

**МВ и ССО РСФСР**

**Новочеркасский ордена Трудового Красного Знамени  
политехнический институт имени Серго Орджоникидзе**

---

**В. М. Гороховский, Э. И. Ткачук**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ  
В ИНЖЕНЕРНОЙ ГЕОЛОГИИ**

**Новочеркаск 1980**

УДК 624.131

В.Н. Гороховский, Э.И. Ткачук. Моделирование в инженерной геологии. Новочеркасск, изд. НПИ, 1980, 84 с.

В учебном пособии рассматриваются предпосылки использования моделирования в инженерной геологии, необходимые понятия, важнейшие принципы и типы моделирования. Основное внимание уделено теоретическим вопросам, физическому и математическому моделированию. Рассмотрены натурные модели, модели из эквивалентных материалов, центробежное моделирование, метод фотоупругости, сплошные и сеточные электрические модели, статистическое и имитационное моделирование. Изложение материала сопровождается примерами из практики и решением инженерно-геологических задач.

Предназначено для студентов специальности 0107.

Ил. 8, библиогр. 34 назв.

Рецензенты: А.И. Гавришин, к.г.-м.н., доц. НПИ; Н.В. Воляник, к.г.-м.н., доц. РИС; кафедра гидрогеологии и инженерной геологии РГУ.

Темплан 1980 г.

п. 414

(С)

Новочеркасский политехнический институт, 1980

## **ВВЕДЕНИЕ**

Основная задача инженерной геологии – прогноз динамики земной коры в связи с инженерной деятельностью человека – решается на базе всестороннего изучения параметров естественно-геологических условий: показателей структуры, состава, состояния и свойств пород, а также факторов, влияющих на изменение исследуемых характеристик. Объекты изучения – массивы горных пород – представляют собой неоднородные многокомпонентные открытые динамические природные системы. Поэтому их описание и прогноз поведения возможны лишь посредством создания моделей, т.е. выраженных в той или иной форме (словесной, графической, математической и т.п.) обобщенных представлений, которые освещают в интересующем нас аспекте наиболее важные особенности внутренней организации систем и основные закономерности процессов взаимодействия их с окружающей средой.

Отмеченные обстоятельства привели к широкому использованию методов моделирования в теории и практике инженерно-геологических исследований, однако не находят должного отражения в существующих учебниках для студентов специальности "Гидрогеология и инженерная геология". Отдельные вопросы, связанные с моделированием, рассматриваются в различных курсах с узких прикладных позиций и в недостаточном объеме, что не дает цельного представления о моделировании как методе.

Поэтому при подготовке настоящего пособия прежде всего уделено внимание основным идеям и принципам моделирования. Частные задачи рассматриваются главным образом как иллюстрации применения этих идей и принципов. Представляется, что такой подход является наиболее экономичным, т.к. он избавляет от необходимости излагать основы моделирования в связи с каждой отдельной задачей.

В пособии нашли отражение материалы лекций, читавшихся авторами на протяжении нескольких лет студентам специальности 0107 в Новочеркасском политехническом институте. Это обстоятельство наложило отпечаток на содержание и структуру пособия. В частности, авторы старались избегать различного рода общефилософских рассуждений, связанных с классификацией методов моделирования. Внимание сосредоточено на показе того, как строятся критериальные уравнения, формируются критерии подобия, вычисляются масштабные соотношения. В связи с этим рассматриваются только два основных класса моделирования: физическое и математическое.

## ГЛАВА 1

### ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ В ИНЖЕНЕРНОЙ ГЕОЛОГИИ

В научном и техническом обиходе термин "моделирование" и "модель" краевым званием многозначны. Они могут означать: описание объекта (например, знаковая модель в виде карт и реестров), теорию (например, концептуальная модель линейно-деформируемого грунтового массива), интерпретации теории (например, логические модели деформации и напряжений, как тензоров), способ отображения или абстракция действительности и многое другое. В философии моделирование трактуется как любая образная форма мышления. Его следы мы обнаруживаем в понятиях электрического тока, теплорода, планетарной модели строения атомного ядра, в механических моделях Максвелла и Кельвина, объяснявших с помощью рычагов, передач, маяковых сложные физические явления электрической и тепловой природы.

Такие многочисленны обстоятельства, заставляющие прибегать к моделированию. Модель может являться типичным представителем множества однотипных объектов. Исходный объект может быть недоступен в пространстве и времени, и моделирование позволяет преодолеть пространственно-временной барьер, реконструировать историю развития объекта, построить прогноз его поведения в будущем. Реальный объект неудобен или непригоден для предстоящих исследований, т.к. в нем могут происходить необратимые изменения в т.д. Это разнообразие задач сделало моделирование одним из основных методов научного исследования вообще и инженерно-геологического изучения природных процессов в частности.

Целью большинства инженерно-геологических исследований является получение информации для проектирования различных сооружений в народно-хозяйственных мероприятиях. Современное про-

ектирование - типичная процедура оптимизации, т.е. выбора лучшего в некотором экономическом, технологическом, экологическом и т.п. смысле решения. В тех случаях, когда на принятие решения влияет реакция среды, как геологического объекта, учитывается и она. Очевидно, что в подавляющем большинстве случаев прогноз этой реакции должен быть выражен качественно. Поэтому количественный прогноз - основная задача инженерно-геологических исследований.

Существуют различные способы количественных прогнозов. Наиболее надежными и обоснованными являются результаты, полученные методами математической физики, хорошо зарекомендовавшими себя в различных областях науки и техники. Эти методы опираются на математическое описание прогнозируемого явления, представленное в виде интегральных или дифференциальных уравнений. Однако реализация прогнозов этими методами в инженерной геологии крайне ограничена, т.к. точные аналитические решения имеются для незначительного числа простейших по структуре задач и прогнозных схем. Поэтому многие прогнозы строятся по аналогии, путем интерполяции и экстраполяции имеющегося опыта, на основании статистических оценок и различных приближенных численных методов. Важнейшим из этих методов является моделирование.

В настоящем пособии моделирование трактуется как один из вычислительных методов, позволяющий получать количественные результаты при решении различных задач. В связи с этим мы опускаем многочисленные классификации методов моделирования, рассмотренные в трудах работ [1 и др.], подразделяя последние только на физическое и математическое моделирование.

Физическим будем называть моделирование такого процесса, для которого известны факторы, влияющие на процесс, но неизвестна или по разным причинам не принимается во внимание точная взаимосвязь факторов и процесса. В математическом моделировании такая взаимосвязь известна и учитывается. Но обычно она задана не явно, а в виде дифференциальных уравнений или многочисленных взаимосвязанных законов распределения вероятностей. Явная трансформация этих взаимосвязей в окончательный результат сложна или вообще невозможна. Но с помощью математического моделирования удается получать численные решения задач.

Следует заметить, что математическое моделирование предполагает большее знание о природе моделируемого явления. Это дает определенные преимущества перед физическим моделированием, позволяя получать более четкие результаты, снимая целый ряд ограничений на структуру модели и т.д. Наряду с этим, физическое моделирование может использоваться при решении более широкого круга задач. Особенно четко сравнительные достоинства обоих методов выступают в задачах, которые на одних и тех же устройствах могут ставиться как задачи физического, так и математического моделирования (например, некоторые задачи фильтрации на фильтрационных лотках).

Основные задачи, решаемые с помощью моделирования, классифицируются следующим образом.

1. Прямые задачи: по заданным характеристикам объекта и проектируемым возмущениям определяется его поведение (реакция) в пространстве и (или) во времени. Результаты решения таких задач представляют собой собственно прогноз. Например, по известным значениям показателей физико-механических свойств массивов горных пород в различных напряженном состоянии прогнозируются деформации оснований проектируемых сооружений, устойчивость склонов и откосов и т.п.

2. Обратные задачи: по известным реакциям и свойствам объекта оценивается воздействие, имеющее место в возмущении. Например, по распределению влажности устанавливаются источники подтопления и их интенсивность. Решаются такие задачи подбором, т.е. как серия прямых задач при различном расположении источников возмущения и различной интенсивности последнего. Решением задачи является такое размещение и интенсивность источников возмущения, при которых наблюдается наилучшее совпадение натурных и модельных результатов.

3. Инверсионные задачи: по известным возмущениям и реакции объекта определяются его свойства. Примерами постановки и решения инверсионных задач являются отыскание, замещение котлованов и т.п. оптимизация работы. На моделях эти задачи также решаются подбором, как серия прямых задач с различными значениями показателей свойств объекта.

В геологии и инженерной геологии обратные и инверсионные задачи часто не различают, называя те и другие обратными.

4. Обобщенные задачи: циклы прямых и обратных задач, ре-

зультаты решения которых представляются в виде графиков, иogramм, эмпирических формул. Эти результаты используются затем при решении различных практических вопросов без обращения к моделированию или точным аналитическим решениям.

5. Разведочные задачи. Часть их называют тестовыми, методическими и т.д. В них на моделях объектов опробуются различные методики изысканий, определяется оптимальная система размещения выработок, проб и т.д. Одним из наиболее распространенных видов решения этих задач является имитационное моделирование.

6. Индуктивные задачи : проводятся научные исследования, решаются вопросы, возникающие вследствие развития инженерной геологии как науки. В процессе их решения выясняются новые ранее неизвестные свойства и явления.

При всем разнообразии этих задач, их постановка и решение имеют общую методологическую и теоретическую базу. Применительно к физическому моделированию такой базой является теория размерностей [2-4], основные элементы которой рассматриваются в следующей главе.

## ГЛАВА 2

### РАЗМЕРНОСТЬ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

#### 2.1. Основы теории размерностей

Измерить какую-либо физическую величину – значит сравнить ее с другой величиной той же природы, принимаемой за эталон (единицу измерения). Так, выражения длины объекта в сантиметрах и дюймах, метрах и ярдах, километрах и милях означает сопоставление ее с соответствующими эталонами. При этом численные выражения одной и той же длины зависят от принятого масштаба, т.е. от используемой единицы измерения.

Единицей измерения А физической величины А называется условно выбранная физическая величина, имеющая тот же самый физический смысл, что и величина А [4].

Так, единицами измерения длины являются следующие, условно выбранные величины: ангстрем, сантиметр, миля, световой год и т.д. Вес измеряют динами, килограмм-силами, ньютонами и т.п. Напряжения в массиве горных пород можно выражать в килограмм-силах на квадратный сантиметр, фунтах на квадратный дюйм, паскалях и т.д. При этом одна и та же длина, один и тот же вес и одно и то же напряжение будут принимать различные числовые значения, так как измерения ведутся с помощью разных единиц измерения.

Величины, численные значения которых зависят от выбранных единиц измерения, называют размерными или именованными.

Физические величины связаны друг с другом определенными соотношениями. Так, скорость  $V$  связана с путем  $S$  и временем  $t$ :

$$V = S/t, \quad (2.1)$$

а ускорение  $a$  при равноускоренном движении связано со скоростью:

$$a = \dot{v}/t. \quad (2.2)$$

Поэтому нет необходимости физически создавать эталон для измерения каждой величины. Можно вводить несколько первичных (основных) единиц измерения, а остальные выражать через них. Например, единицу измерения скорости можно определить как частное единиц измерения длины и времени, а ускорения — скорости и времени.

Единицы измерения, устанавливаемые с помощью первичных на основании физических зависимостей, называют вторичными или производными.

Деление единиц на основные и производные условно. Оно в значительной степени определяется удобствами их использования, традициями. Так, сила часто рассматривается как производная а не редко — как основная единица измерения.

Совокупность основных и производных единиц измерений называют системой единиц измерения. Существует много систем единиц измерений: СГС (абсолютная физическая), МКС (абсолютная практическая), СИ (международная) и т.д. Абсолютные называются системы, в которых в качестве основных единиц для механических величин приняты единицы длины, массы и времени. Именно такими являются системы СГС, МКС и СИ. В СССР с января 1963 г. в качестве предпочтительной, а с января 1980 г. в качестве обязательной для всех областей науки и техники рекомендована система СИ.

Несмотря на то, что количество основных единиц в системах единиц измерений можно устанавливать произвольно, для выражения любой механической величины достаточно иметь всего три основные единицы, относящиеся к физическим величинам реальной природы. Чаще всего в качестве основных принимаются единицы измерения длины  $L$ , массы  $M$  и времени  $T$ .

Соотношение, определяющее связь единицы измерения некоторой физической величины  $\Phi$  с основными единицами  $A_1, A_2, A_3 \dots$  называет ее размерностью  $[A]$ . Формула размерности имеет вид

$$[A] = [A_1]^{\rho_1} [A_2]^{\rho_2} [A_3]^{\rho_3} \dots, \quad (2.3)$$

где  $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \dots$  — рациональные числа.

Для основных единиц измерения размерности совпадают с раз-

мерности выбранных единиц. Так, размерность массы  $[M] = M$ , длины  $[\ell] = L$ , времени  $[t] = T$ .

Размерности производных величин выводят из зависимостей, связывающих эти величины с основными. Так, из формул (2.1) и (2.2) следует:

$$[v] = \frac{[S]}{[t]} = LT^{-1}; [a] = \frac{[M]}{[t]^2} = LT^{-2}.$$

Аналогично, для силы  $F$ , напряжения  $\sigma$  и объемного веса  $\gamma$ , задаваемых выражениями

$$F = ma; \sigma = F/A; \gamma = F/W,$$

в которых  $A$  - площадь,  $W$  - объем, получим, соответственно:

$$[F] = [m][a] = MLT^{-2}; [\sigma] = [F]/[A] = ML^{-2}T^{-2}; [\gamma] = ML^{-3}T^{-2}$$

Таким образом, при выводе размерностей выполняется только операция произведения, точнее - произведения и возведения в степень. Это относится также к физическим зависимостям, включающим операции дифференцирования и интегрирования. Нетрудно показать, что с точки зрения размерностей производная  $\frac{d^m}{dx^n}$  эквивалентна произведению  $LT^{-n}$ , а интеграл  $\int dx$  - произведению  $LT$ .

Величины, размерности и физический смысл которых одинаковы, называют однородными. Однородны скорость фильтрации и инфильтрации, нагрузки и напряжения, объемный вес и фильтрационное давление.

Величины, численные значения которых не зависят от принятых единиц измерения, называют безразмерными.

Безразмерными являются отношения однородных величин. Например, пористость, представляющая собой отношение объема пор в образце к объему самого образца, не зависит от того, в каких единицах измеряется объем. Безразмерны угловые меры, построенные на отношении длины дуги к длине окружности, отношения скоростей, площадей, сил, напряжений и т.д.

Поскольку над размерностями определяются только операции умножения и возведения в степень, аргументы тригонометрических, показательных, трансцендентных, логарифмических и т.п. функций, когда они входят в физические зависимости, должны быть безразмерными.

Различие между размерными и безразмерными величинами в значительной мере условно. Если во всех измерениях некоторой физической величины пользоваться только одной единицей измерения, то эта величина окажется безразмерной. Но практически это не всегда удобно. Вряд ли, например, целесообразно измерять расстояния в микромetre в космосе одной и той же единицей. Это же относится к измерениям массы, силы, энергии, времени. В то же время безразмерные углы можно измерять не только в градусах, но и радианах.

Изменение единицы измерения физической величины равносильно изменению масштаба. Действительно, числовое значение физической величины  $A$  получается в результате действия ее на единицу измерения:

$$A = \frac{A}{[A]}, \quad (2.4)$$

где

$$[A] = L^a M^b T^c.$$

Если изменить единицу длины в  $\alpha_L$  раз, массы в  $\alpha_m$  раз и времени в  $\alpha_t$  раз, то новая единица измерения

$$[A]^n = \alpha_L^a \alpha_m^b \alpha_t^c L^a M^b T^c,$$

а числовое значение  $A$  в новой системе единиц

$$A^n = \alpha_L^{-a} \alpha_m^{-b} \alpha_t^{-c} A. \quad (2.5)$$

Например, определяемое в опытах сцепление  $C$  получают обычно в системе  $[C] = \text{кг}/\text{см}^2$ . В расчетах часто необходимо выразить сцепление в тонна-силах на квадратный метр ( $\text{тс}/\text{м}^2$ ). Поскольку тонна-сила в 1000 раз больше килограмм-силы, а метр в 100 раз больше сантиметра, то в соответствии с выражением (2.5) и формулой размерности для сцепления  $([C] [F] L^{-4})$ , получаем, что численное значение сцепления в новой системе единиц  $C^n = 1000^{-4} 100^4 C = 10 C$ , т.е. старое числовое значение нужно увеличить в 10 раз. Так, сцепление, равному  $0,2 \text{ кг}/\text{см}^2$ , соответствует сцепление  $2 \text{ тс}/\text{м}^2$  ( $0,02 \text{ МПа}$ ).

Группу физических величин называют зависимой по размерностям, если размерность на одной из них нельзя выразить через размерности других.

Независимыми являются основные величины: длина, масса, время. Но возможны и другие группы независимых величин. Например,

длина, скорость и энергия. Действительно, размерность длины  $[L] = L$ , скорости  $[U] = LT^{-1}$ , энергии  $[E] = ML^2T^{-2}$ . Ни одну из этих размерностей нельзя получить из двух других. Комбинируя длину и скорость, невозможно получить массу в размерности энергии, а комбинируя длину или скорость с энергией, невозможно исключить массу. Напротив, длина, скорость и ускорение зависимы. Их размерности связывает соотношение

$$L = (LT^{-1})^2 / LT^{-2}.$$

Для физических величин механической природы количество независимых по размерности величин в любой группе не может быть более трех, поскольку любая механическая величина может быть выражена через три основные. И наоборот, любые три независимые по размерности физические величины образуют систему основных единиц измерения. В частности, вместо длины, массы, времени в качестве основных можно принять длину, скорость и энергию.

## 2.2. Структура физических зависимостей и подобие физических явлений

Важной чертой математического представления любой физической закономерности является его однородность по размерностям. Состоит она в том, что все одночлены, входящие в математическое выражение физической закономерности, имеют одинаковую размерность. Иначе возникла бы ситуация, при которой силу пришлось бы складывать с ускорением или скоростью, напряжение или давление с площадью и т.д.

Непосредственным следствием однородности физических зависимостей по размерностям является  $\Pi$ -теорема, лежащая в основе моделирования. Но прежде, чем ее формулировать, напомним, что числовые выражения физических величин и закономерностей зависят от принятых единиц измерения. В этом смысле они случайны. Однако реальная физическая сущность должна выражаться в отношениях, независящих от применяемых масштабов для входящих в них величин, т.е. в безразмерном виде. Действительно, имеет место следующая  $\Pi$ -теорема.

Всякая физическая зависимость между  $n+1$  величинами  $a_1, \dots, a_n$  имеет размерность

$$0 = f(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n), \quad (2.6)$$

может быть представлена в виде зависимости между  $n+k-1$  безразмерными комплексами (параметрами)  $\Pi$ :

$$\Pi = \underbrace{f}_{K} (I_1, I_2, \dots, I_n, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}), \quad (2.7)$$

где  $K$  - количество величин в (2.6) с независимыми размерностями.

Пусть первые  $K$  величины  $a_1, \dots, a_k$  независимы по размерностям. Это значит, что из их размерностей  $[a_1] = A_1, \dots, [a_k] = A_k$  могут быть сформированы размерности всех остальных  $n-K+1$  величин. В частности:

$$\begin{aligned} [a_1] &= A_1^{p_1} A_2^{p_2} \dots A_k^{p_k}, \\ [a_{k+1}] &= A_1^{p_{k+1}} A_2^{p_{k+2}} \dots A_k^{p_{k+1}}, \\ [a_n] &= A_1^{p_n} A_2^{p_2} \dots A_k^{p_k}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

где  $p_i$  - показатель степени, с которым  $i$ -я независимая размерность входит в размерность величины  $a_j$ .

