2). Эти линии совпадают только при *установившемся* движении, когда поле скорости не изменяется во времени, т.е. $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$. Если же движение *неустановившееся*, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, то эти линии не совпадают (рис. 3.3).

Важной особенностью совокупности линий тока в фиксированный момент времени является то, что они никогда не пересекаются друг с другом, за исключением особых точек (см. рис. 3.5). Это следует из того, что скорость в данной точке не может являться касательной одновременно к двум пересекающимся кривым.

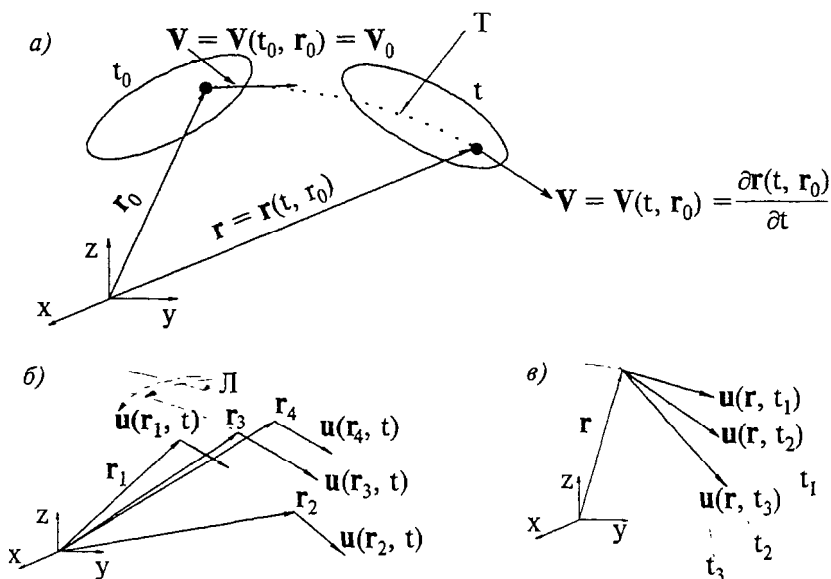


Рис. 3.2. Два метода описания движения сплошной среды: *a* — траектория T и скорость $V(t, r_0)$ элементарного жидкого объема; *б* — линии тока L и скорость жидкости $u(r, t)$ в точках пространства; *в* — линии тока при неустановившемся движении в моменты времени t_1, t_2, t_3

Если элементарный вектор, касательный к линии тока, обозначим через $d\mathbf{e} = (dx, dy, dz) = i dx + j dy + k dz$, то вследствие того, что вектор $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ параллелен $d\mathbf{e}$, дифференциальное уравнение линии тока можно записать в виде

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} = \frac{|d\mathbf{e}|}{|\mathbf{u}|} \quad (3.6)$$

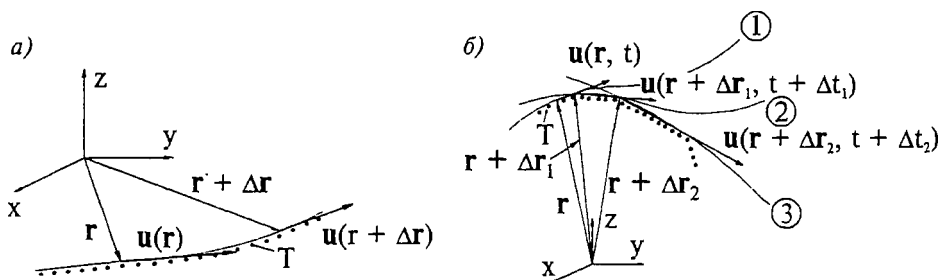


Рис. 3.3. Линии тока и траектории: *a* — при установившемся движении совпадают; *б* — при неустановившемся движении 1, 2, 3 — линии тока в моменты времени $t, t + \Delta t_1, t + \Delta t_2$, T — траектория элементарного жидкого объема

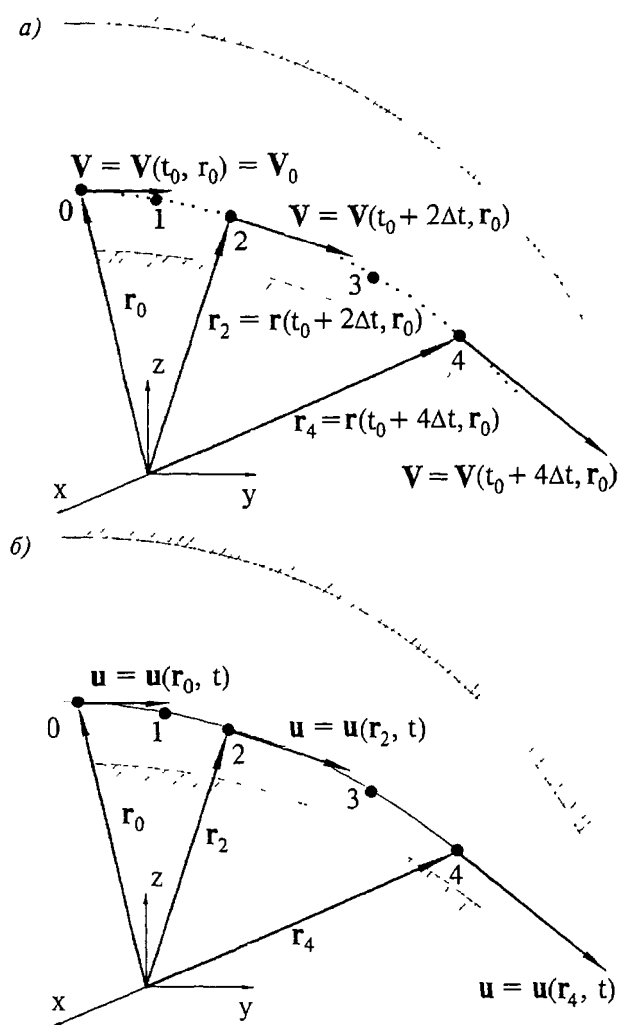


Рис. 3.4. Лагранжевы (а) и эйлеровы (б) переменные при описании установившегося движения в конфузоре

ко от пространственных координат этой точки $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$. Картина течения характеризуется достаточным набором линий тока.

Совокупность линий тока часто используется как наглядное средство для описания особенностей течения жидкости, особенно на плос-

Особенности лагранжева и эйлерова методов описания движения сплошной среды дополнительно продемонстрируем на примере установившегося движения жидкости (рис. 3.4), при котором траектория и линия тока совпадают. При лагранжевом методе (рис. 3.4, а) частица жидкости, имеющая при $t = t_0$ начальную координату $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, движется по траектории, занимая в моменты времени $t_0, t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t, t_0 + 3\Delta t$ положения в пространстве, отмеченные на рисунке точками. Скорость этой частицы изменяется со временем; картина течения описывается набором траекторий различных частиц жидкости. При эйлеровом подходе тот же поток (рис. 3.4, б) описывается полем скорости $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$; при установившемся движении, когда $\partial \mathbf{u} / \partial t = 0$, скорость жидкости в любой точке потока зависит толь-

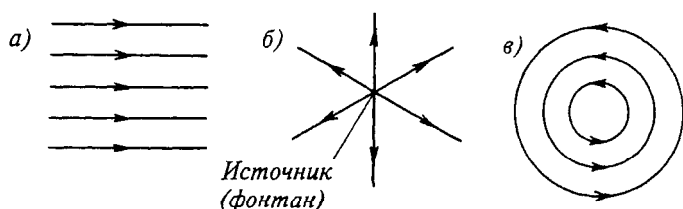


Рис. 3.5. Примеры линий тока для простейших потоков: а — равномерное движение; б — источник; в — водоворот

кости (рис. 3.5). На рис. 3.5,а показана совокупность линий тока при параллельно-струйном течении, когда скорости в каждой точке потока имеют одинаковые величину и направление. Такое течение бывает, в частности, в широком прямоугольном призматическом канале. На рис. 3.5, б показаны линии тока, которые имеют место в случае симметричного растекания жидкости при наличии источника; такое течение можно наблюдать в бассейне, в центре которого расположен фонтан. Линии тока, характерные для циркуляционных движений жидкости, например, водоворотов, смерчей и т.п., показаны на рис. 3.5,в.

3.3. Метод контрольного объема

В соответствии с двумя методами описания движения сплошной среды при необходимости дать математическую формулировку основных законов механики, а также получить эффективные методы решения практических задач отметим следующее. Законы механики формулируются для механических систем, т.е. совокупности физических тел; в случае сплошной среды это выделенный движущийся объем среды, сохраняющий при своем движении все составляющие его частицы. Это очевидно соответствует лагранжеву методу. Вместе с тем преимущества эйлера метода приводят к использованию для решения задач гидромеханики представления о *контрольном объеме*, под которым понимают выделенную часть пространства, обычно неподвижную и, во всяком случае, не связанную с движением среды. Контрольный объем ограничивается *контрольной поверхностью*, сквозь которую течет среда. Контрольный объем может иметь конечные размеры, а границы его могут быть заданы в соответствии с решаемой задачей, например, они могут либо совпадать с твердыми поверхностями, ограничивающими поток, либо формировать сечения потока, в которых изучаются его характеристики. При других целях исследования контрольный объем может рассматриваться как бесконечно малый, стягивающийся к фиксированной точке пространства (опять-таки в соответствии с методом Эйлера независимо от движущейся сквозь него среды).

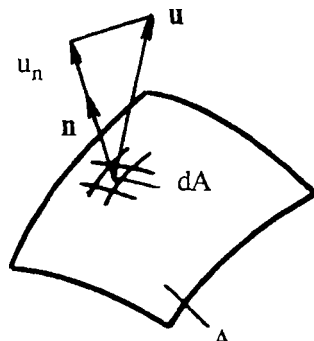


Рис. 3.6. Поток сквозь контрольную поверхность

Использование контрольного объема и контрольной поверхности для решения гидромеханических задач приводит к необходимости введения такого понятия, как поток гидродинамической характеристики (например, массы, кинетической энергии и т.п.) или количество этой гидродинамической характеристики, проносимое жидкостью в единицу времени через (сквозь) зафиксированную в пространстве поверхность. Зафиксируем в пространстве, занятом движущейся жидкостью, поверхность A и выделим около точки с координатами $\mathbf{r} = (x, y, z)$ элементарную площадку dA (рис. 3.6); скорость жидкости в этой точке равна $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности в этой же точке. При этом нормальная к поверхности составляющая скорости $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$.

Объем жидкости, протекающей в единицу времени через площадку dA , равен

$$dQ = u_n \cdot dA. \quad (3.7)$$

Эта величина называется *объемным расходом* жидкости (или просто *расходом* жидкости, термин *поток объема* не используется).

Расход через всю поверхность A равен сумме расходов через все элементарные площадки, на которые разделяется эта поверхность

$$Q = \int_A u_n dA = \int_A \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (3.8)$$

Аналогично масса жидкости, протекающая (проносимая жидкостью) в единицу времени через поверхность A , равна

$$Q_M = \int_A \rho u_n dA. \quad (3.9)$$

Эта величина называется *массовым расходом* или *потоком массы* через контрольную поверхность.

Элементарный поток кинетической энергии равен количеству кинетической энергии той массы жидкости, которая протекает через dA за единицу времени:

$$d\Pi(\text{КЭ}) = \rho u_n dA \frac{u^2}{2} = \frac{\rho u^2}{2} u_n dA. \quad (3.10)$$

Аналогично элементарный поток количества движения равен количеству движения массы жидкости, которая за единицу времени протекает через dA :

$$d\Pi(\text{КД}) = \rho u_n dA \cdot \mathbf{u} = \rho \mathbf{u} \cdot u_n dA. \quad (3.11)$$

Вышеизложенное показывает, что в общем случае поток через элементарную площадку dA гидродинамической характеристики B , имеющей плотность распределения $\beta(\mathbf{r}, t)$, можно представить в виде

$$d\Pi(B) = \beta(\mathbf{r}, t) u_n dA, \quad (3.12)$$

а *поток гидродинамической характеристики* через всю поверхность A — в виде

$$\Pi(B) = \int_A \beta u_n dA = \int_A \beta (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA. \quad (3.13)$$

Сравнивая (3.13) и (3.8), получаем, что в случае объемного расхода Q следует принять $\beta = 1$.

Одной из важных задач, которую необходимо решить перед тем, как сформулировать математические выражения для законов механики в эйлеровых переменных, является определение способа выразить изменение во времени данной гидромеханической характеристики, например массы или количества движения выделенного объема среды (т.е. лагранжевой характеристики), рассматривая движение этого объема среды сквозь контрольный объем (т.е. в эйлеровых переменных). Для этого вводится особый вид производной от указанной гидромеханической характеристики по времени, которая называется *субстанциальной*, так как она связана с рассмотрением движения текучей среды, материи, субстанции. Иногда ее называют эйлеровой производной, так как она связана с использованием метода Эйлера, или Стоксовой, поскольку Стокс впервые дал ее математическое выражение и ввел специальное ее обозначение.

3.4. Гидромеханическая интерпретация теоремы Остроградского—Гаусса

Зафиксируем неподвижную в пространстве поверхность A , ограничивающую объем $\mathcal{V}$. Сквозь поверхность протекает жидкость, скорость жидкости $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$. Выделим на поверхности площадку dA , единичный вектор нормали к ней $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$. Если воспользоваться ортами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, то $\mathbf{u} = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}$, $\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}$. Обозначим модуль скорости $|\mathbf{u}| = u$; очевидно, $|\mathbf{n}| = 1$. Как известно, скалярное произведение двух векторов выражается двумя способами:

через их проекции

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_x n_x + u_y n_y + u_z n_z; \quad (3.14)$$

через модули векторов и угол между ними

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{n}| \cos(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{n}}) = u \cos(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{n}}) = u_n, \quad (3.15)$$

где u_n — нормальная к поверхности dA составляющая скорости. Таким образом

$$u_n = u_x n_x + u_y n_y + u_z n_z. \quad (3.16)$$

Согласно (3.16) объемный расход жидкости Q через поверхность A можно записать в виде

$$\begin{aligned} \int_A u_n dA &= \int_A (u_x n_x + u_y n_y + u_z n_z) dA = \\ &= \int_A \left[u_x \cos(\mathbf{n}, x) + u_y \cos(\mathbf{n}, y) + u_z \cos(\mathbf{n}, z) \right] dA. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Согласно теореме Остроградского—Гаусса имеем

$$\int_A u_n dA = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) d\mathcal{V}. \quad (3.18)$$

Продемонстрируем доказательство этой зависимости на основе гидромеханических представлений.

Зафиксируем в пространстве параллелепипед с бесконечно малыми ребрами dx, dy и dz ; поверхность параллелепипеда обозначим через $\Delta_1 A$, а объем — $\Delta_1 \mathcal{V} = dx dy dz$.

На каждой грани параллелепипеда вследствие ее малости значение u_n постоянно и равно проекции скорости на координатную ось, к которой эта грань нормальна. Пусть проекции скорости имеют направления, указанные на рис. 3.7.

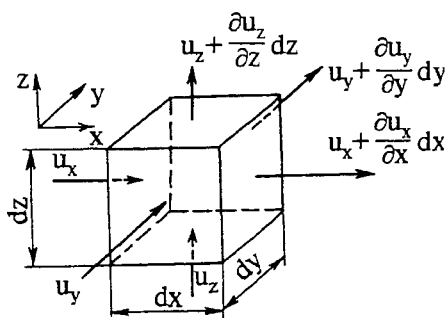


Рис. 3.7. Определение расхода жидкости сквозь поверхность элементарного параллелепипеда

Расход жидкости $\int_{\Delta_1 A} u_n dA$, протекающий сквозь поверхность $\Delta_1 A$, найдем как разность между объемом жидкости, вытекающим из параллеле-

лепипеда в единицу времени

$$\left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx\right) dydz + \left(u_y + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy\right) dx dz + \left(u_z + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz\right) dx dy,$$

и объемом, втекающим в него за то же время:

$$u_x dydz + u_y dx dz + u_z dx dy.$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_1 A} u_n dA &= \frac{\partial u_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial u_y}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial u_z}{\partial z} dx dy dz = \\ &= \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \text{div} \mathbf{u} \cdot \Delta_1 \mathbf{V}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где $\text{div} \mathbf{u}$ — *дивергенция вектора скорости* — скалярная величина, определяемая равенством

$$\text{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (3.20)$$

Если жидкость несжимаемая, то из закона сохранения массы следует, что объем жидкости, втекающий в элементарный объем $\Delta_1 \mathbf{V}$, равен объему жидкости, вытекающему из него, так что

$$\int_{\Delta_1 A} u_n dA = 0. \quad (3.21)$$

При этом, так как $\Delta_1 \mathbf{V} \neq 0$, из (3.19) следует

$$\text{div} \mathbf{u} = 0; \quad (3.22)$$

это выражение называют уравнением *несжимаемости* жидкости.

Чтобы обобщить равенство (3.19) для произвольного объема $\mathbf{V}$, ограниченного произвольной поверхностью A (рис. 3.8), разобьем $\mathbf{V}$ на бесконечно малые параллелепипеды. Для каждого из них можно записать равенство (3.19). Складывая все такие равенства, можно заметить, что в левой части суммы все слагаемые, которые относятся к поверхностям, разделяющим параллелепипеды, взаимно уничтожаются, так как то, что вытекает из одного параллелепипеда, втекает в

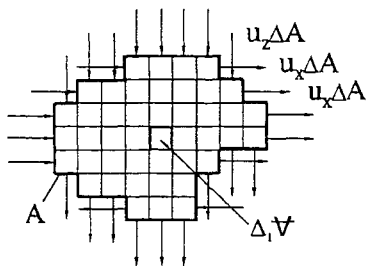


Рис. 3.8. Определение расхода сквозь произвольную контрольную поверхность

другой. Останутся только те части $\int_{\Delta_1 A} u_n dA$, которые относятся к внешним граням параллелепипедов, совпадающими с поверхностью A . Следовательно, в левой части суммы по всем параллелепипедам получим

$$\sum_i \int_{\Delta_1 A} u_n dA = \int_A u_n dA. \quad (3.23)$$

В правой части суммы по определению интеграла как предела суммы бесконечно малых слагаемых имеем

$$\sum_i \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \Delta_i \mathbf{V} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{u} dV. \quad (3.24)$$

Таким образом, для объема V произвольной формы справедливо равенство

$$\int_A u_n dA = \int_V \operatorname{div} \mathbf{u} dV; \quad (3.25)$$

представив $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$, имеем

$$\int_A (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) dA = \int_V \operatorname{div} \mathbf{u} dV,$$

что и составляет содержание теоремы Остроградского—Гаусса.

Аналогично можно рассуждать, рассматривая в поверхностном интеграле (3.18) вместо нормальной к поверхности проекции скорости u_n произведение любой физической (скалярной, векторной или тензорной) характеристики сплошной среды, плотность распределения которой обозначим через β , и нормальной составляющей скорости, т.е. поток этой величины [см. (3.13)]. При этом выражение (3.25) примет вид

$$\int_A \beta u_n dA = \int_V \left(\frac{\partial}{\partial x} \beta u_x + \frac{\partial}{\partial y} \beta u_y + \frac{\partial}{\partial z} \beta u_z \right) dV. \quad (3.26)$$

Легко вычислить, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \beta u_x + \frac{\partial}{\partial y} \beta u_y + \frac{\partial}{\partial z} \beta u_z &= \beta \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\ &+ u_x \frac{\partial \beta}{\partial x} + u_y \frac{\partial \beta}{\partial y} + u_z \frac{\partial \beta}{\partial z} = \beta \operatorname{div} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}) \beta, \end{aligned} \quad (3.27)$$

где оператор

$$(\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}) \equiv u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Воспользуемся уравнением (3.22) для вывода упрощенной формы теоремы Остроградского—Гаусса для важного частного случая, когда жидкость несжимаема.

Подставляя (3.27) в (3.26), имеем

$$\int_A \beta u_n dA = \int_V [(\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}) \beta + \beta \operatorname{div} \mathbf{u}] dV. \quad (3.28)$$

Если β скаляр, то (3.28) примет вид

$$\int_A \beta u_n dA = \int_V [\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \beta + \beta \operatorname{div} \mathbf{u}] dV. \quad (3.29)$$

В случае несжимаемой жидкости согласно (3.22) получим

$$\int_A \beta u_n dA = \int_V (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \beta) dV. \quad (3.30)$$

Эта формула будет использована в дальнейшем.

3.5. Векторная форма теоремы Остроградского—Гаусса

Пусть на поверхности A (рис. 3.9) действуют силы, плотность распределения которых (напряжение) обозначим вектором $\mathbf{p}_n$. Сумма поверхностных сил, действующих на эту поверхность, выражается в виде

$$\mathbf{F} = \int_A \mathbf{p}_n dA. \quad (3.31)$$

Зададимся целью преобразовать этот интеграл в объемный по $\mathcal{V}$. Для этого разделим объем $\mathcal{V}$ плоскостями, параллельными координатным, на элементарные параллелепипеды. Каждый из них взаимодействует с окружающими по поверхностям соприкосновения, при этом сила взаимодействия по каждой грани определяется напряжениями на этой грани.

Рассмотрим равновесие i -го элементарного параллелепипеда (рис. 3.10) с ребрами dx, dy, dz под действием поверхностных сил, опре-

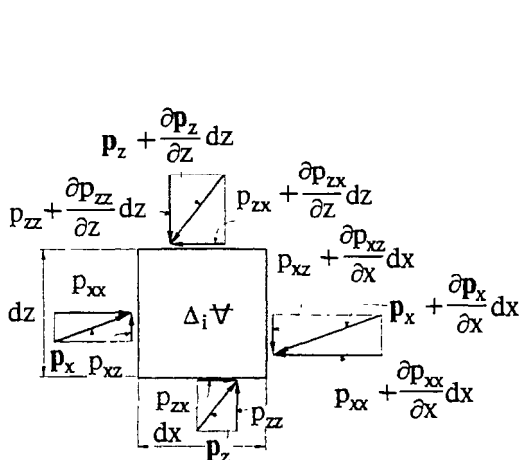


Рис. 3.9. Поверхностные силы, действующие на поверхности и внутри объема сплошной среды произвольной формы

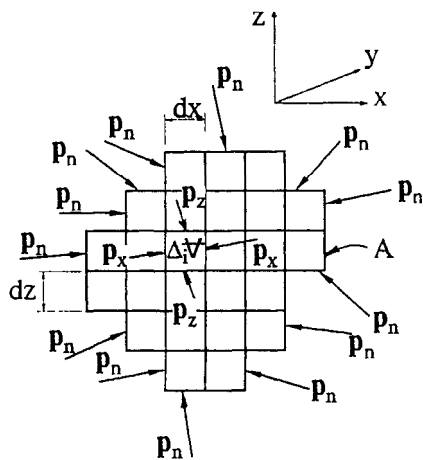


Рис. 3.10. Определение равнодействующей поверхностных сил, действующих на элементарный параллелепипед

деляемых напряжениями на его гранях. Найдем проекцию суммы этих сил на ось x . Согласно принятым обозначениям (см. п. 1.3) на ось x могут иметь ненулевые проекции только силы, определяемые нормальным напряжением p_{xx} и касательными напряжениями p_{yx} и p_{zx} . Считая, что эти величины в пределах каждого элементарного параллелепипеда изменяются линейно, легко найти (см. рис. 3.10), что разность нормальных сил, действующих на противоположные грани площадью $dydz$ и обусловленных напряжением p_{xx} , равна $(\partial p_{xx} / \partial x) dx dy dz$, а разности сил, обусловленных касательными напряжениями p_{yx} и p_{zx} и действующих на противоположные грани с площадями $dx dz$ и $dx dy$, соответственно равны $(\partial p_{yx} / \partial y) dx dy dz$ и $(\partial p_{zx} / \partial z) dx dy dz$.

Суммарная проекция сил на ось x равна

$$\Delta_1 F_x = \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Рассуждая аналогично, найдем проекции равнодействующей поверхностных сил на оси y и z :

$$\Delta_1 F_y = \left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right) dx dy dz;$$

$$\Delta_1 F_z = \left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Из этих проекций можно составить вектор $\Delta_1 \mathbf{F} = \Delta_1 F_x \mathbf{i} + \Delta_1 F_y \mathbf{j} + \Delta_1 F_z \mathbf{k}$, который представим в виде матрицы-столбца:

$$\Delta_1 \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \\ \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \\ \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix} dx dy dz. \quad (3.32)$$

Вектор, представленный в виде столбца в зависимости (3.32), в тензорном исчислении называется *дивергенцией тензора напряжений* Π :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \\ \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \\ \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix} = \text{Div} \Pi = \text{Div} \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Перепишем (3.32) в виде

$$\Delta_1 \mathbf{F} = \text{Div} \Pi \cdot \Delta_1 \mathbf{V}, \quad (3.34)$$

где $\Delta_1 \mathbf{V} = dx dy dz$ — объем i -го элементарного параллелепипеда.

Вектор $\Delta_1 \mathbf{F}$ является равнодействующей всех поверхностных сил, действующих на элементарный параллелепипед.

Рассмотрим сумму всех поверхностных сил $\Delta_1 \mathbf{F}$, действующих на все элементарные параллелепипеды, на которые был разделен объем $\mathbf{V}$. По поверхностям соприкосновения действуют взаимно уравновешивающиеся (равные по величине и направленные в противоположные стороны) силы взаимодействия соседних параллелепипедов. Следовательно, при суммировании всех поверхностных сил силы по поверхностям соприкосновения взаимно уничтожаются, а ненулевой вклад в рассмат-

риваемую сумму внесут только поверхностные силы, действующие на поверхности элементарных объемов, которые не являются поверхностями соприкосновения соседних объемов, принадлежащих объему $\mathcal{V}$. Очевидно, что таковыми являются только поверхности элементарных объемов, совпадающие с поверхностью A . Следовательно, сумма $\Delta_i \mathbf{F}$ по всем элементарным объемам, на которые был разделен $\mathcal{V}$, будет равна равнодействующей поверхностных сил, действующих на A :

$$\sum_i \Delta_i \mathbf{F} = \mathbf{F} = \int_A \mathbf{p}_n dA. \quad (3.35)$$

Рассматривая вместе с тем сумму по всем i выражений, стоящих в правой части равенства (3.34), легко увидеть, что она равна интегралу по объему $\mathcal{V}$ от вектора $\text{Div} \Pi$. Таким образом получаем

$$\int_A \mathbf{p}_n dA = \int_{\mathcal{V}} \text{Div} \Pi d\mathcal{V}. \quad (3.36)$$

Так как согласно (1.18) $\mathbf{p}_n = n\Pi$, (3.36) можно представить в виде формулы

$$\int_A n\Pi dA = \int_{\mathcal{V}} \text{Div} \Pi d\mathcal{V}, \quad (3.37)$$

которую назовем векторной формой теоремы Остроградского—Гаусса.

3.6. Разложение движения элементарного объема сплошной среды на поступательное, вращательное и деформационное (теорема Гельмгольца)

Поле скорости определяет характер изменения размеров и формы некоторого небольшого объема сплошной среды (жидкости) при его движении. Как показано на рис. 3.11, при перемещении объема жидкости, ограниченного поверхностью A , отрезок ab через время Δt изменил свою длину, повернулся на некоторый угол и занял положение $a'b'$. Другие отрезки будут по-другому изменять свое положение и длину. Будем

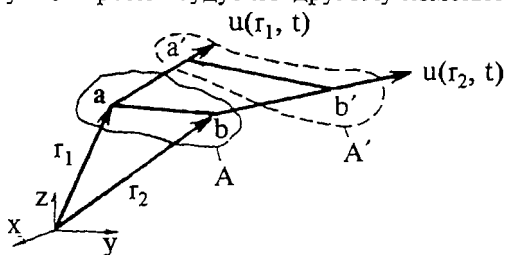


Рис. 3.11. Перемещение отрезка ab при движении жидкости

рассматривать изменение положения, формы и размеров объемов сплошной среды за малые интервалы времени и, следовательно, при перемещениях на малые расстояния. На таких расстояниях изменение поля скорости можно оценить значениями первых производных от проекций скорости, считая, что

вкладом вторых производных можно пренебречь. Таких первых производных от каждой из трех составляющих скорости (u_x, u_y, u_z) по каждой из трех координат (x, y, z) получается девять. Прежде чем их выписывать, обратим внимание на то, что при рассмотрении поля некоторой скалярной величины ϕ (например, плотности ρ , давления p) из-

менчивость φ в окрестности фиксированной точки пространства характеризуется тремя производными φ по трем координатам ($\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial z$). Эти три производные рассматриваются как проекции на соответствующие координатные оси векторной величины, которая называется градиентом скалярного поля φ :

$$\text{grad } \varphi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \mathbf{k} \equiv \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right).$$

Таким образом, если известно векторное поле $\text{grad } \varphi$, то можно вычислить, как изменяется скалярная характеристика φ в окрестности любой точки этого поля.

Если рассматривается векторное поле скорости, то изменчивость этого поля в окрестности фиксированной точки характеризуется девятью значениями производных; причем, если их объединить в таблицу (матрицу), то можно доказать, что эта совокупность образует *тензор* (см. п. 1.3):

$$\text{Grad } \mathbf{u} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Этот тензор называют *градиентом скорости*. Надо обратить внимание на то, что матрица $\text{Grad } \mathbf{u}$ несимметрична. Если составить матрицу

$$\text{Grad}^* \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

то такая матрица называется сопряженной с матрицей $\text{Grad } \mathbf{u}$. Если тензор симметричный, то $\text{Grad } \mathbf{u} = \text{Grad}^* \mathbf{u}$.

Тензор $\dot{\mathbf{A}}$ называется *антисимметричным*, если

$$\dot{\mathbf{A}}^* = -\dot{\mathbf{A}}. \quad (3.40)$$

Общий вид антисимметричного тензора

$$\dot{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Для анализа характера движения элементарного объема удобнее пользоваться тензором $\text{Grad } \mathbf{u}$, разлагая этот тензор на симметричную и

антисимметричную части и представляя его в виде

$$\text{Grad } \mathbf{u} = \dot{\mathbf{S}} + \dot{\mathbf{A}}.$$

Симметричная часть $\dot{\mathbf{S}}$ тензора $\text{Grad } \mathbf{u}$ называется *тензором скорости деформации*. Легко непосредственными вычислениями проверить, что симметричная $\dot{\mathbf{S}}$ и антисимметричная $\dot{\mathbf{A}}$ части тензора определяются по формулам:

$$\dot{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}(\text{Grad } \mathbf{u} + \text{Grad}^* \mathbf{u}); \quad \dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}(\text{Grad } \mathbf{u} - \text{Grad}^* \mathbf{u}). \quad (3.42)$$

Вычислим тензоры $\dot{\mathbf{S}}$ и $\dot{\mathbf{A}}$:

$$\dot{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

$$\dot{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Анализируя в дальнейшем перемещение и деформацию некоторого объема жидкости в пространстве, для удобства графического изображения будем рассматривать это явление в плоскости (xOy), т.е. считать, что $u_z = 0$ и $\partial u_x / \partial z = \partial u_y / \partial z = 0$, другими словами, рассматривать плоское движение объема. Очевидно, при этом будут отличны от нуля только те компоненты $\dot{\mathbf{S}}$ и $\dot{\mathbf{A}}$, которые находятся внутри штриховых прямоугольников в (3.43) и (3.44). Кроме того, в плоскости (xOy) для большей наглядности будем рассматривать перемещение и деформацию жидкости (сплошной среды), заключенной в начальный момент времени внутри квадрата $abcd$ (рис. 3.12—3.15).

Для упрощения анализа выберем такую подвижную систему декартовых координат (x, y, z), чтобы скорость $\mathbf{u}$ в точке a была равна нулю. При этом смещения и скорости точек, принадлежащих отрезкам ab , bc , cd и ad , относительно точки a можно рассматривать как абсолютные.

Отметим, что перемещение (поворот) ребра ab за время Δt относительно вершины a обусловлен изменением скорости u_x вдоль оси y , т.е. производной $\frac{\partial u_x}{\partial y}$, которая является недиагональной составляющей тензора

$\text{Grad } \mathbf{u}$; аналогично $\frac{\partial u_y}{\partial x}$ обуславливает поворот ребра ad . Выделив сим-

метричную $\dot{\mathbf{S}}$ и антисимметричную $\dot{\mathbf{A}}$ части тензора $\text{Grad } \mathbf{u}$, считаем, что перемещения ребер ab и ad обуславливают составляющие тензоров $\dot{\mathbf{S}}$ и $\dot{\mathbf{A}}$, расположенные в ячейках их матриц, соответствующих ячейкам матрицы $\text{Grad } \mathbf{u}$, в которых находятся

$\frac{\partial u_x}{\partial y}$ и $\frac{\partial u_y}{\partial x}$. Таким образом, поворот ab обусловлен составляющими

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right),$$

а поворот ad — составляющими

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

тензоров $\dot{\mathbf{S}}$ и $\dot{\mathbf{A}}$ соответственно.

Дополнительно упростим последующий анализ, рассматривая несжимаемую жидкость; в этом случае при различных перемещениях ребер площадь квадрата $abcd$, характеризующая объем жидкого элемента, будет оставаться постоянной.

Рассмотрим вклад отдельных составляющих тензоров $\dot{\mathbf{S}}$ и $\dot{\mathbf{A}}$ в перемещение за время Δt жидкого объема, ограниченного квадратом $abcd$.

1. Деформация растяжения—сжатия (линейная деформация). Пусть только диагональные составляющие тензора $\dot{\mathbf{S}}$ отличны от нуля, причем

$\frac{\partial u_x}{\partial x} < 0$, $\frac{\partial u_y}{\partial y} > 0$ (рис. 3.12). В этом случае скорость всех точек ребра bc

будет положительна, и оно переместится на расстояние $\frac{\partial u_y}{\partial y} ab \Delta t$, оставаясь параллельным оси x . Ребро cd переместится в отрицательном направлении оси x на расстояние $\frac{\partial u_x}{\partial x} ad \Delta t$, следовательно, наличие ненулевых $\frac{\partial u_x}{\partial x} < 0$ и $\frac{\partial u_y}{\partial y} > 0$ показывает, что квадрат $abcd$ будет растягиваться в направлении оси y и сжиматься в направлении оси x . Таким образом, диагональные составляющие $\dot{\mathbf{S}}$ обуславливают изменение линейных размеров движущегося объема.

2. Вращение (поворот без растяжения—сжатия: $\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$).

Пусть $\frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{\partial u_y}{\partial x}$, при этом все составляющие тензора $\dot{\mathbf{S}}$ равны нулю, и перемещение обусловлено только недиагональными составляющими $\dot{\mathbf{A}}$ (рис. 3.13). Вершина b за время Δt переместится

в положительном $\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} > 0 \right)$ направлении оси x на расстояние

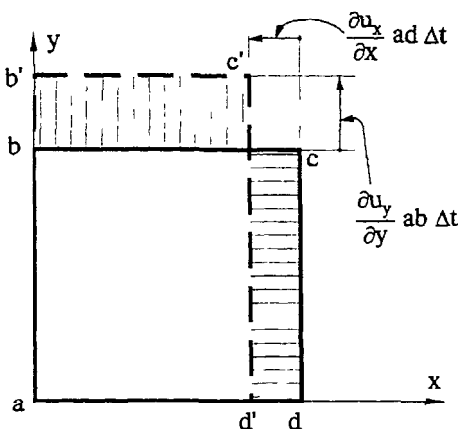


Рис. 3.12. Линейная деформация квадрата

$bb' = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) ab \cdot \Delta t = \frac{\partial u_x}{\partial y} ab \cdot \Delta t$, а вершина d переместится на такое

же расстояние в отрицательном $\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} < 0 \right)$ направлении оси y:

$dd' = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) ad \cdot \Delta t = \frac{\partial u_y}{\partial x} ad \cdot \Delta t$. Очевидно, при этом квадрат abcd,

не деформируясь, повернется вокруг полюса a с угловой скоростью, равной

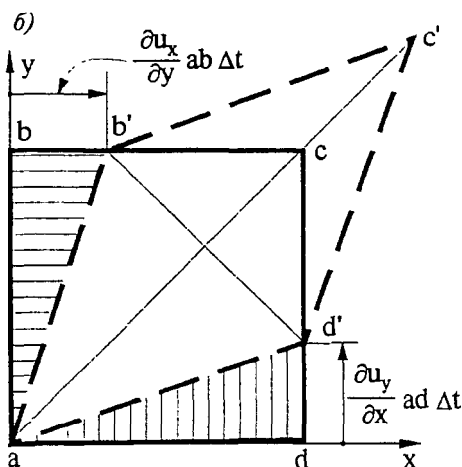
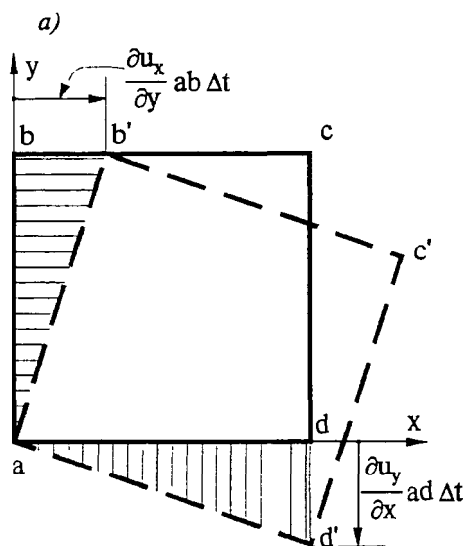


Рис. 3.13. Вращение (а) и угловая деформация (б) квадрата

угловой скорости, например, ребра ab. Пренебрегая малыми величинами, имеющими порядок второй и более высоких степеней длины ребра ab, найдем угловую скорость вращения квадрата abcd. Линейная скорость точки b равна $bb'/\Delta t$, а угловая скорость вращения ребра ab равна отношению линейной скорости точки b к расстоянию от этой точки до полюса a; следовательно,

$$\omega_z = \frac{-(bb'/\Delta t)}{ab} = \frac{-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) ab}{ab} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right).$$

Отрицательное значение ω_z и знак минус перед линейной скоростью точки b объясняются тем, что вращение abcd происходит по часовой стрелке.

Таким образом, составляющие тензора $\hat{A}$ обуславливают вращение без деформации элементарного квадрата abcd с угловой скоростью ω_z ; индекс z показывает, что ось вращения параллельна координатной оси z.

3. Угловая деформация (без растяжения—сжатия $\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$). Рассмотрим частный случай, когда $\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial x} > 0$ (рис. 3.13, б). При этом

вершины b и d перемещаются за время Δt в положительных направлениях осей x и y соответственно на одинаковое расстояние

$$bb' = dd' = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) ab \cdot \Delta t = \frac{\partial u_x}{\partial y} ab \cdot \Delta t = \frac{\partial u_y}{\partial x} ad \cdot \Delta t,$$

а ребра повернутся на один и тот же угол. При этом квадрат превратится в ромб, так как вследствие малости размеров квадрата $abcd$ можно считать, что ребра bc , cd поворачиваются на тот же угол, что и ребра ab и ad . Диагонали ромба при этом остаются параллельными диагоналям квадрата, т.е. квадрат деформируется не поворачиваясь, без вращения. Заметим, что составляющая антисимметричного тензора $\dot{A}$, стоящая на том же месте, что и составляющая $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$ в матрице $\dot{S}$, в этом случае равна нулю; это подтверждает, что вращение $abcd$ обусловлено составляющими тензора $\dot{A}$.

4. Чистый сдвиг (без растяжения—сжатия: $\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$). Рассмотрим следующий частный случай, когда $\frac{\partial u_x}{\partial y} > 0$, $\frac{\partial u_y}{\partial x} = 0$ (рис. 3.14). При чистом сдвиге перемещение $abcd$ в положение $ab''c''d$ представля-

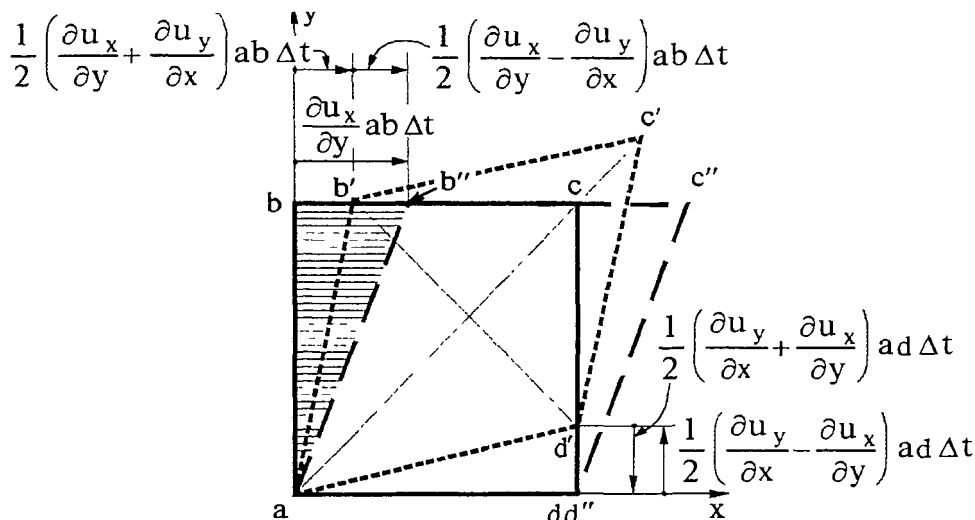


Рис. 3.14. Чистый сдвиг квадрата

ется в виде суммы: 1) угловой деформации за счет составляющей $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial y}$ тензора $\dot{S}$, при которой, как было показано выше, квадрат $abcd$ превращается в ромб $ab'c'd'$; 2) поворота ребер ab' и ad' за счет составляющих $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$ и $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$ антисимметричного тензора $\dot{A}$. Очевидно, что эти составляющие в данном случае приведут к перемещению точки b в положительном направлении оси x , а точки d — в отри-

цательном направлении оси y ; при этом длины отрезков bb' , $b'b''$, dd' и $d'd''$ оказываются равными между собой, а точка d'' совпадает с точкой d .

Легко показать, что угловая скорость вращения ромба $ab'c'd'$ равна

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right).$$

5. Деформация и вращение объема жидкости (без растяжения—сжа-

тия: $\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$). Эти случаи легко разобрать по рис. 3.15, а и б.

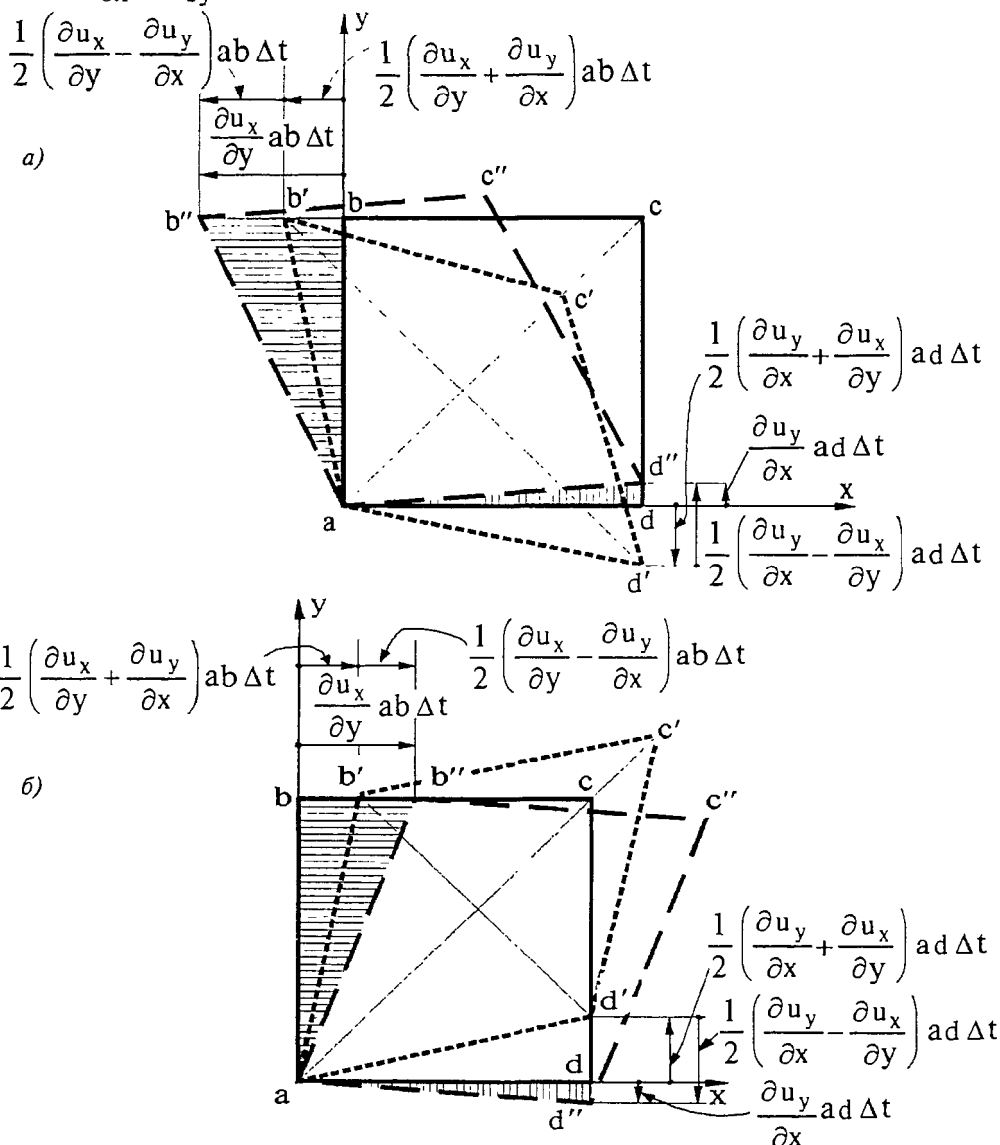


Рис. 3.15. Угловая деформация и вращение квадрата:

$$a - \frac{\partial u_x}{\partial y} < 0, \frac{\partial u_y}{\partial x} > 0; \quad б - \frac{\partial u_x}{\partial y} > 0, \frac{\partial u_y}{\partial x} < 0$$

6. Общий случай. Если не равны нулю все производные скорости по координатам, то на перемещение, изображенное на рис. 3.15, а и б, следует наложить деформацию растяжения—сжатия, в результате чего ромб превратится в параллелограмм.

Таким образом, в общем случае любое перемещение элементарного объема за бесконечно малый промежуток времени можно представить в виде следующей суммы: 1) *поступательного* движения со скоростью $\mathbf{u}$ некоторой выделенной точки объема (в нашем случае это точка а), называемой *полюсом*; 2) *деформационного* движения этого объема вследствие такой неоднородности поля скорости $\mathbf{u}$, которая обуславливает ненулевые значения симметричной части $\hat{S}$ тензора $\text{Grad } \mathbf{u}$. При этом диагональные составляющие $\hat{S}$ обуславливают деформацию вида растяжения—сжатия (линейную деформацию), а недиагональные — угловую деформацию (перекашивание), в результате которой, например, квадрат превращается в ромб; 3) *вращательного* движения этого деформированного объема, как твердого тела, вокруг полюса с угловой скоростью, определяемой составляющими антисимметричной части тензора $\hat{A}$.

Изложенное выше представление перемещения элементарного объема жидкости составляет содержание теоремы Гельмгольца.

Примечания: 1. Проводя аналогию с механикой твердого недеформируемого тела, можно отметить, что при движении элементарного объема жидкости можно выделить два вида движения, которые уже изучались в курсе теоретической механики, — поступательное движение твердого тела со скоростью полюса и вращение его вокруг полюса. В случае жидкости дополнительным видом движения является деформационное.

Поэтому иногда подразделяют движение элементарного объема жидкости на *квазитвердое* (поступательное и вращательное) и *деформационное*.

2. Из шести составляющих тензора $\hat{A}$, описывающего вращение жидкого объема вокруг полюса, только три отличаются друг от друга по абсолютной величине. Каждая из них определяет значение угловой скорости вращения вокруг оси, параллельной координатной оси, наименование которой не входит в индексы, принадлежащие составляющей $\hat{A}$. Например, как было показано выше,

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right).$$

Эти угловые скорости $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ можно рассматривать как проекции на соответствующие координатные оси вектора $\underline{\omega}$, определяющего угловую скорость вращения элементарного объема жидкости при его перемещении в трехмерном пространстве:

$$\underline{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right), \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right]. \quad (3.45)$$

3. В векторном анализе вместо $\underline{\omega}$ рассматривают вектор $2\underline{\omega}$, который обозначают $\text{rot } \mathbf{u}$ и называют *вихрем вектора $\mathbf{u}$* (или *вихрем скорости*):

$$\text{rot } \mathbf{u} = \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right]. \quad (3.46)$$

4. Следует обратить внимание, что выше рассматривалось лишь перемещение объема за бесконечно малые интервалы времени Δt . Если рассматривать конечные интервалы времени, то, например, после поворота с угловой скоростью $\underline{\omega}$ за время Δt элементарный объем жидкости займет другие точки в поле скорости, и за следующий отрезок времени его угловая скорость может измениться. В результате даже при наличии во всех точках скорости $\underline{\omega} \neq 0$ и $\text{rot } \mathbf{u} \neq 0$ (такие поля называются вихревыми) может оказаться, что при перемещении на конечные расстояния элементарного объема жидкости поворот его вокруг полюса не будет восприниматься как вращение в обычном смысле. Например, при сдвиговом течении, представленном на рис. 3.16 с полем скорости $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{u}{H} z, 0, 0 \right)$, имеем, что только $\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{u}{H} \neq 0$, а все остальные составляющие тензора $\text{Grad } \mathbf{u}$ равны нулю. Очевидно, что при пе-

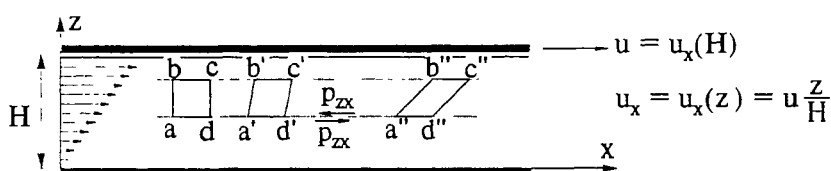


Рис. 3.16. Сдвиговое продольно-однородное течение (течение Куэтта)

ремещении объема $abcd$ на большое расстояние поворот его вокруг a не воспринимается как вращение, хотя мгновенная угловая скорость этого объема

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{u}{2H} \neq 0.$$

3.7. Субстанциальная производная

В гидромеханике для того, чтобы использовать общие законы механики, необходимо иметь выражения, которые определяют изменение во

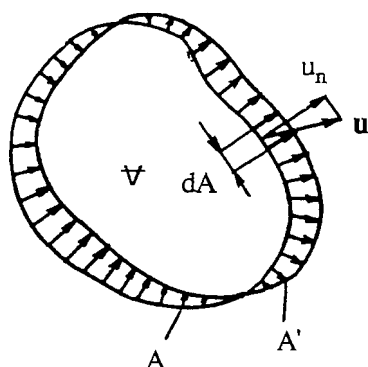


Рис. 3.17. Перемещение жидкости, содержащейся в момент t внутри контрольной поверхности A ; для простоты показано перемещение плоского произвольного объема единичной толщины; объем $(V' - V)$ покрыт стрелками

времени механических величин, относящихся к выделенному движущемуся объему жидкости произвольной формы. Найдем выражение для определения указанного изменения в случае, когда используется эйлеров подход к описанию движения жидкости. Как было отмечено, эйлеров подход используется при решении подавляющего большинства задач гидромеханики.

Выделим в момент t в пространстве контрольный объем V , ограниченный контрольной поверхностью A ; в момент $t + \Delta t$ жидкость, содержащаяся в этом объеме, переместится в пространстве и займет объем V' (рис. 3.17). Пусть нас интересует какая-либо определенная гидромеханическая величина B , которая име-

ет плотность распределения β , зависящую в общем случае от координат и от времени, т.е. $\beta = \beta(\mathbf{r}, t)$. Это может быть скаляр (например, плотность жидкости), вектор (скорость жидкости, плотность распределения количества движения) или даже тензор; ход рассуждений будет один и тот же. Рассмотрим производную по времени от указанной величины, относящейся ко всему объему $\mathcal{V}$, т.е. от $B = \int_{\mathcal{V}} \beta d\mathcal{V}$, при перемещении содержащейся

внутри него жидкости в пространстве, имея в виду, что β является эйлеровой переменной. Эта производная называется *субстанциальной* производной и обозначается через D/Dt :

$$\frac{DB}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \beta(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{V}}} \frac{\int_{\mathcal{V}'} \beta(\mathbf{r}, t + \Delta t) d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}} \beta(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V}}{\Delta t}. \quad (3.47)$$

Преобразуем тождественно правую часть равенства, прибавив и отняв в числителе $\int_{\mathcal{V}'} \beta(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V}$, получим

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{V}}} \frac{\int_{\mathcal{V}'} \beta(\mathbf{r}, t + \Delta t) d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}'} \beta(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V}}{\Delta t} + \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{V}}} \frac{\int_{\mathcal{V}'} \beta(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}} \beta(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V}}{\Delta t}.$$

В первом пределе интегралы вычисляются по одному и тому же объему $\mathcal{V}'$, изменяется только одна переменная — время t , следовательно, он представляет собой частную производную по времени от интеграла по объему $\mathcal{V}'$, так как при $\Delta t \rightarrow 0$ и $\mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{V}$. Во втором пределе интегралы вычисляются в один и тот же момент времени t , но по различным объемам $\mathcal{V}'$ и $\mathcal{V}$, поэтому числитель можно представить в виде одного интеграла, вычисляемого по разностям этих объемов $(\mathcal{V}' - \mathcal{V})$. В результате имеем

$$\frac{DB}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \beta(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} + \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{V}}} \frac{\int_{(\mathcal{V}' - \mathcal{V})} \beta(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V}}{\Delta t}. \quad (3.48)$$

Интеграл $\int_{(\mathcal{V}' - \mathcal{V})} \beta(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V}$ представляет собой “количество” величины

В в объеме $(\mathcal{V}' - \mathcal{V})$ (см. рис. 3.17); это “количество” проносится за время Δt при движении жидкости через поверхность A , и его можно рассчитать следующим образом. Разделим контрольную поверхность A на элементарные площадки dA и построим на каждой dA , как на основании, прямоугольные призмы, ограниченные сверху поверхностью A' (рис. 3.18). Очевидно, совокупность всех этих призм образует объем $(\mathcal{V}' - \mathcal{V})$. Высота каждой призмы равна расстоянию, на которое за время Δt поверхность A' удалилась от A , а так как A' переносится за счет движения жидкости со скоростью $\mathbf{u}$, то из геометрических построений, приведенных на рис. 3.18,

найдем значение высоты как $(u_n \cdot \Delta t)$. Объем элементарной призмы равен $(u_n \cdot \Delta t) dA$, а количество характеристики В внутри этой призмы вследствие элементарности ее объема представим в виде $\beta(u_n \cdot \Delta t) dA$. Так как

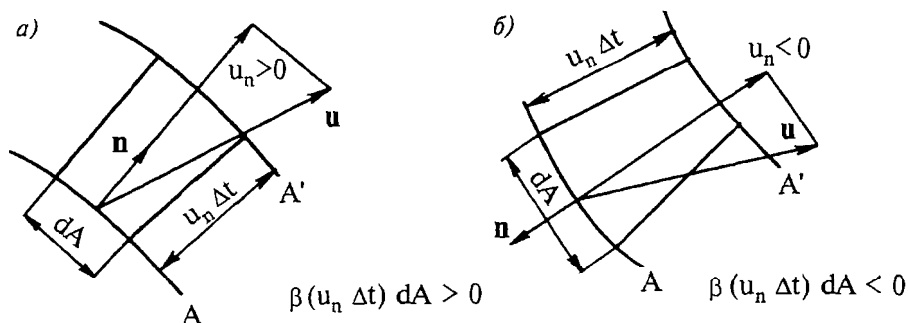


Рис. 3.18. Элементарная часть объема $(\mathcal{V}' - \mathcal{V})$ в виде призмы с основанием dA и высотой $u_n \Delta t$

рассматриваемый интеграл выражает изменение характеристики В в результате протекания жидкости сквозь контрольную поверхность А, то на той части А, где скорость жидкости направлена из контрольного объема (рис. 3.18,а), поток жидкости вносит характеристику В в объем $(\mathcal{V}' - \mathcal{V})$; при этом $\beta(u_n \Delta t) dA > 0$. На той части А, где u направлена внутрь объема $\mathcal{V}'$ (рис. 3.18,б), поток жидкости выносит характеристику В из объема $(\mathcal{V}' - \mathcal{V})$, и при этом $\beta(u_n \Delta t) dA < 0$. Поэтому, рассматривая выражение количества В в элементарной призме в виде

$$\beta u_n \Delta t \cdot dA,$$

следует учитывать знак u_n на каждом элементе поверхности dA .

Количество характеристики В в объеме $(\mathcal{V}' - \mathcal{V})$ найдем, просуммировав количества этой характеристики во всех построенных элементарных призмах:

$$\int_{(\mathcal{V}' - \mathcal{V})} \beta(r, t) d\mathcal{V} = \int_A \beta u_n \Delta t \cdot dA. \quad (3.49)$$

Подставив это равенство в оставшийся невычисленным предел (3.48), имеем

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{V}}} \frac{\int_{(\mathcal{V}' - \mathcal{V})} \beta(r, t) d\mathcal{V}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_A [\beta u_n \cdot dA] \cdot \Delta t}{\Delta t} = \int_A \beta u_n \cdot dA. \quad (3.50)$$

Подставив (3.50) в (3.48), получим основное выражение для *субстанциональной* производной:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \beta(r, t) d\mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \beta(r, t) d\mathcal{V} + \int_A \beta u_n dA. \quad (3.51)$$

Первый интеграл в правой части выражает изменение гидродинамической величины В, относящейся к объему $\mathcal{V}$, связанное с изменением

во времени величины $\beta(\mathbf{r}, t)$ в каждой точке внутри объема ∇ , и потому его называют *локальной* составляющей субстанциальной производной. Второй интеграл выражает изменение во времени этой же величины β , связанное с перемещением в пространстве (переносом, конвекцией) жидкости, содержащейся в момент t внутри контрольной поверхности A , и его называют *конвективной* составляющей субстанциальной производной.

Воспользуемся для вычисления поверхностного интеграла, который выражает конвективную составляющую субстанциальной производной, формулой Остроградского—Гаусса в форме

$$\int_A \beta u_n dA = \int_{\nabla} [(\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \beta + \beta \text{div} \mathbf{u}] dV. \quad (3.52)$$

Подставляя (3.52) в (3.51), получаем

$$\frac{D}{Dt} \int_{\nabla} \beta dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\nabla} \beta dV + \int_{\nabla} [(\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \beta + \beta \text{div} \mathbf{u}] dV \quad (3.53)$$

или

$$\frac{D}{Dt} \int_{\nabla} \beta dV = \int_{\nabla} \left[\frac{\partial \beta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \beta \right] dV + \int_{\nabla} \beta \text{div} \mathbf{u} dV. \quad (3.54)$$

Первый интеграл в правой части (3.54) определяет вклад в субстанциальную производную от величины $\int_{\nabla} \beta dV$, обусловленный изменением величины β . Это, с одной стороны, локальное изменение, т.е. изменение во времени этой величины в фиксированной точке пространства $\left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right)$, а с

другой стороны, изменение β в связи с наличием переноса (конвекции), так как выражение $(\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \beta$ появилось из интеграла (3.50), определяющего конвективную составляющую субстанциальной производной от β .

Второй интеграл в (3.54) выражает вклад в субстанциальную производную, обусловленный изменением в пространстве поля скорости $\mathbf{u}$, а не самой величины β .

Вышеизложенное позволило назвать подынтегральное выражение в первом интеграле правой части (3.54) субстанциальной производной плотности распределения β и обозначить

$$\frac{D\beta}{Dt} = \frac{\partial \beta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \beta \quad (3.55)$$

или

$$\frac{D\beta}{Dt} = \frac{\partial \beta}{\partial t} + u_x \frac{\partial \beta}{\partial x} + u_y \frac{\partial \beta}{\partial y} + u_z \frac{\partial \beta}{\partial z}. \quad (3.55)$$

Здесь, как и в выражении (3.50), субстанциальная производная представляется в виде суммы локальной составляющей $\frac{\partial \beta}{\partial t}$, обусловленной из-

менением во времени гидродинамической характеристики B в фиксированных точках пространства, и конвективной составляющей $(\mathbf{u} \cdot \text{grad})\beta$, обусловленной изменением β вследствие переноса (конвекции) гидродинамической характеристики движущейся жидкостью (субстанцией).

Покажем в качестве пояснения выражения (3.55), как в эйлеровых переменных выражается ускорение выделенной движущейся жидкой частицы (это ускорение является лагранжевой характеристикой потока). Пусть в момент времени t положение в пространстве элементарного объема ΔV определяется тремя координатами $\mathbf{r} = (x, y, z)$, а скорость его равна $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — эйлерова характеристика. Через малый промежуток времени Δt этот объем, переместившись в пространстве по некоторой траек-

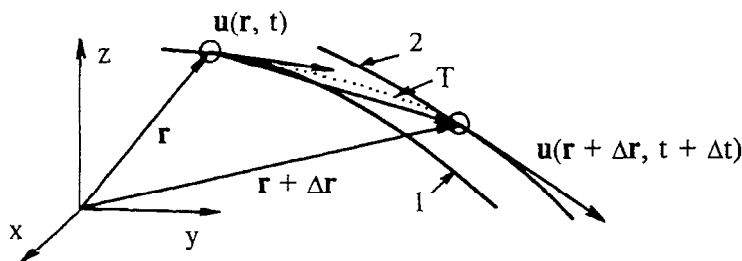


Рис. 3.19. Ускорение жидкой частицы: T — траектория, 1 и 2 — линии тока в моменты t и $t + \Delta t$ соответственно

тории (рис. 3.19), займет положение, определяемое координатами $\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r} = (x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, при этом скорость его станет равной $\mathbf{u} = (\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t + \Delta t)$ — тоже эйлерова характеристика. Ускорение этого объема $\mathbf{a}$ равно

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t + \Delta t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\Delta t}. \quad (3.56)$$

Здесь следует указать:

приращение $\Delta \mathbf{r}$ — это вектор, определяющий перемещение жидкого объема, т.е. лагранжева характеристика (а не просто приращение независимой переменной $\mathbf{r}$);

если $\Delta t \rightarrow 0$, то величины Δx , Δy и Δz также стремятся к нулю; при этом

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = u_x; \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = u_y; \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = u_z. \quad (3.57)$$

Преобразуем производную по времени (3.56) так, чтобы выразить ее через частные производные по времени и по пространству:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t + \Delta t) - \mathbf{u}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t + \Delta t) - \mathbf{u}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t)}{\Delta t} + \\ &+ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t) - \mathbf{u}(x, y + \Delta y, z + \Delta z, t)}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y, z + \Delta z, t) - u(x, y, z + \Delta z, t)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \\
& + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(x, y, z + \Delta z, t) - u(x, y, z, t)}{\Delta z} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \\
& = \frac{\partial u}{\partial t} + u_x \frac{\partial u}{\partial x} + u_y \frac{\partial u}{\partial y} + u_z \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \mathbf{u}.
\end{aligned}$$

Таким образом, получено, что *ускорение жидкой частицы* в эйлеровых переменных представляет собой субстанциальную производную от скорости

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + u_x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}. \quad (3.58)$$

Оно имеет локальную $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ и конвективную $(\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \mathbf{u}$ составляющие. Как было отмечено в п.3, ускорение жидкой частицы и при установившемся движении (когда поле скорости неизменно во времени) может быть отлично от нуля за счет конвективной составляющей.

3.8. Потенциал скорости и функция тока при плоском безвихревом движении

При *безвихревом* движении, когда все составляющие вектора $\text{rot } \mathbf{u}$ равны нулю, можно для односвязной области ввести *потенциал* скорости, т.е. такую функцию координат и времени $\varphi(x, y, z, t)$, что $\mathbf{u} = \text{grad } \varphi$ или

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (3.59)$$

Легко проверить непосредственной подстановкой (3.59) в (3.46), что справедливо и обратное положение: если существует функция $\varphi(x, y, z, t)$, определяющая скорость согласно (3.59), то $\text{rot } \mathbf{u} = 0$. Если удастся ввести $\varphi(x, y, z, t)$, то исследование поля скорости существенно упрощается, так как вместо трех функций u_x , u_y и u_z достаточно определить одну функцию φ , а потом найти проекции скорости простым дифференцированием. Движение жидкости, для которого можно ввести потенциал скорости, называется *потенциальным*.

Подставим выражения для проекций скорости (3.59) в уравнение несжимаемости (3.22), получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.60)$$

Следовательно, в случае несжимаемой жидкости функция потенциала скорости должна удовлетворять уравнению Лапласа (другими словами, являться гармонической функцией).

Если скорость жидкости имеет две ненулевые составляющие $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$, которые зависят от двух переменных x, y , то можно рассматривать плоскую задачу механики жидкости; при этом уравнение несжимаемости имеет вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0. \quad (3.61)$$

Из этого уравнения следует, что всегда существует такая функция $\psi(x, y)$, что

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (3.62)$$

так как при подстановке (3.62) в (3.61) последнее обращается в правильное тождество. Если подставить (3.62) в уравнение линии тока (3.6), которое для плоской задачи имеет вид

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} \quad \text{или} \quad u_y dx - u_x dy = 0, \quad (3.63)$$

то получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0, \quad \text{или} \quad d\psi = 0, \quad (3.64)$$

откуда следует, что на линии тока имеет место равенство

$$\psi(x, y) = \text{const}. \quad (3.65)$$

Вследствие этого функция $\psi(x, y)$, определяемая равенствами (3.62), называется *функцией тока*.

Сравнивая (3.62) с выражением проекций скорости через потенциал ϕ в случае плоской задачи

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad (3.66)$$

получаем

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.67)$$

Подставив (3.66) в уравнение несжимаемости, записанное для условий плоской задачи в виде

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \quad (3.68)$$

найдем, что в этих условиях потенциал скорости $\phi(x, y, t)$ должен удовлетворять двумерному уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{или} \quad \Delta \phi = 0. \quad (3.69)$$

Как уже отмечалось, если движение потенциальное, то вектор вихря скорости равен нулю, что доказывается подстановкой выражения проекций скорости через потенциал ϕ в выражение проекций вектора $\text{rot } \mathbf{u}$ (3.46). В случае плоской задачи ненулевой может быть только проекция $\text{rot } \mathbf{u}$ на

ось z , так как в остальные проекции входит либо u_z , либо производная по z , которые в этом случае равны нулю.

Подставляя (3.66) в выражение

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{u} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad (3.70)$$

убедимся, что оно равно нулю. Если в это же выражение подставить (3.62), то найдем, что

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}.$$

Таким образом, если движение жидкости безвихревое, то

$$\Delta \psi = 0. \quad (3.71)$$

Следовательно, при безвихревом (потенциальном) плоском движении жидкости функция тока (как и потенциал скорости) является гармонической функцией.

Равенства (3.67) представляют собой известные из теории функций комплексного переменного условия Коши—Римана. Если функцию комплексного переменного $\xi = x + yi$ представить в виде комплексной функции двух вещественных переменных x и y

$$f(\xi) = f_1(x, y) + if_2(x, y), \quad (3.72)$$

то производные вещественных функций f_1 и f_2 должны быть связаны между собой так же, как производные φ и ψ согласно (3.67).

Указанные выше свойства потенциала скорости и функции тока обусловили эффективное использование теории функций комплексного переменного при решении плоской задачи механики жидкости. В частности, если задать произвольную функцию комплексного переменного (например, $f(\xi) = a\xi^2 + b$ или $f(\xi) = \operatorname{Log} \xi$ и т.п.), то, выделяя функции $f_1(x, y)$ или $f_2(x, y)$ согласно (3.72), можно считать, что $f_1(x, y)$ — это потенциал скорости, а $f_2(x, y)$ — функция тока:

$$\varphi(x, y) \equiv f_1(x, y), \quad \psi(x, y) \equiv f_2(x, y). \quad (3.73)$$

Поле скорости в плоскости течения и его общий вид определяются как путем непосредственного вычисления значений проекций скорости по формулам (3.62) или (3.66), так и построением линий тока на основе равенства (3.65). Надо отметить, что заранее при задании функции $f(\xi)$ неизвестно, какое течение описывают функции f_1 и f_2 . Однако вследствие линейности оператора Лапласа Δ можно использовать принцип суперпозиции и, суммируя потенциалы, описывающие простейшие течения, которые определяются элементарными функциями, получить возможность описывать более сложное течение, характер которого в значительной мере уже можно предсказать.

ОСНОВЫ ГИДРОДИНАМИКИ

4.1. Предварительные сведения

Задачи гидродинамики можно подразделить на два основных класса.

1. *Внешние задачи* — задачи об обтекании тела потоками жидкости или газа или о движении тела в жидкой или газообразной средах. К этому классу относятся, например, задачи, связанные:

с полетом самолетов, вертолетов, артиллерийских снарядов в атмосфере;

с движением подводных и надводных судов в реках, морях и океанах;

с определением нагрузки от ветра на здания и сооружения.

2. *Внутренние задачи* — задачи о движении жидкости в каналах. К этому классу относятся, например, задачи, связанные:

с течением жидкостей в трубопроводах (водопроводные сети, газо- и нефтепроводы, кровеносные системы, системы тепло- и газоснабжения и т.п.);

с течением воды в реках (регулирование расхода воды рек, расчет паводков, транспорт наносов и т.п.);

с течением воды в открытых каналах (осушительные и оросительные системы, переброска речного стока, судопропускные сооружения и т.п.).

Встречаются задачи, имеющие характерные особенности обоих классов (например, задача о потоке воды в турбине, которая включает как задачу об обтекании потоком лопаток рабочего колеса, так и задачу о течении жидкости внутри области, ограниченной твердыми стенками).

При решении внешней задачи основной акцент делается на определение силового взаимодействия потока и тела. Определение силы, действующей на тело со стороны набегающего потока, или силы сопротивления движению тела в жидкости является главной целью при решении таких задач. Поэтому при анализе и решении внешней задачи, как правило, используются уравнения, выражающие закон изменения количества движения: дифференциальные уравнения Навье—Стокса или Рейнольдса, интегральные формы этого закона.

При решении внутренней задачи чаще всего центральным является вопрос о потерях энергии в потоке жидкости. Поэтому здесь используются уравнения, выражающие закон изменения кинетической энергии, чаще всего в виде различных форм уравнения Бернулли.

В основу гидродинамики как раздела гидромеханики положены четыре основных закона механики: закон сохранения массы, закон изменения количества движения (импульса), закон изменения момента количества движения, закон изменения кинетической энергии.

Эти законы формулируются для объемов жидкости конечных размеров, так как при этом все слагаемые, входящие в соответствующие уравнения, имеют ясное механическое содержание. При решении многих практических задач из области техники уравнения, записанные для объемов конечных размеров, могут быть существенно упрощены, если учесть кон-

кретные особенности условий на поверхностях, ограничивающих указанные объемы, свойства приложенных к объему поверхностных и массовых сил, а также практически необходимую степень детализации искомых решений. Эти упрощенные уравнения, которые обычно называют гидравлическими, образуют основу технической механики жидкости; они эффективны при решении многих практически важных задач, относящихся к инженерно-строительному (энергетическому, водно-транспортному, мелиоративному), химико-технологическому, металлургическому и машиностроительному направлениям, когда представляют интерес главным образом интегральные (осредненные по времени и пространству) гидромеханические характеристики потоков.

Если же при решении задач необходимо уметь определять гидромеханические величины в каждой точке объема жидкости, то следует в этих же уравнениях для конечных объемов совершить предельный переход, потребовав, чтобы объем жидкости стал произвольно мал. При этом получают дифференциальные уравнения, отражающие те же законы механики, но относящиеся к «точке» сплошной среды. Решая эти уравнения, дополненные каким-либо реологическим законом, можно выяснить структуру поля скорости и напряженное состояние в любой точке потока жидкости.

В процессе практического использования уравнений в соответствии с каждым из указанных подходов слагаемые, входящие в эти уравнения, преобразуются с помощью теоремы Остроградского—Гаусса. При выводе гидравлических уравнений объемные интегралы заменяются на поверхностные с тем, чтобы использовать особенности условий на поверхностях, ограничивающих поток, для упрощения уравнений, а при выводе дифференциальных уравнений, напротив, поверхностные интегралы заменяются на объемные, чтобы иметь возможность исследовать гидромеханические величины в точках внутри потока, при этом условия на границах потока вводятся как граничные (краевые) условия для дифференциальных уравнений.

4.2. Закон сохранения массы

Выделим в пространстве контрольный объем $\mathcal{V}$, ограниченный произвольной поверхностью A . Пусть плотность жидкости ρ зависит и от времени и от координат, т.е. $\rho = (\mathbf{r}, t) = \rho(x, y, z, t)$.

Масса бесконечно малого объема $d\mathcal{V}$, расположенного в точке с координатами $\mathbf{r} = (x, y, z)$ в момент времени t , равна $\rho(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V}$. Масса объема $\mathcal{V}$ жидкости, находящейся внутри поверхности A , равна

$$M = \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V}. \quad (4.1)$$

Согласно закону сохранения массы при движении рассматриваемого объема $\mathcal{V}$ его масса остается неизменной. Так как изменение во времени гидромеханической величины, относящейся к некоторому определенному движущемуся объему жидкости, выражается в виде субстанциальной производной от этой величины, закон сохранения массы представим в виде

$$\frac{DM}{Dt} \equiv \frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0. \quad (4.2)$$

Из этого уравнения получают и интегральное выражение закона сохранения массы, используемое в одномерных задачах, и дифференциальное уравнение, выражающее закон сохранения массы.

4.3. Закон изменения количества движения

Изменение количества движения тела за единицу времени равно сумме внешних сил, приложенных к телу. Количество движения и силы — это векторы, поэтому уравнение, отражающее этот закон, является векторным, ему соответствует система трех уравнений, связывающих проекции векторов на координатные оси.

Выделим в пространстве контрольный объем жидкости V . Бесконечно малый объем dV имеет массу ρdV и количество движения $\rho \mathbf{u} dV$. Количество движения всего объема $\int_V \rho \mathbf{u} dV$. Изменение количества движения при перемещении этого объема за единицу времени равно

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV. \quad (4.3)$$

Вектор внешних массовых сил, плотность распределения которых обозначим через $\mathbf{f}(x, y, z)$, находим аналогично: на элементарный объем dV массой ρdV действует сила $\mathbf{f} \rho dV$, следовательно, внешняя массовая сила, действующая на весь объем V , равна

$$\int_V \mathbf{f} \rho dV. \quad (4.4)$$

Плотность распределения поверхностной силы (напряжение) на поверхности A обозначим через $\mathbf{p}_n$, учитывая, что $\mathbf{n}$ — нормаль к A ; тогда на элементарную площадку dA действует сила $\mathbf{p}_n dA$, а на всю поверхность действует результирующая поверхностная сила

$$\int_A \mathbf{p}_n dA. \quad (4.5)$$

Приравнявая (4.3) сумме (4.4) и (4.5), получаем уравнение, выражающее закон изменения количества движения

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \int_V \mathbf{f} \rho dV + \int_A \mathbf{p}_n dA. \quad (4.6)$$

Это векторное уравнение равносильно трем скалярным уравнениям, которые можно записать, проектируя все слагаемые на координатные оси x, y, z . Например, в проекции на ось x имеем

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u_x dV = \int_V f_x \rho dV + \int_A p_{nx} dA. \quad (4.7)$$

В механике жидкости уравнение (4.6) используется и в приведенном выше виде, а также в виде системы дифференциальных уравнений, получаемых при стягивании контрольного объема V к точке.

4.4. Закон изменения момента количества движения

Изменение момента количества движения в единицу времени жидкого объема относительно некоторой точки равно сумме моментов всех внешних массовых и поверхностных сил, действующих на этот объем, относительно той же точки. Как известно, момент вектора $\mathbf{a}$ относительно, например, начала координат равен (рис. 4.1)

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{a}, \quad (4.8)$$

где $\mathbf{r}$ — вектор-радиус, определяющий точку приложения вектора $\mathbf{a}$. Символ $(\times)$ означает векторное произведение двух векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{a}$. Вектор $\mathbf{M}_0$ имеет

модуль $|\mathbf{M}_0| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{r}| \cdot \sin(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{a}})$ и на-

правлен по нормали к плоскости, определяемой векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{r}$, так, что, глядя с конца вектора $\mathbf{M}_0$, видим поворот от вектора $\mathbf{r}$ к вектору $\mathbf{a}$ происходящим против часовой стрелки. В матричной форме векторное произведение имеет вид

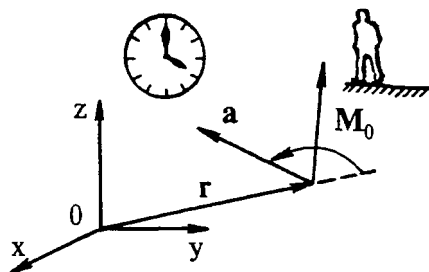


Рис. 4.1. Момент вектора $\mathbf{a}$

$$\mathbf{M}_0 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} y & z \\ a_y & a_z \end{vmatrix} + \mathbf{j} \begin{vmatrix} z & x \\ a_z & a_x \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} x & y \\ a_x & a_y \end{vmatrix}$$

или

$$\mathbf{M}_0 = (M_{0x}, M_{0y}, M_{0z}) = \left(\begin{vmatrix} y & z \\ a_y & a_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & x \\ a_z & a_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & y \\ a_x & a_y \end{vmatrix} \right), \quad (4.9)$$

т.е. проекции вектора $\mathbf{M}_0$ на координатные оси численно равны написанным выше определителям.

Имея это в виду, уравнение, выражающее закон изменения момента количества движения, можно записать по аналогии с уравнением для закона изменения количества движения. Для этого каждый вектор из уравнения (4.6) надо умножить векторно на $\mathbf{r}$ (слева):

$$\frac{D}{Dt} \int_V (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{u}) dV = \int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{f}) \rho dV + \int_A (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_n) dA. \quad (4.10)$$

Это векторное уравнение эквивалентно трем скалярным уравнениям, которые можно выписать, проецируя слагаемые, входящие в уравнение (4.10), на координатные оси. Например, в проекции на ось z имеем

$$\frac{D}{Dt} \int_V (x u_y - y u_x) \rho dV = \int_V (x f_y - y f_x) \rho dV + \int_A (x p_{ny} - y p_{nx}) dA. \quad (4.11)$$

На основе этого уравнения в гл. 14 будет доказана симметричность тензора напряжений. В технической механике жидкости уравнение в форме (4.10) используется главным образом в гидромашиностроении, при расчетах вращающихся рабочих колес турбин и насосов.

4.5. Закон изменения кинетической энергии

Согласно этому закону изменение кинетической энергии выделенного объема жидкости в единицу времени равно мощности всех внешних и внутренних (поверхностных и массовых) сил, действующих на этот объем жидкости. Кинетическая энергия объема $\mathcal{V}$ жидкости равна

$$\int_{\mathcal{V}} \rho(u^2/2) d\mathcal{V}. \quad (4.12)$$

Мощность силы равна скалярному произведению вектора силы и скорости тела, на которое она действует. Например, на элементарный объем $d\mathcal{V}$ действует внешняя массовая сила с плотностью распределения $\mathbf{f}$, величина этой силы $\mathbf{f} \rho d\mathcal{V}$, а если скорость движения объема $d\mathcal{V}$ равна $\mathbf{u}$, то мощность внешней объемной силы равна $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}) \rho d\mathcal{V}$; мощность этой силы при перемещении всего объема $\mathcal{V}$ выражается в виде

$$\int_{\mathcal{V}} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}) \rho d\mathcal{V}. \quad (4.13)$$

Рассуждая аналогично, найдем мощность внешних поверхностных сил, действующих на поверхность A , ограничивающую объем $\mathcal{V}$:

$$\int_A (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n) dA, \quad (4.14)$$

где $\mathbf{u}$ — скорость жидкости на поверхности A в точке, где выделен элемент dA .

Рассчитать работу внутренних сил, как правило, не представляется возможным, так как она зависит от поля скорости внутри контрольного объема, которое неизвестно. Поэтому введем функцию $\Phi(x, y, z, t)$ — плотность распределения мощности внутренних сил, т.е. мощности, которая переходит в тепло и рассеивается (диссипирует) в единице объема жидкости. Очевидно, работа внутренних сил может только уменьшать кинетическую энергию, так как, переходя в энергию беспорядочного теплового движения молекул, соответствующая часть кинетической энергии объема $\mathcal{V}$ уже не участвует в дальнейшем балансе механической энергии. Обычно мощность внутренних сил называют *диссипированной*, а функцию Φ — *диссипативной*. Уменьшение кинетической энергии объема $\mathcal{V}$ за счет работы внутренних сил представим в виде

$$- \int_{\mathcal{V}} \Phi d\mathcal{V}. \quad (4.15)$$

Знак минус вводится, чтобы функция $\Phi(x, y, z, t)$, была всегда положительной.

Приравнявая субстанциальную производную от (4.12) сумме (4.13), (4.14) и (4.15), получаем уравнение, выражающее закон изменения кинетической энергии:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \frac{u^2}{2} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}) \rho d\mathcal{V} + \int_A (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n) dA - \int_{\mathcal{V}} \Phi d\mathcal{V}. \quad (4.16)$$

Когда уравнение (4.16) используют для решения одномерных задач, то его представляют в виде различных форм уравнения Бернулли.

В виде дифференциального уравнения закон изменения кинетической энергии не используется, так как оно эквивалентно дифференциальному уравнению, выражающему закон изменения количества движения.

4.6. Общий закон сохранения энергии для контрольного объема сплошной среды

В дополнение к закону изменения кинетической энергии, выражающему баланс механической энергии, целесообразно рассмотреть более общий случай и принять во внимание как изменение механической энергии за счет ее источников (или стоков), содержащихся внутри контрольного объема, так и баланс внутренней энергии (тепла).

Пусть в контрольном объеме, указанном на рис. 4.2 штриховой линией, установлена турбина, которую вращает набегающий поток, отдавая ей мощность W_i (поток совершает работу W_i в единицу времени). Индекс i означает, что таких устройств, изменяющих механическую энергию потока, может быть несколько. Кроме того, если внутри контрольного объема вместо турбины установлен насос, то соответствующая мощность насоса увеличивает механическую энергию потока, так что знак W_i зависит от функции устройства внутри контрольного объема. При этом уравнение, выражающее баланс механической энергии, имеет вид

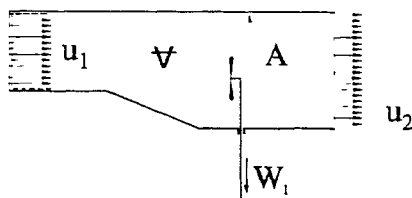


Рис. 4.2. Контрольный объем для формулировки закона сохранения энергии

$$\frac{D}{Dt} \int_V \frac{\rho u^2}{2} dV = \int_V (\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}) \rho dV + \int_A (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n) dA - \int_V \Phi dV + \sum_i W_i. \quad (4.17)$$

Рассмотрим баланс тепла в контрольном объеме. Пусть E — количество внутренней энергии жидкости (теплоты) внутри контрольного объема, а $e(\mathbf{r}, t)$ — плотность ее распределения в пространстве, т.е. удельная (на единицу массы) внутренняя энергия жидкости. Тогда

$$E = \int_V e(\mathbf{r}, t) \rho dV. \quad (4.18)$$

Изменение внутренней энергии жидкости в контрольном объеме имеет место вследствие следующих причин:

наличия внутри объема источников тепла, подводимого извне, с плотностью распределения $\tau(\mathbf{r}, t)$ (на единицу объема в единицу времени);

присутствия на граничных поверхностях источников тепла с плотностью распределения $\sigma(\mathbf{r}, t)$ (на единицу площади в единицу времени);

работы внутренних сил в жидкости, например, за счет вязкости; плотность распределения мощности внутренних сил $\Phi(\mathbf{r}, t)$.

Баланс тепла для жидкости, содержащейся в контрольном объеме в момент времени t , имеет вид

$$\frac{D}{Dt} \int_V e(\mathbf{r}, t) \rho dV = \int_V \tau(\mathbf{r}, t) dV + \int_A \sigma(\mathbf{r}, t) dA + \int_V \Phi(\mathbf{r}, t) dV \quad (4.19)$$

Складывая (4.17) и (4.19), получаем уравнение, выражающее общий закон сохранения энергии для контрольного объема сплошной среды

$$\frac{D}{Dt} \int_V \left(e + \frac{u^2}{2} \right) \rho dV = \int_V (\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}) \rho dV + \int_A (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n) dA + \int_V \tau dV + \int_A \sigma dA + \sum_i W_i \quad (4.20)$$

Как следует из (4.20), работа внутренних сил $\int_V \Phi dV$ не изменяет полную энергию системы жидких частиц: она уменьшает механическую энергию и увеличивает тепловую.

ГЛАВА 5

ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ (В ОДНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ)

5.1. Основные понятия и терминология

Одномерное приближение весьма эффективный способ описания движения жидкости в случае, когда продольные (измеренные вдоль направления движения) размеры потока во много раз превосходят его поперечные размеры, что имеет место главным образом в трубах, реках и каналах.

Важной особенностью потоков в трубах и каналах является то, что неподвижные твердые границы (стенки трубопроводов, дно рек и каналов) составляют значительную часть поверхности, ограничивающей поток. На этих границах скорость жидкости $\mathbf{u}_{\text{гр}} = 0$ (равны нулю и нормальная к границе и касательная к ней составляющие). Благодаря этому на тех границах контрольного объема V , которые совпадают с твердыми границами потока, поверхностные интегралы, входящие в фундаментальные законы гидромеханики (гл. 4) и содержащие скорость $\mathbf{u}$ или ее проекции, обращаются в ноль. Это существенно упрощает получение расчетных зависимостей, основанных на фундаментальных законах.

В достаточно длинных цилиндрических или призматических трубах и каналах формируются потоки жидкости, в которых линии тока параллельны ограничивающим поток твердым границам. Движение жидкости, при котором линии тока представляют собой параллельные прямые, будем называть *равномерным*, или *параллельно-струйным*, или *продольно-однородным*.

При равномерном движении оказывается возможным построить плоское поперечное (ортогональное линиям тока) сечение потока, которое иногда называют *живым сечением*. При этом, в частности, исключается необходимость исследовать поле скоростей и появляется возможность оперировать средними по сечению значениями скорости, рассматривая интегральные характеристики потока в этом сечении.

Это связано с тем, что вектор скорости $\mathbf{u}$ (как и линия тока) перпендикулярен к живому сечению и проекция скорости на нормаль к этому сечению u_n равна модулю скорости:

$$u_n = |\mathbf{u}| = u. \quad (5.1)$$

Кроме того, можно доказать, что при равномерном движении справедливы два следующих утверждения (*леммы*).

1. Нормальное напряжение в каждой точке живого сечения равно гидродинамическому давлению в этой точке со знаком минус (так как положительным считается растягивающее нормальное напряжение):

$$p_{nn} = -p. \quad (5.2)$$

2. Гидродинамическое давление p в живом сечении распределено по гидростатическому закону

$$U - \frac{p}{\rho} = \text{const.} \quad (5.3)$$

Эти два утверждения будут доказаны в гл. 14.

При неравномерном движении жидкости, когда линии тока непараллельны и (или) криволинейны, различают:

плавноизменяющееся движение, при котором можно пренебречь кривизной линий тока и их непараллельностью и с достаточной для практических целей точностью построить плоское живое сечение, допуская, что в этом сечении выполняются условия (5.1), (5.2) и (5.3);

резкоизменяющееся движение, при котором нельзя использовать указанные условия.

Для иллюстрации рассмотрим течение в трубопроводе, представленное на рис. 5.1.

На длинных цилиндрических участках I и VII движение равномерное, линии тока параллельны образующим стенок трубы.

На криволинейном участке III движение резкоизменяющееся, здесь хотя и можно построить плоские живые сечения, но в этих живых сечениях не будут выполнены условия (5.2) и (5.3). В частности, вследствие действия центробежных сил, обусловленных криволинейными линиями тока, давление в плоских живых сечениях не будет распределено по гидростатическому закону (5.3).

На участке V движение резкоизменяющееся; здесь поперечное сечение, ортогональное линиям тока, сильно искривлено, так что даже вычисление его площади является непростой задачей, кроме того, вследствие значительной кривизны линий тока в этих сечениях не выполняются условия (5.2) и (5.3) (см. доказательство этих равенств в гл. 14).

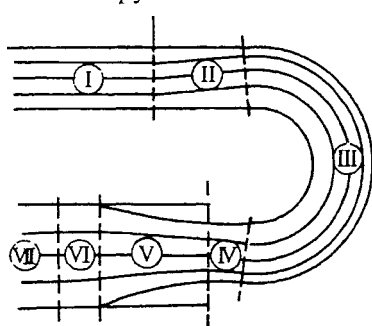


Рис. 5.1. Равномерное, плавноизменяющееся и резкоизменяющееся движение жидкости

На участках II, IV и VI движение неравномерное, но в пределах этих участков можно с достаточной точностью и построить плоское живое сечение, и допустить выполнение равенств (5.2) и (5.3).

В технической механике жидкости потоки разделяют на напорные, безнапорные и струйные. Если поток со всех сторон ограничен твердыми стенками, то он называется *напорным* (например, поток воды в водопроводных трубах). Если только часть потока ограничена твердыми стенками, а на остальной части жидкость граничит с газом (в частности, с атмосферой), то такое движение называется *безнапорным* (например, потоки в реках, каналах). Если же поток не ограничен твердой поверхностью, то он называется *струйным* или просто *струей*. Струя жидкости может быть ограничена той же самой жидкостью (затопленная струя) или газом (струя воды в воздухе).

5.2. Гидравлические характеристики поперечного сечения потока

Для дальнейшего изложения представляют интерес следующие характеристики поперечного (живого) сечения потока.

Смоченный периметр χ — это периметр той части поперечного сечения русла (твердых границ потока), которая смочена движущейся жидкостью (рис. 5.2).

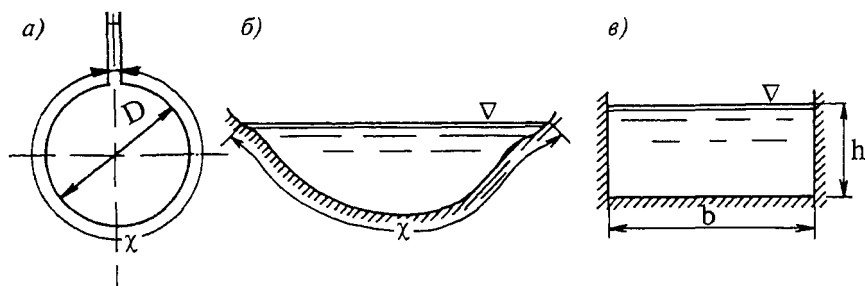


Рис. 5.2. Смоченный периметр живого сечения

Если движение напорное (рис. 5.2,а), то смоченный периметр равен периметру поперечного сечения. Например, в круглой трубе с диаметром D смоченный периметр $\chi = \pi D$.

Гидравлический радиус R — это отношение площади поперечного сечения потока к смоченному периметру:

$$R = \frac{\omega}{\chi}. \quad (5.4)$$

Легко найти, что в случае напорного течения в круглой трубе $R = D/4$, т.е. гидравлический радиус вдвое меньше геометрического.

В случае широкого прямоугольного русла (при $b \gg h$) можно считать (рис. 5.2,в)

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{b \cdot h}{b + 2h} \approx h. \quad (5.5)$$

При других формах поперечных сечений потока (например, рис. 5.2,б) геометрическая интерпретация гидравлического радиуса не имеет смысла.

Наряду с такими характеристиками живого сечения, как объемный расход Q и массовый расход Q_M , введенными соответственно равенствами (3.8) и (3.9), при решении задач о движении жидкости в поле силы тяжести используют понятие *весового расхода*:

$$Q_b = \int_A \rho g u_n dA. \quad (5.6)$$

Связь между указанными расходами установим в виде

$$Q_b = gQ_M = \rho gQ. \quad (5.7)$$

Весьма важной характеристикой живого сечения является *средняя скорость* v , которая определяется зависимостью

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{1}{A} \int_A u_n dA. \quad (5.8)$$

Ее можно интерпретировать следующим образом. Если в каждой точке поперечного сечения нормальная составляющая скорости жидкости u_n равна средней скорости v , то объемный расход жидкости Q через это сечение равен расходу при действительном распределении u_n по поперечному сечению. Как правило, средняя скорость вводится для поперечных (живых) сечений, в которых движение равномерное или плавноизменяющееся.

В последующем изложении потребуется рассматривать не только поток объема, веса или массы жидкости через поперечное сечение, но также и поток кинетической энергии жидкости и поток количества движения жидкости через поперечное сечение. Выразим эти величины через среднюю скорость жидкости в поперечном сечении v .

Поток кинетической энергии (КЭ) через живое сечение ω согласно (3.13) и (3.10) равен

$$\Pi(\text{КЭ}) = \int_{\omega} \frac{\rho u^2}{2} u_n dA, \quad (5.9)$$

где $\frac{\rho u^2}{2}$ — плотность распределения КЭ в произвольной точке живого сечения; u_n — нормальная к живому сечению проекция скорости жидкости в этом же потоке. Так как в живом сечении $u_n = u$, то

$$\Pi(\text{КЭ}) = \int_{\omega} \frac{\rho u^3}{2} dA. \quad (5.10)$$

В реальных потоках, встречающихся в инженерно-строительной практике, при равномерном и плавноизменяющемся движении в большей части живого сечения скорость жидкости u мало (на 5—10%) отличается от средней скорости v . Поэтому, если под интегралом заменить изменяющуюся в живом сечении скорость u на постоянную скорость v , то погрешность от такой замены будет невелика и ее можно учесть, введя корректирующий множитель α :

$$\int_{\omega} \frac{\rho u^3}{2} dA = \alpha \int_{\omega} \frac{\rho v^3}{2} dA = \frac{\alpha \rho v^3}{2} \int_{\omega} dA = \frac{\alpha \rho v^3 \omega}{2}. \quad (5.11)$$

Множитель α называется *коррективом кинетической энергии* или коэффициентом Кориолиса. Согласно (5.11)

$$\alpha = \frac{\int u^3 dA}{v^3 \omega}, \quad (5.12)$$

т.е. корректив КЭ представляет собой отношение потока КЭ через живое сечение, вычисленного в соответствии с реальным распределением скорости жидкости по сечению, к потоку КЭ, вычисленному в предположении, что скорость жидкости в живом сечении постоянна и равна средней скорости v .

Как показывают расчеты, в большинстве практически встречающихся потоков $\alpha = 1,05—1,07$.

Поток количества движения (КД) через живое сечение ω в соответствии с (3.13) и (3.11) равен:

$$П(КД) = \int \rho u u_n dA, \quad (5.13)$$

где u — проекция на нормаль к живому сечению вектора плотности количества движения ρu . Как и в предыдущем случае, заменив u_n на u , а затем подставив под интеграл вместо скорости u среднюю скорость v , получим

$$\int \rho u^2 dA = \alpha^0 \int \rho v^2 dA = \alpha^0 \rho v^2 \int dA = \alpha^0 \rho v^2 \omega. \quad (5.14)$$

Множитель α^0 называется *коррективом количества движения* или коэффициентом Буссинеска. Согласно (5.14):

$$\alpha^0 = \frac{\int u^2 dA}{v^2 \omega}, \quad (5.15)$$

т.е. корректив КД представляет собой отношение потока КД через живое сечение, вычисленного при реальном распределении скорости по живому сечению, к потоку КД, вычисленному в предположении, что скорость жидкости в живом сечении постоянна и равна средней скорости. В большинстве потоков в инженерно-строительной практике $\alpha^0 = 1,03—1,05$.

5.3. Уравнение неразрывности

Рассмотрим установившееся движение жидкости при отсутствии фазовых переходов в трубе с произвольно изменяющимся по ее длине поперечным сечением (рис. 5.3). Пусть в этой трубе есть сечения, где движение равномерное или близкое к нему, т.е. плавноизменяющееся, например, сечения 1—1, 3—3, 2—2.

Зафиксируем в качестве контрольного объем ∇ трубопровода между сечениями 1—1 и 2—2, контрольная поверхность показана на рис. 5.3 штриховой линией. Запишем для этого контрольного объема закон сохранения массы:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\nabla} \rho dV = 0. \quad (5.16)$$

Используя представление субстанциальной производной в виде суммы локальной и конвективной составляющих, перепишем (5.16) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\nabla} \rho dV + \int_A \rho u_n dA = 0. \quad (5.17)$$

При установившемся движении плотность ρ не зависит от времени, так же как размеры и очертание контрольного объема ∇ . Поэтому первое слагаемое в левой части уравнения (5.17) равно нулю. В результате имеем

$$\int_A \rho u_n dA = 0, \quad (5.18)$$

где $A = \omega_1 + \omega_2 + A_{\text{бок}}$; ω_1, ω_2 — площади поперечных сечений 1—1 и 2—2; $A_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности трубы. Очевидно, что на боковой поверхности $u_n = 0$, следовательно,

$$\int_A \rho u_n dA = \int_{\omega_1} \rho u_n dA + \int_{\omega_2} \rho u_n dA = 0. \quad (5.19)$$

Учитывая, что u_n — это проекция скорости на *внешнюю* нормаль к поверхности A , имеем $u_n > 0$, если скорость u направлена из объема ∇ , ограниченного поверхностью A . Если жидкость (см. рис. 5.3)

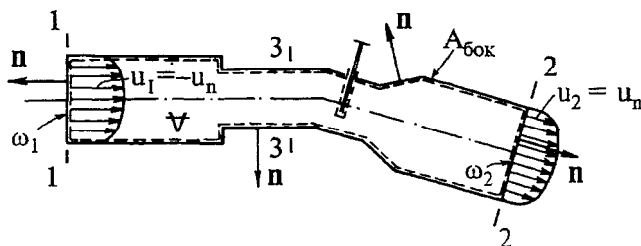


Рис. 5.3. Контрольный объем для вывода уравнения неразрывности

движется слева направо, то в сечении 1—1 $u_n < 0$. Действительно, скорости в этом сечении $-u_n = u_1$, а в сечении 2—2 $u_n = u_2$. Имея это в виду, уравнение (5.19) представим в виде

$$\int_{\omega_1} \rho_1 u_1 dA = \int_{\omega_2} \rho_2 u_2 dA. \quad (5.20)$$

Как было определено выше, масса жидкости, протекающей в единицу времени через некоторую поверхность, называется массовым расходом. Следовательно, вместо (5.20) можно записать

$$Q_{M_1} = \int_{\omega_1} \rho_1 u_1 dA = \int_{\omega_2} \rho_2 u_2 dA = Q_{M_2}, \quad (5.21)$$

где Q_{M_1} и Q_{M_2} — массовые расходы в сечениях 1—1 и 2—2 соответственно. Проведя аналогичные рассуждения относительно любого другого сечения, например, 3—3, получим

$$Q_{M_1} = Q_{M_2} = Q_{M_3}, \quad (5.22)$$

т.е. при движении жидкости в трубе с непроницаемыми стенками массовый расход вдоль нее остается постоянным:

$$Q_M = \text{const (вдоль потока)}. \quad (5.23)$$

Для случая несжимаемой жидкости при $\rho = \text{const}$ равенство (5.21) записывается для объемного расхода Q в виде

$$Q_1 = \int_{\omega_1} u_1 dA = \int_{\omega_2} u_2 dA = Q_2 \quad (5.24)$$

или

$$Q = \text{const (вдоль потока)}. \quad (5.25)$$

Полученные равенства (5.21)—(5.25) называются уравнениями неразрывности.

Используя понятие средней скорости и полагая, что в живом сечении плотность жидкости постоянна, запишем уравнение неразрывности (5.21) в виде

$$\rho_1 v_1 \omega_1 = \rho_2 v_2 \omega_2 \quad (5.26)$$

или для несжимаемой жидкости

$$v_1 \omega_1 = v_2 \omega_2. \quad (5.27)$$

Последнее равенство называют уравнением неразрывности в форме Леонардо да Винчи.

В случае, когда все характеристики потока не зависят от какой-либо одной координаты, например y , можно рассматривать изменение их только в плоскости (x, z) , т.е. решать так называемую плоскую задачу. В указанном случае можно перейти к удельным характеристикам, приходящимся на единицу линейного размера потока в направлении оси y . Так, например, равномерное безнапорное течение в прямоугольном канале (рис. 5.4), ширина b которого намного больше глубины потока h ,

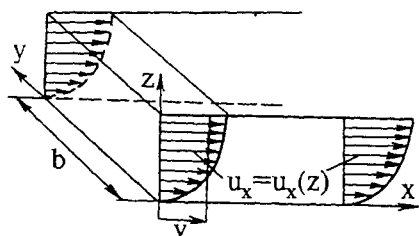


Рис. 5.4. Плоское равномерное (продольно-однородное) безнапорное течение в канале

можно рассматривать как плоское. *Удельным расходом* называют объемный расход, приходящийся на единицу ширины потока:

$$q = \frac{Q}{b}. \quad (5.28)$$

При этом продольная скорость u_x зависит только от координаты z и распределение скорости по вертикали обычно изображают в виде *эпюры скорости* $u_x = u_x(z)$, а элементарную площадь поперечного сечения dA представляют в виде $dA = b dz$. Средняя скорость в соответствии с (5.8) равна

$$v = \frac{\int u dA}{\omega} = \frac{\int_0^h u_x(z) b dz}{hb} = \frac{\int_0^h u_x(z) dz}{h}. \quad (5.29)$$

Согласно (5.29) в условиях плоской задачи средняя скорость представляет собой высоту прямоугольника, равновеликого эпюре скорости.

В заключение получим закон сохранения массы для установившегося движения в дифференциальной форме. Для этого преобразуем с помощью теоремы Остроградского—Гаусса в виде (3.26) левую часть уравнения (5.18):

$$\int_A \rho u_n dA = \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) dV = 0.$$

В данном выводе в качестве контрольного объема будет рассматриваться не часть потока в трубопроводе, а произвольный объем, выделенный в движущейся жидкости. Из произвольности объема (см. подробнее в п. 14.2) следует, что интеграл по этому объему равен нулю, если только подынтегральное выражение равно нулю в каждой точке потока. В результате получаем дифференциальное уравнение, выражающее закон сохранения массы:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad \text{или} \quad \rho \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \rho = 0. \quad (5.29)$$

В п. 14.2 дифференциальная форма закона сохранения массы будет получена для неустановившегося движения.

5.4. Уравнение Бернулли

для установившегося потока вязкой жидкости

Уравнение Бернулли является выражением закона изменения кинетической энергии применительно к одномерным задачам гидромеханики. Выделим в трубопроводе (рис. 5.5) сечениями 1—1 и 2—2, в которых движение равномерное или плавноизменяющееся, контрольный

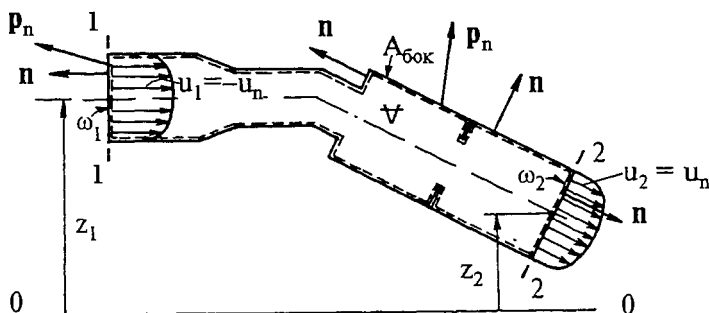


Рис. 5.5. Контрольный объем для вывода уравнения Бернулли

объем $\mathcal{V}$, ограниченный контрольной поверхностью A , которая показана штриховой линией. Запишем для выделенного объема $\mathcal{V}$ закон изменения кинетической энергии:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho u^2}{2} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) d\mathcal{V} + \int_A (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n) dA - \int_{\mathcal{V}} \Phi d\mathcal{V}. \quad (5.30)$$

Преобразуем слагаемые, входящие в это уравнение, представляя объемные интегралы в виде поверхностных и используя условия на контрольной поверхности A , которую, как и в п. 5.4, запишем как сумму $A = \omega_1 + \omega_2 + A_{\text{бок}}$.

1. Представим субстанциальную производную в виде

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho u^2}{2} d\mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho u^2}{2} d\mathcal{V} + \int_A \frac{\rho u^2}{2} u_n dA; \quad (5.31)$$

первое слагаемое равно нулю, так как движение жидкости установившееся. Условия на контрольной поверхности A имеют вид (рис. 5.5)

$$\left. \begin{aligned} \text{на } \omega_1 : u &= u_1; u_n = -u_1; \rho = \rho_1, \\ \text{на } \omega_2 : u &= u_2; u_n = u_2; \rho = \rho_2; \\ \text{на } A_{\text{бок}} : u_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.32)$$

Преобразуем второе слагаемое в (5.31), используя (5.32), (5.11) и (5.21):

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho u^2}{2} d\mathcal{V} &= \int_A \frac{\rho u^2}{2} u_n dA = \int_{\omega_1} \frac{\rho_1 u_1^2}{2} (-u_1) dA + \int_{\omega_2} \frac{\rho_2 u_2^2}{2} u_2 dA + \int_{A_{\text{бок}}} \frac{\rho u^2}{2} 0 \cdot dA = \\ &= - \int_{\omega_1} \frac{\rho_1 u_1^3 dA}{2} + \int_{\omega_2} \frac{\rho_2 u_2^3 dA}{2} = - \frac{\alpha_1 \rho_1 v_1^3 \omega_1}{2} + \frac{\alpha_2 \rho_2 v_2^3 \omega_2}{2} = - \frac{\alpha_1 v_1^3 Q_M}{2} + \frac{\alpha_2 v_2^3 Q_M}{2}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

2. Обратимся к слагаемому в уравнении (5.30), выражающему мощность внешних массовых сил. Предположим, что внешние массовые силы имеют потенциал, т.е. существует такая скалярная функция U , что $\mathbf{f} = \text{grad}U$, при этом имеем

$$\int_V (\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}) \rho dV = \int_V \rho (\mathbf{u} \cdot \text{grad}U) dV.$$

Используя теорему Остроградского—Гаусса в форме (3.29), заменим в ней вектор $\mathbf{u}$ на вектор $\rho \mathbf{u}$, а β на U :

$$\int_V \rho (\mathbf{u} \cdot \text{grad}U) dV = \int_A U \rho u_n dA - \int_V U \text{div}(\rho \mathbf{u}) dV.$$

Согласно (5.29) второй интеграл в правой части равен нулю, а используя (5.32), получим выражение для первого интеграла в виде

$$\int_A \rho U u_n dA = - \int_{\omega_1} \rho_1 u_1 U_1 dA + \int_{\omega_2} \rho_2 u_2 U_2 dA. \quad (5.34)$$

3. Рассмотрим интеграл, выражающий мощность внешних поверхностных сил:

$$\int_A (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n) dA = \int_{\omega_1} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n) dA + \int_{\omega_2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n) dA + \int_{A_{\text{бок}}} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n) dA. \quad (5.35)$$

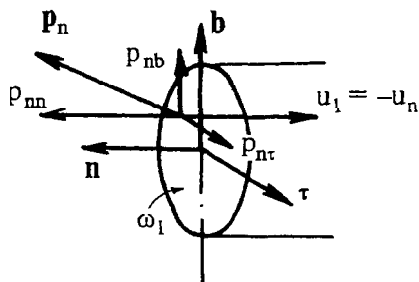


Рис. 5.6. Напряжение и скорость жидкости в поперечном сечении ω_1

В сечении 1—1 скорость имеет только нормальную составляющую u_n , так как движение здесь равномерное или плавноизменяющееся. Чтобы вычислить скалярное произведение $\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n$, зададим в произвольной точке живого сечения ω_1 систему ортогональных координат (рис.5.6), определяемую тремя единичными векторами ($\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, $\boldsymbol{\tau}$), из которых $\mathbf{n}$ — нормален к живому сечению, а $\mathbf{b}$ и $\boldsymbol{\tau}$ лежат в его плоскости. Проектируя на эти координатные оси векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{p}_n$, найдем

$$\mathbf{u} = (u_n, u_b, u_\tau) = (u_n, 0, 0); \quad \mathbf{p}_n = (p_{nn}, p_{nb}, p_{nt}),$$

при этом все три проекции напряжения $\mathbf{p}_n$ могут быть отличны от нуля. По определению скалярного произведения

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n = u_n p_{nn} + u_b p_{nb} + u_\tau p_{nt} = u_n p_{nn}. \quad (5.36)$$

Выполним аналогичные вычисления для живого сечения ω_2 . Согласно (5.2) на контрольной поверхности A имеем условия

$$\left. \begin{array}{l} \text{на } \omega_1 : u_n = -u_1; \quad p_{nn} = p_1; \\ \text{на } \omega_2 : u_n = u_2; \quad p_{nn} = -p_2; \\ \text{на } A_{\text{бок}} : u_n = 0; \quad (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n) = 0. \end{array} \right\} \quad (5.37)$$

Подставляя (5.37) в (5.35), получаем

$$\int_A (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n) dA = \int_{\omega_1} u_1 p_1 dA - \int_{\omega_2} u_2 p_2 dA. \quad (5.38)$$

Примем во внимание, что в сечениях 1—1 и 2—2 движение равномерное или плавноизменяющееся, и, следовательно, согласно (5.3) давление в этих сечениях распределено по гидростатическому закону:

$$U - \frac{P}{\rho} = \text{const.} \quad (5.3)$$

Сложим равенства (5.34) и (5.38) и найдем выражение для мощности внешних сил, которое преобразуем с учетом (5.3), а также полагая, что сила тяжести является единственной внешней массовой силой, т.е. что $U = -gz$:

$$\begin{aligned} \int_V \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}) dV + \int_A (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n) dA &= - \int_{\omega_1} \left(U_1 - \frac{P_1}{\rho_1} \right) \rho_1 u_1 dA + \int_{\omega_2} \left(U_2 - \frac{P_2}{\rho_2} \right) \rho_2 u_2 dA = \\ &= - \left(U_1 - \frac{P_1}{\rho_1} \right) \int_{\omega_1} \rho_1 u_1 dA + \left(U_2 - \frac{P_2}{\rho_2} \right) \int_{\omega_2} \rho_2 u_2 dA = \left(gz_1 + \frac{P_1}{\rho_1} \right) Q_M - \left(gz_2 + \frac{P_2}{\rho_2} \right) Q_M. \end{aligned} \quad (5.39)$$

4. Последнее слагаемое (5.30), выражающее мощность внутренних сил в пределах контрольного объема, оставляем без преобразования.

Подставив (5.33) и (5.39) в исходное уравнение (5.30) и разделив все слагаемые на весовой расход $Q_B = gQ_M$, получим искомое уравнение Бернулли:

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho_1 g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho_2 g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_f, \quad (5.40)$$

где слагаемое

$$h_f = \frac{1}{Q_B} \int_V \Phi dV \quad (5.41)$$

выражает отнесенную к весовому расходу мощность внутренних сил (диссипацию механической энергии в единицу времени) в пределах контрольного объема.

В наиболее важном для практики случае несжимаемой жидкости ($\rho_1 = \rho_2 = \rho = \text{const}$) уравнение (5.40) имеет вид

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_f, \quad (5.42)$$

где $\gamma = \rho g$ — удельный вес.

5.5. Уравнение Бернулли для неустановившегося напорного движения вязкой несжимаемой жидкости

Уравнение Бернулли, полученное в 5.4, относится к установившимся напорным потокам вязкой жидкости. В некоторых случаях возникает необходимость в более общей форме этого уравнения, относящегося к неустановившимся напорным потокам несжимаемой ($\rho = \text{const}$) жидкости в недеформируемых руслах в фиксированный момент времени.

В случае неустановившегося движения в выражении для субстанциональной производной (5.31) нельзя полагать равной нулю локальную составляющую:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\rho u^2}{2} dV.$$

Это слагаемое без преобразований войдет в окончательную форму уравнения Бернулли (5.42), которое в случае неустановившегося движения примет вид

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_f + h_{ин}, \quad (5.43)$$

где

$$h_{ин} = \frac{1}{Q_B} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\rho u^2}{2} dV \quad (5.44)$$

называется *инерционным напором*; $h_{ин}$ представляет собой изменение в единицу времени кинетической энергии жидкости в контрольном объеме V (при неустановившемся движении), отнесенное к весовому расходу. Уравнение (5.43) справедливо только для $t = t_{ср}$.

Пусть трубопровод нецилиндрический, движение жидкости во всем трубопроводе плавноизменяющееся, и площадь его поперечного сечения ω зависит от продольной вдоль оси трубопровода координаты x ; длину трубопровода между сечениями 1—1 и 2—2 обозначим L . Тогда, представив $dV = dA \cdot dx$, где dA — дифференциал площади поперечного сечения ω , проинтегрируем выражение для $h_{ин}$:

$$h_{ин} = \frac{1}{Q_B} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\rho u^2}{2} dV = \frac{1}{2gQ} \frac{\partial}{\partial t} \int_L dx \int_{\omega(x)} u^2 dA. \quad (5.45)$$

Чтобы выразить интеграл по $\omega(x)$ в каждом поперечном сечении через расход Q , введем корректив количества движения (5.15), который, как и средняя скорость, будет зависеть от времени:

$$\int_{\omega(x)} u^2 dA = \alpha^0(x, t) v^2(x, t) \cdot \omega(x) = \alpha^0(x, t) \cdot [Q(t)]^2 / \omega(x). \quad (5.46)$$

Здесь вследствие несжимаемости жидкости принято, что расход Q зависит от времени, но постоянен вдоль трубы. Подставим (5.46) в (5.45) и получим

$$h_{ин} = \frac{1}{2gQ} \frac{\partial}{\partial t} \left[Q^2 \int_L \frac{\alpha^0(x, t)}{\omega(x)} dx \right]. \quad (5.47)$$

Если дополнительно пренебречь изменением во времени корректива α^0 , то (5.47) приобретет вид

$$h_{ин} = \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} \int_L \frac{\alpha^0(x)}{\omega(x)} dx. \quad (5.48)$$

В случае цилиндрической трубы, полагая также $\alpha^0 \approx 1,0$, получим наиболее простое выражение для инерционного напора:

$$h_{ин} = \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} L. \quad (5.49)$$

Последнее выражение, как правило, и используется на практике. Предыдущие выражения для инерционного напора пригодны главным образом для оценки погрешности расчетов по зависимости (5.49).

5.6. Уравнение Бернулли для установившегося безнапорного движения вязкой жидкости

Обратимся к выводу уравнения Бернулли для установившегося безнапорного потока в недеформируемом русле. В этом случае (рис. 5.7) контрольную поверхность A следует разделить на четыре части:

$$A = \omega_1 + \omega_2 + A_{\text{см}} + A^0, \quad (5.50)$$

где $A_{\text{см}}$ — смоченная поверхность русла, на которой, как и на $A_{\text{бок}}$ в случае напорного движения, вектор скорости $\mathbf{u} = 0$ и все результаты, полученные в разд. 5.5 при выводе уравнения Бернулли для напорных потоков для $A_{\text{бок}}$ и $A_{\text{см}}$, одинаковы; A^0 — свободная поверхность. На свободной поверхности, которая при установившемся движении является поверхностью тока, равна нулю только нормальная к этой поверхности составляющая скорости u_n , в то время как касательная составляющая не равна нулю, что может сделать ненулевым вклад мощности поверхностных сил в баланс механической энергии.

Обращаясь к преобразованию уравнения (5.30), отметим, что в случае напорного потока все интегралы по поверхности $A_{\text{бок}}$ были равны нулю вследствие того, что на твердых границах выполняется условие “прилипания” $\mathbf{u} = 0$. При наличии свободной поверхности интегралы по A^0 , в которые входит u_n , также будут равны нулю, так как на свободной поверхности $u_n = 0$. Таким образом, не будет равен нулю только один интеграл:

$$\int_{A^0} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n) dA.$$

Для того чтобы оценить его вклад, введем ортогональную систему координат, определяемую единичными векторами $(\ell, \mathbf{n}, \mathbf{b})$, где ℓ — вектор, касательный к линии тока на свободной поверхности, $\mathbf{n}$ — вектор нормали к свободной поверхности, а $\mathbf{b}$ — вектор, нормальный к ℓ и $\mathbf{n}$. Если $u = |\mathbf{u}|$ — модуль скорости, то на свободной поверхности $\mathbf{u} = u \cdot \ell + 0 \cdot \mathbf{n} + 0 \cdot \mathbf{b}$. Вектор напряжения на свободной поверхности представим в виде

$$\mathbf{p}_n = p_{n\ell} \ell + p_{nn} \mathbf{n} + p_{nb} \mathbf{b},$$

где p_{nn} — нормальное напряжение, а $p_{n\ell}$ и p_{nb} — соответствующие касательные напряжения. По определению скалярного произведения

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n = u p_{n\ell} + 0 \cdot p_{nn} + 0 \cdot p_{nb} = u p_{n\ell}, \quad (5.51)$$

а следовательно,

$$\int_{A^0} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n) \cdot dA = \int_{A^0} u p_{n\ell} dA. \quad (5.52)$$

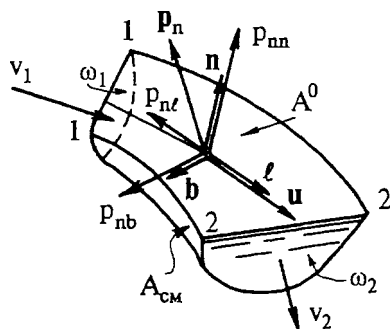


Рис. 5.7. Напряжение и скорость жидкости на свободной поверхности потока

Проделав все преобразования так же, как в разд. 5.4, и включив в качестве дополнительного слагаемого ненулевой интеграл (5.52), получим искомое уравнение Бернулли для безнапорного потока в виде

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_f + h^0, \quad (5.53)$$

где h^0 — изменение напора, связанное с действием на свободную поверхность продольных касательных напряжений:

$$h^0 = -\frac{1}{\gamma Q} \int_{A_0} u p_{n\ell} dA. \quad (5.54)$$

Очевидно, что если u и $p_{n\ell}$ имеют одинаковое направление, то

$h^0 < 0$, что означает, что полный напор потока $H_e = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g}$ за счет

этого слагаемого возрастает вдоль течения; если же u и $p_{n\ell}$ имеют различные знаки, то напор соответственно уменьшается. Расчеты показывают, что при сильных ветрах, дующих вдоль течения или против него, ветровое касательное напряжение $p_{n\ell}$ может достигать больших значений и в результате слагаемое h^0 может вносить существенный вклад в изменение напора.

