

**М.М. Хасанов, Г.Т. Булгакова**

**НЕЛИНЕЙНЫЕ И НЕРАВНОВЕСНЫЕ  
ЭФФЕКТЫ В РЕОЛОГИЧЕСКИ  
СЛОЖНЫХ СРЕДАХ**



**Москва ♦ Ижевск**

**2003**

## **СЕРИЯ «СОВРЕМЕННЫЕ НЕФТЕГАЗОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»**

---

---

*Спонсор серии:* Российский государственный университет  
нефти и газа им. И. М. Губкина

### **Вышли в свет:**

*Н. Накиценович, А. Грицевский, А. Грюблер, К. Риахи*  
Мировые перспективы природного газа

*В. Н. Щелкачев, Б. Б. Лапук*  
Подземная гидравлика

*Р. Д. Каневская*  
Математическое моделирование гидродинамических процессов  
разработки месторождений углеводородов

*Б. Б. Лапук*  
Теоретические основы разработки месторождений природных газов

*М. М. Хасанов, Г. Т. Булгакова*  
Нелинейные и неравновесные эффекты  
в реологически сложных средах

### **Готовятся к выходу:**

*К. С. Басниев, Н. М. Дмитриев, Г. Д. Розенберг*  
Нефтегазовая гидромеханика

## **СЕРИЯ «СОВРЕМЕННЫЕ НЕФТЕГАЗОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»**

---

---

### **Редакционный совет:**

Главный редактор К. С. Басниев

Ответственный редактор А. В. Борисов

Е. И. Богомольный (Удмуртнефть)

А. И. Владимиров (РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина)

В. И. Грайфер (РИТЭК)

В. А. Журавлев (Удмуртский государственный университет)

В. И. Кудинов (Удмуртнефть)

О. Л. Кузнецов (РАЕН)

Н. Н. Лисовский (Министерство энергетики)

И. С. Мамаев (Институт компьютерных исследований)

В. И. Резуненко (ОАО Газпром)

С. Холдич (США)

**РГУ НЕФТИ  
И ГАЗА**  
имени И. М. Губкина



УДК 531.1+622.276

---

Интернет-магазин



<http://shop.rcd.ru>

---

- физика
- математика
- биология
- нефтегазовые технологии

**Хасанов М. М., Булгакова Г. Т.**

Нелинейные и неравновесные эффекты в реологически сложных средах. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 288 стр.

Монография посвящена аналитическому и численному исследованию неравновесных и нелинейных процессов, возникающих в системах нефтегазодобычи. Подробно описаны модели и алгоритмы расчета.

Книга предназначена для инженеров, научных сотрудников, аспирантов и студентов.

Табл. 5, Илл. 82, Библиограф. назв. 301.

Компьютерная подготовка текста и иллюстраций Т.И. Габбасов.

**ISBN 5-93972-220-2**

© М.М. Хасанов, Г.Т. Булгакова, 2003

© Институт компьютерных исследований, 2003

<http://rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

## **ОТ РЕДАКЦИОННОГО СОВЕТА**

Предлагаемая вниманию специалистов книга Хасанова М. М. и Булгаковой Г. Т. является результатом многолетних исследований авторов, посвященных исследованию нелинейных и неравновесных эффектов в процессах фильтрации в реологически сложных средах. Она может рассматриваться как развитие круга задач и методов, впервые предложенных А. Х. Мирзаджанзаде.

Авторами рассматривается широкий класс феноменологических моделей применительно к системам нефтедобычи, включая моделирование течений неньютоновских жидкостей, неравновесную двухфазную фильтрацию в неоднородных средах, течения газированной жидкости в условиях неравновесности, проявления релаксационных свойств флюидов и т.д.

Результаты авторов вносят существенный вклад в развитие физико-гидродинамических основ теории фильтрации и создание новейших технологических процессов нефтегазодобычи.

*K. С. Басниев,  
доктор технических наук,  
профессор*

## **ВВЕДЕНИЕ**

*Академику  
Азату Халиловичу Мирзаджанзаде,  
выдающемуся ученому и человеку  
посвящается.*

Эффективность принятия решений при управлении процессами разработки месторождений нефти и газа в значительной мере определяется достоверностью гидродинамических расчетов показателей разработки за- лежей на стадиях анализа и проектирования. Важным условием обеспечения этого процесса является построение математических моделей фильтрации жидкостей и газа, адекватным образом описывающих свойства реальных систем нефтедобычи. При этом в связи с расширением диапазона изменения термодинамических и геологических характеристик месторождений углеводородов и стремлением к интенсификации нефтегазодобычи растет потребность в расширении класса рассматриваемых фильтрационных моделей.

Процессы разработки нефтегазовых месторождений связаны с движением многофазных многокомпонентных сред, которые характеризуются неравновесными и нелинейными реологическими свойствами.

Реальное поведение пластовых систем определяется сложностью реологии движущихся жидкостей и морфологического строения пористой среды, а также многообразием процессов взаимодействия между жидкостью и пористой средой.

Учет этих факторов приводит к обогащению физического содержания моделей фильтрации за счет нелинейности, неравновесности и неоднородности, присущих реальным системам. При их рассмотрении выявляются новые синергетические эффекты (потеря устойчивости с возникновением колебаний, образование упорядоченных структур и т.д.), которые подтверждаются специально поставленными экспериментами и позволяют предложить новые методы контроля и управления сложными природными системами.

Пластовая система представляет собой сложную динамическую систему для анализа, проектирования и управления которой необходимы подходы, основанные на принципах и методах теории больших систем [147]. В соответствии с принципом целостности для описания большой системы недостаточно одной, пусть даже самой изощренной модели. Необходимо использование целой иерархии моделей, способных адекватно описать различные уровни организации системы.

В настоящей работе на ряде конкретных примеров (по И. Ньютону, “при изучении наук примеры полезнее правил”) показано, как создается

иерархия моделей подземной гидродинамики и как они взаимодействуют друг с другом.

При построении математической модели реального объекта исследователь привлекает большой объем априорной информации, сформулированной в виде универсальных физических законов (например, законов сохранения массы, энергии, уравнений движения и т.д.), феноменологических и полуэмпирических законов (например, законов Дарси и Фурье в теории фильтрации и теплопроводности, Дарси–Вейсбаха в трубной гидравлике и т.д.), а также чисто эмпирических законов (например, формул, определяющих зависимость давления насыщения от температуры и мольного состава газа). К априорной информации относится также информация, содержащая данные об объектах, аналогичных рассматриваемому, а также интуитивные представления исследователя и заключения экспертов. Как правило, эта информация менее формализована, чем физические и эмпирические законы.

Совершенно обязательным является также использование данных активных и пассивных экспериментов. Под последними понимают данные, полученные в ходе текущей (нормальной) эксплуатации объекта.

Как уже отмечалось, для целостного описания сложного природного объекта необходимо привлечение целого ансамбля моделей (в [39] говорится о «зоопарке» моделей), различающихся по степени строгости и детализации описания объекта.

По степени строгости (или, скорее, по способу вывода) могут быть выделены два типа моделей: идентификационные и дедуктивные.

Идентификационными называются модели, структура и параметры которых восстанавливаются (как характеристики «черного» ящика) на основе анализа промышленной информации. Часто эти модели имеют форму вход–выходных соотношений самой различной природы (функциональных, дифференциальных, интегродифференциальных и т.д.).

Дедуктивные модели выводятся из общих законов физики с использованием феноменологических, полуэмпирических и эмпирических законов. Модели такого рода принято также называть детерминированными [147].

Опыт реального моделирования достаточно быстро позволяет обнаружить, что приведенное выше разделение достаточно условно, поскольку значения параметров, фигурирующих в феноменологических и эмпирических законах, используемых при выводе дедуктивных моделей, чаще всего не известны и их приходится восстанавливать (подбирать) по экспериментальным данным. Процедура оценки параметров моделей путем анализа экспериментальной информации называется обратной задачей. Иногда для моделей, представленных в виде дифференциальных уравнений, оказываются неизвестными граничные или начальные условия. В таких случаях ставятся обратные задачи по восстановлению этих условий. Отметим, что

решение обратных задач имеет огромное значение для нефтяной промышленности, поскольку нефтяной пласт относится к редкому числу природных систем, не поддающихся прямым измерениям и наблюдениям в целом.

Исследования последних лет доказали, что в эволюции динамических систем большую роль играют неустойчивости, природу которых изучает теория самоорганизации, или синергетика [226]. В связи с этим становится очевидным, что динамические системы целесообразно описывать на языке предельных состояний, аттракторов и т.д. Эволюция динамической системы делится на два этапа:

- переход от произвольного начального состояния к аттрактору;
- движение по аттрактору (нахождение в конечном состоянии).

За первым этапом следить бессмысленно ввиду возможного возникновения неустойчивых состояний и кратковременной продолжительности.

Исследование второго этапа необходимо и не представляет особых трудностей, а главное состоит в том, что независимо от ошибок в начальных данных система неизбежно переходит в это конечное состояние.

В связи с неустойчивостью и сложностью динамических систем при их описании проявляется ограниченность детерминированного подхода, который не способен описать не только различные уровни организации систем, но и взаимодействие между этими уровнями. В этом случае возможен феноменологический подход к моделированию сложных динамических систем.

В настоящей монографии представлены в основном феноменологические модели в применении к системам нефтегазодобычи. В этих моделях законы природы дополнены уравнениями связи.

Исследования последних лет показывают, что явления в реологически сложных средах часто обнаруживают масштабную инвариантность (фрактальность) пространственных и временных свойств. Это обстоятельство позволяет выработать некоторые общие методы моделирования сложнопостроенных сред и в ряде случаев облегчает описание протекающих в них процессов.

В связи с этим мы сочли необходимым в первой главе монографии подробно рассмотреть основные представления о фракталах и привести примеры использования фрактальных характеристик при анализе объектов нефтегазодобычи.

Из-за отсутствия надежных теоретических предпосылок модели сложных систем имеют, как правило, идентификационный характер. Это означает, что структура моделей и их параметры восстанавливаются на основе анализа промышленно-экспериментальной информации путем постановки и решения обратных задач.

Вторая глава монографии посвящена постановке и решению конкретной обратной задачи, связанной с реальными проблемами моделирования нефтегазодобычи. Рассмотрены предложенные авторами алгоритмы

определения неравновесных фазовых проницаемостей по данным нестационарных исследований кернов. Уделено особое внимание вопросам выбора оптимальной сложности модели. Эта проблема не может быть до конца формализована, поэтому для ее решения предлагается использовать методы нечеткой логики.

Поведение реофизически сложных систем во многом определяется происходящими в них релаксационными процессами. В современной механике релаксация описывается обычно путем введения взаимопроникающих сред, обменивающихся друг с другом массой или энергией (модели трещиновато-пористой среды, «активной» и «неактивной» насыщенности, теплопроводности в многокомпонентных средах и т.д.).

В третьей главе монографии рассмотрены некоторые феноменологические модели релаксационной фильтрации реофизически сложных систем, учитывающие запаздывание в соотношениях между скоростью фильтрации и градиентом давления.

Показано, что релаксационные явления в реофизически сложных средах связаны с взаимодействием структурных единиц, образующих иерархию взаимопроникающих подсистем различной сложности, причем эволюция на каждом уровне организации определяется своим характерным временем релаксации.

Экспериментальными исследованиями установлено, что реологическое поведение водонефтяных микроэмulsionий в пористой среде имеет неニュтоновский характер. Причины этого явления связаны со структурными перестройками в микроэмulsionиях.

В четвертой главе монографии в рамках феноменологического подхода рассматривается модель процесса вытеснения нефти водой из пористой среды, учитывающая микроэмulsionционное состояние флюидов. Предлагается учесть неравновесные эффекты, связанные с изменением реологических свойств в микроэмульгированных системах.

Наиболее важным результатом, полученным в этой главе, является экспериментальное подтверждение того, что динамические системы со сложной реологией обнаруживают фрактальность пространственных и временных свойств. Теоретически обнаруженные колебания перепада давления качественно подтверждаются данными лабораторных исследований фильтрационных характеристик пористых сред. Расчеты показали, что в рамках рассмотренной модели удается вполне удовлетворительно описать экспериментальную зависимость перепада давления от времени.

В пятой главе исследованы особенности процессов неравновесной двухфазной фильтрации в неоднородных средах.

Реальная пористая среда характеризуется иерархией неоднородностей различных размеров – от микро до макроуровня. Но для выявления качественных особенностей, имеющих место при фильтрации в неоднородных средах, можно ограничиться простейшей моделью среды с двой-

ной пористостью. Эта модель предполагает существование двух взаимопроникающих сред с резко различающимися размерами пор и значениями проницаемости.

Показано, что изменение содержания нефти в крупных порах можно рассматривать как сменяющие друг друга режимы пропитки и дренажа.

Как известно, вследствие капиллярного гистерезиса кривые относительных фазовых проницаемостей (ОФП), полученные при дренировании и пропитке, отличаются друг от друга.

С целью оценки этих эффектов нами были проведены лабораторные эксперименты по определению кривых ОФП нефти и воды на естественных кернах при различных режимах дренирования и пропитки.

Показано, что неравновесность процессов двухфазной фильтрации в неоднородных средах может привести к потере устойчивости стационарных режимов течения и возникновению автоколебаний.

Необходимо заметить, что колебания давления и расхода жидкости довольно часто отмечаются в лабораторной и промысловой практике, но в большинстве случаев их рассматривают только как досадные случайные помехи. В представленной работе показано, что, на самом деле, эти колебания связаны с внутренними свойствами пластовых систем и могут служить источником весьма полезной информации о фильтрационно-емкостных характеристиках пласта.

В шестой главе исследуется устойчивость неравновесной фильтрации газированной жидкости.

Движение нефти при давлениях ниже давления насыщения (фильтрация газированной жидкости) является классической проблемой, теории которой посвящены работы многих видных ученых. Однако в последние годы были получены экспериментальные данные [42,133], находящиеся в противоречии со сложившимися представлениями о физике процесса. Обнаружено аномальное увеличение расхода газированной жидкости в области давления насыщения, и уменьшение его при дальнейшем снижении уровня давления, что необъяснимо в рамках классического подхода. Анализ изменения газонасыщенности во времени приводит к заключению о неоднородности потока. На общем фоне роста газонасыщенности по мере увеличения объема прокачки наблюдаются частые колебания ее в отдельных сечениях пласта.

Для объяснения указанных эффектов в представленной работе разрабатывается феноменологический подход к описанию фильтрации газированной жидкости с учетом эффекта «газового подшипника», ведущего, за счет «проскальзывания» жидкости, к немонотонности зависимости относительной фазовой проницаемости жидкой фазы от газонасыщенности. Этот эффект проявляется вблизи давления насыщения и подтверждается экспериментальными исследованиями Н.В. Чураева. В связи с этим представляет существенный интерес дать качественную и, по возможности, количественную

венную оценку влияния немонотонного изменения ОФП жидкой фазы на фильтрационные характеристики газированной жидкости.

Предполагается, что фазовые переходы при фильтрации газированной жидкости имеют неравновесный характер. Обоснованием такого предположения являются, в частности, исследования Д.А. Эфроса, в которых отмечалось заметное запаздывание в выделении газа. Зависимость массовой концентрации растворенного газа от давления описывается классической неравновесной моделью.

Начальные и граничные условия соответствуют условиям фильтрации газожидкостной смеси в модели пористой среды, на входе которой поддерживается давление выше давления насыщения, а на выходе – ниже давления насыщения.

Для замыкания системы уравнений задаются зависимости ОФП жидкой и газовой фаз от газонасыщенности.

Проведен анализ устойчивости стационарных режимов фильтрации газированной жидкости с учетом немонотонности функции фазовой проницаемости жидкой фазы.

Исследования линеаризованной системы уравнений для малых возмущений с использованием подходов Бубнова–Галеркина показали неустойчивость стационарных режимов течения.

Для анализа особенностей процессов неравновесной фильтрации газированной жидкости в нелинейной области задача решалась численно. Расчеты показали, что при определенных значениях параметров (отношения вязкостей жидкой и газовой фаз, перепада давления и времени релаксации) в области фильтрации газированной нефти возникают периодические во времени изменения давления и насыщенности. Изменение этих параметров приводит к потере устойчивости предельного цикла и возникновению квазипериодического движения, переходящего затем в хаотическое. Применение процедуры Паккарда–Такенса показывает, что наблюдаемый хаос является детерминированным и минимальное число динамических переменных, необходимых для описания колебаний в фильтрационном потоке, равно трем, что соответствует предложенной модели фильтрации.

Осуществлена идентификация параметров ОФП жидкой фазы и рассчитана теоретическая зависимость осредненного по времени расхода жидкости от перепада давления на модели пласта, применительно к условиям эксперимента А.А. Болотова, А.Х. Мирзаджанзаде, И.И. Нестерова [42].

В работе проведены также численные расчеты задачи о притоке газированной жидкости к скважине с забойным давлением ниже давления насыщения в режиме локального разгазирования, которые показали, что в эксплуатационной скважине могут наблюдаться колебания дебита нефти и

газового фактора во времени. Отметим, что эти результаты согласуются с данными промысловых исследований.

Таким образом, предложенная феноменологическая модель фильтрации газированной жидкости качественно объясняет результаты экспериментов [42,133] и может быть использована в гидродинамических расчетах процессов нефтедобычи при давлениях ниже давления насыщения.

В седьмой главе на ряде примеров теоретически и экспериментально показано, что движение реофизически сложных сред сопровождается процессами самоорганизации, которые могут привести к образованию диссипативных структур и смене детерминированного поведения хаотическим. Результаты представленных исследований позволяют сделать вывод о том, что нефтяной пласт должен рассматриваться в качестве открытой диссипативной системы, способной к самоорганизации и содержащей огромный источник непознанной и потому невостребованной энергии.

Мы полностью согласны с И. Пригожиным (“Конец определенности”, 2001 г.) в том, что человечество достигло поворотного пункта – начала новой рациональности, в которой наука более не отождествляется с определенностью. На наших глазах рождается наука, не ограничивающая более идеализированными и упрощенными ситуациями, а отражающая всю сложность реального мира, наука, рассматривающая нас и нашу деятельность как неотъемлемую часть фундаментального «тренда» на всех уровнях природы.

Материалы этой книги являются результатом плодотворного сотрудничества со многими нашими коллегами из Уфы, Баку, Москвы и других городов СНГ. Огромная благодарность им всем.

---

# **Глава 1**

## **ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ**

### **ТЕОРИИ САМООРГАНИЗАЦИИ**

*Метод важнее открытия,  
ибо правильный метод исследования  
приведет к новым, еще более  
ценным открытиям.*

*Л.Д. Ландау*

Теория самоорганизации – это междисциплинарная область науки, занимающаяся изучением появления и развития упорядоченных во времени и пространстве процессов и структур [129, 175, 186, 187, 226]. Немецкий физик Г. Хаген (H. Haken) в начале 1970-х годов предложил для этой науки название *синергетика* (от греческого *synergia* – совместное действие, сотрудничество).

В рамках самой теории самоорганизации пока еще не получены впечатляющие научные результаты: основные модели синергетики были найдены и исследованы в основном до ее возникновения. Поэтому синергетика – это скорее не отдельная наука, а термин, говорящий об общности математических задач и методов исследования нелинейных явлений в разных областях науки.

Заслуга ее создателей в том, что им на основе анализа известных моделей удалось выявить универсальные законы возникновения и развития сложных систем и сложного поведения. Наличие универсальности весьма важно (вернее, информативно), поскольку сведения о свойствах отдельных элементов сложных систем и процессах взаимодействия между ними зачастую отсутствуют или получение их затруднительно. В таких условиях знание о наиболее общих чертах кооперативных эффектов позволяет существенно восполнить недостаток информации.

Здесь уместно провести аналогию с таким универсальным законом, как II закон термодинамики: сколь бы сложной ни была схема предлагаемого очередным изобретателем вечного двигателя, мы можем, не разбирая ее детально, утверждать, что двигатель не будет работать.

Под влиянием внешних потоков энергии и вещества структурные модули, составляющие сложные системы, взаимодействуют друг с другом нелинейным образом, хаотично «пробуя» различные формы коллективного поведения. По мере возрастания интенсивности внешних потоков система подходит к точке выбора (бифуркации), после которой начинает преобладать некоторый выделенный тип кооперативного поведения.

Примером бифуркации в коллективном поведении сообщества людей является появление единого ритма в аплодисментах зрителей по окончании всем понравившегося концерта: эти аплодисменты, не упорядоченные вначале, переходят в единодушные ритмичные хлопки, когда управляющий параметр системы (энтузиазм аудитории) превосходит некоторый порог [103].

Синергетика предоставляет возможность построения моста между естественными науками и науками о человеке.

В частности, она дает некоторое представление о том, как поток неупорядоченных сигналов, воспринимаемых органами чувств, преобразуется в упорядоченные сигналы [103].

Развитие теории самоорганизации показало, что основные особенности геометрии и динамики сложных природных объектов часто удается описать с помощью достаточно простых детерминированных моделей. Обнаружение детерминированной основы в совершенно случайных, на первый взгляд, явлениях – важнейшее достижение синергетики, позволяющее надеяться на широкую применимость ее результатов при контроле и управлении процессами в сложных системах.

Подчеркнем еще раз, что эта простота универсальна – одни и те же базовые модели описывают кооперативное поведение в системах самой различной природы. В этом проявляется *самоподобность* Природы – свойство, позволяющее ей наиболее «экономными» способами построить все наблюдаемое нами разнообразие объектов и явлений. Несколько упрощая, мы можем сказать, что Природа, быть может, владеет немногими простыми методами конструирования, но она искусно применяет их в различных сочетаниях на многих иерархических уровнях организации сложных систем, порождая таким образом свои самые совершенные творения.

Наиболее зримо самоподобность Природы проявляется в биологической эволюции. Известно, например, что *онтогенез* – индивидуальное развитие организмов – подобен (в своей шкале времени) *филогенезу* – развитию групп (видов, родов), к которым эти организмы принадлежат.

Множество фактов проявления самоподобности в объектах и явлениях неживой и живой природы было найдено Бенуа Б. Мандельбротом (B.B. Mandelbrot), который для обозначения этого свойства ввел понятие *фрактала* – структуры, состоящей из частей, которые в каком-то смысле подобны друг другу [222, 283].

## 1.1. Фракталы

Фрактальная геометрия позволяет раскрыть неожиданную простоту построения сложных природных систем и предоставляет методы их качественного и количественного описания. Для моделирования неупорядоченных систем теория фракталов играет такую же роль, как генераторы случайных чисел – для моделирования случайных процессов. Так, синтетические фрактальные пейзажи, полученные средствами компьютерной графики, выглядят настолько правдоподобно, что большинство воспринимает их как естественные. Повсеместное распространение компьютеров и компьютерной графики позволяет использовать фрактальные представления для исследования геометрии сложных объектов во многих областях естественных наук.

Рассмотрим некоторые математические сведения, необходимые для введения количественных мер фрактальных свойств.

### 1.1.1. Идеальные фракталы

Примером идеального фрактала является треугольник В. Серпинского (W. Sierpinski), который впервые описал его в 1916 г. Этот объект может быть получен путем построения, начинающегося с равностороннего треугольника (рис. 1.1).

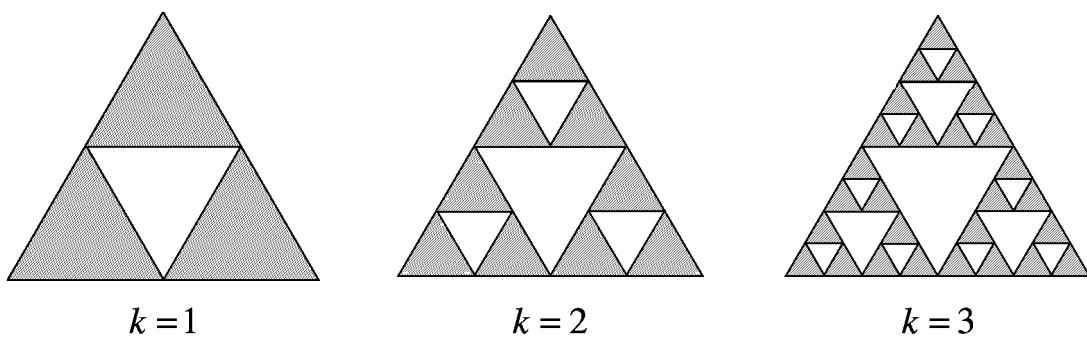


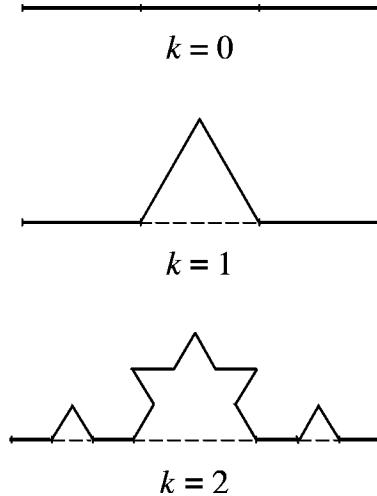
Рис. 1.1. Треугольник Серпинского

На первом этапе исходный треугольник делится на 4 равносторонних треугольника, средний из которых выбрасывается. С каждым из оставшихся треугольников поступают так же. На  $k$ -м этапе мы будем иметь  $3^k$  треугольников, которые при  $k \rightarrow \infty$  образуют некоторое «всюду дырявое» множество точек.

Это множество масштабно-инвариантно, поскольку увеличение в  $2^k$  любого из маленьких треугольников, полученных на  $k$ -м этапе

построения, приводит к тому же самому множеству (этим свойством ковер Серпинского напоминает куклу-матрешку).

Еще одним примером фрактального объекта является кривая Коха, названная так в честь Хельге фон Коха, описавшего ее в 1904 г. Способ построения этой кривой ясен из рис. 1.2.



**Рис. 1.2. Кривая Коха**

Легко уловить связь между этими структурами и примерами нигде не дифференцируемых непрерывных функций, построенных К. Вейерштрасом (K. Weierstrass) и его последователями.

Рассмотрим, например, функцию Вейерштрасса–Мандельброта, задаваемую в виде сходящегося ряда [283]

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b^n (1 - \cos a^n x),$$

где  $0 < b < 1$ ,  $ab > 1$ .

Легко видеть, что продифференцированный ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (ba)^n \sin a^n x$$

расходится, поэтому функция не дифференцируема ни в одной точке. График этой функции представляет собой масштабно-инвариантную (т. е. фрактальную) кривую, что можно показать аналитически.

Действительно,

$$\begin{aligned} f(ax) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b^n (1 - \cos a^{n+1} x) = \frac{1}{b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b^{n+1} (1 - \cos a^{n+1} x) = \\ &= \frac{1}{b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b^k (1 - \cos a^k x) = \frac{1}{b} f(x). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если участок кривой  $f(x)$  на отрезке  $\left[0, \frac{1}{a}\right]$

растянуть в  $a$  по оси  $x$  и в  $b^{-1}$  раз по оси  $y$ , то в результате получится исходная кривая на участке  $[0, 1]$ . Поскольку коэффициенты растяжения по осям  $x$  и  $y$  не совпадают, то  $f(x)$  называют (в отличие от кривой Коха) *не самоподобной, а самоаффинной*.

Нигде не дифференцируемые функции многие выдающиеся математики считали надуманными «патологическими» структурами, не имеющими никакого отношения к реальности. Так, Пуанкаре в «Науке и методе» писал: «Некогда при нахождении новых функций имелась в виду какая-нибудь практическая цель. Теперь функции изобретаются специально для того, чтобы обнаружить недостаточность рассуждений наших отцов, никакого иного вывода, кроме этого, из них нельзя извлечь». Ш. Эрмит в своем письме к Т. Стилтьесу был еще более эмоционален: «Я в ужасе отворачиваюсь от этой страшной чумы: функций, не имеющих производных» [206]. Оказалось, однако, что эти функции связаны с фракталами – объектами, которые, как уже отмечалось, широко распространены в природе и естественным образом происходят из очень конкретных задач.

Весьма важным примером фрактальной кривой является траектория броуновской частицы. Ее фрактальность проявляется в том, что, увеличивая разрешение микроскопа и уменьшая время между фиксациями местоположениями броуновской частицы, мы вновь получим подобные друг другу блуждания. График зависимости координаты броуновской частицы от времени (винеровский процесс) является самоаффинной кривой и также нигде не дифференцируется.

### 1.1.2. Фрактальная размерность

При рассмотрении фрактальных объектов обычные количественные характеристики (длина, площадь, масса и т. д.) оказываются неприменимыми. Так, длина кривой Коха на  $k$ -м этапе построения равна

$$L_k = 4^k \left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(\frac{4}{3}\right)^k.$$

Поскольку  $\lim_{k \rightarrow \infty} L_k = \infty$ , то истинная длина этой кривой бесконечно велика. При измерении длины с помощью линейки будет определена лишь кажущаяся длина, поскольку какие-то детали фрактальной кривой всегда окажутся меньше самого мелкого деления линейки. Ясно, что значение кажущейся длины растет с ростом разрешающей способности измерительного инструмента. Таким образом, длина фрактальной кривой не поддается четкому определению.

В связи с этим для количественной характеристики свойств фрактала используется *размерность* фрактала.

Знакомая всем размерность (мы, не вдаваясь в излишние объяснения, будем называть ее *топологической* размерностью) может принимать только целочисленные значения: линия имеет размерность 1, плоскость – 2, пространство – 3. Топологическая размерность  $D_T$  кривой Коха равна, конечно, единице. Но для того чтобы оценить, как «плотно» кривая Коха заполняет плоскость, может быть введена так называемая размерность Хаусдорфа – Безиковича  $D_H$  (F. Hausdorff, 1918 г. и A. S. Besicovitch).

Практически эта величина может быть определена путем измерения длины кривой с помощью циркуля с уменьшающимся раствором  $\varepsilon$  (см. рис. 1.3).

При этом длина кривой приближенно оценивается как длина ломаной  $A_0 A_1 A_2 \dots$ , где  $A_i$  – точки «засечек», произведенных циркулем. Ясно, что  $L(\varepsilon) = N(\varepsilon) \cdot \varepsilon$ , где  $N(\varepsilon)$  – число «засечек». В случае обычных гладких (регулярных) кривых при уменьшении  $\varepsilon$  длина  $L(\varepsilon)$  стремится к конечному пределу  $L_0$  – истинной длине кривой (см. рис. 1.3, а).

Поэтому в пределе малых  $\varepsilon$

$$N(\varepsilon) = \frac{L_0}{\varepsilon}. \quad (1.1)$$

В случае же фрактальной кривой, как уже отмечалось,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L(\varepsilon) = \infty$  (рис. 1.3, б). Оказывается, что для таких кривых при малых  $\varepsilon$   $L(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon^d}$ , откуда

$$N(\varepsilon) = \frac{c}{\varepsilon^{D_H}}, \quad (1.2)$$

где показатель  $D_H = 1 + d$  и называется *размерностью Хаусдорфа–Безиковича*.

Так, если с помощью циркуля с раствором  $\varepsilon = \left(\frac{1}{3}\right)^k$  измеряется длина кривой Коха, то получится

$$N(\varepsilon) = 4^k = 3^{k \frac{\ln 4}{\ln 3}},$$

откуда

$$N(\varepsilon) = \varepsilon^{-\frac{\ln 4}{\ln 3}}.$$

Таким образом, размерность Хаусдорфа кривой Коха равна

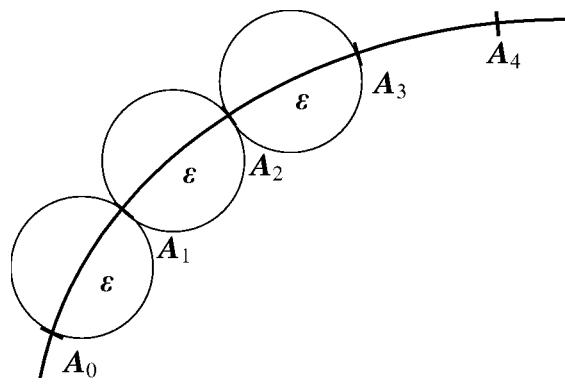
$$D_H = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,26.$$

Этот пример показывает, что фрактальная кривая имеет дробную размерность. Собственно, термин «фрактал» обязан своим происхождением именно этому обстоятельству: латинское слово *fractus* означает «сломанный», «дробный».

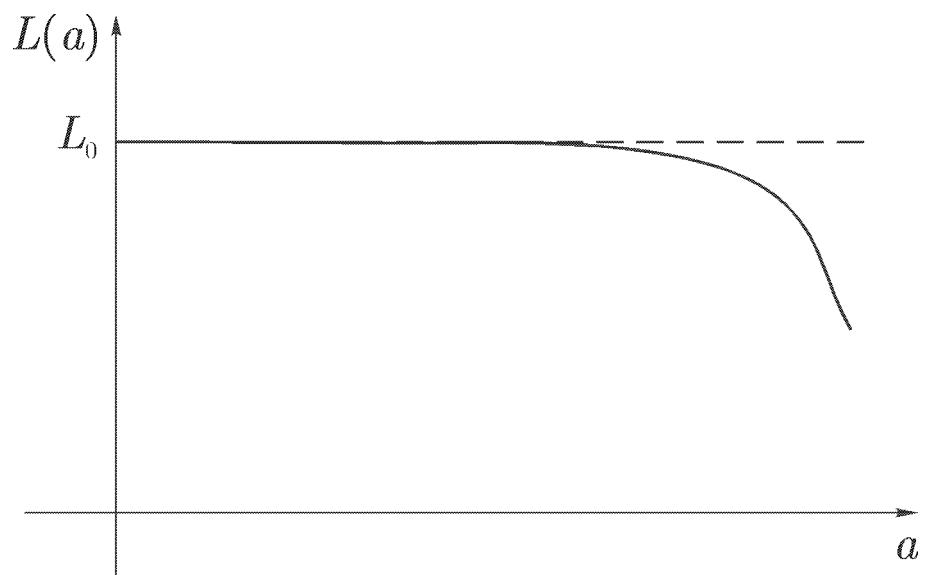
Из (1.1) следует, что для регулярной кривой  $D_H = 1$ , т. е. размерность Хаусдорфа совпадает с топологической размерностью  $D_T$ .

То, что размерность фрактальной кривой лежит между единицей и двойкой, означает, что она занимает промежуточное положение между линией и плоскостью. В то время как гладкая кривая заполняет в точности одномерное пространство, фрактальная кривая за счет своей бесконечной разветвленности как бы выходит за пределы одномерного пространства.

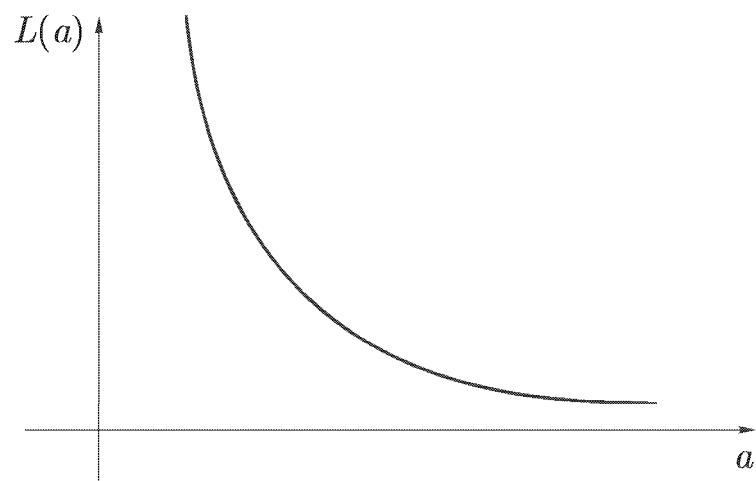
Размерность Хаусдорфа является количественной мерой того, насколько «плотно» фрактальное множество заполняет окружающее его евклидово пространство.



a)



б)



в)

**Рис. 1.3. Измерение длин кривых**

Можно показать, что траектория броуновской частицы, движущейся по плоскости, имеет размерность  $D_H = 2$ , т.е. она практически полностью заполняет все двумерное пространство.

Заметим, что величину  $N(\varepsilon)$  можно также определить как число кружков диаметром  $\varepsilon$ , полностью покрывающих рассматриваемую кривую. При вычислении размерности  $D_H$  может быть использовано покрытие кривой не кружками, а квадратиками с уменьшающейся стороной. В том случае, когда фрактальное множество вложено в трехмерное евклидово пространство, оно покрывается сферами или кубиками.

Существует ряд других определений размерности фрактальных множеств. Так, пусть  $N_S(r)$  – число в  $r$  раз уменьшенных копий фрактала, необходимых для покрытия исходного множества. Тогда

$$N_S(r) = r^{D_S},$$

где показатель  $D_S$  называется размерностью подобия.

Например, ковер Серпинского при  $k = 2$  (см. рис 1.1) может быть покрыт тремя треугольниками, являющимися в 2 раза уменьшенными копиями исходного множества. Следовательно,

$$3 = 2^{D_S},$$

$$\text{откуда} \quad D_S = \log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,58.$$

Можно показать, что в данном случае размерность подобия совпадает с размерностью Хаусдорфа–Безиковича.

### 1.1.3. Реальные фракталы

Фрактальная самоподобность характерна для множества реальных систем. Она проявляется в геометрии деревьев и русел рек, строении легких, ветвлении кровеносных сосудов, динамике сердечных биений, изменении уровней водных поверхностей, турбулентности и т.д. Так, если рассматривать нейроны (нервные клетки) через микроскоп с небольшим увеличением, то можно отчетливо увидеть отходящие от тела клетки асимметричные разветвленные отростки (дендриты). При несколько большем увеличении можно наблюдать еще меньшие ответвления, отходящие от крупных ветвей. При еще большем увеличении обнаруживается новый уровень структуры: ответвления от ответвлений и т. д. (Тут

можно вспомнить шуточное стихотворение «Если глянуть в микроскоп – там на клопе тоже клоп» [238]).

На каждом уровне масштаба структура ветвей нейрона подобна (хотя и не обязательно идентична, как в случае идеальных фракталов) структурам, наблюдаемым как в более крупных, так и более мелких масштабах.

Кипящая вода представляет собой фрактальную смесь паровой и жидкой фаз, в которой пузырьки пара содержат водяные капли, а каждая из этих капель – мелкие пузырьки газа, которые, в свою очередь, содержат еще более мелкие капли воды и т.д. [350].

Отличие реальных фракталов от идеальных заключается в том, что первые обладают характерным минимальным линейным размером (например таким, как радиус атома или молекулы), в то время как идеальные фракталы имеют бесконечно тонкую структуру. На практике существует и характерный максимальный размер фрактала  $\xi$  (так называемый *радиус корреляции*). Реальная среда как бы составлена из фрактальных блоков размерами  $\xi$  и поэтому на масштабах, больших  $\xi$ , может считаться обычным (евклидовым) объектом.

Образование фрактальных структур в природе происходит за счет таких механизмов, как кластерообразование при агрегации отдельных частиц, осадкообразование, развитие неустойчивости поверхности раздела при вытеснении из пористой среды одной жидкости другой, перемешивание жидкостей, растрескивание материалов, пробой диэлектриков и т. д.

Фрактальные размерности реальных объектов можно определить путем покрытия их фотографий квадратиками  $\varepsilon \times \varepsilon$  и нахождением связи между числом квадратов  $N(\varepsilon)$  и длиной сторон квадратов  $\varepsilon$ . Согласно (1.2)

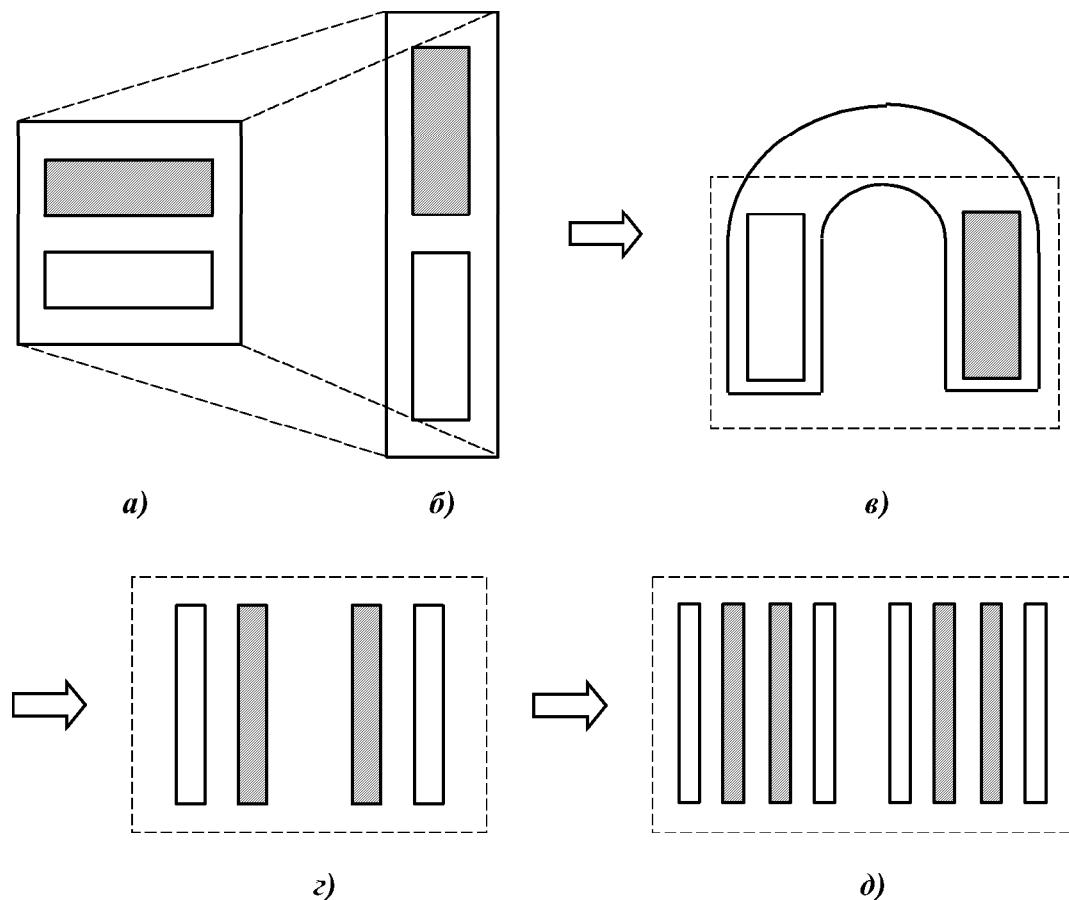
$$\ln N(\varepsilon) = \ln C - D_H \ln \varepsilon. \quad (1.3)$$

Поэтому в координатах  $(\ln \varepsilon, \ln N(\varepsilon))$  должна получиться прямая линия, по угловому коэффициенту которой определяется величина  $D_H$ . Если точки  $(\ln \varepsilon, \ln N(\varepsilon))$  не лежат на одной прямой, то изучаемый объект нельзя признать фрактальным.

Можно утверждать [238], что реальные фрактальные структуры представляют собой след хаотических процессов. Где бы в природе в результате хаотического процесса ни формировался тот или иной объект (берег моря, атмосфера, геологический разлом и т.д.), повсюду с большой вероятностью можно обнаружить фракталы (в контуре береговой линии, в форме облаков, конфигурации скальных образований).

Повсеместная распространенность фракталов во многом объясняется тем, что они могут быть получены наложением двух простейших преобразований – растяжения и наложения, часто встречающихся в природе. Проиллюстрируем это (не очень строгое) утверждение на примере

преобразования подковы (рис. 1.4, а – в), итерации которого приводят (рис. 1.4, г, д) к образованию фрактальной структуры [176].



**Рис. 1.4. Преобразование подковы**

Аналогичные преобразования имеют место при перемешивании жидкостей, когда существуют периодически повторяющиеся вытягивания и изгибы участков жидкостей с возвращением их в исходное положение. Поэтому если в сосуд с краской капнуть несколько капель краски другого цвета и начать перемешивать, то через некоторое время капли растянутся в тонкие слои, образующие фрактальную структуру. Получаемая при этом картина удивительно похожа на узоры, встречающиеся иногда на поверхности камней, подобранных на берегу. Возможно, эти породы образовались при застывании смеси, полученной перемешиванием расплавов минералов различного цвета.

Много фракталоподобных образований содержится в человеческом организме. Они играют важную роль в поддержании нормального функционирования организма. Так, фракталоподобная структура артерий и вен осуществляет равномерное кровоснабжение разных участков органов, фрактальные ответвления и складки значительно увеличивают поверх-

ность всасывания в кишечнике, способствуют распределению, сбору различных веществ (в кровеносных сосудах, желчных протоках и бронхиалах) и информации (в нервной системе).

Последовательные изломы, изгибы и ветвлении позволяют линейной структуре (кривой Кох, например) «почти» заполнить пространство. Точно таким же образом линейная система артерий почти сплошь пронизывает трехмерный организм, обеспечивая его бесперебойное кровоснабжение.

*Образно говоря, здесь фрактал выступает как способ организовать взаимодействие пространств различной размерности [238].*

Фрактальные структуры, благодаря своей избыточности и нерегулярности, являются устойчивыми системами и хорошо противостоят повреждениям. Следовательно, и в технологических системах следует использовать или целенаправленно создавать фрактальные объекты в целях увеличения прочности и надежности конструкций и интенсивности процессов.

Исключительная эффективность функционирования человеческого мозга также может быть объяснена фрактальностью организации процессов переработки информации. Покажем это на примере фрактальной модели мозга [88], представляющей собой квадрат, содержащий один прямоугольник и два квадрата вдвое меньшего размера, масштабно инвариантных первому квадрату (рис. 1.5).

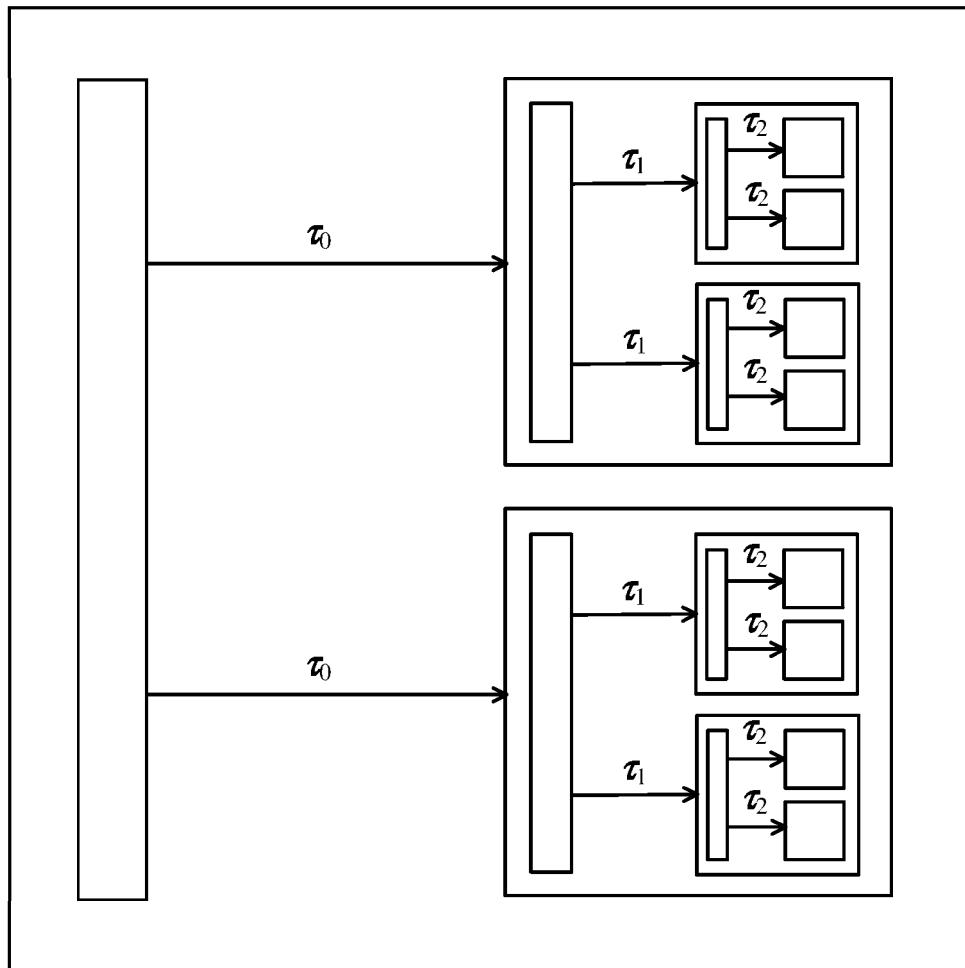
Входной сигнал, подведенный к большому квадрату, идет к первому прямоугольнику и обрабатывается здесь за время  $\tau_0$ . Затем результаты обработки поступают на меньшие квадраты, прямоугольники которых отсылают их к еще меньшим квадратам и т.д. Предположив, что для обработки сигнала в модулях вдвое меньшего размера требуется вдвое меньше времени, получим скейлинговый закон

$$\tau_n = \frac{\tau_0}{2^n}.$$

Отсюда следует, что даже если мозг бесконечно сложен, то при  $\tau_0 = \frac{1}{2}$  на обработку сигнала всеми его уровнями потребуется всего лишь

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n = \tau_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\tau_0}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \text{ с.}$$

Вот почему человек, находясь в подчас сложнейшей ситуации, успевает почти мгновенно обработать поступающую информацию и принять адекватное решение.



**Рис. 1.5. Фрактальная модель мозга**

Наблюдение изображений фракталов успокаивает и вызывает чувство облегчения и уверенности, что связано с постоянством формы фрактала при его увеличении. Точно так же действует постоянный ритм церковного богослужения или рефрен колыбельной песни.

Музыкальные произведения в основе своей также фрактальны, поскольку правила их создания аналогичны правилам, которые с помощью повторяющихся предписаний позволяют творить фрактальные образы. Такие гениальные музыканты, как Моцарт или Бах, находят свои собственные правила, шестым чувством определяя тот единственный момент, когда необходимо перейти от старых правил к новым [103].

Отметим, что самоподобной в каком-то смысле является и история науки. Американский методолог Джеральд Холтон показал [238], что научная мысль из века в век ходит по одним и тем же кругам, рассматривая (на все более высоком уровне) одни и те же вечные темы: тему первичных частиц, тему происхождения сложных форм из простых, тему само-

произвольного появления новшеств и т. д. По этому поводу С.В. Мейен отметил: «Будь это шахматная партия, любой арбитр давно бы признал ничью ввиду повторения ходов».

Одной из таких вечных тем является и само понятие фрактальности. Ведь еще Лейбниц в «Монадологии» писал: «Всякую часть материи можно представить наподобие сада, полного растений, и пруда, полного рыб. Но каждая ветвь растения, каждый член животного, каждая капля его соков есть опять такой же сад или такой же пруд» [238].

## 1.2. Детерминированный хаос

Изучение ньютоновской динамики приучило нас к мысли о том, что если заданы силы, действующие между частицами, а также начальные положения и скорости частиц, то уравнения движения позволяют предсказать развитие системы с любой степенью точности для любого сколь угодно позднего момента времени. Это убеждение укрепляется удивительной точностью, с которой механика предсказывает движение планет, моменты солнечных затмений, рассчитывает движение космических ракет. Случайность, наблюданную в реальном мире, мы обычно связываем с внешними шумами, наличием очень большого числа степеней свободы или же с квантовыми эффектами.

Настоящим потрясением для научного мира было осознание того, что неупорядоченные, непредсказуемые движения возможны в детерминированных *динамических системах*, т. е. объектах, эволюция которых описывается некоторой системой дифференциальных или разностных уравнений, задающих правило однозначного определения будущего, исходя из заданных начальных условий [129, 163, 176, 226, 243].

Хаотическое состояние, в котором могут находиться динамические системы без источников случайных шумов, получило название *детерминированного (или динамического) хаоса*.

Детерминированный хаос отличается от обычного (или *шумового*) хаоса, понимаемого как состояние полной дезорганизации. Хаос в динамических системах относится к ограниченной случайности, им можно управлять и даже прогнозировать на короткие промежутки времени вперед.

Различие между этими двумя видами хаоса подобно различию между шумом в переполненном случайными людьми зале и шумом, создаваемым музыкантами оркестра, готовящимися к началу выступления. Достаточно одного жеста дирижера, чтобы шум в оркестровой яме затих, в то время как овладеть вниманием толпы практически невозможно.

Следует отметить, что необходимым условием возникновения хаотического движения является наличие особой *нелинейности*.

Различается детерминированный хаос в *консервативных* системах, в которых механическая энергия (или какой-либо ее аналог) сохраняется, и в

диссипативных системах (системах с «трением»). Мы в дальнейшем будем рассматривать в основном диссипативные системы.

Выявление и анализ детерминированного хаоса оказывается весьма полезным при управлении сложными движениями в самоорганизующихся системах.

Во-первых, если в некоторой динамической системе диагностируется динамический хаос, то можно надеяться, что некоторым изменением параметров (настройкой) можно упорядочить ее движение.

Во-вторых, переход от детерминированного к хаотическому движению происходит по некоторым универсальным сценариям, число которых невелико. Информация об этих сценариях может быть использована для назначения режимов работы, исключающих возникновение хаотических колебаний.

В-третьих, в современной теории нелинейных динамических систем развиты новые методы количественного анализа хаотических колебаний, которые с успехом могут быть использованы для идентификации характера движения и состояния объектов управления.

Возникновение хаотических движений в детерминированных системах возможно, если траектории движения обнаруживают сильную зависимость от начальных условий (траектории «разбегаются»). Впервые на это при изучении неинтегрируемых движений трех тел обратил внимание А. Пуанкаре (H. Poincaré, 1892 г.), который писал:

«... иногда небольшая разница в первоначальном состоянии вызывает большое различие в окончательном явлении. Небольшая погрешность в первом вызвала бы огромную ошибку в последнем. Предсказание становится невозможным...» Подобные идеи о возможности проявления хаотических движений в детерминированных системах высказывались также Биркгофом (G.D. Birkhoff, 1935 г.).

Таким образом, детерминированный хаос проявляется в том случае, когда задача Коши для уравнений движения является некорректно поставленной.

Напомним, что математическая задача называется корректно поставленной, если:

- 1) ее решение существует;
- 2) оно единственное;
- 3) решение устойчиво относительно малых изменений исходных данных (т. е. малые изменения исходных данных ведут к малому изменению решения).

Из предыдущего ясно, что возникновение детерминированного хаоса связано с нарушением третьего условия (условия устойчивости).

Простейшая механическая система, в которой наблюдается «разбегание» траекторий, представляет собой бильярдный шар, ударяющийся и упруго отскакивающий от сторон эллиптического бильярдного стола (рис. 1.6).

Если начальное положение шара (1) чуть-чуть изменится (положение 2), то уже через несколько соударений шар будет двигаться по совершенно другой траектории. Эта неустойчивость приводит к тому, что при сохранении энергии для столов определенной формы шар случайно блуждает по столу, никогда не повторяя свою траекторию.

Известным литературным примером, иллюстрирующим сильную зависимость эволюции системы от начальных условий, является научно-фантастический рассказ Р. Бредбери «...И грянул гром», в котором гибель бабочки, случайно раздавленной в прошлом путешественником во времени, так влияет на ход истории, что приводит к существенному изменению настоящего.

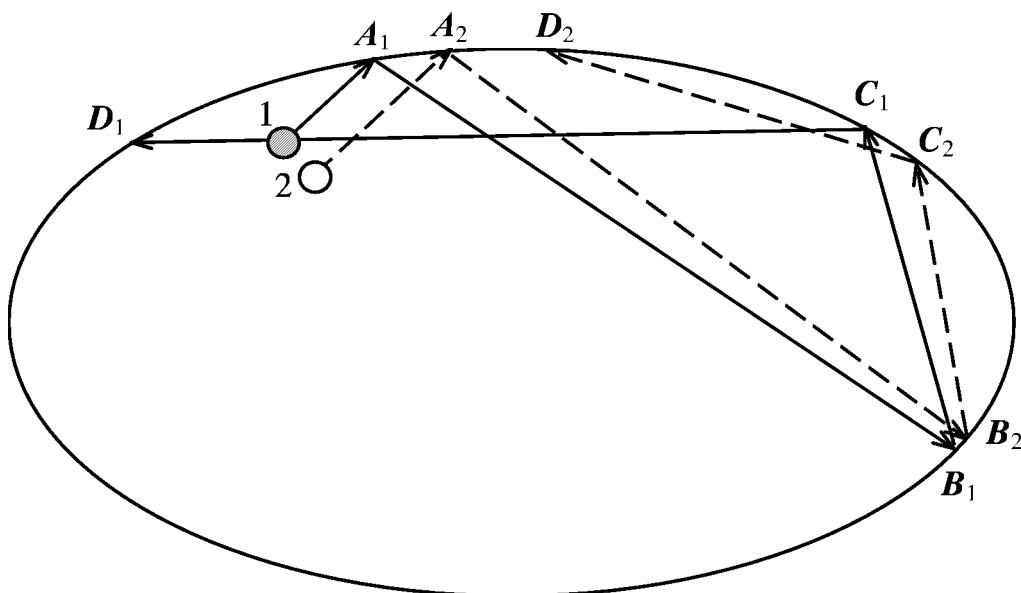


Рис. 1.6. «Разбегание» траекторий бильярдного шара

### 1.2.1. Странный аттрактор

Эволюцию динамических систем удобно представить в геометрической форме, используя фазовое пространство. Рассмотрим, например, движение маятника с трением, описываемое системой уравнений

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = -mg \frac{x}{l} - \alpha v, \\ \frac{dx}{dt} = v, \end{cases}$$

где  $x$  – отклонение маятника от точки равновесия,  
 $m$  – масса маятника,  
 $\alpha$  – коэффициент трения,  
 $v$  – скорость движения маятника,  
 $l$  – длина маятника,  
 $g$  – ускорение свободного падения.

На фазовой плоскости  $(x, v)$  движение маятника представляется в виде спирали, наматывающейся на точку  $O(0, 0)$  (рис. 1.7, а). Эта точка как бы «притягивает» к себе все траектории движения, из каких бы точек они ни исходили. Поэтому точка равновесия  $O(0, 0)$  называется *аттрактором* этой динамической системы (от слова *attract* – притягивать).

Поскольку часто нас интересует только установившееся движение, то при рассмотрении диссипативных систем можно ограничиться нахождением их аттракторов – областей фазового пространства, притягивающих траектории. Это значительно облегчает исследование динамических систем.

Кроме точек равновесия, динамические системы могут иметь аттракторы в виде *предельных циклов* – замкнутых кривых в фазовом пространстве (см. рис. 1.7, б). Так как при движении по замкнутой кривой изображающая точка все время возвращается в некоторое фиксированное состояние, то предельный цикл соответствует периодическим колебаниям.

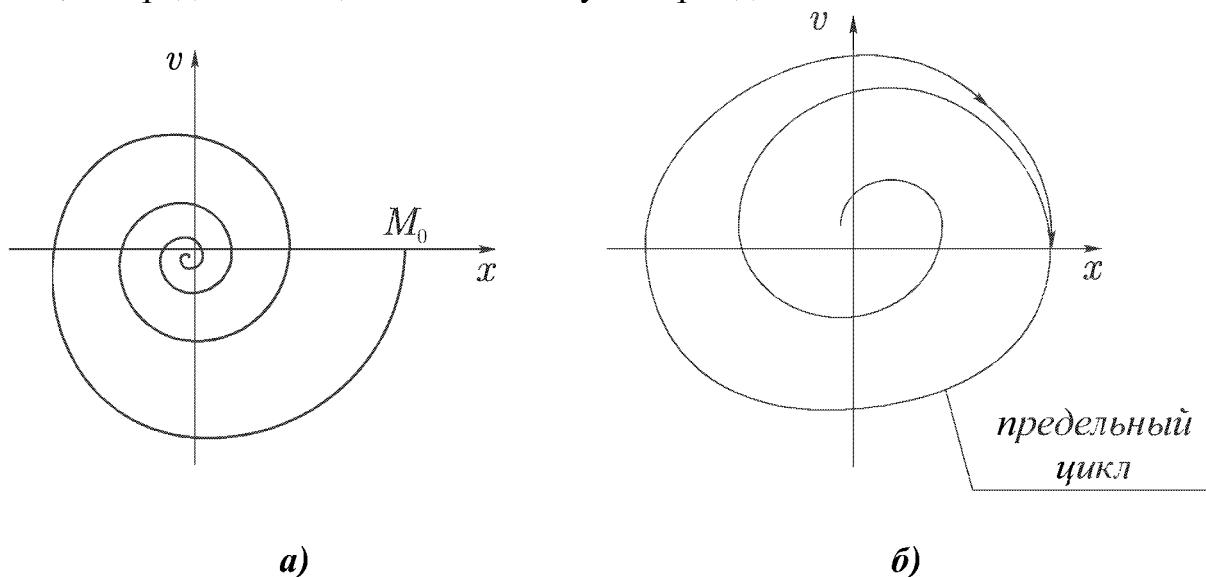


Рис. 1.7. Аттракторы динамических систем

При изменении параметров динамической системы может меняться число аттракторов и их устойчивость. Подобные явления называются *биfurкациями*, а те значения параметров, при которых изменяются качест-

венные свойства движения, называются *критическими* или *бифуркационными*.