Изменим единицы измерения величин  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , перейдя к величинам

$$a'_1 = d_1 a_1, a'_2 = d_2 a_2, \dots, a'_k = d_k a_k. \quad (2.9)$$

Подставив (2.9) в (2.8), получим новые значения:

$$a'_1 = d_1^{p_1} d_2^{p_2} \dots d_k^{p_k} a_1; \quad a'_{k+1} = d_1^{p_{k+1}} d_2^{p_{k+2}} \dots d_k^{p_{k+1}} a_{k+1}; \quad a'_n = d_1^{p_n} d_2^{p_2} \dots d_k^{p_k} a_n.$$

Выберем  $d_1, d_2, \dots, d_k$  так, чтобы  $a_1, a_2, \dots, a_k$  обратились в единицы, т.е. положим

$$d_1 = 1/a_1, d_2 = 1/a_2, \dots, d_k = 1/a_k.$$

Тогда окажется, что величины (2.9) примут значения

$$\Pi_1 = \frac{\Pi}{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_k^{p_k}};$$

$$\Pi_2 = \frac{a_{k+1}}{a_1^{p_{k+1}} a_2^{p_{k+2}} \dots a_k^{p_{k+1}}};$$

$$\Pi_{n-k} = \frac{a_n}{a_1^{p_n} a_2^{p_2} \dots a_k^{p_k}}.$$

Найдем размерности величин  $\Pi$ . Для этого воспользуемся размерностями (2.8). Например, для величины  $\Pi_0$  имеем

$$\Pi_0 = \frac{[Q_0]}{[Q_1^{R_1} Q_2^{R_2} \dots Q_k^{R_k}]} = \frac{A_1^{R_1} A_2^{R_2} \dots A_k^{R_k}}{A_1^{R_1} A_2^{R_2} \dots A_k^{R_k}} = 1,$$

т.е. оказалось, что величина  $\Pi_0$  безразмерна. Аналогичным образом можно показать, что остальные  $n-k$  величины  $\Pi_i$  также безразмерны.  $\mathcal{P}$ -теорема доказана.

Величины  $\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}$  называются симплексами, безразмерными комплексами, параметрами или критериями.

Ясно, что если в исходную зависимость (2.6) входят один или несколько безразмерных параметров, очи без изменений перейдут в выражение (2.7).

Прежде чем перейти к обсуждению тех возможностей, которые открывает существование  $\mathcal{P}$ -теоремы, покажем, как на практике осуществляется представление физических зависимостей в безразмерном виде. При этом возможны два принципиально различных случая: математическое описание зависимости (2.6) известно, либо неизвестно.

В первом случае зависимость может быть представлена в виде формулы, дифференциального или интегрального выражения. Например, это может быть закон Кулона:

$$\tau = b \operatorname{tg} \psi + c, \quad (2.10)$$

где  $b \operatorname{tg} \psi$  — коэффициент внутреннего трения;

$c$  — удельное сцепление;

$b$  — скимающее (нормальное) напряжение;

$\tau$  — предельное сдвигающее напряжение.

В силу того, что все слагаемые в (2.11) имеют одинаковые размерности, переход к безразмерному виду заключается в делении выражения (2.10) на одно из своих слагаемых. Например,

$$\frac{\tau}{b} = \operatorname{tg} \psi + \frac{c}{b}, \quad (2.11)$$

закономерность (2.10) приведена к виду (2.7), причем  $\Pi_0 = \tau/b$ ,  $\Pi_1 = c/b$ , а  $\operatorname{tg} \psi$  уже в исходной зависимости является симплексом.

Для того, чтобы привести к безразмерному виду выражения,

содержащие дифференциалы и интегралы, необходимо ввести характерные величины. Например, процесс одномерной консолидации описывается уравнением

$$C_v \frac{\partial^2 P}{\partial Z^2} = \frac{\partial P}{\partial t} \quad (2.12)$$

где  $P = P(Z, t)$  - избыточное давление;

$Z$  - координата;

$t$  - время;

$C_v$  - коэффициент консолидации.

Представим  $P = P_0 \bar{P}$ ,  $t = t_0 \bar{t}$ ,  $Z = Z_0 \bar{Z}$ , где  $P_0$ ,  $t_0$ ,  $Z_0$  - характерные значения соответствующих величин, а  $\bar{P}$ ,  $\bar{t}$ ,  $\bar{Z}$  - их безразмерные значения. В качестве характерных обычно выступают максимальные значения. Например,  $P_0$  - максимальное избыточное давление, задаваемое обычно на границе объекта,  $t_0$  - длина временного интервала, для которого вычисляется прогноз по модели (2.12),  $Z_0$  - мощность скимаемой толщи. В этих случаях  $\bar{P}$ ,  $\bar{t}$  и  $\bar{Z}$  - относительные значения соответствующих величин и изменяются от нуля до единицы. Но в принципе в качестве характерного можно выбрать любое число  $P_0$ ,  $t_0$  и  $Z_0$ . Тогда изменятся числовые интервалы, содержащие безразмерные величины  $\bar{P}$ ,  $\bar{t}$  и  $\bar{Z}$ .

Используя характерные и безразмерные значения рассматриваемых величин и правила формирования размерностей, описанные в п. 2.1, из (2.12) найдем:

$$C_v \frac{P_0}{Z_0^2} \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial \bar{Z}^2} = \frac{P_0 \partial \bar{P}}{t_0 \partial \bar{t}} \quad (2.13)$$

или, учитывая однородность физических зависимостей по размерностям, а также безразмерность величин, участвующих в дифференцировании, из (2.13) получим выражение

$$\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial \bar{Z}^2} = \frac{Z_0^2}{C_v t_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{t}} \quad (2.14)$$

которое уже безразмерно.

В (2.14) безразмерными комплексами являются обе производные, а также коэффициент  $Z_0^2 / (C_v t_0)$ .

Во втором случае, когда математическое представление зависимости (2.6) неизвестно, процедура приведения ее к безразмерному виду повторяет доказательство  $\Pi$ -теоремы. Рассмотрим его на простом по физическому содержанию, но достаточно типичном в методическом отношении примере.

Для транспортировки жидкости по трубопроводу необходимо приложить некоторое давление, идущее на преодоление гидравлического сопротивления  $R$ . Величина давления  $R$  зависит от диаметра  $d$  и длины  $\ell$  трубопровода, скорости движения  $v$ , плотности  $\rho$  и вязкости  $\eta$  жидкости. Эти шесть величин связаны зависимостью, которую можно представить в следующем виде:

$$R = f(v, \eta, \rho, \ell, d). \quad (2.15)$$

Величины, входящие в (2.15), имеют следующие размерности:

$$[R] = ML^{-1}T^{-2}; [v] = LT^{-1}; [\ell] = L;$$

$$[\eta] = ML^4T^{-4}; [\rho] = ML^{-3}; [d] = L.$$

В качестве независимых по размерностям выберем величины  $\eta$ ,  $\rho$  и  $d$ . Действительно, никакие комбинации из размерностей  $\eta$  и  $\rho$  не позволяют исключить сразу  $M$  в  $T$ , т.е. получить размерность  $d$ . Точно так же из размерностей  $\rho$  и  $d$  нельзя получить размерности  $\eta$ , а из размерностей  $d$  и  $\eta$  — размерность  $\rho$ .

В соответствии с  $\Pi$ -теоремой, вместо зависимости (2.15) следует записать:

$$\frac{R}{d^4\eta^4\rho^2} = f\left(1, 1, 1, \frac{v}{d^4\eta^4\rho^2}, \frac{\ell}{d^4\eta^4\rho^2}\right), \quad (2.16)$$

где показатели степеней при  $d$ ,  $\eta$  и  $\rho$  должны быть подобраны так, чтобы образовавшиеся комплексы оставались безразмерными. Это требование приводит к трем уравнениям относительно размерностей соответствующих трех комплексов в (2.16).

$$ML^{-1}T^{-2} = L^4(ML^4T^{-4})^{1/4}(ML^{-3})^2, \quad (2.17)$$

$$LT^{-1} = L^4(ML^4T^{-4})^{1/4}(ML^{-3})^2, \quad (2.18)$$

$$L = L^4(ML^4T^{-4})^{1/4}(ML^{-3})^2. \quad (2.19)$$

В свою очередь, каждое из выражений (2.17)-(2.18) распадается на систему из трех уравнений, отражающих равенство показателей степеней при  $M$ ,  $L$  и  $T$  левых и правых частей равенств (2.17)-(2.18).

Так, уравнение (2.17) приводит к системе:

$$\left. \begin{array}{l} 1 = Y + Z \\ -1 = X - Y - 3Z \\ -2 = -Y \end{array} \right\},$$

решая которую находим  $X = -2$ ;  $Y = 2$ ;  $Z = -1$ .

Из уравнения (2.18) следует:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = Y_1 + Z_1 \\ 1 = X_1 - Y_1 - 3Z_1 \\ -1 = -Y_1 \end{array} \right\},$$

откуда  $X_1 = -1$ ,  $Y_1 = 1$ ,  $Z_1 = -1$ .

Наконец, из (2.19) получаем:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = Y_2 + Z_2 \\ 1 = X_2 - Y_2 - 3Z_2 \\ 0 = -Y_2 \end{array} \right\},$$

$X_2 = 1$ ;  $Y_2 = Z_2 = 0$ .

Подставляя полученные результаты в (2.16), находим:

$$\frac{R}{d^2 \eta^2 \rho^{-1}} = f \left( 1, 1, 1, \frac{U}{d}, \eta, \rho^{-1}, \frac{\ell}{d} \right). \quad (2.20)$$

Если ввести упрощенные обозначения безразмерных комплексов

$$\frac{R d^2 \rho}{\eta^2} = \Pi_0; \quad \frac{U d \rho}{\eta} = \Pi_1; \quad \frac{\ell}{d} = \Pi_2,$$

то вместо (2.20) можно записать:

$$\Pi_0 = f(1, 1, 1, \Pi_1, \Pi_2). \quad (2.21)$$

Выражение (2.21) представляет собой результат доказательства К-теоремы (2.7).

Возможно иное решение задачи, непосредственно использующее формулу разностик (2.3):

$$[R] = [U]^5 [\eta]^4 [\rho]^1 [\ell]^8 [d]^2. \quad (2.22)$$

Полученное выражение, где  $S, t, x, y$  и  $Z$  – неизвестные показатели степеней, равносильно уравнению

$$ML^{-1}T^{-2} = (LT^{-1})^6(ML^{-1}T^1)^t(ML^{-3})^xL^yL^z, \quad (2.23)$$

которое, в свою очередь, приводит к системе

$$\left. \begin{array}{l} 1=t+x \\ -1=S-t-3x+y+z \\ -2=S-t \end{array} \right\} \quad (2.24)$$

Система (2.24) недоопределенна. В ней количество уравнений меньше числа неизвестных. Поэтому три неизвестных придется выразить через два других. Будем, например, считать известными  $S$  и  $y$ . Тогда

$$t=2-S; x=S-1; z=S-y-2. \quad (2.25)$$

Подставляя результаты (2.25) в (2.22), получим:

$$[R] = [v]^6 [\eta]^{2-x} [\rho]^{S-1} [t]^1 [d]^{3-y-2}. \quad (2.26)$$

Выражение (2.26) легко преобразуется к виду

$$\frac{Rd^3\rho}{\eta^2} \cdot \left( \frac{\nu d \rho}{\eta} \right)^S \cdot \left( \frac{\rho}{d} \right)^y,$$

что представляет собой найденные выше три безразмерных комплекса.

Оба рассмотренных способа решения задачи не лишены промежука. В первом способе он обнаруживается при выборе независимых по размерностям величин. Во втором – при выборе тех показателей степеней уравнения (2.23), относительные которых определяются остальные. Очевидно, что изменение выбора в обоих случаях приведет к изменению вида безразмерных критериев. Например, принимая в качестве независимых по размерностям величины  $\eta, \nu$  и  $d$ , получим в (2.21)

$$\Pi_0 = \frac{Rd}{\eta^2\nu}; \quad \Pi_1 = \frac{R\nu d}{\eta}; \quad \Pi_2 = \frac{\rho}{d}. \quad (2.27)$$

Таким образом, существуют такие физические зависимости (2.6), которые допускают различный переход к безразмерным выражениям (2.7). Выбор вида безразмерных комплексов в подобных случаях определяется сложившимися традициями, возможнос-

тии их физической интерпретации, целью перехода к безразмерному выражению. В физике, например, известны и широко используются такие безразмерные комплексы, как числа Рейнольдса, Маха, Фруда, Ньютона, критерий Нуссельта, Прандтля, Ньютона и т.д. Каждый из них связан с некоторым классом физических явлений, в численном значении этих комплексов определенным образом характеризуют сами явления.

Итак, любая реально существующая физическая зависимость может быть представлена в безразмерном виде. В этом последнем она наиболее ясно отражает суть процесса или явления вне связи с его физической природой. В подтверждение сказанного рассмотрим, например, законы Ога и Дарси:

$$L_1 = \sigma_1 \frac{\partial U}{\partial X}, \quad q_1 = K_1 \frac{\partial H}{\partial X},$$

где  $L_1$  - плотность тока;

$q_1$  - скорость фильтрации по направлению  $X$ ;

$\sigma_1$ ,  $K_1$  - соответственно электропроводность и коэффициент фильтрации в том же направлении;

$U$  - электрический потенциал;

$H$  - напор.

В безразмерном виде оба закона записываются следующим образом:

$$\tilde{L}_1 = \frac{\sigma_1 U_0}{I_0 I_1} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{X}}, \quad \tilde{q}_1 = \frac{K_1 H_0}{q_0 X_0} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{X}},$$

что позволяет выразить их единим уравнением

$$\tilde{N}_1 = \tilde{L}_1 \cdot \tilde{q}_1. \quad (2.28)$$

Смысл выражения (2.28) вполне понятен. Интенсивность массопереноса  $\tilde{N}_1$  пропорциональна произведению  $\tilde{L}_1$  некоторой скалярной функции. Сама природа переносимых масс безразлична. В частности, вместо электрических зарядов или частицек жидкости это (если взглянуться в закон Фурье, описывающий теплоперенос) может быть поток тепла, т.е. энергии. Очевидно, что при одинаковых значениях безразмерных величин  $\tilde{L}_1$  и  $\tilde{q}_1$  будут одинаковы и потоки  $\tilde{N}_1$  независимо от их природы. Зная же

Где можно найти и плотность тока и скорость фильтрации:

$$I_x = I_0 \Pi_0, \quad q_x = q_0 \Pi_0. \quad (2.29)$$

Подобного рода построений являются основой численных способов и методов моделирования. Каждая задача, имеющая физический смысл, определяет некоторый класс явлений (процессов). Эти явления могут иметь различную физическую природу, но совершенно идентичные безразмерные описания. Поэтому любой процесс может изучаться с помощью процесса другой физической природы, если безразмерные представления обоих совпадают.

Две явления (процесса) будем называть подобными, если по каким-либо характеристикам одного из них можно получить характеристики другого простым пересчетом, который аналогичен переходу от одной системы единиц измерения к другой.

Примером такого пересчета служат выражения (2.29). Оказывается, что процесс фильтрации можно изучать с помощью стационарных электрических полей. Результаты такого изучения необходимо представить в виде значений  $\Pi_0$ , а для вычисления скорости фильтрации достаточно эти значения умножить на характерную скорость фильтрации  $q_0$ . Последняя в данном случае является масштабным множителем.

Очевидно, что необходимое и достаточное условие подобия двух явлений состоит в том, что они качественно одинаковы, а численные значения определяющих их безразмерных комплексов попарно равны. Качественно одинаковыми называют процессы, которые, будучи приведены к безразмерному виду, отличаются только численными значениями безразмерных комплексов.

В зависимости от того, известно или неизвестно математическое описание изучаемого физического явления (2.6), моделирование делится на математическое и физическое. Априори можно полагать, что математическое моделирование, опирающееся на более глубокое знание исследуемого процесса (имеется его математическая модель), обладает более широкими возможностями, чем физическое.

В процессе физического моделирования, несмотря на отсутствие математического описания изучаемого процесса, необходимо, тем не менее, учитывать реально существующие физические зависимости. Их структура такова, что аргументы тригонометрических, логарифмических, показательных и т. п. функций должны

быть безразмерны. На практике при построении эмпирических зависимостей (например, статистическими методами) это обстоятельство часто игнорируется: под знаки тригонометрических функций, логарифмов или в показатели степени нередко входят размерные величины. В таких случаях, чтобы связь смысла приобретала физический смысл, в аргументы необходимо вводить подразмерочные коэффициенты, подбирая их размерности так, чтобы аргумент в целом представлял собой безразмерную величину. Если такие коэффициенты не вводятся (например, при работе с формулами для определения фильтрационных параметров по данным откачек), следует быть внимательным при изменении единиц измерения.

## ГЛАВА 3

### ФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

#### 3.1. Общие положения

Физическим будем называть моделирование, при котором учитываются факторы, влияющие на исследуемый процесс, но не используется математическое описание (модель) их взаимосвязи.

Физическое моделирование используется в тех случаях, когда математическая модель процесса не разработана (неизвестна). Это обстоятельство накладывает серьезные ограничения на саму процедуру моделирования. В частности, исследуемый процесс приходится моделировать процессом той же физической природы. Оба процесса должны описываться одной и той же физической зависимостью и различаться только своими масштабами, т.е. геометрическими размерами, интенсивностью, скоростью протекания. При необходимости изменениям подвергаются и свойства объекта. В основу моделирования положено представление физических зависимостей (2.6) в безразмерном виде (2.7), опирающееся на  $\tilde{\mathcal{P}}$ -теорему.

Для того, чтобы более полно представить сущность физического моделирования, рассмотрим подробнее задачу моделирования транспортировки жидкости, обсуждавшуюся в п. 2.2. Будем полагать, что необходимо определить производительность насосной станции, с помощью которой жидкость с заданными свойствами (вязкостью  $\eta$  и плотностью  $\rho$ ) будет подаваться по трубопроводу длиной  $l$  и диаметром  $d$  со скоростью  $U$ . Очевидно, что энергия насосной станции расходуется на преодоление гидравлического сопротивления  $R$ , и именно она подлежит оценке. Зависимость между упомянутыми факторами представлена выражением (2.15):  $R = f(U, \eta, \rho, l, d)$ .

Если по каким-либо причинам (неизвестность или сложность математического описания рассматриваемой зависимости) рас-

чет по формуле (2.15) невозможен или нежелателен, целесообразно обратиться к моделированию: создать в лаборатории уменьшенную копию трубопровода, определить на ней возникающее гидравлическое сопротивление, а затем от результатов на модели перейти к реальному объекту.

Приступая к моделированию, необходимо решить целый ряд вопросов. В частности, выяснить, какой должна быть модель трубопровода; следует ли и если да, то как изменять свойства транспортируемой жидкости; с какой скоростью транспортировать ее на модели и, наконец, как перейти от результатов, полученных на модели, к реальному объекту. Ответы на эти вопросы дает теория размерностей и подобия, являющиеся основой всякого моделирования; в том числе, физического.

Для того, чтобы результаты моделирования можно было перенести на реальный объект, необходимо выполнить условие подобия процессов на модели и объекте: численные значения всех безразмерных комплексов, определяющих процесс на модели и объекте, должны быть одинаковы. Для рассматриваемой задачи эти комплексы представлены в виде выражения (2.28). Перенесем их, снабдив индексами 0 и M, обозначающими, соответственно, объект и модель:

$$\Pi_0 = \frac{R^0 d^0}{\rho^0 U^0}; \quad \Pi_1 = \frac{\rho^0 U^0 d^0}{\rho^0}; \quad \Pi_2 = \frac{l^0}{d^0}; \quad (3.1)$$

$$\Pi_M = \frac{R^M d^M}{\rho^M U^M}; \quad \Pi_1^M = \frac{\rho^M U^M d^M}{\rho^M}; \quad \Pi_2^M = \frac{l^M}{d^M}.$$

Подобие процессов означает, что  $\Pi_0 = \Pi_M^M$ ,  $\Pi_1 = \Pi_2^M$ , тогда  $\Pi_0^M = \Pi_2^M$ . Таким образом параметры модели должны подбираться так, чтобы

$$\frac{\rho^0 U^0 d^0}{\rho^0} = \frac{\rho^M U^M d^M}{\rho^M}; \quad \frac{l^0}{d^0} = \frac{l^M}{d^M}. \quad (3.2)$$

В этом случае автоматически выполнится равенство

$$\frac{R^0 d^0}{\rho^0 U^0} = \frac{R^M d^M}{\rho^M U^M}, \quad (3.3)$$

из которого можно найти гидравлическое сопротивление объекта

$$R^o = R^H \frac{U^o U^H}{\eta^H} \cdot \frac{d^H}{d^o}. \quad (3.4)$$

Равенства (3.2) определяют правила определения масштабов модели, а (3.3) – правило вычисления  $R^o$  по  $R^H$ , т.е. фильтрационных сопротивлений объекта по аналогичным параметрам, получаемым на модели. Определим масштабы как отношения значений соответствующих параметров на объекте и модели, т.е.

$$\alpha_l = \frac{l^o}{l^H} = \frac{d^o}{d^H}, \quad \alpha_p = \frac{p^o}{p^H}, \quad \alpha_\eta = \frac{\eta^o}{\eta^H}, \quad \alpha_v = \frac{U^o}{U^H}, \quad \alpha_R = \frac{R^o}{R^H}. \quad (3.5)$$

Анализируя (3.5), отметим прежде всего, что масштабы длины и диаметра трубопровода одинаковы. Это означает, что модель должна быть геометрически подобна объекту.