Так, например, ветер со скоростью 30 м/с, дующий против течения реки, создает на свободной поверхности касательные напряжения, способные компенсировать вклад в баланс энергии силы тяжести, под действием которой и течет в реке вода, если продольный уклон дна реки i составляет приблизительно 10^{-5} . В этом случае движение воды в реке может приостановиться и даже может иметь место движение воды вспять.

5.7. Геометрическая и энергетическая интерпретации слагаемых, входящих в уравнение Бернулли

Обратимся к интерпретации отдельных слагаемых, входящих в уравнение Бернулли для случая несжимаемой (капельной) жидкости ($\rho = \text{const}$). Как следует из вывода, z — это координата произвольной точки поперечного сечения ω , а p — это гидродинамическое давление в этой же точке. Из гидростатики известно, что $p/\rho g$ — это высота столба жидкости, который создает давление, равное p . При равномерном (и плавнoизменяющемся) движении нормальные составляющие напряжений совпадают (или очень близки) по абсолютной величине к гидродинамическому давлению; при постоянстве скорости жидкости в поперечном сечении тензор напряжений в движущейся жидкости является диагональным, как и в покоящейся. Поэтому можно считать, что если, не нарушая структуру потока (равномерности движения жидкости), присоединить открытую трубку к любой точке потока, то вода в этой трубке поднимется на высоту $p/\rho g$, которая называется *пьезометрической*.

Если ввести в продольно-однородный поток какое-либо тело, нарушающее равномерность, например шар (рис. 5.8), то при его обтекании напряжения, действующие на поверхность шара со стороны обтекаю-

щей его жидкости, будут, естественно, отличны от напряжений при равномерном движении жидкости. Как будет показано позже, в точке С, в которой нормаль к поверхности шара направлена навстречу скорости равномерного движения, напряженное состояние таково, что гидродинамическое давление p_C в этой точке больше, чем давление p в этой же точке при отсутствии шара, причем

$$(p_C/\gamma - p/\gamma) = u^2/2g \approx v^2/2g. \quad (5.55)$$

Здесь изменением скорости в поперечном сечении потока пренебрегаем, считая, что $u \approx \text{const} = v$. Изогнутая трубка, установленная в потоке так, как показано на рис. 5.8, называется трубкой Пито.

Горизонтальная координатная плоскость xOy , от которой отсчитывается координата z при решении гидравлических задач, называется *плоскостью сравнения* и обозначается на чертежах 0—0.

Имея в виду вышеизложенное, можно дать следующую *геометрическую* интерпретацию слагаемых, входящих в уравнение Бернулли:

z — превышение над плоскостью сравнения (отметка) любой точки поперечного сечения потока;

p/γ — пьезометрическая высота в этой же точке, т.е. высота, на которую поднимается вода в открытой трубке, присоединенной к этой точке;

$z + p/\gamma + \alpha v^2/2g$ — превышение над плоскостью сравнения (отметки) уровня воды в трубке Пито;

h_f — разность отметок воды в трубках Пито, установленных в сечениях 1—1 и 2—2 (см. рис. 5.9).

Кроме того, можно дать *энергетическую* интерпретацию слагаемых, входящих в уравнение Бернулли:

$$z_1 = + \frac{1}{Q_{\omega_1}} \int_{\omega_1} p_1 U_1 u_n dA \text{ — удельная (отнесенная к весовому расходу)}$$

мощность (работа в единицу времени) силы тяжести, которая пронесит жидкостью, втекающей через сечение ω_1 ;

$$\frac{p_1}{\rho_1 g} = \frac{p_1}{\gamma_1} = - \frac{1}{Q_{\omega_1}} \int_{\omega_1} p_1 u_n dA \text{ — удельная мощность поверхностных сил}$$

в сечении ω_1 ;

$$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = - \frac{1}{Q_{\omega_1}} \int_{\omega_1} p_1 (u_1^2/2) u_n dA \text{ — удельный поток кинетической энергии}$$

поступательного движения жидких частиц через сечение ω_1 ;

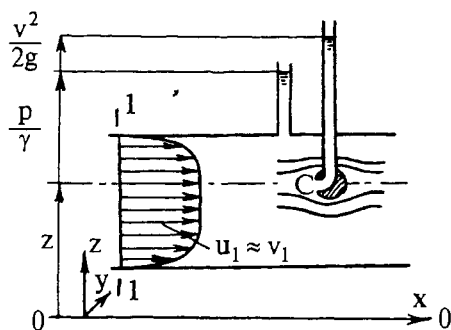


Рис. 5.8. Геометрическая интерпретация слагаемых, входящих в уравнение Бернулли

$h_f = \frac{1}{Q_v} \int_V \Phi dV$ — удельная мощность (механическая энергия в единицу времени), переходящая в тепло внутри объема V , т.е. в трубопроводе между сечениями 1—1 и 2—2, другими словами удельная потеря механической мощности или диссипированная мощность.

Слагаемые, относящиеся к сечению 2—2, имеют аналогичный смысл.

5.8. Потенциальный и полный (гидродинамический) напоры. Пьезометрическая и напорная линии

Удельные мощности, т.е. мощности, отнесенные к весовому расходу, проносимые движущейся жидкостью через поперечные сечения, называются *напорами*. Так,

z — напор, обусловленный силой тяжести;

p/γ — напор, обусловленный гидродинамическим давлением;

$\alpha v^2/2g$ — напор, обусловленный кинетической энергией движущейся жидкости.

Для краткости обозначим и назовем:

$z + (p/\gamma) = H$ — *потенциальный напор*;

$\alpha v^2/2g = h_v$ — *скоростной напор*;

$z + p/\gamma + \alpha v^2/2g = H_e$ — *полный или гидродинамический напор*;

$(1/\gamma Q) \int_V \Phi dV = h_f$ — *потеря напора* между сечениями 1—1 и 2—2.

При решении задач о движении в трубах и каналах часто в каждом сечении потока определяют потенциальный и полный напоры и, задав плоскость сравнения, указывают геометрическое место точек, отвечающих этим напорам, в соответствии с их геометрической интерпретацией (рис. 5.9).

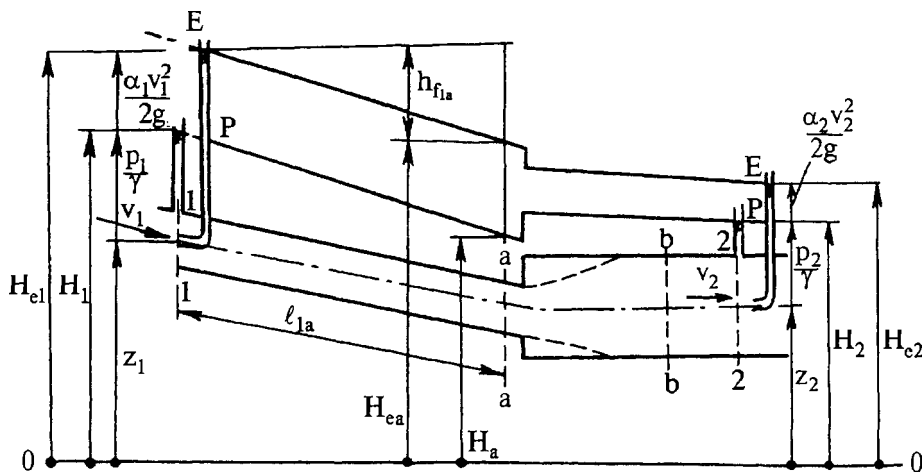


Рис. 5.9. Пьезометрическая P-P и напорная E-E линии

Если в каждом сечении отложить от плоскости сравнения по вертикали величину потенциального напора $H = z + \frac{p}{\gamma}$, то совокупность

точек образует *пъезометрическую* линию Р—Р. Аналогично, если в каждом сечении отложить по вертикали от плоскости сравнения величину полного напора $H_e = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g}$, то совокупность точек образует *напорную* линию Е—Е.

Отметим, что понятие напора было введено для тех сечений потока, где движение равномерное или плавноизменяющееся. На участке, где движение резкоизменяющееся (например, между сечениями а—а и б—б на рис. 5.9), напорная и пъезометрическая линии строятся условно путем их экстраполяции из областей, где движение плавноизменяющееся.

На участке с равномерным движением (например, между сечениями 1—1 и а—а) потери напора потока на каждую единицу длины будут одинаковые (структура потока во всех сечениях одинакова, следовательно, и работа всех внутренних сил, определяющих потерю напора, в одинаковых объемах будет одинакова), поэтому напорная линия Е—Е на таких участках будет прямой. Пъезометрическая линия, которая располагается всегда ниже напорной на величину $\frac{\alpha v^2}{2g} > 0$, будет прямой, параллельной напорной линии. Важными характеристиками этих линий являются их продольные уклоны, т.е. отношение разности напоров на участке равномерного движения к расстоянию между сечениями, в которых эти напоры вычислены.

Уклон напорной линии называется *гидравлическим* и обозначается J_e , а уклон пъезометрической линии называется *пъезометрическим* и обозначается J . Например, для участка потока между сечениями 1—1 и а—а

$$J_e = \frac{H_{e1} - H_{ea}}{\ell_{1a}}; \quad J = \frac{H_1 - H_a}{\ell_{1a}}. \quad (5.56)$$

Если движение плавноизменяющееся, то и потери напора на каждой единице длины вдоль потока будут переменны, и скоростной напор будет меняться вдоль оси потока. При этом линии Е—Е и Р—Р будут кривыми (рис. 5.10). В этом случае гидравлический и пъезометрический уклоны определяются для каждого сечения как уклоны на элементарном участке длиной $\Delta \ell$, прилежащем к сечению, т.е. как уклоны касательной к соответствующим линиям:

$$J_e = - \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{\Delta H_e}{\Delta \ell} = - \frac{d \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g} \right)}{d \ell}; \quad (5.57)$$

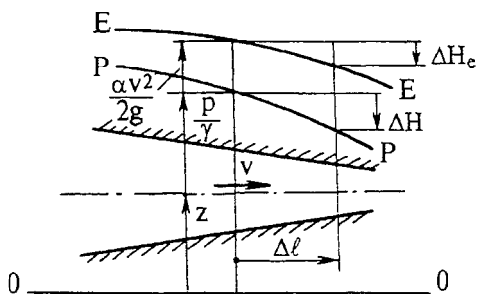


Рис. 5.10. Пъезометрическая Р—Р и напорная Е—Е линии при плавноизменяющемся движении

$$J = - \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{\Delta H}{\Delta \ell} = - \frac{d \left(z + \frac{p}{\gamma} \right)}{d\ell}. \quad (5.58)$$

Здесь знак минус показывает, что положительным считается уклон, при котором отметки линий Е—Е и Р—Р уменьшаются вдоль потока.

Из геометрических соображений (см. рис. 5.9) видно, что при равномерном движении

$$J_e = \frac{h_f}{\ell}. \quad (5.59)$$

Следовательно, гидравлический уклон можно интерпретировать как удельную (на единицу весового расхода) диссипированную мощность в объеме потока, приходящуюся на единицу длины.

При этом важно иметь в виду два обстоятельства.

1. Потери напора — величина положительная (механическая энергия жидкости при движении может лишь уменьшаться, переходя в тепло), поэтому полный напор в сечениях, расположенных ниже по течению, всегда меньше напора в сечениях, расположенных выше по течению. Следовательно, отметки напорной линии вдоль потока всегда уменьшаются и гидравлический уклон всегда положителен ($J_e > 0$).

2. Если часть кинетической энергии жидкости при ее движении переходит в потенциальную, то потенциальный напор может возрасти, при этом отметки пьезометрической линии возрастают.

5.9. Основное уравнение равномерного движения жидкости в поле силы тяжести

Рассмотрим установившееся равномерное (продольно-однородное) движение жидкости в цилиндрической трубе произвольного поперечного

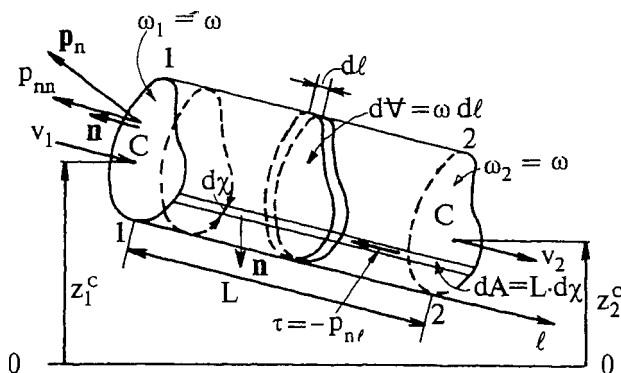


Рис. 5.11. Контрольный объем для вывода основного уравнения равномерного движения

сечения длиной L (рис. 5.11). Воспользуемся уравнением, выражающим закон изменения количества движения, которое в векторной форме для произвольного объема V , ограниченного поверхностью A , имеет вид

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \int_V \rho \mathbf{f} dV + \int_A \mathbf{p}_n dA. \quad (5.60)$$

Проекция слагаемых этого уравнения на ось ℓ , совпадающую с направлением скорости движения жидкости,

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u_\ell dV = \int_V \rho f_\ell dV + \int_{A_{\text{бок}}} p_{n\ell} dA + \int_{\omega_1} p_{n\ell} dA + \int_{\omega_2} p_{n\ell} dA, \quad (5.61)$$

где u_ℓ — проекция вектора скорости на ось ℓ , очевидно, $u_\ell = u = |\mathbf{u}|$; f_ℓ — проекция вектора плотности распределения внешней объемной силы на ось ℓ . Напряжения $p_{n\ell}$ определим, принимая во внимание, что $\mathbf{n}$ на ω_1 направлено противоположно ℓ , а на ω_2 в одну сторону с ℓ , а также имея в виду лемму 1 из разд. 5.1. При этом $p_{n\ell}$ — касательное напряжение, действующее по боковой поверхности $A_{\text{бок}}$ (нормаль к этой поверхности $\mathbf{n}$) и направленное вдоль оси ℓ ; p_{nn} и $p_{\ell\ell}$ — нормальные напряжения на поверхностях поперечных сечений ω_1 и ω_2 соответственно. В итоге получим:

$$\text{на } \omega_1 : p_{n\ell} = -p_{nn} = p_1;$$

$$\text{на } \omega_2 : p_{n\ell} = +p_{\ell\ell} = -p_2;$$

$$\text{на } A_{\text{бок}} : p_{n\ell} \text{ — касательное напряжение.}$$

Так как движение установившееся, то локальная составляющая субстанциальной производной равна нулю, а при равномерном (продольно-однородном) движении плотность распределения количества движения $\rho \mathbf{u}$ вдоль потока не изменяется и, следовательно, конвективная составляющая субстанциальной производной также равна нулю. В результате (5.61) перепишем в виде

$$0 = \int_V \rho f_\ell dV + \int_{A_{\text{бок}}} p_{n\ell} dA + \int_{\omega_1} p_1 dA + \int_{\omega_2} (-p_2) dA. \quad (5.62)$$

Потенциал силы тяжести $U = -gz$, следовательно, $f_\ell = \text{grad}_\ell U = \frac{dU}{d\ell} = -g \frac{dz}{d\ell}$,

а элемент объема dV , учитывая, что боковая поверхность цилиндрическая, можно представить в виде $dV = \omega d\ell$. Тогда

$$\int_V \rho f_\ell dV = \int_1^2 \rho \left(-g \frac{dz}{d\ell} \right) \omega d\ell = -\rho g \omega (z_2 - z_1), \quad (5.63)$$

где z_1 и z_2 — вертикальные координаты двух произвольных соответствующих (лежащих на одной линии тока) точек сечений ω_1 и ω_2 .

В соответствии с леммой 2 (см. разд. 5.1) и зависимостью (2.33) для силы гидростатического давления на плоскую произвольную фигуру представим два последних интеграла из (5.62) в виде

$$\int_{\omega_1} p_1 dA + \int_{\omega_2} (-p_2) dA = (p_1^C - p_2^C) \omega, \quad (5.64)$$

где p_1^C и p_2^C — давления в центрах тяжести ω_1 и ω_2 .

Обратимся к рассмотрению интеграла по боковой поверхности $A_{\text{бок}}$. Для простоты обозначим касательное напряжение $p_{nt} = -\tau$. Знак минус введен, чтобы касательное напряжение τ было положительное, если боковой поверхностью потока является неподвижная твердая поверхность. Так как движение равномерное, то в качестве элемента dA можно принять полоску $Ld\chi$, где L — длина выделенного контрольного объема, $d\chi$ — элементарная длина смоченного периметра (см. рис. 5.11); интеграл при этом имеет вид

$$\int_{A_{\text{бок}}} p_{nt} dA = - \int_{\chi} \tau L d\chi = L \int_{\chi} \tau d\chi. \quad (5.65)$$

Подставив (5.63)—(5.65) в исходное уравнение (5.62), получим

$$0 = -\rho g \omega (z_2 - z_1) + \omega (p_1^C - p_2^C) - L \int_{(\chi)} \tau d\chi. \quad (5.66)$$

Так как z_1 и z_2 отвечают произвольным соответствующим точкам сечений 1—1 и 2—2, примем, что это вертикальные координаты центров тяжести сечений 1—1 и 2—2. Разделив на произведение $\rho g \omega$ все члены уравнения (5.66), получим

$$\frac{L}{\rho g \omega} \int_{\chi} \tau d\chi = \left(z_1^C + \frac{p_1^C}{\gamma} \right) - \left(z_2^C + \frac{p_2^C}{\gamma} \right). \quad (5.67)$$

Как было отмечено выше, если движение в сечении равномерное, то

$$z^C + \frac{p^C}{\gamma} = z + \frac{p}{\gamma} = H, \quad (5.68)$$

где H — потенциальный напор. С учетом этого представим (5.67) в виде

$$\frac{1}{\omega} \int_{\chi} \tau d\chi = \gamma \frac{H_1 - H_2}{L} = \gamma J, \quad (5.69)$$

где J — пьезометрический уклон.

Это общий вид основного уравнения равномерного движения. Более широко это уравнение используется в частном случае, когда τ во всех точках смоченного периметра постоянно. Это условие точно выполняется в круглоцилиндрических и почти точно в весьма широких прямоугольных руслах. Уравнение (5.69) при этом преобразуется к виду

$$\frac{\tau \chi}{\rho g \omega} = J \quad (5.70)$$

или

$$\tau / \gamma = RJ, \quad (5.71)$$

где $R = \omega / \chi$, или

$$\tau / \rho = gRJ. \quad (5.72)$$

Уравнения (5.71) и (5.72) используют не только для указанных выше случаев, но и для русл с различными формами поперечного сечения, вводя в эти уравнения вместо τ среднее по смоченному периметру касательное напряжение, которое определяется зависимостью

$$\tau_{cp} = \frac{1}{\chi} \int_{\chi} \tau d\chi. \quad (5.73)$$

В заключение отметим, что при равномерном движении $J = J_c$. Это в дальнейшем будет учитываться при использовании формул (5.71) и (5.72).

5.10. Два режима движения жидкости

Несмотря на то что механика жидкости как область знаний существует уже не одно тысячелетие, представление о двух режимах движения жидкости сложилось лишь в XIX веке. Впервые немецкий исследователь Хаген в 1839 году отметил, во-первых, что на характер зависимости потерь напора в трубе от скорости влияют и сама средняя скорость жидкости и вязкость, а во-вторых, при больших скоростях в трубе образуются вихреподобные образования, в то время как при малых скоростях движение жидкости слоистое.

Фундаментальные исследования вопроса о режимах движения жидкости были выполнены английским ученым О. Рейнольдсом в восьмидесятых годах XIX века на приборе, который носит его имя (рис. 5.12). В цилиндрическую стеклянную трубу через плавный коноидальный входной оголовок жидкость подается из резервуара, где она успокаивается с помощью системы решеток.

Во входной участок трубы через тонкую трубочку подается подкрашенная жидкость с плотностью и скоростью истечения, близкими к этим же характеристикам потока жидкости в трубе. Подкрашенная струйка жидкости позволяет визуализировать (сделать видимой) структуру потока в трубе.

Опыты, проведенные на этой установке, показали, что при небольших значениях скорости v движение жидкости в трубе слоистое; подкрашенная струйка имеет вид нити с четко очерченными границами. Этот режим движения называется *ламинарным*.

При увеличении скорости v слоистая структура потока разрушается и движение приобретает совершенно иной характер; подкрашенная жидкость быстро рассеивается поперек потока; отдельные подкрашенные частицы жидкости перемешаются по сложным запутанным траекториям; на небольшом расстоянии от входа (10–20 диаметров трубы) поток оказывается равномерно окрашенным. Более детальные исследования показывают, что в каждой фиксированной точке пространства скорость жидкости беспорядочно изменяется во времени. Такой режим движения называется *турбулентным*.



Рис. 5.12. Прибор Рейнольдса для изучения режимов движения жидкости

Итак, при ламинарном режиме имеет место слоистое движение жидкости, траектории жидких частиц упорядоченные, они определяются очертанием твердых границ; например, в цилиндрической трубе траектории подобны образующей боковой поверхности потока (рис. 5.13,а). При турбулентном движении скорость жидкости в фиксированных точках пространства (при эйлеровом методе описания движения жидкости) изменяется во времени (рис. 5.13,б) даже при неизменных во времени граничных условиях (т.е. при установившемся движении). Скорость

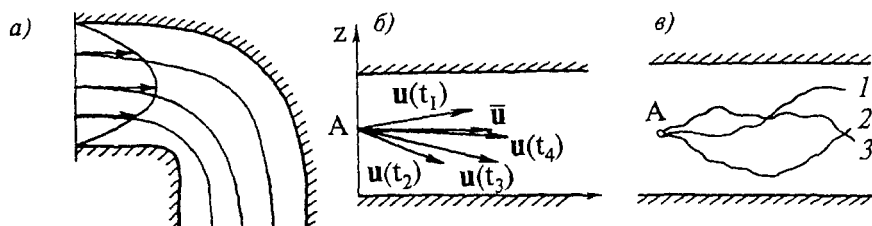


Рис. 5.13. Линии тока и эпюра скорости при ламинарном режиме течения (а); мгновенные значения скорости и осредненная скорость в точке А при установившемся турбулентном режиме течения (б); 1, 2, 3 — траектории жидких частиц, прошедших точку А в различные моменты времени при турбулентном режиме (в)

изменяется во времени беспорядочно, непериодически, отклоняясь при неизменных во времени граничных условиях от некоторого устойчивого значения. Траектории жидких частиц (при лагранжевом методе описания движения жидкости) имеют запутанный неупорядоченный вид (рис. 5.13,в), и частицы лишь в среднем следуют очертаниям ограничивающих поток поверхностей.

В дальнейшем особенности турбулентного режима движения будем рассматривать только в потоках с неизменяющимися во времени граничными условиями. Именно такие турбулентные потоки и соответственно турбулентные движения жидкости будем называть *установившимися*. Мгновенную скорость в фиксированной точке пространства называют при описании турбулентного движения *актуальной* скоростью. Установим в фиксированной точке турбулентного потока (например, в точке А на рис. 5.13,б) датчик скорости, регистрирующий все ее изменения во времени, и представим на рис. 5.14 зависимость от време-

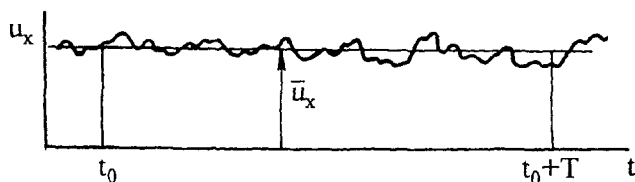


Рис. 14. Зависимость проекции актуальной скорости жидкости на продольную координатную ось x от времени (тахограмма) при турбулентном режиме

ни проекции этой скорости, например, на координатную ось x (такие зависимости называют тахограммами). Как видно, проекция u_x изменяется во времени, отклоняясь от некоторого уровня. Значение проек-

ции скорости u_x , определяющее положение этого уровня, найдем по зависимости

$$\bar{u}_x = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u_x(t) dt, \quad (5.74)$$

т.е. примем ее равной высоте прямоугольника, равновеликого площади фигуры на рис. 5.14, ограниченной тахограммой и вертикалями, отстоящими друг от друга на расстоянии T . Величина T должна быть такой, чтобы значение $\bar{u}_x$, вычисляемое по формуле (5.74), от T не зависело. При этом $\bar{u}_x$ называют *осредненной проекцией скорости*.

Определив по зависимостям, аналогичным (5.74), все три осредненные проекции скорости, можно построить вектор осредненной скорости в данной точке пространства, занятого потоком: $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z)$. Такую же операцию осреднения, естественно, можно проделать в любой точке потока. В частности, например, на рис. 5.13,б представлено течение жидкости в цилиндрическом канале, образующая стенок которого параллельна оси x ; при этом осредненная скорость в любой точке потока $\bar{\mathbf{u}}(x, y, z)$ имеет только одну проекцию $\bar{u}_x$, не равную нулю, а $\bar{u}_y = 0$ и $\bar{u}_z = 0$. В других более сложных случаях все три проекции осредненной скорости могут быть отличны от нуля.

Естественно, что и гидродинамическое давление в точке p , которое при турбулентном движении изменяется сходным со скоростью образом, можно осреднить и рассматривать *осредненное давление* в точке

$$\bar{p} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt. \quad (5.75)$$

Имея осредненные скорости $\bar{\mathbf{u}}(x, y, z)$ и давление $\bar{p}(x, y, z)$, вместо реального турбулентного потока рассматривают его *осредненную модель*, называемую также моделью Рейнольдса—Буссинеска, которая представляет собой фиктивный поток, скорость в каждой точке которого равна осредненной скорости $\bar{\mathbf{u}}$, а давление равно осредненному давлению $\bar{p}$.

Использование этой модели является в настоящее время основным способом описания турбулентных потоков. Отметим, что определения осредненных скорости и давления согласно (5.74) и (5.75) пригодны только при установившемся движении; при этом поле осредненных скоростей и давление от времени не зависят. В случае неустановившегося движения вопрос об определении $\bar{\mathbf{u}}$ и $\bar{p}$ оказывается весьма сложным и будет рассматриваться в гл. 19.

Во многих случаях осредненное значение скорости является недостаточным для решения практических задач и возникает необходимость уметь определять, как и насколько мгновенные значения скорости отличаются от осредненных. Разность между мгновенной и осредненной скоростями называется *пульсационной* скоростью и обозначается через $\mathbf{u}'$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} = (u_x - \bar{u}_x, u_y - \bar{u}_y, u_z - \bar{u}_z) = \\ &= (u'_x, u'_y, u'_z). \end{aligned} \quad (5.76)$$

Легко видеть, что осредненная согласно (5.74) величина пульсационной скорости равна нулю, например:

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u'_x(t) dt = 0. \quad (5.77)$$

Поэтому в качестве характерной величины проекции пульсационной скорости принимают корень квадратный из ее среднеквадратичного значения:

$$\sqrt{u'^2_x} = \left\{ \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [u'_x(t)]^2 dt \right\}^{1/2}. \quad (5.78)$$

Иногда $\sqrt{u'^2_x}$ называют *стандартом* пульсационной скорости.

Важной особенностью, обусловившей широкое применение осредненной модели турбулентного потока, является то, что применительно к ней оказываются справедливыми все результаты и зависимости, полученные ранее вне связи с турбулентным режимом движения, например, уравнение неразрывности, уравнение Бернулли, основное уравнение равномерного движения и т.д. В частности, среднюю скорость v в поперечном сечении ω можно определить, используя зависимость, определяющую распределение осредненной скорости в поперечном сечении:

$$v = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \bar{u}_n d\omega. \quad (5.79)$$

Поэтому в дальнейшем, описывая турбулентные потоки (а они в основном и встречаются при решении технических задач), употребляя термин *скорость*, будем иметь в виду осредненную скорость.

Возвращаясь к вопросу о переходе ламинарного (слоистого) движения к турбулентному, отметим, что в случае движения жидкости в круглой трубе все особенности, которые может иметь поток жидкости, определяются родом жидкости (т.е. плотностью ρ и динамическим коэффициентом вязкости η), диаметром трубы D и расходом жидкости Q (или, при заданном диаметре D , средней скоростью $v = 4Q/\pi D^2$). Анализируя этот вопрос, О.Рейнольдс предложил в качестве критерия, определяющего режим движения, безразмерную комбинацию этих величин $\rho v D / \eta$, которая получила название *числа Рейнольдса*

$$Re_D = \frac{vD}{\nu}, \quad (5.80)$$

где $\nu = \eta/\rho$ — *кинематический коэффициент вязкости*, а индекс D указывает, что характерным размером поперечного сечения потока принят диаметр трубы D (а не другая величина, например, геометрический радиус трубы или ее гидравлический радиус).

Как показали экспериментальные исследования, в трубах существует три области значений чисел Рейнольдса, которые отделяются друг от друга *нижним и верхним критическими числами Рейнольдса*: $(Re_D)'_{кр}$ и $(Re_D)''_{кр}$. Существование и особенности режимов движения жидкости в этих областях можно представить в следующем виде.

Ламинарный режим	Возможен устойчивый	Возможен неустойчивый	Невозможен
Турбулентный режим	Невозможен	Возможен устойчивый	Возможен устойчивый
	0	$(Re_D)'_{кр}$	$(Re_D)''_{кр}$ Re_D

Как видно, при $Re_D < (Re_D)'_{кр}$, т.е. при малых скоростях, в трубах малого диаметра в случае очень вязких жидкостей будет существовать ламинарное (слоистое) движение, причем оно будет устойчиво, т.е. если искусственно разрушить слоистую структуру (турбулизовать поток), то она вновь восстановится. При больших числах $Re_D > (Re_D)''_{кр}$ слоистая структура существовать не может, а при $(Re_D)'_{кр} < Re_D < (Re_D)''_{кр}$ ламинарный режим существовать может, но он неустойчив; если слоистая структура разрушается, то она вновь не восстанавливается и режим движения становится турбулентным.

Для круглых труб $(Re_D)'_{кр} = 2300$, а $(Re_D)''_{кр} = 4000—100\,000$, причем $(Re_D)''_{кр}$ изменяется в этом диапазоне в зависимости от условий входа в трубу, шероховатости поверхности стенок трубы, состояния воды в резервуаре, питающем трубу, и т.п., а $(Re_D)'_{кр}$ от этих величин практически не зависит.

В заключение приведем распределение скорости жидкости в круглой трубе при ламинарном и турбулентном режимах. Эти распределения будут теоретически обоснованы в гл. 18.

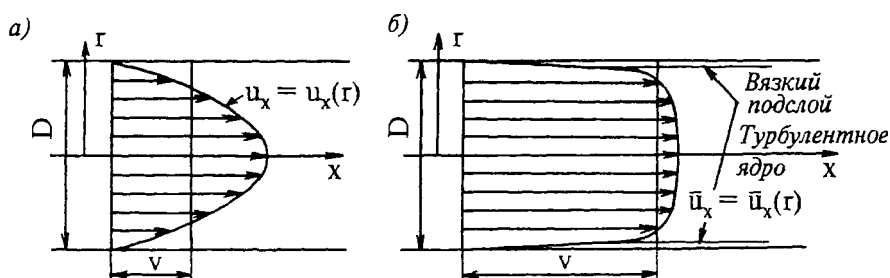


Рис. 5.15. Распределение скорости в поперечном сечении круглоцилиндрической трубы: при ламинарном (а) и турбулентном (б) режимах

При ламинарном режиме распределение скорости жидкости в полярных координатах подчиняется зависимости (рис. 5.15,а)

$$u_x = u_0 \left(1 - \frac{4r^2}{D^2} \right), \quad (5.81)$$

где u_0 — скорость на оси трубы. Т.е. эпюра скорости представляет параболоид вращения с максимальной скоростью на оси. Средняя скорость v равна половине максимальной:

$$v = \frac{1}{\pi D^2} \int_0^{\frac{D}{2}} u_x 2\pi r dr = \frac{4u_0}{\pi D^2} \int_0^{\frac{D}{2}} \left(1 - \frac{4r^2}{D^2} \right) 2\pi r dr = \frac{u_0}{2}.$$

При турбулентном движении представляет интерес распределение осредненной скорости $\bar{u}_x(r)$. Здесь в простейшем случае (см. гл. 18) рассматриваем двухслойную модель турбулентного потока (рис. 5.15, б).

1. **Вязкий подслой.** Это очень тонкий, измеряемый долями миллиметра, слой, прилегающий непосредственно к стенке трубы. В этом слое решающую роль в формировании эпюры скорости играют силы вязкости. В пределах этого слоя скорость резко возрастает от нуля на твердой стенке до $(0,6-0,8) v$, причем зависимость величины скорости $\bar{u}_x$ от расстояния до стенки практически линейная.

2. **Турбулентное ядро.** Это остальная часть потока, в которой вязкие напряжения не оказывают непосредственного влияния на распределение осредненной скорости $\bar{u}_x$; скорость сравнительно (с вязким подслоем) медленно возрастает с удалением от стенки. Максимальная скорость на оси трубы лишь на 10—15% превышает среднюю скорость v .

Подчеркнем, что режим движения жидкости турбулентный как в вязком подслое, так и в турбулентном ядре.

5.11. Потери напора при установившемся равномерном движении жидкости (потери по длине)

Предварительно отметим, что потери напора при равномерном движении жидкости в цилиндрических руслах (трубопроводах, каналах и т.п.), обусловленные сопротивлением движению жидкости со стороны внутренней поверхности русл (касательными напряжениями, действующими со стороны твердых границ на поток), будем отличать от потерь напора при резкоизменяющемся движении, которые связаны главным образом с деформацией потока (изменение его поперечного сечения, изменение направления скорости потока, сопровождающиеся образованием застойных водоворотных областей течения). Потери напора при равномерном движении пропорциональны длине участка русла, на котором они имеют место, и поэтому они называются *потерями напора по длине*. Потери напора при резкоизменяющемся движении считаются сосредоточенными в месте, где поток деформируется, и называются *местными потерями напора*.

Чтобы установить структуру зависимости для вычисления потерь напора *по длине*, рассмотрим потери напора h_ℓ на единицу длины, т.е. гидравлический уклон $J_\ell = h_\ell / \ell$, и определим, от каких характеристик потока он зависит. Будем рассматривать поток с расходом Q в круглоцилиндрической трубе диаметром D . Жидкость несжимаемая, ее механические свойства определяются плотностью ρ и динамическим коэффициентом вязкости η .

Кроме того, так как напор представляет собой поток механической энергии, отнесенный к *весовому* расходу $Q_B = \rho g Q$, потери напора будут зависеть и от ускорения силы тяжести.

Все указанные параметры потока, кроме характеристик внутренней поверхности трубы, сравнительно легко измеряются. Для оценки влияния шероховатости стенок трубы на потери напора рассмотрим только такие поверхности, шероховатость которых описывается одной величиной — *высотой выступов шероховатости* Δ . Такую шероховатость называют *зернистой* (рис. 5.16, а). На самом деле влияние на поток может ока-

зывать не только высота выступов, но и их взаимное расположение на поверхности стенки, их очертание и т.п. Например, при прочих равных условиях выступы, имеющие очертание, представленное на рис. 5.16,б, оказывают большее сопротивление течению жидкости и, следовательно, вызывают большие потери напора, чем выступы, представленные на рис. 5.16,в.

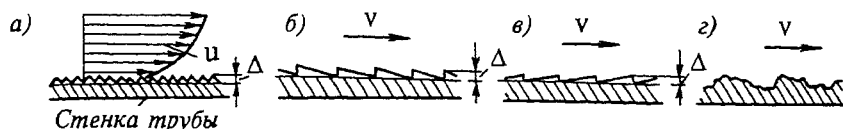


Рис. 5.16. Различные виды шероховатых стенок:
а — зернистая шероховатость; б и в — различные виды структурированной шероховатости; г — естественная шероховатость

В общем случае естественной шероховатости, имеющей место вследствие либо технологических особенностей изготовления труб (металлических, бетонных, деревянных и т.п.), либо вследствие их коррозии, либо по каким-то другим причинам (рис. 5.16,г), трудно бывает установить не только высоту выступов (хотя бы среднюю), но даже место, откуда надо отсчитывать эту высоту. О том, как ввести в гидравлические расчеты характеристику внутренней поверхности в случаях, представленных на рис. 5.16, будет сказано далее, а пока рассмотрим зернистую шероховатость, а геометрическую высоту выступов будем называть *абсолютной шероховатостью* Δ . Итак,

$$J_e = f(\rho, \eta, Q, D, \Delta, g). \quad (5.82)$$

Для того чтобы выяснить структуру зависимости J_e от шести неизвестных, воспользуемся методами анализа размерностей (см. гл. 20). Этот анализ основан на простом очевидном правиле, согласно которому суммировать и приравнивать можно лишь величины, имеющие одинаковые единицы измерения, а также на том, что единица измерения любой величины имеет вид степенного комплекса. Из этого правила, в частности, следует, что безразмерная величина J_e должна быть функцией от безразмерных произведений величин $\rho, \eta, v, D, \Delta, g$. Из этих шести параметров, содержащих три независимые единицы измерения (килограмм, метр, секунда), можно образовать несколько безразмерных произведений, но только три из них будут независимыми, а остальные будут представлять произведения или степени этих трех безразмерных произведений. Не приводя формальные выкладки, выберем в качестве независимых безразмерных произведений $\rho v D / \eta, \Delta / D$ и $v^2 / g D$. Первое из них представляет собой известное число Рейнольдса Re_D , а второе называют *относительной шероховатостью* $\Delta_r = \Delta / D$. Итак, используя анализ размерности, вместо (5.82) можно принять

$$J_e = J_e \left(Re_D, \Delta_r, \frac{v^2}{gD} \right), \quad (5.83)$$

где

$$Re_D = \frac{vD}{\nu}, \quad \Delta_r = \frac{\Delta}{D}.$$

Как показали экспериментальные исследования, число Рейнольдса можно использовать не только в качестве критерия для установления

режима движения жидкости (п. 5.10), но и как параметр, определяющий внутреннюю структуру турбулентного потока. Как отмечалось ранее, структура потока в свою очередь определяет интенсивность диссипации механической энергии за счет работы сил вязкости, т.е. потери напора. Относительная шероховатость позволяет учесть влияющие характеристики внутренней поверхности трубы на потери напора.

Экспериментальное изучение потоков жидкости в трубах и каналах показало, что во многих практически важных случаях потери напора пропорциональны квадрату скорости и не зависят от вязкости жидкости. На этом основании, имея в виду получить наиболее простую для практического использования структуру зависимости для J_e , выражение (5.83) представим в виде

$$J_e = f(\text{Re}_D, \Delta_r) \frac{v^2}{gD}. \quad (5.84)$$

Из этой зависимости получим выражение для потери напора h_f , одновременно выделив скоростной напор $v^2/2g$ как величину, входящую в уравнение Бернулли в виде отдельного слагаемого. Обозначив $2f(\text{Re}_D, \Delta_r)$ через $\lambda(\text{Re}_D, \Delta_r)$, получим формулу Вейсбаха—Дарси:

$$h_f = \lambda(\text{Re}_D, \Delta_r) \frac{\ell}{D} \frac{v^2}{2g}. \quad (5.85)$$

Функция $\lambda(\text{Re}_D, \Delta_r)$ называется *коэффициентом гидравлического трения*.

Вид функции $\lambda = \lambda(\text{Re}_D, \Delta_r)$ в виде графика был установлен экспериментальным путем и представлен И.Никурадзе, который выполнил в 1920-х годах свои исследования в Германии. Этот график, представленный на рис. 5.17, носит название график Никурадзе. Он имеет следующие особенности.

По горизонтальной оси отложено Re_D в логарифмическом масштабе, чтобы охватить возможно больший диапазон значений Re_D и в то

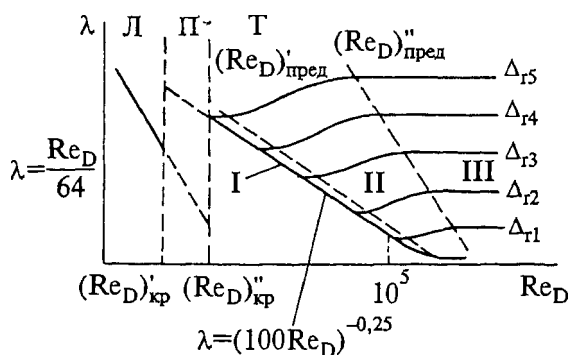


Рис. 5.17. Схематизация графика Никурадзе для зависимости $\lambda = \lambda(\text{Re}_D, \Delta_r)$

же время достаточно детально представить область малых значений $\text{Re}_D < 10^4$, относящихся к ламинарному движению. Для того чтобы представить зависимость λ от относительной шероховатости Δ_r , на этом

же графике каждому фиксированному значению Δ_r ставится в соответствие отдельная кривая $\lambda = \lambda(Re_D)$.

Вертикальные линии $Re_D = (Re_D)'_{кр}$ и $Re_D = (Re_D)''_{кр}$ отделяют зону устойчивого ламинарного режима Π и зону, где может существовать только турбулентный режим T , от переходной зоны Π' , где могут иметь место или тот, или другой режимы (см. разд. 5.10). При построении этого графика принимают $(Re_D)'_{кр} = 2300$, а $(Re_D)''_{кр} = 4000$.

При ламинарном режиме движения выражение для λ может быть получено и теоретически и экспериментально, причем оба выражения находятся в хорошем согласии друг с другом. Оказывается, что при ламинарном движении λ не зависит от шероховатости и определяется по зависимости

$$\lambda = \frac{64}{Re_D}. \quad (5.86)$$

Подставив это выражение в (5.85), найдем

$$\begin{aligned} h_f &= \lambda \frac{\ell}{D} \frac{v^2}{2g} = \frac{64}{Re_D} \frac{\ell}{D} \frac{v^2}{2g} = \frac{64v}{vD} \frac{\ell}{D} \frac{v^2}{2g} = \\ &= \frac{32v}{g} \frac{\ell}{D^2} v = \frac{128}{\pi g} \frac{\ell}{D^4} Q. \end{aligned} \quad (5.87)$$

Как видно из (5.87), потери напора при ламинарном движении пропорциональны средней скорости в первой степени или, при постоянном расходе Q , обратно пропорциональны четвертой степени диаметра трубы. Этот результат экспериментально был установлен в 40-х годах прошлого века французским врачом Пуазейлем, поэтому ламинарное движение жидкости в цилиндрических трубах называют течением Пуазейля. При числах Re_D , лежащих в диапазоне $(Re_D)'_{кр} < Re_D < (Re_D)''_{кр}$, обычно предполагают, что движение турбулентное (ламинарное движение здесь неустойчиво, и, если не предпринять специальных мер (см. разд. 5.10), оно будет турбулентным). Поэтому на область Π распространяют зависимости для λ , экстраполируя их из области турбулентного режима движения T .

При турбулентном режиме движения выделяют три области: I , II и III (см. рис. 5.17), которые отделяются друг от друга штриховыми линиями нижних и верхних предельных чисел Рейнольдса: $(Re_D)'_{пред}$ и $(Re_D)''_{пред}$. Область I характеризуется тем, что в ней коэффициент гидравлического трения λ не зависит от относительной шероховатости и все линии, отвечающие различным значениям Δ_r , сливаются в одну, которая, собственно, и представляет всю зону I . Эта линия, которая при $Re_D < 10^5$ на рис. 5.17 имеет вид прямой, достаточно хорошо аппроксимируется зависимостью, предложенной немецким ученым Блазиусом,

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re_D^{0,25}} = (100 Re_D)^{-0,25}. \quad (5.88)$$

Подставив (5.88) в (5.85), получим, что в этой области $h_f \sim v^{1,75}$; область I называется областью *гидравлически гладких труб*; это следует

понимать так: хотя шероховатость в трубах всегда имеется, но при $Re_D < (Re_D)'_{\text{пред}}$ эта шероховатость не оказывает влияния на потери напора. При больших значениях Re_D в той же трубе λ будет зависеть от Δ_r .

Область III характеризуется тем, что в ней коэффициент гидравлического трения λ не зависит от числа Рейнольдса, а зависит только от относительной шероховатости Δ_r ; графически это проявляется в том, что линии $\lambda = \lambda(Re_D, \Delta_r)$ в этой области параллельны оси Re_D . Так как здесь $\lambda = \lambda(\Delta_r)$, то, согласно зависимости (5.85), потери напора $h_\ell \sim v^2$; поэтому область III называют областью *квадратичного* сопротивления.

В области II коэффициент гидравлического трения зависит от Re_D и от Δ_r ; согласно (5.85) здесь $h_\ell \sim v^{1,75 \dots 2,0}$. Учитывая, что из области II в область III обычно попадают, увеличивая числа Re_D , что достигается практически увеличением средней скорости в трубе, область II называют областью *доквадратичного* сопротивления.

Подводя итоги анализа графика Никурадзе, отметим следующее.

1. График имеет очень большое принципиальное значение для механики жидкости, так как с его помощью стало возможным рассчитывать потери напора при движении любых жидкостей. До обобщения вопроса о потерях напора, сделанных Никурадзе, различными исследованиями предлагались специальные формулы с целью вычисления потерь напора для каждого вида жидкостей (вода, керосин, масло, спирт и т.п.).

2. Никурадзе было сделано обобщение только для зернистой (искусственной) шероховатости; для случаев естественной шероховатости график зависимости $\lambda = \lambda(Re_D, \Delta_r)$ имеет в основном те же особенности, однако каждому виду естественной шероховатости следует поставить в соответствие высоту выступов некоторой фиктивной *эквивалентной* зернистой шероховатости, в зависимости от численного значения которой определяется величина λ . Эквивалентность некоторой зернистой шероховатости и заданной естественной шероховатости устанавливается на основе гидравлических исследований потерь напора в трубах с обеими указанными (зернистой и естественной) шероховатостями; значение λ в обеих трубах должно быть одинаковым в области квадратичного сопротивления.

3. В случае естественной шероховатости расчетная высота выступов эквивалентной зернистой шероховатости назначается с помощью специальных таблиц, где значение Δ определяется в зависимости от словесного описания состояния внутренней поверхности трубы, которое зависит от технологии изготовления и монтажа трубы, от условий ее эксплуатации и т.п. (табл. 5.1).

4. Описанные выше особенности влияния шероховатости получены при изучении зернистой шероховатости небольшой высоты: $\Delta_r = \Delta/D < 0,07$. В случае, когда $\Delta_r > 0,07$, а также если выступы шероховатости расположены регулярно (например, винтовая резьба внутри трубы), особенности зависимости $\lambda = \lambda(Re_D, \Delta_r)$ могут быть значительно сложнее. Иногда, в частности, отсутствует область квадратичного сопротивления, и при любых Re_D приходится считать, что коэффициент λ зависит от Re_D . Это осложняет выполнение гидравлических исследований.

Значения параметров шероховатости для разных материалов

Поверхность	Δ , мм	n
Исключительно гладкие поверхности (эмалированные, глазурованные и т.п.)	0,02	0,010(0,009—0,013)
Цементная штукатурка:		
ожезненная или чисто заглаженная	0,1(0,02—0,3)	<0,010
обычная	0,3(0,1—0,8)	<0,012
Трубы стальные		
бесшовные новые чистые	0,014(0,01—0,02)	0,010(0,009—0,011)
сварные новые чистые		0,012(0,011—0,013)
умеренно заржавленные	0,05(0,03—0,12)	0,014(0,013—0,015)
Трубы чугунные новые	0,5(0,3—0,7)	0,015(0,013—0,016)
корродированные	0,7(0,25—1,0)	0,020(0,016—0,025)
	1,3(1,00—1,5)	
Деревянные лотки из досок:		
строганных	2(0,5—8,0)	0,014(0,010—0,018)
нестроганных	3(0,8—10,0)	0,016(0,0012—0,019)
Бетонированная стенка	2(0,3—5,0)	0,013(0,012—0,015)
Кирпичная кладка	3(1,0—6,0)	0,015(0,013—0,017)
Бутовая кладка	20(5—70)	0,021(0,017—0,025)
Бульжная мостовая	25(15—30)	0,022(0,020—0,025)
Канализационные трубы:		
бетонные и железобетонные	2	0,014
керамические	1,25	0,013
Земляные каналы прямолинейные:		
чистые, после эксплуатации	50(15—200)	0,022(0,018—0,024)
с короткой травой и редкими водорослями		0,028(0,024—0,033)
чистое дно, кустарник на откосах		0,06(0,04—0,08)
Естественные водотоки (реки):		
чистые прямолинейные без перекатов и омутов		0,030(0,025—0,033)
чистые извилистые, с омутами и перекатами		0,040(0,033—0,045)
очень заросшие с застрявшими тяжелыми стволами и порослью		0,11(0,075—0,15)

Приводятся наиболее вероятные значения для средних условий; в скобках указываются возможные пределы колебаний.

5. В газопроводах потери энергии оцениваются не как потери напора h_f , а как потери давления Δp по длине. При этом формула Вейсбаха—Дарси представляется в виде

$$\Delta p = \rho \lambda \frac{\ell}{D} \frac{v^2}{2}, \quad (5.89)$$

а коэффициент гидравлического трения рассчитывается так же, как для несжимаемых жидкостей.

6. На рис. 5.18 представлен график зависимости $\lambda = \lambda(\text{Re}_D, \Delta_r)$, с помощью которого можно выполнять практические расчеты потерь при равномерном движении. Этот график является обобщением большого экспериментального материала, основанного на исследованиях потерь

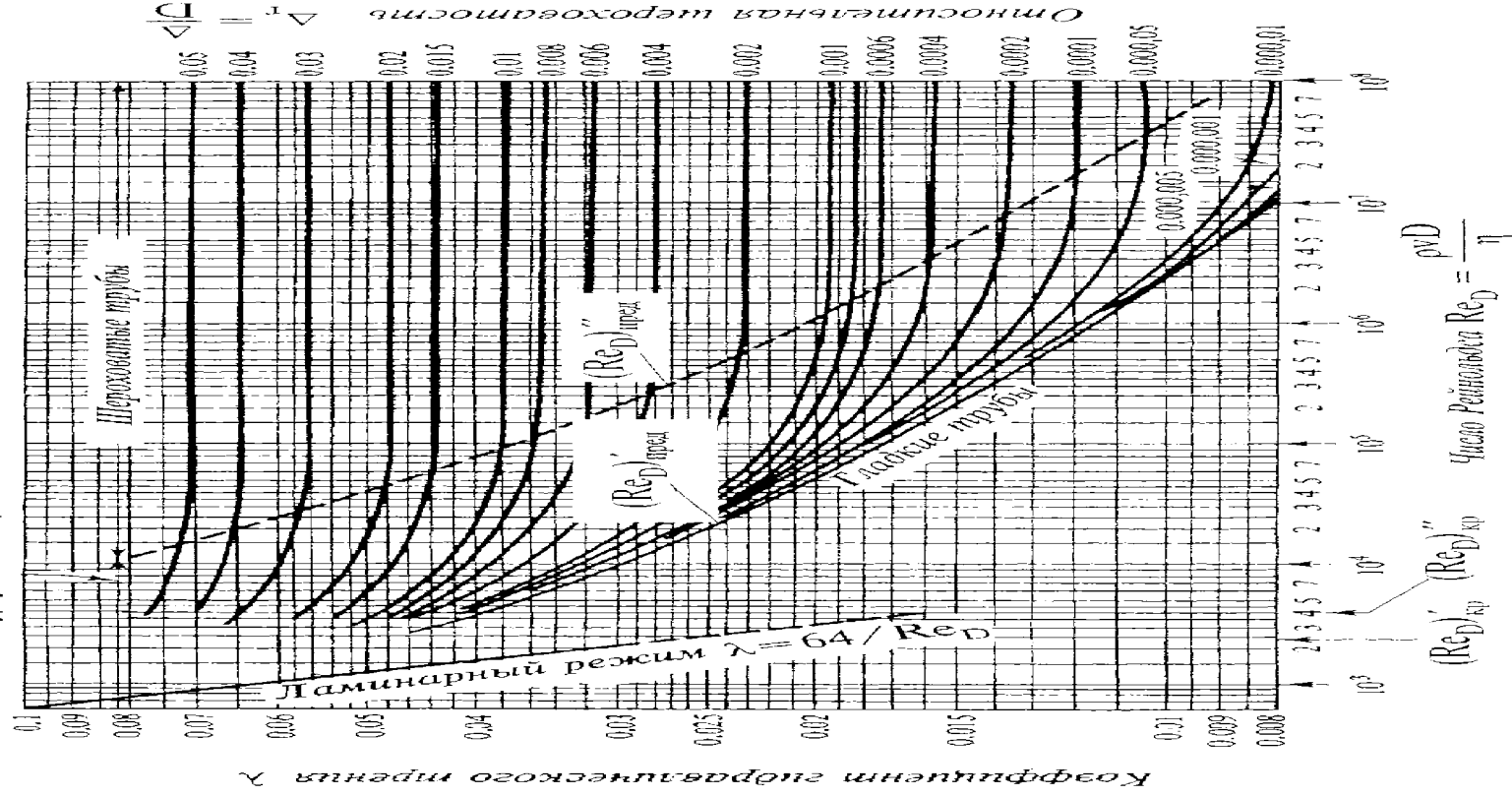


Рис. 5.18. График Колебрука-Уайта

напора в реальных трубах. Необходимым приложением к этому графику является табл. 5.1, в которой представлены значения Δ для различных трубопроводов в зависимости от их материала, технологии изготовления и монтажа, условий эксплуатации. График рис. 5.18 называют графиком Кольбука—Уайта, а в США — графиком Муди.

7. Зависимости $\lambda = \lambda(\text{Re}_D, \Delta_r)$ для турбулентного режима движения хорошо аппроксимируются формулой Альтшуля (при $\Delta_r < 0,007$):

$$\lambda = 0,11 \left(\Delta_r + \frac{68}{\text{Re}_D} \right)^{0,25}, \quad (5.90)$$

а в области квадратичного сопротивления формулой Шифринсона:

$$\lambda = 0,114 \sqrt{\Delta_r}. \quad (5.91)$$

В области гладкого сопротивления ($\Delta_r \sim 0$) формула (5.90) дает хорошее совпадение с зависимостью Блазиуса (5.18).

8. Потери напора при плавноизменяющемся движении вычисляют по тем же зависимостям, что и при равномерном движении, принимая значения скорости и геометрических размеров поперечного потока как средние между сечениями 1—1 и 2—2, между которыми вычисляется потеря напора. Потерями энергии на переформирование потока пренебрегают. Потери напора при установившемся равномерном и плавноизменяющемся движениях объединяют одним термином — потери напора по длине.

5.12. Формула Шези

При расчете потерь напора в открытых руслах (реках, каналах) вместо формулы Вейсбаха—Дарси, как правило, используют формулу Шези:

$$v = C \sqrt{RJ_e} = C \sqrt{R \frac{h_\ell}{\ell}}, \quad (5.92)$$

где C — коэффициент Шези, $\sqrt{m}/c$. Эта формула была предложена в начале XIX века на основе исследований французского инженера А. Шези, связанных с водоснабжением Парижа.

Первоначально она была представлена в виде

$$v = 50 \sqrt{RJ_e}; \quad (5.93)$$

если принять во внимание, что, как показали последующие эксперименты, для большинства потоков, встречающихся в инженерно-строительной практике, C изменяется в пределах 40—60 $\sqrt{m}/c$, то зависимость (5.93), устанавливающую с ошибкой, не превышающей 20%, зависимость средней скорости от потери напора, следует признать чрезвычайно удачной. Впоследствии зависимость коэффициента Шези C от шероховатости и размеров русла была достаточно хорошо изучена. Для его вычисления была разработана шкала *коэффициентов шероховатости* n , эквивалентная шкале абсолютных шероховатостей Δ ; обе эти характеристики шероховатости, которые определяются по словесному описанию поверхности русла, приведены в табл. 5.1. Кроме того, рекомендованы зависимости и таблицы для определения C . Наиболее широкое

распространение, связанное с ее простотой, получила формула Маннинга:

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6}, \quad (5.94)$$

где n — коэффициент шероховатости, R — гидравлический радиус.

Отметим, что для большинства открытых потоков значение гидравлического радиуса R мало отличается от глубины потока h .

Установим формальную связь между коэффициентом Шези C и коэффициентом гидравлического трения λ . Для этого преобразуем формулу (5.92) к виду

$$h_f = \frac{\ell}{C^2 R} v^2$$

и, имея в виду течение в круглоцилиндрической трубе, примем $D = 4R$; выделив скоростной напор, получим:

$$h_f = \frac{8g}{C^2} \frac{\ell}{D} \frac{v^2}{2g}. \quad (5.95)$$

Сравнивая (5.95) и (5.85), найдем

$$\lambda = \frac{8g}{C^2}. \quad (5.96)$$

Полученная связь между λ и C на первый взгляд указывает на полную эквивалентность формул Шези и Вейсбаха—Дарси. Однако формула и таблицы, используемые для определения численного значения C , не позволяют учесть влияния числа Рейнольдса Re на потери напора. Если принять во внимание приведенный выше анализ зависимости $\lambda = \lambda(Re_D, \Delta_r)$, то станет очевидно, что область применения формулы Шези — это область квадратичного сопротивления, в которой $\lambda = \lambda(\Delta_r)$ и не зависит от Re_D .

На практике формулы Шези и Маннинга применяют главным образом для расчета потерь напора в открытых руслах (реках, каналах), в которых режим движения воды всегда турбулентный и, как правило, имеет место область квадратичного сопротивления.

5.13. Потери энергии по длине в потоке сжимаемой жидкости (газа)

При установившемся движении сжимаемой жидкости (газа) в круглоцилиндрическом трубопроводе диаметром D потери энергии, представляемые как падение гидродинамического давления dp на участке длиной dx , вычисляются по формуле Вейсбаха—Дарси (5.89):

$$dp = \lambda \frac{dx}{D} \frac{\rho v^2}{2}. \quad (5.97)$$

Эту зависимость следует преобразовать, имея в виду, что в случае несжимаемой жидкости закон сохранения массы в цилиндрической трубе имеет вид $v = \text{const}$ (вдоль трубы), в то время как для сжимаемой жидкости этот же закон имеет вид $\rho v = \text{const}$ (вдоль трубы). Из зависимости (5.97) видно, что вследствие увеличения скорости v вдоль трубы, обус-

ловленного уменьшением давления из-за потерь энергии по длине, потери давления на единицу длины трубы $\left(\frac{dp}{dx}\right)$ увеличиваются. Как правило, эту особенность расчета потерь по длине следует принимать во внимание при расчете магистральных газопроводов; если специальная термоизоляция трубопровода отсутствует, то температуру газа T вдоль всей трубы можно считать постоянной и рассматривать изотермическое течение газа.

Введем в расчет связь между плотностью газа ρ и давлением p согласно уравнению состояния газа:

$$\frac{p}{\rho} = RT, \quad (5.98)$$

здесь R — газовая постоянная.

Подставим (5.98) в (5.97) и представим последнее в виде

$$p dp = \lambda \frac{dx}{D} \cdot \frac{(\rho v)^2}{2} RT. \quad (5.99)$$

Для простоты полагаем, что область сопротивления квадратичная и $\lambda = \lambda(\Delta_r)$. Проинтегрируем это уравнение по x от сечения 1 до сечения 2, удаленных на расстояние ℓ друг от друга:

$$p_1^2 - p_2^2 = \lambda \frac{\ell}{D} (\rho v)^2 RT. \quad (5.100)$$

Полученное уравнение позволяет найти, например, давление в сечении 2, если известно давление в сечении 1:

$$p_2 = \sqrt{p_1^2 - \lambda \frac{\ell}{D} (\rho v)^2 RT}. \quad (5.101)$$

Из полученного выражения, в частности, следует, что с увеличением температуры газа (одинаковой вдоль всей трубы) потери напора возрастают. Кроме того, использование формулы (5.101) целесообразно лишь при больших сравнительно с p_1 перепадах давления, в противном случае, когда

$$p_1 \gg \lambda \frac{\ell}{D} (\rho v)^2 RT, \quad (5.102)$$

выражение (5.101) можно упростить, разложив бином в правой части в ряд:

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 \left(1 - \lambda \frac{\ell}{D} \frac{(\rho v)^2}{p_1^2} RT \right)^{\frac{1}{2}} \approx p_1 \left(1 - \frac{1}{2} \lambda \frac{\ell}{D} \frac{(\rho v)^2}{p_1^2} RT \right) = \\ &= p_1 - \lambda \frac{\ell}{D} \frac{(\rho v)^2}{2 p_1} RT = p_1 - \lambda \frac{\ell}{D} \frac{\rho v^2}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, при выполнении условия (5.102) можно пользоваться формулой Вейсбаха—Дарси для несжимаемой жидкости:

$$p_1 - p_2 = \lambda \frac{\ell}{D} \frac{\rho v^2}{2}. \quad (5.103)$$

5.14. Местные потери напора

Предварительные предложения

Предположим, что для расчета характеристик потока в трубопроводе используется уравнение Бернулли и на каких-либо участках трубопровода движение резкоизменяющееся; для вычисления потерь напора на этих участках $h_{\text{ри}}$, которые обычно называют *местными* (так как они сосредоточены на сравнительно небольшой длине трубопровода), необходимо иметь зависимости, аналогичные зависимостям для вычисления потерь по длине. Для получения таких зависимостей будем основываться на следующих предпосылках.

1. Потери напора (диссипация механической энергии, отнесенная к *весовому* расходу) на участке резкоизменяющегося движения зависят от внутренней структуры турбулентного потока, которая, как и в случае равномерного движения, определяется физическими свойствами жидкости (ρ , η), расходом Q , геометрическими размерами и формой трубы (канала) на участке, который обуславливает резкое изменение

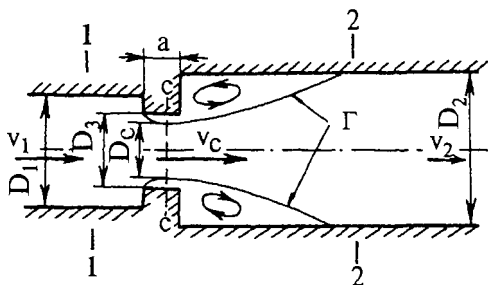


Рис. 5.19. Резкоизменяющееся напорное движение жидкости

потока (рис. 5.19), а также ускорением силы тяжести g . Отметим, что такая характеристика внутренней поверхности трубы (канала), как шероховатость, в этом случае играет несущественную роль и из рассмотрения исключается. Таким образом, полагаем, что

$$h_{\text{ри}} = f_1(\rho, \eta, Q, g, \text{ параметры размеров и формы трубы}). \quad (5.104)$$

Например, в сравнительно простом случае, когда труба состоит из круглоцилиндрических участков (см. рис. 5.19), такими параметрами являются a , D_1 , D_2 , D_3 ; в других случаях таких параметров может быть значительно больше.

2. Если выбрать в канале некоторое характерное поперечное сечение потока (например, 1—1 на рис. 5.19), то остальные размеры канала можно представить как безразмерные, отнеся их к размерам выделенного сечения. При этом параметры данного участка трубы можно характеризовать одной размерной величиной (например, значением D_1), а безразмерные величины D_2/D_1 , D_3/D_1 , a/D_1 будут описывать форму участка трубы.

Вводя в расчет один линейный размер D_1 , целесообразно, как и в случае равномерного движения, вместо Q ввести в расчет среднюю ско-

рость в этом сечении: $v_1 = 4Q/\pi D_1^2$. Учитывая вышеизложенное, перепишем (5.104):

$$h_{\text{ри}} = D_1 \cdot f_2(\rho, \eta, v_1, D_1, D_2/D_1, D_3/D_1, a/D_1, g). \quad (5.105)$$

Из размерных величин, входящих в это выражение, можно составить две безразмерные комбинации:

$$\text{Re}_D = \rho v_1 D_1 / \eta = v_1 D_1 / \nu \quad \text{и} \quad v_1^2 / g D_1. \quad (5.106)$$

Как и в случае равномерного движения, будем считать, что это число Re_D определяет внутреннюю структуру турбулентного потока. Однако предшествующие рассуждения пока не позволили установить рациональную структуру зависимости для определения $h_{\text{ри}}$.

3. Как показали экспериментальные исследования, при резкоизменяющемся движении потери напора имеют место главным образом на тех участках потока, на которых он расширяется (например, на участке между сечениями с—с и 2—2 на рис. 5.19). При сжатии потока (участок между 1—1 и с—с) потери напора значительно меньше. Это связано в определенной мере с двумя обстоятельствами:

а) на участках расширения обычно существуют *водоворотные области*, объем которых значительно больше, чем на участках сужения; эти области взаимодействуют с *транзитным потоком* (при турбулентном движении за счет водообмена через граничную поверхность Γ), забирают у него и диссипируют значительное количество энергии;

б) при турбулентном режиме движения, который в основном и представляет практический интерес, на участках расширения возрастают значения пульсационной скорости и часть кинетической энергии осредненного движения (которую оценивают и измеряют величиной скоростного напора) переходит в энергию пульсационного движения (которая выпадает из баланса механической энергии, описываемого уравнением Бернулли) и быстро переходит в тепло.

Имея это в виду, для определения структуры зависимости для $h_{\text{ри}}$ рассмотрим потерю напора при резком расширении установившегося турбулентного потока и, получив для нее зависимость, используем структуру этой зависимости для других случаев резкоизменяющегося движения.

Потери напора при резком расширении установившегося турбулентного потока несжимаемой жидкости. Формула Борда

Задача о потерях напора при резком расширении была решена французским инженером-гидравликом Борда в XVIII веке, и полученное им решение практически не претерпело уточнений до сих пор. Хотя в настоящее время получают зависимости для потерь напора на основе рассуждений, отличных от тех, которые использовал Борда, зависимость для вычисления потерь напора при резком расширении называют формулой Борда.

Пусть поток из трубы 1 диаметра D_1 попадает в трубу 2 с диаметром D_2 (рис. 5.20). Средняя скорость в трубе 1 равна v_1 , а в трубе 2 — v_2 . Согласно уравнению неразрывности для несжимаемой жидкости

$v_1 \omega_1 = v_2 \omega_2$, где ω_1 и ω_2 — площади поперечных сечений труб 1 и 2 соответственно.

Будем считать, что на выходе из трубы 1 поток расширяется и на некотором расстоянии, обычно измеряемом несколькими диаметрами трубы 2, в сечении 2'—2' он вновь занимает все поперечное сечение

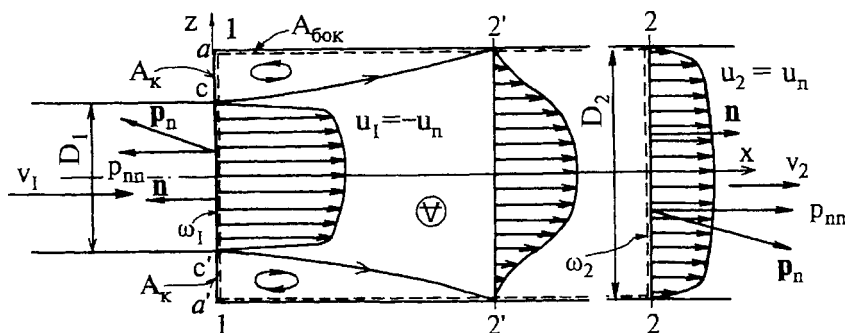


Рис. 5.20. Резкое расширение турбулентного потока

трубопровода. На этом участке образуется кольцеобразная водоворотная область, которая охватывает со всех сторон транзитный поток. В сечении 2'—2' движение резкоизменяющееся, скорости распределены весьма неравномерно; лишь на удалении в несколько D_2 от сечения 2'—2', где кончается водоворотная область, расположено сечение 2—2, в котором движение плавноизменяющееся.

Описанные выше особенности потока при его резком расширении характерны для *турбулентного* режима движения, и во всем последующем выводе будет предполагаться именно такой режим движения, что позволит сделать соответствующие допущения. В случае ламинарного режима общий вид расширяющегося потока может быть совершенно иным, например, водоворотная зона может отсутствовать, и будет иметь место безотрывное расширение потока. При этом большинство допущений, принятых в последующем выводе формулы Борда, будут вносить неприемлемые погрешности в окончательный результат.

Потеря напора входит в уравнение Бернулли, которое записывается для поперечных сечений потока. Наметим на рис. 5.20 два таких сечения: 1—1 и 2—2 (движение в них плавноизменяющееся); сечение 2'—2', очевидно, нельзя использовать, так как движение здесь резкоизменяющееся.

Для определения потери напора между 1—1 и 2—2, т.е. удельной мощности внутренних сил в выделенном объеме потока (диссипированной мощности), воспользуемся тем, что в уравнение, выражающее закон изменения количества движения, внутренние силы не входят. Определив с помощью этого уравнения внешние поверхностные силы, действующие в сечениях 1—1 и 2—2, и подставив полученные значения в уравнение Бернулли, выражающее закон изменения кинетической энергии (в котором учитываются работы и внешних, и внутренних поверхностных сил), можно выделить работу внутренних сил, а через нее и потерю напора.

Легко доказать (это почти очевидно), что внешние объемные (массовые) силы не оказывают влияния на работу внутренних сил трения,

которая зависит от структуры потока. Учитывая это, примем для простоты, что ось трубы x горизонтальна.

Уравнение Бернулли для сечений 1—1 и 2—2 представим в виде

$$z_1^C + \frac{p_1^C}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2^C + \frac{p_2^C}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{pp}, \quad (5.107)$$

где h_{pp} — потеря напора при резком расширении; индекс C означает, что значение относится к центру тяжести сечения.

Здесь $z_1^C = z_2^C = 0$, поэтому вклад в изменение кинетической энергии вносят поверхностные внешние силы давления, которые действуют по сечениям 1—1 и 2—2:

$$h_{pp} = \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} - \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \frac{p_1^C - p_2^C}{\gamma}. \quad (5.108)$$

Если с помощью уравнения количества движения получить дополнительную к (5.108) зависимость между $(p_1^C - p_2^C)$ и скоростями v_1 и v_2 , то можно будет получить искомую связь между h_{pp} и средними скоростями потока (v_1 и v_2).

Запишем уравнение количества движения для контрольного объема жидкости ∇ , находящегося в трубе 2 между сечениями 1—1 и 2—2 (в этот объем входят и транзитная струя, и водоворотная область [см. рис. 5.20]):

$$\frac{D}{Dt} \int_{\nabla} \rho \mathbf{u} dV = \int_{\nabla} \rho \mathbf{f} dV + \int_A \mathbf{p}_n dA. \quad (5.109)$$

Рассмотрим уравнение (5.109) в проекции на ось x ; при этом, если внешней объемной силой является сила тяжести, то первый интеграл в правой части обратится в ноль, так как ось x горизонтальна; кроме того, так как движение установившееся, то равна нулю локальная составляющая субстанциальной производной; в результате имеем:

$$\int_A \rho u_x u_n dA = \int_A p_{nx} dA. \quad (5.110)$$

Представим контрольную поверхность A , ограничивающую ∇ , в виде суммы

$$A = \omega_1 + \omega_2 + A_k + A_{бок},$$

где ω_1 и ω_2 — площади поперечных сечений потока 1—1 и 2—2; A_k — площадь поверхности кольца a с a' , соединяющего трубы; $A_{бок}$ — площадь боковой поверхности трубы 2 между сечениями 1—1 и 2—2.

Выпишем условия на слагаемых контрольной поверхности A (см. леммы из разд. 5.1):

$$\left. \begin{array}{ll} \text{на } \omega_1 : & u_x = u_1, \quad u_n = -u_1, \quad p_{nx} = -p_{nn} = p_1; \\ \text{на } \omega_2 : & u_x = u_2, \quad u_n = u_2, \quad p_{nx} = p_{nn} = -p_2; \\ \text{на } A_{бок} : & u_n = 0, \quad p_{nx} - \text{неизвестно}; \\ \text{на } A_k : & u_n = 0, \quad p_{nx} = -p_{nn} - \text{неизвестно.} \end{array} \right\} \quad (5.111)$$

Используя (5.111), упростим уравнение (5.110):

$$-\int_{\omega_1} \rho u_1^2 dA + \int_{\omega_2} \rho u_2^2 dA = \int_{\omega_1} p_1 dA - \int_{\omega_2} p_2 dA - \int_{A_k} p_{nn} dA + \int_{A_{бок}} p_{nx} dA. \quad (5.112)$$

Примем два допущения:

а) касательные напряжения p_{nx} на поверхности $A_{бок}$ малы настолько, что последним слагаемым в правой части (5.112) можно пренебречь по сравнению с другими слагаемыми;

б) нормальное напряжение на A_k определяется по такому же закону, что и в сечении ω_1 , т.е. экстраполируем зависимость $p_{nn} = -p_1$ на всю площадь ($\omega_1 + A_k$) и объединим первый и третий интегралы в правой части (5.112).

Для того чтобы преобразовать интегралы в левой части (5.112), введем согласно (5.14) коррективы количества движения; кроме того, так как в контрольных живых сечениях движение плавноизменяющееся и давление распределено по гидростатическому закону (лемма 2 из разд. 5.1), выразим интегралы в правой части (5.112) через давления в центрах тяжести живых сечений p_1^C и p_2^C по формуле (2.33).

В результате получим

$$-\alpha_1^0 \rho v_1^2 \omega_1 + \alpha_2^0 \rho v_2^2 \omega_2 = -p_1^C (\omega_1 + A_k) + p_2^C \omega_2. \quad (5.113)$$

Принимая во внимание, что $\omega_2 = \omega_1 + A_k$, а также используя уравнение неразрывности $v_1 \omega_1 = v_2 \omega_2$, приводим (5.113) к виду

$$p_2^C - p_1^C = \alpha_1^0 \rho v_1^2 \frac{\omega_1}{\omega_2} - \alpha_2^0 \rho v_2^2 = \alpha_1^0 \rho v_1 v_2 - \alpha_2^0 \rho v_2^2. \quad (5.114)$$

Для дальнейших преобразований введем еще одно допущение в дополнение к допущениям а и б:

в) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_1^0 = \alpha_2^0 = 1,0$, т.е. будем считать, что скорости в сечениях 1—1 и 2—2 распределены равномерно. Это достаточно хорошо отвечает действительности (с точностью 5—7%) при турбулентном движении. Подставляя (5.114) в (5.108), имеем

$$h_{pp} = \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} - \frac{1}{g} (v_1 v_2 - v_2^2).$$

После элементарных преобразований получаем окончательную формулу для вычисления потерь напора при резком расширении потока:

$$h_{pp} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}. \quad (5.115)$$

Полученная зависимость и называется *формулой Борда*.

Эту формулу преобразуем, выразив v_2 и v_1 согласно уравнению неразрывности, и представим в виде

$$h_{pp} = \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\right) \frac{v_1^2}{2g}. \quad (5.116)$$

Зависимость в формуле (5.116) используем при получении формулы для местных потерь напора в общем случае.

**Потери напора при резкоизменяющемся движении
(местные потери напора).
Формула Вейсбаха**

Имея в виду воспользоваться структурой зависимости (5.116) с целью получения формулы для потерь напора в общем случае резкоизменяющегося движения, сравним ее с формулой (5.105). При этом отметим, что потеря напора прямо пропорциональна второму безразмерному параметру v_1^2 / gD_1 [см. (5.106)], а коэффициент пропорциональности является функцией от параметров, характеризующих геометрическую форму трубопровода (канала) на участке, где движение резкоизменяющееся. Что касается влияния размеров, то оно должно проявиться через неизвестную функцию от числа Рейнольдса. Таким образом, формула для $h_{\text{ри}}$ должна иметь вид

$$h_{\text{ри}} = \zeta_{\text{ри}} \frac{v^2}{2g} f(\text{Re}), \quad (5.117)$$

где $\zeta_{\text{ри}}$ — коэффициент местной потери напора, зависящей от геометрической формы канала. Эта величина определяется экспериментально на основе гидравлических исследований конкретных участков каналов, которые обуславливают резкоизменяющееся движение; Re — число Рейнольдса, определяемое согласно (5.106).

Неизвестная функция $f(\text{Re})$ определяется также экспериментально. В случае, например, резкого расширения, рассмотренном выше, потеря напора $h_{\text{пр}}$, на первый взгляд, не зависела от Re , однако, как показывают экспериментальные исследования, значения α и α^0 зависят от числа Рейнольдса. Так как было принято $\alpha = \alpha^0 = 1,0$, то тем самым был включен в рассмотрение лишь случай очень больших значений Re (здесь есть определенная аналогия с областью квадратичного сопротивления в случае потери напора по длине, в которой коэффициент гидравлического трения не зависит от Re). Вообще же говоря, особенно учитывая случай ламинарного движения, потеря напора при резком расширении также зависит от числа Рейнольдса.

В общем случае местных потерь напора, как показали эксперименты, существенная зависимость потерь напора от числа Рейнольдса имеет место лишь при очень малых значениях Re , которые обычно не представляют интереса при решении большинства инженерно-строительных задач. Поэтому для практического пользования рекомендуется формула (5.117) в виде

$$h_{\text{ри}} = \zeta_{\text{ри}} \frac{v^2}{2g}, \quad (5.118)$$

где $\zeta_{\text{ри}}$ — коэффициент местной потери напора, определяемый по таблицам в зависимости от вида участка канала; такими участками могут быть поворот канала, изменение диаметра, диафрагма, задвижка и т.п. Таблицы для коэффициентов $\zeta_{\text{ри}}$ приводятся в гидравлических справочниках (см. список литературы). Зависимость (5.118) называется *формулой Вейсбаха*.

5.15. Справочные материалы для расчета местных потерь напора

1. Диафрагма с острыми краями в круглой трубе (рис. 5.21):

$$\zeta_d = \frac{h_d}{v^2/2g}$$

Таблица 5.2

Значения коэффициента сопротивления диафрагмы ζ_d

ω_2/ω_3	ω_2/ω_1										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	2,90	2,80	2,67	2,53	2,40	2,25	2,09	1,98	1,75	1,50	1,00
0,2	2,27	2,17	2,05	1,94	1,82	1,69	1,55	1,40	1,26	1,05	0,64
0,4	1,70	1,62	1,52	1,42	1,32	1,20	1,10	0,98	0,85	0,68	0,36
0,6	1,23	1,15	1,07	0,98	0,90	0,80	0,72	0,62	0,52	0,39	0,16
0,8	0,82	0,76	0,69	0,63	0,56	0,49	0,42	0,35	0,28	0,18	0,04
1,0	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,25	0,15	0,10	0,05	0

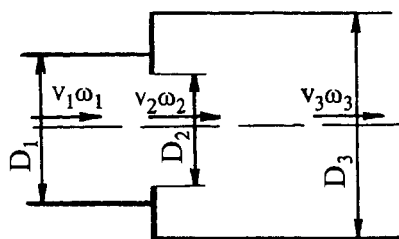


Рис. 5.21. Диафрагма с острыми кромками

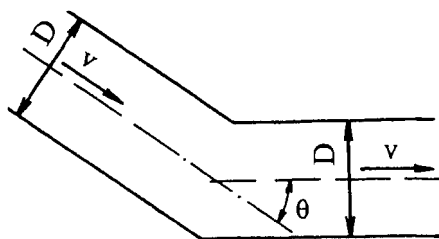


Рис. 5.22. Резкий поворот трубы

2. Резкий поворот трубы на угол θ (рис. 5.22):

$$\zeta_{pn} = \frac{h_{pn}}{v^2/2g};$$

$$\zeta_{pn} = A \cdot B. \quad (5.119)$$

Таблица 5.3

Значения коэффициента A к формуле (5.119)

θ°	0	20	30	45	60	75	90	110	130	150	180
A	—	2,50	2,22	1,87	1,50	1,28	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20

Таблица 5.4

Значения коэффициента B к формуле (5.119)

θ°	0	20	30	45	60	75	90	110	130	150	180
B	-	0,05	0,07	0,17	0,37	0,63	0,99	1,56	2,16	2,67	3,00

3. Плавный поворот трубы на угол θ (рис. 5.23):

$$\zeta_{\text{пп}} = \frac{h_{\text{пп}}}{v^2/2g};$$

$$\zeta_{\text{пп}} = \zeta' \frac{\theta}{90^\circ}. \quad (5.120)$$

Таблица 5.5

Значения коэффициента ζ' к формуле (5.120)

$\frac{D}{2R_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ζ'	0,13	0,14	0,16	0,21	0,29	0,44	0,66	0,98	1,41	1,98

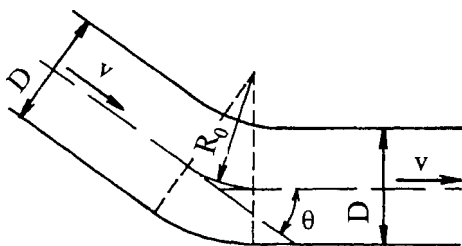


Рис. 5.23. Плавный поворот трубы

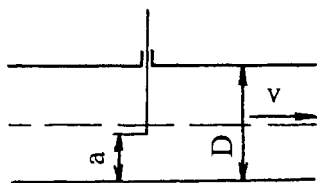


Рис. 5.24. Простая задвижка, перекрывающая трубу

4. Простая задвижка, перекрывающая трубу (рис. 5.24):

$$\zeta_{\text{з}} = \frac{h_{\text{з}}}{v^2/2g}.$$

Таблица 5.6

Значение $\zeta_{\text{з}}^{\text{кр}}$ для круглоцилиндрической трубы
и $\zeta_{\text{з}}^{\text{пр}}$ для трубы прямоугольного сечения

a/D	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\zeta_{\text{з}}^{\text{кр}}$	—	35,0	10,0	4,60	2,06	0,98	0,44	0,17	0,06
$\zeta_{\text{з}}^{\text{пр}}$	193	44,5	17,8	8,12	4,02	2,08	0,95	0,39	0,09

5. Дискový (дрóсельный) затвор, перекрывающий круглоцилиндрическую трубу (рис. 5.25):

$$\zeta_{\text{дз}} = \frac{h_{\text{дз}}}{v^2/2g}.$$

Таблица 5.7

Значение $\zeta_{\text{дз}}$ для дискового (дрóсельного) затвора

θ	5	10	20	30	40	50	60	70	75
$\zeta_{\text{дз}}$	—	0,52	1,54	4,50	11,0	29,0	108	625	—

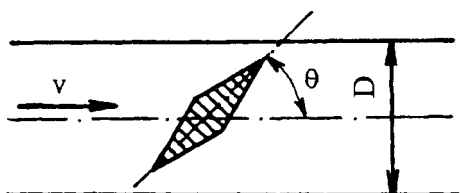


Рис. 5.25. Дискový (дрóсельный) затвор

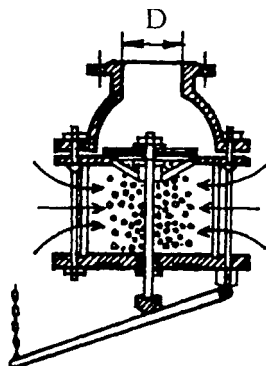


Рис. 5.26. Всасывающий клапан насоса

6. Всасывающий клапан с сеткой (рис. 5.26):

$$\zeta_{\text{кл}} = \frac{h_{\text{кл}}}{v^2/2g}.$$

Таблица 5.8

Значение $\zeta_{\text{кл}}$ для всасывающего клапана

D, мм	40	70	100	200	300	500	750
$\zeta_{\text{кл}}$	12	8,5	7,0	4,7	3,7	2,5	1,6

7. Сетка с квадратными ячейками (рис. 5.27):

$$\zeta_c = \frac{h_c}{v^2/2g},$$

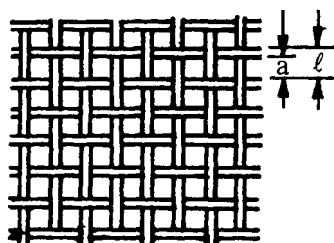


Рис. 5.27. Сетка с прямоугольными ячейками

где v — средняя скорость в ячейках сетки; $v = Q/m\omega$, — площадь живого сечения потока на подходе к сетке, m — коэффициент скважности сетки; $m = a^2/\ell^2$, a — размер стороны ячейки, ℓ — шаг сетки. Коэффициент ζ_c определяют по формуле

$$\zeta_c = (92 - 78 m) \text{Re}_a + 0,7(1,05 - m),$$

$$\text{где } \text{Re}_a = \frac{va}{\nu}.$$

УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТРУБОПРОВОДАХ

6.1. Классификация трубопроводов. Основные задачи расчета трубопроводов

При установившемся движении несжимаемой жидкости в трубопроводах имеют место потери напора по длине (т.е. при равномерном или плавноизменяющемся движении) — h_l и местные потери напора (т.е. при резкоизменяющемся движении) — h_m или h_j . Сравнивая их по величинам, можно выделить два крайних случая.

1. Сумма местных потерь напора пренебрежимо мала по сравнению с суммарными потерями по длине:

$$\sum h_l \gg \sum h_m. \quad (6.1)$$

Это обычно имеет место, если длина трубы $\ell > 1000 D$, где D — диаметр трубы, поэтому такие трубы называют *длинными*.

2. Потери по длине пренебрежимо малы по сравнению с местными потерями:

$$\sum h_l \ll \sum h_m. \quad (6.2)$$

Такие трубопроводы называют *весьма короткими*. Наиболее типичными представителями весьма коротких трубопроводов являются так называемые насадки — трубы небольшой длины (цилиндрические или конические), присоединенные к отверстию в стенке резервуара. В цилиндрических насадках можно пренебречь потерями напора по длине по сравнению с местными потерями, если их длина $\ell < 8 D$.

В общем случае, когда необходимо учитывать и местные потери напора и потери по длине, трубопроводы называют *короткими*.

Выделим особый случай *сифонных* трубопроводов, которые на некоторых участках расположены выше уровня воды в питающем их резервуаре (рис. 6.1). Такие трубопроводы иногда называют просто *сифонами*. Их расчет принципиально не отличается от расчета обычного трубопровода. Здесь только необходимо иметь в виду, что в сифоне всегда имеет место вакуум (давление в некоторых областях потока ниже

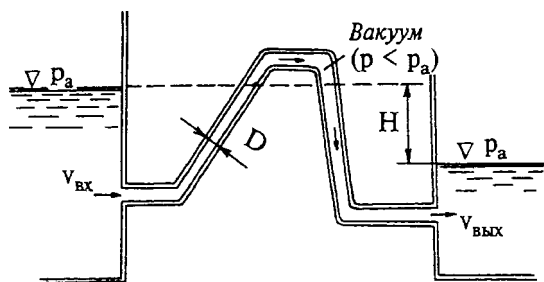


Рис. 6.1. Сифонный трубопровод

атмосферного). Их расчет принципиально не отличается от расчета обычного трубопровода. Здесь только необходимо иметь в виду, что в сифоне всегда имеет место вакуум (давление в некоторых областях потока ниже

атмосферного), и следует проверять, не будет ли вакуум $h_{\text{вак}}$ больше вакуума допустимого $(h_{\text{вак}})_{\text{доп}} = 6-7$ м вод.ст., при котором возможны разрывы сплошности потока и образование паровоздушных полостей (см. разд. 1.7). Эти явления, с одной стороны, нежелательны при эксплуатации трубопровода, а с другой стороны, они существенно усложняют расчет.

При гидравлическом расчете трубопроводов различают две основные задачи.

1. *Прямая задача.* Заданы геометрические форма и размеры трубопровода (длины и диаметры на всех участках, форма внутренней поверхности — шероховатость), все устройства для регулирования и измерения характеристик потока (здвижки, диафрагмы и т.п.), форма сопряжения трубопровода с питающим и питаемым резервуарами, т.е. гидравлические сопротивления, которые обуславливают местные потери напора.

При этом можно рассматривать два варианта: а) задан расход в трубопроводе, требуется найти суммарные потери напора в нем; б) заданы суммарные потери напора в трубе (например, разность уровней в питающем и питаемом резервуарах, см. рис. 6.1), требуется найти расход воды в трубопроводе.

2. *Обратная задача.* Заданы расход и суммарные потери напора в трубопроводе, геометрическая форма которого (шероховатость стенок, наличие поворотов, диафрагмы, задвижек и т.п.) известна. Требуется найти диаметр трубопровода.

В обеих задачах может представлять интерес и распределение давления вдоль трубопровода, так что в результате решения задачи обычно должны быть построены пьезометрическая и напорная линии.

6.2. Расчет коротких трубопроводов

Для вывода основной расчетной зависимости воспользуемся уравнением Бернулли по следующей схеме.

1. Намечаем два сечения, в которых движение плавноизменяющееся и для которых будем записывать уравнение Бернулли.

Сечения следует выбирать так, чтобы как можно больше слагаемых, входящих в уравнение Бернулли, были в этих сечениях заданы. Если кроме уравнения Бернулли не предполагается использовать какие-либо другие равенства, то следует так выбирать сечения, чтобы в уравнении Бернулли было неизвестно лишь одно слагаемое. Так, при решении задачи для трубопровода, представленного на рис. 6.2, считаем, что сечение 1—1 совпадает со свободной поверхностью: здесь известно, что давление p_1 равно атмосферному p_a , скорость жидкости v_1 равна нулю (считаем, что резервуар достаточно большой и скоростным напором вследствие снижения уровня воды в нем и изменением отметки свободной поверхности по сравнению с суммарными потерями напора можно пренебречь). Далее задаем, что сечение 2—2 совпадает с выходным сечением трубопровода; здесь известно, что давление $p_2 = p_a$, а v_2 равна выходной скорости $v_{\text{вых}}$.

При решении прямой задачи в одном варианте задают отметку уровня свободной поверхности жидкости в резервуаре z_1 , а неизвестной явля-

ется $v_{\text{вых}}$, во втором варианте задают $v_{\text{вых}}$ (или расход Q) и определяют отметку z_1 .

Выбирать сечение 3—3 (см. рис. 6.2) не имеет смысла, так как здесь неизвестны и p_3 и v_3 , а с помощью одного уравнения Бернулли их вычислить нельзя.

2. Намечаем плоскость сравнения. Это произвольная горизонтальная плоскость; для упрощения решения задачи выбрать ее следует так,

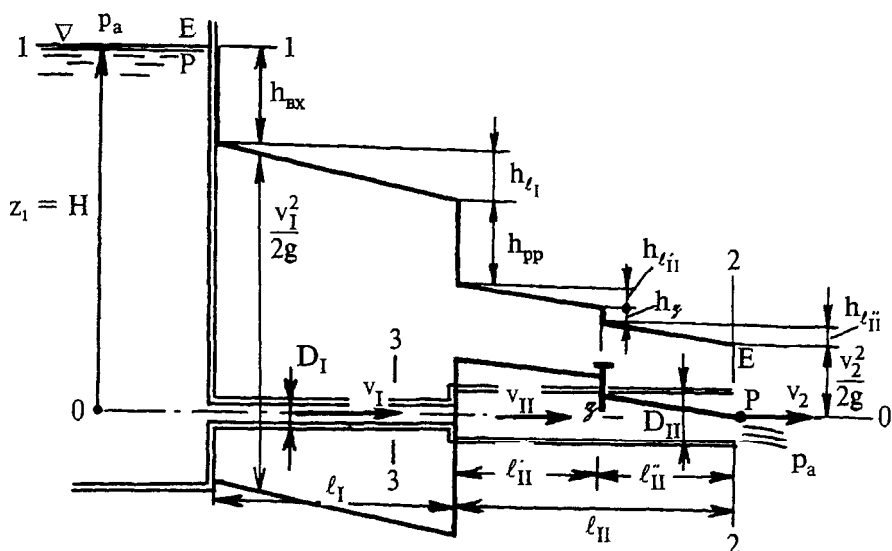


Рис. 6.2. Истечение жидкости из резервуара через короткий трубопровод в атмосферу

чтобы z_1 или z_2 обратились в ноль: например, плоскость 0—0 на рис. 6.2 проведена так, что $z_2 = 0$.

3. Записываем уравнение Бернулли

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_f. \quad (6.3)$$

4. Определяем значения слагаемых, входящих в (6.3):

$$z_1 - z_2 = H, \quad p_1 = p_2 = p_a, \quad v_1 = 0, \quad v_2 = \frac{4Q}{\pi D_{II}^2}.$$

В практических расчетах обычно полагают $\alpha_1 = \alpha_2 = 1,0$. Представим общие потери напора h_f в виде суммы

$$h_f = h_{r1} + h_{e1} + h_{e2} + h_{vx} + h_{pp} + h_f,$$

где $h_{r1} = \lambda_I \frac{\ell_I}{D_I} \frac{v_I^2}{2g}$; $h_{e1} + h_{e2} = \lambda_{II} \frac{\ell_{II}}{D_{II}} \frac{v_{II}^2}{2g}$ — потери напора по длине;

v_I и v_{II} — средние скорости на I и II участках трубопровода соответ-

ственно, $v_{II} = v_2$, а из уравнения неразрывности $v_I = v_2 \left(\frac{D_{II}^2}{D_I^2} \right)$; λ_I , λ_{II} — коэффициенты гидравлического трения на первом и втором участках трубопровода; $h_{vx} = \zeta_{vx} (v_1^2 / 2g)$ — потери напора на вход в трубопровод;

$$h_{pp} = \frac{(v_I - v_2)^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{D_{II}^2}{D_I^2} - 1 \right)^2 - \text{потеря на резкое расширение};$$

$$h_{\text{с}} = \zeta_{\text{с}} (v_{II}^2 / 2g) - \text{потеря на задвижке}.$$

5. Подставляя полученные результаты в (6.3), получаем

$$H = \frac{v_2^2}{2g} + \lambda_I \frac{\ell_I}{D_I} \frac{v_2^2}{2g} \frac{D_{II}^4}{D_I^4} + \lambda_{II} \frac{\ell_{II}}{D_{II}} \frac{v_2^2}{2g} + \zeta_{\text{вх}} \frac{v_2^2}{2g} \frac{D_{II}^4}{D_I^4} + \frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{D_{II}^2}{D_I^2} - 1 \right)^2 + \zeta_{\text{с}} \frac{v_2^2}{2g}. \quad (6.4)$$

Если решается прямая задача (т.е. заданы D_I и D_{II}) и рассматривается первый вариант (задано значение Q), то легко найти на каждом участке v_I , v_{II} и соответствующие числа $Re_D = vD/\nu$. Затем, используя справочные данные, определяем абсолютную шероховатость Δ и коэффициенты местных потерь напора ζ_m и далее по относительной шероховатости $\Delta_r = \Delta/D$ и числу Рейнольдса Re_D находим λ_I и λ_{II} . Для этого можно воспользоваться либо графиком Кольбука (см. рис. 5.18), либо какой-нибудь эмпирической зависимостью, аппроксимирующей этот график, — (5.88), (5.90) или (5.91). Значение H вычисляется по зависимости (6.4).

Если рассматривается второй вариант прямой задачи (задано значение H , а вычисляется Q), то зависимость (6.4) представляют в виде

$$Q = \frac{v_2 \pi D_{II}^2}{4} = \frac{\pi D_{II}^2}{4} \sqrt{\frac{2gH}{1 + \lambda_I \frac{\ell_I}{D_I} \frac{D_{II}^4}{D_I^4} + \lambda_{II} \frac{\ell_{II}}{D_{II}} + \zeta_{\text{вх}} \frac{D_{II}^4}{D_I^4} + \left(\frac{D_{II}^2}{D_I^2} - 1 \right)^2 + \zeta_{\text{с}}}} = \frac{\pi D_{II}^2}{4} \mu_T \sqrt{2gH}, \quad (6.5)$$

где μ_T — коэффициент расхода трубопровода.

Так как и Q , и v_I , и v_{II} неизвестны, то нельзя определить значения Re_D , а следовательно, и λ . Задачу обычно решают методом последовательных приближений, причем в качестве первого приближения целесообразно принять, что λ и ζ_m соответствуют области квадратического сопротивления и не зависят от Re_D . Тогда, определив по значению относительной шероховатости $\lambda_I^{(1)}$ и $\lambda_{II}^{(1)}$, а также значения $\zeta_m^{(1)}$, вычисляем в первом приближении $Q^{(1)}$. По этому значению $Q^{(1)}$ вычисляем Re_D и находим уточненные значения $\lambda_I^{(2)}$, $\lambda_{II}^{(2)}$ и $\zeta_m^{(2)}$, используя которые вычисляем по формуле (6.5) расход во втором приближении $Q^{(2)}$. Как показывает опыт расчетов, обычно $Q^{(2)}$ отличается от $Q^{(1)}$ не более чем на 5%, что считается достаточным, чтобы ограничиться вторым приближением и считать искомое значение $Q = Q^{(2)}$. Если $Q^{(2)}$ сильно (более чем на 5%) отличается от $Q^{(1)}$, следует сделать третье приближение.

Обратную задачу, когда заданы Q и H , а неизвестны значения D_I и D_{II} , решают графически. Задавая несколько значений D_I (при постоянном заданном условии задачи отношении D_I/D_{II}) и принимая расход равным заданному, сводят задачу к первому варианту прямой задачи; строят зависимость $H = f(D_I)$ и по заданному значению H определяют требуемое значение D_I (рис. 6.3), а затем по заданному отношению D_I/D_{II} находят D_{II} . Здесь следует отметить, что полученные в результате расчета значения

D_I и D_{II} , как правило, должны быть округлены в большую или меньшую сторону и приняты в соответствии с сортаментом на трубы.

Расчет коротких труб обычно следует заканчивать построением пьезометрической и напорной линий. Для этого вычисляют $h_{вх}$, h_{t_1} , h_{pp} , $h_{t_{II}}$, h_f и, откладывая их, как показано на рис. 6.2, строят напорную линию Е—Е. Пьезометрическую линию Р—Р строят, откладывая от напорной линии вниз величину скоростного напора на данном участке трубы. Пьезометрическая линия проходит через центр тяжести выходного сечения 2—2, так как здесь избыточное давление равно нулю и $z_2 + p_2/\gamma = z_2$.

Если через трубопровод вода из питающего резервуара попадает в питаемый (рис. 6.4), т.е. происходит истечение из трубопровода под уровень (а не в атмосферу, как на рис. 6.2), то в качестве расчетных сечений 1—1 и 2—2 выбирают свободные поверхности воды в питающем и питаемом резервуарах соответственно. При этом в уравнении Бернулли $v_2 = 0$, но появляется дополнительная поте-

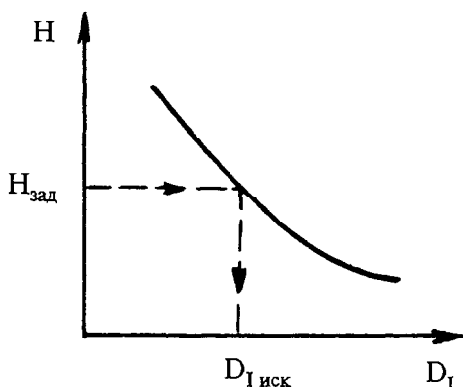


Рис. 6.3. Графическое решение уравнения (6.5)

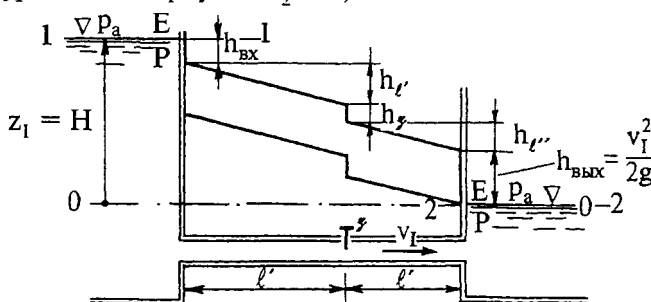


Рис. 6.4. Истечение жидкости из резервуара через короткий трубопровод в другой резервуар (истечение "под уровень")

ря напора "на выход в резервуар" — $h_{вых}$. Эту потерю вычисляют по формуле Борда, считая, что при резком расширении скорость изменяется от v_1 до нуля:

$$h_{вых} = (v_1 - 0)^2 / 2g = v_1^2 / 2g.$$

Если воспользоваться формулой Вейсбаха:

$$h_{вых} = \zeta_{вых} (v_1^2 / 2g), \quad (6.6)$$

то

$$\zeta_{вых} = 1,0.$$

Как легко видеть из рис. 6.4, пьезометрическая линия при истечении под уровень "приходит" как раз к уровню свободной поверхности. Это следует использовать при построении пьезометрической линии. В целом расчет при истечении под уровень выполняется по той же схеме, что и при истечении в атмосферу.

6.3. Расчет длинных трубопроводов

Расчет длинных труб выполняется по упрощенной схеме согласно следующим предпосылкам.

1. Основная область применения этих расчетов — водопроводные сети, в которых, как показал опыт, из экономических соображений целесообразно назначать такие средние скорости жидкости, при которых имеет место область квадратического сопротивления, так что в этих расчетах считают, что коэффициент гидравлического трения λ зависит только от относительной шероховатости Δ_r .

2. Основной характеристикой водопроводных сетей является не средняя скорость v , а расход жидкости Q в трубопроводе.

3. Более удобной характеристикой длинного трубопровода является не потеря напора по длине, а уклон напорной линии J_e (гидравлический уклон). Отметим, что в случае длинных труб скоростной напор $v^2/2g$ (как и местные потери напора) пренебрежимо мал по сравнению с потерями напора по длине и пьезометрическая линия практически не отличается от напорной. Поэтому обычно для длинных труб строят только одну пьезометрическую линию, считая, что напорная линия с ней совпадает, и вместо гидравлического уклона J_e вводят в расчет равный ему пьезометрический уклон J .

Учитывая вышеизложенное, формулу Вейсбаха—Дарси перепишем в виде

$$J = \frac{h_f}{\ell} = \lambda \frac{1}{D} \frac{v^2}{2g} = \frac{\lambda}{D} \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{4}{\pi D^2} \right)^2 = \frac{Q^2}{K^2}, \quad (6.8)$$

где $K = \sqrt{\frac{\pi^2 g D^5}{8\lambda}}$ — *модуль расхода*. Так как технология изготовления и

монтажа водопроводных труб в значительной мере стандартизирована, то можно считать, что эквивалентная шероховатость этих труб колеблется в небольших пределах и K зависит только от диаметра трубы. В гидравлических справочниках приводятся зависимости для модулей расхода новых и бывших в эксплуатации (корродированных) труб. Расчет водопроводных систем выполняют, используя значения K для бывших в эксплуатации труб.

Формулу (6.8) можно переписать в виде

$$Q = K\sqrt{J} = K\sqrt{h_f/\ell} \quad (6.9)$$

или

$$h_f = (Q^2/K^2)\ell. \quad (6.10)$$

Обратим внимание на то, что гидравлический уклон обратно пропорционален пятой степени диаметра трубы. Это следует иметь в виду и при расчете коротких труб.

При расчете длинных труб часто встречаются случаи с параллельным и последовательным соединением труб различного диаметра. Запишем систему уравнений для этих двух случаев.

Последовательное соединение труб (рис. 6.5). Расход, если это специально не указано, вдоль трубы остается постоянным:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q, \quad (6.11)$$

а сумма потерь на каждом участке трубы равна потере напора во всем трубопроводе:

$$h_\ell = h_{\ell_1} + h_{\ell_2} + h_{\ell_3} \quad (6.12)$$

или

$$h_\ell = \frac{Q^2}{K_1^2} \ell_1 + \frac{Q^2}{K_2^2} \ell_2 + \frac{Q^2}{K_3^2} \ell_3.$$

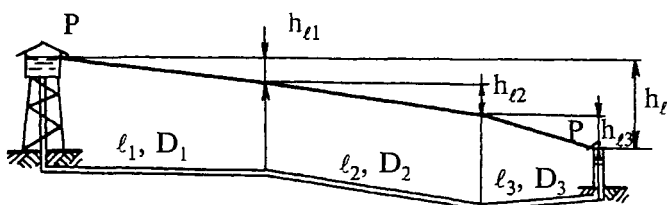


Рис. 6.5. Последовательное соединение труб

Параллельное соединение труб (рис. 6.6). Между точками А и В трубы 1, 2 и 3 соединены параллельно. Если в этих точках измерить пьезометрический напор, то он, конечно, будет одинаков для всех трех труб, следовательно, потери напора в этих трубах одинаковы:

$$h_{\ell_1} = h_{\ell_2} = h_{\ell_3} = h_\ell. \quad (6.13)$$

В то же время очевидно, что сумма расходов в трех параллельно соединенных трубах равна расходу Q в трубах AC и BD:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q. \quad (6.14)$$

Подчеркнем, что пьезометрические уклоны в параллельно соединенных трубах совпадают лишь в исключительном частном случае, когда $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3$, обычно же $J_1 \neq J_2 \neq J_3$.

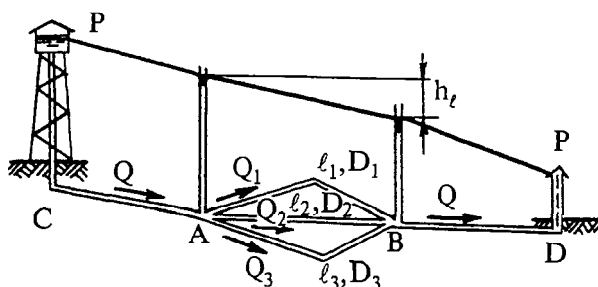


Рис. 6.6. Параллельное соединение труб

В зависимости от того, решается прямая или обратная задача, приходится применять тот или иной метод решения приведенных выше систем уравнений (6.11)—(6.14).

Кольцевые водопроводные сети. Городские водопроводы обычно выполняются в виде кольцевых сетей и обеспечиваются водой от двух и более водонапорных башен Б (рис. 6.7). В узлах 1—9 находятся потребители (например, жилые массивы, предприятия и т.п.). Кольцевая сеть

позволяет осуществлять водоснабжение всех потребителей в случае аварии или ремонта отдельных участков водопроводной сети. При этом, конечно, потребности в воде будут удовлетворяться не полностью, а, например, несколько часов в сутки, причем иногда обеспечиваются лишь

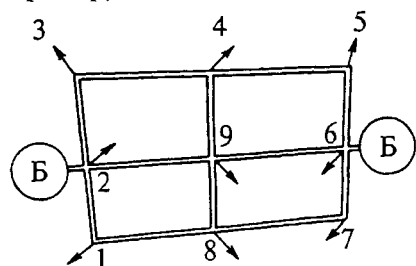


Рис. 6.7. Кольцевая водопроводная сеть

нижние этажи зданий и т.п., но все же водоснабжение не будет отключено полностью на время ремонта, как в случае тупиковой сети (рис. 6.8).

Расчет кольцевой сети сводится различными приемами к расчету тупиковой сети, питающейся от одной башни (как это делается, рассматривается в курсе "Водоснабжение"). В курсе технической механики жидкости рассмотрим лишь расчет тупиковой сети.

Расчет тупиковой сети начинается с выбора магистрального трубопровода. Этот трубопровод должен быть самым длинным, иметь наибольшие расходы и обеспечивать подачу воды на самые высокие отметки. Например (см. рис. 6.8), магистральным может быть трубопровод

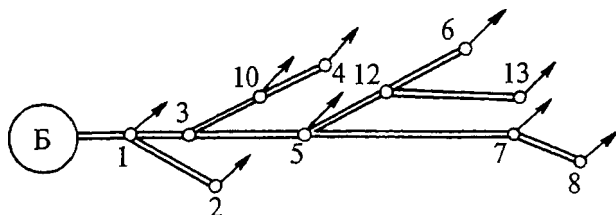


Рис. 6.8. Тупиковая водопроводная сеть

Б-1-3-5-7-8, либо Б-1-3-5-12-13, либо Б-1-3-5-12-6; выбрать тот или иной трубопровод в качестве магистрального можно, сравнив отметки, на которые надо подавать воду в точках 8, 6 и 13, и расходы потребителей в этих точках, а также приняв во внимание длины участков 5—12, 12—13, 12—6, 5—7, 7—8.

Расчет магистрального трубопровода, например Б-1-3-5-7-8, в случае решения прямой задачи (см. разд. 1.1), когда *высота башни не задана*, а известны расходы воды всех потребителей, длины и диаметры трубопроводов, выполняется по формуле

$$\nabla_B = \nabla_8 + h_{\ell_{7-8}} + h_{\ell_{5-7}} + h_{\ell_{3-5}} + h_{\ell_{1-3}} + h_{B-1},$$

где ∇_B — отметка воды в водонапорной башне; ∇_8 — отметка, на которую нужно подать воду потребителю в точке 8; $h_{\ell_{i-j}}$ — потери на соответствующих участках трубы, которые вычисляются по формуле (6.10).

Если *высота башни задана*, и заданы расходы потребителей, отметки, на которые следует подать воду, и длины трубопроводов, а необходимо определить диаметры труб (обратная задача), то магистральный трубопровод рассчитывается по среднему пьезометрическому уклону:

$$J_{cp} = (\nabla_B - \nabla_8) / \sum \ell, \quad (6.15)$$

где $\sum \ell$ — суммарная длина магистрального трубопровода. Вычислив $J_{\text{ср}}$, находим на каждом участке магистрального трубопровода

$$(K_{1-j})_{\text{необх}} = Q_{1-j} / \sqrt{J_{\text{ср}}},$$

где Q_{1-j} — расчетный расход на участке, $(K_{1-j})_{\text{необх}}$ — необходимый модуль расхода трубопровода на участке. По значению $(K_{1-j})_{\text{необх}}$, пользуясь таблицами для модуля расхода K , выбирают диаметр трубы D_{1-j} на каждом участке (можно брать как ближайшие большие, так и ближайшие меньшие значения диаметра). Выбрав диаметры D_{1-j} , определяем соответствующие им K_{1-j} и проверяем, чтобы суммарные потери напора в трубе $\sum_{i=1}^8 h_{\ell_{1-j}}$ были меньше, чем $(\nabla Б - \nabla 8)$.

При расчете водопроводных сетей наряду с прямой и обратной задачами существует особый расчетный случай, когда не заданы ни диаметры труб, ни отметки воды в водонапорной башне, а известны лишь расходы и отметки потребителей и их расположение на местности (т.е. длины труб). В этом случае задачу следует решать, прибегая к экономическим соображениям. Действительно,

если сделать башню высокой, что дорого, то это позволит использовать трубы малого диаметра (стоимость труб уменьшается с диаметром), которые обуславливают большие потери напора. Наоборот, если установить дешевую невысокую башню, то надо будет построить сеть из труб дорогих (большого диаметра), чтобы обеспечить меньшие потери напора. Если в качестве независимой переменной выбрать среднюю скорость воды в трубе и вычислить приведенные затраты (ПЗ) на строительство и эксплуатацию башни и водопроводной сети при различных скоростях воды в трубах, то суммарные приведенные затраты $\text{СПЗ} = f(v)$, представленные на рис.6.9, будут иметь минимальное значение, которому отвечает значение скорости $v_{\text{эк}}$, называемое *экономической скоростью*. Отметим, что численное значение $v_{\text{эк}}$ изменяется как в зависимости от стоимости металла, электроэнергии, стоимости монтажных работ, которые, в свою очередь, определяют уровень развития народного хозяйства, так и (в меньшей степени) в зависимости от расчетных расходов водопотребителя. Для ориентировочных расчетов можно принимать $v_{\text{эк}} = 1$ м/с.

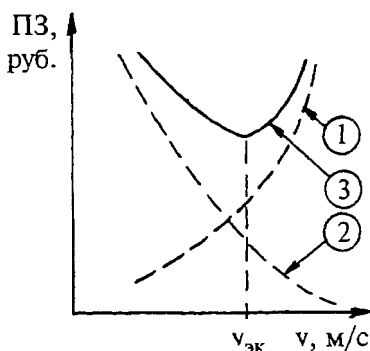


Рис. 6.9. Определение экономической скорости: 1 — приведенные затраты на сооружение и эксплуатацию водонапорной башни; 2 — то же для трубопроводной сети; 3 — суммарные приведенные затраты (СПЗ)

Расчет по экономической скорости выполняется в следующем порядке. Находим необходимые диаметры труб: $(D_{1-j})_{\text{необх}} = \sqrt{\frac{4 Q_{1-j}}{\pi v_{\text{эк}}}}$; по этим значениям определяем ближайшие (большие или меньшие) сорта-

ментные значения D_{i-j} , по ним определяем K_{i-j} и находим суммарные потери напора на магистральном трубопроводе $\sum h_f$, а затем отметку воды в башне:

$$\nabla Б = \nabla 8 + \sum h_f.$$

Расчет ответвлений выполняется так же, как расчет магистрали в случае, *когда высота башни задана*, только вместо отметки воды в башне следует принимать отметку пьезометрической линии в магистральном трубопроводе в месте присоединения ответвления. Если при расчете ответвления окажется, что отметка пьезометрической линии в магистральном трубопроводе в точке ответвления меньше, чем отметка, на которую нужно подать воду в ответвление, то это будет означать, что магистральный трубопровод выбран неверно. При этом, как правило, следует задать в качестве магистрального трубопровода, включающий данное ответвление.

6.4. Измерение расхода в трубопроводах

Однозначная зависимость между потерями напора и средней скоростью при напорном движении в трубе, устанавливаемая формулами для потерь по длине (5.85) и для местных потерь (5.118), открывает простые на первый взгляд возможности для измерения расхода в трубопроводах. Измерив с помощью двух пьезометров потери по длине на расстоянии ℓ в цилиндрической части трубопровода либо потери на местном сопротивлении (на резком расширении или сужении, на повороте, на диафрагме и т.п.), по формулам (5.85) или (5.118) можно вычислить среднюю скорость v и затем расход $Q = v \omega$. Такой способ измерения расхода используется редко по следующим причинам.

Коэффициент гидравлического трения λ зависит от числа Рейнольдса Re и от шероховатости. Зависимость от числа Рейнольдса усложняет использование зависимости (5.85) при заранее неизвестной средней скорости. Но даже в области квадратического сопротивления, где λ не зависит от Re , практическое использование зависимости (5.85) осложнено тем, что шероховатость трубы изменяется в процессе эксплуатации (коррозия, осаждение взвешенных частиц и т.п.). Поэтому измерение расхода с помощью зависимости для потерь по длине практически не используется.

Использование местных сопротивлений для измерения расхода существенно проще, так как коэффициент местной потери напора при турбулентном режиме не зависит от Re и определяется геометрической формой местного сопротивления. Вместе с тем, если местное сопротивление (например, диафрагма) устанавливается в трубопроводе с целью измерения расхода, то потери напора на ней h_d обуславливают постоянное дополнительное расходование мощности насосного оборудования $N_d = \rho g Q \cdot h_d$, что может сделать измерение расхода дорогостоящим. Точность измерения расхода возрастает с увеличением h_d , но при этом увеличивается и дополнительно расходуемая на измерение расхода мощность.

Значительная экономия получается, если с помощью двух пьезометров измерять не потери напора на местном сопротивлении, а пере-

пад давления между фиксированными поперечными сечениями трубопровода (рис. 6.10).

Как было отмечено в разд. 5.14, форма транзитной струи и размеры водоворотных областей практически не зависят от скорости потока при турбулентном режиме, и поэтому фиксированному сечению *трубопровода* будет соответствовать фиксированное сечение *транзитного потока* (см. рис. 6.10), причем давление на стенке трубопровода (измеряемое пьезометром) будет пренебрежимо мало отличаться от давления в соответствующем сечении транзитного потока. Таким образом, установим пьезометры в сечениях 1—1 и 3—3 и измерим разность их показаний h_{1-3} . Свяжем h_{1-3} с расходом Q ,

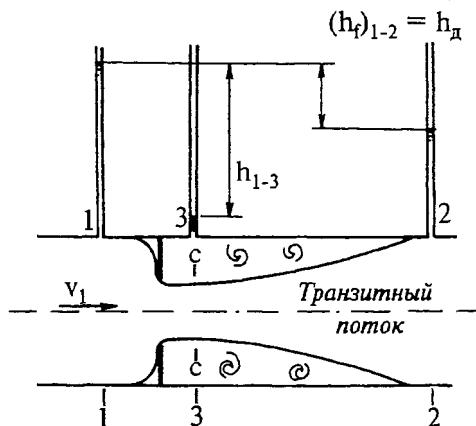


Рис. 6.10. Измерение расхода с помощью диафрагмы

для чего запишем уравнение Бернулли для сечений 1—1 и с—с:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{\alpha_c v_c^2}{2g} + (h_f)_{1-c}. \quad (6.16)$$

Для простоты будем считать, что на участке сжатия потока потери напора такие же, как при сжатии струи в случае истечения из отверстия (см. п. 8.2):

$$(h_f)_{1-c} = \zeta_{1-c} \frac{v_c^2}{2g}; \quad \zeta_{1-c} = 0,06. \quad (6.17)$$

Из (6.16) получим выражение для h_{1-3} :

$$\begin{aligned} h_{1-3} &= \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_3 + \frac{p_3}{\gamma} \right) = \frac{(\alpha_c + \zeta_{1-c}) v_c^2 - \alpha_1 v_1^2}{2g} = \\ &= \left(\frac{\alpha_c + \zeta_{1-c}}{\varepsilon_c^2} - \alpha_1 \right) \frac{v_1^2}{2g}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

где $\varepsilon_c = \frac{\omega_c}{\omega_T}$ — коэффициент сжатия транзитного потока; ω_c — площадь сжатого сечения; ω_T — площадь поперечного сечения трубопровода; ε_c зависит от отношения площади отверстия диафрагмы ω_d к ω_T .