Явление бифуркации можно рассмотреть на примере динамической системы

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x + y - x(x^2 + y^2),$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + \lambda y - y(x^2 + y^2).$$

Перейдя к полярным координатам,  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , получим

$$\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi = r \sin \varphi + \lambda r \cos \varphi - r^3 \cos \varphi,$$

$$\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi = \lambda r \sin \varphi - r \cos \varphi - r^3 \sin \varphi,$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Сложив первое уравнение, умноженное на  $\cos \varphi$ , со вторым уравнением, умноженным на  $\sin \varphi$ , и отняв от второго уравнения, умноженного на  $\cos \varphi$ , первое уравнение, умноженное на  $\sin \varphi$ , получим

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(\lambda - r^2), \\ \frac{d\varphi}{dt} = -1. \end{cases} \quad (1.4)$$

Из (1.4) следует, что исходная система имеет решения, соответствующие постоянным значениям  $r = r_c$ . Они могут быть найдены из условия  $\frac{dr}{dt} = 0$ , откуда  $r_c = r_0 = 0$  и  $r_c = r_1 = \sqrt{\lambda}$  (при  $\lambda > 0$ ).

Первое решение соответствует точке покоя  $O(0, 0)$ , а второе – предельному циклу, представляющему собой движение по окружности с радиусом против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью  $\omega = 1$ .

Исследуем устойчивость этих решений.

Предположим, что система в момент времени была выведена из положения равновесия  $O(0, 0)$  и отклонилась от нее на малое расстояние  $\varepsilon$ . Полагая  $r = r_0 + \varepsilon = \varepsilon$ , получим из (1.4) с точностью до линейных по  $\varepsilon$  членов

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \lambda \epsilon,$$

откуда с учетом начального условия имеем

$$\epsilon = \epsilon_0 e^{\lambda t}. \quad (1.5)$$

Согласно (1.5) при  $\lambda < 0$  значение  $\epsilon$  экспоненциально убывает со временем, т. е. точка  $O(0, 0)$  является устойчивой точкой равновесия (аттрактором).

При  $\lambda > 0$  начальное малое отклонение растет по закону  $e^{\lambda t}$ , т.е. точка равновесия теряет устойчивость.

Для исследования устойчивости предельного цикла положим  $r = r_1 + \epsilon_1$ , что дает

$$\frac{d\epsilon_1}{dt} = -2\lambda \epsilon_1,$$

откуда  $\epsilon_1 = \epsilon_0 e^{-2\lambda t}$ , т.е.  $\epsilon_1 \rightarrow 0$  при  $\lambda > 0$  (устойчивый предельный цикл), а при  $\lambda < 0$  отклонение от предельного цикла со временем возрастает.

Величина  $\lambda$  в (1.5), характеризующая экспоненциальную скорость расходления (или схождения) двух исходно близких траекторий с  $\epsilon_0 = 0$  и  $\epsilon_0 > 0$ , называется *показателем Ляпунова*. Потеря устойчивости движения происходит в тот момент, когда показатель Ляпунова становится положительным. Из этого примера ясно, что показатель Ляпунова определяет чувствительность траектории к изменению начальных условий. Поэтому эта величина может быть использована в качестве количественной характеристики, «измеряющей» детерминированный хаос.

Таким образом, при постепенном увеличении от отрицательных значений к положительным в точке  $\lambda = 0$  происходит бифуркация: устойчивая точка равновесия переходит в устойчивый предельный цикл. Эта бифуркация называется бифуркацией Хопфа (E. Hopf, 1942 г.). Соответствующая бифуркационная диаграмма приведена на рис. 1.8.

Точка покоя и предельный цикл являются примерами *инвариантных множеств* – встроенных в фазовое пространство объектов, отображающихся сами на себя в ходе эволюции системы.

Совокупность инвариантных множеств, имеющихся в фазовом пространстве данной динамической системы, во многом определяет характер движения, поэтому эта совокупность называется *фазовым портретом системы*.

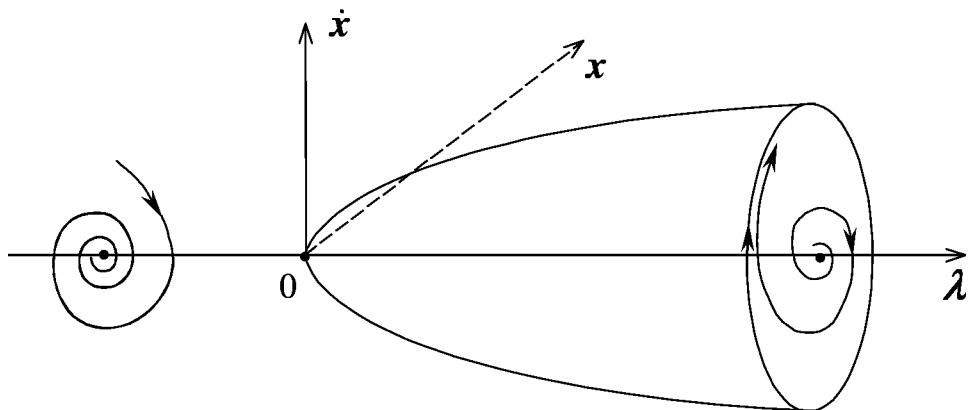
Решающую роль в определении структуры фазового портрета играет теорема единственности решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений, связанная с именами О. Коши (A.Cauchy, 1820-30 гг.) и Э. Пикара

(E. Picard, 1891-96 гг.). Эта теорема утверждает, что при довольно «мягких» условиях на функции  $f_i(x)$  существует единственное решение задачи

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n); \quad (1.6)$$

$$x_i|_{t=0} = x_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

если только начальное состояние не представляет собой точку покоя.



**Рис. 1.8. Бифуркация Хопфа**

При рассмотрении фазового пространства это означает, что пересечение двух траекторий в точках, отличных от точки покоя, невозможно. Если же говорить о предсказуемости движения, то именно единственность решения задачи Коши долгое время поддерживала уверенность в невозможности случайных движений динамических систем. Однако, как уже отмечалось, движение может стать непредсказуемым, если траектории неустойчивы относительно малого изменения начальных значений.

«Разбегание» траекторий само по себе еще не приводит к стохастическому поведению. Необходимо еще существование некоторых статистических закономерностей, наличие средних по времени величин, связанных с тем, что система вновь и вновь возвращается в состояния, близкие к исходным. Такие движения возможны, если в фазовом пространстве имеются незамкнутые траектории, бесконечно и беспорядочно блуждающие внутри некоторой ограниченной области. Подобные траектории образуют инвариантные множества, которые в случае диссипативных систем являются аттракторами.

Более подробные исследования показывают, что аттракторы, на которых реализуются хаотические движения, имеют фрактальную структуру, т.е. характеризуются дробной размерностью. Причину этого легко понять, если процесс перепутывания траекторий представить себе как перемешивание «фазовой жидкости».

Возьмем множество траекторий, которые в начальный момент времени исходят из близких точек, образующих маленький фазовый объем – каплю «фазовой» жидкости. Предположим, что эта «капля» отличается по цвету от остальной жидкости внутри рассматриваемой области фазового пространства (рис. 1. 9).

Если в этой области есть устойчивая точка покоя, то «капля» стянется в эту точку (см. рис. 1.9, а). При наличии аттрактора в виде предельного цикла капля через некоторое время растягивается вдоль него и «окрасит» лишь узкий поясок в его окрестности (см. рис. 1.9, б). На аттракторе хаотической системы (см. рис. 1.9, в) капля жидкости испытывает повторное влияние растяжения и изгиба, что, как мы уже убедились на примере преобразования подковы (п. 1.1.3), приводит к образованию фрактальной структуры. При этом «капля» хорошо перемешивается с неокрашенной жидкостью и образует характерные разводы, более или менее равномерно окрашивая всю притягивающую область.

За связь с непредсказуемым хаотическим движением, а также за наличие фрактальной структуры аттракторы динамических систем, демонстрирующих хаотическое движение, получили название *странных аттракторов* (strange attractor). Понятие о странных аттракторах было введено Рюэлем и Таккенсом (D. Ruelle, F. Takens, 1971 г.) при обсуждении перехода к турбулентности.

Хаотические движения детерминированных систем впервые обнаружил американский метеоролог Э.Н. Лоренц (E.N. Lorenz, 1963 г.), исследовавший систему вида

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz. \end{cases} \quad (1.7)$$

При  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  и  $r = 28$  эта система имеет странный аттрактор с размерностью  $D = 2,05 \pm 0,01$ , изображение которого, образованное интегральными кривыми в фазовом пространстве, удивительно напоминает крылья бабочки с узором, похожим на разводы, получаемые при перемешивании красок.

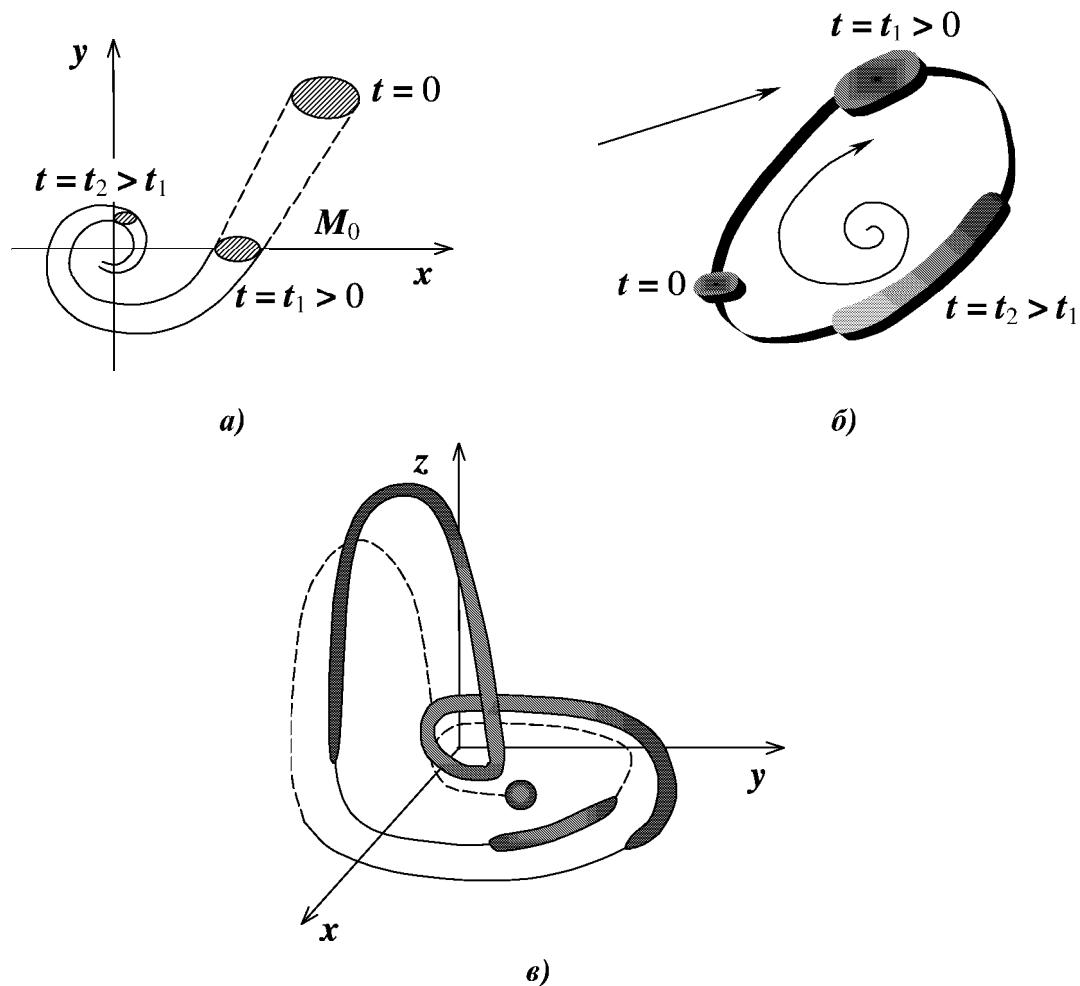


Рис. 1.9. Эволюции капли «фазовой» жидкости

Отметим, что система (1.7) была выведена Лоренцем при упрощенном моделировании процессов тепловой конвекции в земной атмосфере. Из наличия у этой системы странного аттрактора следует, что погода и климат в своей основе непредсказуемы, так что долгосрочный прогноз погоды невозможен. Чувствительность к начальным условиям, ведущую к хаосу в системе (1.7), Э. Лоренц назвал «эффектом бабочки», поскольку потоки воздуха в атмосфере земли при такой чувствительности могут зависеть от взмаха крыльев бабочки. Говорят также, что полет мухи в Кембридже может привести к изменению погоды в Индии [176].

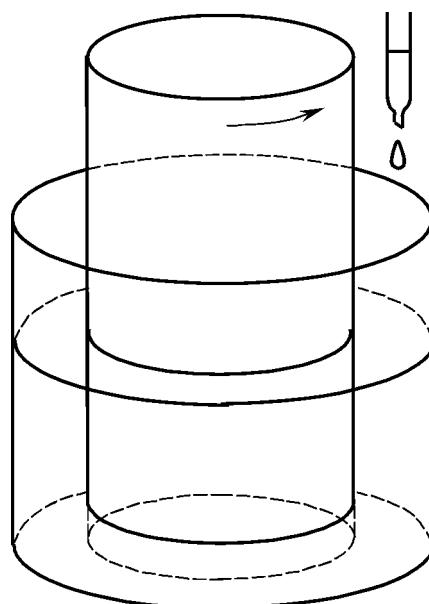
Еще одним проявлением аналогии между перемешиванием жидкостей и детерминированным хаосом является следующий удивительный опыт, описанный в книге Дж. Уокера «Физический фейерверк» [218].

Если налить немного глицерина в промежуток между стенками двух коаксиальных цилиндрических стаканов близких диаметров (рис. 1.10), капнуть туда несколько капель краски и повернуть внутренний стакан примерно на 10 оборотов, то краска и глицерин хорошо перемешаются. Однако если после этого вы повернете его на столько же оборотов в обрат-

ном направлении, то краска отделится от глицерина и ее распределение будет примерно таким же, как до вращения.

Если же краска и глицерин перемешиваются достаточно долго, то возврат к первоначальному состоянию невозможен.

Точно так же движение динамических систем, подверженных динамическому хаосу, можно обратить на малых масштабах времени, когда неустойчивость не успевает себя проявить.



**Рис. 1.10. Перемешивание краски и глицерина**

Так, если после нескольких соударений бильярдного шара со стенками (см. рис. 1.6) заставить его двигаться с той же скоростью, но в обратном направлении, то весьма вероятно, что шар повторит свою траекторию и вернется в исходную точку. Если же число соударений при прямом движении столь велико, что шар «забывает» о своем первоначальном положении, то обратить движение уже не удастся, как не удастся собрать капли краски после достаточно долгого вращения стакана в описанном выше опыте.

Примеры проявления детерминированного хаоса, рассмотренные выше, связаны с расходжением траекторий по закону  $e^{\lambda t}$ , где  $\lambda$  – показатель Ляпунова. Для таких систем непрерывная зависимость решений от начальных условий нарушается лишь при  $t \rightarrow \infty$ . В работе [301] хаос такого рода предложено называть «слабым» (weak) хаосом. Там же отмечено, что возможны хаотические движения, связанные с нарушением непрерывной зависимости решений от начальных условий за конечное (и даже сколь угодно малое) время.

Для иллюстрации этого вида неустойчивости рассмотрим уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0} = 0 \quad \text{и} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (1.8)$$

Эта задача имеет тривиальное решение  $u \equiv 0$ . Если же вместо (1.8) рассмотреть слегка отличное (возмущенное) начальное условие

$$\frac{\partial u}{\partial t} = e^{-\sqrt{n}} \cos nx,$$

то получим

$$u = f(x, t) \equiv \frac{1}{n} e^{-\sqrt{n}} \cos nx \operatorname{sh} nt.$$

Легко видеть, что при  $n \rightarrow \infty$   $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} \rightarrow 0$ , т. е. новое начальное

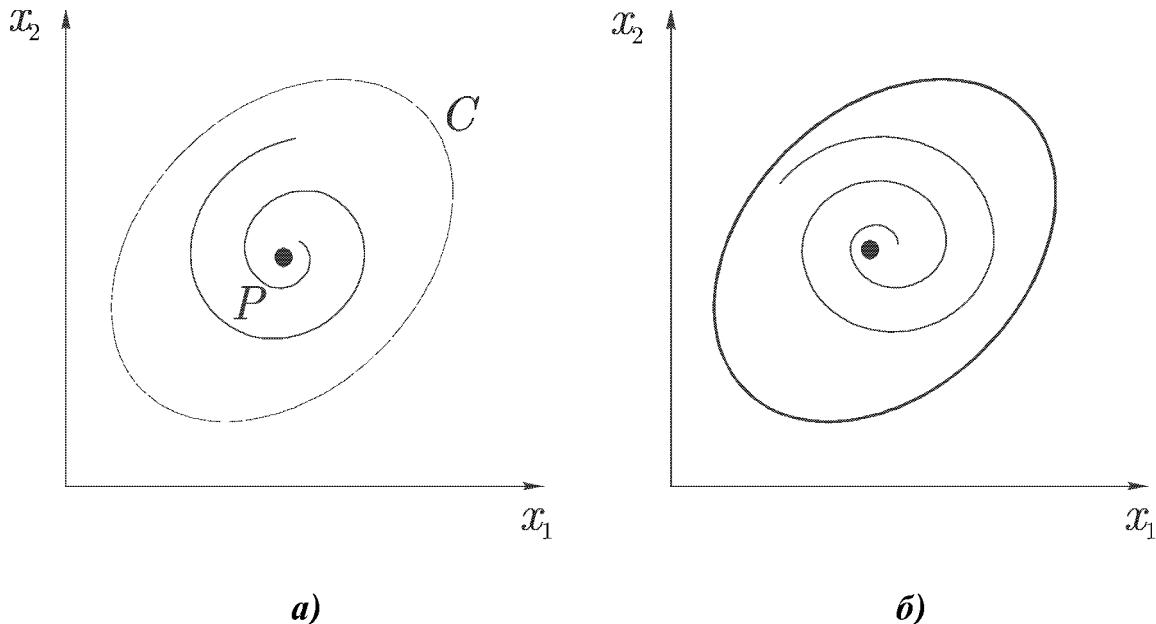
условие стремится к невозмущенному, однако новое решение при сколь угодно малом времени может (за счет члена  $\operatorname{sh} nt$ ) сколь угодно сильно отличаться от невозмущенного решения  $u \equiv 0$ .

Хаос, связанный с неустойчивостью такого типа, называется «сильным» (strong) и может проявиться, например, при распространении возмущений в средах, нелинейные свойства которых приводят к смене гиперболического типа уравнений движения на эллиптический [301]. В частности, это возможно в эластичных средах, имеющих падающий участок на зависимости напряжения от растяжения.

### 1.2.2. Хаос и размерность систем

Возможность проявления детерминированного хаоса в динамических автономных системах вида (1.6) существенно зависит от их размерности. Можно показать, что в двумерном пространстве хаотические траектории невозможны, поскольку в нем могут существовать только такие аттракторы, как точки равновесия, бесконечность и предельные циклы. Допустим, например, что диссипативная система имеет (рис. 1.11) два инвариантных множества: точку равновесия  $P$  и предельный цикл  $C$

[176]. (Напомним, что инвариантными называются множества точек в фазовом пространстве, по которым, раз попав на них, все остальное время движется изображающая точка).



**Рис. 1.11. Точка равновесия и предельный цикл**

Траектория, начинающаяся внутри кривой  $C$ , остается там навсегда, так как в противном случае она пересекла бы эту кривую, что, по теореме единственности, невозможно. Той же теоремой запрещены и самопересечения траектории движения. Тогда единственными возможными остаются движение к точке  $P$  (см. рис. 1.11, а) или движение к предельному циклу  $C$  (см. рис. 1.11, б).

Для трехмерных систем и систем более высокого порядка ограничения, накладываемые теоремой единственности, оказываются более слабыми, поскольку траектории имеют возможность избегать друг друга, выходя из плоскости в пространство. Благодаря этой гибкости оказывается возможным одновременное осуществление двух условий стохастичности:

а) все (или почти все) соседние траектории внутри некоторой области разбегаются;

б) все они остаются внутри некоторого ограниченного объема фазового пространства.

В случае неавтономных уравнений хаос возможен и в системах второго порядка. Так, в некоторой области изменения параметров хаотичными могут стать колебания нелинейного осциллятора под воздействием внешней периодической силы, описываемые уравнением Г. Дюффинга (G. Duffing, 1918 г.)

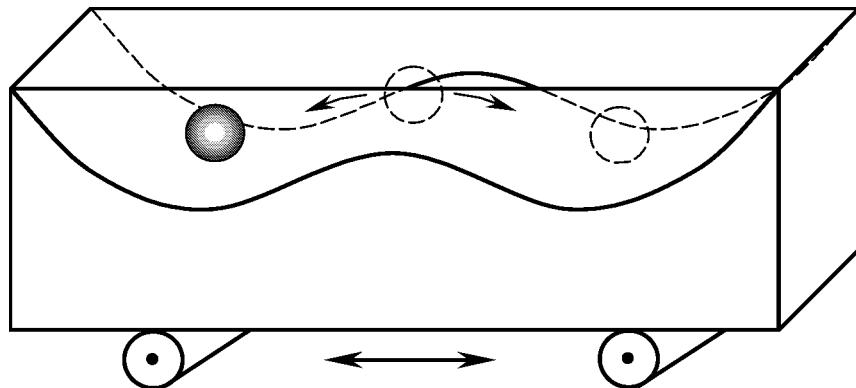
$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + ax + bx^3 = F \cos \omega t. \quad (1.9)$$

Заметим, что формально неавтономное уравнение второго порядка можно записать в виде системы трех автономных уравнений. Так, (1.9) может быть переписано в виде

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -\delta y - ax - bx^3 + F \cos z, \\ \frac{dz}{dt} = \omega. \end{cases}$$

Это в какой-то мере объясняет возникновение хаотических движений в неавтономных системах второго порядка.

То, что периодическое возмущение может привести к случайному поведению, иллюстрирует простая механическая система, представляющая собой шарик в плоском ящике с неровным дном (рис. 1.12).



**Рис. 1.12. Хаотическое движение шарика в ящике с неровным дном**

Когда этот прибор покоятся, то шарик имеет два устойчивых и одно неустойчивое положения равновесия. Если же ящик совершает горизонтальные периодические движения достаточно большой амплитуды, то шарик начинает беспорядочно перепрыгивать из одной ямы в другую. «Разбегание» траекторий в этой системе связано с наличием неустойчивой точки равновесия на вершине среднего холмика.

Если рассматривать уравнения с отклоняющимся аргументом, то хаотические решения могут иметь место и в случае более простых систем – обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x, x(t-\tau)) \quad (1.10)$$

и даже алгебраических уравнений

$$x = f(x(t), x(t-\tau))$$

или

$$x_n = f(x_n, x_{n-1}), \quad (1.11)$$

где  $x_n = x(n\tau)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\tau > 0$  – временная задержка (лаг).

Введение отклоняющегося аргумента в дифференциальные уравнения позволяет уменьшить их размерность и тем самым избежать трудностей при идентификации математических моделей, содержащих ненаблюдаемые (т.е. не измеряемые напрямую) физические переменные (п. 2.2.4). Следовательно, уравнения с отклоняющимися аргументами являются образами некоторых систем более высокой размерности, наподобие двумерных теней от объемных предметов на стенах пещеры Платона. Поэтому неудивительно, что в случае дифференциально-разностных и разностных уравнений хаос может проявиться и в системах, порядок которых меньше не только трех, но и двух.

Вспомним также о том, что порядок обыкновенного дифференциального уравнения совпадает с числом начальных условий, необходимых для однозначного определения его решения. Поскольку постановка начальной задачи для уравнения (1.10) требует задания значений  $x$  на всем интервале, содержащем бесконечно большое число точек, то порядок уравнения с отклоняющимся аргументом можно считать (по этому критерию) бесконечно большим. Это является еще одним объяснением возможности возникновения хаоса в системах с запаздыванием.

В качестве примера уравнения вида (1.10), допускающего хаотические решения, приведем уравнение Маки-Гласса (M.C. Mackey, L. Glass, 1977 г.)

$$\frac{dx}{dt} = -bx + a \left[ \frac{x(t-\tau)}{1+x^n(t-\tau)} \right], \quad n > 1, \quad (1.12)$$

описывающего процессы регенерации больных кровяных шариков при хронической лейкемии [18].

Примером разностного уравнения, имеющего хаотические решения, является логистическое отображение

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n), \quad (1.13)$$

введенное в 1845 г. П.Ф. Ферхюльстом для описания динамики популяций в закрытой среде ( $x_n$  – относительная численность особей популяции в  $n$ -й год). Линейный член в правой части (1.13) описывает рост или рождение, а нелинейный член ответственен за ограничение роста, связанное с недостатком энергетических или пищевых ресурсов (величина  $1 - x_n$  пропорциональна «свободной» части жизненного пространства).

Модель (1.13) весьма полезна для иллюстрации некоторых закономерностей перехода к хаосу, поэтому исследуем ее более подробно.

Графическое решение уравнения (1.13) может быть получено путем построения графика функции  $f(x_n) = \mu x_n (1 - x_n)$  в координатах  $(x_n, x_{n+1})$  (рис. 1.13).

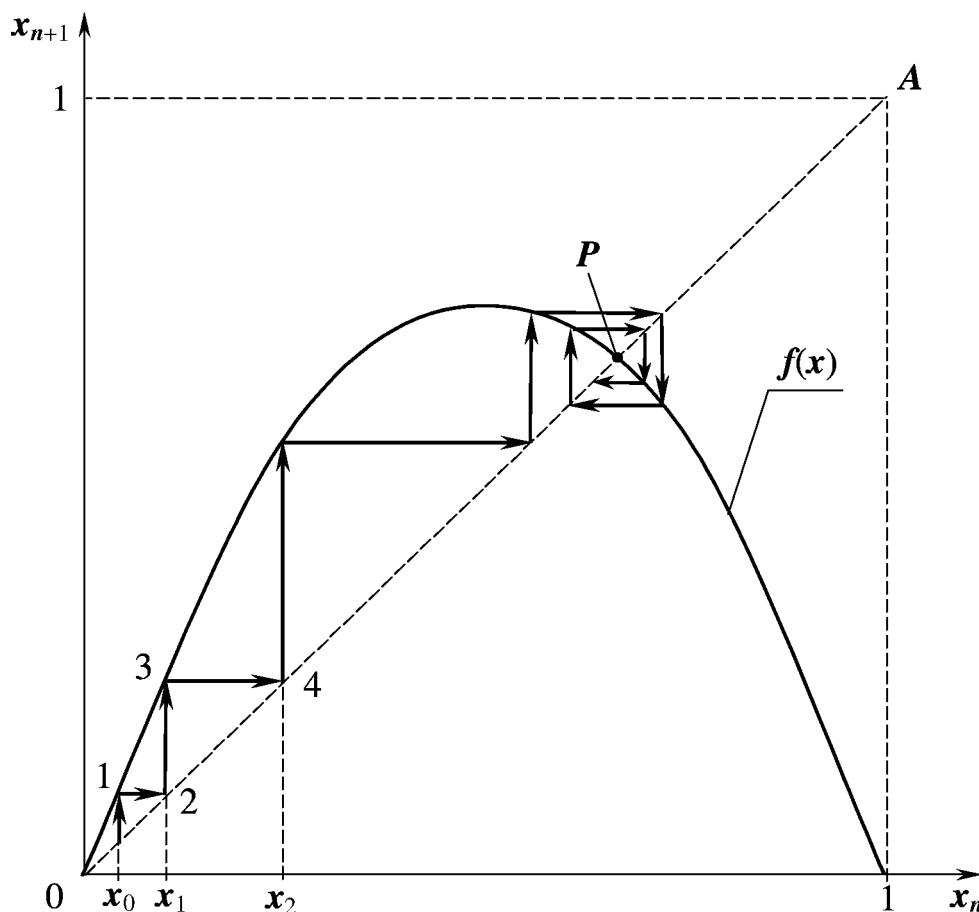


Рис. 1.13. Логистическое отображение

Задавшись начальным значением  $x_0$ , последующее значение  $x_1$  можно найти, возведя вертикаль из точки  $x = x_0$  до пересечения ее с кривой  $f(x)$  в точке 1, ордината которой равна  $x_1 = f(x_0)$ . Если теперь из точки 1 провести горизонталь до пересечения с биссектрисой  $OA$ , то абсцисса точки пересечения 2 будет равна  $x_1$ , поэтому вертикаль из точки 2 пересечет кривую  $f(x)$  в точке 3 с ординатой  $x_2$  и т.д. Таким образом, динамика системы (1.13) изобразится ломаной кривой 123456..., которая «притягивается» к точке равновесия  $P$ .

Отметим, что точки равновесия  $x_*$  определяются из решения уравнения  $x_* = f(x_*) \equiv \mu x_*(1 - x_*)$ .

Для функции, представленной на рис. 1.13, это уравнение имеет два решения:

$$x_* = 0 \quad \text{и} \quad x_* = 1 - \frac{1}{\mu},$$

т.е. кроме точки  $P$  имеется еще одна точка равновесия – начало координат  $O$ . Построив ломаную траекторию, выходящую из любой близкой к  $O$  точки, можно показать, что эта точка равновесия является неустойчивой: малейшее смещение вправо от  $O$  приводит к быстрому росту величины этого смещения.

Рассмотрим типы движений, возникающих при различных значениях параметра  $\mu$ .

1.  $0 < \mu \leq 1$ . Система имеет только одно положение равновесия  $x_* = 0$  и оно устойчиво. Так, если  $\mu = 0,5$  и  $x_0 = 0,8$ , то  $x_1 = 0,08$ ,  $x_2 = 0,0368$ ,  $x_3 = 0,0177$ , ...
2.  $1 < \mu \leq 3$ . При  $\mu = 1$  происходит бифуркация, в результате которой точка равновесия  $x_* = 0$  теряет устойчивость и появляется новый аттрактор  $x_{*2} = 1 - \frac{1}{\mu}$ . Так, если  $\mu = 2$  ( $x_{*2} = 0,5$ ) и  $x_0 = 0,1$ , то  $x_1 = 0,18$ ,  $x_2 = 0,2952$ ,  $x_3 = 0,4161$ ,  $x_4 = 0,4859$ ,  $x_5 = 0,4996$ , ...
3.  $3 < \mu \leq 1 + \sqrt{6} \approx 3,45$ . При  $\mu = \mu_1 = 3$  точка равновесия  $x_{*2}$  становится неустойчивой и вместо нее появляется устойчивый предельный цикл, соответствующий колебаниям с периодом 2 (рис. 1.14, а).
4.  $1 + \sqrt{6} < \mu \leq \mu_\infty = 3,5699$ . При  $\mu = \mu_2 = 1 + \sqrt{6}$  двукратный цикл сменяется четырехкратным (см. рис. 1.14, б), который, в свою очередь, при  $\mu = \mu_3 \approx 3,54$  сменяется циклом периода 8 и т.д.

Таким образом, за счет последовательного удвоения периода, движение постепенно усложняется до тех пор, пока при значении

$\mu_\infty \approx 3,56994$  не произойдет переход к хаосу (см. рис. 1.14, в). Величина  $\mu_\infty$  является точкой сгущения последовательности бифуркационных значений  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$ , причем, начиная с некоторого  $n$ , выполняется асимптотический закон Фейгенбаума

$$\mu_n = \mu_\infty - \frac{c}{\delta^n}, \quad (1.14)$$

где  $\delta = 4,66920$  – число Фейгенбаума.

Закон (1.14) имеет универсальный характер, поскольку он проявляется во многих численных и физических экспериментах в системах самой различной природы. Можно утверждать, что переход к хаосу путем последовательного удвоения периода движения, подчиняющийся закону (1.14), является одним из универсальных сценариев возникновения случайных движений в детерминированных системах. Другие возможные пути перехода к хаосу широко обсуждаются в специальной литературе [129, 163, 176, 186, 187, 243].

### 1.2.3. Отображение Пуанкаре

Удобным способом наглядного представления эволюции динамических систем с размерностью больше двух является *отображение Пуанкаре*, при построении которого отказываются от непрерывного слежения за движением и фиксируют только значения динамических переменных в некоторые дискретные моменты времени  $t_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

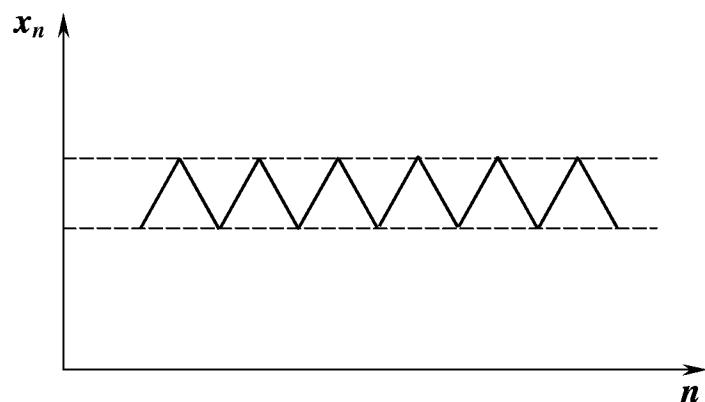
Часто эти моменты времени соответствуют каким-то существенным изменениям в динамике системы (ее «роковым минутам»). Так, Э. Лоренц изучал последовательности экстремумов, достигаемых динамическими переменными.

При использовании отображений Пуанкаре движение системы описывается разностными уравнениями вида

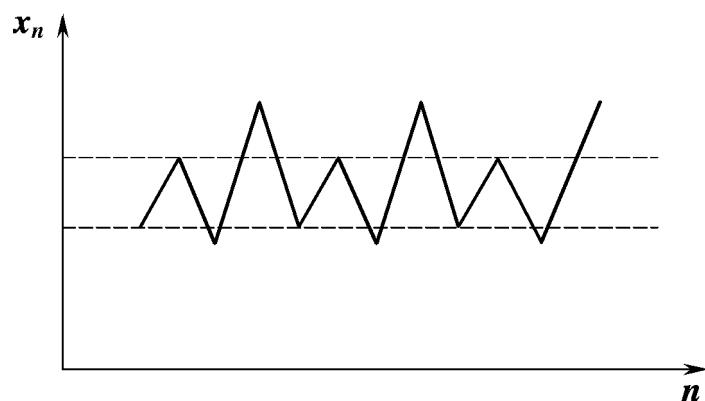
$$x_i^{(n+1)} = \varphi_i(x^{(n)}), \quad i = 1, 2, \dots, k < n, \quad (1.15)$$

где  $x_i^{(n)} = x_i(t_n)$  – значение  $i$ -й компоненты в момент времени  $t_n$ .

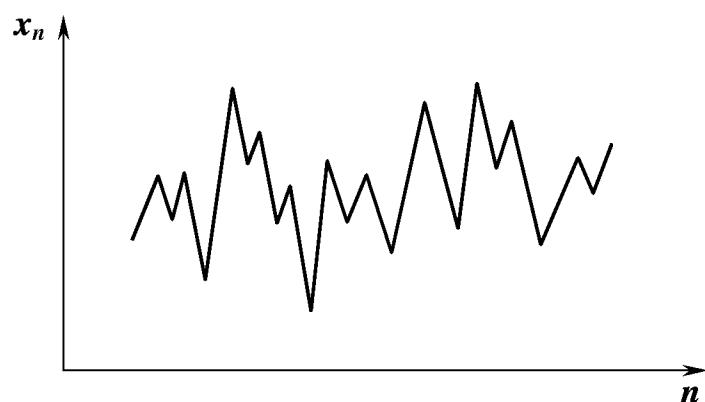
Для примера рассмотрим систему, эволюция которой описывается тремя автономными дифференциальными уравнениями относительно переменных  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Отображение Пуанкаре для этой системы можно построить, проведя в трехмерном фазовом пространстве  $(x, y, z)$  плоскость



a)



б)



в)

Рис. 1.14. Усложнение движения по логистическому закону

$z = z_0 = \text{const}$  и следя за точками  $(x_n, y_n)$ , в которых траектория движения пересекает плоскость, следя в одном выделенном направлении (например снизу вверх, рис. 1.15).

Полученная при этом картина называется *сечением Пуанкаре* и позволяет вместо системы трех дифференциальных уравнений рассмотреть двумерное отображение

$$x_{n+1} = g(x_n, y_n),$$

$$y_{n+1} = h(x_n, y_n).$$

В задаче с  $n$  переменными сечение Пуанкаре может быть получено с помощью некоторой выделенной гиперповерхности в  $n$ -мерном фазовом пространстве.

Непосредственный анализ непрерывных интегральных кривых часто оказывается невозможным, в то время как отображения Пуанкаре помогают различать движения качественно отличающихся друг от друга типов (например периодические, квазипериодические и хаотические движения).

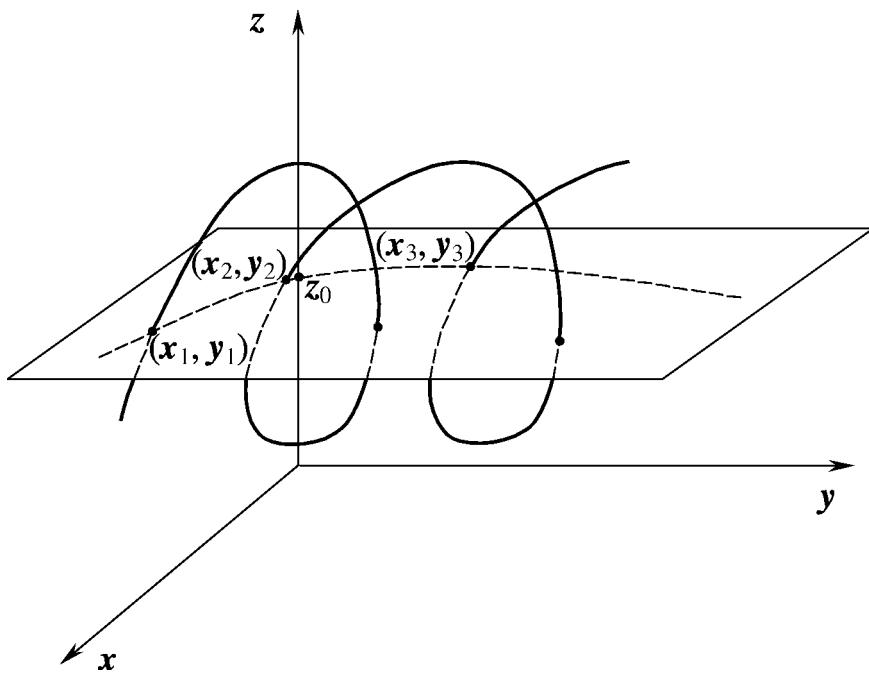


Рис. 1.15. Отображение Пуанкаре

### 1.2.4. Корреляционная размерность

В нелинейной динамике применяются методы регистрации детерминированных хаотических колебаний и их количественного анализа, основанные на применении таких мер, как фрактальные размерности, энтропия Колмогорова, показатели Ляпунова [129, 163, 176, 186, 187, 243]. Широко применяемой мерой упорядоченности движения является корреляционная размерность  $\nu$ , которая является нижней оценкой хаусдорфовой размерности странного аттрактора и определяется через корреляционный интеграл

$$C(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N h(\varepsilon - |\vec{x}_i - \vec{x}_j|) \right], \quad (1.16)$$

где  $h(z)$  – функция Хевисайда:

$$h(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0, \end{cases}$$

$\vec{x}_i$  – вектор, описывающий положение изображающей точки в фазовом пространстве в момент времени  $t_i = t_0 + i\tau$ ,  $i = 1 \dots N$ ,  $\tau$  – некоторый заданный промежуток времени,  
 $N$  – объем выборки.

Величина  $C(\varepsilon)$  определяет относительное число пар точек, расстояние между которыми не больше  $\varepsilon$ . При малых  $\varepsilon$  корреляционный интеграл  $C(\varepsilon) \sim \varepsilon^\nu$ , поэтому размерность  $\nu$  можно определить по наклону зависимости  $\ln C$  от  $\ln \varepsilon$ , полученной расчетом  $C(\varepsilon)$  по (1.16) при различных значениях  $\varepsilon$  для достаточно больших  $N$  (конкретные рекомендации по проведению соответствующих вычислений приведены там же). Часто оказывается, что измеряемой является лишь одна из координат вектора  $\vec{x}(t)$ . В этом случае размерность странного аттрактора может быть восстановлена с помощью процедуры Паккарда–Такенса [163, 243], описание которой приводится ниже.

Пусть  $x_i$  – реализация одной из координат фазового пространства системы  $x(t)$ :  $x_i = x(t_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Введем в рассмотрение новое фазовое пространство (пространство вложений) размерности  $m$ , точки которого определяются векторами  $\vec{Y}_j^{(m)} = \{x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+m-1}\}$ , сконструированными из последовательных значений величины  $x$  ( $j = 1, 2, \dots, n = N - m + 1$ ). При изменении  $t$  мы получим в этом пространстве траекторию, воспроизводя-

шую некоторое множество, корреляционную размерность которого  $\nu_m$  можно вычислить через корреляционный интеграл

$$C_m(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{j,k=1}^n h\left(\varepsilon - \left| \overset{\rightarrow}{Y}_j^{(m)} - \overset{\rightarrow}{Y}_k^{(m)} \right| \right)$$

по наклону зависимости  $\ln C_m$  от  $\ln \varepsilon$ . Изменяя размерность векторов  $\vec{Y}$ , проанализируем зависимость  $\nu_m$  от  $m$ . Очевидно, что при малых  $m$  размерность  $\nu_m$  с ростом  $m$  должна увеличиваться. Однако, если регистрируемый случайный сигнал есть проявление детерминированного хаоса, то при некотором  $m = m_0$  величина  $\nu_m$  перестает расти. Достигнутое при этом значение  $\nu_{m_0}$  принимается за размерность  $\nu$  странного аттрактора исходной системы и называется размерностью реализации. Если же рост  $\nu_m$  продолжается без насыщения, то это свидетельствует о том, что наблюдаемый сигнал шумовой (т.е. невоспроизводим с помощью алгоритма).

Таким образом, обычный шумовой случайный процесс можно рассматривать как движение системы на аттракторе бесконечной размерности. Конечная размерность  $\nu$  означает, что данный сигнал можно воссоздать с помощью динамической системы. При решении задач управления технологическими процессами важно отличать детерминированный хаос от обычных «шумов» или помех. Дело в том, что наличие внутреннего порядка в детерминированном хаосе позволяет, в принципе, управлять им, в то время как шумовой хаос неуправляем.

Показано, что минимальное число динамических переменных, необходимое для описания наблюдаемого движения, равно  $[\nu] + 1$ , где  $[\nu]$  – целая часть  $\nu$ . Эта оценка может быть использована, в частности, для решения одной из самых сложных задач, возникающих при идентификации модели рассматриваемого процесса – задачи определения ее сложности.

При реконструкции динамического аттрактора по замерам одной переменной возникает вопрос: какой размерности должно быть вложенное пространство, чтобы отобразить все топологические особенности исходного аттрактора? Ф. Токенсом доказано, что для почти любых наблюдаемой реализации  $x(t)$  и времени задержки  $\tau$  аттрактор вложенного пространства размерности  $m$  будет иметь те же свойства (ту же размерность), что и исходный, если только  $m \geq m_0 = 2D + 1$ , где  $D$  – хаусдорфова размерность странного аттрактора [163].

Величина корреляционной размерности является мерой упорядоченности движения и в качестве таковой может служить диагностическим критерием, определяющим состояние объектов управления.

---

## Глава 2. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ НЕРАВНОВЕСНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ

*Конечно, опыт остается единственным критерием пригодности математических конструкций физики. Но настоящее творческое мышление присуще именно математике. Поэтому я считаю в известном смысле оправданной веру древних в то, что чистое мышление в состоянии постигнуть реальность.*

*А. Эйнштейн*

В данной главе рассматриваются алгоритмы решения обратной задачи определения относительных фазовых проницаемостей по данным нестационарных исследований в случае неравновесной двухфазной фильтрации.

Выполнен обзор работ по неравновесным моделям двухфазной фильтрации и методам определения функций относительных фазовых проницаемостей. Поставлена и решена обратная задача неравновесной двухфазной фильтрации. Приведены примеры обработки данных нестационарных исследований образцов пористой среды.

### 2.1. Неравновесные модели двухфазной фильтрации

Фундамент современных расчетов двухфазных фильтрационных течений – феноменологическая теория Маскета–Леверетта [26, 140] – исходит из уравнений сохранения масс фаз и обобщенного закона Дарси для потоков фаз и замыкается эмпирическими функциями фазовых проницаемостей и капиллярного давления. Именно видом функций фазовых проницаемостей определяется конкретная картина двухфазного течения (в частности, процесса вытеснения нефти водой).

В общетеоретических построениях достаточно знание качественных свойств функций фазовых проницаемостей и капиллярного давления. При проведении расчетов конкретных объектов они должны быть определены экспериментально, на достаточно представительном (с учетом неоднородности пласта) материале и с достаточной – учитывая чувствительность результатов к виду фазовых проницаемостей – точностью.

Наиболее распространенным способом определения функций относительных фазовых проницаемостей (ОФП) является проведение лабора-

торных исследований на кернах. Экспериментальное определение зависимостей ОФП от водоиз饱щенности – трудоемкий процесс, требующий использования специальной аппаратуры. Поэтому на практике часто применяют готовые зависимости ОФП, полученные для пород аналогичного типа или для простейших пористых сред, какими являются образцы из насыпного песка. Этот подход не всегда правомерен, поскольку в действительности характер зависимостей ОФП даже для одного и того же класса пород определяется большим числом факторов, а форма кривых ОФП существенно влияет на результаты расчетов. Имеются данные [85], доказывающие, что при использовании в гидродинамических расчетах показателей разработки нефтяного месторождения кривых ОФП, полученных не для условий данного месторождения, ошибки в результатах, прежде всего в динамике обводненности, могут достигать 60–80 %.

В последнее время открыто и введено в разработку большое число месторождений нефти и газа, характеризующихся многообразием геологогеофизических свойств. Возрастают требования к качеству проектирования, в связи с этим увеличивается потребность в надежных данных о фазовых проницаемостях для условий конкретного месторождения.

В нефтепромысловом деле широкое применение находят два основных метода лабораторных исследований: стационарной фильтрации и вытеснения.

В ходе стационарных исследований нефть и воду подают в образец пористой среды в определенном соотношении и на каждом режиме дожидаются установления стационарной фильтрации (т.е. стабилизации показаний приборов, измеряющих градиент давления и водоиз饱щенность образца пористой среды) [85].

Но этот метод определения функций ОФП требует значительных затрат времени и применения дорогостоящего оборудования, которыми обладают не все исследовательские лаборатории.

Альтернативой стационарным методам являются нестационарные методы определения ОФП, при которых в образец пористой среды, насыщенной нефтью и связанной водой, закачивается вода, вытесняющая нефть. Существенным преимуществом нестационарных исследований является быстрота проведения опыта. Но его реализация осложняется тем, что функции ОФП оцениваются косвенным образом, путем решения соответствующей обратной задачи. При этом возникают трудности, связанные с некорректностью постановок подобного рода задач. Так, известная методика Эфроса–Кундина–Куранова [85] предусматривает дифференцирование экспериментальных данных. Но даже малые ошибки измерений приводят при осуществлении этой операции к большим погрешностям, поэтому данная методика неустойчива относительно малых ошибок замеров, что вызывает значительное искажение вида кривых ОФП, особенно на границах интервала определения. Наибольшие погрешности

отмечаются для фазовых проницаемостей нефти. Это и не удивительно, поскольку на заключительных этапах расход нефти, выходящей из модели, настолько мал, что его величина оказывается сравнимой с ошибками замеров. Таким образом, необходимо применение регуляризующих алгоритмов, обеспечивающих корректность решения обратной задачи определения ОФП.

Результаты лабораторных исследований вытеснения нефти водой [133] и численного моделирования процесса двухфазной фильтрации на капиллярных моделях [97] показали, что кривые фазовых проницаемостей двухфазной системы непостоянны во времени, что свидетельствует о неравновесном характере несмешивающегося вытеснения. Поэтому более важным аргументом в пользу методики нестационарных исследований кернов является то, что процессы многофазной фильтрации имеют, как правило, неравновесный характер, а неравновесные ОФП могут быть определены только по данным нестационарных исследований. Поэтому определение фазовых проницаемостей по данным вытеснения должно рассматриваться в качестве обязательного элемента лабораторного исследования фильтрационных свойств пористой среды.

По современным представлениям неравновесность фазовых проницаемостей связана с процессами переноса между порами. В связи с этим особый интерес представляют эксперименты, устанавливающие характер распределения остаточной нефти после вытеснения ее водой. Показано, что глобулы остаточной нефти имеют размеры  $\sim 1\text{--}10$  диаметров пор [141, 142]. Очень важную информацию о взаимодействии фаз в отдельных порах дают эксперименты, визуализирующие процессы вытеснения на микроровне с выделением отдельных актов вытеснения в масштабе отдельной поры [141, 142].

Предлагаются математические модели, описывающие течение и взаимодействие фаз в порах. В этих моделях пористая среда представляется в виде правильных сеток из отрезков капилляров, пересекающихся в узлах сетки. Диаметры и длины капилляров предполагаются случайными величинами, подчиненными некоторому заданному закону распределения. На основе этих моделей В.М. Ентов, А.Я. Фельдман, Э. Чен-Син [96] разработали численные схемы, позволяющие рассчитывать фазовые проницаемости и предельные значения насыщенностей для пористых сред различной структуры. В результате расчетов ими получены кривые фазовых проницаемостей и капиллярного давления, разумным образом соглашающиеся с экспериментальными данными. Позже были учтены дополнительные физические факторы и смоделированы процессы двухфазной фильтрации при наличии у одной из фаз вязкопластических свойств [93], двухфазной фильтрации в средах с микрогетерогенной смачиваемостью [95], двухфазное течение системы нефть – водный раствор полимера с учетом недоступной для полимерного вещества части порового простран-

ства [94], двухфазной фильтрации в электрическом поле, фильтрации эмульсии с учетом застревания капель и перекрытия поровых каналов [95]. Одним из наиболее перспективных методов при изучении неравновесных эффектов является моделирование течения в макрообъеме на основе сеточных моделей пористой среды, которое реализуется численно на ЭВМ. Например, в работе Э.О. Манучарянца и др. [131] рассматривается неравновесная двухфазная фильтрация в сетке капилляров при условиях, когда неравновесность возникает из-за нестационарности внешнего перепада давления, обусловленной быстрой сменой режима вытеснения. В работе установлено, что фазовые проницаемости существенно изменяются при неравновесном вытеснении. При быстрой смене режима вытеснения, когда характерное время смены режима меньше характерного времени вытеснения из капилляров или капиллярного перераспределения, фазовые проницаемости как вытесняемой, так и вытесняющей фаз меньше, чем в равновесном случае. Показано также, что при неравновесном вытеснении остаточная насыщенность зависит от вязкости вытесняющей и вытесняемой фаз и растет с увеличением степени неравновесности. Результаты работы [131] показали справедливость модели неравновесной фильтрации [22, 23] в тех случаях, когда характерное время изменения насыщенности и время релаксации к капиллярному равновесию сравнимы по величине (слабонеравновесная фильтрация). При сильнонеравновесном вытеснении, и, по-видимому, в сильно неоднородных пространственных системах модель [22, 23] не применима.

Альтернативный вариант интерпретации фазовых проницаемостей основан на представлениях теории перколяции, согласно которой изучается вероятность возникновения сплошной цепочки поровых каналов, занятой только одной фазой [102, 207].

Эффекты неравновесности приводят к тому, что зависимости перепада давления от времени, полученные при проведении нестационарных лабораторных исследований образцов пористой среды с целью определения функций ОФП, значительно отличаются от теоретических кривых, рассчитанных в рамках классической теории фильтрации [26, 27]. Как показано в работах [23, 144], влияние неравновесности может быть значительным.

Методика восстановления функций ОФП [27, 85, 122, 228, 233] основывается на моделях фильтрации, оперирующих с осредненными давлениями, скоростью фильтрации и другими макропараметрами, связи между которыми описываются феноменологическими уравнениями, требующими для своего вывода довольно сильных упрощающих предложений. Большинство моделей этого рода связано с использованием обобщенного закона Дарси, введенного впервые в работах Маскета [140] и Леверетта [280] и примененного Баклеем и Левереттом [250] и Раппопортом-Лисом [291] для решения задачи вытеснения несмешивающихся

жидкостей. В основе классических моделей лежит представление об однозначной зависимости функций фазовых проницаемостей и капиллярного давления от насыщенности, что физически означает однозначную связь распределения фаз в порах с насыщенностью. Для справедливости такого допущения необходимо, чтобы пористая среда была макрооднородна на расстояниях, достаточно больших по сравнению с размером некоторого микроэлемента, в свою очередь включающего широкий диапазон размеров пор. Однако реальные коллекторы нефти и газа обладают неоднородностью по пористости и проницаемости самого различного масштаба. Поэтому классические модели двухфазной фильтрации могут рассматриваться как равновесное приближение к описанию процесса.

В [178] экспериментально показано, что нефтеотдача в неоднородном коллекторе немонотонно зависит от темпа вытеснения, тогда как в модели Рапопорта–Лиса эта связь монотонна, а модель Баклея–Леверетта инвариантна относительно темпа процесса. Этот факт объясняется конечностью времени установления равновесного распределения фаз.

Для всех неравновесных моделей характерна зависимость ОФП не только от насыщенности, но и от ее временной производной.

Предложения по совершенствованию моделей фильтрации с учетом неравновесных эффектов имеются в работах [22, 23, 25, 89, 115, 143, 144, 236, 237].

В большинстве из них использовались общепринятые в теории фильтрации феноменологические уравнения баланса массы, импульса и энергии для элементарного объема, характерный размер которого предполагается достаточно большим по сравнению с размером поровых каналов, но существенно меньшим характерного размера пласта. Неравновесность учитывалась либо введением в уравнения дополнительных членов, либо корректировкой равновесных соотношений, учитывающей взаимодействие фаз при тех или иных предположениях о его механизме.

Развитая Г.И. Баренблаттом и В.М. Ентовым в [25] система представлений позволяет в явной форме учесть явления неравновесности и, в принципе, доступна экспериментальной проверке. Подход, сформулированный в [25], содержит два аспекта: 1) разделение насыщенности каждой фазой на два компонента: активную, участвующую в фильтрационном потоке, и пассивную, не вносящую в него вклад; 2) фундаментальное предположение об универсальности фазовых проницаемостей и капиллярного давления. Определяемые как функции насыщенностей только активных компонентов, они, согласно [25], не должны зависеть от скорости фильтрации, равновесности вытеснения, направления процесса. Пределы применимости обобщения теории фазовых проницаемостей, предложенной в [25], найдены в работе [131].

Неравновесная модель первого порядка была предложена Г.И. Баренблаттом [22] и далее развита в работах [23, 67]. Рассматривается

процесс вытеснения несмачивающей жидкости смачивающей жидкостью в гидрофильной пористой среде (например вытеснение нефти водой). В стационарном потоке двухфазной жидкости в пористой среде «каналы», по которым перемещается каждая из фаз, различны: по более узким порам движется смачивающая фаза, а по более широким – несмачивающая. В процессе установления потока смачивающая фаза вытесняет несмачивающую из части занятых ею (наиболее узких) каналов. Это происходит не мгновенно, и на промежуточном этапе часть вытесняемой фазы запирается в узких каналах, а часть вытесняющей фазы временно идет по более широким, чем в стационарном потоке, каналам.

Поэтому фазовая проницаемость вытесняющей фазы временно выше, а вытесняемой – временно ниже, чем в стационарном потоке при той же насыщенности. Из-за того, что часть вытесняющей жидкости движется по более широким каналам, уменьшается и капиллярное давление, обратно пропорциональное среднему радиусу канала.

В связи с этим в простейшей схеме учета неравновесных эффектов предполагается, что при нестационарном движении несмешивающихся жидкостей в пористой среде неравновесные фазовые проницаемости и капиллярное давление при мгновенной насыщенности  $s$  равны соответствующим равновесным фазовым проницаемостям и капиллярному давлению при некоторой эффективной насыщенности  $\tilde{s} > s$ .

Предложено кинетическое уравнение, связывающее эффективную насыщенность  $\tilde{s}$  с истинной насыщенностью  $s$ :

$$\tilde{s} = s + \tau \frac{\partial s}{\partial t}.$$

Для ОФП принимается:

$$f(\tilde{s}) = f\left(s + \tau \frac{\partial s}{\partial t}\right). \quad (2.1)$$

В.Н. Николаевский [174] из общего термодинамического анализа процессов, протекающих в насыщенных пористых средах, получил простую кинетическую модель для фазовых проницаемостей:

$$f = f\left(s, \frac{\partial s}{\partial t}\right) = f_0(s) + f'_0(s)\tau \frac{\partial s}{\partial t}. \quad (2.2)$$

Легко видеть, что соотношение (2.2) вытекает из (2.1) разложением по  $\tau$  и сохранением первой степени. В [171] им предложено кинетическое

уравнение второго порядка для зависимости капиллярного давления от насыщенности. Эта гипотеза приводит к модели, допускающей пульсации фазовых давлений при перераспределении фаз.

В рамках рассмотренных моделей оказывается возможным объяснить немонотонный характер зависимости длины стабилизированной зоны от величины, обратной темпу вытеснения [26].

В работе В.М. Енгова [89] оценивается влияние неравновесности на устойчивость вытеснения нефти водой. Для описания неравновесных процессов вводится некоторая функция состояния макроэлемента пористой среды, определяемая распределением фаз макроэлемента.

Интересный подход к неравновесной фильтрации представлен в работе Р.И. Нигматулина и др. [168], где рассмотрены процессы мицеллярно-полимерного заводнения. Каждой из двух многокомпонентных подвижных фаз (водной и углеводородной) сопоставляется одноименная неподвижная. Неравновесный массообмен между подобными по составу частями жидкой системы определяется отклонением объемной насыщенности подвижной фазы  $s_{подв}$  от ее некоторого равновесного значения  $s^*_{подв}$ :

$$q_{подв} = -q_{неподв} = \frac{s_{подв} - s^*_{подв}}{\tau},$$

где  $\tau$  – время релаксации.

В специфических условиях, когда мицеллярный раствор пропускает через себя воду, приведенное линейное уравнение кинетики может достаточно полно отражать перетоки жидкостей в пласте.

Предложения по учету неравновесности с помощью расщепления потока по микроструктуре пористой среды содержатся в работе В.И. Медведкова [143].

В работах Г.П. Цыбульского [236, 237] в рамках феноменологической теории механики сплошных сред выводятся уравнения двухфазной фильтрации, которые содержат силы, обусловленные неравновесным характером несмешивающегося вытеснения в пористой среде. В основу подхода положено использование метода локального осреднения уравнений баланса по пространству.

Влияние неравновесных эффектов на фильтрацию газожидкостных систем изучается в работах Б.М. Панфилова [183, 184].

Следует отметить и более раннюю работу А.К. Курбанова [115], в которой введены понятия перекрестных фазовых проницаемостей, отражающие тот факт, что часть активной фазы находится в дисперсном состоянии и переносится потоком второй фазы. Модель характеризуется матрицей четырех функций ОФП.

Исследования корректности краевых задач двухфазной релаксационной фильтрации (согласованность начальных и граничных условий) и поведения скачка насыщенности для произвольного ядра релаксации проведены в [112, 181].

В настоящее время остается открытой проблема определения характерного времени релаксации  $\tau$ .

Попытки экспериментального определения времени  $\tau$  имеются в работах [44, 114]. В работе [144] дана теоретическая оценка времени релаксации  $\tau$ . Показано, что длительность процессов перераспределения жидкостей в однородной пористой среде под действием капиллярных сил сравнима с безводным периодом вытеснения нефти в лабораторных экспериментах. Поэтому они и оказывают влияние на величину безводной нефтеотдачи в этих экспериментах. В реальных нефтяных пластах неравновесные эффекты на неоднородностях масштаба поровых каналов не могут заметно сказаться на результатах заводнения, так как скорость продвижения жидкостей в пластах много меньше скорости релаксации жидкости в порах. Однако в реальных пластах существуют неоднородности более крупных масштабов: слоистые пластины, макровключения, макро-неоднородности и т.д. На этих неоднородностях происходят аналогичные процессы, что и на микронеоднородностях, но более медленные, сравнимые со скоростью вытеснения. Они-то и влияют на результаты вытеснения в безводный период.

## 2.2. Исследование модели неравновесной фильтрации несмешивающихся жидкостей

В рамках модели Г.И. Баренблатта [22, 23] система уравнений неравновесной фильтрации двух несмешивающихся жидкостей имеет вид

$$\tilde{s} = s + \tau \frac{\partial s}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{v}_1 = 0, \quad (2.4)$$

$$-m \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{v}_2 = 0,$$

$$\vec{v}_1 = -\frac{k f_1(\tilde{s})}{\mu_1} \operatorname{grad} p_1, \quad \vec{v}_2 = -\frac{k f_2(\tilde{s})}{\mu_2} \operatorname{grad} p_2,$$

$$p_2 - p_1 = \sigma \cos \theta \sqrt{m/k} J(\tilde{s}).$$

Здесь индекс «1» относится к смачивающей фазе, индекс «2» – к несмачивающей;  $k$  – абсолютная проницаемость пористой среды;  $m$  – пористость,  $f_i(\tilde{s})$  – относительные фазовые проницаемости,  $\vec{v}_i$  – фазовые скорости,  $p_i$  – фазовые давления;  $i=1, 2$ ;  $\mu_i$  – вязкости фаз;  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $\theta$  – краевой угол смачивания,  $J(\tilde{s})$  – функция Леверетта.

Введем вектор полной скорости фильтрации

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$

Складывая первые два уравнения (2.4), получаем, что этот вектор соленоидален, что связано с несжимаемостью обеих фильтрующихся фаз.