Сохранение геометрического подобия является обязательным при физическом моделировании.

Оказывается далее, что пять масштабов связаны между собой двумя соотношениями. Действительно, первое из равенств (3.2) и равенство (3.3) с учетом (3.5) дают

$$\alpha_p = \alpha_l \alpha_p \alpha_v, \quad \alpha_v = \alpha_\eta \alpha_v / \alpha_l, \quad (3.6)$$

откуда следует, что только три масштаба могут выбираться произвольно, а два других получаются из соотношений (3.6). Какие именно масштабы выбираются произвольно, а какие формируются за проявольных, зависит от желания и возможностей того, кто моделирует. В рассматриваемой задаче исследователем обычно назначается геометрический масштаб, масштабы вязкости и плотности, т.к. эти три масштаба трудно регулировать. В этом случае задача моделирования состоит в том, чтобы путем изменения гидравлического сопротивления модели  $R^H$  получить скорость движения жидкости:

$$U^H = \frac{\alpha_l \alpha_p}{\alpha_\eta} U^o. \quad (3.7)$$

То значение , при котором получена окорость (3.7), представляет собой решение задачи моделирования, поскольку этой скорости  $U^H$  соответствует проектируемая скорость транспортировки жидкости  $U^o$ , а гидравлическому сопротивлению модели  $R^H$ .

гидравлическое сопротивление объекта:

$$R^* = R^n \alpha_R.$$

Приведенный пример достаточно полно освещает сущность физического моделирования, важнейшими особенностями которого являются следующие: моделируемый и моделирующий процессы должны иметь одну и ту же физическую природу, различаясь лишь масштабами; объект исследования и его модель должны быть геометрически подобны; произвольный выбор масштабов возможен лишь для части параметров; изменение геометрических параметров объекта при построении модели может потребовать изменения его свойства. Наконец, переход от результатов, полученных на модели, к исследуемым параметрам объекта достигается умножением этих результатов на соответствующие масштабы.

Технология физического моделирования сводится к следующему. Составляется список факторов, влияющих на изучаемое явление или процесс, в форме зависимости (2.6). Последняя приводится к безразмерному виду (2.7), причем безразмерные факторы, вошедшие в (2.6), переходят в (2.7) без изменений (в виде комплексов). Из необходиимого равенства безразмерных комплексов объекта и модели выводятся масштабные соотношения, часть которых выбирается произвольно. Затем строится модель, на которой выполняются необходимые исследования и измерения. Результаты последних пересчитываются в соответствии с масштабами, что позволяет получить искомые параметры объекта.

Несомненные достоинства физического моделирования – в его наглядности, принципиальной простоте и возможности моделировать процессы и явления, для которых точные математические модели не сформулированы.

К недостаткам этого метода следует отнести сложность, которые могут возникнуть в связи с назначением масштабов свойств реальных объектов на модели (например, при сохранении физико-механических свойств, соответствующих грунтам, в сотни и тысячи раз уменьшать на модели размеры слагающих их частиц).

Особенно опасным может оказаться отсутствие в уравнении (2.6) каких-либо факторов, существенно влияющих на ход процесса. В то же время включение их впрок, на всякий случай, значительно усложняет моделирование.

Несмотря на отмеченные недостатки, физическое моделирование - один из методов прогноза, широко используемых в инженерной геологии. При этом наибольшей популярностью пользуются такие модификации этого метода, как центробежное моделирование, моделирование с помощью эквивалентных и оптических активных материалов, натурное моделирование и ряд других.

### 3.2. Центробежное моделирование

Как отмечено в предыдущем разделе, изменение геометрических размеров объекта при построении модели может потребовать изменения его свойств, что при изучении некоторых инженерно-геологических процессов нежелательно. В этом случае используется метод центробежного моделирования, предложенный в 1932 году Г.И. Покровским [5].

Рассмотрим основные идеи метода на примере выбора профиля откоса высотой  $H$  в однородной глинистой толще с объемным весом  $\gamma$ , упругим сцеплением  $C$  и углом внутреннего трения  $\varphi$ . Если профиль откоса проектируется в виде прямой линии, то откос тем более устойчив, чем меньше угол этой линии с горизонтом. Но чем меньше угол, тем большие объемы земляных работ потребуются при строительстве каналов, дрен, коллекторов, и тем больше необходимо строительных материалов при возведении плотин, дамб, насыпей и т. п. В то же время крутой профиль может оказаться неустойчивым.

Основой для проектирования откоса служит так называемый профиль предельного равновесия. Это такой профиль, при дальнейшем уменьшении положения которого откос выводится из состояния равновесия (напомним, что положение  $m$  - величина, обратная уклона, т.е. отношение горизонтальной проекции откоса к его высоте).

Предельное положение откоса связано с перечисленными выше свойствами грунтового массива зависимостью вида

$$m = f(H, \gamma, C, \varphi), \quad (3.8)$$

в которой величины  $m$  и  $\varphi$  - безразмерные,  $[H] = L$ ,  $[\gamma] = ML^{-1}T^{-2}$ ,  $[C] = ML^{-1}T^{-1}$ .

Для того, чтобы зависимость (3.8) представить в безразмерном виде, выберем в качестве основных (независимых по размер-

ностям) величин высоту откоса  $H$  и объемный вес  $\gamma'$ . Тогда, в соответствии с рассмотренной в п. 2.2 Г - теоремой, зависимость (3.8) можно записать следующим образом:

$$m = f(1, 1, C/\gamma' H^3, \varphi). \quad (3.9)$$

При этом  $m$  и  $\varphi$  уже в (3.8) представляют собой симплекс и без изменения переходят в (3.9). Задача, таким образом, состоит лишь в подборе таких показателей степеней  $X$  и  $U$ , которые позволяют представить комплексный параметр  $C/\gamma' H^3$  в безразмерном виде. Для этого используем уравнение размерностей

$$ML^{-1}T^{-2} = (ML^{-3}T^{-2})^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}},$$

решение которого, основанное на равенстве показателей степеней у одноименных единиц измерения, позволяет получить  $X=U=\frac{1}{2}$ .

Таким образом, зависимость (3.8) приводится к виду (2.7):

$$\Pi_0 = f(1, 1, \Pi_1, \Pi_2),$$

где  $\Pi_0 = m$ ,  $\Pi_1 = C/\gamma' H$  и  $\Pi_2 = \varphi$ .

Основа для моделирования создана. Для того, чтобы задание  $m^0$ , полученное на модели, соответствовало заданию объекта  $m^*$ , необходимо выполнить равенства  $\Pi_1^0 = \Pi_1^*$  и  $\Pi_2^0 = \Pi_2^*$ , где индексы  $0$  и  $*$  относятся, соответственно, к объекту и модели. Для практических действий эти равенства следует переписать в следующем виде.

$$\frac{C^0}{\gamma'^0 H^0} = \frac{C^*}{\gamma'^* H^*}, \quad \varphi^0 = \varphi^*. \quad (3.10)$$

Выражения (3.10) являются базой для выбора масштабов при физическом моделировании.

Трудность получения материала с заданными значениями  $\gamma'$ ,  $C$  и  $\varphi$  наводит на мысль воспользоваться для моделирования грунтом объекта, тем более, что на объекте и модели должны быть одинаковыми углы внутреннего трения. Но из  $C^0 = C^*$  и  $\gamma'^0 = \gamma'^*$  следует, что высота откоса у модели должна быть такой же, как у объекта. Это делает бессмысленным само моделирование, особенно, если  $H^*$  – велико. Тем не менее, воспользоваться грунтом объекта можно. Для этого необходимо каким-то образом изменить объемный вес грунта модели. Действительно, при  $C^0 = C^*$

первое из равенств (3.10) принимает вид

$$\frac{1}{g^* H^*} = \frac{1}{g^* H^*}. \quad (3.11)$$

Если учесть, что

$$g^* = g p^*, \quad g^* = g p^*.$$

( $g$  – ускорение силы тяжести;  $p^*$  – объемная масса грунта объекта;  $p$  – ускорение, действующее на грунт модели), то равенство (3.11) принимает вид:

$$\frac{1}{g H^*} = \frac{1}{g H^*}.$$

Из

$$\frac{g}{g} = \frac{H^*}{H^*}. \quad (3.12)$$

Выражение (3.12) есть нечто иное, как соотношение между масштабами ускорений  $\alpha_g$  и высот откоса  $\alpha_h$ :

$$\alpha_g = \frac{1}{\alpha_h}. \quad (3.13)$$

Из (3.13) следует, что ускорение на модели во столько раз превышает ускорение силы тяжести, во сколько раз модель меньше моделируемого объекта.

Для получения заданного ускорения можно использовать центрифугу. При вращении вокруг вертикальной оси центростремительное ускорение

$$\alpha_c = \omega^2 R \quad (3.14)$$

( $\omega$  – угловая скорость;  $R$  – радиус вращения) направлено горизонтально к оси вращения. Поэтому полное ускорение на центрифуге

$$\alpha = \sqrt{g^2 + \omega^2 R^2}.$$

Для требуемого масштаба  $\alpha_h$  и заданном  $R$  достаточно выбрать угловую скорость в соответствии с формулой

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}} \sqrt{\alpha_h^2 - 1}.$$

чтобы получать подобные модели и объекта.

Основные черты технологии моделирования применительно к рассматриваемому примеру заключаются в следующем: в соответствии с принятым масштабом  $\lambda$ , из породы объекта, находящейся в естественных структуре и состоянии, готовится серия (обычно 4-6) моделей с различными положениями. Модели поочередно помещают в каретки центрифуги и путем равномерного вращения с заданной угловой скоростью нагружают объемными инерционными силами, придавая породам необходимый фиктивный объемный вес в соответствии с (3.11). Нераарушившаяся модель с минимальным положением дает представление о предельно устойчивом откосе.

Современные центрифуги позволяют испытывать модели высотой до 0,4-0,5 м с радиусом подвески модели до 2-3 м от оси вращения и масштабом моделирования от 1:20 до 1:500.

С помощью центробежного моделирования представляется возможным решать достаточно широкий круг задач, в частности, исследовать влияние ряда геологических и техногенных факторов на устойчивость естественных склонов и искусственных откосов - влажности пород, пригрузки и подрезки склонов, скорости и способа отвалообразования, начальной плотности пород в насыпях и земляных плотинах, характера их основания и других, что позволяет обосновать оптимальную технологическую схему обеспечения устойчивости естественных и искусственных земляных масс.

Современные измерительные приборы, используемые при моделировании (аэростатические динамометры, индукционные датчики, кино- и фотоустановки, стробоскопы и т.п.), позволяют, кроме того, решать значительный круг задач механики горных пород и массивов [6]. исследовать напряженное состояние оснований проектируемых сооружений, изменение напряженного состояния пород при проходке горных выработок, под влиянием длительных нагрузок, в процессе фильтрационной консолидации глинистых пород. Для изучения некоторых из перечисленных вопросов в натурных условиях потребовались бы многие годы и десятилетия.

Имеются сведения об успешном использовании центробежного моделирования для изучения просадочных деформаций и послепросадочных явлений в лессовых породах [7].

Специальные устройства позволяют моделировать в центрифу-

т е одновременное действие статического поля напряжений и динамического поля, создаваемого при первых работах.

Приведенный краткий перечень приложений центробежного моделирования к решению инженерно-геодезических задач – свидетельство достоинств рассматриваемого метода. Вместе с тем центробежное моделирование имеет ряд ограничений.

Основным недостатком метода является неоднородность поля гравитационного ускорения (3.14), которое может заметно отличаться в точках модели, находящихся на различном удалении от ее центрифуги. Для уменьшения этой неоднородности необходимо увеличивать радиус установки и уменьшать размеры модели. В первом случае возникают технические трудности, во втором – сдвигается точность в аксессуарах.

Кроме того, при центробежном моделировании необходимо создавать модели слоистых тел. Наконец, большие сложности возникают при моделировании скальных массивов.

Однозначные обстоятельства в ряде случаев ограничивают использование рассмотренного метода.

### 3.3. Метод эквивалентных материалов

Предположим, что в рассмотренном выше примере выбора профиля предельного равновесия откоса, последний скожен скальными породами. В этом случае предельное заложение откоса

$$t = f(H, \delta, b), \quad (3.15)$$

где  $b$  – прочность пород, имеющая размерность  $ML^2T^{-3}$ .

Из (3.15) по аналогии с приведенными в п. 3.2 рассуждениями, получим:

$$\frac{\delta^*}{\delta^* H^*} = \frac{\delta''}{\delta'' H''}. \quad (3.16)$$

При  $H'' < H^*$  для сохранения условия (3.16) возможны два пути:  $\delta'' = \delta^*$ ,

$$\frac{\delta''}{\delta^*} = \frac{H^*}{H''},$$

либо

$$\delta'' = \frac{H''}{H^*} \frac{\delta^*}{\gamma^*} \cdot 5^\circ. \quad (3.17)$$

В первом случае мы приходим к щее центробежного моделирования, во втором - поставлены перед необходимостью использования искусственных материалов, механические свойства которых значительно ниже механических характеристик моделируемого объекта.

Искусственные материалы, механические характеристики которых удовлетворяют требованиям (3.17), называются эквивалентными материалами, а метод, основанный на их применении и предложенный в 1936 г. Г.Н. Куценковым [8] - методом эквивалентных материалов.

Материалы, эквивалентные скальным и полускальным породам, наиболее часто представляют собой трехкомпонентные (иногда песчано-гипсовые) смеси песка, молотой слюды (мики) и связующих веществ. В качестве последних могут использоваться неорганические вещества (цемент, формовочный гипс, жидкое стекло), углеводороды (тараин, церезин и т.п.), синтетические Полимеры (эпоксидная, карбамидная, кремнеорганическая и др. смолы, этиленгликоль) и природные смолы (каучук, тек и др.). Дренажные типы смесей позволяют моделировать массивы скальных и полускальных горных пород в масштабе от 1:10 до 1:200.

Для моделирования песчано-глинистых отложений в качестве связующих используются обычно вазелин и машинное масло. Заполнителем, кроме песка и слюды могут быть мел, глины, пробковая крошка, дробь и т.п. Нередко в качестве эквивалентных используется песок, реанина, вальцмасса и другие материалы.

Данные о физических свойствах двух- и трехкомпонентных смесей приводятся обычно в виде таблиц или диаграмм. Примером последней является рис. 1, где изолиниями показаны значения сопротивления материалов одноосному сжатию,  $10^5 \text{ Па}$ , (рис. 1, а) и объемного веса,  $\text{г}/\text{см}^3$ , (рис. 1, б) трехкомпонентной смеси. Заштрихованы области, непригодные для изготовления моделей, представляющие собой либо жидкие (справа), либо сухие рыхлые смеси (слева). Не заштрихованная область соответствует нормальному (рабочему) составу.

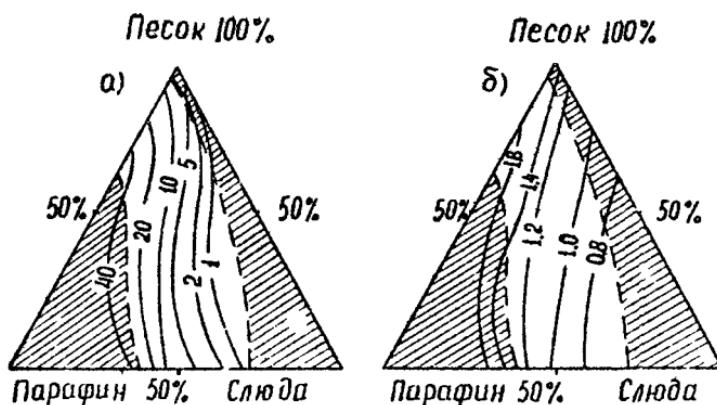


Рис. 1

С учетом масштаба моделирования, диаграммы, подобные рис. 1, позволяют определить состав требуемого эквивалентного материала.

Предположим, что в приведенном выше примере моделируется скальный массив, сложенный песчаниками с объемным весом  $\gamma' = 2,6 \text{ г}/\text{см}^3$  и сопротивлением одноосному сжатию в массиве  $\sigma'_0 = 500 \cdot 10^5 \text{ Па}$ . При геометрическом масштабе моделирования 1:100 и соотношении  $\delta/\delta'$ , равном, например, 0,4, получим  $\gamma'' = 1,0 \text{ г}/\text{см}^3$ . Учитывая (3.17), найдем  $\sigma''_0 = 0,01 \cdot 0,4 \cdot 500 = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$ . Как следует из диаграммы (рис. 1), эквивалентный объекту материал с требуемыми свойствами должен содержать примерно 50% песка, 30% слюды и 20% парафина. Очевидно, что из такого материала изготовить модель значительно проще, чем из материала объекта (прочносцементированного песчаника).

После определения состава требуемого материала изготавливают опытные образцы, уточняют физико-механические свойства и при необходимости корректируют последние изменения содержаний входящих в смесь компонентов. На основании уточненной рецептуры эквивалентного материала приступают к изготовлению самой модели. Для этого используются испытательные стенды, представ-

ляющие собой жесткие конструкции размером до 5-10 м для плоских и до 2x2x0,8 м для объемных моделей.

Важным преимуществом метода эквивалентных материалов по сравнению с центробежным моделированием является возможность создания слоистых моделей, моделирование тектонических структур, динамических нарушений, трещиноватости и т. п. Сравнительно просто исследуются процессы деформации пород с разрывами сплошности, что недоступно иным методам моделирования, возможно воспроизведение на модели процессов проходки горных выработок и отработки полезных ископаемых. Эти обстоятельства, наряду с достаточно хорошо разработанной технологией изготовления эквивалентных материалов, делают рассматриваемый метод неизмененным при исследовании вопросов напряженного состояния скальных массивов, устойчивости бортов карьеров, сдвижения горных пород и земной поверхности при подработке горными выработками, для изучения эффективности различных профилактических и конструктивных мероприятий по обеспечению устойчивости оснований и для решения других задач [9, 10].

Возможности изучения перечисленных вопросов в значительной мере обусловлены разработкой и созданием высокоточной аппаратуры для регистрации поля напряжений, деформаций и смещений на модели в период испытаний. Для этого используются различные микродинамометры, гибкие, тепловые, вермальные и оптические тензометры, спаренные микроскопы. Широко применяется метод фотофиксации, позволяющий регистрировать смещение всех точек на боковой поверхности модели. В объемных моделях устанавливаются глубинные реперы, после испытания производится послойное вскрытие модели.

Результаты испытаний обрабатываются графическими, аналитическими и статистическими методами.

Необходимо отметить, что при решении ряда задач могут возникнуть трудности в подборе эквивалентных материалов. Дело в том, что при моделировании объекта в уменьшенном масштабе материал модели должен в некоторых случаях обладать требуемыми значениями весьма широкого списка свойств. Так, кроме рассмотренной в примере (3.17) прочности на скатие могут потребоваться фиксированные значения прочности на растяжение, сопротивления изгибу, сцепления, угла внутреннего трения, мо-

духи деформации, модуля упругости, коэффициента Пуассона и других. Несмотря на существование корреляционных взаимосвязей между перечисленными свойствами, решение задачи может вызвать затруднение, тем более, что некоторые показатели являются сингексами и их значения не зависят от масштаба моделирования. К таким показателям, как следует из (3.10), относится угол внутреннего трения пород, а также, например, коэффициент Пуассона, пористость и некоторые иные. Поэтому в случае, если материалы с требуемыми значениями полного спектра свойств подобрать не удается, прибегают к упрощенным способам моделирования, к числу которых относятся метод крайних пределов и метод последовательных приближений.