Выражение для расхода $Q = v_1 \omega_T$ получим из (6.18):

$$Q = \omega_T \varepsilon_c \sqrt{\frac{2gh_{1-3}}{\alpha_c + \zeta_{1-c} - \varepsilon_c^2 \alpha_1}} = C_d \sqrt{h_{1-3}}, \quad (6.19)$$

где C_d — постоянная для используемой диафрагмы размерная величина, значение которой устанавливают, тарируя диафрагму объемным или

весовым способом либо используя для тарировки эталонные расходомеры.

Практическое использование диафрагм в качестве средства для измерения расхода имеет два недостатка.

1. Крупномасштабные пульсации скорости в водоворотной области порождают колебания уровней в пьезометрах, которые трудно исключить даже путем демпфирования их гидравлическими сопротивлениями, установленными между трубопроводом и вертикальной трубкой пьезометра. Наличие колебаний требует использования диафрагм, обеспечивающих большие (не менее нескольких сантиметров) разности h_{1-3} во всем диапазоне измеряемых расходов.

2. Для обеспечения приемлемой точности при измерении разности показаний пьезометров при малых расходах необходимо, чтобы h_{1-3} было достаточно велико (не менее 5—6 см), при этом потери на диафрагме $(h_f)_{1-2}$ при больших расходах оказываются весьма значительными,

что обуславливает большие затраты мощности на измерительное средство.

Значительно более совершенным измерительным средством является *водомер Вентури* (рис. 6.11). По существу он представляет собой конфузурно-диффузорный участок трубы, стенки которой очерчены по границе транзитного потока в диафрагме для исключения водоворотных областей, которые, с одной стороны,

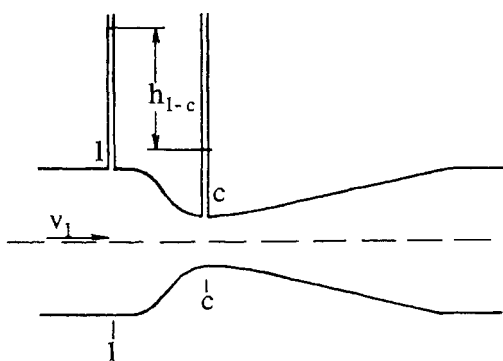


Рис. 6.11. Водомер Вентури

порождают крупномасштабные пульсации скорости, а с другой стороны, являются причиной основной части потерь напора. Ввиду того, что сжатое сечение ω_c водомера Вентури можно измерить и, зная его, вычислить коэффициент сжатия $\varepsilon = \omega_c / \omega_1$, формула (6.19) позволяет найти значение постоянной C_B (полагая $\alpha_1 = \alpha_2 = 1,0$) без тарировки:

$$Q = C_B \sqrt{h_{1-c}}; \quad (6.20)$$

$$C_B = \omega_c \sqrt{\frac{2g}{1 + \zeta_{1-c} - \varepsilon^2}}. \quad (6.21)$$

К недостаткам водомера Вентури по сравнению с диафрагмой как измерительным средством можно отнести трудности его изготовления.

6.5. Слияние и разделение потоков в трубопроводах

Рассмотрим гидравлическую систему, представленную на рис. 6.12,а. Если трубку 3 отключить задвижкой $з$, то вода из резервуара I будет перетекать в резервуар II; в месте, где присоединена трубка 3, имеет место вакуум $h_{\text{вак}}^0 = \frac{p_{\text{вак}}^0}{\rho g}$. Если открыть задвижку, то под действием

мой через сечение 2—2 в трубку 2, плюс потеря мощности внутри тройника N_f :

$$\rho g Q_1 H_{e1} + \rho g Q_3 H_{e3} = \rho g Q_2 H_{e2} + N_f, \quad (6.23)$$

где

$$H_{e1} = H_I - h_{вх} - h_{\ell_1} - h_{сж}; \quad (6.24)$$

$$H_{e3} = -H_{III} - h_{вх} - h_{\ell_3}; \quad (6.25)$$

$$H_{e2} = H_{II} + h_{вых} + h_{\ell_2} + h_{pp}. \quad (6.26)$$

Система двух уравнений (6.22) и (6.23) вместе с равенствами (6.24)—(6.26), в которых H_I , H_{II} и H_{III} заданы, а все потери напора выражены через соответствующие расходы, содержит три неизвестных расхода Q_1 , Q_2 и Q_3 , потерю мощности N_f и неявно входящие в расчет давления в сечениях 1—1, 2—2 и 3—3 тройника (см. рис. 6.12), т.е. она незамкнута.

Значение N_f , как и всякая иная местная потеря мощности, должно быть определено экспериментально в зависимости от геометрических размеров и формы тройника (диаметры сечений 1—1, 2—2 и 3—3, угол между осями труб и т.п.). В гидравлических справочниках можно найти результаты экспериментального исследования тройников, позволяющие определить значение N_f .

Использование уравнения, выражающего закон изменения количества движения, здесь неэффективно, так как неизвестно распределение напряжений, действующих со стороны стенок тройника на контрольный объем.

Чтобы замкнуть систему уравнений, в качестве основного допущения введем условие равенства давления в сечении 3—3 полусумме давлений в сечениях 1—1 и 2—2:

$$p_3 = \frac{1}{2} (p_1 + p_2), \quad (6.27)$$

где

$$p_1 = H_{e1} - \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}; \quad (6.28)$$

$$p_2 = H_{e2} - \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}; \quad (6.29)$$

$$p_3 = H_{e3} - \frac{\alpha_3 v_3^2}{2g}. \quad (6.30)$$

В итоге имеем систему шести уравнений (6.22), (6.23), (6.27)—(6.30) с шестью неизвестными Q_1 , Q_2 , Q_3 , p_1 , p_2 , p_3 . Система решается методом последовательных приближений.

В нулевом приближении принимаем

$$Q_1^0 = Q_2^0, \quad Q_3^0 = 0.$$

С помощью уравнения Бернулли, записанного для сечений I—I и II—II, находим Q_1^0 , а по зависимостям (6.24) и (6.28) вычисляем p_1^0 . Полагая $N_f^0 = 0$, имеем

$$p_2^0 = p_1^0.$$

В первом приближении принимаем $p_3^1 = \frac{1}{2} (p_1^0 + p_2^0) = p_3^0$ и с помощью уравнения Бернулли, записанного для сечений III—III и 3—3, вычисляем Q_3^1 . За счет расхода Q_3^1 расход Q_1^1 становится меньше чем Q_1^0 , а расход Q_2^1 больше чем Q_2^0 .

$$Q_1^I = Q_1^0 - \varepsilon Q_3^I; \quad Q_2^I = Q_2^0 + (1 - \varepsilon) Q_3^I. \quad (6.31)$$

Согласно (6.31) уравнение (6.22) удовлетворяется при любом ε ; его реальное значение для первого приближения ε^I определяется из решения уравнения (6.23) с условиями (6.24)–(6.26). Здесь значения всех величин в первом приближении либо известны, либо вычисляются по формулам, значение N_f находим из гидравлических справочников.

Уравнение (6.23) нелинейное и решается либо графически, либо итерационным методом.

В результате расчета определяем ε^I , Q_1^I , Q_2^I , значения p_1^I и p_2^I вычисляем по формулам (6.28) и (6.29).

Во втором приближении находим

$$p_3^2 = \frac{1}{2}(p_1^I + p_2^I),$$

и далее алгоритм первого приближения сохраняется.

Рассмотрим конструктивно более сложный случай слияния потоков (рис. 6.13, а). Здесь конец трубки 3, из которой вода вытекает с большой скоростью, обусловленной высокой отметкой воды в питающем ее резервуаре III, изогнут в сторону резервуара II. (Если бы трубка была присоединена к стенке трубопровода и не изогнута, а уровни воды в резервуарах I и II были равны, то вода из резервуара III растекалась бы в резервуары I и II.) Струя воды, вытекающая с высокой скоростью из трубки 3, увлекает за собой воду из трубки 1 (эффект *эжекции*), и в результате вода из резервуара I перетекает в резервуар II, даже если уровень $H_{II} > H_I$. Для расчета такой системы также следует воспользоваться уравнением баланса мощности (6.23) для тройника (рис. 6.13, в). Однако оно должно быть дополнено не условием постоянства давления

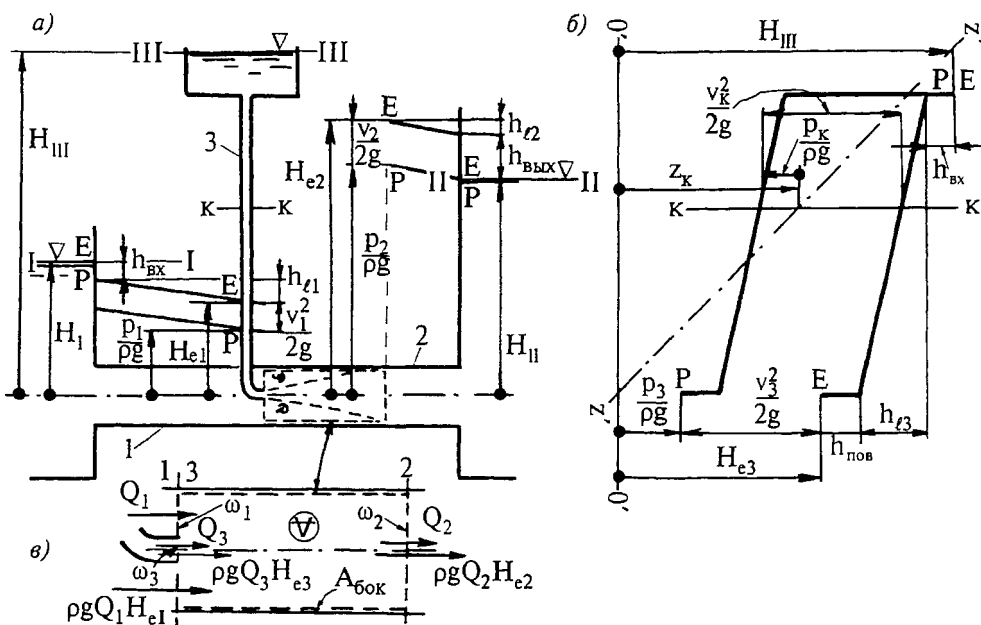


Рис. 6.13. Гидравлическая схема струйного насоса

(6.27), так как здесь давление в сечении 2—2 больше, чем в сечении 1—1, а уравнением баланса количества движения. Чтобы получить это уравнение, выделим контрольный объем ∇ поверхностью А, указанной штриховой линией на рис. 6.13, и запишем для него закон изменения количества движения:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\nabla} \rho \mathbf{u} dV = \int_{\nabla} \rho \mathbf{f} dV + \int_A \mathbf{p}_n dA. \quad (6.32)$$

Спроектируем все слагаемые этого уравнения на горизонтальную ось x , принимая во внимание, что движение установившееся и что на воду действует только одна объемная сила — сила тяжести ($f_x = 0$), имеем

$$\int_A \rho u_n u_x dA = \int_A p_{nx} dA. \quad (6.33)$$

Представим поверхность А в виде

$$A = (\omega_1 - \omega_3) + \omega_3 + \omega_2 + A_{\text{бок}} \quad (6.34)$$

и примем $\omega_3 \ll \omega_1$. Запишем условия на контрольной поверхности А:

на $(\omega_1 - \omega_3)$: $u_n = -u_1$, $u_x = u_1$, $p_{nx} = -p_{xx} = p_1$;

на ω_3 : $u_n = -u_3$, $u_x = u_3$, $p_{nx} = -p_{xx} = p_3$;

на ω_2 : $u_n = u_2$, $u_x = u_2$, $p_{nx} = p_{xx} = -p_2$;

на $A_{\text{бок}}$: $u_n = 0$, p_{nx} — касательные напряжения.

Подставим граничные значения переменных в (6.33) и, используя коррективы количества движения [см. (5.15)], перейдем к средним скоростям в поперечных сечениях потоков. Кроме того, пренебрежем изменением давления в поперечных сечениях под действием силы тяжести. В результате имеем

$$\begin{aligned} & -\alpha_1^0 \rho v_1^2 (\omega_1 - \omega_3) - \alpha_3^0 \rho v_3^2 \omega_3 + \alpha_2^0 \rho v_2^2 \omega_2 = \\ & = p_1 (\omega_1 - \omega_3) + p_3 \omega_3 - p_2 \omega_2 + \int_{A_{\text{бок}}} p_{nx} dA. \end{aligned}$$

Упростим полученное равенство, пренебрегая значением ω_3 по сравнению с ω_1 , полагая вклад касательных напряжений на $A_{\text{бок}}$ пренебрежимо малым и считая, что в сечении 1—1 давление постоянно и равно p_1 (или что $p_3 = p_1$), получим

$$p_2 - p_1 = \alpha_1^0 \rho v_1^2 - \alpha_2^0 \rho v_2^2 + \alpha_3^0 \rho v_3^2 \frac{\omega_3}{\omega_1}. \quad (6.35)$$

В результате для гидравлического расчета конструкции, представленной на рис. 6.13, имеем систему из трех уравнений (6.22), (6.23) и (6.35), содержащую пять искомых величин: Q_1 , Q_2 , Q_3 , p_1 , p_2 , которые дополним следующими равенствами:

$$p_1 = \rho g \left(H_1 - h_{\text{вх}} - h_{\epsilon_1} - \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} \right); \quad (6.36)$$

$$p_2 = \rho g \left(H_{11} + h_{\text{вых}} + h_{\epsilon_2} - \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} \right); \quad (6.37)$$

$$p_3 = \rho g \left(H_{III} - h_{вх} - h_{\ell_3} - h_{пов} - \frac{\alpha_3 v_3^2}{2g} \right); \quad (6.38)$$

$$p_1 = p_3. \quad (6.39)$$

В отличие от предыдущего случая введение в расчет закона изменения количества движения не только сделало систему уравнений замкнутой, но и позволило вычислить потери мощности N_f в контрольном объеме V . Изложим алгоритм метода последовательных приближений для решения системы семи уравнений: (6.22), (6.23), (6.35)—(6.39) с искомыми неизвестными Q_1 , Q_2 , Q_3 , p_1 , p_2 , p_3 , N_f . Заданными считаются все геометрические размеры: H_I , H_{II} , H_{III} , причем $H_I > H_{II} - 2H_{III}\omega_3/\omega_1$, а также диаметры и длины труб.

Зададим в нулевом приближении $v_1^0 = 0$, $Q_1^0 = 0$, $p_1^0 = \rho g H_{II}$; $p_3^0 = p_1^0$.

По зависимости (6.38) вычислим v_3^0 ; далее $Q_3^0 = v_3^0 \cdot \omega_3$, и согласно (6.22) $Q_2^0 = Q_3^0$, а p_2^0 при $v_2^0 = Q_2^0/\omega_2$ вычисляем по (6.37).

В первом приближении по зависимости (6.35) найдем (полагая $\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \alpha_3^0 = 1,0$)

$$p_1^1 = p_2^0 + \rho(v_2^0)^2 - \rho(v_3^0)^2 \frac{\omega_3}{\omega_1}.$$

Тогда согласно (6.39)

$$p_3^1 = p_1^1.$$

По зависимостям (6.36) и (6.38) вычислим v_1^1 и v_3^1 и далее $Q_1^1 = v_1^1 \omega_3$; $Q_3^1 = v_3^1 \omega_3$, и $Q_2^1 = Q_1^1 + Q_3^1$, и по формуле (6.37) находим p_2^1 .

Во втором приближении и всех последующих $p_1^{(i)}$ находим по зависимости

$$p_1^{(i)} = p_2^{(i-1)} - \rho(v_1^{(i-1)})^2 + \rho(v_2^{(i-1)})^2 - \rho(v_3^{(i-1)})^2 \frac{\omega_3}{\omega_1}, \quad (6.40)$$

и далее, приняв согласно (6.39) $p_3^{(i)} = p_1^{(i)}$, вычисления продолжаются по тому же алгоритму, как и в первом приближении.

В изложенном итерационном процессе не задействовано уравнение баланса мощности (6.23). Это уравнение можно использовать для вычисления потерь мощности N_f после того, как искомые расходы и давления приобретут устойчивые значения в процессе последовательных приближений. В этом отношении приведенный выше расчет имеет сходство с расчетами резкого расширения потока (п. 5.14) и гидравлического прыжка (разд. 11.2), в которых привлечение закона изменения количества движения позволило определить потери напора, практически не привлекая экспериментальных данных.

Описанная конструкция представляет собой струйный насос, перекачивающий воду из резервуара I в резервуар II. Для создания большой скорости в трубке 3 можно использовать не только высотное положение резервуара III, но и насос малой производительности, подающий расход Q_3 в трубку 3.

Разделение потоков в трубопроводах рассчитывается также на основе использования уравнения баланса мощности. Схема возможной формы использования этого уравнения сходна с той, которая изложена выше при описании слияния потоков.

6.6. Справочные материалы для расчета длинных трубопроводов

Таблица 6.1

Значения модуля расхода K и коэффициента гидравлического трения λ для новых битумизированных стальных труб при $\Delta = (0,10-0,15)$ мм (квадратичная область сопротивления)

D , мм	$K_{\min}$, л/с	$K_{\min}^2$, (л/с) ²	$K_{\text{ср}}$, л/с	$K_{\text{ср}}^2$, (л/с) ²	$K_{\max}$, л/с	$K_{\max}^2$, (л/с) ²	$\lambda_{\min}$	$\lambda_{\text{ср}}$	$\lambda_{\max}$
50	8,13	66,10	8,43	71,07	8,77	76,91	0,0490	0,0530	0,0570
75	24,18	584,67	24,69	609,60	26,24	688,54	0,0416	0,0470	0,0490
100	52,41	2,7468·10 ³	53,90	2,9052·10 ³	56,40	3,1810·10 ³	0,0380	0,0416	0,0440
125	95,23	9,0687·10 ³	98,22	9,6472·10 ³	102,32	10,469·10 ³	0,0350	0,0380	0,0404
150	155,48	24,162·10 ³	160,62	25,799·10 ³	166,53	27,732·10 ³	0,0330	0,0356	0,0380
200	336,59	1,1329·10 ⁵	346,36	1,200·10 ⁵	359,35	1,291·10 ⁵	0,0300	0,0323	0,0342
250	607,73	3,6934·10 ⁵	627,74	3,941·10 ⁵	649,83	4,223·10 ⁵	0,0280	0,0300	0,0320
300	990,26	9,8062·10 ⁵	1017,8	10,359·10 ⁵	1059,4	11,223·10 ⁵	0,0262	0,0284	0,0300
350	1491,0	22,231·10 ⁵	1534,6	23,550·10 ⁵	1588,6	25,237·10 ⁵	0,0252	0,0270	0,0286
400	2124,8	45,148·10 ⁵	2195,5	48,202·10 ⁵	2262,6	51,194·10 ⁵	0,0242	0,0257	0,0275
450	2911,7	84,780·10 ⁵	2980,9	88,858·10 ⁵	3076,7	94,661·10 ⁶	0,0235	0,0250	0,0262
500	3851,3	14,833·10 ⁶	3954,0	15,634·10 ⁶	4054,7	16,439·10 ⁶	0,0230	0,0242	0,0255
600	6278,2	39,415·10 ⁶	6415,0	41,152·10 ⁶	6570,5	43,171·10 ⁶	0,0221	0,0232	0,0242
700	9370,0	87,797·10 ⁶	9531,2	90,840·10 ⁶	9788,8	95,824·10 ⁶	0,0212	0,0224	0,0232
800	13213	174,59·10 ⁶	13487	181,910·10 ⁶	13838	191,49·10 ⁶	0,0207	0,0218	0,0227
900	17971	322,96·10 ⁶	18297	334,78·10 ⁶	18759	351,91·10 ⁶	0,0203	0,0212	0,0221
1000	23731	563,16·10 ⁶	24175	584,43·10 ⁶	24603	605,31·10 ⁶	0,0200	0,0207	0,0215

Таблица 6.2

Значения модуля расхода K и коэффициента гидравлического трения λ для новых испытанных чугунных труб

при $\Delta = (0,25-1,00)$ мм (квадратная область сопротивления)

D , мм	$K_{\text{чуг}}$ л/с	$K_{\text{чуг}}^2$ (л/с) ²	$K_{\text{сп}}$ л/с	$K_{\text{сп}}^2$ (л/с) ²	$K_{\text{чуг}}$ л/с	$K_{\text{чуг}}^2$ (л/с) ²	$\lambda_{\text{чуг}}$	$\lambda_{\text{сп}}$	$\lambda_{\text{чуг}}$
50	8,77	76,91	9,64	92,93	11,22	125,89	0,0300	0,0410	0,0490
75	26,24	688,54	28,42	807,70	33,23	1104,2	0,0260	0,0350	0,0416
100	56,40	3,1810·10 ³	61,37	3,7663·10 ³	70,94	5,0325·10 ³	0,0240	0,0320	0,0360
125	102,32	10,469·10 ³	110,59	12,230·10 ³	125,93	15,858·10 ³	0,0230	0,0300	0,0350
150	166,53	27,732·10 ³	181,42	32,906·10 ³	204,78	41,943·10 ³	0,0220	0,0280	0,0330
200	359,35	1,2913·10 ⁵	391,36	1,5288·10 ⁵	429,20	1,8421·10 ⁵	0,0210	0,0255	0,0300
250	649,83	4,2228·10 ⁵	701,99	4,9280·10 ⁵	770,71	5,9398·10 ⁵	0,0200	0,0240	0,0280
300	1059,4	11,223·10 ⁵	1128,3	12,724·10 ⁵	1242,7	15,443·10 ⁵	0,0190	0,0230	0,0262
350	1588,6	25,237·10 ⁵	1684,8	28,383·10 ⁵	1870,4	35,265·10 ⁵	0,0180	0,0224	0,0252
400	2262,6	51,194·10 ⁵	2394,4	57,312·10 ⁵	2669,3	71,252·10 ⁵	0,0170	0,0215	0,0242
450	3076,7	94,661·10 ⁵	3260,9	106,341·10 ⁵	3626,7	131,48·10 ⁵	0,0168	0,0209	0,0235
500	4054,7	16,439·10 ⁶	4283,3	18,347·10 ⁶	4776,7	22,816·10 ⁶	0,0165	0,0206	0,0230
600	6570,5	43,171·10 ⁶	6860,5	47,066·10 ⁶	7662,4	58,706·10 ⁶	0,0160	0,0200	0,0221
700	9788,8	95,824·10 ⁶	10259	105,25·10 ⁶	11446	130,99·10 ⁶	0,0155	0,0192	0,0212
800	12838	1,9149·10 ⁷	14543	211,47·10 ⁶	16257	264,29·10 ⁶	0,0150	0,0185	0,0207
900	18759	351,91·10 ⁶	20035	401,36·10 ⁶	22053	445,59·10 ⁶	0,0147	0,0178	0,0203
1000	24603	605,31·10 ⁶	26704	713,10·10 ⁶	28895	834,93·10 ⁶	0,0145	0,0170	0,0200

Значения модуля расхода K и коэффициента гидравлического трения λ для буровых в эксплуатации буровых труб при $\Delta = (1,0-1,5)$ мм (квадратичная область сопротивления)

D_1 мм	$K_{\min}$ л/с	$K_{\min}^2$ (л/с) ²	$K_{\text{ср.}}$ л/с	$K_{\text{ср.}}^2$ (л/с) ²	$K_{\text{макс.}}$ л/с	$K_{\text{макс.}}^2$ (л/с) ²	$\lambda_{\min}$	$\lambda_{\text{ср.}}$	$\lambda_{\text{макс.}}$
50	8,13	66,10	8,43	71,07	8,77	76,91	0,0490	0,0530	0,0570
75	24,18	584,67	24,69	609,60	26,24	688,54	0,0416	0,0470	0,0490
100	52,41	2,7463·10 ³	53,90	2,9052·10 ³	56,40	3,1810·10 ³	0,0380	0,0416	0,0440
125	95,23	9,0687·10 ³	98,22	9,6472·10 ³	102,32	10,469·10 ³	0,0350	0,0380	0,0404
150	155,48	24,162·10 ³	160,62	25,799·10 ³	166,53	27,732·10 ³	0,0330	0,0356	0,0380
200	336,59	1,1329·10 ⁵	346,36	1,200·10 ⁵	359,35	1,291·10 ⁵	0,0300	0,0323	0,0342
250	607,73	3,6934·10 ⁵	627,74	3,941·10 ⁵	649,83	4,223·10 ⁵	0,0280	0,0300	0,0320
300	998,26	9,9862·10 ⁵	1017,8	10,359·10 ⁵	1059,4	11,223·10 ⁵	0,0262	0,0284	0,0300
350	1491,0	22,231·10 ⁵	1534,6	23,550·10 ⁵	1588,6	25,237·10 ⁵	0,0252	0,0270	0,0286
400	2124,8	45,148·10 ⁵	2195,5	48,202·10 ⁵	2262,6	51,194·10 ⁵	0,0242	0,0257	0,0275
450	2911,7	84,780·10 ⁵	2980,9	88,858·10 ⁵	3076,7	94,661·10 ⁵	0,0235	0,0250	0,0262
500	3851,3	14,833·10 ⁶	3954,0	15,634·10 ⁶	4054,7	16,439·10 ⁶	0,0230	0,0242	0,0255
600	6278,2	39,415·10 ⁶	6415,0	41,152·10 ⁶	6570,5	43,171·10 ⁶	0,0221	0,0232	0,0242
700	9370,0	87,797·10 ⁶	9531,2	90,840·10 ⁶	9788,8	95,824·10 ⁶	0,0212	0,0224	0,0232
800	13213	174,59·10 ⁶	13407	181,910·10 ⁶	13838	191,49·10 ⁶	0,0207	0,0218	0,0227
900	17971	322,96·10 ⁶	18297	334,78·10 ⁶	18759	351,91·10 ⁶	0,0203	0,0212	0,0221
1000	23731	563,16·10 ⁶	24175	584,43·10 ⁶	24603	605,31·10 ⁶	0,0200	0,0207	0,0215

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В НАПОРНЫХ ТРУБОПРОВОДАХ (ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ УДАР)

7.1. Общее описание гидравлического удара

Термином *гидравлический удар* обычно определяют изменение давления в напорных трубопроводах в результате изменения во времени средней скорости движения жидкости в каком-либо поперечном сечении потока. При этом проявляются как инерционные, так и упругие свойства жидкости и трубопровода. Рассмотрим основные особенности этого явления на примере неустновившегося движения жидкости в горизонтальной цилиндрической трубе диаметром D и длиной L , присоединенной к резервуару (рис. 7.1); на конце трубы установлена задвижка, регулирующая расход жидкости. При стационарных условиях расход жидкости, вытекающей в атмосферу, поддерживается постоянным при фиксированном открытии задвижки. Для упрощения предположим, что в начальный момент времени задвижка частично прикрыта, так что выходная скорость за задвижкой много больше, чем средняя скорость жидкости в трубе v_0 ; при этом скоростной напор $v_0^2/2g$ и потери напора в трубе (имеющие порядок скоростного напора) пренебрежимо малы по сравнению с H — превышением свободной поверхности жидкости в резервуаре над осью трубопровода. В этих условиях напорная и пьезометрическая линии практически совпадают друг с другом и горизонтальны вдоль всей трубы за исключением пренебрежимо короткой части, непосредственно примыкающей к задвижке. Плоскость сравнения проходит через ось трубопровода. Таким образом перед полным закрытием задвижки в трубопроводе имеют место следующие начальные условия: по всей длине средняя скорость жидкости равна $v = v_0$, а гидродинамическое давление $p_0 = \rho g H$ (давление в поперечных сечениях потока считаем постоянным, пренебрегая его изменением под действием силы тяжести).

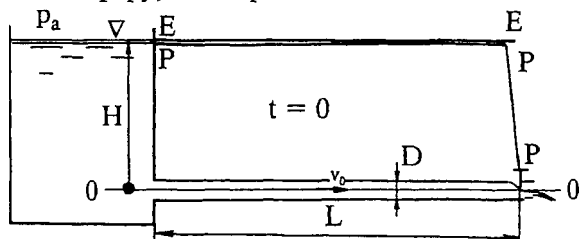


Рис. 7.1. Пьезометрическая и напорная линии в трубопроводе до закрытия задвижки

Предположим, задвижка мгновенно закрывается, так что расход в плоскости регулирующего элемента задвижки мгновенно уменьшается от конечного значения до нуля. Если бы жидкость была несжимаема, то вся масса жидкости, заполняющей трубопровод, должна мгновенно (следовательно, с бесконечно большим ускорением) остановиться. Таким образом, закрытие задвижки мгновенно отразится на потоке жидкости по всей длине трубопровода. Бесконечно большие ускорения, возникающие при использовании модели несжимаемой жидкости, и обусловленные этим

бесконечно большие силы, которым не смогут сопротивляться стенки трубопровода, показывают, что для описания явления, происходящего в трубопроводе в случае мгновенного закрытия задвижки, необходимо учитывать сжимаемость жидкости и деформируемость стенок трубопровода.

В действительности в момент закрытия задвижки средняя скорость жидкости v только в ближайшем к задвижке поперечном сечении потока (1—1 на рис. 7.2,а) уменьшается от значения v_0 до 0, а расположенные выше по течению массы жидкости, продолжая двигаться, набегают на задвижку. При этом на малой длине Δx трубопровода выше по течению от сечения 1—1:

образуется слой остановившейся жидкости толщиной Δx ;

плотность жидкости в этом слое возрастает;

давление возрастает до значения $p = p_0 + p_{г\gamma}$, где $p_{г\gamma}$ — дополнительное давление, обусловленное силами инерции, которое назовем *давлением гидравлического удара*;

стенки трубопровода под действием дополнительного давления $p_{г\gamma}$ расширяются.

Выше по течению от этого участка трубопровода длиной Δx начальные условия течения (скорость v_0 и давление p_0) пока остаются неизменными, а поток невозмущенным.

На остановившийся слой жидкости толщиной Δx набегают массы ближайшего выше по течению движущегося слоя жидкости, который тоже останавливается, и в этом слое плотность жидкости и давление возрастают, а стенки трубопровода расширяются. Аналогичным образом останавливаются следующие (расположенные выше по течению) массы жидкости. В результате через некоторое время после закрытия задвижки в трубопроводе образуются две области (см. рис. 7.2,а):

в части, примыкающей к задвижке, средняя скорость течения жидкости $v = 0$, давление $p = p_0 + p_{г\gamma}$, жидкость сжата и стенки трубопровода расширены;

в части, примыкающей к резервуару, $v = v_0$, а $p = p_0$, т.е. сохраняются начальные условия, поток еще не возмущен в результате закрытия задвижки.

Граница между указанными областями называется *фронтом гидравлического удара* или *фронтом возмущения*. Эта граница перемещается вдоль трубы со скоростью a , которая, как правило, во много раз больше скорости движения жидкости; скорость a зависит от упругих характеристик жидкости и трубопровода.

В момент времени $t_r = L/a$ фронт гидравлического удара подойдет к входному сечению трубопровода. При этом во всем трубопроводе скорость жидкости $v = 0$, давление $p = p_0 + p_{г\gamma}$, жидкость сжата, а стенки трубопровода расширены. Под действием превышения давления в трубопроводе над давлением в резервуаре вблизи входа в трубопровод на величину $p_{г\gamma}$ жидкость будет выталкиваться из трубопровода и вытекать в резервуар со скоростью v_0 ; это будет происходить послойно (как ранее остановка жидкости при закрытии задвижки). Слой за слоем начнут двигаться в сторону резервуара со скоростью $v = -v_0$, а давление в каждом слое упадет до значения, которое определяется уровнем воды в резервуаре. В результате при $L/a < t < 2L/a$ в трубопроводе будет иметь место следующее (рис. 7.2,б):

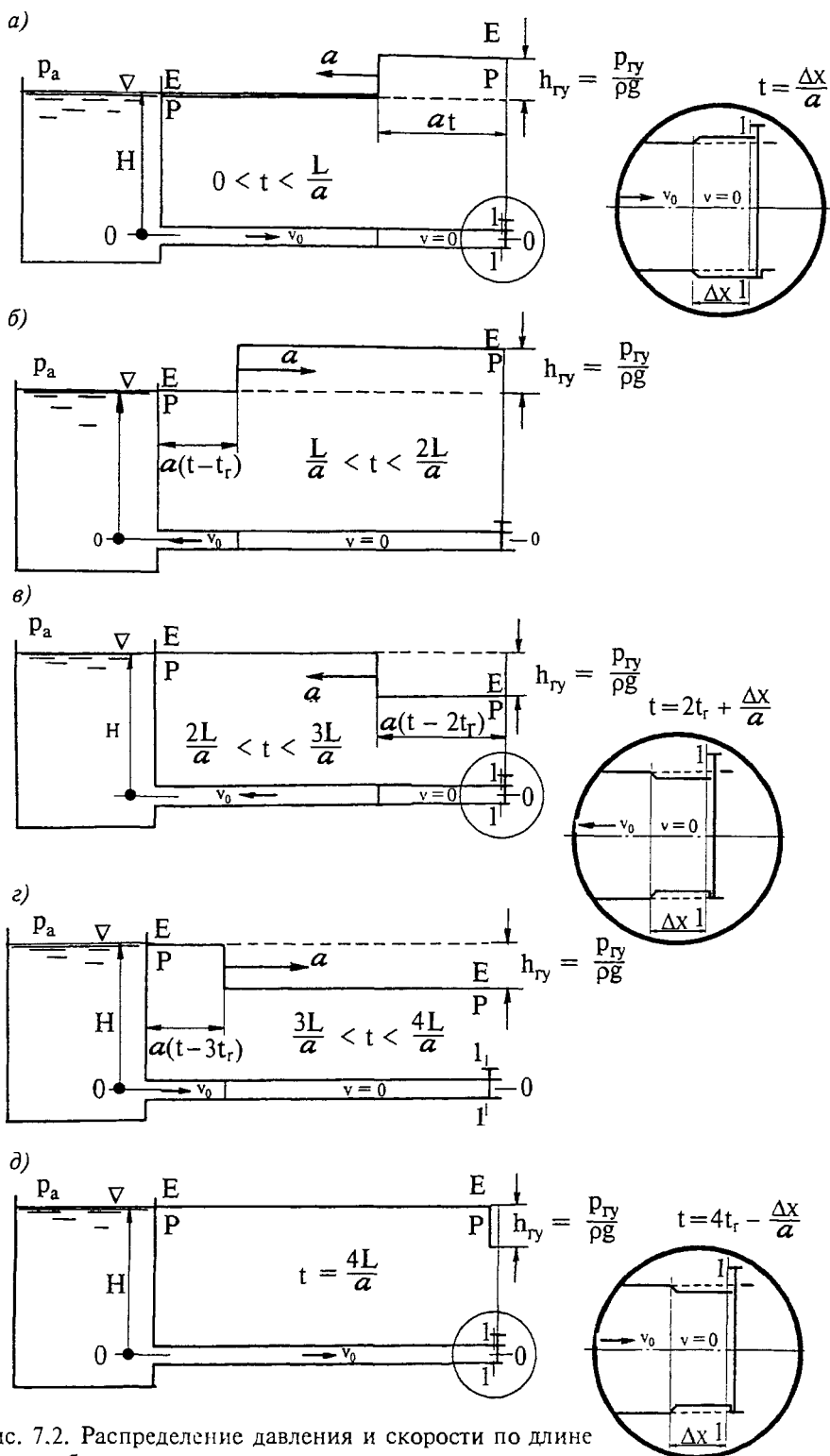


Рис. 7.2. Распределение давления и скорости по длине трубопровода в различные моменты времени

в части, примыкающей к задвижке, средняя скорость жидкости $v = 0$, давление $p = p_0 + p_{гг}$, жидкость сжата, стенки трубопровода расширены;

в части, примыкающей к резервуару, $v = -v_0$, $p = p_0$, т.е. жидкость не сжата, а стенки трубопровода вернулись в исходное недеформированное состояние.

Граница между этими областями со скоростью a движется в сторону задвижки. В момент $t = 2t_r$, когда граница подойдет к задвижке, вся масса жидкости в трубопроводе будет двигаться со скоростью $v = -v_0$ в сторону резервуара, а давление по всей длине трубопровода равно p_0 . Таким образом, в этот момент картина течения похожа на картину, имевшую место перед мгновенным закрытием задвижки, с той лишь разницей, что теперь жидкость не набегает на закрытую задвижку, а пытается оторваться от нее. Полагаем, что задвижка (как и в случае набегания на нее) обеспечивает нулевые скорости движения жидкости в сечении 1—1 при попытке жидкости оторваться от нее. При этом давление в сечении 1—1 (вблизи задвижки) уменьшится до значения $p = p_0 - p_{гг}$, плотность жидкости уменьшится, а стенки трубопровода будут обжаты атмосферным давлением в результате понижения давления внутри трубопровода. Предполагается, что внутри трубопровода абсолютное давление достаточно велико и фазовые переходы исключены (см. гл. 1). При $2t_r < t < 3t_r$ в трубопроводе будет иметь место следующее (рис. 7.2, в):

в части, примыкающей к задвижке, средняя скорость жидкости $v = 0$, давление $p = p_0 - p_{гг}$, стенки трубопровода обжаты;

в части, примыкающей к резервуару, $v = -v_0$, $p = p_0$.

В момент $t = 3t_r$, когда граница между этими областями подойдет ко входному сечению трубопровода, во всем трубопроводе скорость жидкости $v = 0$, а давление $p = p_0 - p_{гг}$ меньше, чем давление в резервуаре вблизи входа в трубопровод. Под действием разности давлений жидкость из резервуара начнет поступать в трубопровод со скоростью v_0 , при этом давление в трубопроводе возрастет до p_0 , а его стенки вернутся в недеформированное состояние. При $3t_r < t < 4t_r$ в трубопроводе будет иметь место следующее (рис. 7.2, г):

в части, примыкающей к задвижке, средняя скорость жидкости $v = 0$, а давление $p = p_0 - p_{гг}$, стенки трубопровода обжаты;

в части, примыкающей к резервуару, $v = -v_0$, $p = p_0$, стенки трубопровода недеформированы.

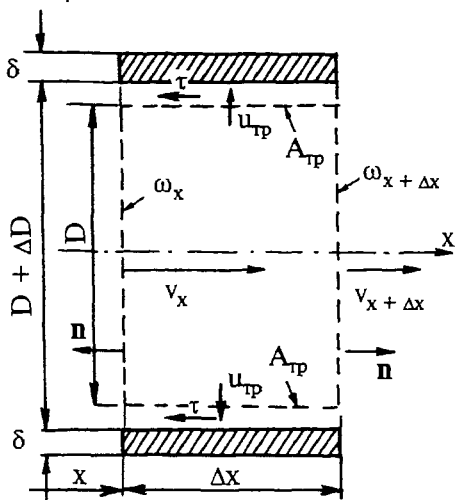
Когда граница между этими частями достигнет задвижки (в момент $4t_r$), в трубопроводе сформируются условия, совпадающие с начальными (рис. 7.2, д), и описанный процесс изменения скорости и давлений повторится.

Гидравлический удар впервые был изучен при обследовании аварии на московском водопроводе проф. Н.Е. Жуковским, который хорошо известен как “отец русский авиации”; им же были предложены основные зависимости, описывающие это явление.

7.2. Основные уравнения гидравлического удара

Рассмотрим напорное движение жидкости в цилиндрической трубе диаметром D с толщиной стенок δ и модулем упругости материала стенок $E_{тр}$. Выделим двумя поперечными сечениями потока, расположен-

ными на бесконечно близком расстоянии Δx , контрольный объем ∇ (рис. 7.3); контрольная поверхность A , ограничивающая этот объем, состоит из двух контрольных поперечных сечений ω_x и $\omega_{x+\Delta x}$ и недеформированной внутренней поверхности $A_{тр}$. В соответствии с одномерным подходом полагаем, что скорость жидкости в поперечном сечении постоянна и равна средней (объемной) скорости v и гидродинамическое давление p в поперечном сечении постоянно (влияние силы тяжести на распределение давления для простоты исключаем). Отметим, что левое контрольное сечение имеет координату x , а правое — $(x + \Delta x)$, поэтому все геометрические и гидродинамические величины в этих поперечных сечениях будут обозначаться соответствующими индексами, например v_x и $p_{x+\Delta x}$ и т.п.



Пусть в результате какого-либо возмущения потока (обусловленного, например, закрытием задвижки) жидкость в контрольном объеме сжимается, ее плотность ρ возрастает, возрастает и гидродинамическое давление p , под действием которого стенки трубопровода расширяются и диаметр его становится равным $D + \Delta D$. Применим к контрольному объему ∇ законы сохранения массы и изменения количества движения (гл. 4).

Рис. 7.3. Контрольный объем для вывода уравнений гидравлического удара

1. Закон сохранения массы:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\nabla} \rho d\nabla = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\nabla} \rho d\nabla + \int_A \rho u_n dA = 0. \quad (7.1)$$

Так как контрольная поверхность A , ограничивающая объем ∇ , неизменна во времени, то

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\nabla} \rho d\nabla = \int_{\nabla} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\nabla. \quad (7.2)$$

По определению модуль объемной упругости жидкости $E_{ж}$ равен

$$E_{ж} = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right). \quad (7.3)$$

Преобразуем (7.2), используя (7.3) и пренебрегая величинами второго порядка малости,

$$\int_{\nabla} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\nabla = \int_{\nabla} \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} d\nabla = \int_{\nabla} \frac{\rho}{E_{ж}} \frac{\partial p}{\partial t} d\nabla \cong \frac{\rho_x}{E_{ж}} \frac{\partial p_x}{\partial t} \int_{\nabla} d\nabla = \frac{\rho_x}{E_{ж}} \frac{\partial p_x}{\partial t} \nabla. \quad (7.4)$$

Поверхностный интеграл в (7.1) представим в виде суммы

$$\int_A \rho u_n dA = \int_{\omega_x} \rho u_n dA + \int_{\omega_{x+\Delta x}} \rho u_n dA + \int_{A_{тр}} \rho u_n dA, \quad (7.5)$$

где нормальные составляющие скорости жидкости в сечениях ω_x и $\omega_{x+\Delta x}$ равны $(-v)_x$ и $v_{x+\Delta x}$ соответственно, а на поверхности $A_{\text{тр}}$ скорость $u_n = u_{\text{тр}}$ — равна скорости увеличения радиуса трубопровода при его расширении:

$$u_{\text{тр}} = \frac{\Delta D}{2\Delta t}. \quad (7.6)$$

Согласно котельной формуле (2.56) дополнительное нормальное напряжение $\Delta\sigma$ в стенках круглоцилиндрической трубы, связанное с увеличением давления внутри трубы на величину Δp , равно

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta p D}{2\delta}. \quad (7.7)$$

В соответствии с законом Гука

$$\Delta\sigma = E_{\text{тр}} \frac{\pi\Delta D}{\pi D},$$

и, следовательно,

$$\Delta D = \frac{\Delta\sigma D}{E_{\text{тр}}} = \frac{\Delta p D^2}{2\delta E_{\text{тр}}}. \quad (7.8)$$

Подставляя (7.8) в (7.6), получаем

$$u_{\text{тр}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \frac{D^2}{4\delta \cdot E_{\text{тр}}}. \quad (7.9)$$

Используя полученный результат и пренебрегая малыми величинами второго порядка, преобразуем поверхностный интеграл (7.5):

$$\begin{aligned} \int_A \rho u_n dA &= -\rho_x v_x \frac{\pi D^2}{4} + \rho_{x+\Delta x} v_{x+\Delta x} \frac{\pi D^2}{4} + \rho u_{\text{тр}} \pi D \Delta x = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho v \frac{\pi D^2}{4} \right) \Delta x + \rho \frac{\partial p}{\partial t} \frac{D^2}{4\delta E_{\text{тр}}} \pi D \Delta x. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Подставив (7.4) и (7.10) в (7.1) и разделив все слагаемые на массу жидкости, заключенной в контрольном объеме, получим первое уравнение гидравлического удара:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (7.11)$$

где

$$a^2 = \frac{\frac{E_{\text{ж}}}{\rho}}{1 + \frac{D}{\delta} \frac{E_{\text{ж}}}{E_{\text{тр}}}}. \quad (7.12)$$

Механический смысл величины a разъяснен ниже.

2. Закон изменения количества движения:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \int_V \rho \mathbf{f} dV + \int_A \mathbf{p}_n dA. \quad (7.13)$$

С целью упрощения нижеследующих преобразований примем, что ось трубопровода горизонтальна, и потому в проекции уравнения (7.13) на горизонтальную ось x , совпадающую с осью трубопровода, не содержится вклада массовой силы, так как таковой в рассматриваемом случае является только сила тяжести. В результате

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u_x dV = \int_A p_{nx} dA. \quad (7.14)$$

Левую часть уравнения (7.14) преобразуем с учетом (7.4) и (7.10) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \rho u_x dV &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u_x dV + \int_A \rho u_x u_n dA = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) \frac{\pi D^2}{4} \Delta x - \rho_x v_x^2 \frac{\pi D^2}{4} + \rho_{x+\Delta x} v_{x+\Delta x}^2 \frac{\pi D^2}{4} + \rho u_{tr} \pi D \Delta x v = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) \frac{\pi D^2}{4} \Delta x + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v^2) \frac{\pi D^2}{4} \Delta x + \rho \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\pi D^3 v}{4 \delta E_{tr}} \Delta x = \\ &= \rho \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\pi D^2}{4} \Delta x + \left(v \frac{\pi D^2}{4} \frac{\rho}{E_{ж}} + \frac{\rho \pi D^3 v}{4 \delta E_{tr}} \right) \frac{\partial p}{\partial t} \Delta x + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v^2) \frac{\pi D^2}{4} \Delta x = \\ &= \rho \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\pi D^2}{4} \Delta x + \rho v \frac{\pi D^2}{4 E_{ж}} \left(1 + \frac{D}{\delta} \frac{E_{ж}}{E_{tr}} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v^2) \frac{\pi D^2}{4} \Delta x = \\ &= \left[\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{a^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v^2) \right] \frac{\pi D^2}{4} \Delta x. \end{aligned} \quad (7.15)$$

При преобразовании правой части (7.14) примем, что движение в трубопроводе параллельноструйное, так что в поперечном сечении потока ω_x нормальные напряжения $p_{nx} = -p_{xx} = p_x$, где p_x — гидродинамическое давление в этом сечении, а в сечении $\omega_{x+\Delta x}$ нормальное напряжение $p_{nx} = p_{xx} = -p_{x+\Delta x}$; на поверхности A_{tr} напряжение $p_{nx} = -\tau$ — касательное напряжение на стенке:

$$\begin{aligned} \int_A p_{nx} dA &= \int_{\omega_x} p_{nx} dA + \int_{\omega_{x+\Delta x}} p_{nx} dA + \int_{A_{tr}} p_{nx} dA = \\ &= p_x \frac{\pi D^2}{4} - p_{x+\Delta x} \frac{\pi D^2}{4} - \tau \pi D \Delta x = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\pi D^2}{4} - \tau \pi D \right] \Delta x. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Подставив (7.15) и (7.16) в (7.14), после сокращений получим второе уравнение гидравлического удара:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{a^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v^2) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{4\tau}{D}. \quad (7.17)$$

Используя выражение $\frac{\partial p}{\partial t}$ из уравнения (7.11), приведем (7.17) к более простому виду:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{4\tau}{D}. \quad (7.18)$$

Для упрощения анализа полученных уравнений будем считать, что слагаемые, выражающие конвективную часть ускорения жидкости $\left(\rho v \frac{\partial v}{\partial x}\right)$ и вклад касательных напряжений на стенке $\left(\frac{4\tau}{D}\right)$, пренебрежимо малы. Окончательно получаем наиболее простую форму уравнений гидравлического удара:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho a^2 \frac{\partial v}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.19)$$

Система (7.19) относится к гиперболическому типу дифференциальных уравнений с частными производными; уравнения такого типа называются также *волновыми* уравнениями. Если дифференциальное уравнение первого порядка с частными производными содержит только одну искомую функцию, оно называется *скалярным* волновым уравнением (см. разд. 7.3), если же такое уравнение содержит две неизвестные функции [например, v и p в системе (7.19)], то оно называется *векторным* волновым уравнением.

7.3. Скалярное волновое уравнение

Для дальнейшего изучения свойств и решения векторных волновых уравнений гидравлического удара (7.19) рассмотрим основные особенности *скалярного волнового* уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (7.20)$$

где $f(x, t)$ — неизвестная функция; c — постоянная величина, имеющая размерность скорости. Очевидно, что если установить между dx и dt соотношения

$$dx = c dt, \quad (7.21)$$

то левая часть уравнения (7.20) может быть представлена в виде полного дифференциала функции f :

$$\frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx \equiv df = 0. \quad (7.22)$$

Следовательно, в физической плоскости (x, t) вдоль линий $x = ct + x_0$, согласно уравнению (7.22) функция $f(x, t)$ сохраняет постоянное значение.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (7.20) и положим, что при $t = 0$ начальное условие (рис. 7.4)

$$f(x, 0) = f_0(x). \quad (7.23)$$

Решение уравнения (7.20), т.е. значение функции f в произвольной точке (x, t) физической плоскости, равно

$$f(x, t) = f(x_0, 0) = f_0(x_0). \quad (7.24)$$

Прямая $x = ct + x_0$ называется характеристической линией или *характеристикой* уравнения (7.20). Если $c < 0$, то угол α тупой.

Решение уравнения (7.20) становится более сложным, если решается задача Коши с граничными условиями при $x = 0$ и $x = L$ (рис. 7.5).

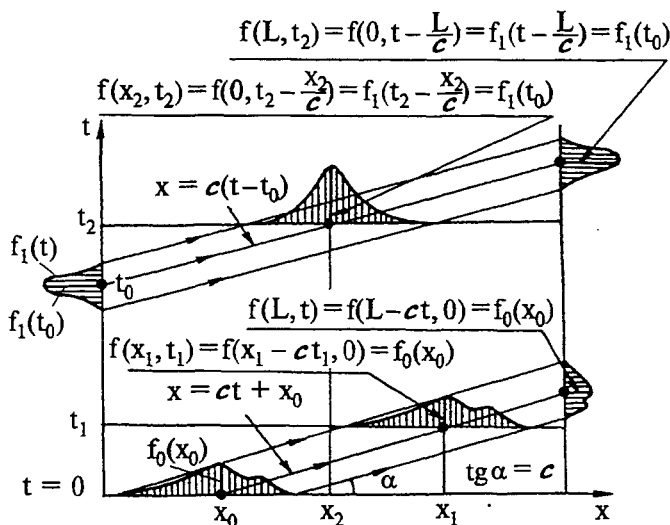


Рис. 7.4. Решения скалярного волнового уравнения

При $c > 0$ вдоль линии $x = 0$ должно быть задано граничное значение функции f :

$$f(x, t)|_{x=0} = f(0, t) = f_1(t). \quad (7.25)$$

В этом случае, если требуется найти значение $f(x, t)$ в точке, которая лежит на характеристической линии, проходящей через точку $(0, t_0)$, то

$$f(x, t) = f\left(0, t - \frac{x}{c}\right) = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (7.26)$$

Вместе с тем на линии $x = L$ (при $c > 0$) граничное условие не может быть задано, так как на этой линии (см. рис. 7.5)

$$f(L, t_1) = f_0(L - ct_1)$$

или

$$f(L, t_1) = f_1\left(t_1 - \frac{L}{c}\right).$$

Если $c < 0$, то граничные условия должны быть заданы на линии $x = L$, а значения искомой функции на линии $x = 0$ определяются решением уравнения (7.20).

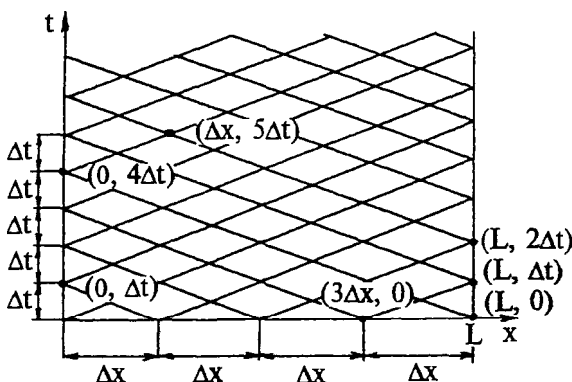


Рис. 7.5. Сетка характеристик для решения уравнений гидравлического удара

7.4. Векторные волновые уравнения

Эффективным методом анализа и решения двух *векторных волновых* уравнений [например, (7.19)] является их преобразование в систему двух *скалярных волновых* уравнений. Для этого введем новые искомые функции $Y(x, t)$ и $Z(x, t)$ согласно следующим формулам:

$$Y(x, t) = v(x, t) + \frac{1}{\rho a} p(x, t); \quad Z(x, t) = v(x, t) - \frac{1}{\rho a} p(x, t). \quad (7.27)$$

Подставив (7.27) в (7.19), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial t} + a \frac{\partial Y}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial Z}{\partial t} - a \frac{\partial Z}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.28)$$

Покажем, как можно рассчитать скорость жидкости v и гидродинамическое давление p в любом поперечном сечении трубопровода в любой момент времени на примере задачи о *полном гидравлическом ударе*, который возникает при *мгновенном* закрытии задвижки, обсуждавшейся в разд. 7.1. Для этого запишем начальные и граничные условия:

$$v(x, t)|_{t=0} = v_0; \quad p(x, t)|_{t=0} = \rho g H = p_0; \quad (7.29)$$

$$v(x, t)|_{x=L} = 0; \quad p(x, t)|_{x=0} = \rho g H = p_0. \quad (7.30)$$

Уравнения (7.19) или эквивалентная система (7.28) с условиями (7.29) и (7.30) образуют краевую задачу.

Разделим длину трубопровода L на четыре равные части длиной $\Delta x = L/4$. Уравнения характеристических линий для первого и второго уравнений системы (7.28) представим в виде

$$x = at + x_0; \quad x = -at + x_0. \quad (7.31)$$

Как было показано в разд. 7.3, функции $Y(x, t)$ и $Z(x, t)$ сохраняют постоянные значения на соответствующих характеристических линиях. Значения физических характеристик потока жидкости v и p можно рассчитать в любой точке плоскости (x, t) , используя решение системы уравнений (7.28), как будет показано ниже (см. рис. 7.5). Принимая во внимание уравнения характеристик (7.31), зададим шаг по времени $\Delta t = \Delta x/a$.

1. Точка $(L, \Delta t)$. В этой точке значение Y равно значению этой функции в точке $(3\Delta x, 0)$, так как эти две точки лежат на одной характеристической линии, соответствующей первому дифференциальному уравнению системы (7.28):

$$Y(L, \Delta t) = Y(3\Delta x, 0). \quad (7.32)$$

Подставив в (7.30) выражения для Y через физические переменные v и p согласно (7.27) и используя начальные (7.29) и граничные (7.30) условия, получим

$$v(L, \Delta t) + \frac{1}{\rho a} p(L, \Delta t) = v(3\Delta x, 0) + \frac{1}{\rho a} p(3\Delta x, 0);$$

$$0 + \frac{1}{\rho a} p(L, \Delta t) = v_0 + \frac{1}{\rho a} p_0.$$

Отсюда найдем

$$p(L, \Delta t) = p_0 + \rho a v_0 = p_0 + p_{гг}. \quad (7.33)$$

Таким образом, найдено, что значение давления гидравлического удара при полном мгновенном закрытии задвижки, когда скорость жидкости в конце трубопровода мгновенно уменьшается от значения v_0 до 0, равно

$$p_{гг} = \rho a v_0, \quad (7.34)$$

а высота столба жидкости, отвечающая этому давлению,

$$h_{гг} = \frac{p_{гг}}{\rho g} = \frac{a v_0}{g}. \quad (7.35)$$

Последние две зависимости называют формулами Жуковского—Алиевы для величины гидравлического удара.

Следует отметить, что если длину трубопровода L разделить на сколько угодно большое число малых отрезков Δx (а не на четыре, как сделано в настоящем примере расчета), то расчеты, аналогичные приведенным выше, покажут, что в конце трубопровода гидродинамическое давление возрастает на величину давления гидравлического удара $p_{гг} = \rho a v_0$ через бесконечно малый интервал времени $\Delta t = \Delta x/a$ после мгновенного закрытия задвижки. Таким образом, будем считать, что при $x = L$ гидродинамическое давление становится равным $p = p_0 + p_{гг} = p_0 + \rho a v_0$ сразу же после закрытия задвижки, т.е.

$$v(L, 0) = 0; \quad p(L, 0) = p_0 + p_{гг}. \quad (7.36)$$

2. Точка $(0, \Delta t)$. В этой точке значение функции Z равно ее значению в точке $(\Delta x, 0)$, обе эти точки лежат на одной характеристике ($x = -at + \Delta x$), соответствующей второму уравнению системы (7.28); таким образом имеем

$$Z(0, \Delta t) = Z(\Delta x, 0). \quad (7.37)$$

Подставив в (7.37) выражение Z через физические переменные (7.27) и используя начальные и граничные условия, получим

$$v(0, \Delta t) - \frac{1}{\rho a} p(0, \Delta t) = v(\Delta x, 0) - \frac{1}{\rho a} p(\Delta x, 0);$$

$$v(0, \Delta t) - \frac{1}{\rho a} p_0 = v_0 - \frac{1}{\rho a} \cdot p_0.$$

Отсюда находим

$$v(0, \Delta t) = v_0.$$

Это показывает, что скорость жидкости в трубопроводе вблизи резервуара в момент времени $t = \Delta t = \Delta x/a$ еще не изменилась.

Аналогичные вычисления показывают, что гидродинамическое давление в трубопроводе вблизи задвижки (при $x = L$) остается равным $p = p_0 + p_{гг}$ в моменты времени $t = 2\Delta t, 3\Delta t, 4\Delta t$, а скорость жидкости в трубопроводе вблизи резервуара (при $x = 0$) остается равной v_0 в течение временного интервала $(0, 3\Delta t)$.

3. В точке $(0, 4\Delta t)$ имеем

$$Z(0, 4\Delta t) = Z(L, 0).$$

Подставляя физические переменные, получим

$$v(0, 4\Delta t) - \frac{1}{\rho a} p(0, 4\Delta t) = v(L, 0) - \frac{1}{\rho a} p(L, 0);$$

$$v(0, 4\Delta t) - \frac{1}{\rho a} p_0 = 0 - \frac{1}{\rho a} (p_0 + p_{ry}).$$

Отсюда найдем, что

$$v(0, 4\Delta t) = -\frac{1}{\rho a} p_{ry} = -\frac{1}{\rho a} \rho a v_0 = -v_0. \quad (7.38)$$

Этот результат показывает, в чем заключается "отражение" от резервуара возмущения потока в трубе, вызванного мгновенным закрытием задвижки, которое было описано в разд. 7.1 (см. рис. 7.2, а).

Следующие вычисления демонстрируют, как найти значения физических переменных v и p во внутренних точках физической плоскости (x, t) .

4. Точка $(\Delta x, 5\Delta t)$. Согласно уравнениям (7.28) значения функций Y и Z в этой точке можно приравнять известным значениям этих же функций в точках, лежащих на характеристических линиях, проходящих через рассматриваемую точку:

$$\left. \begin{aligned} Y(\Delta x, 5\Delta t) &= Y(0, 4\Delta t); \\ Z(\Delta x, 5\Delta t) &= Z(L, \Delta t); \\ v(\Delta x, 5\Delta t) + \frac{1}{\rho a} p(\Delta x, 5\Delta t) &= v(0, 4\Delta t) + \frac{1}{\rho a} p(0, 4\Delta t); \\ v(\Delta x, 5\Delta t) - \frac{1}{\rho a} p(\Delta x, 5\Delta t) &= v(L, \Delta t) - \frac{1}{\rho a} p(L, \Delta t). \end{aligned} \right\} \quad (7.39)$$

Система уравнений (7.39) содержит два неизвестных значения скорости $v(\Delta x, 5\Delta t)$ и давления $p(\Delta x, 5\Delta t)$:

$$\begin{aligned} v(\Delta x, 5\Delta t) + \frac{1}{\rho a} p(\Delta x, 5\Delta t) &= -v_0 + \frac{1}{\rho a} p_0; \\ v(\Delta x, 5\Delta t) - \frac{1}{\rho a} p(\Delta x, 5\Delta t) &= 0 - \frac{1}{\rho a} (p_0 + p_{ry}). \end{aligned}$$

Решая последнюю систему уравнений, найдем:

$$\left. \begin{aligned} v(\Delta x, 5\Delta t) &= -v_0; \\ p(\Delta x, 5\Delta t) &= p_0. \end{aligned} \right\} \quad (7.40)$$

Подобные вычисления позволяют найти значения скорости жидкости и гидродинамического давления в любом сечении трубопровода в произвольный момент времени.

7.5. Волновая скорость

Приведенный выше анализ решения системы уравнений гидравлического удара (7.19) показывает, что все возмущения потока в трубопроводе распространяются вдоль него со скоростью a . Так, например, скорость жидкости в трубопроводе вблизи резервуара, удаленного от за-

движки на расстояние L , изменит свое значение в результате мгновенного закрытия задвижки через время $4\Delta t$; т. е. известие о закрытии задвижки распространяется со скоростью

$$\frac{L}{4\Delta t} = \frac{L}{4 \frac{\Delta x}{a}} = \frac{L}{4\Delta x} a = a.$$

При выводе системы уравнений гидравлического удара было получено выражение (7.12) для волновой скорости a :

$$a = \frac{\sqrt{\frac{E_{\text{ж}}}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{D}{\delta} \frac{E_{\text{ж}}}{E_{\text{тр}}}}}.$$

Из этого выражения следует, что значение a зависит от упругих характеристик жидкости и трубопровода. Если стенки трубопровода абсолютно жесткие ($E_{\text{тр}} = \infty$), волновая скорость a становится равной

$$a_{\text{ж}} = \sqrt{\frac{E_{\text{ж}}}{\rho}}. \quad (7.41)$$

Таким образом, скорость распространения возмущений в трубопроводе с абсолютно жесткими стенками определяется только упругими свойствами жидкости и равна скорости звука в жидкой среде (см. гл. 15).

Как известно, скорость звука в воде имеет значение $a_{\text{ж}} = 1400$ м/с, что значительно превосходит значения скорости движения жидкости в трубопроводах, встречающиеся на практике. В стальных трубопроводах большого диаметра (турбинные водоводы ГЭС) $a = 900$ — 1100 м/с, в железобетонных $a = 600$ — 800 м/с.

Подставляя эти значения a в формулу (7.35) и полагая, что типичное значение средней скорости жидкости v в трубопроводе имеет порядок 1 м/с, получим, что давление у задвижки при *полном* гидравлическом ударе имеет порядок $p_{\text{г}} \sim 10^6$ Па; оно в десятки раз превосходит атмосферное давление. Для предотвращения разрушения трубопровода под действием столь высокого давления следует закрывать задвижку постепенно, обеспечивая *неполный* гидравлический удар.

7.6. Постепенное закрытие задвижки

Пусть задвижка закрывается постепенно, так что у задвижки скорость жидкости линейно уменьшается за время $t_{\text{з}}$ от значения v_0 до нуля. Так как уравнения гидравлического удара (7.19) линейны, рассматриваемое явление (распространения изменения скорости жидкости v и гидродинамического давления p вдоль трубопровода) можно представить как суперпозицию (наложение) последовательных (с интервалом Δt) малых, но мгновенных уменьшений скорости жидкости на значение Δv_0 . Каждое уменьшение при закрытии задвижки скорости жидкости на Δv_0 приводит к увеличению гидродинамического давления вблизи задвижки на $\Delta p_{\text{г}} = \rho a \Delta v_0$. Другими словами, вместо действительного не-

прерывного изменения скорости жидкости при закрытии задвижки прием для расчета ступенчатое изменение скорости (рис. 7.6). Такое сочетание уменьшения скорости и увеличения давления распространяется от задвижки к резервуару, отражается от резервуара и далее перемещается в сторону задвижки и так далее, как было описано в разд. 7.1

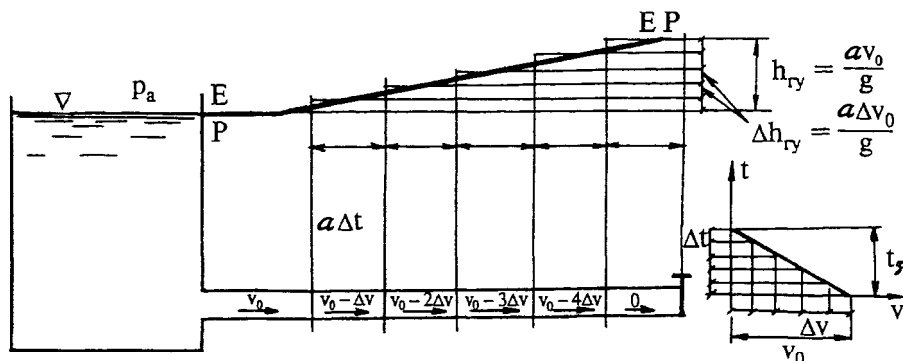


Рис. 7.6. Полный гидравлический удар при постепенном закрытии задвижки

для случая полного мгновенного закрытия задвижки. Через промежуток времени Δt , в течение которого действительная скорость жидкости у задвижки уменьшалась на Δv_0 , произойдет последующее расчетное мгновенное уменьшение скорости жидкости у задвижки на Δv_0 и последующее сочетание уменьшения скорости на Δv_0 и увеличения давления на $\Delta p_{г\gamma} = \rho a \Delta v_0$ начинает распространяться от задвижки к резервуару, накладываются на предыдущее возмущение и отставая от него на расстояние $a \Delta t$. В результате в момент времени $t < t_r = \frac{L}{a}$ в трубопроводе будет иметь место линейное распределение вдоль трубопровода скорости жидкости и гидродинамического давления (см. рис. 7.6).

Если задвижка закрывается достаточно быстро, так что $t_z < t_{2r} = 2L/a$, максимальное значение давления гидравлического удара у задвижки будет такое же, как и при полном гидравлическом ударе, который возникает в случае мгновенного закрытия. Действительно, элементарные увеличения давления $\Delta p_{г\gamma} = \rho a \Delta v_0$, так же как уменьшения скорости жидкости Δv_0 у задвижки, суммируются, причем предшествующие возмущения (сочетания скорости и давления), которые ушли от задвижки, еще не успели (возможно, отразившись от резервуара) вернуться к задвижке и повлиять на происходящий там процесс. Следовательно, при $t_z < 2L/a$ имеем

$$p_{г\gamma} = \sum \Delta p_{г\gamma} = \sum \rho a \Delta v_0 = \rho a \sum \Delta v_0 = \rho a v_0. \quad (7.42)$$

Если задвижка закрывается так медленно, что $t_z > 2L/a$, сочетание уменьшения скорости жидкости Δv_0 и увеличения гидродинамического давления $\Delta p_{г\gamma}$, отразившись от резервуара (изменение скорости жидкости Δv_0 при этом изменяет свой знак), начинает достигать задвижки и компенсировать дальнейшее уменьшение скорости. Скорость жидкости у задвижки начинает уменьшаться как бы не вследствие закрытия задвижки, а благодаря отражению от резервуара предшествующего элемен-

тарного возмущения, которое приносит отрицательную (после отражения) элементарную скорость жидкости $(-\Delta v_0)$. При линейном во времени изменении скорости в результате закрытия задвижки эта отрицательная скорость вдвое превосходит уменьшение скорости, обусловленное закрытием задвижки. Таким образом получается, что скорость жидкости у задвижки уменьшается не только вследствие того, что она продолжает закрываться, а также вследствие прихода к задвижке отраженного значения скорости $(-2\Delta v_0)$. В результате гидродинамическое давление у задвижки начинает уменьшаться, так что давление у задвижки возрастает только в течение интервала $0 < t < 2L/a$ (рис. 7.7).

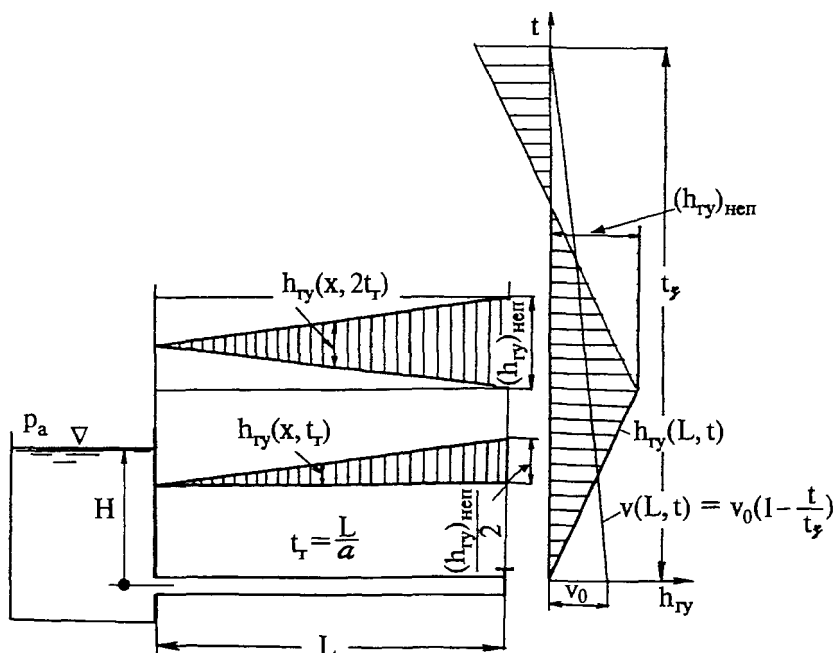


Рис. 7.7. Распределение давления по длине трубопровода при неполном гидравлическом ударе

В этом случае полная величина давления гидравлического удара $(p_{ry} = \rho a v_0)$ не достигается и удар называется *неполным*.

Скорость жидкости у задвижки за время $t_{2r} = 2L/a$ уменьшится на величину

$$\frac{v_0}{t_f} t_{2r} = \frac{v_0 \cdot 2L}{at_f},$$

а соответствующее увеличение гидродинамического давления, максимальное в рассматриваемом случае, равно

$$(p_{ry})_{неп} = \rho a \frac{v_0 \cdot 2L}{at_f} = \frac{2\rho v_0 L}{t_f}. \quad (7.43)$$

Как следует из полученного результата, величина давления неполного гидравлического удара не зависит от a (в отличие от полного гидравлического удара), и для его уменьшения следует увеличивать время закрытия задвижки.

Приведенные выше результаты, естественно, могут быть получены на основе решения уравнения гидравлического удара (7.19) при соответствующих граничных условиях на линии $x = L$. При нелинейном изменении скорости в трубопроводе у задвижки при ее закрытии (или открытии) также целесообразно использовать решение системы дифференциальных уравнений гидравлического удара.

В случае, когда $t_f \ll t_p$, а скорость v_0 уменьшается со временем нелинейно, максимальное повышение гидродинамического давления у задвижки существенно зависит от dv_0/dt и может возникнуть не обязательно в начале процесса закрытия задвижки.

ГЛАВА 8

ИСТЕЧЕНИЕ ИЗ ОТВЕРСТИЙ И НАСАДКОВ

8.1. Основные понятия

Рассмотрим установившееся истечение жидкости через круглое отверстие диаметром D в стенке резервуара (рис. 8.1). В плоскости отверстия движение резкоизменяющееся, но на небольшом расстоянии от этой плоскости, равном приблизительно $0,5 D$, движение становится плавноизменяющимся. Ближайшее к плоскости отверстия поперечное сечение потока, в котором движение плавноизменяющееся, называется *сжатым сечением* и обозначается с—с. Сжатие называется совершенным, если струя формируется только под влиянием плоской стенки резервуара, в которой имеется отверстие. Для этого другие стенки резервуара должны быть удалены от кромок отверстия на расстояние $a \geq 3D$.

Отверстие называется *малым*, если: а) неравномерностью распределения скорости в сжатом сечении можно пренебречь (т.е., например, считать $u_A = u_B$ с точностью до 5%) и б) скорость движения жидкости в резервуаре пренебрежимо мала, так что скоростным напором, рассчитанным по средней скорости движения жидкости в резервуаре, можно пренебречь по сравнению со скоростным напором в сжатом сечении. Для выполнения первого условия достаточно, чтобы $D \sin \alpha < H/10$, а для выполнения второго — $\Omega > 4\omega$, где Ω — площадь сечения резервуара, ω — площадь отверстия.

Если к круглому отверстию присоединить трубу (рис. 8.2), то при достаточной длине трубы в ней будет иметь место напорное движение жидкости, так что выходное сечение трубы совпадет с поперечным сечением потока. Напорная труба, присоединенная к малому отверстию, в которой потерями напора по длине можно пренебречь по сравнению с местными потерями, называется *насадком*. Здесь обычно следует учитывать только местную потерю напора на вход в трубопровод. Насадки могут быть как цилиндрическими, так и коническими (сходящимися и расходящимися). Характерной особенностью насадков является наличие зоны пониженного давления (вакуума) в области сжатого сечения транзитной

струи. Для того чтобы не возникли разрывы сплошности в потоке внутри насадка, необходимо, чтобы $(h_{\text{вак}})_{\text{max}} < (h_{\text{вак}})_{\text{доп}} = (6-7) \text{ м вод. ст.}$ В случае цилиндрических насадков поток в трубе будет напорным при $\ell > 3D$. Потерями напора по длине можно пренебречь, если $\ell < 8D$, где ℓ — длина насадка.

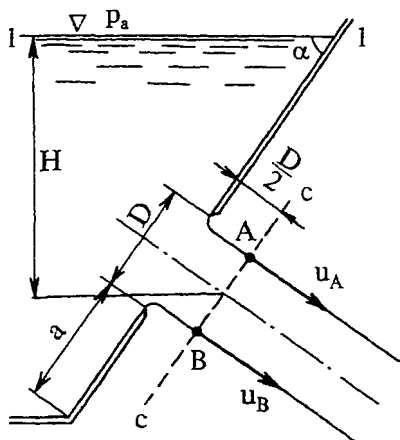


Рис. 8.1. Истечение из отверстия в атмосферу

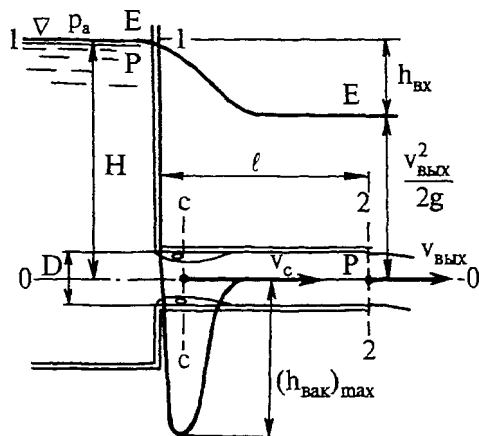


Рис. 8.2. Истечение из внешнего цилиндрического насадка в атмосферу (насадка Вентури)

Важной особенностью течения жидкости внутри насадка является то, что площадь сжатого сечения транзитной струи равна площади сжатого сечения при истечении из отверстия того же диаметра в атмосферу, т.е. кинематика струи на участке сжатия в обоих случаях одинакова.

Для уменьшения потерь напора на вход в насадок иногда делают скругление стенок в месте присоединения насадка к резервуару (например, очерчивают их по поверхности струи на участке сжатия); такие насадки называют *коноидальными*.

8.2. Формулы для скорости и расхода при истечении из отверстий и насадков

Рассмотрим истечение жидкости в атмосферу из отверстия в вертикальной стенке (рис. 8.3) при постоянном заданном уровне воды в резервуаре. Для определения расхода жидкости воспользуемся уравнением Бернулли в соответствии со схемой, изложенной в разд. 6.2.

1. Намечаем два сечения: 1—1 и с—с.
2. Плоскость сравнения 0—0 проводим через центр тяжести сечения с—с.
3. Уравнение Бернулли представим в виде

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{\alpha_c v_c^2}{2g} + h_{f_{1-c}}. \quad (8.1)$$

4. В этом уравнении $z_1 = H$; $p_1 = p_c = p_a$; $v_1 = 0$; $z_c = 0$; кроме того, примем $\alpha_1 = \alpha_c = 1,0$; v_c — неизвестная величина; $h_{f_{1-c}} = \zeta_{1-c} \frac{v_c^2}{2g}$; ζ_{1-c} — коэффициент потерь напора на сжатие струи (согласно экспериментальным данным $\zeta_{1-c} = 0,06$).

5. Подставляя полученные результаты в уравнение Бернулли (8.1), после простых преобразований получаем

$$v_c = \sqrt{\frac{1}{1 + \zeta_{1-c}}} \sqrt{2gH} = \varphi_0 \sqrt{2gH}, \quad (8.2)$$

где φ_0 — коэффициент скорости отверстия:

$$\varphi_0 = \sqrt{\frac{1}{1 + \zeta_{1-c}}} = 0,97. \quad (8.3)$$

Для того чтобы найти расход согласно формуле

$$Q = v_c \omega_c, \quad (8.4)$$

необходимо знать площадь сжатого сечения ω_c ; ее обычно выражают через площадь отверстия ω :

$$\omega_c = \varepsilon \omega, \quad (8.5)$$

где ε — коэффициент сжатия струи.

Экспериментальные исследования и теоретические решения задачи об истечении из отверстия, основанные на модели потенциального течения невязкой жидкости (см. гл. 14), показали, что значение ε в случае совершенного сжатия колеблется в небольших пределах, так что для практических расчетов можно принять

$$\varepsilon = 0,62 - 0,64. \quad (8.6)$$

Подставляя (8.2) и (8.5) в (8.4), получаем формулу для расхода в виде

$$Q = \varphi_0 \sqrt{2gH} \cdot \varepsilon \omega = \mu_0 \omega \sqrt{2gH}, \quad (8.7)$$

где $\mu_0 = \varepsilon \varphi_0 = 0,61$ — коэффициент расхода отверстия.

Проведем аналогичные рассуждения для случая истечения из внешнего цилиндрического насадка (насадка Вентури). В качестве расчетных сечений при записи уравнения Бернулли можно выбрать (см. рис. 8.2) свободную поверхность воды в резервуаре и выходное сечение патрубка, в котором давление можно считать равным атмосферному. В результате использования уравнения Бернулли по приведенной выше схеме получим формулу для скорости в выходном сечении насадка:

$$v_{\text{вых}} = \sqrt{1/(1 + \zeta_{1-2})} \sqrt{2gH} = \varphi_n \sqrt{2gH}, \quad (8.8)$$

где $\zeta_{1-2} = \zeta_{\text{вх}}$ — коэффициент потери напора на вход в трубопровод (т.е. на сжатие потока до сечения с—с и на расширение его до размеров, определяемых поперечным сечением патрубка; эксперименты показали, что $\zeta_{\text{вх}} = 0,5$); φ_n — коэффициент скорости насадка; $\varphi_n = 0,82$.

Формула расхода из насадка имеет вид

$$Q = v_{\text{вых}} \omega = \varphi_n \sqrt{2gH} \omega = \mu_n \omega \sqrt{2gH}, \quad (8.9)$$

где $\mu_n = \varphi_n = 0,82$ — коэффициент расхода насадка.

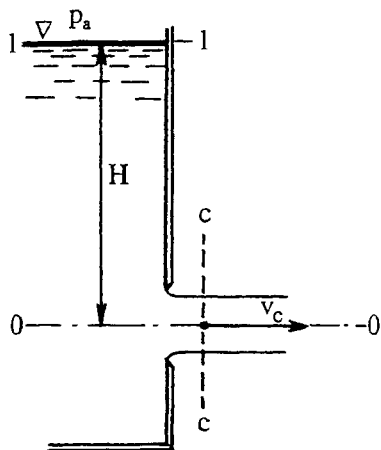


Рис. 8.3. Расчетная схема истечения из отверстия

В случае внутреннего цилиндрического насадка (насадка Борда), представленного на рис. 8.4, потери напора на вход в трубопровод больше, так как имеет место большее сжатие потока. При этом коэффициент потерь напора на вход в трубопровод $\zeta_{\text{вх}}^{(Б)} = 1,0$, а скорость и расход можно вычислять по формулам (8.8) и (8.9), принимая $\mu_H^{(Б)} = \varphi_H^{(Б)} = 0,71$.

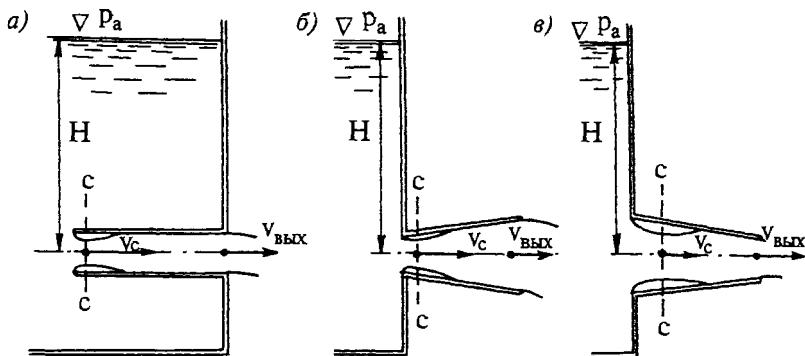


Рис. 8.4. Различные виды насадков:

- а — внутренний цилиндрический насадок (насадок Борда);
б — конический расходящийся насадок; в — конический сходящийся насадок

Как видно из приведенных выше зависимостей, несмотря на то, что потери напора в цилиндрических насадках больше, чем при истечении из отверстия, и скорость на выходе из насадка соответственно меньше ($\varphi_H = 0,82$ против $\varphi_0 = 0,97$), расход из насадка оказывается больше, чем расход из отверстия ($\mu_H = 0,82$ против $\mu_0 = 0,61$). Это объясняется тем, что в насадке в сжатом сечении имеет место давление меньше атмосферного ($p_c < p_a$). Если записать уравнение Бернулли для сечений 1—1 и с—с для потока в случае насадка, то получим

$$v_c = \sqrt{\frac{1}{1 + \zeta_{1-c}}} \sqrt{2g \left(H + \frac{p_a - p_c}{\gamma} \right)} = \varphi_0 \sqrt{2g (H + (h_{\text{вак}})_{\text{max}})}, \quad (8.10)$$

где ζ_{1-c} в случае внешнего цилиндрического насадка и отверстия одинаковы, так как относительное сжатие и кинематика потока на участке от сечения 1—1 до сечения с—с в обоих случаях одинаковы. Следовательно, согласно (8.10) в сжатом сечении потока в насадке скорость больше, чем в сжатом сечении при истечении из отверстия. А так как площади сжатых сечений ω_c одинаковы (вследствие одинаковой кинематики), то расход из насадков больше, чем из отверстия. Иногда говорят, что вакуум в насадке оказывает “подсасывающее” воздействие на поток.

Величину вакуума можно оценить, связав уравнением Бернулли сечения с—с и 2—2 и приняв, что потери напора на этом участке можно вычислить по формуле Борда

$$z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{\alpha_c v_c^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{f_{c-2}}, \quad (8.11)$$

где $z_c = z_2$, $\frac{p_2 - p_c}{\gamma} = \frac{p_a - p_c}{\gamma} = (h_{\text{вак}})_{\text{max}}$, $v_2 = v_{\text{вых}}$,

$$v_c = \frac{v_{\text{вых}}}{\varepsilon_{c-2}}, \quad h_{c-2} = \frac{(v_c - v_{\text{вых}})^2}{2g}, \quad \alpha_c = \alpha_2 = 1,0.$$

Подставляя эти выражения в (8.11), найдем

$$(h_{\text{вак}})_{\text{max}} = \frac{v_{\text{вых}}(v_c - v_{\text{вых}})}{g} = \frac{v_{\text{вых}}^2}{g} \left(\frac{1}{\varepsilon_{c-2}} - 1 \right). \quad (8.12)$$

Выразив $v_{\text{вых}}$ через H согласно (8.8) и учитывая, что в случае цилиндрического насадка площади входного и выходного сечений патрубка равны и, следовательно, $\varepsilon_{c-2} = \varepsilon = 0,63$, получим

$$(h_{\text{вак}})_{\text{max}} = 0,79 H. \quad (8.13)$$

Это значение $(h_{\text{вак}})_{\text{max}}$ и объясняет [см. зависимость (8.10)] то, что расход из внешнего цилиндрического насадка на 30—35% больше, чем из отверстия того же диаметра.

8.3. Истечение через нецилиндрические насадки

Перейдем к рассмотрению истечений из резервуара через простейшие нецилиндрические насадки — конический сходящийся (*конфузорный*) и конический расходящийся (*диффузорный*) (см. рис. 8.4). Для оценки скорости и расхода в случае таких насадков будем сопоставлять их с внешним цилиндрическим насадком (см. рис. 8.2), имеющим диаметр, равный диаметру отверстия в стенке резервуара, к которому присоединены насадки.

Если принять во внимание, что согласно формуле Борда местные потери напора тем больше, чем больше относительное расширение транзитной струи, то очевидно, что в расходящемся насадке потери будут больше, чем в цилиндрическом, а в сходящемся меньше, и, следовательно, скорость истечения (т.е. скорость в выходном сечении) из сходящегося насадка согласно (8.8) будет больше, чем из цилиндрического, а из расходящегося соответственно меньше.

Для того чтобы сравнить расходы, необходимо рассмотреть скорость жидкости в тех сечениях, в которых поперечные сечения потока одинаковы. В данном случае такими являются сжатые сечения. Легко видеть с помощью (8.10), что скорости в этом сечении тем больше, чем больше величина максимального вакуума в насадке $(h_{\text{вак}})_{\text{max}} = (p_a - p_c)/\gamma$. В то же время согласно (8.12) $(h_{\text{вак}})_{\text{max}}$ тем больше, чем больше относительное расширение струи. Следовательно, скорость в сжатом сечении конического расходящегося насадка будет больше скорости в сжатом сечении цилиндрического насадка, и поэтому расход жидкости из первого насадка будет больше, чем из второго.

Из аналогичных рассуждений следует, что расход из конического сходящегося насадка меньше расхода из цилиндрического. Таким образом

$$Q_{\text{расх}} > Q_{\text{цил}} > Q_{\text{сх}}; \quad (8.14)$$

$$(v_{\text{вых}})_{\text{расх}} < (v_{\text{вых}})_{\text{цил}} < (v_{\text{вых}})_{\text{сх}}. \quad (8.15)$$

Неравенства (8.14) справедливы лишь для случая, когда насадки присоединены к отверстиям с одинаковыми диаметрами. Если, например, сходящийся насадок (см. рис. 8.4) имеет диаметр выходного отверстия, равный диаметру цилиндрического насадка, то неравенства (8.15) остаются справедливыми, но расход из сходящегося насадка будет больше, чем из цилиндрического, так как площади их выходных сечений одинаковы, а скорость истечения из сходящегося насадка больше.

Как уже отмечалось в разд. 5.13, при расширении турбулентного потока интенсивность турбулентности (т.е. отношение стандарта пульсационной скорости к осредненной продольной скорости) возрастает; в потоке в коническом расходящемся насадке (*диффузоре*) пульсационная скорость может настолько возрасти, что на выходе станет соизмеримой с осредненной скоростью. При истечении в атмосферу из такого насадка компактной струи не наблюдается, она быстро разваливается на совокупность “комков” и капель жидкости. Напротив, на конфузорных участках пульсации скорости уменьшаются, и поэтому на выходе из конического сходящегося насадка наблюдается струя с гладкой свободной поверхностью; такая струя слабо взаимодействует с окружающим воздухом и на большом расстоянии от выходного сечения остается компактной.

8.4. Истечение через отверстия и насадки “под уровень”

При истечении из отверстий и насадков под уровень (рис. 8.5) в качестве расчетных сечений для использования уравнения Бернулли следует принять свободные поверхности в питающем и питаемом резервуарах, а потери напора выразить через скоростные напоры в тех же сечениях, что и в случае истечения в атмосферу ($v_c^2/2g$ для отверстия и $v_{\text{вых}}^2/2g$ для насадка). Обратим внимание на то, что скоростной напор в сечении 2—2 равен нулю, а дополнительная потеря напора на выход в

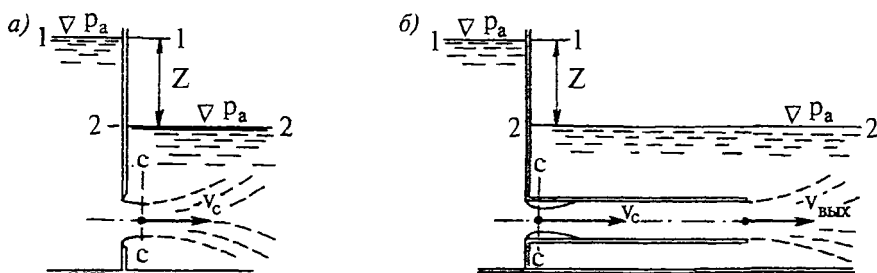


Рис. 8.5. Истечение из отверстия (а) и из насадка (б) “под уровень”

резервуар численно равна скоростному напору. Вследствие этого, как легко видеть, не только формулы для скорости и расхода при истечении под уровень будут иметь тот же вид, что и при истечении в атмосферу, но и численные значения коэффициентов расхода и скорости окажутся такими же. Значение максимального вакуума в насадке уменьшится на величину заглубления сжатого сечения потока под уровень воды в питаемом резервуаре.

Из вышеизложенного следует, что в случае истечения под уровень в соответствующие формулы для скорости и расхода, полученные для истечения в атмосферу, вместо H следует подставлять Z — разность уровней в питающем и питаемом резервуарах (см. рис. 8.5).

8.5. Примеры использования нецилиндрических насадков

Свойства насадков создавать в сжатом сечении вакуум, оказывающий “подсасывающее” воздействие на часть потока, расположенную от него выше по течению, используется в гидромашиностроении для увеличения коэффициента полезного действия лопастных гидротурбин. За камерой рабочего колеса турбины (рис. 8.6) устанавливают расходящийся (диффузорный) насадок, называемый отсасывающей трубой. Давление, которое имеет место на выходе из камеры рабочего колеса при

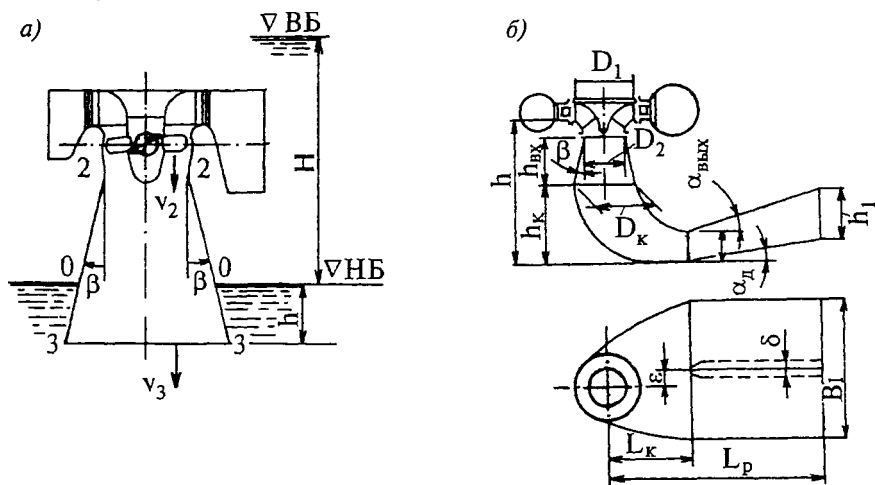


Рис. 8.6. Конический расходящийся насадок — отсасывающая труба вертикальной гидротурбины: а — прямая; б — изогнутая

наличии отсасывающей трубы, меньше давления, которое определяется уровнем воды в нижнем бьефе ГЭС. В результате эффективный перепад давления на рабочем колесе оказывается больше, чем тот, который обеспечивается разностью уровней воды в верхнем и нижнем бьефах. Это приводит к увеличению механической мощности, получаемой гидроагрегатом от потока воды, проходящей через него. Устройство отсасывающей трубы тем более эффективно, чем меньше напор на гидроагрегате, так как на высоконапорных ГЭС добавка к напору за счет отсасывающей трубы (измеряемая, как правило, единицами метров вод. ст.) может оказаться несущественной.

При использовании отсасывающей трубы следует иметь в виду следующие ограничения.

А. Поток не должен отрываться от стенок трубы, образование водоворотных областей должно быть исключено. Это необходимо как для уменьшения потерь напора в потоке, так и для исключения отрицательного воздействия крупномасштабных пульсаций давления, возникающих при образовании отрывных течений, на рабочее колесо турбины.

Для этого угол конусности β отсасывающей трубы (см. рис. 8.6,а) не должен превышать $7-9^\circ$.

Б. Низкое давление (вакуум) на выходе из камеры рабочего колеса может привести к кавитации и ухудшению рабочих характеристик гидроагрегата. Уменьшения вакуума (при сохранении эффекта отсасывающей трубы) можно добиться за счет давления со стороны нижнего бьефа, если понизить геодезическую отметку выходного сечения камеры рабочего колеса. Для уменьшения объема выемки грунта под гидроагрегатом отсасывающую трубу у турбин с вертикальной осью делают изогнутой (рис. 8.6,б).

Типичным примером использования конического сходящегося насадка является наконечник пожарного шланга — брандспойт (рис. 8.7). Чтобы для тушения пожара подать воду на высоту H в несколько десят-

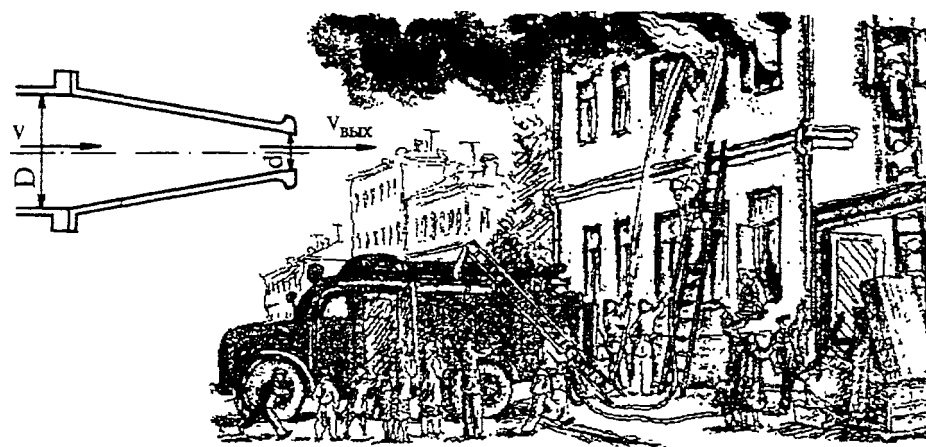


Рис. 8.7. Конический сходящийся насадок — наконечник пожарного шланга — брандспойт

ков метров, струя на выходе из насадка должна иметь скорость $v > \sqrt{2gH}$ (или скоростной напор $v^2/2g > H$). Если бы шланг имел диаметр D , равный диаметру выходного отверстия d (обычно $d < 2$ см), то при его длине более $1000 D$, что составляет всего около 20 м, потери по длине в нем превышают:

$$h_\ell = \lambda \frac{\ell}{D} \frac{v^2}{2g} = 0,03 \frac{1000 D}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} = 30 \frac{v^2}{2g}.$$

Таким образом, более 97% мощности пожарного насоса уходило бы на потери по длине, и лишь менее 3% на то, чтобы подать воду на высоту H . Чтобы уменьшить потери по длине, в конце шланга устанавливают конический сходящийся насадок, диаметр выходного сечения d которого обычно в несколько раз меньше диаметра шланга. При этом потери напора по длине, обратно пропорциональные (при заданном расходе) пятой степени диаметра, уменьшаются в десятки раз, что существенно увеличивает эффективность работы пожарного насоса.

Кроме того, на конфузорном участке потока снижается интенсивность турбулентности и струя воды испытывает, с одной стороны, за

счет гладкой свободной поверхности малое сопротивление воздуха, что увеличивает дальность боя струи, а с другой стороны, струя на большом протяжении сохраняет компактность (ее не разваливают поперечные пульсации скорости), что также обеспечивает большую дальность полета воды.

ГЛАВА 9

РАВНОМЕРНОЕ И ПЛАВНОИЗМЕНЯЮЩЕЕСЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТЫХ РУСЛАХ

9.1. Основные понятия и терминология

В отличие от изучавшегося ранее напорного движения, при котором поперечное сечение потока (при отсутствии водоворотных областей) совпадает с поперечным сечением канала, в случае движения жидкости в *открытых руслах* (рис. 9.1) лишь часть периметра поперечного сечения потока ограничена твердой границей (асб) и всегда имеется граница между жидкостью и газом, расположенным над ней. Эта отличительная особенность обуславливает два важных следствия.

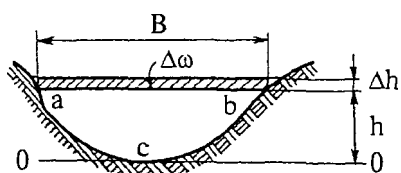


Рис. 9.1. Поперечное сечение безнапорного потока

1. Площадь поперечного сечения безнапорного потока даже в *цилиндрическом* канале является переменной величиной, которая зависит от характеристик потока и может изменяться вдоль течения. Если, в частности, размеры и

форма поперечного сечения *канала* заданы, то определение изменения вдоль течения размеров и формы поперечного сечения безнапорного *потока* в этом канале может являться задачей расчетов.

2. Давление на свободной поверхности обычно можно принять постоянным вдоль всего потока и равным атмосферному давлению, а используя уравнение Бернулли, можно исключить давление из расчетных зависимостей.

Введем несколько понятий, играющих важную роль при изучении безнапорного движения жидкости.

Проведем плоскость сравнения 0—0 через самую низкую точку поперечного сечения (см. рис. 9.1), расстояние от свободной поверхности до плоскости сравнения называют *глубиной* потока h .

Ширину потока на уровне свободной поверхности B и площадь живого сечения потока ω для заданного поперечного сечения русла будем рассматривать как функции глубины h и продольной координаты ℓ поперечного сечения:

$$\omega = \omega(h, \ell) \text{ и } B = B(h, \ell).$$

Если в фиксированном поперечном сечении придать глубине h приращение Δh , то площадь живого сечения получит приращение $\Delta \omega$ (заштрихованное на рис. 9.1), которое с точностью до малых высокого порядка равно

$$\Delta\omega \cong B \cdot \Delta h \quad \text{или} \quad B \cong \frac{\Delta\omega}{\Delta h}.$$

Переходя к пределу при $\Delta h \rightarrow 0$, имеем

$$B = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta h} = \frac{\partial\omega}{\partial h}. \quad (9.1)$$

Для русл прямоугольного поперечного сечения шириной по дну b используем понятие *удельного* (приходящегося на единицу ширины русла) *расхода*:

$$q = \frac{Q}{b}. \quad (9.2)$$

Удельный расход связан со средней скоростью v зависимостью

$$q = \frac{Q}{b} = \frac{v\omega}{b} = \frac{v b h}{b} = v h; \quad \text{или} \quad v = \frac{q}{h}. \quad (9.3)$$

Удельная энергия сечения — частное значение (гидродинамического) полного напора в фиксированном поперечном сечении потока:

$$H_e = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g},$$

вычисленное в предположении, что плоскость сравнения проходит через самую низкую точку C этого поперечного сечения (см. рис. 9.1). Ввиду того, что напор вычисляется в тех сечениях, где движение плавноизменяющееся, а в качестве p принимается избыточное давление (превышение давления над атмосферным), сумма первых двух слагаемых $(z + p/\gamma)$ оказывается в каждом сечении постоянной величиной, численно равной превышению свободной поверхности (на которой $p = 0$) над плоскостью сравнения, т.е. глубине потока h . Обозначив удельную энергию сечения через $\Theta = \Theta(h, \ell)$, запишем выражение для нее в виде

$$\Theta = h + \alpha v^2 / 2g. \quad (9.4)$$

Зафиксируем продольную координату поперечного сечения ℓ и выясним характерные особенности зависимости $\Theta = \Theta(h)$ при фиксированном значении расхода Q . Очевидно, если размеры и форма поперечного сечения канала заданы, то в этом сечении площадь поперечного сечения потока ω зависит от глубины. Эта зависимость может иметь простой вид, например, в случае прямоугольного канала (рис. 9.2, а)

$$\omega = b h,$$

где b — ширина канала по дну; в случае трапецеидального канала (рис. 9.2, б)

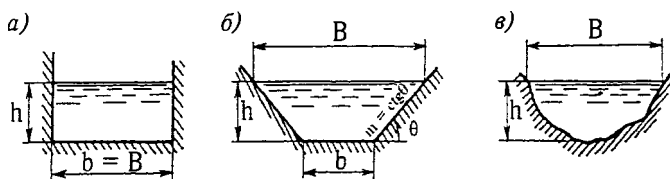


Рис. 9.2. Формы поперечного сечения каналов:
а — прямоугольная; б — трапецеидальная; в — произвольная

$$\omega = (b + mh)h,$$

где m — коэффициент бокового откоса, $m = \operatorname{ctg} \theta$; в более сложных случаях (рис. 9.3,б) площадь ω — это монотонно возрастающая функция глубины; $\omega = \omega(h)$, причем $\omega(0) = 0$.

Выразив среднюю скорость v через расход, представим (9.4) в виде

$$\Theta(h) = h + \alpha Q^2 / 2g \omega^2(h). \quad (9.5)$$

Легко видеть, что при $h \rightarrow 0$ значение $\Theta(h) \rightarrow \infty$. При $h \rightarrow \infty$ значение $\Theta(h)$ также неограниченно возрастает, но в этом случае второе слагаемое в правой части (9.5) стремится к нулю, так что при больших глубинах $\Theta(h) \sim h$, следовательно, линия $f(h) = h$ является асимптотой функции $\Theta(h)$. На рис. 9.3 представлена зависимость $\Theta = \Theta(h)$ для каналов; здесь, как иногда и впоследствии при изучении безнапорного движения, когда аргументом функции является глубина, значения аргумента откладываются по вертикальной оси, а значения функции по горизонтальной.

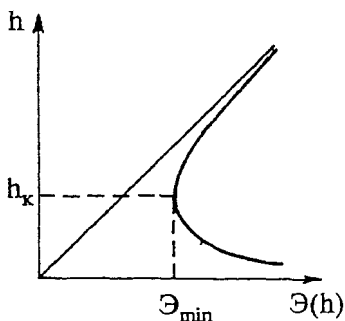


Рис. 9.3. Зависимость удельной энергии сечения от глубины потока

Как следует из приведенных выше соображений, функция $\Theta = \Theta(h)$ должна иметь при $h > 0$ хотя бы один минимум, и в случае русла простой формы (прямоугольных, трапецеидальных, параболических) минимальное значение удельной энергии сечения единственное. (Более сложные случаи рассматриваться не будут.)

Глубина, отвечающая минимуму удельной энергии сечения, называется *критической* и обозначается h_k . Потоки, у которых глубина больше критической, называются *спокойными* и характеризуются небольшими скоростями течения, а потоки с глубинами $h < h_k$ называются *бурными*.

Найдем выражение для определения критической глубины из условия, что при $h = h_k$ производная от $\Theta(h)$ равна нулю:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial h} = 1 + \frac{\alpha Q^2}{2g} \left(-\frac{2}{\omega^3(h_k)} \right) \frac{\partial \omega}{\partial h} \Big|_{h=h_k} = 0. \quad (9.6)$$

Подставив (9.1) в (9.6), получим уравнение для вычисления критической глубины:

$$\omega^3(h_k) / B(h_k) = \alpha Q^2 / g. \quad (9.7)$$

В простейшем случае прямоугольного русла, когда $\omega = bh$, а $B = b = \text{const}$, выражение (9.7) приобретает более простую форму:

$$h_k = \sqrt[3]{\alpha q^2 / g}, \quad (9.8)$$

где $q = Q/b$ — удельный (приходящийся на единицу ширины русла) расход.

Вышеизложенное является основанием для введения в качестве критерия состояния безнапорного потока *числа Фруда*:

$$Fr = \frac{v^2}{gh}, \quad (9.9)$$

которое представляет собой отношение скоростного напора $v^2/2g$, выражающего удельную кинетическую энергию потока, к половине глубины $h/2$, выражающей удельную потенциальную энергию. В соответствии с полученными результатами, если $Fr < 1$, то $v^2 < gh$, или $\frac{q^2}{h^2} < gh$;

используя (9.8), имеем $\frac{gh_k^3}{\alpha h^2} < gh$, и, приравняв $\alpha = 1,0$, получим $h > h_k$; следовательно, поток *спокойный*. Аналогичные вычисления показывают, что если $Fr > 1$, то $h < h_k$, и поток *бурный*.

Большую роль при изучении безнапорных потоков играет *продольный уклон дна*, который обозначается через i и представляет собой синус угла наклона дна к горизонту (рис. 9.4):

$$i = \sin \theta = -\left(dz_d/d\ell\right), \quad (9.10)$$

где $z_d = z_d(\ell)$ — отметка дна канала. Заметим, что при безнапорном течении при малых уклонах дна пьезометрическая линия совпадает с так называемой *кривой свободной поверхности* (см. рис. 9.4), которая представляет собой линию пересечения свободной поверхности с вертикальной продольной плоскостью, так как

$$H = z + p/\gamma = z_0 + p_a/\gamma = z_0,$$

где z_0 — отметка свободной поверхности. Следовательно, пьезометрический уклон J совпадает с продольным уклоном свободной поверхности.

При равномерном (продольно-однородном) движении, которое возможно лишь в цилиндрических каналах, глубина постоянна вдоль потока и

$$J = J_e = i. \quad (9.11)$$

При этом, очевидно, вся энергия, которую получает поток за счет работы силы тяжести, расходуется на преодоление сил трения, создающих сопротивление движению, а кинетическая энергия потока $v^2/2g$ не изменяется вдоль течения. Глубина, при которой в цилиндрическом канале имеет место равномерное движение, называется *нормальной* и обозначается через h_0 . Если потери напора связывать со скоростью потока с помощью формулы Шези $v = C\sqrt{RJ}$, то нормальная глубина определяется из уравнения (9.11), которое при заданных расходе Q , уклоне дна i и способе определения C через h и характеристики русла имеет вид

$$i = J_e = \frac{v^2}{C^2 R} = \frac{Q}{\omega^2(h_0) C^2(h_0) R(h_0)}. \quad (9.12)$$

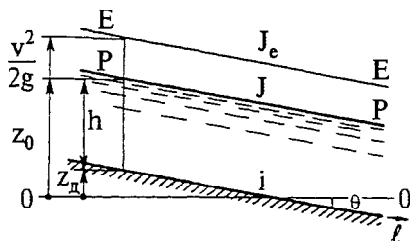


Рис. 9.4. Продольное сечение безнапорного канала

Это уравнение обычно решают графически, используя для вычисления C формулу Маннинга

$$C = (1/n) R^{1/6}, \quad (9.13)$$

где n — коэффициент шероховатости, определяемый по табл. 5.1 в зависимости от словесного описания поверхности дна русла.

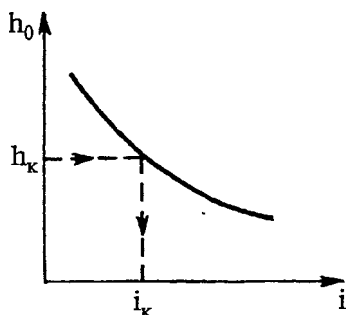


Рис. 9.5. Определение критического уклона

Если, пользуясь формулой (9.12), построить зависимость $i = i(h_0)$, то легко видеть, что она будет иметь вид, представленный на рис. 9.5, так как в знаменателе правой части (9.12) стоят возрастающие функции h_0 , а $Q = \text{const}$. Если подобрать уклон дна таким образом, чтобы нормальная глубина стала равной критической ($h_0 = h_k$, что всегда возможно, так как критическая глубина от уклона не зависит), то такой уклон называется *критическим*. На рис. 9.5 видно, что если в действительном русле уклон $i < i_k$, то $h_0 > h_k$, если же $i > i_k$, то $h_0 < h_k$.

Используя зависимости (9.7) и (9.12), можно получить выражение для критического уклона:

$$i_k = \frac{g}{\alpha C^2(h_k)} \frac{\chi(h_k)}{B(h_k)}. \quad (9.14)$$

При расчете широких грунтовых каналов и естественных водотоков, когда глубина потока $h < B/10$, можно считать, что $B(h) \approx \chi(h)$; в этом случае зависимость (9.14) имеет более простой вид:

$$i_k = \frac{g}{\alpha C^2(h_k)}. \quad (9.14, a)$$

9.2. Трапецеидальные каналы

Наиболее распространенной формой поперечного сечения безнапорных каналов, используемых в строительной практике, является трапецеидальная (см. рис. 9.2, б). Коэффициент бокового откоса $m = \text{ctg } \theta$ (называемый также заложением откоса) назначается с таким расчетом, чтобы исключить обрушение откоса. При этом надо иметь в виду, что откос канала должен быть по возможности наиболее крутым, так как крутой откос обеспечивает при прочих равных условиях минимальную ширину канала на уровне свободной поверхности. Если грунт скальный, то откос может быть сделан вертикальным ($m = 0$); для канала в плотной глине с бетонной облицовкой можно принять $m = 0,5-1,0$. В случае несвязных грунтов угол θ должен быть меньше угла естественного откоса грунта ϕ , причем грунт следует предполагать водонасыщенным; в зависимости от окатанности частиц грунта принимают $\phi = 14-30^\circ$. Назначая $\theta < \phi$, создают запас устойчивости откоса, так как на грунт кроме силы тяжести действуют влекущая сила со стороны руслового пото-

ка, фильтрационные силы со стороны воды, притекающей в канал из водонасыщенного грунта, слагающего берега, при понижении в канале уровня воды (например, при его опорожнении). Отметим, что облицовка канала бетонными плитами или бутовой кладкой увеличивает устойчивость откосов только сравнительно небольших каналов с глубиной $h_0 < 1,0-1,5$ м. При выполнении гидравлических расчетов значение m считаем заданным (не зависящим от результатов расчета).

Из геометрических соображений легко найти следующие зависимости:

$$\omega = (b + mh)h; \quad (9.15)$$

$$B = b + 2mh; \quad (9.16)$$

$$\chi = b + 2h\sqrt{1 + m^2}. \quad (9.17)$$

Коэффициент шероховатости n обычно при гидравлическом расчете неразмываемых русл также считается заданным, так как он зависит от материала, слагающего поверхность канала, и от технологии выполнения строительных работ.

В строительной практике удобной характеристикой трапецидального канала является отношение ширины по дну b к глубине h (*относительная ширина*):

$$\beta = b / h. \quad (9.18)$$

Если проанализировать зависимость средней скорости воды в канале при заданных Q , m , n и i от этой величины β , то окажется, что в очень узких и очень широких каналах смоченный периметр, а следовательно, сопротивление движению воды больше, чем при некотором промежуточном значении β ; зависимости $v = v(\beta)$ и $\omega = \omega(\beta)$ также имеют экстремум при некотором β (рис. 9.6). Поперечное сечение трапецидального канала, в котором при заданных Q , m , n и i средняя скорость максимальна, а площадь поперечного сечения и смоченный периметр минимальны, называется *гидравлически наивыгоднейшим*. Найдем гидравлически наивыгоднейшее значение β , которому отвечают экстремумы функции $\omega(\beta)$ и $\chi(\beta)$ для трапецидальных каналов. Переписав зависимости (9.15) и (9.17) в виде

$$\omega = (m + \beta)h^2;$$

$$\chi = h(\beta + 2\sqrt{1 + m^2})$$

и принимая во внимание, что глубина h также зависит от β , найдем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} &= h^2 + (m + \beta)2h \frac{\partial h}{\partial \beta} = 0; \\ \frac{\partial \chi}{\partial \beta} &= h + (\beta + 2\sqrt{1 + m^2}) \frac{\partial h}{\partial \beta} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.19)$$

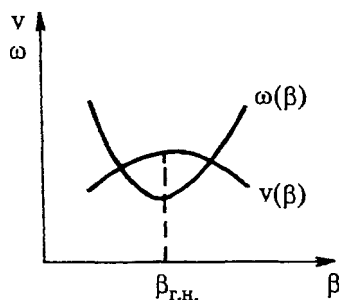


Рис. 9.6. Зависимость средней скорости и площади поперечного сечения потока от относительной ширины

Значение β , являющееся решением системы уравнений (9.19), определяет гидравлически наивыгоднейшее сечение и обозначается $\beta_{\text{гн}}$:

$$\beta_{\text{гн}} = 2(\sqrt{1 + m^2} - m). \quad (9.20)$$

Гидравлически наивыгоднейшее сечение канала не всегда является экономически наивыгоднейшим, так как при подсчете объемов работ существенно, выполняется ли канал в выемке или откосы его образуются насыпями; кроме того, большую роль в определении экономически выгодного сечения канала играет технология его сооружения.

Приведем в таблице основные задачи гидравлического расчета равномерного движения воды в трапециевидальных каналах (табл. 9.1).

Таблица 9.1

Задачи гидравлического расчета каналов

Номер задачи	1	2	3	4	5
Заданные величины (кроме m и n , которые считаются заданными во всех задачах)	b	b	Q	Q	$\beta_{\text{гн}}$
	h_0	h_0	i	i	Q
	Q	i	h_0	b	i
Искомая величина	i	Q	b	h_0	b, h_0

Основные приемы решения задач следующие.

Задача 1 решается с помощью формулы Шези

$$i = Q^2 / \omega^2 C^2 R,$$

где $\omega = (b + mh_0)h_0$, $\chi = b + 2h_0\sqrt{1 + m^2}$, $R = \omega / \chi$, $C = (1/n)R^{1/6}$.

Задача 2 решается с помощью тех же формул.

В задаче 3, задавая ряд значений b , определяют, как в задаче 1, расход Q для каждого задаваемого b и строят график зависимости $Q = Q(b)$, а затем по заданному значению необходимого расхода $Q_{\text{необх}}$ определяют искомую ширину канала $b_{\text{иск}}$ (рис. 9.7, а).

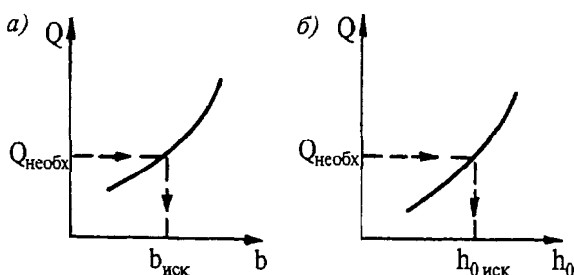


Рис. 9.7. Графическое решение задач 3 и 4

Задача 4 решается аналогично предыдущей (см. рис. 9.7, б).

В задаче 5, задавая ряд значений h_0 , находят соответствующие $b = \beta_{\text{гн}} h_0$, а затем строят зависимость $Q = Q(h_0)$ и по $Q_{\text{необх}}$ определяют искомые h_0 и b .

9.3. Ограничение скорости воды в каналах

При эксплуатации каналов к ним предъявляются следующие требования, обеспечивающие неизменность их поперечного сечения и пропускной способности.

1. Если в канал поступает вода, содержащая взвешенные частицы грунта, то они не должны выпадать из потока. Как правило, взвешенные частицы, попадающие с водой в искусственные русла, мелкие, илистые, поэтому изменение поперечного сечения канала вследствие выпадения из руслового потока взвешенных частиц называется *заиливанием* канала.

2. Ложе канала не должно *размываться* русловым потоком. Это требование, как правило, актуально для необлицованных грунтовых каналов.

3. Ложе канала не должно (если только противное не предусмотрено проектом) *зарастать* травой, водорослями, кустарником и т.п., так как при этом возрастают потери напора по длине и уменьшается пропускная способность канала. Что касается последнего требования, то оно важно главным образом для каналов, эксплуатируемых в условиях жаркого климата. Обычно полагают, что для исключения зарастания средняя скорость руслового потока должна быть не меньше 50—60 см/с.

9.4. Предотвращение заиливания каналов

Скорость равномерного падения под действием силы тяжести твердой частицы в достаточно большом (по сравнению с размерами частицы) объеме покоящейся воды называется *гидравлической крупностью* и обозначается w (см. гл. 16). Плотность материала частиц грунта почти всегда может быть принята равной $\rho_r = 2600 \text{ кг/м}^3$, поэтому гидравлическая крупность определяется главным образом диаметром частиц и вязкостью воды.

Отрыв от ложа русла, вовлечение в поток (взвешивание) и транспортирование русловым потоком частиц грунта обусловлены турбулентностью потока воды в канале, при этом определяющим фактором является соотношение значения вертикальной пульсационной скорости u'_z и гидравлической крупности частиц грунта w .

Частица грунта может быть вовлечена в поток, если ее гидравлическая крупность не превосходит максимального значения вертикальной пульсационной скорости:

$$w \leq \max(u'_z).$$

Экспериментальные исследования турбулентных потоков в открытых руслах показали, что стандарт вертикальной пульсационной скорости $\sqrt{u_z'^2}$ [см. (5.78)] в турбулентном ядре потока, не содержащего взвешенных частиц грунта, составляет (5—7)% от средней скорости v . Вовлечение в поток частиц грунта из ложа русла и их транспортирование требует затраты части энергии пульсационного движения воды. Если эта часть становится значительной, так что значение стандарта пульсационной скорости заметно уменьшается, то дальнейшее взвешивание

частиц грунта прекращается, а возможный избыток взвешенных частиц выпадает из потока. В результате взвесенесущий поток стабилизируется и становится продольно-однородным.