Исключая из системы (2.4) фазовые скорости  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  и градиенты давления фаз, приведем ее к системе двух уравнений для двух неизвестных: насыщенности  $s$  и полной скорости фильтрации  $\vec{v}$

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} [\vec{v} F(\tilde{s}) + \epsilon f_2(\tilde{s}) f(\tilde{s}) \operatorname{grad} J(\tilde{s})] = 0, \quad (2.5)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Здесь  $F(\tilde{s}) = \frac{f(\tilde{s})_1}{[f_2(\tilde{s}) + \mu_0 f_2(\tilde{s})]}$  – функция Баклея–Леверетта;  $\mu_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ ,

$$\epsilon = \sigma \cos \theta \sqrt{mk} / \mu_2.$$

Процесс вытеснения нефти из образца пористой среды при постоянной суммарной скорости фильтрации смеси  $v_0$  и постоянном  $\tau$  описывается одномерными уравнениями

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + v_0 \frac{\partial F(\tilde{s})}{\partial x} = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ (f_1(\tilde{s}) + \mu_0 f_2(\tilde{s})) \frac{\partial p}{\partial x} \right] = 0.$$

Капиллярным скачком давления в фазах пренебрегаем, считая, что влияние неравновесности превосходит влияние капиллярного давления.

Перейдем к безразмерным переменным:  $\theta = \frac{v_0 t}{ml}$  – безразмерное

время, равное отношению объема закачанной жидкости к объему пор,  $\xi = \frac{x}{l}$ , где  $l$  – длина образца,  $\bar{\tau} = \frac{\tau v_0}{ml}$  – безразмерный параметр неравновесности (в дальнейшем черточки опускаются).

Уравнения (2.3), (2.6) в безразмерных переменных принимают вид

$$\tilde{s} = s + \tau \frac{\partial s}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} + \frac{\partial F\left(s + \tau \frac{\partial s}{\partial \theta}\right)}{\partial \xi} = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left[ (f_1(\tilde{s}) + \mu_0 f_2(\tilde{s})) \frac{dp}{d\xi} \right] = 0.$$

Уравнения (2.7) замыкаются начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} s(\xi, 0) &= s_0; & \tilde{s}(0, \theta) &= s_k; \\ p(\xi, 0) &= p_0; & p(1, 0) &= p_0; \\ \frac{\partial p(0, \theta)}{\partial \xi} &= -Q_0 = \text{const}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где  $s_0$  и  $s_k$  – начальная и конечная (предельная) насыщенности пористой среды вытесняющим агентом;  
 $p_0$  – начальное давление в модели пористой среды.

На входном сечении поддерживается постоянный расход закачивающейся жидкости. Вытесняемая фаза в этом сечении остается неподвижной.

Для слабонеравновесной фильтрации (когда  $\tau \ll 1$ ) можно ограничиться рассмотрением линейных членов в разложении Тейлора функции  $F(\tilde{s})$  в окрестности равновесного состояния

$$F(\tilde{s}) = F\left(s + \tau \frac{\partial s}{\partial \theta}\right) \approx F(s) + \tau \frac{\partial F}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \theta}.$$

Тогда второе уравнение системы (2.13) можно несколько упростить

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} + \frac{\partial F(s)}{\partial \xi} + \tau \frac{\partial}{\partial \xi} \left( F_s'(s) \frac{\partial s}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (2.9)$$

$\xi, \theta \in D$ ,  $D$  – некоторая область в плоскости  $\xi, \theta$ .

Ввиду сильной нелинейности поставленной задачи, решение системы (2.7), (2.8) возможно лишь численно с использованием метода конечных разностей [198]. С целью тестирования разностных схем для уравнений (2.7), (2.8) может быть использовано аналитическое решение задачи, полученное ниже.

### **2.2.1. Анализ корректности краевой задачи неравновесной двухфазной фильтрации**

Введение дополнительных слагаемых, учитывающих неравновесность, повышает порядок уравнения для определения насыщенности. Оно принимает вид типичного уравнения второго порядка гиперболического вида, линейного по старшим производным, характеристиками которого являются координатные линии. Постановки краевых задач неравновесной двухфазной фильтрации в [23, 44, 181] не обоснованы, не обсуждается конкретный вид начальных и граничных условий. Это приводит к рассогласованию начальных и граничных условий. Краевая задача оказывается недоопределенной.

Здесь предлагается нестационарное граничное условие для краевой задачи вида  $s + \tau \frac{\partial s}{\partial t} = s_k$ , которое учитывает особенности переходных

процессов неравновесной двухфазной фильтрации. Доказывается корректность, существование и единственность решения поставленной задачи. В частном случае получено точное решение.

Задачу (2.7) – (2.8) для определения неизвестной функции  $s = s(\xi, \theta)$  перепишем следующим образом

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} = \frac{1}{\tau} (\tilde{s} - s), \quad \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \xi} = \frac{1}{\tau F'(\tilde{s})} (s - \tilde{s}), \quad (2.10)$$

$$s(\xi, 0) = s_0, \quad \tilde{s}(0, \theta) = s_k. \quad (2.11)$$

Нашей целью является нахождение условий, при которых задача (2.10), (2.11) имеет гладкое решение в прямоугольнике  $0 \leq \xi \leq a$ ,  $0 \leq \theta \leq b$ . Краевая задача (2.10), (2.11) сводится к интегральным уравнениям вида:

$$\begin{aligned} s(\xi, \theta) &= s_0 + \frac{1}{\tau} \int_0^\theta [\tilde{s}(\xi, \eta) - s(\xi, \eta)] d\eta, \\ \tilde{s}(\xi, \theta) &= s_k + \frac{1}{\tau} \int_0^\xi \frac{1}{F'(\tilde{s}(\eta, \theta))} [s(\eta, \theta) - \tilde{s}(\eta, \theta)] d\eta. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Для построения решения системы интегральных уравнений (2.12) мы воспользуемся методом последовательных приближений:

$$\begin{aligned} {}^{(n+1)}s(\xi, \theta) &= s_0 + \frac{1}{\tau} \int_0^\theta \left[ {}^{(n)}\tilde{s}(\xi, \eta) - {}^{(n)}s(\xi, \eta) \right] d\eta, \\ {}^{(n+1)}\tilde{s}(\xi, \theta) &= s_k + \frac{1}{\tau} \int_0^\xi \frac{1}{F'\left({}^{(n)}\tilde{s}(\eta, \theta)\right)} \left[ {}^{(n)}s(\eta, \theta) - {}^{(n)}\tilde{s}(\eta, \theta) \right] d\eta, \\ n &= 0, 1, 2, \dots, \quad {}^{(0)}s = s_0, \quad {}^{(0)}\tilde{s} = s_k. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Справедливо следующее утверждение:

**Лемма 1.** Пусть производная функции  $F(s)$  не обращается в нуль на любом интервале  $(-a, a)$ , а именно

$$|F'(s)| \geq A > 0,$$

и постоянная  $A$  не зависит от  $a$ . Тогда в прямоугольнике  $0 \leq \xi \leq \xi_0$ ,  $0 \leq \theta \leq \theta_0$ , где  $\theta_0 < \frac{\tau}{2}$ ,  $\xi_0 < \frac{\tau A}{2}$  для последовательных приближений справедливы оценки

$$\left| s^{(n)}(\xi, \theta) \right| \leq M, \quad \left| \tilde{s}^{(n)}(\xi, \theta) \right| \leq M, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь постоянная  $M$  определяется так

$$M = \max \left\{ \frac{s_0 \tau}{\tau - 2\theta_0}, \frac{s_k \tau A}{\tau A - 2\xi_0}, s_0 + \frac{(s_k - s_0)}{\tau} \theta_0, s_k + \frac{(s_k - s_0) \xi_0}{\tau A} \right\}.$$

Доказательство леммы дано в Приложении 1.

С использованием леммы доказывается теорема существования и единственности решения задачи (2.7) – (2.8).

### Теорема 1.

Пусть выполнены условия:

$$|F'(s)| \geq A > 0, \quad |F''(s)| \leq B, \quad s \in [-M, M].$$

Тогда в прямоугольнике  $0 \leq \xi \leq \xi_0$ ,  $0 \leq \theta \leq \theta_0$  существует и притом единственное решение системы интегральных уравнений (2.12).

Доказательство теоремы см. в Приложении 1.

Полное решение модельной задачи (2.7) – (2.8) для линейной функции  $F(S) = As + B$ , где  $A$  и  $B$  – переменные, дано в приложении 2.

#### 2.2.2. Численный анализ модели

С учетом (2.9) система (2.7) запишется в виде

$$\frac{d}{d\xi} \left[ (f_1(\tilde{s}) + \mu_0 f_2(\tilde{s})) \frac{dp}{d\xi} \right] = 0,$$

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} + \frac{\partial F(s)}{\partial \xi} + \tau \frac{\partial}{\partial \xi} \left( F'(s) \frac{\partial s}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (2.14)$$

$$\tilde{s} = s + \tau \frac{\partial s}{\partial \theta}.$$

Для численного решения системы (2.14) используется метод расщепления по физическим процессам, основанный на раздельном (последовательном) определении давления и насыщенности [110]. Давление определяется из первого уравнения системы (2.14).

Это уравнение аппроксимируется линейной трехточечной разностной схемой, которое просчитывается методом прогонки.

Введем обозначение:  $\varphi(\tilde{s}) = f_1(\tilde{s}) + \mu_0 f_2(\tilde{s})$ .

Разностное уравнение для давления имеет вид

$$ap_{i+1}^{n+1} - cp_i^{n+1} + bp_{i-1}^{n+1} = 0;$$

$$a = \varphi_{i+\frac{1}{2}}^n; \quad b = \varphi_{i-\frac{1}{2}}^n; \quad c = a + b;$$

$$\varphi_{i+\frac{1}{2}}^n = 2 \frac{\varphi(\tilde{s}_i^n) \varphi(\tilde{s}_{i+1}^n)}{\varphi(\tilde{s}_i^n) + \varphi(\tilde{s}_{i+1}^n)}, \quad \varphi_{i-\frac{1}{2}}^n = 2 \frac{\varphi(\tilde{s}_i^n) \varphi(\tilde{s}_{i-1}^n)}{\varphi(\tilde{s}_i^n) + \varphi(\tilde{s}_{i-1}^n)}.$$

Для определения на каждом временном слое насыщенности аппроксимируется второе уравнение системы (2.14). Решение этого уравнения ведется методом расщепления по физическим процессам [110]. В данном случае процесс вытеснения в каждом элементарном объеме пористой среды, первоначально заполненном нефтью, можно представить происходящим в два этапа:

- 1) внедрение воды в нефтенасыщенный объем, при котором происходит изменение насыщенностей нефтью и водой в рассматриваемом объеме. На этом этапе решается уравнение переноса

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} + \frac{\partial F(s)}{\partial \xi} = 0; \quad (2.15)$$

2) перераспределение жидкостей, которые без изменения насыщенности меняют свое взаимное расположение в элементарном объеме пористой среды, стремясь обеспечить минимум термодинамического потенциала.

Полученные в (2.15) значения насыщенности используются в качестве начальных данных в решении уравнения

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \tau F'(s) \frac{\partial s}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (2.16)$$

Уравнение (2.15) аппроксимируется хорошо зарекомендовавшей себя [123] явной уголковой схемой с ориентацией по характеристике

$$\frac{s_i^{n+1/2} - s_i^n}{\Delta t} + \frac{F_i^n - F_{i-1}^n}{\Delta x} = 0. \quad (2.17)$$

Для расчета уравнения (2.16) используется консервативная разностная схема с итерациями по нелинейности

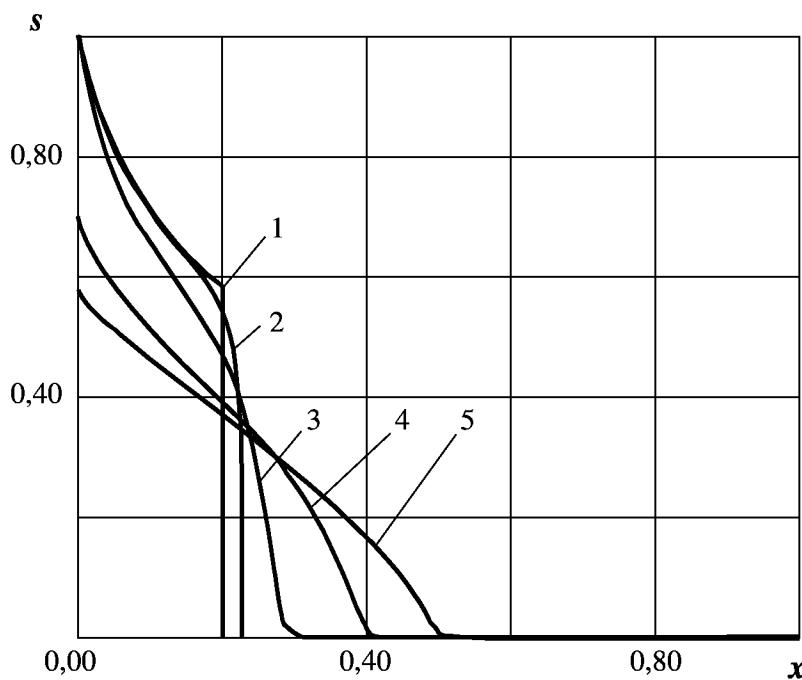
$$\frac{s_i^{n+1} - s_i^{n+1/2}}{\Delta t} + \frac{\tau}{\Delta x} \left( F_i'^{n+1} \frac{s_i^{n+1} - s_i^{n+1/2}}{\Delta t} - F_{i-1}'^{n+1} \frac{s_{i-1}^{n+1} - s_{i-1}^{n+1/2}}{\Delta t} \right) = 0. \quad (2.18)$$

Здесь  $\Delta x$  и  $\Delta t$  – шаги разностной сетки по осям  $\theta$  и  $\xi$  соответственно,  $i = 0, 1, \dots, I = \frac{1}{\Delta x}$ ;  $n = 0, 1, \dots, N$ ;  $s_i^n = s(i\Delta x, n\Delta t)$ ;  $F_i^n = F(s_i^n)$ . Для удовлетворительного расчета течения в окрестности скачка насыщенности необходимо выполнение с большой точностью условия:  $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\max F'_s}$ .

Повышение точности расчетов во всей области происходит лишь при выполнении этого условия и выбора оптимальных значений  $\Delta x$  и  $\Delta t$ . Численные расчеты проводились при значениях  $\Delta x = 0,01$  и  $\Delta t = 0,001$  для функций  $f_1(s) = s^2$ ,  $f_2(s) = (1-s)^2$ ,  $\mu_0 = 0,5$ . Профили распределения водонасыщенности при различных значениях параметра неравновесности  $\tau$  даны в сравнении с точным решением задачи Баклея–Леверетта и численным ( $\tau = 0$ ), полученным по той же разностной схеме, рис. 2.1.

Неравновесность приводит к размазыванию скачка насыщенности и образованию переходной стабилизированной зоны, длина которой зависит от величины  $\tau$ . При малых  $\tau$  влияние неравновесности проявляется, в

основном, в области больших градиентов насыщенности, т.е. в области фронта вытеснения.



**Рис. 2.1. Распределение насыщенности при различных параметрах неравновесности (модельная задача)**  
1 – точное решение; 2 –  $\tau = 0$ ; 3 –  $\tau = 0,01$ ; 4 –  $\tau = 0,05$ ; 5 –  $\tau = 0,1$

При больших  $\tau$  характер решения изменяется во всей области. Области с большими градиентами насыщенности исчезают, и решение приобретает пологий профиль языкообразной формы с уменьшением времени прорыва воды из образца. Это вызвано тем, что распределение насыщенности по длине определяется видом функции Баклея–Леверетта, которая при больших  $\tau$  стремится к линейной в большом диапазоне насыщенностей. Увеличение  $\tau$  ускоряет рост функции  $F(\tilde{s})$  в области малых насыщенностей, что приводит к уменьшению фронтовой насыщенности. Выделение скачка насыщенности при этом становится затруднительным и понятие фронтовой насыщенности теряет смысл.

Расчеты, выполненные по релаксационной модели, показали, что в изученном диапазоне изменения параметра неравновесности структура функции  $F(\tilde{s})$  качественно не меняется и фронтовая насыщенность может быть определена известным способом [26]. Однако величина ее с ростом  $\tau$  существенно уменьшается, что приводит к уменьшению времени безводного вытеснения. В работе [23] показано, что размерное время релаксации для пластовых условий ( $m \sim 0,2$ ;  $l \sim 100$  м;  $v \sim 10^{-6}$  м/с) составляет величину порядка года, что соответствует безразмерному  $\tau \sim 3$ . Приведенные

выше расчеты показывают, что неравновесность начинает существенно проявляться при  $\tau = 0,05$ , следовательно, эффект неравновесности в пластовых условиях может иметь существенное значение.

Численные расчеты модельной задачи на схеме (2.14), (2.17), (2.18) позволили исследовать изменение профилей насыщенности в различные моменты времени при различных значениях параметров  $\tau$ ,  $\mu_0$ ,  $Q_0$ .

Расчеты проводились для модельных относительных фазовых проницаемостей

$$f_1(s) = 0,01 \left( \frac{s - s_0}{s_k - s_0} \right)^3, \quad f_2(s) = 0,5 \left( \frac{s_k - s}{s_k - s_0} \right)^2,$$

$$s_0 = 0,4; \quad s_k = 0,7.$$

Используя описанную методику расчета, исследовались закономерности изменения перепада давления на входе и выходе модели пласта, давления и насыщенности по пласту. Распределения насыщенности по пласту в различные моменты времени при  $\tau = 0,2$  показывают следующее (рис. 2.2).

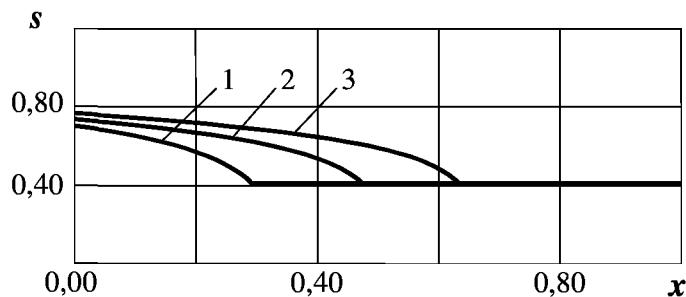


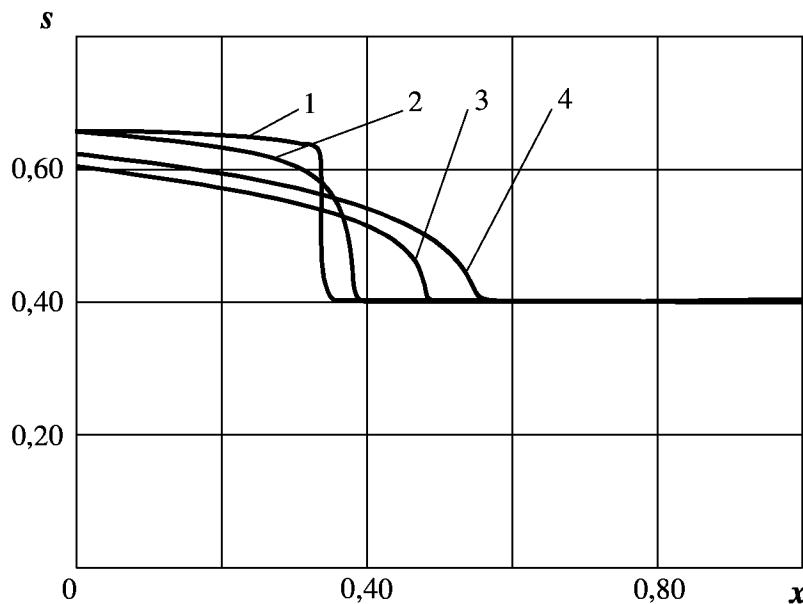
Рис. 2.2. Распределение насыщенности по длине

в различные моменты времени

1 –  $t = 0,025$ ; 2 –  $t = 0,05$ ; 3 –  $t = 0,075$

Вблизи источника (граница  $x = 0$ ) насыщенность постепенно увеличивается до значения предельной водонасыщенности  $s_k$  в течение времени  $t \leq t_0$ , где  $t_0$  – время прихода фронта водонасыщенности к выходу. После прорыва водонасыщенность во всей области течения возрастает до предельного значения.

На рис. 2.3 показаны профили водонасыщенности и давления при различных значениях параметра неравновесности.



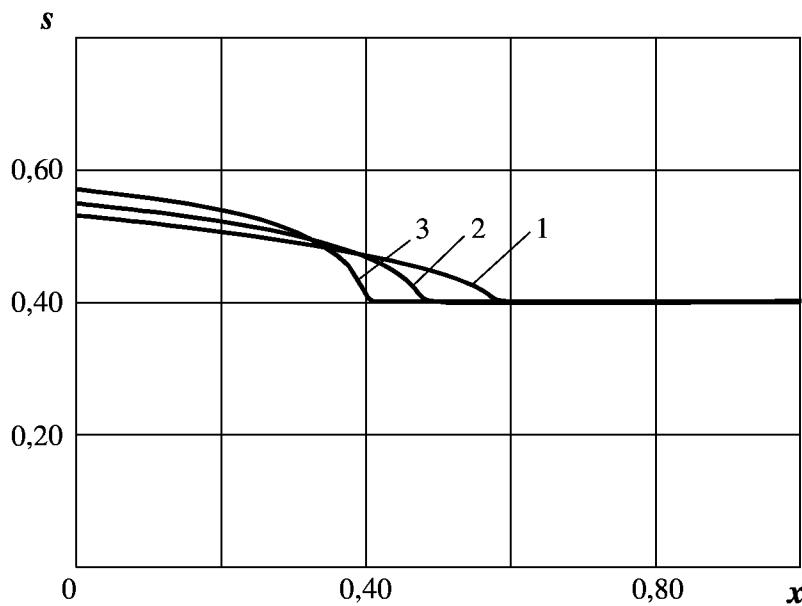
**Рис. 2.3. Распределение насыщенности по длине модели при разных значениях параметра неравновесности на момент времени**  
 $t = 0,1; \mu_0 = 0,1$   
 $1 - \tau = 0; 2 - \tau = 0,01; 3 - \tau = 0,05; 4 - \tau = 0,1$

Влияние неравновесности особенно существенно до прорыва водной фазы из образца.

Отношение вязкостей  $\mu_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2}$  также влияет на структуру неравновесного двухфазного течения (рис. 2.4). Результаты расчета соответствуют безразмерному времени  $\theta = 0,25$  и параметру неравновесности  $\tau = 0,2$ .

Чем меньше  $\mu_0$ , тем больше влияние неравновесности. При  $\mu_0 = 0,05$  кривая насыщенности имеет пологий профиль, более выражен краевой эффект.

Перепад давления в несколько раз превышает его значение при  $\mu_0 = 0,25$  и  $0,45$ . Аналогичные результаты получены и для равновесных течений.



**Рис. 2.4.** Распределение насыщенности по длине модели при разных значениях параметра  $\mu_0$  на момент времени  $t = 0,25$ ;  $\tau = 0,2$ ;  
 $1 - \mu_0 = 0,05$ ;  $2 - \mu_0 = 0,1$ ;  $3 - \mu_0 = 0,25$

### 2.3. Алгоритмы решения обратной задачи определения неравновесных ОФП

Физические процессы, протекающие в различных средах, обнаруживаются в виде тех или иных внешних проявлений, которые регистрируются специальными приборами. Опираясь на результаты наблюдений, а также на общие физические законы и закономерности, наблюдаемому процессу можно сопоставить ту или иную математическую модель. Разработку и обоснование математических моделей называют идентификацией [5, 6]. Структурная и параметрическая идентификация физических процессов сводится к решению обратных задач для дифференциальных уравнений.

Точность расчетов при моделировании процессов разработки нефтяных месторождений ограничивается неполнотой информации о параметрах моделей, граничных и начальных условиях. Определение этих характеристик по промышленно-экспериментальной информации сопряжено с трудностями, связанными с неустойчивостью решений соответствующих обратных задач. Для преодоления подобных затруднений в настоящее время разработано большое число регуляризующих алгоритмов [86, 98, 117, 118, 195, 215, 216], с успехом применяющихся при контроле и управлении различными технологическими процессами [32, 33, 71, 72, 100, 101]. Все они основаны на том или ином способе учета априорной информации, позволяющей сузить область, в которой ищется решение обратной задачи.

Как известно, одним из эффективных способов регуляризации является параметризация искомых функций. В частности, в [122, 228] предлагается искать ОФП в виде степенной зависимости:

$$f_1(s) = A_1 \left( \frac{s - s_0}{1 - s_0} \right)^{N_1}, \quad f_2(s) = A_2 \left( \frac{s_\kappa - s}{s_\kappa - s_0} \right)^{N_2},$$

где  $s_0$  – насыщенность пористой среды водой в связанном состоянии;  
 $s_\kappa$  – предельная водонасыщенность;  
 $f_1(s)$ ,  $f_2(s)$  – ОФП по воде и нефти;  
параметры  $A_1$ ,  $N_1$ ,  $A_2$ ,  $N_2$  определяются из условия максимальной близости теоретических зависимостей к экспериментальным.

Однако анализ стационарных исследований показывает, что вид кривых фазовых проницаемостей часто отличается от степенного. Более того, пористые среды с различными физико-химическими свойствами могут характеризоваться кривыми ОФП совершенно различного вида. Обоснованную параметризацию функций фазовых проницаемостей можно осуществить, если из независимых экспериментов или литературы известен вид ОФП, определенных на литологически близких образцах пористых сред стационарными методами исследования. Эта возможность основывается на том, что экспериментальные зависимости, полученные на различных образцах пористых сред со сходными физико-химическими свойствами, могут быть представлены в непостоянной универсальной форме путем перехода к нормированным координатам, предложенным впервые Р. Коллинзом [109]:

$$x = \frac{s - s_0}{s_\kappa - s_0}, \quad (2.19)$$

$$y_1 = \frac{f_1(s)}{F_1}, \quad y_2 = \frac{f_2(s)}{F_2},$$

где  $F_1$  и  $F_2$  – ОФП воды и нефти при  $s = s_\kappa$  и  $s = s_0$ , соответственно.

В этих координатах ОФП, снятые на различных (литологически близких) образцах, ложатся на единые универсальные кривые, аналитические выражения для которых ищутся в виде:

$$y_1 = \varphi_1(x, p_1, p_2, \dots, p_N), \quad y_2 = \varphi_2(x, q_1, q_2, \dots, q_m),$$

где  $p_1, \dots, p_N$  и  $q_1, \dots, q_m$  – константы, определяемые известными методами восстановления экспериментальных зависимостей.

Величины  $s_0$ ,  $s_k$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  характеризуют свойства конкретного образца пористой среды.

В [233] в качестве примера рассматриваются относительные фазовые проницаемости, снятые при проведении стационарных исследований на литологически близких образцах пластов АС<sub>10-11</sub> и АС<sub>12</sub> Приобского месторождения. Предлагаемая процедура параметризации функций ОФП существенным преимуществом которой является то, что, в отличие от [122], вид функций относительных фазовых проницаемостей не задается произвольно, а выбирается с использованием данных стационарных исследований, проведенных предварительно на образцах пористых сред, близких к изучаемым образцам. В ряде случаев опыты по вытеснению прерывают, не дожидаясь установления стационарного режима фильтрации. В этом случае в число неизвестных параметров включаются величины  $s_k$  и  $F_1$ , а для уменьшения сложности модели некоторым из параметров  $p$  и  $q$  могут быть присвоены значения  $p^*$  и  $q^*$ , определенные по данным эталонных опытов.

Таким образом, эталонные кривые ОФП, снятые в ходе небольшого числа опытов по стационарной фильтрации, могут быть затем использованы для устойчивого определения относительных фазовых проницаемостей в целой серии экспериментов по исследованию вытеснения жидкостей. В целом это приводит к существенному сокращению времени, затраченного на исследование всего множества образцов.

Ставится обратная задача определения ОФП воды (индекс 1) и нефти (индекс 2),  $f_1(s)$  и  $f_2(s)$ , по замерам перепада давления  $\Delta p^0(\theta_i)$  и объема вытесненной жидкости  $V_2^0(\theta_i)$  ( $\theta_i$  – безразмерное время  $i$ -го замера,  $i = 1, \dots, 2, M$ ;  $M$  – объем выборки), полученным по данным нестационарных исследований, проведение которых, как уже отмечалось, часто оказывается более предпочтительным по следующим причинам:

- 1) стационарные исследования требуют больших затрат времени, что ограничивает число образцов, которые могут быть исследованы;
- 2) влияние неравновесных эффектов (часто весьма существенное) может быть выявлено только в ходе проведения нестационарных исследований.

В связи с неустойчивостью обратной задачи важным является вопрос об уменьшении сложности модели (т.е., в данном случае, общего числа параметров, определяемых по данным нестационарных исследований).

ОФП с учетом неравновесности ищутся в параметрическом виде

$$f_1 = \Phi_1(x, \tau, r_1, r_2, \dots, r_{m_1}), \quad f_2 = \Phi_2(x, \tau, q_1, q_2, \dots, q_{m_2}), \quad (2.20)$$

где  $x$  – нормированная переменная, определяемая из (2.19),  
 $\Phi_i$  – заданные функции,  
 $r_i (i=1,2,\dots,m_1)$  и  $q_i (i=1,2,\dots,m_2)$  – неизвестные параметры, определяемые из условия минимизации невязок

$$I_1(\tau, r, q) = \sum_i [V_2^0(\theta_i) - V_2(\theta_i, \tau, r, q)]^2$$

и

$$I_2(\tau, r, q) = \sum_i [\Delta p^0(\theta_i) - \Delta p(\theta_i, \tau, r, q)]^2.$$

Функции  $\Delta p(\theta)$  и  $V_2(\theta)$  определяются из решения прямой задачи (2.7), (2.8), рассмотренной в разделе 2.2 с использованием ОФП вида (2.20) с фиксированными значениями  $\tau, r, q$ .

Оптимальное число  $N$  искомых параметров может быть определено по методу структурной минимизации среднего риска [64, 65, 105] или же методами теории нечетких множеств [36, 98].

Проблема правильного соотношения сложности идентифицируемой модели с количеством и уровнем погрешности имеющихся данных, решаемая при помощи метода структурной минимизации среднего риска, сводится к следующему. Оказывается, что если на допустимом множестве решения задать структуру, то наряду с минимизацией эмпирического риска (невязки) внутри элементов структуры появляется дополнительная возможность минимизации по элементам структуры. Это позволяет найти решение, дающее более глубокий гарантированный минимум среднего риска, чем решение, доставляющее минимум эмпирическому риску на всем допустимом множестве решений.

Для выбора оптимальной сложности модели (2.20) может быть использован метод структурной минимизации среднего риска, если невязки  $I_1$  и  $I_2$  объединить в единый функционал эмпирического риска

$$I_0(\tau, r, q) = I_1 + \alpha I_2, \quad (2.21)$$

где  $\alpha = \left( \frac{V_2^*}{\Delta p^*} \right)^2$  – коэффициент, учитывающий различие в масштабах

изменения и размерности величин  $V_2$  и  $\Delta p$ ,  $V_2^*$  и  $\Delta p^*$  – их характерные значения.

Оценки значений параметров  $\tilde{p}(\tau, r, q)$  в рассматриваемых моделях (2.20) определяются по исходной выборке  $(\Delta p^0(\theta_i), V_2^0(\theta_i))$ ,  $i = 1, \dots, M$  путем минимизации невязки (функционала эмпирического риска)  $I_0(\tau, r, q)$ :  $\tilde{p} = \arg \inf I_0(\tau, r, q)$ .

Устойчивость решения обратной задачи обеспечивается за счет выбора из представленных моделей соотношения оптимальной сложности. Показано [105], что для каждого  $N$  с вероятностью  $1 - \eta$  можно построить верхнюю оценку среднего риска вида

$$I(N) = I_0(\tilde{p})\Omega\left(\frac{N}{M}, \frac{\ln \eta}{M}\right),$$

где множитель  $\Omega$  определяет степень соотношения сложности модели (величины  $N$ ) объему выборки  $M$ . Величина первого множителя, как правило, уменьшается с ростом  $N$ , а величина второго растет. Метод упорядоченной минимизации среднего риска состоит в том, чтобы найти модель, минимизирующую оценку  $I(N)$ . Сложность определяется числом искомых параметров  $N = m_1 + m_2$ .

Для практических расчетов применяется оценка

$$I = \left[ I_0(\tilde{p}) / \left\{ 1 - \left( \frac{N(\ln(M/N) + 1) - \ln \eta}{M} \right)^{1/2} \right\} \right]_\infty,$$

где  $[z]_\infty = \begin{cases} z, & z \geq 0, \\ \infty, & z < 0. \end{cases}$

Оптимальная сложность модели может быть также найдена путем формализации расплывчатой цели «сделать невязку как можно меньше, а модель как можно проще» методами теории нечетких множеств [36, 98]. В частности, можно потребовать максимализации критерия

$$W = ((1 - \mu_n(I_0(N)))(1 - \mu_c(N)))^{1/2},$$

где  $\mu_n(I)$  и  $\mu_c(N)$  – функции принадлежности нечетких множеств «большая невязка» и «большая сложность модели», определяемые как

$$\mu_n(I) = \begin{cases} t^{k_1}, & r \leq 1 \\ 1, & r > 1 \end{cases}, \quad t = \frac{I_0}{I_c}; \quad \mu_c(N) = \begin{cases} (2N/M)^{k_2}, & 1 \leq N \leq M/2 \\ 1, & N > M/2 \end{cases},$$

где  $I_0(N)$  – минимальное значение невязки, достигаемое путем варьирования  $N$  параметров  $\tilde{p}$ ,  
 $I_c = I_0(N_1)$ , где  $N_1$  – некоторое начальное число параметров (например  $N_1 = 2$ ),  
 $k_1$  и  $k_2$  – показатели степени, определяющие отношение алгоритма к уменьшению невязки и увеличению сложности модели (так, если  $k_2 < 1$ , то уже при малых  $N$  модель признается сложной, а при  $k_2 > 1$  число может быть слегка увеличено).

Функция принадлежности  $\mu_c(N)$  является, по существу, формализованным представлением простого инженерного правила: «на каждый экспериментально определяемый параметр должны приходиться 3–4 экспериментальные точки».

## 2.4. Примеры обработки данных нестационарных исследований

### *Пример. Определение функций ОФП нефти и воды для пласта БС<sub>6-7</sub> Северо-Салымского месторождения*

В табл. 2.1. приведены зависимости  $V_2^0(\theta)$   $\Delta p^0(\theta)$ , полученные в опытах по вытеснению нефти из модели пласта БС<sub>6-7</sub> одного из месторождений ОАО «Юганскнефтегаз» [15].

Длина модели 10,12 см, диаметр 3,0 см, пористость 0,19, проницаемость по воздуху 0,065 мкм<sup>2</sup>, по воде 0,026 мкм<sup>2</sup>. В опыте использовалась изовискозная модель нефти. Вязкость и плотность нефти при температуре пласта 102 °C равны  $3,0 \cdot 10^{-3}$  Па·с и 0,825 г/см<sup>3</sup> соответственно.

В качестве вытесняющего агента использовалась вода из системы поддержания пластового давления. Вязкость и плотность воды при 102 °C равны  $0,379 \cdot 10^{-3}$  Па·с и 0,970 г/см<sup>3</sup> соответственно.

При фильтрации нефти через водонасыщенную модель пласта была достигнута остаточная водонасыщенность 39,8 %. Проницаемость по нефти при связанной воде составила 0,033 мкм<sup>2</sup>.

Модель пласта заводнялась при постоянном расходе заканчиваемой воды 1,135 см<sup>3</sup>/ч, что обеспечивало движение жидкостей в поровом пространстве со скоростью  $v = 73,9$  м/год =  $0,23 \cdot 10^{-5}$  м/с. В результате

исследований для условий пласта БС<sub>6-7</sub> коэффициент вытеснения нефти водой составил 0,45, остаточная нефтенасыщенность –33,12 %, фазовая проницаемость по воде при остаточной нефтенасыщенности –0,0009 мкм<sup>2</sup>.

Таблица 2.1.

**Основные показатели закачки и вытеснения для модели пласта БС<sub>6-7</sub>**

$\theta$	$V_2^0, \text{см}^3$	$\Delta p^0, \text{МПа}$
0,03	1,135	0,022
0,08	3,405	0,037
0,14	5,675	0,051
0,2	7,945	0,60
0,25	10,215	0,065
0,28	10,410	0,068
0,31	10,410	0,070
0,34	10,410	0,071
0,36	10,730	0,071
0,50	10,850	0,069
0,64	10,850	0,067
0,78	10,960	0,062
0,92	10,960	0,058
1,62	10,960	0,058

Функции ОФП определялись в виде

$$f_1(s) = F_1 \left( \frac{s - s_0}{s_\kappa - s_0} \right)^{r_1 + r_2 x}, \quad f_2(s) = F_2 \left( \frac{s_\kappa - s}{s_\kappa - s_0} \right)^{q_1 + q_2 x}. \quad (2.22)$$

Объем вытесненной жидкости, приведенный к объему пор вычисляется следующим образом

$$V_2(\theta) = \int_0^\theta (1 - F(\tilde{s}(1, t))) dt.$$

По данным стационарной фильтрации нефти при связанной воде и воды при остаточной нефти оценены значения  $F_1 = 0,014$ ,  $F_2 = 0,508$ ,  $s_0 = 0,398$ . Расчеты сводятся к организации методом структурной минимизации среднего риска конкуренции между различными моделями вида (2.22), отличающимися комбинациями ненулевых параметров  $r$  и  $q$  при фиксированном значении  $\tau$ . Функционал эмпирического риска определяется по формуле (2.21), причем величина  $V_2^*$  принимается равной объему нефти, вытесненной в водный период ( $V_2^* = 0,755 \text{ см}^3$ ), а величина  $\Delta p^*$  – предельному значению перепада давления ( $\Delta p^* = 0,058 \text{ МПа}$ ).

Минимум функционала (2.21) определяется методом последовательного спуска, причем минимизация по каждому из искомых параметров проводится методом золотого сечения.

Оказалось, что имеющейся экспериментальной информации лучше всего соответствует двухпараметрическая модель, т.е. функции (2.22) с  $r_2 = q_2 = 0$ .

В результате обработки лабораторных данных по вытеснению нефти из пласта БС<sub>6–7</sub> по приведенному выше алгоритму функции ОФП определены в виде

$$f_1(s) = 0,0138 \left( \frac{s - s_0}{s_k - s_0} \right)^{2,75}, \quad f_2(s) = 0,503 \left( \frac{s_k - s}{s_k - s_0} \right)^{1,82}. \quad (2.23)$$

Решение обратной задачи позволяет оценить и параметр неравновесности  $\tau$ . В данном случае он равен 0,17 и соизмерим с безразмерным временем безводной нефтеотдачи  $\theta = 0,25$ . Результаты расчетов представлены на рис. 2.5.

Приведены экспериментальные зависимости перепада давления  $\Delta p^0(\theta)$  и безразмерного объема вытесненной нефти  $V_2^0(\theta)$ , отмеченные крестиками. Сплошной чертой представлены расчетные кривые, соответствующие найденным ОФП и  $\tau$ . Значительное отличие теоретической кривой перепада давления, рассчитанной без учета неравновесных эффектов, подтверждает необходимость учета этих явлений при решении обратных задач определения функций ОФП.

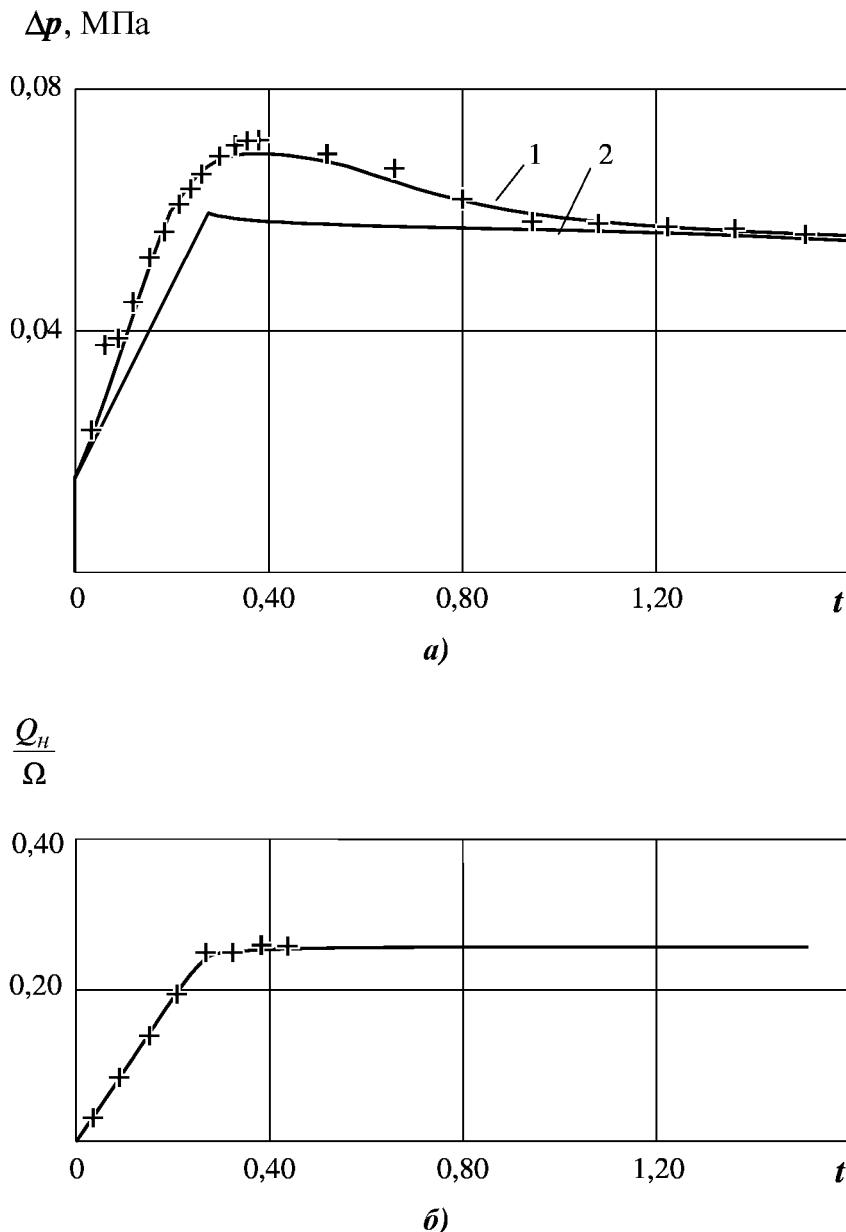


Рис. 2.5

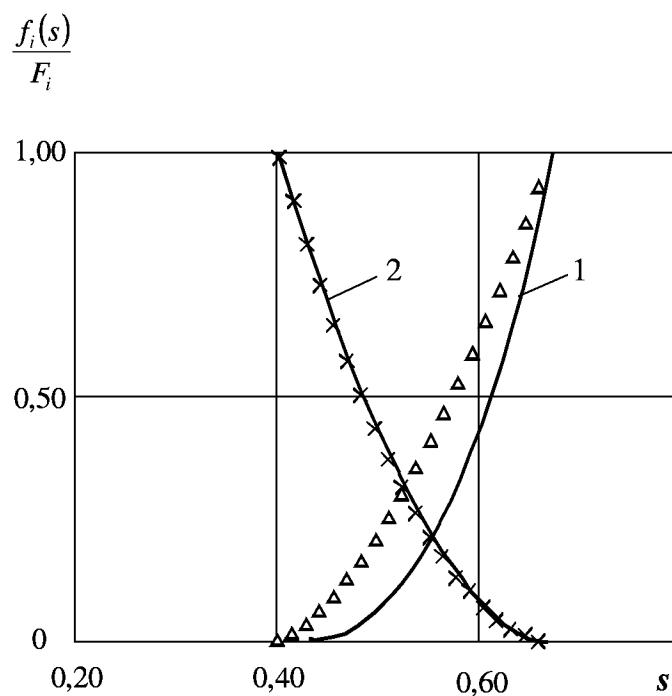
- а) зависимость перепада давления от безразмерного времени для пласта БС<sub>6-7</sub>  
 $1 - \tau = 0,2; 2 - \tau = 0;$
- б) зависимость безразмерного объема вытесненной нефти от безразмерного времени для пласта БС<sub>6-7</sub> при  $\tau = 0,2$
- экспериментальные данные; — — расчетные кривые

По данным эксперимента определены значения  $F_1 = 0,013$ ,  $F_2 = 0,359$ ,  $s_k = 0,687$ ,  $s_0 = 0,455$ .

Полученные зависимости фазовых проницаемостей для модели пласта БС<sub>6-7</sub> даны в сравнении с соответствующими зависимостями, восста-

новленными по методике [122]. На рис 2.6 представлены нормированные ОФП. По методике [122] ОФП восстанавливались в виде

$$f_1(s) = A_1 \left( \frac{s - s_0}{1 - s_0} \right)^{N_1}, \quad f_2(s) = A_2 \left( \frac{s_\kappa - s}{s_\kappa - s_0} \right)^{N_2}.$$



**Рис. 2.6. Относительные фазовые проницаемости**  
1 – ОФП воды, 2 – ОФП нефти  
+, Δ – ОФП, восстановленные по методике [177]

Для пласта БС<sub>6-7</sub> получено:  $A_1 = 0,046$ ;  $N_1 = 1,51$ ;  $A_2 = 0,508$ ;  $N_2 = 1,90$ . Для пласта АС<sub>11</sub> получено:  $A_1 = 0,050$ ;  $N_1 = 1,6$ ;  $A_2 = 0,359$ ;  $N_2 = 1,50$ .

Заметное различие в ОФП воды для пласта БС<sub>6-7</sub> можно объяснить тем, что в методике [177] не учитываются неравновесные эффекты.

Таким образом, нами построен устойчивый алгоритм решения обратной задачи идентификации неравновесных фазовых проницаемостей по результатам замеров количества вытесняемой жидкости и перепада давления на выходе испытываемых образцов пористых сред.

С использованием этого алгоритма создан программный комплекс по обработке данных лабораторных исследований фильтрационных характеристик пористых сред.

---

## Глава 3

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СЛОЖНЫХ СРЕД

*πάντα ρει (Все течет)*

*Гераклит*

### 3.1. Основные понятия реологии

Реология (от греческого *rheo* – «течь») – это раздел физики, в котором рассматриваются вопросы деформации и текучести веществ [35, 68, 191, 219]. Это название было предложено в 1929 г. Бингамом (E.C. Bingham). Ближе всего реология примыкает к механике или, точнее, к физико-химической механике [189].

Задачей реологии является установление взаимосвязи между силами, действующими на среду, и вызванными ими деформациями. Если при этом материя рассматривается так, как она представляется нашим ощущениям, т.е. как сплошная среда, то речь идет о *феноменологической реологии*. Феноменологические модели применяются при отсутствии сведений о деталях организации рассматриваемой системы. На этом уровне описания среда рассматривается как «черный ящик» и задача реологии сводится к проведению ключевых опытов, раскрывающих связь между входными (деформации) и выходными (напряжения) сигналами. Но внутренняя организация исследуемой среды при этом остается скрытой. *Концептуальная реология* (или *микрореология*) выводит реологические соотношения теоретическим путем, опираясь на достижения физики и химии. В настоящее время наиболее развит *структурно-кинетический подход* [68, 202-204], согласно которому процессы разрушения и восстановления структурных связей в жидкости схематично представляются как прямая и обратная химические реакции, суммарное действие которых описывается некоторым кинетическим уравнением относительно концентрации связей.

Концептуальный подход имеет преимущества в строгости и общности, однако обладает тем недостатком, что может разрешить только ограниченный круг проблем. Перефразируя известное замечание [39], можно сказать, что концептуальная реология решает те задачи, которые может; так, как нужно, а феноменологическая реология решает те задачи, которые нужно; так, как она может.

Преимуществом феноменологического подхода является его высокая прагматическая нацеленность на решение инженерных задач; часто феноменологические модели способствуют обоснованию и мотивировке концептуальных моделей.

При описании реальных сред весьма полезными оказываются представления об *идеальных телах*, проявляющих простейшие реологические свойства: *упругость, пластичность и вязкость*. В качестве материальных носителей этих

свойств можно представить себе соответственно сталь, пластилин и воду [191]. Конечно, каждое вещество в реальности обладает всеми реологическими свойствами, хотя и в различной степени. Так, если сталь подвергнуть напряжению порядка  $10^8$  Па, то она начинает проявлять пластические свойства. Поэтому реальные материалы представляются в виде некоторых комбинаций трех фундаментальных идеальных тел. В литературе идеальные тела принято называть именами ученых, которые ввели их впервые: упругое тело называется *телом Гука* (Hooke, 1635–1703 гг.), пластическое – *телом Сен-Венана* (St. Venant, 1797–1886 гг.), вязкое – *телом Ньютона* (I. Newton, 1642–1726 гг.).

Каждый материал характеризуется двумя реологическими уравнениями: одним для объемных деформаций (под действием всестороннего равномерного сжатия) и другим – для деформаций формоизменения (под последними чаще всего понимаются сдвиговые деформации). Классическая реология предполагает, что при всестороннем давлении все материалы (и твердые и жидкие) ведут себя как идеально упругие тела. Это предположение в большинстве случаев является весьма хорошим приближением, но при объемном деформировании структурных жидкостей могут проявить себя *объемная вязкость и релаксация*, нарушающие его справедливость.

Наиболее ярко реологическое различие между сталью и пластилином проявляется при сдвиговых деформациях. Математически это различие в поведении при сдвиге можно выразить, рассматривая мысленно призмы, вырезанные из разных материалов [191].

### 3.1.1. Упругое тело

Прежде всего рассмотрим малую призму из стали, находящуюся под действием тангенциальной силы  $F$ , приложенной к верхней горизонтальной грани (рис. 3.1). Очевидно, что величина сдвига призмы определяется углом  $\alpha$ , образованным вертикальными и склоненными боковыми гранями. Поскольку  $\tan \alpha = \frac{\Delta U}{\Delta H}$ , то в качестве меры сдвига можно использовать именно это отношение (здесь  $\Delta U$  – смещение верхней грани,  $\Delta H$  – высота призмы). Путем перехода к бесконечно малым величинам величину *сдвига* можно определить как

$$\gamma = \frac{dU}{dH}.$$

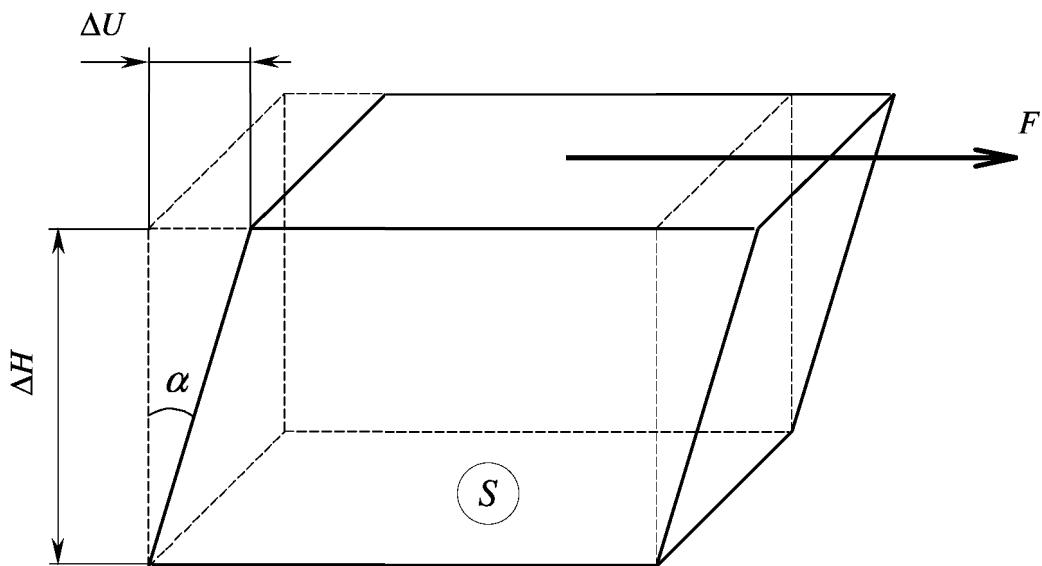


Рис. 3.1. Сдвиг элементарной призмы

За меру напряженности материала естественно принять касательную силу, приходящуюся на единицу площади верхней грани, т.е. отношение  $\tau = \frac{F}{S}$ , называемое касательным напряжением. Предполагая, что напряжения пропорциональны деформациям, получим  $\tau = G\gamma$ , где  $G$  называется модулем сдвига. Реальные значения этой величины меняются от  $0,2 \cdot 10^{16}$  Па (свинец) до  $8 \cdot 10^{16}$  Па (сталь).

### 3.1.2. Пластическое тело

Если призма выполнена из пластилина, то при малых напряжениях ее поведение напоминает поведение стальной призмы, т.е. она тоже будет деформироваться упруго. Однако при достижении некоторого критического значения касательного напряжения  $\tau_T$ , называемого *пределом текучести при сдвиге*, пластилин потечет. При этом напряжение будет оставаться приблизительно постоянным, а величина сдвига – безгранично растя. Реологическая модель пластического тела может быть записана в виде

$$\tau = \begin{cases} G\gamma, & \gamma \leq \frac{\tau_T}{G}, \\ \tau_T, & \gamma > \frac{\tau_T}{G}. \end{cases}$$

Так, предел текучести металлов при сдвиге изменяется от  $3 \cdot 10^7$  Па (алюминий) до  $7,5 \cdot 10^7$  Па (никель).

### 3.1.3. Вязкая деформация (течение)

Поскольку жидкую «призму» трудно себе представить, сдвиговую деформацию воды проиллюстрируем на примере знаменитого мысленного опыта Ньютона, рассмотревшего вязкую жидкость, заключенную между двумя бесконечно протяженными параллельными пластинами, нижняя из которых неподвижна, а верхняя движется с некоторой скоростью  $v_0 = \frac{dU}{dt}$ , где  $U$  – смещение верхней пластины (рис 3.2).

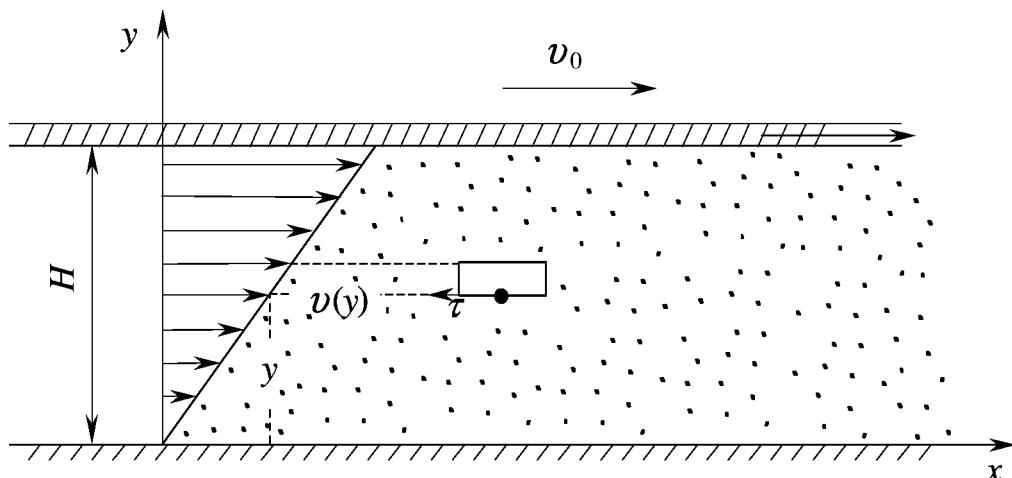


Рис. 3.2. Течение вязкой жидкости

Представим себе, что жидкость разделена на бесконечно тонкие горизонтальные плоские слои, которые при перемещении верхней пластины скользят один по другому так же, как карты в сдвигаемой колоде. Если скорость  $v_0$  бесконечно мала, то эта деформация не требует сколько-нибудь заметного усилия, хотя величина смещения  $U$  может расти безгранично.

Только тогда, когда скорость  $v_0$  будет конечна, возникает сила сопротивления, вызванная трением слоев жидкости относительно друг друга. Отсюда ясно, что мерой сдвиговых деформаций жидкости является не величина  $\gamma = \frac{U}{H}$ , а аналогичное ей отношение  $\varepsilon = \frac{dv}{dy} = \frac{v_0}{H}$ , называемое

скоростью сдвига ( $H$  – расстояние между пластинами). Поскольку  $\varepsilon = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial U}{\partial H} \right) = \frac{d\gamma}{dt}$ , то скорость сдвига часто обозначается символом  $\dot{\gamma}$  (напомним, что в механике точка соответствует дифференцированию по времени). Силы, необходимые для сдвига жидкости, по-прежнему определяются касательным напряжением  $\tau = F/S$ , где  $F$  – сила сопротивления, возникающая на площади  $S$  из-за затрудненного проскальзывания соседних слоев жидкости. Предполагая, что касательное напряжение пропорционально скорости сдвига (Ньютона, 1687 г.), получим  $\tau = \mu \dot{\gamma}$ , где величина  $\mu$  называется вязкостью жидкости. Материалы, описываемые этим уравнением, называются *ニュтоновскими жидкостями*. Реальные значения вязкости изменяются в очень широких пределах. Так, при  $20^{\circ}\text{C}$  вода имеет вязкость  $1 \cdot 10^{-3}$  Па·с, а глицерин –  $1,5$  Па·с.

На рис. 3.3 приведены *реологические кривые* – зависимости касательного напряжения от меры сдвига – для трех рассмотренных выше материалов.

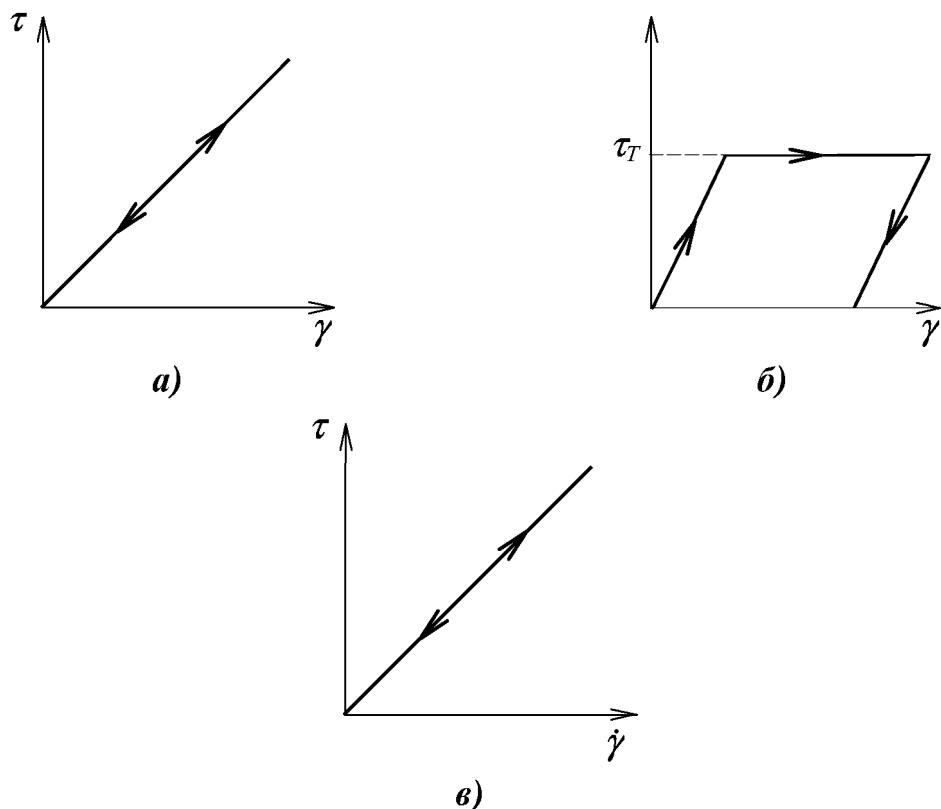


Рис. 3.3. Реологические кривые:  
а) упругое тело; б) пластическое тело; в) вязкая жидкость

Такие диаграммы могли бы быть получены в ходе экспериментов с идеальными телами при постепенном увеличении напряжения (нагрузке) и обратном его уменьшении (разгрузке). Стрелки на приведенных диаграммах указывают направление, в котором изменяется напряжение.

Реологическая диаграмма пластического тела имеет упругий участок вплоть до предела текучести. При снятии напряжений эта часть полной деформации обратима, а те деформации, что были накоплены в процессе течения, являются необратимыми (см. рис. 3.3, б). Хорошо всем знакомым примером такого тела является зубная паста [191]. Если слегка сдавить тюбик с зубной пастой, то плоская поверхность пасты в выходном отверстии становится выпуклой, но при снятии давления эта выпуклость исчезает. Если же тюбик сжимается с большей силой, то происходит необратимое выдавливание цилиндрика пасты. Присмотревшись, можно заметить, что на конце этого цилиндрика образуется сферический сегмент, пропадающий после снятия нагрузки за счет исчезновения обратимых нагрузок.