Сущность метода крайних пределов в том, что испытывают не менее двух моделей, из которых одна характеризуется заниженным, другая - завышенным значениями показателя свойства (фактора), для которого материал с требуемым значением отсутствует. Окончательные данные получают интерполяцией найденных результатов. Близость последних - свидетельство несущественной роли фактора в изучаемом процессе, что позволяет не включать его в уравнение (2.6).

Метод последовательных приближений заключается в испытании серии моделей, причем каждую последующую модель усложняют, постепенно приближая ее по структуре и свойствам материала к требуемой "идеальной" модели. В результате моделирования выявляются важнейшие особенности динамики изучаемого процесса, оценивается роль факторов в изменении интенсивности этого процесса, уточняется перечень показателей в уравнении (2.6), что в целом позволяет получить наилучшее решение при наименьших затратах времени и средств.

Одним из недостатков метода эквивалентных материалов (а также центробежного моделирования) являются затруднения при построении моделей сложной конфигурации. В этом и в ряде иных случаев может успешно использоваться метод фотоупругости (поляризационно-оптическое моделирование или моделирование на оптически активных материалах).

### 3.4. Моделирование на оптически активных материалах

Моделирование на оптически активных материалах использует-ся для изучения напряженного состояния в массивах горных по-род и элементах любой конфигурации при упругих и пластиче-ских деформациях массива в условиях, когда последние присущи-сят без разрыва сплошности.

Метод основан на появлении оптической анизотропии и двой-ного лучепреломления некоторых материалов под нагрузкой, об-наруженном в 1816 г. Д.Бюстером и является типичным предста-вителем методов физического моделирования. Так, при исполь-зование этого метода модель, воспроизводящая объект в опреде-ленном масштабе, подвергается воздействию тех же нагрузок, что и объект. Как свойства модели, так и действующие на нее нагрузки определяются в соответствии с требованиями рассмотр-енной в п. 2.2  $\chi$  - теоремы.

Основной отличительной особенностью метода и его достоин-ством является способ измерения напряжений. Изучение распре-деления напряжений на реальных объектах и моделях всегда пред-ставляет сложную техническую задачу и обычно осущест-вляется лишь в отдельных немногочисленных точках. При моде-лировании на оптически активных материалах поляризованный луч света, проходя через напряженную модель, разлагается на два луча, плоскости колебания которых взаимно перпендикулярны и совпадают с направлениями главных напряжений. Эти лучи харак-теризуются различными скоростями распространения и на выходе из модели приобретают некоторую "разность хода". Приведенные к одной плоскости, колебания лучей складываются и создают интерферционную картину, которая позволяет получить нагляд-ное представление о распределении напряжений на всей плоскос-ти модели, а при необходимости – и в объеме. Получение даже качественного представления о напряженном состоянии объекта позволяет сделать важные выводы, выделить наиболее и наименее напряженные участки, наметить способы перераспределения нап-ряжений для повышения устойчивости исследуемого массива гор-ных пород.

Моделирование проводится с помощью специальных приборов – полярископов, состоящих из поляризатора (источника света) и

анализатора, между которыми помещается модель. Материал для изготовления модели весьма разнообразен - от стекла до желатина, включая бакелит, целлулOID, специальные виды прозрачной резины и т.п. Наиболее часто используется игдантик, представляющий собой смесь желатина, глицерина и воды. Выбор материала осуществляется в зависимости от физико-механических свойств пород исследуемого объекта и в соответствии с требованиями физического моделирования. Для создания внешних нагрузок на модель используются гидравлические и механические устройства. (например, центрифуга), некоторые материалы допускают изучение напряжений от собственного веса модели.

Основой количественной интерпретации результатов моделирования является закон фотоупругости, устанавливающий зависимость между оптическим эффектом и напряжениями [II, 12].

Рассмотрим плоское напряженное состояние, т.е. такое распределение напряжений, при котором оно не зависит от одной из пространственных координат. Распределения напряжений во всех плоскостях, перпендикулярных этой координате, одинаковы. Поэтому изучение его на объекте можно заменить изучением распределений напряжений на одной плоскости. Допустим, что модель этой плоскости выполнена из прозрачного материала и просвечивается поляризованным лучом, поперечные колебания которого происходят в одном определенном направлении.

На рис. 2 представлена эта нагруженная плоскость (пластина) и рассматривается падающий на нее нормально в точку О поляризованный луч. Для определенности будем полагать, что электромагнитные колебания происходят вдоль линии АО, а система координат ХОУ совпадает с главными направлениями напряжений в точке О. Если свет является монохроматическим, то это позволяет представить колебания в виде

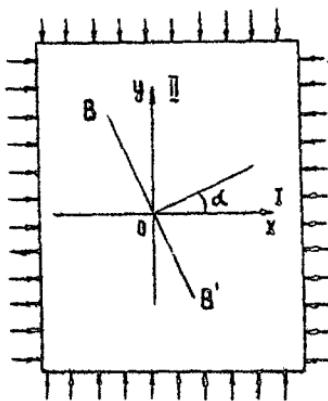


Рис. 2

уравнения перемещений:

$$S = a \cos \omega t,$$

где  $a$  - амплитуда;

$\omega$  - угловая скорость;

$t$  - время.

Перемещение  $S$  можно разложить по координатным осям:

$$X = a \cos \alpha \cos \omega t; \quad Y = a \sin \alpha \cos \omega t,$$

после чего перемещения  $X$  и  $Y$  соответствуют двум плоско-поляризованным лучам.

Для некоторых материалов, называемых оптически активными, установлено, что скорость прохождения света сквозь них связана с напряжениями, действующими в направлении поляризации. Это означает, что лучи, которым соответствуют колебания  $X$  и  $Y$ , потратят на прохождение пластинки толщиной  $h$  разное время:

$$t_x = h/v_x, \quad t_y = h/v_y.$$

Поэтому после прохождения пластинки перемещения лучей с колебаниями вдоль осей  $X$  и  $Y$  окажутся, соответственно, равны:

$$X_1 = a \cos \alpha \cos \omega (t - t_x); \quad Y_1 = a \sin \alpha \cos \omega (t - t_y).$$

Таким образом, после прохождения пластинки между лучами образуется разность фаз или хода  $\Delta = \omega (t_x - t_y)$ . Экспериментально установлено, что разность хода пропорциональна толщине пластиинки, разности главных напряжений, и обратно пропорциональна длине волны  $\lambda$ :

$$\Delta = \frac{2\pi h}{\lambda} C (\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{Ch}{\lambda} C T_{max}, \quad (3.18)$$

где  $C$  - оптико-механический коэффициент, зависящий от температуры, длины волны и материала;  $T_{max}$  - максимальное сдвигающее напряжение.

Если теперь на некотором расстоянии за пластинкой поместить анализатор, т.е. устройство, пропускающее только поляризованный свет с плоскостью поляризации, перпендикулярной

плоскости поляризатора (на рис. 2 – направление ВВ<sup>1</sup>), то оба луча подойдут к нему с той же разностью хода. Иными словами, будут иметь место равенства

$$X_2 = \alpha \cos \alpha \cos \psi, Y_2 = \alpha \sin \alpha \cos(\psi - \Delta).$$

Анализатор пропускает только проекции составляющих  $X_2$  и  $Y_2$  на направление ВВ<sup>1</sup>, т.е.

$$X_2 \sin \alpha = \frac{1}{2} \alpha \sin 2\alpha \cos \psi, -Y_2 \cos \alpha = -\frac{1}{2} \alpha \sin 2\alpha \cos(\psi - \Delta).$$

Поэтому суммарное колебание, пропускаемое анализатором, выражается следующим образом:

$$\frac{1}{2} \alpha \sin 2\alpha [\cos \psi - \cos(\psi - \Delta)] = -\alpha \sin 2\alpha \sin \frac{\Delta}{2} \sin(\psi - \frac{\Delta}{2}).$$

Легко заметить, что множитель  $\sin(\psi - \frac{\Delta}{2})$  – простое гармоническое колебание, а выражение  $\alpha \sin 2\alpha \sin \frac{\Delta}{2}$  – его амплитуда. Эта амплитуда обращается в нуль, если  $\sin 2\alpha = 0$  или  $\sin(\Delta/2) = 0$ . Нулевой амплитуде соответствует темная точка на экране, помещенном за анализатором.

Рассмотрим причины появления темных точек на экране. Условие  $\sin 2\alpha = 0$  равносильно условию

$$\alpha = k\pi, k = 0, 1, 2 \dots,$$

т.е. совпадение направления поляризации с одним из главных направлений.

Условие  $\sin \frac{\Delta}{2} = 0$  равносильно условию

$$\Delta = 2n\pi, n = 0, 1, 2 \dots \quad (3.19)$$

При  $n = 0$   $\Delta = 0$ , что соответствует равенству главных направлений или точкам изотропности ( $b_1 = b_2$ ). В частности, может быть  $b_1 = b_2 = 0$ .

Темные точки, образующиеся в силу условия  $\sin 2\alpha = 0$ , дают информацию об ориентации главных направлений. Они могут образовывать темные линии, называемые изоклинами. Если они не сливаются в линии, а также для того, чтобы отличить их от темных точек и линий, образующихся при  $\sin \Delta/2 = 0$ , модель можно вращать, фиксируя угол поворота относительно анализа-

тора или поляризатора (устройства, дающего поляризованный луч). Точки, темные в силу условия  $\sin \Delta/2 = 0$ , остаются таковыми независимо от угла поворота. Во всех остальных точках экрана появление и исчезновение темных точек связано с ориентацией главных направлений относительно поляризатора и анализатора, что и позволяет определить эти направления практически во всех точках модели.

Темные точки, возникающие вследствие условия  $\sin \Delta/2 = 0$ , тоже сливаются в полосы, называемые изохромами. Приравнивая разность хода в (3.18) и в (3.19), получим, что (3.19) равносильно условию

$$\frac{h}{\lambda} C(B_1 - B_2) = \frac{2h}{\lambda} CT_{\max} = n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Каждая из изохром соответствует некоторой конкретной разности  $B_1 - B_2$ . Например,  $n=0$  соответствует  $B_1 = B_2$ ,  $n=1 \rightarrow B_1 - B_2$ .

$n=2$  – удвоенному значению этой разности и т.д. Чтобы определить конкретное значение разностей главных напряжений, или, что то же самое, максимальные сдвиговые напряжения  $T_{\max}$ , нужно установить цену и порядок полосы.

Цену полосы можно установить, подвергнув пластинку растяжению. В ненапряженном состоянии пластиинка на экране будет темной. По мере растяжения она будет светиться, затем вновь потемнеет, после чего снова посветлеет и т.д. Первому потемнению соответствует  $n=1$ . В неоднородном поле напряжений при постепенном изменении нагрузок, прилагаемых к модели, полосы перемещаются. Их порядок и цена может быть определена по этим перемещениям.

Существуют возможности моделирования и изучения распределения напряжений на объемных объектах. Одна из них – метод "замораживания", при котором модель изготавливают из двухфазного материала. Одна из фаз играет роль жесткого скелета-каркаса. При нагревании модели ее вторая фаза размягчается и легко поддается деформациям под нагрузкой. Если, не снимая нагрузки, модель охладить, то эта фаза твердеет и консервирует ("замораживает") напряжения и деформации, развившиеся в скелете. Они удерживаются и после снятия нагрузки. Поэтому модель можно распилить на тонкие пластинки (2–4 мм толщиной) и исследовать описанным выше способом.

Простота рассматриваемого метода, высокая экономическая эффективность и достаточная точность описания напряженного состояния модели явились причиной широкого использования моделирования на оптически активных материалах при решении многочисленных задач теории и практики инженерной геологии. Этому обстоятельству в значительной мере способствуют продолжавшееся развитие теоретических основ моделирования, создание новых оптически активных материалов, совершенствование методических приемов и аппаратуры, появление новых направлений метода фотоупругости (динамическая фотоупругость, термоупругость, фотопластичность, фотоползучесть, магнитофотоупругость, радиационная фотоупругость, метод оптически чувствительных покрытий, голограмма, фотоэлектрические измерения, измерения в невидимой части спектра), существенные успехи в разработке схем и установок для автоматизации поляризационно-оптических измерений с кодированием полученных данных для дальнейшей расшифровки и обработки с применением ЭВИ.

Одним из многочисленных примеров использования моделей из оптически активных материалов в инженерной геологии являются исследования, выполненные МГУ по изучению напряженного состояния оползневых склонов р. Оки [13], где оползни широко развиты и в 1974 г. произошел новый крупный оползень. В геологическом строении этого участка принимает участие мощная толща пород татарского яруса верхней перми, в которой по общепринятой стратиграфической схеме выделяется пять горизонтов. Верхние три горизонта ("В", "Г", "Д",) сложены преимущественно песками слабосцементированными песчаниками, мергелями и слабосцементированными алевролитами. Ниже располагается резко выделяющийся в разрезе горизонт "Е", представленный глинами в твердой или полутвердой консистенции, с пониженной прочностью и повышенной деформируемостью. В основании разреза (горизонт "F") преобладают алевролиты с прослойями песков, песчаников и гипса.

Оползевые накопления в нижней части склона слагают оползневую ступень мощностью до 16 м.

Исследование напряженного состояния склона проводилось на плоских моделях в масштабе 1:250 – 1:300. Модели готовились из игдамтина и имитировали неоднородное строение склона.

Результаты исследований представлены на рис. 3 [13] в виде изолиний максимальных касательных напряжений ( $10^5$  Па). Там же показаны модули деформации моделей.

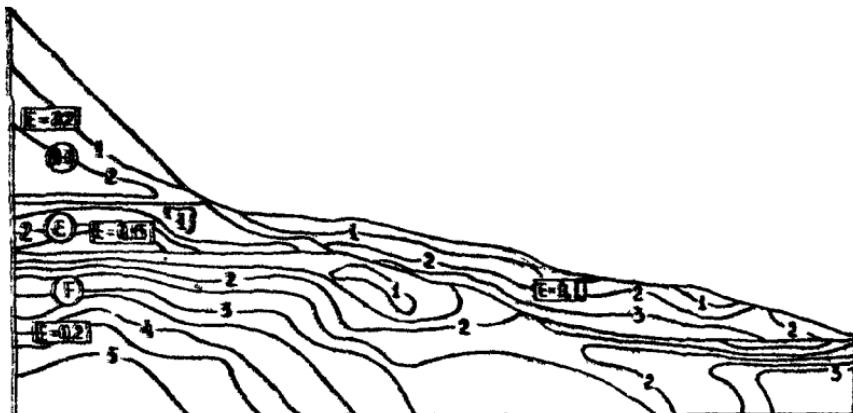


Рис. 3

Анализ рис. 3 позволяет отметить концентрацию высоких напряжений ( $0 \cdot 10^5$  Па) в линзах части толщи столовых выкличий, что свидетельствует о состоянии пород, близком к предельному. Полученные данные хорошо согласуются с результатами натурных экспериментов и позволяют разработать мероприятия по стабилизации опасенного склона.

### 3.5. Фильтрационный якорь

Инженерно-геологические условия в значительной мере определяются такими факторами, как влажность грунтов, положение уровня грунтовых вод, скорости фильтрации и т.п. Поэтому не-редко возникает задача моделирования фильтрации подземных вод, которую можно решить с помощью фильтрационных якорей [14].

Фильтрационный якорь – это контейнер с одной прозрачной стенкой. Он заполняется пористым материалом, чаще всего кварцевыми песками, снабжаются устройствами для моделирования гра-

пирных условий потока (интенсивность инфильтрации, уровень грунтовых вод в верхнем бьефе плотины, каналах, дренах и т.д.) и измерения напоров и расходов. При подземных дренажах известно, что позволяет через прозрачную стенку наблюдать линии тока и другие особенности фильтрационного потока.

Рассмотрим физическое моделирование режима уровня грунтовых вод при работе закрытого систематического дrenaля. Помимо, что однородный в горизонтальной плоскости объект имеет сеть дрен, одинаково отстоящих друг от друга, заметим, что можно ограничиться изучением режима между любыми смежными дренами. Уровень грунтовых вод будем рассматривать как функцию расстояния  $x$  от одного из дрен и времени  $t$ :

$$H(x,t) = f(x,t, K, \mu, h, B, d, w, h_0), \quad (3.20)$$

где  $K$  — коэффициент фильтрации;  $\mu$  — водоотдача;  $h$  — глубина залегания водоупора;  $B$  — расстояние между дренами;  $d$  — диаметр дрен;  $h_0$  — глубина залегания дрен к начальному уровню грунтовых вод;  $w$  — инфильтрация.

Влияние размерности величин в (3.20) величины, учитывая, что  $\mu$  — безразмерна:

$$[H] = [x] = [h] = [B] = [d] = [h_0] = L; [w] = [w] = LT^{-1}; [t] = T.$$

Выберем в качестве основных (безразмерных) по размерности величины  $B$  и  $K$ . Безразмерные компоненты найдем из выражения

$$\frac{H(x,t)}{B^2 K^2} = f\left(L, \frac{x}{B^2 K^2}, \frac{t}{B^2 K^2}, \frac{h}{B^2 K^2}, \frac{d}{B^2 K^2}, \frac{w}{B^2 K^2}, \frac{h_0}{B^2 K^2}\right), \quad (3.21)$$

из которого следует, что

$$U = U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = 0; \quad Z = Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_4 = 1; \quad Z_5 = 0; \quad U_5 = 1$$

Для определения  $Z_6 = U_6$  записем уравнение размерностей:

$$T = L^2 (LT^{-1})^2,$$

равносильное системе

$$\begin{cases} 0 = Z_6 + U_6 \\ 1 = -U_6 \end{cases}.$$

Отсюда  $U_6 = -1$ ,  $Z_6 = 1$  — в выражении (3.21) принимают вид

$$\frac{H}{R} = f(t, l, \frac{x}{B}, \frac{t_k}{B}, \mu, \frac{h}{B}, \frac{d}{B}, \frac{w}{K}, \frac{h_0}{B})$$

или

$$P_0 = \{ (l, l, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7) \}$$

Легко видеть, что параметры  $P_0, P_1, P_4, P_5, P_7$  выражают все размеры и уровни в долях междуренного расстояния  $B$ . Они должны быть у модели такими же, как у моделируемого объекта, что означает подобное геометрическое подобие модели и объекта. Геометрический масштаб задается отношением

$$\alpha_t = \frac{B_t}{B},$$

где индексы "0" и "M" относятся к объекту и модели, соответственно. Отметим особо, что масштаб уровней

$$\alpha_h = \alpha_t. \quad (3.22)$$

Параметр  $P_2$  определяет масштаб времени. Для объекта и модели должно иметь место равенство

$$\frac{t^0 K^0}{B^0} = \frac{t^M K^M}{B^M},$$

откуда следует, что

$$\alpha_t = \frac{\alpha_t}{\alpha_K}, \quad (3.23)$$

где  $\alpha_t = t^0/t^M$  – масштаб времени, а  $\alpha_K = K^0/K^M$  – масштаб коэффициентов фильтрации. Отметим, что поскольку  $\mu$  – безразмерна, то  $\mu^0 = \mu^M$  или  $\alpha_\mu = 1$ . Кроме того, из  $P_6$  сразу следует, что

$$\alpha_w = \alpha_K \quad (3.24)$$

Значение уровня на объекте в любой точке  $X^0$  и в любой момент  $t^0$  можно получить простым пересчетом:

$$H^0(X^0, t^0) = \alpha_h H^M(X^M, t^M),$$

где  $X^M = X^0/\alpha_t$  и  $t^M = t^0/\alpha_t$ , а  $H^M$  – непосредственно наблюдается на модели.

Важно отметить, что произвольно могут быть назначены лишь два масштаба. Принято назначать геометрический и фильтрационный масштабы. Первый выбирается, исходя из действительных междуренных расстояний и размеров лотка. Второй определяется значением

коэффициента фильтрации, который удается получить из материала фильтрационного лотка. Остальные масштабы определяются по формулам (3.22), (3.23) и (3.24).