Транспортирующей способностью (ТС) турбулентного потока называется максимальный твердый весовой расход (т.е. вес частиц грунта, проносимых потоком воды в единицу времени через поперечное сечение потока) продольно-однородного взвесенесущего потока.

Транспортирующая способность зависит от размера частиц грунта, которые ложе русла может “предложить” турбулентному потоку. Если дно русла сложено крупными частицами, так что $w \geq \max(u'_z)$, то поток не сможет их оторвать от дна русла, следовательно, для этих частиц $ТС = 0$.

Массовая концентрация взвешенных наносов, т.е. масса частиц грунта в единице объема воды, называется *мутностью* и обозначается a . Средняя по вертикали мутность, соответствующая транспортирующей способности, называется *критической*:

$$a_0 = \frac{ТС}{gq}, \quad (9.21)$$

где $ТС$ и q — удельные (на единицу ширины русла) транспортирующая способность потока и расход воды.

Согласно экспериментальным исследованиям критическая мутность в турбулентном потоке может быть оценена по формуле

$$a_0 = (0,015 - 0,030) \frac{v^3}{h w}, \quad (9.22)$$

где w — средняя (характерная) для данного взвесенесущего потока гидравлическая крупность, h — глубина потока.

Зависимость (9.22) позволяет указать минимальную допустимую скорость воды в канале, при которой из потока с мутностью a не будут выпадать частицы грунта с гидравлической крупностью w , эта скорость называется *незаиляющей*:

$$v_{\text{незаиля}} = \sqrt[3]{\frac{a h w}{(0,015 - 0,030)}}. \quad (9.23)$$

Если в проектируемый канал из речного водозабора поступает вода с мутностью a , а взвешенные частицы грунта имеют гидравлическую крупность w , то при глубине потока h канал должен иметь продольный уклон i и поперечное сечение (т.е. b , m , n) такие, чтобы

$$v = C\sqrt{Ri} > v_{\text{незаиля}}. \quad (9.24)$$

Если это условие не выполняется, то в проекте необходимо либо изменить поперечное сечение канала (если возможно, сделать его ближе к гидравлически наивыгоднейшему), либо уменьшить шероховатость n , либо увеличить продольный уклон i . Это не всегда возможно главным образом по двум причинам.

1. По топографическим условиям изменение продольного уклона может потребовать значительного увеличения объема земляных работ;

кроме того, при увеличении уклона канал может не обеспечить доставку воды на требуемые геодезические отметки (на так называемую высоту командования).

2. Большие скорости воды в канале могут быть опасны, если ложе канала грунтовое, необлицованное с точки зрения его размыва русловым потоком.

При невозможности увеличения скорости воды v выполнения неравенства (9.24) можно добиться путем уменьшения $v_{\text{незаи.}}$. Наиболее радикальным средством является уменьшение мутности воды a путем отстаивания ее в специальных бассейнах (отстойниках).

9.5. Предотвращение размыва грунтовых каналов (метод влекущей силы)

Наиболее простым, на первый взгляд, требованием, при выполнении которого русло не размывается, является ограничение средней скорости руслового потока v :

$$v < v_{\text{неразм}}, \quad (9.25)$$

где $v_{\text{неразм}}$ — максимальная допустимая по условию размыва ложа русла (*максимальная неразмывающая*) скорость руслового потока. Как показывают эксперименты, значение этой скорости зависит как от характеристик грунта, слагающего дно русла, так и от формы и размеров поперечного сечения канала, и от количества взвешенных наносов и коллоидных частиц, транспортируемых русловым потоком. Под характеристиками грунта следует понимать:

в случае несвязных грунтов (песков) — гранулометрический состав, угол естественного откоса, наличие глинистых фракций;

в случае связных грунтов (супеси, суглинки, глины) — дополнительное сцепление и другие более сложные физико-химические характеристики.

В табл. 9.2 приведены ориентировочные значения максимальных неразмывающих скоростей для различных материалов для условий потока глубиной $h = 1$ м без взвешенных и коллоидных частиц.

Таблица 9.2

Неразмывающие скорости и касательные напряжения

Материал ложа канала	$v_{\text{неразм}}, \text{ м/с}$	$\tau_{\text{неразм}}, \text{ Па}$
<i>Несвязные материалы:</i>		
Мелкозернистые пески $d = 0,25 \text{ мм}$	0,39	0,30
Среднезернистые пески $d = 1,0 \text{ мм}$	0,55	0,68
Крупнозернистые пески $d = 3,0 \text{ мм}$	0,80	1,85
Гравий $d = 15 \text{ мм}$	1,20	7,0
Галька $d = 100 \text{ мм}$	1,50	14,0
<i>Связные материалы:</i>		
Супесь	0,54	0,57
Суглинок плотный	0,75	1,50
Глина плотная	1,05	2,20

Значения $v_{\text{неразм}}$ при глубинах $h \neq 1$ м пересчитываются с помощью формулы Шези; значение, приведенное в табл. 9.2, следует умножить на $h^{2/3}$.

Воздействие потока на ложе русла обусловлено структурой придонной части руслового потока, т.е. величиной и распределением вблизи дна осредненной скорости воды, значениями пульсационных составляющих скорости, частотой пульсаций скорости и т.п. Эксперименты показывают, что все эти характеристики определяются значением донных касательных напряжений τ_d , действующих со стороны потока на ложе русла (см. гл. 18), или более удобной эквивалентной характеристикой — динамической скоростью u_* :

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_d}{\rho}} \quad (9.26)$$

Имея это в виду, целесообразно во избежание размыва ограничить не средние скорости руслового потока, а касательные напряжения, действующие на ложе русла,

$$\tau_d < \tau_{\text{неразм}} \quad (9.27)$$

Это условие должно выполняться во всех точках смоченного периметра. В случае трапецеидального поперечного сечения типичное распределение по смоченному периметру продольных касательных напряжений, действующих со стороны руслового потока, представлено на рис. 9.8; максимальное продольное касательное напряжение на оси канала

$$(\tau_d)_{\text{max}} \cong 0,97 \rho g h_0 i \approx \rho g h_0 i \quad (9.28)$$

Напряжение $(\tau_d)_{\text{max}}$ согласно (9.27) должно быть меньше допустимого, которое зависит от материала, слагающего ложе канала. Это усло-

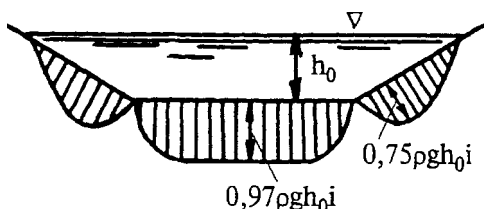


Рис. 9.8. Распределение продольных касательных напряжений по смоченному периметру трапецеидального канала

вие накладывает ограничение на глубину h_0 и продольный уклон i канала. Вместе с тем следует обратить внимание на то, что на боковых откосах на грунт действует помимо τ_d со стороны потока еще и сдвигающая вдоль откоса составляющая силы тяжести, поэтому, хотя на откосе касательное напряжение со стороны потока меньше, чем на дне, суммарное сдвиговое усилие, действующее на грунт, может привести к разрушению (размыву) поверхности откоса.

Чтобы оценить устойчивость к размыву грунта на откосе канала, рассмотрим предельное равновесие расчетного элемента грунта в виде призмы толщиной δ (рис. 9.9). Размеры призмы в плоскости откоса dx и dy должны быть достаточно велики, чтобы гранулометрический состав

грунта в объеме призмы не отличался от гранулометрического состава грунта, слагающего ложе канала. Вместе с тем призма элементарная в том смысле, что изменением касательного напряжения τ на ее поверхности можно пренебречь. Кроме того, исключим из баланса сил взаимодействие призмы с соседними элементами грунта на поверхности откоса.

На выделенный расчетный элемент грунта действуют следующие силы.

1. Сдвигающая сила со стороны руслового потока, равная

$$T = \tau dx dy. \quad (9.29)$$

2. Сила тяжести (с учетом взвешивающего действия воды)

$$G = (\rho_r - \rho) g \delta dx dy, \quad (9.30)$$

где ρ_r — плотность грунта.

Силу тяжести разложим на две составляющие:

G_y — направленную вдоль откоса и сдвигающую элемент грунта:

$$G_y = G \sin \theta, \quad (9.31)$$

G_n — направленную по нормали к поверхности откоса и прижимающую расчетный элемент к подстилающему грунту:

$$G_n = G \cos \theta. \quad (9.32)$$

Эта составляющая силы тяжести порождает нормальные напряжения σ между расчетным элементом и подстилающим грунтом и обуславливает удерживающую отсек силу сухого трения:

$$\sigma dx dy = G \cos \theta.$$

3. Сила трения, удерживающая элемент грунта. В состоянии предельного равновесия в соответствии с законом Кулона в случае несвязных грунтов эта сила равна

$$T_{yd} = \tau_{yd} dx dy = \sigma \operatorname{tg} \varphi \cdot dx dy, \quad (9.33)$$

где φ — угол внутреннего трения.

Уравнение предельного равновесия представим в виде (см. рис. 9.9)

$$T_{yd} = \sqrt{T^2 + G_y^2}. \quad (9.34)$$

Подставляя в (9.34) выражение для сил (9.29)—(9.33), получим

$$\tau_{yd} dx dy = \sqrt{(\tau dx dy)^2 + [(\rho_r - \rho) \sin \theta g \delta dx dy]^2}. \quad (9.35)$$

На дне канала при $\theta = 0$ из уравнения (9.35) имеем

$$\tau_{yd} = \tau_d. \quad (9.36)$$

Преобразуем τ_{yd} , используя (9.30), (9.32)—(9.34):

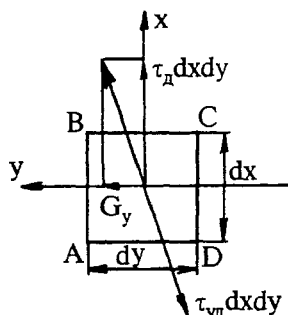
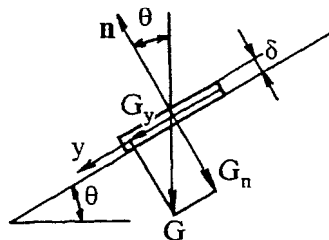


Рис. 9.9. Расчетная схема метода касательных напряжений

$$\tau_{уд} = \sigma \operatorname{tg} \varphi = \frac{G \cos \theta}{dx dy} \operatorname{tg} \varphi = \frac{(\rho_r - \rho) g \delta dx dy \cdot \cos \theta}{dx dy} \operatorname{tg} \varphi = (\rho_r - \rho) g \delta \cdot \cos \theta \operatorname{tg} \varphi. \quad (9.37)$$

Подставляя выражение для $\tau_{уд}$ в (9.36) (которое получено для $\theta = 0$ и, следовательно, в (9.36) $\cos \theta = 1$), найдем высоту расчетного элемента δ :

$$\delta = \frac{\tau_d}{(\rho_r - \rho) g \operatorname{tg} \varphi}. \quad (9.38)$$

Подставим (9.37) в (9.35) и исключим из полученного выражения δ с помощью (9.38), в результате получим

$$\tau_d \cos \theta = \sqrt{\tau^2 + \left(\frac{\tau_d \sin \theta}{\operatorname{tg} \varphi} \right)^2}, \quad (9.39)$$

отсюда

$$\tau = \tau_d \cos \theta \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{\operatorname{tg}^2 \varphi}}. \quad (9.40)$$

Выражение (9.40) показывает, насколько продольное касательное напряжение, действующее со стороны руслового потока на боковой откос трапецидального канала, должно быть меньше, чем на дне канала, где $\tau_d = \tau_{\text{неразм}}$, чтобы соблюдалось условие предельного равновесия, т.е. чтобы откосы канала не размывались.

Например, если грунт имеет угол внутреннего трения (или, что то же, угол естественного откоса), равный $\varphi = 24^\circ$, а коэффициент боково-

го откоса $m = 3,0 \left(\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{m} = 0,33 \right)$, то согласно (9.40)

$$\tau = \tau_d \cos \theta \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{\operatorname{tg}^2 \varphi}} = \tau_{\text{неразм}} 0,95 \sqrt{1 - \frac{0,33^2}{0,44^2}} = 0,64 \tau_{\text{неразм}}.$$

Следовательно, если на откосе $\tau_{\text{max}} = 0,75 \tau_d$ (как представлено на рис. 9.8), то такой откос будет размываться, хотя на дне канала выполняется условие $\tau_d = \tau_{\text{неразм}}$, и грунт на дне находится в состоянии предельного равновесия. Во избежание размыва в этом случае следует сделать откос более пологим, увеличив m либо уменьшив продольный уклон канала, создав на дне запас устойчивости, но обеспечив предельное равновесие на откосе.

9.6. Очертание равномерно устойчивого откоса

В рассмотренном выше случае предельное равновесие грунта имело место на дне и должно было быть обеспеченным в одной точке бокового откоса, где продольные касательные напряжения имели максимальное значение ($0,75 \rho g h_0 i$ на рис. 9.8). В других точках откоса имеет место избыточная устойчивость грунта.

Уравнение (9.40) позволяет найти криволинейное очертание откоса грунтового канала, в каждой точке которого грунт находится в состоянии предельного равновесия под действием силы тяжести и сдвигаю-

щей силы со стороны руслового потока. Такой откос назовем *равномерно устойчивым*.

Для вывода дифференциального уравнения, описывающего очертание равномерно устойчивого откоса, сделаем следующие допущения.

1. Продольные касательные напряжения на вертикальных плоскостях, параллельных скорости воды в канале, равны нулю. Другими словами, слои воды, выделенные вертикальными плоскостями, параллельными оси канала, не взаимодействуют с соседними и движутся под действием силы тяжести и сопротивления части ложа канала, являющейся основанием слоя (рис. 9.10). Согласно основному уравнению равномерного движения (5.69) для каждого такого слоя имеем

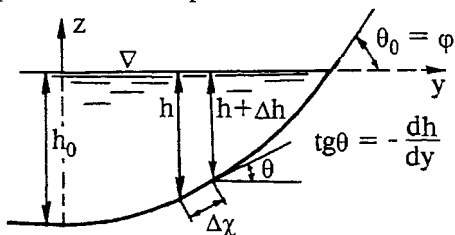


Рис. 9.10. Равномерно устойчивый откос грунтового канала

$$\int_{\chi} \tau d\chi = \rho g \Delta \omega J, \quad (9.41)$$

где смоченный периметр слоя $\chi = h + (h + \Delta h) + \Delta \chi$; площадь поперечного сечения $\Delta \omega = h \Delta \chi \cos \theta$; пьезометрический уклон $J = i$. Преобразуем (9.41), принимая во внимание, что подынтегральное выражение в левой части отлично от нуля только на части $\Delta \chi$ смоченного периметра. Полагая $\Delta \chi$ малым, изменением касательного напряжения в пределах $\Delta \chi$ пренебрежем:

$$\int_{\chi} \tau d\chi = \int_{\Delta \chi} \tau d\chi = \tau \int_{\Delta \chi} d\chi = \tau \Delta \chi = \rho g h \Delta \chi i \cos \theta;$$

в результате имеем

$$\tau = \rho g h i \cos \theta. \quad (9.42)$$

2. На уровне свободной поверхности воды в канале касательные напряжения со стороны руслового потока на ложе русла равны нулю и предельное равновесие обеспечивается только под действием силы тяжести, т.е. угол наклона касательной к поперечному сечению дна канала на урезе воды равен углу внутреннего трения (углу естественного откоса) грунта:

$$\theta_0 = \varphi. \quad (9.43)$$

3. На горизонтальной части смоченного периметра вблизи оси канала, где глубина руслового потока равна нормальной глубине h_0 , а продольное касательное напряжение согласно (9.42) имеет наибольшее значение

$$\tau_d = \rho g h_0 i, \quad (9.44)$$

принимаем, что τ_0 равно максимальному допускаемому неразмывающему касательному напряжению $\tau_{\text{неразм}}$.

Из геометрических соображений (см. рис. 9.10) имеем

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{dh}{dy}. \quad (9.45)$$

Подставим (9.42) и (9.44) в (9.40) и, используя (9.45), получим дифференциальное уравнение, описывающее равномерно устойчивый откос грунтового канала

$$\left(\frac{dh}{dy}\right)^2 + \left(\frac{h}{h_0}\right)^2 \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg}^2 \varphi = 0. \quad (9.46)$$

Решение этого уравнения при граничном условии (9.43) имеет вид

$$h = h_0 \cos \left(\frac{y \operatorname{tg} \varphi}{h_0} \right). \quad (9.47)$$

Очертание такого откоса представлено на рис. 9.10.

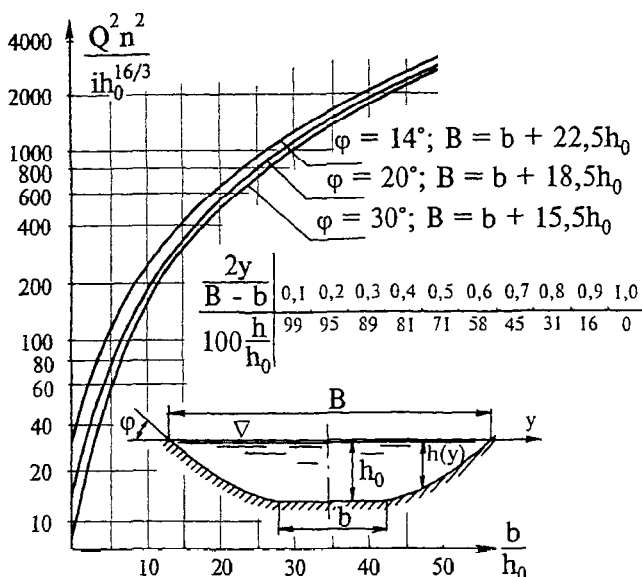


Рис. 9.11. Номограмма для расчета поперечного сечения грунтового канала с равномерно устойчивым откосом

Для расчета поперечного сечения грунтового канала с равномерно устойчивым откосом предлагается номограмма (рис. 9.11), использование которой продемонстрируем на следующем примере.

Пример расчета грунтового канала с равномерно устойчивым откосом

Задано: канал в среднезернистых песках ($\tau_{\text{неразм}} = 1,9$ Па, $\varphi = 20^\circ$) обеспечивает расход $Q = 100 \text{ м}^3/\text{с}$, технология строительства канала землеройными машинами обеспечивает коэффициент шероховатости $n = 0,025$. Уклон дна русла $i = 8 \cdot 10^{-5}$.

Определить размер поперечного сечения канала.

Для предварительных расчетов примем, что гидравлический радиус $R \approx h_0$, где h_0 — нормальная глубина. По основному уравнению равномерного движения

$$\frac{\tau_d}{\rho g} = RJ,$$

которое при сделанных допущениях перепишем в виде

$$\frac{\tau_{\text{неразм}}}{\rho g} = h_0 i,$$

определим

$$h_0 = \frac{\tau_{\text{неразм}}}{\rho g i} = \frac{1,9}{1000 \cdot 9,8 \cdot 8 \cdot 10^{-5}} = 2,42 \text{ м.}$$

Вычислим параметр номограммы:

$$\frac{Q^2 n^2}{i \cdot h_0^{16/3}} = \frac{100^2 \cdot 0,025^2}{8 \cdot 10^{-5} \cdot 2,42^{16/3}} = 703,16.$$

По номограмме для $\varphi = 20^\circ$ найдем

$$\frac{b}{h_0} = 22,5.$$

Для $\varphi = 20^\circ$ имеем

$$\frac{B}{h_0} = \frac{b}{h_0} + 18,5 = 22,5 + 18,5 = 41,0.$$

В результате получаем

$$b = \left(\frac{b}{h_0} \right) h_0 = 22,5 \cdot 2,42 = 54 \text{ м,}$$

$$B = \left(\frac{B}{h_0} \right) h_0 = 41,0 \cdot 2,42 = 99 \text{ м.}$$

Очертание откоса определяется по табличке на номограмме (см. рис. 9.11). Аналогично решаются другие задачи.

9.7. Неравномерное установившееся движение воды в каналах

В длинных цилиндрических каналах с положительным продольным уклоном обычно на большей их части имеет место равномерное движение, при котором энергия, получаемая водой за счет работы силы тяжести, полностью расходуется на преодоление гидравлического сопротивления (работу сил трения по дну). При этом кинетическая энергия жидкости вдоль потока остается неизменной; таким образом, и средняя скорость потока v , и глубина h остаются вдоль потока неизменными.

Неравномерное движение обычно имеет место либо в нецилиндрических каналах, либо в цилиндрических каналах с положительным продольным уклоном вследствие изменения поперечного сечения канала или его продольного уклона, главным образом, вблизи места, где это изменение происходит, а также в каналах с нулевым (горизонтальное дно) или отрицательным продольным уклоном дна. Примеры таких случаев приведены на рис. 9.12.

С целью расчета безнапорного неравномерного движения воспользуемся уравнением Бернулли для безнапорных потоков, исключив влияние сил на свободной поверхности. Рассмотрим (рис. 9.13) неравномерное движение в канале (не обязательно цилиндрическом) с постоянным продольным уклоном i (не обязательно положительным).

Наметим сечения 1—1 и 2—2 на расстоянии $\Delta \ell$ одно от другого (ограничения на значение $\Delta \ell$ будут пояснены в ходе вывода). Плоскость

сравнения проведем через нижнюю точку сечения 2—2, при этом отметка нижней точки сечения 1—1 будет равна $a = \Delta \ell \cdot i$. Считаем, что движение плавноизменяющееся и, следовательно, давление в сечениях распределено

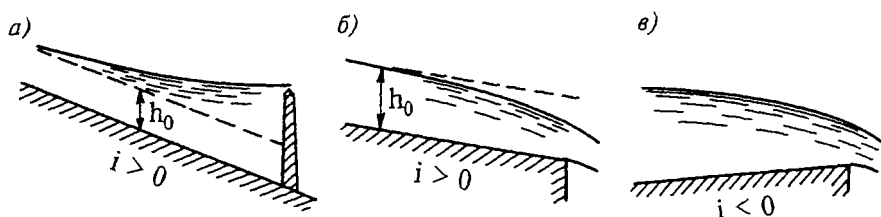


Рис. 9.12. Неравномерное движение в цилиндрическом канале, обусловленное:
 а — устройством плотины; б — свободным истечением в конце канала;
 в — отрицательным продольным уклоном дна канала

по гидростатическому закону, а сами поперечные сечения потока не только плоские, но и вертикальные (вследствие малости уклона i).

Запишем уравнение Бернулли

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_f \quad (9.48)$$

и определим входящие в него величины:

$$z_1 = a + h, \quad p_1 = p_a, \quad \alpha_1 = 1,0, \quad v_1 = v(h);$$

$$z_2 = h + \Delta h, \quad p_2 = p_a, \quad \alpha_2 = 1,0, \quad v + \Delta v = v(h + \Delta h).$$

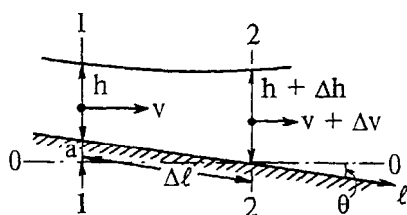


Рис. 9.13. Расчетная схема плавноизменяющегося движения

Вопрос о потерях напора h_f при неравномерном движении недостаточно изучен; в случае плавноизменяющегося движения, как показывает опыт, можно пользоваться формулами, апробированными применительно к условиям равномерного движения, например формулой Шези.

Для определения h_f следует принять, что $\Delta \ell$ достаточно мало, чтобы потери на этом участке можно было рассчитать, пользуясь формулой Шези, в которой все величины $\hat{v}$, $\hat{C}$ и $\hat{R}$ определяются для глубины, равной полусумме глубин в сечениях 1—1 и 2—2:

$$h_f = \hat{i}_f \cdot \Delta \ell = (\hat{v}^2 / \hat{C}^2 \hat{R}) \Delta \ell, \quad (9.49)$$

где $\hat{v} = v(h + \Delta h/2)$, $\hat{C} = C(h + \Delta h/2)$, $\hat{R} = R(h + \Delta h/2)$, а

$$\hat{i}_f = \hat{v}^2 / \hat{C}^2 \hat{R} \quad (9.50)$$

называется *уклоном трения*.

Кроме того, согласно (9.1) удельная энергия сечения 1—1 равна

$$\mathcal{E}(h) = h + v^2/2g, \quad (9.51)$$

а сечения 2—2

$$\mathcal{E}(h + \Delta h) = (h + \Delta h) + \frac{[v(h + \Delta h)]^2}{2g} = \mathcal{E}(h) + \Delta \mathcal{E}. \quad (9.52)$$

Подставляя полученные значения слагаемых в уравнение (9.48), получаем уравнение Чарномского:

$$\Delta \ell = \frac{\Theta(h + \Delta h) - \Theta(h)}{i - \hat{i}_f} = \frac{\Delta \Theta}{i - \hat{i}_f}. \quad (9.53)$$

Это уравнение является основным расчетным уравнением для определения отметок свободной поверхности безнапорных потоков, или, как говорят, для построения *кривых свободной поверхности*.

Прежде чем обратиться к анализу и расчетному использованию уравнения (9.49), обратим внимание на некоторые особенности функций $\Delta \Theta$ и i_f , которые очевидны из графиков функции $\Theta = \Theta(h)$ и $i_f = i_f(h)$, представленных на рис. 9.14.

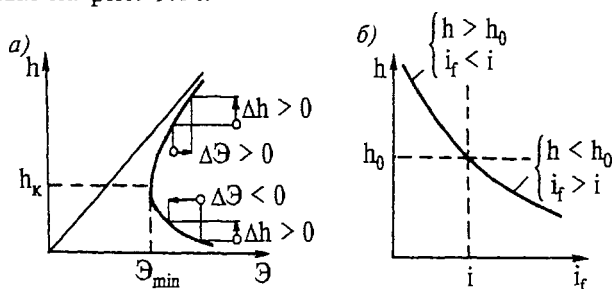


Рис. 9.14. Вспомогательные графики функций $\Theta = \Theta(h)$ и $i_f = i_f(h)$

Как видно из графика $\Theta = \Theta(h)$, при бурном движении, когда $h < h_k$, с увеличением глубины удельная энергия сечения убывает, т.е. если $\Delta h > 0$, то $\Delta \Theta < 0$, а при $h > h_k$ положительному Δh соответствует также положительное значение $\Delta \Theta$; при глубинах, близких к h_k , имеет место $\Delta \Theta \approx 0$.

На графике $i_f = i_f(h)$, построенном по формуле Шези, легко видеть, что согласно (9.15) нормальной глубине h_0 отвечает $i_f = i$, т.е. уклон трения равен уклону дна. Следовательно, при $h < h_0$ имеет место $i_f > i$, а при $h > h_0$ — соответственно $i_f < i$.

Установив это, перейдем к анализу форм свободной поверхности. Детали этого анализа поясним на примере цилиндрического русла с положительным продольным уклоном дна, меньшим критического: $i < i_k$ (рис. 9.15).

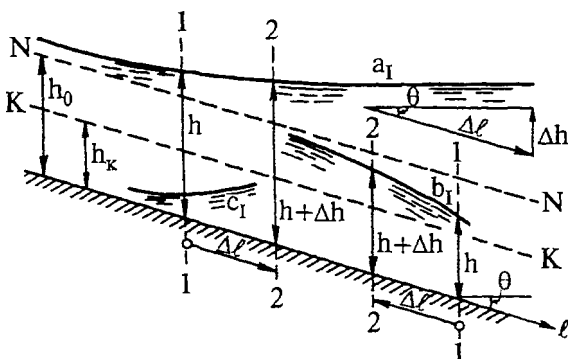


Рис. 9.15. Кривые свободной поверхности при $i < i_k$

Согласно рис. 9.5 здесь линия нормальных глубин N—N расположена выше линии критических глубин K—K.

Значения расхода Q и шероховатости n , а также зависимости $\omega = \omega(h)$ и $\chi = \chi(h)$ считаются заданными. Возьмем некоторое поперечное сечение потока 1—1, в котором глубина задана и равна $h > h_0 > h_k$, и определим, на каком расстоянии от него расположено сечение 2—2, в котором глубина равна $h + \Delta h$, причем $\Delta h > 0$.

Из рис. 9.14,а видно, что при $h > h_k$ положительным значениям Δh отвечает $\Delta \Theta > 0$, а из рис. 9.14,б следует, что при $h > h_0$ значение $i_f < i$. При этом, согласно (9.53), $\Delta \ell > 0$, и, следовательно, искомое сечение 2—2 расположено от сечения 1—1 на расстоянии $\Delta \ell$ в положительном направлении оси ℓ , т.е. ниже по течению. Таким образом, устанавливаем, что при $h > h_0 > h_k$ глубины вдоль потока возрастают; кривые свободной поверхности в этом случае называются *кривыми подпора*.

Рассмотрим теперь асимптотическое поведение этой кривой при $h \rightarrow \infty$ и $h \rightarrow h_0$. При $h \rightarrow \infty$ имеем $\Theta(h) \sim h$ (так как $\omega(h) \rightarrow \infty$ и $Q^2/2g\omega^2 \rightarrow 0$), а $i_f = Q^2/(\hat{\omega}^2 \hat{C}^2 \hat{R}) \rightarrow 0$. При этом

$$\Delta \ell = \frac{\Delta \Theta}{i - i_f} \sim \frac{\Delta h}{i};$$

из геометрических соображений (см. рис. 9.15) легко видеть, что касательная к кривой свободной поверхности при $h \rightarrow \infty$ становится горизонтальной.

В другом крайнем случае, когда $h \rightarrow h_0$, значение $i_f \rightarrow i$, а $\Delta \ell$ согласно (9.53) стремится к бесконечности. Таким образом, изменения глубины даже на небольшую величину Δh при значениях h , близких к h_0 , происходят на очень больших расстояниях, из чего следует, что линия нормальных глубин является асимптотой кривой свободной поверхности. Вышеизложенное показывает (см. рис. 9.15), что выпуклость кривой свободной поверхности в рассматриваемом случае ($h > h_0 > h_k$) направлена вниз и имеет вид, представленный на рис. 9.15. Эта кривая называется *кривой подпора типа a_1* . Подчеркнем, что, как следует из предельного положения касательной при $h \rightarrow \infty$, отметки свободной поверхности кривой a_1 уменьшаются вдоль течения.

Рассмотрим кривую свободной поверхности в том же русле при условии $h_k < h < h_0$ (кривая b_1). Здесь при $\Delta h > 0$, как следует из рис. 9.14, $\Delta \Theta > 0$ и $i_f > i$; следовательно, согласно (9.53), $\Delta \ell < 0$. Таким образом, точки кривой свободной поверхности с большими глубинами лежат выше по течению; такие кривые называются *кривыми спада*. Как и в случае кривой a_1 , можно доказать, что линия нормальных глубин является асимптотой кривой b_1 . При $h \rightarrow h_k$, как видно на рис. 9.14,а, $\Theta \rightarrow \Theta_{\min}$, и, следовательно, $\Delta \Theta \rightarrow 0$, а значит, согласно (9.53), и $\Delta \ell \rightarrow 0$; из этого следует, что вблизи линии критических глубин изменение глубины на конечное значение Δh происходит на очень малых расстояниях, т.е. касательная к кривой свободной поверхности при приближении к h_k асимптотически стремится к вертикали. Из изложенного выше следует также, что выпуклость кривой b_1 направлена вверх (см. рис. 9.15).

Отметим, что особенность кривой свободной поверхности вблизи линии критических глубин, так же как и особенность кривых a_1 и b_1

вблизи линии нормальных глубин, имеет место и в случае других кривых свободной поверхности.

Анализ для случая $h < h_k < h_0$, подобный приведенному выше, показывает, что здесь имеет место кривая подпора (обозначаемая c_1), обращенная вблизи линии критических глубин выпуклостью вниз. Характер этой кривой при $h \rightarrow 0$ не представляет практического интереса.

Анализ формы кривых свободной поверхности с помощью уравнения (9.53) при $i > i_k$, $i = 0$ или $i < 0$ проводится вполне аналогично, а результаты его с соответствующими названиями кривых приведены на рис. 9.16.

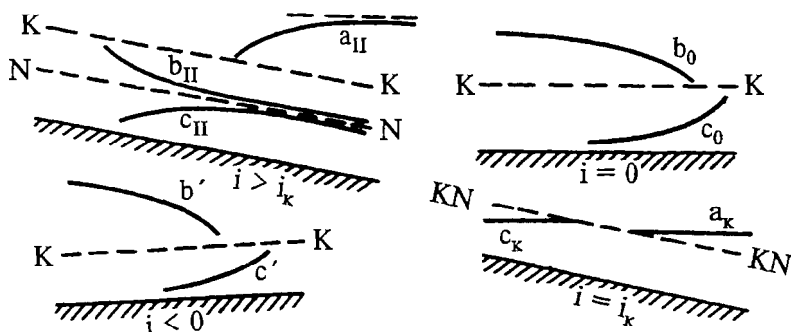


Рис. 9.16. Кривые свободной поверхности при различных уклонах дна русла

Примечания: 1. Все приведенные выше кривые относятся к случаям цилиндрических (призматических) русел. В нецилиндрических руслах построение кривых свободной поверхности с помощью уравнения (9.53) возможно лишь при условии, что “нецилиндричность” невелика, так что движение жидкости всюду плавноизменяющееся.

2. В случае цилиндрических русел расчет кривой свободной поверхности выполняется по зависимости (9.53). При этом, как показывает специальный анализ, Δh следует задавать положительным или отрицательным, имея в виду, что при $h > h_k$ должно быть $\Delta \ell < 0$, а при $h < h_k$, соответственно, $\Delta \ell > 0$.

3. Расчет кривых свободной поверхности в нецилиндрических руслах осложняется тем, что в этом случае геометрические, а следовательно, и многие гидравлические характеристики поперечного сечения потока зависят не только от глубины, но и от продольной координаты сечения ℓ , т.е. $\omega = (\ell, h)$, $\chi = \chi(\ell, h)$, $\Theta = \Theta(\ell, h)$ и т.п. Поэтому при вычислениях по зависимости (9.26), задавая Δh , следует вычислять $\Delta \ell$ методом последовательных приближений по формуле

$$\Delta_{i+1} \ell = \frac{\Theta(h + \Delta h, \ell + \Delta_i \ell) - \Theta(h, \ell)}{i(\ell + \Delta_i \ell/2) - i_f(h + \Delta h/2, \ell + \Delta_i \ell/2)}. \quad (9.54)$$

В качестве нулевого приближения обычно принимают $\Delta_0 \ell = 0$.

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТЫХ РУСЛАХ (МОДЕЛЬ МЕЛКОЙ ВОДЫ)

10.1. Предварительные замечания

Неустановившееся движение в открытых руслах (реках, каналах и т.п.) обычно возникает в результате маневрирования затворами гидротехнических сооружений (ГЭС, шлюзов, водозаборов), включения и выключения насосных станций. Примерами неустановившегося движения в естественных условиях являются распространение приливных волн в устьях рек и эстуариях, паводки различного происхождения в реках и т.п.

Для упрощения исследования неустановившегося движения будем рассматривать одномерную модель плавноизменяющегося движения, т.е. полагать, что движение близко к параллельноструйному и в каждом поперечном сечении потока:

скорость жидкости постоянна и равна средней скорости потока;
распределение давления подчиняется гидростатическому закону.

При этом неизвестными величинами являются глубина потока h и средняя скорость воды v в каждом поперечном сечении, которые являются функциями времени t и продольной (в направлении движения) геометрической координаты x : $h = h(x, t)$; $v = v(x, t)$. Иногда вместо этих искомых величин вводят площадь поперечного сечения $\omega(x, t)$ и расход воды $Q(x, t)$.

Для теоретического анализа и вычислений будут сделаны дополнительные упрощения. Плотность воды считаем постоянной (исключаем из рассмотрения стратифицированные течения жидкостей с различными плотностями), глубину потока малой по сравнению с горизонтальными размерами потока (его шириной). Уравнения, соответствующие принятым допущениям, называются уравнениями *мелкой воды*. Для максимального упрощения анализа рассматривается течение в широком прямоугольном призматическом канале с горизонтальным дном без учета сил трения. В реальных потоках это соответствует рассмотрению неустановившегося движения на фоне установившегося равномерного движения воды, когда силы трения о дно и стенки канала компенсируются вкладом в баланс сил проекции силы тяжести, обусловленной продольным уклоном канала.

10.2. Основные уравнения неустановившегося движения в открытых руслах

Выделим в потоке неизменный во времени контрольный объем V двумя поперечными сечениями, расположенными на бесконечно малом расстоянии Δx друг от друга (рис. 10.1); контрольная поверхность A состоит из двух поперечных сечений ω_x и $\omega_{x+\Delta x}$, поверхности дна A_d и свободной поверхности A_0 . Для выделенного объема запишем законы сохранения массы и изменения количества движения.

1. Закон сохранения массы

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_A \rho u_n dA = 0. \quad (10.1)$$

Так как контрольный объем не зависит от времени, а плотность воды в рассматриваемой модели постоянна, первое слагаемое в левой части

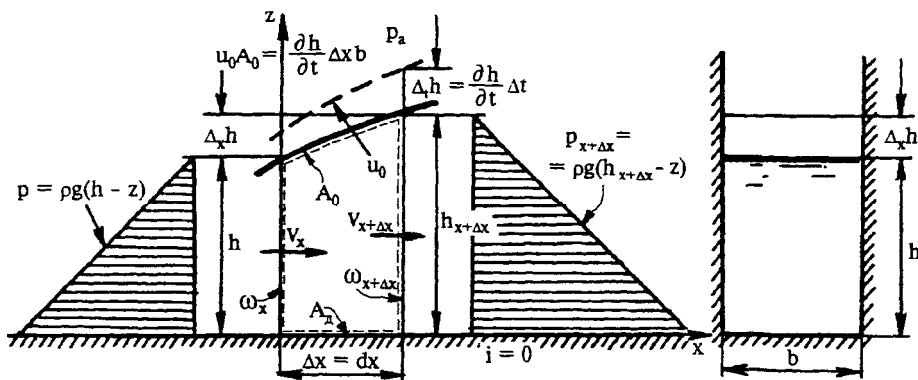


Рис. 10.1. Расчетная схема неустановившегося плавноизменяющегося движения уравнения (10.1) равно нулю. Сократив на ρ второе слагаемое, представим его в виде суммы

$$\int_{A_x} u_n dA + \int_{A_{x+\Delta x}} u_n dA + \int_{A_d} u_n dA + \int_{A_0} u_n dA = 0. \quad (10.2)$$

Нормальные составляющие скорости u_n равны

$$\left. \begin{array}{l} \text{на } A_x : u_n = -v_x; \text{ на } A_{x+\Delta x} : u_n = v_{x+\Delta x}; \\ \text{на } A_d : u_n = 0, \text{ на } A_0 : u_n = u_0, \end{array} \right\} \quad (10.3)$$

где u_0 — скорость протекания воды через неподвижную поверхность A_0 , являющуюся частью фиксированной контрольной поверхности A . Так как Δx величина малая, то в пределах A_0 можно считать u_0 постоянной. Кроме того, вследствие малости Δx имеем

$$v_{x+\Delta x} = v_x + \Delta_x v \approx v_x + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \text{ и } h_{x+\Delta x} = h_x + \Delta_x h \approx h_x + \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x.$$

Подставим (10.3) в (10.2) и получим

$$-v_x \int_{A_x} dA + \left(v_x + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \right) \int_{A_{x+\Delta x}} dA + u_0 \int_{A_0} dA = 0. \quad (10.4)$$

Из геометрических соображений найдем (рис. 10.1)

$$\omega_x = b h_x, \quad \omega_{x+\Delta x} = b \left(h_x + \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \right), \quad u_0 A_0 = \frac{\partial h}{\partial t} b \Delta x, \quad (10.5)$$

где b — ширина канала. Подставляя (10.5) в (10.4), имеем

$$-v_x h_x b + \left(v_x + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \right) \left(h_x + \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \right) b + \frac{\partial h}{\partial t} b \cdot \Delta x = 0.$$

Сохраняя слагаемые порядка Δx и сокращая на $b \cdot \Delta x$, получим первое из уравнений мелкой воды

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial v h}{\partial x} = 0. \quad (10.6)$$

2. Закон изменения количества движения

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u dV = \int_V \rho f_x dV + \int_A p_n dA. \quad (10.7)$$

Спроектируем все слагаемые этого уравнения на горизонтальную ось x , получим

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u_x dV = \int_V \rho f_x dV + \int_A p_{nx} dA. \quad (10.8)$$

Рассмотрим последовательно все слагаемые, входящие в это уравнение, оставляя слагаемые порядка Δx :

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{D}{Dt} \int_V \rho u_x dV &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u_x dV + \int_A \rho u_x u_n dA = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho v \int_V dV \right) + \int_{\omega_x} \rho u_x u_n dA + \int_{\omega_{x+\Delta x}} \rho u_x u_n dA + \int_{A_E} \rho u_x u_n dA + \int_{A_0} \rho u_x u_n dA = \\ &= \frac{\partial \rho v}{\partial t} h b \Delta x - \rho v_x^2 \int_{\omega_x} dA + \rho \left(v_x + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \right)^2 \int_{\omega_{x+\Delta x}} dA + \rho v \cdot u_0 \int_{A_0} dA = \\ &= \frac{\partial \rho v}{\partial t} h b \Delta x - \rho v_x^2 b h_x + \rho \left(v_x + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \right)^2 \left(h_x + \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \right) b + \rho v \frac{\partial h}{\partial t} b \cdot \Delta x = \\ &= \left(\frac{\partial \rho v h}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^2 h}{\partial x} \right) b \Delta x. \end{aligned} \quad (10.9)$$

При вычислении объемных интегралов значение скорости, среднее для объема V , обозначалось через v , этой же буквой обозначена скорость под знаком производной;

б) $\int_V \rho f_x dV = 0$; единственная рассматриваемая в настоящем случае объемная сила — сила тяжести — имеет нулевую проекцию на горизонтальную ось x ;

$$\text{в) } \int_A p_{nx} dA = \int_{\omega_x} p_{nx} dA + \int_{\omega_{x+\Delta x}} p_{nx} dA + \int_{A_0} p_{nx} dA + \int_{A_D} p_{nx} dA. \quad (10.10)$$

Проекция напряжения p_n на горизонтальную ось x равны:

на ω_x : $p_{nx} = -p_{xx} = p_x$ — гидродинамическое давление в сечении ω_x ;
 $p_x = p_a + \rho g(h_x - z)$;

на $\omega_{x+\Delta x}$: $p_{nx} = p_{xx} = -p_{x+\Delta x}$ — гидродинамическое давление в сечении $\omega_{x+\Delta x}$;

$$p_{x+\Delta x} = p_a + \rho g(h_{x+\Delta x} - z);$$

на A_0 действует атмосферное давление p_a ; вкладом атмосферного давления в баланс сил пренебрегаем, т.е. здесь и далее полагаем $p_a = 0$;

на $A_d : p_{nx}$ — касательные вязкие напряжения на поверхности дна, противодействующие движению жидкости; вкладом вязких напряжений пренебрегаем (см. п. 10.1).

Представив элементарную площадку dA как произведение $b \cdot dz$ и используя полученные в пунктах а), б) и в) результаты, продолжим равенство (10.10):

$$\begin{aligned} \int_A p_{nx} dA &= \int_0^{h_x} \rho g (h_x - z) b dz - \int_0^{h_{x+\Delta x}} \rho g (h_{x+\Delta x} - z) b dz = \\ &= \rho g h_x^2 b - \rho g \frac{h_x^2}{2} b - \rho g h_{x+\Delta x}^2 b + \rho g \frac{h_{x+\Delta x}^2}{2} b = \\ &= \frac{1}{2} \rho g h_x^2 b - \frac{1}{2} \rho g \left(h_x + \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \right)^2 b = \rho g h_x \frac{\partial h}{\partial x} b \cdot \Delta x. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Подставляя (10.9), (10.10) в (10.8), сократим на $\rho b \cdot \Delta x$ и получим второе уравнение

$$\frac{\partial v h}{\partial t} + \frac{\partial v^2 h}{\partial x} + g h \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (10.12)$$

или

$$\frac{\partial v h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(v^2 h + \frac{g h^2}{2} \right) = 0. \quad (10.13)$$

Система двух дифференциальных уравнений неустановившегося движения в открытых руслах (их называют также уравнениями мелкой воды или уравнениями Сен-Венана) в виде (10.6) и (10.13) является дивергентной или консервативной формой этих уравнений. Такая форма эффективна при численном решении этих уравнений, так как при использовании конечно-разностного представления производных обеспечивается выполнение законов сохранения массы и импульса, которые эти дифференциальные уравнения выражают.

Для теоретического анализа предпочтительнее конвергентная (неконсервативная или Эйлера) форма этих уравнений. Для ее получения перепишем (10.13) в виде

$$v \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial v}{\partial t} + v h \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v h}{\partial x} + g h \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

или

$$v \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial v h}{\partial x} \right) + h \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} \right) = 0.$$

Выражение в первых скобках равно нулю согласно (10.6). В результате система уравнений (10.6) и (10.13) может быть представлена в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial v}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.14)$$

Эта система уравнений обычно называется неконсервативной или Эйлеровой формой уравнений мелкой воды.

В более общем случае прямолинейного, но нецилиндрического канала произвольного поперечного сечения с продольным уклоном дна канала $i \neq 0$ система уравнений неустановившегося движения имеет вид (без вывода)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial v \omega}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial \rho v \omega}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^2 \omega}{\partial x} &= \rho g \omega_1 - \omega \frac{\partial p_a}{\partial x} - \tau_d \cdot \chi + \tau_0 B + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} [(p_{xx}^B + p_{xx}^T) \omega] - \rho g \omega \frac{\partial h}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (10.15)$$

где $\omega = \omega(x, t)$ — поперечное сечение потока воды; $\tau_d(x, t)$ — продольные (в направлении течения) донные касательные напряжения, осредненные по смоченному периметру χ ; $\tau_0 = \tau_0(x, t)$ — продольная составляющая касательных напряжений на свободной поверхности, обусловленных ветром; $B = B(x, t)$ — ширина потока на уровне свободной поверхности; p_{xx}^B и p_{xx}^T — нормальные вязкие и турбулентные напряжения, осредненные по поперечному сечению потока. Все величины (кроме искомых ω и v) должны быть заданы для всех поперечных сечений, включая зависимости $\omega = \omega(h)$ и $B = B(h)$.

Решение системы (10.15) имеет те же характерные особенности, что и решение системы (10.14), анализ которого приведен ниже.

10.3. Упрощения и анализ уравнений мелкой воды

Для упрощения анализа системы уравнений мелкой воды (10.14), во-первых, исключим из них так называемые конвективные слагаемые

$v \frac{\partial v}{\partial x}$ и $v \frac{\partial h}{\partial x}$, которые обычно пренебрежимо малы по сравнению с оставшимися слагаемыми. Во-вторых, линеаризуем эти уравнения, пред-

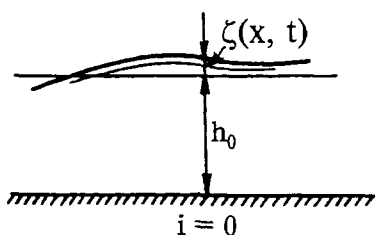


Рис. 10.2. Возмущение свободной поверхности

полагая, что при неустановившемся движении отклонение свободной поверхности от некоторой не зависящей от времени горизонтальной поверхности, отвечающей глубине h_0 , значительно меньше, чем глубина h_0 или h (рис. 10.2). Другими словами, если глубину $h(x, t)$ представить в виде

$$h(x, t) = h_0 + \zeta(x, t), \quad (10.16)$$

то возмущение свободной поверхности $\zeta(x, t)$ значительно меньше, чем глубина равномерного невозмущенного движения h_0 . Таким образом, имеем

$$\zeta \ll h_0, \quad \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (10.17)$$

В результате представим систему уравнений (10.14) в линеаризованном виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + h_0 \frac{\partial v}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.18)$$

Полученная система (10.18) аналогична системе уравнений гидравлического удара (7.19). Поэтому для анализа этой системы воспользуемся приемом, описанным в разд. 7.4. Преобразуем систему векторных волновых уравнений в систему скалярных уравнений, введя новые искоемые функции:

$$Y(x, t) = v(x, t) + \sqrt{\frac{g}{h_0}} \zeta(x, t); \quad Z(x, t) = v(x, t) - \sqrt{\frac{g}{h_0}} \zeta(x, t). \quad (10.19)$$

Подставим (10.19) в (10.18) и после преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial t} + \sqrt{gh_0} \frac{\partial Y}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial Z}{\partial t} - \sqrt{gh_0} \frac{\partial Z}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.20)$$

Чтобы продемонстрировать основные свойства решения системы уравнений (10.18) и (10.20), рассмотрим неустановившееся движение в горизонтальном прямоугольном канале шириной b и длиной L (рис. 10.3); с правой стороны при $x = L$ канал ограничен непроницаемой стенкой. В начальный момент времени $t = 0$ вода в канале покоит-

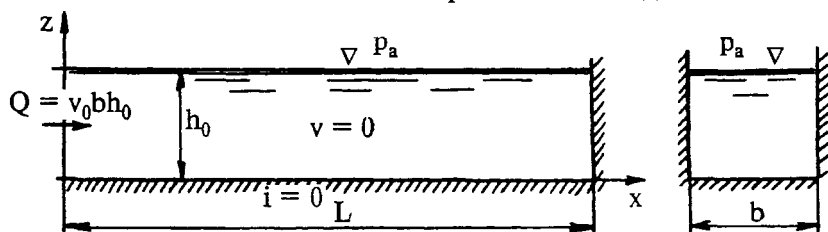


Рис. 10.3. Начальные условия движения воды в каналах

ся, свободная поверхность горизонтальна, а глубина воды постоянна вдоль канала и равна h_0 . Неустановившееся движение возникает вследствие того, что через крайнее левое поперечное сечение канала (при $x = 0$) начинает поступать неизменный во времени расход Q . Сформулируем начальные и граничные условия для системы (10.18).

Начальные условия:

$$v(x, t)|_{t=0} = 0; \quad \zeta(x, t)|_{t=0} = 0. \quad (10.21)$$

Граничные условия:

$$v(x, t)|_{x=L} = 0; \quad v(x, t)|_{x=0} = \frac{Q}{bh_0} = v_0. \quad (10.22)$$

Разделим длину канала L на две равные части $\Delta x = L/2$. Уравнения характеристических линий системы (10.18) имеют вид

$$x = \sqrt{gh_0} t + x_0, \quad (10.23)$$

$$x = -\sqrt{gh_0} t + x_0. \quad (10.24)$$

Шаг по времени примем равным $\Delta t = \Delta x / \sqrt{gh_0}$. Согласно уравнениям (10.20) функции Y и Z постоянны вдоль характеристических линий (10.23) и (10.24) соответственно. Покажем, как, основываясь на этом, можно вычислить физические величины — скорость воды v и изменение глубины ζ — в любой точке плоскости (x, t) на рис. 10.4.

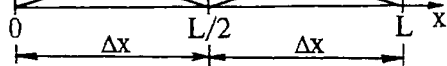


Рис. 10.4. Сетка характеристик уравнений (10.20)

обе эти точки лежат на одной и той же характеристической линии $x = -\sqrt{gh_0} t + L/2$:

$$Z(0, \Delta t) = Z(L/2, 0). \quad (10.25)$$

Подставим в (10.25) выражение Z через физические величины согласно (10.19):

$$v(0, \Delta t) - \sqrt{\frac{g}{h_0}} \zeta(0, \Delta t) = v(L/2, 0) - \sqrt{\frac{g}{h_0}} \zeta(L/2, 0);$$

используем начальные и граничные условия:

$$v_0 - \sqrt{\frac{g}{h_0}} \zeta(0, \Delta t) = 0 - \sqrt{\frac{g}{h_0}} \cdot 0$$

и получим

$$\zeta(0, \Delta t) = v_0 \sqrt{\frac{h_0}{g}}. \quad (10.26)$$

2. В точке $(0, 2\Delta t)$, так же как в предыдущей точке, имеем

$$\zeta(0, 2\Delta t) = v_0 \sqrt{\frac{h_0}{g}}. \quad (10.27)$$

3. В точке $(L, \Delta t)$ можно использовать постоянство функции Y вдоль характеристической линии $x = \sqrt{gh_0} t + L/2$:

$$Y(L, \Delta t) = Y(L/2, 0) \text{ или}$$

$$v(L, \Delta t) + \sqrt{\frac{g}{h_0}} \zeta(L, \Delta t) = v(L/2, 0) + \sqrt{\frac{g}{h_0}} \zeta(L/2, 0).$$

Используем начальные и граничные условия:

$$0 + \sqrt{\frac{g}{h_0}} \zeta(L, \Delta t) = 0 + \sqrt{\frac{g}{h_0}} \cdot 0,$$

получим

$$\zeta(L, \Delta t) = 0. \quad (10.28)$$

4. В точке $(L/2, 2\Delta t)$ имеем два уравнения

$$Y(L/2, 2\Delta t) = Y(0, \Delta t) = v(0, \Delta t) + \sqrt{\frac{g}{h_0}} \zeta(0, \Delta t) = v_0 + \sqrt{\frac{g}{h_0}} v_0 \sqrt{\frac{h_0}{g}} = 2v_0;$$

$$Z(L/2, 2\Delta t) = Z(L, \Delta t) = v(L, \Delta t) - \sqrt{\frac{g}{h_0}} \zeta(L, \Delta t) = 0 - \sqrt{\frac{g}{h_0}} \cdot 0 = 0.$$

Согласно (10.19) найдем

$$v(L/2, 2\Delta t) = \frac{Y(L/2, 2\Delta t) + Z(L/2, 2\Delta t)}{2} = \frac{2v_0 + 0}{2} = v_0;$$

$$\zeta(L/2, 2\Delta t) = \sqrt{\frac{h_0}{g}} \frac{Y(L/2, 2\Delta t) - Z(L/2, 2\Delta t)}{2} = \sqrt{\frac{h_0}{g}} \frac{2v_0 - 0}{2} = v_0 \sqrt{\frac{h_0}{g}}.$$

Выполнив подобные вычисления в подходящих точках плоскости (x, t) , можно построить зависимости $\zeta = \zeta(0, t)$, $v = v(L/2, t)$, $\zeta(L, t)$ для последующего анализа. Очевидно, что можно использовать и более мелкие шаги по времени и пространству (сохраняя соотношение между ними $\Delta x = \Delta t \sqrt{gh_0}$), причем, чем меньше Δx и Δt , тем более точную и полную информацию о потоке можно получить. Поэтому на рис. 10.5 указанные выше зависимости, полученные из точного реше-

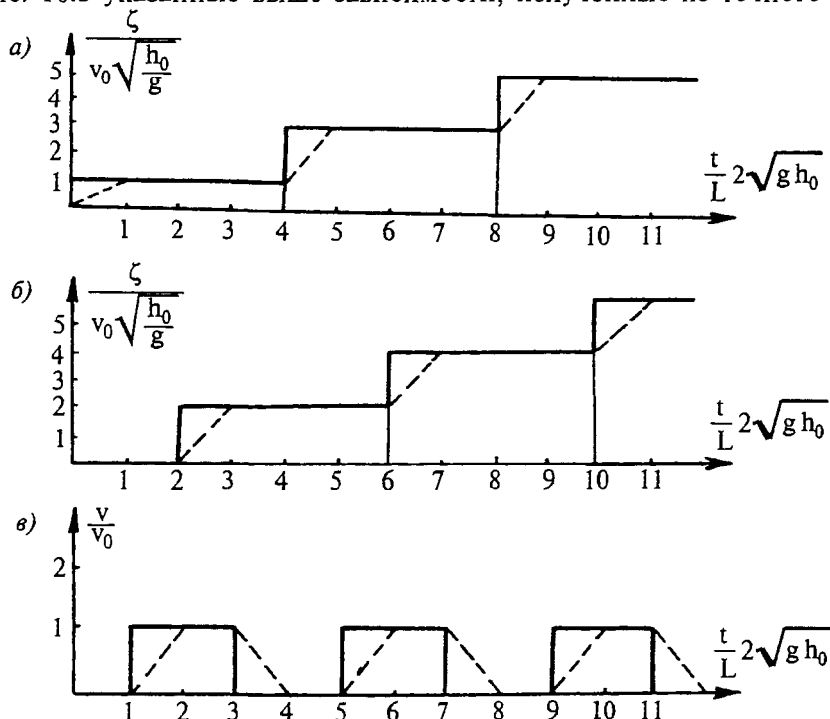


Рис. 10.5. Результаты решения уравнений (10.18): а — уровень свободной поверхности в сечении $x = 0$; б — то же в сечении $x = L$; в — скорости потока в сечении $x = L/2$

ния системы уравнений (10.18) при бесконечно малых Δx и Δt , показаны сплошной линией, а результаты, полученные при принятых нами $\Delta x = L/2$ и $\Delta t = L / (2\sqrt{gh_0})$, показаны штриховой линией. Для последующего анализа следует отметить, что при неустановившемся движении в открытых руслах величина $\sqrt{gh_0}$ играет ту же самую роль волновой скорости (скорости распространения возмущений вдоль потока), какую при описании гидравлического удара (неустановившегося движения в напорных трубопроводах) играет величина a (см. гл. 7). Это следует как из сравнения систем уравнений (10.19) и (7.19), так и из уравнений характеристических линий для (10.23), (10.24) и (7.31), и означает, что скорость c перемещения вдоль потока в открытом русле любых малых возмущений свободной поверхности равна

$$c = \sqrt{gh_0}. \quad (10.29)$$

Это известная формула Лагранжа для скорости перемещения гравитационных волн малой амплитуды в мелководных водоемах (в открытых руслах с конечной глубиной h_0 и с нулевой скоростью жидкости). Для определения волновой скорости относительно неподвижной (связанной с дном канала) системы координат в точке с ненулевой скоростью движения воды $v \neq 0$ следует наложить скорость c на скорость v . Отметим дополнительно, что в отличие от скорости a распространения возмущений в трубопроводе, которая много больше скорости потока v , значение $\sqrt{gh_0}$ обычно имеет такой же порядок, что и скорость воды в открытом канале.

Результаты расчета, приведенные выше и представленные на рис. 10.5, позволяют описать явления, происходящие в канале при $t > 0$. В тот момент, когда расход Q начинает поступать в канал через входное сечение $x = 0$ и скорость воды в этом сечении становится равной $v_0 = Q/bh_0$, отметка свободной поверхности в этом же сечении мгновенно возрастает на величину $\zeta = v_0 \sqrt{\frac{h_0}{g}}$. Это возмущение $\left(v = v_0, \zeta = v_0 \sqrt{\frac{h_0}{g}} \right)$ распространяется в направлении оси x со скоростью $c = \sqrt{gh_0}$, причем во входном сечении скорость воды и отметка свободной поверхности остаются неизменными и равными v_0 и $\zeta = v_0 \sqrt{\frac{h_0}{g}}$ соответственно. В момент $0 < t < L/\sqrt{gh_0}$ картина течения представлена на рис. 10.6,а.

В момент $t = L/\sqrt{gh_0}$ фронт возмущения достигает непроницаемой стенки в конце канала ($x = L$) и, так как на этой стенке скорость $v(L, t) = 0$ при всех t , частицы воды, двигающиеся со скоростью v_0 , набегают на эту стенку, в результате отметка свободной поверхности у стенки возрастает и достигает значения $h_0 + 2v_0 \sqrt{\frac{h_0}{g}}$, в то время как скорость воды уменьшается до нуля. Возникшее у стенки сочетание $\left(v = 0, \zeta = 2v_0 \sqrt{\frac{h_0}{g}} \right)$ перемещается в направлении, противоположном оси x , и в момент $L/\sqrt{gh_0} < t < 2L/\sqrt{gh_0}$ имеет место картина течения, представленная на рис. 10.6,б.

В момент $t = 2L/\sqrt{gh_0}$ фронт возмущения, возникшего у непроницаемой стенки, достигает входного сечения канала ($x = 0$) и здесь накладывается на расход Q , который продолжает поступать в канал все время

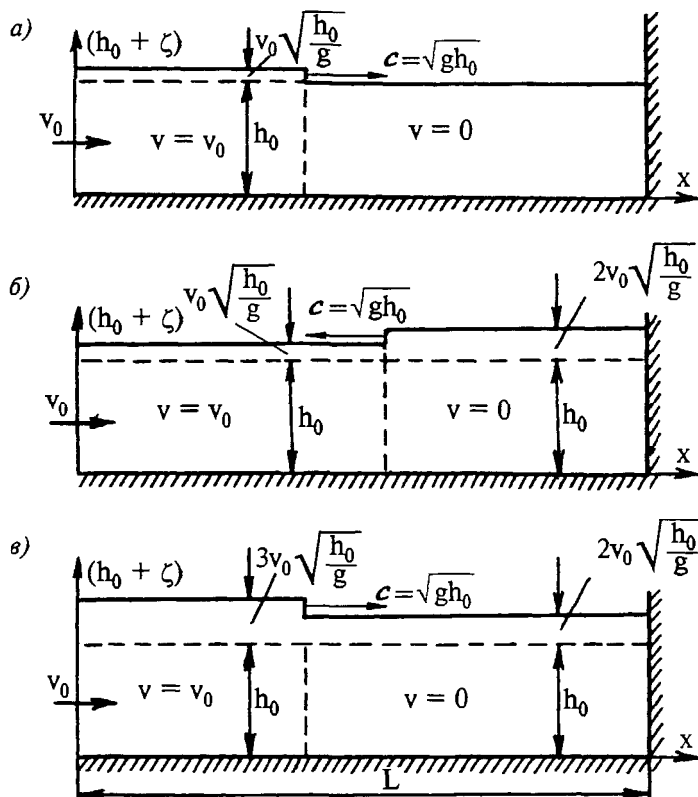


Рис. 10.6. Расчетные положения свободной поверхности и скорость воды в канале в различные моменты времени:

$$a - 0 < t < L/\sqrt{gh_0}; \quad б - L/\sqrt{gh_0} < t < 2L/\sqrt{gh_0};$$

$$в - 2L/\sqrt{gh_0} < t < 3L/\sqrt{gh_0}$$

$t > 0$. К этому моменту скорость воды во всем канале равна нулю, а глубина воды постоянна вдоль канала и равна $\left(h_0 + 2v_0\sqrt{\frac{h_0}{g}}\right)$. Так как было принято, что все возмущения свободной поверхности малы по сравнению с h_0 , то условия в канале при $t = 2L/\sqrt{gh_0}$ можно считать приблизительно такими же, как и при $t = 0$. Следовательно, так как расход Q продолжает поступать в канал, отметка воды в начальном сечении возрастает до значения $h_0 + 3v_0\sqrt{\frac{h_0}{g}}$ и новое сочетание $\left(v = v_0, \zeta = 3v_0\sqrt{\frac{h_0}{g}}\right)$ начинает распространяться в направлении оси x , причем скорость распространения может быть принята $\sqrt{gh_0}$, так как $h_0 + 2v_0\sqrt{\frac{h_0}{g}} \approx h_0$.

В момент $2L/\sqrt{gh_0} < t < 3L/\sqrt{gh_0}$ картина течения имеет вид, представленный на рис. 10.6,в. Далее процесс развивается аналогично предыдущему.

Легко проверить баланс объемов воды в рассматриваемом процессе. Например, к моменту $t = 2L/\sqrt{gh_0}$ объем воды в канале возрастает на величину $Lb2v_0\sqrt{\frac{h_0}{g}}$; к этому же моменту в канал через входное сечение поступит объем $Q2L/\sqrt{gh_0} = v_0bh_02L/\sqrt{gh_0} = 2v_0Lb\sqrt{\frac{h_0}{g}}$.

10.4. Классификация длинных волн в каналах

Возмущения свободной поверхности, которые описываются с помощью теории мелкой воды (т.е. уравнений Сен-Венана), называются *длинными волнами*. При наложении длинных волн на равномерное течение в канале со скоростью v и нормальной глубиной h_0 весьма важным представляется соотношение скорости течения v и скорости перемещения фронта длинной волны $c = \sqrt{gh_0}$. Если $c > v$ или

$$\frac{v}{c} = \frac{v}{\sqrt{gh_0}} < 1, \quad (10.30)$$

то длинная волна может распространяться и вверх и вниз по течению от места своего образования. Согласно (10.30) в этом случае $\frac{v^2}{gh_0} = Fr < 1$, т.е.

поток *спокойный* (см. п. 9.1). В *бурных* потоках (если глубина потока меньше критической или $Fr = \frac{v^2}{gh_0} > 1$), скорость потока $v > c$ и фронт длинной волны сносится вниз по течению потоком воды в канале.

Поэтому в дальнейшем рассмотрим распространение длинных волн в спокойных равномерных потоках. Если в результате распространения длинной волны глубина потока увеличивается (как в п. 10.3), то такая волна называется *положительной*, в противном случае — *отрицательной*. Если фронт волны распространяется вниз по течению, то скорость его $\sqrt{gh_0}$ суммируется со скоростью потока v , такая волна называется *нисходящей*. Если фронт волны распространяется вверх по течению, то его скорость равна $(\sqrt{gh_0} - v)$, а волна называется *восходящей*.

В разд. 10.3 было рассмотрено перемещение фронта длинной волны в предположении, что ее высота пренебрежимо мала по сравнению с глубиной воды в канале h_0 . При этом очертание фронта волны не имело существенного значения и было обозначено вертикальным отрезком. В реальных условиях высота длинной волны h_b конечна и соизмерима с глубиной h_0 , и поэтому очертание фронта волны может представлять практический интерес.

Движение воды вблизи фронта резкоизменяющееся, и уравнения мелкой воды (10.14) непригодны для описания формы свободной поверхности в этой области. Поэтому приведем качественное обоснование формы фронта волны.

Пусть в момент времени t фронт *положительной волны* имеет вид отрезка прямой A_1B_1 (рис. 10.7,а). Представим волну конечной высоты h_b как наложение (суперпозицию) элементарных волн малой высоты Δh . Скорость перемещения нижней элементарной волны c_A согласно

формуле Лагранжа (10.29) определяется глубиной h_0 , а скорость верхней элементарной волны c_B — глубиной $(h_0 + h_B)$; при этом

$$c_B = \sqrt{g(h_0 + h_B)} > \sqrt{gh_0} = c_A. \quad (10.31)$$

В результате фронт положительной волны при ее перемещении становится более крутым, и в момент t_2 он будет представлен отрезком A_2B_2 .

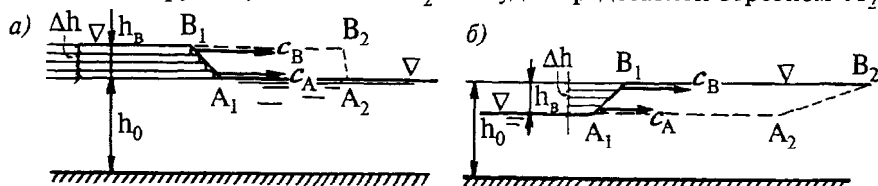


Рис. 10.7. Формирование фронта положительной и отрицательной волн

В случае *отрицательной волны* (рис. 10.7, б), проведя аналогичные рассуждения, имеем

$$c_B = \sqrt{gh_0} > \sqrt{g(h_0 - h_B)} = c_A. \quad (10.32)$$

В результате фронт отрицательной волны при ее перемещении становится более пологим.

Если уполоаживание фронта отрицательной волны не приводит к качественным изменениям картины течения, то увеличение крутизны фронта положительной волны приводит к обрушению фронта и образованию вальца, который называют *бором*; при этом фронт волны похож на перемещающийся гидравлический прыжок (см. гл. 11).

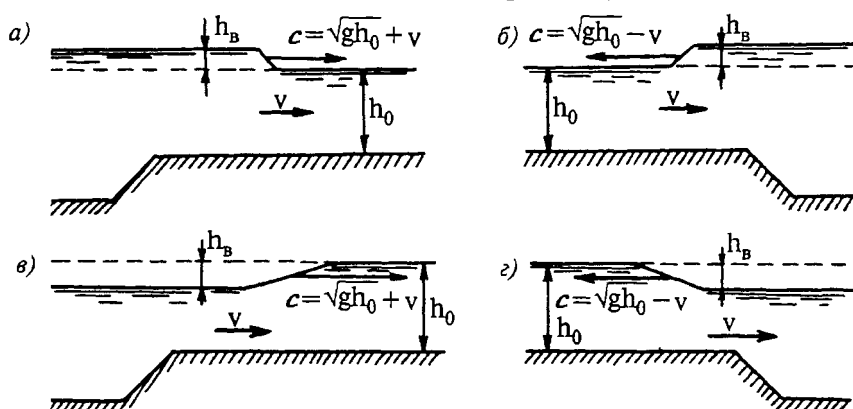


Рис. 10.8. Классификация длинных волн: а — волна наполнения; б — волна подпора; в — волна отлива, г — волна излива

В заключение приведем наименования длинных волн на примере канала, соединяющего два водохранилища (рис. 10.8), сведенные в табл. 10.1.

Таблица 10.1

Наименования длинных волн

№ п/п	Характеристика волн	Наименование волны	Позиции рис. 10.8
1	Положительная нисходящая	Наполнения	а
2	Положительная восходящая	Подпора	б
3	Отрицательная нисходящая	Отлива	в
4	Отрицательная восходящая	Излива	г

ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ ПРЫЖОК

11.1. Общее описание гидравлического прыжка

Гидравлический прыжок — одно из наиболее интересных явлений, происходящих при безнапорном течении жидкости. Поясним его основные особенности на примере (рис. 11.1). Пусть из широкой прямоугольной щели высотой $h_{\text{щ}}$ под напором H вода вытекает в русло с горизонтальным дном; движение установившееся, турбулентное, выполняются условия плоской задачи. Как известно из раздела об истечении из

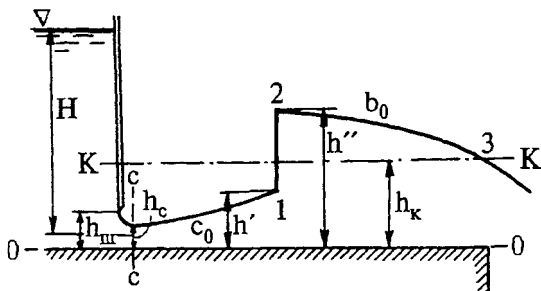


Рис. 11.1. Пример образования гидравлического прыжка

отверстий, глубина потока в сжатом сечении $h_c = 0,61h_{\text{щ}}$. Глубина h_c всегда меньше критической глубины h_k , т.е. сразу за шитом движение бурное. Это означает, что здесь большую часть полной механической энергии жидкости составляет кинетическая энергия, за счет которой происходит движение жидкости.

Согласно указанным ранее возможным формам кривых свободной поверхности (см. гл. 9), непосредственно за сжатым сечением с—с будет иметь место кривая подпора типа c_0 . При этом часть кинетической энергии будет расходоваться на преодоление силы трения о дно русла, так как потери напора согласно формуле Шези пропорциональны квадрату скорости, а скорость потока здесь (при бурном режиме) большая. Уменьшение кинетической энергии потока вдоль течения, т.е. уменьшение его скорости, приводит согласно уравнению неразрывности ($Q = \text{const}$) к увеличению глубины, т.е. к увеличению потенциальной энергии потока. Примем, что плоскость сравнения 0—0 совпадает с плоскостью дна русла; при этом полный напор потока в любом сечении совпадает с удельной энергией сечения.

Согласно уравнению Бернулли полный напор вдоль потока может только уменьшаться, так как силы трения переводят часть механической энергии в тепловую, следовательно, и удельная энергия сечений вдоль течения должна уменьшаться. Рассмотрим график удельной энергии сечения, представленный на рис. 11.2. Как видно из графика, при бурном движении жидкости после сечения с—с увеличивается глубина потока, что приводит к уменьшению удельной энергии сечения. Если горизонтальный участок длинный, то глубина h может достичь крити-

ческой глубины h_k ; при этом удельная энергия сечения достигает минимума, а следовательно, полный напор станет минимальным, и согласно уравнению Бернулли дальнейшее движение в русле с горизонтальным дном станет невозможным.

В реальных условиях, не достигая сечения, где глубина станет равной критической, поток резко увеличивает глубину и становится спокойным, израсходовав на это часть своей энергии $\Delta\Theta_{пр}$. Средняя скорость при этом резко уменьшается ($Q = \text{const}$), и ниже по течению потери по длине становятся во много раз меньше (на единицу длины), чем при бурном режиме. При $h > h_k$ кривая свободной поверхности будет относиться к типу b_0 . При спокойном режиме движения потенциальная часть полного напора больше кинетической, и на преодоление сил трения расходуется удельная потенциальная энергия потока; глубина h вдоль потока уменьшается, а средние скорости увеличиваются, следовательно, часть потенциальной энергии переходит на этом участке в кинетическую.

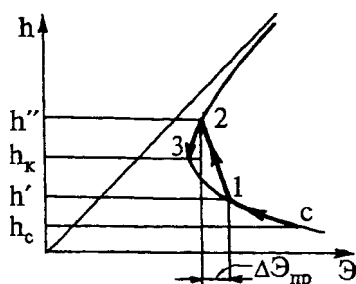


Рис. 11.2. Изменение удельной энергии сечения при гидравлическом прыжке

На графике удельной энергии сечения (см. рис. 11.2) уменьшение полного напора при таком виде течения описывается траекторией $c-1-2-3$. Минимальное значение напора поток приобретает в конце горизонтальной части русла, когда дальнейшему движению жидкости не препятствует горизонтальное дно.

Описанное явление резкого увеличения глубины от $h' < h_k$ до $h'' > h_k$, при котором поток из бурного состояния переходит в спокойное, называется *гидравлическим прыжком*. Глубины h' и h'' называются *сопряженными*, h' — первой, а h'' — второй сопряженной глубиной.

Опишем кинематику потока при гидравлическом прыжке (рис. 11.3). Наиболее характерная особенность прыжка — наличие поверхностного

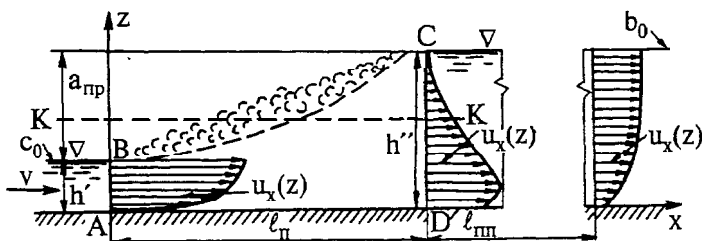


Рис. 11.3. Характерные особенности гидравлического прыжка

вального: водоворотной зоны с горизонтальной осью вращения, перпендикулярной к направлению потока воды. Вода в вальце насыщена пузырьками воздуха (азрирована), движение отдельных частиц жидкости имеет неупорядоченный неустановившийся характер, и лишь в качестве расчетной модели обычно изображают этот валец упорядоченными зам-

кнутыми линиями тока в виде водоворота. Продольный горизонтальный размер вальца в несколько раз превосходит высоту прыжка $a_{np} = h'' - h'$.

Поверхностный валец отделяют поверхностью тока от транзитного потока, характеризуемого условием $Q = \text{const}$. При расширении транзитного потока в пределах гидравлического прыжка, во-первых, распределение осредненной скорости в поперечном сечении становится весьма неравномерным (у свободной поверхности скорости близка к нулю, а вблизи дна имеет максимальные значения); во-вторых, пульсационные скорости в результате расширения потока имеют значения, намного превышающие таковые при равномерном движении. Эти две особенности требуют повышенного внимания (в частности, в гидротехническом строительстве), так как они создают предпосылки для размыва дна русла за прыжком, если оно специально не укреплено. На некотором расстоянии после прыжка эпюра осредненной скорости и пульсационные скорости становятся такими же, как и при равномерном или плавно-изменяющемся движении. Участок, на котором это происходит, называется *послепрыжковым*. Как показывают эксперименты, длина послепрыжкового участка $l_{np} = (10 - 30) h''$.

Приведенный пример гидравлического прыжка — один из наиболее простых. Прыжок может иметь место и в русле с ненулевым продольным уклоном, и в цилиндрическом русле произвольного поперечного сечения, и в нецилиндрическом русле.

11.2. Основное уравнение гидравлического прыжка в цилиндрическом русле

Основное уравнение гидравлического прыжка должно установить связь между сопряженными глубинами. Для его получения воспользуемся уравнением, выражающим закон изменения количества движения,

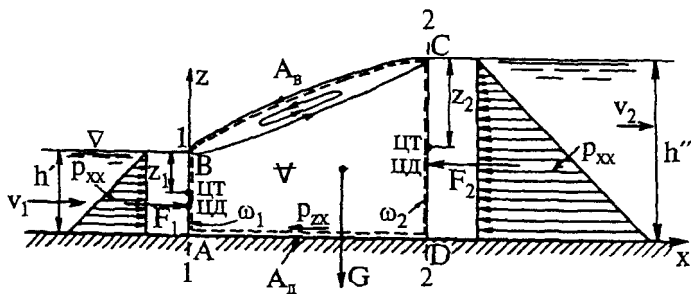


Рис. 11.4. Расчетная схема гидравлического прыжка

записав его для контрольного объема жидкости ∇ , выделенного на рис. 11.4 штриховой линией:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\nabla} \rho \mathbf{u} dV = \int_{\nabla} \rho \mathbf{f} dV + \int_A \mathbf{p}_n dA. \quad (11.1)$$

Представим уравнение (11.1) в проекции на ось x , совпадающую с направлением движения жидкости. Поскольку при установившемся движении равна нулю локальная составляющая субстанциальной производной, имеем

$$\int_A \rho u_x u_n dA = \int_V \rho f_x dV + \int_A p_{nx} dA. \quad (11.2)$$

Контрольную поверхность A , ограничивающую объем V , составляют поверхности ω_1 и ω_2 — поперечные сечения 1—1 и 2—2 транзитной струи; A_d — поверхность дна AD и A_b — поверхность вальца BC . Очевидно, на граничных поверхностях A_d и A_b , которые являются поверхностями тока, нормальная составляющая скорости $u_n = 0$. На поверхности A_b равны нулю и напряжения p_n , так как взаимодействием потока жидкости с воздухом пренебрегаем. Таким образом, уравнение (11.2) принимает вид

$$\int_{(\omega_1 + \omega_2)} \rho u_x u_n dA = \int_V \rho f_x dV + \int_{(\omega_1 + \omega_2)} p_{nx} dA + \int_{A_d} p_{zx} dA. \quad (11.3)$$

В нем учтено, что на поверхностях ω_1 и ω_2 проекцию на ось x дают только нормальные к этим поверхностям напряжения p_{xx} , а на поверхности A_d — касательное напряжение p_{zx} .

Сделаем три допущения.

1. Движение в сечениях 1—1 и 2—2 плавноизменяющееся. Тогда согласно разд. 5.1 (лемма 1) можно принять:

$$\text{на } \omega_1 : u_n = -u_x = -u_1, p_{nx} = -p_{xx} = p_1;$$

$$\text{на } \omega_2 : u_n = u_x = u_2, p_{nx} = p_{xx} = -p_2.$$

Кроме того, это допущение позволяет считать (см. разд. 5.1, лемма 2), что гидродинамическое давление в сечениях 1—1 и 2—2 распределено по гидростатическому закону, так что (см. рис. 11.4)

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= - \int_{\omega_1} p_{xx} dA = \int_{\omega_1} p_1 dA = \rho g \omega_1 z_1; \\ F_2 &= \int_{\omega_2} p_{xx} dA = - \int_{\omega_2} p_2 dA = -\rho g \omega_2 z_2, \end{aligned} \right\} \quad (11.4)$$

где z_1 и z_2 — расстояния от свободной поверхности до центров тяжести сечений 1—1 и 2—2 (см. разд. 2.4 (2.33)).

2. Касательные напряжения p_{zx} настолько малы, что их вкладом в уравнение (11.3) можно пренебречь.

3. Продольный уклон дна русла мал, и можно считать, что проекция ускорения силы тяжести на ось x пренебрежимо мала, т.е. $f_x = 0$.

С учетом изложенного уравнение (11.3) перепишем в виде

$$- \int_{\omega_1} \rho u_1^2 dA + \int_{\omega_2} \rho u_2^2 dA = \rho g \omega_1 z_1 - \rho g \omega_2 z_2. \quad (11.5)$$

Используя коэффициент Буссинеска α^0 (см. разд. 5.2 (5.15)), запишем уравнение (11.5) в виде

$$\alpha_1^0 \rho v_1^2 \omega_1 + \rho g \omega_1 z_1 = \alpha_2^0 \rho v_2^2 \omega_2 + \rho g \omega_2 z_2. \quad (11.6)$$

Сокращая на ρg и вводя расход $Q = v_1 \omega_1 = v_2 \omega_2$, получим основное уравнение гидравлического прыжка:

$$\frac{\alpha_1^0 Q^2}{g\omega_1} + \omega_1 z_1 = \frac{\alpha_2^0 Q^2}{g\omega_2} + \omega_2 z_2. \quad (11.7)$$

При заданных расходе Q и форме поперечного сечения русла выражение

$$\left(\alpha^0 Q^2 / g\omega(h) \right) + z(h) \cdot \omega(h)$$

зависит только от глубины h , что делает целесообразным обозначить это выражение через $\theta(h)$:

$$\theta(h) \equiv \left(\alpha^0 Q^2 / g\omega \right) + z\omega \quad (11.8)$$

и называть $\theta(h)$ прыжковой функцией. При этом уравнение (11.7) можно записать в виде

$$\theta(h') = \theta(h''). \quad (11.9)$$

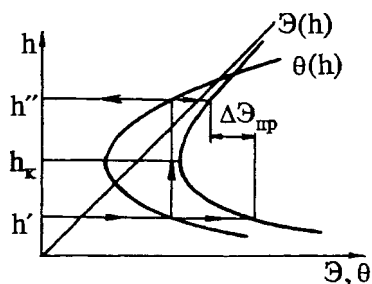


Рис. 11.5. Графики удельной энергии сечения и прыжковой функции

использовать $\theta(h)$ для вычисления потерь энергии в прыжке.

Определяющим свойством прыжковой функции является то, что она принимает одинаковые значения, если в нее подставить значения сопряженных глубин h' и h'' . Можно показать (в какой-то мере это следует из определения гидравлического прыжка), что эта функция имеет минимум при $h = h_k$, как и функция $\theta(h)$. Эти две функции часто строят на одном графике (рис. 11.5), что позволяет, определив с помощью прыжковой функции сопряженные глубины, использовать

11.3. Основное уравнение гидравлического прыжка и его длина в прямоугольном русле

Упростим уравнение (11.7) для прямоугольного русла, используя равенства

$$\omega = bh, \quad z = h/2, \quad q = Q/b, \quad h_k = \sqrt[3]{\alpha q^2 / g}, \quad \alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \alpha = 1,0.$$

Подставляя их в (11.7), получим

$$\frac{q^2 b^2}{g b h'} + \frac{h'}{2} b h' = \frac{q^2 b^2}{g b h''} + \frac{h''}{2} b h''. \quad (11.10)$$

После простых преобразований уравнение (11.10) можно представить в двух формах:

$$\left(h_k^3 / h' \right) + (h'^2 / 2) = \left(h_k^3 / h'' \right) + (h''^2 / 2); \quad (11.11)$$

$$h_k^3 = (h' + h'') h' h'' / 2 \quad (11.12)$$

и получить формулы для определения h' и h'' :

$$h' = \frac{h''}{2} \left[\sqrt{1 + 8 \left(\frac{h_k}{h''} \right)^3} - 1 \right]; \quad h'' = \frac{h'}{2} \left[\sqrt{1 + 8 \left(\frac{h_k}{h'} \right)^3} - 1 \right]. \quad (11.13)$$

Для прямоугольного русла, используя уравнение Бернулли и уравнение прыжка, можно получить зависимость для потери напора в прыжке:

$$\Delta \mathfrak{E}_n = \frac{(h'' - h')^3}{4h'h''}. \quad (11.14)$$

Для определения длины гидравлического прыжка в горизонтальном прямоугольном русле (такой прыжок называется *свободным*) имеется несколько эмпирических зависимостей, из которых можно рекомендовать для практических расчетов наиболее простую формулу:

$$\ell_n = 6,2h''. \quad (11.15)$$

В случае, если гидравлический прыжок происходит не на горизонтальном дне, а в стесненных условиях (например, при наличии верти-

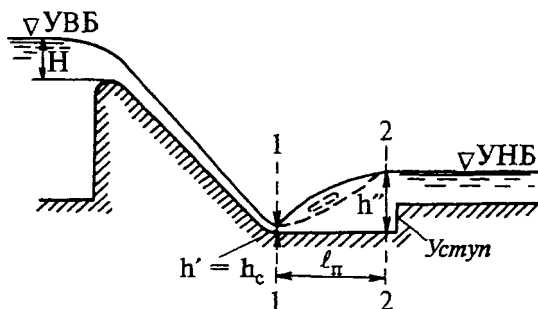


Рис. 11.6. Гидравлический прыжок в колодце, образованном уступом

кального уступа, образующего так называемый водобойный колодец (рис. 11.6)), он называется *несвободным*, и его длина меньше на 20—30% по сравнению с вычисленной по формуле (11.15).

11.4. Местоположение гидравлического прыжка в канале

Гидравлический прыжок, как правило, образуется за водосливами, при истечении воды из-под гидротехнических затворов, при резком уменьшении уклона дна русла. Определение местоположения прыжка необходимо для организации рациональной работы сооружений и конструкций (водосливов, затворов), для установления участков русла, требующих укрепления дна с целью предотвращения его размыва (там, где режим движения воды бурный, а также в пределах длины прыжка и послепрыжкового участка). Покажем, как найти местоположение прыжка на примере потока в коротком прямоугольном канале с положительным продольным уклоном $i < i_k$ (рис. 11.7).

Вода в канал попадает в результате истечения из-под щита, образуя сжатое сечение с—с. Линии критических К—К и нормальных Н—Н глубин показаны на рис. 11.7. При свободном истечении в конце канала устанавливается критическая глубина h_k . При этих условиях в канале формируются две кривые свободной поверхности:

типа s_1 от сжатого сечения с—с до сечения В (с глубиной, близкой к критической);

типа b_1 от критической глубины в конце канала вверх по течению до глубин, близких к нормальной.

бину, определяемую кривой c_1 , положим равной первой сопряженной и, используя уравнение прыжка (11.7) или график прыжковой функции, найдем вторую сопряженную. Построив эти глубины в каждом сечении, получим кривую вторых сопряженных глубин АВ. Точка пересечения D кривых АВ и b_1 определит поперечное сечение канала, в котором будет располагаться гидравлический прыжок. При других условиях образования прыжка процедура определения его местоположения аналогична.

ВОДОСЛИВЫ

Ранее рассматривалось истечение из отверстия в стенке резервуара при условии, что оно находится ниже уровня свободной поверхности. При этом скорость истечения v согласно уравнению Бернулли была пропорциональна $\sqrt{2gH}$. Отверстие, расположенное вблизи свободной поверхности жидкости в резервуаре, так, что на всем участке потока, где течение определяется наличием отверстия, движение жидкости безнапорное, т.е. свободная поверхность потока не имеет разрыва, называется водосливным; стенка, в которой имеется водосливное отверстие, называется водосливной стенкой, или просто *водосливом* (рис. 12.1).

Область потока, расположенная выше по течению от водосливной стенки, называется *верхним бьефом*, и уровень воды обозначается УВБ; область ниже по течению — *нижним бьефом*, и уровень воды соответственно обозначается УНБ.

Рассматривая течение через водослив в продольном разрезе, отметим следующие характеристики водослива.

1. Отметка наиболее низкой точки водосливного отверстия называется *отметкой гребня водослива* (см. рис. 12.1).

2. Свободная поверхность воды в резервуаре понижается по мере приближения к водосливной стенке, через которую происходит истечение.

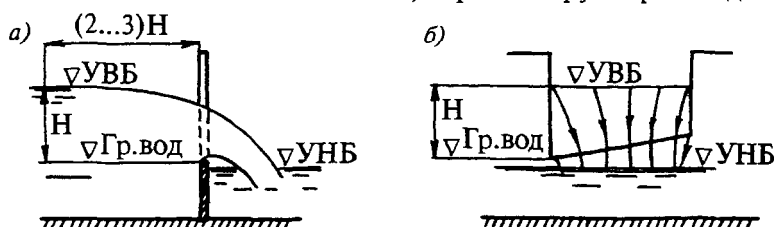


Рис. 12.1. Истечение через водосливную стенку:
а — продольный разрез потока; б — вид с нижнего бьефа

Разность между отметкой свободной поверхности в резервуаре, где этим понижением можно пренебречь, и отметкой гребня водослива называется *напором на водосливе* и обозначается H . Как показывают эксперименты, свободная поверхность практически горизонтальна на расстоянии более чем $(2-3)H$ от гребня водослива.

3. Если гребень водослива представляет собой горизонтальную площадку bc (рис. 12.2, а, б, в), то размер этой площадки δ в направлении движения жидкости называется *шириной водослива*, или *шириной порога* (водослива), так как водосливную стенку иногда называют порогом.

В зависимости от отношения δ/H возможны три различные формы истечения через водосливы.

1. Струя жидкости формируется только напорной гранью ab (рис. 12.2, а), а размеры и форма других граней (bc и cd) не оказывают влияния на исте-

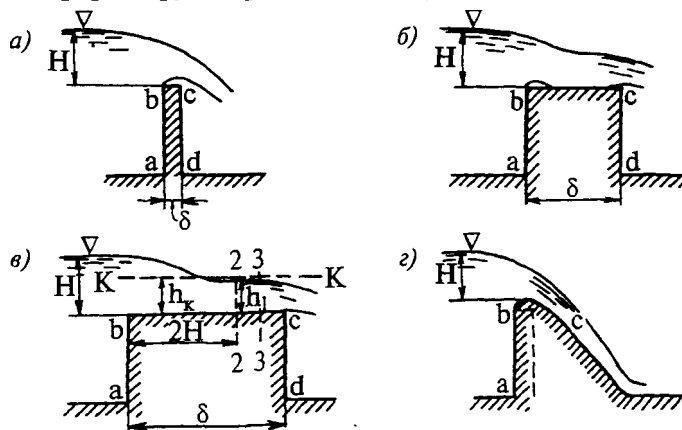


Рис. 12.2. Классификация водосливов по форме порога:
а — с тонкой стенкой; б — практического профиля;
в — с широким порогом; г — практического профиля
(очертание Кригера—Офицерова)

чение и в конечном итоге на расход через водослив; такие водосливы называются *водосливами с тонкой стенкой*. Критерием, определяющим, будет ли водосливная стенка тонкой, является условие $\delta/H < 0,5$.

2. Если горизонтальный гребень водослива достаточно велик (рис. 12.2, в), то в пределах водосливного отверстия образуется участок плавноизменяющегося движения (между сечениями 2—2 и 3—3), причем сечение 2—2 расположено на расстоянии около $(1,5-2)H$ от грани аб, а сечение 3—3 — на расстоянии приблизительно $0,25H$ от грани cd. Вместе с тем, продольный размер δ грани bc должен быть сравнительно небольшой, чтобы можно было пренебречь потерями напора по длине в пределах

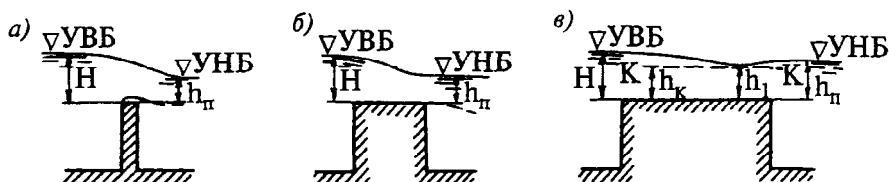


Рис. 12.3. Подтопленные водосливы: а — с тонкой стенкой; б — практического профиля; в — с широким порогом

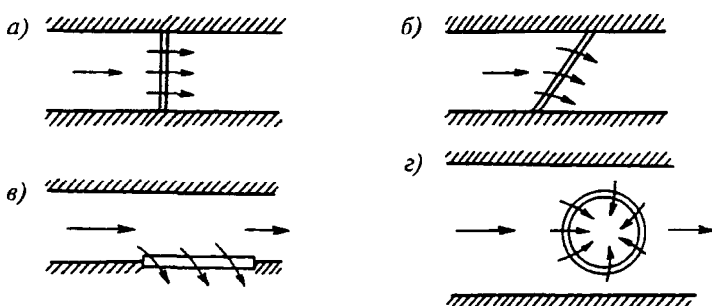


Рис. 12.4 Классификация водосливов по их плановому очертанию: а — прямой; б — косой; в — боковой; г — кольцевой (шахтный)

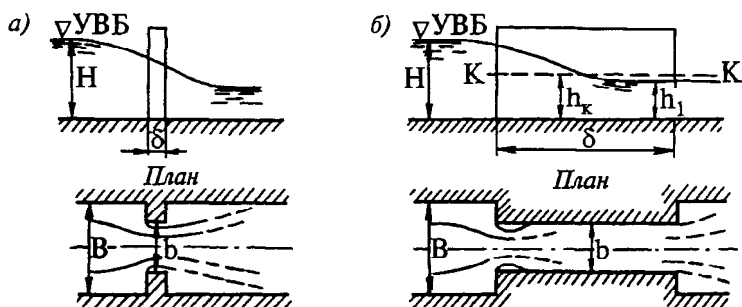


Рис. 12.5. Водосливы без порога: а — щелевой; б — с широким порогом

водослива по сравнению с местными потерями, так что на участке от 2—2 до 3—3 свободная поверхность практически горизонтальна. Такие водосливы называются водосливами с широким порогом. Критерием, позволяющим выделить такие водосливы, является условие $2 < \delta/H < 8$.

3. Водосливы, не относящиеся к этим двум видам, называются водосливами практического профиля (рис. 12.2, б и г). Они характеризуются тем, что, с одной стороны, истечение через них формируется не только

напорной гранью ab (размеры и форма других граней тоже оказывают влияние на истечение), а с другой стороны, при истечении через них не образуется участок с горизонтальной свободной поверхностью. К этому виду относятся также все водосливы, не имеющие горизонтальной грани и не относящиеся к водосливам с тонкой стенкой. Эти водосливы получили название вследствие своей большой распространенности в гидротехническом строительстве. Один из водосливов этого вида, стенка которого имеет очертание, представленное на рис. 12.2, $г$ и называемое очертанием Кригера—Офицерова по именам предложивших его ученых, пропускает при заданном напоре H через водослив наибольший расход.

При описании истечения через водосливы предполагалось, что уровень воды в нижнем бьефе не оказывает влияния на истечение через водослив. Такие водосливы называются *неподтопленными*. Если же уровень воды в нижнем бьефе достаточно высок и оказывает влияние на истечение через водослив, такие водосливы называются *подтопленными* (рис. 12.3).

Кроме приведенных выше классификаций, водосливы различают по очертанию и по положению водосливной стенки (точнее — ее гребня) в плане. Основные типы водосливов согласно этой классификации представлены на рис. 12.4.

Особый класс представляют собой водосливы, у которых отметка порога совпадает с отметкой дна резервуара в верхнем бьефе (водосливы без порога), а отверстие образовано боковыми стенками (рис. 12.5).

12.2. Формулы для расхода воды через водосливы

Структура расчетных формул для определения расхода через неподтопленные водосливы основана на предположениях, которые сформулируем для водосливов с тонкой стенкой и с широким порогом (рис. 12.6):

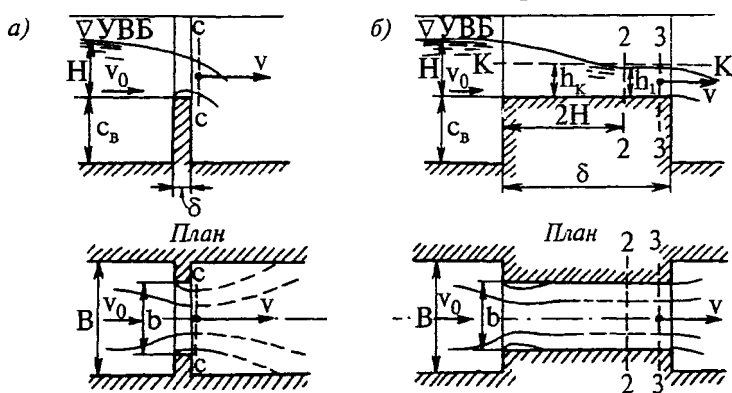


Рис. 12.6. Расчетные схемы водосливов:

a — с тонкой стенкой; $б$ — с широким порогом

a) в некотором расчетном сечении, где движение можно считать плавноизменяющимся (для водослива с тонкой стенкой это сечение $c—c$, а для водослива с широким порогом — $2—2$ или $3—3$), средняя скорость

согласно уравнению Бернулли (см. гл. 8) определяется по формуле $v = \varphi \sqrt{2gH}$, где φ — коэффициент скорости, который учитывает местные потери напора на участке выше по течению от указанного сечения;

б) площадь этого сечения определяется геометрическими размерами и формой водосливного отверстия и линейно зависит от напора на водосливе, т.е. $\omega = \varepsilon k b H$, где k учитывает влияние формы и вертикального размера порога c_b на вертикальный размер расчетного сечения, а ε учитывает влияние относительного сужения потока в плане b/B и формы кромок вертикальных стенок отверстия, обтекаемых потоком; ε называют *коэффициентом бокового сжатия*, причем, если $b/B = 1$, то и $\varepsilon = 1$.

Расход через водослив при сделанных предположениях составляет

$$Q = \omega v = \varepsilon k b H \varphi \sqrt{2gH} = \varepsilon k \varphi b \sqrt{2g} \cdot H^{3/2}. \quad (12.1)$$

Поскольку значения k и φ зависят от одних и тех же величин (размеров и формы порога), их произведение обозначают через m и называют *коэффициентом расхода водослива*. При этом основная формула для расчета расхода через неподтопленные водосливы принимает вид

$$Q = \varepsilon m b \sqrt{2g} H^{3/2}. \quad (12.2)$$

Эта формула, полученная применительно к водосливам с широким порогом и с тонкой стенкой, используется без специального обоснования и для водосливов практического профиля.

В справочной литературе имеются обширные материалы, полученные экспериментальным путем, для определения коэффициентов расхода m и сжатия ε . Полезно помнить, что для водосливов с широким порогом $m \approx 0,32—0,35$, для водосливов с тонкой стенкой $m \approx 0,40$, а для водосливов практического профиля:

а) прямоугольных: $m \approx 0,42—0,44$;

б) очертания Кригера—Офицерова: $m \approx 0,48—0,52$.

Примечания.

1. При расчете водосливов с широким порогом и практического профиля часто формулу (12.2) записывают в виде

$$Q = \varepsilon m b \sqrt{2g} H_0^{3/2}, \quad (12.3)$$

где $H_0 = H + \frac{\alpha v_0^2}{2g}$, $v_0 = \frac{Q}{B(c_b + H)}$ — скорость на подходе к водосливу.

При этом задачу определения расхода Q решают методом последовательных приближений, полагая в нулевом приближении $v_0 = 0$.

2. Глубина на пороге неподтопленного водослива с широким порогом h_1 оказывается несколько меньше критической глубины h_k . Обычно принимают $h_1 = (0,45—0,50)H$.

12.3. Водослив Кригера—Офицерова

Водосливная стенка Кригера—Офицерова очерчивается так, чтобы ее поверхность ниже по течению от точки b до точки c (см. рис. 12.2,г) совпадала с нижней поверхностью тока струи, переливающейся через водослив с тонкой стенкой высотой ab . При этом обеспечиваются ми-

нимальные местные потери напора и соответственно максимальный коэффициент расхода.

При изменении напора на водосливе с тонкой стенкой изменяется и положение поверхности тока, ограничивающей поток: с увеличением напора увеличивается дальность отлета струи (рис. 12.7). Если водосливная стенка Кригера—Офицерова очерчена по нижней поверхности тока bc при некотором напоре H_1 , то при этом напоре давление на водосливной поверхности будет близко к атмосферному. В этом случае стенка Кригера—Офицерова называется *безвакуумным водосливом нормального очертания*. Напор, при котором *нижняя* поверхность тока определяет очертание стенки Кригера—Офицерова, называется *профилирующим* напором (в рассматриваемом случае $H_{\text{проф}} = H_1$).

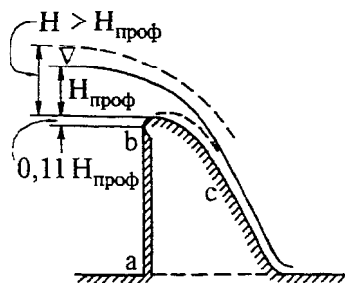


Рис. 12.7. Водосливная стенка Кригера—Офицерова

При напорах $H < H_{\text{проф}}$ давление на поверхности bc больше атмосферного, и в этом случае стенка называется *безвакуумным водосливом с уширенным гребнем*.

При напорах $H > H_{\text{проф}}$ поток будет “стремиться” оторваться от водосливной поверхности bc , давление на этой поверхности будет меньше атмосферного (вакуум). В этом случае стенка называется *вакуумным водосливом*. Если, например, при $H > H_1$ вакуум превзойдет допустимое значение, то поток оторвется от водосливной поверхности bc , и водослив будет работать как тонкая стенка (истечение через него будет определяться только напорной гранью стенки ab).

Вакуум на поверхности bc создает дополнительное “подсасывающее” воздействие на поток (см. гл. 8 о влиянии вакуума на истечение из насадков), и поэтому коэффициент расхода водослива Кригера—Офицерова увеличивается с увеличением напора. Эта зависимость представляется в виде

$$m = m_r \sigma_H \sigma_\phi, \quad (12.4)$$

где $m_r = 0.504$ — коэффициент расхода при профилирующем напоре;

$\sigma_H = f\left(\frac{H}{H_{\text{проф}}}\right)$ — коэффициент полноты напора, который изменяется

от 0,9 до 1,1; σ_ϕ — коэффициент формы (см. разд. 12.6).

Сходная закономерность в изменении коэффициента расхода водосливов практического профиля от напора проявляется не только для стенки Кригера—Офицерова, но и для стенок другой формы (прямоугольных, трапециевидных и др.). В этих случаях напор $H_{\text{проф}}$ обычно назначают близким к горизонтальному размеру гребня водослива и

экспериментально устанавливают зависимость $\sigma_H = f\left(\frac{H}{H_{\text{проф}}}\right)$.

12.4. Критерии подтопления и расчет подтопленных водосливов

Важной характеристикой для оценки влияния нижнего бьефа на истечение через водослив является разность между отметкой уровня воды в нижнем бьефе и отметкой гребня водослива, которая называется *глубиной подтопления* и обозначается h_n . Для того, чтобы определить, является ли водослив подтопленным, для каждого вида водослива существуют так называемые критерии подтопления:

для водослива с тонкой стенкой должны одновременно выполняться два условия:

- а) $h_n > 0$;
- б) спокойный режим во всем нижнем бьефе;

для водослива с широким порогом

$$h_n > (0,75 - 0,85)H_0; \quad (12.5)$$

большие значения следует принимать при $m = 0,38$, а меньшие при $m = 0,35$;

для водослива практического профиля единого критерия нет, а имеется набор эмпирических кривых, позволяющих через коэффициент подтопления σ_n учесть влияние нижнего бьефа на истечение; эти кривые приводятся в справочниках.

После того как с помощью указанных критериев установлено, что рассматриваемый водослив является подтопленным, связь расхода через него с напором определяется следующим образом.

Для водосливов с тонкой стенкой и практического профиля (см. примечание в конце разд. 12.2) формула расхода сохраняет структуру (12.3), а влияние нижнего бьефа учитывается с помощью коэффициента подтопления σ_n :

$$Q = \sigma_n \epsilon m b \sqrt{2g} H^{3/2}; \quad (12.6)$$

для σ_n имеются формулы и графики, устанавливающие его величину в зависимости от вида водосливной стенки и отношения h_n/H .

Для водослива с тонкой стенкой σ_n вычисляют по формуле

$$\sigma_n = 1,05 \left(1 + 0,2 \frac{h_n}{c_b} \right)^3 \sqrt{\frac{Z}{H}},$$

где c_b — высота стенки; Z — разность отметок воды в верхнем и нижнем бьефах.

Для водосливов практического профиля σ_n определяется по графику (см. разд. 12.6).

Для подтопленного водослива с широким порогом исходные предпосылки, используемые при обосновании структуры формулы (12.3), оказываются неприемлемыми. Здесь глубина на пороге h_1 зависит от глубины воды в нижнем бьефе, а не только от H . Формула для расчета расхода при этом имеет вид

$$Q = \varphi_n b h_1 \sqrt{2g(H_0 - h_1)}. \quad (12.7)$$

Для определения коэффициента скорости подтопленного водослива φ_n и глубины h_1 имеются графики и таблицы в справочной литературе (см. табл. 12.7).

12.5. Измерение расхода воды с помощью водосливов

Однозначная зависимость между расходом и напором на водосливе, устанавливаемая водосливной формулой, является основанием для использования водосливных стенок как простого и надежного средства измерения расхода воды. Обычно для этого неподтопленный водослив с тонкой стенкой устанавливают в конце достаточно длинного канала, в котором следует обеспечить равномерное движение воды (рис. 12.8).

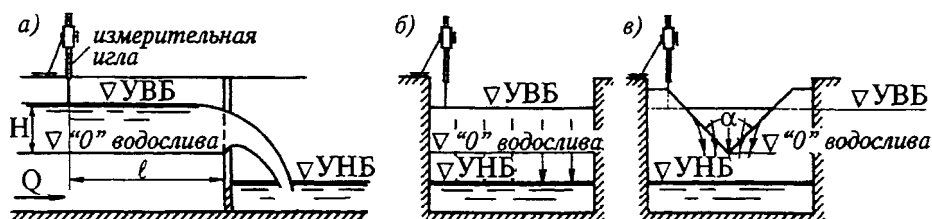


Рис. 12.8. Измерение расхода с помощью водослива: а — продольный разрез лотка для измерения расхода; б — вид нижнего бьефа прямоугольного водослива; в — вид нижнего бьефа треугольного водослива

На расстоянии $\ell > 3H_{\max}$, где $H_{\max}$ — это напор, отвечающий максимальному расходу, на который рассчитан этот водослив, устанавливают измерительную иглу (тастер). Измерив отметку воды при фиксированном расходе и вычитая из нее отметку гребня водослива (которую часто называют “ноль водослива”), определяют напор H на водосливе, а затем либо по водосливной формуле (12.3), либо по графику, построенному на ее основе (тарировочная кривая), находят величину расхода Q .

При измерении сравнительно малых расходов напор на водосливной стенке настолько мал, что истечение через прямоугольный водослив с тонкой стенкой становится неустойчивым: струя, имея маленькую скорость на гребне водослива, “прилипает” к водосливной стенке иногда по всему фронту водослива, иногда на части его. Истечение с прилипшей струей является неустойчивым, так как вакуум, образующийся между струей и стенкой, может эпизодически “срываться”, вследствие проникновения атмосферного воздуха под струю. В результате нарушается зависимость между напором и расходом, устанавливаемая водосливной формулой.

Для улучшения качества водослива как измерительного средства при малых расходах вместо прямоугольной водосливной стенки (рис. 12.8, б) в канале устанавливают треугольную стенку (рис. 12.8, в). При истечении через треугольную стенку площадь сечения потока вблизи гребня будет пропорциональна H^2 (а не H , как у прямоугольной стенки), и поэтому расход через треугольный водослив пропорционален $H^{5/2}$. Водосливная формула для треугольного водослива имеет вид

$$Q = 0,32 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{2g} H^{5/2}, \quad (12.8)$$

где α — угол при вершине треугольника (рис. 12.8, в). При $\alpha = 90^\circ$

$$Q = 0,32 \sqrt{2g} H^{5/2}.$$

Эта зависимость используется и для определения расхода Q при измеренном H и для построения тарировочной кривой $Q = f(H)$.

12.6. Справочные материалы для расчета водосливов практического профиля

Таблица 12.1

Коэффициент расхода m для трапецидальных профилей (рис. 12.9)

Тип профиля	$\frac{H}{\delta}$			
	0,5	1,0	1,5	2,0
Высокий профиль ($c_B > 3H$)				
$s_B = 0;$ $s_H = 0$	0,32	0,36	0,39	0,41
$s_B = 0,5;$ $s_H = 0$	0,34	0,38	0,41	0,44
С закругленным входным ребром $r = (0,1-0,2)\delta$				
$s_B = 0;$ $s_H = 0$	0,34	0,38	0,41	0,44
Профиль средней высоты ($2H < c_B < 3H$)				
$s_B = 0;$ $s_H = 0$	0,32	0,36	0,39	0,42
$s_B = 1,0;$ $s_H = 0$	0,36	0,39	0,41	0,44
$s_B = 2,0;$ $s_H = 0$	0,37	0,40	0,41	0,44
$s_B = 0;$ $s_H = 1,0$	0,33	0,37	0,41	0,42
$s_B = 0;$ $s_H = 2,0$	0,33	0,36	0,40	0,42
Низкие профили				
$s_B = 0;$ $s_H = 0$	0,32	0,36	0,39	0,42
$s_B = 3,0;$ $s_H = 0$	0,36	0,40	0,41	0,42
$s_B = 10,0;$ $s_H = 0$	0,37	0,39	0,39	0,40
$s_B = 0;$ $s_H = 3$	0,34	0,36	0,38	0,40
$s_B = 0;$ $s_H = 10$	0,34	0,35	0,36	0,36

Коэффициент расхода для водосливной стенки Кригера—Офицерова (рис. 12.10)

$$m = m_r \sigma_H \sigma_\phi,$$

где $m_r = 0,504 - 0,012 \frac{H_{\text{проф}}}{c_B}$; σ_H — коэффициент полноты напора определяется по табл. 12.2; σ_ϕ — коэффициент формы, по табл. 12.3.

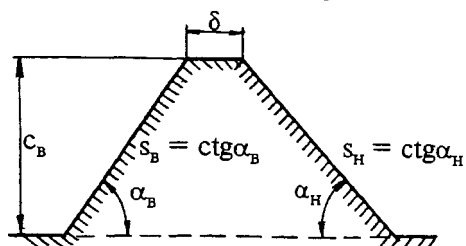


Рис. 12.9. Трапецидальный водослив практического профиля

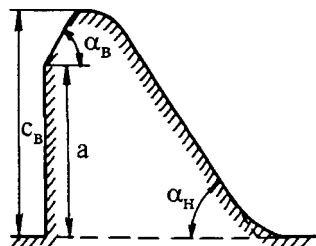


Рис. 12.10. Водослив практического профиля очертания Кригера—Офицерова

Таблица 12.2

Коэффициент полноты напора σ_H
для безвакуумной водосливной стенки Кригера—Официрова

Н Н _{проф}	α_B , град							
	20	30	40	50	60	70	80	90
0,2	0,89	0,89	0,88	0,87	0,86	0,86	0,85	0,84
0,4	0,93	0,93	0,92	0,92	0,91	0,91	0,91	0,90
0,6	0,96	0,96	0,95	0,95	0,95	0,95	0,94	0,94
0,8	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,97	0,97
1,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
1,2	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02
1,4	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,05
1,6	1,04	1,05	1,05	1,05	1,06	1,06	1,06	1,06
1,8	1,06	1,06	1,06	1,07	1,07	1,07	1,08	1,08
2,0	1,07	1,07	1,08	1,08	1,09	1,09	1,09	1,10

Таблица 12.3

Коэффициент формы σ_ϕ
для безвакуумной водосливной стенки Кригера—Официрова

α_B , град	α_H , град	a/c_B		α_B , град	α_H , град	a/c_B		
		0	1,0			0	1,0	
15	15	0,88	0,93	55	45	0,98	0,99	
	30	0,91	0,97		60	0,99	1,00	
	45	0,92	0,99		75	15	0,93	0,93
	60	0,93	1,00			30	0,97	0,97
15	15	0,91	0,93	90	45	0,99	0,99	
	30	0,94	0,97		60	1,00	1,00	
	45	0,96	0,99		15	0,93	0,93	
	60	0,96	1,00		30	0,97	0,97	
55	15	0,92	0,93	60	45	0,99	0,99	
	30	0,96	0,97		60	1,00	1,00	

Примечание: при $\alpha_H > 60^\circ$ значения σ_ϕ надлежит принимать отвечающими $\alpha_H = 60^\circ$.

Коэффициент бокового сжатия ϵ принимает следующие значения:
 если боковые устои и быки, разделяющие водосливы, прямоугольные в плане и имеют нескругленные вертикальные ребра $\epsilon = 0,85$;
 для скругленных ребер $\epsilon = 0,95$.

Если быки или устои выдвинуты в верхний бьеф на расстояние более $2H$ от напорной грани водосливной стенки, то следует в любом случае принимать $\epsilon = 1,0$.

Коэффициент подтопления σ_n рассчитывают по графику на рис. 12.11.

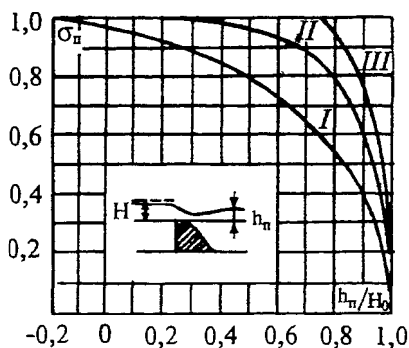


Рис. 12.11. График для определения коэффициента подтопления σ_n для водосливов практического профиля: кривая I — для вакуумных водосливов ($1,25 < \frac{H}{H_{\text{проф}}} < 2,0$); кривая II — для водосливов нормального очертания ($0,75 < \frac{H}{H_{\text{проф}}} < 1,25$); кривая III — для водосливов с уширенным гребнем ($0,5 < \frac{H}{H_{\text{проф}}} < 0,75$). Для трапецидальных водосливов принимают $H_{\text{проф}} = \delta$.

12.7. Справочные материалы для расчета водосливов с широким порогом

Коэффициенты расхода для водосливов с широким порогом, представленных на рис. 12.12, приведены в табл. 12.4 и 12.5.

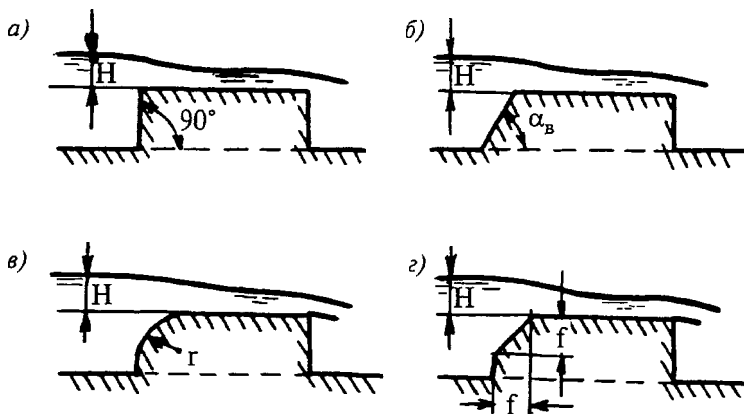


Рис. 12.12. Различные очертания водосливов с широким порогом

**Коэффициент расхода m для водослива с широким порогом
без бокового сжатия (плоская задача; $b = B$; $\varepsilon = 1,0$)**

Водосливная стенка (порог)

с вертикальной или наклонной напорной гранью (рис. 12.12,а,б)

$\frac{C_B}{H}$	$\operatorname{ctg} \alpha_B$				
	0	0,5	1,0	1,5	$\geq 2,5$
0,0	0,385	0,385	0,385	0,385	0,385
0,2	0,366	0,372	0,377	0,380	0,382
0,4	0,356	0,365	0,373	0,377	0,381
0,6	0,350	0,361	0,370	0,376	0,380
0,8	0,345	0,357	0,368	0,375	0,379
1,0	0,342	0,355	0,367	0,374	0,378
2,0	0,333	0,349	0,363	0,371	0,377
4,0	0,327	0,345	0,361	0,370	0,376
8,0	0,324	0,343	0,360	0,369	0,376
∞	0,320	0,340	0,358	0,368	0,375

**Коэффициент расхода m для водослива с широким порогом
без бокового сжатия (плоская задача; $b = B$; $\varepsilon = 1,0$).**

**Водосливная стенка (порог) с вертикальной напорной гранью и скругленным
или притупленным входным ребром (рис. 12.12,в,г)**

$\frac{C_B}{H}$	$\frac{r}{H}$ или $\frac{f}{H}$			$\frac{r}{H}$	
	0,025	0,05	0,2	0,6	$\geq 1,0$
0,0	0,385	0,385	0,385	0,385	0,385
0,2	0,372	0,374	0,377	0,380	0,382
0,4	0,365	0,368	0,374	0,377	0,381
0,6	0,361	0,364	0,370	0,376	0,380
0,8	0,357	0,361	0,368	0,375	0,379
1,0	0,355	0,359	0,366	0,374	0,378
2,0	0,349	0,354	0,363	0,371	0,377
6,0	0,344	0,349	0,359	0,369	0,376
∞	0,340	0,346	0,357	0,368	0,375

Примечание: при $f/H > 0,2$ коэффициент расхода m следует принимать соответствующим этому крайнему значению отношения.