### 3.1.4. Течение ньютоновской жидкости в круглой трубе

Рассмотрим ламинарное течение вязкой (ニュтоновской) жидкости в круглой трубе радиуса  $R$ . При таком течении цилиндрические слои жидкости (которые должны мыслиться бесконечно тонкими) перемещаются в направлении оси трубы  $z$ , совершая «телескопическое» [191] движение (рис. 3.4, а). Так как жидкость несжимаема, то скорость  $v$  остается постоянной по длине трубы и зависит только от расстояния  $\gamma$  до центральной оси. Для определения зависимости  $v = v(\gamma)$  составим уравнение равновесия сил, действующих на цилиндрический объем жидкости длиной  $l$  и радиусом  $\gamma$  (см. рис. 3.4, б). Сила вязкого сопротивления, действующая на внешнюю поверхность цилиндра со стороны внешних слоев, равна  $2\pi rl\tau$ . Эта сила уравновешивается разницей сил давления, действующих на основания цилиндра, поэтому

$$(p + \Delta p)\pi r^2 - p\pi r^2 + 2\pi rl\tau = 0,$$

откуда

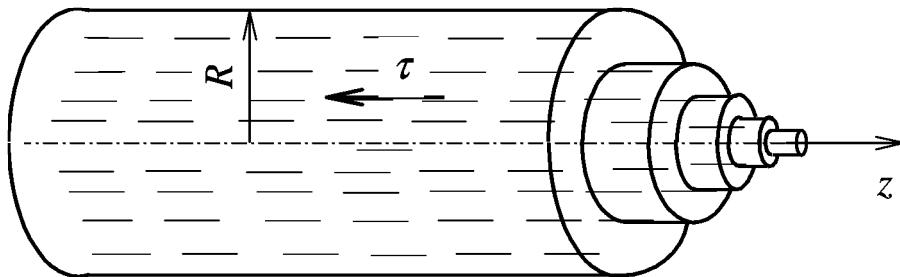
$$\tau = -\frac{\Delta p}{2l}r \quad (3.1)$$

(знак «минус» означает, что сила сопротивления направлена против оси  $z$ ). По закону Ньютона,

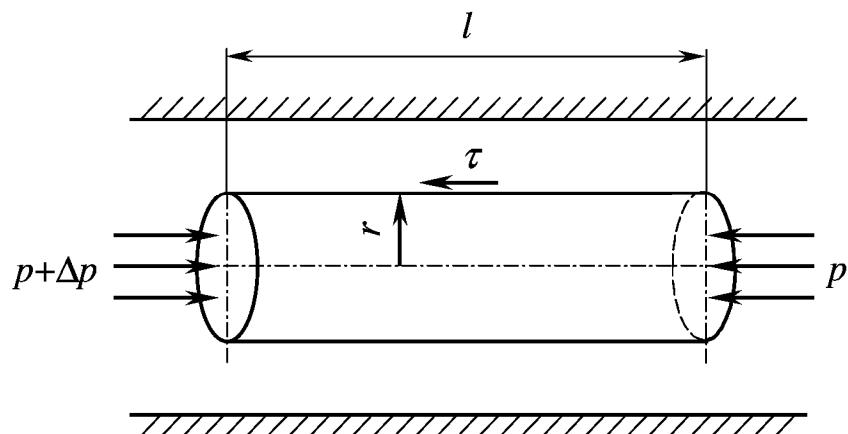
$$\tau = \mu \frac{dv}{dr},$$

откуда

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{l} r.$$



a)



б)

Рис. 3.4  
Ламинарное течение в трубе

Интегрируя это уравнение, получим с учетом граничного условия  $v(R)=0$  зависимость

$$v = \frac{\Delta p}{4l\mu} (R^2 - r^2). \quad (3.2)$$

Измеряемой в опытах величиной является *расход*  $Q$  – объем жидкости, протекающий через поперечное сечение трубы за единицу времени, поэтому вычислим эту величину. Для этого разобьем сечение трубы на

узкие кольца шириной  $dr$ . Расход жидкости через кольцо с внутренним диаметром  $\gamma$  равен  $dQ = 2v(r)\pi r dr$ .

Расход через все сечение может быть получен простым интегрированием

$$Q = 2 \int_0^R v(r) \pi r dr = \frac{\pi R^4}{8l\mu} \Delta p. \quad (3.3)$$

Таким образом, в случае ньютоновской жидкости наблюдается линейная связь между перепадом давления и расходом жидкости.

Определив среднюю по сечению скорость  $V_{cp}$  как  $V_{cp} = \frac{Q}{\pi R^2}$ ,

получим отсюда

$$V_{cp} = \frac{R^2}{8l\mu} \Delta p.$$

Распределение (3.2) было получено Стоксом (Stokes, 1849 г.) и Гагенбахом (Hagenbach, 1860 г.). Последний назвал соотношение (3.2) законом Пуазейля в честь французского ученого (Poiseuille, 1797–1869 гг.), который в экспериментах с водой установил эмпирическую формулу

$$Q = kR^4 \frac{\Delta p}{l},$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности.

### 3.2. Неньютоновские жидкости

Гипотеза Ньютона о линейной связи между тангенциальным напряжением и скоростью сдвига оказалась очень удобным приближением, справедливым для абсолютного большинства низкомолекулярных жидкостей, но при рассмотрении реологических свойств жидкостей, склонных к структурообразованию (сусpenзий, эмульсий, растворов полимеров, красок, «тяжелых нефтей», глинистых растворов и т.д.), были обнаружены многочисленные отклонения от закона Ньютона. Такие жидкости называются *неньютоновскими*, и для них реологическая кривая  $\tau = \tau(\dot{\gamma})$  (или, как часто говорят, кривая течения) не является линейной, т.е. вязкость не остается постоянной, а зависит от скорости сдвига или от предыстории деформации материала.

Типичным примером неньютоновских жидкостей являются полимерные системы, в которых длинные гибкие макромолекулы, зацепляясь друг за друга, образуют некую пространственную структуру («сетку»), резко повышающую вязкость. Под действием сдвиговых деформаций часть структурных связей разрушается, что приводит к уменьшению вязкости.

Отметим тот факт, что Пуазель был по профессии медиком и интересовался прохождением крови через малые кровеносные сосуды [191]. Сейчас известно, что кровь не является ньютоновской жидкостью, поэтому автор опыта, экспериментально подтвердившего (на примере воды) предположения Ньютона, в каком-то смысле является одновременно и одним из первых исследователей неньютоновских сред.

Неньютоновские жидкости могут быть разбиты на три группы.

1. Среды, в которых касательное напряжение является нелинейной функцией мгновенного значения скорости сдвига (*нелинейно-вязкие жидкости*).
2. Среды, в которых связь между напряжением и скоростью сдвига зависит от времени или предыстории процесса (*жидкости с нестационарными реологическими характеристиками*).
3. Среды, проявляющие упругое восстановление формы после снятия напряжений (*вязкоупругие жидкости*).

Отметим, что это деление в достаточной мере условно. Вообще, любая реологическая классификация не абсолютна и сохраняет смысл лишь в определенной области применения. Так, реологические характеристики вязкоупругих жидкостей зависят (см. ниже) от предыстории, поэтому их можно было бы отнести и ко второй группе. В связи с этим среды второй и третьей групп часто объединяют единым термином «жидкости с памятью». С другой стороны, процессы разрушения и восстановления структуры всегда требуют некоторого времени, поэтому жидкость может быть отнесена к первой группе только в том случае, если этим временем можно пренебречь. Вполне «ニュтоновские» в обычных условиях смазочные масла проявляют заметную вязкоупругость при сверхвысоких давлениях и скоростях сдвига, реализуемых при работе подшипников. Даже такая типичная ньютоновская жидкость, как вода, приобретает пластические свойства в тонких адсорбционных пленках.

### **3.2.1. Нелинейно-вязкие жидкости**

Реологические свойства сред этой группы не зависят от времени и могут быть описаны функциональными зависимостями вида

$$\tau = f(\dot{\gamma}). \quad (3.4)$$

Вязкость ньютоновской жидкости равна  $\frac{\tau}{\dot{\gamma}}$ . В случае нелинейно-вязких сред это отношение называется *эффективной* (или *кажущейся*) вязкостью и обозначается символом

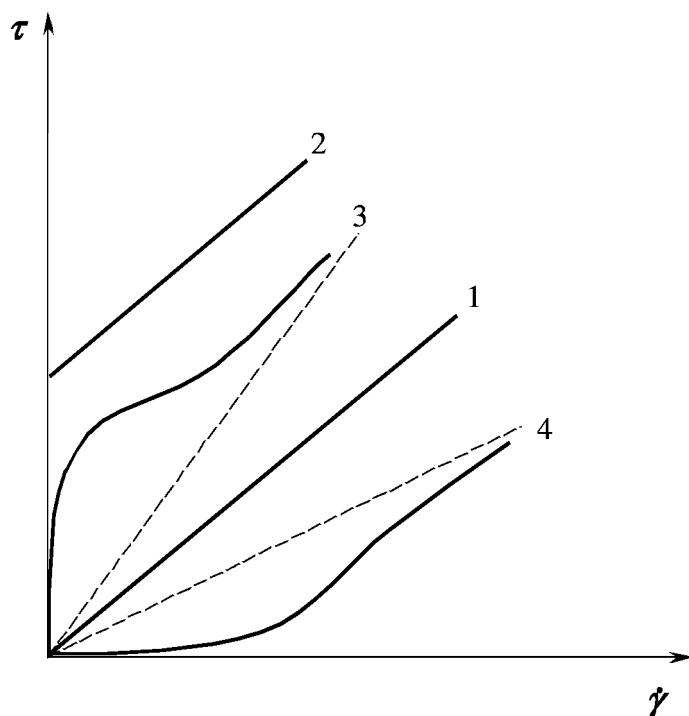
$$\mu_a = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \frac{f(\dot{\gamma})}{\dot{\gamma}}.$$

Использование этой величины позволяет рассматривать нелинейно-вязкую среду как жидкость с переменной вязкостью  $\mu_a$ , зависящей от скорости сдвига.

Нелинейно-вязкие жидкости подразделяются, в свою очередь, на следующие три группы [219]:

- а) вязкопластичные жидкости (тела Шведова-Бингама);
- б) псевдопластичные жидкости;
- в) дилатантные жидкости.

Кривые течения, характерные для трех перечисленных групп, приведены на рис. 3.5. Отметим, что часто эти кривые называются также *кривыми консистенности* (т.е. состояния – от латинского слова *consistere* – состоять).



**Рис. 3.5. Кривые течения нелинейно-вязких жидкостей:**

- 1 — ньютоновская жидкость,
- 2 — вязкопластичная жидкость,
- 3 — псевдопластичная жидкость,
- 4 — дилатантная жидкость

### а. Вязкопластичные среды

Мы уже упоминали зубную пасту в качестве примера пластичного тела. Оценим перепад давления, при котором она начинает течь [191].

Так же, как и в п. 3.1.4, рассмотрим цилиндрический объем зубной пасты в трубке, расположенной в горловине тюбика. Для этого объема вновь будет справедливо уравнение (3.1), из которого следует, что максимальное значение напряжения достигается на стенке трубы и по абсолютной величине равно

$$\tau_w = \tau(R) = R \frac{\Delta p}{2l}.$$

Зубная паста начнет вытекать, когда величина  $\tau_w$  станет равной предельному напряжению течения  $\tau_T$ , т.е. когда перепад давления будет равен

$$\Delta p_T = \frac{2l\tau_T}{R}.$$

Но что происходит, если перепад давления  $\Delta p$  хотя бы ненамного превосходит критическую величину  $\Delta p_T$ ? Поскольку для идеального тела Сен-Венана  $\tau \leq \tau_T$ , то разница  $\Delta p - \Delta p_T$  не может быть скомпенсирована силами внутреннего сопротивления, поэтому равновесия не будет, жидкость начнет двигаться с ускорением и скорость истечения пасты может стать бесконечно большой. Конечно, в действительности ничего подобного не происходит. Дело в том, что зубная паста обладает еще и вязкостью, поэтому скорость истечения будет расти только до тех пор, пока вязкое сопротивление не скомпенсирует разность  $\Delta p - \Delta p_T$ . Материалы с подобным реологическим поведением называют *вязкопластичными*.

Реологическое уравнение таких сред может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 + \mu \dot{\gamma}, \quad \dot{\gamma} > 0; \\ \tau &\leq \tau_0, \quad \dot{\gamma} = 0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

где  $\tau_0 = \tau_T$  – предельное напряжение сдвига (предел текучести),  $\mu$  – так называемая пластическая (или структурная) вязкость, которая в этой простой модели считается постоянной.

Модель вида (3.5) была предложена в 1889 г. Ф.Н. Шведовым (по результатам экспериментов с растворами желатина) и в 1916 г. Бингамом, изучавшим реологию концентрированных суспензий глин.

Для объяснения поведения пластиков Шведова–Бингама предполагают, что покоящаяся жидкость имеет пространственную структуру, достаточно жесткую для того, чтобы сопротивляться напряжениям, не превышающим по величине  $\tau_0$ . Если же напряжение превышает  $\tau_0$ , то структура *полностью разрушается* и система ведет себя как обычная ньютона- ская жидкость при напряжении сдвига  $\tau - \tau_0$ . Когда же напряжение сдвига становится меньше  $\tau_0$ , структура вновь восстанавливается.

На основе этого описания можно понять, что модель (3.5) является довольно идеализированной, но она весьма удобна, поскольку многие реальные жидкости (например, буровые растворы) очень близки к этому типу.

Эффективная вязкость тела Шведова–Бингама с увеличением скорости сдвиговой деформации уменьшается по закону

$$\mu_a = \mu + \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}},$$

а при  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$   $\mu_a \rightarrow \infty$ .

## 6. Псевдопластичные среды

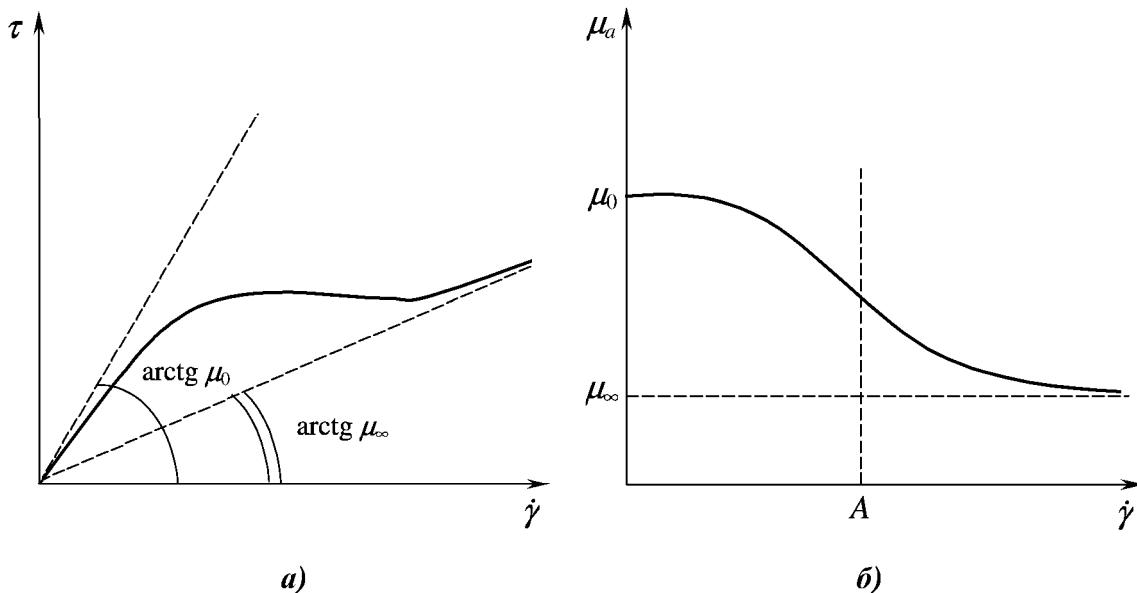
Псевдопластичными называются среды, эффективная вязкость которых уменьшается при увеличении скорости сдвига, но предельное напряжение течения отсутствует ( $\tau_0 = 0$ ). Они являются *истинными жидкостями*, поскольку начинают течь при сколь угодно малых значениях напряжения. С физической точки зрения, псевдопластическое поведение объясняется разрушением имеющейся в жидкости структуры по мере увеличения интенсивности движения.

Угол наклона касательной к кривой течения в точке  $\dot{\gamma} = 0$  определяет вязкость  $\mu_0$  псевдопластиков в состоянии покоя (с неразрушенной структурой). При очень больших значениях  $\dot{\gamma}$  кривая течения стремится к асимптоте, угол наклона которой определяет вязкость  $\mu_\infty$ , соответствующую полностью разрушенной структуре (рис. 3.6).

Однако в реальных условиях величина  $\dot{\gamma}$  больше значений, при которых кривая  $\mu_a = \mu_a(\dot{\gamma})$  испытывает перегиб (точка A на рис. 3.6, б). Анализ экспериментальных данных показывает, что при  $\dot{\gamma} > A$  кривые консистентности часто могут быть аппроксимированы степенной зависимостью вида

$$\tau = K\dot{\gamma}^n, \quad n < 1, \quad (3.6)$$

где  $K$  и  $n$  – экспериментальные константы.



**Рис. 3.6. Реологические кривые псевдопластиков:**  
а) кривая консистентности;  
б) зависимость эффективной вязкости от скорости сдвига

Параметр  $K$  называется индексом консистенции,  $n$  – показателем неньютоновского поведения (в предельном случае при  $n=1$  жидкость является ньютоновской, и чем больше  $n$  отличается от единицы, тем отчетливее проявляются неньютоновские свойства среды).

Степенную модель (3.6) независимо предлагали Ферроу (Farrow) и Лове (Lowe, 1923 г.), де Ваале (de Waele, 1923 г.) и Оствальд (Wo. Ostwald, 1925 г.).

В случае степенной зависимости кажущаяся вязкость выражается соотношением

$$\mu_a = \frac{K}{\dot{\gamma}^{1-n}}.$$

Поскольку  $n < 1$ , то при  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$   $\mu_a \rightarrow \infty$ , что противоречит рис. 3.6, б. Таким образом, существует некоторый нижний предел применимости модели (3.6).

### в. Дилатантные жидкости

В дилатантных жидкостях также отсутствует предельное напряжение сдвига, однако их кажущаяся вязкость повышается с увеличением скорости сдвига (рис. 3.7).

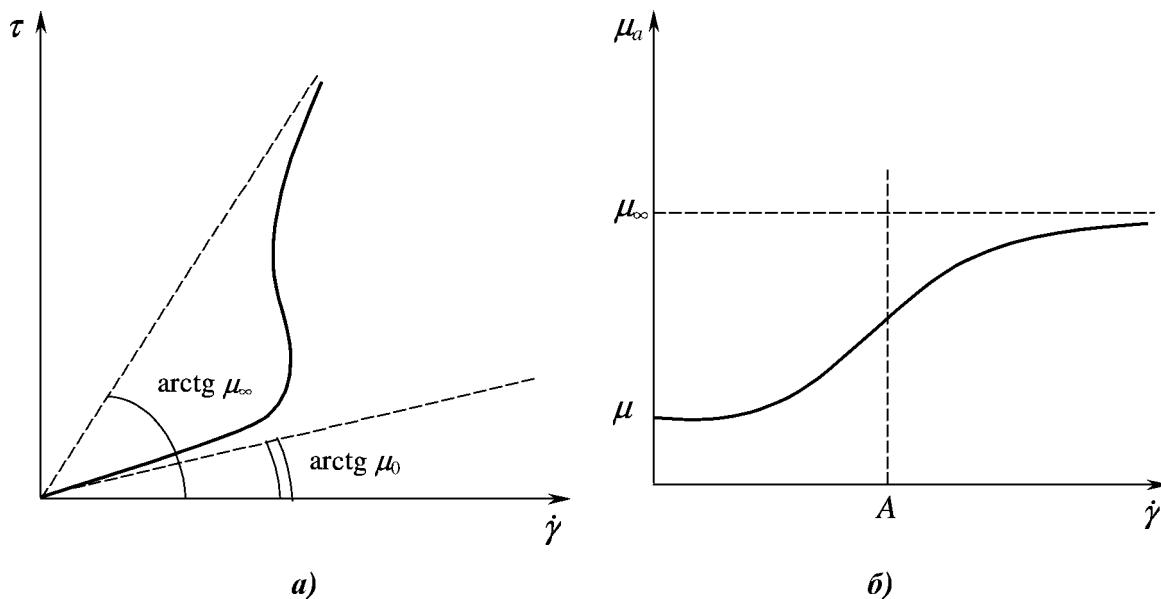


Рис. 3.7. Реологические кривые дилатантных жидкостей

Такой тип реологического поведения был обнаружен при течениях суспензий с большим содержанием твердой фазы. Увеличение кажущейся вязкости чаще всего объясняют эффектом *дилатансии* – уменьшением плотности упаковки твердых частиц при сдвиге (от лат. *delatare* – расширять). «Разбухание» материала при сдвиговых деформациях приводит к увеличению сопротивления движению. Это явление было открыто Рейнольдсом (O. Reynolds, 1885 г.), который заметил [191], что если в мешок из каучука насыпать дробь и пустоты между дробинками заполнить водой (но так, чтобы слой воды над поверхностью дроби был мал), то форма этой системы может быть изменена лишь в некоторых довольно малых пределах.

Сдвиговые деформации большой величины приводят к тому, что содержимое мешка как бы «твёрдеет» и не допускает дальнейших изменений формы. Рейнольдс объяснил этот эффект тем, что сдвиг приводит к нарушению первоначально плотной упаковки частиц, объем системы увеличивается и вода уже не может заполнить все промежутки. При этом вступают в действие силы атмосферного давления и силы трения между дробинками, которые и препятствуют развитию деформаций.

С дилатансией встречались все, кто наблюдал, как светлеет мокрый песок вокруг ноги, если наступить на него. Это явление объясняется тем, что деформация песка под действием давления ноги приводит к его расширению и оттоку воды с поверхности песка во вновь образовавшиеся пустоты.

Учет дилатансии позволяет также понять, почему резкие движения людей, попавших в песок-плывун, только ухудшают их состояние. Чем резче раздвигать песок, тем сильнее он будет удерживать вас, поэтому для того, чтобы выбраться, нужно двигаться медленно, по возможности уменьшая сопротивление песка [218].

В первом приближении объемные и сдвиговые информации рассматривают отдельно друг от друга, выписывая два независимых реологических уравнения для этих двух типов деформации. Ясно, что эффект дилатансии не вписывается в рамки этого подхода, поэтому его относят к так называемым *вторичным явлениям* реологии (или эффектам второго порядка) [191]. Известны и другие вторичные явления – эффект Пойнтинга (J.H. Poynting, 1909, 1912 гг.), заключающийся в изменении длины стержней при кручении, и эффект Вайсенберга (K. Weissenberg, 1946 г.), о котором будет сказано ниже.

В настоящее время термин «дилатантная» применяется по отношению ко всем жидкостям, кажущаяся вязкость которых с увеличением скорости сдвига повышается, хотя многие из них (например, крахмальные клейстеры) не расширяются при сдвиге, т.е. приведенное выше объяснение к ним не подходит [219]. Можно сказать поэтому, что дилатантные жидкости являются средами, в которых сдвиговые деформации приводят (в силу тех или иных не всегда ясных причин) к образованию структурных связей, повышающих эффективную вязкость.

В некотором умеренном диапазоне скоростей деформации дилатантные жидкости также могут быть описаны степенной моделью

$$\tau = K \dot{\gamma}^n,$$

но для них показатель степени  $n$  должен быть больше единицы. Последнее требование необходимо для того, чтобы кажущаяся вязкость  $\mu_a = K \dot{\gamma}^{n-1}$  была возрастающей функцией  $\dot{\gamma}$ .

#### г. Реологические модели нелинейно-вязких сред

При помощи соотношений вида (3.5) – (3.6) можно описать поведение многих реальных материалов, однако практика в ряде случаев требует применения более точных моделей. В связи с этим многочисленными

авторами предложен целый ряд реологических моделей, некоторые из которых приведены нами в табл. 3.1 (по классификации, принятой в [130]).

Модели 3–12 в этой таблице соответствуют истинным жидкостям. Модели 13–16 предполагают наличие предельного напряжения сдвига (как и модель 2) и поэтому могут быть названы *нелинейными вязкопластичными средами*. Все параметры в приведенных соотношениях являются эмпирическими и полуэмпирическими коэффициентами.

Таблица 3.1

#### Модели нелинейно-вязких сред

Название модели	Уравнение
1	2
1. Ньютона	$\tau = \mu \dot{\gamma}$
2. Шведова – Бипгама	$\tau = \tau_0 + \mu \dot{\gamma}$
3. Оствальда – де Ваале	$\tau = K \dot{\gamma}^n$
4. Прандтля	$\tau = \arcsin(\dot{\gamma} / B)$
5. Пауэлла – Эйринга	$\tau = A \dot{\gamma} + B \operatorname{arcsh}(C \dot{\gamma})$
6. Рабиновича	$\tau = \frac{\mu_0}{1 + c \tau^2} \dot{\gamma}$
7. Эллиса	$\dot{\gamma} = \phi_0 \tau + \phi_1 \tau^\alpha$
8. Сиско	$\tau = a \dot{\gamma} + b \dot{\gamma}^c$
9. Де Хавена	$\tau = \frac{\mu_0}{1 + c \tau^n} \dot{\gamma}$
10. Рейнера – Филиппова	$\tau = \left( \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + (\tau / A)^2} \right) \dot{\gamma}$
11. Кросса	$\tau = \left( \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + \alpha \dot{\gamma}^{2/3}} \right) \dot{\gamma}$

Продолжение табл. 3.1

1	2
12. Мейера	$\tau = \left( \mu_{\infty} + \frac{\mu_0 - \mu_{\infty}}{1 + \left( \frac{\tau}{\tau_m} \right)^{\alpha-1}} \right) \dot{\gamma}$
13. Кессона	$\tau = (k_0 + k_2 \dot{\gamma}^{1/2})^2$
14. Гершеля–Бакли	$\tau = \tau_0 + K \dot{\gamma}^n$
15. Шульмана	$\tau = [\tau_0^{1/n} + (\mu \dot{\gamma})^{1/m}]^n$
16. Реймера	$\dot{\gamma} = \sum_{n=0} a_{2n} \tau^{2n+1}$

### 3.2.2. Среды с нестационарными реологическими характеристиками

Как уже отмечалось, многие особенности поведения неньютоновских сред объясняются процессами разрушения и восстановления структурных связей под действием сдвиговых деформаций. Если временем, необходимым для осуществления структурных изменений, можно пренебречь, то можно считать, что эффективная вязкость зависит только от мгновенных значений скорости сдвига, т.е. среда является нелинейно-вязкой.

Однако в ряде случаев характерные времена структурных перестроек оказываются сравнимыми с характерными временами изменения напряжений. Это приводит к тому, что связь между напряжением и деформацией становится нестационарной. Так, для установления равновесного значения напряжения, соответствующего определенному значению скорости сдвига, требуется некоторое (иногда очень протяженное) время.

Жидкости с нестационарными реологическими характеристиками в соответствии с тем, убывает или возрастает эффективная вязкость при сдвиге, делятся на два класса: *тиксотропные* и *реопектические*.

### **а. Тиксотропные жидкости**

*Тиксотропными* называются среды, структура которых при деформировании с постоянной скоростью сдвига постепенно разрушается, что приводит к снижению эффективной вязкости со временем (от греч. *thixis* – прикасновение и *trope* – изменение: изменение структуры под действием механического воздействия). Этот термин ввели Петеффи (в 1927 г.) и Френдлих с сотрудниками (Freundlich, 1935 г.).

Тиксотропия является обратимым процессом, и после снятия нагрузок структура жидкости постепенно восстанавливается. Всем знакомыми примерами тиксотропных сред являются маргарин и кефир. Маргарин, например, было бы очень трудно размазать ножом по хлебу при комнатной температуре, если бы его структурная вязкость не уменьшалась при сдвиговых воздействиях под действием ножа [218]. Часто кефир удается вылить из бутылки только после встряхивания, разрушающего его структуру.

Очень важна тиксотропность толстослойных красок [218]. В момент их нанесения интенсивные движения кисти снижают вязкость, позволяя равномерно ложиться краске на окрашиваемую поверхность. Но затем вязкость быстро увеличивается, что не позволяет размазанной краске стекать.

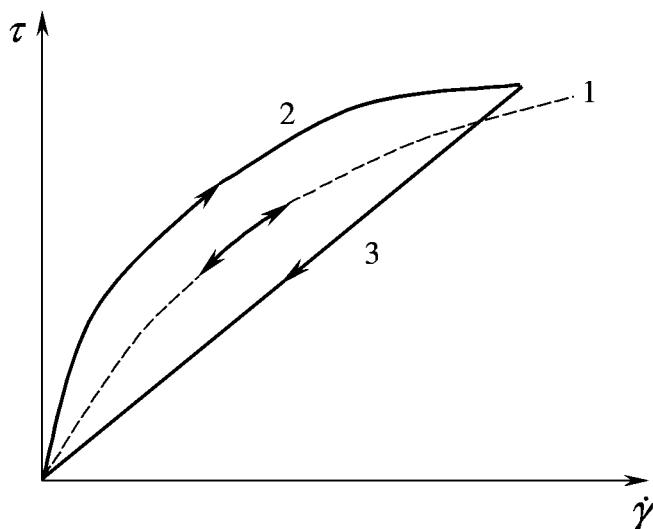
Тиксотропные свойства буровых растворов позволяют уменьшить затраты энергии на промывку скважин (за счет снижения вязкости), а после остановки насосов шлам не осаждается за счет быстрого упрочнения структуры буровой жидкости [150].

На рис. 3.8 приведены кривые течения тиксотропных жидкостей, которые могут быть получены при постепенном изменении величины  $\dot{\gamma}$ . Если увеличение скорости сдвига происходит достаточно медленно (т.е. при каждом фиксированном значении  $\dot{\gamma}$  достигается равновесное значение эффективной вязкости), то получим равновесную кривую течения 1. Последующее столь же медленное уменьшение скорости сдвига вновь воспроизведет ту же кривую. Если же темп увеличения  $\dot{\gamma}$  велик, то все структурные связи успевают разрушаться и в каждой точке реограммы значения будут выше, чем в равновесном случае (кривая 2). При быстром обратном уменьшении скорости сдвига разрушенные связи не успевают восстановиться, поэтому кривая разгрузки 3 лежит ниже равновесной кривой.

Таким образом, кривые течения тиксотропных жидкостей образуют характерную гистерезисную петлю. Собственно, наличие гистерезисной петли и позволяет диагностировать тиксотропные свойства исследуемых жидкостей. (Отметим, что положение петли гистерезиса относительно кривой 1 существенно зависит от темпа изменения  $\dot{\gamma}$  и может существенно отличаться от приведенного на рис. 3.8).

## 6. Реопектические среды

Реопектическими называются среды, которым свойственно (в отличие от тиксотропных жидкостей) постепенное структурообразование при сдвиговых деформациях. Этот термин введен Френдлихом и Юлиусбергером (H. Freundlich, F. Julisberger, 1935 г.) и означает «затвердевающий при течении» (от греческих слов *rheo* – «течь» и *pectos* – «свернувшийся», «студнеобразный»). Эрмит (L' Hermite, 1949 г.) предложил назвать такие среды *антитиксотропными*.



**Рис. 3.8. Петля гистерезиса для тиксотропной жидкости:**

- 1 – равновесная кривая течения,
- 2 – кривая течения при увеличении  $\dot{\gamma}$ ,
- 3 – кривая течения при уменьшении  $\dot{\gamma}$

Френдлих и Юлиусбергер в своих опытах использовали 42%-й водный раствор гипса и обнаружили, что время затвердевания этого материала уменьшается от 40 мин до 20 с, если сосуд с ним осторожно перекаивать между ладонями [219]. При ремонте квартиры многие, видимо, замечали, что свежеприготовленный раствор гипса после начала работ может очень быстро затвердеть прямо в сосуде, в котором он содержится. Это неприятное явление вызвано эффектами реопексии – структурообразованием под действием возмущений, производимых рабочим инструментом при захвате порций гипсового раствора.

Реопектические эффекты наблюдались также в 5%-ом растворе полиметакриловой кислоты в воде. Эта среда обнаруживала 350-кратное увеличение вязкости после того, как она в течение одной минуты подвергалась сдвигу со скоростью  $10 \text{ с}^{-1}$  [191].

Эксперименты показывают [219], что свойство реопексии обнаруживается лишь при достаточно малых скоростях сдвига. Как правило, с увеличением скорости сдвиговой деформации начинают превалировать процессы разрушения структуры, т. е. проявляются тиксотропные свойства.

Если проводить аналогию с нелинейно-вязкими средами, то реопективские жидкости более всего напоминают дилатантные жидкости, когда временем, необходимым для структурообразования, нельзя пренебречь. Точно так же тиксотропные жидкости внешне похожи на свои стационарные аналоги – псевдопластичные жидкости.

### 3.2.3. Описание нестационарных процессов в неиньютоновских средах

Согласно представлениям структурно-кинетической теории, процессы разрушения и восстановления структуры можно схематично представить как прямую и обратную химические реакции.

Пусть  $N_0$  – число структурных связей в единице объема материала до начала разрушения структуры,  $N(t)$  и  $N_1(t)$  – число разрушенных и неразрушенных связей соответственно,  $s(t) = \frac{N(t)}{N_0}$  и  $s_1(t) = 1 - s(t)$  – доли (или концентрации) этих связей.

Ясно, чем больше концентрация неразрушенных связей, тем больше связей может распасться в единицу времени. В то же время увеличение концентрации разрушенных связей приводит к возрастанию интенсивности их восстановления (поскольку увеличивается вероятность встречи разорванных «концов» пространственной сетки). Поэтому по мере тиксотропного разрушения структуры при  $\dot{\gamma} = const$  скорость разрушения связей уменьшается, а скорость восстановления связей растет. В конце концов, скорости образования и разрушения структуры станут равными друг другу и наступит динамическое равновесие, характеризующееся некоторым стационарным значением  $\tau = \tau(\dot{\gamma})$ .

Последовательное развитие этих представлений с использованием подходов, разработанных в теории химических реакций, приводит к кинетическим уравнениям вида

$$\frac{ds}{dt} = f(s, \dot{\gamma}), \quad (3.7)$$

моделирующим нестационарные процессы в неньютоновских средах. Эффективная вязкость материалов  $\mu_a$  считается некоторой функцией величины  $s$ , требующей специального задания:  $\mu_a = \mu_a(s)$ .

Простейшее линейное уравнение вида (3.7) можно записать по аналогии с кинетическим уравнением первого порядка:

$$\frac{ds}{dt} = k_1(\dot{\gamma})s_1 - k_2(\dot{\gamma})s, \quad (3.8)$$

где  $k_1 = k_1(\dot{\gamma})$  и  $k_2 = k_2(\dot{\gamma})$  – константы скоростей «реакций» разрушения и восстановления связей, в общем случае зависящие от скорости сдвига  $\dot{\gamma}$ .

Зависимость  $\mu_a = \mu_a(s)$  при линейном приближении может быть задана соотношением

$$\mu_a = \mu_0 - (\mu_0 - \mu_\infty)s. \quad (3.9)$$

Согласно (3.9) при  $s = 0$  (неразрушенная структура)  $\mu = \mu_0$ , а при  $s = 1$  (полностью разрушенная структура)  $\mu_a = \mu_\infty$ .

Из (3.8) и (3.9) легко получить уравнение

$$\lambda(\dot{\gamma}) \frac{d\mu_a}{dt} + \mu_a = \mu_s(\dot{\gamma}), \quad (3.10)$$

где  $\lambda(\dot{\gamma}) = \frac{1}{k_1 + k_2}$ ,

$$\mu_s(\dot{\gamma}) = \mu_0 - \Delta\mu \cdot \frac{k_1}{k_1 + k_2},$$

$$\Delta\mu = \mu_0 - \mu_\infty.$$

Решение (3.10) с начальным условием  $\mu_a(0) = \mu_0$  имеет (при  $\dot{\gamma} = const$ ) вид

$$\mu_a = \mu_s + (\mu_0 - \mu_s) \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right).$$

Согласно этому соотношению,  $\mu_a \rightarrow \mu_s$  при  $\frac{t}{\lambda} \rightarrow \infty$ . Следовательно, функция  $\mu_s(\dot{\gamma})$  определяет равновесное (стационарное) значение вязкости,

соответствующее данному значению  $\dot{\gamma}$ . Поскольку уже при  $t \geq 3\lambda$   $e^{-t/\lambda} \approx 0$ , то величина  $\lambda(\dot{\gamma})$  имеет смысл характерного времени установления равновесия.

Обобщением (3.8) является нелинейное кинетическое уравнение, предложенное Денни и Бродки (D.A. Denny, R.S. Brodkey, 1962 г.) [6]:

$$\frac{ds}{dt} = k_1(1-s)^n - k_2 s^m, \quad (3.11)$$

где  $n$  и  $m$  – постоянные, аналогичные стехиометрическим коэффициентам, используемым в химической кинетике.

В теории Денни и Бродки принимается, что  $k_2 = \text{const}$ , а константа скорости разрушения является возрастающей функцией скорости сдвига:

$$k_1 = k_0 \dot{\gamma}^p.$$

Предполагается также, что эффективная вязкость определяется соотношением (3.9).

При достаточно продолжительном деформировании с постоянной скоростью сдвига  $\dot{\gamma}$  устанавливается равновесное состояние, определяемое условием  $\frac{ds}{dt} = 0$ , которое можно, используя (3.9) и (3.11), переписать в виде

$$k_0 \left( \frac{\mu_a - \mu_\infty}{\Delta\mu} \right)^n \dot{\gamma}^p = k_2 \left( \frac{\mu_0 - \mu_a}{\Delta\mu} \right)^m. \quad (3.12)$$

Соотношение в неявном виде определяет равновесную зависимость кажущейся вязкости от скорости сдвига  $\mu_a = \mu_a(\dot{\gamma})$ .

Существенным недостатком подобных теорий является наличие большого числа констант, не поддающихся теоретической оценке, поэтому они вряд ли могут быть использованы для непосредственного описания экспериментальных данных. Модели такого рода предназначены, скорее, для выявления качественных особенностей нестационарных процессов в реологически сложных средах.

Рассмотрим некоторые возможные пути уточнения кинетических моделей неньютоновских сред.

Как известно, скорость диссипации механической энергии в единице объема жидкости равна  $W = \mu_a \dot{\gamma}^2$ . Естественно предположить, что часть этой энергии тратится на разрушение структурных связей, поэтому константу скорости разрушения  $k_1$  можно считать функцией величины  $W$ . Это позволяет уточнить вид зависимости  $k_1$  от скорости сдвига:

$$k_1 = k_1(\mu_a(s) \dot{\gamma}^2).$$

Повреждения пространственной «сетки» могут служить центрами, в окрестностях которых процессы деструкции резко ускоряются («где тонко, там и рвется»), поэтому константу скорости разрушения структуры можно считать возрастающей функцией концентрации разрушенных связей  $s$ .

Приведенные выше соображения можно учесть, например, в следующем кинетическом уравнении:

$$\frac{ds}{dt} = -k_2 s + k_0 \mu_a(s) \dot{\gamma}^2 s(1-s), \quad (3.13)$$

где  $k_0$  – некоторая постоянная.

Эффективная вязкость сильнее всего меняется также на начальной стадии разрушения структуры, поэтому линейная связь (3.9) качественно неверна. Вместо нее целесообразно использовать экспоненциальные зависимости вида

$$\mu_a(s) = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \exp\left(-\frac{s}{s_0}\right). \quad (3.14)$$

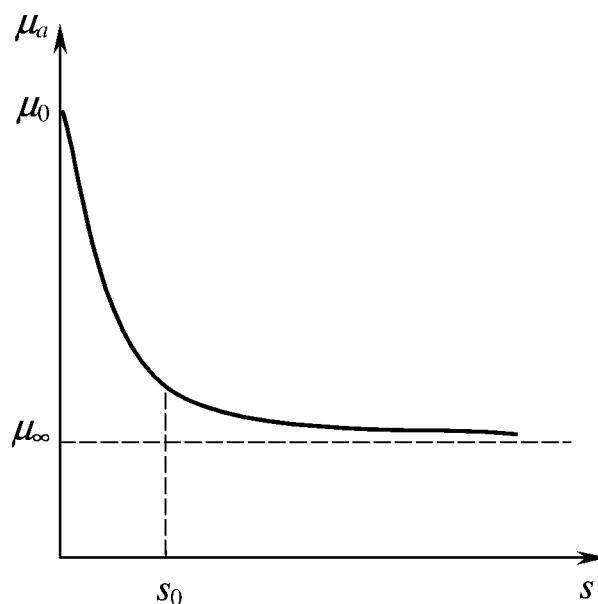
Здесь величина  $s_0$  определяет область, в которой эффективная вязкость меняется наиболее значительно (рис. 3.9).

### *Нестационарные процессы в реопектических средах*

Для описания нестационарных процессов в реопектических средах может быть предложено кинетическое уравнение

$$\frac{dq}{dt} = k_2 q \dot{\gamma} - k_1 q^m \dot{\gamma}^2, \quad (3.15)$$

где  $q$  – концентрация структурных связей, образовавшихся в результате сдвиговых деформаций,  
 $k_1$  и  $k_2$  – константы скоростей разрушения и восстановления связей,  
 $m$  – порядок «реакции» разрушения структуры.



**Рис. 3.9. Зависимость эффективной вязкости от концентрации разрушенных связей**

Согласно (3.15), при малых  $\dot{\gamma}$  имеет место структурообразование, интенсивность которого пропорциональна скорости сдвига. С увеличением  $\dot{\gamma}$  второй член в правой части (3.15) начинает превышать первый, т.е. процессы разрушения структуры превалируют над процессами структурообразования. Это вполне согласуется с тем, что реопектические эффекты на практике наблюдаются лишь при достаточно малых скоростях сдвига. Из (3.15) следует, что скорость структурообразования пропорциональна концентрации структурных связей. Это связано с предположением о том, что уже существующие связи служат центрами, ускоряющими образование новых, аналогично тому, как зародыши ускоряют зарождение новой фазы. Поскольку увеличение концентрации образовавшихся при сдвиге связей должно привести к увеличению скорости деструкции по сравнению со скоростью структурообразования, константа  $m$  в (3.15) должна удовлетворять условию  $m > 1$ .

### 3.2.4. Дифференциально-разностные модели процессов структурообразования

Считая, что состояние неильтоновской среды можно характеризовать всего лишь одной переменной – концентрацией связей, мы тем самым неявно считаем все структурные связи одинаковыми. Это, конечно, не так, поскольку реофизически сложные среды состоят из структурных единиц различного масштаба (молекул, их ассоциатов, макромолекул, кластеров, ассоциатов кластеров и т.д.), образующих некоторую иерархически построенную систему. Реологическое поведение структурных единиц и теснота связи между ними на каждом уровне этой иерархии различны. Поэтому эффективную вязкость среды следует считать функцией многих переменных  $\mu_a = \mu_a(s_1, s_2, \dots, s_n)$ , где  $s_i$  – концентрация разрушенных связей, существовавших между структурными единицами  $i$ -го уровня ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Соответственно вместо кинетического уравнения (3.7) следует рассмотреть системы вида

$$\frac{ds_i}{dt} = f_i(\dot{\gamma}, s_1, s_2, \dots, s_n) \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.16)$$

При построении таких моделей делаются более или менее правдоподобные рассуждения об основных структурных единицах и схеме «реакций» с их участием (см., например, [229]). Однако практическая ценность подобных теорий весьма мала, поскольку «внутренние» переменные  $s_i$  являются *ненаблюдаемыми* – в настоящее время еще не разработаны методы экспериментального определения этих величин. Отметим, что в случае одной переменной  $s$  модель (3.7) может быть, в принципе, переписана относительно наблюдаемой величины  $\mu_a$  (см., например, уравнение 3.10).

Система (3.16) содержит большое число теоретически не определяемых параметров, подбором которых можно объяснить любые экспериментальные данные, поэтому проверка ее адекватности невозможна. Более того, одним и тем же экспериментальным данным могут удовлетворять различные наборы параметров. Все это лишает модели вида (3.16) предсказательной силы.

Приведем анекдот, прекрасно описывающий ситуацию с подобными теориями, в которых параметры «подгоняют» под экспериментальные результаты [191].

Офицер северян во время гражданской войны в США видит на дверях амбаров множество от руки нарисованных мишеней, в середине каждой из которых – след пули, попавшей точно в «яблочко». «Кто это тут упражнялся? Неплохой стрелок», – говорит он. «Да это Билли Джонс бало-

вался с кольтом. Но если честно, то он совсем не умеет стрелять». «Как же так?». «Так он сначала стреляет, а уже потом рисует круги вокруг пробоины».

Иными словами, сложность модели (3.16) не соответствует объему доступной теоретической и экспериментальной информации. Приемлемым выходом в этой ситуации может стать использование дифференциально-разностных моделей (т.е. дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом) вида

$$\frac{ds(t)}{dt} = f[\dot{s}(t), s(t), s(t - \eta)]. \quad (3.17)$$

Возможность замены системы (3.16) одним уравнением (3.17) физически можно объяснить тем, что цепочка «реакций» разрушения крупных структурных единиц на более мелкие (или восстановления крупных структурных единиц из мелких) приводит к некоторому *запаздыванию* в процессах структурообразования. Наличие отклоняющегося аргумента в модели (3.17) позволяет в какой-то мере учесть это запаздывание, не выписывая явном виде кинетические уравнения для всех иерархических уровней.

Для примера рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$$

Исключив переменную  $y$ , получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$x'' + x = 0,$$

имеющее частное решение  $x = C \sin t$ . Легко проверить, что эта функция является одновременно и решением уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -x \left( t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Таким образом, дифференциально-разностное уравнение первого порядка с отклоняющимся аргументом в каком-то смысле аппроксимирует систему дифференциальных уравнений.

### 3.2.5. Вязкоупругие среды

Некоторые среды, способные к вязкому течению, могут проявить и возможности упругого восстановления формы. Такие материалы Джейфрис (Jeffreys, 1929 г.) предложил назвать *вязкоупругими*. Для того чтобы представить себе свойства вязкоупругих сред, опишем некоторые случаи их проявления.

#### а. Упругие жидкости

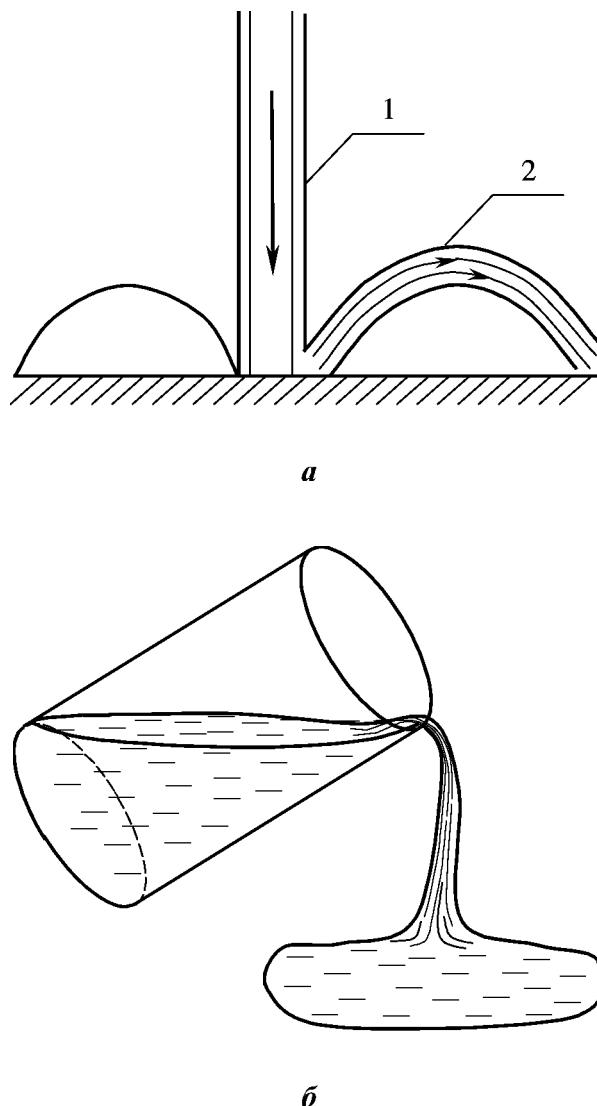
Гесс (Hess, 1920 г.) наблюдал за круговым движением 1,5%-го раствора крахмала в воде, возникающим при вращении сосуда, содержащего раствор. Если вращение сосуда остановить, то скорость движения жидкости постепенно уменьшается за счет вязкого трения о стенки и дно сосуда. Однако Гесс заметил [191], что, когда состояние покоя уже кажется достигнутым, поверхностные слои жидкости снова начинают вращаться, но уже в противоположном направлении. Затем скорость движения снова понижается и снова жидкость меняет направление движения. Только после нескольких таких колебаний жидкость приходит в состояние полного покоя. Эти движения напоминают затухающие колебания груза, прикрепленного к пружине, и объясняются упругими силами, возникающими в жидкости благодаря наличию внутренней структуры (благодаря упругим деформациям пространственной «сетки», например). Такие же эффекты наблюдаются при раскручивании густого томатного супа [218].

Некоторые жидкости (например кое-какие шампуни для волос или 6 %-й раствор высокомолекулярного изобутилена в деказине) обнаруживают способность «прыгать», когда их наливают в сосуд, частично уже заполненный такой жидкостью [218]. При падении струи на свободную поверхность жидкости она как будто отскакивает от нее (эффект Кея, (Kaye, 1963 г.)), что также объясняется упругостью жидкости (рис. 3.10 а).

Раствор полиэтилена в воде может сам вытекать из сосуда, если только дать толчок действию такого *открытого сифона*, вылив часть жидкости (см. рис. 3.10, б) [218]. Упругие свойства жидкости не позволяют струе разорваться, и часть струи, «свисающая» с наружной стороны сосуда, увлекает за собой жидкость, находящуюся в сосуде.

Если струю вязкоупругой жидкости, например раствора полимера или высокосмольстой нефти, вытекающей вертикально вниз из капилляра, направить в стакан, затем медленно отодвигать его в сторону, то струя отклоняется от вертикали и следует за стаканом. Если стакан отодвинуть недалеко, то движение жидкости в искривленной струе происходит устойчиво и стационарно (неограниченно долго). Эффект существования искривленной стационарной струи хорошо воспроизводится. Наличие такой формы равновесия тесно связано с проявлением нормальных напря-

жений при одноосном растяжении элемента вязкоупругой жидкостью. По форме струи можно оценить упругие напряжения, а следовательно, и другие характеристики жидкости.



**Рис. 3.10. Упругие жидкости:**  
1 – падающая струйка, 2 – отскакивающая струйка

Стационарная струя в поле силы тяжести принимает искривленную форму, напоминающую цепную линию. Из этого следует, что в струе существует заметное продольное напряжение.

Как известно, упругие деформации твердых тел обратимы: как бы долго ни действовали нагрузки, после их снятия упругое тело полностью восстанавливает прежнюю форму. В противоположность этому вязкоупругий материал постепенно «забывает» о своей прежней форме. Вследствие этого, чем дольше действует нагрузка, тем менее полным является восста-

новление формы после снятия нагрузки. Говорят, что внутренние упругие напряжения в вязкоупругом теле постепенно *релаксируют* (от *relax* – «расслабиться»). Характерное время  $T_p$ , за которое среда «забывает» о прежней форме, называется *временем релаксации*.

Проявление «памяти» у вязкоупругих жидкостей хорошо видно при наблюдении их истечения из насадки (см. рис. 3.11).

Струя вязкоупругой жидкости на выходе из короткой насадки расширяется (см. рис. 3.11, б), поскольку жидкость «помнит» былое свободное состояние в сосуде. В длинной насадке  $\frac{L}{v} \gg T_p$  (где  $L$  – длина насадки,  $v$  – скорость движения жидкости в насадке) жидкость подвергается сжатию так долго, что успевает «забыть» о состоянии в сосуде, поэтому на выходе форма струи уже копирует форму насадки (см. рис. 3.11, в).

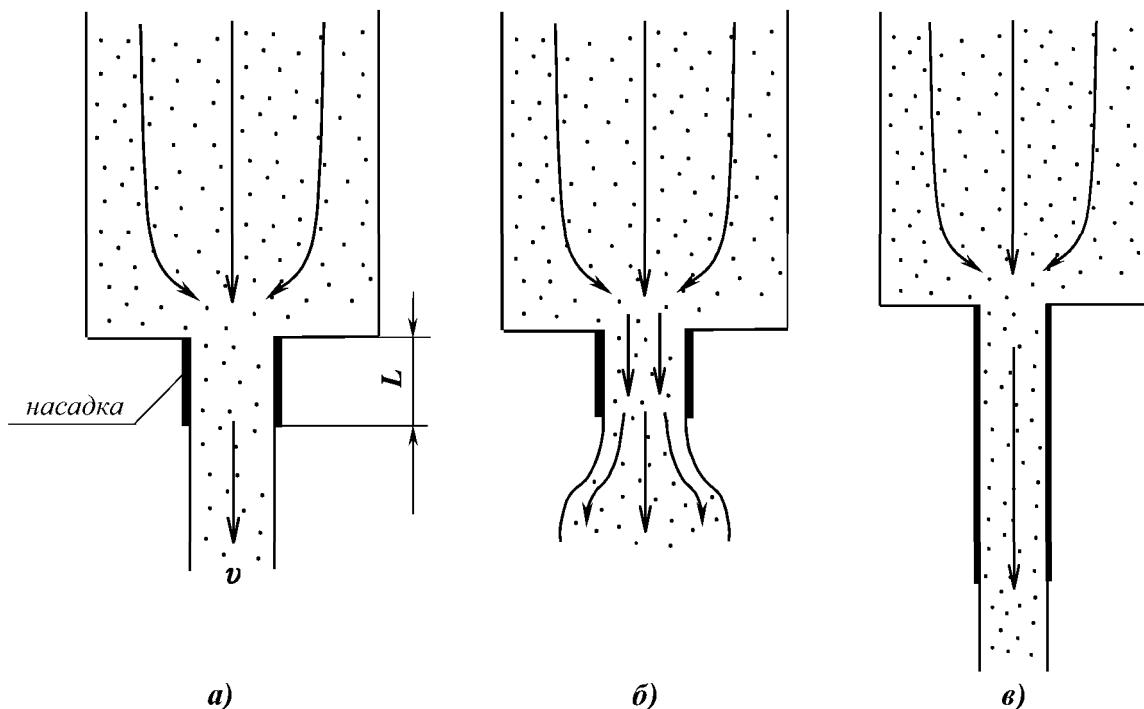


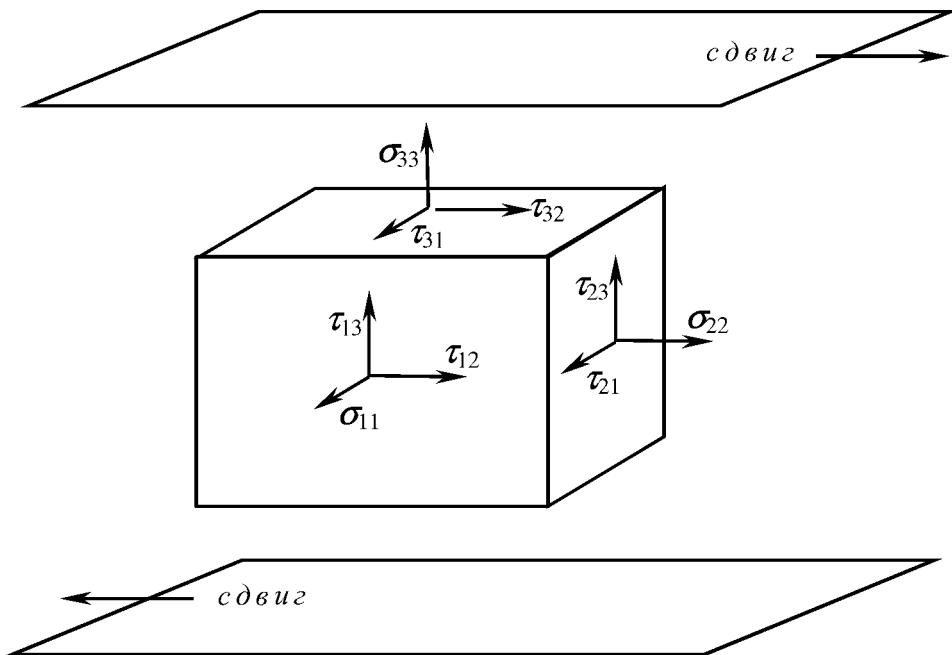
Рис. 3.11. Истечение жидкости из насадки:

а) ньютоновская жидкость, б) вязкоупругая жидкость,  $\frac{L}{v} < T_p$ ,

в) вязкоупругая жидкость,  $\frac{L}{v} \gg T_p$

## 6. Эффект Вайсенберга

На рис. 3.12 показаны напряжения, действующие при простом сдвиге на элементарную бесконечно малую призму со стороны частей среды, лежащих вне ее. Из соображений симметрии очевидно, что касательные напряжения  $\tau_{12} = \tau_{21}$  и  $\tau_{13} = \tau_{31}$  равны нулю. Поэтому напряженное состояние при простом сдвиге вполне определяется одним касательным напряжением  $\tau = \tau_{32} = \tau_{23}$  и тремя нормальными напряжениями  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  и  $\sigma_{33}$ .



**Рис. 3.12. Система напряжений, действующих на элементарный объем**

В ньютоновских жидкостях нормальные напряжения никак не зависят от сдвига и связаны только с изотропным гидростатическим давлением  $p$ :

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p$$

(знак «минус» в этих уравнениях обусловлен тем, что силы гидростатического давления направлены против нормалей к внешней поверхности призмы). Если же жидкость вязкоупругая, то в ней проявляются эффекты второго порядка, вследствие которых сдвиговые деформации приводят к возникновению дополнительных нормальных напряжений  $\tilde{\sigma}_{ii}$ :

$$\sigma_{ii} = -p + \tilde{\sigma}_{ii}.$$

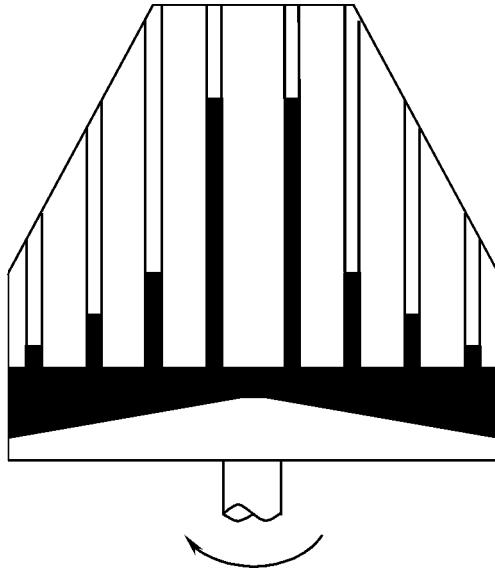
Этот эффект был обнаружен К. Вайсенбергом (K. Weissenberg, 1946), предложившим для его объяснения теорию, согласно которой [35]

$$\tilde{\sigma}_{22} = \tilde{\sigma}_{33} = -\frac{1}{3}\tau\gamma_e, \quad \tilde{\sigma}_{11} = \frac{2}{3}\tau\gamma_e,$$

где  $\gamma_e$  – обратимая (упругая) составляющая сдвига.

Отсюда следует, что нормальные напряжения, перпендикулярные линиям тока, являются сжимающими (аналогично гидростатическому давлению), а напряжения, возникающие вдоль линий тока, являются растягивающими.

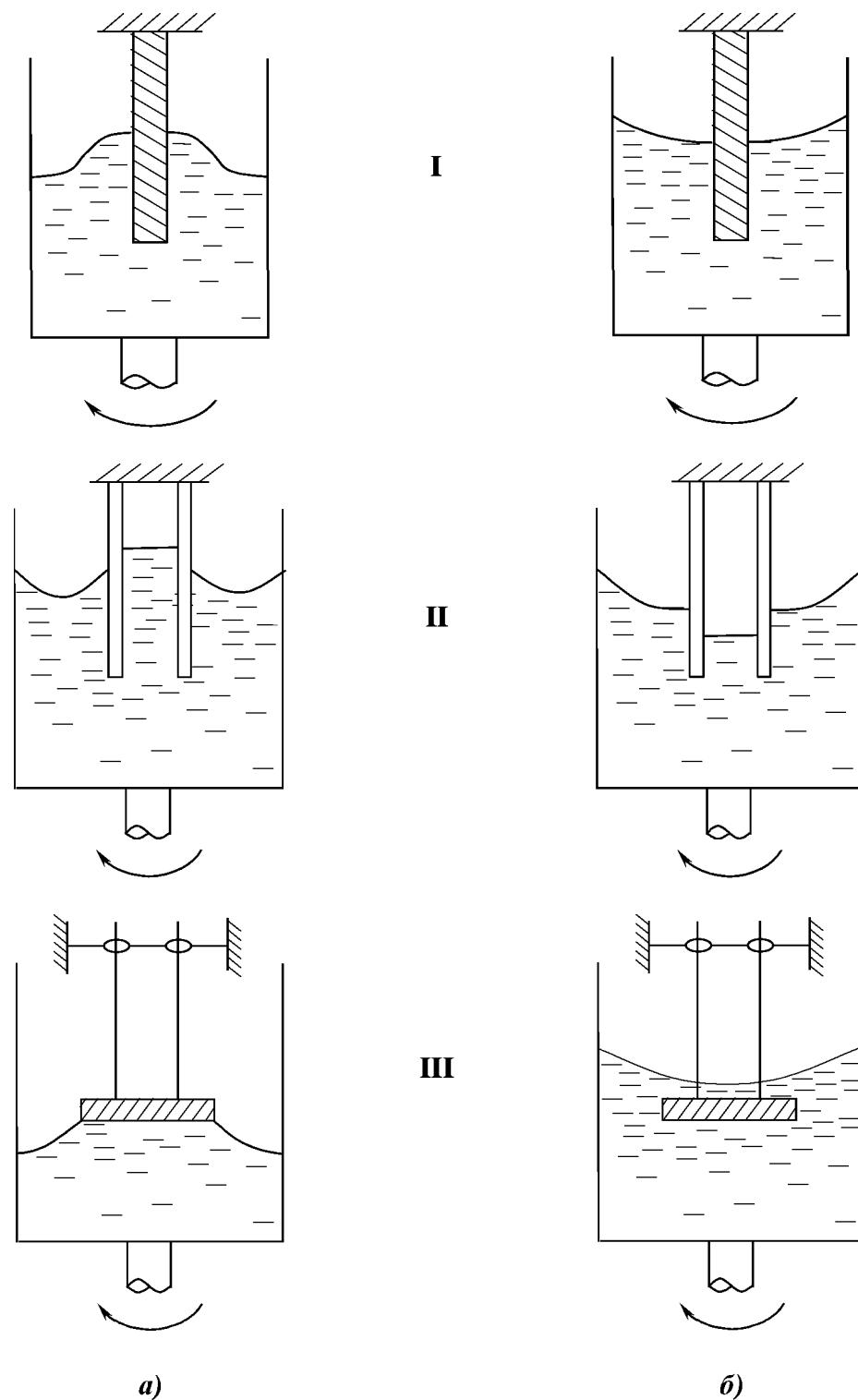
Прямые измерения могут быть получены путем деформирования вязкоупругой жидкости в зазоре между вращающимся конусом и неподвижной пластиной (рис. 3.13). Нормальные напряжения  $\tilde{\sigma}_{33}$  замеряются при этом путем уравнивания их давлением столбиков жидкости в капиллярных трубках, закрепленных на неподвижной пластине.