Если бы, кроме режима уровней, требовалось определять скорости фильтрационного потока  $Q$ , можно было бы для них также записать уравнение, аналогичное выражению (3.20). Однако из самой радиальности  $Q$  сразу следует, что  $\alpha_q = \alpha_k$ . Для определения расхода  $Q$  масштабный множитель  $\alpha_q$  можно получить, воспользовавшись законом Дарси, учитывая, что участки в нем величины относятся к соответственным точкам и моментам времени. Действительно, для объекта и модели

$$Q^* = K^* \omega^* \frac{\Delta H^*}{\Delta t^*}, \quad Q^M = K^M \omega^M \frac{\Delta H^M}{\Delta t^M},$$

где  $\omega$  — сечение, для которого подсчитывается расход  $Q$ .

Разделив почленно первое из полученных равенств на второе, найдем:

$$\alpha_B = \alpha_K \alpha_t^2.$$

поскольку  $[\omega] = L^2$ . Впрочем и этот результат можно было бы вычислить сразу, так как расход через некоторое сечение равен произведению скорости фильтрации на площадь этого сечения.

Моделирование на фильтрационной лотке — достаточно типичный пример физического моделирования, подчеркивающий достоинства и недостатки последнего.

Достоинства очевидны. Они состоят в наглядности, в возможности изучения сложных процессов с ясным математическим описанием (фильтрация многофазных жидкостей, фильтрация при испытании водонасыщенных пор среды, при проявлении фильтрационных деформаций, супфузии и т.д.). Эти достоинства определяют ценность моделирования на фильтрационных лотках, и частности и физического моделирования при изучении сложных процессов вообще.

К недостаткам метода относятся трудоемкость, громоздкость, трудности с получением однородного материала с заданными физическими свойствами, ограничения, накладываемые необходимоностью выдерживать геометрическое подобие. Например, в рассматриваемой задаче моделирование симметрического дренажа, характеризующегося значением  $B^* = 400$  м на лотке с  $B^M = 4$  м

означает, что изменения уровня зерника I и на объекте соответствуют его колебаниям в I си на модели. При этом мы не учли величину кашевирной каймы, высота которой в общем обратно пропорциональна диаметру зерен, слагающих грунт. Для учета ее пришлось бы увеличить размеры зерен песка модели в 10-100 раз, что может отразиться на эластичных свойствах пород и привести к появления участков с величиной (неподдающейся закону Дарси) фильтрации. Таким образом, моделирование не всегда оказывается корректным, а удовлетворение противоречивых требований к модели в ряде случаев невозможно.

Поэтому боковое значение приобретают количественные прогнозы, основанные на использовании результатов натурных наблюдений за движением естественно-геологических явлений и поведением массивов горных пород в процессе строительства и эксплуатации сооружений. Такие прогнозы могут осуществляться методом натурного моделирования.

### 3.6. Натурное моделирование. Теория геологического подобия

Натурное моделирование является одной из интереснейших разновидностей физического моделирования. В качестве модели в нем используется природный объект-аналог, на котором исследуемый процесс и инженерно-геологические условия его протекания детально изучены. Метод в принципе может быть применен к прогнозированию любого инженерно-геологического процесса: осадкам, просадкам, устойчивости склонов, подтоплению, сдвигами земной поверхности и т.д. Здесь рассматриваемый метод демонстрируется на примере прогноза переработки берегов водохранилищ, где его теоретическое обоснование, благодаря работам Л.Б.Розевского [1], наиболее последовательно и закончено.

Объектом прогноза переработки берегов будем считать виражу переработанной части берега  $\delta$ . Предполагается, что величина переработки зависит от энергии волны  $Z$ , действующей на берег, высоты берега  $h$ , объемного веса обвалившихся масс  $\delta$ , прочностных характеристик грунта, слагающего берег, которые обобщаются углом сдвига  $\psi$ . Важное значение должны иметь: угол подводного склона  $i$ , от величины которого зависят во-

тери энергии волны (чем меньше  $\lambda$ , тем большая часть энергии волны гасится на подходе к берегу); извилистость берега  $\zeta$  — отношение расстояния между двумя точками на берегу к длине береговой линии, соединяющей их (извилистость влияет на перераспределение энергии волны) и, наконец, коэффициент аккумуляции  $\chi$  — отношение аккумулированного вблизи берега объема размытых пород к их общему объему (чем больше это отношение, тем более затруднен размыв).

Представим перечисленные факторы в виде следующей зависимости:

$$\ell = f(h, \vartheta, \chi, \Psi, i, j, z). \quad (3.25)$$

Выпишем размерности входящих в (3.25) величин, учитывая, что  $\Psi, i, j$  и  $z$  безразмерны:

$$[\ell] = [h] = [L]; [\vartheta] = ML^2 T^{-2}; [\chi] = ML^2 T^{-2}.$$

В качестве основных (независимых по размерностям) величин выберем высоту берега  $h$  и объемный вес  $\vartheta$ . Тогда зависимость (3.25) можно переписать в виде

$$\frac{\ell}{h^2 \vartheta^4} = f(1, 1, \frac{3}{h^2 \vartheta^3}, \Psi, i, j, z), \quad (3.26)$$

в которой безразмерные  $\Psi, i, j$  и  $z$  являются симплексами, а показатели  $X_1, X_2$  и  $X_3$  нужно подобрать так, чтобы безразмерными оказались два оставшихся комплекса.

Нетрудно заметить, что в левой части равенства (3.26)  $X_1 = 1$  и  $X_2 = 0$ . Для определения  $X_3$  и  $X_4$  напишем уравнение размерностей соответствующего комплекса:

$$ML^2 T^{-2} = L^4 (ML^2 T^{-2})^{\frac{1}{4}}$$

которое порождает систему

$$\left. \begin{array}{l} 1 = X_1 \\ 2 = X_2 - 2X_3 \\ -2 = -2X_4 \end{array} \right\} \quad (3.27)$$

Первое и третье уравнения системы (3.27) дают  $X_4 = 1$ , а в результате подстановки этого значения во второе уравнение получим  $X_2 = 4$ .

Таким образом, зависимость (3.26) приводится к виду

$$\Pi_0 = \{I, I, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi\}. \quad (3.28)$$

В равенстве (3.28)

$$\Pi_0 = \frac{\ell}{h},$$

$$\Pi_1 = \frac{3}{h^4 g}, \quad \Pi_2 = \Psi; \quad \Pi_3 = I; \quad \Pi_4 = j; \quad \Pi = Z, \quad (3.29)$$

где  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$  и  $\Pi$  - соответственно критерии геодинамического, гидрологического, геометрического ( $\Pi_3$  и  $\Pi_4$ ) подобия и критерий подобия аккумулятивных процессов.

Если у каких-либо двух объектов перечисленные критерии подобия одинаковы, то одинаковыми являются также комплексы  $\Pi_0$ . Назовем один из этих объектов, на котором имеются режимные наблюдения за переработкой берега, объектом-аналогом и пометим все относящиеся к нему величины индексом "a". Равенство критериев подобия у изучаемого объекта и аналога означает выполнение следующих равенств:

$$\frac{3}{h^4 g} = \frac{3^a}{h^{4a} g^a}; \quad \Psi = \Psi^a; \quad I = I^a; \quad j = j^a; \quad Z = Z^a, \quad (3.30)$$

а также

$$\frac{\ell}{h} = \frac{\ell^a}{h^a}, \quad (3.31)$$

откуда следует формула

$$\ell = \ell^a \frac{h}{h^a}, \quad (3.32)$$

позволяющая прогнозировать переработку исследуемого участка берега проектируемого водохранилища по известной переработке аналога.

Равенства (3.30)-(3.32) полностью определяют методику натурного моделирования: необходимо иметь множество объектов-аналогов, по каждому из которых имеются значения соответствующих ему критериев подобия (3.29) и данные по фактической переработке берега. Для исследуемого объекта вычисляются значения тех же критериев и среди множества аналогов подыскивается такой из них, на котором критерии подобия равны по величине критериям исследуемого объекта. Прогноз переработки берега последнего проводится по формуле (3.32) с использованием

данных по выбранному аналогу.

Сведения об аналогах могут быть представлены в виде альбомов, например, [15], или набора перфокарт. Такие альбомы или перфокарты содержат данные о составе и физико-механических свойствах пород, инженерно-геологическую карту аналога и разрезы к ней, значения параметров, входящих в критерии подобия, значения самих критериев, сведения об истории аналога и динамике развития отмели, кривые обеспеченности размыва берега на различные сроки экологизации водохранилища и иную необходимую информацию. При наличии большого количества перфокарт выбор требуемого аналога может осуществляться с помощью ЭВМ.

Опыт прогноза переработки берегов водохранилищ на основе натурного моделирования показал практическую приемлемость рассматриваемого метода [16].

Кроме критериев подобия (3.29), в инженерно-геодинамической практике известны критерии, используемые для прогноза иных инженерно-геологических процессов. Так, М.С.Захаров [17] получил шесть критериев подобия для прогноза осадок и деформации здания и сооружений:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{E_0}{H_{cx}\delta}; \quad \Pi_2 = \frac{B}{H_{cx}}; \quad \Pi_3 = GC; \quad K_4 = W; \quad K_5 = \frac{C_0}{H_{cx}\delta}; \\ K_6 &= \frac{H_{ob8}}{H_{cx}}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

где  $E_0$  - модуль общей деформации;  $H_{cx}$  - мощность сжимаемой толщи;  $\delta$  - объемный вес пород;  $B$  - ширина фундамента;  $GC$  - показатель гравиметрического состава (отношение содержаний песчаной и глинистой фракций);  $W$  - влажность;  $C_0$  - показатель связности (отношение удельного сцепления к коэффициенту внутреннего трения пород);  $H_{ob8}$  - мощность обводненных пород.

Критерии (3.33) отражают, соответственно, подобие напряженного состояния, геометрических размеров сжимаемой толщи, состава, состояния, прочности пород и условий залегания подземных вод. В случае равенства значений перечисленных критериев аналога и объекта, прогнозируемая осадка последнего

$$S = S^a \frac{H_{cx}}{H_{ob8}},$$

где  $S^a$  - осадка фундамента аналога, полученная по результатам инструментальных наблюдений.

Для прогноза просадки лессовой толщи А.А.Мустафаев [18] получил четыре критерия подобия.

Существуют критерии подобия для прогноза оползней [19], карстовых процессов, устойчивости откосов, скорости и расхода селевых потоков и других физико-геологических явлений.

Приведенные примеры свидетельствуют о широких возможностях использования натурного моделирования при решении сложных инженерно-геологических задач, для которых еще не разработаны математические модели.

Наряду с этим, характеризуемый метод имеет ряд недостатков. Прежде всего, метод настолько точен, настолько в нем учитываются все факторы, влияющие на прогнозируемый процесс. Отсутствие какого-либо существенного фактора в уравнении (2.6) может полностью обесценить прогноз. Кроме того, необходим набор аналогов - достаточно полны для того, чтобы покрыть всю область возможных величин критериев подобия. Очевидно, что в полной мере задача сбора такого количества аналогов неразрешима. Поэтому необходимо избегать включения в (2.6) таких факторов, которые незначительно влияют на исследуемый процесс или их влияние подавляется более мощными факторами.

К серьезным недостаткам рассматриваемого метода относится то обстоятельство, что в равенстве (3.25) величины предполагаются постоянными. В действительности они варьируют, а сам метод не содержит указаний на то, какими статистическими характеристиками следует обобщать поля их значений.

Перечисленные недостатки натурного моделирования заставляют требовать не полной аналогии, а приближенной, причем само понятие приближенной аналогии вносит значительный произвол в выбор аналога. Чтобы этот произвол уменьшить, аналоговое моделирование инженерно-геологических процессов выполняется в соответствии с положениями теории геологического подобия.

Теория геологического подобия, разработанная Л.Е.Розовским [20], является результатом диалектического взаимопроникновения традиционных геологических методов изучения инженерно-геологических процессов и строгих количественных форм

физического моделирования, представляет собой качественно новую ступень развития известных способов прогноза [22], широко использующих аналогии изучаемых объектов, и позволяет преодолеть трудности в выявлении подобия одолжных многофакторных динамических систем, к которым принадлежат естественно-геологические явления.

Геологическое подобие, в отличие от физического, не может быть полным, т.к. геологические процессы и явления представляют собой результат качественно новой формы движения материи – геологической. В этой форме сочетается широкий комплекс механических, тепловых, химических, физико-химических, биологических и иных процессов. В связи с этим, подобие физико-геологических процессов может быть лишь приближенным. Причиной тому является также то обстоятельство, что большинство геологических процессов (седиментация, диагенез, гипергenez, абразия, эрозия и т.п.) происходит на больших площадях и в течение длительного времени, несопоставимо по продолжительности с быстротекущими физическими процессами. Это определяет важные особенности геологических образований – наличие неоднородности и анизотропии горных пород различных порядков [21], а отсюда – измеччивости и арткоррелированности свойств разных уровней [22]. Эти особенности, образно сформулированные Л.Б.Розовским, как "неоднородность в точке и однородность в целом", являющиеся следствием происхождения геологических объектов, их состава, возраста, истории геологического развития и современных физико-геологических условий существования, приводят к некоторым фиксированным (в конкретный момент времени) закономерностям распределения свойств пород в пространстве и к определенным взаимосвязям между показателями свойств, что, в свою очередь, сказывается на поведении объектов под влиянием внешних факторов. Однако упомянутые особенности сложно выразить в количественной форме, в связи с чем неминимыми условиями геологического подобия изучаемых процессов является сходство атрибутивных (качественных) признаков. К последним относятся: геологическая обстановка, структурно-тектонические особенности, гидрогеологические условия и иные перечисленные выше качественные характеристики, конкретные особенности которых формулируются в соответствии с принятыми в инженерной геологии классификациями и вносятся в альбомы аналогов.

и перфокарты. В некоторых случаях в качественной форме могут быть выражены такие начальные, а иногда и граничные условия. Те и другие вместе с рассмотренными выше атрибутивными характеристиками и некоторыми критериями подобия представляют собой так называемые "условия однозначности", т.е. комплекс условий, при соблюдении которых представляется возможным выделить из целого класса явлений какое-либо единичное явление (единичное следствие комплекса причин).

Сложность и многообразие процессов, определяющих прогнозируемый результат взаимодействия инженерного сооружения и геологической среды (в общем насчитывается около 80 процессов, из которых лишь небольшая часть может в конкретных условиях повлиять на устойчивость сооружения); наличие большого числа (в общем более 150) естественных факторов, в той или иной мере влияющих на упомянутые процессы; многосторонние взаимосвязи внутри набора факторов, между факторами и процессами, динамикой процессов и поведением массивов горных пород при строительстве и эксплуатации сооружений, а также некоторые иные черты изучаемых объектов определили вторую важную особенность положений теории геологического подобия: необходимость выделения и использования обобщенных характеристик и "представляющих показателей", изменение которых отражает изменение рассматриваемого свойства (признака, процесса) или группы свойств с учетом взаимосвязей внутри рассматриваемой группы. Так, представляющим показателем величины размыва береговой водохранилищ в (3.25) является ширина отмели  $\delta$ .

Она же - представляющий показатель потери волновой энергии и трансформации волны из отмели. Энергия волнения и прибойного потока  $\mathcal{E}$ , действующую на берег, трудно измерить, поэтому в качестве предстаивающего показателя величины  $\mathcal{E}$  в (3.25) нередко используется энергия волны на внешнем крае отмели  $\mathcal{E}_o$ . В качестве количественного показателя ландшафтого состава пород и связанных с ними прочностных свойств используется угол сдвига  $\Psi$  ( $tg \Psi = tg \Phi + C/h \delta$ ), представляющий показателем профия склона является его уклон  $i$  и т.д.

Выделение обобщенных и представляющих показателей выполняется на основе логического (понятийного, концептуального) моделирования, которое обычно предваряет все виды, способы и

методы прогнозов. Сущность такого моделирования хорошо известна и заключается в построении мыслевой либо графической схемы взаимодействия проектируемого сооружения и геологической среды с учетом имеющихся теоретических представлений опыта изучения рассматриваемого процесса, интуиции исследователя. Построение таких моделей позволяет решить важнейшую задачу иатуркого моделирования – выбрать наиболее существенные факторы и условия, определяющие прогнозируемый процесс и не связанные с результатом действия процесса согласованными изменениями (так называемые моноварианты).

Показатели, представляющие моноварианты, не входят в уравнение (3.25) и критерии подобия, несмотря на то, что они могут участвовать в прогнозируемом процессе. В этом проявляется избирательный характер геологического подобия, а отсюда – качественное отличие критериев подобия инженерно-геологических процессов от критериев в формулировках теории физического подобия. Это позволило Л.Б.Розовскому рекомендовать соответствующий термин "критерий геологического подобия" вместо термина "критерий подобия", а с учетом рассмотренных выше иных особенностей геологического подобия сформулировать три теоремы последнего, важнейшей из которых является следующая.

"Чтобы геологические процессы, явления и образования были подобны, необходимо и достаточно, чтобы они были качественно одинаковы, характеризовались одними и теми же критериями подобия и имели бы общие условия однозначности" [20].

## ГЛАВА 4

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

#### 4.1. Общие положения

Математическим будем называть моделирование, при котором учитывается математическая модель изучаемого процесса, т.е. конкретная математическая форма взаимосвязи участвующих в нем факторов.

Иными словами, математическое моделирование существенным образом опирается на конкретные дифференциальные, интегральные, алгебраические и т.п. уравнения, описывающие моделируемый процесс. Математическая модель содержит значительно больше информации, чем зависимости вида (2.1), лежащие в основе физического моделирования и являющиеся по-существу спецификацией факторов, обуславливающих изучаемый процесс. Использование этой дополнительной информации должно расширить возможности моделирования.

Чтобы убедиться в этом, сопоставим физическое и математическое моделирование одного и того же процесса — подпора вблизи водохранилища после его заполнения — на фильтрационном дотке. Результат решения задачи является важным фактором оценки инженерно-геологических условий подтопляемой территории.

В простейшей постановке будем полагать, что подпор  $H = H(x,t)$  развивается в горизонтальном водоносном горизонте со скоростью  $v_t$ , постоянным коэффициентом фильтрации  $K$  и недостатком водонасыщения  $\mu$ . Он охватывает территорию до соседней дотки с постоянным водотоком, являющимся границей с постоянным уровнем  $H_0$ . Долина отходит от водохранилища на расстоянии  $B$ . Уровень воды в водохранилище поднялся от начального  $H_{0W}$  до конечного  $H_{eW}$  причем этот процесс развивается во времени так, что  $H_r = H(0,t)$  — известная функция (режим наполнения).

При достаточно большой мощности водоносного горизонта  $H$ , по сравнению с максимальным изменением его уровня  $H_{\text{ок}} - H_{\text{он}}$ , развитие подпора описывается дифференциальным уравнением

$$Km \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} = \mu \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (4.1)$$

где  $Km$  — водопроницаемость;  $X$  и  $t$  — соответственно пространственная и временная координата точки, в которой определяется подпор  $H = H(X, t)$ . Для того, чтобы найти эту неизвестную функцию  $H(X, t)$ , необходимо решить уравнение (4.1) при заданных начальных и граничных условиях. Граничные условия задаются изменением двух уровней: уровня водохранилища, т.е. функцией  $H_r = H(0, t)$  и уровня в точке  $X = B$ , где  $H_B(B, t) = \text{const}$  (уровень остается неизменным). Начальные условия в описанной ситуации задаются значениями уровней  $H_{\text{он}} = H(0, 0)$  и  $H_B = H(B, 0)$ . При принятых допущениях начальные уровни линейно изменяются вдоль направления  $X$  от величины  $H_{\text{он}}$  до величины  $H_B$ . В дальнейшем за точку отсчета уровня примем величину  $H_B$ . Это означает, что все уровни уменьшаются на величину  $H_B$ , а уровень в точке  $X_B$  полагается равным нулю. Такая замена изображается на виде и решении уравнения (4.1).

Рассмотрим вначале постановку этой задачи как задачи физического моделирования. Будем вместо уравнения (4.1) оперировать на зависимость общего вида:

$$H(X, t) = f(X, t, Km, \mu, B, H_r), \quad (4.2)$$

где  $H_r = H(0, t)$  — граничное условие, т.е. известный режим заполнения водохранилища. Величина  $H_B$  не вошла в число параметров, определяющих зависимость (4.2), поскольку принято, что  $H_B = 0$ .