Коэффициент расхода для водослива без порога (рис. 12.13)

$\frac{b}{B}$	$\frac{r}{b}$						
	0	0,05	0,10	0,20	0,30	0,40	$\geq 0,50$
0,0	0,320	0,335	0,342	0,349	0,354	0,357	0,360
0,1	0,322	0,337	0,344	0,350	0,355	0,358	0,361
0,2	0,324	0,338	0,345	0,351	0,356	0,359	0,362
0,3	0,327	0,340	0,347	0,353	0,357	0,360	0,363
0,4	0,330	0,343	0,349	0,355	0,359	0,362	0,364
0,5	0,334	0,346	0,352	0,357	0,361	0,363	0,366
0,6	0,340	0,350	0,354	0,360	0,363	-	-
0,7	0,346	0,355	0,359	0,363	-	-	-
0,8	0,355	0,362	0,365	-	-	-	-
0,9	0,367	0,371	-	-	-	-	-
1,0	0,385	-	-	-	-	-	-

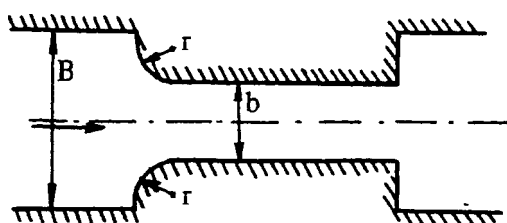


Рис. 12.13. Плановое очертание водослива без порога

Коэффициент сжатия ϵ рассчитывается так же, как для водосливов практического профиля.

Коэффициент скорости для расчета подтопленных водосливов с широким порогом по формуле (12.7)

ϵ_m	0,30	0,32	0,34	0,36	0,38
φ_n	0,77	0,84	0,90	0,96	0,99

Глубину h_1 в формуле (12.7) принимают в первом приближении равной глубине подтопления h_n .

ДВИЖЕНИЕ ГРУНТОВЫХ ВОД

13.1. Физико-механические предпосылки к описанию движения грунтовых вод

Движение жидкости в пористой среде, имеющее характер просачивания, называют *фильтрацией*. В инженерно-строительной практике наиболее важный случай фильтрации — движение воды в порах грунта или, другими словами, *движение грунтовых вод*.

Будем рассматривать движение воды в *подпочвенных* грунтах, которые по сравнению с *почвами* имеют существенно более простую структуру, и особенности содержания и движения в них воды. Подпочвенные грунты разделяют на скальные и нескальные (рыхлые). В скальных грунтах вода фильтрует, главным образом, через систему трещин, и поэтому основной характеристикой фильтрационных свойств скальных грунтов является их трещиноватость, которая численно выражается через линейные, поверхностные и объемные характеристики трещин. Трещиноватость зависит и от типа скальной породы (граниты, песчаники и т.п.), и от степени их разрушенности под влиянием внешних факторов (перепада температур, промерзания и т.п.), поэтому решение задач, связанных с фильтрацией в скальных грунтах, требует специфического подхода в каждом конкретном случае и в рамках общего курса механики жидкости не рассматривается.

Для нескальных грунтов свойствами, определяющими движение сквозь них воды, являются размеры и форма частиц грунта (гранулометрический состав) и его пористость. Фракции частиц, составляющих грунт, в зависимости от диаметра принято классифицировать следующим образом:

Наименование фракции	Диаметр, мм
глинистые	< 0,005
пылеватые	0,005—0,05
песчаные мелкие	0,05—0,5
песчаные крупные	0,5—2,0
гравелистые	2,0—4,0
галечные	4,0—200
валуны	> 200

Частицы песка имеют, как правило, округлую форму (линейные размеры частиц по всем направлениям незначительно отличаются друг от друга); глинистые частицы имеют форму чешуек, что обуславливает относительно большие контактные поверхности и, следовательно, большую роль межмолекулярных сил взаимодействия как между глинистыми частицами, так и между ними и водой.

Объемная пористость грунта n определяется как отношение объема пор грунта к общему объему грунта (т.е. к сумме объема пор и объема частиц грунта). Если рассечь грунт плоскостью, то площадь сечения ω

можно представить в виде суммы площади сечения порового пространства $\omega_{\text{пор}}$ и площади сечения частиц грунта $\omega_{\text{част}}$:

$$\omega = \omega_{\text{пор}} + \omega_{\text{част}} \quad (13.1)$$

Объемная пористость

$$n = \frac{\omega_{\text{пор}}}{\omega} = \frac{\omega_{\text{пор}}}{\omega_{\text{пор}} + \omega_{\text{част}}} \quad (13.2)$$

Значения пористости сильно зависят от степени окатанности частиц грунта, от плотности их сложения. Для грунтов в естественных условиях значения пористости изменяются в небольших пределах:

Грунт	Пористость
гравий, песок	$n = 0,30-0,45$
супеси и суглинки	$n = 0,35-0,50$
глины	$n = 0,40-0,55$

Грунт называется *однородным*, если его фильтрационные свойства одинаковы во всех точках пространства, которое он занимает; если его свойства зависят от пространственных координат, то грунт называется *неоднородным*. Иногда неоднородность может проявляться в том, что грунт состоит из отдельных слоев (например, слой песка и слой супеси располагаются над слоем глины). В этом случае обычно рассматривают движение грунтовой воды в каждом слое отдельно, полагая его однородным.

Грунт называют *изотропным*, если его фильтрационные свойства не зависят от направления движения в нем грунтовой воды; в противном случае грунт называется *анизотропным*. Как правило, рыхлые грунты являются изотропными, а анизотропными по своим фильтрационным свойствам могут быть скальные грунты, в которых система трещин имеет выраженную пространственную ориентацию.

Вода в грунтах может находиться в следующих состояниях.

1. Водяной пар в занятых воздухом порах грунта.

2. *Гигроскопическая* вода, которая содержится в поверхностном слое частиц грунта и может перемещаться, только переходя в парообразное состояние.

3. *Пленочная* вода, которая обволакивает частицы грунта под влиянием электростатических сил между молекулами грунта и воды, и может перемещаться под действием этих сил.

4. *Свободная* вода, которая подразделяется на:

а) *капиллярную*, перемещающуюся под действием силы поверхностного натяжения;

б) *гравитационную*, перемещающуюся под действием силы тяжести.

Как известно, *высота капиллярного поднятия* жидкости зависит от рода жидкости (точнее, от ее коэффициента поверхностного натяжения) и от поперечных размеров капилляра (для грунтов это линейный размер пор). В крупных песках значение $h_{\text{кап}}$ не превышает нескольких сантиметров, в пылеватых песках и супесях оно достигает 2,5—3,0 м.

В глинистых грунтах вследствие чрезвычайно малых размеров пор и чешуйчатой формы частиц грунта явление капиллярности подавляется пленочными (основанными на межмолекулярном взаимодействии грунта и воды) эффектами, и капиллярное поднятие грунтовой воды может не наблюдаться.

В дальнейшем в рамках данного курса рассмотрим движение *гравитационных* грунтовых вод под действием силы тяжести, которое будем называть гравитационным движением грунтовых вод.

13.2. Скорость фильтрации. Основной закон ламинарной фильтрации (закон Дарси)

Рассмотрим фильтрацию воды сквозь однородный грунт (например, сквозь песок), заполняющий цилиндрическую трубу диаметром D (рис. 13.1). Два пьезометра, установленные на расстоянии l друг от друга, показывают падение потенциального напора $H = z + \frac{p}{\rho g}$ на исследуемом участке, которое обозначим h_f . В случае течения воды в трубе, не заполненной грунтом (гл. 5), при заданном расходе Q режим движения воды (ламинарный или турбулентный) и, следовательно, потеря напора по длине определяются условием прилипания жидкости к твердой поверхности стенок трубы; эти потери сильно зависят от диаметра трубы D . При наличии в трубе грунта условия прилипания выполняются на поверхности каждой частицы (рис. 13.2), и поэтому режим движения

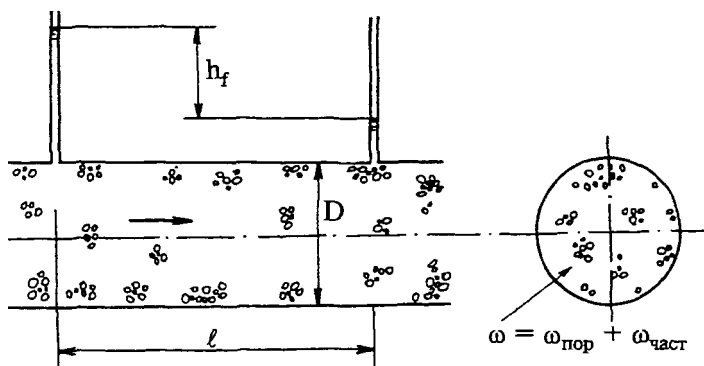


Рис. 13.1. Течение жидкости в трубе, заполненной грунтом

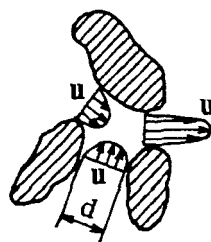


Рис. 13.2. Распределение скорости жидкости в поровом пространстве

и потери напора определяются линейным размером пор грунта, который обычно мало отличается от линейного размера d частиц грунта (для однозернистых грунтов). Как показывают эксперименты, движение воды в грунте будет ламинарное, если число Рейнольдса

$$Re = \frac{u_{\text{пор}} d}{\nu} < Re_{\text{кр}},$$

где $u_{\text{пор}}$ — средняя по сечению пор скорость воды; d — эффективный диаметр частиц грунта; ν — кинематический коэффициент вязкости, $Re_{\text{кр}} \approx 10$ (отметим, что здесь $Re_{\text{кр}}$ много меньше, чем в случае параллельноструйного движения в цилиндрической трубе, где $Re_{\text{кр}} = 2300$, так как движение в порах резкоизменяющееся).

При ламинарном движении воды в грунте, заполняющем трубу (см. рис. 13.1), потери напора на единицу длины (равные падению потенциального напора) пропорциональны расходу воды, т.е. $\frac{h_f}{\ell} \sim Q$.

Этот факт экспериментально был установлен в середине XIX века французским инженером Дарси. Для более общей формулировки этого закона введем понятие *скорости фильтрации*, под которой будем понимать фиктивную скорость, вычисленную в предположении, что заданный расход воды Q протекает через поперечное сечение грунта ω , просачиваясь не только сквозь поры, но и через частицы грунта, т.е.

$$u = \frac{Q}{\omega}; \quad \omega = \omega_{\text{пор}} + \omega_{\text{част.}} \quad (13.3)$$

Очевидно, так как $\omega_{\text{пор}} < \omega$, средняя скорость движения воды в порах $u_{\text{пор}} > u$. Введение скорости фильтрации удобно потому, что она определяется по геометрической площади живого сечения и не зависит от пористости. Закон ламинарной фильтрации (закон Дарси) представим в виде

$$u = k J, \quad (13.4)$$

где $J = h_f / \ell$ — гидравлический или равный ему пьезометрический уклон; k — коэффициент фильтрации, значение которого зависит от вида грунта (точнее, от его порового пространства) и от физических свойств жидкости (вязкости и плотности), он имеет размерность скорости.

В зависимости от грунта коэффициент фильтрации (k) воды имеет следующие значения:

Грунт	Коэффициент фильтрации k , см/с
глина	$< 0,00001$
суглинок	$0,0001-0,00001$
супесь	$0,001-0,0001$
песок мелкозернистый	$0,01-0,001$
песок крупнозернистый	$0,1-0,01$

При изучении фильтрации других жидкостей в пористых средах (например, нефти) используют другую форму записи закона Дарси:

$$u = - \frac{k_0}{\eta} \frac{\partial p}{\partial s}, \quad (13.5)$$

где p — гидродинамическое давление; s — координата в направлении движения жидкости; η — динамический коэффициент вязкости; k_0 — коэффициент проницаемости пористой среды, который зависит только от свойств этой среды, но не зависит от физических свойств фильтрующейся жидкости.

Сопоставляя (13.4) и (13.5), легко установить, что

$$k = k_0 \frac{\rho g}{\eta} = \frac{k_0 g}{\nu} \quad (13.6)$$

(k_0 имеет размерность м^2).

При гравитационном безнапорном движении грунтовых вод пьезометрический уклон $J < 1$ (см. разд. 3.11), поэтому значения скорости фильтрации u не превышают коэффициента фильтрации k , при этом, очевидно, соответствующий скорости фильтрации скоростной напор $u^2/2g$ всегда оказывается пренебрежимо малым по сравнению с потенциальным напором H . Поэтому в фильтрационных расчетах вместо полного напора и гидродинамического уклона используют потенциальный напор и пьезометрический уклон.

Закон Дарси, записанный в форме (13.4) для одномерной задачи (течение в цилиндрической трубе), обобщается на трехмерный случай в виде

$$\mathbf{u} = -k \text{ grad } H, \quad (13.7)$$

где $\mathbf{u}$ — вектор скорости фильтрации; H — потенциальный напор.

В матричной записи уравнение (13.7) имеет вид

$$(u_x, u_y, u_z) = -k \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial z} \right).$$

Закон Дарси справедлив в случае ламинарной фильтрации, т.е. главным образом в мелкозернистых грунтах (песках, супесях, глинах). В крупнозернистых грунтах (галечниках, трещиноватых скальных породах, каменнонабросных массивах и т.п.) скорость фильтрации пропорциональна градиенту напора в степени меньшей единицы, а при достаточно больших скоростях может иметь место и квадратичная область потерь напора, так что

$$u = k\sqrt{J}.$$

В данном курсе расчет турбулентных фильтрационных потоков рассматриваться не будет.

13.3. Способы определения коэффициента фильтрации

Для определения численного значения коэффициента фильтрации обычно используют прибор Дарси (рис. 13.3). Он состоит из вертикального цилиндра диаметром D , в который на сетку укладывают испытываемый грунт. Цилиндр оснащен средствами для измерения напора (как правило, это несколько пьезометров) и расхода воды (обычно — мерный сосуд с секундомером). Задавая несколько различных расходов воды Q и измеряя соответствующие перепады напора $(H_1 - H_2)$ на расчетной длине ℓ , вычисляют коэффициент фильтрации для каждого расхода по формуле

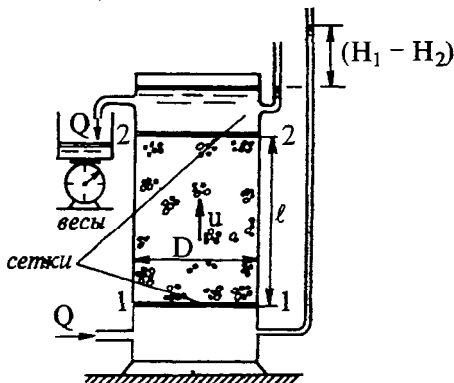


Рис. 13.3. Схема прибора Дарси для определения коэффициента фильтрации

$$k = \frac{u}{J} = \frac{Q \ell}{\frac{\pi D^2}{4} (H_1 - H_2)}, \quad (13.8)$$

а затем находят среднее по всем опытам значение k .

Недостатком этого способа определения коэффициента фильтрации является то, что грунт в процессе переноса из естественных условий в цилиндр прибора Дарси может существенно изменить структуру, пористость, а следовательно, и фильтрационные свойства.

Способ измерения коэффициента фильтрации без разрушения структуры грунта, т.е. в месте его естественного залегания (полевой способ), весьма дорогостоящий и трудоемкий. Он заключается в установлении связи между расходом воды, откачиваемой из скважины, и понижением уровня грунтовых вод вблизи скважины. Очевидно, при этом в зависимости от геологической ситуации вблизи скважины (наличие нескольких водоносных слоев, сложенных различными грунтами и т.п.) значения коэффициента фильтрации не всегда можно отнести к какому-то определенному грунту.

Расчетные формулы, рекомендуемые в справочниках, как правило, основаны на лабораторных данных, полученных с помощью прибора Дарси.

Таким образом, следует признать, что основным способом определения численных значений коэффициента фильтрации грунтов является их исследование на приборе Дарси.

13.4. Плавноизменяющееся безнапорное движение грунтовых вод. Дифференциальное уравнение Дюпюи

Безнапорное движение грунтовых вод под действием силы тяжести обычно имеет место, когда под водопроницаемым грунтом, в котором движется вода, расположен практически водонепроницаемый горизонтальный или близкий к горизонтальному слой грунта, называемый *водоупором*. При гравитационном безнапорном движении грунтовых вод большинство практических задач эффективно решается с помощью модели плавноизменяющегося движения. Основные свойства и расчетные зависимости этой модели поясним на примере плоской задачи (рис. 13.4), рассматривая фильтрацию воды сквозь грунт, расположенный на водоупоре. Направим координатную ось s вдоль течения в плоскости водоупора, а ось z — вертикально вверх. Кривая свободной поверхности, на которую действует атмосферное давление p_a , в случае фильтрационных потоков называется *кривой депрессии* или депрессионной кривой.

Полагаем, что кривая депрессии (а следовательно, и все линии тока) имеет незначительную кривизну, и ее уклон мало отличается от продольного уклона водоупора i . Это позволяет принять гипотезу *плоских* живых сечений, в которых (как и при плавноизменяющемся движении воды в открытых руслах) гидродинамическое давление распределено по гидростатическому закону. Дополнительно, учитывая сравнительно малые уклоны как поверхности водоупора, так и кривой депрессии, встречающиеся на практике, примем, что плоские живые сечения *вертикальны*.

Указанные две гипотезы в отношении живых сечений позволяют получить основное расчетное уравнение плавноизменяющейся фильтрации. В соответствии с принятым допущением отрезки всех линий тока между двумя живыми сечениями, указанные на рис. 13.5, имеют одинаковую длину ds . Поскольку потенциальный напор в каждом сечении постоянен (при гидростатическом распределении

давления $z + \frac{P}{\rho g} = H = \text{const}$) и равен превышению кривой депрессии над плоскостью сравнения, то вдоль всех линий тока градиент напора

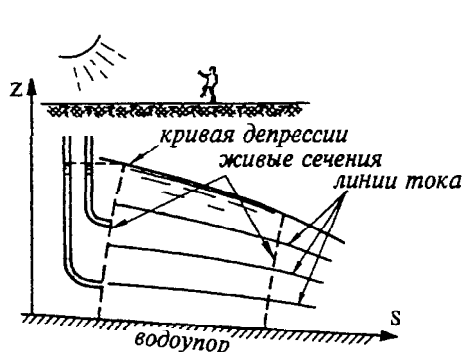


Рис. 13.4. Безнапорное плавноизменяющееся движение грунтовой воды

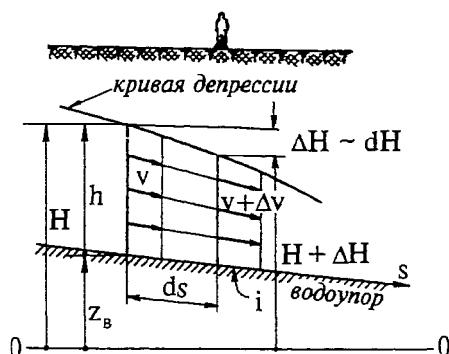


Рис. 13.5. Расчетная модель безнапорного плавноизменяющегося движения грунтовой воды (модель Дюпюи)

$J = -dH/ds$ одинаков, а в соответствии с законом Дарси скорость фильтрации одинакова в каждой точке живого сечения. Очевидно, что средняя скорость v в живом сечении в этом случае равна u . В результате имеем уравнение

$$v = -k \frac{dH}{ds}, \quad (13.9)$$

которое называется уравнением безнапорной плавноизменяющейся фильтрации, или *дифференциальным уравнением Дюпюи*.

Несмотря на внешнее сходство с уравнением Дарси (13.4), уравнение Дюпюи содержит принципиально отличающиеся переменные: среднюю скорость в живом сечении v и отметку кривой депрессии равную H , а не скорость фильтрации в точке потока грунтовых вод u и гидродинамический уклон J , которые входят в уравнение Дарси.

Дифференциальное уравнение Дюпюи представим в виде, удобном для практических расчетов, выразив напор H через глубину фильтрационного потока h и отметку водоупора z_b :

$$H = z_b + h, \quad (13.10)$$

а среднюю скорость v — через удельный расход q :

$$q = vh. \quad (13.11)$$

При этом получим:

$$q = hv = -kh \frac{dH}{ds} = -kh \left(\frac{dz_b}{ds} + \frac{dh}{ds} \right) = kh \left(i - \frac{dh}{ds} \right),$$

где $i = -\frac{dz_b}{ds}$ — продольный уклон водоупора, или

$$q = kh \left(i - \frac{dh}{ds} \right). \quad (13.12)$$

Последнее уравнение позволяет определить глубину фильтрационного потока при равномерном движении h_0 , которое имеет место, если глубина h не зависит от s :

$$q = k h_0 i. \quad (13.13)$$

Эту глубину h_0 , как и в случае потоков в открытых руслах, называют *нормальной* глубиной.

13.5. Интегрирование дифференциального уравнения безнапорного плавноизменяющегося движения грунтовых вод

Рассмотрим движение грунтовой воды при положительном уклоне водоупора $i > 0$ и введем в уравнение (13.12) нормальную глубину в соответствии с ее определением (13.13), тогда получим

$$k h_0 i = kh \left(i - \frac{dh}{ds} \right). \quad (13.14)$$

Обозначим отношение глубины h к нормальной глубине h_0 через η ; разделим обе части равенства (13.14) на $k h_0$ и после простых преобразований получим

$$\frac{ids}{h_0} = \frac{\eta}{\eta - 1} d\eta. \quad (13.15)$$

Интегрируя это уравнение, можно найти расстояние ℓ между живыми сечениями с глубинами h_1 и h_2 :

$$\frac{i\ell}{h_0} = \eta_2 - \eta_1 + \ln \frac{\eta_2 - 1}{\eta_1 - 1}. \quad (13.16)$$

Заметим, что в уравнении (13.16) расход фильтрационного потока q включается в расчет через нормальную глубину h_0 .

Рассмотрим интегрирование дифференциального уравнения (13.12) при наиболее важном для практических задач горизонтальном водоупоре; при этом $i = 0$, и уравнение (13.12) имеет вид

$$\frac{q}{k} ds = -h dh. \quad (13.17)$$

Тогда его интеграл

$$\frac{q}{k} = \frac{h_1^2 - h_2^2}{2\ell}. \quad (13.18)$$

Последнее уравнение называют *интегральным уравнением Дюпюи*.

13.6. Фильтрация через прямоугольный однородный грунтовый массив

Целью расчетов фильтрационного потока через грунтовый массив (рис. 13.6), как правило, является определение:

удельного фильтрационного расхода q ;

положения кривой депрессии.

Удельный фильтрационный расход определяют по уравнению Дюпюи (13.18):

$$q = k \frac{h_1^2 - h_2^2}{2\ell}. \quad (13.19)$$

Кривую депрессии строят, полагая, что в уравнении (13.18) глубина h_2 зафиксирована, а глубина h_1 рассматривается как глубина $h(s)$ в живом сечении с координатой s (при этом расход q считают известным, рассчитанным по формуле (13.19)):

$$q = k \frac{[h(s)]^2 - h_2^2}{2s}, \quad h(s) = \sqrt{h_2^2 + \frac{q}{k} 2s} = \sqrt{h_2^2 + \frac{h_1^2 - h_2^2}{\ell} s}. \quad (13.20)$$

Отметим, что последнее выражение показывает, что очертание кривой депрессии не зависит от рода грунта. Обратим внимание также на следующее важное обстоятельство. Кривая депрессии, начинающаяся в точке А, как правило, приходит на низовую грань грунтового массива не в точке В, т.е. не на уровне воды в нижнем бьефе, а несколько выше — в точке С. При этом образуется поверхность, проектирующаяся на чертеже в отрезок ВС, вблизи которой движение резкоизменяющееся; она называется поверхностью высачивания, а сам отрезок ВС — *промежутком высачивания*. По поверхности высачивания грунтовая вода стекает струйками и, возможно, испаряется. Длину Δ отрезка ВС можно вычислить с помощью графика, предложенного П.Я.Полубариновой-Кочиной (рис.13.7).

Отметим, что образование поверхности высачивания не оказывает влияния на величину фильтрационного расхода. Теоретически доказано, что расход q можно вычислить с помощью зависимости (13.19), не принимая во внимание значение Δ . Но для определения положения кривой депрессии необходимо уметь рассчитывать Δ . Кривая депрессии при наличии промежутка высачивания может быть построена по зависимости

$$h(s) = \sqrt{(h_2 + \Delta)^2 + \frac{h_1^2 - (h_2 + \Delta)^2}{\ell} s}. \quad (13.21)$$

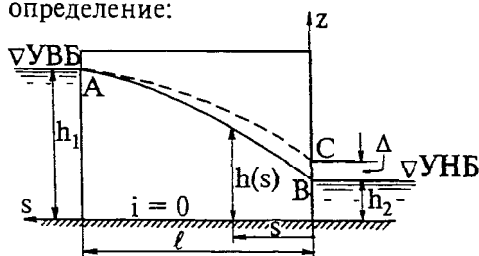


Рис. 13.6. Схема фильтрационного потока через прямоугольный грунтовый массив

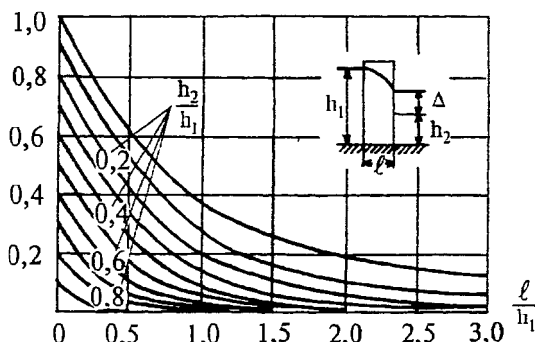


Рис. 13.7. Номограмма для вычисления высоты промежутка высачивания Δ

13.7. Два виртуальных способа расчета фильтрации через неоднородный (слоистый) грунт

Рассмотрим плоскую задачу о фильтрации через прямоугольный грунтовой массив для двух простейших вариантов неоднородности грунта.

1. Массив образован двумя *горизонтальными* слоями грунта с различными коэффициентами фильтрации k_1 и k_2 (для определенности примем, что $k_1 > k_2$, например, слой 1 сложен песчаным грунтом, а слой 2 — суглинистым); в пределах каждого слоя грунт однородный и изотропный. Для расчета реальный неоднородный (слоистый, в данном случае) массив приводится к однородному массиву, толщину которого назначают таким образом, чтобы в реальном и расчетном (виртуальном) массивах расходы воды при заданном перепаде уровней воды $z = h_1 - h_2$ были одинаковы.

В случае, представленном на рис. 13.8, реальный слоистый массив заменяется виртуальным однородным массивом суглинка с коэффици-

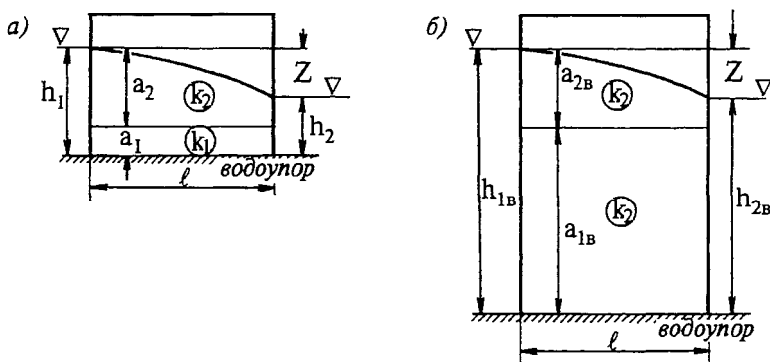


Рис. 13.8. Виртуальный способ расчета неоднородного массива грунта с горизонтальными слоями:

а — реальный массив; *б* — виртуальный массив

ентом фильтрации k_2 . Через слой песка толщиной a_1 в реальном массиве протекает удельный расход

$$q_1 = v a_1 = k_1 \frac{dH}{ds} a_1 = k_1 \frac{z}{\ell} a_1.$$

Через слой суглинка, заменившего слой песка в виртуальном массиве, пройдет удельный расход

$$q_{1B} = v_B a_{1B} = k_2 \frac{dH}{ds} a_{1B} = k_2 \frac{z}{\ell} a_{1B}.$$

Приравнивая эти расходы, найдем

$$a_{1B} = a_1 \cdot \frac{k_1}{k_2}, \quad (13.22)$$

т.е. в виртуальном (расчетном) массиве грунта слой суглинка, заменяющего слой песка в реальном массиве, имеет большую толщину. Выполнив все необходимые расчеты для виртуального (однородного) массива, результаты (расход и кривую депрессии) можно отнести к реальному

массиву (при условии $a_1 < h_2$, в противном случае этот способ неприменим). Глубины h_1 и h_2 для виртуального массива следует изменить в соответствии с расчетным положением водоупора.

2. Массив образован двумя *вертикальными* слоями грунта с коэффициентами фильтрации $k_1 > k_2$ (рис. 13.9).

В этом случае виртуальный однородный массив имеет коэффициент фильтрации k_1 (т.е. массив песчаный). Чтобы слой песчаного мас-

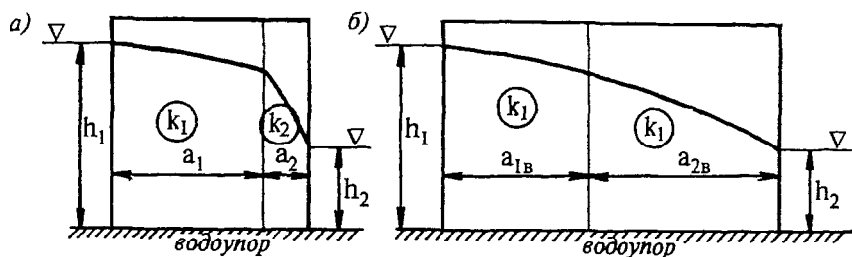


Рис. 13.9. Виртуальный способ расчета неоднородного грунта с вертикальными слоями: а — реальный массив; б — виртуальный массив

сива оказывал такое же сопротивление движению грунтовой воды, что и суглинистый слой толщиной a_2 , толщина песчаного слоя, заменившего суглинистый, должна быть увеличена пропорционально отношению коэффициентов фильтрации

$$a_{2в} = a_2 \frac{k_1}{k_2}. \quad (13.23)$$

Расход, рассчитанный для виртуального массива, при этом должен быть равен расходу через реальный неоднородный массив, а кривая депрессии может быть перенесена из виртуального массива лишь в той части реального, где коэффициент фильтрации одинаков (т.е. в песчаном слое). В суглинистом слое положение кривой депрессии следует уточнить, рассчитывая его как прямоугольный массив с промежутком высачивания, определяемым по рис. 13.7.

13.8. Движение грунтовых вод в прямоугольном массиве при инфильтрации с поверхности земли

Инфильтрация (просачивание) воды с поверхности земли в грунт может происходить вследствие выпадения осадков (дождя), таяния снега, поливов сельскохозяйственных угодий и т.п. Численно инфильтрация характеризуется расходом воды ($\text{м}^3/\text{с}$), поступающим в грунт на единицу площади поверхности земли (м^2). Назовем эту величину, имеющую размерность скорости, *плотностью инфильтрационного потока* и обозначим ее через ϵ . Рассматривая плоскую задачу (рис. 13.10) и используя модель плавно-

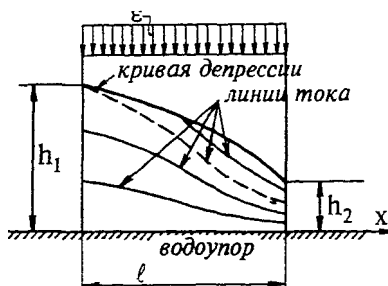


Рис. 13.10. Фильтрационный поток через прямоугольный массив грунта при небольших значениях плотности инфильтрационного потока ϵ

уравнение баланса для удельного расхода q : изменение расхода dq вдоль оси x равно расходу, поступающему в поток грунтовой воды за счет инфильтрации εdx (на единицу ширины потока), т.е.

$$\frac{dq}{dx} = \varepsilon. \quad (13.24)$$

Уравнение движения при $i = 0$ имеет вид (см. (13.17))

$$q = -kh \frac{dh}{dx} = -\frac{k}{2} \frac{dh^2}{dx}. \quad (13.25)$$

Подставим (13.25) в (13.24):

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{k}{2} \frac{dh^2}{dx} \right) = -\varepsilon$$

и проинтегрируем полученное выражение по x :

$$h^2 = -\frac{\varepsilon}{k} x^2 + c_1 x + c_2. \quad (13.26)$$

Постоянные интегрирования c_1 и c_2 определим, используя условия

$$h^2 \Big|_{x=0} = h_1^2 = \frac{\varepsilon}{k} 0 + c_1 0 + c_2, \quad c_2 = h_1^2;$$

$$h^2 \Big|_{x=\ell} = h_2^2 = -\frac{\varepsilon}{k} \ell^2 + c_1 \ell + c_2, \quad c_1 = \frac{h_2^2 - h_1^2}{\ell} + \frac{\varepsilon}{k} \ell.$$

Подставим значения c_1 и c_2 в (13.26) и получим уравнение кривой депрессии:

$$[h(x)]^2 = \frac{h_1^2(\ell - x) + h_2^2 x}{\ell} + \frac{\varepsilon}{k} (\ell - x)x. \quad (13.27)$$

Подставляя $h(x)$ из (13.27) в (13.25), получим уравнение для расхода в живом сечении потока с координатой x :

$$q = k \frac{h_1^2 - h_2^2}{2\ell} - \frac{\varepsilon}{2} (\ell - 2x). \quad (13.28)$$

Очевидно, что при $\varepsilon = 0$ уравнение (13.28) превращается в уравнение Дюпюи (13.18). При $x = 0$ расход во входном сечении в массив

$$q_{\text{вх}} = k \frac{h_1^2 - h_2^2}{2\ell} - \frac{\varepsilon \ell}{2}. \quad (13.29)$$

При $x = \ell$ расход в выходном сечении

$$q_{\text{вых}} = k \frac{h_1^2 - h_2^2}{2\ell} + \frac{\varepsilon \ell}{2}. \quad (13.30)$$

Из выражения (13.29) следует, что при $\varepsilon = k \frac{h_1^2 - h_2^2}{\ell^2}$ вода из верхнего бьефа поступать в нижний бьеф не будет. Если

$$\varepsilon > k \frac{h_1^2 - h_2^2}{\ell^2}, \quad (13.31)$$

то кривая депрессии будет иметь максимум, и вода, инфильтрующаяся с поверхности земли, будет течь и в верхний и в нижний бьефы (рис. 13.11). Координату точки максимума $x_{\max}$ и глубину фильтрационного потока в этой точке найдем из уравнения (13.27), вычислив и приравняв нулю первую производную от $[h(x)]^2$:

$$\frac{dh^2}{dx} = 2h \frac{dh}{dx} = 0;$$

$$\frac{-h_1^2 + h_2^2}{\ell} + \frac{\varepsilon}{k} (\ell - 2x_{\max}) = 0,$$

откуда

$$x_{\max} = \frac{\ell}{2} - \frac{k}{\varepsilon} \frac{h_1^2 - h_2^2}{2\ell}. \quad (13.32)$$

Из выражения (13.32) следует, что при выполнении условия (13.31) максимум кривой депрессии будет расположен внутри массива $\left(0 < x_{\max} < \frac{\ell}{2}\right)$.

Полученные результаты дают возможность решить задачу о расчете горизонтального дренажа, предназначенного для осушения поверхности земли. Цель такого расчета — определение расстояния между дренами ℓ (рис. 13.12), если заданы норма выпадения осадков (или полива) ε и глубина заложения дренажных труб H . Условия эксплуатации дренаж-

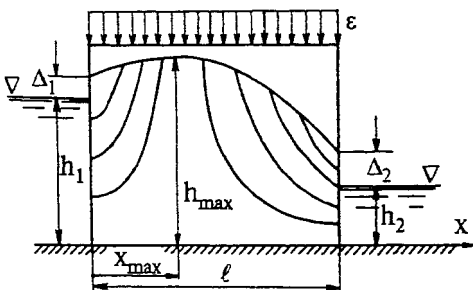


Рис. 13.11. Фильтрационный поток через прямоугольный массив грунта при больших значениях плотности инфильтрационного расхода ε

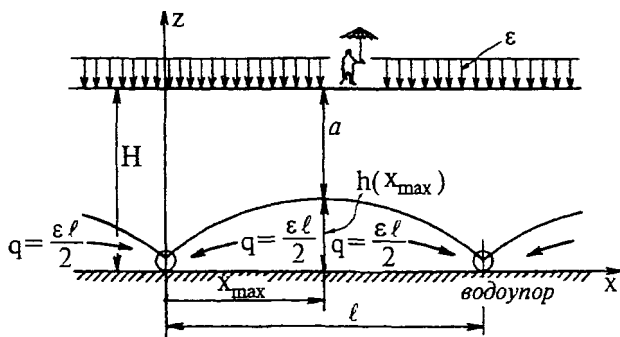


Рис. 13.12. Фильтрация к горизонтальным дренажным трубам

ной системы требуют, чтобы кривая депрессии потока грунтовой воды, образующегося при просачивании с поверхности земли, была расположена ниже поверхности земли на расстоянии a . Ниже кривой депрессии грунт насыщен водой, а выше ее он недонасыщен.

Предположим, что дренажные трубы расположены на горизонтальном водоупоре (если водоупор ниже дренажных труб, то условия для понижения отметок уровня кривой депрессии более благоприятны, поэтому, принимая это предположение, создают некоторый запас, т.е. обеспечивают значение a , превышающее расчетное). Глубину безнапорного

потока в дренажной трубе будем считать пренебрежимо малой. Тогда, полагая в уравнении (13.27) $h_1 = h_2 = 0$, получим уравнение кривой депрессии для данного случая:

$$[h(x)]^2 = \frac{\varepsilon}{k}(\ell - x)x.$$

Очевидно, что $x_{\max} = \frac{\ell}{2}$ (см. также (13.32)), а максимальная ордината кривой депрессии

$$h_{\max} = h(x_{\max}) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{k}} \cdot \frac{\ell}{2}. \quad (13.33)$$

Полагая

$$H - a = h_{\max}, \quad (13.34)$$

найдем искомое расстояние между дренами:

$$\ell = 2(H - a)\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}. \quad (13.35)$$

Удельный расход, поступающий в дренажную трубу на каждую единицу ее длины (в дренах вода поступает с двух сторон), составит

$$q = \varepsilon \ell.$$

Отметим, что в рассмотренном случае грунтовые воды образывались только за счет инфильтрации с поверхности земли, при отсутствии инфильтрации грунт над водоупором сухой (точнее, он не содержит *гравитационной* грунтовой воды).

13.9. Приток воды к водосборной галерее

Пусть водоносный слой, расположенный на горизонтальном водоупоре, питается от водоема, который удален от галереи на расстояние ℓ ; при этом уклон кривой депрессии в естественных условиях настолько мал, что ее можно считать горизонтальной. Если требуется понизить уровень грунтовой воды, то одним из наиболее распространенных спо-

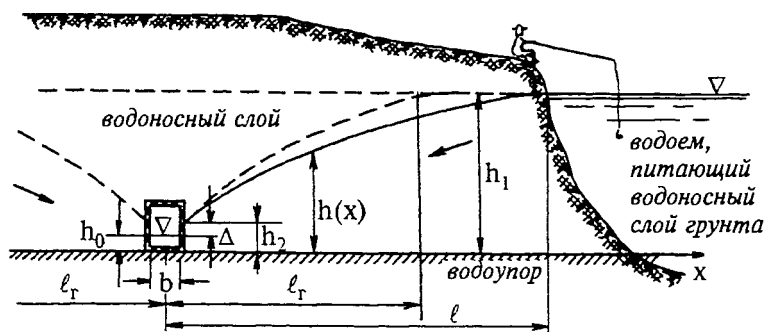


Рис. 13.13. Безнапорный поток грунтовой воды к водосборной галерее

собов является устройство водосборной галереи (рис. 13.13). Грунтовая вода, поступающая через проницаемую обделку галереи, отводится из рассматриваемой территории за счет продольного уклона галереи. Для

простоты рассмотрения вопроса представим, что галерея расположена на водоупоре, и положим, что безнапорный поток в ней имеет глубину h_0 , а высотой промежутка высачивания будем в расчетах пренебрегать. При этом расход воды, поступающий со стороны водоема на единицу длины галереи, в соответствии с уравнением Дюпюи (13.18) составит

$$q = k \frac{h_1^2 - h_2^2}{2\ell}. \quad (13.36)$$

Как следует из этой зависимости, фильтрационный расход с увеличением расстояния ℓ уменьшается. Вместе с тем, натурные наблюдения показывают, что если питающий водоем удален от галереи на расстояние ℓ , превышающее определенное значение ℓ_r , то расчет по зависимости (13.36) дает заниженные значения удельного расхода. Это расстояние ℓ_r называют *длиной влияния галереи*. Экспериментально установлено, что ℓ_r зависит, главным образом, от рода грунта. Можно рекомендовать следующие значения ℓ_r для предварительных расчетов:

для мелкозернистых грунтов $\ell_r = 100\text{--}200$ м,
 для среднезернистых грунтов $\ell_r = 200\text{--}500$ м,
 для крупнозернистых грунтов $\ell_r = 500\text{--}1000$ м.

Удельный расход q вычисляется по формуле

$$q = k \frac{h_1^2 - h_0^2}{2\ell_r}. \quad (13.37)$$

Для более точных расчетов можно использовать эмпирическую зависимость для ℓ_r :

$$\ell_r = 3000(h_1 - h_0)\sqrt{k}, \quad (13.38)$$

где k — коэффициент фильтрации, м/с; h_1 и h_0 — глубины, м.

Подставляя эту зависимость в (13.37), получим

$$q = k \frac{h_1^2 - h_0^2}{2\ell_r} = k \frac{h_1^2 - h_0^2}{2 \cdot 3000(h_1 - h_0)\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k}(h_1 + h_0)}{6000}. \quad (13.39)$$

Отметим, что зависимость (13.37) можно использовать только в случаях, когда питающий водоем расположен на расстоянии, превышающем ℓ_r . Простые оценки показывают, что время, в течение которого грунтовая вода проходит расстояние, равное длине влияния, измеряется годами, и следовательно, грунтовые воды за это время сумеют многократно пополниться за счет местных сезонных источников (дожди, таяние снега и т.п.). Поэтому представляется правдоподобной точка зрения, согласно которой длина влияния галереи определяет размеры территории, настолько удаленной от водоемов, что уровень грунтовых вод (в течение длительных, измеряемых месяцами и годами, промежутков времени) в ее границах зависит от “местных” (геологических, гидрологических, гидрометеорологических, климатических и др.) условий. Это дает основание называть ℓ_r *длиной питания галереи*.

Разнообразие “местных” условий, естественно, предопределяет невысокую точность, с которой можно оценить, например, приток воды к галерее.

Когда водоупор расположен глубоко, дно галереи может быть выше водоупора. В этом случае галерею называют “висячей” и рассчитывают,

используя следующий прием. На уровне дна галереи строят воображаемую горизонтальную водонепроницаемую плоскость С—С, и расход воды, поступающий в галерею, представляют в виде суммы:

а) расхода q_1 , относящегося к безнапорному потоку над плоскостью С—С; этот расход и кривая депрессии рассчитываются, как описано выше, в предположении, что водоупором является поверхность С—С;

б) расхода q_2 , который поступает в галерею через ее дно; поток здесь напорный, он ограничен действительным водоупором и поверхностью С—С; для расчета q_2 используют приемы, описываемые, например, в разд. 13.19 для условий резкоизменяющейся фильтрации.

13.10. Приток воды к круглому колодцу

Рассмотрим одиночный колодец, доходящий до водоупора, который называется *совершенным колодцем* (рис. 13.14). Из колодца забирается постоянный во времени расход Q (который часто называют *дебитом* колодца). Предположим, что слой грунтовой воды постоянной толщины h_1 имеет неограниченные горизонтальные размеры. Решим задачу об установившейся, безнапорной, плавноизменяющейся фильтрации к колодцу. Предположим, что глубина воды в колодце постоянна и равна h_0 , и имеется промежуток высачивания Δ . Полагая грунт однородным, из осевой симметрии задачи делаем вывод о том, что живые сечения имеют вид

коаксиальных цилиндров, площадь которых

$$\omega = 2\pi r h, \quad (13.40)$$

где r — расстояние до оси колодца; $h = h(r)$ — текущая глубина фильтрационного потока.

Средняя скорость v в живом сечении по дифференциальному уравнению Дюпюи (13.9) составляет

$$v = k \frac{dh}{dr}. \quad (13.41)$$

Расход Q , притекающий в колодец, рассчитывается по формуле

$$Q = v\omega = k \frac{dh}{dr} 2\pi r h. \quad (13.42)$$

Проинтегрировав это уравнение, найдем

$$Q \ln r = \pi k h^2 + C.$$

Постоянную интегрирования C найдем из условия, что на расстоянии R_k поток грунтовой воды имеет глубину h_1 (это может иметь место, если, например, колодец устроен в центре *круглого в плане острова* с радиусом R_k , а отметка воды в водоеме равна h_1). Получим

$$Q \ln \frac{R_k}{r_0} = \pi k (h_1^2 - h_0^2). \quad (13.43)$$

Это уравнение, если известен расход Q , позволяет вычислить координаты депрессионной воронки. Если же задана глубина воды в колодце h_0 , то из (13.43) можно получить выражение для расхода (дебита) колодца Q :

$$Q = 1,36k \frac{h_1^2 - h_0^2}{\lg \frac{R_k}{r_0}}, \quad (13.44)$$

в этой формуле вместо натурального введен десятичный логарифм.

Как следует из зависимости (13.44), при фиксированных значениях r_0 , h_0 и h_1 с увеличением R_k расход уменьшается вплоть до 0 при $R_k \rightarrow \infty$. Это свидетельствует о том, что в безграничном пласте грунта, т.е. в условиях, отличных от *острова*, постановка стационарной задачи некорректна; если задать постоянный во времени дебит колодца, то глубина в колодце h_0 будет уменьшаться до нуля (вода в колодец будет поступать через промежуток высачивания), после чего расход из колодца в расчетах уже задавать нельзя; если откачивать и далее всю притекающую в колодец воду, то забираемый расход воды будет уменьшаться до нуля по мере распространения депрессионной воронки. Изложенным теоретическим выводам, на первый взгляд, противоречит опыт эксплуатации колодцев, которые обеспечивают постоянный дебит в течение длительных (измеряемых годами) отрезков времени. Это объясняется тем, что в реальных условиях “местные” особенности питания водоносного слоя (см. разд. 13.9) обеспечивают поддержание свободной поверхности грунтовой воды вокруг колодца при заданном его дебите на постоянном уровне. Поэтому, как и для водосборной галереи, вводят понятия *радиуса влияния колодца* R_k , который вычисляют так же (см. разд. 13.9), как длину влияния галереи, и расход (дебит) колодца определяют по формуле (13.44). Как и в случае водосборной галереи R_k более точно называть *радиусом питания колодца*. Обратим внимание на то, что для колодца погрешность в определении расхода из-за неточности принимаемых значений для R_k значительно меньше, чем для галереи, так как R_k входит под знак логарифма.

Колодец называется *несовершенным*, если его дно расположено выше водоупора. Как правило, глубина h_0 заметно больше диаметра колодца, при этом расходом воды, поступающим через дно колодца, можно пренебречь, а расход, поступающий через боковую поверхность, рассчитывают в предположении, что водоупор расположен на уровне дна колодца.

Совершенный артезианский колодец, представленный на рис. 13.15, рассчитывается аналогично обыкновенному совершенному колодцу.

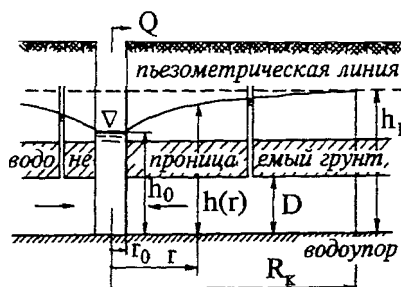


Рис. 13.15. Напорный поток воды к колодцу

Пусть водоносный слой толщиной D расположен между двумя слоями водонепроницаемого грунта. Грунтовая вода в этом слое движется в напорном режиме, и если устроить вертикальную шахту, то вода в ней поднимется до отметки h_1 . В результате отбора постоянного во времени расхода Q уровень воды в колодце начнет понижаться, и вместе с ним будет понижаться пьезометрическая поверхность; будем считать, что установившаяся в результате глубина в колодце $h_0 > D$. Примем, что в некоторый момент времени пьезометрическая поверхность описывается уравнением $h = h(r)$, тогда средняя по круглоцилиндрическому живому сечению скорость фильтрации $v = k \frac{dh}{dr}$, а площадь живого сечения $\omega = 2\pi r D$. Расход Q , притекающий к колодцу, составит

$$Q = v\omega = k \frac{dh}{dr} 2\pi r D. \quad (13.45)$$

Интегрируя это уравнение, найдем

$$Q = 2,73 \frac{kD(h_1 - h_0)}{\ln \frac{R_k}{r_0}}. \quad (13.46)$$

Здесь R_k — радиус влияния (питания) колодца; его определяют так же, как и в разд. 13.9.

13.11. Фильтрация воды из земляных каналов

Рассмотрим потери воды из необлицованного (т.е. не имеющего защитного противофильтрационного покрытия) земляного канала за счет ее фильтрации в грунт. Наибольшие потери возникают, если под слоем

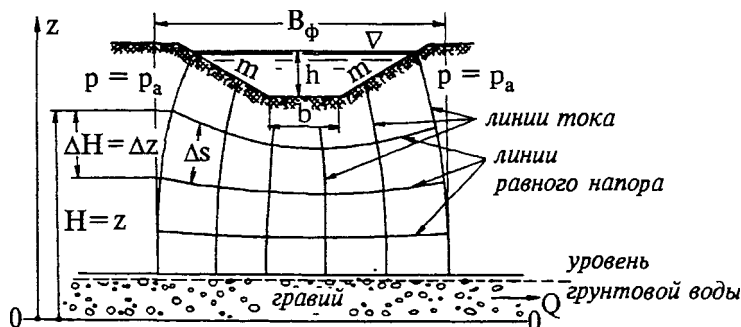


Рис. 13.16. Свободная фильтрация воды из необлицованного земляного канала

грунта, в котором построен канал, расположен слой с большим коэффициентом фильтрации (рис. 13.16); например, канал проходит в мелкозернистом песке, а под слоем песка имеется слой гравия. Кроме того, положим, что уровень грунтовых вод расположен в слое гравия и не растет вследствие фильтрации из канала.

В этих условиях давление во всей области фильтрации близко к атмосферному (в частности, для крайних линий тока оно обеспечивается атмосферным воздухом, содержащимся в порах грунта), следовательно-

но, потенциальный напор $\left(H = z + \frac{p}{\rho g} = z \right)$ в каждой точке потока практически равен отметке (превышению над плоскостью сравнения) этой точки. Таким образом, вдоль вертикальных линий тока пьезометрический уклон $J = \frac{\Delta H}{\Delta s} = \frac{\Delta z}{\Delta s} = 1$. При этом согласно закону Дарси скорость фильтрации можно считать равной коэффициенту фильтрации:

$$u = k. \quad (13.47)$$

Поскольку скорость фильтрации постоянна, удельный (на единицу длины канала) расход фильтрующей из канала воды равен

$$q = uB_\phi = kB_\phi, \quad (13.48)$$

где B_ϕ — ширина фильтрационного потока. Согласно Н.Н. Павловскому можно принять

$$B_\phi = b + 2(m + 1)h, \quad (13.49)$$

где b — ширина канала по дну; m — коэффициент бокового откоса; h — глубина воды в канале.

Расход, рассчитанный по формуле (13.48) при установившемся движении воды в канале, является максимально возможным при сформулированных условиях. Наличие водоупора (вместо слоя гравия) или высокий уровень грунтовых вод, не связанных с фильтрацией из канала, уменьшают величину потерь воды из канала. Для предотвращения этих потерь необходимо устройство противофильтрационных облицовок.

13.12. Фильтрация воды через однородную грунтовую плотину на водонепроницаемом основании

Целью расчета фильтрации через грунтовую плотину является определение:

фильтрационного расхода для оценки потерь воды из верхнего бьефа;

положения кривой депрессии и высоты промежутка высачивания Δ для оценки устойчивости и условий промерзания низового откоса плотины.

При этом считается, что глубины h_1 и h_2 , коэффициенты откосов m_v и m_n , а также ширина плотины на уровне верхнего бьефа b заданы (рис. 13.17).

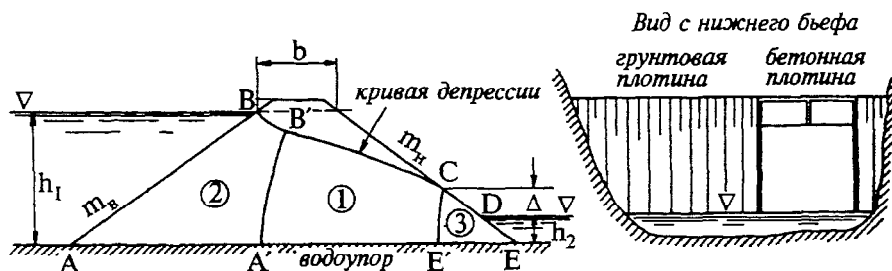


Рис. 13.17. Расчетная схема фильтрационного потока в однородной грунтовой плотине на водонепроницаемом основании

Следует отметить, что, например, плотина, построенная в русле реки, имеет в различных поперечных сечениях различную высоту; как правило, для упрощения расчетов рассматривают плоскую задачу (на 1 м длины плотины по гребню) для нескольких поперечных сечений плотины, и полученные результаты расчета соответствующим образом суммируют.

Фильтрационный поток через плотину на *водонепроницаемом* основании в указанных выше условиях плоской задачи представлен на рис. 13.17. На его границах выполняются следующие условия:

AB — поверхность равного напора, на ней $H = h_1 = \text{const}$, т.е. это живое сечение фильтрационного потока, оно плоское, но не вертикальное, следовательно, вблизи AB движение грунтовой воды будет резкоизменяющимся;

BC — кривая депрессии, при отсутствии инфильтрации и при установившемся движении — это линия тока;

CD — промежуток высачивания, здесь давление постоянно и равно атмосферному давлению, а гидродинамический напор H равен отметке поверхности низового откоса z ; на этом участке вода струйками стекает по поверхности откоса;

DE — поверхность равного напора, на ней $H = h_2 = \text{const}$; это, как и AB — плоское, но не вертикальное, живое сечение;

AE — водонепроницаемая граница и, следовательно, линия тока.

В соответствии с изложенным, а также принимая для расчета фильтрации модель плавноизменяющегося движения и уравнение Дюпюи, выделим в фильтрационном потоке три области.

1. Область плавноизменяющегося движения $A'B'CE'$, она ограничена сверху участком кривой депрессии, продольный уклон в пределах которого достаточно мал, чтобы можно было считать живые сечения потока плоскими и вертикальными; снизу эта область ограничена водоупором, со стороны верхнего и нижнего бьефов — живыми сечениями $A'B'$ и CE' , которые считаем плоскими и вертикальными.

2. Область резкоизменяющегося движения $ABB'A'$.

3. Область резкоизменяющегося движения $CDEE'$.

Если для расчета потока в области 1 имеется эффективная модель плавноизменяющегося движения, то для расчета областей 2 и 3 необходимо предложить приемы расчета, пригодные для случая резкоизменяющегося движения. Рассмотрим приемы, получившие наиболее широкое практическое применение.

Область 2. Эту область с наклонной верховой гранью AB заменяем на область с вертикальной верховой гранью $A''B''$ так, чтобы расход воды через расчетный массив $A''B''B'A'$ был бы равен расходу через реальный массив $ABB'A'$ (рис.13.18).

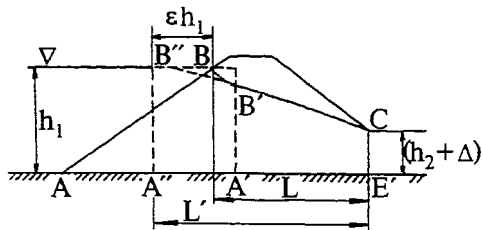


Рис. 13.18. Расчетная схема плавноизменяющегося фильтрационного потока в грунтовой плотине

Движение грунтовой воды в массиве А"В" В'А' плавноизменяющееся (живые сечения вертикальны). Как показали расчеты, основанные на двухмерной модели фильтрации, расходы через реальный и расчетный массивы будут одинаковы, если вертикальная грань А"В" будет расположена на расстоянии εh_1 от точки В, где

$$\varepsilon = \frac{0,44}{1 + \frac{1}{2m_b}} \approx 0,4. \quad (13.50)$$

В результате такой замены образуется расчетный профиль А"В" В'СЕ'А'А", в пределах которого движение плавноизменяющееся, для него можно записать уравнение Дюпюи для фильтрационного расхода:

$$q = k \frac{h_1^2 - (h_2 + \Delta)^2}{2L'}, \quad (13.51)$$

где $L' = L + \varepsilon h_1$.

В уравнение (13.51) входят неизвестные — расход q и высота промежутка высачивания Δ . Следовательно, это уравнение необходимо дополнить еще одним уравнением с теми же неизвестными, которое должно быть получено из рассмотрения фильтрации воды через третий фрагмент.

Область 3. Движение грунтовой воды в этой области резкоизменяющееся, причем линии тока к промежутку высачивания CD подходят по касательной или под небольшим углом, а к линии равного напора DE — по нормали (так как в соответствии с законом Дарси $u = -k \text{ grad } H$, т.е. вектор скорости нормален к линиям равного напора). На рис. 13.19 действительные линии тока показаны пунктиром. Для расчета этого фрагмента действительное поле фильтрационной скорости заменяем расчетным, полагая, что расчетные линии тока являются прямыми, параллельными водоупору. Для каждой такой линии тока считаем справедливым закон Дарси, другими словами, считаем, что скорость фильтрации вдоль каждой расчетной линии тока пропорциональна пьезометрическому уклону вдоль этой линии. При этом область 3 в соответствии с граничными условиями на низовой грани плотины разбивается на две части (а) и (б).

Для части (а) напор в начале горизонтальной линии тока, расположенной на отметке z , равен $(h_2 + \Delta)$, а в конце линии тока (на отрезке CD) напор равен отметке низового откоса в точке выхода на него расчетной линии тока z , т.е. $H = z$. Длина линии тока определяется из геометрических соображений:

$$\ell_a = [(h_2 + \Delta) - z] m_n. \quad (13.52)$$



Рис. 13.19. Расчетная схема резкоизменяющегося фильтрационного потока в грунтовой плотине

Пьезометрический уклон для произвольной линии тока в части (а) составит

$$J_a = \frac{(h_2 + \Delta) - z}{\ell_a} = \frac{(h_2 + \Delta) - z}{[(h_2 + \Delta) - z] m_h} = \frac{1}{m_h}. \quad (13.53)$$

Скорость фильтрации

$$u_a = kJ_a = \frac{k}{m_h}, \quad (13.54)$$

и удельный расход через часть (а)

$$q_a = \int_{h_2}^{h_2 + \Delta} u_a dz = \int_{h_2}^{h_2 + \Delta} \frac{k}{m_h} dz = \frac{k\Delta}{m_h}. \quad (13.55)$$

Для части (b) напор в начале каждой линии тока, как и для части (а), равен $(h_2 + \Delta)$, а напор в конце (лежащем на линии равного напора DE) равен h_2 ; длина ℓ_b определяется по (13.52). В результате скорость фильтрации на каждой линии тока в части (b) составит

$$u_b = kJ_b = k \frac{(h_2 + \Delta) - h_2}{[(h_2 + \Delta) - z] m_h} = \frac{k\Delta}{[(h_2 + \Delta) - z] m_h}. \quad (13.56)$$

Расход через часть (b)

$$q_b = \int_0^{h_2} \frac{k\Delta}{[(h_2 + \Delta) - z] m_h} dz = \frac{k\Delta}{m_h} \ln \frac{h_2 + \Delta}{\Delta}. \quad (13.57)$$

Расход через область 3, равный сумме расходов через области (а) и (b),

$$q = q_a + q_b = \frac{k\Delta}{m_h} \left(1 + \ln \frac{h_2 + \Delta}{\Delta} \right). \quad (13.58)$$

Решая совместно систему уравнений (13.58) и (13.51) найдем искомые величины q и Δ .

Для построения кривой депрессии, после вычисления q и Δ , воспользуемся уравнением Дюпюи в виде (13.51), считая h_1 текущей отметкой кривой депрессии h , зависящей от s :

$$h(s) = \sqrt{\frac{2q}{k} s + (h_2 + \Delta)^2}, \quad (13.59)$$

где s — координата, отсчитываемая от точки E' вверх по течению.

Построив по этой зависимости кривую депрессии до точки B'' , корректируем ее для реального профиля, соединив точку B плавной кривой, подходящей по касательной к кривой депрессии в точке B' (как показано на рис. 13.18). Ниже по течению от сечения $A'B'$ движение плавно изменяющееся.

13.13. Фильтрация воды через однородную грунтовую плотину на водопроницаемом основании

В тех случаях, когда плотина построена на водопроницаемом основании (рис. 13.20), а водоупор расположен ниже основания плотины на глубине T , используют следующие расчетные приемы. Рассмотрим вна-

чале наиболее простой вариант, когда коэффициенты фильтрации тела плотины k_1 и водопроницаемого основания k_2 одинаковы.

1. Если $T \ll h_1$, то расчет выполняют так же, как и для плотины на водонепроницаемом основании, увеличив высоту плотины и глубину воды

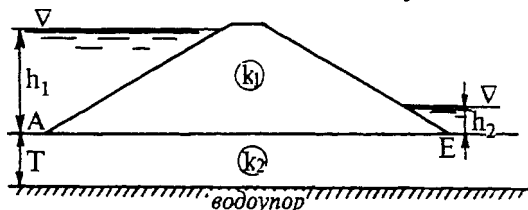


Рис. 13.20. Грунтовая плотина на водопроницаемом основании

в верхнем и нижнем бьефах на величину T (на рис. 13.21 расчетный профиль показан штриховой линией).

2. Если T соизмеримо с h_1 (рис. 13.22, а), то область фильтрации делят на две части (а) и (б) по поверхности АЕ. Выше этой линии (часть (а)) рассчитывают фильтрацию через однородную грунтовую плотину на

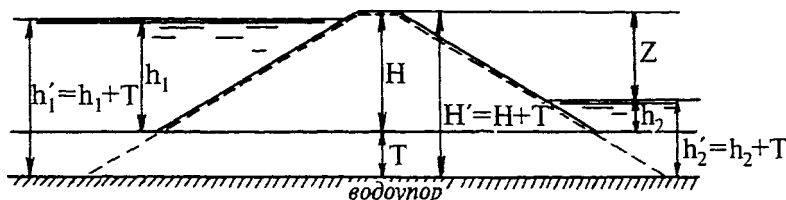


Рис. 13.21. Расчетная схема фильтрации через грунтовую плотину при небольшом заглублении водопора

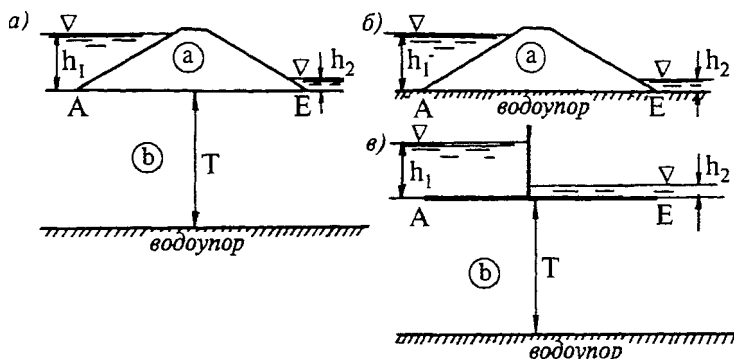


Рис. 13.22. Расчетная схема фильтрации через грунтовую плотину при большом заглублении водопора

водонепроницаемом основании, полагая что таковым является горизонтальная поверхность АЕ (рис. 13.22,б).

Ниже поверхности АЕ (часть (б)) рассчитывают фильтрационный поток, полагая, что движение здесь резкоизменяющееся и напорное (см. разд. 13.17—13.21). Поверхность АЕ при этом считается водонепроницаемой (рис.13.22,в).

В более сложном случае, когда грунты, слагающие тело плотины и водопроницаемое основание, имеют различные коэффициенты фильтрации $k_1 \neq k_2$, необходимо использовать различные приемы.

Если $k_1 > k_2$, то, используя первый виртуальный способ расчета слоистых грунтов, следует заменить область фильтрации однородным массивом, включающим и плотину и основание, и выполнить расчет, основываясь на описанных выше приемах.

Если $k_1 < k_2$, то следует использовать второй из изложенных приемов, т.е. раздельно рассчитывать фильтрацию через тело плотины и через основание.

13.14. Фильтрация через грунтовые плотины, имеющие устройства, предотвращающие высачивание воды на низовой откос

Распространенным средством, обеспечивающим защиту низового откоса от разрушения вследствие высачивания воды на его поверхность, а также вследствие промерзания грунтовой воды (если кривая депрессии слишком близко подходит к поверхности откоса), является устройство банкета из каменной наброски (рис. 13.23).

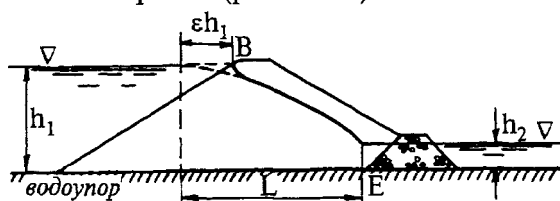


Рис. 13.23. Расчетная схема фильтрации через грунтовую плотину банкетом из каменной наброски

Расчет расхода выполняется с помощью уравнения Дюпюи:

$$q = k \frac{h_1^2 - h_2^2}{2L}, \quad (13.60)$$

при этом в соответствии с разд. 13.12 верховой фрагмент, где движение резкоизменяющееся, заменяем расчетным массивом с вертикальной напорной гранью, расположенной на расстоянии ϵh_1 от точки В. Размерами участка резкоизменяющегося движения вблизи каменного банкета

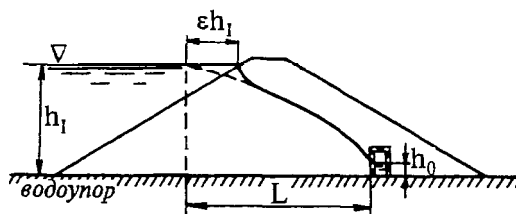


Рис. 13.24. Расчетная схема фильтрации через грунтовую плотину с водосборной галереей

обычно пренебрегают и помещают расчетное вертикальное живое сечение, в котором поток имеет глубину нижнего бьефа h_2 , у основания верхового откоса банкета (в точке Е). Расстояние L определяется из геометрических соображений.

Если в нижний бьеф грунтовой плотины не допускается попадание воды из верхнего бьефа, то в теле плотины устраивают либо галерею с водопроницаемыми стенками, либо дренажную трубу (рис. 13.24).

Расчет фильтрационного потока в этом случае выполняется так же, как и при устройстве банкета из каменной наброски; глубина h_2 принимается, как правило, равной нулю.

Очевидно, вследствие уменьшения длины фильтрационного потока в результате устройства банкета или галереи фильтрационные потери из верхнего бьефа увеличиваются.

13.15. Фильтрация через неоднородные земляные плотины на водонепроницаемом основании

Для уменьшения потерь воды из водохранилища в качестве наиболее распространенного инженерного решения используют устройство ядра плотины или экрана.

1. Плотина с ядром

Для того, чтобы уменьшить фильтрационный расход из верхнего бьефа через грунтовую плотину, не увеличивая ее размеров в плане, в теле плотины устраивают ядро (рис. 13.25,а) — вертикальный слой по всей высоте плотины

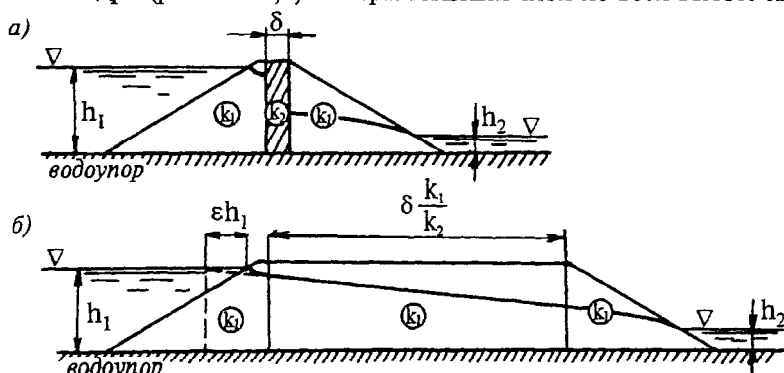


Рис. 13.25. Схема расчета фильтрации через грунтовую плотину с ядром: а — реальный массив; б — виртуальный массив

до водоупора, выполненный из грунта с коэффициентом фильтрации k_2 , много меньшим, чем коэффициент фильтрации грунта тела плотины k_1 . Для фильтрационного расчета такой плотины ее в соответствии со вторым виртуальным способом заменяют на однородную плотину с большей шириной по гребню, заменив массив ядра плотины шириной δ на виртуальный массив с коэффициентом фильтрации k_1 , шириной $\delta \frac{k_1}{k_2}$.

Рассчитав виртуальную однородную плотину (рис. 13.25,б), далее приписывают реальной плотине (рис. 13.25,а) полученный фильтрационный расход q , а кривую депрессии полагают одинаковой в реальной и виртуальной плотинах вне ядра или его эквивалента, т.е. вблизи верхового и низового откосов плотины. Внутри ядра кривая депрессии рассчитывается отдельно (см. фильтрацию через прямоугольный массив, разд. 13.6).

2. Плотина с экраном

Экраном называют слой маловодопроницаемого грунта, уложенный на верховом откосе плотины и служащий для уменьшения фильтрационного расхода воды из верхнего бьефа и для снижения отметок кривой

депрессии в теле плотины (рис.13.26). Расчет плотины с экраном выполняется с использованием второго виртуального способа, при этом реальный неоднородный массив плотины заменяется на виртуальный однородный массив, имеющий такие же коэффициенты откосов и такой же расход

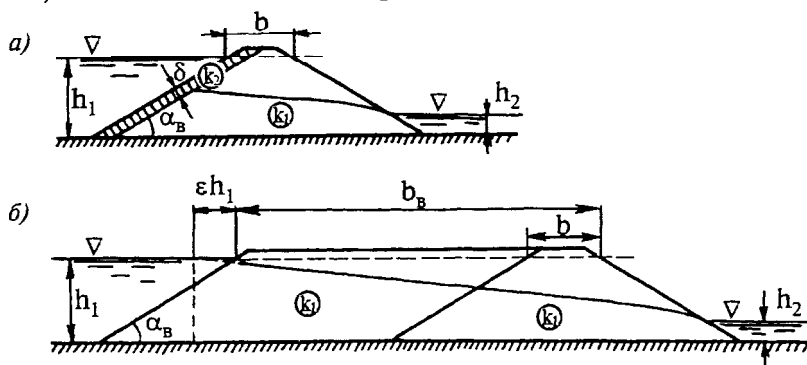


Рис. 13.26. Схема расчета фильтрации через грунтовую плотину с экраном: а — реальный массив; б — виртуальный массив

фильтрующей сквозь него воды, что и реальный. Для этого ширина виртуального массива на уровне верхнего бьефа принимается равной

$$b_B = b + \delta \frac{k_1}{k_2} \sin \alpha_B, \quad (13.61)$$

где δ — толщина экрана; α_B — угол наклона верхового откоса; b — ширина плотины на уровне верхнего бьефа.

Расчет однородного массива выполняется согласно разд. 13.12. Кривая депрессии переносится в реальный массив только в той его части, где коэффициент фильтрации равен k_1 , т.е. за исключением экрана. На части поверхности экрана, отделяющей его от тела плотины и расположенной выше кривой депрессии, происходят высачивание воды и ее фильтрация под действием силы тяжести до сформировавшегося (насыщенного) потока грунтовой воды, ограниченного сверху расчетной кривой депрессии; выше кривой депрессии грунт водой не насыщен.

13.16. Дифференциальные уравнения резкоизменяющегося движения грунтовых вод

В случае, если модель плавноизменяющегося движения грунтовых вод (характеризуемая плоскими и вертикальными живыми сечениями) не подходит для описания фильтрационного потока, приходится использовать более общую двух- или трехмерную модель фильтрации. Тогда скорость фильтрации u рассматривается как вектор $u = (u_x, u_y, u_z)$, а закон Дарси в рассматриваемом случае изотропного грунта имеет вид

$$u = -k \text{ grad } H, \quad (13.62)$$

или в матричной форме

$$(u_x, u_y, u_z) = -k \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial z} \right). \quad (13.62a)$$

Эта система трех уравнений содержит четыре неизвестные величины u_x, u_y, u_z и H , и ее следует дополнить уравнением, выражающим закон сохранения массы для несжимаемой жидкости (разд. 4.2):

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$$

или

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (13.63)$$

Подставив $\mathbf{u}$ из уравнений (13.62) в (13.63), получим (для однородного грунта при $k = \text{const}$)

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0 \quad \text{или} \quad \Delta H = 0, \quad (13.64)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

Следовательно, гидродинамический напор H в фильтрационном потоке должен удовлетворять уравнению Лапласа (или, другими словами, $H = H(x, y, z)$ является гармонической функцией). Отметим, что в поле силы тяжести напор H по определению составит

$$H = z + \frac{p}{\rho g}, \quad (13.65)$$

следовательно, гидродинамическое давление $p(x, y, z)$ также является гармонической функцией координат. Чтобы подчеркнуть зависимость гидродинамического напора H от координат, его называют *напорной функцией*.

Введем функцию:

$$\varphi(x, y, z) = -kH(x, y, z); \quad (13.66)$$

при этом (13.62) можно представить в виде

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} \varphi \quad \text{или} \quad (u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right). \quad (13.67)$$

Согласно определению (см. разд. 4.10) функция $\varphi(x, y, z)$ называется *потенциалом скорости фильтрации* $\mathbf{u}$. Таким образом, вследствие того, что скорость ламинарной фильтрации подчиняется закону Дарси (13.62), поле скорости фильтрации всегда является потенциальным, т.е. всегда существует такая функция $\varphi(x, y, z)$, что справедливы равенства (13.67). Функция $\varphi(x, y, z)$, как и $H(x, y, z)$, является гармонической.

Важно отметить, что благодаря возможности получить полное описание фильтрационного потока (т.е. поле скорости $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ и поле напоров H), решая вместо системы четырех уравнений (13.62) и (13.63) одно уравнение (13.64), расчет движения грунтовых вод становится значительно более простой задачей по сравнению с расчетом двух- или трехмерного потока вязкой жидкости.

Отметим, что поверхности равного потенциала $\varphi(x, y, z) = \text{const}$, которые согласно (13.66) являются и поверхностями равного напора $H(x, y, z) = \text{const}$, по определению градиента ортогональны вектору скорости фильтрации $\mathbf{u}$, и, следовательно, это живые сечения фильтрационного потока.

13.17. Плоская задача о фильтрации воды в однородном грунте. Функция тока, гидродинамическая сетка

Рассмотрим *плоскую* задачу о движении грунтовых вод, полагая, что все характеристики фильтрационного потока, т.е. u_x , u_y , u_z , H , изменяются только в двух измерениях — в вертикальной координатной плоскости (x , z); частные производные по y от всех переменных, а также проекция скорости $\mathbf{u}$ на ось y в этом случае равны нулю. Перепишем основные равенства, введенные в разд. 13.16, для условий плоской задачи:

уравнение Дарси:

$$\mathbf{u} = -k \text{ grad } H; (u_x, u_z) = -k \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial z} \right); \quad (13.68)$$

уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0; \quad (13.69)$$

определение потенциала скорости:

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad (13.70)$$

уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (13.71)$$

Как было указано в разд. 3.10, при решении плоской задачи всегда существует *функция тока* $\psi(x, z)$:

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial z}; u_z = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (13.72)$$

которая обращает уравнение неразрывности (13.69) в правильное тождество; если движение потенциальное, то функция тока (как и функция потенциала скорости) — гармоническая, т.е.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \text{ или } \Delta \psi = 0. \quad (13.73)$$

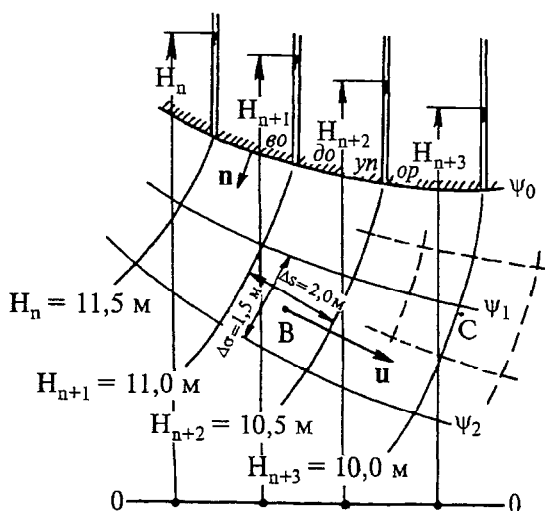


Рис. 13.27. Гидродинамическая сетка фильтрационного потока

Линии $\psi(x, z) = \text{const}$ являются линиями тока.

В условиях плоской задачи линии $\varphi(x, z) = \text{const}$ — это линии равного потенциала (и линии равного напора), которые ортогональны вектору скорости $\mathbf{u}(x, z)$. Вместе с тем, по определению линии тока вектор $\mathbf{u}(x, z)$ направлен по касательной к ней. Следовательно, в каждой точке фильтрационного потока линия тока *ортогональна* к линии равного потенциала (равного напора). Совокупность линий тока и линий равного напора образует *гидродинамическую сетку фильтрационного потока* (рис. 13.27).

Построив гидродинамическую сетку для конкретного потока, можно с ее помощью решать следующие практически важные задачи.

1. Расчет силы давления фильтрационного потока на водонепроницаемую поверхность. Зная значения напора H в каждой точке этой поверхности, можно найти по зависимости (13.65) величину гидродинамического давления p на этой поверхности и вычислить силу давления на нее:

$$F = - \int_A p \, dA \quad (13.74)$$

или ее горизонтальную и вертикальную составляющие (см. гл. 2).

2. Расчет гидродинамического уклона в любой точке потока, например, в точке В:

$$J = |\text{grad } H| = - \frac{H_{n+2} - H_{n+1}}{\Delta s} = - \frac{10,5 - 11,0}{2,0} = 0,25. \quad (13.75)$$

3. Расчет скорости фильтрации в этой же точке (например, при $k = 0,001$ см/с):

$$u \approx kJ = 0,001 \cdot 0,25 = 0,00025 \text{ см/с.}$$

4. Расчет удельного (на единицу длины в направлении, перпендикулярном чертежу) расхода между линиями тока (например, ψ_1 и ψ_2):

$$q_{12} = u \Delta \sigma = 0,00025 \cdot 150 \approx 0,0375 \text{ см}^2/\text{с.} \quad (13.76)$$

Значение коэффициента фильтрации k должно быть задано, а значения Δs и $\Delta \sigma$ должны быть определены по гидродинамической сетке в соответствии с геометрическим масштабом.

Припишем нулевой линии тока ψ_0 , совпадающей с водонепроницаемой поверхностью, нулевое значение: $\psi_0(x, z) = 0$, тогда по свойствам линии тока (см. разд. 3.10)

$$\psi_1 = \psi_0 + q_{01},$$

где q_{01} — удельный расход между линиями тока ψ_0 и ψ_1 ;

$$\psi_2 = \psi_1 + q_{12} = \psi_0 + q_{01} + q_{12};$$

$$\psi_3 = \psi_2 + q_{23} = \psi_0 + q_{01} + q_{12} + q_{23}.$$

Таким образом, постоянное значение функции тока на данной линии тока (другими словами, наименование линии тока) равно удельному фильтрационному расходу между данной и нулевой линиями тока.

Если точка, в которой следует рассчитать скорость фильтрации (например, С), не лежит в середине прямоугольника, образованного уже построенной гидродинамической сеткой, то такой прямоугольник (с расчетной точкой внутри) следует построить, выбрав подходящие линии тока и линии равного напора (напор и наименование линии тока для вновь построенных линиях находят методом интерполяции).

Отметим дополнительно, что, как следует из выражений (13.75) и (13.76), гидродинамический уклон и скорость фильтрации больше в тех местах, где линии равного напора ближе друг к другу (гидродинамическая сетка “гуще”).

13.18. Граничные условия для решения уравнения Лапласа и построения гидродинамической сетки

Рассмотрим постановку граничных условий для области фильтрации на примере наиболее важной в гидротехнических приложениях задачи о напорной фильтрации под бетонной плотиной (рис. 13.28).

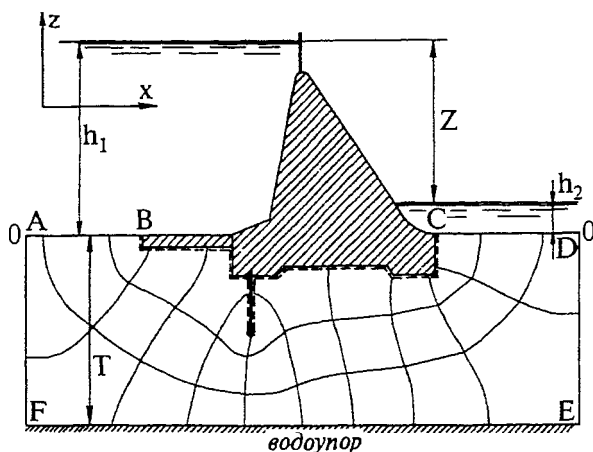


Рис. 13.28. Типичная гидродинамическая сетка для расчета подземного контура бетонной плотины

Как правило, горизонтальных размеров фундамента плотины, называемого *флютбетом*, недостаточно для того, чтобы обеспечить приемлемые потери воды из водохранилища, а также предотвратить разрушение грунта под действием фильтрационных сил, и поэтому в сооружение включают дополнительные элементы в виде горизонтального водонепроницаемого слоя в верхнем бьефе (*понура*) и вертикальных водонепроницаемых шпунтовых стенок (*шпунт*). Эти

элементы вместе с флютбетом формируют *подземный контур бетонной плотины* (на рис. 13.28 подземный контур показан штриховой линией).

Пусть гравитационная бетонная плотина расположена на водопроницаемом грунте, а горизонтальный водоупор расположен на глубине T под поверхностью земли.

Для того, чтобы рассчитать гидродинамический напор H и скорость фильтрации u в каждой точке фильтрационного потока, следует решить уравнение Лапласа (13.71). Запишем граничные условия для этого уравнения на примере области, представленной на рис. 13.28.

1. AB — на дне нижнего бьефа гидродинамический напор постоянен и равен h_1 (AB — линия равного напора и живое сечение фильтрационного потока):

$$H = h_1 \text{ (условие Дирихле).} \quad (13.77)$$

2. BC — элементы подземного контура водонепроницаемы, следовательно, BC — линия тока. Нормальная составляющая скорости фильтрации на этой границе $u_n = 0$, и согласно закону Дарси

$$\frac{\partial H}{\partial n} = 0 \text{ (условие Неймана).} \quad (13.78)$$

3. CD — на дне нижнего бьефа напор постоянен (CD — линия равного напора и живое сечение потока):

$$H = h_2 \text{ (условие Дирихле).} \quad (13.79)$$

4. EF — водоупор является линией тока, следовательно, на нем

$$\frac{\partial H}{\partial n} = 0 \text{ (условие Неймана).} \quad (13.80)$$

5. Границы AF и DE предполагаем достаточно удаленными от основания плотин, чтобы неточность задания условия на них практически не влияла на решение уравнения вблизи подземного контура; как правило, эти границы можно считать линиями тока, если они удалены от плотины на расстояние более (2—3)Т.

В этой области можно решать также и уравнение Лапласа (13.73), в котором искомой является функция тока ψ . Граничные условия для функции тока имеют следующий вид:

1. АВ — живое сечение, на нем $u_x = 0$, следовательно,

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \text{ или } \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \text{ (условие Неймана).} \quad (13.81)$$

2. ВС — линия тока, по определению линии тока

$$\psi(x, z) = \text{const}_1 \text{ (условие Дирихле).} \quad (13.82)$$

3. CD — живое сечение, на нем $u_x = 0$, следовательно,

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \text{ или } \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \text{ (условие Неймана).} \quad (13.83)$$

4. EF — линия тока, на которой

$$\psi(x, z) = \text{const}_2 \text{ (условие Дирихле).} \quad (13.84)$$

Согласно свойству функции тока, если задать $\text{const}_1 = 0$, то в (13.84) const_2 равна удельному (на единицу ширины) фильтрационному расходу под плотиной q .

5. AF и DE — линии тока, при отмеченных выше условиях на них

$$\psi(x, z) = \text{const}_2.$$

Таким образом, как для напорной функции $H(x, z)$, так и для функции тока $\psi(x, z)$ формулируется смешанная краевая задача для уравнения Лапласа. Решение ее позволяет определить следующие *свойства гидродинамической сетки*.

1. В геометрически подобных областях фильтрации гидродинамические сетки подобны.

2. Начертание гидродинамической сетки не зависит от численных значений h_1 и h_2 или их разности — напора на гидротехническом сооружении $Z = h_1 - h_2$. Изменение численного значения этих величин приводит лишь к изменению численных значений напора или функции тока, приписываемых той или иной линии равного напора или линии тока, образующей гидродинамическую сетку.

Кроме того, поскольку коэффициент фильтрации не входит в формулировку краевой задачи, определяющей гидродинамическую сетку, то следовательно, начертание сетки не зависит от коэффициента фильтрации. Основываясь на законе Дарси, можно доказать, что удельный фильтрационный расход q для заданной области фильтрации пропорционален коэффициенту фильтрации k и напору на сооружении Z .

С учетом изложенного, для удобства расчетов вместо действительной схемы подземного контура рассматривают так называемую *приведенную схему*, которая от действительной отличается тем, что в ней принимают $h_1 = 1$, $h_2 = 0$ (при этом $Z = 1$) и $k = 1$ (линейная единица измерения

одинакова у всех именованных величин). Решив уравнение Лапласа для заданной области с граничными условиями, отвечающими приведенной схеме, построим гидродинамическую сетку для приведенного напора $H_r(x, z)$ и приведенной функции тока $\psi_r(x, z)$, а также найдем *приведенный* фильтрационный расход под сооружением q_r . При этом действительный напор в любой точке области и действительный расход q вычисляем согласно зависимостям

$$H(x, z) = h_2 + ZH_r(x, z); \quad (13.85)$$

$$q = kZq_r. \quad (13.86)$$

Пример использования приведенной схемы показан в разд. 13.19.

13.19. Метод решения фильтрационных задач, основанный на электрогидродинамической аналогии (ЭГДА)

Электрогидродинамическая аналогия заключается в том, что ламинарное течение воды в пористой среде и постоянный электрический ток в проводящей среде подчиняются одним и тем же математическим зависимостям:

Фильтрация воды	Электрический ток
Уравнение движения (закон Дарси) $\mathbf{u} = -k \text{ grad } H,$ $\mathbf{u}$ — скорость фильтрации; H — гидродинамический напор; k — коэффициент фильтрации.	Уравнение электрического тока (закон Ома) $\mathbf{i} = -c \text{ grad } V,$ $\mathbf{i}$ — плотность тока; V — электрический потенциал; c — коэффициент электропроводности (удельная проводимость).
Уравнение неразрывности фильтрационного потока $\text{div } \mathbf{u} = 0.$	Уравнение непрерывности электрического тока $\text{div } \mathbf{i} = 0.$
Уравнение Лапласа для напора $\Delta H = 0.$	Уравнение Лапласа для электрического потенциала $\Delta V = 0.$
Граничные условия: — на водонепроницаемой поверхности $\frac{\partial H}{\partial n} = 0.$ — на поверхности равного напора $H(x, y, z) = \text{const.}$	Граничные условия: — на электроизоляционной поверхности $\frac{\partial V}{\partial n} = 0.$ — на поверхности равного электрического потенциала $V(x, y, z) = \text{const.}$

Тождественность дифференциальных уравнений позволяет получить поле электрического потенциала V , подобное полю гидродинамического напора H , при следующих условиях:

1) внешние границы области электрического тока геометрически подобны границам области фильтрации;

2) граничные условия на соответствующих границах указанных областей идентичны.

В дальнейшем будем рассматривать метод ЭГДА применительно к решению плоской задачи, хотя с его помощью возможно решение и пространственных задач.

На основании электрогидродинамической аналогии введем понятие приведенного электрического потенциала V_r и приведенной схемы области электрического тока. Совокупность линий равного приведенного потенциала будем рассматривать как линии равного приведенного напора и построим гидродинамическую сетку для действительной схемы с помощью зависимости (13.85).

Практически задача построения гидродинамической сетки на основе метода ЭГДА решается следующим образом. Пусть необходимо рассчитать фильтрацию для подземного контура плотины, представленного на рис. 13.28.

Из электропроводящего материала (специальной бумаги, металлической фольги и т.п.), обладающего достаточной однородностью, вырезают модель, геометрически подобную области фильтрации. К границам АВ и CD прикрепляют шины, на которые подают неизменные по времени электрические потенциалы V_1 и V_2 . В модели возникает электрический ток. С помощью мостовой схемы и делителя напряжения (рис. 13.29) определяют линии равного электрического потенциала.

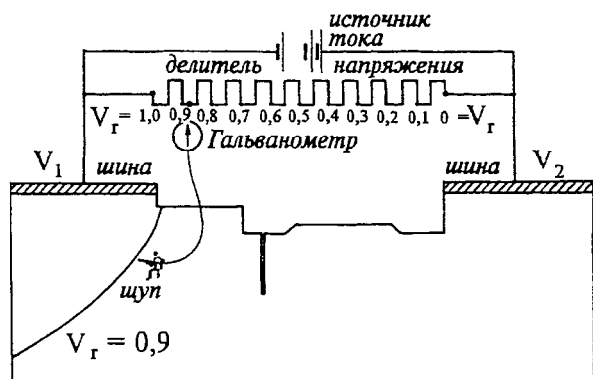


Рис 13.29 Схема прибора ЭГДА

Построенным линиям равного приведенного потенциала V_r с помощью зависимости (13.85) можно приписать действительные значения напора H . Построение линий тока, как правило, выполняют графически (от руки), добиваясь, чтобы гидродинамическая сетка была ортогональной и квадратичной.

13.20. Задачи расчета подземного контура плотины, решаемые с помощью гидродинамической сетки

Цель расчета фильтрации под плотиной — решение следующих задач.

1. Построение эпюры противодавления, с помощью которой вычисляется сила, действующая на плотину со стороны фильтрационного потока. Величину и линию действия этой силы необходимо знать для расчета устойчивости плотины.

2. Определение градиента напора и скорости фильтрации в любой точке фильтрационного потока. При значениях градиентов напора, больших допустимого для данного грунта, возможно ухудшение прочностных качеств грунта и даже его разрушение вследствие, например, вымывания мелких фракций или суффозии. Такое явление особенно опасно вблизи дна нижнего

бьефа, где высока концентрация напряжений от нагрузки на грунт, создаваемой плотиной. Поэтому при расчете подземного контура сооружений обязательно определяют значение максимального выходного градиента $J_{\max}$ (для сравнения его с допустимым для данного грунта значением).

3. Вычисление фильтрационного расхода для определения потерь напора воды из водохранилища.

Приведем основные приемы решения этих задач.

1. *Эпюра противодействия.* В каждой точке основания плотины (рис. 13.30), к которой подходит линия равного напора, строим вертикальную линию и на ней от плоскости сравнения 0—0 откладываем численное

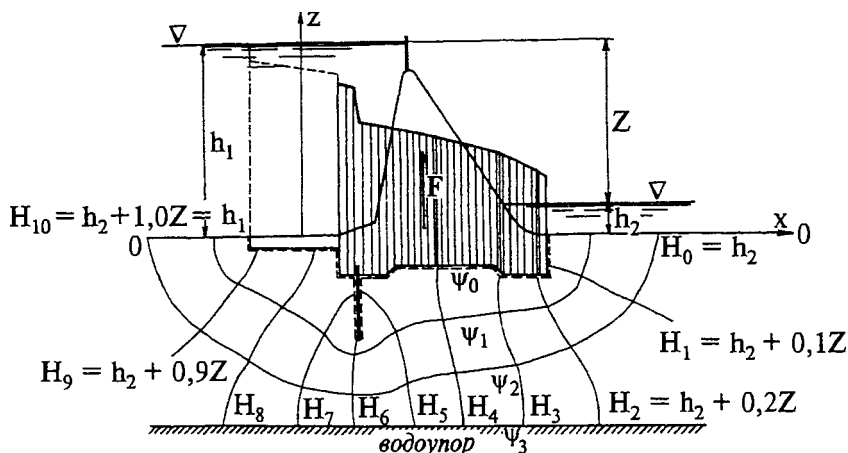


Рис. 13.30. Построение эпюры давления на основание бетонной плотины (пунктиром показана эпюра давления на понур)

значение напора, соответствующее этой линии (в том же масштабе, в котором построены глубины воды h_1 и h_2). Соединив концы вертикальных отрезков ломаной линией, получим *эпюру давления*, ограниченную сверху построенной линией, снизу — водонепроницаемой поверхностью флютбета, а с боковых сторон — вертикалями. *Сила противодействия* F (на единицу длины плотины в направлении y , перпендикулярном плоскости (x, z)) равна площади эпюры, умноженной на удельный вес воды. Она направлена вверх и проходит через центр тяжести эпюры давления.

2. *Градиент напора и скорость фильтрации* вычисляются в соответствии с приемами, указанными в п. 13.17.

Предельно допустимые значения выходного градиента напора для некоторых грунтов:

Грунт	$(J_{\text{вых}})_{\text{пред}}$
глина	1,2
суглинок	0,65
песок крупнозернистый	0,45
песок среднезернистый	0,40
песок мелкозернистый	0,30

3. *Удельный фильтрационный расход* q . Выбирают две линии равного напора, между которыми движение наиболее близко к плавноизменяю-

щемся (на рис. 13.30 это линии H_4 и H_3 или H_3 и H_2). Для каждого из трех криволинейных прямоугольников, образованных линиями тока и линиями равного напора, определяют элементарные фильтрационные расходы, как указано в разд. 13.17: q_{01} , q_{12} , q_{23} . Удельный фильтрационный расход находят, суммируя вычисленные расходы:

$$Q = q_{01} + q_{12} + q_{23}.$$

13.21. Метод расчета подземного контура, основанный на использовании коэффициентов потерь напора (метод коэффициентов сопротивления)

Рассмотренные в разд. 13.20 задачи расчета подземного контура можно решить, используя предложенный Р.Р. Чугаевым метод коэффициентов сопротивления. Согласно этому методу предполагается, что на элементах подземного контура гидротехнического сооружения (пнуре, шпунте, флютбете и т.п.) имеют место потери напора, каждую из которых можно представить как часть полного напора на сооружении $Z = h_1 - h_2$. Коэффициенты сопротивления ζ_j , определяющие, какую часть от Z составляют потери напора, связанные с тем или иным j -м элементом, вычисляются в зависимости от геометрических размеров элемента. При этом предполагается, что на значения коэффициента сопротивления каждого элемента не влияет, какие элементы расположены рядом с ним (выше и ниже по течению). Сумма всех коэффициентов сопротивления для заданного подземного контура связывает удельный расход под сооружением q и напор на сооружении Z :

$$q = \frac{k \cdot Z}{\sum_j \zeta_j}, \quad (13.87)$$

т.е. $\sum_j \zeta_j$ является величиной, обратной величине приведенного расхода

q_r (см. (13.86)).

Для реализации метода коэффициентов сопротивления необходимо:

а) составить перечень типовых элементов подземного контура;

б) предложить зависимости для вычисления коэффициентов сопротивления.

На рис. 13.31 представлен типичный подземный контур гидротехнического сооружения, элементами которого являются:

- входной элемент с уступом;
- шпунт, погруженный на глубину s , с уступом высотой a ;
- горизонтальный элемент;
- выходной элемент.

Отметим, что если входной

элемент и шпунт не сочетаются с уступом, то принимают высоту уступа $a = 0$ (фиктивный уступ нулевой высоты), или если при уступе высотой a нет шпунта, то принимаем $s = 0$.

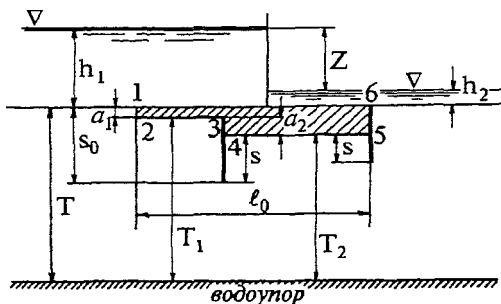


Рис. 13.31. Расчетная схема метода коэффициентов сопротивления

Изучение влияния заглубления водоупора T на значения коэффициентов сопротивления показало необходимость введения понятия *активной зоны фильтрации*. Предположим, что необходимо рассчитать эпюру противодавления. Расположим воображаемый водоупор вблизи элементов подземного контура и построим при этом соответствующую эпюру противодавления. Если увеличивать заглубление воображаемого водоупора T , то эпюра в результате этого будет вначале сильно деформироваться, но, начиная с какого-то значения T , дальнейшее увеличение заглубления водоупора не будет практически влиять на эпюру противодавления. Это предельное заглубление водоупора называется *глубиной активной зоны фильтрации по напору* и обозначается $T'_{ак}$. Аналогично при опускании водоупора максимальный выходной градиент $(J_{вых})_{max}$ будет вначале заметно изменяться, а, начиная с некоторого положения, дальнейшее увеличение заглубления будет оказывать пренебрежимо малое влияние на $(J_{вых})_{max}$. Это предельное заглубление называется *глубиной активной зоны фильтрации по выходному градиенту* и обозначается $T''_{ак}$. Можно так же определить $T'''_{ак}$ — глубину активной зоны фильтрации по удельному расходу q . Если эти значения меньше действительного заглубления водоупора T_d , то именно они (а не T_d) вводятся в качестве расчетного положения водоупора $T_{расч}$, по которому вычисляются коэффициенты сопротивления.

На основе анализа решений Н.Н.Павловского Р.Р.Чугаевым были получены следующие формулы для коэффициентов сопротивления типовых элементов подземного контура.

Обозначим длину проекции подземного контура на горизонтальную плоскость через ℓ_0 , а длину проекции на вертикальную плоскость через s_0 . При этом $T'_{ак}$ определяем по зависимостям:

$$\begin{aligned} \text{при } \frac{\ell_0}{s_0} > 5 & \quad T'_{ак} = 0,5\ell_0; \\ \text{при } 3,4 < \frac{\ell_0}{s_0} \leq 5 & \quad T'_{ак} = 2,5s_0; \\ \text{при } 1,0 < \frac{\ell_0}{s_0} \leq 3,4 & \quad T'_{ак} = 0,8s_0 + 0,5\ell_0; \\ \text{при } 0 < \frac{\ell_0}{s_0} \leq 1,0 & \quad T'_{ак} = s_0 + 0,3\ell_0. \end{aligned}$$

Кроме того, рекомендуется принимать

$$T''_{ак} = 2T'_{ак}; \quad (13.88)$$

$$T'''_{ак} = T_d. \quad (13.89)$$

Расчетное положение водоупора принимается равным минимальному из значений $T_{ак}$ и T_d :

$$T_{расч} = \min(T_{ак}, T_d). \quad (13.90)$$

Для определения численных значений коэффициентов сопротивления рекомендуются следующие зависимости (обозначения см. на рис. 13.31):

коэффициент сопротивления внутреннего шпунта с уступом ($T_1 > T_2$)

$$\zeta_{\text{ш}} = \frac{a}{T_1} + 1,5 \frac{s}{T_2} + \frac{2s}{4T_2 - 3s}; \quad (13.91)$$

коэффициент сопротивления входного и выходного элементов контура

$$\zeta_{\text{вх}} = \zeta_{\text{вых}} = 0,44 + \zeta_{\text{ш}}; \quad (13.92)$$

коэффициенты сопротивления горизонтального элемента (2—3, 4—5) на рис. 13.31)

$$\text{при } \ell \geq 0,5(s_1 + s_2) \quad \zeta_r = \frac{2\ell - (s_1 + s_2)}{2T}, \quad (13.93)$$

$$\text{при } \ell < 0,5(s_1 + s_2) \quad \zeta_r = 0.$$

Отметим, что для решения каждой из трех задач, сформулированных в разд. 13.20, необходимо в общем случае определять для одного и того же заданного подземного контура конкретную величину $T_{\text{расч}}$ и набор коэффициентов сопротивления.

Построение эпюры противодавления. Вычисляем потерю напора на каждом элементе по формуле

$$h_j = Z \frac{\zeta_j}{\sum_j \zeta_j}. \quad (13.94)$$

По этим данным строим пьезометрическую линию и получаем искомое “тело давления”.

Максимальный выходной градиент вычисляем по формуле, полученной из решения С.Н. Нумерова:

$$J_{\text{max}} = \frac{Z}{T_1} \frac{1}{\alpha \sum_j \zeta_j}, \quad (13.95)$$

где

$$\alpha = \sqrt{\sin \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{s}{T_1} - \frac{T_2}{T_1} + 1 \right) \right]}. \quad (13.96)$$

Удельный фильтрационный расход находим по формуле

$$q = k \frac{Z}{\sum_j \zeta_j}. \quad (13.97)$$

При больших значениях T_d величина расхода рассчитывается по последней формуле со значительной погрешностью.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

14.1. Предварительные замечания

В гл. 4 были выведены уравнения, выражающие основные законы механики применительно к модели сплошной среды:

- закон сохранения массы;
- закон изменения количества движения;
- закон изменения момента количества движения;
- закон изменения кинетической энергии;
- закон сохранения энергии.

Эти законы были сформулированы для движущегося объема жидкости $\mathcal{V}$, ограниченного произвольной замкнутой поверхностью A , а затем представлены в форме, позволяющей рассматривать A как зафиксированную в пространстве “контрольную” поверхность, сквозь которую протекает жидкость.

На основе указанных уравнений были получены зависимости — уравнение Бернулли, формула Борда, гидравлическое уравнение неразрывности, уравнение гидравлического прыжка и другие для интегральных характеристик потоков в трубах и каналах, таких, как средняя скорость v , напор H и т.п. Эти зависимости позволяют решать многие практические задачи, часть которых рассмотрена в предыдущих главах. Вместе с тем, многие практически важные задачи требуют, чтобы в процессе решения были найдены не только интегральные, но и локальные (мгновенные местные) значения гидромеханических характеристик. Например, при решении задач о силах, действующих на тело, обтекаемое жидкостью или газом, или о тепло- и массопереносе в движущейся жидкой или газообразной среде необходимо, в частности, иметь возможность определить скорость в любой точке пространства. Для определения локальных значений гидромеханических характеристик необходимо представить законы механики для бесконечно малых объемов жидкости. Другими словами, следует записать их не в интегральной форме, как в предыдущих главах при решении одномерных задач, а в дифференциальной. Для этого обычно интегралы по поверхности A , ограничивающей контрольный объем $\mathcal{V}$, преобразуют в объемные интегралы, а затем, объединяя объемные интегралы в один интеграл и учитывая, что размеры и форма контрольного объема $\mathcal{V}$ произвольны, из равенства нулю интеграла, выражающего тот или иной закон механики, следует, что подинтегральное выражение равно нулю. Приравняв нулю подинтегральное выражение, получают дифференциальное уравнение, выражающее соответствующий закон механики.

14.2. Дифференциальное уравнение, выражающее закон сохранения массы

Уравнение, выражающее закон сохранения массы для контрольного объема жидкости $\mathcal{V}$, имеет вид

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0. \quad (14.1)$$

Используя выражение для субстанциальной производной в форме (3.51), представим (14.1) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_A \rho u_n dA = 0. \quad (14.2)$$

Чтобы получить искомое дифференциальное уравнение, преобразуем поверхностный интеграл в объемный с помощью теоремы Остроградского—Гаусса (3.25), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_V [\rho \operatorname{div} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}) \rho] dV = 0, \quad (14.3)$$

где $\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} = u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z}$ — символическое равенство.

Поскольку объем V ограничен зафиксированной в пространстве (неизменяющейся во времени) поверхностью A , то частную производную по времени можно подвести под знак интеграла. Объединив после этого объемные интегралы, получим

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}) \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} \right] dV = 0. \quad (14.4)$$

Уравнение (14.4) получено для произвольной области V , поэтому подынтегральное выражение должно быть равно нулю во всех точках пространства, занятого жидкостью. Действительно, если в какой-либо точке пространства подынтегральное выражение не равно нулю и, например, положительно, то в ближайшей окрестности этой точки (при условии непрерывности подынтегрального выражения) значения этого выражения также будут положительны. Если же в качестве объема V возьмем эту окрестность, то получим, что интеграл (14.4) больше нуля (не равен нулю), что противоречит равенству (14.4). Следовательно, во всех точках пространства, занятого жидкостью, имеет место равенство

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}) \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \text{ или } \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (14.5)$$

которое и представляет собой *дифференциальное уравнение, выражающее закон сохранения массы* при использовании модели сплошной среды для описания движения жидкости.

Наиболее важен частный случай этого уравнения, когда жидкость несжимаема и ее плотность не зависит ни от времени, ни от пространственных координат ($\rho = \text{const}$):

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (14.6)$$

Уравнение (14.6) называют *дифференциальным уравнением несжимаемости*.

Отметим, что если движение жидкости безвихревое и $\mathbf{u} = \text{grad } \varphi$, то потенциал скорости φ для несжимаемой жидкости должен удовлетворять уравнению Лапласа. В этом легко убедиться, подставив $\mathbf{u} = \text{grad } \varphi$ в (14.6):

$$\text{div } \mathbf{u} = \text{div grad } \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi = 0. \quad (14.7)$$

14.3. Дифференциальные уравнения, выражающие закон изменения количества движения (уравнения движения в напряжениях)

Выражение закона изменения количества движения для контрольного объема $\mathcal{V}$ имеет вид (см. (4.7))

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{u} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} d\mathcal{V} + \int_A \mathbf{p}_n dA. \quad (14.8)$$

Используя векторную форму теоремы Гаусса—Остроградского (3.36), преобразуем поверхностный интеграл в объемный. Учитывая (3.47), подведем субстанциальную производную под знак интеграла и в результате представим (14.8) в виде

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\frac{D\rho \mathbf{u}}{Dt} + \rho \mathbf{u} \text{div} \mathbf{u} - \rho \mathbf{f} - \text{Div} \Pi \right) d\mathcal{V} = 0. \quad (14.9)$$

Вследствие произвольности объема $\mathcal{V}$ следует считать, что подынтегральное выражение равно нулю, т.е.

$$\frac{D\rho \mathbf{u}}{Dt} + \rho \mathbf{u} \text{div} \mathbf{u} = \rho \mathbf{f} + \text{Div} \Pi. \quad (14.10)$$

Это уравнение можно упростить, используя уравнение неразрывности (14.5); для этого преобразуем его левую часть:

$$\frac{D\rho \mathbf{u}}{Dt} + \rho \mathbf{u} \text{div} \mathbf{u} = \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \mathbf{u} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \mathbf{u} \text{div} \mathbf{u} = \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \mathbf{u} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div} \mathbf{u} \right) = \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt}. \quad (14.11)$$

Подставим (14.11) в (14.10) и получим

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{f} + \text{Div} \Pi \quad (14.12)$$

или в проекциях на координатные оси

$$\left. \begin{aligned} \frac{Du_x}{Dt} &= f_x + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right); \\ \frac{Du_y}{Dt} &= f_y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right); \\ \frac{Du_z}{Dt} &= f_z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (14.13)$$

Уравнения (14.13) называются *уравнениями движения в напряжениях* или *уравнениями Коши*. Эти три уравнения содержат три неизвестные проекции скорости и девять неизвестных составляющих тензора напряжений. В разд. 14.5 будет введена связь между составляющими тензора напряжений и характеристиками поля скорости, которая позволит сократить количество неизвестных.

14.4. Дифференциальные уравнения, выражающие закон изменения момента количества движения

Уравнение, выражающее закон изменения момента количества движения для контрольного объема, имеет вид (см. (4.10))

$$\frac{D}{Dt} \int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) \rho dV = \int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{f}) \rho dV + \int_A (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_n) dA. \quad (14.14)$$

В соответствии с (3.47) преобразуем левую часть (14.14):

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) \rho dV &= \int_V \left\{ \frac{D}{Dt} [(\mathbf{r} \times \mathbf{u}) \rho] + (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) \rho \operatorname{div} \mathbf{u} \right\} dV = \\ &= \int_V \left\{ \left(\frac{D\mathbf{r}}{Dt} \times \rho \mathbf{u} \right) + \left(\mathbf{r} \times \frac{D\rho \mathbf{u}}{Dt} \right) + (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) \rho \operatorname{div} \mathbf{u} \right\} dV. \end{aligned} \quad (14.15)$$

По определению субстанциальной производной (3.56)

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{r}}{Dt} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{r} = 0 + u_x \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \\ &= u_x (1, 0, 0) + u_y (0, 1, 0) + u_z (0, 0, 1) = \\ &= (u_x, u_y, u_z) = \mathbf{u}, \end{aligned}$$

при этом

$$\frac{D\mathbf{r}}{Dt} \times \rho \mathbf{u} = (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) \rho = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{D}{Dt} \int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) \rho dV = \int_V \left[\left(\mathbf{r} \times \frac{D\rho \mathbf{u}}{Dt} \right) + (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) \rho \operatorname{div} \mathbf{u} \right] dV. \quad (14.16)$$

Чтобы преобразовать поверхностный интеграл

$$\int_A (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_n) dA = \int_A (\mathbf{r} \times \mathbf{n} \Pi) dA \quad (14.17)$$

в объемный, приведем его к виду, соответствующему формулировке теоремы Остроградского—Гаусса. Для сокращения выкладок вместо системы координат (x, y, z) используем обозначения (x_1, x_2, x_3) . Это позволяет ввести сокращенную форму записи сумм; одночленные выражения, в которых целочисленный индекс повторяется дважды, представляют собой сумму по всем возможным значениям индекса, например:

$$n_1 p_{13} = \sum_{i=1}^3 n_i p_{i3} = n_1 p_{13} + n_2 p_{23} + n_3 p_{33}.$$

Используя эту форму записи, преобразуем подынтегральное выражение в правой части (14.17):

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \Pi) &= (x_1, x_2, x_3) \times (n_1, n_2, n_3) \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3) \times (n_1 p_{11}, n_1 p_{12}, n_1 p_{13}) = \\ &= \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ n_1 p_{12} & n_1 p_{13} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ n_1 p_{13} & n_1 p_{11} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ n_1 p_{11} & n_1 p_{12} \end{vmatrix} \right) = \\ &= (x_2 n_1 p_{13} - x_3 n_1 p_{12}, x_3 n_1 p_{11} - x_1 n_1 p_{13}, x_1 n_1 p_{12} - x_2 n_1 p_{11}). \end{aligned}$$

Непосредственными вычислениями можно проверить, что такой же вектор получится из выражения

$$(n_1, n_2, n_3) \begin{pmatrix} x_2 p_{13} - x_3 p_{12} & x_3 p_{11} - x_1 p_{13} & x_1 p_{12} - x_2 p_{11} \\ x_2 p_{23} - x_3 p_{22} & x_3 p_{21} - x_1 p_{23} & x_1 p_{22} - x_2 p_{21} \\ x_2 p_{33} - x_3 p_{32} & x_3 p_{31} - x_1 p_{33} & x_1 p_{32} - x_2 p_{31} \end{pmatrix}.$$

Обозначив последнюю матрицу через Π_r , полученный результат представим в виде

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{n}\Pi) = \mathbf{n}\Pi_r. \quad (14.18)$$

При этом согласно теореме Остроградского—Гаусса (3.36) имеем

$$\int_A (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \Pi dA = \int_A \mathbf{n}\Pi_r dA = \int_V \text{Div } \Pi_r dV. \quad (14.19)$$

Вычисляя $\text{Div } \Pi_r$ в соответствии с определением (3.33), получим

$$\begin{aligned} \text{Div } \Pi_r = & \left(x_2 \frac{\partial p_{13}}{\partial x_i} - x_3 \frac{\partial p_{12}}{\partial x_i} + p_{23} - p_{32}, x_3 \frac{\partial p_{11}}{\partial x_i} - x_1 \frac{\partial p_{13}}{\partial x_i} + \right. \\ & \left. + p_{31} - p_{13}, x_1 \frac{\partial p_{12}}{\partial x_i} - x_2 \frac{\partial p_{11}}{\partial x_i} + p_{12} - p_{21} \right) = \\ = & \mathbf{r} \times \text{Div } \Pi + (p_{23} - p_{32}, p_{31} - p_{13}, p_{12} - p_{21}). \end{aligned} \quad (14.20)$$

Подставляя (14.20) в (14.19), а затем (14.10) и (14.19) в (14.14), получим

$$\int_V \left\{ \mathbf{r} \times \left[\left(\frac{D\mathbf{p}}{Dt} + \rho \mathbf{u} \text{div} \mathbf{u} - \rho \mathbf{f} - \text{Div } \Pi \right) + (p_{23} - p_{32}, p_{31} - p_{13}, p_{12} - p_{21}) \right] \right\} dV = 0. \quad (14.21)$$

Выражение в круглых скобках равно нулю согласно закону изменения количества движения (14.10), а вектор в фигурных скобках равен нулю вследствие произвольности объема V . В результате получим

$$p_{12} = p_{21}, p_{13} = p_{31}, p_{23} = p_{32}. \quad (14.22)$$

Проведенные преобразования показывают, что три равенства, выражающие правило *попарного равенства касательных напряжений*, эквивалентны векторному уравнению, выражающему закон изменения момента количества движения, при условии выполнения закона изменения количества движения.

14.5. Обобщенный закон Ньютона для вязких напряжений

В разделе 1.8 отмечено, что *вязкость* жидкости проявляется при сдвиговом, слоистом равномерном движении (см. рис. 1.8) следующим образом: между слоями жидкости возникают касательные напряжения, пропорциональные производной от продольной скорости по координате, направленной поперек потока:

$$p_{zx}^B = \eta \frac{\partial u_x}{\partial z}. \quad (14.23)$$

Характерной особенностью вязких напряжений является то, что они не зависят от давления p , а зависят от изменчивости в пространстве поля скорости жидкости, которая в общем случае характеризуется тензором $\text{Grad } \mathbf{u}$.

Обобщим зависимость (14.23) на случай, когда все три составляющие скорости отличны от нуля.

В качестве первой простейшей рабочей гипотезы предположим, что тензор вязких напряжений Π^s пропорционален тензору $\text{Grad } \mathbf{u}$:

$$\Pi^s = \begin{pmatrix} p_{xx}^s & p_{xy}^s & p_{xz}^s \\ p_{yx}^s & p_{yy}^s & p_{yz}^s \\ \boxed{p_{zx}^s} & p_{zy}^s & p_{zz}^s \end{pmatrix} = \eta \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \boxed{\frac{\partial u_x}{\partial z}} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (14.24)$$

Согласно этой гипотезе зависимость вязких напряжений от производной скорости при сдвиговом течении (14.23) оказывается выполненной (элементы выделены прямоугольниками). Вместе с тем, вследствие симметричности тензора напряжений (см. (14.22)) $p_{xz} = p_{zx}$, но соглас-

но (14.24) $p_{xz}^s = \eta \frac{\partial u_z}{\partial x}$, а при сдвиговом течении $\frac{\partial u_z}{\partial x} = 0$. Следовательно, гипотеза (14.24) не может рассматриваться как обобщение зависимости (14.23). В качестве следующей (второй) гипотезы можно предположить, что симметричный тензор Π^s пропорционален симметричному тензору, характеризующему изменчивость в пространстве поля скорости. Таковым, в частности, является тензор скорости деформации

$\dot{S} = \frac{1}{2}(\text{Grad } \mathbf{u} + \text{Grad}^* \mathbf{u})$. При этом обобщающая (14.23) зависимость приобретает вид

$$\begin{pmatrix} p_{xx}^s & p_{xy}^s & p_{xz}^s \\ p_{yx}^s & p_{yy}^s & p_{yz}^s \\ p_{zx}^s & p_{zy}^s & p_{zz}^s \end{pmatrix} = 2\eta \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (14.25)$$

Согласно этой гипотезе выполняются как зависимость (14.23), так и условие симметричности тензора напряжений. Вместе с тем, как было отмечено в разд. 1.8, вязкие напряжения не зависят от гидродинамического давления $p = -\frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz})$. Это означает, что на поле вязких напряжений можно наложить произвольное поле гидромеханического давления p , которое не изменит значения вязких напряжений. Поэтому полные нормальные напряжения в жидкости (не только обусловленные

вязкостью) должны представлять собой сумму вязких нормальных напряжений и давления:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= p_{xx}^B - p \\ p_{yy} &= p_{yy}^B - p \\ p_{zz} &= p_{zz}^B - p \end{aligned} \right\} \quad (14.26)$$

Складывая эти равенства, получим

$$p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = p_{xx}^B + p_{yy}^B + p_{zz}^B - 3p. \quad (14.27)$$

Принимая во внимание, что по определению гидродинамическое давление $p = -\frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz})$, из (14.27) найдем, что сумма диагональных элементов тензора вязких напряжений Π^B равна нулю:

$$p_{xx}^B + p_{yy}^B + p_{zz}^B = 0. \quad (14.28)$$

Тогда согласно тензорному равенству (14.25) следует потребовать, чтобы сумма диагональных элементов в правой части этого равенства также была равна нулю.