**Рис. 3.13. Нормальные напряжения в вязкоупругой жидкости**

Сам Вайсенберг возникновение нормальных напряжений наблюдал во вращающемся сосуде с вязкоупругой жидкостью, в которую погружен внутренний неподвижный элемент (рис. 3.14). На рис. 3.14 в случае I в

жидкость погружен стержень, в случае II – трубка, в случае III – диск, способный перемещаться по вертикали.



**Рис. 3.14. Эффект Вайсенберга**  
а) вязкоупругая жидкость, б) ньютоновская жидкость

Возникающие при сдвиге нормальные напряжения приводят к тому, что вязкоупругая жидкость течет, несмотря на наличие центробежных сил, *внутрь* и поднимается *вверх*, преодолевая гравитационные силы. Значительную роль в этом явлении играют, по всей видимости, растягивающие напряжения вдоль линий тока. Они стремятся «сжать» кольца, образованные линиями тока, т.е. заставляют жидкость смещаться ближе к оси вращения.

В домашних условиях эффект Вайсенберга можно наблюдать при вращении в сгущенном молоке стержня (например карандаша), закрепленного в патроне электрической дрели.

Отметим, что хотя в настоящее время имеется значительное число как теоретических, так и экспериментальных работ, посвященных исследованию нормальных напряжений, удовлетворительное объяснение эффекта Вайсенберга еще не найдено.

## **в. Твердые тела, обладающие вязкостью**

Лорд Кельвин (W. Thomson, sir Kelvin) в 1890 г. заключил, что в упругом твердом теле существует молекулярное трение, которое может быть названо вязкостью твердого тела. В качестве модели этого явления он предложил рассмотреть упругое пористое твердое тело, поры которого заполнены вязкой жидкостью (например маслом). При мгновенном нагружении такой системы часть нагрузки воспринимается твердым веществом, а часть – жидкостью. Но затем жидкость начинает растекаться, что приводит к дополнительному деформированию твердого скелета и передаче нагрузки жидкости к твердому телу.

Таким образом, установление равновесной деформации требует некоторого времени  $T_p$ , называемого временем релаксации деформаций. Если на такое тело накладывается периодическая нагрузка с достаточно большой частотой, то обнаруживаются потери энергии, связанные с вязким сопротивлением течению жидкости. При этом среда ведет себя аналогично гармоническому осциллятору с трением.

Отметим, что реальным прототипом тела Кельвина может служить образец суглинка, в котором частицы песка соединены коллоидными частицами глины, а промежутки заполнены водой [191].

### 3.2.6. Механические модели неньютоновских сред

*Я никогда не испытываю чувства полного удовлетворения до тех пор, пока не построю механическую модель изучаемого объекта. Если мне это удается, то я сразу все понимаю, в противном случае – не понимаю.*

У. Томсон (lord Кельвин)

Вязкоупругие жидкости могут быть представлены в виде некоторых комбинаций двух идеальных тел – вязкого (Ньютона) и упругого (Гука). Качественное описание реологического поведения подобных тел дают *механические модели*, в которых упругие свойства представлены пружиной, а вязкие – поршнем, движущемся в цилиндре, наполненном маслом (рис. 3.15).

Простейшая механическая модель вязкоупругой жидкости может быть получена последовательным соединением пружины и поршня (см. рис. 3.15, в). Она представляет собой так называемую *максвелловскую* жидкость (J. Maxwell, 1868 г.).

Поскольку при последовательном соединении

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau, \quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2,$$

где  $\tau_1$  и  $\tau_2$  – силы (напряжения), действующие на пружину и поршень,  $\gamma$  – деформация всей системы, то с учетом соотношений

$$\tau_1 = G\gamma_1, \quad \tau_2 = \mu\dot{\gamma}_2$$

получим

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{G}\dot{\tau} + \frac{\tau}{\mu},$$

или

$$\lambda \frac{d\tau}{dt} + \tau = \mu\dot{\gamma},$$

$$\text{где } \lambda = \frac{\mu}{G}.$$

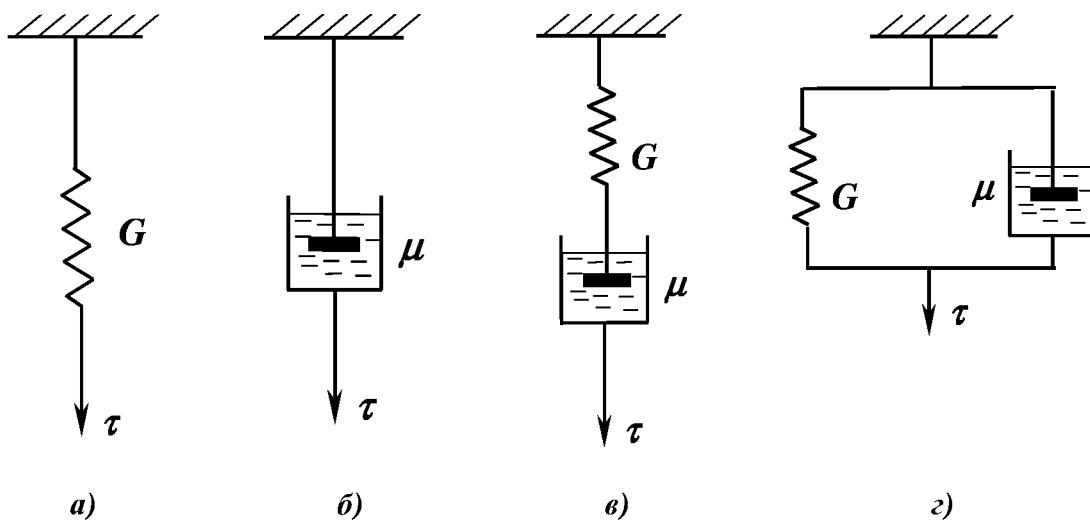


Рис. 3.15. Механические модели вязкоупругих сред:

- а) упругое тело; б) вязкая жидкость;
- в) тело Маквелла; г) тело Кельвина-Фойхта

Если тело Маквелла подвергается при  $t \geq 0$  деформации с постоянной скоростью  $\dot{\gamma}_0$ , то из (3.18) с учетом начального условия  $\tau(0) = 0$  легко получить

$$\tau(t) = \mu\dot{\gamma}_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) \right].$$

Отсюда следует, что при  $\frac{t}{\lambda} \rightarrow \infty$  напряжение по экспоненциальному закону стремится к равновесному значению  $\tau_\infty = \mu\dot{\gamma}_0$ . Величина  $\lambda$  имеет смысл характерного времени переходного процесса и называется временем релаксации. Таким образом, реологические характеристики вязкоупругих жидкостей зависят от времени (как и характеристики тиксотропных и реопектических сред).

Механическая модель твердого тела, обладающего вязкостью (тела Кельвина), может быть получена параллельным соединением пружины и поршня (см. рис. 3.15, г). Для этой схемы

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma, \quad \tau = \tau_1 + \tau_2,$$

поэтому имеем

$$\tau = G\gamma + \mu\dot{\gamma},$$

или

$$\lambda\dot{\gamma} + \gamma = \frac{1}{G}\tau.$$

Реологическая модель вида (3.19) рассматривалась также Фойхтом (Voigt, 1890 г.), поэтому модель, изображенная на рис. 3.15, г, часто называют телом Кельвина–Фойхта.

Простые модели Максвелла и Кельвина–Фойхта не всегда оказываются достаточными для исчерпывающего описания реальных вязкоупругих материалов. Связано это с иерархичностью структуры реофизически сложных сред (п. 3.2.4), приводящей к наличию не одного, а целого спектра времен релаксации, характеризующих нестационарные процессы на различных уровнях структурной организации. В связи с этим часто рассматриваются обобщенные модели, составленные из многих последовательно-параллельно соединенных пружин и поршней (рис. 3.16).

Для примера выведем реологическое уравнение, соответствующее механической модели, изображенной на рис. 3.16, а. Имеем

$$\tau = \tau_0 + \tau_2; \quad \gamma = \gamma_0 + \gamma_1,$$

где  $\tau_0 = \mu_0 \dot{\gamma}_0$ ,  $\tau_2 = \mu_1 \dot{\gamma}_1$  и  $\tau_1 = G \gamma_1$  – силы (напряжения), действующие на поршни  $\mu_0$ ,  $\mu_1$  и пружину  $G$  соответственно.

Отсюда

$$\gamma_1 = \frac{\tau}{\mu_1 D + G}, \quad \gamma_0 = \frac{\tau}{\mu_0 D},$$

или

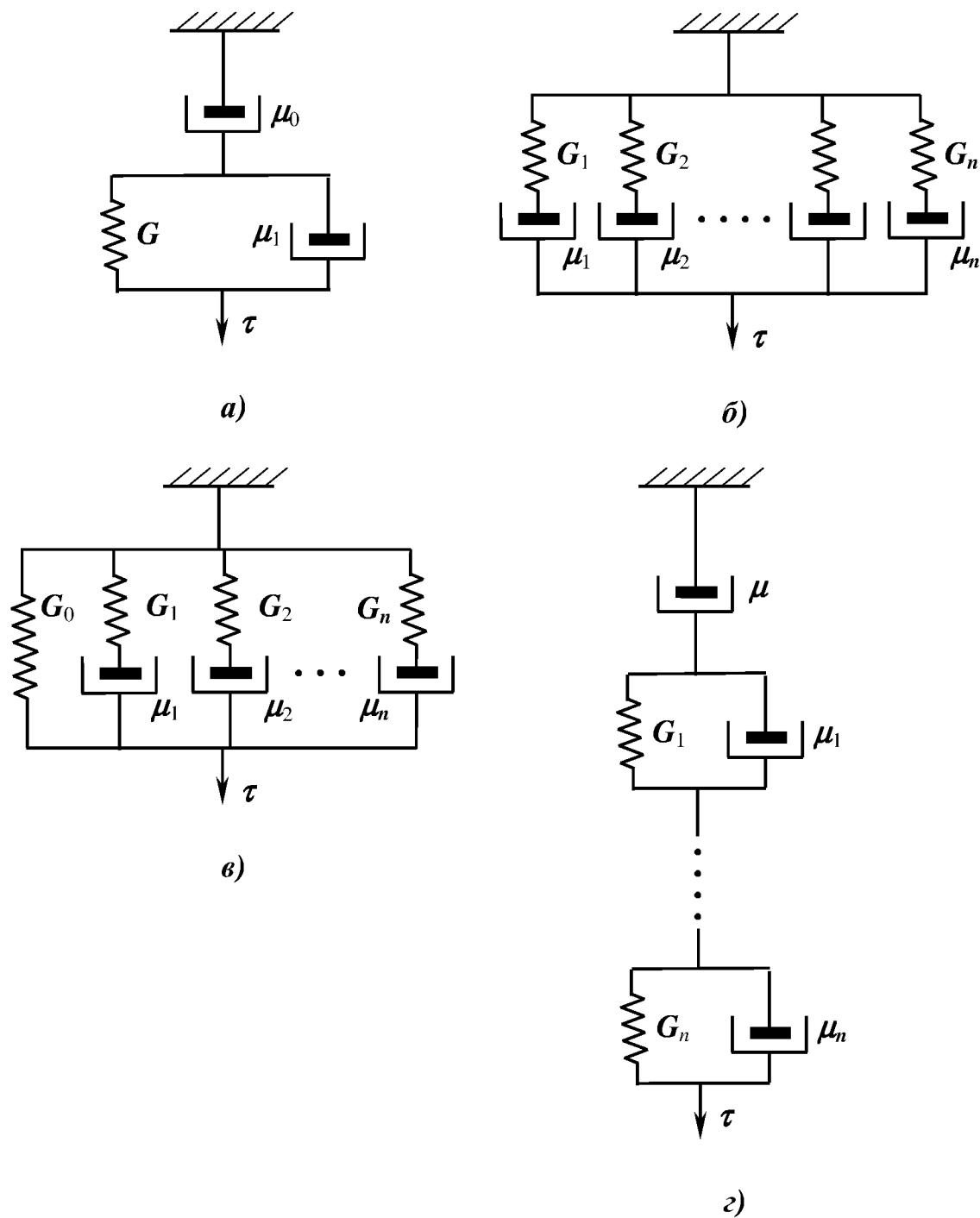
$$\gamma = \left( \frac{1}{\mu_1 D + G} + \frac{1}{\mu_0 D} \right) \tau,$$

где  $D = \frac{d}{dt}$  – оператор дифференцирования по времени, что приводит к уравнению

$$\lambda_2 \dot{\tau} + \tau = \mu_0 (\dot{\gamma} + \lambda_1 \ddot{\gamma}), \quad (3.20)$$

где  $\lambda_2 = \frac{\mu_1 + \mu_0}{G}$ ,  $\lambda_1 = \frac{\mu_1}{G}$  – времена релаксации.

Модель (3.20) была получена Олдройдом (J.G. Oldroyd, 1953 г.) при теоретическом рассмотрении реологических свойств эмульсий и суспензий.



**Рис. 3.16. Обобщенные механические модели:**  
а) тело Олдройда, б), в) обобщенные тела Максвелла,  
г) обобщенное тело Кельвина–Фойхта

Применение более сложных моделей приводит к реологическим уравнениям вида

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n D^n \tau = \sum_{m=0}^M \beta_m D^m \gamma,$$

где  $D^n f \equiv \frac{d^n f}{dt^n}$ .

### 3.2.7. Функции релаксации

Рассмотрим вязкоупругую жидкость, описываемую механической моделью, состоящей из  $n$  параллельно соединенных элементов Максвелла (см. рис. 3.16, б). Предположим, что эта среда при  $t \geq 0$  подвергается сдвиговой деформации со скоростью  $\dot{\gamma}(t)$ . Для  $i$ -го элемента системы связь между напряжением и деформацией выражается уравнением

$$\lambda_i \frac{d\tau_i}{dt} + \tau_i = \mu_i \dot{\gamma}(t), \quad (3.21)$$

где  $\lambda_i = \frac{\mu_i}{G_i}$  –  $i$ -е время релаксации (при параллельном соединении деформации отдельных элементов равны полной деформации  $\gamma(t)$ ).

По методу вариации произвольной постоянной решение этого уравнения ищется в виде произведения

$$\tau_i(t) = V(t) \exp\left(-\frac{t}{\lambda_i}\right),$$

где  $\exp\left(-\frac{t}{\lambda_i}\right)$  – решение однородного уравнения

$$\lambda_i \dot{\tau}_i + \tau_i = 0.$$

Подставив это выражение в (3.21), получим

$$\frac{dV}{dt} = G_i \dot{\gamma}(t) \exp\left(-\frac{t}{\lambda_i}\right),$$

откуда

$$\tau_i(t) = \int_0^t G_i e^{-\frac{t-\xi}{\lambda_i}} \dot{\gamma}(\xi) d\xi + \tau_i(0) e^{-\frac{t}{\lambda_i}}. \quad (3.22)$$

Поскольку полное напряжение  $\tau$  является суммой отдельных составляющих, то с учетом начального условия  $\tau_i(0) = 0$  получим

$$\tau(t) = \int_0^t \Phi(t-\xi) \dot{\gamma}(\xi) d\xi,$$

где  $\Phi(t)$  – так называемая функция релаксации,

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^n G_i \exp\left(-\frac{t}{\lambda_i}\right). \quad (3.23)$$

Это название объясняется тем, что если при  $t = 0$  подвергнуть материал деформации  $\gamma_0$ , остающейся затем неизменной, то вследствие движения поршня напряжение  $\tau(t)$  будет убывать (релаксировать) до нуля по закону, определяемому функцией  $\Phi(t)$ . Действительно, в этой ситуации  $\dot{\gamma}(t) = 0$  при  $t > 0$  и  $\tau_i(0) = \gamma_0 G_i$ , поскольку смещение поршня в начальный момент времени равно нулю, поэтому из (3.22) получим

$$\tau_i(t) = \gamma_0 G_i e^{-\frac{t}{\lambda_i}},$$

откуда

$$\tau(t) = \gamma_0 \sum_{i=0}^n G_i \exp\left(-\frac{t}{\lambda_i}\right). \quad (3.24)$$

Спектр релаксационных времен  $\lambda_i$  и величины  $G_i$  могут быть определены по экспериментально снятым кривым релаксации нагрузки.

### 3.3. К учету явлений запаздывания в теории фильтрации

Многим системам, применяемых в нефтедобыче, присущи явления тиксотропии, реопексии, реологической нелинейности и др., учет которых одновременно в рамках одной реологической модели практически невозможен. Поэтому были предложены реологические модели, дифференцированно учитывающие указанные эффекты. Было показано, что для получения качественных результатов при моделировании фильтрации сложных сред необходимо учитывать эффекты релаксации [4, 7–9, 12, 21, 154, 155].

Обычно при описании релаксационной фильтрации используются феноменологические модели, учитывающие запаздывание в соотношениях между скоростью фильтрации и градиентом давления. В отдельных случаях учитывается запаздывание и в уравнениях состояния. Неравновесный

характер фильтрации может проявляться как релаксация скорости фильтрации при постоянном градиенте давления или наоборот.

В названных работах в основу рассматриваемых моделей кладутся представления Максвелла о релаксационных явлениях, главное из которых – соотношение продолжительности действия внешней силы, обуславливающей деформацию тела, и времени затухания напряжений сдвига [149]. Рассмотренные гипотетические модели релаксационной фильтрации созданы как аналоги моделей Максвелла (J. Maxwell, 1868 г.), Кельвина–Фихта (Voigt, 1880 г.), обобщенной модели Олдройда (J.G. Oldroyd, 1953 г.), полученной при теоретическом рассмотрении реологических свойств эмульсий и суспензий.

Рассмотрим некоторые модели релаксационной фильтрации, предложенные разными исследователями.

Первой оригинальной работой в этом направлении можно назвать исследование Г.И. Баренблатта, А.Х. Мирзаджанзаде и др. [28].

В ней проанализированы многочисленные экспериментальные данные о релаксационном изменении скорости фильтрации при течении полимерного раствора через пористую среду, при постоянном перепаде давления. Отмеченное явление объяснено своеобразной неравновесностью фильтрационного потока, предложена соответствующая модель.

В [8] рассмотрены некоторые нестационарные одномерные задачи фильтрации при упругом режиме в предположении отставания градиента давления от скорости фильтрации. Такой характер зависимости градиента давления от скорости фильтрации учитывается с помощью обобщенного закона Дарси, который задается в виде

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} \left( p + \tau_p \frac{\partial p}{\partial t} \right), \quad (3.25)$$

где  $\tau_p$  – время релаксации давления.

Физический смысл этого уравнения заключается в том, что при установлении постоянной скорости фильтрации  $v_0$  ранее покоящейся жидкости соответствующий градиент давления устанавливается с некоторым временем «запаздывания»  $\tau_p$ .

На основе общих предположений теории упругого режима с использованием (3.25) выведено уравнение пьезопроводности

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \chi \left( \operatorname{div} \operatorname{grad} p + \tau_p \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \operatorname{grad} p \right), \quad (3.26)$$

$$\chi = \frac{k}{\mu(m\beta_c + \beta_{\infty})},$$

где  $\chi$  – коэффициент пьезопроводности,  
 $m$  – пористость,  
 $\beta_{\infty}$  и  $\beta_c$  – коэффициенты сжимаемости жидкости и пласта соответственно.

В работе [9] обсуждаются вопросы запаздывания установления равновесного состояния между градиентами давления и скоростью фильтрации, которое обусловлено:

- а) инерцией скорости и запаздыванием ее значения относительно градиента давления;
- б) релаксацией давления и запаздыванием значения градиента давления относительно значения скорости фильтрации;
- в) сложностью структуры пористой среды и запаздыванием установления равновесного состояния в его микропорах;
- г) запаздыванием переупаковки частиц, изменением пористости и проницаемости и т.п.

Уравнение (3.25) обобщено с учетом запаздывания скорости фильтрации

$$\bar{v} + \tau_v \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} \left( p + \tau_p \frac{\partial p}{\partial t} \right) \quad (3.27)$$

и выведено уравнение нестационарной фильтрации

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \tau_v \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \chi \left( \operatorname{div} \operatorname{grad} p + \tau_p \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \operatorname{grad} p \right), \quad (3.28)$$

где  $\tau_v$  – время релаксации скорости фильтрации.

В работе [4] предлагается интегральная модель неравновесной фильтрации. Отмечено хорошее согласие предложенной модели с экспериментальными данными.

В [155] с учетом релаксационных эффектов находится распределение давления в пластах, работающих при водонапорном и упругом режимах и эксплуатируемых  $N$  скважинах с заданными дебитами. При определении поля давления используется функция Грина, которая строится для соответствующих уравнений и областей.

Отметим, что релаксационные законы (3.25), (3.27) могут быть связаны и с несколько иными механизмами. Так, при изучении особенностей фильтрации однородной капельно-сжимаемой жидкости в трещиновато-пористых, кавернозных средах было показано [21, 177], что течение в трещинах без учета их сжимаемости можно описать фиктивным потоком некоторой слабосжимаемой жидкости в однородной пористой среде по закону фильтрации (3.25). Если же учитывается сжимаемость трещин, то течение в них можно интерпретировать как линейную фильтрацию некоторой слабосжимаемой жидкости в однородной пористой среде по закону (3.27). Кроме того, при изучении движения жидкости в однородной пористой среде в одномерном случае может быть использован релаксационный закон [57, 164]

$$\vec{v} + \tau_v \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (3.29)$$

Отметим, что в данном случае параметры  $\tau_v$  и  $\tau_p$  в (3.25), (3.27), (3.29) представляют собой некоторые константы, определяемые вязкостью жидкости, упругоемкостью блоков пористой среды и коэффициентом, характеризующим обмен жидкостью между блоками и трещинами.

При выводе уравнений пьезопроводности (3.26), (3.28) предполагалось, что изменение пористости среды с изменением давления имеет равновесный характер. Такая связь имеет место при сравнительно небольших и плавных изменениях давления. При резких и значительных изменениях давления поведение пористости среды будет носить релаксационный характер. В этом случае вместо уравнения состояния  $m = m_0 + \beta_c(p - p_0)$ , где  $m$ ,  $m_0$  – текущая и первоначальная пористости,  $\beta_c$  – коэффициент объемной упругости пласта, принимается [154, 155]

$$m + \tau_c \frac{\partial m}{\partial t} = m_0 + \beta_c(p - p_0), \quad (3.30)$$

где  $\tau_c$  – время релаксации пористости.

Если закон фильтрации принимать в виде равновесного закона Дарси (в одномерном случае)

$$v = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x},$$

то с учетом (3.30), получаем уравнение пьезопроводности

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \tau_c \left( 1 - \frac{\beta_c}{\beta^*} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \chi \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \tau_c \frac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial t} \right), \quad (3.31)$$

что с точностью до обозначений совпадает с (3.28).

Важно обратить внимание на функциональную связь проницаемости пористой среды  $k$  с пористостью  $k = k(m)$ , причем линейную для характерного интервала значений давления  $p$ . Эта связь подтверждается анализом уравнений состояний, записанных относительно средних нормальных напряжений в твердом скелете пористой среды

$$m = m_0 \left( 1 - \frac{\sigma - \sigma_0}{K_m} \right), \quad \frac{k}{m} = \frac{k_0}{m_0} \left( 1 - \frac{\sigma - \sigma_0}{K_k} \right), \quad (3.32)$$

где  $\sigma$  – среднее нормальное напряжение в скелете пористой среды ( $\sigma_0$  – напряжение в невозмущенном пласте);  
 $k_0$  и  $\mu_0$  – значения проницаемости и вязкости в невозмущенном пласте;  
 $K_k$  и  $K_m$  – модули объемного сжатия пористой среды.

Пористые среды с законом деформации (3.30) названы релаксационно-сжимаемыми.

Вопросы корректности постановок задач и анализа свойств решений уравнений линейной релаксационной фильтрации в дальнейшем развивались в работах [112, 181].

В [84] закон фильтрации записан в интегральном виде.

Модель (3.27) называется моделью с двойной релаксацией. В общем случае, как и в линейных дифференциальных реологических моделях вязкоупругих жидкостей, можно записать различные ее обобщения. В частности, дифференциальные операторы могут иметь полиномиальный вид

$$P(D)\vec{v} = -\frac{k}{\mu}Q(D)(\text{grad } p),$$

где

$$P(D) = 1 + p_1 D + \dots + p_n D^n,$$

$$Q(D) = 1 + q_1 D + \dots + q_m D^m,$$

$$D = \frac{\partial}{\partial t}, \quad D^i = \frac{\partial^i}{\partial t^i},$$

$\sqrt{i p_i}$ ,  $\sqrt{i q_i}$  – времена релаксации скорости фильтрации и градиента давления.

Использование указанных формул для практических расчетов затруднительно, т.к. определить времена релаксации  $\sqrt{p_i}$ ,  $\sqrt{q_i}$  на основе экспериментальных или каких-либо других исследований чрезвычайно трудно. Поэтому широкое применение нашла модель (3.27).

Как отмечалось в начале раздела, в некоторых фильтрационных задачах приходится учитывать релаксационный характер уравнения состояния жидкости. Некоторые модели объемно-релаксационной деформации приведены в [12], где получено также уравнение пьезопроводности, которое по виду ничем не отличается от (3.28) и (3.31). Однако постановки задач для них существенно различны. Краевые условия в задачах для этих уравнений ставятся исходя из закона Дарси, положенного в основу уравнений.

Весьма плодотворным оказалось обобщение линейных релаксационных моделей с использованием обобщенных производных по времени. При этом модели становятся нелинейными, но появляется возможность описания многих нетривиальных экспериментальных явлений. Так, в [12] предложена модель

$$\vec{v} = -(k / \mu)[\nabla p + \tau(\partial \nabla p / \partial t + (\nabla \vec{v}) \nabla p / m)],$$

объяснившая ряд новых явлений.

Как видно из приведенных сведений, гипотетические модели релаксационной фильтрации могут приниматься в различном виде.

Однако для всех этих моделей общим недостатком, ограничивающим их применение, является отсутствие явной связи фильтрационных времен релаксации от релаксационных свойств жидкости и пористой среды. Эти модели выступают как конкурирующие, в то время как сколько-нибудь обоснованных критериев выбора в рамках феноменологической фильтрационной теории авторами не выдвинуто.

С другой стороны, в соответствии с положениями феноменологической теории фильтрации закон фильтрации жидкости является следствием уравнений количества движения [26, 27]. Поэтому в величине скорости фильтрации должны отразиться все особенности течения жидкости через пористые среды, а уравнение движения (3.29), учитывающее релаксацию только скорости, должно комплексно содержать в себе все составляющие релаксации, в том числе давления и пористости. Последнее формально показано в [57].

Равновесные модели фильтрации справедливы в предположении, что в выбранной точке пористой среды с изменением давления в жидкости

мгновенно (по времени) происходит соответствующее возрастание среднего нормального напряжения в скелете пористой среды и наоборот.

Последнее обусловлено линейной связью между давлением  $p$  и средним нормальным напряжением в скелете пористой среды  $\sigma$  вида

$$P = p + \sigma,$$

где  $P$  – горное давление.

Однако в реальных условиях наблюдается некоторое отставание по времени изменения напряжения  $\sigma$  в пористой среде при изменении давления в жидкости  $p$ .

При неустановившейся фильтрации сжимаемой жидкости должна проявляться релаксация как напряжения, так и давления. Поэтому согласно теории механического взаимодействия горных пород и насыщенных их жидкостей и исходя из обобщенной модели Олдройда можно записать

$$P = p + \tau_p \frac{\partial p}{\partial t} + \sigma + \tau_\sigma \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad (3.33)$$

где  $\tau_\sigma$  – постоянная времени релаксации среднего нормального напряжения в системе пористой среды.

Тогда, учитывая релаксацию  $\sigma$  и обусловленную ею релаксацию пористости (а через нее – проницаемости), вместо (3.32) имеем

$$\frac{k}{\mu} - \frac{k_0}{\mu_0} + \tau_k \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{k}{\mu} \right) = - \frac{k_0}{\mu_0 K_k} \left( \sigma - \sigma_0 + \tau_\sigma \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right).$$

Здесь  $\tau_k$  – постоянная времени релаксации проницаемости. Последнее уравнение решается относительно приращений параметров  $\Delta \frac{k}{\mu}$  и  $\Delta \sigma$ .

Переписав его относительно полных значений этих параметров, имеем:

$$\frac{k}{m} + \tau_k \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{k}{\mu} \right) = - \left( \sigma + \tau_\sigma \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) \frac{k_0}{\mu_0 K_k}. \quad (3.34)$$

Соотношение (3.34) устанавливает взаимообусловленность релаксации проницаемости пористой среды от релаксационного напряжения в ее скелете.

Зададим в законе фильтрации релаксацию скорости, проницаемости и давления в жидкости. В работе [57] показано, что в этом случае уравнение

$$\vec{v} + \tau_v \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - \left[ \frac{k}{\mu} + \tau_k \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{k}{\mu} \right) \right] \text{grad} \left( p + \tau_p \frac{\partial p}{\partial t} \right) \quad (3.35)$$

не противоречит закону Дарси. Экспериментальные данные [164] показывают, что постоянная  $\tau_p$  по порядку величин не превышают  $10^2$  с. Оценки же постоянной времени релаксации среднего нормального напряжения в скелете пористой среды [57] дают  $\tau_\sigma \sim 10^7$  с; из (3.34) следует, что постоянная релаксации проницаемости  $\tau_k$  имеет такой же порядок.

Несложные преобразования (3.35) дают [57]

$$\begin{aligned} \vec{v} + \tau_v \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = & - \frac{k}{\mu} \text{grad} p - \tau_k \text{grad} p \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{k}{\mu} \right) - \\ & - \tau_p \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{k}{\mu} \text{grad} p \right) \pm \tau_p \tau_k \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad} p) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{k}{\mu} \right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Рассматриваются два предельных случая [57]: кратковременное импульсное возбуждение пласта либо его длительное возмущение.

В первом случае, при значительном времени релаксации проницаемости, т.е. при значительном запаздывании ее изменения с момента воздействия на пласт, и чрезвычайно малой продолжительности опыта пласт можно считать несжимаемым на протяжении возмущения, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{k}{\mu} \right) \cong 0.$$

Таким образом, второе и четвертое слагаемые в правой части (3.36) в принятом приближении пренебрежимо малы. Тогда

$$\vec{v} + \tau_v \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - \frac{k}{\mu} \text{grad} p - \tau \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{k}{\mu} \text{grad} p \right), \quad (3.37)$$

$$\tau_v = \tau_p = \tau.$$

Последнее соотношение показывает, что релаксация скорости фильтрации определяется релаксацией давления в жидкости при линейной зависимости скорости от градиента давления.

Во втором предельном случае продолжительность возмущения пласта соизмерима с  $\tau_k$  и соответственно много больше постоянной релаксации давления  $\tau_p$ . Очевидно, что релаксационными процессами в жидкости в таком приближении можно пренебречь. Формально это выражается тем, что при длительном возмущении формируется зона квазистационарного режима фильтрации, где  $\text{grad } p \equiv \text{const}$ , а

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{grad } p) \equiv 0, \quad \tau_p \ll \tau_k.$$

Тогда вместо (3.36) имеем

$$\vec{v} + \tau_v \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{k}{\mu} \text{grad } p - \tau \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{k}{\mu} \text{grad } p \right), \quad (3.37)$$

$$\tau_v = \tau_k = \tau.$$

Последнее выражение показывает, что релаксация скорости фильтрации здесь определяется релаксацией проницаемости пористой среды.

Таким образом, закон фильтрации вида (3.29), учитывающий релаксацию скорости фильтрации, комплексно содержит в себе релаксацию давления в жидкости и пористости (проницаемости). Постоянная  $\tau_v$  этого закона определяется либо постоянной релаксации давления  $p$  при кратковременном импульсном возбуждении пласта, либо постоянной релаксации пористости (или проницаемости) пласта при его длительном возмущении. Уравнение движения вида (3.37), содержащее две составляющие релаксации, на самом деле представляет собой тождество и не противоречит линейному закону фильтрации Дарси. Использование (3.29) исключает необходимость задания других составляющих релаксации в уравнениях состояния.

### 3.4. Масштабная инвариантность временных иерархий в процессах релаксации вязкоупругих сред

Многие практически и теоретически важные задачи приводят к необходимости моделирования процессов релаксации в реофизически сложных средах. Такие среды встречаются при производстве самых разнообразных материалов (резины, пластмасс, тканей, красок, смазок, пищевых продуктов и др.). Исключительно большое значение они имеют также в процессах, связанных с добывчей нефти [12, 149]. Интерес к ним

обусловлен огромным разнообразием новых эффектов, могущих возникнуть в релаксирующих материалах. Изучение их реологии способствует лучшему пониманию и усовершенствованию технологических процессов, рациональной разработке новых высокоэффективных технологий и продуктов.

Релаксационные явления в реофизически сложных средах связаны с медленным развитием процессов перегруппировки структурных единиц различного масштаба. (Так, в случае полимеров таковыми являются гибкие молекулы, их отдельные сегменты или же пачки, образованные этими молекулами). Эти процессы приводят к запаздыванию изменений деформации от изменения напряжения (гистерезис, упругое последействие, релаксация напряжения и т.д.) и могут быть описаны с помощью моделей упругих тел с внутренним трением и вязких тел, обладающих упругостью (раздел 3.2.6). Механические модели вязкоупругих тел полезны для понимания качественных особенностей явлений релаксации, но их применение к количественному описанию реальных материалов требует построения очень сложных систем, состоящих из большого числа различных пружин и вязких элементов (что связано с наличием иерархии структурных единиц различного масштаба, приводящей к иерархии широко распределенных времен релаксации).

Ясно, что сложные модели не могут оказаться эффективными – слишком велики трудности, связанные с определением многочисленных релаксационных параметров по экспериментальным данным, а также с решением задач моделирования движения сред с широким спектром времен релаксации.

Ниже показано, что отмеченные затруднения могут быть преодолены за счет конкретизации структуры временных иерархий, определяющих релаксацию в реофизически сложных средах. Проведен анализ экспериментальных данных, который показывает, что распределение времен релаксации в этих средах может оказаться масштабно – инвариантным, т.е. иметь фрактальную структуру. Показано, что наличие временной фрактальности позволяет облегчить описание процессов релаксации, приводя на больших временах к универсальным релаксационным функциям достаточно простого вида [224]. Показано также, что в ряде случаев возможно использование реологических моделей, содержащих производные дробного порядка.

### **Релаксация напряжения в вязкоупругих средах**

В последнее время было показано, что многоуровневые процессы релаксации во многих самых различных системах характеризуются масштабно-инвариантным (фрактальным) распределением характерных врем-

мен [224]. Основываясь на этом, предположим, что величины  $G_n$  и  $\lambda_n$  обобщенного тела Максвелла (см. рис. 3.16, б) определяются скейлинговыми законами вида

$$G_n = \frac{G_0}{l_1^n} = G_0 \exp(-nl), \quad l = \ln l_1; \quad (3.38)$$

$$\lambda_n = \lambda_0 m_1^n = \lambda_0 \exp(nm), \quad m = \ln m_1, \quad (3.39)$$

или вместо (3.39)

$$\lambda_n = \lambda_0 n^\nu. \quad (3.40)$$

Таким образом, при наличии временной масштабной инвариантности  $\ln G_n$  должен линейно уменьшаться с увеличением  $n$ .

Существование такой зависимости подтверждается данными работы [47], в которой приведены значения  $G_n$  и  $\lambda_n$  для нескольких иерархических уровней образцов монодисперсного и полидисперсного полистиролов. По этим данным линейной является и зависимость от номера уровня логарифма времени релаксации, что может быть проявлением закона (3.39).

Выбрав скейлинговые законы (3.38) и (3.39) и преобразовав сумму (3.23) в интеграл, получим

$$\Phi(t) = G_0 \int_0^\infty \exp(-xl) \exp\left(-\frac{t}{\lambda_0} \exp(-xm)\right) dx.$$

Для определения асимптотики этого интеграла на больших временах сделаем замену переменной  $z = \exp(-xm)$  и по методу Лапласа получим

$$\Phi(t) \approx \frac{G_0}{m} \Gamma\left(\frac{l}{m}\right) \left(\frac{t}{\lambda_0}\right)^{-l/m}. \quad (3.41)$$

Если же времена релаксации задаются законом (3.40), то, как легко показать, верна асимптотика

$$\Phi(t) \sim \exp\left(-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{1/(\nu+1)}\right), \quad \lambda = \frac{\lambda_0 l^{-\nu}}{\nu} \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{-(\nu+1)}. \quad (3.42)$$

Таким образом, масштабная инвариантность процессов релаксации существенно упрощает их описание и позволяет использовать достаточно простые универсальные функции релаксации вида (3.41) и (3.42).

Отметим, что функция релаксации вида (3.41) с показателем степени, равным  $-1/2$ , может быть получена в рамках молекулярной теории вязкоупругости Рауса и Бикки [217]. Однако эта теория не в состоянии объяснить часто наблюдаемое на практике отклонение значения показателя степени от указанной величины и, тем более, происхождение функций релаксации вида (3.42).

Масштабная инвариантность распределения релаксационных параметров может послужить для объяснения принципа температурно-временной суперпозиции [217], который выражается связью

$$\Phi(k(T)t) = k_1(T)\Phi_0(t), \quad (3.43)$$

где  $\Phi(t)$  и  $\Phi_0(t)$  – функции релаксации при температурах  $T$  и  $T_0$ ,  
 $T_0$  – некоторая характеристическая температура,  
 $k$ ,  $k_1$  – коэффициенты, зависящие от температуры ( $k(T_0) = k_1(T_0) = 1$ ).

Действительно, если считать, что скейлинговые показатели  $l$ ,  $m$  не зависят от температуры, то из (3.41) получим (3.43) при

$$k(T) = \frac{\lambda_0(T)}{\lambda_0(T_0)}, \quad k_1(T) = \frac{G_0(T)}{G_0(T_0)}.$$

В качестве примера была рассмотрена кривая релаксации напряжения в образце монодисперсного полистирола, приведенная в [217]. Расчеты показали, что эта кривая релаксации напряжения вполне удовлетворительно описывается законом Кольрауша (3.42) при  $\frac{1}{\nu+1} = 0,50$ .

## Реологические модели в дробных производных

Рассмотрим теперь вязкоупругое тело, представляемое множеством последовательно соединенных тел Кельвина–Фойхта (звеньев, состоящих из параллельно соединенных пружины и вязкого элемента, см. рис. 3.16, г). Тогда связь между скоростью деформации и напряжением определяется соотношением [Лодж А. Эластичные жидкости. – М.: Наука, 1984. – 443 с.]

$$D\gamma(t) = \frac{\tau(t)}{\mu} + \int_0^t \psi(t-\xi)d\tau(\xi), \quad \psi(t) = \sum_n \frac{1}{\mu_n} \exp\left(-\frac{t}{\lambda_n}\right). \quad (3.44)$$

Как и выше, предположим наличие масштабной инвариантности распределения релаксационных параметров:

$$\mu_n = \mu_0 \exp(l'n), \quad \lambda_n = \lambda_0 \exp(nm).$$

Тогда (см. 3.41)

$$\psi(t) \approx Lt^{-\varepsilon_1}, \quad L = \Gamma(\varepsilon_1) \frac{\tau_0^{\varepsilon_1}}{\mu_0 m} \quad (3.45)$$

и (3.44) можно переписать в виде

$$D\gamma(t) = \mu^{-1} \tau(t) + \alpha D^{-\varepsilon} D\tau(t); \quad (3.46)$$

$$\varepsilon = 1 - \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = \frac{l'}{m}, \quad \alpha = L \cdot \Gamma(\varepsilon);$$

$$D^{-\varepsilon} f(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} \int_0^t (t-\xi)^{\varepsilon-1} f(\xi) d\xi$$

( $D^{-\varepsilon} f(t)$  – дробная производная порядка –  $\varepsilon$ ).

Принимая  $G_n = G_0 \exp(-l-n)$ , получим

$$\lambda_n = \mu_0 G_0^{-1} \exp((l'+l)n),$$

откуда  $0 < \varepsilon_1 < 1$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ .

Таким образом, наличие временной масштабной инвариантности приводит к необходимости использования реологических моделей в дробных производных. Отметим, что подобные модели вводились (исходя из других соображений) и ранее (например, [206]). Полученный нами результат имеет также связи с работой [169], в которой показано, что времененная самоподобность процессов приводит к уравнениям в дробных производных. Подчеркнем, что реологический закон с дробными производными получен нами для модели, включающей всего лишь различные пружины и вязкие элементы, в отличие от работы [206], в которой постулируется

существование самостоятельного типа деформации – высокоэластичной деформации, которая не может быть сведена к сумме упругости и вязкого трения.

### Процессы релаксации при объемной деформации

Рассмотрим теперь процессы релаксации при объемной деформации. В ряде экспериментов [148, 179] было замечено, что если сосуд заполнить структурированной жидкостью (например нефтью с асфальто-смолистыми примесями), а затем создать в сосуде избыточное давление и герметически закрыть его, то давление в сосуде медленно падает до некоторого стационарного значения. Релаксационные процессы такого рода связаны с перегруппировкой макромолекул и кластеров, образованных ими. При быстром сжатии такая система претерпевает мгновенную упругую деформацию, величина которой определяется коэффициентом объемной упругости среды в начальном состоянии. Затем происходит медленная перегруппировка структурных единиц различной сложности, что за счет уплотнения среды приводит к некоторому уменьшению ее объема и, как следствие, к некоторому уменьшению давления.

Процесс релаксации давления можно описать обобщенной моделью Максвелла, представленной на рис. 3.16, в, если изменение давления  $\delta p$  считать аналогичным напряжению  $\tau$ , относительное изменение плотности  $\frac{\delta \rho}{\rho_0}$  – аналогом деформации  $\gamma$  ( $\rho_0$  – начальная плотность среды) и поло-

жить  $G_i = \frac{1}{\beta_i}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ), где  $\beta_0$  – равновесная (при  $t \rightarrow \infty$ ) сжимаемости среды,  $\beta_i$  – мгновенная сжимаемость вязкоупругих структурных единиц.

Записав баланс сил для модели 3.16, в, получим

$$\begin{aligned} \tau &= G_0 \gamma + \sum_{i=1} \mu_i \dot{\gamma}_i, \\ \lambda_i \dot{\gamma}_i + \gamma_i &= \gamma, \end{aligned} \tag{3.47}$$

где  $\gamma_i$  – смещение  $i$ -го вязкого элемента,

$$\lambda_i = \frac{\mu_i}{G_i} \text{ – время релаксации } i\text{-го звена.}$$

Переходя к величинам  $\delta p$  и  $\delta \rho$ , из (3.47) легко получить

$$\rho_0 \beta_m \delta p(t) = \delta \rho(t) - \int_0^t \psi(t-\xi) \delta \rho(\xi) d\xi,$$

где  $\psi(t) = \beta_m \sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i \lambda_i} \exp\left(-\frac{t}{\lambda_i}\right)$ ,

$\beta_m$  – мгновенная сжимаемость среды, определяемая соотношением

$$\frac{1}{\beta_m} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{\beta_i}.$$

Отсюда, вновь приняв скейлинговые законы вида (3.48), (3.49), получим аналогично (2.36)

$$\rho_0 \beta_m \delta p = \delta \rho - \beta' D^{-\varepsilon'} \delta \rho. \quad (3.48)$$

Таким образом, уравнение состояния вязкоупругих сред также может содержать дробные производные (отметим, что степени производных в (3.46) и (3.48) могут различаться, хотя мы пока сохраняем для них одно и то же обозначение).

В качестве примера рассмотрим данные следующего опыта, проведенного Г.М. Панаховым. Термостатируемый контейнер высокого давления заполнялся структурированной нефтью, содержащей примеси в виде парафинов и смол. После заполнения контейнер тщательно вакуумировали, а затем производили мгновенное повышение давления путем быстрого нагнетания в контейнер небольшой порции нефти из бомбы PVT. После этого контейнер закрывался и производилась регистрация падения давления во времени. Результаты одного из таких опытов, в ходе которого давление в закрытом контейнере упало от 5 МПа до 4,64 МПа, приведены ниже.

$t \times 10^{-2}$ , с	0	1,5	3	6	15	30	60
$p$ , МПа	5,00	4,91	4,85	4,78	4,72	4,68	4,65

Предположим, что релаксация давления в контейнере описывается уравнением (3.48). Для идентификации этой модели воспользуемся операционным методом.

Поскольку плотность нефти в процессе релаксации давления не меняется, то, осуществив преобразование Лапласа, получим из (3.48)

$$\ln(1-su) = \ln \beta' - \varepsilon' \ln s, \quad (3.49)$$

где  $u = \frac{1}{\delta p(0)} \int_0^\infty \exp(-st) \delta p(t) dt,$

$$\delta p(0) = \frac{1}{\rho_0 \beta_m} \delta \rho(0).$$

Таким образом, если объемная релаксация действительно описывается моделью (3.48), то кривая изменения давления должна спрямиться в координатах  $Y = \ln(1-su)$ ,  $\ln s$ . Для проверки этого факта мы задавались различными значениями  $s$  из интервала  $[5/T; 20/T]$  ( $T$  – время снятия экспериментальной кривой; в нашем случае  $T = 6000$  с) и вычисляли изображение функции  $\delta p(t)$  по формуле

$$U(s) = \frac{\delta p(0)}{s} + \frac{1}{s^2} \sum_i \left[ \frac{\delta p(t_{i+1}) - \delta p(t_i)}{t_{i+1} - t_i} (e^{-st_i} - e^{-st_{i+1}}) \right].$$

Результаты проведенных вычислений свидетельствуют, что кривая релаксации действительно спрямляется в указанных координатах. По углу наклона прямой было найдено  $\varepsilon = 0,78$ .

Полученные нами результаты могут быть использованы для вывода уравнений движения релаксирующих сред. Прежде всего, рассмотрим движение структурированной релаксирующей жидкости в трубе радиуса  $R$ . Реологическое уравнение среды запишем в виде (ср. с (3.46))

$$-\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\tau}{\mu} + \alpha D^{-\varepsilon} \frac{\partial \tau}{\partial t}, \quad (3.50)$$

где  $v(\gamma, t)$  – составляющая скорости вдоль оси трубы.

Осредняя (3.50) по сечению трубы, в рамках квазистационарного приближения можно получить следующее уравнение движения:

$$\rho_0 \left( \frac{\partial w}{\partial t} + 2aw \right) = - \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \alpha D^{-\varepsilon} D \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad 2a = \frac{8\mu}{\rho_0 R^2}, \quad (3.51)$$

где  $w$  – средняя по сечению скорость,  
 $\frac{\partial p}{\partial x}$  – градиент давления вдоль оси трубы.

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial w}{\partial x}$$

при учете (3.48) можно записать в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho_0 c_0^2 (1 - \beta' D^{-\varepsilon'}) \frac{\partial w}{\partial x}, \quad c_0 = (\beta_m \rho_0)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.52)$$

где  $c_0$  – «мгновенная» скорость звука в среде.

Исключая из (3.51) и (3.52) скорость, получим уравнение движения релаксирующей жидкости в виде

$$(D + 2a)p = c_0^2 (1 - \beta' D^{-\varepsilon'}) (1 + \alpha D^{-\varepsilon} D) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (3.53)$$

Уравнения фильтрации, как известно, можно получить, пренебрегая в (3.51) инерционным членом  $\frac{\partial w}{\partial t}$  и полагая  $\frac{1}{2a} = \frac{k}{\mu}$ , где теперь  $w$  – скорость фильтрации,  $k$  – проницаемость пористой среды. Следуя известной методике (например, [36]), в этом случае получим следующий аналог (3.53):

$$D p = \chi (1 - \beta' D^{-\varepsilon'}) (1 + \alpha D^{-\varepsilon} D) \operatorname{div}(\operatorname{grad} p), \quad \chi = \frac{k}{\eta m \beta_m},$$

где  $\chi$  – коэффициент пьезопроводности,  
 $m$  – пористость.

---

## **Глава 4. ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ НЕНЬЮТОНОВСКИХ СРЕД**

*Признаком научного мышления является способность довольствоваться лишь приближением к истине и продолжать творческую работу, несмотря на отсутствие окончательных подтверждений.*

*З. Фрейд*

Данная глава посвящена созданию и исследованию модели релаксационной фильтрации дисперсных систем, имеющих сложные реологические свойства. Рассмотрены некоторые феноменологические модели релаксационной фильтрации неньютоновских сред, учитывающие запаздывание в соотношениях между скоростью фильтрации и градиентом давления. Решена задача вытеснения жидкости с релаксационными свойствами в пористой среде с целью оценки влияния инерционных членов в законе фильтрации. Рассматривается математическая модель процесса вытеснения нефти водой из пористой среды, учитывающая микроэмульсионное состояние флюидов и неравновесные эффекты, связанные с изменением реологических свойств в микроэмульгированных системах.

### **4.1. Моделирование вытеснения вязкоупругой жидкости**

В исследовании релаксационной фильтрации наиболее важной задачей является составление адекватных математических моделей, объясняющих основные характерные особенности релаксационных явлений.

С целью оценки влияния релаксационных членов в законе фильтрации (3.29) и отладки численного алгоритма решена задача вытеснения жидкости с релаксационными свойствами в пористой среде.

Анализ результатов экспериментальных исследований [66], а также проведенные расчеты [12] показывают, что пренебрежение релаксационными свойствами флюидов может привести к качественно неверным результатам.

Неравновесные свойства нефти определяются различными физическими механизмами: наличием у нефти вязкоупругих свойств, процессами растворения, изменением внутренней структуры нефти и т.п. Построить модель, учитывающую все эти механизмы, оказывается затруднительным,

потому на практике используют феноменологические реологические модели, рассмотренные в разделе 3.3.

Запишем систему уравнений совместной фильтрации несжимаемых несмешивающихся вязкой (индекс 1) и вязкоупругой (индекс 2) жидкостей в виде

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{v}_1 = 0, \quad (4.1)$$

$$-m \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{v}_2 = 0;$$

$$\vec{v}_1 = -\frac{k f_1(s)}{\mu_1} \operatorname{grad} p_1; \quad (4.2)$$

$$\vec{v}_2 + \tau_v \frac{\partial \vec{v}_2}{\partial t} = -\frac{k f_2(s)}{\mu_2} \operatorname{grad} p_2; \quad (4.3)$$

$$p_1 = p_2 = p.$$

Здесь применяются общепринятые обозначения.

Необходимость использования закона фильтрации в виде (4.3) определяется не только релаксационными свойствами фильтрующейся жидкости, но и другими факторами, такими, как инерция скорости жидкости, сложность пористой среды и запаздывание в установлении равновесного состояния в микромасштабе, перестройка скелета грунта, изменение пористости и проницаемости, перетоки жидкости и т.п.

В [12] показано, что под действием возникающих в вязкоупругой жидкости нормальных напряжений скачок насыщенности на фронте вытеснения размывается, однако ширина переходной зоны при реальных значениях параметров не будет превышать в лучшем случае нескольких сантиметров. Потому в этих условиях нормальными напряжениями по сравнению с капиллярным давлением можно пренебречь, так как ширина стабилизированной зоны, определяемая капиллярными силами, имеет значительно большие размеры.

Рассмотрим вытеснение вязкоупругой жидкости из модели пористой среды, т.е. в одномерной постановке. Система уравнений (4.1) – (4.3) дополняется следующими начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} s(x, 0) &= s_0, & p(x, 0) &= p_0, & v_2(x, 0) &= 0, \\ s(0, t) &= s_k, & v(0, t) &= \text{const}, & p(l, t) &= p_0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь  $s_0$  и  $s_k$  – критические насыщенности, при которых обращаются в нуль относительные фазовые проницаемости соответственно для первой и второй жидкости.

На входе, в точке  $x = 0$ , задается постоянный расход вытесняющей жидкости, на выходе, в точке  $x = L$ , поддерживается первоначальное давление  $p_0$ . Граничное условие на  $x = 0$  задано для суммарной скорости фильтрации  $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ . Здесь  $L$  – длина модели пласта.

Исключим из системы (4.1) фазовые скорости  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  и градиенты давления фаз.

Для суммарной скорости фильтрации несжимаемых жидкостей имеем

$$\operatorname{div}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = 0. \quad (4.5)$$

В одномерном случае, с учетом (4.2) и (4.3), получим

$$-\frac{k f_1}{\mu_1} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{k f_2}{\mu_2} \frac{\partial p}{\partial x} - \tau_v \frac{\partial v_2}{\partial t} = v,$$

откуда, исключая градиент давления  $\frac{\partial p}{\partial x}$ , запишем выражения для фазовых скоростей

$$v_1 = Fv + F\tau_v \frac{\partial v_2}{\partial t},$$

$$v_2 = (1 - F)v - F\tau_v \frac{\partial v_2}{\partial t}, \quad (4.6)$$

$$F = \frac{f_1(s)}{f_1(s) + \mu_0 f_2(s)}.$$

Подставляя найденное выражение для  $v_1$  в уравнение неразрывности (4.1), с учетом (4.4), получаем для насыщенности  $s$

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + v \frac{\partial F}{\partial x} + \tau_v \frac{\partial}{\partial x} \left( F \frac{\partial v_2}{\partial t} \right) = 0, \quad (4.7)$$

$$v = \text{const.}$$

Таким образом, получаем систему трех уравнений (4.5 – 4.7) для определения насыщенности  $s$ , давления  $p$  и фазовой скорости  $v_2$ , дополненную начальными и граничными условиями (4.4).

При  $\tau_v \rightarrow 0$  полученные соотношения совпадают с уравнениями теории Баклея–Леверетта. В уравнениях для насыщенности  $s$  (4.7) и давления  $p$  (4.5) появляются инерционные члены.

Относительно фазовых проницаемостей  $f_1(s)$ ,  $f_2(s)$  необходимо сделать следующее замечание. При совместном течении двух вязких жидкостей вид этих функций целиком определяется капиллярными силами. При движении в пористой среде вязкоупругих жидкостей фазовые проницаемости могут, в принципе, зависеть еще от возникающих при сдвиговом течении таких жидкостей нормальных напряжений  $\sigma_n$ . Однако, как показано в [12], влиянием этого фактора по сравнению с капиллярными силами можно пренебречь. Оценки напряжений, определяемых поверхностным натяжением  $\sigma_n$  и нормальных напряжений  $\sigma_h$  показывают, что  $\sigma_n \gg \sigma_h$  и, следовательно, свойства фазовых проницаемостей целиком определяются капиллярными силами.

Экспериментальные данные по определению относительных фазовых проницаемостей при вытеснении вязкоупругих жидкостей в настоящее время отсутствует. Поэтому в дальнейших расчетах использовались модельные зависимости для относительных фазовых проницаемостей, предложенные Л.С. Лейбензоном,

$$f_1(s) = s^n, \quad f_2(s) = (1-s)^n,$$

где показатель степени  $n$  зависит от структуры пористой среды.

## 4.2. Численные исследования влияния релаксационных свойств на процесс двухфазной фильтрации

Приведем систему (4.5) – (4.7) к безразмерному виду, введя переменные

$$\bar{t} = \frac{vt}{mL}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{\tau}_v = \frac{v\tau_v}{mL}, \quad \bar{v}_i = \frac{v_i}{v}, \quad \bar{p} = \frac{p}{p_0}, \quad \bar{\mu}_i = \frac{\mu_i}{\mu_1}.$$

В дальнейшем черточки опускаются.

В безразмерных переменных процесс вытеснения вязкоупругой жидкости управляет следующими уравнениями

$$F\tau_v \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_2 = 1 - F, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} ((f_1 + \mu_0 f_2) \frac{\partial p}{\partial x}) + \tau_v \epsilon \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial t} = 0, \quad \epsilon = \frac{\mu_1 v L}{k p_0}, \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \tau_v \frac{\partial}{\partial x} \left( F \frac{\partial v_2}{\partial t} \right) = 0 \quad (4.10)$$

с начальными и граничными условиями

$$s(x, 0) = s_0, \quad p(x, 0) = 1, \quad v_2(x, 0) = 0,$$

$$s(x, t) = s_k, \quad v(0, t) = 1, \quad p(l, t) = 1.$$

Диапазон изменения безразмерного параметра  $\epsilon$  определяется при следующих значениях физических параметров:  $\mu_1 = 0,4 \cdot 10^{-3}$  Па·с,  $L = 0,15$  м,  $p_0 = 10^7$  Па,  $k = (0,02 \div 0,14) \cdot 10^{-12}$  м<sup>2</sup>,  $v = 10^{-5}$  м/с. При заданных изменениях абсолютной проницаемости параметр  $\epsilon$  принимает значения  $10^{-4} \div 10^{-3}$ .

Численные алгоритмы, в которых определяются насыщенность и давление, основаны на методе расщепления по физическим процессам. Разностная схема строится таким образом, что на каждом временном слое давление, насыщенность вытесняющей жидкости рассчитываются последовательно, без итерации по нелинейности. Применение метода расщепления по физическим процессам в задачах двухфазной фильтрации достаточно полно обосновано [110]. Показано, что и в задачах многофазной многокомпонентной фильтрации применение этого метода возможно, требуемая точность достигается, а соответствующие алгоритмы дают значительное сокращение времени расчета решений в сравнении с итерационными аппроксимациями.

Для численного решения задач (4.8) – (4.10) вводится разностная сетка  $x_i = i \cdot h$ ,  $t^n = n \cdot l$ , где  $h$  и  $l$  – пространственный и временной шаги,  $i = 0, 1, 2, \dots, I$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Искомые функции  $v_2$ ,  $p$  и  $s$  в узлах  $(x_i, t^n)$  далее обозначаются  $v_{2i}^n$ ,  $p_i^n$ ,  $s_i^n$  соответственно,  $F(s_i^n) = F_i^n$  и т.д. Распределения  $p_i^n$ ,  $s_i^n$  рассчитываются в следующей последовательности. Из уравнения (4.8) и начального условия для скорости фильтрации  $v_2$  с использованием  $s_i^n$ ,  $v_{2i}^n$  определяются значения  $v_{2i}^{n+1}$ ; из уравнения (4.9) и условий для дав-

ления на границах  $x=0$  и  $x=1$  с использованием  $v_{2i}^n$ ,  $v_{2i}^{n+1}$ ,  $s_i^n$  определяются значения  $p_i^{n+1}$ , из уравнения (4.10) с учетом граничного условия для насыщенности  $s$  и с использованием  $s_i^n$ ,  $v_{2i}^n$ ,  $v_{2i}^{n+1}$  рассчитываются значения  $s_i^{n+1}$ . Затем процедура повторяется.

Рассмотрим разностные аппроксимации, используемые для расчета давления и насыщенности вытесняющей фазы.

Уравнение (4.8) следует рассматривать как дифференциальное уравнение с малым параметром  $\lambda = F \cdot \tau_v$ . В [87] показано, что классические разностные схемы не пригодны для решения таких уравнений. Чтобы сохранить преимущества равномерной сетки, в аппроксимирующую разностную схему вводятся подгоночные коэффициенты, которые и обеспечивают равномерную точность аппроксимации на равномерной сетке.

В работе использовалась разностная схема с постоянным параметром подгонки, имеющая равномерную по  $\lambda$  сходимость порядка  $O(l)$  [87].

Схема имеет вид:

$$\lambda \sigma(\rho) \frac{v_{2i}^{n+1} - v_{2i}^n}{l} + v_{2i}^{n+1} = 1 - F_i^n, \quad (4.11)$$

$$\lambda = \tau_v F_i^n, \quad \sigma(\rho) = \frac{\rho \exp(-\rho)}{1 - \exp(-\rho)}, \quad \rho = \frac{l}{\lambda}.$$

Схема неявная, абсолютно устойчивая.

Значения давления  $p_i^n$  рассчитываются методом прогонки непосредственно из системы трехточечных разностных уравнений, аппроксимирующих (4.9). Проведены методические расчеты, в которых изучалась точность определения давления.