Выполним размерности величин, входящих в зависимость (4.2), учитывая, что недостаток водонасыщения  $\mu$  безразмерен:

$$[H] = [X] = [B] = [H_r] = L; [t] = T; Km = L^2 T^{-1}.$$

В качестве основных (независимых) по размерностям величин выберем  $B$  и  $Km$ . Нетрудно проверить, что тогда зависимость (4.2) приводится к виду

$$\Pi_0 = f(1, 1, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4), \quad (4.3)$$

где  $\Pi_0 = H/B$ ;  $\Pi_1 = X/B$ ;  $\Pi_2 = \frac{t_{km}}{B^2}$ ;  $\Pi_3 = \mu$ ;  $\Pi_4 = H_r/B$ .

При физическом моделировании необходимо, чтобы для объекта и модели выполнялись равенства:

$$\Pi_0^* = \Pi_1^*; \quad \Pi_2^* = \Pi_3^*; \quad \Pi_3^* = \Pi_4^*; \quad \Pi_4^* = \Pi_0^*.$$

Это гарантирует равенство  $\Pi_0^* = \Pi_4^*$ , позволяющее по наблюдениям за развитием подпора на модели прогнозировать его развитие на объекте по формуле

$$H^*(X^*; t^*) = H^*(X^*, t^*) \frac{B^*}{B}, \quad (4.4)$$

где

$$X^* = X^* \frac{B^*}{B}, \quad t^* = t^* \cdot \frac{Km^*}{Km} \left( \frac{B^*}{B} \right)^2.$$

Не вдаваясь в подробности, отметим, что отношение  $\alpha = B^*/B$  задает линейный масштаб и, как следует из формулы (4.4), масштаб уровней  $\alpha_H = \alpha_X$ . Это возвращает нас к трудностям, отмеченным в п. 3.4. В частности, при ограниченных размерах фильтрационных лотков ограничены и возможности выбора линейного масштаба. Часто он оказывается настолько малым, что изменения уровня на объекте в метры соответствуют изменения уровня на модели в сантиметры и даже миллиметры. Учитывая точность измерения уровней и влияние таких неучитываемых явлений как халиногенность, приходится либо смириться с низкой точностью моделирования, либо вовсе от него отказаться.

Однако моделирование рассматриваемого процесса на фильтрационном лотке можно поставить как математическое, воспользовавшись тем, что уравнение (4.1) определяет вполне конкретную математическую модель развития подпора. Введем, как это рекомендовано в п. 2.2, характерные величины  $X_0$ ,  $t_0$  и  $H_0$ , что позволяет привести уравнение (4.1) к безразмерному виду. Удобно в качестве  $t_0$  взять весь период прогноза,  $X_0$  — положить равным

В и  $H_0 = H_r(0, t_0) - H_r(0, 0)$ , т.е. в качестве характерной величины подпора принять изменение уровня в водохранилище за весь период прогноза. В этом случае уравнение (4.1) преобразуется вначале в уравнение

$$\frac{Km H_0}{B^2} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial \bar{X}^2} = \frac{\mu H_0}{t_0} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{t}},$$

взамен - в равенство

$$\frac{\partial^i \bar{H}}{\partial \bar{x}^i} = \Pi \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{t}}, \quad (4.5)$$

где  $\bar{X} = X/B$  - относительное расстояние;  $\bar{t} = t/t_0$  - относительное время;  $\bar{H}$  - относительный уровень (все величины безразмерные);  $\Pi = \frac{\mu B^2}{k m t_0}$  - безразмерный критерий подобия.

Технология математического моделирования развития подпора на фильтрационном лотке мало отличается от физического: в соответствии с выбранными масштабом водопроводческого  $\alpha_{km}$  и линейным масштабом  $\alpha_t$  строится модель объекта (напомним, что  $\alpha_\mu=1$ ). Затем задается начальное распределение уровней, после чего моделируемый уровень в сдохранилища изменяют в соответствии с заданным режимом заполнения последнего:  $\bar{H}_r = H_r/H_0$ . При этом соблюдается равенство относительных времен, т.е.  $\bar{t}^m = \bar{t}^e$  (легко заметить, что масштаб времени  $\alpha_t = t^e/t^m$  не может вынуждаться произвольно, а определяется соотношением  $\alpha_t = \alpha_e^2/\alpha_{km}$ ). В результате этого относительные уровни, точнее прращения уровней к начальному их распределению, задаются формулой

$$\bar{H}^m(\bar{X}, \bar{t}^m) = \bar{H}^e(\bar{X}, \bar{t}^e),$$

причем  $\bar{X}^e = \bar{X}^m$  и  $\bar{t}^e = \bar{t}^m$ .

Единственное, но весьма существенное различие между физическим и математическим моделированием рассматриваемой задачи заключается в том, что выражение (4.5), являющееся основой математического моделирования, ни прямо, ни косвенно не содержит характерного уровня  $H_0$ . Это означает, что масштаб уровней  $\alpha_h$  можно выбирать произвольно, вне связи с другими масштабами  $\pi$ , в частности, вне связи с линейным масштабом, что создавало наименее значительные трудности при физическом моделировании. При математическом моделировании масштаб  $\alpha_h$  может быть настолько малым, насколько допускают вертикальные, а не горизонтальные размеры лотка.

Возможность получения преимуществ такого рода (а она определяется структурой математической модели исследуемого процесса) заставляет всегда, когда математическая модель известна,

отдавать предпочтение постановке задачи моделирования именно в форме математического. Но отмеченной возможность не исчерпывается все сравнительные достоинства математического с моделирования. Бажнейшие из них вытекают из аналогии математических представлений многих физических явлений различной природы. Примером тому является упоминавшаяся аналогия законов Дарси и Ома, выражаящихся в безразмерном виде формулой (2.28), и закона Фурье. Уравнение Лапласа описывает не только установившуюся фильтрацию подземных вод, но также поле силы тяжести, геомагнитные поля, стационарное электрическое поле, а в ряде случаев — распределение напряжений в массивах горных пород. Уравнение теплопроводности "работает" не только при описание процессов тепловой природы, но и нестационарной фильтрации, консолидации осадок и ряда иных процессов.

Именно математическая аналогия различных процессов лежит в основе преимущества математического моделирования и позволяет воопредить исследуемые явления на моделях совершенно иной физической природы. Например, фильтрация подземных вод и многие гидрогеологические процессы обычно моделируются на электрических моделях, где фильтрационные свойства имитируются сопротивлениями и ёмкостями. Построение моделей из этих элементов быстрее и проще, чем, например, их построение из материалов, применяемых в фильтрационных лотках. Особенно очевидно это преимущество вырисовывается при необходимости моделировать неоднородности сложной конфигурации с заданными контрастами свойств. Скорость электрических процессов также регулируется значительно легче и может быть назначена практике сколь угодно высокой, что значительно сокращает время моделирования. Наконец, точность измеренияй разностей потенциалов и сил тока намного превосходит точность измерения уровня и расходов. Эти обстоятельства позволяют пользоваться более компактными моделями и снимают многие трудности при подборе масштабов.

Конкретные формы, которые может принимать математическое моделирование, весьма разнообразны. Достаточно отметить упоминавшееся использование фильтрационного лотка в качестве инструмента как физического, так и математического моделирования. В одном из следующих разделов будет приведен пример постановки натурного моделирования в форме математического. Типичны

примером последнего при реализации на модели той же физической природы, которой обладает исследуемый процесс, является хорошо известное, но используемое крайне редко, моделирование фильтрации на гидроинтеграторах.

В настоящее время математическое моделирование чаще всего реализуется на сплошных или сеточных электрических моделях. Все более широкое распространение получают статистические и имитационные методы математического моделирования.

Наконец, к математическому моделированию следует отнести вообще любое исследование объекта математическими методами. Чаще всего оно реализуется в численных (приближенных) оценках различных реакций объекта на те или иные возмущения.

#### 4.2. Сплошные модели

Моделирование на сплошных электрических моделях широка используется в гидрогеологии, где оно называется методом электрогидродинамических аналогий (ЭГДА) и достаточно подробно описано во многих работах [14, 23, 24]. Здесь мы ограничимся рассмотрением особенностей его использования для изучения плоского напряженного состояния горных пород.

В однородном грунтовом массиве, на который из объемных сил действует только сила тяжести, плоское напряженное состояние описывается системой уравнений [25]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (4.6)$$

где  $f$  - объемный вес;  $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$  - составляющие тензора напряжений в системе координат  $XOZ$ .

Для решения системы (4.6) необходимо, но недостаточно иметь данные о граничных условиях, т.е. нагрузках или напряжениях, действующих на границах исследуемого массива. Недостаточно потому, что распределение напряжений задано тремя функциями:  $\sigma_x = \sigma_x(x, z)$ ,  $\sigma_z = \sigma_z(x, z)$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{xz}(x, z)$ , а уравнений для их определения только два.

Третье уравнение, замыкающее систему (4.6), находят из условия сплошности, связывающего между собой компоненты тензора

деформации:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}, \quad (4.7)$$

и закона Гука, который связывает деформации с напряжениями:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_z); \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu \sigma_x); \quad \gamma_{xz} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xz}, \quad (4.8)$$

где  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_z$  – относительные удлинения по осям  $X$  и  $Z$ ;  $\gamma_{xz}$  – относительная деформация сдвига;  $E$  – модуль упругости;  $\mu$  – коэффициент Пуассона. Подстановка значений  $\varepsilon_x, \varepsilon_z$  и  $\gamma_{xz}$  из (4.8) в уравнение (4.7) и использование соотношений, получаемых дифференцированием первого из уравнений (4.6) по  $X$ , а второго – по  $Z$ , приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_z)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_z)}{\partial Z^2} = 0, \quad (4.9)$$

которое и замыкает систему (4.6).

Введем функцию

$$\theta = \sigma_x + \sigma_z. \quad (4.10)$$

Подстановка (4.10) в (4.9):

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} = 0, \quad (4.11)$$

обращает уравнение (4.9) в широко известное уравнение Лапласа. Это однородное уравнение с одной неизвестной функцией:  $\theta = \theta(X, Z)$ , которое может быть решено по заданным граничным условиям. Оказывается также, что знание  $\theta$  обеспечивает решение системы (4.6). Действительно, подстановка в (4.6) выражений

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{2} Z \left( \frac{\partial \theta}{\partial Z} + \gamma \right), \\ \sigma_z &= \frac{1}{2} \theta - \frac{1}{2} Z \left( \frac{\partial \theta}{\partial Z} + \gamma \right), \\ \tau_{xz} &= -\frac{1}{2} Z \frac{\partial \theta}{\partial X} \end{aligned} \quad (4.12)$$

обращает (4.6) в тождество. Это доказывает, что выражения (4.12) являются решением системы (4.6).

Таким образом, задача определения плоского напряженного состояния сводится к решению уравнения (4.11). Определив из него  $\theta = \theta(X, Z)$ , с помощью выражений (4.12) можно найти норм-

мальные и тангенциальные составляющие напряжений во всех точках грунтового массива. Затем, при необходимости, используя выражения (4.8) можно перейти к деформациям.

Решение уравнения (4.11) при сложных граничных условиях и контурах грунтовых массивов представляет достаточно трудную задачу. Однако эта задача сравнительно легко моделируется стационарным электрическим полем, которое также описывается уравнением Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Z^2} = 0, \quad (4.13)$$

где  $\Pi$  - потенциал электрического поля.

Сходство уравнений (4.11) и (4.13) очевидно. Приведем их к безразмерному виду. Для этого введем характерные размеры  $X_0$ ,  $Z_0$  и потенциалы  $\theta_0$  и  $\Pi_0$ . С их помощью уравнения (4.11) и (4.13) преобразуются к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{X}^2} + \frac{X_0^2}{Z_0^2} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{Z}^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \bar{\Pi}}{\partial \bar{X}^2} + \frac{X_0^2}{Z_0^2} \frac{\partial^2 \bar{\Pi}}{\partial \bar{Z}^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

где  $\bar{\theta}$ ,  $\bar{\Pi}$ ,  $\bar{X}$ ,  $\bar{Z}$  - уже безразмерны и, наряду с безразмерным параметром  $\Pi_1 = X_0^2 / Z_0^2$ , являются критериями подобия.

Из необходимого для моделирования равенства критериев подобия следует:

$$\alpha_l = \frac{X_0}{X_l} = \frac{Z_0}{Z_l},$$

обеспечивающее геометрическое подобие объекта и модели. Остальные равенства ( $\bar{X}^0 = \bar{X}^n$ ,  $\bar{Z}^0 = \bar{Z}^n$ ) дают координаты сходственных точек объекта и модели. Если  $X_0$  и  $Z_0$  соответствуют максимальным размерам объекта и модели, то  $\bar{X}$  и  $\bar{Z}$  представляют собой относительные координаты, изменяющиеся от 0 до 1.

В качестве характерных величин  $\theta_0$  и  $\Pi_0$  удобно выбрать их максимальные значения. У потенциальных полей, т.е. полей, описываемых уравнением Лапласа, они достигаются на границах. А поскольку для моделирования, также как для определения распределения напряжений в натуре, граничные условия должны быть заданы, выбор  $\theta_0$  и  $\Pi_0$  не представляет трудностей.

Однако  $\Theta_0$  и  $U_0$  не входят в уравнения (4.14). Это означает, что в точках  $\bar{X}^0 = \bar{X}^m$  и  $\bar{Z}^0 = \bar{Z}^m$  выполняется равенство  $\bar{\theta} = \bar{U}$ , т.е. относительные значения функций  $\bar{\theta}$  и  $\bar{U}$  одинаковы. Поэтому величина  $\theta$  на объекте находится по формуле

$$\theta = \theta_0 \bar{U}. \quad (4.15)$$

Обычно  $\bar{U}$  измеряют в процентах от максимального значения. Очевидно, что необходимым условием моделирования является соответствие граничных условий на объекте и модели. В данном случае оно означает равенство относительных значений величин  $U$  и  $\theta$  в сходственных точках границы, т.е.

$$\bar{\theta}(\bar{X}_r^0, \bar{Z}_r^0) = \bar{U}(\bar{X}_r^m, \bar{Z}_r^m),$$

где индекс "Г" означает, что рассматриваются точки границы.

Моделирование плоской задачи методом ЭГДА осуществляется на электропроводной бумаге. Из нее в выбранном масштабе вырезается модель объекта, к границам которой прикладываются граничные условия, т.е. электрические потенциалы  $U_r = U(X_r^m, Z_r^m)$ .

Моделирование граничных условий является в этой задаче достаточно сложной процедурой, которую здесь мы рассматривать не будем. Гметим только, что задаваемые потенциалы должны соответствовать значениям  $\theta$  в точках границы ( $X_r, Z_r$ ). Для того, чтобы добиться этого, приходится вместо модели реального склона (пунктир ABCD на рис. 4) выразить горизонтальную

поверхность ОСД ( $Z=0$ ).

На участке СД функция  $\theta$  и задаваемый соответственно ей потенциал  $U$  равны нулю. На участке СВ  $\theta$  линейно возрастает до  $\theta = 2\delta h$ , а соответствующий потенциал — до своего максимального значения 100%, далее  $\theta$  и  $U$  остаются постоянными.

Размеры модели (на

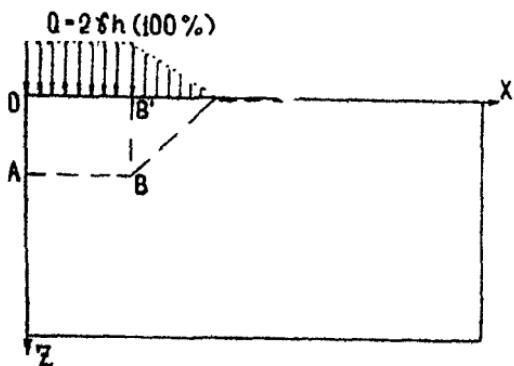


Рис. 4

рис. 4 они показаны сплошной линией) делаются большими, чем моделируемый объект (контур ABCD), по глубине и горизонтали

в 3-5 раз, что позволяет приблизительно обеспечить выполнение граничных условий на бесконечности.

После этого на модели измеряются потенциалы, точнее строятся линии равных потенциалов с шагом в 5-10%. Затем по формуле (4.15) потенциалы пересчитываются в значения  $\Theta$ , а из них по формулам (4.12) определяется распределение напряжений.

В принципе метод ЭГДА достаточно легко распространяется на трехмерный случай с помощью электрических моделей. В них форма объекта моделируется с помощью баков, выполненных из электронепроводящих материалов (пластических масс, смол, парафина). Эти баки заливаются электролитами с необходимыми сопротивлениями. Однако практическое применение электролитических моделей ограничивается сложностью их построения, особенно для неоднородных объектов, а также трудностью формирования граничных условий.

В заключение подчеркнем одно существенное различие между физическим и математическим моделированием. Для физического моделирования совершенно необходимо геометрическое подобие объекта и модели. При математическом моделировании геометрическое подобие может нарушаться. Поэтому правильнее говорить об отображении и соответствии точек объекта и модели.

Рассмотрим, например, плоскую установившуюся фильтрацию в анизотропном водоносном горизонте. Она описывается уравнением

$$T_x \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} + T_y \frac{\partial^2 H}{\partial Y^2} = 0,$$

где  $H = H(X, Y)$  - напор, а  $T_x$  и  $T_y$  - водопроводимости по направлениям  $X$  и  $Y$ . В безразмерном виде

$$\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial \bar{X}^2} + \frac{T_y X_0^2}{T_x Y_0^2} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial \bar{Y}^2} = 0, \quad (4.16)$$

что с точностью до обозначений совпадает с уравнением, описывающим распределение электрических потенциалов в плоской задаче

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{X}^2} + \frac{P_x X_0^2}{P_y Y_0^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{Y}^2} = 0, \quad (4.17)$$

где  $\rho_x$  и  $\rho_y$  - удельные электрические сопротивления модели по направлениям  $X$  и  $Y$ ;  $\bar{U}$ , как и  $\bar{H}$  - безразмерные потенциалы;  $X_0$  и  $Y_0$  - характерные размеры объекта в уравнении (4.16) и модели в уравнении (4.17).

Существуют методы создания анизотропной электропроводящей бумаги для работы методом ЭГДА. Они заключаются в склеивании модели из полосок бумаги разной электрической проводимости. Но в принципе можно потребовать, чтобы  $\rho_x = \rho_y$ , т.е. чтобы модель была изотропна. Это требование немедленно приводит к равенству

$$\frac{T_y X_0^{n^2}}{T_x Y_0^{n^2}} = \frac{X_0^{n^2}}{Y_0^{n^2}},$$

из которого следует, что

$$\frac{X_0^n}{X_0^o} \cdot \frac{Y_0^n}{Y_0^o} = \sqrt{\frac{T_x}{T_y}}$$

или

$$\alpha_x / \alpha_y = \sqrt{\frac{T_x}{T_y}}.$$

Таким образом, в принципе можно моделировать анизотропную среду на изотропной модели. Но при этом приходится вводить разные линейные масштабы по направлениям  $X$  и  $Y$ , нарушая тем самым геометрическое подобие объекта и модели. Это безусловно затрудняет построение модели и работу с ней, поскольку сложнее устанавливать точки на модели, соответствующие точкам объекта иоборот. Кроме того, усложняются все расчеты и определения, связанные с направлениями, если исследуемые направления не совпадают с осями координат, например, определения расходов, притоков и т.д. Поэтому на практике предпочитают сохранять геометрическое подобие, моделируя анизотропию.

#### 4.3. Сеточные модели

Наиболее мощным средством решения задач математической физики, в частности, дифференциальных уравнений, описывающих фильтрацию подземных вод, распределение напряжений в массивах горных пород и ряд других процессов и явлений гео-

логической природы, является численное решение, основанное на конечно-разностных аппроксимациях решаемых уравнений. Аналог этого метода в моделировании - метод сеток - также наиболее мощный, универсальный и технологичный способ моделирования. Обычно он реализуется на электрических моделях с использованием только омических сопротивлений (сетки  $RR$ ) или омических сопротивлений и емкостей (сетки  $RC$ ). Существуют и другие возможности, например, гидроинтеграторы. Здесь метод сеток рассматривается на двух простейших примерах, демонстрирующих два подхода к построению моделей.