Для несжимаемой жидкости это выполняется само собой согласно уравнению несжимаемости:

$$\text{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Для сжимаемой жидкости равенство нулю суммы диагональных элементов тензора $\dot{\mathbf{S}}$ обеспечивается введением в каждый из них слагаемого $\left(-\frac{1}{3}\text{div} \mathbf{u}\right)$. В результате получаем

$$\begin{pmatrix} p_{xx}^B & p_{xy}^B & p_{xz}^B \\ p_{yx}^B & p_{yy}^B & p_{yz}^B \\ p_{zx}^B & p_{zy}^B & p_{zz}^B \end{pmatrix} = 2\eta \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{1}{3}\text{div} \mathbf{u} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{1}{3}\text{div} \mathbf{u} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{1}{3}\text{div} \mathbf{u} \end{pmatrix} \quad (14.29)$$

или

$$\Pi^B = 2\eta \dot{\mathbf{S}} - \frac{2\eta}{3} \text{div} \mathbf{u} \cdot \mathbf{E}, \quad (14.29a)$$

где $\mathbf{E}$ — единичный тензор,

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (14.30)$$

Связь между полными напряжениями в жидкости, определяемыми тензором Π , и вязкими напряжениями, определяемыми тензором Π^B , с учетом (14.26) представим в виде

$$\Pi = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{xx}^B - p & p_{xy}^B & p_{xz}^B \\ p_{yx}^B & p_{yy}^B - p & p_{yz}^B \\ p_{zx}^B & p_{zy}^B & p_{zz}^B - p \end{pmatrix} = \Pi^B - pE. \quad (14.31)$$

Подставляя из (14.29) Π^B в (14.31), получим выражение *обобщенного закона Ньютона для вязких напряжений*:

$$\Pi = 2\eta \dot{S} - \left(p + \frac{2\eta}{3} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) E. \quad (14.32)$$

Для несжимаемой жидкости выражение (14.32) упрощается с помощью уравнения $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Преобразуем уравнение движения жидкости в напряжениях, используя обобщенный закон Ньютона.

14.6. Уравнения движения вязкой сжимаемой жидкости (уравнения Навье—Стокса)

Подставляя (14.32) в уравнение движения в напряжениях (14.12), получим

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{f} + \operatorname{Div} \left(2\eta \dot{S} - \left(p + \frac{2\eta}{3} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) E \right). \quad (14.33)$$

Рассмотрим проекцию вектора $\operatorname{Div} \left(2\eta \dot{S} - \left(p + \frac{2\eta}{3} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) E \right)$ на ось x :

$$\begin{aligned} \operatorname{Div}_x \left(2\eta \dot{S} - \left(p + \frac{2\eta}{3} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) E \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(2\eta \frac{\partial u_x}{\partial x} - \left(p + \frac{2\eta}{3} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\eta \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left[2\eta \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2\eta}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{div} \mathbf{u}) + \eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\ &+ \eta \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{div} \mathbf{u}) + \eta \Delta u_x. \end{aligned}$$

Вычислив аналогичные выражения для двух других проекций, подставим их в (14.33) и получим искомые дифференциальные уравнения движения вязкой сжимаемой жидкости, или уравнения Навье—Стокса:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Du_x}{Dt} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{u} + \nu \Delta u_x; \\ \frac{Du_y}{Dt} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \mathbf{u} + \nu \Delta u_y; \\ \frac{Du_z}{Dt} &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \mathbf{u} + \nu \Delta u_z. \end{aligned} \right\} \quad (14.34)$$

Эту систему уравнений можно представить в виде одного векторного уравнения:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\nu}{3} \text{grad div } \mathbf{u} + \nu \Delta \mathbf{u}. \quad (14.34a)$$

Три уравнения (14.34) и уравнение (14.5) образуют систему четырех уравнений с пятью неизвестными: u_x, u_y, u_z, p и ρ . Такие системы уравнений называются незамкнутыми. Эту систему следует замкнуть, т.е. дополнить пятым уравнением, связывающим те же неизвестные, но не вытекающим из использованных при выводе уравнений (14.34) и (14.9) законов. Таким пятым уравнением может быть, например, изотермическая (1.26) или адиабатическая (1.27) связь между плотностью и давлением.

Плотность несжимаемой жидкости постоянна и не является неизвестной. Система уравнений гидромеханики при этом состоит из четырех уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{u}; \\ \text{div } \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (14.35)$$

которые содержат четыре неизвестных u_x, u_y, u_z и p , т.е. эта система замкнута.

Уравнения (14.35) содержат производные первого порядка по времени и производные второго порядка по координатам. Чтобы найти решение системы, необходимо задать начальные условия (поля скорости и давления в момент t_0):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}(x, y, z, t_0) &= \mathbf{u}_0(x, y, z); \\ p(x, y, z, t_0) &= p_0(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (14.36)$$

где $\mathbf{u}_0(x, y, z)$ и $p_0(x, y, z)$ — известные функции.

На границах области, занятой жидкостью, учитывая второй порядок уравнения по пространственным координатам, должны быть заданы два граничных условия. В частности, если область ограничена твердыми стенками, то, как известно из физики, скорость жидкости на стенке совпадает со скоростью стенки: если границы неподвижны, то граничные условия имеют вид

$$\mathbf{u} = 0 \quad (14.37)$$

или

$$u_n = 0; \quad (14.38)$$

$$u_t = 0, \quad (14.39)$$

где u_n и u_t — соответственно нормальная и касательная составляющие вектора скорости жидкости на границе.

Система уравнений (14.35) должна обеспечивать возможность вычислять скорость и давление в любой точке потока жидкости во все моменты времени $t > t_0$. Однако математические трудности, возникающие при решении этой системы вследствие нелинейности уравнений (они содержат слагаемые вида $u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}$, $u_y \frac{\partial u_y}{\partial y}$ и т.п.), в настоящее

время не преодолены, и даже использование мощных ЭВМ не обеспечивает пока получения решений подавляющего большинства задач без их предварительного упрощения. Основная проблема заключается в том, что все практически важные виды движения жидкости имеют место при турбулентном режиме, и, следовательно, имеет смысл рассматривать только нестационарные и трехмерные решения указанной системы.

Для решения задач механики жидкости с помощью дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости наиболее эффективно использование модели Рейнольдса—Буссинеска (см. гл. 17). На основе этой модели из системы уравнений Навье—Стокса получают систему уравнений Рейнольдса, в которой неизвестными являются осредненные скорость $\bar{u}$ и давление $\bar{p}$. Однако в систему уравнений Рейнольдса входят дополнительные неизвестные величины, и ее решение без привлечения экспериментальных материалов пока не выполняется. Решение инженерно-строительных задач с помощью системы уравнений Навье—Стокса и Рейнольдса представляют собой сложную задачу, поэтому в данном учебнике не описаны.

Решение уравнений Навье—Стокса без использования модели Рейнольдса—Буссинеска дает исчерпывающую информацию о распределении скорости и давления в потоке, однако получить это решение удается исключительно редко.

Если попытаться искать такие решения уравнений Навье—Стокса, при которых поле скорости имеет потенциал φ , то согласно уравнению несжимаемости (14.6) имеем $\Delta\varphi = 0$, следовательно, и $\Delta u = 0$; при этом очевидно, что слагаемые, учитывающие влияние вязкости ν в уравнениях Навье—Стокса (14.35), исключаются.

Для потенциала скорости вследствие того, что он удовлетворяет уравнению Лапласа, на твердой границе можно задать только одно условие; обычно это условие непроницаемости границы (14.38) в виде

$$u_n = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0.$$

Таким образом, если предположить, что поле скорости при движении вязкой жидкости имеет потенциал, то не удастся удовлетворить проверенным в физических экспериментах условиям “прилипания” (14.38) и (14.39). Если же на границах области, для которой отыскивается решение уравнений Навье—Стокса, можно обеспечить выполнение только условия непроницаемости (14.38) и не требовать выполнения условия (14.39), то допустимо рассмотрение потенциального движения вязкой жидкости.

14.7. Модель невязкой несжимаемой жидкости (гидродинамические уравнения Эйлера)

При решении задач о течении жидкости на большом удалении от твердых границ эффективно использовать более простую модель невязкой несжимаемой жидкости, принимая $\nu = 0$. Уравнения движения для такой модели можно получить из (14.35) в виде

$$\frac{Du}{Dt} = f - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (14.40)$$

или в проекциях на координатные оси

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} &= f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} &= f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (14.41)$$

Эти уравнения называются *дифференциальными уравнениями движения невязкой несжимаемой жидкости*, или *уравнениями Эйлера*.

Наиболее важны в практическом отношении такие решения уравнений Эйлера, при которых поле скорости имеет потенциал, т.е. является безвихревым. В этом случае отыскание поля скорости сводится к решению уравнения Лапласа для потенциала скорости φ , которое хорошо исследовано. Кроме того, если внешние объемные силы f имеют потенциал U , т.е. $f = \text{grad } U$ (а наиболее важная на Земле объемная сила — сила тяжести — имеет потенциал $U = -gz$), и движение было безвихревым в некоторый начальный момент времени, то оно останется безвихревым и во все последующие моменты времени (теорема Лагранжа).

Итак, если поле скорости имеет потенциал $u = \text{grad } \varphi$, то согласно уравнению неразрывности $\text{div } u = 0$ имеем

$$\Delta \varphi = 0.$$

Если твердая граница потока неподвижна, то на ней $u_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$.

На других границах может быть задано либо направление скорости, либо значение нормальной к границе составляющей скорости, либо какая-нибудь другая характеристика скорости жидкости. Таким образом, формулируется краевая задача для уравнения Лапласа, которое имеет при корректно заданных условиях единственное решение.

Решив уравнение Лапласа и отыскав значения скорости в каждой точке потока, для определения поля давления p используем уравнения Эйлера. Для этого преобразуем их следующим образом. Поскольку движение потенциальное, а следовательно, безвихревое, воспользуемся условием $\text{rot } u = 0$:

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (14.42)$$

и заменим производные в левой части уравнения системы (14.41) с помощью (14.42) так, чтобы в каждом из уравнений содержались производные только по одной пространственной переменной, например, в первом из уравнений (14.41) — только производные по x ; при этом получим

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (14.43)$$

В слагаемом $\frac{\partial u_x}{\partial t}$ заменим u_x на $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ и поменяем порядок дифференцирования. Значения проекций скорости подведем под знак дифференциала и, учитывая, что $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = u^2$, где u — модуль вектора скорости, получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} - U + \frac{p}{\rho} \right) = 0.$$

По аналогии из двух других уравнений системы (14.41) получим

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} - U + \frac{p}{\rho} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} - U + \frac{p}{\rho} \right) = 0.$$

Три последних равенства равносильны одному векторному:

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} - U + \frac{p}{\rho} \right) = 0,$$

откуда следует, что для безвихревого движения невязкой жидкости в поле силы тяжести ($U = -gz$) во всем пространстве, занятом движущейся жидкостью, имеет место равенство

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho g z + p + \rho \frac{u^2}{2} = f(t). \quad (14.44)$$

С помощью этого уравнения, называемого *интегралом Лагранжа—Коши*, после того как найдено поле скорости, можно вычислить давление в каждой точке потока.

Из равенства (14.44) следует, что при установившемся движении невязкой жидкости сумма трех слагаемых

$$\rho g z + p + \rho \frac{u^2}{2} = \text{const} \quad (14.45)$$

во всем объеме, занятом жидкостью. Это равенство известно как *уравнение Бернулли* для невязкой жидкости.

Основная особенность, облегчающая решение задач механики жидкости с помощью изложенного приема, заключается в том, что задача отыскания поля скорости при потенциальном движении жидкости сводится к решению линейного уравнения ($\Delta \varphi = 0$), в то время как при вихревом движении она сводится к решению нелинейных уравнений Эйлера, методы решения которых и даже существование и единственность их решений недостаточно изучены.

14.8. Дифференциальные уравнения, выражающие закон изменения кинетической энергии

Уравнение, выражающее закон изменения кинетической энергии для контрольного объема, имеет вид (см. (14.16))

$$\frac{D}{Dt} \int_V \frac{\rho u^2}{2} dV = \int_V \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}) dV + \int_A (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n) dA - \int_V \Phi dV. \quad (14.46)$$

Чтобы преобразовать поверхностный интеграл в объемный, как и в разд. 14.4, используем для обозначения проекций на координатные оси (x_1, x_2, x_3) подстрочные индексы. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \Pi = (u_1, u_2, u_3) \cdot \begin{pmatrix} n_k p_{k1} \\ n_k p_{k2} \\ n_k p_{k3} \end{pmatrix} = u_1(n_k p_{k1}) + u_2(n_k p_{k2}) + u_3(n_k p_{k3}) = \\ &= u_1(n_1 p_{11} + n_2 p_{21} + n_3 p_{31}) + u_2(n_1 p_{12} + n_2 p_{22} + n_3 p_{32}) + u_3(n_1 p_{13} + n_2 p_{23} + n_3 p_{33}) = \\ &= n_1(p_{11} \cdot u_1 + p_{12} \cdot u_2 + p_{13} \cdot u_3) + n_2(p_{21} \cdot u_1 + p_{22} \cdot u_2 + p_{23} \cdot u_3) + \\ &\quad + n_3(p_{31} \cdot u_1 + p_{32} \cdot u_2 + p_{33} \cdot u_3) = n_i(p_{ij} \cdot u_j) = \mathbf{n} \cdot \Pi \mathbf{u}. \end{aligned}$$

В результате появляется возможность использовать теорему Остроградского—Гаусса:

$$\int_A (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n) dA = \int_A (\mathbf{n} \cdot \Pi \mathbf{u}) dA = \int_V \operatorname{div}(\Pi \mathbf{u}) dV. \quad (14.47)$$

Используя (14.47), а также (3.54) для того, чтобы подвести субстанциальную производную под знак интеграла, перепишем (14.46) в виде

$$\int_V \left[\frac{D}{Dt} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) + \frac{\rho u^2}{2} \operatorname{div} \mathbf{u} - \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}) - \operatorname{div}(\Pi \mathbf{u}) + \Phi \right] dV = 0.$$

Вследствие произвольности контрольного объема подынтегральное выражение равно нулю:

$$\frac{D}{Dt} \frac{\rho u^2}{2} + \frac{\rho u^2}{2} \operatorname{div} \mathbf{u} = \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}) + \operatorname{div}(\Pi \mathbf{u}) - \Phi. \quad (14.48)$$

Упростим левую часть (14.48), используя дифференциальное уравнение неразрывности (14.5):

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \frac{\rho u^2}{2} + \frac{\rho u^2}{2} \operatorname{div} \mathbf{u} &= \frac{u^2}{2} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{\rho u^2}{2} \operatorname{div} \mathbf{u} = \\ &= \frac{u^2}{2} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} \right) + \rho \frac{D}{Dt} \frac{u^2}{2} = \rho \frac{D}{Dt} \frac{u^2}{2}. \end{aligned} \quad (14.49)$$

Плотность распределения мощности внутренних сил выразим через характеристики потока жидкости на основании следующих соображений. При плоском параллельноструйном течении (рис. 14.1) слой 2 скользит вдоль слоя 1 с относительной скоростью $\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \Delta x_3$; на площадке A_3 , разделяющей эти слои, действует вязкое напряжение p_{31} , следовательно

но, в объеме $\mathcal{V} = A_3 \Delta x_3$ сила $p_{31} A_3$ работает на перемещении $\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \Delta x_3$ за каждую единицу времени. Других сил, совершающих работу, в этом объеме нет (сила, обусловленная нормальными напряжениями, совершает работу, если есть линейные деформации (см. разд. 3.6)), касательные напряжения p_{31} не выполняют работу, так как по площадкам, перпендикулярным оси x_1 , нет относительного смещения элементов жидкости $\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0\right)$. В результате имеем плотность распределения мощности внутренних сил:

$$\Phi = \frac{N}{\mathcal{V}} = \frac{(p_{31} A_3) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \Delta x_3 \right)}{A_3 \Delta x_3} = p_{31} \frac{\partial u_1}{\partial x_3}, \quad (14.50)$$

где N — мощность внутренних сил в объеме $\mathcal{V}$.

В общем трехмерном случае зависимость (14.50) обобщим, полагая, что каждая составляющая тензора напряжений Π (см. (1.19)) совершает

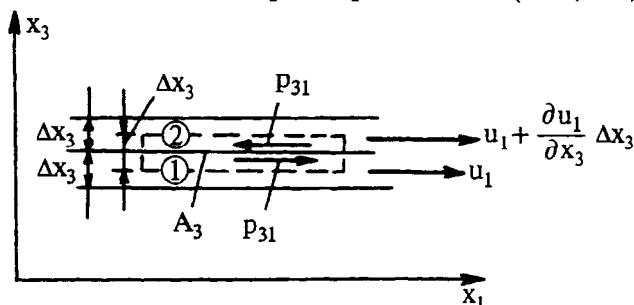


Рис. 14.1. Мощность касательных сил при сдвиговом течении

работу на соответствующем ему перемещении, определяемом составляющей тензора градиента скорости $\text{Grad } u$ (см. (3.31)), так что Φ представляет собой скалярное произведение тензоров Π и $\text{Grad } u$:

$$\Phi = \Pi \cdot \text{Grad } u \quad (14.51)$$

или

$$\Phi = \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 p_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = p_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}. \quad (14.51)$$

Учитывая полученный результат, преобразуем выражение $\text{div}(\Pi u)$:

$$\begin{aligned} \text{div}(\Pi u) &= \frac{\partial}{\partial x_1} (p_{11} u_1 + p_{12} u_2 + p_{13} u_3) + \frac{\partial}{\partial x_2} (p_{21} u_1 + p_{22} u_2 + p_{23} u_3) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_3} (p_{31} u_1 + p_{32} u_2 + p_{33} u_3) = \frac{\partial}{\partial x_i} (p_{ik} u_k) = p_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + u_k \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (14.52)$$

По определению (3.33):

$$\text{Div} \Pi = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{31}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{32}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial p_{12}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial p_{13}}{\partial x_1} \end{pmatrix}. \quad (14.53)$$

Скалярное произведение векторов $\mathbf{u}$ и $\text{Div} \Pi$ равно:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \text{Div} \Pi &= (u_1, u_2, u_3) \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial p_{12}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial p_{13}}{\partial x_1} \end{pmatrix} = u_1 \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial p_{12}}{\partial x_1} + u_3 \frac{\partial p_{13}}{\partial x_1} = \\ &= \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 u_k \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_i} = u_k \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (14.54)$$

Подставляя (14.51) и (14.54) в (14.52), имеем

$$\text{div}(\Pi \mathbf{u}) = \Pi \cdot \text{Grad} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \text{Div} \Pi. \quad (14.55)$$

Подставив (14.49), (14.51) и (14.55) в уравнение (14.48), получим

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}) + \Pi \cdot \text{Grad} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \text{Div} \Pi - \Pi \cdot \text{Grad} \mathbf{u} = 0;$$

или

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}) + \mathbf{u} \cdot \text{Div} \Pi. \quad (14.56)$$

Полученное дифференциальное уравнение, выражающее закон изменения кинетической энергии, в отличие от уравнения, выражающего этот же закон для контрольного объема (4.16), не является независимым в ряду дифференциальных уравнений механики жидкости (см. гл. 4). Оно может быть получено из дифференциального уравнения движения жидкости (14.12) с помощью тривиальной операции — скалярным умножением всех его членов на вектор скорости $\mathbf{u}$.

Поэтому при описании движения жидкости с помощью дифференциальных уравнений закон изменения кинетической энергии не используется

ОДНОМЕРНЫЕ ПОТОКИ ГАЗА

15.1. Скорость распространения возмущений
в сжимаемой среде

Как было показано в разд. 7.1, изменение во времени средней скорости воды или гидродинамического давления в каком-либо сечении трубопровода (это изменение называют также возмущением потока) распространяется вдоль потока с конечной скоростью a . Скорость распространения возмущения зависит от характеристик сжимаемости воды и деформируемости стенок трубопровода:

$$a = \frac{\sqrt{\frac{E_{\text{ж}}}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{D}{\delta} \frac{E_{\text{ж}}}{E_{\text{т}}}}} \quad (7.12)$$

Из зависимости (7.12) следует, что если трубопровод рассматривать как абсолютно жесткий (недеформируемый) и положить модуль упругости материала, из которого он изготовлен, сколь угодно большим ($E_{\text{т}} \rightarrow \infty$), то скорость распространения возмущений будет определяться модулем объемной упругости жидкости $E_{\text{ж}}$ и ее плотностью ρ :

$$a = \sqrt{\frac{E_{\text{ж}}}{\rho}} \quad (15.1)$$

Для воды $E_{\text{ж}} \approx 2 \cdot 10^9 \text{ Па}$, а $\rho = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, следовательно,

$$a = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^9 \text{ Па}}{1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}}} \approx 1400 \text{ м/с}; \quad (15.2)$$

эта величина равна скорости звука в воде. Как следует из примеров, приведенных в гл. 7, учитывать конечную скорость распространения возмущений целесообразно лишь при рассмотрении быстро протекающих процессов, например, *мгновенного* закрытия задвижки. Если время закрытия задвижки $t_{\text{з}}$ во много раз превышает время $t_{\text{г}}$, за которое возмущение от задвижки пройдет по всей длине трубопровода L :

$$t_{\text{з}} \gg t_{\text{г}} = \frac{L}{a}, \quad (15.3)$$

то можно считать $t_{\text{г}} = 0$, или, что то же, скорость распространения возмущения $a = \infty$, т.е., считать жидкость несжимаемой. Таким образом, условие (15.3) ограничивает область применения модели несжимаемой жидкости для капельных жидкостей.

Как известно, модуль объемной упругости газов в десятки тысяч раз меньше модуля объемной упругости капельных жидкостей $E_{\text{ж}}$, и следовательно, скорость распространения возмущений (скорость звука) в га-

зах значительно меньше, чем в капельных жидкостях. Поэтому область применения модели несжимаемой жидкости для изучения потоков газа значительно меньше. Дополнительным и наиболее важным ограничением этой области является то, что скорость движения твердых тел в газовой среде (или скорость потоков газа) может быть соизмеримой со скоростью звука, и следовательно, эффекты, связанные со сжимаемостью, проявляются не только в *нестационарных*, но и в *стационарных* процессах. Отметим, что скорость движения твердых тел в капельных жидкостях ограничена фазовыми переходами (кавитацией), и обычно она во много раз меньше скорости звука в жидкости.

Кроме того, по сравнению с капельными жидкостями газы обладают малыми теплоемкостью и теплопроводностью, и многие гидромеханические процессы в газе сопровождаются существенным изменением внутренней энергии (температуры) и не могут рассматриваться как изотермические. Поэтому для газов при составлении баланса энергии наряду с механической энергией необходимо включить в рассмотрение и внутреннюю (тепловую) энергию текучей среды.

По изложенным причинам в гидромеханике выделяют раздел, в котором принимаются во внимание сжимаемость текучей среды, ограниченность скорости распространения в ней возмущений и соответствующие термодинамические эффекты. Этот раздел называют *газовой динамикой*.

Найдем зависимость скорости распространения возмущений (скорости звука) в текучей среде от механических характеристик этой среды. Запишем систему дифференциальных уравнений, выражающих закон сохранения массы (14.5) и закон изменения количества движения (14.34):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0; \end{array} \right. \quad (15.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \left(\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} \right). \end{array} \right. \quad (15.5)$$

В одномерном случае, когда $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z) = (u_x, 0, 0)$, а все производные по y и z равны нулю, пренебрегая вязкостью ($\nu = 0$) и внешними объемными силами $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z) = (0, 0, 0)$, а также полагая, что конвективные составляющие субстанциальных производных пренебрежимо малы по сравнению с локальными составляющими, получим

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0; \end{array} \right\} \quad (15.6)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \end{array} \right\} \quad (15.7)$$

Преобразуем (15.6), представив

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (15.8)$$

а также принимая во внимание, что по определению модуль объемной упругости газа

$$E_r = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho}. \quad (15.9)$$

Подставив (15.8) и (15.9) в (15.6), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + E_r \frac{\partial u_x}{\partial x} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (15.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.11)$$

Сравнивая эту систему уравнений с системой уравнений гидравлического удара (7.19), обратим внимание, что квадрат скорости распространения возмущений a^2 согласно уравнениям (7.19) равен произведению коэффициентов перед вторыми слагаемыми уравнений системы (7.19). Отметим, что это же было получено в гл. 7 на основе анализа системы (7.19) вне связи с реальным физическим процессом, который описывает эта система уравнений (в гл. 10 этот же анализ позволил определить скорость распространения возмущений в потоках в открытых руслах $c = \sqrt{gh_0}$ с помощью линеаризованных уравнений мелкой воды (10.18), сходных с (7.19)). В результате найдем, что квадрат скорости звука в сжимаемой текучей среде (при сделанных предположениях)

$$a^2 = \frac{E_r}{\rho}$$

или

$$a = \sqrt{\frac{E_r}{\rho}}. \quad (15.12)$$

Эта зависимость для a совпадает с зависимостью (15.1), полученной в качестве предельного случая распространения возмущений в трубопроводе с недеформируемыми стенками ($E_r \rightarrow \infty$). Используя определение E_r (15.9), представим зависимость (15.12) в более удобной для ее анализа форме:

$$a = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}. \quad (15.13)$$

Как будет показано ниже, скорость звука в потоке газа зависит от термодинамических характеристик потока.

15.2. Уравнение Бернулли для установившегося потока газа

Уравнение Бернулли для потока жидкости было получено из уравнения, выражающего закон изменения кинетической энергии

$$\frac{D}{Dt} \int_V \frac{u^2}{2} \rho dV = \int_V \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}) dV + \int_A (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n) dA - \int_V \Phi dV.$$

Как указано выше, для описания движения газа необходимо включить в рассмотрение внутреннюю энергию текучей среды, представляющую собой, главным образом, кинетическую энергию хаотического теплового движения молекул газа. Поэтому для вывода уравнения Бернулли для потока газа необходимо исходить из более общего уравнения, выражающего закон сохранения энергии для контрольного объема сплошной среды (4.20):

$$\frac{D}{Dt} \int_V \left(e + \frac{u^2}{2} \right) \rho dV = \int_V \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}) dV + \int_A (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n) dA + \int_V \tau dV + \int_A \sigma dA + \sum_i W_i, \quad (15.14)$$

где $e(\mathbf{r}, t)$ — плотность распределения *внутренней* (тепловой) энергии газа или удельная (на единицу массы) внутренняя энергия газа; $\tau(\mathbf{r}, t)$ — плотность распределения внутри контрольного объема источников тепла (на единицу объема в единицу времени); $\sigma(\mathbf{r}, t)$ — плотность распределения на контрольной поверхности источников тепла (на единицу площади в единицу времени); W_i — мощность точечных источников (стоков) энергии внутри контрольного объема.

При отсутствии внешних источников (стоков) тепловой и механической энергии внутри контрольного объема (распределенные $\tau = 0$, точечные $W_i = 0$) и на его поверхности ($\sigma = 0$) уравнение (15.14) отличается от уравнения (15.13):

наличием плотности распределения внутренней энергии $e(\mathbf{r}, t)$ в виде дополнительного к плотности распределения кинетической энергии слагаемого под интегралом в левой части уравнения;

отсутствием слагаемого, выражающего мощность внутренних сил (диссипацию механической энергии) внутри контрольного объема. Отметим, что работа внутренних сил увеличивает внутреннюю энергию текучей среды (см. разд. 4.6). Если провести все преобразования, указанные в разд. 5.4, взяв в качестве исходного уравнения (15.14), то вместо уравнения Бернулли (5.40) получим

$$Q_M \left(\frac{\alpha_1 v_1^2}{2} + e_1 + gz_1 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) = Q_M \left(\frac{\alpha_2 v_2^2}{2} + e_2 + gz_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right). \quad (15.15)$$

В нем по сравнению с (5.40) появилось слагаемое e и не появилось

$\int_V \Phi dV$. Дополнительно при выводе этого уравнения и в дальнейшем практически всегда можно полагать, что работа силы тяжести в потоках газа дает пренебрежимо малый вклад в баланс энергии и что все гидродинамические характеристики (u , e , p , ρ) постоянны в каждом расчетном живом сечении, при этом $\alpha_i = 1,0$, а $u = v$. Сокращая на Q_M , получим искомое уравнение Бернулли для газа:

$$e_1 + \frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} = e_2 + \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2}. \quad (15.16)$$

Если рассматривать поток невязкого газа и тем самым исключить перенос поперек потока механической энергии за счет вязкости, то урав-

нение (15.16) можно применять не только для потоков, ограниченных твердыми стенками, но и для трубок тока, внутри которых сохраняется постоянным массовый расход Q_M . Ввиду того, что поперечные размеры трубки тока могут быть приняты сколь угодно малыми, уравнение (15.16) может быть использовано и для двух любых точек, лежащих на одной линии тока. Другими словами, из уравнения (15.16) следует, что равенство

$$e + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const} \quad (15.16a)$$

справедливо *вдоль линии тока* при установившемся движении газа.

15.3. Краткие сведения из термодинамики

В этой главе будут использоваться понятия, термины и зависимости, которые рассматриваются в курсе термодинамики.

1. Уравнение состояния совершенного газа (уравнение Клапейрона—Менделеева):

$$\frac{p}{\rho} = RT. \quad (15.17)$$

Здесь T — абсолютная температура, К; R — универсальная газовая постоянная,

$$R = \frac{1,987 \frac{\text{кал}}{\text{моль} \cdot \text{К}}}{\mu} = \frac{8,3147 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}}{\mu}, \quad (15.18)$$

где μ — молекулярный вес газа; g — ускорение силы тяжести. Для воздуха $\mu = 29 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$, и следовательно, $R = 287,0 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$.

2. Энтальпия, или тепловая функция

$$i = e + \frac{p}{\rho}. \quad (15.19)$$

3. Удельная теплоемкость газа при постоянном объеме c_v и удельная теплоемкость газа при постоянном давлении c_p (рис. 15.1):

$c_v = \frac{\partial e}{\partial T}$ при фиксированном объеме выделенной массы газа $V = \text{const}$, для воздуха

$$c_v = 717,5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}};$$

$$c_p = \frac{\partial i}{\partial T} \text{ при таком изменении объема } V \text{ выделенной массы газа, которое обеспечивает постоянное давление } p = \text{const}, \text{ для воз-}$$

$$\text{духа } c_p = 1004 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

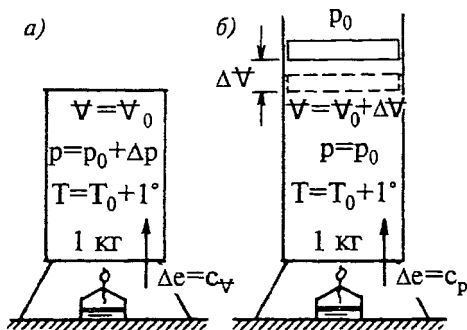


Рис. 15.1. Интерпретация теплоемкостей c_v и c_p в статических условиях (количество тепла, повышающее температуру 1 кг газа на 1 К)

Из определения c_v следует, что при постоянном c_v удельная внутренняя энергия газа

$$e = c_v T. \quad (15.20)$$

4. Основная термодинамическая формула (формула Майера):

$$c_p - c_v = R. \quad (15.21)$$

Умножим равенство (15.21) на T :

$$c_p T - c_v T = RT$$

и, воспользовавшись уравнением состояния (15.17) и равенством (15.20), получим

$$c_p T = e + \frac{p}{\rho} \quad \text{или} \quad i = c_p T. \quad (15.22)$$

5. При *изотермическом* течении ($T = \text{const}$) в выделенном элементарном объеме газа вдоль траектории его движения согласно уравнению Клапейрона—Менделеева (15.17) выполняется условие:

$$\frac{p}{\rho} = \text{const}. \quad (15.23)$$

6. При *адиабатическом* течении, когда приток тепла извне к выделенному элементарному объему газа или отток его исключаются, согласно первому началу термодинамики выполняется условие:

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const}, \quad (15.24)$$

где $k = \frac{c_p}{c_v}$ — показатель адиабаты; как правило, полагают для воздуха и других двухатомных газов $k = 1,4$.

Условие (15.24) можно представить в виде так называемой адиабаты Пуассона:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^k, \quad (15.25)$$

где p_0 и ρ_0 — давление и плотность в какой-либо фиксированной точке траектории движущегося элементарного объема.

При установившемся движении равенства (15.23), (15.24) и (15.25) выполняются *вдоль линий тока*.

15.4. Зависимость скорости звука от термодинамических условий. Термодинамические формы уравнения Бернулли

Используем рассмотренные выше термодинамические зависимости для анализа свойств газовых потоков. Скорость звука в газе согласно зависимости (15.13), может быть вычислена при двух различных предположениях:

1) процесс распространения возмущения изотермический ($T = \text{const}$). Тогда согласно уравнению Клапейрона

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{p}{\rho} = RT. \quad (15.26)$$

При этом

$$a = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = \sqrt{RT}; \quad (15.27)$$

2) процесс распространения возмущений адиабатический. Тогда из уравнения (15.24) Пуассона следует:

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const}, \quad p = \rho^k \text{ const};$$

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = k \rho^{k-1} \cdot \text{const} = k \rho^{k-1} \cdot \frac{p}{\rho^k} = k \frac{p}{\rho}.$$

При этом

$$a = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = \sqrt{k \frac{p}{\rho}} = \sqrt{kRT}. \quad (15.28)$$

Формула (15.27) была получена Ньютоном, а (15.28) — Лапласом. На основании экспериментов установлено, что опытные значения скорости звука хорошо соответствуют формуле (15.28), следовательно, процесс распространения возмущений в газах близок к адиабатическому. Отметим, что различие между значениями a , определяемыми по формулам (15.27) и (15.28), не превышает 20%.

Рассчитаем скорость звука в воздухе при температуре 20°C:

$$a = \sqrt{kRT} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 293} = 343,1 \text{ м/с}.$$

Интересно отметить, что значение скорости звука в газе имеет тот же порядок, что и значение скорости свободного пробега молекул. Как известно из кинетической теории газа, среднеквадратическое значение этой скорости $V_m = \sqrt{3RT}$, следовательно, $a \approx 0,68 V_m$.

Как уже отмечалось, низкие теплоемкость и теплопроводность газов обеспечивают условия протекания процессов в них, близкие к адиабатическим, поэтому в дальнейшем все результаты будут получены для условий адиабатического процесса.

В соответствии с этим преобразуем уравнение Бернулли (15.16a)

$$e + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const} \quad \text{или} \quad i + \frac{u^2}{2} = \text{const}. \quad (15.29)$$

Во-первых, используя уравнение Клапейрона—Менделеева, выразим внутреннюю энергию e через давление p :

$$e = c_v T = c_v \frac{p}{R\rho} = c_v \frac{p}{(c_p - c_v)\rho} = \frac{1}{k-1} \frac{p}{\rho}.$$

Подставив это выражение в (15.29), получим

$$\frac{u^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \text{const} \quad (15.30)$$

или

$$\frac{u^2}{2} + \frac{k}{k-1} RT = \text{const.} \quad (15.31)$$

Подставив в (15.29) вместо i выражение (15.22), получим еще одну форму уравнения Бернулли:

$$\frac{u^2}{2} + c_p T = \text{const.} \quad (15.32)$$

Другую форму уравнения Бернулли можно записать, заменив в (15.31) kRT на a^2 (согласно (15.28)):

$$\frac{u^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \text{const.} \quad (15.33)$$

Отметим, что в (15.33) скорость звука a местная, т.е. она относится к тому же сечению, что и скорость u .

Представленные формы уравнения Бернулли, содержащие термодинамические характеристики, выполняются для термоизолированных потоков совершенного газа, а также для коротких отрезков линий тока, в пределах которых можно пренебречь поперечной диффузией тепла и механической энергии.

15.5. Параметры торможения.

Критическая скорость. Число Маха

Анализ и расчеты гидромеханических и термодинамических характеристик потоков газа при использовании уравнения Бернулли значительно упрощаются, если на линии тока имеется точка, в которой скорость газа равна нулю. Например, при истечении газа из резервуара (рис. 15.2), имеющего объем достаточно большой, чтобы можно было считать, что на участке линии тока в резервуаре скорость газа равна нулю. При этом уравнения Бернулли (15.30), (15.32) и (15.33) для этой линии представляют в виде

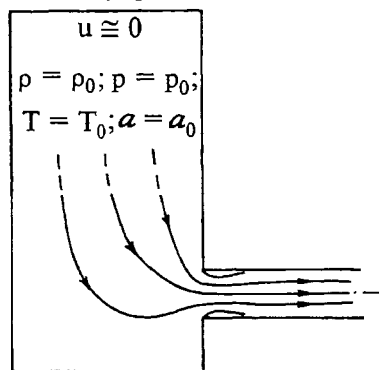


Рис. 15.2. Параметры торможения при истечении газа из резервуара

скорость газа равна нулю. Например, при истечении газа из резервуара (рис. 15.2), имеющего объем достаточно большой, чтобы можно было считать, что на участке линии тока в резервуаре скорость газа равна нулю. При этом уравнения Бернулли (15.30), (15.32) и (15.33) для этой линии представляют в виде

$$\frac{u^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0}; \quad (15.30a)$$

$$\frac{u^2}{2} + c_p T = c_p T_0; \quad (15.32a)$$

$$\frac{u^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{a_0^2}{k-1}, \quad (15.33a)$$

где p_0 , ρ_0 , T_0 и a_0 — значения соответствующих величин в резервуаре.

При набегающем потоке газа на твердое тело (рис. 15.3) вдоль линии тока, которая на поверхности твердого тела в точке В разветвляется, элементарные объемы газа уменьшают свою скорость (тормозятся) от значения u в точке А до нуля в точке В, следовательно, и для линии

тока АВ уравнение Бернулли можно представить в виде (15.30а), (15.32а) и (15.33а), где p_0 , ρ_0 , T_0 и a_0 — значения этих величин в точке В. С учетом последней интерпретации изменения величин p , ρ , T и a вдоль линии тока значения этих величин в точке линии тока, где $u = 0$, называют *параметрами торможения*, а саму эту точку — *точкой торможения*. В общем случае в реальных потоках такой точки, в которой скорость газа равна нулю, может и не быть, поэтому параметры торможения следует рассматривать как некоторые расчетные параметры потока. Так, согласно (15.32а) вдоль всего потока (или вдоль линии тока) величина T_0 является постоянной и характеризует полную энергию данного потока (если нет теплообмена через границы потока).

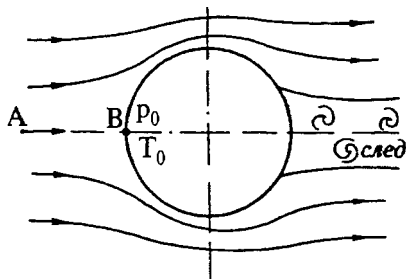


Рис. 15.3. Точка торможения при обтекании шара

Из уравнения (15.33а) следует, что при увеличении вдоль потока скорости газа u местная скорость звука a уменьшается. Это происходит вследствие уменьшения температуры потока T при увеличении скорости u (см. (15.28)); скорость звука в точке торможения a_0 , как и температура торможения T_0 , остаются неизменными. Уравнение (15.33а) позволяет найти такую скорость газа u , которая будет равна скорости звука в этой же точке линии тока. В этом случае скорость звука a называется критической и обозначается a^* . При условии $u = a = a^*$ имеем (из уравнения (15.33а))

$$\frac{a^{*2}}{2} + \frac{a^{*2}}{k-1} = \frac{a_0^2}{k-1}.$$

Из этого равенства получим

$$a^* = a_0 \sqrt{\frac{2}{k+1}} \approx 0,9 a_0. \quad (15.34)$$

Соотношение между скоростью газа u и скоростью распространения возмущений в потоке газа a играет решающую роль в определении свойств газовых потоков. Отношение скорости движения газа u в какой-либо точке потока к скорости звука a в этой же точке называется *числом Маха* и обозначается через M :

$$M = \frac{u}{a}. \quad (15.35)$$

Если $u < a$ и $M < 1$, то поток называется *дозвуковым*; возмущения в нем распространяются со скоростью большей, чем скорость потока, и следовательно, они могут распространяться вверх и вниз по течению. Так, если в дозвуковой поток поместить какое-либо твердое тело, то возмущение от этого тела распространяется по всему потоку, и весь поток перестроится; частицы газа как бы заранее будут готовиться к обтеканию этого тела (см. рис. 15.3).

Если $u > a$ и $M > 1$, то поток называется *сверхзвуковым*; возмущения в нем не могут распространяться вверх и вниз по течению, и тело, вве-

денное в сверхзвуковой поток, может воздействовать лишь на ту часть потока, которая расположена ниже по течению; частицы газа набегают на тело, не успевая подготовиться к обтеканию, и только в непосредственной близости к лобовой поверхности тела изменяют свою скорость, образуя ударный (уплотненный) слой (рис. 15.4).

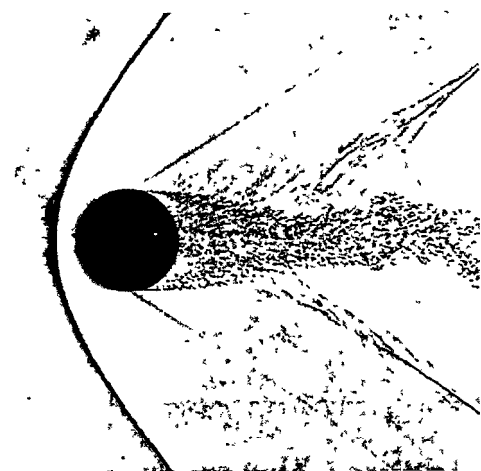


Рис 15.4. Шар, движущийся при $M = 1,53$. За тем участком головной волны, который находится непосредственно перед шаром, вдоль его поверхности вплоть до угла 45° течение дозвуковое

равна $t = -30^\circ\text{C}$ ($T_A = 243\text{K}$), а отсутствие обледенения гарантировано при температуре в точке В на поверхности стекла $t = 20^\circ\text{C}$ ($T_B = 293\text{K}$). В инерционной системе координат, движущейся со скоростью самолета

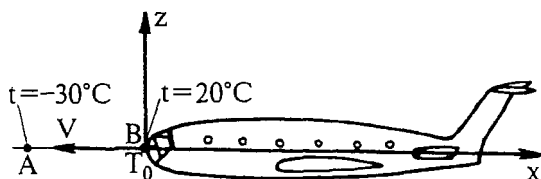


Рис. 15.5 К расчету обледенения самолета
точка А достаточно удалена от самолета и в принятой системе координат скорость в ней равна $(-V)$ Тогда согласно (15.32а) имеем:

$$\frac{V^2}{2} + c_p T_A = c_p T_B;$$

отсюда

$$V = \sqrt{2c_p(T_B - T_A)} = \sqrt{2 \cdot 1004 \cdot (293 - 243)} = 317 \text{ м/с} = 1140 \text{ км/ч.}$$

Таким образом, во избежание обледенения самолет должен иметь скорость $V \geq 1140 \text{ км/ч}$.

15.6. Течение газа в конфузорах и диффузорах (в одномерном приближении)

Для анализа адиабатического течения газа в каналах с переменным поперечным сечением воспользуемся уравнениями, выражающими закон сохранения массы и закон сохранения энергии. Первый из них представим в форме уравнения постоянства массового расхода вдоль потока:

$$Q_M = \rho u \omega = \text{const.}$$

Второй закон используем в виде уравнения Бернулли:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \text{const.}$$

Представим оба уравнения в дифференциальной форме:

$$\left. \begin{aligned} u \omega dp + \rho \omega du + u \rho d\omega &= 0; \\ u du + \frac{k}{k-1} \left(\frac{dp}{\rho} - \frac{p d\rho}{\rho^2} \right) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Разделим слагаемые первого уравнения на $\rho u \omega$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{d\omega}{\omega} &= 0; \\ u du + \frac{dp}{\rho} \frac{k}{k-1} \left(\frac{dp}{dp} - \frac{p}{\rho} \right) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Введем во второе уравнение скорость звука согласно (15.28):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{d\omega}{\omega} &= 0; \\ u du + \frac{dp}{\rho} \left(\frac{k}{k-1} a^2 - \frac{a^2}{k-1} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.36)$$

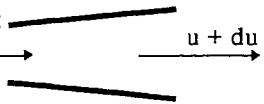
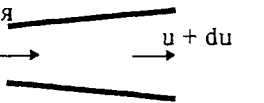
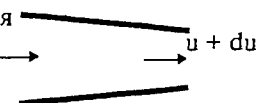
Разделив все слагаемые второго уравнения на a^2 и подставив из него $\frac{dp}{\rho}$ в первое уравнение системы, получим

$$-\frac{u du}{a^2} + \frac{du}{u} + \frac{d\omega}{\omega} = 0.$$

Преобразуя полученное уравнение, введя в него число Маха, получим

$$\frac{du}{u} = \frac{1}{M^2 - 1} \frac{d\omega}{\omega}. \quad (15.37)$$

Анализ этого уравнения (которое получено Гюгоньо) представлен в таблице:

Диффузор  ω $\omega+d\omega$ $d\omega > 0$	Сверхзвуковой поток $M > 1$	Поток ускоряется 
	Дозвуковой поток $M < 1$	Поток замедляется 
Конфузор  ω $\omega+d\omega$ $d\omega < 0$	Сверхзвуковой поток $M > 1$	Поток замедляется 
	Дозвуковой поток $M < 1$	Поток ускоряется 

В следующем разделе показано, как эти свойства потоков газа можно использовать для получения сверхзвукового движения газа.

15.7. Истечение газа из резервуара через насадок

Рассмотрим истечение газа из резервуара, газ имеет температуру T_0 , давление p_0 и плотность ρ_0 (рис. 15.6). Размеры резервуара достаточно велики, так что скорость газа в нем можно считать равной нулю, поэтому T_0 , p_0 и ρ_0 — параметры торможения. Пусть насадок является конфузуром с площадью выходного сечения $\omega_{\text{вых}}$, а истечение газа происходит в камеру, где поддерживается постоянное давление p_c , которое называется *противодавлением*, и где плотность газа равна ρ_c . Температуру, давление и плотность газа в выходном сечении обозначим $T_{\text{вых}}$, $p_{\text{вых}}$, $\rho_{\text{вых}}$, соответственно.

Пока скорость газа в выходном сечении $u_{\text{вых}}$ меньше скорости звука a в этом сечении ($M < 1$), возмущение может распространяться вверх по течению, и если, например, $p_{\text{вых}} > p_c$, то “известие” об этом (т.е. о том, что нарушен баланс энергии и не выполняются условия, описываемые уравнением Бернулли) достигает резервуара. В результате скорость газа возрастает до значения, при котором в соответствии с уравнением Бернулли (15.30а) $p_{\text{вых}} = p_c$, $\rho_{\text{вых}} = \rho_c$, т.е. до значения:

$$u_{\text{вых}} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p_{\text{вых}}}{\rho_{\text{вых}}} \right)} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p_c}{\rho_c} \right)}. \quad (15.38)$$

Таким образом, уменьшая противодавление p_c при фиксированном p_0 , можно увеличивать скорость газа, на первый взгляд, до значения

$u = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0}}$. В действительности, когда при некотором противодавлении p_c^* выходная скорость $u_{\text{вых}}$ достигает скорости звука a ($M = 1$), при дальнейшем понижении противодавления p_c известие о несоответствии между p_c и $p_{\text{вых}} = p_{\text{вых}}^*$ не может достигнуть резервуара, так как оно распространяется со скоростью звука $a < u$ и “сносится” потоком вниз по течению. В результате резервуар с насадком оказывается как бы изолированным от камеры, а процесс истечения определяется лишь условиями в резервуаре (параметрами торможения) и равенством выходной скорости и скорости звука в выходном сечении. Это явление называют “*запиранием*” потока в насадке.

Для того, чтобы установить закономерность изменения скорости газа на выходе из насадка, рассмотрим зависимость массового расхода Q_M от давления в выходном сечении насадка $p_{\text{вых}}$:

$$Q_M = \rho_{\text{вых}} u_{\text{вых}} \omega_{\text{вых}},$$

$$Q_M = \rho_{\text{вых}} \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p_{\text{вых}}}{\rho_{\text{вых}}} \right)} \omega_{\text{вых}}. \quad (15.39)$$

Считаем, что течение газа адиабатическое; тогда, используя адиабату Пуассона

$$\frac{p_0}{\rho_0^k} = \frac{p_{\text{вых}}}{\rho_{\text{вых}}^k} = c^k, \quad (15.40)$$

где c — постоянная, исключаем из (15.39) плотность газа $\rho = p^{\frac{1}{k}}/c$ и получаем

$$Q_M = \frac{1}{c} p_{\text{вых}}^{\frac{1}{k}} \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left(c p_0^{\frac{k-1}{k}} - c p_{\text{вых}}^{\frac{k-1}{k}} \right)} \omega_{\text{вых}}. \quad (15.41)$$

Из выражения (15.41) следует, что $Q_M = 0$ при $p_{\text{вых}} = 0$ и при $p_{\text{вых}} = p_0$ (в первом случае массовый расход равен нулю из-за того, что вследствие (15.40) при $p_{\text{вых}} = 0$ плотность газа $\rho_{\text{вых}} = 0$, а во втором случае скорость газа равна нулю, так как давление в резервуаре, из которого газ вытекает, и давление в камере, куда он втекает, равны между собой. Очевидно, массовый расход на интервале $(0, p_0)$ должен иметь хотя бы один максимум. Продифференцировав выражение (15.41) по $p_{\text{вых}}$ и приравняв $\partial Q / \partial p_{\text{вых}}$ нулю, найдем, что Q_M имеет один максимум при

$$p_{\text{вых}}^{\text{max}} = p_0 \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (15.42)$$

Для значения $k = 1,4$ найдем

$$p_{\text{вых}}^{\text{max}} \cong 0,528 p_0. \quad (15.43)$$

Подставив (15.42) в (15.41), найдем максимальный расход из насадка:

$$Q_M^{\text{max}} = \sqrt{p_0 \rho_0} \sqrt{k \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}} \omega_{\text{вых}}.$$

Как показывают эксперименты, зависимость Q_M от $p_{\text{вых}}$ в виде (15.41) хорошо аппроксимирует опытные точки для значений $p_{\text{вых}}$, лежащих в интервале $(p_{\text{вых}}^{\text{max}}, p_0)$. Для того, чтобы выяснить, каким будет истечение при значении $p_{\text{вых}}$ в интервале $(0, p_{\text{вых}}^{\text{max}})$, вычислим скорость истечения $u_{\text{вых}}$, соответствующую Q_M^{max} и $p_{\text{вых}}^{\text{max}}$ согласно (15.42):

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}^{\text{max}} &= \frac{Q_M^{\text{max}}}{\rho_{\text{вых}} \omega_{\text{вых}}} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p_{\text{вых}}}{\rho_{\text{вых}}} \right)} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left(c p_0^{\frac{k-1}{k}} - c p_{\text{вых}}^{\frac{k-1}{k}} \right)} = \\ &= \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left(c p_0^{\frac{k-1}{k}} - c p_0^{\frac{k-1}{k}} \cdot \frac{2k}{k+1} \right)} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} c p_0^{\frac{k-1}{k}} \left(1 - \frac{2k}{k+1} \right)} = \\ &= \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \frac{k-1}{k+1}} = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0} \frac{2k}{k+1}} = \sqrt{RT_0 \frac{2k}{k+1}} = a_0 \sqrt{\frac{2}{k+1}} = a^*. \end{aligned}$$

Таким образом, при максимальном расходе $Q_M^{\max}$ скорость газа $u_{\text{вых}}$ в выходном сечении становится равной скорости звука a в нем. Следовательно, при противодавлении $p_0 = p_{\text{вых}}^{\max}$ в выходном сечении происходит описанное выше явление запираания потока, и при дальнейшем уменьшении p_0 влияние противодавления исключается, а массовый расход Q_M при значении p_c в интервале $(0, p_{\text{вых}}^{\max})$ остается постоянным и равным $Q_M^{\max}$. На рис. 15.7 нормированная по максимальным значениям зависимость $Q_M = Q_M(p_{\text{вых}})$ показана сплошной линией; штриховой линией показана нереализуемая часть этой зависимости на интервале $(0, p_{\text{вых}}^{\max})$ согласно формуле (15.39).

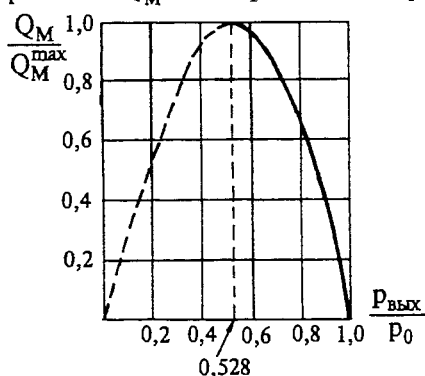


Рис. 15.7. Зависимость $Q_M / Q_M^{\max} = f(p_{\text{вых}}/p_0)$

приняв во внимание, что сверхзвуковые потоки в диффузорных каналах ускоряются, можно предложить способ получения сверхзвукового потока при истечении из резервуара. Он заключается в том, что к выходному сечению конфузорного насадка в котором $M = 1$,

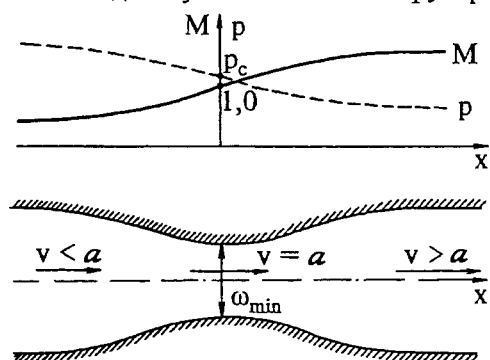


Рис. 15.8. Сопло Лаваля. Распределение скорости и давления вдоль потока

Из вышеизложенного следует, что при истечении из резервуара через конфузорный насадок в выходном сечении скорость течения газа не может быть больше скорости звука. Воспользовавшись тем, что при $p_c < p_{\text{вых}}^{\max}$ скорость газа в выходном сечении становится равной местной скорости звука ($M = 1$), и

т.е. поток не дозвуковой и не сверхзвуковой, присоединяют диффузорный насадок (рис. 15.8). Этот насадок при заданном давлении p_c сразу за местом присоединения рассчитывают так, чтобы поток имел возможность превзойти скорость звука и, став сверхзвуковым, ускориться. В результате в выходном сечении диффузора скорость газа u может быть существенно больше скорости звука в этом сечении.

Степень увеличения площади сечения диффузора вдоль его оси задается в зависимости от значения противодавления, при этом следует исключить возможность отрыва потока от стенок насадка и образования застойных областей. Такого рода диффузорные насадки называются соплами Лаваля по имени шведского инженера, впервые их рассчитавшего и использовавшего. Следует отметить, что сопло Лаваля рассчитывается для заданных значений давления торможения p_0 ; при отклонении этих величин от расчетных сопло может не обеспечивать образования сверхзвукового потока.

ОБТЕКАНИЕ ТЕЛ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

16.1. Общие положения

В этой главе рассматриваются вопросы, относящиеся к внешним задачам гидромеханики. В круг этих задач входит описание движения тел, погруженных в жидкость или газ (подводных лодок, рыб и других животных в воде; самолетов, автомобилей, птиц, спортивных снарядов в воздухе), и обтекание потоком жидкости или газа покоящихся тел (обтекание речным потоком трубопроводов и мостовых опор, обтекание воздушным потоком зданий, дымовых труб, антенн, опор и проводов линий электропередач и т.п.). Основная цель при решении подобных задач — определение сил, действующих на тело: силы сопротивления движению, подъемной силы, нагрузки на сооружения; в отдельных случаях необходимо представить детальную картину течения (поля скорости и давления) в окрестности тела, например, для выявления потенциальных зон кавитационной эрозии.

Как правило, внешняя задача решается на основе сочетания аналитических, экспериментальных и вычислительных методов. В последние десятилетия (после 1970-х годов) роль вычислительных методов резко возросла благодаря как достижениям компьютерных технологий, так и интенсивному развитию численных методов решения уравнений гидромеханики.

В данной главе демонстрируются, главным образом, качественные результаты, относящиеся к внешним задачам. Более подробно рассмотрены вопросы, связанные с определением нагрузок на сооружения, так как они входят в круг профессиональных интересов инженеров-строителей.

В дальнейшем положим, что поля скорости и давления в потоке на достаточном удалении от тела (вне области, возмущаемой телом) *стационарны* и *однородны*, т.е. скорость жидкости и давление не зависят от времени и координат, причем, как правило, скорость считаем горизонтальной. *Невозмущенные значения скорости и давления* обозначим V_∞ и p_∞ , соответственно.

Рассматривая обтекание жидкостью со скоростью V_∞ неподвижного тела, полученные результаты в соответствии с принципом относительности Галилея будем распространять и на движение тела со скоростью V_∞ в неподвижной жидкости, если специально не оговорено, что их следует различать. Кроме того, для упрощения демонстрации особенностей внешней задачи действие силы тяжести (т.е. гидростатическое распределение давления, архимедову силу и т.п.) из рассмотрения исключаем.

16.2. Силы, действующие на обтекаемое жидкостью тело

Используем систему ортогональных координат с осями x , совпадающей с направлением скорости V_∞ , y — горизонтальной, ортогональной оси x , и z — вертикальной.

На тело, помещенное в однородный поток жидкости, действует сила $F = (F_x, F_y, F_z)$, направление которой в общем случае не совпадает с направлением скорости жидкости V_∞ . Например, на воздушно-го змея (рис. 16.1) действует сила, направление которой совпадает с направлением нити, удерживающей его. Косое парусное вооружение при боковом ветре обеспечивает движение судна поперек ветра (рис. 16.2).

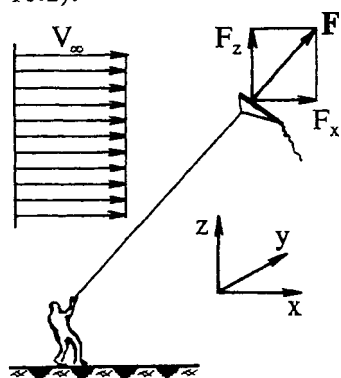


Рис. 16.1. Силы, действующие на воздушно-го змея

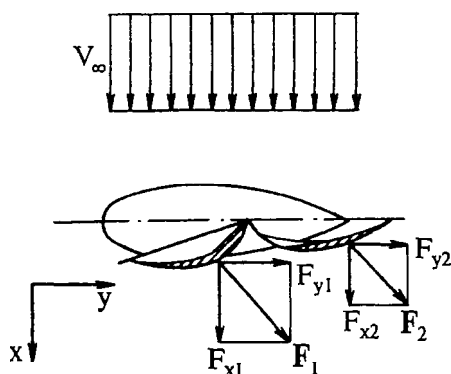


Рис. 16.2. Силы, действующие на косое парусное вооружение корабля

Проекции силы F на координатные оси называют: F_x — сила сопротивления; F_y — боковая сила; F_z — подъемная сила.

Особенности обтекания тел различной формы будем демонстрировать, как правило, на двухмерных задачах, рассматривая бесконечно длинные тела, расположенные вдоль оси y . Все сечения этих тел плоскостями, параллельными плоскости (x, z) , одинаковы; это могут быть пластины, цилиндры, призмы, крыловые профили и т.п. В этом случае сила F имеет две составляющие: F_x — силу сопротивления; F_z — подъемную силу.

Анализируя силу сопротивления F_x , выделим одну ее часть, обусловленную вязкими касательными напряжениями, действующими на поверхность тела со стороны потока, и вторую часть, обусловленную нормальными напряжениями. Распределение на поверхности тела нормальных напряжений, которые примем равными гидродинамическому давлению, зависит от формы обтекаемого тела. Поэтому первую часть силы сопротивления называют *сопротивлением трения*, а вторую часть — *сопротивлением формы* или *сопротивлением давления*.

Установим структуру зависимости силы, действующей на тело со стороны потока, от определяющих ее параметров. К их числу отнесем механические свойства жидкости (плотность ρ и вязкость η), скорость потока V_∞ , геометрические характеристики тела. Таким образом:

$$F = F(\rho, \eta, V_\infty, \text{геометрические характеристики тела}) \quad (16.1)$$

Геометрическими характеристиками могут служить линейные размеры тела — длина пластины L , диаметр цилиндра D , высота выступов шероховатости D , площади проекций тела на координатные плоско-

сти, объем тела. Одна из наиболее важных геометрических характеристик — угол атаки, определение которого при обтекании плоской пластины представлено на рис. 16.3. Для более сложных случаев угол атаки определяется в зависимости от формы тела и решаемой задачи.

Исходя из условия *однородности по размерности*, согласно которому выражения в левой и правой частях любого равенства должны иметь одинаковые раз-

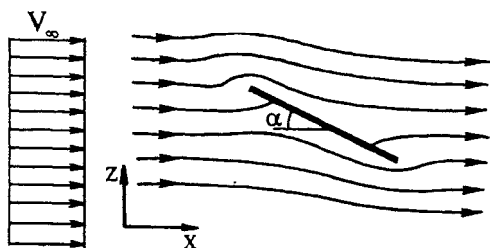


Рис. 16.3. Безотрывное обтекание пластины

мерности (см. гл. 20), представим зависимость (16.1) в виде

$$\left. \begin{aligned} F_x &= c_x \frac{\rho V_\infty^2}{2} A; \\ F_y &= c_y \frac{\rho V_\infty^2}{2} A; \\ F_z &= c_z \frac{\rho V_\infty^2}{2} A, \end{aligned} \right\} \quad (16.2)$$

где c_x , c_y , c_z — безразмерные коэффициенты силы сопротивления, боковой силы и подъемной силы, соответственно; A — характерная площадь обтекаемого тела (не обязательно одинаковая для различных проекций силы). Коэффициенты c_x , c_y , c_z зависят от безразмерных параметров, сформированных из размерных параметров, входящих в правую часть

(16.1). Это, как правило, число Рейнольдса $Re = \frac{\rho V_\infty L}{\eta}$ (где L — характерный линейный размер тела), относительная шероховатость поверхности $\Delta_r = \Delta/L$, угол атаки α и, возможно, другие параметры, характеризующие геометрию тела.

16.3. Обтекание плоской пластины

Рассмотрим плоскую задачу об обтекании пластины шириной L , *параллельной* потоку, т.е. с углом атаки $\alpha = 0$ (рис. 16.4). По условию прилипания скорость жидкости на поверхности пластины равна нулю. За счет вязкости вблизи поверхности пластины образуется тонкий слой, в котором скорость возрастает от 0 на твердой границе до V_∞ на внешней границе слоя. Эта часть потока называется *пограничным слоем* (см. разд. 18.2). Толщина его растет вдоль потока, и, если ширина плоскости L достаточно велика, то на некотором расстоянии от передней кромки режим движения жидкости в пограничном слое станет турбулентным. Положение

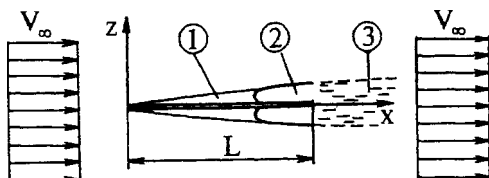


Рис. 16.4. Обтекание пластины, параллельной потоку ($\alpha = 0$): 1 — ламинарный пограничный слой; 2 — турбулентный пограничный слой; 3 — след за пластиной

точки перехода от ламинарного пограничного слоя к турбулентному зависит от шероховатости пластины и от интенсивности турбулентности набегающего потока; с увеличением этих характеристик точка перехода приближается к передней кромке.

За счет меньших по сравнению с V_∞ скоростей жидкости в пограничном слое линии тока вне пограничного слоя несколько отодвинуты от пластины, хотя это возмущение поля скорости несущественно. За пластиной образуется сравнительно небольшая по толщине зона возмущения, которую называют *гидродинамическим следом* за телом (за пластиной).

Пластина имеет неограниченную длину вдоль оси y , так что условия обтекания (как и размеры пластины) не изменяются вдоль этой оси. Поэтому в данном случае (в условиях плоской задачи) цель исследования — определение удельной на единицу длины пластины (1 м в направлении оси y) силы $F_{уд}$. Характерной площадью A , входящей в зависимости (16.2), является $A_{уд} = (L \cdot 1) \text{ м}^2$. Вследствие симметрии тела и потока относительно горизонтальной координатной плоскости (угол атаки $\alpha = 0$) подъемная сила $F_z = 0$, и на пластину действует только сила сопротивления

$$(F_x)_{уд} = c_x(\text{Re}, \Delta_r) \frac{\rho V_\infty^2}{2} L. \quad (16.3)$$

Экспериментальная зависимость для функции $c_x = c_x(\text{Re}, \Delta_r)$ представлена на рис. 16.5.

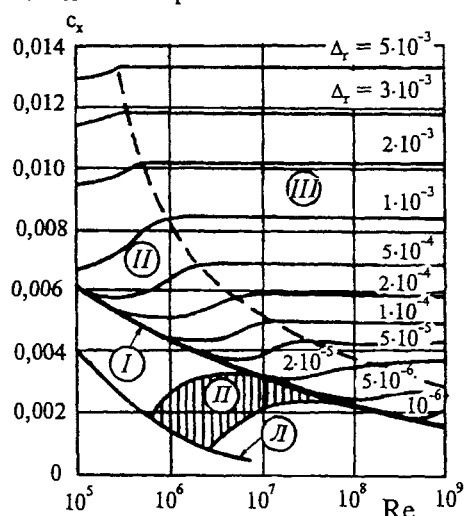


Рис. 16.5. Экспериментальные данные о зависимости $c_x = c_x(\text{Re}, \Delta_r)$ для пластины, параллельной потоку ($\alpha = 0$): Л — ламинарный режим; Л — переходная область от ламинарного к турбулентному режиму; I, II, и III — турбулентный режим: I — область гладкого сопротивления, II — область доквадратичного сопротивления, III — область развитой шероховатости (квадратичного сопротивления)

Рассмотрим второй крайний случай, когда пластина шириной L расположена *перпендикулярно* потоку (рис. 16.6); угол атаки $\alpha = 90^\circ$. В соответствии с уравнением Бернулли в точке С (см. гл. 15, точка торможения) гидродинамическое давление p равно $\rho V_\infty^2/2$; оно медленно уменьшается с удалением от этой точки вдоль пластины, а вблизи кромок резко уменьшается до значений, существенно меньших, чем давление в невозмущенном потоке p_∞ . Как и в предыдущем случае, вследствие симметрии потока относительно горизонтальной координатной плоскости здесь подъемная сила $F_z = 0$. Вязкие касательные напряжения, возникающие на поверхности пластины, перпендикулярны плоскости (x, y) и не вносят вклада в силу сопротивления F_x . Таким образом, эта сила формируется за счет разности давлений на фронтальную $R_{фр}$ и тыльную $R_{тыл}$ поверхности пластины:

$$(F_x)_{уд} = (p_{фр})_{ср} L - (p_{тыл})_{ср} L; \quad (16.4)$$

индекс “ср” означает, что в расчет вводится среднее значение давления по соответствующей поверхности пластины.

Значения давлений определяются экспериментально:

$$(p_{фр})_{ср} = 0,8 \frac{\rho V_\infty^2}{2}, \quad (p_{тыл})_{ср} = -1,2 \frac{\rho V_\infty^2}{2}. \quad (16.5)$$

Подставляя (16.5) в (16.4), найдем

$$(F_x)_{уд} = 0,8 \frac{\rho V_\infty^2}{2} L - \left(-1,2 \frac{\rho V_\infty^2}{2} L \right) = 2,0 \frac{\rho V_\infty^2}{2} L. \quad (16.6)$$

Таким образом, для бесконечно длинной пластины шириной L имеем $c_x = 2,0$. Для пластины с ограниченной длиной b (в направлении оси y) экспериментальные данные показывают, что значение c_x увеличивается от $c_x = 1,2$ при $b/L = 1$ до $c_x = 1,5$ при $b/L = 20$.

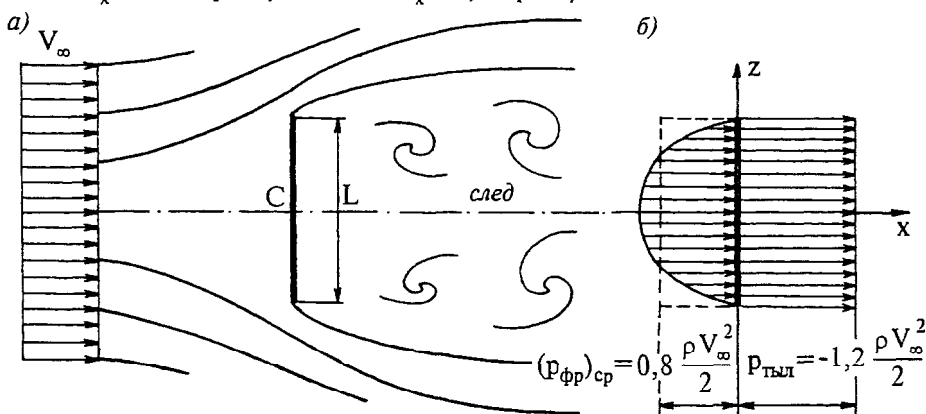


Рис. 16.6. Обтекание пластины, перпендикулярной потоку ($\alpha = 90^\circ$):
а — схема течения, б — распределение давления на фронтальной и тыльной поверхностях

Сравнивая два рассмотренных случая обтекания пластины, отметим различия в зависимости силы сопротивления F_x от параметров, определяющих обтекание.

При обтекании горизонтальной пластины сила сопротивления F_x обусловлена почти исключительно вязкими касательными напряжениями на поверхности пластины, и поэтому в данном случае это сила сопротивления *трения*. Коэффициент c_x зависит от числа Рейнольдса и относительной шероховатости. Анализируя график этой зависимости (см. рис. 16.5), можно найти определенное сходство с графиком Никурадзе для коэффициента гидравлического трения $\lambda = \lambda(Re_D, \Delta_r)$, который входит в формулу Вейсбаха—Дарси для вычисления потерь напора по длине в трубах.

При обтекании вертикальной пластины сила сопротивления F_x значительно (на 2 порядка) больше, чем при обтекании горизонтальной пластины. Зависимость c_x от Re и Δ_r исчезающе мала. Сила обусловлена значительной деформацией потока и является силой сопротивления

формы тела. Здесь можно усмотреть определенную аналогию между коэффициентом c_x и коэффициентом местной потери напора ζ_m , который входит в формулу Вейсбаха (см. разд. 5.14, зависимость (5.104)); коэффициент ζ_m (как и c_x в случае сопротивления формы) определяется геометрическими характеристиками местного сопротивления и мало зависит от числа Рейнольдса и шероховатости граничных твердых поверхностей.

16.4. Безотрывное обтекание цилиндра однородным потоком невязкой жидкости

Рассмотрим решение задач о потенциальном движении невязкой несжимаемой жидкости с использованием функций комплексного переменного. Как уже отмечалось в разд. 3.8, заранее нельзя предсказать, какая функция $f(\xi)$ комплексного переменного $\xi = x + yi$ определяет то или иное поле скорости. Поэтому необходимо рассмотреть сначала несколько простейших функций, чтобы представить, сумма каких функций и суперпозиция каких соответствующих потенциальных течений будут описывать интересующее нас поле скорости. Например, функция

$$f(\xi) = u\xi = ux + uyi, \quad (16.7)$$

где u — вещественное число, определяет поле скорости с потенциалом

$\varphi(x, y) = ux$, при этом $u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = u = \text{const}$, $u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$; линии тока согласно равенству $\psi(x, y) = uy = \text{const}$ имеют вид горизонтальных прямых (рис.16.7).

Рассмотрим, какое поле скорости определяет функция

$$f(\xi) = u \left(\xi + \frac{b}{\xi} \right), \quad (16.8)$$

где u и b — положительные числа.

Для этого представим $f(\xi)$ в виде комплексной функции двух вещественных переменных x и y :

$$\begin{aligned} f(\xi) &= u \left(x + yi + \frac{b}{x + yi} \right) = u \left(x + yi + \frac{b(x - yi)}{x^2 + y^2} \right) = \\ &= u \left(x + \frac{bx}{x^2 + y^2} \right) + u \left(y - \frac{by}{x^2 + y^2} \right) i. \end{aligned}$$

Здесь потенциал скорости

$$\varphi(x, y) = u \left(x + \frac{bx}{x^2 + y^2} \right), \quad (16.9)$$

а функция тока

$$\psi(x, y) = u \left(y - \frac{by}{x^2 + y^2} \right). \quad (16.10)$$

Выясним положение линии тока $\psi(x, y) = 0$. Уравнение

$$u \left(y - \frac{by}{x^2 + y^2} \right) = 0 \quad (16.11)$$

выполняется, если справедливо одно из двух равенств:

$$y = 0; \quad (16.12)$$

$$x^2 + y^2 = b. \quad (16.13)$$

Линия, определяемая (16.12), совпадает с осью абсцисс, а линия (16.13) представляет собой окружность радиуса $\sqrt{b}$.

Очевидно также, что на большом удалении от начала координат, когда $(x^2 + y^2)$ очень велико, вторым слагаемым в скобках в выражениях (16.9) и (16.10) можно пренебречь. При этом поле скорости будет иметь тот же вид, который определяется функцией (16.7) и представлен на рис. 16.7. Это дает основание скорость невозмущенного потока обозначать символом V_∞ .

Обозначим $b = R^2$ и покажем линии тока, отвечающие функции тока (16.10), на рис. 16.8. Как следует из (16.11) и (16.12), точки с координатами

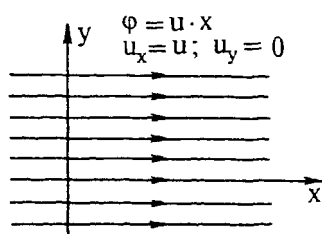


Рис. 16.7. Поле скорости, определяемое функцией $f(\xi) = u\xi$ при $u > 0$

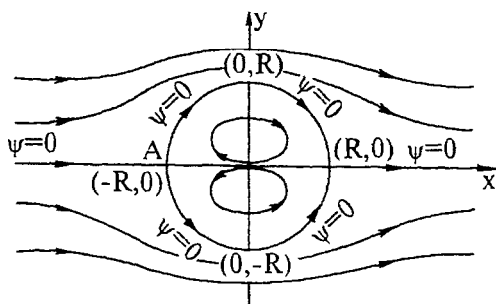


Рис. 16.8. Линии тока при безотрывном бесциркуляционном обтекании цилиндра

$(-R, 0)$ и $(R, 0)$ принадлежат двум различным линиям тока, и следовательно, являются особыми. Выпишем выражения для проекций скорости:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = V_\infty \left(1 - \frac{R^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right); \\ u_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -V_\infty R^2 \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (16.14)$$

и вычислим с их помощью значения скорости в точках пересечения окружности (16.13) с координатными осями:

$$u_x(\pm R, 0) = 0; \quad u_x(0, \pm R) = 2V_\infty, \quad (16.15)$$

$$u_y(\pm R, 0) = 0; \quad u_y(0, \pm R) = 0. \quad (16.16)$$

Найденные значения проекций скорости, а также вычисление координат линий тока $\psi(x, y) = \text{const}$ с использованием (16.10) показывают, что при $x^2 + y^2 > R^2$ функция $f(\xi) = V_\infty(\xi + R^2/\xi)$ описывает потенциальное поле скорости, возникающее при безотрывном обтекании цилиндра. Эта же функция описывает и движение жидкости внутри цилиндра (при $x^2 + y^2 < R^2$), но это поле нас не интересует.

Рассмотренное течение симметрично относительно оси абсцисс и, кроме того, поле значений модуля скорости $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ симметрично

относительно оси ординат. Согласно (14.45) интеграл Лагранжа—Коши постоянен во всей области, занятой потоком жидкости, если поле скорости имеет потенциал. В случае установившегося движения и при отсутствии объемных сил имеем во всем потоке

$$p + \frac{\rho u^2}{2} = \text{const.} \quad (16.17)$$

Учитывая это, можно сделать вывод о том, что распределение давления на поверхности цилиндра также симметрично относительно координатных осей. Следовательно, главный вектор сил, действующих на цилиндр при его безотрывном обтекании невязкой жидкостью, равен нулю. Это положение представляет собой содержание так называемого *парадокса Даламбера*. Отличие от нуля главного вектора поверхностных сил возникает при учете влияния сил вязкости и при введении в расчет условия “прилипания” жидкости к твердой поверхности, а также при отрыве набегающего потока от поверхности цилиндра и при образовании водоворотных областей в следе за цилиндром.

Полученное решение позволяет обосновать, в частности, устройство *прибора Пито*, предназначенного для измерения скорости в фиксированной точке потока (см. разд. 5.7). Если поместить в поток открытую трубку В (рис. 16.9, а), срез которой (точка D) располагается вдоль ли-

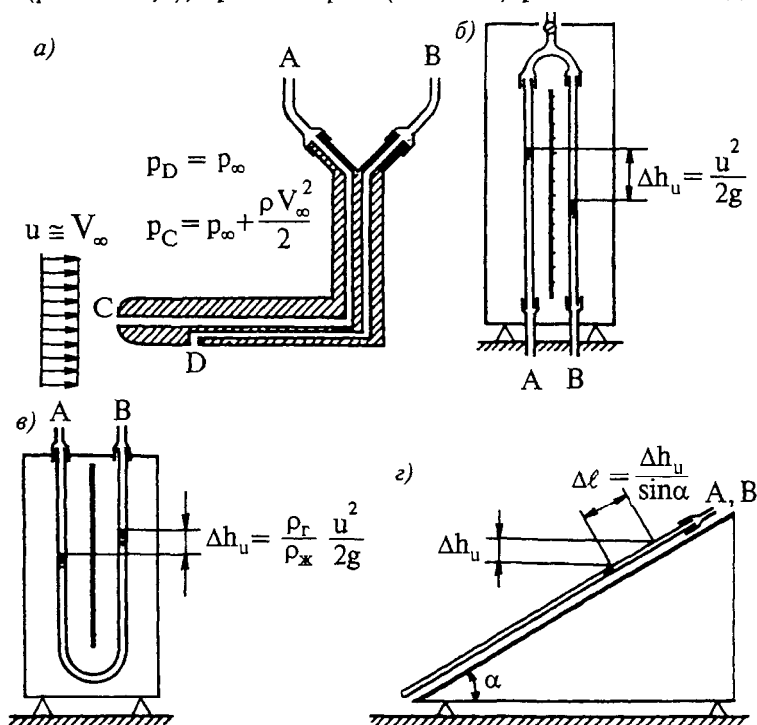


Рис. 16.9. Схема прибора Пито (см. также рис. 5.8.): а — элемент, обтекаемый жидкостью или газом; б — пьезометр при измерении скорости в потоке жидкости; в — пьезометр при измерении скорости в потоке газа; г — пьезометр, установленный на наклонном щите и позволяющий увеличить разность длин столбов жидкости в коленях для увеличения точности измерения

ний тока, то жидкость в этой трубке поднимается на уровень, определяемый потенциальным напором $H = (z + p/\gamma)$. Если в этот же поток поместить шар, то при его обтекании в точке С скорость будет равна нулю, а давление, согласно уравнению Бернулли (14.45), будет больше, чем в невозмущенном потоке (где скорость равна u), на величину $\Delta p_u = \rho(u^2/2)$. Следовательно, если присоединить открытую трубку А к отверстию в точке С, это давление уравнивается столбом воды, который на

$$\Delta h_u = \Delta p_u / \rho g = u^2 / 2g \quad (16.18)$$

выше, чем в трубке В. Измерив разность Δh_u уровней воды в трубках А и В, можно по зависимости (16.18) вычислить скорость u набегающего потока.

16.5. Присоединенный вихрь и подъемная сила

Выясним, какое поле скорости определяется функцией $f(\xi)$ комплексного переменного $\xi = x + yi$:

$$f(\xi) = \frac{\Gamma}{2\pi} \log \xi = \frac{\Gamma}{2\pi} \log(x + yi), \quad (16.19)$$

где $\frac{\Gamma}{2\pi}$ — постоянное вещественное число, необычный вид которого объяснен далее.

Для того, чтобы представить эту функцию в комплексном виде (т.е. отделить вещественную часть функции от мнимой), воспользуемся тригонометрической формой представления комплексных чисел $\xi = re^{i\varphi}$, где

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — модуль комплексного числа ξ , а $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ — аргумент ξ .

При этом:

$$f(\xi) = \frac{\Gamma}{2\pi} \log \xi = \frac{\Gamma}{2\pi} \log(re^{i\varphi}) = \frac{\Gamma}{2\pi} (\ln r + i\varphi) = \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right). \quad (16.20)$$

Примем, что поток описывается потенциалом скорости $\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ и функцией тока $\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. Приравнявая функцию тока $\psi(x, y)$ различным постоянным, найдем, что совокупность линий тока, представленная на рис. 16.10, описывает осесимметричное растекание жидкости от источника, расположенного в начале координат. Наложение такого потока на поток при безотрывном обтекании цилиндра не сохранит неподвижной линию тока, совпадающую с поверхностью цилиндра.

Иная картина течения получится, если принять, что $\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, а $\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ (что допустимо, так как и вещественная и мнимая части комплексной функции (16.12) — гармонические функции). В этом случае линии тока $\psi(x, y) = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \text{const}$ являются концент-

рическими окружностями (рис. 16.11), а линии равного потенциала

$\varphi(x, y) = \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \text{const}$ — прямыми линиями, проходящими через начало координат. Поток с таким полем скорости называется свободным потенциальным вихрем.

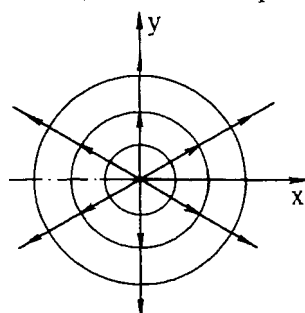


Рис. 16.10. Линии тока (со стрелками) и линии равного потенциала для источника в начале координат

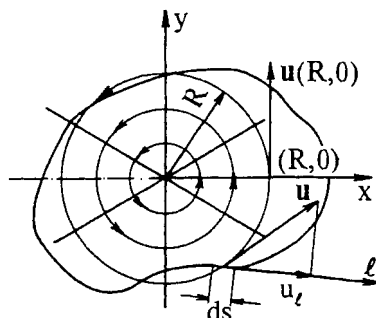


Рис. 16.11. Линии тока (со стрелками) и линии равного потенциала для потенциального вихря; пояснение понятия циркуляции скорости

Наиболее важная характеристика поля скорости для потенциально-го вихря — циркуляция скорости по замкнутому контуру, охватывающе-му начало координат, описываемая выражением

$$\oint (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\ell}) ds = \oint u_t ds, \quad (16.21)$$

где $\mathbf{u}(x, y)$ — вектор скорости в точке, взятой на контуре; $\boldsymbol{\ell}$ — единич-ный вектор, касательный к контуру в этой точке; ds — элементарная длина контура; u_t — проекция скорости на касательную к контуру.

Рассчитаем циркуляцию скорости вдоль линии тока, представляю-щей окружность с радиусом R . Вследствие осевой симметрии потока модуль скорости u во всех точках этой окружности одинаков и равен, например, модулю скорости в точке $(R, 0)$, который вычислим по фор-

$$\text{муле } \psi(x, y) = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}:$$

$$u_y(x, y) = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad u = u_y(R, 0) = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{R}. \quad (16.22)$$

Поскольку скорость касательна к линии тока, то $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\ell} = u$ во всех точках окружности и

$$\oint (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\ell}) ds = \oint u ds = u \oint ds = \frac{\Gamma}{2\pi R} 2\pi R = \Gamma. \quad (16.23)$$

Как доказывается в теории функций комплексного переменного, циркуляция скорости в рассматриваемой нами задаче одинакова для лю-бого замкнутого контура, охватывающего начало координат. Таким об-разом, становится оправданным введение постоянной Γ в (16.19) — это циркуляция для любого замкнутого контура, охватывающего начало ко-ординат, в поле скорости, задаваемой функцией (16.19).

Если наложить рассмотренный выше поток на поток при безотрывном обтекании цилиндра, то одна из концентрических окружностей, являющихся линиями тока, совпадет с окружностью, ограничивающей цилиндр. Суммарное поле скорости также будет описывать безотрывное обтекание цилиндра, которое называется *циркуляционным* в отличие от *бесциркуляционного* обтекания, описанного в разд 16 4

Система линий тока для суммарного поля скорости представлена на рис 16 12. Рассмотрим поле давления по поверхности цилиндра для этого поля. На верхней полуокружности скорость жидкости при бесциркуляционном обтекании цилиндра u_1 совпадает по направлению со скоростью при обтекании цилиндра потенциальным вихрем u_2 , а на нижней полуокружности эти скорости противоположны по направлению. Поэтому модуль скорости $u_v = u_1 + u_2$ в каждой точке верхней полуокружности больше модуля скорости $u_n = u_1 + u_2$ в соответствующей (симметричной относительно оси x) точке нижней полуокружности. На основании (16 17) давление p_v в каждой точке на верхней полуокружности меньше, чем давление p_n в соответствующей точке нижней полуокружности, что обеспечивает ненулевое значение подъемной силы

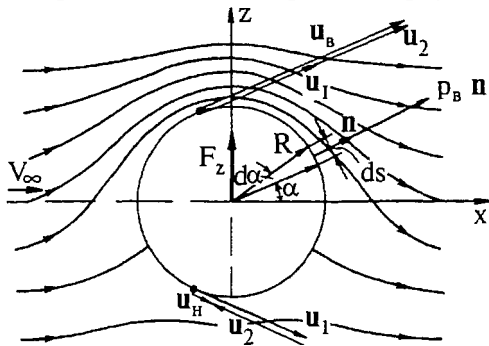


Рис 16 12 Линии тока при циркуляционном обтекании цилиндра, пояснение к расчету подъемной силы F_z

$$\begin{aligned} (F_z)_{уд} &= \oint p n_z ds = \int_0^\pi p_v \cos \alpha R d\alpha + \int_\pi^{2\pi} p_n \cos \alpha R d\alpha = \\ &= \int_0^\pi (p_v - p_n) \cos \alpha R d\alpha > 0 \end{aligned} \quad (16 24)$$

Если для определения давления на поверхности цилиндра воспользоваться уравнением (14 45), то, вычислив интеграл (16 24) и исключив взвешивающую архимедову силу, найдем

$$(F_z)_{уд} = \rho |V|_\infty \Gamma \quad (16 25)$$

Таким образом, в поле скорости, которое образуется при наложении потенциального вихря на бесциркуляционное обтекание цилиндра, на цилиндр действует подъемная сила F_z , направленная вверх, если скорость жидкости в потенциальном вихре направлена по часовой стрелке. Это утверждение представляет собой основное содержание *теоремы Жуковского о подъемной силе*.

Изложенное показывает, какими свойствами должно обладать поле скорости при обтекании твердого тела, чтобы на него действовала подъемная сила. Вместе с тем, пока не указано, как создать такое поле или при каких условиях оно формируется.

Одним из простейших примеров, когда может сформироваться такое поле скорости, является полет в воздухе со скоростью $V_{пост}$ шара, вращающегося вокруг горизонтальной оси. Вследствие "прилипания" жидкости к

твёрдой поверхности при вращении шар увлекает за собой окружающую жидкость (рис. 16.13) и заставляет ее вращаться вокруг себя. В инерционной системе координат с началом в центре шара, перемещающейся со скоростью

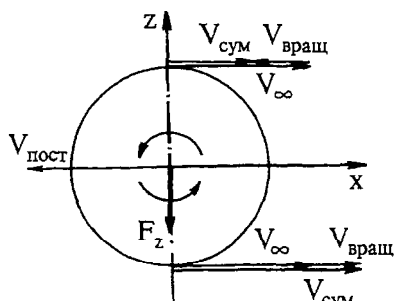


Рис. 16.13. Схема, поясняющая эффект Магнуса; шар движется со скоростью $V_{\text{пост}}$ справа налево; на поверхности шара указаны скорости жидкости относительно движущейся вместе с шаром системы координат

поступательного движения шара $V_{\text{пост}}$, картина течения будет качественно сходна с представленной на рис. 16.12, где вместо V_{∞} следует принять $(-V_{\text{пост}})$. Скорость V_{∞} направлена слева направо, а вихревая составляющая скорости направлена против часовой стрелки, поэтому подъемная сила в этом случае направлена вниз.

Появление подъемной силы при поступательном движении вращающегося тела называется *эффектом Магнуса*. Этот эффект используют теннисисты: при подкручивании мяча возникает отрицательная подъемная сила (рис. 16.14), и мяч опускается на корт по более крутой траектории, чем под действием только силы тяжести. Подрезанный мяч имеет положительную подъемную силу и летит выше траектории мяча без вращения.

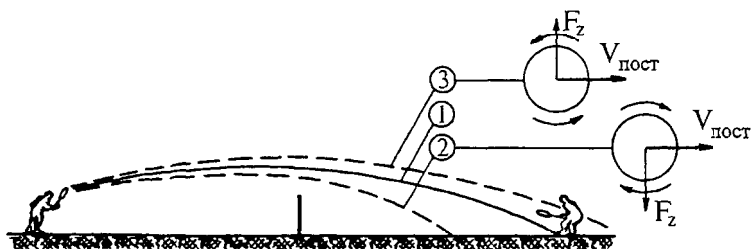


Рис. 16.14. Траектории теннисных мячей: 1 — мяч не вращается; 2 — подкрученный мяч; 3 — подрезанный мяч

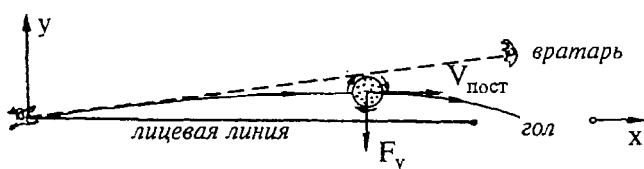


Рис. 16.15. Угловой удар “сухой лист”; прямая штриховая линия — ожидаемая вратарем траектория мяча, если мяч не закручен

В футболе, выполняя эффектный угловой удар под названием “сухой лист”, футболист заставляет мяч вращаться вокруг вертикальной оси; при этом возникает боковая сила, искривляющая траекторию и направляющая мяч, пробитый с угловой точки поля, в ворота (рис. 16.15).

16.6. Пограничный слой

В задачах о движении вязких жидкостей, с одной стороны, решение уравнений Навье—Стокса (14.35) с реализующимся в действительности условием “прилипания” к твёрдой границе ((14.38) и (14.39)) приводит в

практически важных случаях к серьезным математическим трудностям, связанным с нелинейностью уравнений (14.35). С другой стороны, чтобы рассматривать и использовать такие решения уравнений вязкой жидкости (14.35), при которых поле скорости имеет потенциал (это дает возможность решать линейное уравнение Лапласа), необходимо потребовать выполнения лишь условия непроницаемости твердой границы (14.38).

Выход из этого положения был найден немецким ученым Л. Прандтлем на основе экспериментального изучения структуры потоков жидкости, обтекающих твердые тела. Оказалось, что во многих случаях в непосредственной близости к твердой границе образуется тонкий слой, в котором модуль скорости жидкости резко возрастает в поперечном к движению направлении от нуля на стенке до значений, сравнительно мало изменяющихся вне этого слоя (рис. 16.16). Толщина его настолько мала, что, если увеличить размеры обтекаемого тела, присоединив к нему этот слой, то изменением геометрии тела (при расчете его обтекания) во многих случаях оказалось возможным пренебречь. При этом решение задачи об определении поля скорости и сил взаимодействия потока с твердой границей разбивается на две части.

1. Решается задача определения поля скорости, имеющего потенциал, при обтекании твердой границы (в данном случае на рис. 16.16 — поверхности тела); на твердой границе задается условие непроницаемости (14.38). Эта задача сводится к решению уравнения Лапласа. Поле давления определяют по вычисленному полю скорости с помощью уравнений Эйлера или Навье—Стокса, которые в данном случае (при потенциальном движении) совпадают. Скорости и давления, найденные при решении этой задачи, пренебрежимо мало изменяются в пределах указанного тонкого слоя, в котором скорость в реальном потоке резко уменьшается с приближением к стенке.

2. Для тонкого слоя используются дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости (14.35), которые можно существенно упростить, так как в пределах тонкого слоя скорость жидкости резко изменяется поперек потока и сравнительно медленно изменяется вдоль потока. Для упрощенных уравнений вводятся граничные условия: а) на твердой границе должно выполняться условие “прилипания” жидкости ((14.38) и (14.39)); б) на границе с потенциальным потоком скорость в тонком слое должна быть равна скорости потенциального потока на этой границе (которая практически мало отличается от скорости на самой твердой границе, вычисленной при решении первой задачи).

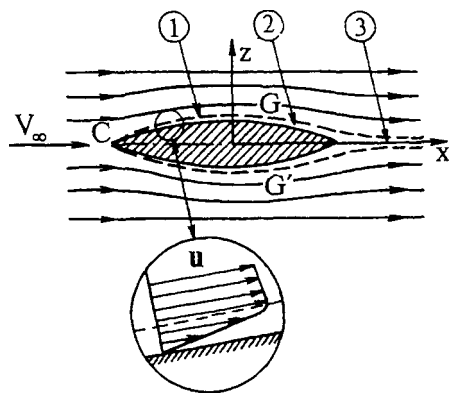


Рис. 16.16. Пограничный слой на обтекаемом теле: штриховая линия отделяет поток с потенциальным полем скорости от пограничного слоя; толщина пограничного слоя растет, до точек G и G' он ламинарный (1), ниже по течению от G и G' — турбулентный (2), за телом образуется след (3); на поверхности тела выполняется условие прилипания

Тонкий слой, лежащий между твердой границей и внешним потенциальным потоком, обтекающим твердую границу, называется *пограничным слоем*, а изложенная схема решения задачи о движении вязкой жидкости составляет основу теории пограничного слоя, которая представляет собой обширный и эффективный раздел механики жидкости.

В разд. 16.3 было указано на образование пограничного слоя при обтекании пластины и на возможность перехода ламинарного режима движения в турбулентный в точке, где толщина пограничного слоя станет достаточно большой.

Границей пограничного слоя и потенциального потока считают поверхность, на которой скорости жидкости, найденные из решения первой и второй задач, практически неразличимы (с некоторой заданной точностью). Пограничный слой характеризуется тем, что *толщина его увеличивается* вдоль течения, и движение жидкости в нем не является продольно-однородным.

16.7. Отрыв пограничного слоя. Кризис обтекания

Пограничный слой имеет очень малую толщину, и поэтому можно считать, что давление (а следовательно, и нормальные напряжения) поперек него практически постоянно, т.е. можно:

полагать, что давление на поверхности цилиндра равно давлению на внешней границе пограничного слоя;

вводить в расчет только изменение давления вдоль пограничного слоя, которое вычисляется на основе решения задачи о циркуляционном или бесциркуляционном обтекании цилиндра; поле скорости в этом случае является потенциальным, и оно связано с полем давления зависимостью (16.17).

При бесциркуляционном и безотрывном обтекании цилиндра (см. разд. 16.4) значение скорости на внешней границе пограничного слоя от точки С до точки D возрастает от 0 до $2V_\infty$, следовательно, давление уменьшается от $\left(p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2}\right)$ до $\left(p_\infty - \frac{\rho V_\infty^2}{2}\right)$; от точки D до точки Е скорость убывает от $2V_\infty$ до 0, а давление возрастает от $\left(p_\infty - \frac{\rho V_\infty^2}{2}\right)$ до $\left(p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2}\right)$. При малых числах Рейнольдса при обтекании цилиндра

вязкой жидкостью (при выполнении условия “прилипания” — равенства нулю скорости на неподвижной твердой поверхности) от точки С до точки Е формируется ламинарный пограничный слой. При этом сила сопротивления F_x обуславливается как вязкими касательными напряжениями, действующими на поверхности цилиндра со стороны потока, так и изменением нормальных напряжений (давления) вдоль поверхности цилиндра, т.е. имеют место сопротивление трения и сопротивление формы (см. разд. 16.2).

При больших числах Рейнольдса, когда силы инерции играют большую роль по сравнению с силой вязкости (см. гл. 20), картина обтекания может существенно деформироваться. Градиент давления вдоль поверхности цилиндра формируется потенциальным потоком вне по-

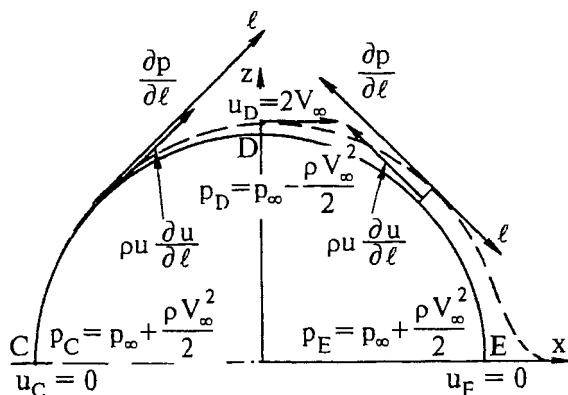


Рис. 16.17. Соотношение градиента давления $\frac{\partial p}{\partial l}$ вдоль поверхности цилиндра и плотности потока количества движения в пограничном слое $\rho u \frac{\partial u}{\partial l}$ при безотрывном обтекании цилиндра

граничного слоя, и он в соответствии с дифференциальными уравнениями движения (14.35) компенсируется изменением плотности распределения количества движения, соответствующим скоростям внешнего потенциального потока. Скорость в пограничном слое меньше, чем на его внешней границе или во внешнем потоке, поэтому возникает диспропорция между градиентом давления вдоль пограничного слоя, соответствующего скоростям во внешнем потоке, и количеством движения, обеспечиваемым скоростями в пограничном слое (рис. 16.17).

На участке CD градиент давления положительный (совпадает с направлением скорости потока), и за счет него движение жидкости внутри пограничного слоя несколько ускоряется, толщина пограничного слоя при этом увеличивается не так быстро, как при нулевом значении градиента давления (см. разд. 16.3), а общая картина течения изменяется несущественно. На участке DE градиент давления отрицательный,

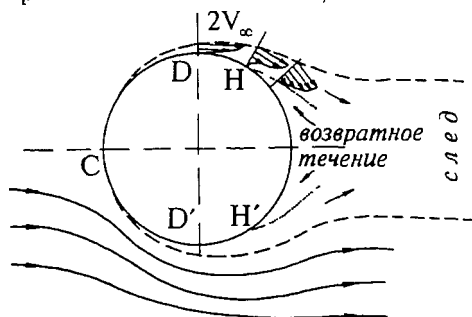


Рис. 16.18. Отрыв пограничного слоя при обтекании цилиндра: на участке CD давление падает, и пограничный слой, ускоряясь за счет этого, остается тонким; на участке DH давление увеличивается, и пограничный слой, замедляясь, быстро утолщается; за точкой отрыва Н пунктиром выделена зона возвратного течения, давление на участке HH' практически постоянно; штриховая линия отделяет пограничный слой от потенциального потока — это не линия тока

он противодействует движению жидкости в пограничном слое. При больших значениях градиента давления, возникающих при

$$Re = \frac{\rho V_{\infty} D}{\eta} = 10^3, \text{ количество движения жидкости в пограничном слое}$$

оказывается недостаточным, чтобы преодолеть противодействующую силу давления, жидкость в пограничном слое останавливается и даже

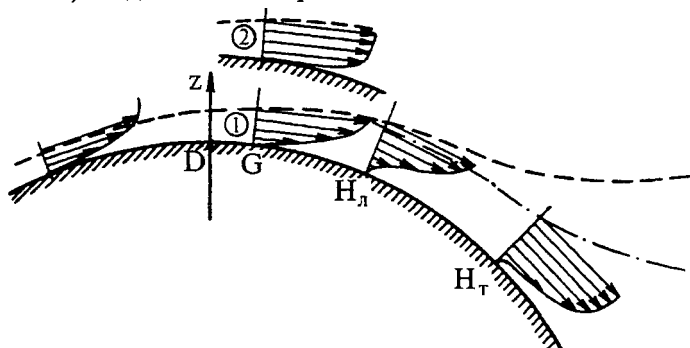


Рис. 16.19. Смещение точки отрыва ламинарного пограничного слоя H_l вниз по течению в точку H_t при переходе в точке G ламинарного режима в турбулентный: 1 — эпюра скорости при ламинарном режиме; 2 — то же при турбулентном режиме движения в пограничном слое; штриховая линия — граница ламинарного пограничного слоя, штрихпунктирная — турбулентного



Рис. 16.20. Сравнение ламинарного и турбулентного пограничных слоев. Ламинарный пограничный слой, показанный на верхнем снимке, отрывается на вершине выпуклой поверхности, тогда как турбулентный слой, показанный на нижнем снимке, остается присоединенным

начинает течь в обратном направлении (рис. 16.18). Картина течения существенно изменяется. В точке H , где скорость во всем сечении пограничного слоя равна нулю, *пограничный слой отрывается* от поверхности цилиндра, и за цилиндром образуется широкая (соизмеримая с диаметром цилиндра) застойная зона, которая называется *гидродинамическим следом*. Давление на задней части цилиндра (от точки H до

точки Н') падает и становится практически постоянным. В результате сила сопротивления формируется не только за счет сопротивления трения на участках СН и СН', но и за счет деформации потока и образования отрывных зон, т.е. возникает сопротивление формы, которое составляет в данном случае до 95% всей силы сопротивления F_x .

Существенное влияние на положение точки отрыва Н (а следовательно, и на размеры следа, а в конечном итоге и на силу сопротивления F_x) оказывает режим движения в пограничном слое. Распределение осредненной скорости в турбулентном пограничном слое более равномерное, чем в ламинарном. Распределения скоростей в поперечных сечениях ламинарного и турбулентного пограничных слоев, представленные на рис. 16.19, аналогичны распределениям скорости при соответствующих режимах в пристенном слое (см. рис. 5.15). Средняя скорость и поток количества движения в поперечном сечении пограничного слоя (при одинаковой его толщине и скорости на внешней границе) при турбулентном режиме движения больше, чем при ламинарном (см. также гл. 18). Поэтому изменение количества движения в турбулентном пограничном слое может компенсировать большие градиенты давления, чем в ламинарном пограничном слое, и следовательно, точка отрыва пограничного слоя Н, если слой турбулентный, будет располагаться ниже по течению, чем в ламинарном пограничном слое (рис. 16.20).

Если по каким-либо причинам, например, при увеличении V_∞ и, соответственно, числа Re , ламинарный пограничный слой в точке Г выше по течению точки отрыва Н_л станет турбулентным, то точка отрыва сместится вниз по течению и займет новое положение Н_т, соответствующее балансу изменения количества движения и градиента давления при турбулентном режиме (см. рис. 16.19). При этом поперечный размер следа уменьшается и соответственно уменьшаются сопротивление формы и вся сила сопротивления цилиндра F_x . Это явление называется *кризисом обтекания*.

На рис. 16.21 представлены экспериментальные за-

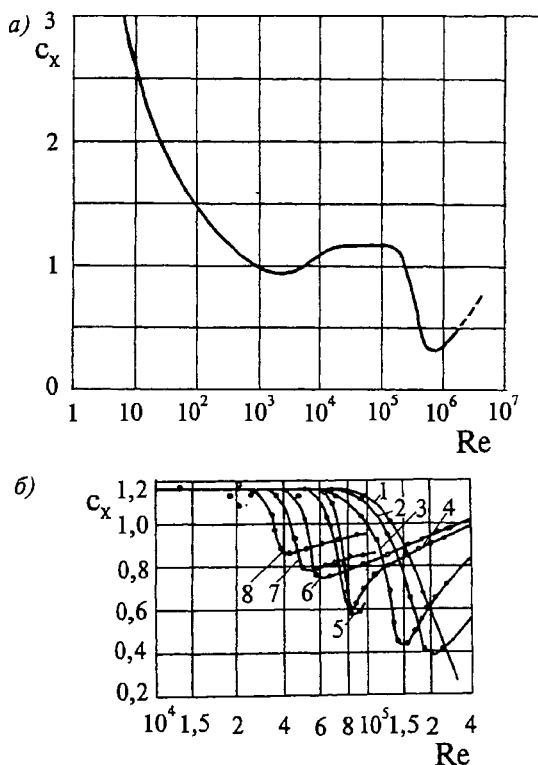


Рис. 16.21. Зависимость коэффициента c_x для круглого цилиндра от Re (а); влияние относительной шероховатости $\Delta_r = \Delta/D$ на сопротивление круглого цилиндра (б): 1 — $\Delta_r = 0$; 2 — $\Delta_r = 5 \cdot 10^{-4}$; 3 — $\Delta_r = 2 \cdot 10^{-3}$; 4 — $\Delta_r = 4 \cdot 10^{-3}$; 5 — $\Delta_r = 5 \cdot 10^{-3}$; 6 — $\Delta_r = 7 \cdot 10^{-3}$; 7 — $\Delta_r = 9 \cdot 10^{-3}$; 8 — $\Delta_r = 2 \cdot 10^{-2}$

висимости $c_x = f(Re)$ и $c_y = f(Re, \Delta_r)$ для значений числа Re , при которых имеет место кризис обтекания. Как следует из этих графиков, увеличение шероховатости приводит к проявлению кризиса обтекания при меньших значениях числа Рейнольдса, т.е. при меньшей скорости набегающего, но вместе с тем уменьшается и степень снижения сопротивления (при очень больших шероховатостях снижение сопротивления уже мало заметно, так как ламинарный пограничный слой практически не формируется даже вблизи точки C).

Иногда для уменьшения силы сопротивления F_x используют искусственную турбулизацию набегающего потока. Например, на наветренной поверхности шара устанавливают кольцо, след за которым турбулентный (рис. 16.22). Интенсивные пульсации скорости и давления в следе за кольцом создают условия для перехода ламинарного режима



Рис. 16.22. Мгновенная картина обтекания шара с турбулизирующей проволочкой при $Re = 30\,000$. Проволочный обруч, надетый на шар перед экватором, возмущает пограничный слой. Слой становится турбулентным и поэтому отрывается ниже по потоку, в отличие от ламинарного (см. рис. 16.21). Сопротивление при этом резко уменьшается до значения, достигаемого на гладком шаре только при числе Рейнольдса, в десять раз превышающем существующее в потоке

движения в пограничном слое на шаре в турбулентный, и следовательно, к появлению кризиса обтекания и к снижению c_x при меньших скоростях V_∞ и соответственно при меньших числах Рейнольдса.

Влияние турбулентности набегающего потока на силу сопротивления обтекаемого тела объясняет *парадокс Дюбуа*. Ученый заметил, что если удерживать неподвижно шар в речном потоке, имеющем скорость V_∞ , то к нему достаточно приложить меньшую силу, чем если с постоянной скоростью V_∞ перемещать такой же шар, погруженный в толщу озерной воды.

В XVIII веке это рассматривалось как нарушение принципа относительности Галилея. С появлением представлений об отрыве пограничного слоя и о кризисе обтекания парадокс Дюбуа получил объяснение. В речном потоке за счет его естественной турбулентности кризис обтекания наступает при меньших скоростях, чем при движении шара в неподвижной (не турбулентной) озерной воде.

16.8. Способы улучшения гидроаэродинамических характеристик движущихся объектов

Затраты энергии на перемещение многих движущихся объектов (самолетов, автомобилей, подводных и надводных судов) связаны в значительной степени с преодолением силы сопротивления жидкости или газа, в которых они движутся. В связи с этим целесообразно рассмотреть возможности уменьшения силы сопротивления. Как следует из разд. 16.2 и 16.3, основной частью этой силы является сопротивление формы, т.е. сила, обусловленная сильной деформацией потока, возникающей вследствие отрыва пограничного слоя и образования следа за телом. В частности, при обтекании вертикальной пластины (см. рис. 16.6) сила сопротивления обусловлена только деформацией потока; сопротивление трения здесь не дает вклада в силу сопротивления.

Рассмотрим, как, изменяя форму тела, уменьшить силу сопротивления.

Если перед пластиной (рис. 16.23,а) установить полуцилиндр с диаметром $D = L$ (рис. 16.23,б), то при этом:

поперечное сечение следа уменьшится;

давление в следе станет близким к p_∞ (напомним, см. разд.16.3, что

в следе за вертикальной пластиной давление составляет $\left(p_\infty - 1,2 \frac{\rho V_\infty^2}{2} \right)$;

появится очень небольшая по величине сила сопротивления трения от вязких касательных напряжений на поверхности полуцилиндра.

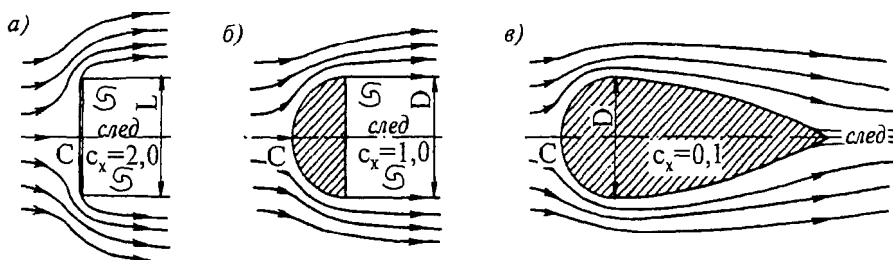


Рис. 16.23. Тела, имеющие одинаковый поперечный размер и различные силы сопротивления

В результате сила сопротивления полуцилиндра в два раза меньше, чем у пластины (у пластины $c_x = 2,0$, у полуцилиндра $c_x = 1,0$).

Сопротивление формы можно практически исключить, если присоединить к полуцилиндру обтекатель (рис. 16.23,в), который исключит отрыв пограничного следа и образование следа в виде застойной области. В этом случае основной вклад в силу сопротивления вносят вязкие касательные напряжения на поверхности тела (сопротивление трения), а коэффициент сопротивления уменьшается на порядок ($c_x \approx 0,1$).

Улучшить аэродинамическую характеристику может не только уменьшение силы сопротивления, но и обеспечение устойчивого значения этой силы. Этого можно достичь, придав телу форму с фиксированной точкой отрыва.

Например, если поверхность автомобиля такова, что она хорошо аппроксимируется половиной эллиптической цилиндрической поверх-

ности (рис. 16.24), то при движении такого транспортного средства сохраняются все особенности силы сопротивления при обтекании цилиндра и, в частности, кризис обтекания. При числе Рейнольдса $Re = 10^3$ происходят отрыв пограничного слоя и образование следа за автомобилем; этому соответствует скорость автомобиля

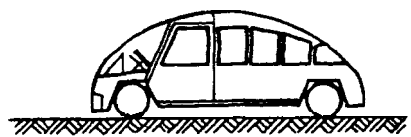


Рис. 16.24. Автомобиль с эллипсоидальным кузовом

$$V = Re \cdot \frac{v}{h} = 10^3 \frac{0,15}{100} \approx 1,5 \text{ см / с ,}$$

где h — высота автомобиля.

При этом безотрывное обтекание автомобиля практически не реализуется. При числе $Re = 5 \cdot 10^5$ (рис. 16.25) коэффициент сопротивления резко уменьшается (кризис обтекания). Этому числу Re соответствует скорость $V = 750 \text{ см/с} = 27 \text{ км/ч}$, следовательно, кризис обтека-

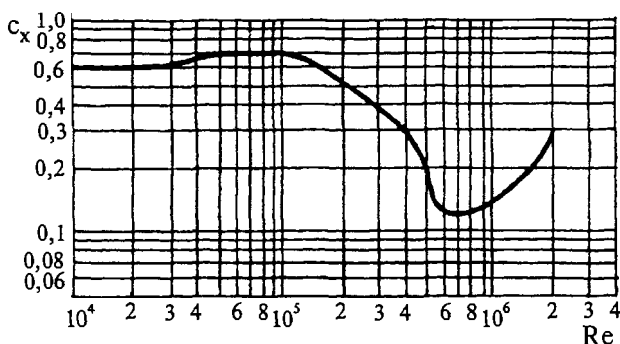


Рис. 16.25. Зависимость коэффициента c_x от числа Re для цилиндра с эллиптическим сечением

ния наступает при небольших скоростях. При $Re = 2 \cdot 10^6$, чему соответствует $V = 100 \text{ км/ч}$, коэффициент сопротивления резко возрастает в 4 раза; чтобы преодолеть это сопротивление необходимо увеличить в четыре раза нагрузку на двигатель.

Предположим, что двигатель развил достаточную мощность, и автомобиль движется со скоростью $V = 105 \text{ км/ч}$ по хорошему дорожному покрытию. Если вдруг покрытие ухудшилось, возросло сопротивление качению колес, и скорость автомобиля станет меньше 100 км/ч, сопротивление воздуха уменьшится в четыре раза, и двигатель автомобиля, будучи недогруженным, станет разгонять автомобиль, т.е. возникнут нежелательные условия неустойчивой работы двигателя, опасные для водителя.

Сложный характер зависимости $c_x = c_x(Re)$ для кругового и эллиптического цилиндров связан с тем, что на этих поверхностях нет фиксированной точки отрыва пограничного слоя; в зависимости от числа Re точка отрыва может перемещаться по поверхности цилиндра вверх или вниз по течению, деформируя картину течения и изменяя коэффициент сопротивления c_x . Поэтому современным автомобилям придают форму, обеспечивающую практически не зависящую от числа Re (а следовательно, и от скорости автомобиля) картину течения и практически постоянное значение коэффициента сопротивления (рис. 16.26). Отме-

тим, что приведенные выше рассуждения были основаны на экспериментальной зависимости $c_x = c_x(\text{Re})$, полученной при обтекании эллиптического цилиндра большой длины, т.е. для условий плоской зада-

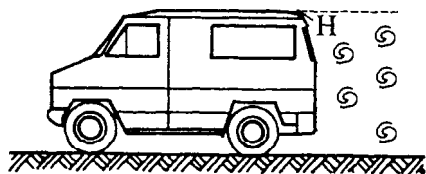


Рис. 16.26. Аэродинамически рациональная форма кузова автомобиля (с фиксированной точкой Н отрыва пограничного слоя)

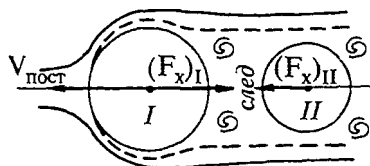


Рис. 16.27. Силы, действующие на движущееся тело I и на тело II, находящееся в следе

чи. Эти материалы можно использовать только для качественных оценок явлений при обтекании таких существенно трехмерных тел, как автомобиль.

В заключение укажем на возможность использования следа за движущимся телом для уменьшения силы сопротивления другого тела, движущегося за первым. Если обтекаемое тело неподвижно, то в непосредственной близости от него в следе осредненная скорость близка к нулю, и поэтому, поместив туда другое тело, можно ожидать, что оно практически не будет взаимодействовать с потоком, набегающим на первое тело, и, следовательно, сила сопротивления, действующая на тело, находящееся в следе за неподвижным телом, близка к нулю.

След за телом I (рис. 16.27), движущимся в неподвижной жидкости со скоростью $V_{\text{пост}}$, движется за телом с той же скоростью. Если в этот движущийся след поместить какое-либо другое тело II, то оно будет увлекаться этим следом, и на него будет действовать сила, направленная в сторону движения тела I. Этот эффект широко используют в спорте. Например, велосипедисты в соревнованиях стараются пристроиться в след за кем-либо из конкурентов и, используя увлекающую силу от следа, затрачивают на поддержание той же скорости меньше усилий, чем их конкурент. В соревнованиях "гонка преследования" (рис. 16.28) четыре велосипедиста, сменяя друг друга, лидируют, принимая на себя силу сопротивления, соответствующую скорости движения $V_{\text{пост}}$. Три товарища по команде, находящиеся в следе за лидером, не испытывают такого сопротивления воздуха и сохраняют силы, чтобы, когда придет их очередь, обеспечить на короткое время высокую скорость движения всей четверки.



Рис. 16.28. "Гонка преследования" на треке: велосипедисты поочередно лидируют, давая возможность остальным членам команды экономить силы для поддержания высокой скорости всей четверки

16.9. Обтекание крыловых профилей

Современные летательные аппараты поддерживаются в воздухе за счет подъемной силы, создаваемой крыльями (винт вертолета можно рассматривать как вращающиеся крылья). Крылья должны иметь возможно меньшее сопротивление, чтобы при фиксированной (задаваемой мощностью двигателя) тяге обеспечивать возможно большую скорость аппарата. Поэтому поперечному сечению крыла придают обтекаемый профиль, имеющий форму, близкую к представленному на рис. 16.29. Его называют *крыловым профилем*.