Эталонное решение получено интегрированием уравнения (4.9) при  $\tau_v = 0$ . Так как суммарная скорость фильтрации  $v$  считается постоянной, зависимость безразмерного перепада давления  $\Delta p(t) = p(0, t) - 1$  от безразмерного времени определяется выражением

$$\Delta p(t) = \epsilon \int_0^1 \frac{dx}{f_1(s(x, t)) + \mu_0 f_2(s(x, t))}.$$

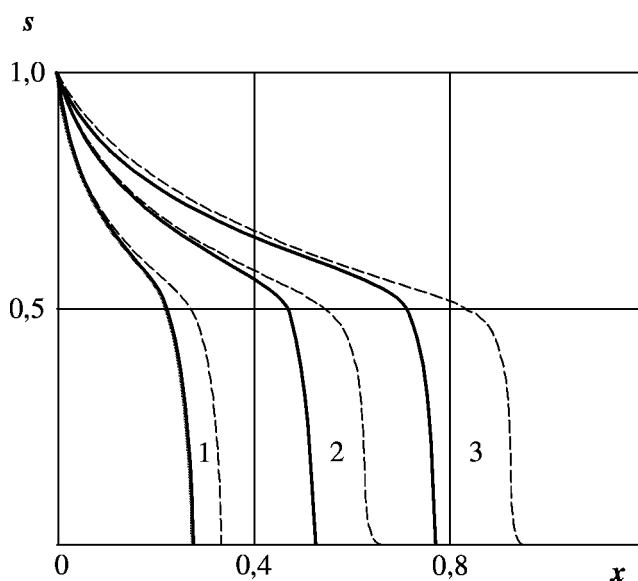
Сопоставление разностных решений с эталонными показало, что относительная погрешность расчета давления на сетках с  $h \leq 0,01$  и  $l \leq 0,001$  не превышает 0,5 %.

Разностные аппроксимации уравнения (4.9) без учета инерционного члена, используемого для определения насыщенности, изучались в ряде работ, обзор которых имеется в гл. 2. Насыщенность  $s_i^{n+1}$  рассчитывается с помощью явной уголковой схемы сквозного расчета на постоянном шаблоне.

На каждом временном шаге определение насыщенности сводится к решению разностного уравнения

$$\frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{l} + \frac{F_i^n - F_{i-1}^n}{h} + \frac{\tau_v}{h} \left( F_i^n \frac{v_{2i}^{n+1} - v_{2i}^n}{l} - F_{i-1}^n \frac{v_{2i-1}^{n+1} - v_{2i-1}^n}{l} \right) = 0.$$

Приведенная разностная схема условно устойчива, условия устойчивости общеизвестны, они выписаны в гл. 2. Результаты представлены в моменты времени  $t = 0,2; 0,4$  и  $0,6$ . Расчеты показали, что инерционные члены несколько изменяют профиль насыщенности, увеличивая значение фронтовой насыщенности, и приводят к затягиванию переходных процессов, рис. 4.1.



**Рис. 4.1. Распределение насыщенности при  $\tau_v = 0,01$**

в различные моменты времени:

1 –  $t = 0,2$ ; 2 –  $t = 0,4$ ; 3 –  $t = 0,6$

— — — – равновесная насыщенность

Увеличение времени релаксации  $\tau_v$  приводит к увеличению отставания фронта вытеснения. При этом характерное время процесса может на несколько порядков (в зависимости от  $\tau_v$ ) превышать время установления

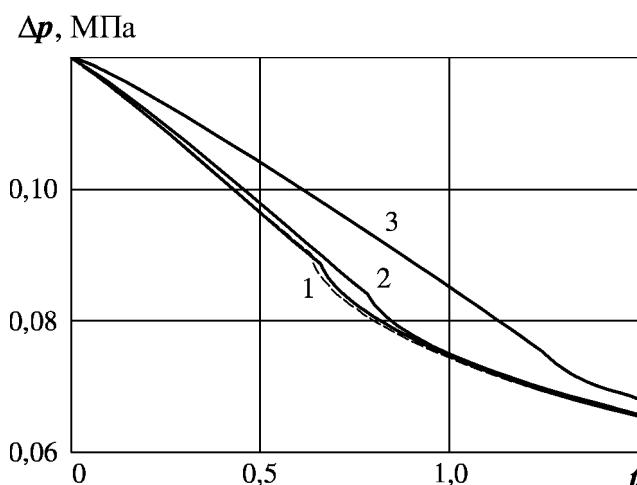
гидродинамического режима, определяемое на основе известных равновесных расчетных моделей [26, 27].

На рис. 4.2 показано изменение перепада давления во времени при различных значениях  $\tau_v$ . По графикам зависимости  $\Delta p(t)$  также можно проследить затягивание процесса вытеснения. Увеличение параметра  $\tau_v$  повышает перепад давления.

В ходе расчетов вычислялся объем вытесненной нефти при различных значениях параметра  $\tau_v$ :

$$Q_n(t) = -\frac{A k p_0 m}{\mu_2 v L} \int_0^t \left( f_2(s) \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=1} dt,$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения.



**Рис. 4.2. Изменение перепада давления во времени при различных значениях параметра запаздывания**

1 –  $\tau_v = 0,001$ ; 2 –  $\tau_v = 0,01$ ; 3 –  $\tau_v = 0,1$

— — — – равновесное значение

Наличие у вытесняемой жидкости вязкоупругих свойств приводит к замедлению движения фронта вытеснения, выравниванию профиля насыщенности по длине и, следовательно, увеличению коэффициента вытеснения. Поэтому при прочих равных условиях коэффициент вытеснения вязкоупругой жидкости больше, чем вязкой жидкости при их одинаковых вязкостях.

Результаты расчетов согласуются с результатами экспериментальных исследований процесса вытеснения вязкоупругих жидкостей в пористой среде [12].

Проведенные расчеты показывают, что коэффициент вытеснения релаксирующей жидкости в пористой среде может быть больше, чем при вытеснении ньютоновской жидкости равной вязкости. Поэтому использование традиционных методов расчета вытеснения жидкостей в пористой среде может приводить к качественно неверным результатам.

### **4.3. Нестационарные режимы неравновесной двухфазной фильтрации**

Экспериментальные исследования показывают, что при вытеснении нефти водой из пористой среды вытесняемая фаза движется не как независимая фаза, а разбивается микропотоками вытесняющей фазы [141, 142], замещая в некоторых каналах воду после того, как она вытеснила из них нефть. Кроме того, все нефти содержат поверхностно-активные вещества, и вытеснение нефти водными растворами из пористой среды сопровождается как диспергированием, так и коалесценцией капель обеих жидкостей [189, 190], т.е. образованием водо-нефтяной микроэмulsionии. Диспергирование нефти при ее контакте с водой в пористой среде происходит практически мгновенно.

Таким образом, в поровом пространстве реальных пластов вместо «чистых» фаз воды и нефти совместно движутся эмульсия нефти в воде (Н/В) и обратная эмульсия воды в нефти (В/Н).

Значительный вклад в исследования механизма образования эмульсии, их физико-химических свойств был внесен академиком П.А. Ребиндером и его школой [189, 190].

Показано, что водо-нефтяные эмульсии являются неニュтоновскими жидкостями. Причиной аномалии вязкости микроэмulsionий является деформация диспергированных частиц с увеличением приложенного напряжения. В пористой среде микроэмulsionия проявляет тиксотропные свойства. Напомним, что тиксотропными называются среды с нестационарными реологическими характеристиками, структура которых при деформировании с постоянной скоростью сдвига постепенно разрушается, что приводит к уменьшению эффективной вязкости со временем.

Характерные времена структурных перестроек оказываются сравнимыми с характерными временами изменения напряжений. Это приводит к тому, что связь между напряжением и деформацией становится неравновесной. Для установления равновесного значения напряжения, соответствующего определенному значению скорости сдвига, требуется некоторое время.

При лабораторных исследованиях образцов пористой среды, а именно фильтрации двухфазной смеси через пористые среды, наблюдаются колебания перепада давления, удовлетворительное объяснение кото-

рых отсутствует. В данной главе показано, что эти колебания могут быть связаны с неравновесными реологическими свойствами водонефтяной микроэмульсии, образование которой происходит при вытеснении нефти водой из пористой среды.

Результаты экспериментальных исследований с использованием пластовых жидкостей и естественных пород показывают, что значения основных параметров, характеризующих процесс вытеснения несмешивающихся жидкостей на различных стадиях, определяются не только свойствами фаз, но и степенью взаимодействия вытесняемой и вытесняющей жидкостей между собой и с породой, геометрией порового пространства, а также строением стенок поровых каналов. Процессы, происходящие в такой сложной системе, как пористая среда, насыщенной остаточной (или нагнетаемой) водой и нефтью, являющейся многокомпонентной системой, чаще всего находящейся в коллоидном состоянии, могут происходить с характерными временами релаксации, зависящими от строения, состава и состояния конкретной системы [212].

Имеются экспериментальные данные [79], указывающие, что совместная фильтрация воды и нефти происходит в форме четок одной жидкости в другой. Предполагается, что при четочном режиме образуется микроэмульсия с аномально-высокими значениями вязкости, что в свою очередь обуславливает высокие фильтрационные сопротивления в зоне смеси. Прочность эмульсии, продолжительность существования отдельных капель зависят от прочности межфазных пленок в пластовых условиях, а степень дисперсионности определяется структурными свойствами коллектора и скоростью фильтрации фаз.

В работе [79] в результате анализа проведенных экспериментальных исследований выявлена возможность существования смеси флюидов в виде объемной структурной композиции, функционирующей в пульсирующем режиме вследствие порционного и поочередного характера реализующегося процесса массопереноса компонентов. Эта смесь флюидов проявляет себя самоорганизующейся системой.

Лабораторные эксперименты [190] показывают, что при увеличении градиента давления фильтрационные сопротивления в потоке микроэмульсии уменьшаются, а при уменьшении градиента давления возрастают. В этом смысле реологическое поведение микроэмульсии имеет неильтоновский характер (эффективная вязкость уменьшается с увеличением приложенного напряжения). Причины этого явления связаны со структурными перестройками в микроэмульсиях. Теоретическое описание некоторых возможных деталей данного процесса имеется в работе В.Н. Николаевского [171]. Дан анализ влияния микроэмульсионного состояния части масс в фильтрационном потоке на фазовые проницаемости.

Для фазовых проницаемостей предложено кинетическое уравнение второго порядка, которое отражает эффект сопротивления объема среды

быстрому изменению насыщенности. Эта гипотеза приводит к модели, допускающей пульсации фазовых давлений при перераспределении фаз, что и наблюдается в эксперименте на микроуровне.

Новая модель фильтрации двух несмешивающихся, взаимонерасторимых жидкостей с образованием эмульсии и адсорбцией жидких компонентов на скелет рассмотрена в работе А.А. Бармина и Д.И. Гарагаш [29]. Модель учитывает влияние межфазного массообмена на динамику эмульсии и активную пористость. Рассмотрены режимы течения, образующиеся в задачах о вытеснении и зависящие от вида изотерм адсорбции и плотностей жидких компонент. Вопросы структурообразования в микроэмульсиях не рассматриваются.

Все особенности этого процесса до конца не исследованы, поэтому в представленной работе построена феноменологическая модель двухфазной фильтрации, учитывающая своеобразную неравновесность потока, связанную с изменением реологических свойств в микроэмульгированных системах.

#### **4.3.1. Уравнения нестационарной фильтрации микроэмульгированных сред**

В рамках феноменологического подхода фильтрующаяся двухфазная жидкость представляется в виде микроэмульсионной суспензии, частицы которой обладают вязкоупругими свойствами и размеры которых сопоставимы с размерами пор. При движении по поровым каналам, сопровождающемуся деформацией частиц, происходит изменение фильтрационного сопротивления потока вследствие структурных преобразований микроэмульсии с характерным для данной системы временем релаксации.

С учетом этих представлений рассмотрим модель, описывающую процесс вытеснения нефти водой из образца пористой среды под действием постоянного напора вытесняющей жидкости. При ее выводе учитываются следующие эффекты. При нагружении (увеличении градиента давления), т.е. при больших скоростях фильтрации происходит разрушение структуры, уменьшение эффективной вязкости и, следовательно, уменьшение фильтрационного сопротивления.

При разгрузении (уменьшении градиента давления), т.е. при малых скоростях фильтрации происходит восстановление структуры. При движении по поровым каналам частицы микроэмульгированной суспензии испытывают деформации, под действием которых постепенно «твёрдеют» за время, равное времени релаксации, т.е. происходит структурообразование в микроэмульгированной системе. «Затвердевая», частицы забивают часть поровых каналов, что приводит к увеличению фильтрационного сопротивления.

В рамках феноменологического подхода, используя общие соображения о неравновесных течениях в пористых средах [28], кинетические уравнения для неравновесных относительных фазовых проницаемостей (ОФП) воды  $\tilde{f}_1(s)$  и нефти  $\tilde{f}_2(s)$  записываются в виде

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(s) + \tau \frac{\partial \tilde{f}_1(s)}{\partial t} &= f_1(s) \psi(q), \\ \tilde{f}_1(s) + \tau \frac{\partial \tilde{f}_1(s)}{\partial t} &= f_1(s) \psi(q), \\ q &= \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где  $\tau$  – время релаксации;  
 $f_1(s)$ ,  $f_2(s)$  – равновесные ОФП воды и нефти соответственно.

Функция  $\psi(q)$  описывает неньютоновские свойства водо-нефтяной микроэмulsionии. Значения этой функции при одинаковых абсолютных значениях градиента давления, определенные при уменьшении и увеличении модуля градиента давления, не совпадают, т.е. фазовые проницаемости имеют гистерезисный характер. Функция  $\psi(q)$  задается в виде  $\psi = f\left(q, \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)\right)$ . Возможный вид этой функции представлен на рис. 4.3.

Для вытесняющей жидкости с вязкостью  $\mu_1$  выполняется закон Дарси

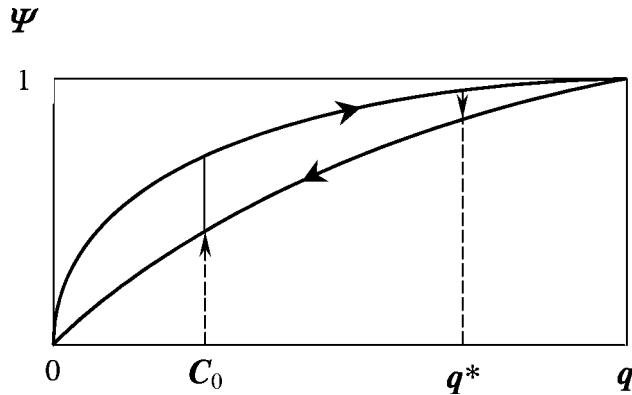
$$\vec{v}_1 = -\frac{k \tilde{f}_1}{\mu_1} \operatorname{grad} p. \quad (4.13)$$

Закон фильтрации для вытесняемой фазы записывается с учетом инерции скорости и запаздыванием его значения от величины, соответствующей равновесию с градиентом давления

$$\vec{v}_2 + \tau_v \frac{\partial \vec{v}_2}{\partial t} = -\frac{k \tilde{f}_2}{\mu_2} \operatorname{grad} p, \quad (4.14)$$

$k$  – абсолютная проницаемость,

$\mu_2$  – вязкость вытесняемой фазы,  
 $\tau_v$  – время релаксации.



**Рис. 4.3. Графическое представление функции, описывающей неニュтононовские свойства микроэмульсии**

Такой учет особенно необходим для коротких моделей, в которых процесс определяет не пьезопроводность, а время релаксации.

Уравнения неразрывности для фаз имеют вид

$$s\beta_1^* \frac{\partial p}{\partial t} + m \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{v}_1 = 0, \quad (4.15)$$

$$(1-s)\beta_2^* \frac{\partial p}{\partial t} - m \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{v}_2 = 0, \quad (4.16)$$

где  $\beta_1^*$  и  $\beta_2^*$  – коэффициенты упругоемкости пластовой системы.

Суммируя уравнения (4.15) и (4.16), получаем

$$\beta^* \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = 0, \quad \beta^* = s\beta_1^* + (1-s)\beta_2^*. \quad (4.17)$$

Уравнения (4.15) и (4.17) берутся в качестве системы уравнений при формулировке краевых задач.

Рассмотрим одномерное вытеснение нефти водой из образца пористой среды. Интегрируя уравнение (4.17) по длине пласта, получаем выражение для суммарной скорости

$$v = v_1 + v_2 = - \int_o^x \beta^* \frac{\partial p}{\partial t} dx + v_0, \quad (4.18)$$

где  $v_0$  – суммарная скорость фильтрации на входном сечении модели пористой среды.

Проведя обычную процедуру исключения из уравнений (4.15), (4.16), (4.18), с учетом (4.13), (4.14), давления и фазовых скоростей, получим

$$v_1 = Fv + F\tau_v \frac{\partial v_2}{\partial t},$$

$$v_2 = (1 - F)v - F\tau_v \frac{\partial v_2}{\partial t}, \quad (4.19)$$

$$\beta^* \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{k}{\mu_1} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\tilde{f}_1 + \mu_0 \tilde{f}_2) \frac{\partial p}{\partial x} \right] - \tau_v \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0, \quad (4.20)$$

$$s\beta_1^* \frac{\partial p}{\partial t} + m \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Fv) + \tau_v \frac{\partial}{\partial x} F \frac{\partial v_2}{\partial t} = 0, \quad (4.21)$$

$$F = \frac{\tilde{f}_1}{\tilde{f}_1 + \mu_0 \tilde{f}_2}, \quad \mu_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Система уравнений (4.20) – (4.21) расщеплена по физическим параметрам и позволяет последовательно рассчитывать по первому уравнению давление  $p$ , используя которое, по второму уравнению рассчитывать насыщенность  $s$ . Начальные и граничные условия имеют вид

$$\tilde{f}_1(x, 0) = 0, \quad \tilde{f}_2(x, 0) = F_2 - const, \quad s(x, 0) = s_0, \quad p(x, 0) = p_0, \quad (4.22)$$

$$s(0, t) = s_k, \quad v(0, t) = v_0, \quad p(L, t) = p_0,$$

где  $s_0$  и  $s_k$  – начальная и конечная (пределная) насыщенности вытесняющей фазой,

$p_0$  – начальное давление в модели пласта,

$L$  – длина модели.

Система уравнений (4.12), (4.19) – (4.22) описывает процесс несмещающегося вытеснения из образца пористой среды, на входном сечении которого поддерживается постоянный расход нагнетаемой жидкости.

Введем безразмерные переменные

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{p} = \frac{p}{p_0}, \quad \bar{q} = \frac{qL}{p_0}, \quad \bar{v}_i = \frac{v_i}{v_0}, \quad \bar{v} = \frac{v}{v_0},$$

$$\bar{t} = \frac{v_0 t}{mL}, \quad \bar{\tau} = \frac{v_0 \tau}{mL}, \quad \bar{\tau}_v = \frac{v_0 \tau_v}{mL}.$$

В дальнейшем черточки опускаются. В безразмерной форме система уравнений (4.19) – (4.21) после преобразований записывается в виде

$$v_2 + \tau_v F \frac{\partial v_2}{\partial t} = 1 - F, \quad (4.23)$$

$$\lambda \frac{\partial p}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\tilde{f}_1 + \mu_0 \tilde{f}_2) \frac{\partial p}{\partial x} \right] - \tau_v \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v_2}{\partial t} = 0, \quad (4.24)$$

$$\lambda_1 s \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (F v) + \tau_2 \frac{\partial}{\partial x} F \frac{\partial v_2}{\partial t} = 0, \quad (4.25)$$

$$\lambda = \frac{\beta^* p_0}{m}, \quad a = \frac{k p_0}{v_0 \mu_1 L}, \quad \lambda_1 = \frac{\beta_1^* p_0}{m}, \quad v = - \int_0^x \lambda \frac{\partial p}{\partial t} dx + 1.$$

Система уравнений (4.24) – (4.25) расщеплена по физическим параметрам и позволяет последовательно рассчитывать по первому уравнению давление  $p$ , используя которое, по второму уравнению рассчитывать насыщенность  $s$ .

Соответственно приводятся к безразмерному виду начальные и граничные условия (4.22).

### 4.3.2. Асимптотический анализ уравнений\*

Полная математическая модель в виде уравнений (4.12), (4.23) – (4.25) с соответствующими начальными и граничными условиями практически не доступна для аналитического исследования из-за своей сложности. Поэтому ограничимся асимптотическим анализом обыкновенного дифференциального уравнения для градиента давления  $q = \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|$ . За счет пренебрежения инерцией и сжимаемостью фаз, (т.е. при  $\tau_v = 0, \lambda = 0, \lambda_1 = 0$ ) уравнения (4.12), (4.24) – (4.25) приводятся к виду:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ (\tilde{f}_1 + \mu_0 \tilde{f}_2) \frac{\partial p}{\partial x} \right] = 0, \quad (4.27)$$

$$\tilde{f}_1 + \tau \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial t} = f_1(s) \psi(q), \quad \tilde{f}_2 + \tau \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial t} = f_2(s) \psi(q). \quad (4.28)$$

Уравнение (4.27) можно проинтегрировать:

$$(\tilde{f}_1 + \mu_0 \tilde{f}_2) \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{v_0 L \mu_1}{k p_0} = const,$$

и затем преобразовать, в силу равенства, вытекающему из (4.28):

$$(\tilde{f}_1 + \mu_0 \tilde{f}_2) + \tau \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{f}_1 + \mu_0 \tilde{f}_2) = [f_1(s) + \mu_0 f_2(s)] \psi(q),$$

получив уравнение для градиента давления:

$$\tau \frac{\partial q}{\partial t} - q + q^2 \varphi(s) \psi(q) = 0,$$

где

$$\varphi(s) = a [f_1(s) + \mu_0 f_2(s)].$$

---

\* Приведены результаты, полученные совместно с Л.А. Калякиным.

В итоге приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} &= 0, \\ \tau \frac{\partial q}{\partial t} - q + q^2 \varphi(s) \psi(q) &= 0, \\ \tilde{f}_1 + \tau \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial t} &= f_1(s) \psi(q), \quad \tilde{f}_2 + \tau \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial t} = f_2(s) \psi(q) \end{aligned} \quad (4.29)$$

с начальными и граничными условиями

$$q(x, 0) = q_0, \quad s(x, 0) = s_0, \quad \tilde{f}_1(x, 0) = 0, \quad f_2(x, 0) = F_2, \quad s(0, t) = s_k.$$

При определении начального условия для градиента давления  $q$  предполагается, что время перераспределения давления за счет сжимаемости жидкостей пренебрежимо мало по сравнению со временем вытеснения. Отсюда следует, что нестационарные процессы упругого перераспределения давления заканчиваются в начале процесса вытеснения. Поэтому в масштабе «медленного» времени  $t$  можно считать, что к началу процесса вытеснения градиент давления во всех точках области течения достигает начального значения  $q_0$ .

Дальнейшие упрощения достигаются за счет малости безразмерного параметра  $\tau$ , который в рассматриваемых процессах имеет порядок  $0,001 \div 0,01$ . Следует заметить, что просто пренебрегать слагаемыми с малым параметром  $\tau$  здесь невозможно, поскольку возмущения носят сингулярный характер. Более того, как раз слагаемые  $\tau \partial_t \tilde{f}_1$ ,  $\tau \partial_t \tilde{f}_2$  ответственны за возникающие в системе быстрые осцилляции. Упрощение здесь возможно за счет разделения быстрых и медленных процессов. Введя «быстрое» время  $T = \frac{t}{\tau}$ , в рамках метода двухмасштабных разложений,

получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial T} - q + \tau \frac{\partial q}{\partial t} &= -q^2 \varphi(s) \psi(q), \\ \frac{\partial s}{\partial T} + \tau \left[ \frac{\partial s}{\partial t} + F'(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2) \frac{\partial s}{\partial x} \right] &= 0, \quad F' = \frac{dF}{ds}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial T} + \tilde{f}_1 + \tau \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial t} = f_1(s) \psi(q), \quad \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial T} + \tilde{f}_2 + \tau \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial t} = f_2(s) \psi(q).$$

Для этих функций строится асимптотика по малому параметру  $\tau$  в виде:

$$s = s^0(x, t, T) + \tau s^1(x, t, T) + O(\tau^2),$$

$$q = q^0(x, t, T) + \tau q^1(x, t, T) + O(\tau^2), \quad (4.31)$$

$$\tilde{f}_{1,2} = \tilde{f}_{1,2}^0(x, t, T) + \tau \tilde{f}_{1,2}^1(x, t, T) + O(\tau^2).$$

С учетом (4.31) система уравнений (4.30) в основном будет иметь вид:

$$\frac{\partial q^0}{\partial T} - q^0 + q^2 \varphi^0(s) \psi^0(q) = 0, \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial s^0}{\partial T} = 0, \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}_1^0}{\partial T} + \tilde{f}_1^0 = f_1^0(s) \psi^0(q), \quad \frac{\partial \tilde{f}_2^0}{\partial T} + \tilde{f}_2^0 = f_2^0(s) \psi^0(q).$$

Поскольку уравнение для  $s^0$  – однородное, то функция  $s = s(x, t)$  не зависит от быстрого времени  $T$ . Для поправки  $s^0$  на следующем шаге получается неоднородное уравнение

$$\frac{\partial s^1}{\partial T} + \frac{\partial s^0}{\partial t} + F'(\tilde{f}_1^0, \tilde{f}_2^0) \frac{\partial s^0}{\partial x} = 0.$$

Считая, что зависимость от быстрого времени  $T$  – периодическая, из этого уравнения после интегрирования по периоду  $T^*$  получим равенство

$$\frac{\partial s^0}{\partial t} + \frac{\partial s^0}{\partial x} \cdot \int_0^{T^*} F' \left( \tilde{f}_1^0, \tilde{f}_2^0 \right) dT = 0. \quad (4.34)$$

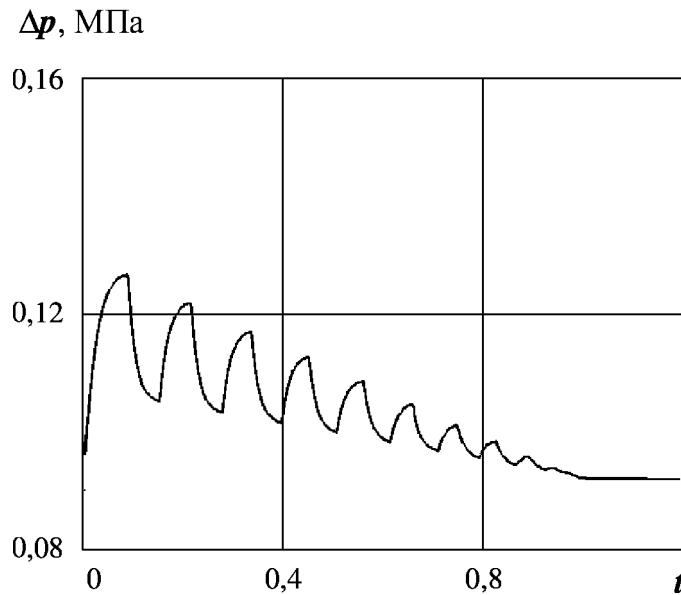
Последнее соотношение представляет собой уравнение для  $\overset{0}{s}(x,t)$  в медленных переменных. Таким образом, система уравнений (4.32) – (4.34) оказывается замкнутой для главных членов асимптотики:  $\overset{0}{q}, \overset{0}{s}, \overset{0}{\tilde{f}_1}, \overset{0}{\tilde{f}_2}$ .

Считая известной функцию медленных переменных  $\overset{0}{s}(x,t)$ , уравнение для  $\overset{0}{q}$  можно рассматривать как обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение. Анализ стационарных по  $T$  решений и их устойчивость сводится к анализу уравнений для  $\overset{0}{q}$ , поскольку  $\overset{0}{s}$  не зависит от времени  $T$ . Стационарные решения определяются корнями трансцендентного уравнения

$$-q + q^2 \varphi\left(\overset{0}{s}\right) \psi(q) = 0. \quad (4.35)$$

Для верхней ветви  $\psi(q)$  имеется два корня, рис. 4.3. Один из них нулевой  $q = 0$ , другой отличен от нуля  $q^* \neq 0$ . Линеаризованное вблизи  $q = 0$  уравнение (4.35) имеет растущее решение  $q = \exp(T)$ , а потому этот корень – неустойчив. Уравнение, линеаризованное на другом корне,  $q' + \alpha q = 0$  имеет коэффициент  $\alpha = 1 + \frac{q^* \psi'(q^*)}{\psi(q^*)}$ , который оказывается положительным. Решение такого уравнения убывает как  $q = \exp(-\alpha T)$ , а потому корень  $q^*$  устойчив. На нижней ветви стационарных решений нет. Любое решение  $q = q(T)$  (кроме  $q \equiv 0$ ) стремится к устойчивому положению равновесия  $q^* = q^*(s)$ . При этом движение  $q(T)$  к  $q^*$  происходит по верхней ветви, рис. 4.3, за бесконечное время. Условия устойчивости получены в предположении, что функция  $\varphi(s) = \text{const}$ . Однако надо учесть, что насыщенность  $s \approx \overset{0}{s}(x,t)$  зависит от «медленного» времени и монотонно растет, соответственно изменяется и функция  $\varphi(s)$ , поэтому точка равновесия двигается так, что  $q^* = q^*[s(x,t)]$  монотонно убывает по  $t$ . По этой причине величина  $q \cong q(T, x, t)$  переходит точку  $q^*$  за конечное время. В момент перехода происходит срыв системы на нижнюю ветвь в соответствии с (4.30). На ней значения градиента давления убывают до величины  $C_0$ , в которой происходит переход на верхнюю ветвь и процесс повторяется. Таким образом, причиной быстрых осцилляций является двузначность функции  $\psi(q)$  (гистерезис) и

медленные изменения функции  $s(x, t)$ , которые и определяют характер быстрых колебаний, в частности, амплитуду и период. Следует отметить, что амплитуда и период медленно меняются из-за движения точки срыва, рис. 4.4.



**Рис. 4.4. Зависимость перепада давления от безразмерного времени  
при  $v_0 = 232,2$  м/год**

Период колебаний в медленном масштабе времени оценивается по порядку  $O\left(\tau \ln \frac{1}{\tau}\right)$ . Такая оценка получается из расчета времени движения от одной точки срыва  $q_0^*(x, t_0)$  до другой  $q_1^*(x, t_1)$ . Имея в виду, что скорость движения точки  $q^*(x, t)$  – конечна, время движения в медленном масштабе оценивается из расстояния:  $t^* = t_1 - t_0 = O(|q_0^* - q_1^*|)$ . Время движения текущей точки  $q(T, x, t)$  на этом промежутке в быстром масштабе времени определяется при интегрировании уравнения (4.32)

$$T^* = \int_{q_0^*}^{q_1^*} \frac{dq}{q - q^2 \varphi \psi(q)}, \quad \varphi = \varphi[s(t_0)].$$

Интеграл берется по функции  $\psi(q)$  на нижней ветви при  $q \in [C_0, q_0^*]$  и на верхней ветви при  $q \in [C_0, q_1^*]$ . Поскольку  $q_0^*(x, t_0)$  – нуль первого

порядка подынтегральной функции на верхней ветви, то для  $q_1^*(x, t_1)$ , близких к  $q_0^*(x, t_0)$ , имеет место оценка  $T^* = O(\ln|q_0^* - q_1^*|)$ . Учитывая связь быстрого и медленного времени, получаем соотношение  $t^* = \tau O(\ln t^*)$ , откуда в первом приближении:  $t^* = \tau O(\ln \tau)$ .

Выводы асимптотического анализа подтверждают результаты численных расчетов.

### 4.3.3. Численный анализ нелинейной гидродинамической модели

Для выявления качественных особенностей предложенной модели двухфазной фильтрации система уравнений (4.22) – (4.25) решалась численно. Уравнения (4.22) и (4.23) аппроксимировались специальными конечно-разностными схемами с экспоненциальной подгонкой, учитывающими наличие малых параметров при старших производных.

Для фазовой скорости  $v_2$  (4.23) такая разностная схема уже рассматривалась в разделе 4.2. Аналогичную разностную схему можно записать и для неравновесных ОФП (4.28).

Численное интегрирование уравнений (4.24) и (4.25) проводилось по известной схеме «неявное» давление – «явная» насыщенность. При разностной аппроксимации уравнений (4.22) – (4.25) используются обозначения, принятые в разделе 4.2.

Сеточные функции  $p_i^n$ ,  $s_i^n$  рассчитываются в следующей последовательности. Из уравнения (4.22) и начальных условий для неравновесных ОФП  $\tilde{f}_1(s)$  и  $\tilde{f}_2(s)$  с использованием  $s_i^n$ ,  $p_i^n$  определяются значения  $\tilde{f}_{1i}^{n+1}$ ,  $\tilde{f}_{2i}^{n+1}$ ; из уравнения (4.23) и начального условия для скорости  $v_2$  с использованием  $s_i^n$ ,  $v_{2i}^n$  определяются значения  $v_{2i}^{n+1}$ ; из уравнения (4.24), начального условия для давления и условий на границах  $x=0$  и  $x=1$  с использованием  $v_{2i}^{n+1}$ ,  $v_{2i}^n$ ,  $\tilde{f}_{1i}^n$ ,  $\tilde{f}_{2i}^n$ ,  $s_i^n$  определяются значения  $p_i^{n+1}$ ; из уравнения (4.25) с учетом начального граничного и граничного условий ( $x=0$ ) для насыщенности  $s$  и с использованием  $s_i^n$ ,  $v_{2i}^n$ ,  $v_{2i}^{n+1}$ ,  $p_i^{n+1}$ ,  $p_i^n$  определяются значения  $s_i^{n+1}$ . Затем процедура повторяется.

Рассмотрим разностные аппроксимации, используемые для расчета давления и насыщенности вытесняющей фазы.

Значения давления  $p_i^n$  рассчитываются методом прогонки непосредственно из системы трехточечных разностных уравнений, аппроксимирующих (4.24)

$$\lambda \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{l} = \frac{a}{h^2} \left[ \varphi_{i+\frac{1}{2}}^n p_{i+1}^{n+1} - (\varphi_{i+\frac{1}{2}}^n + \varphi_{i-\frac{1}{2}}^n) p_i^{n+1} + \varphi_{i-\frac{1}{2}}^n p_{i-1}^{n+1} \right] + \\ + \frac{\tau_v}{h} \left[ \frac{v_{2i}^{n+1} - v_{2i}^n}{l} - \frac{v_{2i-1}^n - v_{2i-1}^n}{l} \right],$$

где  $\varphi_{i\pm\frac{1}{2}} = \frac{2\varphi_i \varphi_{i\pm 1}}{\varphi_i + \varphi_{i\pm 1}}$ ,  $\varphi_i^n = \tilde{f}_{1i}^n + \mu_o \tilde{f}_{2i}^n$ .

Определение насыщенности на каждом временном слое сводится к решению разностного уравнения

$$\frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{l} + \lambda_1 s_i^n \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{l} + \frac{f_i^n - f_i^{n-1}}{h} + \\ + \frac{\tau_v}{h} \left( F_i^n \frac{v_{2i}^{n+1} - v_{2i}^n}{l} - F_{i-1}^n \frac{v_{2i-1}^{n+1} - v_{2i-1}^n}{l} \right) = 0,$$

где  $f_i^n = F_i^n v_i^n$ ,  $v_i^n = 1 - \int_0^{x_i} \lambda \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{l} dx$ ,  $x_i = ih$ .

Для обеспечения устойчивости и необходимой точности разностных схем выбирались шаг по пространственной переменной  $h = 0,01$  и шаг по времени  $l = 0,0001$ . Вычислительный эксперимент показал, что их уменьшение в два и более раза не изменило количественную и качественную картину расчетов. Относительная погрешность расчета, оцененная по принципу Рунге [56], в среднем не превышает 1 %.

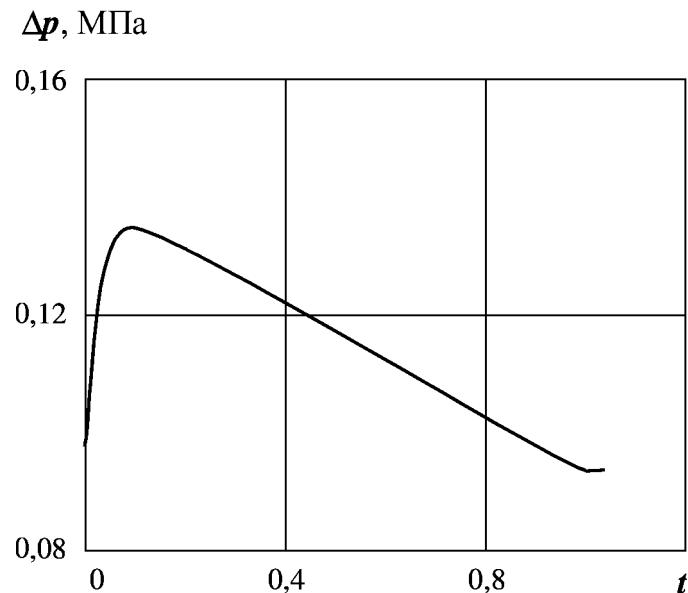
По расчетным значениям давления определялся перепад давления  $\Delta p(t) = p(0,t) - p(1,t) = p(0,t) - p_0$ . Зависимости перепада давления от безразмерного времени, равного отношению объема закачанной жидкости к объему пор, представлены на рис. 4.4, 4.5, 4.7.

Как видим, в системе с нелинейными свойствами возникают колебания перепада давления, которые наблюдаются до тех пор, пока насыщенность по всей длине модели не достигнет предельного значения, после чего устанавливается стационарный режим фильтрации при постоянном перепаде давления. Величина этого перепада давления определяется только значением расхода  $Q$  нагнетаемой жидкости. Чем меньше значение  $Q$ , тем меньше установившееся значение перепада давления. Расчеты выполнены при значениях  $\mu_0 = 0,2$ ,  $\tau = 0,025$ ,  $\tau_v = 0,001$  и фазовых проница-

мостях  $f_1(s)$  и  $f_2(s)$ , взятых в виде (2.23). Здесь  $F_1 = 0,138$ ,  $F_2 = 0,505$ ,  $s_0 = 0,399$ ,  $s_k = 0,689$ ,  $p_1 = 5/2$ ,  $p_2 = 3/2$ . Скорость вытеснения – 232,32 м/год (рис. 4.4).

Безразмерная функция  $\psi(s)$  задавалась в виде, представленном на рис. 4.3.

Если время релаксации ОФП  $\tau = 0$ , колебания перепада давления отсутствуют. Такой же эффект наблюдается и в случае, если функция  $\psi(q) = 1$ , т.е. отсутствует гистерезис в характере течения неильтоновских сред, рис. 4.5. Кривая перепада давления рассчитана при тех же параметрах, что и кривая на рис. 4.4. Полученный результат означает, что к возникновению колебаний перепада давления  $\Delta p$  приводит наличие времени запаздывания в процессах структурной перестройки реофизических сложных сред.

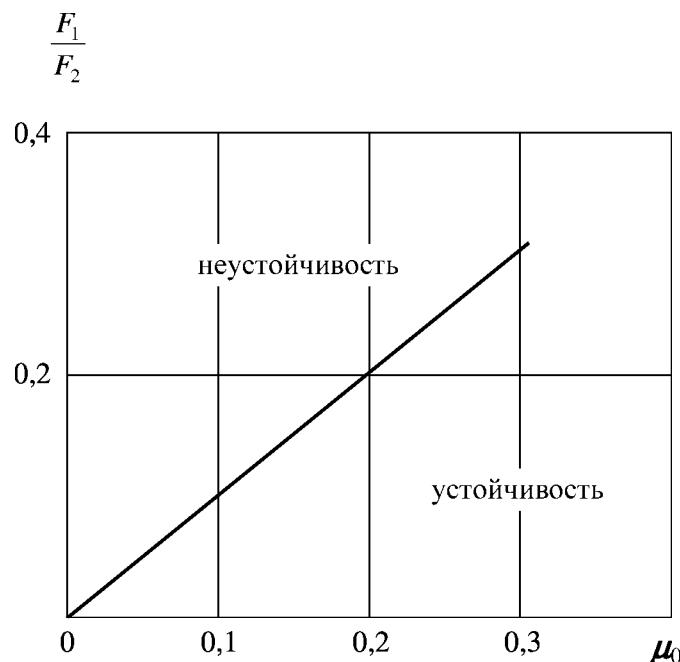


**Рис. 4.5. Зависимость перепада давления от времени**  
 $\tau = 0$

Влияние изменения времени релаксации  $\tau_v$  фазовой скорости  $v_2$  исследовано в разделе 4.2. Увеличение значения времени  $\tau_v$  приводит к затягиванию переходных процессов.

На характер изменения перепада давления от времени влияет отношение  $F_1/F_2$ , т.е. отношение ОФП воды при остаточной нефтенасыщенности к ОФП нефти при начальной водонасыщенности. Если отношение  $F_1/F_2$  меньше некоторого предельного значения, зависящего от  $\mu_0$ , то

колебания в фильтрационном потоке отсутствуют. Варьировалось только значение  $F_1$  в функциях ОФП. При значениях  $F_1/F_2 < \mu_0$  колебания отсутствуют. Области устойчивости и неустойчивости перепада давления от времени представлены на рис. 4.6.

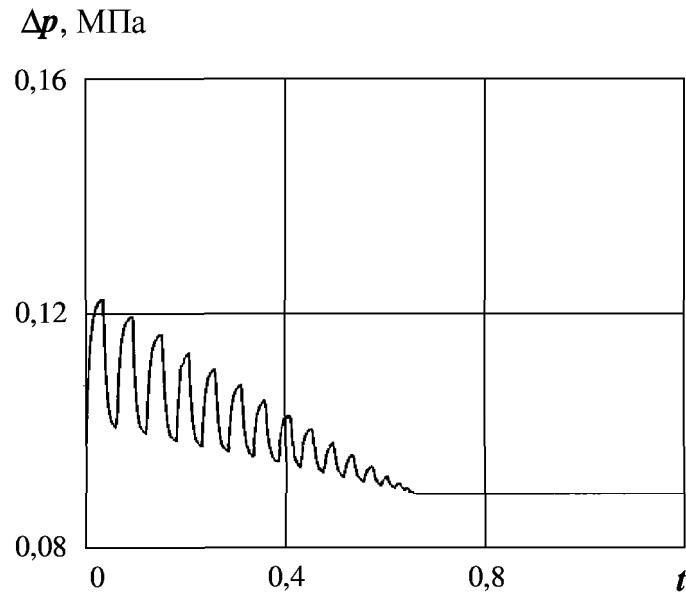


**Рис. 4.6.**  
Область изменения параметров

Из расчетов следует, что, чем меньше это отношение, тем больше время выхода на стационарный режим и тем больше разница между наименьшим и наибольшим значением перепада давления. При  $F_1/F_2 \geq \mu_0$  возникает неустойчивый режим фильтрации и начинаются колебания перепада давления. Области устойчивости и неустойчивости представлены на рис. 4.6.

Как показано в разделе 4.3.2. период (частота) колебаний определяется временем релаксации  $\tau$ . Чем меньше  $\tau$ , тем большее частота колебаний, тем меньше период колебаний. Численные расчеты подтверждают выводы асимптотического анализа, рис. 4.7. Кривая  $\Delta p(t)$  рассчитана при  $\tau = 0,01$  при прочих равных условиях, что и кривая на рис. 4.4.

На амплитуду колебаний влияет вид функции  $\psi$ , иначе говоря, величина гистерезиса (рис. 4.3), т.е. максимальное отклонение нижней ветви функции от верхней. Чем меньше эта величина, тем меньше амплитуда колебаний.



**Рис. 4.7. Зависимость перепада давления от времени**

При задании функции  $\psi(q)$  возможен и другой подход. Неньютоновские свойства микроэмульсии можно описать, задавая зависимость этой функции в виде

$$\psi = 1 - \exp(-bq), \quad b = b \left( \frac{\partial p}{\partial t} \right), \quad (4.36)$$

т.е. гистерезис образуется в процессе счета. Функцию  $b = b \left( \frac{\partial p}{\partial t} \right)$  можно задать в виде  $b = \alpha \operatorname{arctg} \left( \beta \frac{\partial p}{\partial t} \right) + c$ .

Постоянные величины  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $c$  подбираются так, чтобы параметр  $b$  был больше нуля. Т.к. функция  $\frac{\partial p}{\partial t}$  при изменении знака меняется «скачком», соответственно изменяется и значение параметра  $b$  (рис. 3.14). При приближении  $\frac{\partial p}{\partial t}$  к 0 справа ( $0_+$ ) и слева ( $0_-$ ) параметр  $b$  изменяется скачкообразно от значения  $b_1$  до значения  $b_2$ .

Использование формулы (4.36) в численных расчетах при тех же исходных данных показало следующее. Значения  $\alpha$  и  $c$  фиксировались:  $\alpha = 10$ ;  $c = 30$ . При значениях  $\beta$  порядка сотен колебания перепада дав-

ления в системе не наблюдаются. В этом случае функция  $b\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)$  плавно меняется при переходе через нуль, т.е. увеличение скорости сдвига происходит достаточно медленно и поэтому получаем равновесную кривую течения. Последующее столь же медленное уменьшение скорости сдвига вновь воспроизведет ту же кривую. При увеличении  $\beta$  до значений более 1000, функция  $b\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)$  характеризуется областью резкого изменения в окрестности нуля (рис. 4.8).

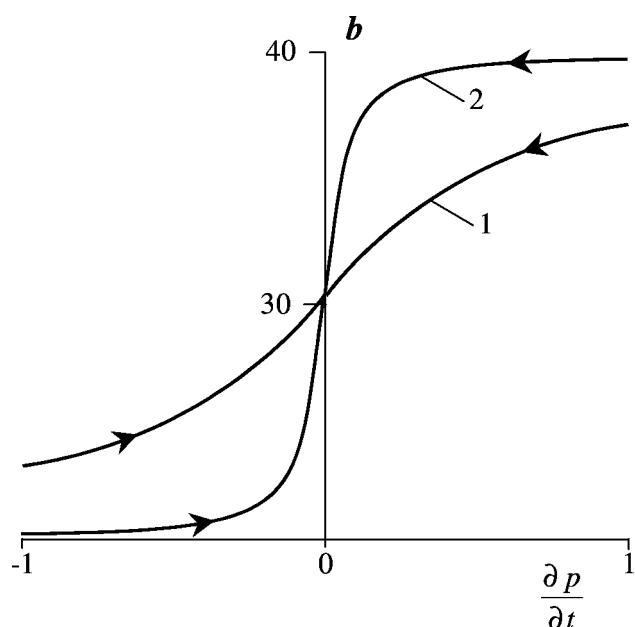
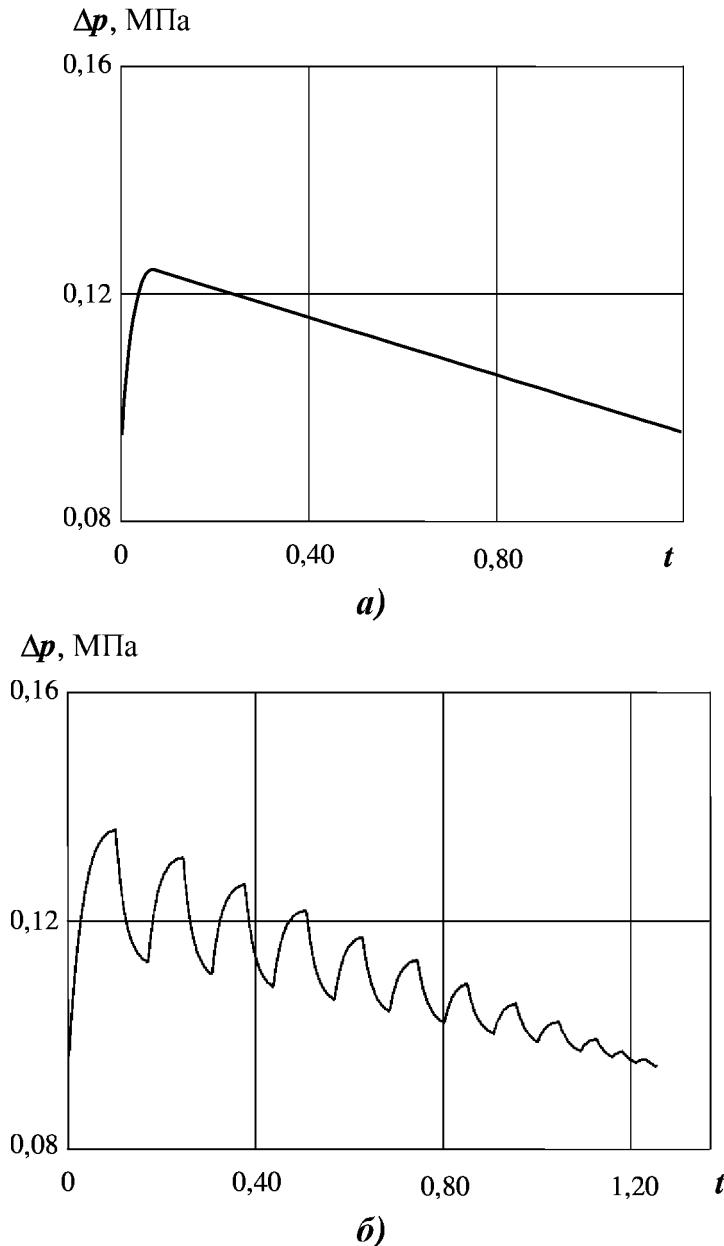


Рис. 4.8. Зависимость параметра  $b$  в формуле (4.36) от величины  $\frac{\partial p}{\partial t}$

$$\alpha = 10, c = 30; \\ 1 - \beta = 25; \quad 2 - \beta = 2500.$$

Если темп нагружения системы велик, то не все структурные связи успевают разрушиться и кривая нагрузки лежит выше равновесной кривой. При быстром обратном разгружении не все разрушенные связи успевают восстановиться, поэтому кривая разгрузки лежит ниже равновесной кривой. В этом случае функция  $\psi$  неоднозначна, в характере течения микрэмульгированной системы возникает гистерезис (см. рис. 4.3). На рис. 4.9 представлены расчетные кривые перепада давления от времени  $\Delta p(t)$  с использованием зависимости (4.36). Следует отметить идентичность этих кривых полученным выше.

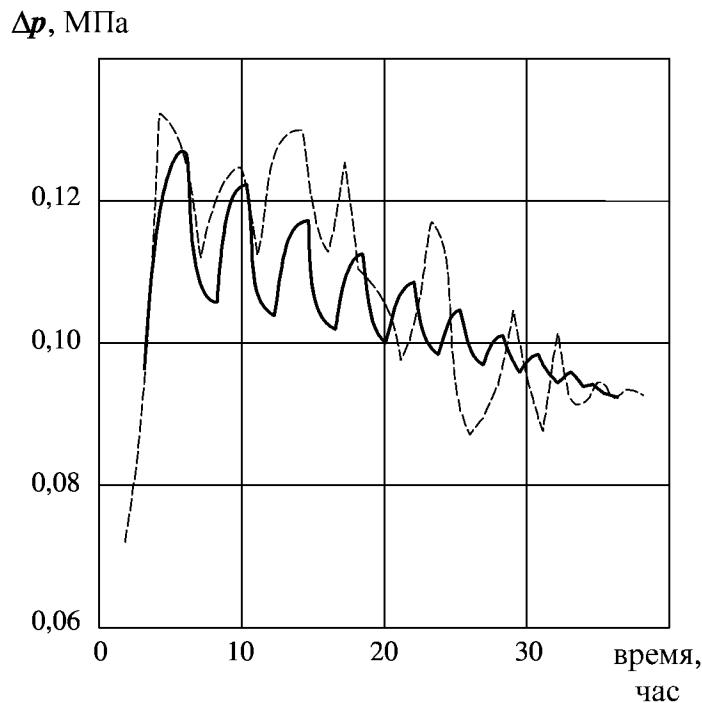


**Рис. 4.9. Зависимость перепада давления от безразмерного времени по формуле (3.50)**  
 а)  $\beta = 10$  б)  $\beta = 2500$

Таким образом, показано, что при двухфазной фильтрации в образце пористой среды возникают колебания перепада давления во времени, которые являются результатом совместного проявления нелинейных свойств микроэмульсионной супензии и эффектов времени запаздывания при установлении фазовых проницаемостей в процессах несмешивающегося вытеснения.

Теоретически обнаруженные колебания перепада давления качественно подтверждаются данными лабораторных исследований фильтрационных характеристик пористых сред. На рис. 4.10 штриховой линией пред-

ставлена экспериментальная зависимость перепада давления от времени, полученная при вытеснении нефти водой из модели пласта БС<sub>1-5</sub> для условий Приразломного месторождения ( $L = 0,1647$  м,  $m = 0,17$ ,  $k = 0,021$  мкм<sup>2</sup>,  $F_2 = 0,58$ ,  $s_0 = 0,285$ ,  $s_\kappa = 0,718$ ,  $v_0 = 232,32$  м/год,  $\mu_0 = 0,27$ ), сплошной линией показана кривая, рассчитанная применительно к условиям эксперимента при значениях параметров  $\tau = 0,025$ ,  $\tau_v = 0,1$ ,  $F_1 = 0,22$ ,  $F_2 = 0,58$ .



**Рис. 4.10. Экспериментальная и расчетная зависимости перепада давления от времени**

Описанная модель позволяет интерпретировать колебания градиента давления, наблюдаемые в экспериментах по вытеснению нефти водой из образца пористой среды.

Таким образом, можно заключить, что колебания перепада давления, рассматриваемые обычно как досадные помехи и экспериментальные ошибки, могут служить источником полезной информации в определении коллекторских и фильтрационных характеристик пласта.

---

## Глава 5. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НЕРАВНОВЕСНОЙ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

*За наблюдением всегда стоит теория.*

Эдвин Хаббл

*Функция эксперта состоит не в том, чтобы быть правым, когда остальные ошибаются, а в том, чтобы ошибаться по более сложным причинам.*

Дэвид Батлер

В настоящей главе показано, что неравновесность процессов двухфазной фильтрации в неоднородных средах может привести к потере устойчивости стационарных режимов течения и возникновению автоколебаний.

В первом разделе главы представлены результаты экспериментальных исследований по оценке изменений относительных фазовых проницаемостей при смене режимов дренирования и пропитки пористой среды. Во втором разделе главы численно моделируется процесс вытеснения нефти водой из пласта с двойной пористостью с учетом гистерезиса относительной фазовой проницаемости вытесняемой фазы.

Релаксационные процессы в пористых средах имеют самую разнообразную физическую природу. В настоящей главе рассматриваются проявления неравновесных эффектов при вытеснении несмешивающихся жидкостей в средах с двойной пористостью. В работе [24] показано, что неравновесность при этом оказывается следствием неоднородности пористой среды. Представленная в [24] модель двухфазной фильтрации в средах с двойной пористостью аналогична модели (1.10), предложенной для описания нестационарной фильтрации двухфазной жидкости с учетом неравновесности распределения фаз в макрообъеме среды.

При совместном движении в неоднородной пористой среде двух несмешивающихся жидкостей возникают локальные перетоки жидкости между фазами разной проницаемости. За счет различия насыщенности в высоко- и низкопроницаемых областях пористой среды возникают различия в фильтрационных сопротивлениях, что приводит к перераспределению давления и вызывает перетоки жидкости. Еще одной причиной, вызывающей обмен жидкостью между высокопроницаемой средой и малопроницаемыми включениями при вытеснении несмешивающихся жидкостей, является проявление капиллярных сил. Поскольку вытесняющая жидкость

вначале прорывается по высокопроницаемой среде, малопроницаемые включения (блоки) оказываются окруженными водой. Если порода гидрофильтральная, то нефть, содержащаяся в блоках, извлекается за счет капиллярной пропитки.

Г.И. Баренблаттом и Ю.П. Желтовым [21] был развит подход к описанию фильтрации однородной жидкости в средах с двойной пористостью, который был применен к исследованию процесса капиллярной пропитки [26, 197], движения газожидкостных систем и смешивающихся жидкостей в таких средах.

Здесь этот подход используется для изучения неравновесного течения несмешивающихся жидкостей в пластах с двойной пористостью.

Дополнительные осложнения возникают из-за гистерезиса смачивания, капиллярного гистерезиса, изменения свойств твердого скелета под действием длительного контакта с жидкостью и других эффектов последействия. Поэтому вид кривых относительной фазовой проницаемости, как и кривых капиллярного давления, зависит от направления процесса (повышается или понижается в данный момент насыщенность смачивающей фазы), или, в более общем случае, от всей предыстории процесса.

Если пористая среда насыщена первоначально смачивающей фазой и параметры ОФП получают путем уменьшения насыщенности смачивающей фазой, то процесс принято называть дренированием (вытеснением). Если же параметры получают в процессе увеличения насыщенности смачивающей фазой в пористой среде, предварительно насыщенной несмачивающей фазой, то процесс называется впитыванием (пропиткой).

Капиллярный гистерезис может существенно изменить ход процесса двухфазной фильтрации в тех случаях, когда насыщенность меняется немонотонно во времени. Наиболее характерный процесс подобного рода – двухфазная фильтрация в средах с двойной пористостью, примером которых могут служить трещиновато-пористые среды.

В настоящее время механизм движения неоднородных жидкостей в трещиновато-пористых средах изучен без учета гистерезиса фазовых проницаемостей [41, 106-108, 184]. Эта модель предполагает существование двух взаимопроникающих сред с резко различающимися размерами пор и значениями проницаемости. Из более крупных пор нефть вытесняется быстрее, чем из мелких, поэтому после прохождения по крупным порам фронта вытеснения начинается переток нефти из мелких пор в крупные в результате противоточной капиллярной пропитки, имеющей неравновесный характер [20, 24].

Таким образом, изменение содержания нефти в крупных порах можно рассматривать как сменяющие друг друга режимы пропитки и дренажа.

Как известно, вследствие капиллярного гистерезиса процессы пропитки и вытеснения отличаются свойствами взаимного распределения

фаз. Поэтому кривые ОФП, полученные при дренировании и пропитке, отличаются друг от друга. Таким образом, гистерезис ОФП очевиден. Он объясняется различием капиллярных сил при вытеснении нефти и последующем обратном насыщении ею промытой водой пористой среды.

В связи с этим представляет интерес изучить влияние гистерезиса ОФП на двухфазное течение в средах с двойной пористостью.

## **5.1. Экспериментальные исследования фильтрационных свойств пласта при повторном насыщении нефтью промытых зон пласта\***

Изменение направления потоков фильтрации на поздней стадии заводнения, вызванное уплотнением сетки скважин, циклическим нагнетанием воды, остановкой добывающих скважин и другими подобными причинами, приводит к внедрению нефти в зоны, уже промытые водой.

Гистерезис кривых ОФП для несмачивающей фазы проявляется сильнее, особенно при высоких значениях межфазного натяжения [244, 298]. Повышение температуры и снижение величины коэффициента межфазного натяжения приводят к уменьшению гистерезиса кривых ОФП [264].

В процессе дренирования несмачивающая фаза (нефть) теряет свою подвижность при более низкой нефтенасыщенности, чем при впитывании. Смачивающая фаза (вода) при дренировании теряет подвижность при более высокой водонасыщенности, чем в процессе впитывания.

Работами В.Ф. Усенко и Г.Н. Пиякова [221] экспериментально установлено, что поступление нефти в промытую зону нефтяного пласта приводит к увеличению остаточной нефтенасыщенности. Эти эксперименты были проведены как на составных сцементированных (реальных) моделях, так и на насыпных моделях пористых сред с различными флюидами (различные нефти и вазелиновое масло). Для всех условий были получены качественно одинаковые зависимости увеличения остаточной флюидонасыщенности при попадании нефти или вазелинового масла в промытые водой пористые среды. Был сделан вывод о том, что «частичное удержание нефти (масла), поступившей в заводненную пористую среду, в основном, обусловлено, физико-химическими свойствами породы, прежде всего ее смачивающей способностью. Последнее в итоге и определяет взаимное распределение жидкостей в порах».

На основании анализа работ по определению относительных фазовых проницаемостей и факторов, влияющих на их значения [85], можно

---

\* Выполнено совместно с А.В. Овсяковым и С.А. Блиновым.

сформулировать следующее представление о процессах, происходящих в пластах при повторном внедрении нефти в промытые водой зоны.

Существуют коллекторы с поверхностями мозаичной смачиваемости, когда между нефтесмачиваемыми участками (островками) имеются «мостки» промежуточной («нейтральной») смачиваемости. Эти нефтесмачиваемые участки с дорожками («мостками») «нейтральной» смачиваемости при относительно высокой нефтенасыщенности порового пространства представляют собой непрерывные нефтесмоченные пути, позволяющие нефти непрерывно двигаться по ним под действием градиента давления. При низкой же (остаточной или близкой к ней) нефтенасыщенности, нефть на участках дорожки с промежуточной («нейтральной») смачиваемостью замещается водой и дальнейшее движение нефти прекращается. Для восстановления непрерывности нефтесмоченных путей, т.е. для возобновления движения нефти в поровом пространстве, требуется повышение нефтенасыщенности коллектора до определенного, соответствующего конкретным условиям, уровня, зависящего от отклонения смачиваемости участков дорожек («мостков») между нефтесмачиваемыми островками в ту или иную сторону от «нейтральности», а также от свойств насыщающих коллектор нефти и воды.