Рассмотрим задачу о развитии подпора, обсуждавшуюся в п.4.1, сохранив описанную там постановку. Разобьем интервал  $[0, B]$ , на котором происходит изменение уровня на блоки с центрами в точках  $X_0, X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$ , причем  $X_0 = 0$  и  $X_n = B$ . Длина всех блоков, кроме крайних,  $\Delta X$ , а крайних -  $\frac{\Delta X}{2}$  (рис.5).

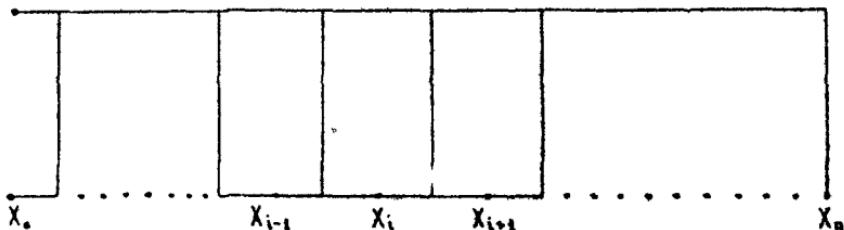


Рис. 5

В каждом блоке с центром в точке  $X_i$  и момент времени  $t_j$  уровень подземных вод имеет значение  $H_{i,j}$ . Предполагается, что он между центрами блоков изменяется линейно. Если мощность водоносного горизонта  $M$ , как оговаривалось в п. 4.1 значительно превышает изменение уровней, то для блока с центром в точке  $X_i$  имеет место очевидное балансовое соотношение:

$$T \Delta Y \frac{H_{i-1,j} - H_{i,j}}{\Delta X} \Delta t + T \Delta Y \frac{H_{i,j} - H_{i+1,j}}{\Delta X} \Delta t = \mu \Delta X \Delta Y (H_{i,j,n} - H_{i,j}), \quad (4.18)$$

где  $T = KM$  - водопроводимость;  $Y$  - коэффициент фильтрации водоносного горизонта;  $\Delta Y$  - ширина блока;  $\mu$  - водоотдача или недостаток водонасыщения;  $\Delta t$  - интервал времени, за который составляется баланс;  $H_{i,j,n}$  - уровень в точке  $X_i$  в момент  $t_{j,n} = t_j + \Delta t$ .

Разделим уравнение (4.18) на  $\Delta X \Delta U_d t$  и приведем его к виду

$$\frac{H_{i-1,j} - H_{i,j}}{F} + \frac{H_{i+1,j} - H_{i,j}}{F} = \frac{H_{i,j+1} - H_{i,j}}{F_t}, \quad (4.19)$$

где

$$F = \frac{\Delta X^2}{T}, \quad F_t = \frac{\Delta t}{\mu}. \quad (4.20)$$

Уравнение (4.19) по своей структуре аналогично закону Кирхгофа, описывающему баланс электрических токов в узле, представленном на рис. 6а:

$$\frac{V_{i-1,j} - V_{i,j}}{R} + \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{R} = \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{R_t}, \quad (4.21)$$

где  $V$  — электрические потенциалы;  $R$  — электрическое сопротивление;  $R_t = \frac{\Delta t}{C}$  — так называемое временное сопротивление ( $C$  — емкость). Поэтому, введя понятие фильтрационного сопротивления  $F$  и временного фильтрационного сопротивления  $F_t$ , блок с центром в точке  $X_i$  можно заменить гидродинамическим узлом, представленным на рис. 6б.

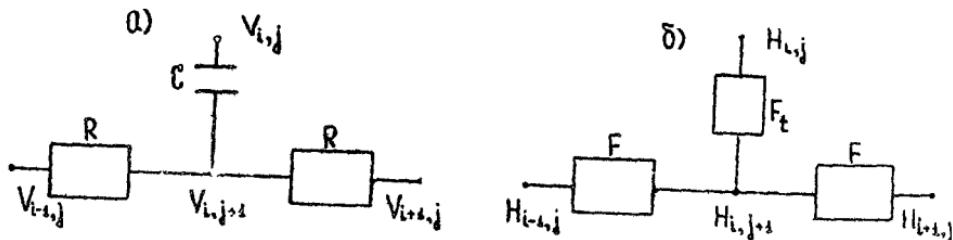


Рис. 6

Эта аналогия дает основную идею моделирования: система блоков заменяется сеткой (в нашем случае цепочкой) из сопротивлений (рис. 7а), после чего эти сопротивления заменяются электрическими (рис. 7б). Подав затем в конденсаторы потенциалы, соответствующие начальным уровням, и изменения граничные потенциалы  $V_{0,j}$  и  $V_{n,j}$  в соответствии с изменениями уров-

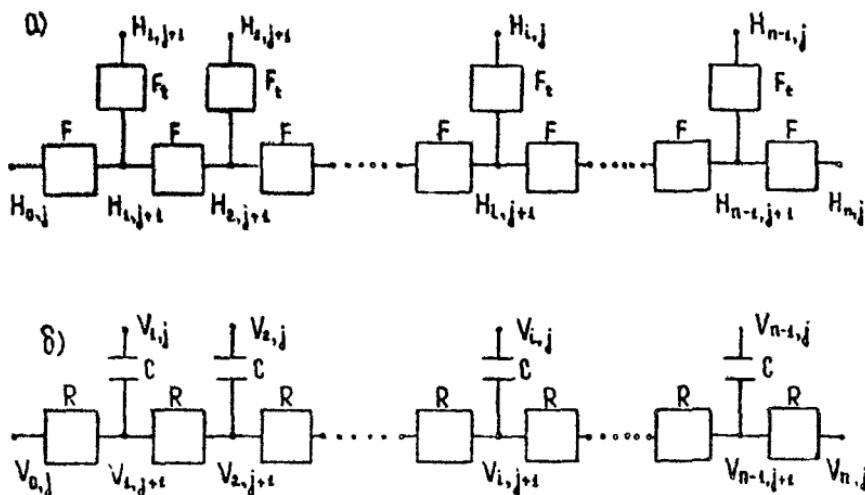


Рис. 7

ней на границе, снимаем в узлах ( $i, j+1$ ) потенциалы, соответствующие уровням на момент  $t_{j+1}$ . Задача, таким образом, сводится к подбору сопротивления  $R$ , емкости  $C$  и выяснению правил перехода от уровней к потенциалам и наоборот.

Решается эта задача приведением уравнений (4.19) и (4.21) к безразмерному виду. Введение характеристических величин  $H_*$  и  $V_*$  позволяет получить следующие безразмерные выражения:

$$\bar{H}_{i,j+1} = \bar{H}_{i,j} + \frac{F}{R} (\bar{H}_{i+1,j} - 2\bar{H}_{i,j} + \bar{H}_{i-1,j});$$

$$\bar{V}_{i,j+1} = \bar{V}_{i,j} + \frac{R}{C} (\bar{V}_{i+1,j} - 2\bar{V}_{i,j} + \bar{V}_{i-1,j}),$$

в которых  $\bar{H}$  и  $\bar{V}$  соответственно относительные уровни и потенциалы. Если  $H_*$  и  $V_*$  — максимальные значения уровней и потенциалов на границах, то  $\bar{H}$  и  $\bar{V}$  изменяются в интервале от 0 до 1 или от 0 до 100%.

Поскольку  $\bar{H}$  и  $\bar{V}$  безразмерны, то для того, чтобы из  $\bar{H}_{i-1,j} = \bar{V}_{i-1,j}$ ,  $\bar{H}_{i,j} = \bar{V}_{i,j}$  и  $\bar{H}_{i+1,j} = \bar{V}_{i+1,j}$  следовало  $\bar{H}_{i,j+1} = \bar{V}_{i,j+1}$ , необходимо выполнение условия

$$\frac{E_t}{F} = \frac{R_t}{R}$$

которое и лежит в основе подбора сопротивлений и емкостей. В частности, из него следует, что масштабы сопротивлений  $\alpha_F$  и временных сопротивлений должны быть одинаковыми:

$$\alpha_F = F/R = \alpha_{F_t} = F_t/R_t. \quad (4.22)$$

Введем масштаб времени  $\alpha_t = \Delta t^*/\Delta t^m$ , равный отношению длительности интервалов на объекте и модели. Тогда, учитывая, что  $F_t = \Delta t/\mu$  и  $R_t = \Delta t/C$ , получим

$$C = \mu \alpha_F / \alpha_t \quad (4.23)$$

или

$$\alpha_C = \alpha_t / \alpha_F.$$

Отметим, что в приведенные соотношения не входит масштаб уровней  $\alpha_H = H_0/U_0$ . Это означает, что он совершенно произволен. Важно лишь, чтобы начальные и граничные условия в соответствующих узлах объекта и модели составляли одинаковые доли от  $H_0$  и  $U_0$ , так что

$$H_{i,j} = H_0 \bar{U}_{i,j}. \quad (4.24)$$

Если объектом прогноза является скорость фильтрации  $q$ , то исходя из закона Дарси и сопоставления уравнений (4.19) и (4.21), находим масштаб для скорости фильтрации

$$\alpha_q = \alpha_H / \alpha_F. \quad (4.25)$$

В выражение (4.25) масштаб уровней входит в явном виде.

Таким образом, масштабные соотношения (4.22), (4.23), (4.25) позволяют по значениям фильтрационных сопротивлений объекта, определяемых по формулам (4.20) найти параметры модели. Переход от результатов, полученных на модели, к результатам на объекте производится по формуле (4.24). Назначение начальных и граничных условий на модели осуществляется по равенству

$$\bar{U}_{i,j} = \bar{H}_{i,j}.$$

Здесь представлен простейший пример. На практике возможны различные его вариации и усложнения. Например, сопротивление  $R_t$  может быть омическим, т.е., можно применять и сетки  $RR$ . Это означает, что процесс на модели уже не развивается непрерывно. Каждый полученный результат должен выставляться как начальные условия для последующего. Инфильтрация и перетекания можно имитировать подачей в узлы модели токов. Задачи могут быть плоскими и даже трехмерными. Увеличение размерности достигается подключением дополнительных сопротивлений. Параметры модели могут изменяться от узла к узлу и т.д.

Описанный выше подход к обоснованию и построению сеточных моделей опирается на простые балансовые соображения, и поэтому именно он чаще всего применяется в гидрогеологии. Но не всегда идеи баланса могут проявляться столь очевидным образом. И тогда лучше обратиться к более формальному, но и более универсальному способу построения сеточных моделей, который непосредственно использует конечно-разностную аппроксимацию соответствующих дифференциальных уравнений.

Рассмотрим задачу одномерной консолидации грунта. Известно, что одномерная консолидация (компрессионное уплотнение) описывается уравнением

$$C_v \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (4.26)$$

где  $P = P(z,t)$  – эффективное давление;  $C_v$  – коэффициент консолидации. Задача состоит в том, чтобы, зная начальное  $P_0 = P(z,0)$  и граничные  $P_{z_0} = P(0,t)$  и  $P_{z_B} = P(B,t)$  условия, где  $B$  – мощность скимаемой толщи, определить развитие эффективного давления по времени и глубине. Возможности получения точного решения задачи (4.26) зависят от вида функций, задающих начальные и граничные условия, и на практике довольно ограничены. Поэтому часто прибегают к численным, конечно-разностным способам решения уравнения (4.26).

А именно, разобьем весь интервал рассматриваемых глубин  $z$  ( $0 \leq z \leq B$ ) на  $M$  равных интервалов, каждый длиной  $\Delta z$ . Промежуток времени, для которого строится прогноз, разобьем на  $N$  равных интервалов длиной  $\Delta t$  каждый. Тогда в системе координат  $(z,t)$  получим сетку, представленную на рис. 8.

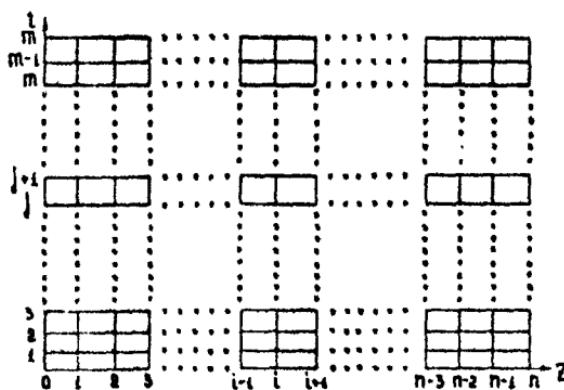


Рис. 8

ошибки интерполяции окажутся вполне допустимыми. Заметим, что значения функции  $P_{i,j}$  для всех  $i$  известны, поскольку они заданы как начальные условия, а в  $P_{0,j}$  и  $P_{n,j}$  — для всех  $j$  как граничные.

Метод, открывается на замену производных конечными разностями. Так первую производную  $\frac{\partial P}{\partial z}$  в районе узла  $(i,j)$  можно представить в виде

$$\frac{\partial P_{i,j}}{\partial z} \approx \frac{P_{i,j} - P_{i-1,j}}{\Delta z} \text{ и } \frac{\partial P_{i,j}}{\partial x} \approx \frac{P_{i+1,j} - P_{i,j}}{\Delta z},$$

причем первую из этих производных следует отнести к средине интервала  $[x_{i-1}, x_i]$ , а вторую — к  $[x_i, x_{i+1}]$ . Аналогичным образом вторую производную получаем из первой:

$$\frac{\partial^2 P_{i,j}}{\partial z^2} \approx \frac{1}{\Delta z} \left( \frac{P_{i+1,j} - P_{i,j}}{\Delta z} - \frac{P_{i,j} - P_{i-1,j}}{\Delta z} \right), \quad (4.27)$$

а также и первую производную по  $t$ :

$$\frac{\partial P_{i,j}}{\partial t} = \frac{P_{i,j+1} - P_{i,j}}{\Delta t}. \quad (4.28)$$

Выражения (4.27) и (4.28) позволяют заменить точное равенство (4.26) приближенным:

$$\frac{P_{i,j+1} - P_{i,j}}{\Delta t} \approx C_v \left( \frac{P_{i+1,j} - P_{i,j}}{\Delta z^2} + \frac{P_{i-1,j} - P_{i,j}}{\Delta z^2} \right), \quad (4.29)$$

Вместо непрерывного решения уравнения (4.26)  $P = P(z, t)$  будем искать значения эффективного давления только в узлах сетки, т.е.

$$P_{i,j} = P(z_i, t_j),$$

полагая, что эта функция в интервалах между узлами изменяется гладко, так что

которое после приведения к виду

$$P_{i,j+1} \approx P_{i,j} + \frac{C_v \Delta t}{\Delta z^2} (P_{i+1,j} - 2P_{i,j} + P_{i-1,j}) \quad (4.30)$$

дает алгоритм вычисления эффективных давлений в узлах сетки. Эта формула показывает, как по трем известным последовательным значениям  $P_{i-1,j}$ ,  $P_{i,j}$  и  $P_{i+1,j}$  во временном ряду  $j$  определить неизвестное значение  $P_{i,j+1}$  в следующем. Поскольку известны все  $P_{i,0}$ , то по формуле (4.30) можно вычислить значения  $P_{i,1}$  для всех  $i$ , исключая крайние значения  $i=0$  и  $i=n$ . Но эти значения  $P_{0,1}$  и  $P_{n,1}$  известны как граничные условия. Поэтому можно перейти к вычислению  $P_{i,2}$  и т.д. до тех пор, пока не будут найдены эффективные давления во всех узлах, т.е. сеточная задача не будет решена.

Описанная здесь так называемая явная схема численного решения уравнения (4.26) не является единственной. Более того, она неустойчива в том смысле, что вполне допустимые ошибки начальных и граничных условий могут приводить к неконтролируемым погрешностям в определении  $P_{i,j}$ . Чтобы этого избежать, нужно специальным образом подбирать шаг по  $z$  ( $\Delta z$ ) и по  $t$  ( $\Delta t$ ). Но методологическая простота этой схемы делает ее удобной для разъяснения как многих идей конечно-разностных методов, так и сеточного моделирования.

Уравнение (4.29) можно переписать в виде

$$\frac{P_{i-1,j} - P_{i,j}}{R_z} + \frac{P_{i+1,j} - P_{i,j}}{R_z} \approx \frac{P_{i,j+1} - P_{i,j}}{R_{pt}},$$

где  $R_z = \Delta z^2$ ,  $R_{pt} = C_v \Delta t$ , в котором оно только обозначениями отличается от уравнений (4.19) и (4.21). Поэтому остается лишь повторить приведенные для них рассуждения, где  $R_z = \Delta z^2$  и  $R_{pt} = C_v \Delta t$ . Это уравнение только обозначениями отличается от уравнений (4.19) и (4.21). Более того, разделив уравнение (4.19) на  $T$ , получим  $F = \Delta X^2$  и  $F_t = \frac{T \Delta t}{\mu}$ . В таком представлении  $R_z$  и по физическому смыслу совпадает с  $F$ . Точно также коэффициент  $T/\mu$  имеет тот же физический смысл, что и  $C_v$ , так что совпадают и сопротивления  $R_{pt}$  и  $F_t$ .

Таким образом, удалось представить задачу к виду, допускающему сеточное моделирование, не обращаясь к балансовым соображениям, а исходя непосредственно из соответствующего дифференциального уравнения.

В заключение отметим, что при сеточном моделировании теряет смысл понятие геометрического подобия объекта и модели. Оно уступает место соответственно блоков объекта и узлов модели.

#### 4.4. Натурное моделирование в форме математического

В п.4.1 был приведен пример, показывавший расширение возможностей фильтрационного лотка, когда моделирование на нем может быть организовано как математическое. Аналогичным образом существование математической модели наблюдаемого в натуре процесса расширяет возможности натурного моделирования. В частности, как показывается в приводимом ниже примере, иногда в качестве аналога для исследуемого объекта удается использовать этот же объект.

Пусть требуется оценить устойчивость оползневого склона после загрузки его бровки. Исследования позволили определить объемный вес грунтового массива, слагающего склон, и цилиндрическую поверхность скольжения  $X = X(Z)$  его последней подвижки. Предположим, наконец, что состояние предельного равновесия массива описывается уравнением Н.Н.Маслова [26]

$$m = \frac{dx}{dz} = \frac{\gamma z}{\gamma z \operatorname{tg} \varphi + c}, \quad (4.31)$$

где  $\varphi$  - угол внутреннего трения;  $c$  - удельное сцепление;  $m$  - заложение откоса.

Для оценки устойчивости склона после его загрузки необходимо знать сдвиговые характеристики грунта:  $\varphi$  и  $c$ . Их можно попытаться определить по форме поверхности скольжения  $X = X(Z)$ .

В соответствии с методом, подробно описанным в работе [27], если поверхность  $X = X(Z)$  соответствует состоянию предельного равновесия, неизвестные  $c$  и  $\operatorname{tg} \varphi$  могут быть определены из системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi (x_1 z_1 - \int_{z_1}^{x_1} x dz) + c x_1 &= \frac{1}{2} \gamma z_1^2, \\ \operatorname{tg} \varphi (x_2 z_2 - \int_{z_2}^{x_2} x dz) + c x_2 &= \frac{1}{2} \gamma z_2^2, \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

в которой  $X$  и  $Z$  - координаты поверхности скольжения.

( $X_1 = X(Z_1)$  и  $X_2 = X(Z_2)$ ). Поскольку функция  $X = X(Z)$  известна, интегралы в (4.32) можно вычислить различными приближенными методами, например, методом трапеций. Зная же  $\Psi$  и  $C$ , методом Н.Н.Маслова можно определить поверхность предельного равновесия, если на склон будет задана нагрузка  $P$ .

Описываемый метод исходит из предположения, что поверхность  $X = X(Z)$  — поверхность предельного равновесия. В натуре установить справедливость этого предположения крайне трудно. Это обстоятельство могло бы обесценить метод. Но оказывается, что определяемые с его помощью сдвиговые характеристики несут в себе запас, соответствующий действительному "запасу" наблюдаемой поверхности скольжения.