Покажем, как возникает подъемная сила при безотрывном обтекании крылового профиля. Вначале положим, что поле скорости потенци-

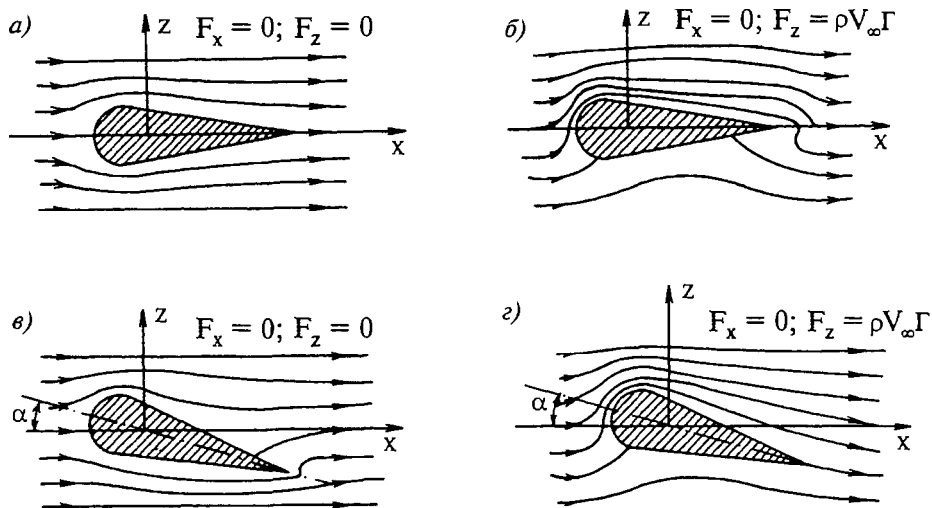


Рис. 16.29. Силы, действующие на крыловой профиль при безотрывном

обтекании: *а* — бесциркуляционное обтекание с углом атаки $\alpha = 0$;

б — циркуляционное обтекание, $\alpha = 0$; *в* — бесциркуляционное обтекание,

$\alpha > 0$; *г* — циркуляционное обтекание в соответствии с постулатом Чаплыгина

ально, а условие прилипания к твердой поверхности и пограничный слой отсутствуют. Если профиль имеет плоскость симметрии, и эта плоскость расположена вдоль потока (рис. 16.29, *а*), то в таком случае на профиль не действуют ни сила сопротивления, ни подъемная сила. Сила сопротивления равна нулю в соответствии с парадоксом Даламбера, поясненным на примере безотрывного обтекания цилиндра. Чтобы появилась подъемная сила, согласно теореме Жуковского необходимо, чтобы обтекание было циркуляционным, т.е. чтобы вокруг профиля потенциальное поле скорости имело ненулевую (равную Γ) циркуляцию по любому замкнутому контуру, охватывающему профиль. При этом система линий тока имеет вид, представленный на рис. 16.29, *б*; давление на нижнюю поверхность профиля p_n больше, чем давление на верхнюю поверхность p_v в каждой паре симметричных точек. Главный вектор сил давления представляет собой подъемную силу, которая на единицу длины (в направлении оси y) профиля составляет

$$(F_z)_{уд} = \rho V_\infty \cdot \Gamma, \quad (16.26)$$

Но для образования циркуляционного обтекания вследствие симметрии профиля и обтекающего его потока (относительно горизонтальной плоскости (x, y)) нет оснований, и поэтому обтекание представленное на рис. 16.29,б, не реализуется.

Если плоскость симметрии крылового профиля наклонена по отношению к скорости V_∞ на угол α (угол атаки), то при бесциркуляционном обтекании линии тока имеют вид, представленный на рис. 16.29,в. При таком течении также не возникают ни сила сопротивления, ни подъемная сила (хотя даже простейшие опыты, например, с воздушным змеем, показывают, что при $\alpha > 0$ подъемная сила не равна нулю; у картины течения на рис. 16.29,в имеется важный недостаток — особенность, не реализуемая в действительности). При обтекании острой задней кромки вблизи нее скорость жидкости теоретически должна быть бесконечно большой. Вместе с тем, эксперименты показывают, что при безотрывном обтекании линии тока вблизи задней кромки всегда касательны к контуру крылового профиля.

Это явилось основанием для введения в теорию обтекания *постулата Чаплыгина*. Согласно постулату в потоке образуется присоединенный потенциальный вихрь с такой циркуляцией Γ , что при его наложении на поле скорости, показанное на рис. 16.29,в, сформируется суммарное поле, в котором линии тока касательны к контуру профиля вблизи задней кромки (рис. 16.29,з). При этом возникает подъемная сила, определяемая по формуле Жуковского (16.26). С увеличением угла атаки α увеличивается и значение циркуляции Γ , обеспечивающей условие постулата, а следовательно, и подъемная сила. Расчеты показывают, что при небольших углах атаки $\alpha < 13^\circ$ возникающая в соответствии с постулатом Чаплыгина подъемная сила прямо пропорциональна углу атаки, и теоретическая зависимость $c_z = c_z(\alpha)$ хорошо подтверждается экспериментально (рис. 16.30). Отме-

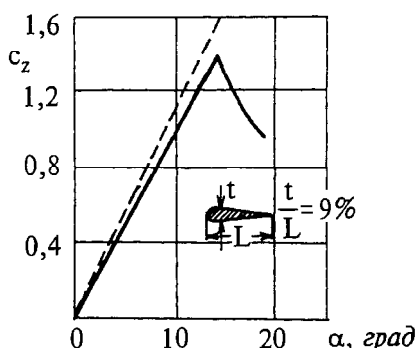


Рис. 16.30. Зависимость коэффициента c_z от угла атаки α : штриховая линия — теоретическое решение для плоской пластины, основанное на постулате Чаплыгина; сплошная линия — экспериментальная кривая для крылового профиля

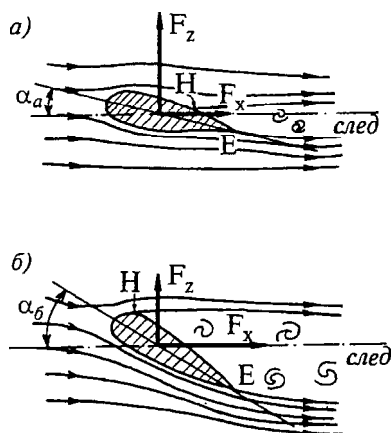


Рис. 16.31. Уменьшение подъемной силы F_z и увеличение силы сопротивления F_x при увеличении угла атаки: $\alpha_b > \alpha_a$

тим, что при безотрывном циркуляционном обтекании крылового профиля (см. рис. 16.29,з) горизонтальная сила сопротивления равна нулю (парадокс Даламбера).

Если учитывать вязкость жидкости и условия прилипания, сила сопротивления F_x не равна нулю и при малых углах атаки. Она складывается, во-первых, из сопротивления трения за счет вязкости, а во-вторых, из сопротивления формы за счет отрыва пограничного слоя и образования следа (рис. 16.31,а). Пока точка отрыва H находится недалеко от задней кромки, давление в следе, приблизительно равное p_∞ , на участке HE несущественно уменьшает подъемную силу. При увеличении угла атаки α точка отрыва H смещается вверх по течению и может достичь передней кромки (рис. 16.31,б), в этом случае на всю верхнюю поверхность профиля действует давление p_∞ , которое ненамного меньше, чем давление на нижнюю поверхность, и подъемная сила становится очень не-

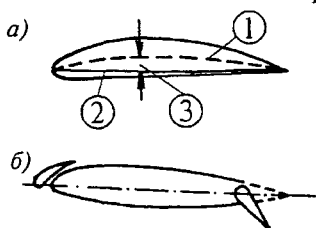


Рис. 16.32. Несимметричный крыловой профиль (а): 1 — средняя линия, 2 — хорда, 3 — стрелка прогиба; крыловой профиль с изменяемой геометрией (б)

большой. Переход от картины течения, представленной на рис. 16.31,а, к картине на рис. 16.31,б происходит при небольшом изменении угла атаки после превышения $\alpha = 13^\circ$ и имеет вид кризиса (см. рис. 16.30).

Большие размеры следа не только уменьшают подъемную силу, но и увеличивают силу сопротивления. Чтобы уменьшить размеры следа, крыловому профилю придают кривизну (рис. 16.32), которая обеспечивает лучшие эксплуатационные характеристики крылового профиля. Крылья самолетов снабжены закрылками, изменяющими поперечное сечение

профиля, для того, чтобы обеспечивать необходимую подъемную силу при различных скоростях полета (V_∞) и на различной высоте h (плотность воздуха ρ уменьшается с высотой).

16.10. Обтекание шара

Обтекание шара при числах Рейнольдса $Re = \frac{V_\infty D}{\nu} > 10$ имеет те же характерные особенности, что и обтекание цилиндра. Сила сопротивления

$$F_x = c_x \frac{\rho V_\infty^2}{2} \cdot \frac{\pi D^2}{4}, \quad (16.27)$$

где c_x — коэффициент силы сопротивления, зависящий от числа Рейнольдса (рис. 16.33 и 16.34). При обтекании шара, как и при обтекании цилиндра, формируется ламинарный пограничный слой, отрыв которого создает след за шаром, при переходе в турбулентный режим движения в пограничном слое выше линии отрыва размеры следа за шаром уменьшаются (рис. 16.35, см. также рис. 16.22), что резко уменьшает значения c_x (кризис обтекания). Сходство между обтеканием этих тел настолько велико, что некоторые эффекты обтекания, изложенные применительно к обтеканию цилиндра в разд. 16.4 (эффект Магнуса, парадокс Дюбуа, влияние турбулентности набегающего потока на наступле-

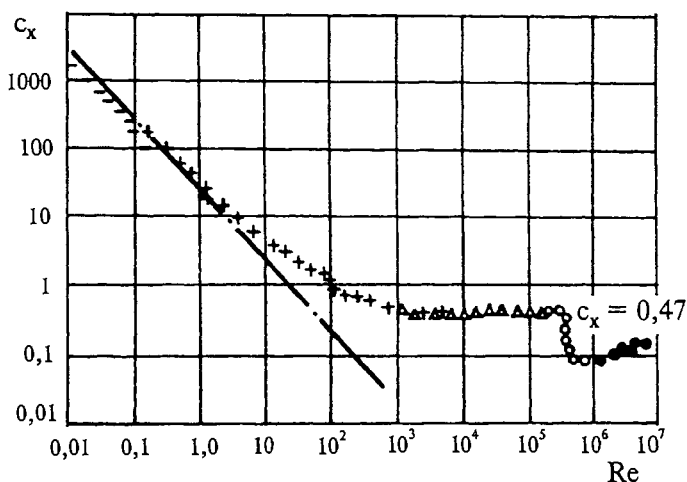


Рис. 16.33. Зависимость коэффициента сопротивления шара от числа Re , а также влияние условий опыта на величину c_x в районе $Re_{кр}$:

- — испытания Арнольда; + — испытания Шиллера;
 Δ — испытания Визельсбергера; $\circ$ — испытания Хорнера;
 $\bullet$ — испытания Джекобса; — — — данные по теории Стокса

ние кризиса обтекания), были проиллюстрированы на примере обтекания шара.

При малых числах Рейнольдса ($Re < 10$), когда силы инерции в жидкости пренебрежимо малы по сравнению с силами вязкости (см. гл. 20), задача об обтекании шара вязкой жидкостью имеет аналитическое решение, полученное Стоксом. Картина линий тока в этом случае симметрична относительно координатных плоскостей (рис. 16.36), течение безотрывное, за шаром образуется лишь тонкий след, давление линейно изменяется вдоль линий тока у поверхности шара. Согласно аналитическому решению Стокса

$$F_x = 3\pi\eta D \cdot V_\infty \quad (16.28)$$

Сравнивая это выражение с (16.27), найдем выражение для c_x :

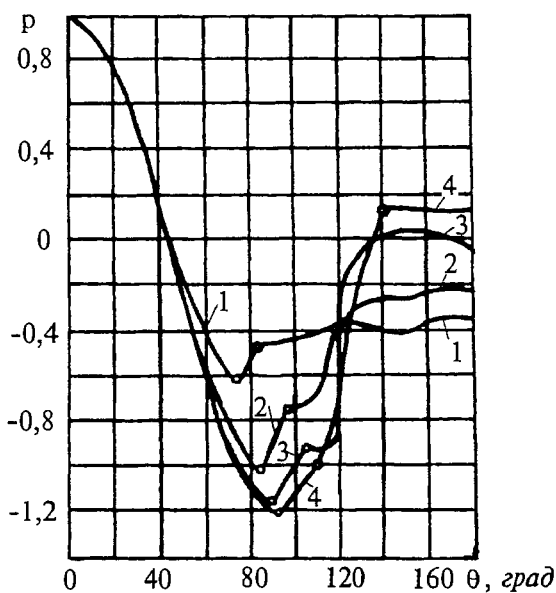


Рис. 16.34. Распределение давлений по поверхности шара в диаметральной плоскости, параллельной направлению потока:

- 1 — $Re = 1,57 \cdot 10^5$, $c_x = 0,471$;
 2 — $Re = 2,51 \cdot 10^5$, $c_x = 0,313$;
 3 — $Re = 2,98 \cdot 10^5$, $c_x = 0,151$;
 4 — $Re = 4,24 \cdot 10^5$, $c_x = 0,143$

$$c_x = \frac{24\eta}{\rho V_\infty D} = \frac{24}{Re}. \quad (16.29)$$

Сила сопротивления обусловлена на две трети вязкими касательными напряжениями, действующими на поверхности шара со стороны потока, а на одну треть — нормальными напряжениями на поверхности шара, которые на фронтальной части больше, чем на тыльной.

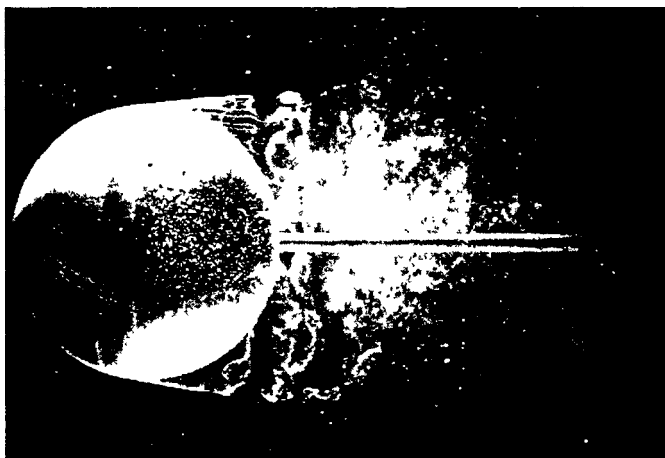


Рис. 16 35 Мгновенная картина потока при обтекании шара при $Re = 15\,000$. Подкраска обнаруживает ламинарный пограничный слой, отрывающийся перед экватором, причем этот слой остается ламинарным на длине, почти равной радиусу. Затем слой становится неустойчивым и быстро превращается в турбулентный

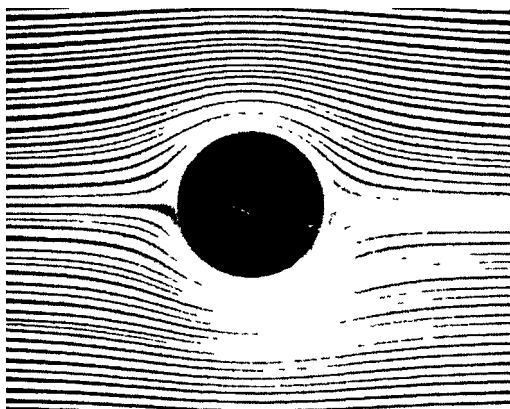


Рис. 16 36. Безотрывное обтекание шара при малых числах Рейнольдса

Для инженерно-строительных задач обтекание шара представляет интерес, в частности, при расчете движения и осаждения взвешенных твердых частиц в турбулентных потоках. Основной характеристикой взвешенных частиц (как правило, это частицы грунта с плотностью $\rho_t = 2600 \text{ кг/м}^3$) при решении подобных задач является *гидравлическая крупность* w — скорость равномерного падения частицы под действием силы тяжести в достаточно большом объеме покоящейся воды.

Как показывают теоретические и экспериментальные исследования, сила сопротивления движению тела при малых числах Re слабо зависит от формы тела (здесь основную роль играет сопротивление трения, а не сопротивление формы). Поэтому сферическая форма является вполне приемлемой аппроксимацией для частиц грунта, основная геометричес-

кая характеристика которой — их средний поперечный размер, называемый диаметром. В дальнейшем будем считать *характерный диаметр частицы* грунта равным диаметру шара, аппроксимирующего эту частицу.

При равномерном падении частицы в жидкости на нее действуют: сила тяжести, архимедова взвешивающая сила и сила сопротивления движению со скоростью w . Приравняв нулю сумму этих сил, получим

$$\rho_T \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi D^3 \cdot g - \rho_{\text{ж}} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi D^3 \cdot g - 3\pi\eta D \cdot w = 0, \quad (16.30)$$

где ρ_T — плотность твердой частицы; $\rho_{\text{ж}}$ — плотность жидкости.

Из (16.30) получим выражение для гидравлической крупности:

$$w = \frac{4}{9} \frac{\rho_T - \rho_{\text{ж}}}{\rho_{\text{ж}}} \cdot \frac{g D^2}{\nu}. \quad (16.31)$$

Сравнение результатов расчета по этой формуле с экспериментальными значениями w , полученными для оседания частиц грунта в воде при температуре 15°C (табл. 16.1), дало возможность сделать следующие выводы. Если принять $\rho_T = 2600 \text{ кг/м}^3$, что соответствует плотности квар-

Таблица 16.1

Гидравлическая крупность частиц грунта

d, мм	1,0	0,5	0,1	0,05	0,02	0,01
w, см/с	12,0	5,3	0,8	0,29	0,06	0,015
Re,	120	26,5	0,8	0,15	0,012	0,00015

цевого песка, то по зависимости (16.31) получаются завышенные значения w , которые превышают приведенные в табл. 16.1 в 2—10 раз. По-видимому, учитывая образование на поверхности мелких (особенно пылеватых и глинистых) частиц тонкого слоя воды, химически и механически связанной с материалом частиц, следует ожидать, что реальная эффективная объемная плотность частиц существенно меньше 2600 кг/м³. Принимая во внимание трудности определения эффективной плотности частиц, не следует рекомендовать зависимость (16.31) для практического определения гидравлической крупности частиц грунта.

Вместе с тем, расчеты по этой формуле дают хорошие результаты для скорости осаждения мелких капель воды и пыли в воздухе (при соответствующих значениях плотностей шариков и жидкой среды), когда числа $Re < 10^{-2}$.

16.11. Ветряной двигатель

Ветряные двигатели много столетий используются в хозяйственной деятельности в качестве источника энергии для мельниц, водяных насосов, деревообрабатывающих станков (рис. 16.37). Рабочее колесо ветряного двигателя (ветроколесо) состоит из нескольких (обычно от двух до пяти) лопастей, закрепленных на ступице. Ступица насажена на вал, которому она передает мощность, получаемую через лопасти от ветра. Действительное описание поля скорости воздушного потока, необходимое, в частности, для расчета количества и конфигурации лопастей,

требует трехмерной постановки задачи гидромеханики, что выходит за рамки данного курса. Одномерная постановка задачи позволяет оценить наиболее важные интегральные характеристики ветряного двигателя.

Для того, чтобы рационально задать контрольный объем, внутри которого находится ветроколесо, отметим, что при обтекании воздушным потоком неподвижного диска (рис. 16.38) за ним образуется застойная зона с близкими к нулю осредненными скоростями. При использовании модели невязкой жидкости в этой области скорость принимается равной нулю. В этом случае можно выделить осесимметрич-

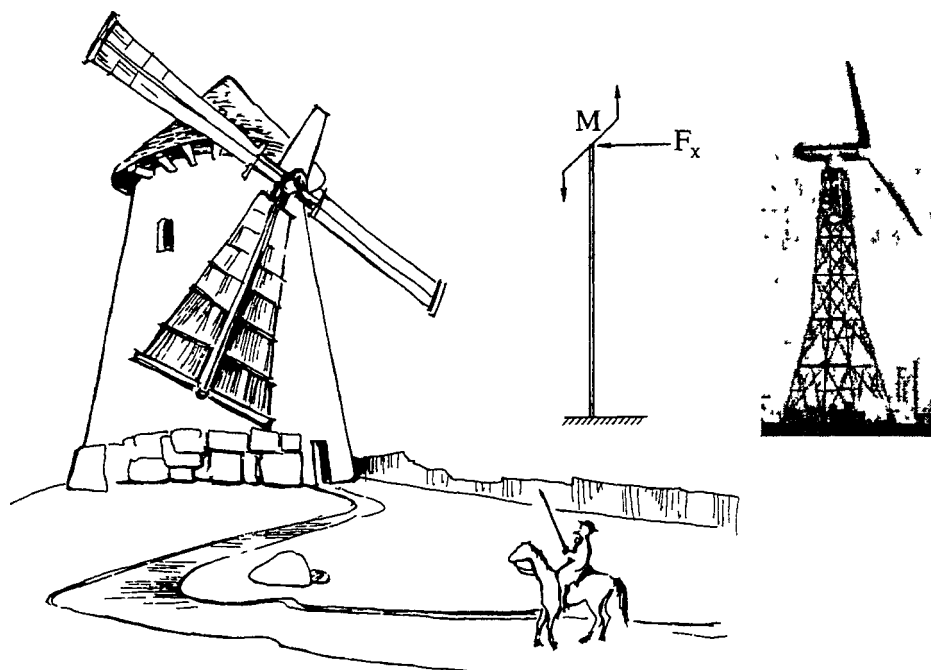


Рис. 16.37 Ветроколесо

ную поверхность тока Γ_0 , ограничивающую область с нулевым расходом жидкости: выше диска по течению скорость набегающего воздуха (скорость ветра) $V_\infty \neq 0$, и нулевой расход обеспечивается равной нулю площадью поперечного сечения области, ниже по течению площадь поперечного сечения области конечна, но скорость воздуха здесь равна нулю (застойная область, след за телом).

Если вместо непроницаемого (сплошного) диска в потоке воздуха расположить ветроколесо (рис. 16.39), которое можно рассматривать как решетку, проницаемую для воздушного потока, но оказывающую ему сопротивление с силой F , то поверхность потока Γ , проходящая через концы лопастей колеса, будет ограничивать поток с ненулевым расходом и будет иметь форму, промежуточную между формой Γ_0 (соответствующей абсолютно непроницаемому диску) и цилиндрической (соответствующей абсолютно проницаемому, не оказывающему никакого воздействия на поток, колесу).

Примем следующие упрощающие допущения:

- а) расчетный контрольный объем ограничен поверхностью тока Γ и двумя поперечными сечениями $\omega_{\text{вх}}$ и $\omega_{\text{вых}}$, которые достаточно удалены от ветроколеса, так что давление в этих сечениях одинаково и равно атмосферному;
- б) давление на поверхности тока Γ равно атмосферному;
- в) касательные напряжения на поверхности тока Γ отсутствуют;
- г) сила тяжести вносит пренебрежимо малый вклад в уравнения количества движения и кинетической энергии;

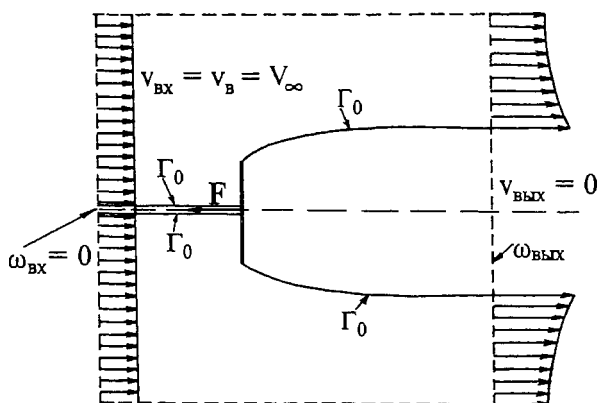


Рис. 16.38. Обтекание воздухом непроницаемого диска

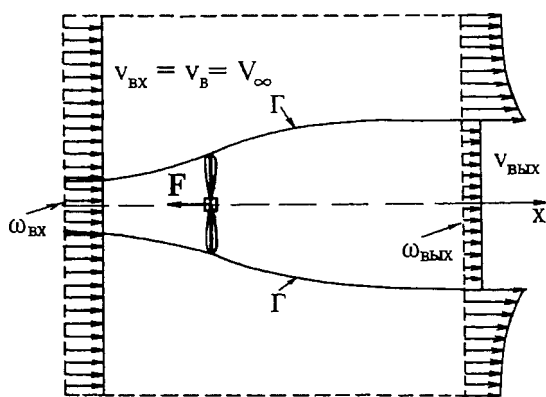


Рис. 16.39. Обтекание воздухом ветроколеса

- д) распределение скорости воздуха в поперечных сечениях достаточно равномерное, так что коррективы количества движения и кинетической энергии равны единице;
- е) воздух несжимаем;
- ж) вклад работы вязких напряжений в баланс механической энергии в контрольном объеме пренебрежимо мал.

Запишем для выделенного контрольного объема уравнение количества движения:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \int_V \rho \mathbf{f} dV + \int_A \mathbf{p}_n dA - \mathbf{F}, \quad (16.32)$$

где F — сила, действующая на контрольный объем со стороны ветроколеса, она введена в уравнение со знаком минус, так как направлена против оси x .

Проектируя все слагаемые на горизонтальную ось x , получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u_x dV + \int_A \rho u_n u_x dA = \int_V \rho f_x dV + \int_A p_{nx} dA - F_x.$$

Первое слагаемое в левой части этого уравнения равно нулю, так как движение установившееся; первое слагаемое в правой части выражает проекцию силы тяжести контрольного объема на ось x , а поскольку ось x горизонтальна, то это слагаемое равно нулю; касательные напряжения на контрольной поверхности из рассмотрения исключим (допущение в), а нормальные напряжения постоянны на всей поверхности (допущение б), и следовательно, второе слагаемое в правой части также равно нулю. Заменяя в поперечных сечениях местную скорость u на среднюю скорость v (допущение д), получим

$$+ \rho v_{vx}^2 \omega_{vx} - \rho v_{vwx}^2 \omega_{vwx} = F_x. \quad (16.33)$$

Запишем для этого же объема V уравнение, выражающее закон изменения кинетической энергии:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \frac{u^2}{2} dV = \int_V (\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}) \rho dV + \int_A (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p})_n dA - \int_V \Phi dV - N_k, \quad (16.34)$$

где N_k — мощность, отдаваемая потоком ветроколесу; чтобы N_k была положительна, она введена в уравнение со знаком минус.

Примем мощность N_k равной мощности потока, которую он затрачивает на преодоление силы F_x со средней скоростью воздушного потока v_k в поперечном сечении ω_k , совпадающем с плоскостью вращения ветроколеса,

$$N_k = F_x v_k. \quad (16.35)$$

Упростив уравнение (16.34), учитывая, что:

движение установившееся;

вклад силы тяжести пренебрежимо мал (допущение г);

на контрольной поверхности A действуют только постоянные по величине нормальные напряжения (допущения б и в);

работа внутренних сил пренебрежимо мала (допущение ж), получим

$$\frac{\rho v_{vx}^3 \omega_{vx}}{2} - \frac{\rho v_{vwx}^3 \omega_{vwx}}{2} = N_k. \quad (16.36)$$

В соответствии с уравнением неразрывности

$$v_{vx} \omega_{vx} = v_{vwx} \omega_{vwx} = v_k \omega_k = Q, \quad (16.37)$$

где Q — объемный расход воздуха, проходящего через ветроколесо.

Подставив F_x из (16.33) и N_k из (16.34) в (16.35) и используя (16.37), получим

$$\rho Q \frac{v_{vx}^2 - v_{vwx}^2}{2} = \rho Q (v_{vx} - v_{vwx}) v_k$$

или

$$v_k = \frac{v_{vx} + v_{vwx}}{2}. \quad (16.38)$$

Подставив выражение (16.38) для v_k и F_x из (16.33) в (16.35), получим

$$N_k = \frac{1}{2} \rho \omega_k (v_{вх} + v_{вых}) (v_{вх}^2 - v_{вых}^2). \quad (16.39)$$

Мощность N_k , отбираемая ветроколесом от воздушного потока, согласно (16.35) равна нулю в двух крайних случаях:

1) колесо непроницаемо (диск), так что $v_k = 0$, при этом сила F_x приобретает максимально большое значение, а выходная скорость $v_{вых} = 0$;

2) колесо абсолютно проницаемо, при этом $F_x = 0$, а $v_{вх} = v_{вых} = v_k$.

Между двумя нулевыми значениями положительно определенная функция N_k должна иметь хотя бы один максимум. Найдем его, дифференцируя выражение (16.39) по скорости $v_{вых}$, которая может изменяться от 0 до $v_{вх}$ (скорость $v_{вх}$ — это заданная скорость ветра $V_\infty = V_\infty$):

$$\frac{\partial N_k}{\partial v_{вых}} = \frac{1}{2} \rho \omega_k \left[(v_{вх}^2 - v_{вых}^2) + (v_{вх} + v_{вых}) (-2v_{вых}) \right] = 0,$$

отсюда

$$v_{вх} = 3 v_{вых}. \quad (16.40)$$

Следовательно, максимальная теоретическая мощность, которую ветроколесо может отобрать у потока воздуха, имеющего скорость $V_\infty = v_{вх}$, получим, подставив (16.40) в (16.39):

$$(N_k)_{\max} = \frac{8}{27} \rho \omega_k V_\infty^3, \quad (16.41)$$

что позволяет рассчитать теоретический коэффициент полезного действия ветроколеса. Поток кинетической энергии, который пронесется воздухом, имеющим скорость V_∞ , через площадь ω_k , рассчитывается по формуле

$$(N_k)_в = \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \omega_k V_\infty = \frac{1}{2} \rho V_\infty^3, \quad (16.42)$$

индекс “в” означает, что величина относится к ветру.

Тогда максимальный коэффициент полезного действия (извлечения мощности) ветрового колеса

$$\eta_{\max} = \frac{(N_k)_{\max}}{(N_k)_в} = \frac{\frac{8}{27} \omega_k V_\infty^3}{\frac{1}{2} \rho \omega_k V_\infty^3} = \frac{16}{27} \approx 59\%. \quad (16.43)$$

В действительности коэффициент полезного действия ветрового колеса оказывается заметно меньшим вследствие механических и электрических потерь и несовершенства обтекания лопастей колеса, а также вследствие невозможности покрыть ветроколесами все поперечное сечение потока воздуха.

В зависимости от количества лопастей и их аэродинамических качеств коэффициент полезного действия самого ветроколеса η_k изменяется от нуля при малых скоростях ветра (1–3 м/с) до 0,60–0,70 при расчетных оптимальных скоростях (обычно 7–9 м/с). Потери на трение в ветроагрегате оцениваются механическим коэффициентом полезного действия $\eta_{\text{мех}} = 0,90 - 0,95$. Коэффициент полезного действия электрогенератора составляет, как правило, $\eta_{\text{эл}} = 0,80 - 0,85$.

Для уменьшения зависимости обеспечения электроэнергией потребителей от метеорологических условий необходимо каждый ветроагрегат оборудовать аккумулятором энергии, который в безветренную погоду компенсирует отсутствие энергии от ветроагрегата. Это может быть электрический аккумулятор для небольших ветрогенераторов и даже гидроаккумулирующая электростанция для группы мощных ветроагрегатов. С учетом этого вводят коэффициент полезного действия аккумулирующей системы $\eta_{ак}$, который принимают равным 0,75—0,85.

Количество лопастей ветроколеса определяется в зависимости от требуемой скорости его вращения; чем меньше лопастей, тем больше скорость вращения, но меньше η_k . Вопрос о количестве лопастей выходит за пределы данного курса.

По приведенным зависимостям произведем оценочные расчеты основных характеристик ветроагрегата, если заданы электрическая мощность, необходимая потребителю $N_{необх}$, и расчетная скорость ветра $V_{в}$.

1. Определим диаметр ветроколеса.

С учетом всех потерь мощность ветроколеса

$$N_k = \frac{N_{необх}}{\eta_k \eta_{мех} \eta_{эл} \eta_{ак}}.$$

Эта мощность согласно (16.41) связана со скоростью ветра V_{∞} и

площадью ветроколеса $\omega_k = \frac{\pi D_k^2}{4}$. В результате имеем

$$D_k = \sqrt{\frac{4\omega_k}{\pi}} = \sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot \frac{27}{8} \cdot \frac{N_k}{\rho V_{\infty}^3}} = \sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot \frac{27}{8} \cdot \frac{N_{необх}}{\eta_k \cdot \eta_{мех} \cdot \eta_{эл} \cdot \eta_{ак} \cdot \rho V_{\infty}^3}}.$$

2. Определим силу, действующую на мачту, со стороны ветроагрегата.

Мощность, передаваемая ветроколесом электроагрегату, а следовательно, и сила, действующая на мачту, не включает потери на самом ветроколесе. Поэтому в зависимость (16.35) следует подставить мощность на оси ветроколеса

$$N_k = \frac{N_{необх}}{\eta_{мех} \eta_{эл} \eta_{ак}}.$$

Согласно (16.38) и (16.40) скорость

$$v_k = \frac{2}{3} v_{вх} = \frac{2}{3} V_{\infty},$$

искомая сила

$$F_x = \frac{N_k}{v_k} = \frac{N_{необх}}{\eta_{мех} \eta_{эл} \eta_{ак} \frac{2}{3} V_{\infty}}.$$

3. Определим момент сил M , действующий на мачту со стороны ветроагрегата. Для этого должна быть дополнительно задана угловая скорость вращения ветроколеса Ω . Определив мощность на оси ветроколеса, как в предыдущей задаче, найдем

$$M = \frac{N_k}{\Omega} = \frac{N_{необх}}{\eta_{мех} \eta_{эл} \eta_{ак} \Omega}.$$

Значения коэффициентов полезного действия следует принимать для расчетных (оптимальных) условий работы ветроагрегата.

16.12. Основы расчета ветровой нагрузки на конструкции и сооружения

Приведенные в этом разделе сведения извлечены из СНиП II-A-6-74. Нагрузки и воздействия. Нормы проектирования. Поскольку они являются лишь основой расчета ветровой нагрузки, из рассмотрения исключаются:

гибкие конструкции, для которых необходимо учитывать динамическое воздействие пульсаций скорости ветра;

порывистость ветра;

влияние рельефа местности.

Первый этап расчета ветровой нагрузки — установление (аппроксимация) *формы обтекаемого объекта*. Как правило, целесообразно привести задачу обтекания сооружения, конструкции или элемента конструкции к плоской задаче. Так, дымовые трубы, провода ЛЭП, кабели аппроксимируются цилиндрами большой длины; здания — призмами; стержни, составляющие фермы или опоры ЛЭП — удлинненными телами с соответствующим профилем поперечного сечения (швеллер, уголок, двутавр и т.п.). Значения расчетных коэффициентов c_x для наиболее часто встречающихся в строительной практике поперечных сечений представлены в табл. 16.2. На каждом профиле указаны направление ветра и характерный размер, вводимый в расчет.

Второй этап — установление *расчетной скорости ветра и скоростного напора*.

По новой карте районирования территории России по скоростным напорам ветра принято *семь ветровых районов*: район VII — Земля Франца Иосифа, о-в Новая Земля, побережье залива Шелехова (Охотское море) и Берингова моря, восточный берег и юг Камчатки, юг и север о-ва Сахалин, северо-западное побережье Японского моря; район VI — п-ов Таймыр, устье Лены, побережье Карского моря; район V — северное побережье Кольского п-ва, побережье вблизи городов Новороссийск, Махачкала, Дербент, Прикавказье (г. Ставрополь), п-ов Ямал, район

Таблица 16.2

Значения коэффициентов c_x различных профилей поперечных сечений

Профиль								
Значение c_x	2,00	2,00	2,18	1,20	1,83	2,00	2,00	2,40
Профиль								
Значение c_x	1,50	0,70	1,75	1,10	1,20	1,90	2,00	1,60
Профиль								
Значение c_x	1,85	2,20	1,90	0,50	2,05	0,87	2,00	2,00

г. Кокчетава, побережье Охотского моря, Приморский край; район IV — побережье Балтийского моря, Северный Урал, район Обской Губы, побережье нижнего течения Лены; район III — побережье Финского залива, юг европейской части России, район г. Норильска, Биробиджан; район I и II — центральная часть России, север и северо-восток европейской части, западная и центральная части Сибири.

Значения *нормативных* скоростных напоров ветра q_n и соответствующих скоростей ветра V_b для высоты над поверхностью земли 10 м представлены в табл. 16.3.

Таблица 16.3.

Нормативные характеристики ветра

Характеристика	Географический район						
	I	II	III	IV	V	VI	VII
Скорость ветра V_b , м/с	21	24	27	30	34	37	40
Скоростной напор $q_n = \frac{\rho V_b^2}{2}$, Па	270	350	450	550	700	850	1000

Для определения скоростного напора ветра, действующего на здания и сооружения высотой более 10 м, вводятся поправочные коэффициенты, учитывающие *вид местности* (рис. 16.40).

К виду местности А относятся степи, лесостепи, пустыни, открытые побережья морей, озер, водохранилищ; к виду местности Б — местности, застроенные невысокими зданиями и занятые лесными массивами. Распределение препятствий, мешающих распространению ветра на высоте более 10 м, на этой местности равномерное. Вид местности В — города со зданиями высотой до 100—120 м.

Ветровая нагрузка на высокое сооружение определяется делением его на зоны не более 10 м по высоте; для каждой зоны принимается нормативный скоростной напор на высоте середины зоны.

Сила сопротивления *плоской фермы* в поперечном потоке, направленном по нормали к плоскости фермы, рассчитывается следующим образом. Как правило, ферма содержит одну или несколько секций, состоящих из одной или нескольких повторяющихся вдоль фермы геометрических форм, которые называют отсеком фермы. Коэффициент силы сопротивления для каждого отсека вычисляют по формуле

$$c_{x0} = k \frac{\sum c_{xi} A_i}{A_{от}}, \quad (16.44)$$

где c_{xi} и A_i — коэффициент силы сопротивления и характерная площадь стержня или косынки, их значения берутся по участку, просматриваемому

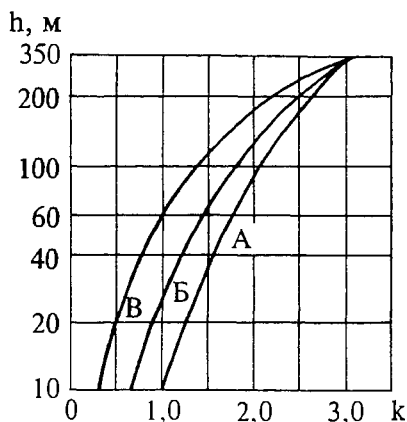


Рис. 16.40. Поправочные коэффициенты, учитывающие вид местности

между поясами; A_{0T} — “теньевая” площадь отсека, равная площади проекции на плоскости отсека всех его элементов, принимается за характерную площадь; k — коэффициент, учитывающий взаимное аэродинамическое влияние стержней, зависит от относительного заполнения A_{0T}/A , т.е. от отношения теневой площади A_{0T} к габаритной площади $A = b\ell$, вычисляемой по средней ширине b и высоте ℓ отсека; при изменении A_{0T}/A от 0 до 0,3 значение k снижается от 1 до 0,74 и остается равным 0,74 до значения $A_{0T}/A = 0,9$; при увеличении значения A_{0T}/A от 0,9 до 1,0 значение k возрастает от 0,74 до 1,0.

Коэффициент силы сопротивления фермы, состоящей из нескольких отсеков со своими значениями C_{x0j} и A_{0Tj} , вычисляется по формуле

$$c_x = \frac{\sum_j c_{x0j} A_{0Tj}}{A_F},$$

где $A_F = \sum_j A_{0Tj}$.

В СНиП указаны приемы расчетов силы сопротивления и аэродинамического момента в поперечном и косом потоках.

Значение силы сопротивления во всех расчетах равно произведению коэффициента c_x на расчетную площадь тела и на расчетное значение скоростного напора ветра.

Пример расчета ветровой нагрузки

Рассчитаем нагрузку на цилиндрическую дымовую трубу диаметром $D = 3,0$ м и высотой 30 м, расположенную в городке строителей газопровода на полуострове Ямал (рис. 16.41).

Полуостров Ямал находится в V ветровом районе России. По табл.

16.3 находим нормативный скоростной напор $q_n = 700 \text{ Па} = 700 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$. Местность, застроенная невысокими зданиями, относится к виду местности Б. Разделим трубу по высоте на три секции по 10 м каждая. По графику рис. 16.40 для середины каждой секции найдем поправочный коэффициент к нормативному напору:

$$k_6^{(1)} = 0,65; \quad k_6^{(2)} = 0,78; \quad k_6^{(3)} = 0,97.$$

Распределенную нагрузку на один погонный метр высоты трубы по секциям вычислим по зависимостям:

$$q^{(1)} = k_6^{(1)} q_n D = 0,65 \cdot 700 \cdot 3 = 1365 \frac{\text{Н}}{\text{м}};$$

$$q^{(2)} = k_6^{(2)} q_n D = 0,78 \cdot 700 \cdot 3 = 1638 \frac{\text{Н}}{\text{м}};$$

$$q^{(3)} = k_6^{(3)} q_n D = 0,97 \cdot 700 \cdot 3 = 2037 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Результаты расчета представлены на рис. 16.41.

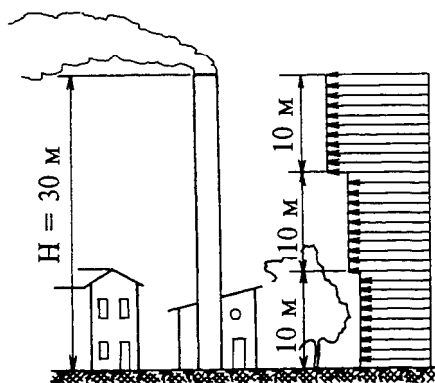


Рис. 16.41. Пример расчета ветровой нагрузки на вертикальную трубу

ОСРЕДНЕННАЯ МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА. УРАВНЕНИЯ РЕЙНОЛЬДСА

17.1. Простейшее решение уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости (уравнений Навье—Стокса)

Уравнения движения вязкой жидкости (14.34) были получены в гл. 14 на основе закона изменения количества движения, который записывается для напряжений, действующих в жидкости, и дополняется обобщенным законом Ньютона, устанавливающим линейную зависимость между тензором напряжений и девиатором тензора скорости деформации. Для несжимаемой жидкости систему трех уравнений Навье—Стокса для трех проекций скорости $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ представим в виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i, \quad (17.1)$$

где $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ — вектор плотности распределения внешней массовой силы, действующей на жидкость; p — гидродинамическое давление; ρ — плотность жидкости; ν — кинематический коэффициент вязкости; Δ — оператор Лапласа; $\alpha, i = 1, 2, 3$. Здесь и далее используем для сокращения записи правило суммирования по дважды повторяющемуся в одночленных выражениях целочисленному индексу от 1 до 3. Согласно этому правилу

$$u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^3 u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} = u_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3},$$

а уравнение несжимаемости для жидкости будет иметь вид

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0;$$

$$\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \equiv \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \equiv \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \right). \quad (17.2)$$

Укажем дополнительно, что оператор Лапласа согласно этому правилу можно представить в виде

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}. \quad (17.3)$$

Система из четырех уравнений (три уравнения Навье—Стокса и уравнение неразрывности) содержит четыре неизвестные величины (u_1, u_2, u_3, p) и поэтому является замкнутой. Обычно полагают, что при задании соответствующих граничных и начальных условий, решая эту систему, можно найти указанные неизвестные. При этом теоретически существует принципиальная возможность найти поля мгновенных местных скоростей и давлений в жидкости, хотя при рассмотрении турбулентного движения жидкости такие решения могут оказаться малоприменимыми для практического использования.

Для выяснения эффективности уравнений (17.1) и (17.2) для описания и анализа турбулентного движения оценим основные упрощения и допущения, которые делают при решении уравнений (17.1) в случае простейшей плоской задачи о ламинарном течении в трубе с параллельными стенками (течение Пуазейля).

Расположим оси координат так, как показано на рис. 17.1; ось x_2 перпендикулярна плоскости $x_1 O x_3$; будем считать, что все параметры потока не зависят от координаты x_2 и проекция скорости на ось x_2 равна нулю. При турбулентном течении жидкости поле мгновенной местной скорости всегда трехмерное, плоских турбулентных потоков не существует; поэтому, ограничившись решением *плоской* задачи, уже не следует рассчитывать, что с помощью упрощенной соответствующим образом системы (17.1) удастся описать турбулентное движение жидкости.

Проанализируем допущения и ограничения, которые обычно делают для решения уравнений движения

1. Рассмотрим установившееся движение, т.е. полагаем

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (17.4)$$

Это предположение по существу исключает из рассмотрения решения, отвечающие турбулентным течениям, которые как раз и характеризуются невыполнением равенства (17.4).

2. Считаем, что

$$u_1 = u_1(x_3), \quad u_3 = 0. \quad (17.5)$$

Вводя это ограничение, исключаем из рассмотрения, в частности, течения, характеризующиеся волнообразными линиями тока (с амплитудой волны, равной нулю у стенки).

3. Из внешних массовых сил принимаем во внимание лишь силу тяжести, т.е.

$$f_1 = 0; \quad f_2 = 0; \quad f_3 = -g. \quad (17.6)$$

Используя указанные допущения, из системы (17.1) можно получить два уравнения:

$$\text{при } i = 1 \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\eta}{\rho} \frac{d^2 u_1}{dx_3^2}; \quad (17.7)$$

$$\text{при } i = 3 \quad 0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3}. \quad (17.8)$$

Вследствие того, что решается плоская задача, второе уравнение системы (17.1) при $i = 2$ обращается в тождество. В тождество обращается также и уравнение несжимаемости.

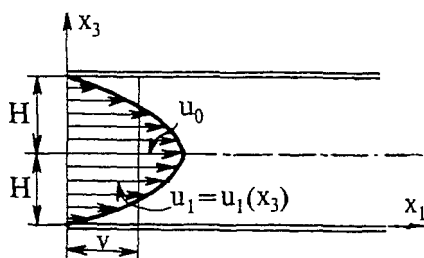


Рис. 17.1. Распределение скорости в плоском потоке при ламинарном режиме движения жидкости

Из уравнения (17.8) следует гидростатический закон распределения давления в поперечном сечении потока:

$$p = p_0(x_1) - \rho g x_3, \quad (17.9)$$

где $p_0(x_1)$ — давление при $x_3 = 0$ в точке с координатой x_1 .

Поскольку поле скорости однородно вдоль оси x_1 , а распределение давления подчиняется зависимости (17.9), то величина $\frac{\partial p}{\partial x_1}$ постоянна для всего потока. С учетом этого обстоятельства решение уравнения (17.7) при выполнении граничных условий прилипания на стенках

$$u_1(0) = 0; \quad u_1(2H) = 0 \quad (17.10)$$

имеет вид

$$u_1 = \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_1} \cdot (x_3^2 - 2Hx_3). \quad (17.11)$$

Сформулируем два вспомогательных положения, назвав их *леммами*.

Лемма 1. При установившемся продольно-однородном течении (не обязательно плоском), когда $u_1 = u_1(x_2, x_3)$, $u_2 = u_3 = 0$, вязкие нормальные напряжения, действующие на поверхности поперечного сечения, равны нулю: $p_{11}^s = 2\eta \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0$. Полные нормальные напряжения на этой поверхности (см. (14.26)) равны по абсолютной величине гидродинамическому давлению

$$p_{11} = p_{11}^s - p = -p.$$

Лемма 2. Согласно выражению (17.8) в поперечных сечениях потоков жидкости гидродинамическое давление в поле силы тяжести распределяется по гидростатическому закону, если движение параллельное.

Эти леммы приведены без специального обоснования в разд. 5.1 и использованы в разд. 5.4, 5.9, 5.14, 11.2.

Попытки решить систему (17.1) без введения упрощающих допущений (17.4) и (17.5) приводят к весьма значительным математическим трудностям, большинство из которых до настоящего времени оказались непреодолимыми, хотя и теперь уже имеются определенные успехи, связанные с использованием современных вычислительных средств. В то же время, как отмечалось выше, использование этих допущений исключает возможность исследования турбулентности на основе непосредственного решения уравнений (17.1). Поэтому теоретические исследования турбулентности получили развитие на основе использования модели Рейнольдса—Буссинеска. Выделив практически интересные, измеримые характеристики турбулентных потоков (такие, как осредненная скорость, характерные пульсационная скорость и частота пульсаций (см. разд. 5.10)), используя систему (17.1), получают и анализируют уравнения для этих характеристик.

Наиболее важная характеристика турбулентного потока — осредненная скорость. Этой величине уделяется основное внимание и при теоретических и при экспериментальных исследованиях. Поэтому в первую очередь обратимся к выводу уравнений для осредненной скорости, которые обычно называются уравнениями Рейнольдса.

17.2. Уравнения Рейнольдса

Получить уравнения для осредненной скорости из системы уравнений (17.1) можно, преобразовав систему с помощью тождества

$$\frac{\partial(u_i u_\alpha)}{\partial x_\alpha} = u_i \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} = u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}; \quad i, \alpha = 1, 2, 3, \quad (17.12)$$

при выводе которого использовалось уравнение несжимаемости (17.2). Кроме того, оператор Лапласа запишем, воспользовавшись правилом суммирования по повторяющемуся индексу (см. (17.3)). В результате представим (17.1) в виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_\alpha)}{\partial x_\alpha} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha^2}. \quad (17.13)$$

Наша цель — получение уравнения для осредненной скорости в общем случае неустановившегося движения. Поэтому не будем пользоваться определениями осредненной скорости и давления в виде (5.74) и (5.75), так как они пригодны лишь для установившегося движения. Следуя Рейнольдсу, будем полагать, что существует некоторый оператор осреднения актуальных характеристик, свойства которого выясняются в процессе вывода уравнений. Эти свойства, известные под названием “*правил осреднения Рейнольдса*”, будут сформулированы далее для двух величин — ϕ и ψ .

Операцию осреднения, как и ранее, обозначаем с помощью горизонтальной черты над символом осредняемой величины; таким образом,

$$\phi = \bar{\phi} + \phi'; \quad \psi = \bar{\psi} + \psi', \quad (17.14)$$

где $\bar{\phi}$ и $\bar{\psi}$ — осредненные, а ϕ' и ψ' — пульсационные составляющие величин ϕ и ψ . Для общности предполагаем, что внешняя массовая сила также является изменяющейся во времени величиной и плотность ее распределения $\bar{f}$ также может быть представлена в виде суммы осредненной $\bar{f}$ и пульсационной f' составляющих.

Приступим к выводу уравнений Рейнольдса. Поскольку левая и правая части уравнений (17.13) равны во все моменты времени, то, следовательно, их осредненные значения также равны между собой.

Первое правило осреднения запишем в виде

$$(I) \quad \overline{\phi + \psi} = \bar{\phi} + \bar{\psi}.$$

Воспользовавшись им, из (17.13) получим

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial(u_i u_\alpha)}{\partial x_\alpha}} = \bar{f}_i - \frac{1}{\rho} \overline{\frac{\partial p}{\partial x_i}} + \nu \overline{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha^2}}. \quad (17.15)$$

Три последующих правила:

$$(II) \quad \bar{c} = c, \text{ если } c = \text{const};$$

$$(III) \quad \overline{c\phi} = c\bar{\phi}, \text{ если } c = \text{const};$$

$$(IV) \quad \overline{\frac{\partial \phi}{\partial x_i}} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_i}; \quad \overline{\frac{\partial \phi}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t}.$$

Используя эти правила, из (17.15) получим

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{u_1 u_\alpha})}{\partial x_\alpha} = \bar{f}_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_\alpha^2}. \quad (17.16)$$

В уравнении (17.16) все члены, кроме второго слагаемого в левой части, содержат осредненные значения скорости и давления. При преобразовании этого слагаемого потребуется еще одно правило осреднения:

$$(Y) \quad \overline{\phi \psi} = \bar{\phi} \bar{\psi}.$$

Выделим из выражения $\overline{u_1 u_\alpha}$ осредненные скорости:

$$\begin{aligned} \overline{u_1 u_\alpha} &= \overline{(\bar{u}_1 + u'_1)(\bar{u}_\alpha + u'_\alpha)} = \overline{\bar{u}_1 \bar{u}_\alpha + u'_1 \bar{u}_\alpha + \bar{u}_1 u'_\alpha + u'_1 u'_\alpha} = \\ &= \overline{\bar{u}_1 \bar{u}_\alpha} + \overline{u'_1 \bar{u}_\alpha} + \overline{\bar{u}_1 u'_\alpha} + \overline{u'_1 u'_\alpha} = \bar{u}_1 \bar{u}_\alpha + \overline{u'_1 u'_\alpha}; \end{aligned}$$

здесь было использовано равенство $\overline{u'_1} = 0$ (см. (5.77)).

Подставив этот результат в (17.16), получим

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{u}_1 \bar{u}_\alpha + \overline{u'_1 u'_\alpha}) = \bar{f}_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_\alpha^2}. \quad (17.17)$$

В дополнение к трем уравнениям (17.17), используя правила (I) и (IV), из уравнений несжимаемости (17.2) легко получить уравнение несжимаемости для осредненной скорости:

$$\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0. \quad (17.18)$$

Систему (17.17) преобразуем, применяя тождество (17.12) и переносим в правую часть члены, содержащие пульсационные скорости. В результате получаем *систему трех уравнений Рейнольдса*:

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + \bar{u}_\alpha \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_\alpha} = \bar{f}_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\eta \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_\alpha} - \rho \overline{u'_1 u'_\alpha} \right); \quad 1, \alpha = 1, 2, 3. \quad (17.19)$$

Рассматривая полученную систему четырех уравнений (три уравнения Рейнольдса (17.19) и уравнение несжимаемости (17.18)) и сравнивая ее с системой четырех исходных уравнений (три уравнения Навье—Стокса (17.1) и уравнение несжимаемости (17.2)), отметим следующее.

1. Исходная система четырех уравнений была замкнутой, так как она содержала четыре неизвестные величины (u_1, u_2, u_3, p) . Полученная система четырех уравнений содержит десять неизвестных величин $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{p}, \overline{u_1'^2}, \overline{u_1' u_2'}, \overline{u_1' u_3'}, \overline{u_2'^2}, \overline{u_2' u_3'}, \overline{u_3'^2})$. В связи с этим возникает проблема замыкания системы уравнений Рейнольдса, т.е. присоединения к этой системе таких уравнений, в которых устанавливаются дополнительные зависимости между перечисленными неизвестными величинами.

2. Весьма неожиданным и парадоксальным на первый взгляд представляется тот факт, что система уравнений относительно осредненных

характеристик оказалась более сложной, чем исходная система уравнений (17.1) и (17.2). Естественно было, казалось бы, для определения такой частной интегральной характеристики, какой является осредненная скорость, получить более простые уравнения.

Может создаться впечатление, что если до сих пор оказалось невозможным преодолеть математические трудности при решении уравнений Навье—Стокса, так какой же смысл пользоваться еще более сложными уравнениями для определения лишь одной частной характеристики турбулентного потока — осредненной скорости. Основным доводом в пользу

уравнений Рейнольдса является то, что локальное ускорение $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}$, входящее в левую часть, порождается нестационарными граничными условиями, и, если положить $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = 0$, то можно рассматривать уравнения Рейнольдса при стационарных граничных условиях, которые будут описывать поле осредненной скорости при *турбулентном* режиме движения.

Как было отмечено в разд. 17.1, если положить в уравнениях Навье—Стокса $\frac{\partial u_i}{\partial t} = 0$, то этим самым турбулентные течения вообще из рассмотрения исключаются. Другими словами, чтобы найти поле осредненной скорости для установившегося турбулентного движения жидкости (которое может иметь место при неизменных во времени граничных условиях) с помощью уравнений Навье—Стокса, необходимо искать *нестационарное* решение этих уравнений, т.е. исходить из того, что $\frac{\partial u_i}{\partial t} \neq 0$ ($i = 1, 2, 3$). Осредняя во времени полученное нестационарное решение, можно найти интересующее нас стационарное поле осредненной скорости. Это сложный, практически невозможный в настоящее время путь решения задачи (в строгой и полной постановке).

Решая ту же задачу с помощью уравнений Рейнольдса, можно положить $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = 0$ и искать *стационарное* решение этих уравнений, которое и определит поле осредненных скоростей. Это несравненно более простая математическая задача.

3. Перенос слагаемых $\overline{u'_i u'_\alpha}$ из левой части уравнений, где содержатся члены, выражающие ускорения, в правую часть, где содержатся члены, выражающие действующие на жидкость силы, и присоединение этих слагаемых к вязким напряжениям является предпосылкой к трактовке этих слагаемых как динамических характеристик, т.е. некоторых дополнительных напряжений, действующих в осредненном потоке. Слагаемые $\overline{\rho u'_i u'_\alpha}$ образуют, как и напряжения, симметричный тензор второго ранга и называются *турбулентными напряжениями* или *напряжениями Рейнольдса*. Обозначим эти напряжения через $p_{i\alpha}^T = -\rho \overline{u'_i u'_\alpha}$, где индекс “Т” указывает, что эти напряжения турбулентные, т.е. являются характеристикой осредненного потока. Отметим, что при $i = \alpha$ напряжение $p_{\alpha\alpha}^T$ — это нормальное напряжение на площадке, перпендику-

лярной оси x_α , а при $i \neq \alpha$ напряжение $p_{i\alpha}^T$ — касательное напряжение, которое действует на площадку, перпендикулярную оси x_i , и направлено параллельно оси x_α .

4. Если рассматривать установившееся турбулентное движение, то вместо правил осреднения Рейнольдса (I)—(Y) можно ввести осредненную характеристику с помощью интеграла

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \varphi(t) dt, \quad (17.20)$$

где T — период осреднения, который должен быть достаточно большим, чтобы осредненное значение $\bar{\varphi}$ от него не зависело.

В этом случае указанные правила (за исключением второго правила из IV) можно получить из зависимости (17.20) (они являются следствиями линейности этой зависимости). Очевидно, что использование осреднения согласно (17.20) — более сильное ограничение, чем использование правил (I)—(Y). Действительно, применяя (I)—(Y), можно получить уравнения Рейнольдса для *нестационарных* турбулентных потоков, в то время как на основе (17.20) можно получить лишь уравнения для *стационарных* турбулентных потоков.

5. В уравнения Рейнольдса наряду с осредненными скоростью и давлением входят также и такие важные характеристики турбулентности, как, например, среднеквадратичные значения пульсационных скоростей. Как было отмечено ранее, изучение таких характеристик само по себе представляется важным аспектом теории турбулентности.

17.3. Проблема замыкания уравнений Рейнольдса.

Цепочка уравнений Келлера—Фридмана. Уравнение баланса энергии

Предложение о замыкании системы уравнений Рейнольдса с помощью только уравнений Навье—Стокса и уравнения неразрывности (без привлечения дополнительных сведений экспериментального и теоретического характера) было сделано Л.В.Келлером и А.А.Фридманом. Они разработали общий метод составления уравнений для осредненных значений гидромеханических характеристик потока. Проиллюстрируем этот метод на частном примере получения уравнений для осредненных произведений пар пульсационных скоростей $u_i' u_j'$ (т.е. для турбулентных напряжений), которые входят в уравнение Рейнольдса

Подставим выражение для $\frac{\partial u_i}{\partial t}$ и $\frac{\partial u_j}{\partial t}$ из уравнений Навье—Стокса (17.1) в очевидное равенство:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_i u_j = \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad (17.21)$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\rho u_i u_j u_\alpha + p (u_i \delta_{j\alpha} + u_j \delta_{i\alpha}) - (u_i \sigma_{j\alpha} + u_j \sigma_{i\alpha}) \right] = \\ = (\rho u_i f_j + \rho u_j f_i) + \frac{p \sigma_v}{\eta} - \left(\sigma_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + \sigma_{j\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \right), \end{aligned} \quad (17.22)$$

где $\sigma_{ij} = p_{ij}^B = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ — выражение тензора вязких напряжений в

соответствии с обобщенным законом Ньютона (14.29) для несжимаемой жидкости; δ_{ij} — символ Кронекера ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$).

Если в тождество, аналогичное (17.21), но записанное для осредненных скоростей, подставить частные производные по времени от осредненной скорости из уравнений Рейнольдса, то получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\rho u_i \bar{u}_j}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\overline{\rho u_i \bar{u}_j \bar{u}_\alpha} + \overline{\rho u_i' u_\alpha' \bar{u}_j} + \overline{\rho u_j' u_\alpha' \bar{u}_i} + \bar{p} (\bar{u}_i \delta_{j\alpha} + \bar{u}_j \delta_{i\alpha}) - (\bar{u}_i \bar{\sigma}_{j\alpha} + \bar{u}_j \bar{\sigma}_{i\alpha}) \right] = \\ = (\overline{\rho u_i \bar{f}_j} + \overline{\rho u_j \bar{f}_i}) + \frac{\bar{p} \sigma_{ij}}{\eta} - \left(\bar{\sigma}_{i\alpha} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_\alpha} + \bar{\sigma}_{j\alpha} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} \right) + \left(\overline{\rho u_i' u_\alpha'} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_\alpha} + \overline{\rho u_j' u_\alpha'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} \right). \quad (17.23) \end{aligned}$$

Осредним все члены уравнения (17.22) с помощью правил осреднения Рейнольдса и вычтем из него почленно уравнение (17.23), в результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\rho u_i' u_j'}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\overline{\rho u_i' u_j' \bar{u}_\alpha} + \overline{\rho u_i' u_\alpha' \bar{u}_j} + (\overline{\rho u_i' \delta_{j\alpha}} + \overline{\rho u_j' \delta_{i\alpha}}) - (\overline{u_i' \sigma_{j\alpha}} + \overline{u_j' \sigma_{i\alpha}}) \right] = \\ = \overline{\rho u_i' \bar{f}_j} + \overline{\rho u_j' \bar{f}_i} + \frac{\overline{p' \sigma_{ij}}}{\eta} - \left(\overline{\sigma_{i\alpha}'} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_\alpha} + \overline{\sigma_{j\alpha}'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} \right) - \left(\overline{\rho u_i' u_\alpha'} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_\alpha} + \overline{\rho u_j' u_\alpha'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} \right). \quad (17.24) \end{aligned}$$

Уравнения (17.24) и есть *уравнения для турбулентных напряжений*. В них наряду с осредненными скоростями и давлениями входит целый ряд новых неизвестных величин, например $\overline{p' u_i'}$, $\overline{u_i' u_j' u_\alpha'}$ и т.п.

Основное содержание предложения Келлера и Фридмана можно сформулировать следующим образом. На первом этапе, осредняя уравнения Навье—Стокса, получаем для определения осредненных скоростей уравнения Рейнольдса. Эти уравнения незамкнуты, так как в них входят неизвестные нам осредненные величины произведений $\overline{\rho u_i' u_j'}$ — турбулентные напряжения. На втором этапе, записав тождество и исключив из него производные по времени с помощью уравнений Навье—Стокса, осредняем все члены этого уравнения и получаем систему уравнений для турбулентных напряжений $\overline{\rho u_i' u_j'}$. В эти уравнения наряду с осредненными скоростями и давлениями входит целый ряд новых неизвестных величин типа $\overline{u_i' u_j' u_\alpha'}$. Число неизвестных величин в системе, содержащей уравнения Рейнольдса и уравнения для турбулентных напряжений, опять оказывается больше числа уравнений этой системы. На третьем этапе, осредняя соответствующие тождества и используя уравнения Навье—Стокса, можно получить уравнения для величин типа $\overline{u_i' u_j' u_\alpha'}$; в этих уравнениях обнаружатся новые неизвестные и т.д.

Получаемые таким способом системы уравнений называются *цепочкой уравнений Келлера—Фридмана*. Эта цепочка характеризуется тем, что, с одной стороны, является теоретически совершенно точной, не

включающей в себя иных зависимостей или гипотез за исключением уравнений Навье—Стокса и правил осреднения Рейнольдса, а с другой стороны, на каждом этапе построения система уравнений оказывается незамкнутой.

Если в уравнениях (17.24) положить $i = j$, то получаются три уравнения для осредненных величин значений проекций пульсационной скорости $\overline{u_1'^2}$, $\overline{u_2'^2}$ и $\overline{u_3'^2}$, которые являются важной характеристикой турбулентности. Если сложить почленно эти три уравнения, то получится уравнение для осредненного значения величины

$\overline{\rho u_1'^2} = \rho(\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2})$. Эту величину, умноженную на $1/2$, можно интерпретировать как *плотность кинетической энергии пульсационного движения* $k_t = \frac{\rho \overline{u_1'^2}}{2}$, которую для краткости будем именовать турбулентной энергией. Введя такое обозначение, запишем для него уравнение, которое часто называют *уравнением баланса турбулентной энергии*:

$$\frac{\partial k_t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_t \bar{u}_\alpha + \frac{1}{2} \overline{\rho u'_\beta u'_\beta u'_\alpha} + \overline{p' u'_\alpha} - \overline{u'_\beta \sigma'_{\alpha\beta}} \right) = \quad (17.25)$$

$$= \rho \overline{u'_\alpha f'_\alpha} - \rho \bar{\epsilon}_t - \overline{\rho u'_\alpha u'_\beta} \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha},$$

где $\rho \bar{\epsilon}_t = \overline{\sigma'_{\alpha\beta} \frac{\partial u'_\beta}{\partial x_\alpha}} = \frac{\eta}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \left[\overline{\frac{\partial u'_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u'_\beta}{\partial x_\alpha}} \right]^2$ — средняя удельная вязкая диссипация энергии пульсационного движения. В левой части уравнений (17.25) в скобках содержатся выражения, представляющие собой плотность потока турбулентной энергии, обусловленного переносом этой энергии осредненным течением, пульсациями давления, молекулярной вязкостью и пульсациями скорости. Первое слагаемое в правой части представляет собой работу пульсаций внешней силы (если таковые имеются); содержание последнего слагаемого будет рассмотрено в связи с уравнением для плотности кинетической энергии осредненного движения жидкости.

Из уравнения (17.23) аналогичным образом, т.е. приняв $i = j$ и просуммировав три полученных уравнения, получим уравнение для $k_s = \frac{1}{2} \rho \bar{u}_\beta \bar{u}_\beta = \frac{1}{2} \rho (\bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2 + \bar{u}_3^2)$, т.е. для *плотности кинетической энергии осредненного движения*:

$$\frac{\partial k_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_s \bar{u}_\alpha + \frac{1}{2} \overline{\rho u'_\alpha u'_\beta \bar{u}_\beta} + \overline{p \bar{u}_\alpha} - \overline{\bar{u}_\beta \sigma_{\alpha\beta}} \right) = \rho \bar{u}_\alpha \bar{f}_\alpha - \rho \epsilon_s + \overline{\rho u'_\alpha u'_\beta} \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha}, \quad (17.26)$$

где $\rho \epsilon_s = \overline{\sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha}} = \frac{\eta}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \left(\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha} \right)^2$ — удельная диссипация энергии осредненного движения под действием молекулярной вязкости.

В скобках в левой части уравнения (17.26) содержатся выражения, представляющие собой плотность потока энергии осредненного движе-

ния, обусловленного переносом с осредненной скоростью, работой сил осредненного давления, молекулярной вязкостью, а также работой фиктивных сил “турбулентной вязкости” (четвертое слагаемое). Первое слагаемое в правой части представляет собой работу осредненной объемной силы. Последнее слагаемое

$$\overline{\rho u'_\alpha u'_\beta} \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha} = -\rho_{\alpha\beta}^T \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha} \quad (17.27)$$

представляет собой изменение плотности энергии осредненного движения вследствие превращения этой энергии в энергию пульсационного движения, т.е. в турбулентную энергию (или, наоборот, превращение турбулентной энергии в энергию осредненного движения). Это подтверждается тем, что в уравнение турбулентной энергии (17.25) выражение (17.27) входит в правую часть со знаком минус.

Несмотря на то, что система уравнений, включающая уравнения Рейнольдса и уравнения баланса турбулентной энергии, является незамкнутой, анализ ее позволяет получить полезные качественные результаты. Впервые такой анализ был выполнен А.Н.Колмогоровым.

Как видно из изложенного, получить теоретически (только из уравнений Навье—Стокса без дополнительных допущений) замкнутую систему уравнений для описания осредненных скоростей или среднеквадратичных значений пульсационных скоростей не представляется возможным (по крайней мере, в настоящее время). Поэтому системы уравнений для осредненных характеристик приходится замыкать, привлекая дополнительные зависимости, основанные на экспериментальных данных, аналогиях, интуитивных представлениях о природе турбулентных течений и т.п.

Теории, построенные с использованием подобного рода замыканий, получили название *полуэмпирических теорий турбулентности*. Наиболее разработаны методы замыкания уравнений Рейнольдса; здесь следует выделить основополагающие работы Тейлора, Прандтля и Кармана. В последние годы большое внимание уделяется вопросам замыкания системы уравнений, получаемых на втором и третьем этапах построения “цепочки уравнений Келлера—Фридмана”. Здесь следует отметить так называемые К-модель и К-ε модели турбулентности, используемые при численном моделировании турбулентных течений.

Прежде чем рассматривать полуэмпирические теории турбулентности, в которых содержатся предложения по замыканию уравнений Рейнольдса, приведем дополнительные пояснения понятия турбулентных (Рейнольдсовых) напряжений.

17.4. Турбулентные касательные напряжения в пристеночном плоском продольно-однородном потоке

Рассмотрим установившееся турбулентное течение вблизи плоской стенки. Расположим оси координат так, как указано на рис. 17.2. Движение считаем однородным вдоль оси x_2 , перпендикулярной плос-

кости $x_1 \partial x_3$ (плоский поток), и вдоль течения (продольно-однородный поток). При этом единственная отличная от нуля проекция осредненной скорости $\bar{u}_1$ зависит только от координаты x_3 . Выделим плоскостями тока (осредненными) три слоя одинаковой толщины ℓ , достаточно малой, чтобы можно было считать, что

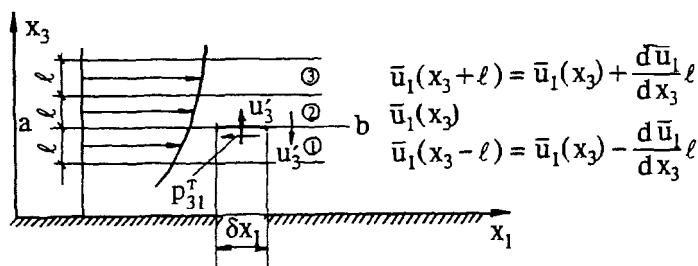
$$\bar{u}_1(x_3 \pm \ell) = \bar{u}_1(x_3) \pm \frac{d\bar{u}_1}{dx_3} \ell.$$


Рис. 17.2. Интерпретация турбулентных касательных напряжений

Рассматривая осредненную модель турбулентного потока, исключаем пульсационные скорости и, следовательно, исключаем поперечный перенос массы жидкости, а если $\bar{u}_1 \neq \text{const}$, то исключается и поперечный перенос количества движения, обусловленный пульсацией скорости, который в значительной мере определяет распределение осредненной скорости. Для того чтобы компенсировать пренебрежение переносом, обусловленным пульсациями скорости, в осредненную модель вводят указанные ранее дополнительные касательные напряжения. При этом можно воспользоваться следующими соображениями. Выделим на рис. 17.2 в плоскости тока ab прямоугольную площадку небольших размеров $\delta x_1 \delta x_2$. За малый промежуток времени dt через эту площадку из слоя 1 в слой 2 будет перетекать (в действительном турбулентном потоке, где имеется поперечная пульсационная скорость $u'_3(t)$) элемент объема жидкости ΔV , равный $\Delta V = u'_3(t) \delta x_1 \delta x_2 dt$. Этот объем будет иметь продольную скорость, равную приблизительно $\bar{u}_1(x_3 - \ell)$. В слое 2 этот объем (в момент перехода) имеет скорость, меньшую, чем скорости объемов, принадлежащих слою 2. Если фиксировать мгновенные скорости в слое 2, то при попадании на датчик скорости указанного элемента объема обнаружится временное уменьшение продольной скорости, т.е. продольная пульсационная скорость

$$u'_1(t) = \bar{u}_1(x_3 - \ell) - \bar{u}_1(x_3). \quad (17.28)$$

Если считать, что объем ΔV вытесняет равный ему объем из слоя 2 (в слой 3 или в слой 1), то количество движения слоя 2 уменьшится на величину

$$\Delta K_D = -\rho \Delta V u'_1(t) = -\rho u'_1(t) u'_3(t) \delta x_1 \delta x_2 dt.$$

Изменение количества движения в турбулентном потоке в модели осредненного движения (ΔK_D) компенсируется равным ему по величине им-

импульсом силы (ИС), действующим по площадке $\delta x_1 \delta x_2$ со стороны слоя 1 на слой 2. Считая, что площадка мала, а касательные напряжения на ней изменяются незначительно, запишем $ИС = p_{31}(t) \delta x_1 \delta x_2 dt$.

Приравняем эти величины и проведем осреднение по времени (движение установившееся, поэтому можно воспользоваться временным осреднением типа (17.20)):

$$- \int_{t_0}^{t_0+T} \rho u'_1(t) u'_3(t) \delta x_1 \delta x_2 dt = \int_{t_0}^{t_0+T} p_{31}(t) \delta x_1 \delta x_2 dt.$$

Сократив полученное выражение на $\delta x_1 \delta x_2$, получим

$$\bar{p}_{31} \equiv \overline{p_{31}^T} = -\overline{\rho u'_1 u'_3}. \quad (17.29)$$

Это выражение для $\overline{p_{31}^T}$ совпадает с соответствующим элементом тензора турбулентных напряжений, полученного ранее.

Приравняв количество движения, передающееся от слоя 1 слою 2, импульсу сил, предполагали, что элементарный объем ΔV передал полностью это количество движения, перемешавшись с другими элементами слоя 2 и став неотличимым от них. Это предположение накладывает дополнительное ограничение на величину ℓ , согласно которому ℓ — это путь по оси x_3 , который должен пройти элементарный жидкий объем, чтобы, выйдя из одного слоя, полностью смешаться с другим слоем и передать ему свой импульс.

Это понятие, впервые введенное Дж.Тейлором при рассмотрении переноса тепла в результате турбулентного перемешивания воздуха в приземном слое атмосферы, впоследствии широко и плодотворно использовалось Прандтлем в созданной им теории переноса импульса в турбулентном потоке. Величину ℓ называют *длиной пути перемешивания*. В турбулентном потоке он был использован в какой-то мере с целью установления аналогии между турбулентным движением и тепловым движением молекул газа, чтобы использовать хорошо разработанный аппарат молекулярно-кинетической теории газов. Однако эта аналогия оказалась не столь эффективна, так как длина пути перемешивания, как выяснилось, не может быть непосредственно измерена, она зависит от координат, обстоятельств течения и целого ряда других факторов. Сейчас большинство вопросов, связанных с турбулентными потоками, можно решить, не используя этого понятия. В то же время, рассматривая полуэмпирические теории турбулентности, целесообразно и поучительно наряду с кратким современным изложением этих теорий познакомиться с рассуждениями, которые привели их создателей к наиболее важным результатам.

ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

18.1. Пристеночный турбулентный поток

Рассмотрим на примере плоской задачи о продольно-однородном установившемся турбулентном течении вдоль плоской стенки основные особенности полуэмпирических теорий турбулентности. С помощью уравнений Рейнольдса найдем поле осредненной скорости турбулентного потока, т.е. в условиях рассматриваемого нами потока будем искать зависимость $\bar{u}_1 = \bar{u}_1(x_3)$ (рис. 18.1), предполагая, что

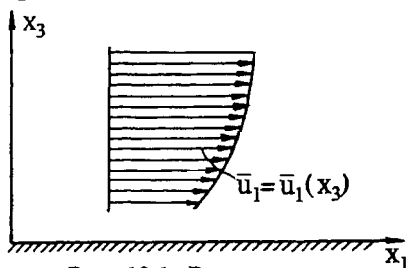


Рис. 18.1. Распределение продольной осредненной скорости вблизи плоской поверхности

$$\bar{u}_3 = \bar{u}_2 = 0. \quad (18.1)$$

Для упрощения задачи считаем, что сила тяжести отсутствует, а изменение осредненного давления вдоль потока пренебрежимо мало вследствие продольной безграничности потока:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} = 0. \quad (18.2)$$

Запишем первое из уравнений Рейнольдса (17.19):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} + \bar{u}_3 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} = \bar{f}_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} + \frac{1}{\rho} \left[\eta \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_1^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_3^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \overline{\rho u_1'^2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{\rho u_1' u_2'} - \frac{\partial}{\partial x_3} \overline{\rho u_1' u_3'} \right]. \end{aligned} \quad (18.3)$$

Все производные по t , x_1 и x_2 равны нулю. Из (18.3) учитывая также (18.1) и (18.2), получим

$$0 = \eta \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_3^2} - \frac{\partial}{\partial x_3} \overline{\rho u_1' u_3'}. \quad (18.4)$$

Два других уравнения (17.19) и уравнение неразрывности для осредненного движения (17.18) обращаются при сделанных предположениях в тождества. Таким образом, уравнение (18.4) — единственное уравнение для определения зависимости $\bar{u}_1 = \bar{u}_1(x_3)$. Оно содержит две неизвестные функции $\bar{u}_1$ и $\overline{u_1' u_3'}$; для вычисления $\bar{u}_1$ необходимо ввести дополнительную связь между этими функциями, чтобы с ее помощью исключить функцию $\overline{u_1' u_3'}$, которая нас пока не интересует.

Первое предложение о замыкании уравнения (18.4) было сделано Буссинеском. Используя аналогию между турбулентным движением жидкости и тепловым движением молекул газа, он принял, что турбулентные касательные напряжения $\overline{p_{31}'} = -\rho \overline{u_1' u_3'}$ пропорциональны градиенту осредненной скорости:

$$-\overline{\rho u'_1 u'_3} = \eta^T \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3}, \quad (18.5)$$

где η^T — коэффициент турбулентной вязкости.

Используя (18.5), уравнение (18.4) можно привести к виду

$$(\eta + \eta^T) \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} = \text{const}. \quad (18.6)$$

Собственно зависимость (18.5) не вносит принципиально новых связей между неизвестными функциями, так как нам априори ничего неизвестно о величине η^T и, введя зависимость (18.5), одну неизвестную величину $\overline{u'_1 u'_3}$ в уравнении (18.4) подменили другой неизвестной η^T в уравнении (18.6). Если попытаться решить уравнение (18.6), считая, что $\eta^T = \text{const}$, то получится линейное распределение осредненной скорости, которое, будучи верным при ламинарном движении, не подтверждается экспериментально для турбулентных потоков.

Прежде чем обратиться к последующим предложениям о замыкании уравнений Рейнольдса, отметим, что, как показывают эксперименты, уже на очень небольших расстояниях от стенки (измеряемых обычными долями миллиметра)

$$|\overline{\rho u'_1 u'_3}| \gg \eta \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3}, \quad (18.7)$$

или, что то же,

$$\eta^T \gg \eta. \quad (18.8)$$

Используя это, уравнение (18.4) можно упростить и, проинтегрировав его, получить

$$-\overline{\rho u'_1 u'_3} = \text{const} = \tau_0, \quad (18.9)$$

где τ_0 — касательное напряжение на стенке.

Эта характеристика, а также плотность и вязкость жидкости определяют все особенности рассматриваемого нами турбулентного потока.

Существенное предложение, позволившее решить с помощью уравнений Рейнольдса вопрос об определении зависимости $\bar{u}_1 = \bar{u}_1(x_3)$, было сделано Прандтлем. Приведем основные положения этого предложения. Во-первых, используя понятие *пути перемешивания*, он на основе рассуждений, аналогичных приведенным выше (см. разд. 17.4), определил порядок величины продольной пульсационной скорости:

$$u'_1 \sim \ell \frac{d\bar{u}_1}{dx_3}. \quad (18.10)$$

Во-вторых, он принял, что значения продольной и поперечной пульсационных скоростей имеют один и тот же порядок:

$$u'_1 \sim u'_3. \quad (18.11)$$

Используя эти предположения, получим

$$p_{31}^T = -\rho \overline{u'_1 u'_3} = -\rho \ell^2 \overline{\left(\frac{d\bar{u}_1}{dx_3} \right)^2}. \quad (18.12)$$

Далее он для длины пути перемешивания принял

$$\ell = \kappa x_3, \quad (18.13)$$

где κ — универсальная (безразмерная) постоянная, которую следует определить экспериментально.

Подставляя в (18.9) последовательно (18.12) и (18.13), получим

$$\tau_0 = -\rho \kappa^2 x_3^2 \left(\frac{d\bar{u}_1}{dx_3} \right)^2. \quad (18.14)$$

Введем динамическую скорость

$$u_*^2 \equiv \frac{\tau_0}{\rho}. \quad (18.15)$$

Отметим, что u_* не следует придавать значения какой-либо реальной скорости в какой-либо точке пространства. Это просто удобное обозначение, используя которое перепишем (18.14) в виде

$$\frac{dx_3}{x_3} = \frac{\kappa}{u_*} d\bar{u}_1 \quad (18.16)$$

и получим окончательно

$$\bar{u}_1 = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{x_3}{x_0}, \quad (18.17)$$

где x_0 — постоянная интегрирования.

Зависимость (18.17) представляет собой экспериментально прекрасно подтверждаемое *логарифмическое распределение осредненной скорости* в плоском продольно-однородном пристеночном турбулентном потоке.

Наименее физически понятной представляется гипотеза (18.13). Более естественным, казалось бы, величину ℓ считать функцией от локальных характеристик поля осредненной скорости, таких, как, например, кривизна эпюры осредненной скорости. Имея это в виду, Карман предложил гипотезу о “локальном кинематическом подобии поля турбулентных пульсаций скорости”, согласно которой длина пути перемешивания прямо пропорциональна градиенту скорости и обратно пропорциональна кривизне эпюры скорости:

$$\ell = \kappa_K \frac{d\bar{u}_1}{dx_3} \left(\frac{d^2 \bar{u}_1}{dx_3^2} \right)^{-1}, \quad (18.18)$$

где κ_K — универсальная постоянная.

Используя зависимость (18.18) вместо (18.13), можно получить такой же логарифмический закон осредненной скорости, причем оказывается $\kappa_K = \kappa$. Эксперименты подтвердили, что эта величина является универсальной постоянной, она получила название *постоянной Кармана*. В настоящее время принято считать, что

$$\kappa = 0,4, \quad (18.19)$$

не указывая следующей значащей цифры.

Согласно современным представлениям принято получать тот же результат, т.е. логарифмический закон распределения скорости, исходя

из уравнения (18.18), не применяя понятия *пути перемешивания*, а используя анализ размерности (см. гл. 20). Как известно, наиболее важный этап при использовании анализа размерностей — установление набора величин, от которых зависит искомая величина, например, в нашем случае это турбулентное касательное напряжение. Это делается на основе интуитивных представлений, гипотез и т.п. Примем, что p_{31}^T зависит от плотности ρ и не зависит от вязкости η ; как уже отмечалось, при определении осредненной скорости в турбулентном потоке влиянием вязкости пренебрегают. Кроме того, так как p_{31}^T зависит от поперечного переноса импульса, связанного с переносом массы и неоднородностью поля осредненной скорости, следует считать, что p_{31}^T зависит не от осредненной скорости $\bar{u}_1$, а от того, как изменяется осредненная скорость поперек потока, т.е. от производных $\frac{d\bar{u}_1}{dx_3}$, $\frac{d^2\bar{u}_1}{dx_3^2}$ и т.д.

Если ограничиться двумя производными, то получим

$$p_{31}^T = f\left(\rho, \frac{d\bar{u}_1}{dx_3}, \frac{d^2\bar{u}_1}{dx_3^2}\right). \quad (18.20)$$

В рамках подхода, основанного на теории размерности, приходим к представлениям, соответствующим гипотезе Кармана о локальном кинематическом подобии поля гидродинамических характеристик. Используя анализ размерностей, из (18.20) получим

$$p_{31}^T = K_K \rho \left(\frac{d\bar{u}_1}{dx_3}\right)^4 \left(\frac{d^2\bar{u}_1}{dx_3^2}\right)^{-2}, \quad (18.21)$$

где K_K — безразмерная постоянная.

Решая дифференциальное уравнение (18.21), найдем

$$\bar{u}_1 = \frac{u_*}{\sqrt{K_K}} \ln \frac{x_3}{x_0}. \quad (18.22)$$

Сравнивая (18.22) и (18.17), найдем, что $K_K = \kappa^2 = 0,16$.

Если провести рассуждение согласно подходу Прандтля, то надо положить, что p_{31}^T зависит от плотности ρ , производной от скорости $d\bar{u}_1/dx_3$ и от расстояния до твердой стенки x_3 :

$$p_{31}^T = f\left(\rho, \frac{d\bar{u}_1}{dx_3}, x_3\right). \quad (18.23)$$

Используя анализ размерностей, из (18.23) получим

$$p_{31}^T = K_\Pi \rho x_3^2 \left(\frac{d\bar{u}_1}{dx_3}\right)^2, \quad (18.24)$$

где K_Π — безразмерная постоянная.

Решая уравнение (18.24), найдем

$$\bar{u}_1 = \frac{u_*}{\sqrt{K_\Pi}} \ln \frac{x_3}{x_0}, \quad (18.25)$$

где $K_\Pi = K_K = 0,16$.

Для определения постоянной интегрирования в логарифмическом законе x_0 в простейших случаях также можно воспользоваться анализом размерностей. Так, если стенка гладкая, то

$$x_0 = f(\rho, \eta, u_*), \quad (18.26)$$

так как вблизи стенки влиянием вязкости пренебречь нельзя. В этом случае имеем

$$x_0 = \beta \frac{\eta}{\rho u_*} = \beta \frac{\nu}{u_*}, \quad (18.27)$$

где $\beta = 0,09$ — универсальная постоянная, определенная экспериментально.

Если стенка шероховатая и шероховатость характеризуется только одним параметром — высотой выступов Δ , то

$$x_0 = f(\rho, \eta, u_*, \Delta).$$

Анализ размерностей при этом позволяет определить

$$x_0 = \Delta \cdot F(Re_*), \quad (18.28)$$

где $Re_* = \frac{u_* \Delta}{\nu}$ — безразмерный комплекс, а F — неизвестная функция, определяемая не с помощью анализа размерностей, а с помощью других методов (например, экспериментально).

Как показали эксперименты Прандтля, при больших значениях Re_* (отвечающих развитой шероховатости)

$$F(Re_*) = \frac{1}{30}. \quad (18.29)$$

Выше был рассмотрен полуэмпирический метод замыкания уравнений Рейнольдса на примере пристеночных потоков. Аналогичные приемы используются и при решении других задач (см., например, задачи о распределении скорости в струях разд. 18.4).

18.2. Структура турбулентного потока в гладкой трубе

В предыдущем разделе было получено распределение осредненной продольной скорости в той области турбулентного потока вблизи стенки, где можно пренебречь влиянием вязких напряжений, обусловленных градиентом осредненной скорости, в отличие от турбулентных касательных напряжений. Кроме того, в этой области поле скорости формируется под непосредственным влиянием стенки. Используя полученные результаты, рассмотрим, каково распределение осредненной скорости в других областях турбулентного потока в гладкой трубе, где указанные выше упрощающие ограничения не существуют.

Будем рассматривать установившееся равномерное турбулентное движение в широкой прямоугольной трубе. Вблизи продольной плоскости, перпендикулярной широкой стороне поперечного сечения (с этой плоскостью мы совместим координатную плоскость $x_1 O x_3$, направив ось x_1 вдоль течения), все осредненные гидромеханические характеристики потока практически не будут зависеть от координаты x_2 , что позволяет считать, что поток вблизи плоскости $x_1 O x_3$ плоский.

Приведем теоретические и экспериментальные данные о поле осредненной скорости и о других гидромеханических характеристиках в различных точках поперечного сечения потока. Для этого выделим в потоке четыре области (рис. 18.2, в).

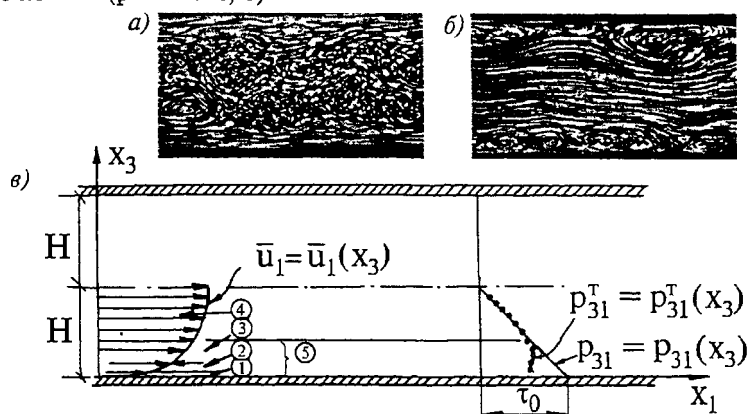


Рис. 18.2. Структура турбулентного потока в гладкой трубе: а — фотография сделана камерой, движущейся со скоростью средней части потока; б — то же со скоростью пристеночной части потока; в — четырехслойная модель:

1 — вязкий подслой; 2 — промежуточный слой; 3 — логарифмический слой; 4 — внутренний слой; 5 — пристеночный слой

1. *Вязкий подслой* прилегает непосредственно к стенке и характеризуется тем, что в нем существенную роль играют силы вязкости. Толщину его $\delta_{\text{вп}}$ определяют, исходя из условия, что турбулентные касательные напряжения в нем пренебрежимо малы по сравнению с вязкими напряжениями:

$$\left| \rho \overline{u'_1 u'_3} \right| < 0,1 \left| \eta \frac{d\overline{u}_1}{dx_3} \right|. \quad (18.30)$$

При этом, как показывают эксперименты,

$$\delta_{\text{вп}} \cong 5 \frac{\nu}{u_*}, \quad (18.31)$$

т.е. в реальных потоках воды в трубах эта величина измеряется долями миллиметра.

Касательное напряжение в вязком подслое можно считать постоянным и равным напряжению на стенке τ_0 . Исходя из этого, распределение осредненной скорости найдем теоретически. Интегрируя дифференциальное уравнение, полученное для условий вязкого подслоя (18.30) из (18.4):

$$\eta \frac{d\overline{u}_1}{dx_3} = \tau_0, \quad (18.32)$$

получим

$$\overline{u}_1 = u_*^2 \frac{x_3}{\nu}. \quad (18.33)$$

Поперечные пульсационные скорости в вязком подслое весьма малы (практически равны нулю), а продольные значительны. Эксперименты показывают, что

$$\sqrt{\overline{u_1'^2}} \cong 0,3 u_*^2 \frac{x_3}{\nu} = 0,3 \overline{u}_1. \quad (18.34)$$

Таким образом, интенсивность турбулентности, которая обычно оценивается отношением стандарта пульсационной скорости $\sqrt{u_1'^2}$ к осредненной скорости в этой же точке пространства, в вязком подслое составляет приблизительно 0,3 и оказывается значительно выше, чем в других областях потока. Имея это в виду, следует отметить, что используемый иногда в литературе термин “ламинарный подслой” для обозначения вязкого подслоя неудачен.

2. *Промежуточный подслой* характеризуется тем, что здесь вязкие и турбулентные касательные напряжения имеют один и тот же порядок величин. Это имеет место, когда

$$5 \frac{v}{u_*} < x_3 < 30 \frac{v}{u_*}, \quad (18.35)$$

причем верхняя граница находится из условия

$$\left| \eta \frac{d\bar{u}_1}{dx_3} \right| < (0,1 - 0,2) \left| \overline{\rho u_1' u_3'} \right|. \quad (18.36)$$

Теоретический анализ уравнений Рейнольдса в этой области сложен. Распределение осредненной скорости описывается обычно эмпирическими зависимостями, например, Карманом была предложена аппроксимация экспериментальных данных зависимостью

$$\bar{u}_1 = 5u_* \ln \frac{x_3 u_*}{v} - 3,05u_*. \quad (18.37)$$

Турбулентные касательные напряжения возрастают в этой области с увеличением x_3 практически от нуля до $0,8\rho u_*^2$, а стандарт поперечной пульсационной скорости $\sqrt{u_3'^2}$ — от 0 до значения, близкого к u_* . Стандарт продольной пульсационной скорости изменяется в пределах этого слоя от $1,5u_*$ до $2,5u_*$.

3. *Логарифмический слой* характеризуется, во-первых, тем, что

$$\left| \overline{\rho u_1' u_3'} \right| \gg \left| \eta \frac{d\bar{u}_1}{dx_3} \right|, \quad (18.38)$$

а во-вторых, тем, что вся структура турбулентного потока формируется непосредственно под влиянием *ближайшей* твердой стенки (влияние противоположающей стенки пренебрежимо мало). Благодаря этому, например, следуя Прандтлю, можно считать, что длина пути перемешивания пропорциональна расстоянию до стенки (см. разд. 18.1). Осредненная скорость распределена согласно зависимости

$$\bar{u}_1 = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{x_3}{x_0}. \quad (18.39)$$

Турбулентные касательные напряжения в этой области практически постоянны:

$$\left| \overline{\rho u_1' u_3'} \right| \approx (0,8 - 0,9)\tau_0. \quad (18.40)$$

Характерные значения пульсационных скоростей уменьшаются с удалением от стенки, причем значения стандартов поперечной и продольной пульсационных скоростей с удалением от стенки сближаются, т.е. поле пульсационных скоростей становится к середине потока близким к *изотропному*.

Если ввести согласно предложению Буссинеска коэффициент турбулентной вязкости

$$p_{31}^T = -\overline{\rho u_1' u_3'} = \eta^T \frac{d\bar{u}_1}{dx_3}, \quad (18.41)$$

то, учитывая (18.40) и (18.41), найдем

$$\eta^T \approx \rho \kappa_* x_3. \quad (18.42)$$

Как показывают эксперименты, логарифмический закон распределения скорости с очень большой точностью выполняется при $x_3 < (0,25 - 0,40)H$, причем меньшим значениям коэффициента при H отвечают большие числа Рейнольдса. Примерно до этих же значений x_3 имеет место возрастание η^T . В средней части потока (при $0,4H < x_3 < 1,6H$) значение η^T можно считать постоянным.

Перечисленные три области (вязкий подслой, промежуточный слой, логарифмический слой) образуют так называемый пристеночный турбулентный слой, который имеет место не только при течении в трубе, но и в пограничных слоях, образующихся у твердых поверхностей.

4. *Внутренний слой* характеризуется свободной турбулентностью, непосредственное влияние каждой из стенок канала здесь несущественно, и можно считать, что $\eta^T = \text{const}$. Это позволяет проинтегрировать уравнение Рейнольдса и получить параболическое распределение осредненной скорости. Однако чаще всего считают, что с достаточной точностью осредненную скорость можно найти и с помощью логарифмической зависимости (18.39), экстраполируя ее до плоскости симметрии потока.

Турбулентные касательные напряжения здесь практически равны полным касательным напряжениям, действующим в осредненном потоке, которые изменяются по линейному закону (см. рис. 18.2, в)

$$p_{31}^T = p_{31} = \tau_0 \left(1 - \frac{x_3}{H}\right). \quad (18.43)$$

Значения стандартов пульсационных скоростей отличаются друг от друга ненамного и близки к значению динамической скорости.

Область потока, состоящую из логарифмического и внутреннего слоев, называют *турбулентным ядром* потока.

Отметим, что пристеночный турбулентный слой, имеющий такую же структуру, как и описанная выше, существует и в турбулентном пограничном слое, образующемся, например, при обтекании невозмущенным (обычно потенциальным) потоком плоской пластины. Учитывая это сходство, здесь уместно указать на разницу между турбулентным пограничным слоем и турбулентным потоком в трубе (рис. 18.3).

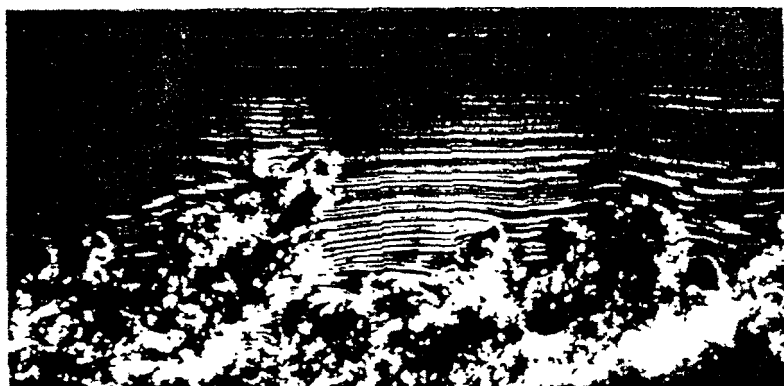
Во-первых, пограничный слой предполагает существование невозмущенной области движения жидкости; он является областью между твердой поверхностью (например, пластиной) и невозмущенным потоком (на который, как предполагается, не действует твердая граница).

Во-вторых, пограничный слой "развивается" вдоль потока, и при этом толщина его увеличивается. Напомним, что обычно толщиной пограничного слоя $\delta_{\text{ис}}$ на пластине называют расстояние от твердой поверхности, на котором продольная осредненная скорость в погранич-

ном слое практически неотличима от скорости невозмущенного набегающего потока V_∞ . Это расстояние находят по условию $\bar{u}_1(\delta_{\text{пс}}) = 0,99V_\infty$.

Если двигаться от твердой границы, то за пристеночным слоем следует *внешний слой*, который так же, как рассмотренный выше внутренний слой в трубе, характеризуется свободной турбулентностью. Однако во внешнем слое пограничного слоя имеет место *перемежающаяся* турбу-

а)



б)

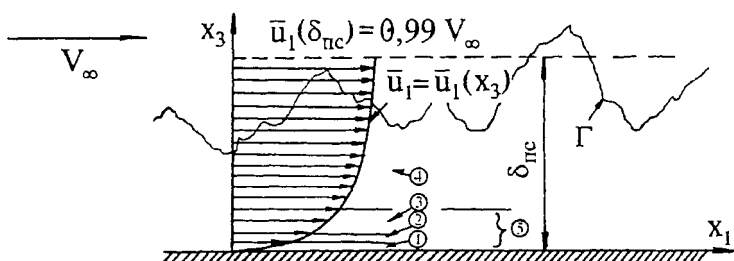


Рис. 18.3. Турбулентный пограничный слой на пластине:

- а — фотография визуализированного потока; б — структура потока: 1 — вязкий подслой; 2 — промежуточный слой; 3 — логарифмический слой; 4 — внешний слой; 5 — пристеночный слой; Г — граница области с турбулентным движением

лентность. Область с невозмущенной жидкостью можно обнаружить на расстоянии $x_3 = 0,35\delta_{\text{пс}}$, а область с турбулентным режимом течения иногда оказывается на расстоянии от стенки, превышающем толщину пограничного слоя (до $x_3 = 1,2\delta_{\text{пс}}$). Граница между областью с турбулентным движением и областью невозмущенного движения нестационарна, имеет сложное очертание.

Выше была описана структура турбулентного потока вблизи *гладкой поверхности*. При наличии *шероховатости* практически не имеет смысла рассматривать в приближении плоской задачи течение в вязком подслое и в промежуточном слое, так как эти слои очень тонкие и даже небольшие неровности твердой поверхности существенно искажают всю картину течения. В то же время на достаточном удалении от стенки (в несколько раз превышающем высоту выступов шероховатости), т.е. в логарифмическом и внутреннем слоях, основные закономерности в распределении скорости и других осредненных характеристик турбулент-

ного потока в гладких и шероховатых трубах достаточно хорошо совпадают.

В заключение отметим, что если известна или легко измерима осредненная скорость u_0 на фиксированном расстоянии от стенки (например, скорость в плоскости симметрии или на оси потока), можно исключить постоянную интегрирования x_0 и использовать в качестве постоянной указанную скорость.

Пусть при $x_3 = H$ скорость $\bar{u}_1 = u_0$ (см. рис. 18.2). Будем считать, что можно экстраполировать логарифмическую зависимость

$$\bar{u}_1 = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{x_3}{x_0}$$

и вычислить по ней скорость вплоть до плоскости симметрии, при этом

$$u_0 = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{H}{x_0}. \quad (18.44)$$

Вычитая из (18.44) выражение (18.39), получим

$$u_0 - \bar{u}_1 = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{H}{x_3}. \quad (18.45)$$

Величину $u_0 - \bar{u}_1$ называют дефектом или дефицитом скорости, а зависимость (18.45) — соответственно, формулой для распределения дефекта скорости. Такое описание поля осредненной скорости широко используется при изучении турбулентных пограничных слоев, когда в качестве известной скорости вводится скорость невозмущенного набегающего потока V_∞ .

18.3. Потери напора по длине в круглой трубе

В этом разделе покажем, как полученное ранее поле осредненной продольной скорости можно использовать для вычисления потерь напора в турбулентном потоке.

Как известно, потеря напора по длине в круглоцилиндрической трубе вычисляется по формуле (5.85) Вейсбаха—Дарси (см. разд. 5.11)

$$h_f = \lambda \frac{\ell}{D} \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Подставив гидравлический уклон $J_c = h_f / \ell$ из (5.85) в основное уравнение равномерного движения (5.71)

$$\frac{\tau_0}{\gamma} = R J_c,$$

получим

$$\tau_0 = \lambda \rho \frac{v^2}{8}, \quad (18.46)$$

или, вводя динамическую скорость $u_* = \sqrt{\tau_0 / \rho}$, найдем

$$\frac{u_*}{v} = \sqrt{\frac{\lambda}{8}}. \quad (18.47)$$

Эта зависимость позволяет оценить величину динамической скорости; так как для большинства потоков в трубах величина

λ не сильно отличается от значения 0,03, то можно считать, что

$$u_* = \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{20} \right) v.$$

Заметим, что в инженерно-строительной гидравлике для определения потерь напора часто используется формула Шези

$$v = C\sqrt{RJ}, \quad (18.48)$$

где C — коэффициент Шези. Если извлечь квадратные корни из левой и правой частей уравнения (5.71), а затем разделить полученное равенство почленно на равенство (18.48), то получим еще одну оценку для динамической скорости:

$$\frac{u_*}{v} = \frac{\sqrt{g}}{C}. \quad (18.49)$$

Сравнивая (18.47) с (18.49), получим равенство

$$\frac{g}{C^2} = \frac{\lambda}{8}. \quad (18.50)$$

Прделав эти предварительные вычисления, перейдем к главной задаче — к определению зависимости $\lambda = \lambda(\text{Re}_D, \Delta_r)$. Она может быть найдена на основании эксперимента; в частности, известные опыты Никурадзе позволили установить ее графически, а также получить достаточно точные аппроксимационные формулы.

Нашей задачей будет установление зависимости $\lambda = \lambda(\text{Re}_D, \Delta_r)$ на основе распределения осредненной скорости в поперечном сечении потока, полученного с помощью полуэмпирической теории турбулентности.

Рассмотрим вначале гладкую трубу, для которой по определению $\lambda = \lambda(\text{Re}_D)$. Хотя логарифмическая зависимость была получена при решении плоской задачи, эксперименты показали, что в пристеночной области круглой трубы осредненная скорость также распределена по зависимости

$$\bar{u}_1 = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{x_3 u_*}{\beta v}, \quad (18.51)$$

где x_3 — расстояние до стенки по радиусу. Более того, эта же зависимость дает хорошее соответствие с экспериментальными значениями осредненной скорости вплоть до оси трубы, т.е. когда $x_3 = D/2$. Поскольку по определению средняя скорость потока

$$v = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \bar{u}_1 d\omega, \quad (18.52)$$

где ω — площадь поперечного сечения, то непосредственно подставив $\bar{u}_1$ из (18.51) в (18.52) и проведя вычисление интеграла, найдем

$$v = u_0 - 3,75 u_*, \quad (18.53)$$

где u_0 — скорость на оси трубы.

Заметим, что при вычислении интеграла исключалась область интегрирования вблизи стенки, где зависимость (18.51) дает отрицательные значения скорости; погрешность, вносимая при этом в расчеты, пренебрежимо мала.

Поскольку

$$u_0 = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{Du_*}{2\beta v} = \frac{u_*}{\kappa} \ln \left(\text{Re}_D \frac{u_*}{v} \cdot \frac{1}{2\beta} \right), \quad (18.54)$$

то можно переписать (18.53) в виде

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} + 3,75 = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\text{Re}_D \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \frac{1}{2\beta} \right)$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = C_1 \ln (\text{Re}_D \sqrt{\lambda}) + C_2, \quad (18.55)$$

где $C_1 = 2,0$, $C_2 = -0,8$ — универсальные постоянные, определенные из эксперимента.

Неявная полуэмпирическая зависимость λ от числа Re_D не очень удобна для практических расчетов. Преимущество в этом отношении имеет полученная Никурадзе экспериментальная зависимость

$$\lambda = 0,0032 + 0,221 \text{Re}_D^{-0,237}, \quad (18.56)$$

являющаяся практически точной при $\text{Re}_D < 10^6$. Хорошее соответствие с экспериментом при $\text{Re}_D < 10^5$ дает и более простая формула Блазиуса:

$$\lambda = (100 \text{Re}_D)^{-0,25} = 0,3164 \text{Re}_D^{-0,25}. \quad (18.57)$$

Переходя к рассмотрению шероховатых труб, будем иметь в виду зернистую шероховатость, т.е. имеющую вид зерен примерно одинаковой высоты, не превышающей 7% от диаметра. Кроме того, как уже отмечалось, единственной характеристикой такой шероховатости будем считать высоту выступов (полагая, что ни форма зерен, ни их расположение не влияют на последующие рассуждения). Опыты с такого рода шероховатыми трубами показали, что при малых числах Re_D они не отличаются от гладких. При этом $\lambda = \lambda(\text{Re}_D)$, и имеет место так называемый *первый предельный режим*, а область чисел Рейнольдса Re_D при соответствующей шероховатости называют областью *гладких труб* (см. разд. 5.11). При достаточно больших Re_D наступает *второй предельный режим*, при котором $\lambda = \lambda(\Delta_r)$ и потери напора согласно (5.85) пропорциональны квадрату скорости.

Область чисел Рейнольдса, при которых существует второй предельный режим, называется *областью квадратичного сопротивления*. Кроме того, существует промежуточная, так называемая, докватратичная область чисел Re_D , в которой $\lambda = \lambda(\text{Re}_D, \Delta_r)$; эта область отделяется от области гладких труб нижними предельными числами Рейнольдса $(\text{Re}_D)'_{\text{пред}}$, а от области квадратичного сопротивления — верхними предельными числами — $(\text{Re}_D)''_{\text{пред}}$.

Исследования зависимости критических чисел Рейнольдса $(\text{Re}_D)'_{\text{кр}}$ и $(\text{Re}_D)''_{\text{кр}}$ (при которых происходит переход из ламинарного режима в турбулентный) и предельных чисел Рейнольдса показали следующее:

- 1) значение $(\text{Re}_D)'_{\text{кр}}$ не зависит от величины шероховатости;
- 2) значение $(\text{Re}_D)''_{\text{кр}}$ уменьшается с увеличением шероховатости;

3) для предельных чисел Рейнольдса существуют оценки

$$(\text{Re}_D)'_{\text{пред}} = \frac{10}{\Delta_r}; \quad (\text{Re}_D)''_{\text{пред}} = \frac{500}{\Delta_r},$$

т.е. эти числа уменьшаются с увеличением шероховатости.

Для определения функции $\lambda = \lambda(\text{Re}_D, \Delta_r)$ для шероховатых труб Никурадзе представил зависимость (18.51) в виде

$$\frac{\bar{u}_1}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{x_3}{\Delta} + B' \quad (18.58)$$

и исследовал зависимость B' от безразмерного комплекса:

$$\text{Re}_* = \frac{u_* \Delta}{\nu} = \text{Re}_D \Delta_r \sqrt{\frac{\lambda}{8}}. \quad (18.59)$$

Как показали результаты экспериментов (рис. 18.4), начиная со значения $\text{Re}_* \approx 100$, величина B' остается (при дальнейшем увеличении этого комплекса) практически постоянной. Приняв $B' = 8,5$, можно зависимость (18.58) представить в виде

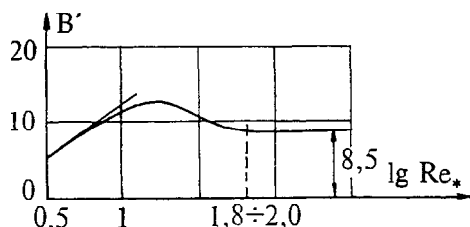


Рис. 18.4. Экспериментальная зависимость $B' = f(\lg \text{Re}_*)$

$$\frac{\bar{u}_1}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{30x_3}{\Delta}. \quad (18.60)$$

Если принять эту зависимость для распределения осредненной скорости и проделать те же вычисления, которые были сделаны для гладких труб, то можно получить

$$\lambda = (1,74 - 2 \lg \Delta_r)^{-2}. \quad (18.61)$$

Эта полуэмпирическая формула дает зависимость $\lambda = \lambda(\Delta_r)$ для второго предельного режима (области квадратичного сопротивления) в явном виде. Несмотря на это, при выполнении практических расчетов чаще используются экспериментальные зависимости еще более простого вида, например $\lambda = 0,11 \Delta_r^{0,25}$.

Отметим в заключение, что в приведенных вычислениях логарифмическая зависимость для распределения продольной осредненной скорости экстраполировалась на все поперечное сечение круглой трубы, хотя, как указывалось, она, строго говоря, пригодна лишь для узкой пристеночной области в условиях плоского потока.

Таким образом, вместо четырехслойной модели потока, описанной в предыдущем разделе, здесь использовалась практически однослойная модель. Несмотря на это, погрешность вычислений оказалась вполне приемлемой, так как приближенно правильная логарифмическая зависимость интегрировалась, а локальная неточность в определении подынтегральной функции несущественно влияет на величину интеграла.

Совершенно иной подход необходим при решении задач о тепло- и массопереносе в турбулентном потоке. Здесь для определения пара-

метров переноса необходимо дифференцировать зависимость скорости от координат, а, как известно, в процессе такой операции погрешность возрастает. Имея это в виду, при решении задач о переносе необходимо более детально и точно описывать распределение скорости и использовать многослойные модели турбулентного потока.

18.4. Полуэмпирические методы решения задач о свободной турбулентности

Понятие *свободная турбулентность* обычно противопоставляется понятию *пристеночная турбулентность*. Наиболее характерным примером свободной турбулентности является турбулентность в струях (в подвижной и неподвижной жидкости), в *следах* за движущимися телами и т.п. В разд. 18.2 уже отмечалось, что на достаточном удалении от стенки, за пределами логарифмического слоя в трубе и в пограничном слое на пластине поток также характеризуется свободной турбулентностью, параметры которой практически не зависят от расстояния до твердой границы.

В этом разделе описаны возможности, которые предоставляются уравнениями Рейнольдса и полуэмпирическими методами их замыкания для решения простейших задач о свободной турбулентности, а также основные приемы решения этих задач. Как и ранее, нас будет интересовать главным образом распределение осредненной скорости. Отметим, что при свободной турбулентности молекулярной вязкостью при расчете поля осредненной скорости можно пренебречь и учитывать только так называемые *молярные* процессы переноса, обусловленные беспорядочным перемещением в турбулентном потоке элементарных жидких объемов — *молей*.

Рассмотрим в качестве примера истечение жидкости с постоянным расходом из круглого отверстия в полупространство, занятое той же жидкостью, находящейся в покое (рис. 18.5).

Полуэмпирические методы замыкания уравнений Рейнольдса оказываются эффективными лишь при решении задачи о распределении осредненной продольной скорости в двух областях.

Область I находится в непосредственной близости к кромке отверстия; здесь можно пренебречь кривизной круглого отверстия и рассматривать течение в этой области как *плоскую затопленную* турбулентную струю.

Область II расположена на значительном удалении от отверстия, когда влияние некоторых особенностей начальных условий (например, распределение скорости на выходе из отверстия) оказывается несущественным. Течение здесь описывается как *осесимметричная затопленная* струя на большом удалении от отверстия.

Неоднородный поток в каждой из указанных областей представляет собой *пограничный слой*. В области I этот слой разделяет невозмущенный однородный поток из отверстия и пространство, занятое покоящейся жидкостью. В области II пограничный слой со всех сторон окружен покоящейся жидкостью.

Для решения поставленной задачи следует получить из уравнений Рейнольдса *уравнения турбулентного пограничного слоя*, сформулировав предварительно основные допущения, используемые при выводе этих уравнений. Определим скорость в области I.

а)

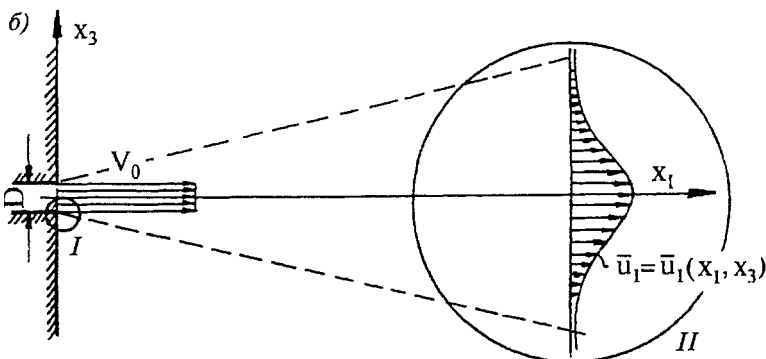


Рис. 18.5. Осесимметричная затопленная струя жидкости: а — фотография визуализированного потока; б — схема осредненного потока

Плоская затопленная струя

С целью определения осредненной скорости $\bar{u}_1 = \bar{u}_1(x_1, x_3)$ сформулируем основные допущения, необходимые для упрощения уравнений Рейнольдса

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_\alpha \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} = \bar{f}_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\eta \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} - \rho \overline{u'_i u'_\alpha} \right).$$

1. Поток на выходе из отверстия нетурбулентный, потенциальный, скорость во всех точках выходного сечения постоянна и равна V_0 .

2. Задача плоская, поэтому $\bar{u}_2 = 0$, и все производные по оси x_2 , направленной перпендикулярно плоскости чертежа (рис. 18.6), тоже равны нулю.

3. Граничные условия стационарны, и осредненное движение в струе установившееся: $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = 0$; $i = 1, 2, 3$.

4. Внешние объемные силы из рассмотрения исключаем:

$$f_i = 0; \quad i = 1, 2, 3.$$

5. Молекулярную вязкость в расчет не вводим, так как в случае свободной турбулентности

$$\left| \eta \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} \right| \ll \left| \overline{\rho u'_i u'_\alpha} \right|, \quad i, \alpha = 1, 2, 3.$$

6. Давление считаем постоянным во всей области: $\bar{p} = \text{const}$.

Следующие три допущения характерны для теории пограничного слоя, в которой обычно принимают, что все характеристики турбулентного потока *быстро* изменяются *поперек потока* и *медленно* — *вдоль потока*.

$$7. \quad \bar{u}_1 \gg \bar{u}_3.$$

$$8. \quad \left| \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} \right| \gg \left| \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} \right| = \left| \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} \right|.$$

$$9. \quad \left| \frac{\partial \overline{\rho u_1'^2}}{\partial x_1} \right| \ll \left| \frac{\partial \overline{\rho u'_1 u'_3}}{\partial x_3} \right|.$$

При сделанных допущениях из трех уравнений Рейнольдса (17.19) и уравнения несжимаемости (17.18) получаем два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \bar{u}_3 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{\rho u'_1 u'_3}}{\partial x_3}; \\ \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.62)$$

Система (18.62) представляет собой *уравнения турбулентного пограничного слоя*.

Введем функцию тока $\psi(x_1, x_3)$:

$$\bar{u}_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_3}; \quad \bar{u}_3 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad (18.63)$$

и сформулируем начальные и граничные условия:

$$\text{при } x_1 = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = \begin{cases} V_0 & \text{при } x_3 > 0; \\ 0 & \text{при } x_3 < 0; \end{cases}$$

$$\text{при } x_1 > 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = \begin{cases} V_0 & \text{при } x_3 \rightarrow +\infty; \\ 0 & \text{при } x_3 \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Очевидно, что скорость в любой точке рассматриваемой области зависит от физических свойств жидкости (т.е. от ее плотности и вязкости) и от величины скорости V_0 , поэтому (пренебрегая вязкостью при свободной турбулентности) можно считать, что $\psi = \psi(\rho, V_0, x_1, x_3)$.

Анализ размерностей показывает, что

$$\psi = V_0 x_1 f(\xi), \quad (18.64)$$

где $\xi = x_3/x_1$; f — универсальная функция. Дифференцируя (18.64), получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_3} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x_3} = V_0 f'(\xi). \quad (18.65)$$

Используем анализ размерностей для определения связи турбулентных касательных напряжений $\overline{\rho u_1' u_3'} = \rho \tau_{31}$ с функцией f .

Предположим, что в каждом поперечном сечении пограничного слоя p_{31}^T постоянно, т.е. p_{31}^T не зависит от x_3 . Тогда естественно считать

$$p_{31}^T = f_1\left(\rho, x_1, \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3}\right).$$

Из анализа размерностей следует

$$p_{31}^T = c\rho x_1^2 \left| \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} \right|^2, \quad (18.66)$$

где c — универсальная постоянная.

Подставляя (18.63)–(18.66) в (18.62), получим

$$f''(cf''' + f) = 0. \quad (18.67)$$

Уравнение (18.67) распадается на два уравнения:

$$f'' = 0; \quad (18.68)$$

$$cf''' + f = 0. \quad (18.69)$$

Очевидно, что решение уравнения (18.68) является линейной функцией, при этом функция тока, удовлетворяющая начальным и предельным условиям, имеет вид

$$\psi = V_0 x_3 \text{ при } x_3 > 0;$$

$$\psi = 0 \text{ при } x_3 < 0.$$

Эта функция описывает распределение скорости вне пограничного слоя (рис. 18.6).

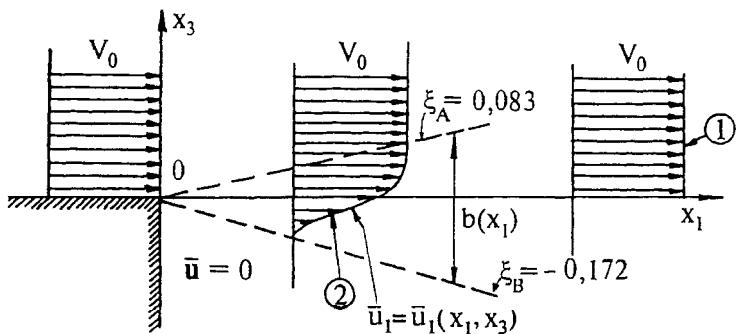


Рис. 18.6. Плоская затопленная струя: 1 — решение уравнения (18.68); 2 — решение уравнения (18.69)

Решение уравнения (18.69) должно позволить найти распределение скорости внутри пограничного слоя, а следовательно, и очертание его границ. Сформулируем условия на этих границах, которые согласно (18.64) должны быть прямыми линиями (в плоскости $x_1 0x_3$). Пусть уравнение верхней границы $x_3 = \xi_A \cdot x_1$, а нижней — $x_3 = \xi_B \cdot x_1$; значения ξ_A и ξ_B следует определить из решения уравнения (18.69). Потребуем, чтобы на границе пограничного слоя функция $\bar{u}_1 = \bar{u}_1(x_1, x_3)$ и ее производная были непрерывными.