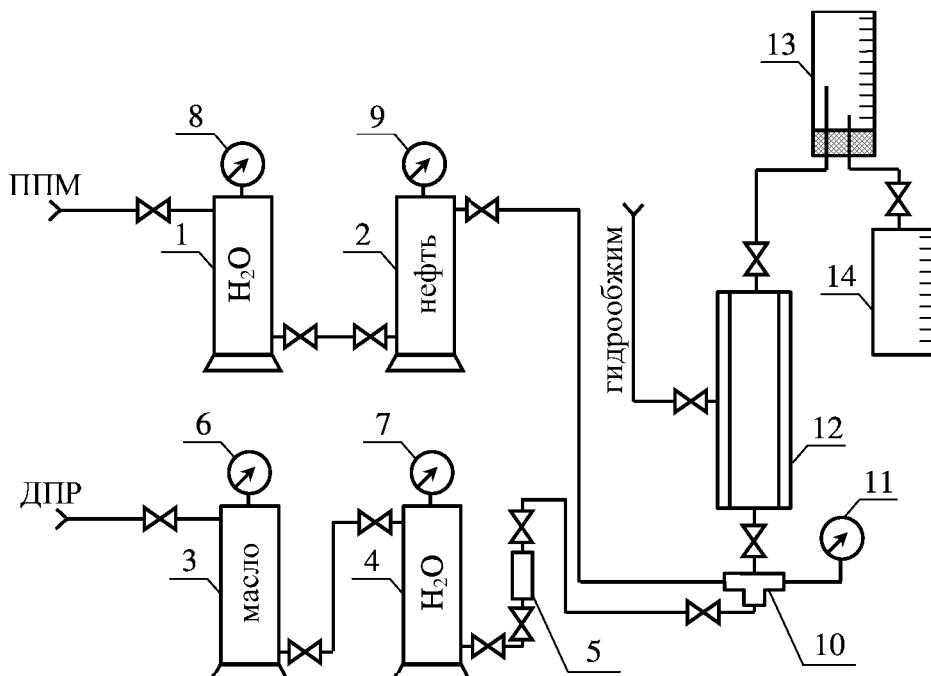
Нефть, попадающая в промытую зону пласта вследствие изменения направления движения жидкости, если не фильтруется мощной сплошной оторочкой, то рассеивается в виде глобул разных размеров по порам. Попадание в промытую зону пласта мощных сплошных оторочек, а тем более потоков практически исключено. Вероятнее всего, нефть в промытую зону попадает уже с содержанием воды в потоке и по мере продвижения в промытой зоне все больше рассеивается, поскольку вследствие возрастания в нефтесодержащих зонах сопротивления фильтрации возникают параллельные и пересекающиеся малые потоки и струйки водонефтяных смесей и нефтесодержащих вод. В конечном счете, вся попавшая в промытую зону пласта нефть, разбившись на глобулы различных размеров, распределится по порам, как по ловушкам, прекратит свое движение почти полностью и существенно снизит проницаемость для воды. Такую картину можно ожидать при всех вариантах смачиваемости поверхности порового пространства промытой зоны, за исключением случаев явно и сильно гидрофобных пород, что в природе встречается не часто.

При дальнейшем продолжении поступления нефти в рассматриваемую промытую зону произойдет увеличение объема накопленной нефти, вода все больше и больше будет вытесняться из пор глобулами нефти, мелкие глобулы по мере накопления в порах будут объединяться в более крупные. Этот процесс будет происходить до тех пор, пока нефтенасыщенность зоны не достигнет значения, при котором нефть приобретает непрерывность либо за счет восстановления нефтесмоченных дорожек

(путей), либо за счет соединения глобул и возникновения нефтяных шнурков, протекающих по центрам крупных пор и каналов.

С целью изучения фильтрационных свойств пласта при вторичном попадании нефти в промытую зону пласта были проведены лабораторные эксперименты по определению и анализу кривых относительных фазовых проницаемостей при различных, сменяющих друг друга режимах дренирования и пропитки.

Схема экспериментальной установки по определению фазовых проницаемостей при совместной стационарной фильтрации приведена на рис. 5.1.



**Рис. 5.1. Схема экспериментальной установки**

ППМ – пропорциональный программный микронасос; ДПР – датчики постоянного расхода; 1, 2, 3, 4 – разделительные емкости; 5 – фильтр; 6, 7, 8, 9, 11 – образцовые манометры; 10 – узел смешения; 12 – модель пласта; 13 – ловушка-бюретка; 14 – мерная бюретка

Она состоит из трех основных блоков.

1. Блок подачи рабочих агентов, состоящий из:
  - датчиков постоянного расхода для подачи в модель пласта водной фазы с заданным расходом;
  - пропорционального программного микронасоса для подачи в модель пласта нефтяной фазы с заданным расходом. Набор сменных шестере-

- нок в ППМ обеспечивает подачу постоянного количества смеси двух жидкостей в соотношении фаз от 0 до 100 %;
- четырех разделительных колонок с исследуемыми рабочими агентами, снабженными образцовыми манометрами для контроля за перепадом давления.
  - 2. Блок модели пласта, состоящий из металлического кернодержателя с гидрообжимом, узла смешения воды и нефти и образцового манометра.
  - 3. Блока отбора и контроля, состоящего из ловушки-бюretки и мерной бюretки.

**Модель пласта.** Для определения фазовых проницаемостей были использованы цилиндрические образцы с ненарушенной структурой Ново-Хазинской площади Арланского месторождения диаметром 28 мм и длиной не менее 30 мм. Из отдельных цилиндрических образцов с известными коллекторскими свойствами (табл. 5.1) собиралась модель пласта в металлический кернодержатель с гидрообжимом длиной 200 мм.

Модель пласта составлялась таким образом, чтобы по направлению течения флюидов каждый последующий образец имел меньшую проницаемость. Методика подготовки образцов к исследованиям проводится согласно требованиям ОСТ 39-161-83 (Нефть. Метод лабораторного определения абсолютной проницаемости нефти и газа и вмещающих их пород) и ОСТ 39-181-85 (Нефть. Метод лабораторного определения пористости углеводородосодержащих пород).

Минимальная длина модели определяется по формуле (5.1), согласно ОСТ 39-235-89 (Нефть. Метод определения ОФП в лабораторных условиях при совместной стационарной фильтрации):

$$L_{\min} = \frac{\pi_2}{\pi_1} \sqrt{K \cdot m} = 1000 \sqrt{K \cdot m}, \quad (5.1)$$

где  $L_{\min}$  – минимальная длина составного образца, мм;  
 $k$  – средняя проницаемость составного образца,  $\text{мкм}^2$ ;  
 $m$  – средняя пористость составного образца, доли единицы;  
 $\pi_1$ ,  $\pi_2$  – критерии подобия модели и натуры, выведенные Д.А. Эфросом и В.П. Оноприенко:  
 $\pi_1$  – комплекс величин, характеризующих отношение перепадов капиллярного и гидродинамического давлений при проведении эксперимента;  
 $\pi_2$  – комплекс величин, характеризующих соотношение между градиентами капиллярного и гидродинамического давлений.

Таблица 5.1

**Коллекторские свойства пласта**

№ № керна	Проницаемость, мкм <sup>2</sup>	Пористость, %
614	0,7618	21,6
612	0,7637	22,0
622	0,7162	20,4
566	0,7785	26,4
616	0,7368	22,7
562	0,6425	24,1
537	0,5568	23,4
23	0,5152	23,1
625	0,7538	20,9
567	0,8276	25,9
555	0,8923	26,5
118	0,9958	22,2
131	1,1223	26,8
13	1,2461	25,2

*Модель нефти.* Для определения фазовых проницаемостей возможно использование пластовых проб безводной нефти или ее модели. В связи с этим в качестве модели нефти использовалась дегазированная нефть ( $\rho = 0,826 \text{ г/см}^3$ ,  $\mu = 6,26 \text{ мПа}\cdot\text{с}$ ) и изовискозная модель Ново-Хазинской площади Арланского месторождения ( $\rho = 0,847 \text{ г/см}^3$ ,  $\mu = 8,4 \text{ мПа}\cdot\text{с}$ ).

Подготовка нефти к исследованиям проводилась согласно ОСТ 39-235-88.

Методика проведения исследований при совместной стационарной фильтрации состоит из ряда подготовительных операций и цикла определения фазовых проницаемостей при различных соотношениях водной и нефтяной фазы. В подготовительные операции входит определение исходных коллекторских свойств модели пласта, определение средних значений составной модели, таких, как пористость, абсолютная проницаемость по газу. После определения исходных параметров модель пласта монтируется в схему экспериментальной установки (рис. 5.1.). Модель пласта вакуумируется с одновременной закачкой воды, после прокачки через модель 2-3 объемов пор замеряется проницаемость для воды при 100 % водонасыщенности.

Следующим этапом определения фазовых проницаемостей является создание остаточной воды путем вытеснения ее нефтью. Прокачивается не менее трех объемов пор нефти и замеряется проницаемость для нефти при остаточной водонасыщенности при достижении стационарного режима фильтрации.

После определения проницаемости для нефти проводился комплекс исследований фазовых проницаемостей для нефти и воды на режиме пропитки, а потом на дренаже (модель 1).

Для модели № 2 определение фазовых проницаемостей проводилось в иной последовательности: сначала дренаж, потом пропитка, затем снова дренаж и пропитка.

Для каждого режима доля нефти (воды) в потоке последовательно уменьшается (увеличивается), а доля воды (нефти) возрастает (уменьшается) до 100 %.

Переход с одного режима на другой и определение проницаемости для нефти и воды проводили при достижении установившейся стационарной фильтрации. Достижение состояния установившейся фильтрации фиксировали по стабилизации показаний образцового манометра и расходных характеристик нефти и воды.

После проведения испытания модель пласта разбиралась и отдельные образцы помещались в аппараты Закса для определения остаточной водо-нефтенасыщенности.

Величины фазовых проницаемостей подсчитывались по формулам:

$$f_{ni} = \frac{Q_{ni} \cdot \mu_n l}{\Delta p_i \cdot F}, \quad f_{ei} = \frac{Q_{ei} \cdot \mu_e l}{\Delta p_i \cdot F},$$

где  $f_{ni}$ ,  $f_{ei}$  – фазовые проницаемости для нефти и воды  $i$ -го режима,  $\text{мкм}^2$ ;  
 $Q_{ni}$ ,  $Q_{ei}$  – расходы нефти и воды в условиях эксперимента,  $\text{см}^3/\text{с}$ ;  
 $\mu_n$ ,  $\mu_e$  – вязкости нефти и воды при условиях эксперимента,  $\text{мПа}\cdot\text{с}$ ;  
 $\Delta p_i$  – перепад давления на  $i$ -том режиме,  $10^5 \text{ Па}$ ;  
 $F$  – площадь поперечного сечения образца,  $\text{см}^2$ ;  
 $l$  – длина образца, на котором измеряется перепад давления, см.

Значения относительных проницаемостей для нефти и воды подсчитывались по формулам:

$$f_n^{omn.} = \frac{f_n}{k} \cdot 100, \quad f_e^{omn.} = \frac{f_e}{k} \cdot 100,$$

где  $f_n^{omn.}$ ,  $f_e^{omn.}$  – относительные фазовые проницаемости для нефти и воды, %;  
 $k$  – проницаемость образца для воды при 100 % водонасыщенности,  $\text{мкм}^2$ .

При построении кривых фазовых равновесий обычно используются координаты  $f_{n,e}^{omn.}$  (относительная фазовая проницаемость по нефти и воде) –  $s$  (водонасыщенность). Однако использование таких координат требует определения  $s$  для каждого режима эксперимента. В зависимости от условий эксперимента, этот параметр определяется через удельное сопротивление жидкости или весовым методом. Конструкция используемого кернодержателя не позволяла определять водонасыщенность через удельное сопротивление жидкости, а применение весового метода было затруднено, так как поровый объем модели пласта был невелик и контролировать изменение водонасыщенности при замещении воды на нефть и нефти на воду (при незначительной разности плотностей  $\rho_e$  и  $\rho_n$ ) с достаточной степенью точности не представлялось возможным. В связи с этим результаты экспериментов приводятся в координатах  $f_{n,e}^{omn.} - C_e$  (доля воды в потоке, %), так как соотношение воды и нефти в потоке для каждого режима контролировалось с высокой степенью точности по расходным характеристикам и перепаду давления в модели пласта.

Результаты исследований ОФП для моделей 1 и 2 представлены на рис. 5.2 и рис. 5.3 соответственно. Наблюдается несовпадение численных

значений ОФП в начале и конце цикла дренаж – пропитка и пропитка дренаж. После цикла дренаж – пропитка не совпадают и численные значения относительных фазовых проницаемостей в крайних точках, т.е. при 100%-й доле воды и нефти в потоке. Интересно отметить факт расположения кривых относительных фазовых проницаемостей по нефти и воде на прямом (дренаж) и обратном (пропитка) ходе. Если вначале проводится пропитка, то кривая относительной фазовой проницаемости (по воде и нефти) лежит выше кривой по дренажу, если сначала дренаж, то кривые лежат наоборот.

От истории насыщения модели зависит и то, какую форму – замкнутую или разомкнутую – имеют кривые относительных фазовых проницаемостей по нефти и воде при дренаже и пропитке. Если сначала идет процесс дренажа, то замкнутую петлю имеют кривые относительной фазовой проницаемости для нефти, если процесс пропитки – то для воды.

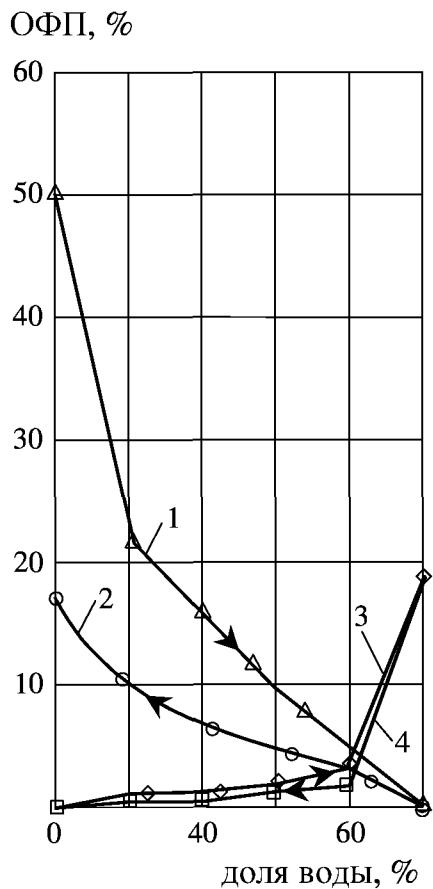


Рис. 5.2. Изменения ОФП нефти (1, 2) и воды (3, 4) при повторении цикла "пропитка-дренаж"

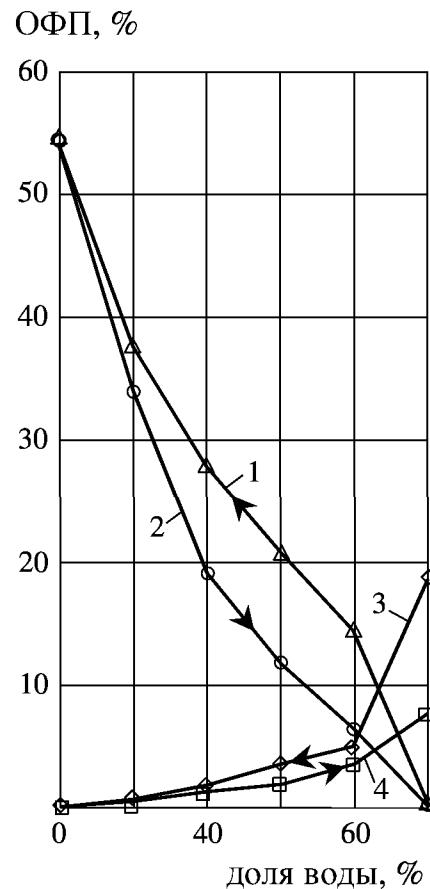


Рис. 5.3. Изменения ОФП нефти (1, 2) и воды (3, 4) при повторении цикла "дренаж-пропитка"

Установлено, что вязкость существенно не влияет на характер относительных фазовых проницаемостей. Этот вывод подтверждается как для опытов по нестационарной фильтрации, так и по стационарной.

Необходимо отметить факт уменьшения разности численных значений относительных фазовых проницаемостей по нефти для I цикла дренаж – пропитка и для 2-го цикла дренаж – пропитка. Если в первом случае, например, для соотношения 60 % нефти – 40 % воды в потоке разница составляет 11,9 %, то во втором соответственно 2,6 %. Изменение численных значений относительных фазовых проницаемостей по воде за два цикла исследований незначительно и только в области от 85 % до 100 % содержания воды в потоке оно довольно существенно, что, по-видимому, можно объяснить неустойчивостью режима течения воды и нефти за счет незначительного содержания несмачивающей фазы. Данные по изменению численных значений относительных фазовых проницаемостей нефти и воды для других соотношений воды в потоке приведены в табл. 5.2 – 5.3.

Таблица 5.2

**Изменение значений ОФП в зависимости от соотношения воды в потоке (модель 1)**

$C_w$ (%)	0	20	40	60	80	100
По воде						
Пропитка $f_e^{omn}$ (%)	0	1,0	1,3	2,0	3,0	19,4
Дренаж $f_e^{omn}$ (%)	0	0,5	0,8	1,5	2,0	19,4
$\Pi.f_e^{omn} - \Delta.f_e^{omn}$ (%)	0	0,5	0,5	0,5	1,0	0
По нефти						
Пропитка $f_n^{omn}$ (%)	50,5	22,0	15,0	10,0	5,5	0
Дренаж $f_n^{omn}$ (%)	17,2	9,5	7,7	6,0	3,5	0
$\Pi.f_n^{omn} - \Delta.f_n^{omn}$ (%)	33,3	12,5	7,3	4,0	2,0	0

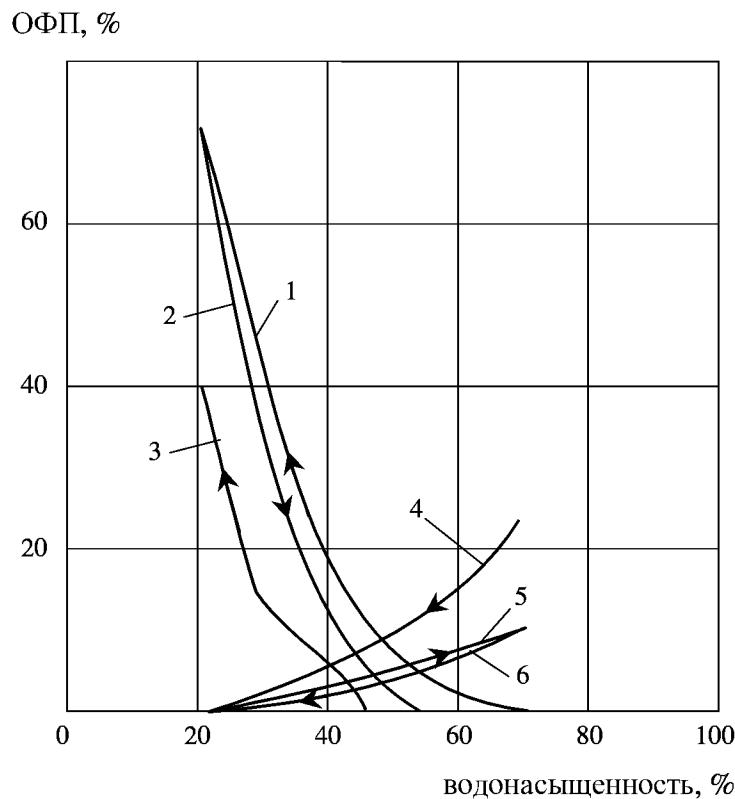
На рис. 5.4 приведены графики относительных фазовых проницаемостей в классических координатах  $f_n^{omn}$  % –  $s$  %, полученные путем пересчета экспериментальных данных опыта на модели 2 (расчет проведен

для случая нестационарного режима через зависимость  $C_b = f(s)$  (рис. 5.5). Как видно из рис. 5.4, проведение повторяющихся циклов дренаж – пропитка и пропитка – дренаж приводит к снижению относительных фазовых проницаемостей нефти и воды. Остаточная нефтенасыщенность возрастает по мере увеличения режимов воздействия на модель пласта, что, по-видимому, можно объяснить формированием четочного режима течения.

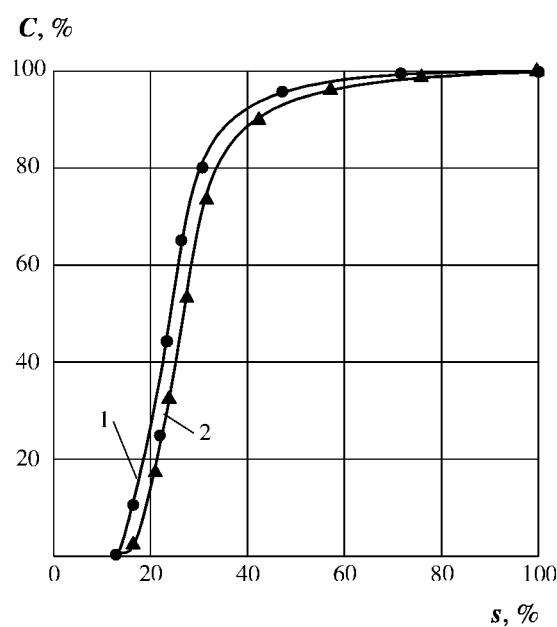
Таблица 5.3

**Изменение значений ОФП в зависимости от соотношения воды в потоке (модель 2)**

$C_b$ (%)	0	20	40	60	80	100
По воде (первый цикл)						
Дренаж $f_b^{omn.}$ (%)	0	1,1	2,5	5,0	7,0	25,0
Пропитка $f_b^{omn.}$ (%)	0	0,9	2,0	3,0	5,0	10,62
$\Delta \cdot f_b^{omn.} - \Pi \cdot f_b^{omn.}$ (%)	0	0,2	0,5	2,0	2,0	14,38
По нефти (первый цикл)						
Дренаж $f_h^{omn.}$ (%)	71,9	50,02	37,4	27,9	19,8	0
Пропитка $f_h^{omn.}$ (%)	71,9	45,4	25,8	16,0	9,2	0
$\Delta \cdot f_h^{omn.} - \Pi \cdot f_h^{omn.}$ (%)	0	4,62	11,6	11,9	10,6	0
По воде (второй цикл)						
Дренаж $f_b^{omn.}$ (%)	0	0,55	1,0	1,4	2,1	16,0
Пропитка $f_b^{omn.}$ (%)	0	0,50	0,8	1,0	1,9	13,0
$\Delta \cdot f_b^{omn.} - \Pi \cdot f_b^{omn.}$ (%)	0	0,05	0,2	0,4	0,2	3,0
По нефти (второй цикл)						
Дренаж $f_h^{omn.}$ (%)	41,24	23,0	13,8	9,0	6,0	0
Пропитка $f_h^{omn.}$ (%)	41,24	21,0	11,2	7,8	4,5	0
$\Delta \cdot f_h^{omn.} - \Pi \cdot f_h^{omn.}$ (%)	0	2,0	2,6	1,2	1,5	0



**Рис. 5.4.** Изменение ОФП нефти (1, 2, 3) и воды (4, 5, 6) при повторении цикла "дренаж–пропитка–дренаж"



**Рис. 5.5.** Зависимость обводненности продукции ( $C$ ) на выходе из модели от водонасыщенности ( $s$ )

$$1 - \mu_h = 8,4 \text{ мПа}\cdot\text{с}; 2 - \mu_h = 2,8 \text{ мПа}\cdot\text{с}$$

## 5.2. Математическая модель двухфазной фильтрации в средах с двойной пористостью

Анализу фильтрации в неоднородных пористых средах посвящено большое число работ.

Известна классическая модель [21, 26], в которой неоднородная среда описывается системой блоков и трещин, рассматриваемых как взаимопроникающие континуумы. Взаимодействие между ними описывается обменным членом, определяемым разностью давлений континуумов. Некоторые усложнения модели связаны с учетом деформирования скелета и изменением параметров трещиноватости.

Существуют варианты модели, в которых блоки рассматриваются только как емкостной элемент. В работе [258] такая модель называется кинетической моделью первого порядка. Такие модели характерны для описания диффузионных процессов с сорбцией в пористых засыпках с застойными зонами, которые играют роль низкопроницаемых блоков. Аналогичные модели предлагались позже в [248, 253, 259, 262, 268, 269].

В работе [288] было показано, что перетоки между высокопроницаемыми и низкопроницаемыми областями не только быстро устанавливаются, но и пренебрежимо малы по величине, поэтому давление в трещиновато-пористом пласте едино для блоков и трещин и может быть описано одним обычным уравнением пьезопроводности без всяких обменных членов. Этот вывод подтверждают результаты, полученные в [183] при осреднении уравнений фильтрации в блочной среде, где было показано, что обменный член имеет порядок малости  $\varepsilon^2$  (поля проводимости и пористости считались одинаковыми).

В [257] было предложено учитывать нестационарность перетоков. Форма функции перетока постулировалась, а замыкающие соотношения для функции и коэффициентов интенсивности перетоков были получены из решения задачи вытекания жидкости из отдельного блока при постоянном давлении на границе.

Модели с нестационарным перетоком строились и в работе [245], где решение задачи доводилось до некоторого соотношения для лапласового изображения, либо до интегрального уравнения. В [269] исследована корректность задачи Коши для этих моделей.

В работе [281] в рамках теории деформирования сред с двойной пористостью построена модель многофазной фильтрации. Определяющие уравнения получены с учетом сильной взаимозависимости между параметрами фильтрационного потока и деформируемого скелета. Показано, что учет взаимовлияния в жидкости и твердого скелета определяет такие параметры, как фазовые проницаемости и остаточные насыщенности.

Объединенная теория фильтрации и деформации в среде с двойной пористостью представлена в работе [272]. На базе использования теории

упругости, принципа равновесия системы, концепции эффективных напряжений в насыщенной пористой среде, законов сохранения массы и Дарси получена замкнутая система определяющих дифференциальных уравнений. Показано, что предложенная теория включает в качестве предельных случаев более известные теории Био и Баренблатта.

Обзор моделей течения для трещиновато-пористых сред имеется в монографии Т.Д. Голт-Рахта [78].

Приложения к исследованиям скважин в сильно неоднородных трещиновато-пористых коллекторах разрабатывались в работах [78, 258, 288, 289].

Аналитические решения задач разработки пластов строились во многих перечисленных работах, а также в [255, 299]. Численные решения задач в рамках макромоделей разработаны в работах [258, 271].

При создании математической модели двухфазной фильтрации (нефть–вода) в неоднородных средах используется представление коллектора как сплошной среды с двойной пористостью. Эта модель предполагает существование двух взаимопроникающих сред с резко различающимися размерами пор и значениями проницаемости [21]. В отличие от обычной схемы двухфазной фильтрации в пористой среде в каждой точке бипористого пространства вводятся по два осредненных параметра, характеризующих элементы неоднородной среды и движение жидкости в них. Так, каждая точка пространства среды с двойной пористостью характеризуется двумя проницаемостями, двумя пористостями, а движение жидкости – двумя насыщенностями одной из жидкостей. Насыщенность в высокопроницаемой и насыщенность пор в низкопроницаемой средах смачивающей породу жидкостью. В соответствии с этим поток в каждой точке пространства характеризуется двумя давлениями и двумя скоростями фильтрации для каждой из жидкостей. В дальнейшем, как и в работах [21, 41, 197], полагается, что течение жидкостей осуществляется, в основном, по крупным порам, так что скорости фильтрации жидкостей по мелким порам пренебрежимо малы по сравнению со скоростями фильтрации жидкостей в высокопроницаемой среде, т.е. конвективными потоками в низкопроницаемой среде пренебрегается. Принимаем также, что капиллярное давление в системе крупных пор равно нулю, а давление в нефтяной фазе, которая всегда считается непрерывной, одно и то же для высокопроницаемой и низкопроницаемой сред в каждой «макроточке» среды, т.е. при математическом описании процесса фильтрации рассматривается одно давление. Аналогичное допущение принято в работах [106-108].

Движение нефти и воды в высокопроницаемой среде, в соответствии со сказанным выше, описывается системой дифференциальных уравнений фильтрации несмешивающихся жидкостей, которые с учетом капиллярного впитывания воды блоками принимают вид, предложенный В.М. Рыжиком [197]

$$m_1 \frac{\partial s_1}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{v}_{11} + q = 0, \quad (5.2)$$

$$-m_1 \frac{\partial s_1}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{v}_{12} - q = 0, \quad (5.3)$$

где скорости фильтрации  $\vec{v}_{11}$  вытесняющей и  $\vec{v}_{12}$  вытесняемой жидкостей в системе крупных пор описываются обобщенным законом Дарси

$$\vec{v}_{11} = -\frac{k_1}{\mu_1} f_{11}(s_1) \operatorname{grad} p, \quad (5.4)$$

$$\vec{v}_{12} = -\frac{k_1}{\mu_2} f_{12}(s_1) \operatorname{grad} p.$$

Здесь и далее первая цифра характеризует среду, а вторая – жидкость.

Приняты следующие обозначения:

$s_1$  – насыщенность вытесняющей фазы в высокопроницаемой области;

$f_{11}(s_1)$  и  $f_{12}(s_1)$  – фазовые проницаемости крупных пор по воде и нефти;

$m_1$ ,  $k_1$  и  $m_2$ ,  $k_2$  – пористость и проницаемость системы крупных и мелких пор соответственно;

$\mu_1$ ,  $\mu_2$  – вязкости вытесняющей и вытесняемой жидкостей;

$p$  – давление;

$q$  – интенсивность фазовых перетоков из мелких пор в крупные.

Движение нефти и воды в мелких порах описывается следующей системой уравнений

$$m_2 \frac{\partial s_2}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{v}_{21} - q = 0, \quad (5.5)$$

$$-m_2 \frac{\partial s_2}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{v}_{22} + q = 0. \quad (5.6)$$

Здесь  $s_2$  – насыщенность вытесняющей фазы в малопроницаемой области. Приняв во внимание предположение, что изменение насыщенности блоков обусловлено только капиллярным впитыванием воды из системы крупных пор, дивергентным членом уравнений (5.5) и (5.6), выражающим изменение насыщенности в результате притока жидкости по порам через границы некоторого элемента породы, можно пренебречь. Тогда уравнения (5.5) и (5.6) вырождаются в одно уравнение

$$m_2 \frac{\partial s_2}{\partial t} - q = 0. \quad (5.7)$$

Для замыкания полученной системы уравнений нужно найти выражение для интенсивности перетоков  $q$ .

Перетоки возникают вследствие разности давлений в составляющих средах за счет перераспределения фильтрационных сопротивлений и за счет капиллярных сил. В ходе вытеснения несмешивающихся жидкостей из неоднородных сред, которые могут рассматриваться как сложная сплошная среда, основную роль играют перетоки, возникающие под действием капиллярных сил.

Капиллярный переток есть следствие разности капиллярных давлений в составляющих средах. Большая величина капиллярного давления в малопроницаемых включениях создает в них зону пониженного давления в водной фазе. Напротив, в вытесняемой фазе давление в низкопроницаемых порах выше, чем в высокопроницаемой среде. Вследствие этого и возникает переток воды в низкопроницаемые включения, а нефти – в крупные поры. При этом в силу несжимаемости жидкостей следует, что переток воды в менее проницаемую часть равен перетоку нефти в обратном направлении.

Общий объем обеих жидкостей, перетекающих из одной среды в другую, определяется гидродинамическим сопротивлением малопроницаемой среды. Объемная доля данной фазы в общем объеме жидкостей, участвующем в перетоке, определяется относительным содержанием этой фазы в среде.

Считая, что обмен жидкостями между средами разной проницаемости происходит за счет капиллярной пропитки малопроницаемых включений, функцию интенсивности фазовых перетоков определим из решения задачи о противоточной капиллярной пропитке. Для подсчета интенсивности фазовых перетоков  $q$  рассмотрим одиночный блок объема  $V$  с характерным размером  $l$ , окруженный трещиной. Определим переток  $i$ -ой фазы как поток поля скорости фильтрации фазы  $v_{2i}$  через поверхность блока  $S$ , отнесенной к единице его объема

$$q = \frac{1}{V} \iint \vec{v}_{2i} \vec{n} dS, \quad i = 1, 2. \quad (5.8)$$

Согласно обобщенному закону Дарси выражения для фазовых скоростей  $v_{2i}$  в малопроницаемых включениях имеют вид

$$\vec{v}_{2i} = -\frac{k_2 f_i(s_2)}{\mu_2} \operatorname{grad} p_i, \quad i = 1, 2. \quad (5.9)$$

Здесь индекс «1» относится к смачивающей фазе, «2» – к несмачивающей.

Капиллярное давление  $p_c$  в двухфазной системе нефть–вода определяется как

$$p_c = p - p_1, \quad p = p_2. \quad (5.10)$$

Введем суммарную скорость фаз в малопроницаемых включениях  $\vec{v}_2 = \vec{v}_{21} + \vec{v}_{22}$ .

Сложив уравнения (5.9), с учетом (5.10), получим выражение для суммарной скорости  $\vec{v}_2$

$$\vec{v}_2 = -k_2 \left( \frac{f_1(s_2)}{\mu_1} + \frac{f_2(s_2)}{\mu_2} \right) \operatorname{grad} p_1 - k_2 \frac{f_2(s_2)}{\mu_2} \operatorname{grad} p_c. \quad (5.11)$$

После подстановки  $\operatorname{grad} p_1$ , найденного из (5.11), в уравнение (5.9), получим выражения для фазовых скоростей  $\vec{v}_{2i}$  через суммарную скорость  $\vec{v}_2$

$$\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 F(s_2) + \frac{k_2}{\mu_2} F(s_2) f_2(s_2) \operatorname{grad} p_c,$$

$$\vec{v}_{22} = \vec{v}_2 (1 - F(s_2)) - \frac{k_2}{\mu_2} F(s_2) f_2(s_2) \operatorname{grad} p_c,$$

$$F(s_2) = \frac{f_1(s_2)}{f_1(s_2) + \mu_0 f_2(s_2)}, \quad \mu_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Учитывая, что для противоточного течения несжимаемых жидкостей выполняется условие  $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = 0$ , для вычисления перетока  $q$  можно

использовать только фазовую скорость  $\vec{v}_{21}$ , тем более уравнение (5.7) записано для водонасыщенности в блоке

$$q = \frac{1}{V} \frac{k_2}{\mu_2} \iint F(s_2) f_2(s_2) \operatorname{grad} p_c \vec{n} dS. \quad (5.12)$$

Осредняя подынтегральную функцию  $\vec{v}_{21}$ , получим

$$q = \frac{\alpha k_2}{\mu_2 l} F(\bar{s}_2) f_2(\bar{s}_2) \operatorname{grad} p_c,$$

где  $s_2$  – средняя насыщенность в блоках

$$\bar{s}_2 = \frac{1}{V} \iiint s_2 dV.$$

В дальнейшем черточки опускаем.

Характерные значения градиента капиллярного давления имеют порядок  $\operatorname{grad} p_c \cong \frac{\Delta p_c}{l}$ , поэтому интенсивность фазовых перетоков между блоками и трещинами можно представить в виде

$$q = \alpha \frac{k_2}{\mu_2 l^2} \frac{f_1(s_2)}{f_1(s_2) + \mu_0 f_2(s_2)} f_2(s_2) \Delta p_c. \quad (5.13)$$

Здесь  $\alpha$  – безразмерная характеристика интенсивности объема жидкостью между фазами  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $l$  – средний размер блоков,  $\Delta p_c$  – разность капиллярных давлений в составляющих средах.

В результате осреднения в формуле (5.13) появился параметр  $\alpha$  – безразмерный коэффициент, зависящий от формы блока [20, 21]. Его можно определить приближенно с помощью лабораторного либо вычислительного эксперимента. Последний осуществляется путем численного решения задачи о капиллярной пропитке блока заданной формы. В общем случае, с помощью вычислительного (или лабораторного) эксперимента можно определять комплексы  $\alpha F(s_2) f_2(s_2) \operatorname{grad} p_c$  как функции средней насыщенности в блоке.

В данной работе значения  $\alpha$  брались из данных исследований, представленных в [20].

Используем систему уравнений (5.2) – (5.8) для описания процесса вытеснения нефти водой из образца бипористой среды, на входном сече-

ния которого поддерживается постоянный расход вытесняющей жидкости, а на выходе – начальное давление. Начальные и граничные условия для одномерного случая задаются при этом в виде:

$$\begin{aligned} t = 0; \quad 0 \leq x \leq L; \quad s_1 = s_2 = s_0; \quad p = p_0; \\ x = 0; \quad t > 0; \quad v = v_{11} = \text{const}; \quad s_1 = s_k; \\ x = L; \quad t > 0; \quad p = p_0, \end{aligned} \quad (5.14)$$

где  $s_0$  и  $s_k$  – начальная и конечная насыщенности бипористой среды вытесняющим агентом,  
 $L$  – длина образца,  
 $p_0$  – начальное давление в модели пористой среды.

### 5.3. Численная реализация модели и результаты расчетов

Для исследования поля давления и насыщенности в бипористой среде систему уравнений (5.2), (5.3), (5.7) в одномерном случае приведем к виду:

$$m_1 \frac{\partial s_1}{\partial t} + v_0 \frac{\partial F(s_1)}{\partial x} = -q, \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad v = v_{11} + v_{12}, \quad (5.16)$$

где  $F(s_1) = \frac{f_{11}(s_1)}{f_{11}(s_1) + \mu_0 f_{12}(s_1)}$ ,  $\mu_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ .

Из уравнения (5.16) следует, что суммарная скорость фаз  $v$  есть функция только времени:  $v = v(t)$ . Следуя условиям эксперимента, возьмем  $v = v_0 = \text{const}$ . С учетом (5.4) уравнение (5.16) записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi(s_1) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0, \quad (5.17)$$

где  $\varphi(s_1) = f_{11}(s_1) + \mu_0 f_{12}(s_1)$ .

Запишем систему уравнений для давления  $p$  и насыщенности  $s_1$  и  $s_2$  в виде (5.7), (5.15), (5.17), используя безразмерные переменные

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{t} = \frac{v_0 t}{m_1 L}, \quad \bar{p} = \frac{p}{p_0}, \quad \bar{q} = \frac{q L m_1}{m_2 v_0} \quad (\text{далее черточки опускаются}).$$

Получим

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = -q, \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi(s_1) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0, \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial s_2}{\partial t} = \frac{m_1}{m_2} q. \quad (5.20)$$

Начальные и граничные условия

$$t = 0; \quad 0 \leq x \leq 1; \quad s_1 = s_2 = s_0; \quad p = 1;$$

$$x = 0; \quad t > 0; \quad \frac{\partial p}{\partial x} = G = \text{const}; \quad s_1 = s_k; \quad (5.21)$$

$$x = 1; \quad t > 0; \quad p = 1.$$

Система дифференциальных уравнений (5.18) – (5.20) аппроксимируется на равномерной пространственно-временной сетке  $\omega_{\tau h} = \omega_h \times \omega_\tau$  следующими разностными уравнениями

$$\varphi_{\frac{i+1}{2}}^j \left( -p_{i+1}^{j+1} \right) - \varphi_{\frac{i-1}{2}} \left( p_i^{j+1} - p_{i-1}^{j+1} \right) = 0, \quad (5.22)$$

$$\frac{s_{1i}^{j+1} - s_{1i}^j}{l} + \frac{F_i^j - F_{i-1}^j}{h} = -q_i^j, \quad (5.23)$$

$$\frac{s_{2i}^{j+1} - s_{2i}^j}{l} = \frac{m_1}{m_2} q_i^j, \quad (5.24)$$

$$q_i^j = \frac{k_2 L m_1}{\mu_2 l^2 v_0 m_2} F(s_{2i}^j) f_{22}(s_{2i}^j) \Delta p_{ci}^j, \quad (5.25)$$

$$\begin{cases} \varphi_{i \pm \frac{1}{2}}^j = 2 \frac{\varphi_i^j \varphi_{i \pm 1}^j}{\varphi_i^j + \varphi_{i \pm 1}^j}, \\ \varphi_i^j = f_{11}(s_{1i}^j) + \mu_0 f_{21}(s_{1i}^j), \end{cases}$$

где  $l$  – временной шаг;

$h$  – шаг разностной сетки по координате  $x$ ;

$$\omega_h = \{x_i = ih; i = \overline{0, n}; h = 1/n\}; \quad \omega_\tau = \{t_j = jl; j = \overline{0, J}; \ell = T/J\}.$$

Разностная схема (5.22) – (5.25) устойчива при выполнении условия:  $l \leq \frac{h}{\max F'_s(s)}$ . На решении исходной задачи применяемая разностная схема имеет первый порядок аппроксимации как по  $h$ , так и по  $l$ .

Консервативная разностная схема (5.22) – (5.25) – явная по насыщенности и неявная по давлению [110]. Последовательность решения системы такова. По известной насыщенности  $s_1$  из (5.22) определяется давление  $p$  методом прогонки. Затем из (5.25) находим переток  $q$ , наконец, из уравнений (5.23), (5.24) находим новые насыщенности  $s_1$  и  $s_2$  и т.д.

Вид кривых ОФП, используемых в расчетах и представленных на рис. 5.6, определялся по экспериментальным данным [52].

Фазовые проницаемости воды и нефти представлены следующими зависимостями.

В системе крупных пор

$$f_{11} = 0,063 \left( \frac{s_1 - s_0}{s_k - s_0} \right)^{2,5},$$

$$f_{21} = \begin{cases} 0,503 \left( \frac{s_k - s_1}{s_k - s_0} \right)^{1,8}, & \text{если } \frac{\partial s_1}{\partial t} > 0, \\ 0,503 \left( \frac{s_{k1} - s_1}{s_{k1} - s_0} \right)^{1,8} + 0,015 \left( \frac{s_{k1} - s_1}{s_{k1} - s_0} \right)^{0,15}, & \text{если } \frac{\partial s_1}{\partial t} < 0, \end{cases}$$

где

$$\left. \begin{array}{l} s_0 = 0,366 \\ s_k = 0,689 \\ s_{k1} = s_0 + 0,2 \end{array} \right\}.$$

В блоках  $f_{12} = 0,063 \left( \frac{s_2 - s_0}{s_{k2} - s_0} \right)^{2,5}$ ,  $f_{22} = 0,615 \left( \frac{s_{k2} - s_2}{s_{k2} - s_0} \right)^{1,8}$ ,

где  $s_{k2} = 0,715$ .

$f_1(s)$ ,  $f_2(s)$

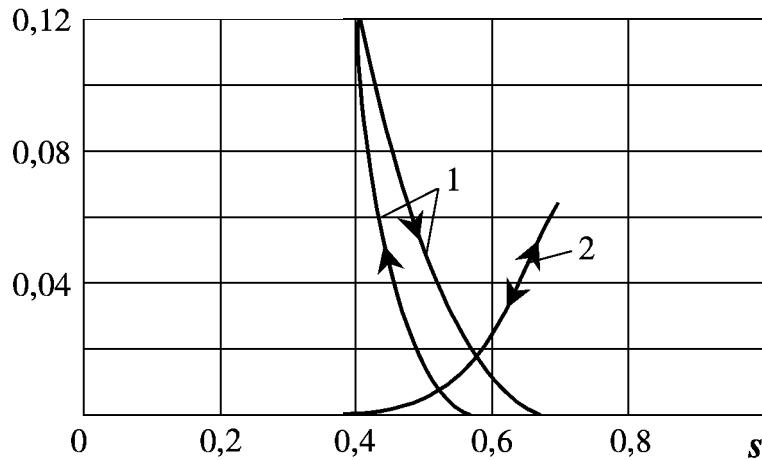


Рис. 5.6  
1 – ОФП нефти, 2 – ОФП воды

По данным [188] значения предельной водонасыщенности различны в низкопроницаемых ( $s_{k2}$ ) и высокопроницаемых участках ( $s_k$ ). В процессе дренирования и пропитки высокопроницаемой области также изменяется предельная водонасыщенность ( $s_k$  и  $s_{k1}$ ).

Численные расчеты проводились при следующих исходных данных:

$$\mu_1 = 0,5 \text{ мПа}\cdot\text{с}, \mu_2 = 5 \div 50 \text{ мПа}\cdot\text{с}, \frac{m_1}{m_2} = 0,1 \div 0,6, k_1 = 0,5 \text{ мкм}^2, k_2 = 0,01 \text{ мкм}^2, l = 1 \text{ м}, h = 1 \text{ м}, \sigma \cos \theta = 30 \text{ кН/м}, \alpha = 1.$$

Разность капиллярных давлений

$$\Delta p_c = 2\sigma \cos \theta \left( \sqrt{\frac{m_2}{k_2}} J(s_2) - \sqrt{\frac{m_1}{k_1}} J(s_1) \right).$$

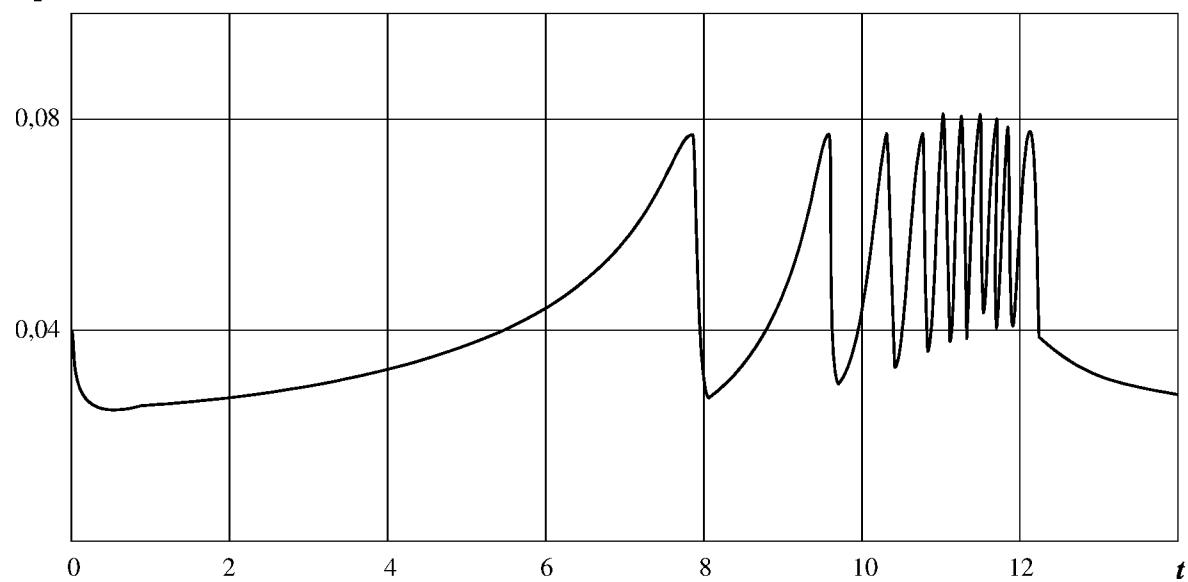
Здесь  $\sigma$  – межфазное натяжение,  $\theta$  – угол смачивания,  $J(s_1)$  и  $J(s_2)$  – функции Леверетта для областей с пористостями  $m_1$  и  $m_2$  соответственно. При численных расчетах учитывался гистерезис капиллярного давления:

$$J(s) = \begin{cases} \frac{0,1076562}{s} - 0,15625, & \text{если } \frac{\partial s}{\partial t} \geq 0, \\ 0,1 - 0,25(s - s_k), & \text{если } \frac{\partial s}{\partial t} < 0. \end{cases}$$

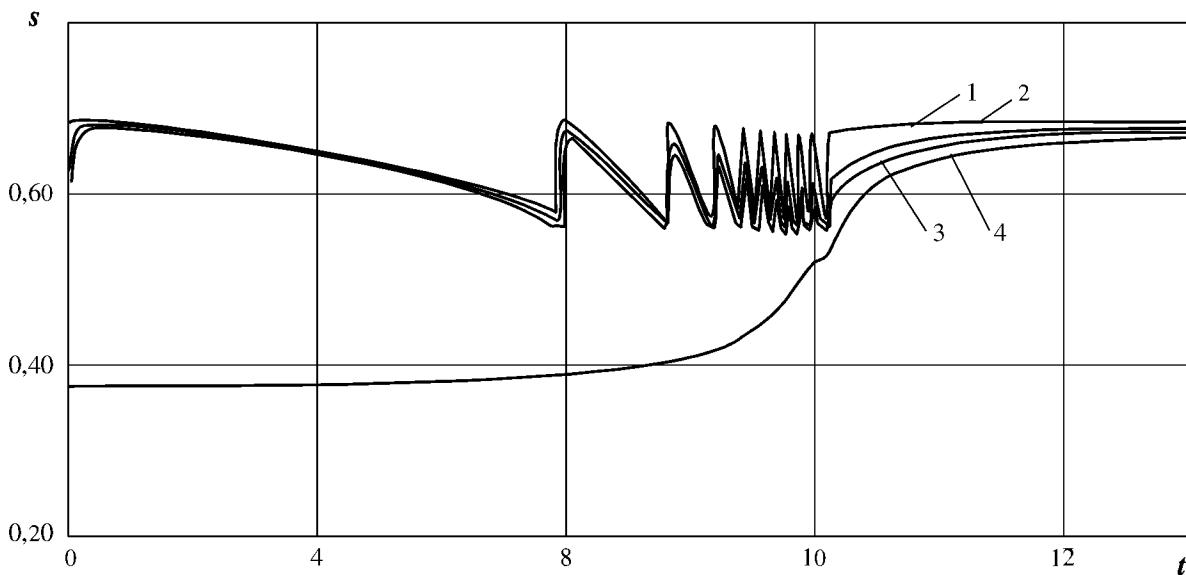
Численный анализ нелинейной модели показал, что неравновесность процессов двухфазной фильтрации в неоднородных средах может привести к потере устойчивости стационарных режимов течения и возникновению колебаний перепада давления  $\Delta p = \Delta p(t)$  и насыщенности  $s_1(t)$  от времени при постоянном расходе нагнетаемой жидкости. Характер колебаний близок к релаксационным.

Такое поведение функций  $\Delta p(t)$  и  $s_1(t)$  объясняется возникновением автоколебаний в исследуемой системе, вызванных совместным влиянием микронеоднородности, вязкостных и капиллярных сил на процесс нестационарной двухфазной фильтрации в средах с двойной пористостью.

На рис. 5.7 – 5.9 представлены графики изменения перепада давления, насыщенности  $s_1$  и безразмерной функции интенсивности перетока  $q$  от безразмерного времени  $\bar{t} = \frac{v_0 t}{(m_1 + m_2)L}$ . Расчеты проводились при различных отношениях вязкостей воды и нефти  $\mu_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ . Изменение величины  $\mu_0$  определяется изменением вязкости  $\mu_2$ .

$\Delta p$ , МПа**Рис. 5.7. Изменение перепада давления во времени**

$$\mu_0 = 0,1; \quad \frac{m_1}{m_2} = 0,1$$

**Рис. 5.8. Изменение насыщенности во времени в различных точках пласта**

1, 2, 3 – в высокопроницаемой области, соответственно в точках  
 $x = 0,01, x = 0,5, x = 1;$

$$4 – \text{в блоке}; \quad \mu_0 = 0,1; \quad \frac{m_1}{m_2} = 0,1$$

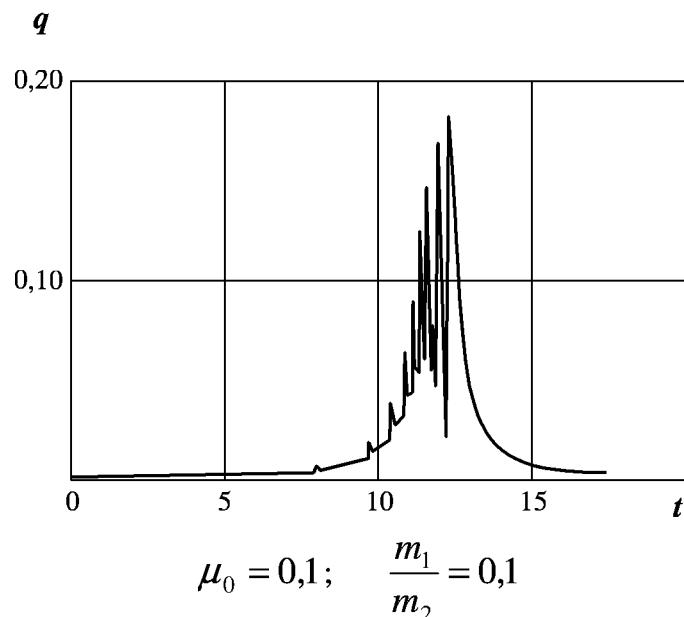


Рис. 5.9. Изменение интенсивности перетока во времени

Изменение насыщенности рассматривается в различных точках модели пласта: в системе крупных пор: у входа  $x = 0,01$ ;  $x = 0,5$  и на выходе  $x = 1$ . В системе мелких пор изменение водонасыщенности во времени описывается кривой 4. Значение  $\mu_0$  определяет время выхода на предельную водонасыщенность  $s_k$ . Уменьшение  $\mu_0$  увеличивает это время. В низкопроницаемой среде наблюдается резкое увеличение насыщенности вытесняющей фазой в период увеличения частоты колебаний. Можно сделать вывод о том, что колебания перепада давления и насыщенности в системе крупных пор интенсифицируют вытеснение нефти из малопроницаемых областей.

Гистерезис ОФП в неоднородной пористой среде приводит к периодическим изменениям перепада давления и насыщенности на контакте высокопроницаемых и низкопроницаемых объектов пласта.

Во время цикла повышения давления насыщенность в крупных порах уменьшается, вода входит в низкопроницаемые участки и вытесняет из них нефть, которая накапливается в крупных порах до определенного значения и затем вытесняется при цикле понижения давления. Насыщенность крупных пор в этот промежуток времени резко возрастает. Как показали расчеты, влияние отношения вязкостей незначительное.

Графики зависимости безразмерной функции перетока  $q$  от безразмерного времени имеют немонотонный характер. Увеличение  $\mu_0$  увеличивает максимальное значение величины  $q$ , что вполне объясняется видом функции  $q$  (рис. 5.9), поэтому процесс вытеснения происходит более интенсивно и за меньшее время.

Увеличение отношения  $\frac{m_1}{m_2}$ , т.е. уменьшение влияния микронеоднородности, приводит к сглаживанию колебаний и их полному исчезновению. Как и следовало ожидать, число колебаний изменяется соответственно изменению величины отношения  $\frac{m_1}{m_2}$ . Увеличение отношения  $\frac{m_1}{m_2}$

означает увеличение объема крупных пор, а следовательно, и объема прокачанной жидкости, необходимой для вытеснения нефти, содержащейся в мелких порах. Этим объясняется увеличение времени процесса вытеснения пропорционально увеличению отношения  $\frac{m_1}{m_2}$ . В принятой идеализированной модели бипористой среды релаксация описывается введением взаимопроникающих сред, обменивающихся друг с другом массой. Если объемы этих сред сопоставимы, т.е. отношение  $\frac{m_1}{m_2}$  близко к единице, эта модель не применима.

Увеличение  $s k_1$ , а следовательно, уменьшение гистерезиса фазовых проницаемостей, приводит к увеличению частоты и резкому уменьшению амплитуды колебаний.

Последнее указывает на то, что основной причиной обнаруженных колебаний является именно наличие гистерезисных явлений.

Нефть, вытесненная из микропор в промытые водой макропоры, вследствие гистерезиса не сразу приобретает подвижность, поэтому происходит обратное насыщение крупных пор нефтью до тех пор, пока фазовая проницаемость последней не станет отличной от нуля. После этого происходит относительно быстрый фильтрационный вынос нефти из крупных пор. При достижении критической насыщенности фазовая проницаемость нефти резко понижается и начинается повторное насыщение ею крупных каналов.

Такого рода колебания поддерживаются в системе до тех пор, пока запасы нефти в мелких порах не истощатся.

Рассмотренное выше прямое численное моделирование двухфазной фильтрации жидкости в бипористой среде может быть с успехом использовано для определения осредненных характеристик среды с двойной пористостью. Дело в том, что эти характеристики обычно определяются лабораторными исследованиями образцов довольно малых размеров, и перенос результатов этих экспериментов с учетом геометрического подобия на блок с характерным размером  $\sim 1$  м является условным. Кроме того, условия лабораторных исследований, когда образец окружен практически чистой водой, отличаются от условий, в которых находится пористый блок, окруженный трещинами, где течет смесь нефть–вода. Численный

эксперимент, осуществленный при помощи представленной выше модели, позволяет учесть эти особенности.

Предложенная математическая модель двухфазной фильтрации может быть использована при определении фильтрационных характеристик среды с двойной пористостью, в программах расчета технологических показателей и анализе разработки нефтяных месторождений.

Результаты численных расчетов могут быть использованы для объяснения наблюдаемых в практике нефтедобычи немонотонных изменений обводненности скважин.

Необходимо заметить, что колебания давления и расхода жидкости довольно часто отмечаются в лабораторной и промысловой практике, но в большинстве случаев их рассматривают только как досадные случайные помехи. Как видим, эти колебания на самом деле связаны с внутренними свойствами пластовых систем и могут служить источником весьма полезной информации о фильтрационно-емкостных характеристиках пласта.

---

## Глава 6. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕРАВНОВЕСНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

*Постижение истины невозможно без эмпирического фундамента, но чем глубже мы в нее проникаем и чем более широкими и всеобъемлющими становятся наши теории, тем меньше эмпирических знаний требуется для создания этих теорий.*

*A. Эйнштейн*

В данной главе предложена модель неравновесной фильтрации газированной жидкости вблизи давления насыщения в предположении немонотонной зависимости ОФП жидкой фазы от газонасыщенности. Показано, что в этом случае возможно нарушение устойчивости стационарных режимов и возникновение периодических и стохастических автоколебаний. Приведены результаты экспериментов, подтверждающих теоретические результаты. Решена задача притока газированной жидкости к скважине в режиме локального разгазирования с учетом неравновесного характера газовыделения и немонотонной зависимости ОФП жидкой фазы от газонасыщенности.

Движение нефти при давлениях ниже давления насыщения (фильтрация газированной жидкости) является классической проблемой, которая продолжает оставаться в центре вопросов подземной гидродинамики и теории которой посвящены работы многих ученых [126, 139, 148, 193].

Обычно изотермическая фильтрация газированной жидкости при давлении ниже давления насыщения рассматривается в рамках классической модели Маскета–Мереса [139], причем, согласно экспериментам Викова–Ботсета [300], относительные фазовые проницаемости (ОФП) для жидкости и газа считаются монотонными функциями насыщенности.

Однако в последние годы получены экспериментальные данные, находящиеся в противоречии со сложившимися представлениями о физике процесса [42, 132].

В работе [42] обнаружено аномальное увеличение расхода газированной жидкости в области давления насыщения, и уменьшение его при дальнейшем снижении уровня давления, что необъяснимо в рамках классического подхода. Авторы работы [42] объясняют этот эффект докритическим зародышеобразованием (накоплением в пористой среде и последующим выносом мельчайших газовых пузырьков), приводящим к уменьшению объемной вязкости газожидкостной смеси. Но это уменьшение составляет всего 10–15 %, тогда как расход возрастает в 2,5–3 раза [42].

Анализ диаграмм изменения газонасыщенности во времени, проведенный в [132], приводит к заключению о неоднородности потока. На общем фоне роста газонасыщенности по мере увеличения объема прокачки наблюдаются частые колебания ее в отдельных сечениях пласта.

Попытка объяснить аномальное увеличение расхода газированной жидкости в области давления насыщения в рамках схемы «газового подшипника» предпринята в [240]. Однако не рассмотрены условия устойчивости стационарных режимов и не учитывается тот факт, что механизм проскальзывания жидкости проявляется только в области давления насыщения [239], когда пористая среда занята в основном жидкостью с изолированными газовыми пузырьками (зародышами).

Исследование устойчивости движения газожидкостных систем в предпереходных условиях дано в работе [231]. Показано, что при определенных режимах движения возможно возникновение периодических и стохастических автоколебаний.

Экспериментально показано [239], что в микрокапиллярах, ввиду адсорбции газа, происходит ослабление сцепления жидкости с поверхностью капилляра и уже при толщине 0,15 нм адсорбционного слоя имеет место значительное проскальзывание жидкости, в результате чего относительная проницаемость для жидкой фазы ведет себя немонотонно. В связи с этим представляет существенный интерес дать качественную и, по возможности, количественную оценку влияния немонотонного изменения относительной фазовой проницаемости (ОФП) жидкой фазы на фильтрационные характеристики газированной жидкости.

В настоящей главе исследованы условия устойчивости стационарных режимов фильтрации газированной жидкости при давлении ниже давления насыщения в случае немонотонной зависимости ОФП жидкости от газонасыщенности. Показано, что в этом случае возможно возникновение периодических автоколебаний, усложнение которых приводит к детерминированному хаосу через возникновение и разрушение квазипериодических движений.