Действительно, предположим для простоты, что запас  $\alpha$  — постоянен по всему профилю. Это означает, что вместо заложения (4.31) наблюдается заложение

$$m' = \alpha \frac{\delta Z}{\delta Z \operatorname{tg} \Psi + C}. \quad (4.33)$$

Если  $\alpha > 1$ , то массив находится в устойчивом состоянии. При  $\alpha < 1$  он неустойчив.

Выражение (4.33) можно переписать в виде

$$m' = \frac{\delta Z}{\delta Z \operatorname{tg} \Psi_\alpha + C_\alpha},$$

где  $\operatorname{tg} \Psi_\alpha = \operatorname{tg} \Psi / \alpha$  и  $C_\alpha = C / \alpha$ . Поэтому, если профиль  $X = X(Z)$  имеет запас  $\alpha$ , то и решение системы (4.32) даст не  $\operatorname{tg} \Psi$  и  $C$ , а  $\operatorname{tg} \Psi_\alpha$  и  $C_\alpha$ . В свою очередь использование этих значений в прогнозных расчетах приведет к построению поверхности с тем же самым запасом  $\alpha$ .

Таким образом, даже не зная точной величины запаса можно проектировать устойчивый склон, исходя из наблюдений за тем же самым склоном в естественных условиях. Объект оказывается своим собственным аналогом. Это оказалось возможным только потому, что задана математическая модель процесса.

Отметим, впрочем, что, используя лабораторные определения сдвиговых характеристик, можно оценить и сам запас. Действительно, если  $C$  и  $\operatorname{tg} \Psi$  — значения сдвиговых характеристик, полученные по данным прямых лабораторных и поле-

вых определений, а  $C_4$  и  $tq\psi$  получены решением системы (4.32), то

$$\omega = C/C_4 = tq\psi/tq\psi_4.$$

#### 4.5. Статистическое моделирование

Рассмотренные выше методы математического и физического моделирования оперируют детерминированными моделями: предполагается, что перечень показателей (факторов) в исходных уравнениях типа (2.6) является исчерпывающим, их значения представляют собой параметры массивов горных пород, а макроструктура объекта известна.

Однако в реальных условиях поведение свойств горных пород и интенсивность связанных с ними процессов подвержены влиянию большого числа случайных факторов. Поэтому многие инженерно-геологические задачи решаются методами статистического моделирования, т.е. на основе применения модели случайной величины, позволяющей использовать весьма совершенный аппарат теории вероятностей и математической статистики. В число этих задач входят: обеспечение исходными данными иных методов моделирования и инженерных расчетов, свертывание и накопление инженерно-геологической информации, изучение закономерностей формирования и изменения свойств пород и физико-геологических процессов с целью познания их природы и прогноза, планирование изысканий и ряд других.

Сущность статистического моделирования при решении простейших из перечисленных задач заключается в изучении особенностей распределения плотности вероятностей частных значений исследуемых показателей на объекте, подборе закона распределения, наиболее полно отражающего упомянутые особенности и использования известных свойств этого закона для обоснования обобщенных, расчетных или экстремальных (в зависимости от решаемой инженерно-геологической задачи) значений показателей [28, 29]. С учетом масштабных эффектов [21] и закономерности изменчивости свойств во времени, в пространстве или под влиянием интересующих нас факторов могут быть получены такие оценки параметров массивов горных пород, т.е. таких значений исследуемых свойств, которые определя-

ют фактическое поведение массивов в процессе строительства и эксплуатации сооружений [22]. При этом могут быть решены также задачи выделения инженерно-геологических элементов исследуемых массивов и построения их структурных моделей, описываемых поведение свойств пород в пространстве [21]. Для этого, в дополнение к традиционным геологическим методам, используются различные способы статистической проверки гипотез и изучаются закономерности пространственной изменчивости свойств. Результаты такого изучения могут быть выражены в виде слоистых или градиентных моделей [21].

Примером слоистых моделей исследуемого объекта, полученных в результате статистической обработки экспериментальных данных, может служить схема расчленения скальной толщи одного из месторождений Северного Кавказа по степени трещиноватости [30], положенная в основу прогноза рудничных водопритоков.

Градиентные модели могут быть преобразованы в структурные схемы, но в ряде случаев используются для прогноза свойств пород на больших глубинах по результатам их изучения в приповерхностных горизонтах. Например, на основании изучения закономерностей вертикальной изменчивости фильтрационных свойств широкого класса скальных пород [22], коэффициент фильтрации исследуемого объекта  $K^a$ , на соответствующей глубине  $H^a$ , в случае геостатического типа напряженного состояния массивов,

$$K^a = K^o \left( \frac{H^a}{H^o} \right)^{-1,5}, \quad (4.34)$$

где  $K^a$  и  $H^a$  – соответственно коэффициент фильтрации и глубина опробования аналога.

При геодинамическом типе напряженного состояния массивов показатель степени в (4.34) меняется от 2,3 до 3,8 при среднем значении – 3.

Выражение (4.34) справедливо при постоянстве состава и структурно-тектонических особенностей скальных пород, в связи с чем в качестве  $K^a$  используются результаты изучения фильтрационных свойств объекта. Несмотря на это ограничение, полученная статистическая модель позволяет существенно упростить процедуру опытно-фильтрационного опробования, в частности, резко уменьшить глубину последнего.

Методы статистического моделирования приобретают большое значение в случае, если объектом прогноза являются механические свойства пород, определение которых связано с техническими трудностями (например, прочностные и деформационные характеристики в условиях естественного залегания пород), а в качестве факторов, их определяющих, выступают простейшие показатели. При этом широко используются методы корреляционного анализа, позволяющие определить характер, тесноту и параметры соответствующих зависимостей и использовать последние в практических целях. Так, на основании изучения зависимостей модулей деформации широкого класса скальных пород в массиве  $E$  от объемной трещинной пустотности  $\Pi$  установлено, что

$$E^* = E^a \left( \frac{\Pi_{tr}^a}{\Pi_{tr}^*} \right)^{-0.9} \approx E^a \frac{\Pi_{tr}^a}{\Pi_{tr}^*}, \quad (4.35)$$

где в качестве аналога могут выступать результаты изучения монолитов скальных пород, что позволяет осуществить переход от показателей свойств в образце к показателям свойств в массиве.

При выводе формул (4.34) и (4.35) использованы результаты парного (двумерного) корреляционного анализа. Однако прогнозируемые свойства являются функциями многих переменных, в связи с чем для решения ряда теоретических и практических задач широко применяются многомерные статистические модели, базирующиеся на использовании множественной корреляции при обработке экспериментальных данных. Результаты такой обработки позволяют решать широкий круг вопросов, из которых наиболее важным является возможность количественной оценки роли факторов в изменении прогнозируемых характеристик, позволяющая обосновать перечень переменных, входящих в (2.6), выявить представляющие показатели исследуемых свойств, а при необходимости – получить значения последних. Решением такой задачи могут служить стандартизованные уравнения множественной регрессии прогнозируемого свойства по комплексу координатных признаков, параметры которых представляют собой безразмерные величины.

Процедура получения таких уравнений известна [22], поэтому

му отметим лишь, что результаты решения рассматриваемой задачи справедливы только для конкретного набора аргументов и при изменении последнего могут существенно изменяться. Кроме того, сам способ решения задачи чувствителен к грубым погрешностям экспериментов и может давать неопределенные результаты в случае, если в наборе факторов, наряду с корреляционно взаимосвязанными, содержатся функционально- или квазифункционально взаимосвязанные характеристики. Поэтому решению задачи должен предшествовать содержательный анализ эмпирических данных, выделение отдельных, тесно взаимосвязанных групп признаков и выбор представляющих эти группы показателей, который также может осуществляться упомянутым способом, либо на основе факторного анализа [31].

Опыт количественной оценки роли факторов в изменении механических свойств пород позволяет отметить, что из большого (до 18–60 и более) числа показателей, выступающих в роли аргументов, информация, достаточная для оценки интересующего нас свойства, содержится, как правило, в 2–4 основных (определяющих) характеристиках. Иные показатели, влияющие на изучаемое свойство, учитываются косвенно, благодаря наличию взаимосвязей с упомянутыми основными характеристиками. Результаты прогноза, как правило, статистически несущественно отличаются от результатов натурных наблюдений.

Многомерные статистические модели могут успешно использоваться также для прогноза различных инженерно-геологических и гидрогеологических процессов [1, 22, 29].

Преимущество статистических моделей в том, что они отражают влияние на прогнозируемый показатель свойства (инженерно-геологический процесс) таких факторов, как неоднородность горных пород, характер статистического распределения аргументов, особенности многомерной корреляции последних.

Отмеченное преимущество является в то же время существенным недостатком рассматриваемого метода: благодаря тому, что для каждого генетического типа пород, прошедшего определенную стадию геологического развития и находящегося в конкретной естественно-географической обстановке, характерны определенные особенности перечисленных факторов, статистические модели пригодны лишь для тех условий, в которых они получены. Экстраполяция (а иногда и интерполяция) их на иные ус-

ловия может привести к неконтролируемым погрешностям прогнозов.

Поэтому важной задачей статистического моделирования является изучение закономерностей изменения параметров корреляционных взаимосвязей, которые лягут в основу многомерных статистических моделей. Результаты некоторых исследований [32] свидетельствуют о существовании таких закономерностей, о принципиальной возможности их использования для априорного построения моделей, а отсюда - о перспективах дальнейшего совершенствования статистического моделирования.

#### **4.6. Имитационное моделирование.**

Реализация рассмотренных выше идей статистического моделирования значительно расширилась в связи с внедрением в производство быстродействующих электронно-вычислительных машин второго и третьего поколения. В частности, появились возможности имитировать сложные природные процессы, не поддающиеся аналитическому решению, процедуры отборования массивов горных город, характеризующиеся теми или иными особенностями взаимосвязей и распределения свойств в пространстве и во времени; процессы и результаты принятия различных методических и теоретических решений; поведение исследователя при изучении неоднородных многокомпонентных динамических систем и т.д. Основой такого рода имитации является метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) сущность которого состоит в возможности формирования практически неограниченного количества выборок различного объема из генеральной совокупности [33]. Статистические параметры последней и правила их изменения задаются исследователем в зависимости от особенностей изучаемого процесса и решаемой задачи. Метод тем более эффективен, чем большее количество раз удается имитировать процесс, процедуру исследований и т.п.

Наибольшее распространение имитационное моделирование получило при решении разведочных задач. Для этого формируется структурная модель объекта (обычно сеточная), на кото-

рой заданы вероятностные распределения физических, прочностных, деформационных, фильтрационных и иных свойств. После этого имитируются различные стратегии, схемы, методы, способы разведки и опробования, позволяющие обосновать оптимальную систему опробования, требуемое количество проб, правила размещения их в пространстве, интервал, шаг, промежуток опробования и т.д. Примером решения такого рода задач является моделирование многошаговых процедур планирования экспериментов [21], позволившее сформировать некоторые общие принципы опробования, обосновать ряд методических рекомендаций и показать возможность использования выборочных оценок параметров распределения исследуемых свойств вместо их генеральных значений.

В тесной взаимосвязи с решением рассмотренной выше задачи находится задача оптимизации инженерно-геологических изысканий [34], основные положения которой подтверждены "модельным проектированием", имитирующем вхождение процесса и результатов изысканий на результаты решения инженерных задач.

Примером использования имитационного моделирования для изучения сложных и длительных естественно-геологических процессов является исследование преобразования неоднородности горных пород в процессе гипергенеза, позволившее выявить важные изменения параметров распределения свойств горных пород при изменении условий их существования [33].

Имитационное моделирование широко применяется также при реализации вычислительных инженерно-геологических задач, для оценки эффективности и области применения различных методических рекомендаций и теоретических выводов, что в целом свидетельствует о возможности решения ряда принципиально новых задач инженерной геологии и о широких перспективах дальнейшего использования этого метода.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенный выше материал не исчерпывает всех методов, идей и возможностей моделирования. Но мы полагаем, что он создает достаточную базу для овладения ими.

Результаты моделирования, как и прогнозы, полученные на ЭВМ, пользуются очень высокой репутацией. Часто упоминание о способе получения прогноза оказывается основным аргументом в пользу ответственнейших решений. Это накладывает большую ответственность на всех, кто занимается моделированием на любой его стадии: исследования объекта в поле, выбора параметров модели, ее построения, собственно моделирования.

В то же время необходимо ясно представлять, что моделирование всего лишь один из способов решения математических задач. Даже при самом аккуратном, в смысле теории и практики его проведения, достоверность получаемых результатов в большинстве случаев определяется адекватностью математического описания прогнозируемого процесса, точностью информации о структуре и свойствах объекта, правильностью задания граничных условий на весь прогнозируемый срок и т.д. Например, неучет какого-либо фактора может полностью обесценить результаты физического моделирования в любом его виде.

В связи с этим не следует некритично доверять результатам моделирования. Их следует сопоставлять с опытом, результатами, получаемыми другими методами. Вообще, видимо, моделирование, как и многие другие методы обработки геологической информации, следует использовать как средство ее эвристического анализа, проверки различных гипотез о свойствах и строении объектов, математических моделей процессов и т.д. В этом качестве оно незаменимо.

Отдельно следует отметить взаимоотношение моделирования и прогнозирования на ЭВМ. По существу эти методы решают одни и те же задачи и должны давать одни и те же результаты. Это особенно четко вырисовывается при сопоставлении сеточного моделирования и конечно-разностных реализаций на ЭВМ.

Быстродействие ЭВМ, высокая точность вычислений заставляет отдавать предпочтение им всегда, когда для рассматрива-

мой задачи есть программа ее решения на имеющейся ЭВИ.

Когда же такая программа отсутствует, то зачастую проще задачу решать моделированием. Вообще, лучше всего, видимо, массовые задачи, идущие часто, решать на ЭВМ, а несерийные – моделировать. Часто прибегают и к комбинированному решению. Скажем, сопротивления вычисляют на ЭВМ, а прогноз производят на интеграторах. Создаются специальные гибридные аналоговые устройства, реализующие этот подход.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Розовский Л.Б., Зелинский И.П. Инженерно-геологические прогнозы и моделирование. Одесса: изд. ОГУ, 1975.
2. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977.
3. Сена Л.А. Единицы измерения физических величин и их размерности. М.: Наука, 1977.
4. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. М.: Наука, 1977.
5. Покровский Г.И., Федоров И.С. Центробежное моделирование в горном деле. М.: Наука, 1969.
6. Турчанинов И.А., Иофис М.А., Каспарьян Э.В. Основы механики горных пород. Л.: Недра, 1977.
7. Сулейманов И.А. Применение центробежного моделирования для изучения деформаций лесовых грунтов. – В сб.: Вопросы строительства гидротехнических сооружений на просадочных грунтах. Баку: изд. АзНИИГИМ, 1969.
8. Кузнецов Г.Н. и др. Моделирование проявленный горного давления. Л.: Недра, 1968.
9. Смирнов Г.В. Использование моделирования для прогноза инженерно-геологических условий разработки месторождений полезных ископаемых. М.: Недра, 1975.
10. Насонов И.Д. Моделирование горных процессов. М.: Недра, 1978.
11. Тимошенко С.П., Гудльер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1970.
12. Метод фстоупругости. /Под ред. Г.Л. Хесина. М.: Стройиздат, 1975.
13. Максимов С.Н. Применение лабораторного моделирования напряженного состояния при оценке устойчивости оползневых склонов. – В сб.: Гидрогеология и инженерная геология. Новочеркасск: изд. НПИ, 1977.
14. Мироненко В.А., Шестаков В.М. Основы гидрогеомеханики. М.: Недра, 1974.
15. Вопросы теории геологического подобия и применения натурных моделей. Альбом аналогов для прогноза переработки лесовых берегов водохранилищ. /Под ред. Л.Б. Розовского. Одесса: изд. ОГУ, 1962.
16. Розовский Л.Б. Некоторые итоги инженерно-геологического изучения и прогнозистики переработки берегов водохранилищ. Труды Гидропроекта, вып. 36. М.: 1974.

17. Захаров М.С. Применение метода геологического подсбия для оценки инженерно-геологических условий строительства гражданских и промышленных сооружений. - В сб.: Формирование и изменение физико-механических свойств горных пород под влиянием естественных и искусственных факторов (геологических процессов, инженерных сооружений и горных работ). Л.: изд. ЛГИ, 1966.
18. Мустафев А.А. Основы механики просадочных грунтов. М.: Стройиздат, 1978.
19. Емельянова Е.П. Сравнительный метод оценки устойчивости склонов и прогноза оползней. М.: Недра, 1971.
20. Розовский Л.Б. Введение в теорию геологического подсбия и моделирования. М.: Недра, 1969.
21. Рац М.В. Структурные модели в инженерной геологии. М.: Недра, 1973.
22. Ткачук Э.И. Полевые методы инженерно-геологического изучения горных пород (массив горных пород как объект исследований). Учебное пособие. Новочеркасск: изд. НПИ, 1977.
23. Четодическое руководство по электрическому моделированию гидрогеологических задач. М.: изд. ВСЕГИНГЕО, 1970.
24. Фильчаков П.Ф., Панчишин В.И. Интеграторы ЭГДА. К.:изд-во АН УССР, 1961.
25. Харр М.Е. Основы теоретической механики грунтов. М.: Стройиздат, 1971.
26. Маслов Е.Н. Основы механики грунтов и инженерной геологии. М.: Высшая школа, 1968.
27. Гороховский В.М. Математические методы и достоверность гидрогеологических и инженерно-геологических прогнозов. М.: Недра, 1977.
28. СН и П-П-15-74. Строительные нормы и правила, часть II, гл. 15. Основания зданий и сооружений. М.: Стройиздат, 1975.
29. Ткачук Э.И. Статистические методы при решении инженерно-геологических задач. Новочеркасск:изд. НПИ, 1975.
30. Ткачук Э.И. Некоторые направления использования корреляционного анализа в инженерной геологии. Инженерно-строительные изыскания. - В сб. статей № 3 (47). М.:Стройиздат, 1977.
31. Коломенский Е.Н., Лобанов Е.М. Программа фактического анализа по методу соответствий и главных оставляющих. М.: изд. ВСЕГИНГЕО, 1976.
32. Ткачук Э.И. Оценка и пути повышения качества косвенной инженерно-геологической информации. - В сб.: Оценка качества гидрогеологической и инженерно-геологической информации. Новочеркасск: изд. НПИ, 1980.
33. Математические методы в инженерной геологии массивов горных пород./Под ред. М.В. Раца. Труды ПНИИИС, вып. 26. М.: Стройиздат, 1974.
34. Рац М.В. Принципы оптимизации инженерно-геологических изысканий. - Инженерная геология, 1980, № 3.

О Г Л А В Л Е Н И Е

В В Е Д Е Н И Е . . . . .	3
ГЛАВА I. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ В ИНЖЕНЕРНОЙ ГЕОЛОГИИ. . . . .	5
ГЛАВА II. РАЗМЕРНОСТЬ И МОДЕЛИРОВАНИЕ . . . . .	9
2.1. Основы теории размерностей. . . . .	9
2.2. Структура физических зависимостей и подобие физических явлений. . . . .	13
ГЛАВА III. ФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ . . . . .	23
3.1. Общие положения . . . . .	23
3.2. Центробежное моделирование. . . . .	27
3.3. Метод эквивалентных материалов. . . . .	31
3.4. Моделирование на оптически активных материалах . . . . .	36
3.5. Фильтрационный лоток. . . . .	42
3.6. Натурное моделирование. Теория геологического подобия. . . . .	46
ГЛАВА IV. ЧАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ . . . . .	54
4.1. Общие положения . . . . .	54
4.2. Сплошные модели . . . . .	59
4.3. Сеточные модели . . . . .	64
4.4. Натурное моделирование в форме математического. . . . .	72
4.5. Статистическое моделирование. . . . .	74
4.6. Имитационное моделирование. . . . .	78
ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .	80
ЛИТЕРАТУРА . . . . .	81

МВ и ССО РСФСР

Новочеркасский ордена Трудового Красного Знамени  
политехнический институт имени Серго Орджоникидзе

В.М.ГОРОХОВСКИЙ, Э.И.ТКАЧУК

МАСТЕРИЗАЦИЯ В КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКЕ

Учебное пособие

Новочеркаск 1980