Из непрерывности функции $\bar{u}_1$ следует

$$f'(\xi_A) = 1; \quad f'(\xi_B) = 0, \quad (18.70)$$

а из непрерывности ее производной:

$$f''(\xi_A) = 0; \quad f''(\xi_B) = 0. \quad (18.71)$$

Кроме того, так как согласно предельному условию при $x_3 \rightarrow \infty$ следует положить $f(\xi) = \xi$, то на верхней границе из непрерывности функции $f(\xi)$ следует

$$f(\xi_A) = \xi_A. \quad (18.72)$$

Решение дифференциального уравнения (18.69) имеет вид

$$f = C_1 \cdot e^{-\alpha\xi} + e^{\frac{1}{2}\alpha\xi} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha\xi + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha\xi \right), \quad (18.73)$$

где $\alpha = c^{-\frac{1}{3}} = 11,8$ — безразмерная постоянная, определяемая экспериментально.

Используя граничные условия (18.70)—(18.72), можно найти $C_1 = -0,0062$; $C_2 = 0,987$; $C_3 = 0,577$; $\xi_A = 0,083$; $\xi_B = -0,172$.

Отсюда определим, в частности, толщину пограничного слоя (зоны смешения)

$$b(x_1) = (\xi_A - \xi_B)x_1 = 0,255x_1. \quad (18.74)$$

Осесимметричная затопленная струя на большом удалении от отверстия

Будем решать задачу в цилиндрических координатах x , φ , r (рис. 18.7). Составляющие скорости по соответствующим направлениям обозначим u , v , w . Примем, что вся картина течения определяется плотностью ρ жидкости, ее вязкостью ν и величинами диаметра отверстия D и начальной скорости V_0 , так как никакие другие факторы на поле скорости влияния не оказывают.

Считаем движение осесимметричным, следовательно,

$$\bar{u} = \bar{u}(x, r); \quad \overline{\rho u'w'} = \overline{\rho u'w'}(x, r). \quad (18.75)$$

Из анализа размерностей найдем

$$\bar{u} = V_0 f_1 \left(\frac{x}{D}, \frac{r}{D}, Re_D \right); \quad \rho \overline{u'w'} = -\rho V_0^2 g_1 \left(\frac{x}{D}, \frac{r}{D}, Re_D \right),$$

где $Re_D = V_0 D/\nu$, а f_1, g_1 — неизвестные универсальные функции.

На больших расстояниях от отверстия влияние параметра x/D должно уменьшаться, и следует ожидать, что существуют некоторые функ-

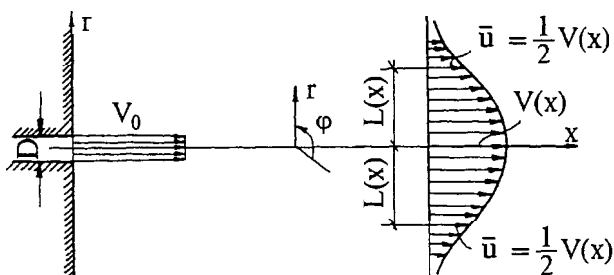


Рис. 18.7. Осесимметричная затопленная струя на большом удалении от отверстия

ции величин r/D и Re_D , которые являются пределами f_1 и g_1 при $x/D \rightarrow \infty$.

Кроме того, естественно ожидать, что условия на выходе из отверстия (т.е. величины V_0 и D) на большом удалении от него будут сказываться лишь через значение *начального импульса* струи, равное $\rho \pi D^2 V_0^2/4$. Другими словами — истечение из отверстия большого диаметра D с маленькой начальной скоростью V_0 создаст на большом удалении от отверстия такое же поле скорости, как при истечении с большой скоростью из маленького отверстия. Поле скорости будет зависеть от импульса (потока количества движения, поступающего в полупространство). Этот импульс определяет плавно изменяющиеся вдоль оси x характеристики типа скорости на оси струи $V(x) = \bar{u}(x, 0)$ или полуширины струи $L(x)$, которую считают равной расстоянию от оси до точек, где $\bar{u}(x, L) = V(x)/2$. Все осредненные характеристики будут зависеть от величин $V(x)$ и $L(x)$. Таким образом,

$$\bar{u} = V(x) f_2 \left(\frac{r}{L(x)}, Re_x \right); \quad \rho \overline{u'w'} = -\rho [V(x)]^2 g_2 \left(\frac{r}{L(x)}, Re_x \right),$$

где $Re_x = V(x)L(x)/\nu$.

Наконец, будем считать, что при $Re_x \rightarrow \infty$ функции f_2 и g_2 приобретают некоторые предельные значения f и g , так что

$$\bar{u} = V(x) f \left(\frac{r}{L(x)} \right); \quad \rho \overline{u'w'} = -\rho [V(x)]^2 g \left(\frac{r}{L(x)} \right). \quad (18.76)$$

Система уравнений пограничного слоя и несжимаемости (18.62) в цилиндрических координатах имеет вид

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \overline{u'w'} \right); \quad (18.77)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\bar{w})}{\partial r} = 0. \quad (18.78)$$

Умножим уравнение (18.77) на r и проинтегрируем все его члены по r от 0 до ∞ . Используя интегрирование по частям и уравнение (18.78), найдем

$$\int_0^{\infty} \bar{u}^2 r dr = \frac{\text{ПКД}(x)}{\rho} = \text{const}, \quad (18.79)$$

где ПКД(x) — поток количества движения через поперечные сечения струи. Уравнение (18.79) представляет собой закон сохранения импульса, записанный для целой струи. Подставим в (18.79) первую формулу из (18.76) и найдем, что

$$V^2 L^2 \int_0^{\infty} f^2(\xi) \xi d\xi = \text{const},$$

где $\xi = r/L(x)$.

Полученный результат показывает, что Re_x не зависит от x , так как $f(x)$ — универсальная функция, и интеграл от нее есть универсальная постоянная.

Подставим (18.76) в (18.77) и, используя (18.78), получим

$$\frac{dL(x)}{dx} = \text{const},$$

отсюда

$$L(x) \sim x - x_0; \quad V(x) \sim \frac{1}{x - x_0},$$

где x_0 — условное начало струи. Следовательно, струя имеет форму кругового конуса.

Найдем расход струи:

$$Q = \int_0^{\infty} \bar{u} 2\pi r dr \sim \int_0^{\infty} L^2 V f(\xi) \xi d\xi \sim (x - x_0) \int_0^{\infty} f(\xi) \xi d\xi.$$

Полученный результат показывает, что расход струи увеличивается вдоль оси x , т.е. имеет место эжекция.

Проделанные вычисления позволили выяснить ряд качественных особенностей осесимметричной струи. Для того, чтобы найти распределение осредненной продольной скорости, необходимо решить систему уравнений (18.77) и (18.78), используя дополнительные гипотезы полуэмпирического характера. Иногда распределение продольной скорости в осесимметричной струе задают, основываясь только на достаточно обширном экспериментальном материале, практически не пользуясь уравнениями Рейнольдса. В данном курсе на этих вопросах останавливаться не будем и, закончив рассмотрение простейших методов определения поля осредненной скорости в турбулентных потоках, перейдем к статистическим методам описания турбулентности.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКОВ

19.1. Основные понятия статистической гидромеханики

При выводе уравнений Рейнольдса указывалось, что временное осреднение пульсационных характеристик непригодно при исследовании нестационарных турбулентных потоков. Поясним это положение на следующем примере. Представим трубу, присоединенную к резервуару, в котором уровень свободной поверхности жидкости поддерживается постоянным. В конце трубы установлена задвижка. Если мгновенно открыть задвижку, то, пренебрегая сжимаемостью жидкости и упругостью стенок трубы, с помощью простого гидравлического расчета легко найти, что средняя скорость v в трубе возрастает от 0 до некоторого конечного значения. Тахограмма мгновенной продольной скорости в какой-либо точке А, расположенной внутри потока будет иметь вид, представленный на рис. 19.1. Очевидно, что на том участке тахограммы, где движение неустановившееся, определять осредненную скорость с помощью интеграла

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u_1(t) dt \quad (19.1)$$

не имеет смысла, так как ни при каком T нельзя получить непрерывную зависимость осредненной скорости от времени.

Возможность корректно определить величину осредненной скорости при неустановившемся движении представляется при использовании теоретико-вероятностного (статистического) подхода к описанию тур-

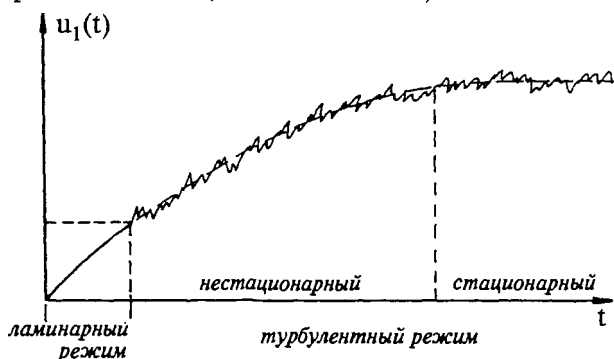


Рис. 19.1. Тахограмма при ускорении движения жидкости из состояния покоя

булентных потоков. Основы такого подхода были заложены в серии работ Дж.Тейлора в тридцатых годах нашего столетия. При статистическом подходе рассматривают не какой-либо конкретный турбулентный поток, а статистическую совокупность (статистический ансамбль) аналогичных потоков, задаваемых некоторыми внешними условиями. Например, для описания неустановившегося турбулентного движения в

трубе при мгновенном открытии задвижки необходимо достаточно много раз (N раз) открыть задвижку и изучить совокупность всех (получающихся при каждом открытии) потоков.

Для определения продольной скорости в точке А следует иметь всевозможные тахограммы продольной скорости в этой точке (рис. 19.2). При этом считаем, что в фиксированный момент времени t_0 следует рассматривать не одно значение скорости $u_1(t_0)$, а совокупность (мно-

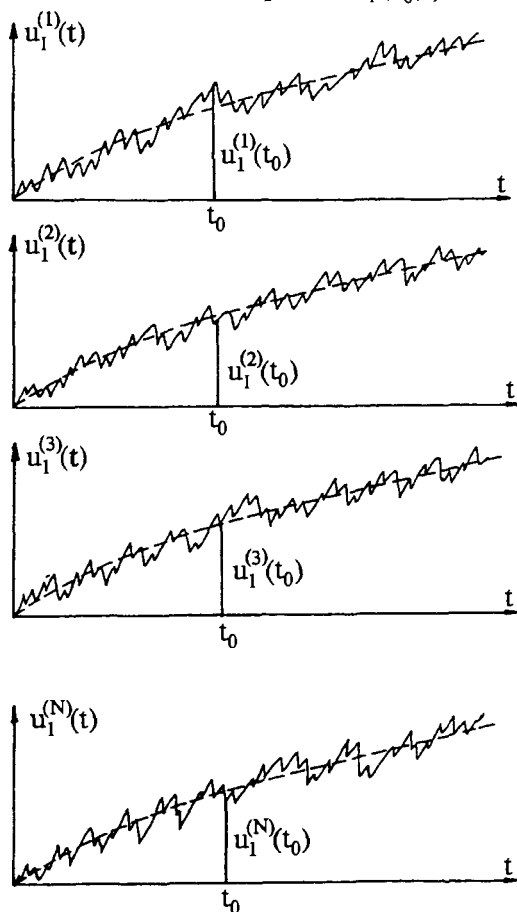


Рис. 19.2. Статистическая совокупность тахограмм продольной скорости при ускорении движения

жество) всех значений, которые могут получиться во всех возможных потоках в данной трубе при идентичных граничных условиях (на входе и выходе). Значение проекции скорости в каждой тахограмме рассматривается как *представитель*, выбранный наудачу из этого множества, т.е. проекция скорости считается *случайной величиной*.

Осредненная скорость в момент t_0 определяется как среднее арифметическое всех значений скорости $u_1(t_0)$, которые получаются в различных конкретных тахограммах:

$$\bar{u}_1(t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_1^{(i)}(t_0). \quad (19.2)$$

Пульсационная скорость определяется как отклонение скорости в данный момент времени в данной тахограмме от осредненной скорости:

$$u_1^{(i)}(t_0) = u_1^{(i)}(t_0) - \bar{u}_1(t_0). \quad (19.3)$$

Среднеквадратичное значение пульсационной скорости также определяется из рассмотрения статистической совокупности тахограмм:

$$\overline{u_1'^2}(t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[u_1^{(i)}(t_0) \right]^2. \quad (19.4)$$

Статистический подход позволяет использовать при описании турбулентности хорошо разработанный математический аппарат теории вероятностей. Так, например, при помощи соответствующих теорем теории вероятности можно доказать, что при определении процедуры осреднения характеристик турбулентности посредством (19.2) правила осреднения Рейнольдса, сформулированные в разд. 17.2, выполняются автоматически.

Статистический подход к описанию турбулентности используется и для установившегося движения. При этом возникает вопрос, совпадают ли осредненная скорость, определенная с помощью осреднения по времени (согласно зависимости (19.1)), с осредненной скоростью, вычисленной с помощью статистического осреднения по ансамблю (согласно зависимости (19.2)). Доказательство равенства указанных осредненных величин представляет собой содержание так называемой *эргодической теоремы*. Если это равенство вводится в виде допущения, то его называют *эргодической гипотезой*. Прежде чем рассмотреть взаимное соответствие различных способов осреднения, укажем некоторые приемы статистической обработки тахограмм при установившемся турбулентном движении.

При стационарных граничных условиях (например, при фиксированном открытии задвижки в трубе) можно получить тахограмму любой длины (для сколь угодно большого промежутка времени). Разрежем такую тахограмму на большое число тоже достаточно длинных кусков (что означает "достаточно длинный кусок", станет ясно из дальнейшего изложения). Считая каждый кусок отдельной тахограммой и рассматривая полученный набор тахограмм как статистическую совокупность (ансамбль), найдем осредненную скорость $\bar{u}_1(t)$ по формуле (19.2) для каждого момента времени.

Будем считать справедливой эргодическую гипотезу, из которой следует, что осредненная скорость во все моменты времени будет одинакова, т.е. $\bar{u}_1(t) = \bar{u}_1 = \text{const}$. Вычитая из всех значений мгновенной скорости $u_1^{(i)}(t)$ величину $\bar{u}_1$, построим тахограммы продольной пульсационной скорости u_1' . Представим на рис. 19.3 набор тахограмм для одной из проекций скорости u_1' . Аналогичные наборы тахограмм можно построить и для двух других проекций пульсационной скорости u_2' и u_3' .

Определением *временной корреляционной функции* (или *автокорреляционной функции*) продольной пульсационной скорости R_{11} является выражение

$$R_{11}(t, \tau) = \overline{u_1'(t) u_1'(t + \tau)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_1^{(i)}(t) u_1^{(i)}(t + \tau). \quad (19.5)$$

Чтобы практически вычислить величину $R_{11}(t, \tau)$, надо на каждой i -й тахограмме найти величины $u_1^{(i)}(t)$ и $u_1^{(i)}(t + \tau)$, перемножить их, а затем определить среднее арифметическое таких произведений, вычисленных для всех тахограмм.

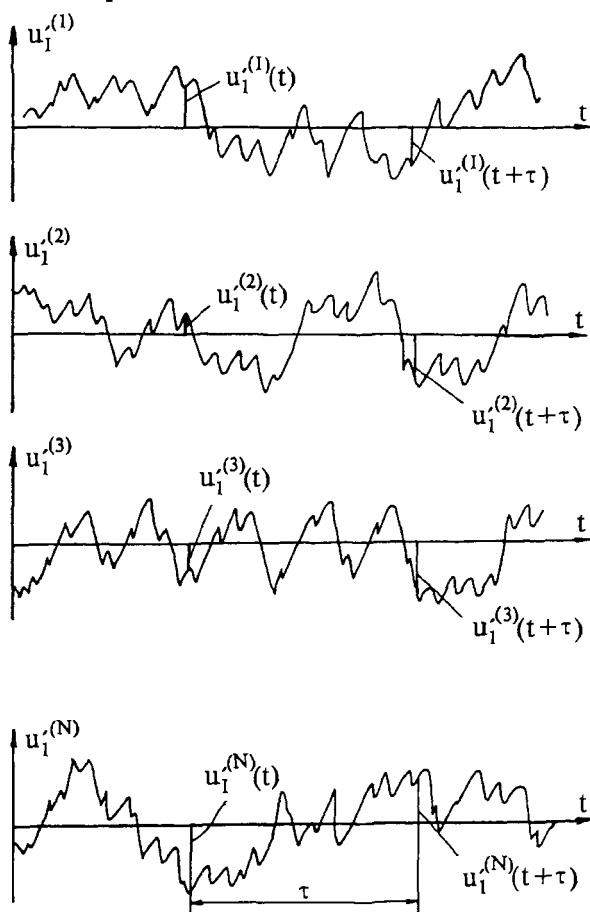


Рис. 19.3. Совокупность тахограмм продольной пульсационной скорости

Если движение установившееся, то естественно, что эта величина зависит только от τ (и не зависит от t), т.е. $R_{11}(t, \tau) = R_{11}(\tau)$. Очевидно, что при $\tau = 0$

$$R_{11}(0) = \overline{u_1'^2}. \quad (19.6)$$

Если τ мало, то величины $u_1^{(i)}(t)$ и $u_1^{(i)}(t + \tau)$ имеют, как правило, один и тот же знак, так что $R_{11} > 0$. При увеличении τ знак этих величин может быть и одинаковым и разным, а при очень больших τ величина $u_1^{(i)}(t + \tau)$ практически не зависит от значения $u_1^{(i)}(t)$ (как отмечалось при определении понятия турбулентности (см. разд. 5.10), скорость в фиксированной точке изменяется неупорядоченно, непериодически). Следовательно, эти случайные величины с нулевыми средними значениями можно считать независимыми; как известно,

осредненное произведение таких величин равно нулю. Это означает, что

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_{11}(\tau) = 0. \quad (19.7)$$

Приведенные рассуждения позволяют наметить общий характер зависимости R_{11} от τ , которая представлена на рис. 19.4.

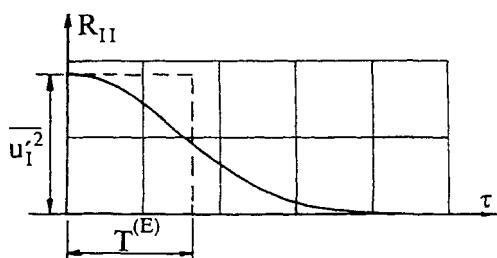


Рис. 19.4. Типичная автокорреляционная функция пульсационной скорости

Временная корреляционная функция показывает, насколько скоро по мере увеличения интервала времени убывает статистическая связь между значениями пульсационной скорости. Этой функцией можно характеризовать изменчивость во времени пульсационной скорости; с ее помощью можно оценивать, например, продолжительность времени, в течение которого пульсационная скорость сохраняет свой знак, используя величину

$$T_{11}^{(E)} = \frac{1}{u_1'^2} \int_0^{\infty} R_{11}(\tau) d\tau. \quad (19.8)$$

Величину $T_{11}^{(E)}$ называют *интегральным временным масштабом* турбулентности. Индекс Е указывает на эйлеров характер этой величины; она характеризует изменение продольной пульсационной скорости в фиксированной точке пространства. Аналогично определяются временные корреляционные функции R_{22} и R_{33} для двух других проекций пульсационной скорости.

Временную корреляционную функцию при установившемся движении можно определить, не используя статистический подход к описанию турбулентности, а с помощью временного осреднения. Для этого надо, задавая различные значения τ (от 0 до ∞), определить при каждом из них произведения пульсационных скоростей, отстоящих на тахограмме друг от друга на расстоянии τ , и вычислить

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u_1'(t) \cdot u_1'(t + \tau) dt. \quad (19.9)$$

Очевидно, если принять эргодическую гипотезу, то этот интеграл равен $R_{11}(\tau)$.

Отметим, что полученные в разд. 17.2 напряжения Рейнольдса $-\overline{\rho u'_\alpha u'_\beta}$ по определению также являются корреляционными функциями. Так, например, чтобы вычислить их с помощью временного осреднения, нужно иметь две тахограммы $u'_\alpha(t)$ и $u'_\beta(t)$. Взяв произведения $u'_\alpha(t) u'_\beta(t + \tau)$ в каждый момент времени, вычислим интеграл

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u'_\alpha(t) u'_\beta(t + \tau) dt = R_{\alpha\beta}(\tau), \quad (19.10)$$

который при $\tau = 0$ представляет собой $\overline{u'_\alpha u'_\beta}$. Корреляционные функции, устанавливающие связь между различными пульсационными характеристиками турбулентности (например, между u'_α и u'_β), называют *взаимными*.

При статистическом определении взаимной корреляционной функции $R_{\alpha\beta} = \overline{u'_\alpha u'_\beta}$ необходимо иметь два набора тахограмм $u'^{(i)}_\alpha(t)$ и $u'^{(i)}_\beta(t)$ ($i=1, \dots, N$) и вычислить $R_{\alpha\beta}(t, \tau)$ по зависимости

$$R_{\alpha\beta}(t, \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u'^{(i)}_\alpha(t) u'^{(i)}_\beta(t + \tau). \quad (19.11)$$

Если движение установившееся, то $R_{\alpha\beta}(t, \tau)$ будет одинаковым при любом t , а приняв эргодическую гипотезу, получим, что $R_{\alpha\beta}$, определенные по зависимостям (19.10) и (19.11), совпадают.

В заключение приведем рассуждения, которые можно рассматривать как обоснование эргодической гипотезы. В соответствии со статистическим подходом будем считать продольную скорость в фиксированной точке турбулентного потока *случайной* величиной, принимающей любые вещественные значения и характеризующейся функцией плотности распределения вероятностей $p(u_1)$. Эта функция задает вероятность попадания *выборочного значения скорости* $u_{1 \text{ выб}}$ в интервал длиной du_1 , выделенный вблизи некоторого фиксированного значения u_1 :

$$P\{u_1 < u_{1 \text{ выб}} < u_1 + du_1\} = p(u_1) du_1. \quad (19.12)$$

Функцию $p(u_1)$ можно определить с помощью тахограммы. Для этого выделим на рис. 19.5 из тахограммы отрезок длиной T ; наметим интервал изменения скорости $(u_1, u_1 + \Delta u_1)$ и найдем по тахограмме длины

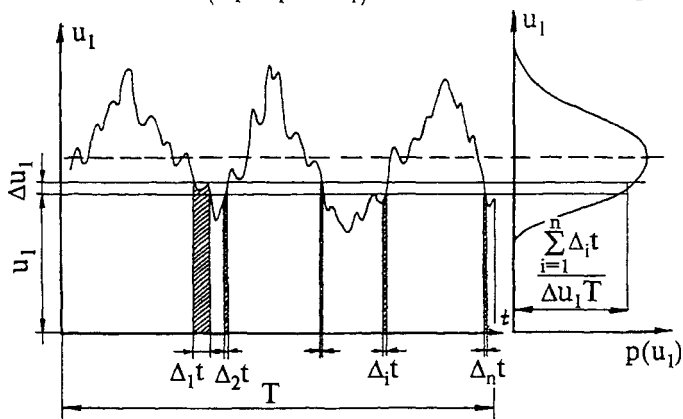


Рис. 19.5. Пояснение эргодической гипотезы

всех отрезков времени $\Delta_i t(u_1)$, в течение которых продольная скорость находилась в указанном интервале значений. При достаточно большой длине T отношение $\sum_{i=1}^n \Delta_i t(u_1)/T$ определяет вероятность того, что скорость будет иметь значение, лежащее в интервале $(u_1, u_1 + \Delta u_1)$. Следовательно,

$$p(u_1)\Delta u_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i t(u_1)}{T}. \quad (19.13)$$

Установим таким образом значение $p(u_1)$ плотности распределения вероятностей для всех u_1 . Зная $p(u_1)$, легко найти осредненное (в статистическом смысле) значение скорости как математическое ожидание случайной величины:

$$\bar{u}_1 = \int_0^{\infty} u_1 p(u_1) du_1 = \sum_{(u_1)} u_1 p(u_1) \Delta u_1. \quad (19.14)$$

Подставив (19.13) в (19.14), найдем

$$\bar{u}_1 = \sum_{(u_1)} u_1 \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i t(u_1)}{T} = \frac{1}{T} \sum_{(u_1)} u_1 \sum_{i=1}^n \Delta_i t(u_1). \quad (19.15)$$

Для каждого u_1 выражение под знаком $\sum_{(u_1)}$ геометрически представляет собой сумму площадей заштрихованных полосок. Сумма площадей таких полосок для всех значений скорости u_1 , очевидно, равна площади фигуры, ограниченной сверху тахограммой, т.е.

$$\sum_{(u_1)} u_1 \sum_{i=1}^n \Delta_i t(u_1) = \int_0^T u_1(t) dt.$$

Из этого равенства следует, что осредненная скорость, определенная статистически равенством (19.14), совпадает с осредненной скоростью, вычисленной осреднением по времени согласно (19.1).

19.2. Частотные характеристики турбулентности

При описании понятия турбулентности указывалось, что, например, скорость жидкости при турбулентном движении имеет три главные характеристики: осредненное значение скорости, характерное значение (стандарт) пульсационной скорости и характерное значение частоты пульсаций скорости. Хотя пульсации скорости являются нерегулярными, беспорядочными (их нельзя представить в виде суммы гармонических колебаний), все же характерную частоту (или диапазон частот) можно, как правило, указать. Например, возьмем тахограмму скорости при установившемся движении с масштабом времени по горизонтальной оси $1 \text{ см} = 1 \text{ с}$, и не меняя формы тахограммы, будем считать, что масштаб времени $1 \text{ см} = 1 \text{ мин}$. Сравнивая две такие тахограммы, отметим, что они определяют одинаковые осредненные скорости, одинаковые стандарты пульсационной скорости, а вот изменчивость скорости во времени на этих тахограммах различная.

В предыдущем разделе было указано, что временная корреляционная функция позволяет оценить частотные характеристики, и, в частности, интегральный временной масштаб можно интерпретировать как среднюю продолжительность времени, в течение которого пульсацион-

ная скорость имеет постоянный знак. Однако более удобна для анализа частотных характеристик не сама корреляционная функция, а ее трансформанта Фурье (т.е. результат преобразования Фурье от корреляционной функции):

$$S_{11}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_{11}(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (19.16)$$

Это преобразование существует, так как $R_{11}(\tau)$ обычно достаточно быстро стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Из (19.16) следует, что

$$R_{11}(\tau) = \int_0^{\infty} S_{11}(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (19.17)$$

Последнее равенство при $\tau = 0$ имеет вид

$$R_{11}(0) = \overline{u_1'^2} = \int_0^{\infty} S_{11}(\omega) d\omega. \quad (19.18)$$

Выражение $\frac{1}{2} \overline{\rho u_1'^2}$ можно трактовать как плотность распределения в потоке кинетической энергии, обусловленной продольными пульсациями скорости, поэтому равенство (19.18) позволяет дать следующую интерпретацию функции $S_{11}(\omega)$. Если представить действительное изменение скорости во времени как сумму гармонических колебаний скорости с различными частотами, принимающими значение от 0 до ∞ , то функция S_{11} определяет распределение энергии продольных пульсаций скорости по спектру частот. Она называется *функцией спектральной плотности* продольной пульсационной скорости или *энергетическим спектром* продольных пульсаций скорости. Очевидно, что аналогичные функции можно определить и для поперечных пульсаций скорости u_2' и u_3' . Укажем, что размерность функции спектральной плотности — $\text{м}^2/\text{с}$.

Для более полного отражения распределения энергии в широком диапазоне частот функцию спектральной плотности представляют в системе координат, построенной в логарифмическом масштабе. Для этого предварительно необходимо, используя подходящие масштабы длины L и скорости u , перейти к безразмерным частотам

$$\Omega = \frac{\omega L}{u}. \quad (19.19)$$

Представление $S_{11}(\Omega)$ в зависимости от $\ln \Omega$ (рис. 19.6,а) в некотором отношении неудобно, так как при этом S_{11} не удастся нормировать, т.е. нельзя выбрать такой масштаб для вертикальной оси координат, чтобы площадь под графиком $S_{11} = S_{11}(\ln \Omega)$ была равна единице. Отсутствие нормирования исключает возможность сравнивать экспериментальные зависимости, относящиеся к различным потокам, и получать универсальные функции спектральной плотности и т.п. Если же по вертикальной оси откладывать не $S_{11}(\Omega)$, а $\Omega \cdot S_{11}(\Omega)$, как это сделано на рис. 19.6,б, то площадь под графиком зависимости $\Omega \cdot S_{11}(\Omega) = f(\ln \Omega)$ будет пропорциональна $\overline{u_1'^2}$, так как

$$\int_0^{\infty} \Omega \cdot S_{11}(\Omega) d \ln \Omega = \int_0^{\infty} S_{11}(\Omega) d\Omega = \overline{u_1'^2} \cdot \frac{L}{u}. \quad (19.20)$$

При этом можно построить безразмерную зависимость

$$\frac{\Omega \cdot S_{II}(\Omega)}{u_1'^2} = f(\ln \Omega),$$

площадь под графиком которой равна единице. Такие зависимости называются нормированными.

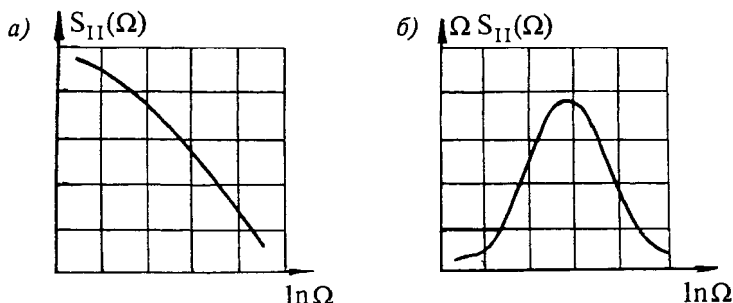


Рис. 19.6. Различные формы представления функции спектральной плотности пульсационной скорости

В первом приближении частоту Ω_0 , отвечающую максимуму функции $\Omega \cdot S_{II}(\Omega)$, можно рассматривать как характерную частоту пульсационной скорости. Действительно, пульсации скорости, имеющие частоты из диапазона (Ω_1, Ω_2) , дают наибольший вклад в полную энергию пульсационного движения. Этот вклад определяется величиной заштрихованной площади на рис. 19.7 (вся площадь фигуры под кривой равна единице).

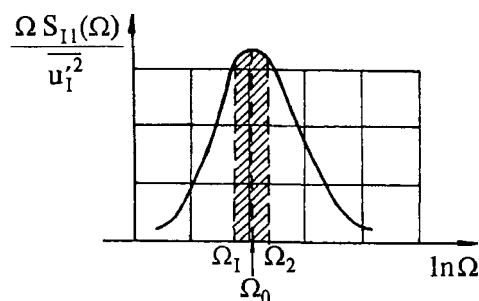


Рис. 19.7. Нормированная функция спектральной плотности

В качестве примера приведем экспериментальные данные о функциях спектральной плотности в плоском турбулентном потоке.

Если в качестве масштабов скорости и длины принять среднюю скорость v и половину толщины потока H , соответственно, то функции спектральной плотности

S_{33} для поперечной пульсационной скорости u_3' (в зависимости от $\Omega_H = \frac{\omega H}{v}$), измеренной на различных расстояниях от стенки, имеют вид, представленный на рис. 19.8.

Как видно из приведенных экспериментальных кривых, в пристеночном слое ($0 < x_3/H < 0,40$) характерные частоты (т.е. частоты, отвечающие максимуму) возрастают с приближением к стенке.

По экспериментальным точкам, относящимся к этому слою, построим зависимость S_{33} от безразмерной частоты $\Omega_{x_3} = \omega x_3 / \bar{u}_1(x_3)$. При вычислении этой частоты в качестве характерных длины и скорости выбраны расстояния x_3 до стенки от точки, в которой проводилось измерение спектра, и осредненная продольная скорость в этой же точке $\bar{u}_1(x_3)$. Как видно из рис. 19.9, на котором представлена зависимость

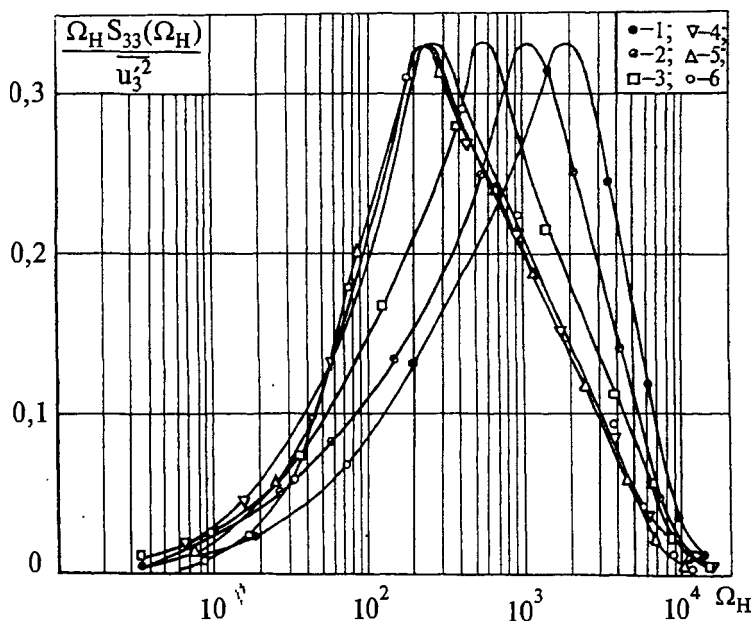


Рис. 19.8. Функции спектральной плотности поперечной пульсационной скорости, измеренные на следующих расстояниях x_3/H от стенки: 1 — 0,040; 2 — 0,088; 3 — 0,20; 4 — 0,47; 5 — 0,67; 6 — 1,00

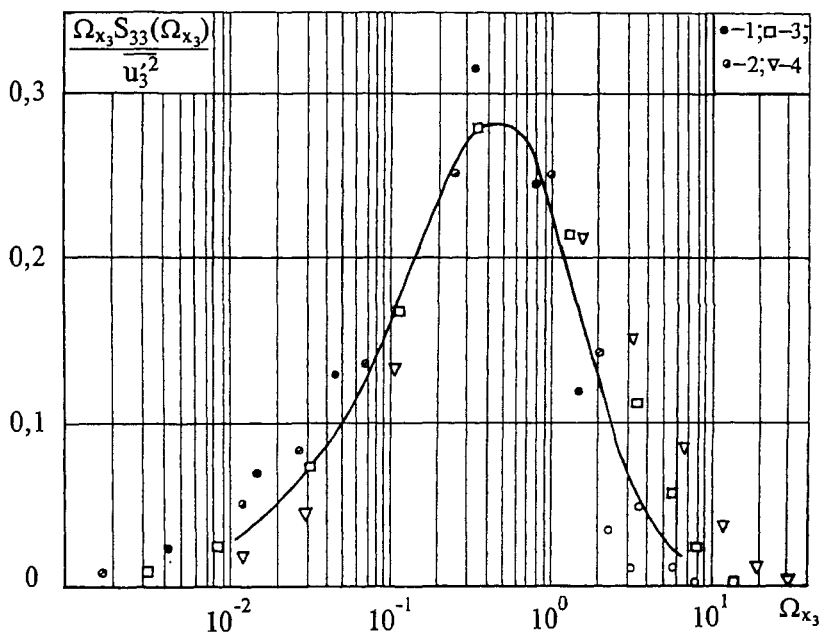


Рис. 19.9. Функция спектральной плотности в пристеночной области (обозначения см. на рис. 19.8)

$\Omega_{x_3} S_{33}(\Omega_{x_3}) = f(\ln \Omega_{x_3})$, в пристеночном слое характерная частота обратно пропорциональна расстоянию до стенки.

Отметим, что представление энергии пульсационного движения в виде (19.18) указывает на распределение этой энергии по спектру частот, и его можно рассматривать как способ для экспериментального определения функции спектральной плотности (наряду с его основным определением согласно зависимости (19.17)). Этот способ основан на так называемом *фильтровании* тахограммы. Для фильтрования необходимо иметь систему n полосовых фильтров, каждый из которых (например, j -й) пропускает колебания электрического тока с частотой, лежащей в некоторой полосе частот, и не пропускает колебания с другими частотами, причем j -й фильтр пропускает колебания тока с частотой в интервале от ω_j до ω_{j+1} , а $(j+1)$ -й фильтр — в интервале от ω_{j+1} до

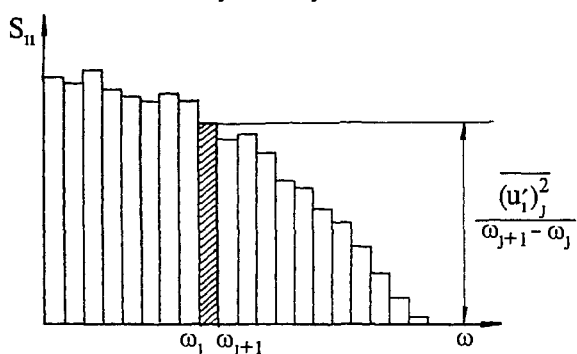


Рис. 19.10. Построение функции спектральной плотности "фильтрованием" тахограмм

чти постоянной частотой (из интервала от ω_j до ω_{j+1}) и со случайной амплитудой $(u'_1)_j$.

С помощью соответствующей аппаратуры легко измерить среднеквадратическое значение j -го колебательного процесса $\overline{(u'_1)_j^2}$. Разделим эту величину на ширину полосы частот j -го фильтра и отложим полученную величину по вертикали на рис. 19.10. Пропустив сигнал $u_1(t)$ через все n фильтров и выполнив соответствующие построения, получаем ступенчатую функцию, которая и представляет собой $S_n(\omega)$, так как она указывает на распределение энергии по частотам, а вся площадь под ступенчатым графиком равна $\overline{u_1'^2}$, потому что

$$\sum_{j=1}^n \frac{(u'_1)_j^2}{(\omega_{j+1} - \omega_j)} (\omega_{j+1} - \omega_j) = \sum_{j=1}^n \overline{(u'_1)_j^2} = \overline{u_1'^2}.$$

Следует указать, что процесс фильтрования электрического напряжения и построения функции спектральной плотности в настоящее время осуществляется предназначенным для этой цели специальным прибором, называемым *анализатором спектра*.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

20.1. Задачи экспериментального изучения движения жидкостей

Математические методы решения задач гидромеханики в большинстве случаев оказываются несостоятельными без привлечения экспериментальных данных. Это обусловлено следующими обстоятельствами.

1. Уравнения динамики вязкой жидкости (уравнения Навье—Стокса), решения которых должны обеспечить получение полной информации о полях скоростей и давлений, являются нелинейными уравнениями с частными производными. Реализация численного или аналитического решения таких уравнений в полном виде и даже изучение свойств этих решений до сих пор остаются серьезными математическими проблемами.

2. Большинство потоков, встречающихся в практически важных случаях, являются турбулентными. Наиболее распространенный аппарат, позволяющий описывать поля скорости и давления в турбулентных потоках — модель Рейнольдса—Буссинеска осредненного турбулентного потока и основанные на этой модели уравнения Рейнольдса. Как было отмечено в гл. 17, эти уравнения не замкнуты, они содержат больше неизвестных, чем допускает количество уравнений, и для их замыкания они должны быть дополнены зависимостями, полученными из экспериментальных данных о структуре турбулентных потоков.

3. Многие задачи, особенно в инженерно-строительных приложениях, требуют описания потоков со свободными поверхностями. Постановка и решение таких задач на основе уравнений Навье—Стокса или Рейнольдса исследованы в исключительно редких случаях, не представляющих, как правило, практического интереса. Использование более эффективных моделей (например, уравнений Сен-Венана) требует привлечения экспериментальных данных.

4. Ключевой вопрос при решении внутренних задач (течение в трубопроводах, реках, каналах) — это вопрос о диссипации механической энергии и о потерях напора. Он решается исключительно с помощью экспериментов. Даже, на первый взгляд, чисто теоретическая формула Борда для потерь при резком расширении потока при строгом анализе таковой не является, так как структура потока с разделением на транзитную и вихревую части и отдельные допущения могут быть использованы только после соответствующего экспериментального изучения потока.

Учитывая изложенное, можно выделить три основных вида объектов экспериментального гидромеханического исследования.

1. *Уникальные объекты*: водосбросные тракты гидротехнических сооружений, водозаборные сооружения, гидроагрегаты (насосы, турбины), самолеты, подводные и надводные корабли, системы наполнения шлюзов и т.п.

2. *Типовые объекты*: трубопроводы, элементы регулирования и контроля расхода (задвижки, диафрагмы и т.п.), открытые каналы, напри-

мер, мелиоративного или энергетического назначения, водосливы, здания и сооружения, водобойные колодцы и т.п.

3. *Универсальные объекты*: потоки, не всегда привязанные специально к конкретным конструкциям; здесь целью исследований является изучение структурных связей между локальными гидромеханическими характеристиками турбулентных потоков: результаты таких экспериментов могут использоваться в качестве дополнительных замыкающих зависимостей при математическом моделировании потоков, связанных с объектами первых двух типов.

Объект следует считать уникальным, если его не удастся подразделить на части, каждую из которых можно рассматривать как типовую, работающую независимо от остальных. Например, пусть водосбросной тракт состоит из подводящего канала, водосливной стенки с затворами, водобойного колодца и отводящего канала. При некоторых расчетных условиях (все затворы полностью открыты, в нижнем бьефе глубина соответствует расчетному расходу согласно кривой связи и т.п.) этот объект можно рассчитать, разбив его на элементы, каждый из которых рассматривается как типовый. При других расчетных условиях (в частности, при открытии части затворов, когда в нижнем бьефе имеют место пространственные (не плоские) условия сопряжения, либо когда в начальный период сброса воды уровень нижнего бьефа не соответствует сбрасываемому расходу) этот объект нельзя разделить на взаимно независимые типовые элементы, и его следует рассматривать как уникальный, т.е. моделировать его целиком.

Сходное соотношение имеет место между типовыми и универсальными объектами. Некоторые режимы течения в типовых объектах могут быть рассчитаны с помощью математических моделей, которые замыкаются (дополняются) исследованиями универсальных объектов. Например, резкое расширение турбулентного потока в трубе можно рассчитать, используя уравнения Рейнольдса, замыкаемые с помощью экспериментальных полуэмпирических зависимостей между локальными характеристиками турбулентности. Однако универсальность этих зависимостей ограничена, как правило, достаточно большими числами Рейнольдса. При числах Рейнольдса, близких к критическому $(Re_D)_{кр} = 2300$, а также при нестационарных режимах исследование и использование структурных связей между турбулентными характеристиками становятся неэффективными для решения практических задач.

Во всех указанных случаях экспериментальных исследований возникает проблема практической ценности, общности полученных результатов. Так, например, изучение характеристик потоков жидкости в уникальных объектах, как правило, выполняется на физических моделях, имеющих размеры, отличные от натуральных (лабораторная модель гидроузла во много раз меньше, чем натурный гидроузел; модель самолета или автомобиля в аэродинамической трубе меньше, чем эти объекты в природе и т.п.). При проведении опытов необходимо быть уверенным, что существуют надежные способы перенесения полученных результатов с модели на натуру, другими словами, что исследуемый модельный поток *подобен* натурному потоку

в пределах изучаемого объекта. Следовательно, должны быть сформулированы *критерии, гарантирующие подобие* натурального и модельного объектов, и правила пересчета модельных результатов на натурные условия.

При исследовании типовых объектов необходимо обеспечить диапазон изменения характеристик объекта и жидкости и способы представления экспериментальных результатов (организации информации о потоках), которые позволили бы эффективно использовать опытные данные. Например, изучение гидравлических потерь энергии при течении жидкости в цилиндрических трубах, естественно, может быть выполнено на ограниченном количестве труб, различающихся диаметром, состоянием внутренней поверхности, с использованием ограниченного количества различных жидкостей и т.п. Обобщая результаты таких исследований, необходимо их так организовать и представить, чтобы можно было указать диапазоны параметров труб и характеристик жидкостей, для которых результаты проведенных экспериментов могут быть использованы, а также способы этого использования. Аналогично при изучении обтекания потоком жидкости каких-либо тел, например, цилиндра, результаты исследований должны быть так организованы и представлены, чтобы с их помощью можно было рассчитать, например, нагрузку от действия ветра и на телеграфный столб и на провода, прикрепленные к нему. Следовательно, и в этом случае возникает проблема подобия экспериментально исследуемых явлений (объектов) и явлений (объектов), на которые следует распространить результаты этих исследований.

При изучении структуры турбулентных потоков обобщение результатов измерений также должно быть обосновано введением критериев локального гидродинамического (возможно, кинематического) подобия турбулентных потоков.

Таким образом, при экспериментальном изучении гидромеханических явлений практически неизбежно возникает проблема возможности моделирования этих явлений, подобия потоков, имеющих различные размеры, или подобия потоков жидкостей с различными физическими свойствами.

Один из наиболее эффективных методов, позволяющих организовать информацию о потоках, выработать критерии, устанавливающие подобие гидромеханических явлений, и обобщить опытные данные — анализ размерностей.

20.2. Предпосылки использования анализа размерностей

Практически важные характеристики потока жидкости или газа, такие как силовое воздействие на обтекаемое тело, диссипация механической энергии движения жидкости в каналах и т.п., определяются значительным количеством параметров. Например, обтекание однородным потоком несжимаемой жидкости кругового цилиндра, ось которого перпендикулярна вектору скорости потока, определяется гидромеханическими свойствами жидкости, т.е. плотностью ρ и вязкостью η , диаметром цилиндра D , скоростью потока V_∞ и состоянием обтекаемой

поверхности цилиндра. В первом приближении можно принять, что на поверхность цилиндра наклеены песчинки с характерным размером Δ , и эту величину, называемую шероховатостью и имеющую размерность длины, считать характеристикой состояния обтекаемой поверхности.

Пусть целью экспериментального исследования является определение силы F , действующей на цилиндр со стороны потока. Вследствие симметрии эта сила совпадает по направлению со скоростью потока, и приложена она к оси цилиндра. Следовательно, опытным путем необходимо измерить лишь численное значение F , приходящееся на единицу длины цилиндра; согласно изложенному выше:

$$F = f(\rho, \eta, V_{\infty}, D, \Delta). \quad (20.1)$$

В результате экспериментального исследования следует получить данные, достаточные для того, чтобы с их помощью определить силу, действующую на любой, встречающийся в инженерной практике цилиндрический объект. Это может быть ветровая нагрузка на дымовую трубу диаметром 5 метров или же на электрический провод диаметром 0,5 см, нагрузка от руслового потока на нефтепровод диаметром 1,4 м, пересекающий реку, а может быть нагрузка на стержень диаметром 2 см системы охлаждения электрического трансформатора в потоке масла.

Организуем эксперименты следующим образом. Зафиксируем значения ρ и η (т.е. используем в качестве рабочей жидкости, например, воздух при заданных температуре и давлении). Поместим цилиндр диаметром D и шероховатостью Δ в поток жидкости (например, в аэродинамическую трубу) и, задавая несколько значений скорости воздуха V_{∞} , с помощью динамометра определим силу, действующую на единицу длины цилиндра. В результате получим зависимость $F = f_1(V_{\infty})$. Изменив шероховатость поверхности цилиндра (наклеив на его поверхность другие песчинки) и проведя такие же опыты, получим $F = f_2(V_{\infty})$. Используя песчинки 10 различных размеров (чтобы изучить возможно более широкий диапазон встречающихся на практике шероховатостей), представим результаты экспериментов в виде графика (рис. 20.1).

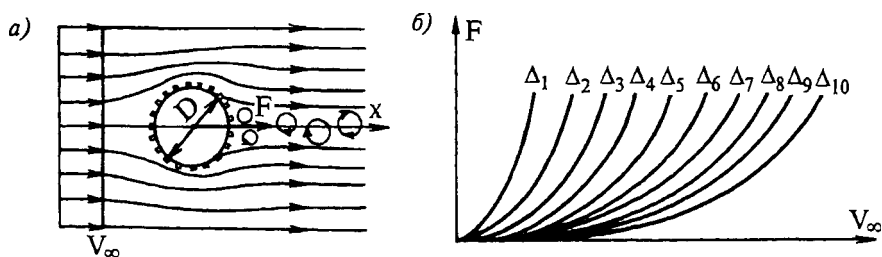


Рис. 20.1. Экспериментальное определение силы, действующей на обтекаемый цилиндр: a — схема обтекания; b — зависимость $F = F(V_{\infty}, \Delta)$

Для того, чтобы установить большую часть встречающихся на практике сочетаний параметров, подобные графики следует получить для различных сочетаний оставшихся параметров ρ , η и D . Если для каждого

из них в диапазоне возможных значений задать по 10 точек для экспериментального построения указанного графика, то материалы исследований будут представлены в виде 1000 графиков. Помимо неудобства и громоздкости представления, следует иметь в виду практически неприемлемую стоимость подобной программы исследований (например, представим себе лабораторную установку, позволяющую измерить, задавая различные скорости течения, силу, действующую со стороны потока воды на цилиндр диаметром 2 м).

Объем экспериментов может быть существенно сокращен, а результаты исследований можно представить в несравненно более компактном виде, если предварительно воспользоваться упрощением зависимости (20.1) на основе *анализа размерностей*.

20.3. Основные положения анализа размерности.

П-теорема

Основой анализа размерности является положение о том, что все математические равенства, выражающие связь между физическими величинами (параметрами потока жидкости или газа в гидромеханике), должны быть размерно-однородными или однородными по размерностям. Это означает, что:

размерность правой части равенства должна быть такой же как и размерность левой части того же равенства;

складывать и вычитать можно только величины, имеющие одинаковые размерности.

Эти очевидные правила (вряд ли кому-нибудь представится возможность сложить один килограмм с один метром) позволяют получить нетривиальные результаты, что вызывает у начинающих исследователей настороженное отношение к анализу размерностей. С одной стороны, результаты получаются как бы “из ничего”, из бесспорных предпосылок, которые не похожи на привычный фундамент физических наук; с другой стороны, результаты не имеют вида окончательных физических зависимостей, они требуют дополнительного, чаще всего экспериментального изучения явлений.

Продemonстрируем на примерах основные особенности технических приемов, используемых в анализе размерностей, и возможности, которые он предоставляет.

Предварительно зафиксируем, что в механике жидкости и газа используются первичные размерности: масса M ; длина L ; время T ; температура θ .

В дальнейшем с помощью анализа размерности будут рассмотрены лишь изотермические задачи, и температура не будет входить в число размерных параметров, определяющих интересующие нас гидромеханические явления. Поэтому примем, что в нашем распоряжении имеются три независимые первичные размерности: M , L , T . Размерности других физических параметров называются вторичными, или производными. Они получаются из зависимостей, определяющих эти параметры. Размерности наиболее употребительных в гидромеханике величин (размерных параметров) представлены в табл. 20.1.

Размерность гидромеханических величин

Размерный параметр	Обозначение	Определяющее выражение	Размерность	Единица величины
Масса	m	—	M	кг
Длина	ℓ	—	L	м
Время	t	—	T	с
Площадь	A, ω	$A = \ell_1 \cdot \ell_2$	L^2	m^2
Объем	∇	$\nabla = \ell_1 \cdot \ell_2 \cdot \ell_3$	L^3	m^3
Скорость	v u	$v = \frac{d\ell}{dt}$	$\frac{L}{T}$	м/с
Ускорение	a	$a = \frac{du}{dt}$	$\frac{L}{T^2}$	м/с ²
Сила	F	$F = ma$	$\frac{ML}{T^2}$	Н
Напряжение (плотность распределения поверхностной силы)	p	$p = \frac{F}{A}$	$\frac{M}{LT^2}$	$Па = \frac{Н}{м^2}$
Давление	p	$p = -\frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz})$	$\frac{M}{LT^2}$	Па
Плотность (плотность распределения массы)	ρ	$\rho = \frac{m}{\nabla}$	$\frac{M}{L^3}$	$\frac{кг}{м^3}$
Плотность распределения объемной силы (на единицу массы)	f	$f = \frac{F}{\rho \nabla}$	$\frac{L}{T^2}$	$\frac{м}{с^2}$
Динамический коэффициент вязкости	η	$\eta = \frac{p_{zx}}{\frac{du}{dz}}$	$\frac{M}{LT}$	пуаз Па·с
Кинематический коэффициент вязкости	ν	$\nu = \frac{\eta}{\rho}$	$\frac{L^2}{T}$	$\frac{стокс}{с}$ $\frac{м^2}{с}$
Объемный расход	Q	$Q = v\omega$	$\frac{L^3}{T}$	$\frac{м^3}{с}$
Массовый расход	Q_M	$Q_M = \rho v\omega$	$\frac{M}{T}$	$\frac{кг}{с}$
Весовой расход	Q_B	$Q_B = \rho g Q$	$\frac{ML}{T^3}$	$\frac{Н}{с}$

Размерный параметр	Обозначение	Определяющее выражение	Размерность	Единица величины
Кинетическая энергия, работа	КЭ, W, k	$KЭ = \frac{mV^2}{2}$	$\frac{ML^2}{T^2}$	Дж Н·м
Количество движения	КД	$КД = mu$	$\frac{ML}{T}$	$\frac{кг \cdot м}{с}$
Мощность	N	$N = \frac{КЭ}{t} = \frac{W}{t}$	$\frac{ML^2}{T^3}$	$\frac{Вт}{с}$ $\frac{Н \cdot м}{с}$

В качестве примера, на котором могут быть показаны основные приемы анализа размерности, рассмотрим задачу с распространением возмущения свободной поверхности в покоящейся жидкости, заполняющей широкий прямоугольный канал с горизонтальным дном (рис. 20.2). Жидкость имеет плотность ρ , она невязкая ($\eta = 0$), влиянием боковых стенок пренебрегаем и изменение всех характеристик рассматриваем лишь в плоскости (x, z).

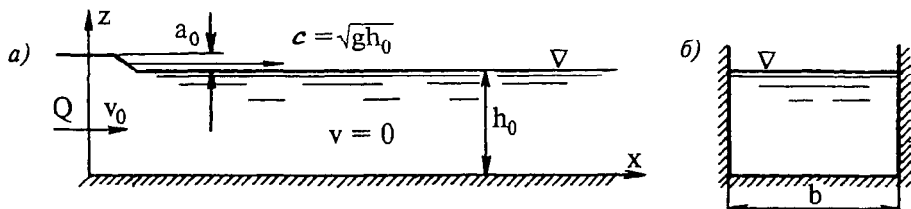


Рис. 20.2. Длинная волна в прямоугольном канале:
а — продольный разрез; б — поперечное сечение

Пусть через сечение 1—1 начинает поступать расход Q ; в результате отметка свободной поверхности возрастет в этом сечении на величину a_0 , а скорость изменится от 0 до $v_0 = \frac{Q}{bh_0}$, где h_0 — глубина; а b — ширина канала. Это возмущение (сочетание a_0 и v_0) будет распространяться вдоль оси x с некоторой скоростью c . Напомним, что эта задача была рассмотрена в главе 10, и на основе решения дифференциальных уравнений мелкой воды (Сен-Венана) было определено, что если $a_0 \ll h_0$, то

$$c = \sqrt{gh_0}. \quad (20.2)$$

Покажем, как аналогичный результат можно получить, используя анализ размерностей. Здесь следует выделить несколько этапов решения задачи.

1-й этап. Устанавливаем, от каких величин может зависеть искомая скорость распространения возмущения c . Это наиболее ответственный этап, требующий глубокого понимания физики процесса. В данном случае характерными величинами, определяющими процесс распространения, является плотность жидкости ρ , глубина в канале h_0 , ускорение силы тяжести g , амплитуда возмущения a_0 и скорость поступления жидкости в канал v_0 . Для упрощения задачи с тем, чтобы результат ее

решения можно было сравнить с (20.2), допустим, как и в гл. 10, что $a \ll h_0$ и $v_0 \ll c$, так что эти величины не оказывают влияния на процесс (в принятии подобных допущений и заключается ответственность первого этапа). При этом

$$c = f(\rho, h_0, g), \quad (20.3)$$

Все величины, от которых зависит значение c , имеют различные размерности. Поскольку в соответствии с положением об однородности по размерностям их нельзя суммировать, то остается только возможность добиться одинаковой размерности левой и правой частей (20.2), возводя эти величины (ρ , h_0 и g) в какие-либо степени и составляя произведения из этих степеней:

$$c = k \rho^{x_1} \cdot h_0^{x_2} \cdot g^{x_3}, \quad (20.4)$$

где k — безразмерный коэффициент; x_1, x_2, x_3 — числа, которые следует определить.

2-й этап. Подставим вместо всех величин, входящих в (20.4), размерности и потребуем, чтобы размерность левой части была равна размерности правой:

$$\frac{L}{T} = \left(\frac{M}{L^3}\right)^{x_1} \cdot (L)^{x_2} \cdot \left(\frac{L}{T^2}\right)^{x_3};$$

$$M^0 L^1 T^{-1} = M^{x_1} L^{(-3x_1 + x_2 + x_3)} T^{-2x_3}.$$

Приравняв показатели степени у одноименных размерностей, получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} M: 0 &= x_1; \\ L: 1 &= -3x_1 + x_2 + x_3; \\ T: -1 &= -2x_3. \end{aligned} \right\}$$

3-й этап. Решив эту систему, найдем

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 0; \\ x_2 &= \frac{1}{2}; \\ x_3 &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \right\}$$

В результате выражение (20.2) приобретает вид

$$c = k \rho^0 h_0^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}}$$

или

$$c = k \sqrt{g h_0}. \quad (20.5)$$

Сравнивая (20.5) с (20.2), отметим, что с помощью анализа размерности получена структура зависимости c от g и h_0 такая же, как и с помощью дифференциальных уравнений мелкой воды. Но для вычисления скорости c по формуле (20.5) необходимо определить значение безразмерного коэффициента k ; для этого анализа размерностей недостаточно, необходимо либо провести эксперимент, либо использовать дифференциальные уравнения движения жидкости. Этот параметр k , являясь без-

размерным, обладает универсальностью в том смысле, что достаточно провести один опыт в одном лотке при одной глубине h_0 , и найденное в этом опыте значение k можно использовать для всех других глубин.

Кроме того, анализ размерностей позволил установить, что скорость c не зависит от рода жидкости, т.е. и в воде и в ртути скорость распространения возмущений свободной поверхности одинакова.

Отметим, что приведенный пример показал основные особенности анализа размерностей. С одной стороны, не проводя экспериментов и не используя физических законов, только из условий однородности по размерности мы установили, что скорость c не зависит от рода жидкости, установили структуру зависимости c от глубины. С другой стороны, полученная зависимость (20.5) дает лишь структуру зависимости и требует дополнительных (но, что существенно, значительно меньших по объему) исследований (экспериментальных или теоретических).

Рассмотрим ту же задачу о скорости распространения возмущения в канале, приняв на первом этапе, что c зависит не только от ρ , h_0 и g , но также и от a_0 (т.е. a_0 — не бесконечно малая величина):

$$c = f(\rho, h_0, g, a_0). \quad (20.6)$$

Как и в первом случае, представим эту зависимость в виде

$$c = k \rho^{x_1} h_0^{x_2} g^{x_3} a_0^{x_4}. \quad (20.7)$$

2-й этап. Подставив в (20.7) размерности

$$\frac{L}{T} = \left(\frac{M}{L^3}\right)^{x_1} (L)^{x_2} \left(\frac{L}{T^2}\right)^{x_3} (L)^{x_4} \quad (20.8)$$

и приравняв показатели степени у M , L и T , получим

$$\left. \begin{aligned} M: 0 &= x_1; \\ L: 1 &= -3x_1 + x_2 + x_3 + x_4; \\ T: -1 &= -2x_3. \end{aligned} \right\} \quad (20.9)$$

3-й этап. Полученная система уравнений не имеет единственного решения, так как здесь количество неизвестных (4) больше количества уравнений (3). Одну из неизвестных x_i можно задать. Пусть это будет x_4 ; выразив остальные неизвестные через нее:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 0; \\ x_2 &= \frac{1}{2} - x_4; \\ x_3 &= \frac{1}{2}, \end{aligned} \right\}$$

получим

$$c = k \rho^0 h_0^{\frac{1}{2} - x_4} g^{\frac{1}{2}} a_0^{x_4}$$

или

$$c = k \left(\frac{a_0}{h_0}\right)^{x_4} \sqrt{gh_0}. \quad (20.10)$$

Поскольку x_4 является произвольным безразмерным числом, то полученный результат можно интерпретировать следующим образом. Положим, что $x_4 = 1, 2, 3, \dots$; при этом c можно представить в виде ряда

$$c = \left[\sum_{j=1}^{\infty} k_j \left(\frac{a_0}{h_0} \right)^j \right] \sqrt{gh_0}. \quad (20.11)$$

Этот ряд (если он сходится, что вполне правдоподобно при $a < h_0$) представляет собой некоторую неизвестную функцию:

$$\Phi \left(\frac{a_0}{h_0} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} k_j \left(\frac{a_0}{h_0} \right)^j.$$

Тогда зависимость (20.12) можно записать в виде

$$c = \Phi \left(\frac{a_0}{h_0} \right) \sqrt{gh_0}. \quad (20.12)$$

Таким образом на этом примере выявлена еще одна особенность анализа размерностей: если количество размерных параметров, от которых зависит искомая величина, больше трех (количества первичных размерностей), то с помощью анализа размерностей можно установить структуру зависимости, выявить безразмерные комбинации независимых размерных величин и в результате упростить определение окончательной зависимости, уменьшив количество независимых переменных. Так, вместо экспериментального определения скорости c как функции *четырех* переменных (ρ, h_0, g, a_0) анализ размерности позволил свести задачу к определению c как функции *одной* переменной $\left(\frac{a_0}{h_0} \right)$.

В общем виде полученный частный результат формулируется в виде так называемой *П-теоремы*, которую приведем без доказательства.

Если физический процесс описывается однородным по размерности равенством

$$y_1 = f(y_2, y_3, \dots, y_n), \quad (20.13)$$

где $y_1, y_2, \dots, y_n$ — размерные параметры, то существует эквивалентное равенство для меньшего количества $(n - m)$ безразмерных параметров:

$$\Pi_1 = F(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-m}), \quad (20.14)$$

где $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-m}$ — безразмерные параметры, составленные из $y_1, y_2, \dots, y_n$. Значение m обычно равно (теоретически — не больше) числу первичных размерностей, с помощью которых выражаются размерности $y_1, y_2, \dots, y_n$ (если первичные размерности M, L и T , как в рассмотренном выше примере, то $m = 3$).

Название *П-теоремы* происходит от использованной для обозначения безразмерных параметров греческой буквы Π . Эту теорему часто связывают с именем Бэкингема, хотя анализ размерности впервые был предложен Фурье.

П-теорема, как типичная математическая теорема существования, лишь устанавливает возможность перехода от равенства (20.13) к равенству (20.14); в ней отсутствуют указания на то, как из размерных параметров y_i составить безразмерные параметры Π_j , и тем более какой набор Π_j будет эффективен при решении той или иной физической

задачи. Отметим, что из любого безразмерного параметра, например, из Π_j , возведением в степень можно образовать также безразмерные параметры $\left(\sqrt{\Pi_j}, \frac{1}{\Pi_j}, \Pi_j^2 \text{ и т.п.} \right)$. Более того, безразмерные параметры можно образовывать, составляя произведения степеней двух и более безразмерных параметров $\left(\Pi_j \cdot \sqrt{\Pi_i}; \Pi_j^{-\frac{2}{3}} \cdot \Pi_i^2 \text{ и т.п.} \right)$.

В связи с этим возникает вопрос о том, как при использовании П-теоремы сформировать такой набор безразмерных параметров $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-m}$, который обеспечит наиболее простой вид функции F . Эта функция, как правило, определяется экспериментально, и поэтому точность ее определения существенно зависит от вида функции, аппроксимирующей экспериментальные данные. Как было указано, П-теорема не дает ответа на этот вопрос.

В разд. 20.1 было показано, что в конечном итоге все задачи экспериментального исследования гидромеханических явлений связаны с вопросами их подобия и моделирования, поэтому для установления набора безразмерных параметров, позволяющих эффективно решать ту или иную задачу, обратимся к общим вопросам о подобии и моделировании физических процессов.

20.4. Подобие гидромеханических явлений

Для того, чтобы два гидромеханических объекта (два потока жидкости или газа) были подобны, необходимо соблюдение трех типов подобия этих явлений (потоков):

геометрическое подобие;
кинематическое подобие;
динамическое подобие.

Для определенности будем считать один из объектов натурным, или прототипом, а второй объект — модельным; все параметры натурального объекта обозначим индексом “н”, а модельного — “м”.

Геометрическое подобие натурального и модельного объектов обеспечивается, если подобны все треугольники, связывающие сходственные точки физических границ этих объектов.

Так, на рис. 20.3 подобны треугольники $A_m B_m E_m$ и $A_n B_n E_n$; $C_m B_m D_m$ и $C_n B_n D_n$ и т.д. Постоянное отношение расстояния между двумя произвольными точками модельного объекта к расстоянию между соответствующими точками натурального объекта называется *линейным масштабом модели*:

$$M_l = \frac{A_m B_m}{A_n B_n} = \frac{D_m E_m}{D_n E_n} = \dots = \text{const.} \quad (20.15)$$

Из определения геометрического подобия следует, что угол между двумя плоскими элементами физических границ в модельном объекте равен углу между соответствующими элементами натурального объекта.

Геометрическое подобие криволинейных границ потока обеспечивает аппроксимацией с необходимой точностью этих границ кусочно-плос-

кими поверхностями. При этом, в частности, круглоцилиндрической поверхности диаметром D_H в натурном объекте будет соответствовать в модельном объекте также круглоцилиндрическая поверхность диаметром $D_M = M_\ell D_H$.

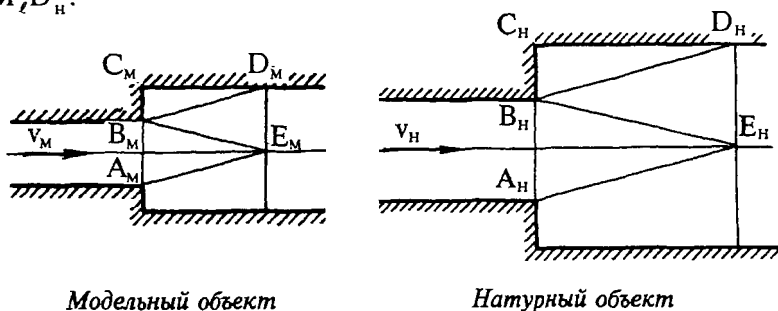


Рис. 20.3. Геометрическое подобие гидравлических объектов

Кинематическое подобие предполагает, что картина течения в модельном объекте подобна натурной картине течения, другими словами, в сходственных точках скорости жидкости (или какая-либо другая скорость, например, скорость движущегося в жидкости тела) в натурном и модельном объектах одинаково ориентирована относительно физических границ, а отношение значений модельной и натурной скоростей постоянно во всех точках потока:

$$\frac{u_M}{u_H} = M_u = \text{const.} \quad (20.16)$$

Это условие особенно важно при возможности образования отрывных течений: одни и те же физические границы могут формировать качественно различающиеся картины течения; примеры таких течений, когда физическими границами являются труба с резким увеличением диаметра и круговой цилиндр, представлены на рис. 20.4 и 20.5, соответственно. Очевидно, что

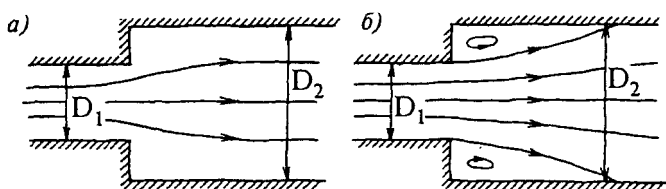


Рис. 20.4. Геометрически подобные границы не обеспечивают кинематического подобия потоков

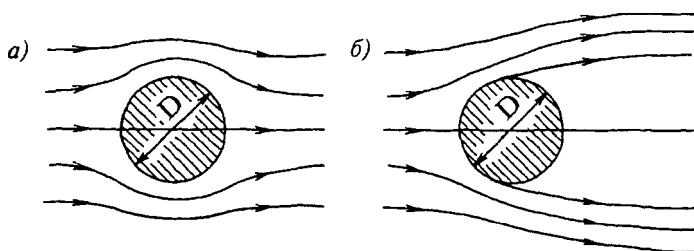


Рис. 20.5. Геометрическое подобие тел не обеспечивает кинематического подобия потоков

потоки при безотрывном обтекании физических границ (рис. 20.4,а и 20.5,а) не подобны кинематически потокам, имеющим отрывные зоны (водовороты, каверны и т.п. на рис. 20.4,б и 20.5,б), и следовательно, такие пары течений не могут рассматриваться как модельный и натурный объекты.

Динамическое подобие потоков формулируется на основе закона подобия Ньютона, согласно которому в каждой из сходственных точек модельного и натурного потоков *многоугольники сил*, действующих на жидкую частицу (включая силу инерции), должны быть:

подобны, причем коэффициент подобия (масштаб сил $M_F = \frac{F_m}{F_n}$) должен быть постоянен во всей области течения;

одинаково ориентированы относительно физических границ (рис. 20.6).

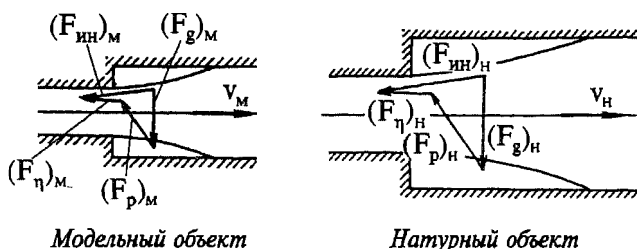


Рис. 20.6. Динамическое подобие гидравлических объектов

Из условий подобия следует, что отношение двух каких-либо сил, действующих на жидкую частицу в любой точке модельного объекта (например, силы вязкости $(F_\eta)_м$ к силе давления $(F_p)_м$, должно быть равно отношению аналогичных сил, действующих в сходственной точке натурного объекта, т.е.

$$\frac{(F_\eta)_м}{(F_p)_м} = \frac{(F_\eta)_н}{(F_p)_н}. \quad (20.17)$$

Такие равенства, записанные для различных сочетаний сил, формирующих течение жидкости, рассматривают как *критерии динамического подобия* натурного и модельного объектов.

В большинстве задач гидромеханики сила инерции жидкой частицы является формирующей течение силой, в то время как силы другой природы (силы вязкости, давления, тяжести, электромагнитного происхождения, поверхностного натяжения) не всегда вносят ощутимый вклад в баланс сил, и в отдельных задачах те или иные силы целесообразно исключать из рассмотрения, считая их вклад исчезающе малым. Поэтому принято при составлении критериев подобия рассматривать отношения внешних для заданной жидкой частицы сил к силе инерции этой частицы.

Для того, чтобы выразить критерии подобия через параметры модельного и натурного объекта, введем понятия характерной скорости u и характерного линейного размера ℓ объекта. В различных случаях величина u может обозначать либо среднюю скорость потока в трубе v , либо линейно-связанную с ней скорость жидкой частицы в фиксированной

точке потока, либо пульсационную скорость при турбулентном движении, либо динамическую скорость u_* , определяемую через касательное напряжение на твердой границе. Аналогично и характерный линейный размер ℓ может представлять собой либо диаметр трубы D , в которой течет жидкость, либо глубину потока в открытом канале h , либо диаметр шара, обтекаемого жидкостью, либо линейный размер жидкой или твердой частицы при определении действующих на них сил.

Оценим значения сил, действующих на жидкие частицы, полагая на основании изложенного выше, что характерная для данного объекта площадь поверхности, на которую действует сила, равна ℓ^2 , характерный объем — ℓ^3 , а пространственная производная скорости $\frac{\partial u}{\partial \ell} \sim \frac{u}{\ell}$.

Сила инерции $F_{ин}$ жидкой частицы равна произведению ее массы $\rho \ell^3$ на ускорение; при установившемся движении ускорение жидкой частицы имеет только конвективную составляющую $u \frac{\partial u}{\partial \ell} \sim u \frac{u}{\ell}$, поэтому

$$F_{ин} = \rho \ell^3 u \frac{u}{\ell} = \rho u^2 \ell^2. \quad (20.18)$$

Аналогично найдем выражение для других сил:
сила тяжести

$$F_g \sim \rho \ell^3 g, \quad (20.19)$$

сила вязкости

$$F_\eta = \tau \ell^2 = \eta \frac{\partial u}{\partial \ell} \ell^2 = \eta \frac{u}{\ell} \ell^2 = \eta u \ell, \quad (20.20)$$

сила давления

$$F_p = \Delta p \ell^2. \quad (20.21)$$

Составим отношения значений каждой из трех последних сил к силе инерции (20.18) для модельного объекта и приравняем соответствующим отношениям для натурального объекта.

1. Сила тяжести и сила инерции:

$$\left(\frac{\rho \ell^3 g}{\rho u^2 \ell^2} \right)_m = \left(\frac{\rho \ell^3 g}{\rho u^2 \ell^2} \right)_n$$

или

$$\left(\frac{u^2}{g \ell} \right)_m = \left(\frac{u^2}{g \ell} \right)_n,$$

или

$$\frac{u_m^2}{g \ell_m} = \frac{u_n^2}{g \ell_n}. \quad (20.22)$$

Безразмерное выражение $u^2/g\ell$ называют *числом Фруда* и обозначают

$$Fr = \frac{u^2}{g \ell}. \quad (20.23)$$

Число Фруда является критерием динамического подобия, если в состав сил, определяющих гидродинамическое явление (формирующих

поток), входят силы *тяжести* и *инерции*. Используя (20.23), условие подобия (20.22) представим в виде:

$$(Fr)_m = (Fr)_n. \quad (20.24)$$

2. Сила вязкости и сила инерции:

$$\left(\frac{\eta u \ell}{\rho u^2 \ell^2} \right)_m = \left(\frac{\eta u \ell}{\rho u^2 \ell^2} \right)_n$$

или

$$\left(\frac{\eta}{\rho u \ell} \right)_m = \left(\frac{\eta}{\rho u \ell} \right)_n,$$

или

$$\frac{u_m \ell_m}{\nu_m} = \frac{u_n \ell_n}{\nu_n}. \quad (20.25)$$

Безразмерное выражение $u\ell/\nu$ называют *числом Рейнольдса* и обозначают

$$Re = \frac{u \ell}{\nu} = \frac{\rho u \ell}{\eta}. \quad (20.26)$$

Число Рейнольдса является критерием динамического подобия, если в состав сил, формирующих поток, входят силы *вязкости* и *инерции*. Используя (20.26), перепишем условие подобия (20.25) в виде

$$(Re)_m = (Re)_n. \quad (20.27)$$

3. Сила давления и сила инерции:

$$\left(\frac{\Delta p \ell^2}{\rho u^2 \ell^2} \right)_m = \left(\frac{\Delta p \ell^2}{\rho u^2 \ell^2} \right)_n$$

или

$$\left(\frac{\Delta p}{\rho u^2} \right)_m = \left(\frac{\Delta p}{\rho u^2} \right)_n,$$

или

$$\frac{\Delta p_m}{\rho_m u_m^2} = \frac{\Delta p_n}{\rho_n u_n^2}.$$

Безразмерное выражение $\Delta p / \frac{1}{2} \rho u^2$ называют *числом Эйлера* или коэффициентом давления и обозначают Eu (множитель $\frac{1}{2}$ вводят в знаменатель, чтобы последний был близок по форме к скоростному напору в уравнении Бернулли):

$$Eu = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho u^2}. \quad (20.28)$$

Число Эйлера обычно не рассматривается как независимый критерий динамического подобия; согласно уравнениям гидродинамики (в частности, уравнению Бернулли) поле давления и поле скорости жид-

кости связаны друг с другом; перепад давления Δp , например, при обтекании жидкостью твердого тела связан со скоростью потока, а скорость потока связана с перепадом давления, так что значение числа Эйлера, как правило, не может рассматриваться как независимый критерий подобия. Вместе с тем, в динамически подобных потоках

$$(Eu)_m = (Eu)_n. \quad (20.29)$$

Кроме критериев подобия, получаемых из закона динамического подобия Ньютона, при моделировании гидромеханических явлений необходимо принимать во внимание еще целый ряд безразмерных величин.

4. При моделировании натуральных объектов, в которых возможны эффекты, связанные со *сжимаемостью* жидкости, в качестве критерия подобия следует использовать *число Маха*

$$M = \frac{u}{a} = \frac{u}{\sqrt{\frac{E_{\text{ж}}}{\rho}}}, \quad (20.30)$$

где a — скорость звука в жидкости.

При этом для подобия модельного и натурального объектов необходимо равенство

$$M_m = M_n \quad (20.31)$$

или

$$\frac{u_m}{a_m} = \frac{u_n}{a_n}. \quad (20.32)$$

Кроме того, в этом случае следует включить в число независимых безразмерных параметров, определяющих подобие процессов, и показатель адиабаты $k = c_p/c_v$.

5. При необходимости учесть *поверхностные* эффекты на границе, разделяющей различные жидкости (например, воду и воздух), в число критериев подобия включают *число Вебера*

$$We = \frac{\rho u^2 \ell}{\sigma}, \quad (20.33)$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения.

Этот критерий следует иметь в виду, рассматривая лишь течения тонких слоев жидкости со свободной поверхностью (пленочные течения).

6. При *нестационарных* граничных условиях, когда, например, какое-нибудь твердое тело колеблется с некоторой частотой Ω в потоке жидкости, из трех размерных величин, определяющих этот процесс: из скорости потока u , линейного размера тела ℓ и частоты Ω — можно образовать безразмерную величину, которую называют *числом Струхала*:

$$Sh = \frac{\Omega \ell}{u}. \quad (20.34)$$

Если колебания тела задаются внешней по отношению к потоку силой (рис. 20.7), то число Струхала является *независимым* критерием подобия, и при изучении этого явления на модели следует потребовать выполнения условия

$$(Sh)_m = (Sh)_n \quad (20.35)$$

или

$$\frac{\Omega_m \ell_m}{u_m} = \frac{\Omega_n \ell_n}{u_n}.$$

В некоторых случаях колебания тела в турбулентном потоке обусловлены именно обтеканием его жидкостью, образованием за телом турбулентного следа, цепочки вихрей и т.п. Такие явления приходится рассматривать при проектировании дымовых труб, мостов, линий электропередач; здесь число Струхала — это зависимый безразмерный параметр, а независимыми будут число Рейнольдса и, возможно, число Маха.

Безразмерные параметры, представляющие собой произведения величин, имеющих отличающиеся друг от друга размерности (например, числа Рейнольдса, Фруда и т.п.), называют безразмерными *комплексами*. Наряду с ними, используют безразмерные параметры в виде отношения двух величин, имеющих одинаковую размерность; например, число Маха, относительная ширина открытого потока $\beta = b/h$, относительная шероховатость $\Delta_r = \Delta/\ell$ (в круглой трубе ℓ — диаметр D , а в открытом русле ℓ — глубина потока h), относительная длина трубы ℓ/D и т.п. Такие параметры называются безразмерными *симплексами*.

Безразмерные комплексы и симплексы, которые используются как *критерии подобия* (для обеспечения геометрического и динамического подобия), называют *независимыми безразмерными параметрами*. Кроме них в гидромеханике используют так называемые *зависимые* (искомые) *безразмерные параметры*. В их число входят из приведенных выше число Эйлера Eu , в некоторых задачах — число Струхала Sh . Кроме этих чисел, зависимыми безразмерными параметрами являются:

коэффициент гидравлического трения для круглой трубы диаметром D :

$$\lambda = \frac{2gh_\ell D}{\ell v^2}; \quad (20.36)$$

коэффициент местной потери напора:

$$\zeta_m = \frac{2gh_m}{v^2}; \quad (20.37)$$

коэффициент лобового сопротивления движущегося тела:

$$c_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho v^2 \ell^2}; \quad (20.38)$$

коэффициент подъемной силы:

$$c_z = \frac{F_z}{\frac{1}{2} \rho v^2 \ell^2}.$$

Зависимые (искомые) безразмерные параметры рассматривают как функцию от независимых (задаваемых) безразмерных параметров.

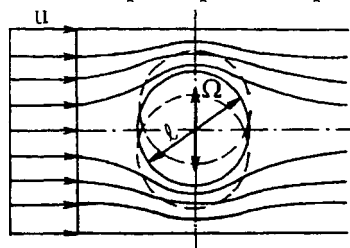


Рис. 20.7. Вынужденное колебание цилиндра в потоке жидкости

Представим набор приведенных выше безразмерных параметров и их интерпретации, которые позволяют установить, в каких гидромеханических объектах эти параметры играют важную роль (например, в каких случаях их следует рассматривать как критерии подобия), а в каких объектах их роль незначительна (табл. 20.2).

Таблица 20.2

Интерпретации и области применения безразмерных параметров

Наименование и обозначение параметра	Интерпретация	Альтернативная интерпретация	Область эффективного применения
Число Рейнольдса $Re = \frac{\rho u \ell}{\eta}$	$\frac{\text{сила инерции}}{\text{сила вязкости}}$	$\frac{\text{поток кинетической энергии}}{\text{диссипация механической энергии}}$	Ламинарные и турбулентные течения
Число Фруда $Fr = \frac{u^2}{g \ell}$	$\frac{\text{сила инерции}}{\text{сила тяжести}}$	$\frac{\text{кинетическая энергия}}{\text{потенциальная энергия}}$ $\sqrt{Fr} = \frac{\text{скорость потока}}{\text{скорость распространения поверхностных возмущений}}$	Течения в открытых руслах
Число Маха $M = \frac{u}{a}$	$\frac{\text{сила инерции}}{\text{сила упругого сопротивления сжатию}}$	$\frac{\text{кинетическая энергия}}{\text{тепловая энергия}}$	Течения сжимаемых жидкостей
Число Вебера $We = \frac{\rho u^2 \ell}{\sigma}$	$\frac{\text{сила инерции}}{\text{сила поверхностного натяжения}}$	$\frac{\text{кинетическая энергия}}{\text{поверхностная энергия}}$	Пленочные течения
Число Эйлера $Eu = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho u^2}$	$\frac{\text{сила давления}}{\text{сила инерции}}$	$\frac{\text{работа сил давления}}{\text{кинетическая энергия}}$	Все потоки
Число Струхала $Sh = \frac{\Omega \ell}{u}$	$\frac{\text{частота колебаний тела}}{\text{характерная частота потока}}$	$\frac{\text{скорость границ}}{\text{скорость потока}}$	Колебательные движения границ потока
Коэффициент гидравлического трения $\lambda = \frac{2gh, D}{v^2 \ell}$	$\frac{\text{потеря механической энергии}}{\text{кинетическая энергия}}$		Внутренняя задача

Наименование и обозначение параметра	Интерпретация	Альтернативная интерпретация	Область эффективного применения
Коэффициент местной потери напора $\zeta_m = \frac{2gh_m}{v^2}$	потеря механической энергии <u>кинетическая энергия</u>		Внутренняя задача
Коэффициент лобового сопротивления $c_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho v^2 \ell^2}$	<u>лобовая сила</u> сила инерции		Внешняя задача
Коэффициент подъемной силы $c_z = \frac{F_z}{\frac{1}{2}\rho v^2 \ell^2}$	<u>подъемная сила</u> сила инерции		Внешняя задача

20.5. Особенности и основные приемы моделирования гидромеханических явлений

Пусть требуется исследовать гидромеханические (гидравлические) явления, происходящие в крупном береговом водозаборе (рис. 20.8) при различных режимах его работы (при изменении уровня воды в реке, при различных положениях затворов, регулирующих подачу воды в канал и т.п.). Ширина водозаборного фронта 40 м, длина объекта, на границах которого можно пренебречь его влиянием (на уровень воды в реке на границе А—А и на равномерное движение в отводящем канале на границе В—В) — 120 м. В лаборатории имеется площадка шириной 3 м и длиной 6 м. Максимально возможный в этих

условиях линейный масштаб модели $M_\ell = \frac{6\text{ м}}{120\text{ м}} = \frac{1}{20}$. В данном масштабе на лабораторной площадке следует построить геометрически подобную модель. Для обеспечения динамического подобия необходимо установить, какие силы определяют рассматриваемое явление и, следовательно, какие безразмерные параметры следует принять в качестве критериев подобия. В открытых (безнапорных) потоках сжимаемостью воды можно пренебречь; большие размеры (измеряемые метрами и десятками метров) модельного и натурного объектов исключают необходимость учитывать влияние поверхностного натяжения. Таким образом, устанавливаем, что течение будет определяться

силами тяжести, вязкости и инерции, при этом критериями подобия являются числа Фруда и Рейнольдса.

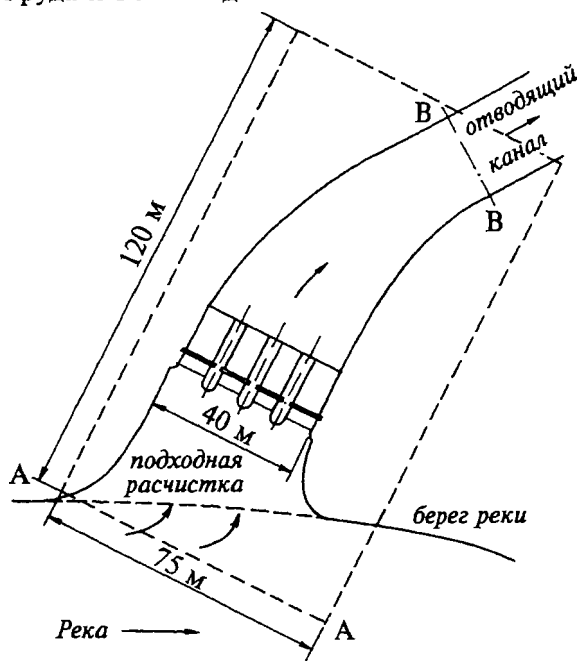


Рис. 20.8. Схема берегового водозабора

Из условия (20.22)

$$\frac{u_m^2}{g \ell_m} = \frac{u_n^2}{g \ell_n}$$

получаем масштаб скорости

$$M_u = \frac{u_m}{u_n} = \sqrt{\frac{\ell_m}{\ell_n}} = \frac{1}{\sqrt{20}}$$

и масштаб расхода

$$M_Q = \frac{Q_m}{Q_n} = \frac{u_m \ell_m^2}{u_n \ell_n^2} = \frac{1}{\sqrt{20} \cdot 20^2}.$$

Согласно второму критерию на модели следует обеспечить условие

$$\frac{u_n \ell_n}{\nu_n} = \frac{u_m \ell_m}{\nu_m},$$

откуда следует масштаб кинематического коэффициента вязкости

$$M_\nu = \frac{\nu_m}{\nu_n} = \frac{u_m \ell_m}{u_n \ell_n} = \frac{1}{\sqrt{20} \cdot 20}.$$

В соответствии с полученным масштабом M_ν на модели вместо воды необходимо в качестве рабочей использовать жидкость, у которой кинематический коэффициент вязкости почти в 100 раз меньше. Кинематический коэффициент вязкости воды $\nu \approx 0,01 \text{ см}^2/\text{с}$; есть жидкости, у которых ν в сотни и даже в тысячи раз больше (глице-

рин, технические масла), но практически только ртуть имеет $\nu \approx 0,001 \text{ см}^2/\text{с}$, что всего в 10 раз меньше, чем у воды; другие жидкости имеют значения ν либо того же порядка, что вода, либо больше. Возникает безвыходное, на первый взгляд, положение: оказывается невозможным удовлетворить одновременно двум критериям подобия. Практический выход из этого положения заключается в экспериментально установленной возможности *приближенного моделирования*. Опытным путем установлено, что на участках, где движение резкоизменяющееся (это имеет место в пределах рассматриваемого объекта), все основные характеристики потока, определяемые зависимыми безразмерными параметрами, практически постоянны при всех значениях числа Рейнольдса $Re > 10000$. Поэтому вместо условия (20.25) достаточно потребовать выполнения двух условий:

$$\frac{u_m \ell_m}{\nu_m} > 10^4 \text{ и } \frac{u_n \ell_n}{\nu_n} > 10^4, \quad (20.39)$$

Как правило, в натуральных объектах скорость u_n имеет порядок десятка сантиметров, глубина — сотен сантиметров, что обеспечивает $Re > 10^5$. Следовательно, условия (20.39) накладывают ограничения лишь на масштаб модели. В некоторых случаях, когда глубина потока на модели недостаточна, чтобы обеспечить выполнение условия (20.39), а горизонтальные размеры лабораторной площадки не позволяют увеличить линейный масштаб модели, приходится использовать искаженное геометрическое моделирование объекта, вводя более крупный (по сравнению с горизонтальным) вертикальный линейный масштаб.

Диапазон изменения критерия подобия, в пределах которого его влияние на моделируемый процесс практически пренебрежимо мало, называется *автомодельным*. В рассмотренном выше примере автомодельность имеет место при числах Рейнольдса $Re > 10^4$. В этом же объекте можно считать, что имеют место автомодельные диапазоны чисел Маха и Вебера.

При равномерном движении в трубах и каналах автомодельность по критерию Рейнольдса (т.е. независимость основной безразмерной характеристики таких потоков — коэффициента гидравлического трения λ от числа Re) имеет место в области квадратичного сопротивления (при $Re_D > (Re_D)''_{\text{пред}} = \frac{500}{\Delta_r}$; см. гл. 5).

Экспериментальными исследованиями установлен и автомодельный диапазон чисел Фруда — $Fr < 0,1$. Если, например, в рассмотренном примере в пределах всего натурального водозабора $Fr < 0,1$, то на модельном объекте вместо условия (20.22) достаточно наряду с геометрическим подобием обеспечить на модели условие $Fr < 0,1$. Особое место занимает вопрос о кинематическом подобии потоков на входе и выходе из водозабора.

Рассмотрим особенности моделирования типовых объектов, выбрав в качестве примера истечение из резервуара в атмосферу через цилиндрический насадок (см. рис. 8.2). Насадок длиной ℓ и с внутренним диаметром D присоединен к резервуару, в котором свободная поверхность

воды имеет отметку, равную H (горизонтальная координатная плоскость проходит по оси насадка), а абсолютное давление на свободную поверхность равно p_0 ; атмосферное давление обозначим p_a . Требуется определить скорость v истечения из насадка в атмосферу. Согласно технике анализа размерностей первый этап заключается в установлении параметров, от которых зависит скорость. На этом этапе решающую роль играют интуиция и опыт исследователя: с одной стороны, нельзя упустить из поля зрения какие-то важные факторы, влияющие на явление, с другой стороны, параметров не должно быть слишком много.

Примем, что

$$v = f(H, p_0, p_a, \rho, \eta, D, \ell, \sigma, g). \quad (20.40)$$

Здесь, например, исключена из рассмотрения шероховатость внутренней поверхности насадка, мы посчитали ее влияние несущественным; вместе с тем учтена сила поверхностного натяжения, характеризующая коэффициентом σ .

Зависимость (20.40) содержит 10 разных параметров, следовательно, согласно П-теореме с помощью анализа размерностей можно определить, что эквивалентная зависимость будет содержать семь безразмерных параметров. Столь большое количество параметров сделает экспериментальное исследование чрезвычайно трудоемким, а обобщение экспериментальных результатов практически невозможным, поэтому перед формальным использованием анализа размерностей обратим внимание на то, что на поток жидкости в насадке влияют давления p_0 , p_a и давление столба жидкости высотой H (равное $\rho g H$) не по отдельности, а в виде перепада давлений между началом и концом трубы

$$\Delta p = (p_0 + \rho g H) - p_a.$$

Кроме того, влияние силы тяжести на это явление ограничивается лишь созданием давления у входа в насадку от столба высотой H . Поэтому, введя в число независимых размерных параметров вместо p_0 , H и p_a одну величину Δp , можно вместе с тем исключить из числа размерных параметров ускорение силы тяжести g . В результате получим

$$v = f_1(\Delta p, \rho, \eta, D, \ell, \sigma). \quad (20.41)$$

Выражение (20.41) показывает, что v зависит всего от шести размерных параметров, и анализ размерности позволит установить три независимых безразмерных параметра. Эти параметры следует выбирать из набора принятых в гидромеханике стандартных безразмерных комплексов и симплексов. В качестве зависимого (искомого) безразмерного параметра выберем число Эйлера, которое содержит скорость v , являющуюся в данной постановке искомым (зависимым) размерным параметром:

$$Eu = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho v^2} = f_2(\eta, D, \ell, \sigma). \quad (20.42)$$

При этом Δp и ρ исключаются из числа независимых размерных величин. Следующий за ρ в выражении (20.41) размерный параметр — это динамический коэффициент вязкости η . Он входит в число Рей-

нольдса $Re_D = \frac{\rho v D}{\eta}$, которое и заменит его в зависимости (20.42); кроме того, в число Рейнольдса вошел диаметр D , поэтому η и D исключаем из числа независимых размерных параметров; получаем

$$Eu = f_3(Re_D, \ell, \sigma). \quad (20.43)$$

Вместо размерной длины ℓ введем безразмерный симплекс ℓ/D :

$$Eu = f_4(Re_D, \frac{\ell}{D}, \sigma), \quad (20.44)$$

а вместо коэффициента поверхностного натяжения σ — число Вебера

$We = \frac{\rho v^2 D}{\sigma}$; в итоге получаем искомый набор из трех безразмерных параметров, зависимость от которых следует установить экспериментально:

$$Eu = F(Re_D, \frac{\ell}{D}, We). \quad (20.45)$$

Эксперименты показали, что поверхностное натяжение проявляется лишь при малых числах Вебера ($We < 2500$), когда жидкость из насадка не вытекает струей, а сочится в виде отдельных капель. При очень малых диаметрах D , измеряемых долями миллиметра, вода может перестать вытекать из резервуара, ее будет удерживать поверхностное натяжение в выходном сечении насадка. При $We > 2500$ явление автомодельно в отношении числа Вебера.

Преобразуем зависимость

$$Eu = F_1(Re_D, \frac{\ell}{D}),$$

выделив искомую размерную величину

$$v = \frac{1}{F_1(Re_D, \frac{\ell}{D})} \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}. \quad (20.46)$$

В соответствии с обозначениями, принятыми в гл. 8, и учитывая, что при $p_0 = p_a$ имеем $\Delta p = \rho g H$, введем коэффициент скорости

$$v = \varphi \sqrt{2gH} = \varphi \sqrt{2g \frac{\Delta p}{\rho g}} = \varphi \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}. \quad (20.47)$$

Сравнивая (20.47) и (20.46), получим

$$\frac{1}{F_1(Re_D, \frac{\ell}{D})} = \varphi(Re_D, \frac{\ell}{D}). \quad (20.48)$$

В случае цилиндрического насадка коэффициент скорости φ_n равен коэффициенту расхода μ_n (см. гл. 8).

Экспериментальная зависимость коэффициента расхода μ_n от числа Re_D и от относительной длины ℓ/D представлена на рис. 20.9 (опытные данные З.И. Геллера и Ю.А. Скобельцына). Согласно этим данным при $Re > 10^4$ имеет место автомодельная область значений чисел Рей-

нольдса; при этом коэффициент скорости уменьшается от максимального значения $\mu_n = 0,82$ при $\ell/D = 2,5-3,0$ до $\mu_n = 0,79$ при $\ell/D = 5,0$ (об ограничениях $3D < \ell < 8D$ см. гл. 8).

Таким образом, анализ размерностей и экспериментальные данные позволили обобщить результаты исследований и, в частности, опреде-

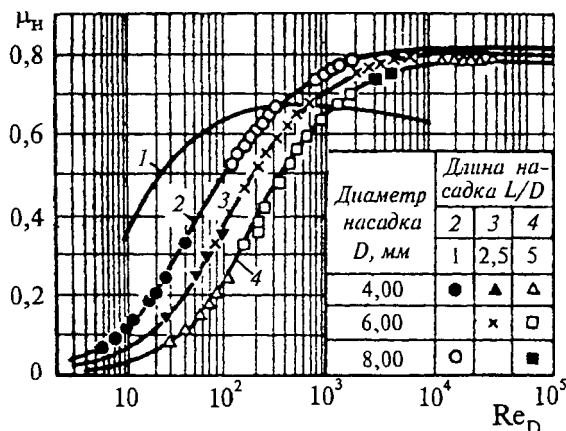


Рис. 20.9. Экспериментальные данные о зависимости коэффициента расхода насадка от его длины и числа Рейнольдса; кривая 1 — для отверстия с острой кромкой, кривые 2, 3, 4 — для насадков

лить автомодельные области изменения безразмерных параметров, в пределах которых представляется возможным использовать значения коэффициентов скорости ϕ , представленные в гл. 8.

Рассмотренные примеры показывают, что на практике, как правило, нецелесообразно использовать формальный аппарат анализа размерностей с составлением на 2-м этапе системы уравнений и с решением на 3-м этапе этой системы для определения структуры зависимости и установления безразмерных переменных, как это было показано в разд. 20.2. Если следовать этой методике, то можно получить не общепринятые безразмерные комплексы, которые имеют физическую интерпретацию, обеспечивающую их оценку и использование при обработке опытных данных (см. табл. 20.2), а случайные комбинации произведений этих параметров в каких-либо степенях.

Еще раз проиллюстрируем технику анализа размерностей, доведя до конца решение задачи об обтекании цилиндра, сформулированной в начале разд. 20.2, где было установлено, что сила лобового воздействия потока жидкости на круговой цилиндр единичной длины

$$F = f(\rho, \eta, V_\infty, D, \Delta).$$

В правой части сформируем зависимый (искомый) безразмерный параметр согласно табл. 20.2:

$$c_x = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 D^2}. \quad (20.49)$$

Параметры ρV_∞^2 и D при этом исключаются из числа параметров функции в левой части (20.1), которым следует придать безразмерный вид, и остаются только η и Δ . В наборе параметров они представлены в табл. 20.2 и входят в число Рейнольдса Re и в относительную шероховатость Δ_r , соответственно:

$$Re_D = \frac{\rho V_\infty D}{\eta}, \quad \Delta_r = \frac{\Delta}{D}. \quad (20.50)$$

Таким образом,

$$c_x = F(Re_D, \Delta_r). \quad (20.51)$$

Эта зависимость экспериментально изучена и представлена на рис. 16.20 в виде одного графика. Как было отмечено в разд. 20.2, без анализа размерностей опытные данные должны быть представлены в виде 1000 размерных графиков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Альтшуль А.Д.* Гидравлические сопротивления. М.: Недра, 1982. 224 с.
- Альтшуль А.Д., Животовский Л.С., Иванов Л.П.* Гидравлика и аэродинамика. М.: Стройиздат, 1987. 414 с.
- Аравин В.И., Нумеров С.Н.* Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М.: ГИТТЛ, 1953. 616 с.
- Гидравлика, гидромашин и гидроприводов / Т.М. Башта, С.С. Руднев, Б.Б. Некрасов и др. М.: Машиностроение, 1982. 423 с.
- Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
- Ван-Дайк М.* Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир, 1985. 182 с.
- Gerhart Ph.M., Gross R.J., Hochstein J.I.* Fundamental of Fluid Mechanics. Massachusetts, Addison Wesley Publ. Comp., 1985. 983 p.
- Гидравлические расчеты водосбросных гидротехнических сооружений: Справочное пособие. М.: Энергия, 1988. 624 с.
- John James E.A., Haberman William L.* Introduction to Fluid Mechanics. New Jersey.: Prentice Hall, 1988. 608 p.
- Девнин С.И.* Аэрогидромеханика плохообтекаемых конструкций: Справочник. Л.: Судостроение, 1983. 320 с.
- Емцев Б.Т.* Техническая гидромеханика. М.: Машиностроение, 1987. 440 с.
- Идельчик И.Е.* Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.: Машиностроение, 1973. 559 с.
- Константинов Н.М. и др.* Гидравлика, гидрология, гидрометрия: Учебник для вузов: В 2 ч. Ч. I. М.: Высш. шк., 1987. 304 с. Ч. II. М.: Высш. шк., 1987. 431 с.
- Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
- Лятхер В.М., Прудовский А.М.* Гидравлическое моделирование. М.: Энергоатомиздат, 1984. 392 с.
- Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Ч. I. М.: Наука, 1965. 640 с. Ч. II. М.: Наука, 1967. 720 с.
- Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
- Прандтль Л., Титъенс О.* Гидро- и аэромеханика. Т. 1. М.—Л.: ГТТИ, 1932. 222 с. Т. 2. М.—Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. 283 с.
- Справочник по гидравлическим расчетам/ Под ред. П.Г. Киселева. М.: Энергия, 1977. 312 с.
- Строительные нормы и правила. Нагрузки и воздействия. Нормы проектирования. СНиП II-A-6-74. М.: Стройиздат, 1976.
- Чертоусов М.Д.* Гидравлика. Специальный курс. М.—Л.: Госэнергоиздат, 1962. 640 с.
- Чоу В.Т.* Гидравлика открытых каналов. М.: Стройиздат, 1969. 464 с.
- Чугаев Р.Р.* Гидравлика: Учебник для вузов. Л.: Энергоиздат, 1982. 670 с.
- Штеренлихт Д.В.* Гидравлика: Учебник для вузов: В 2 кн. Кн. 1. М.: Энергоатомиздат, 1991. 351 с. Кн. 2. М.: Энергоатомиздат, 1991. 367 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автомодельный диапазон критериев подобия 382
 Анализ размерностей 365—373
 Анализатор спектра 356
 Атмосфера 42

 Барометр 40
 Бор 199
 Бьеф верхний 206
 — нижний 206

 Вакуум 33
 — допускаемый 126
 — максимальный (в насадке) 164
 Ветровая нагрузка 317
 Ветровые районы 317
 Ветроколесо 311
 Вид местности 318
 Виртуальные способы расчета фильтрации 228
 Вихрь скорости 67, 74
 Внешний слой 340
 Внутренний слой 339
 Водоворотная область 117
 Водомер Вентури 136
 Водоупор 224
 Волна длинная положительная 198
 — — отрицательная 198
 — — восходящая 198
 — — нисходящая 198
 — — наполнения 199
 — — подпора 199
 — — отлива 199
 — — излива 199
 Высота капиллярного поднятия 220
 Вязкий подслои 105, 337
 Вязкость 25, 260
 Водослив 206
 — безвакуумный 211
 — без порога 209
 — боковой 208
 — вакуумный 211
 — кольцевой 208
 — косой 208
 — неподтопленный 209
 — подтопленный 209
 — практического профиля 208
 — — — очертания Кригера — Оффен-
 рова 209, 210
 — прямой 208
 — прямоугольный 213
 — с тонкой стенкой 207
 — с широким порогом 208
 — с уширенным гребнем 210
 — треугольный 213
 Высота капиллярного поднятия 220

 Газовая динамика 272
 Галереяисячая 233
 — водосборная 232
 Гидравлическая крупность 175, 310
 Гидравлический прыжок 200, 201
 — — несвободный 205
 — — свободный 205
 — радиус 84
 — удар 145
 — — полный 154
 — — неполный 157
 Гидравлически наивыгоднейшее сече-
 ние 173
 Гидродинамическая сетка фильтраци-
 онного потока 246
 Глубина активной зоны фильтрации по
 напору 254
 — — — по выходному градиенту 254
 — потока 168
 — — критическая 170
 — — нормальная 171
 Градиент скорости 26, 61, 260—262, 269
 — напора 244, 246, 252

- — выходной максимальный 252, 255
- — — допустимый 252
- График Никурадзе 108
- Кольбрука—Уайта (Муди) 112
- Грунт анизотропный 220
- изотропный 220
- неоднородный 220
- однородный 220
- подпочвенный 219
- Грунтовая вода гигроскопическая 220
- — гравитационная 220
- — капиллярная 220
- — пленочная 220
- — свободная 220
- плотина с экраном 243
- — с ядром 243

Давление абсолютное 32

- атмосферное 32, 42, 43
- весовое 32
- гидравлического удара 146
- гидродинамическое 20
- гидростатическое 29

Движение грунтовых вод 219

- — — безнапорное 224
- — — гравитационное 221
- — — напорное резкоизменяющееся 244—255
- жидкости безвихревое 73, 291
- — безнапорное 84, 188
- — бурное 171
- — вихревое 73, 291
- — вращательное 67
- — деформационное 67
- — квазитвердое 67
- — ламинарное 101
- — напорное 84
- — неустановившееся 50, 145, 188
- — параллельно — струйное 82
- — плавноизменяющееся 83
- — поступательное 67
- — потенциальное 73
- — продольно-однородное 82, 329—332, 336
- — равномерное 82
- — резкоизменяющееся 83, 116
- — спокойное 171
- — турбулентное 101
- — установившееся 50, 102

Дебит колодца 239

Деформация растяжения—сжатия 63

- сдвига 65, 68
- угловая 64

Дивергенция скорости 56

- тензора напряжений 59, 258, 268, 270
- Диффузор 164, 281
- Длина влияния (питания) галереи 233
- гидравлического прыжка 205
- Дренаж горизонтальный 231

Живое сечение 82

Жидкость Бингама—Шведова 28

- дилатантная 28
- ньютоновская 28
- неньютоновская 28
- Оствальда—Вейля 28
- псевдопластическая 28

Задача внешняя 76

- внутренняя 76
- расчета трубопровода обратная 126
- — — прямая 126

Задачи расчета подземного контура 251

Заиливание канала 175

Закон Архимеда 44

- Бойля—Мариотта 23
- изменения кинетической энергии 80, 267
- — количества движения 78, 258
- — момента количества движения 79, 259
- ламинарной фильтрации (Дарси) 222
- Ньютона для вязких напряжений 26
- — — — обобщенный 260
- сохранения массы 77, 256
- — энергии 81

Замыкание системы уравнений Рейнольдса 324, 326

Запирание 284

Интеграл Лагранжа—Коши 267

Интерпретация уравнения Бернулли

- геометрическая 94
- — — энергетическая 95

Инфильтрация воды 229

Кавитация 24

Кавитационная эрозия 24

Касательные напряжения неразрывающиеся 178

Кипение 23

Колодец артезианский 235

- несовершенный 235
- совершенный 234

Контрольная поверхность 53

Контрольный объем 53

Конфузор 164, 281

Корректив кинетической энергии 85

- количества движения 86
- Кризис обтекания 301
- Кривая депрессии 224
 - подпора 186
 - свободной поверхности 171
 - спада 186
- Критерии подобия 364, 379
 - подтопления водослива 212
- Крыловой профиль 306—308
- Колодец круглый 234
 - — несовершенный 235
 - — совершенный артезианский 235
- Коэффициент бокового откоса 172
 - — сжатия 210
 - боковой силы 287
 - Буссинеска 86
 - вязкости динамический 26
 - — кинематический 27
 - гидравлического трения 108, 110, 343, 344, 379, 380
 - Кориолиса 85
 - местной потери напора 121—124, 379
 - объемного сжатия 22
 - подтопления водослива 212
 - подъемной силы 287, 379
 - полезного действия ветроколеса 315
 - полноты напора 211
 - проницаемости 222
 - расхода водослива 210
 - — насадка 162
 - — отверстия 162
 - — трубопровода 128
 - сжатия струи 162
 - силы сопротивления 287, 303, 318, 319, 379
 - скорости насадка 162
 - — отверстия 162
 - — водослива 212
 - турбулентной вязкости 333
 - фильтрации 222
 - формы водослива 211
 - Шези 112
 - шероховатости 112
- Леммы равномерного движения 83, 322
- Линия тока 50
 - напорная 97
 - пьезометрическая 97
- Логарифмическое распределение скорости 334
- Логарифмический слой 338
- Манометр 41
- Масштаб линейный 373
 - сил 375
 - скорости 374
 - турбулентности 356
- Местоположение гидравлического прыжка 205
- Метод контрольного объема 532
 - коэффициентов сопротивления (Чугаева) 253
 - Лагранжа 49
 - Эйлера 49
 - электрогидродинамической аналогии (ЭГДА) 250
- Моделирование гидромеханических явлений 381
- Модель мелкой воды 188
- Модуль объемной упругости 22
 - расхода 130
- Мощность внешних объемных сил 90
 - — поверхностных сил 90
 - — внутренних сил (диссипированная) 80
- Мутность 176
 - критическая 176
- Напор 96
 - инерционный 92
 - на водосливе 207
 - полный (гидродинамический) 96
 - потенциальный 96
 - профилирующий 211
 - скоростной 96
- Напорная функция
- Напряжение 17
 - касательное 18
 - нормальное 18, 83
 - турбулентное 325, 329 — 331
- Насадок цилиндрический внешний (Вентури) 161
 - — внутренний (Борда) 163
 - конический расходящийся 164
 - — сходящийся 164
- Область сопротивления гладкая 109, 343
 - — доквадратичная 110, 343
 - — квадратичная 110, 343
- Обтекание цилиндра безциркуляционное 291
 - — циркуляционное 294, 295
- Объекты гидравлические типовые 363
 - — универсальные 364
 - — уникальные 363
- Отверстие малое 160
- Ответвление 134
- Откос равномерно устойчивый 180

Отметка гребня водослива 207
 Отрыв пограничного слоя 298
 Остойчивые плавающие тела 48
 Парадокс гидростатический 37
 — Даламбера 292
 — Дюбуа 302
 Параметры торможения 278, 280
 Паскаль 20
 Переменные лагранжевы 49, 52
 — эйлеровы 50, 52
 Периметр смоченный 84
 Пи-теорема 372
 Плоскость сравнения 95
 Плотность жидкости 13
 — инфильтрационного потока 230
 — распределения внешней объемной (массовой) силы 16
 — — — поверхностной силы 17
 — — гидромеханической характеристики 15
 — — внешней массовой силы 16
 — — кинетической энергии 15
 — — — — осредненного движения 328
 — — — — пульсационного движения 328
 — — количества движения 15
 — — мощности внутренних сил 80, 269
 — сплошной среды 14
 Пограничный слой 287, 297, 339–341, 345
 Подземный контур гидротехнического сооружения 248
 Подобие гидромеханических явлений 373
 — — — геометрическое 373
 — — — динамическое 375
 — — — кинематическое 374
 Показатель адиабаты 276
 Покой относительный 33
 Полюс 67
 Пористость грунта 220
 Послепрыжковый участок 202
 Постоянная газовая универсальная
 — Кармана 334
 Постулат Чаплыгина 307
 Потенциал скорости 73, 245, 265
 — внешней массовой силы 32, 90
 Потери воды из канала 236
 Потеря напора местная 106, 116–121
 — — на выход в резервуар 129
 — — на резкое расширение 117
 — — по длине 106, 108, 110, 341–344
 — энергии в гидравлическом прыжке 204, 205
 — — в газопроводе 111, 114

Поток гидромеханической характеристики 54
 — газа дозвуковой 279
 — — сверхзвуковой 279
 — жидкости бурный 171
 — — спокойный 171
 Почва 219
 Правила осреднения Рейнольдса 323
 Прибор Дарси 223
 — Пито 292
 — Рейнольдса 101
 Приведенная схема подземного контура 248
 — функция тока 249
 Приведенные затраты 133
 Приведенный напор 249
 — расход 249
 Приток воды к водосборной галерее 232
 — — к дренажным трубам 231
 — — к круглому колодцу 234
 Промежуток высачивания 227, 233, 234, 238
 Промежуточный подслоя 338
 Противодействие (газа) 282
 Процесс адиабатический 23
 — изотермический 23
 Пуаз 27
 Путь перемешивания 333
 Пьезометр 39
 Равновесие плавающих тел неустойчивое 46
 — — — устойчивое 46
 Радиус влияния (питания) колодца 235
 — гидравлический 84
 Расход весовой 85
 — массовый 54
 — объемный 54
 — приведенный 249
 — удельный 88
 Расчет тупиковой сети 132
 Режим движения ламинарный 101
 — — турбулентный 101
 Руслото открытое 168
 — цилиндрическое
 Свободная поверхность 23
 Свойства гидродинамической сетки 249
 Сдвиг простой (чистый) 25, 65
 Сила боковая 286
 — внешняя 16
 — внутренняя 16
 — гидростатического давления 30

- — — на произвольную плоскую фигуру 34
- — — на прямоугольную плоскую фигуру 35, 36
- — — на цилиндрическую поверхность 37 — 39
- давления фильтрационного потока на водонепроницаемую поверхность 247
- объемная (массовая) 16
- поверхностная 17
- подъемная 286, 293
- противодействия 252
- сопротивления 286 — 289, 303
- Скоростной напор нормативный 318
- Скорость волновая 156, 196—199, 369, 372
- жидкости 14
- — актуальная 102
- — динамическая 178
- — максимальная неразрывающая 177
- — незаилающая 176
- — осредненная 103, 323, 353
- — пульсационная 103, 354
- — средняя 85
- — экономическая 133
- звука 157, 271
- — критическая 279
- материальной точки 48
- распространения возмущения в трубопроводе 150, 156
- — — в канале 196—199, 369
- фильтрации 222
- Слой внешний 340
- внутренний 339
- логарифмический 338
- След гидродинамический 287, 297, 300, 303, 305, 307
- Смоченный периметр 84
- Сопло Лаваля 284
- Сопротивление трения 286
- формы (давления) 286
- Спектр турбулентности энергетический 359
- Среда сплошная 13
- Статистическая совокупность (ансамбль) 353
- Стокс 27
- Струя 84
- плоская затопленная 345—349
- осесимметричная затопленная 345, 349—351
- Стандарт пульсационной скорости 104, 354
- Субстанциальная производная 54, 70
- Тахограмма 352
- Текучесть 21
- Тензор 19, 61
- напряжений 19, 29, 59, 261, 262
- скорости деформации 62, 261—263
- Теорема Жуковского о подъемной силе 295
- Течение адиабатическое 276, 277
- изотермическое 276, 277
- осесимметричное 345
- плоское 23, 246, 336, 345
- сдвиговое 25, 332, 336
- Точка отрыва пограничного слоя 301—305
- Траектория 50
- Транзитный поток 117, 134
- Транспортирующая способность 176
- Тройник 137 — 141
- Тропосфера 42
- Трубопровод 125
- весьма короткий (насадки) 125
- длинный 125
- короткий 125
- магистральный 112
- сифонный 125
- Трубопроводов соединение параллельное 131
- — последовательное 130
- Трубы гидравлически гладкие 109
- — шероховатые 110
- Турбулентное ядро 106, 139
- Угол атаки 288, 307
- Удельная теплоемкость при фиксированном объеме 275
- — — давлению 275
- энергия сечения 169
- Уклон гидравлический 97
- гидродинамический 247
- дна 171
- — критический 172
- пьезометрический 97
- Уравнение баланса турбулентной энергии 328
- Бернулли 89—93, 267, 273, 277, 278
- волновое векторное 154
- — скалярное 152
- гидравлического прыжка 203, 204
- Клапейрона — Менделеева 23, 275
- Лапласа 73—75, 245, 257
- Лапласа (краевая задача) 248, 249
- неразрывности 86
- несжимаемости 56, 257
- равномерного движения 98

- плавно изменяющегося безнапорного движения (Чарномского) 185
- плавно изменяющегося движения грунтовых вод (Дюпюи) 224, 226
- Уравнения гидравлического удара 152
- движения в напряжениях (Коши) 258
- — вязкой несжимаемой жидкости (Навье—Стокса) 264
- — вязкой сжимаемой жидкости (Навье—Стокса) 263
- — грунтовых вод 222, 244
- — невязкой жидкости (Эйлера) 265
- мелкой воды (Сен-Венана) 191
- пограничного слоя 347
- равновесия жидкости (дифференциальные, Эйлера) 30
- Рейнольдса 323 — 325
- Ускорение жидкой частицы 72
- материальной точки 48
- Условия Коши—Римана 75
- Фазовые переходы** 23
- Флутбет** 248
- Формула Альтшуля** 112
- Блазиуса 109
- Борда 120
- Вейсбаха 121
- Вейсбаха—Дарси 108
- Жуковского—Аллиевы 155
- котельная 44
- Лагранжа 196
- Майера 276
- Маннинга 114
- Шеши 112
- Шифринсона 112
- Фронт возмущения** 146, 196
- гидравлического удара 146
- Функция диссипативная** 80, 269
- комплексного переменного 75, 290

- напорная 245
- прыжковая 204
- спектральной плотности 359—362
- — — нормированная 360—361
- тока 74

Характеристическая линия (характеристика) уравнения 152, 194

Центр давления 85

Цепочка уравнений Келлера—Фридмана 326, 329

Циркуляция скорости 294

Число Вебера 378, 380

- Маха 279, 380

- Рейнольдса 104, 377, 380

- — критическое 105, 109, 343

- — предельное 109, 343, 344

- Струхала 378, 380

- Фруда 171, 376, 380

- Эйлера 377, 380

Шероховатость абсолютная 106

- зернистая 106

- относительная 107, 379

- эквивалентная 110

Ширина канала по дну (относительная) 173, 379

- порога водослива 207

Эксцентриситет 35

Энергия внутренняя 274

Энтальпия 275

Эпюра давления 36, 252

- скорости 88, 105

Эргодическая гипотеза 354

- теорема 354

Эффект Магнуса 296