## **6.1. Уравнения неравновесной нестационарной фильтрации газированной жидкости**

Рассмотрим изотермическую нестационарную фильтрацию газированной жидкости, пользуясь представлениями теории фильтрации многокомпонентных систем [166, 193]. Для определенности рассматривается фильтрация нефти с растворенным газом. Пренебрегая растворимостью жидкости в газе, запишем уравнения неразрывности масс фаз и компонентов в плоском одномерном случае в виде:

$$\frac{\partial m \rho_1 s_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} m \rho_1 s_1 v_1 = -J_{12(2)}, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial m \rho_2 s_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} m \rho_2 s_2 v_2 = J_{12(2)}, \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial m \rho_1 g s_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} m \rho_1 g s_1 v_1 = -J_{12(2)}, \quad (6.3)$$

$$\sum_{i=1}^2 s_i = 1.$$

Приведенные уравнения выписаны для двух фаз (1 – жидккая, 2 – газовая) и двух компонент (1 – нефть, 2 – газ). Здесь  $s_i$ ,  $v_i$ ,  $\rho_i$  – насыщенность, истинная скорость движения и истинная плотность  $i$ -й фазы;  $g$  – массовая концентрация растворенного газа в нефтяной фазе;  $J_{ij(k)}$  – интенсивность переноса массы при разгазировании жидкости, отнесенная к единице объема пористой среды;  $t$  – время;  $x$  – пространственная переменная. Скорость движения  $i$ -й фазы определяется из закона Дарси:

$$m s_i v_i = -\frac{k f_i}{\mu_i} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (6.4)$$

где  $k$  – абсолютная проницаемость среды;  
 $p$  – давление;  
 $f_i$ ,  $\mu_i$  – относительная фазовая проницаемость и вязкость  $i$ -ой фазы.

Как правило, рассматривается равновесная модель фильтрации газированной жидкости, в рамках которой межфазный обмен описывается с помощью известной изотермы растворимости газа в жидкости. В частности, для фазовой концентрации обычно принимается изотерма растворимости Генри:  $g = g_e = \alpha p$ ,  $\alpha = \text{const}$ , где  $g_e(p)$  – равновесная фазовая концентрация.

Мы же предполагаем, что фазовые переходы имеют неравновесный характер. В этом случае, зависимость массовой концентрации растворенного газа от давления описывается неравновесной моделью вида:

$$\frac{dg}{dt} = -\frac{g - g_e(p)}{\tau}, \quad (6.5)$$

где  $\frac{dg}{dt}$  – субстанциональная производная,

$$\frac{d g}{d t} = \frac{\partial g}{\partial t} + v_1 \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Скорость  $v_1$  определяется из (6.4),  $\tau$  – время релаксации.

Уравнение (6.5) качественно согласуется с известными экспериментальными данными [17]. При очень малых темпах изменения давления в системе  $\left( \left| \frac{d g}{d t} \right| \ll \frac{g}{\tau} \right)$ , когда процесс близок к равновесному, можно положить:  $\frac{d g}{d t} \approx 0$  и уравнение (6.5) переходит в закон Генри. То же самое имеет место, когда  $\tau = 0$ , т.е. при отсутствии запаздывания выделения или растворения газа.

С целью упрощения анализа плотность нефти и вязкости фаз принимаем постоянными:  $\rho_1, \mu_1, \mu_2 = const$ . Такой выбор при решении модельной задачи вполне оправдан, т.к. вид этих функций не влияет на качественные закономерности фильтрации газированной жидкости [193]. Считая выделившийся газ идеальным, полагаем:

$$\rho_2 = \frac{\rho_{2s}}{p_s} p,$$

где  $\rho_{2s}$  – плотность газа в сечении начала газовыделения,  
 $p_s$  – давление насыщения.

Замыкающие соотношения для (6.1) – (6.5) зависят от фазового состояния двухкомпонентной системы. Если  $p > p_s$ , система находится в однофазном состоянии, и тогда  $s_2 = 0, J_{12(2)} = 0$ . При  $p \leq p_s$  образуется область локального разгазирования, в которой происходит двухфазная фильтрация.

Начальные и граничные условия:

$$t = 0, x > 0, p = p_0, g = g_e^0 = const;$$

$$t > 0, x = 0, p = p_0 > p_s, s_2 = s = 0; \quad (6.6)$$

$$t > 0, \quad x = L, \quad p = p_k < p_s.$$

Система уравнений (6.1) – (6.6) описывает фильтрацию газожидкостной смеси в модели пористой среды длиной  $L$ , на входе которой поддерживается давление  $p_0$  выше давления насыщения, а на выходе давление  $p_k$  – ниже давления насыщения.

Для замыкания системы уравнений (6.1) – (6.6) необходимо задание зависимостей коэффициентов ОФП  $f_i$  от газонасыщенности  $s_2$ . Из анализа экспериментальных исследований [42, 239] следует, что эффект "проскальзывания" жидкости определяет немонотонный характер изменения относительной проницаемости для жидкой фазы.

В [240] зависимости для относительной проницаемости жидкой фазы были получены по схеме «газового подшипника», согласно которой, в зоне начала газовыделения газовая фаза в основном образуется в слое, прилегающем к стенке порового канала пористой среды. В зоне контакта жидкости с твердой поверхностью поровых каналов реализуются наиболее благоприятные условия (из-за наличия источников зародышеобразования) для выделения растворенного в жидкости газа. В результате образования на поверхности капилляров зародышей газа пристенный слой жидкости, насыщенный зародышами газа, обладает меньшей вязкостью, чем центральный, в результате чего реализуется течение с проскальзыванием. Полученное в [240] выражение для относительной проницаемости жидкой фазы зависит от вязкости жидкости, что определяет и соответствующую зависимость значения расхода жидкости в точке максимума, что не согласуется с экспериментом [42]. В зависимости от величины  $\mu_0 = \frac{\mu_2}{\mu_1}$  макси-

мум относительной проницаемости нефтяной фазы соответствует значениям газонасыщенности более 50 %. Но, как показывают эксперименты и расчеты [193], такие значения газонасыщенности соответствуют снижению давления на выходе из пористой среды до  $0,5p_s$  и более. При такой газонасыщенности пузырьки газа интенсифицируют разгазирование жидкости в соседних участках пор, что способствует возникновению сплошных газонасыщенных каналов. Подпитка газом из окружающей жидкости обеспечивает их устойчивость относительно капиллярной дисперсии или, по крайней мере, быстрое восстановление связности. Это приводит к увеличению фильтрационного сопротивления для жидкой фазы и соответствующему снижению ее расхода.

Таким образом, выражение для ОФП жидкости в [240] недостаточно согласуется с данными экспериментов [42]. Из них следует, что максимум этой функции должен соответствовать значениям газонасыщенности,

меньших некоторой критической насыщенности  $s_*$ , характеризующей насыщенность связанного газа. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что функция фазовой проницаемости жидкой фазы имеет вид, представленный на рис. 6.1. Здесь нужно иметь в виду, что в качестве относительной проницаемости принята величина:

$$f_i = \frac{k_i}{k_{i0}},$$

где  $k_{i0}$  – проницаемость, замеренная по фазе  $i$ , когда она целиком заполняет поровый объем,  
 $k_i$  – фазовая проницаемость.

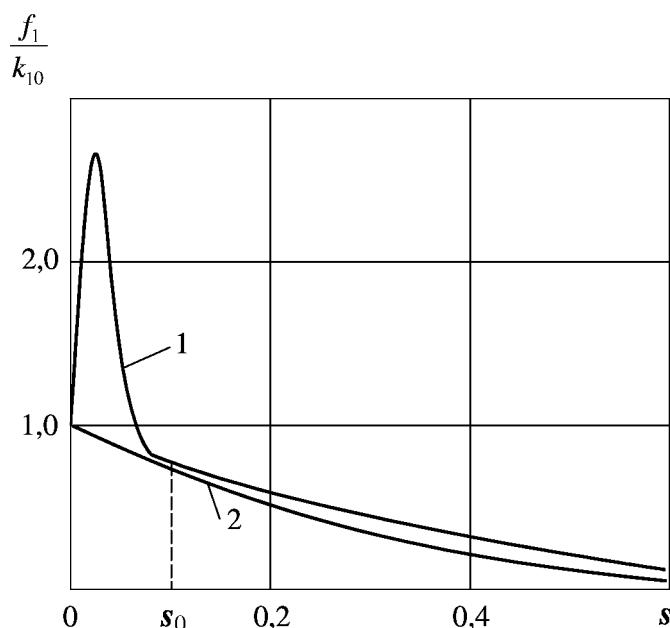


Рис. 6.1  
Относительные фазовые проницаемости  
1 – расчетная; 2 – по Викому–Ботсету [300]

Экспериментальные исследования фильтрации газированной жидкости в модели пористой среды [145, 231] показывают, что при достижении некоторого критического перепада давления стационарные режимы фильтрации теряют устойчивость, наблюдаются незатухающие колебания расхода фильтрующейся жидкости во времени. Поэтому был проведен анализ устойчивости стационарных режимов фильтрации газированной

жидкости с учетом немонотонной функции фазовой проницаемости жидкой фазы.

## 6.2. Линейный анализ устойчивости стационарных режимов\*

Перейдем к безразмерным переменным:

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{p}{p_s}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_0}, \quad t_0 = \frac{\mu_1 L^2 m}{k p_s}, \quad \mu_0 = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \bar{\rho}_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\rho_{2s}}{\rho_1} \frac{p}{p_s} = \rho_0 \bar{p}, \\ \bar{\tau} &= \frac{\tau}{t_0}, \quad g_e = \frac{g_s}{p_s} p = g_s \bar{p}, \quad g_s = \rho_0. \end{aligned}$$

В дальнейшем черточки опускаются.

Стационарные решения  $p^0(x)$ ,  $s^0(x)$ ,  $g^0(x)$  определяются из решения систем уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (1-g) f_1(s) \frac{\partial p}{\partial x} \right] &= 0; & \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( g f_1 + f_2 \frac{\rho_2}{\mu_0} \right) \frac{\partial p}{\partial x} \right] &= 0; \\ \frac{f_1}{1-s} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{g(p) - g_s p}{\tau} \end{aligned}$$

с соответствующими краевыми условиями. Стационарные решения при фильтрации газированной нефти исследованы в [99]. Функции  $p^0(x)$ ,  $s^0(x)$ ,  $g^0(x)$  являются пространственно неоднородными, т.е. не константы. Линеаризуем исходные уравнения (6.1) – (6.3) на стационарном решении, положив:  $s \approx s^0 + s'$ ,  $p \approx p^0 + p'$ ,  $g \approx g^0 + g'$ , где  $s'$ ,  $p'$ ,  $g'$  – малые возмущения. Для них записываются линеаризованные уравнения, которые имеют следующую структуру:

$$\partial_t \begin{pmatrix} s' \\ p' \\ g' \end{pmatrix} + A(x) \begin{pmatrix} s' \\ p' \\ g' \end{pmatrix} + B(x) \partial_x \begin{pmatrix} s' \\ p' \\ g' \end{pmatrix} + C(x) \partial_x^2 \begin{pmatrix} 0 \\ p' \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \quad (6.7)$$

---

\* Приведены результаты, полученные совместно с Л.А. Калякиным.

Здесь  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $C(x)$  – матрицы, элементы которых вычисляются при стационарных решениях  $p^0(x)$ ,  $s^0(x)$ ,  $g^0(x)$ .

Далее исследуются длинноволновые решения этой системы с использованием идей метода Бубнова–Галеркина в упрощенном варианте [185].

Решения и коэффициенты системы (3.1) разлагаются в ряд Фурье:

$$\begin{pmatrix} s' \\ p' \\ g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0 \\ p_0 \\ g_0 \end{pmatrix}(t) + \sum_{k \neq 0} e^{2\pi i k x} \begin{pmatrix} s_k \\ p_k \\ g_k \end{pmatrix}(t);$$

$$A, B, C = A_0, B_0, C_0 + \sum_{k \neq 0} e^{2\pi i k x} A_k, B_k, C_k.$$

Подставляя указанные разложения в исходную систему (6.7), получаем бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов ряда Фурье. Из соображений сходимости ряда Фурье ( $s_k, p_k, g_k \rightarrow 0$  при  $|k| \rightarrow \infty$ ) можно рассмотреть ограниченную систему ОДУ. Крайнее упрощение этой системы состоит в отбрасывании всех гармоник, кроме нулевых. Такой подход соответствует решениям, медленно меняющимся по  $x$ , т.е. длинноволновым возмущениям. В результате получаем систему уравнений:

$$d_t \begin{pmatrix} s_0 \\ p_0 \\ g_0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} s_0 \\ p_0 \\ g_o \end{pmatrix}, \quad (6.8)$$

где элементы матрицы вычисляются как средние от стационарного состояния:

$$a_{11} = \int_0^1 \left( \frac{g_s p^0 - g^0}{(1-g^0)\tau} - f_1''(s^0) s_x^0 p_x^0 - f_1'(s^0) p_{xx}^0 \right) dx,$$

$$a_{12} = - \int_0^1 \frac{(1-s^0) g_s}{(1-g^0)\tau} dx,$$

$$a_{13} = \int_0^1 \left( \frac{1-s^0}{(1-g^0)\tau} + \frac{1}{1-g^0} f_1(s^0) p_{xx}^0 + \frac{1}{1-g^0} f_1'(s^0) s_x^0 p_x^0 \right) dx,$$

$$a_{21} = \int_0^1 \left( \frac{p^0}{s^0} f_1''(s^0) s_x^0 p_x^0 + \frac{\left( p^0 - \frac{1}{\rho_0} \right)}{s^0 (1-g^0) \tau} (g^0 - g_s p^0) + \frac{p^0}{s^0} f_1'(s^0) p_{xx}^0 + \right. \\ \left. + \frac{p^0}{\mu_0 s^0} f_2''(s^0) s_x^0 p_x^0 + \frac{p^0}{\mu_0 s^0} f_2'(s^0) p_{xx}^0 + \frac{f_2'(s^0)}{\mu_0 s^0} (p_x^0)^2 \right) dx ,$$

$$a_{22} = \int_0^1 \left( \frac{g_s \left( p^0 - \frac{1}{\rho_0} \right) (1-s^0) + (1-s^0) (g^0 - g_s p^0)}{s^0 (1-g^0) \tau} + \frac{f_1'(s^0)}{s^0} s_x^0 p_x^0 + \right. \\ \left. + \frac{f_1(s^0)}{s^0} p_{xx}^0 + \frac{f_2'(s^0)}{\mu_0 s^0} s_x^0 p_x^0 + \frac{f_2(s^0)}{\mu_0 s^0} p_{xx}^0 \right) dx ,$$

$$a_{23} = - \int_0^1 \left( \frac{\left( p^0 - \frac{1}{\rho_0} \right) (1-s^0)}{s^0 (1-g^0) \tau} + \frac{p^0 f_1'(s^0)}{(1-g^0) s^0} s_x^0 p_x^0 + \frac{p^0 f_1(s^0)}{(1-g^0) s^0} p_{xx}^0 + \right. \\ \left. + \frac{1}{\mu_0 s^0 (1-g^0)} \left( p^0 f_2'(s^0) s_x^0 p_x^0 + f_2(s^0) (p_x^0)^2 + p^0 f_2(s^0) p_{xx}^0 \right) \right) dx ,$$

$$a_{31} = \int_0^1 \left( \frac{f_1^0}{1-s^0} p_x^0 g_x^0 + \frac{g^0 - g_s p^0}{\tau} \right) dx ,$$

$$a_{32} = \frac{g_s}{\tau} ; \quad a_{33} = -\frac{1}{\tau} .$$

Решение системы (6.8) ищем в виде:

$$\begin{pmatrix} s_0 \\ p_0 \\ g_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \exp(\lambda t) ,$$

где характеристические числа  $\lambda$  определяются из уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (6.9)$$

Численные исследования уравнения (6.9) проводились при  $p_0 = 1,25 p_s$ ,  $p_s = 10$  МПа для значений параметров в интервале  $p_k = 0,5 \div 0,9 p_s$ ,  $\mu_0 = 0,001 \div 0,01$ ,  $\tau = 0,001 \div 1$ . Анализ показал, что алгебраическое уравнение (6.10) всегда имеет три действительных корня. Число нулей в правой полуплоскости определяется значениями параметров:  $\Delta p = p_s - p_k$ ,  $\mu_0 \tau$ . При  $\Delta p$  не более 0,5 МПа и  $\tau$  не более 0,001 линейная система всегда асимптотически устойчива при любом  $\tau$ . Однако в рассматриваемом нами диапазоне изменения параметра  $\Delta p$  линейная задача оказывается всегда неустойчивой. Дело в том, что при этих условиях уравнение (6.10) имеет хотя бы один положительный корень. Более того, при увеличении значений параметров  $\Delta p$  и  $\tau$  наблюдается рост всех корней с переходом их через нуль, т.е. рост инкремента неустойчивости. Характер неустойчивости изменяется от типа «седло–узел»  $(+,-,-)$ ,  $(+,+,-)$  к типу «неустойчивый узел»  $(+,+,+)$ .

Такой вывод справедлив и для полной линеаризованной системы (6.8), по крайней мере для решений с достаточно малыми Фурье-амплитудами  $s_k$ ,  $p_k$ ,  $g_k$  ( $k \neq 0$ ). Неустойчивость линейного приближения свидетельствует о неустойчивости рассматриваемого положения равновесия  $s^0$ ,  $p^0$ ,  $g^0(x)$ . В такой ситуации возможно возникновение автоколебаний и их усложнение при изменении значений параметров.

При расчетах с функцией относительной фазовой проницаемости нефти, предложенной в [240], все действительные корни уравнения (6.10) отрицательны (устойчивый узел), колебания в линейной системе отсутствуют. Этот результат подтверждается расчетами, приведенными в [240].

Однако, аналитический анализ полных уравнений (6.1) – (6.3) затруднен из-за их сложности. Поэтому дальше ограничимся результатами численных расчетов.

### 6.3. Численное решение линейной задачи

Исключив из уравнений (6.1) – (6.3) интенсивность газовыделения  $I_{12(2)}$  и обозначив  $s = s_2$ ,  $s_1 = 1 - s$ , получим два уравнения, которые в безразмерных переменных будут иметь вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}[(1-s)(1-g)] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ (1-g)f_1(s) \frac{\partial p}{\partial x} \right], \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[g(1-s) + \rho_2 s] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( g f_1(s) + f_2(s) \frac{\rho_2}{\mu_0} \right) \frac{\partial p}{\partial x} \right]. \quad (6.11)$$

Уравнение (5.5) для фазовой концентрации запишется как:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{f_1(s)}{1-s} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{g - g_s p}{\tau}. \quad (6.12)$$

Для численного решения система уравнений (6.10), (6.11) преобразуется. Суммируя (6.10) и (6.11), получаем уравнение для счета давления

$$\Phi_1 \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \Phi_2 \frac{\partial p}{\partial x} + \Phi_3 \frac{\partial s}{\partial x}, \quad (6.13)$$

где  $\Phi_1 = \rho_0 s$ ,

$$\Phi_2 = f_1(s) + \frac{\rho_0 p}{\mu_0} f_2(s),$$

$$\Phi_3 = 1 - \rho_0 p.$$

Для расчета насыщенности можно использовать уравнение (6.10). Фазовая концентрация определяется из (6.12).

В области, где давление выше давления насыщения, решается уравнение пьезопроводности:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \bar{\chi}, \quad \bar{\chi} = \frac{\chi \mu_1 m}{k p_s}. \quad (6.14)$$

В дальнейшем черточки опускаются.

Соответствующим образом обезразмериваются начальные и граничные условия:

$$t = 0, \quad x > 0, \quad p = p_0, \quad g = g_e^0 = g_s p_s,$$

$$t > 0, \quad x = 0, \quad p = p_0 > p_s, \quad s_2 = s = 0,$$

$$t > 0, \quad x = 1, \quad p = p_k < p_s.$$

Для численного решения задачи перейдем к конечно-разностной аппроксимации уравнений. В области  $0 \leq x \leq 1, 0, 0 \leq t < T$  вводится разностная сетка  $(x_i, t^n)$ . Здесь  $x_i = ih, t^0 = 0, t^{n+1} = t^n + l$ , где  $h$  и  $l$  – шаги по пространственной и временной переменным соответственно.

Коэффициенты относятся к полуцелым узлам  $x_{i\pm 0,5}$ . Здесь используется явная по насыщенности и неявная по давлению полностью консервативная конечно-разностная схема для уравнений двухфазной фильтрации.

Уравнение (6.12) аппроксимируется специальной разностной схемой [87], учитывающей наличие малого параметра  $\tau$ .

Перепишем уравнение (6.12) в виде:

$$\tau \frac{\partial g}{\partial t} + g = g_s p + \tau \frac{f_1(s)}{1-s} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Тогда разностная аппроксимация этого уравнения с погрешностью  $O(h, l)$  запишется следующим образом:

$$\lambda(\rho)\tau \frac{g_i^{n+1} - g_i^n}{l} + g_i^{n+1} = g_s p_i^n + \tau \frac{f_1(s_i^n)}{1-s_i^n} \frac{p_i^n - p_{i-1}^n}{h} \frac{g_i^n - g_{i-1}^n}{h}, \quad (6.15)$$

$$\rho = \frac{1}{\tau}, \quad \lambda(\rho) = \frac{\rho \exp(-\rho)}{1 - \exp(-\rho)}, \quad g_i^0 = g_s p_i^0.$$

Уравнение (6.13) относительно давления  $p$  решалось по неявной четырехточечной схеме методом прогонки. Коэффициент  $\Phi_2$  вычисляется в промежуточных точках, что дает аппроксимацию второго порядка.

$$\begin{aligned} \Phi_{1i}^n \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{l} &= \frac{1}{h} \left( \Phi_{\frac{2i+1}{2}}^n \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{h} - \Phi_{\frac{2i-1}{2}}^n \frac{p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{h} \right) + \\ &\quad + \Phi_{3i}^n \frac{s_i^n - s_i^{n-1}}{l}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{1i}^n &= \rho_0 s_i^n, \quad \Phi_{3i}^n = 1 - \rho_0 p_i^n, \quad \Phi_{2i}^n = f_1(s_i^n) + \frac{\rho_0 p_i^n}{\mu_0} f_2(s_i^n), \\ \Phi_{\frac{2i+1}{2}}^n &= \frac{1}{2} (\Phi_{2i}^n + \Phi_{2i\pm 1}^n). \end{aligned}$$

Из уравнения (6.10) с учетом вычисленных значений давления  $p_i^{n+1}$  определяются значения насыщенности:

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{l} = \frac{1}{h} \left[ \Phi_{4i+\frac{1}{2}}^n \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{h} - \Phi_{4i-\frac{1}{2}}^n \frac{p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{h} \right],$$

$$\Phi_{4i}^n = (1 - g_i^n) f_1(s_i^n), \quad \Phi_{4i \pm \frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (\Phi_{4i}^n + \Phi_{4i \pm 1}^n), \quad C_i^n = (1 - s_i^n)(1 - g_i^{n+1}).$$

Как уже отмечалось в предыдущем разделе, задача в рассматриваемой постановке является задачей типа Стефана, в данной главе для решения этой задачи применялась схема сквозного счета, обоснование которой дается в работе [208]. Рассмотренные выше аппроксимации записаны во внутренних точках областей фильтрации.

Схематично алгоритм сквозного счета можно записать следующим образом. Пусть  $u(x, t)$  – искомая функция. Тогда для любого внутреннего узла  $(x_i, t^n)$ ,  $i \neq 0, I1, i \neq i_{n+1}^*, i \neq i_{n+1}^* + 1$ , записываем обычное неявное 4-х точечное разностное уравнение:

$$c u_t - \lambda u_{xx} = f, \quad i = 1, I1 - 1, \quad i \neq i_{n+1}^*, \quad i_{n+1}^* + 1,$$

$$c = \begin{cases} c_1, & i = 1, i_{n+1}^* - 1 \\ c_2, & i = i_{n+1}^* + 2, I1 - 1 \end{cases},$$

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_1, & i = 1, i_{n+1}^* - 1 \\ \lambda_2, & i = i_{n+1}^* + 2, I1 - 1 \end{cases},$$

$$f = \begin{cases} f_1, & i = 1, i_{n+1}^* - 1 \\ f_2, & i = i_{n+1}^* + 2, I1 - 1 \end{cases}.$$

В узлах, прилегающих к фронту  $\xi^{n+1}$ , записываем:

$$i = i_{n+1}^*,$$

$$c_1 u_t - \lambda_1 u_{x\bar{x}} + \frac{\xi^{n+1} \frac{d\xi}{dt} (1 - \delta_{n+1})}{h} = f_1,$$

$$i = i_{n+1}^* + 1,$$

$$c_2 u_t - (\lambda_2 u_x - \lambda_1 u_{\bar{x}}) + \frac{\xi^{n+1} \frac{d\xi}{dt} \delta_{n+1}}{h} = f_2.$$

Здесь  $\delta_{n+1} = \xi^{n+1} - i_{n+1}^* h$ ,  $0 \leq \delta_{n+1} \leq 1$ .

Использованы безиндексные обозначения:

$$u_t = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{l},$$

$$u_x = \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h},$$

$$u_{\bar{x}} = \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{h}.$$

В задачах типа Стефана положение фронта  $x = \xi(t)$  является искомым. Здесь используется условие

$$p|_{x=\xi(t)-0} = p|_{x=\xi(t)+0} = p_s, \quad 0 < t < T.$$

Определение фронта  $x = \xi(t)$  заключается в решении уравнения  $p(\xi, t^{n+1}) = p_s$  с помощью линейной интерполяции по  $x$ .

Алгоритм определения фронта  $x = \xi(t)$  подробно рассмотрен в разделе 4.

Для анализа особенностей процесса фильтрации газированной жидкости при давлении ниже давления насыщения были проведены многовариантные численные расчеты поля давления и насыщенности при изменении значений гидродинамических параметров фаз в следующих пределах:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 0,001 \div 0,01; \quad \tau = 0,01 \div 1; \quad p_k = 0,5 \div 0,9 p_s; \quad \mu_2 = 0,01 \text{ мПа}\cdot\text{с}; \quad g_s = 0,11; \\ \rho_1 &= 700 \text{ кг}/\text{м}^3; \quad \rho_2 = 68 \text{ кг}/\text{м}^3; \quad L = 1 \text{ м}; \quad k = 0,00095 \text{ мкм}^2; \quad m = 0,2. \end{aligned}$$

Относительная фазовая проницаемость нефти задавалась в модельном виде

$$f_1(s) = \left( 1 + M \left( \frac{s}{s_0} \right)^m \left( \exp \left( -\beta \left( \left| \frac{s}{s_0} - 1 \right|^{\gamma} \right) - \frac{1}{300(2s + 10s_0)} \right) \right) \right), \quad (6.17)$$

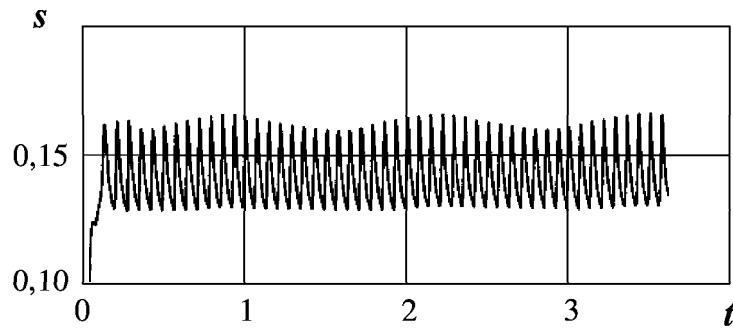
где  $M, m, \beta, \gamma, s_0 - const.$

Здесь  $M = 5; m = 1,5; \beta = 0,5; \gamma = 1,5; s_0 = 0,015.$

Параметры относительной проницаемости жидкой фазы подбираются таким образом, чтобы максимум функции соответствовал значениям газонасыщенности  $s$ , при которых весь выделившийся газ адсорбируется на стенках пор. Выделяющийся газ приобретает подвижность, образуя связанную фазу, при средней газонасыщенности  $s = s_* \approx 0,1$ , поэтому ОФП жидкой фазы уменьшается до значений, меньших  $k_{10}$ .

Шаг по времени  $l$  и шаг по координате  $h$  выбирались из условия устойчивости разностной схемы так, чтобы их уменьшение в 2 и более раза не изменяло количественную и качественную картину расчетов. Исследование решения на различных пространственных сетках показало, что устойчивость и достаточная точность расчетов обеспечивается при  $h$  не более 0,01 и  $l$  не более 0,0000025.

Расчеты показали, что в области фильтрации газированной нефти возникают периодические во времени изменения давления и насыщенности. Область устойчивости определяется двумя параметрами:  $\mu_0$  и перепадом давления  $\Delta p = p_s - p_k$ . При  $\mu_0$  не менее 0,01 движение устойчиво до величины перепада  $\Delta p_{kp} = 0,5$  МПа. С уменьшением  $\mu_0$  до 0,001 критическое значение  $\Delta p_{kp}$  увеличивается до 1 МПа. Если  $0,001 < \mu_0 < 0,01$  и  $\Delta p > \Delta p_{kp}$  возникает периодический автоколебательный режим, который устойчив в указанном интервале значений параметра  $\mu_0$ . Рост величины  $\tau$  при постоянном перепаде давления уменьшает среднюю газонасыщенность. С увеличением перепада давления при фиксированном значении  $\tau$  увеличивается частота и амплитуда колебаний, среднее значение газонасыщенности. При  $\mu_0 \leq 0,001$  увеличение перепада  $\Delta p$  до 3 МПа приводит к потере устойчивости предельного цикла. По мере роста  $\Delta p$  и времени релаксации  $\tau$  возникают квазипериодические движения, рис. 6.2.



**Рис. 6.2. Зависимость газонасыщенности на выходе модели от времени**

$$\mu_0 = 0,01; \tau = 0,01; p_s - p_k = 5 \text{ МПа}$$

Расчеты показали, что при уменьшении величины  $\mu_0$  средние значения газонасыщенности также уменьшаются при тех же перепадах давления. Для сравнения, при  $\mu_0 = 0,01; \Delta p = 5 \text{ МПа}$  средняя газонасыщенность составляет 0,2, а при  $\mu_0 = 0,001$  и том же перепаде давления средняя газонасыщенность равна 0,14.

Это означает, что уменьшение  $\mu_0$  или увеличение вязкости нефти снижает интенсивность газовыделения.

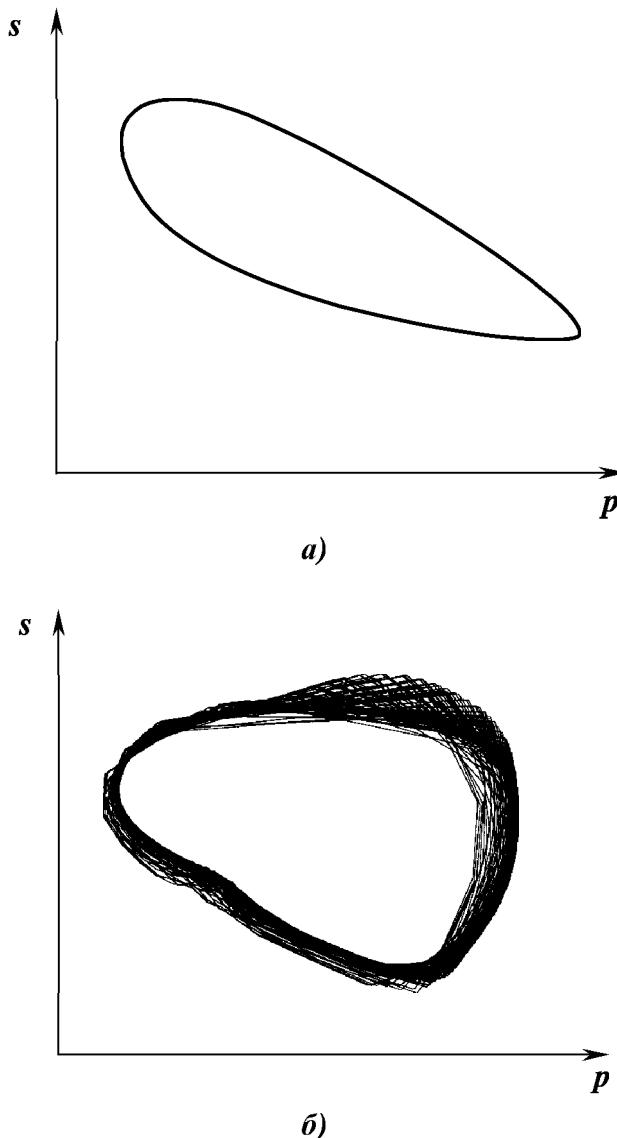
Увеличение времени релаксации при неизменных значениях  $\mu_0$  и  $\Delta p$  также приводит к снижению средней газонасыщенности на выходе.

При дальнейшем увеличении  $\tau$  квазипериодические колебания разрушаются и становятся хаотическими ( $\tau_{kp} = 1$ ). Численными исследованиями обнаружено, что переход к хаосу в рассматриваемой системе происходит путем разрушения квазипериодического движения.

Эволюция аттрактора на фазовой плоскости  $(p \ s)$  от предельного цикла до странного аттрактора показана на рис. 6.3, а, б.

Для подтверждения результатов для зависимости  $s(t)$  при  $\Delta p = 5 \text{ МПа}, \mu_0 = 0,001, \tau = 1$  были вычислены характеристики нерегулярно-колебательного процесса: корреляционная размерность и энтропия Колмогорова. Корреляционная размерность вычислялась по методике Паккарда-Такенса (см. раздел 1.2.4). Оценка снизу для энтропии Колмогорова вычислялась по формуле

$$K = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{c_m(\varepsilon)}{c_{m+1}(\varepsilon)} \right).$$



**Рис. 6.3. Усложнение решений системы уравнений (6.1-6.6)  
при изменении параметров**

а –  $\Delta p = 3$  МПа;  $\tau = 0,01$ ;  $\mu_0 = 0,01$

б –  $\Delta p = 5$  МПа;  $\tau = 1$ ;  $\mu_0 = 0,001$

Зависимости корреляционной функции  $C(\varepsilon)$  от  $\varepsilon$  (длина ячейки в фазовом пространстве) при различных размерностях  $m$  пространства вложения и корреляционной размерности  $\nu$  как функции размерности пространства вложения приведены на рис. 6.4.

Расчеты показали, что в данном случае  $K = 0,14$ . Значит, энтропия Колмогорова положительна. Это говорит о том, что колебательный процесс является хаотическим. Из рис. 6.4, б видно, что при  $m = 5$  величина корреляционной размерности  $\nu$  выходит на стационарный уровень

$\nu \approx 2,2$ . Это означает, что колебательный процесс для газонасыщенности  $s(t)$  является детерминированным хаосом, т.е. определяется внутренней структурой газожидкостной системы. Минимальное число переменных, необходимых для моделирования процесса неравновесного разгазирования нефти, равно трем.

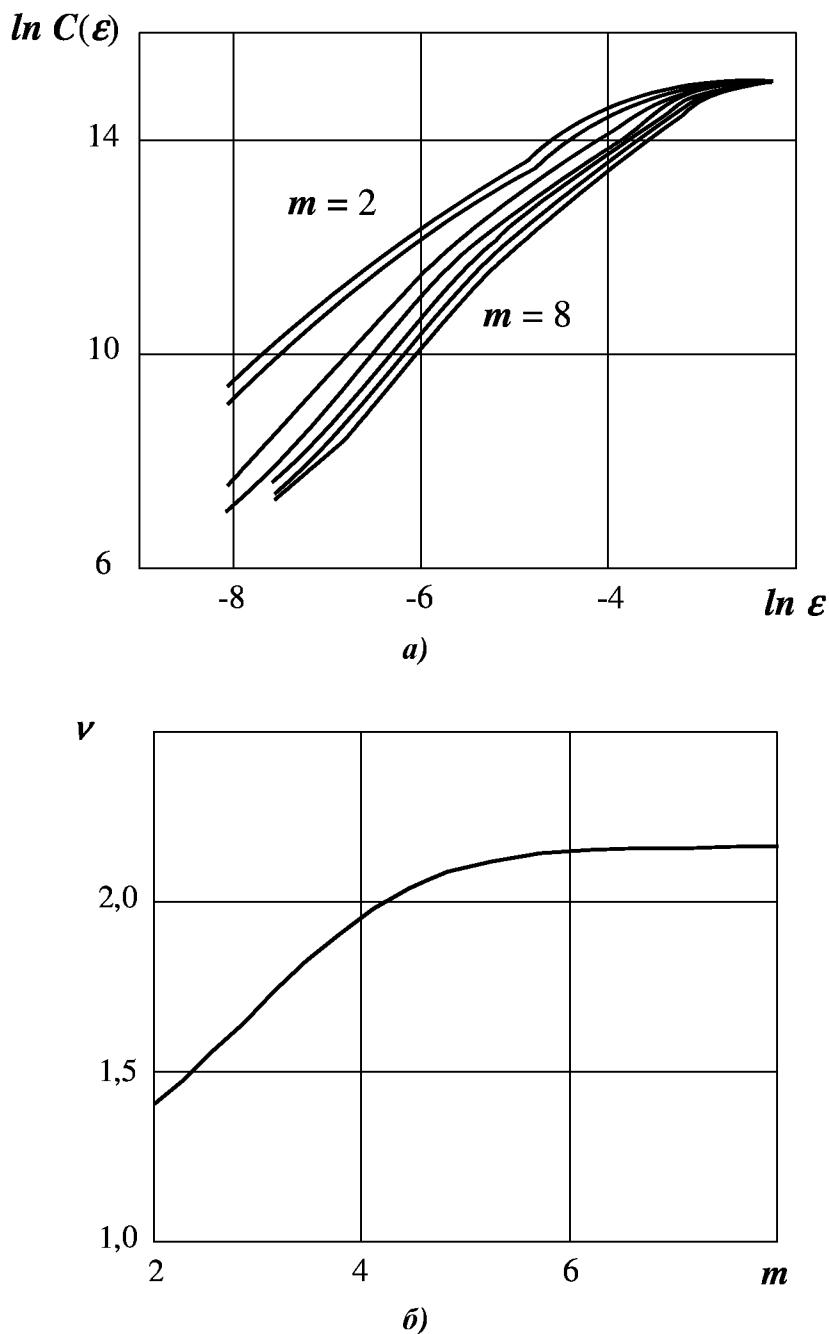
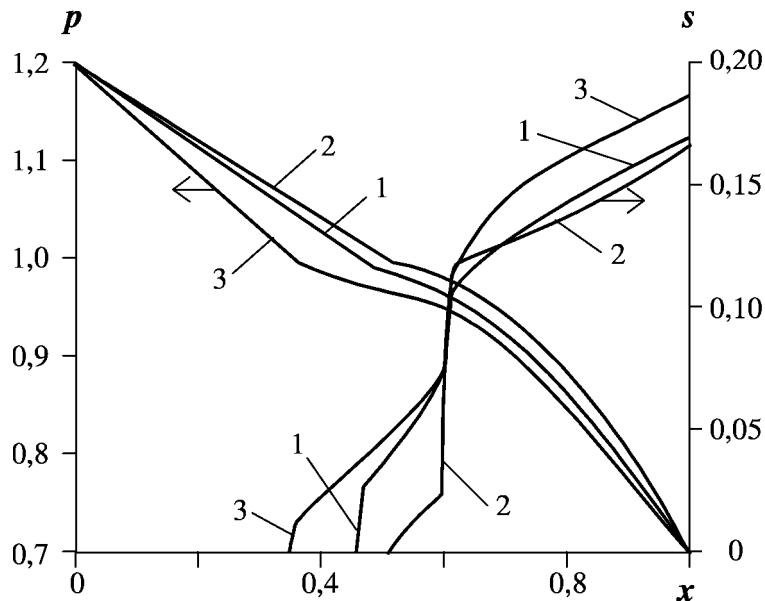


Рис. 6.4. Определение фрактальной размерности

На рис. 6.5 приведены распределения насыщенности газа  $s$  и давления  $p$  по длине модели пористой среды для времен:  $t = 1,2; 2,4; 3,6$  (кривые 1-3),  $p_k = 7$  МПа,  $\mu_0 = 0,01$ ,  $\tau = 0,01$ . В распределении насыщенности наблюдаются два «скачка». Первый соответствует значениям насыщенности ниже равновесной  $s_*$ , когда выделившийся газ неподвижен. Второй скачок соответствует значениям  $s \approx s_*$ , при которой выделившийся газ приобретает подвижность. Периодические колебания давления и насыщенности вызывают соответствующие изменения размеров области разгазирования, поэтому в районе фронта фазового перехода (при  $p = p_s$ ) образуется область неподвижной газовой фазы, которая и определяет немонотонные изменения фазовой проницаемости жидкой фазы, что в конечном счете и приводит к неустойчивым режимам фильтрации.

Резкое («скаккообразное») снижение давления на выходе модели приводит к интенсивному выделению газа. После накопления газа до равновесного значения и выше начинается движение газовой фазы и формирование области резкого изменения насыщенности (скакка насыщенности). После выделения из нефти количества газа и начала движения газовой фазы увеличивается фильтрационное сопротивление движению нефти. Давление несколько возрастает.



**Рис. 6.5. Распределение давления и насыщенности по длине модели в различные моменты времени**  
 $\Delta p = 3$  МПа;  $\mu_0 = 0,01$ ;  $\tau = 0,01$

Изобара, соответствующая давлению насыщения, смещается к выходу, и область разгазирования уменьшается.

На рис. 6.6 представлены результаты расчетов зависимости расхода жидкости  $Q$  от перепада давления  $\Delta p = p_0 - p_k$  применительно к экспериментальным данным, полученным в работе [42]. В пористой среде с проницаемостью  $35 \cdot 10^{-15} \text{ м}^2$ , представленной смесью кварцевого песка со средним размером частиц  $10^{-4} \text{ м}$  и монтмориллонита, размещаемой в термостатируемой медной трубке длиной  $L = 6 \text{ м}$  и диаметром  $D = 10^{-2} \text{ м}$ , исследовалась фильтрация растворов углекислого газа при давлениях, близких к давлению насыщения. На рис. 6.9 данные эксперимента представлены точками. Начальное давление в образце пористой среды  $p_0 = 10 \text{ МПа}$ . Давление насыщения  $p_s = 3,2 \text{ МПа}$ . Расход жидкости  $Q$  рассчитывался по формуле:

$$Q = \frac{k}{\mu_l} A \frac{h_0 - h_k}{L},$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения трубы;

$$h_0 - h_k = \int_{p_k}^{p_0} f_1 [\tilde{s}(p)] dp,$$

$\tilde{s}$  – осредненная по времени газонасыщенность.

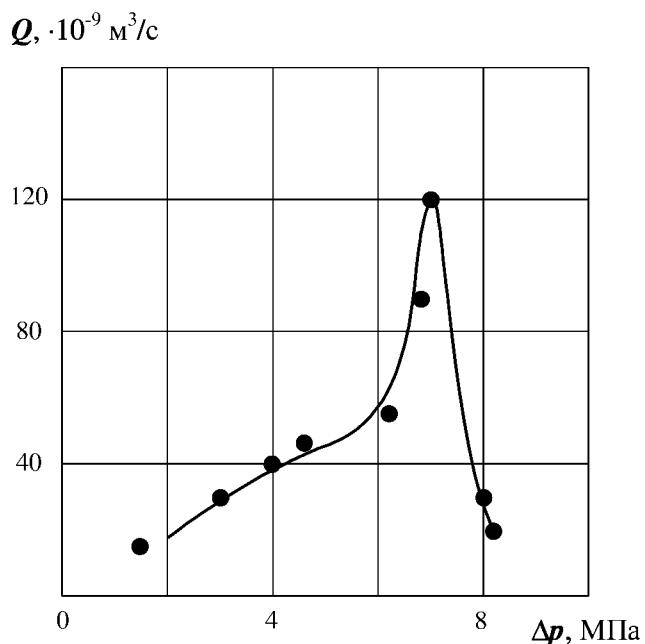


Рис. 6.6. Зависимость расхода жидкости от перепада давления  
— численный расчет; ● — эксперимент

При давлениях  $p_s$ , значительно превышающих давление насыщения,  $f_1(s) = 1$  и удельный расход жидкости пропорционален перепаду давления в соответствии с законом Дарси. При снижении давления на выходе образца пористой среды  $p_k$  до давления насыщения приводит к возрастанию расхода более чем в 2,5 раза. Активное выделение газа при давлении  $p_k < p_s$  вызывает быстрое снижение расхода вследствие резкого уменьшения проницаемости пористой среды для двухфазной системы «газ–жидкость».

Это приводит к тому, что в области выделения газа из раствора реализуется большая газонасыщенность и происходит нарушение сжимаемости жидкой фазы.

Удовлетворительное качественное и количественное описание экспериментальных данных получено путем соответствующего подбора параметров функции ОФП нефти по формуле (6.17). Оказалось, что в данном конкретном случае фазовая проницаемость по нефти в присутствии неподвижного газа увеличивается более чем в 8 раз и становится равной 0 уже при газонасыщенности порядка 20 % (рис. 6.7). Это и вызывает такое резкое уменьшение расхода жидкости.

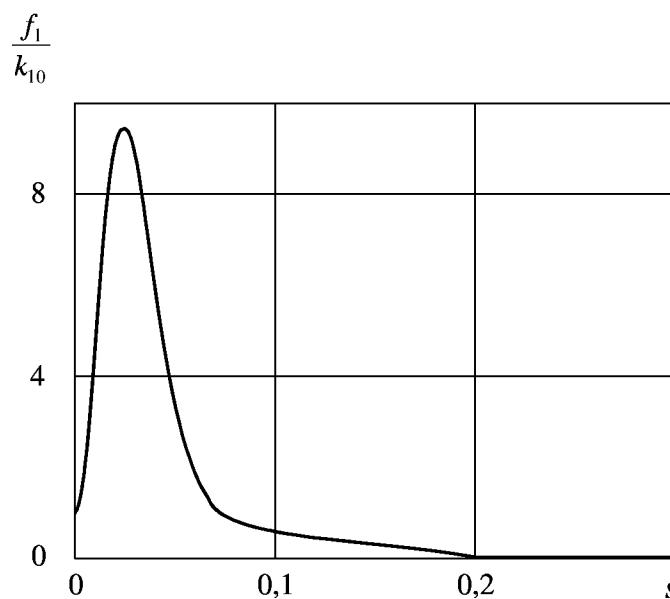


Рис. 6.7. ОФП нефти,  
восстановленная  
по данным эксперимента [42]

## 6.4. Решение задачи о нестационарном притоке газированной жидкости к скважине в режиме локального разгазирования

Решение радиальной задачи о притоке газированной жидкости к скважине в замкнутом круговом пласте имеет большое значение при проектировании разработки нефтяных месторождений с режимом растворенного газа.

При снижении забойного давления ниже давления насыщения в пласте образуются локальные зоны разгазирования нефти. С изменением забойного или пластового давлений меняются размеры этих зон, степень насыщенности их газом, физические свойства фильтрующихся жидкостей.

Изменение газонасыщенности, в свою очередь, приводит к изменению фазовых проницаемостей для нефти и газа.

Как было показано в предыдущем разделе, при снижении давления ниже давления насыщения проявляется механизм проскальзывания жидкости относительно твердой поверхности порового канала, что приводит к немонотонному изменению относительной фазовой проницаемости нефти. Все это влияет на дебиты скважины. Поэтому изучение закономерностей изменения дебита скважин с изменением забойного давления при проявлении механизма проскальзывания представляет определенный практический и теоретический интерес.

Сформулируем постановку задачи.

Рассматривается ограниченный круговой пласт однородный по проницаемости и толщине, заполненный вначале нефтью с растворенным в ней газом при давлении  $p_0$  выше давления насыщения  $p_s$ . Скважина, расположенная в центре залежи, начинает работать с постоянным дебитом нефти, достаточно большим для того, чтобы забойное давление  $p_c$  упало ниже давления насыщения.

Тогда, в области, для которой давление  $p < p_s$ , совместная фильтрация нефти и газа, с учетом растворимости газа в нефтяной фазе, сжимаемости фаз описывается системой уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_1 m(1-s)) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho_1 m(1-s) u_1) = -I_{12(2)} , \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho_1 s) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho_2 m s u_2) = I_{12(2)} , \quad (6.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_1 mg(1-s)) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho_1 mg(1-s) u_1) = -I_{12(2)} . \quad (6.20)$$

Здесь обозначения общепринятые.

Скорость движения  $u_i$ ,  $i$ -й фазы определяется из закона Дарси:

$$ms_i u_i = -\frac{k f_i}{\mu_i} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (6.21)$$

Как уже отмечалось, изменение давления существенно влияет на выделение и растворение газа в нефти. При фильтрации газированной жидкости имеет место запаздывание за счет межфазного обмена. Неравновесные термодинамические условия имеют место и при фильтрации газированной жидкости в пласте. Если на больших расстояниях от скважины выделение газа из нефти можно считать равновесным, то в призабойной зоне фазовые превращения будут протекать в существенно неравновесных условиях. Неучет этого фактора может привести к значительным ошибкам в определении дебитов скважин, параметров пласта и газонефтяных систем.

Так как фильтрация происходит в условиях нарушения термодинамического равновесия, то для зависимости массовой концентрации растворенного газа  $g(p)$  от времени можно использовать соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= -\frac{g - g_e(p)}{\tau}, \\ \frac{d g}{d t} &= \frac{\partial g}{\partial t} + u_1 \frac{\partial g}{\partial r}. \end{aligned}$$

Скорость движения  $u_1$  определяется из (6.21), равновесная концентрация  $g_e(p) = \alpha p$ .

Фазовые проницаемости задаются в виде (6.17).

В качестве начальных условий задаются постоянные значения начального пластового давления и начальной нефтенасыщенности. В качестве граничных условий задаются постоянные значения забойного давления  $p_c < p_s$  на эксплуатационной скважине и давление на контуре питания  $p_k > p_s$ , которое равно первоначальному, т.е. граничные условия соответствуют режиму локального разгазирования.

В процессе фильтрации образуется подвижный фронт  $\varepsilon(t)$ , на котором происходит выделение газа из нефти. На границе раздела зон  $\varepsilon(t)$  выполняется баланс масс и условие непрерывности давления.

В области, где давление выше давления насыщения, решается уравнение пьезопроводности:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right).$$

После обезразмеривания и перехода к логарифмическим координатам (аналогично, как и в разделе 6.2) задача решается численно на основе консервативной конечно-разностной схемы сквозного счета, алгоритм которой рассмотрен в разделе 6.3.

Численные расчеты проводились для двух вариантов пластового давления  $p_0 = 20$  МПа и  $p_0 = 12$  МПа при давлении насыщения  $p_s = 10$  МПа. Первый вариант характерен для месторождений Юганского бассейна, а второй – для Самотлора. Забойные давления в обоих случаях принимались равными 9,5 МПа; 7,5 МПа и 5,5 МПа.

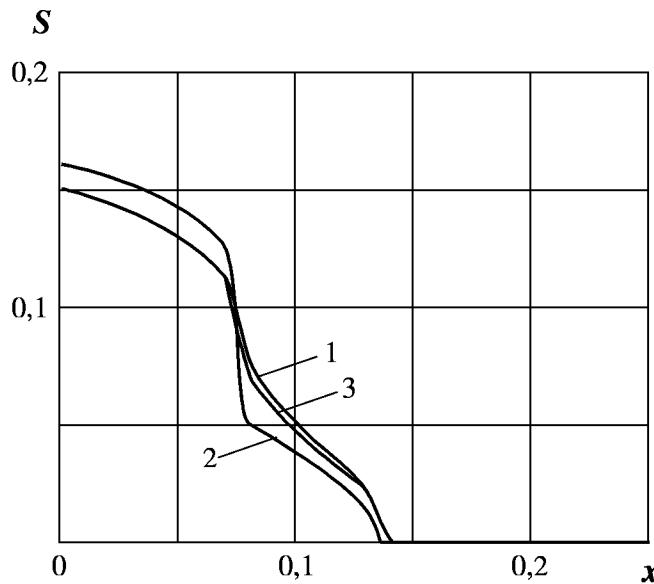
После пуска скважины в работу с забойным давлением  $p_c$  ниже давления насыщения  $p_s$  в пласте вокруг забоя скважины образуется две газонасыщенные зоны. В одной из них, ближайшей к скважине, газонасыщенность выше равновесной и газ движется, вдали от скважины в кольцевой зоне насыщенность газом изменяется от равновесного значения до нуля и движется только нефть. На рис. 6.8 показано распределение газонасыщенности по длине пласта при контурных давлениях  $p_k = 20$  МПа,  $p_k = 12$  МПа и забойном давлении  $p_c = 8,5$  МПа в различные моменты времени. Координата  $x$  определяется выражением

$$x = \frac{\ln \frac{r}{r_c}}{\ln \frac{R_k}{r_c}}.$$

Характер изменения газонасыщенности аналогичен соответствующему изменению в линейной модели. Как и в линейной модели, наблюдаются колебания поля давления и насыщенности в области разгазирования. В результате этого кольцевая область неподвижного газа все время сохраняется. Равновесного газонасыщения достичь не удается, поэтому устанавлившийся режим фильтрации, строго говоря, невозможен, рис. 6.8.

Колебания во времени насыщенности и давления вызывают соответствующие колебания дебита скважины. Характер колебаний определяется соотношением между пластовым давлением и давлением насыщения. При достаточно большой разнице между давлением насыщения и пластовым

давлением ( $p_s = 10$  МПа,  $p_k = 20$  МПа) область разгазирования получается небольшой ( $x \approx 0,15$ ), почти в 3 раза меньшей, чем при небольшой разнице  $p_s$  и  $p_k$  ( $p_s = 10$  МПа,  $p_k = 12$  МПа).



**Рис. 6.8. Изменение газонасыщенности по длине пласта при**  
 $p_k = 20$  МПа;  $p_s = 10$  МПа;  $p_c = 8,5$  МПа  
**в различные моменты времени**  
(безразмерные единицы)  
1 –  $t = 15$ ; 2 –  $t = 30$ ; 3 –  $t = 45$

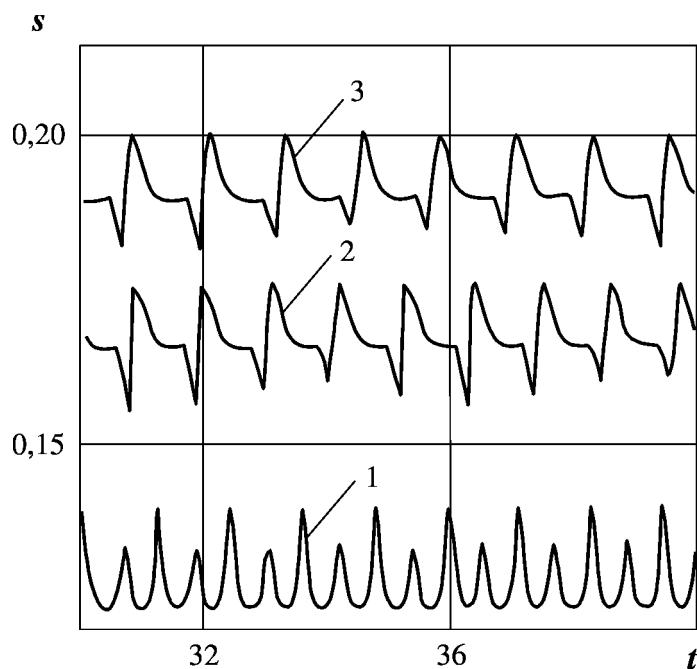
При пластовом давлении, близком к давлению насыщения, область разгазирования оказывается значительной. Соответственно увеличивается область насыщения газа. Перераспределение газонасыщенности вдали от скважины происходит очень медленно. Наличие перепада давления  $\Delta p = p_s - p_c$  при неизменном контурном давлении также увеличивает область разгазирования, что приводит к увеличению периода колебаний. При уменьшении забойного давления  $p_c$  увеличивается период колебаний  $T$ : от  $T = 20$  при  $p_c = 9,5$  МПа до  $T = 70$  при  $p_c = 5,5$  МПа. Среднее значение дебита  $Q_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T Q(t) dt$  увеличивается с уменьшением  $p_c$ .

В этом случае область разгазирования уменьшается, градиенты давления в призабойной зоне увеличиваются. Это, в свою очередь, изменяет характер колебаний дебита. Чем меньше разность давлений  $p_s - p_c$ , тем меньше время установления автоколебательного режима, тем меньше

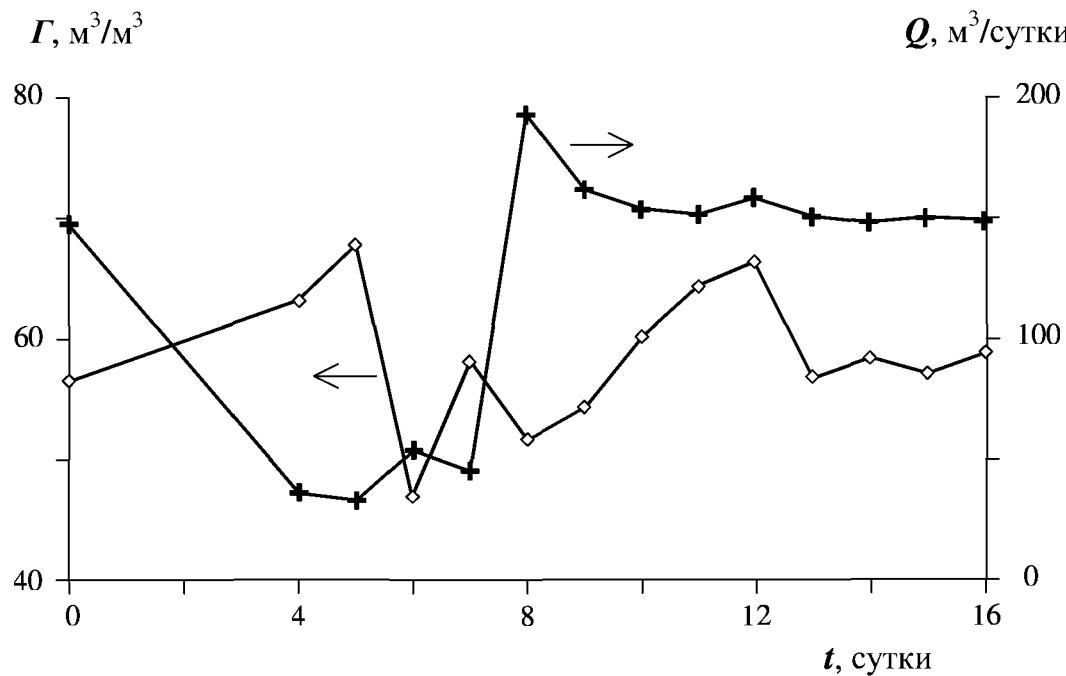
период колебаний. Период колебаний изменяется от  $T \approx 0,6$  при  $p_c = 9,5$  МПа до  $T = 1,25$  при  $p_c = 5,5$  МПа. Характер изменения колебаний газонасыщенности на выходе из пласта показан на рис. 6.9.

Из вышеуказанного следует, что «эффект проскальзывания» жидкой фазы, выражющийся в немонотонной зависимости ОФП нефти от газонасыщенности приводит к возникновению автоколебаний поля давлений, насыщенности и дебита эксплуатационной скважины, характер которых определяется близостью пластового давления к давлению насыщения. Эти результаты согласуются с данными промысловых исследований. На рис. 6.10 приведены результаты исследования скважин при давлениях ниже давления насыщения в режиме локального разгазирования, приведенные в [160, 227].

Таким образом, предложенная феноменологическая модель фильтрации газированной жидкости качественно объясняет результаты экспериментов и натурных исследований фильтрации нефти при локальном разгазировании залежи и может быть использована в гидродинамических расчетах процессов нефтедобычи при давлениях ниже давления насыщения.



**Рис. 6.9. Изменение газонасыщенности на забое  
эксплуатационной скважины при  $p_k = 20,0$  МПа**  
1 –  $p_c = 9,5$  МПа; 2 –  $p_c = 7,5$  МПа; 3 –  $p_c = 5,5$  МПа



**Рис. 6.10. Изменение газового фактора  $\Gamma$  и дебита нефти  $Q$  скважин месторождения Узень (скв. 1248)**

$$p_k = 11,2 \text{ МПа}; \quad p_s = 9,6 \text{ МПа}; \quad p_c = 6,6 \text{ МПа}$$

---

## Глава 7

# ПРОЦЕССЫ САМООРГАНИЗАЦИИ В НЕНЬЮТОНОВСКИХ СИСТЕМАХ

*Max оструумно пояснял, что ни одна теория не является правильной, но также едва ли является совершенно ошибочной. Скорее всего, всякая теория должна постоянно совершенствоваться, как организмы по теории Дарвина.*

*Л. Больцман*

В настоящее время в нефтяной промышленности активно развивается новое перспективное направление – реотехнология, которая представляет совокупность методов и способов управления технологическими процессами с учетом реофизических особенностей систем нефтегазодобычи [12, 14, 214]. В основе этого направления лежит идея о возможности использования процессов самоорганизации в реофизически сложных средах для образования пространственно-временных структур с заранее определенными свойствами.

В этой главе рассмотрены некоторые нелинейные эффекты, которые могут быть использованы при создании реотехнологий неньютоновских систем. В частности, исследованы диссипативные структуры и хаотические колебания, возникающие при движении тиксотропных и реопектических жидкостей.

Реология таких сред определяется процессами разрушения и восстановления структуры, которые можно схематично представить как прямую и обратную химические реакции, суммарное действие которых описывается некоторым кинетическим уравнением относительно концентрации разрушенных (или восстановленных) связей (см. главу 3). Предполагается, что коэффициенты этого уравнения (константы скоростей разрушения и восстановления структуры) зависят от скорости деформаций. В рамках такого структурно-кинетического подхода удалось объяснить многие особенности стационарных реологических характеристик неньютоновских жидкостей, а также описать процессы релаксации к стационарным состояниям [35, 68, 202-204, 229]. При этом использовались, как правило, линейные относительно концентрации связей уравнения.

Нами процессы разрушения-восстановления структуры неньютоновских сред описываются при помощи нелинейных кинетических моделей, что открывает возможности для предсказания и описания существенно нестационарных течений.

В заключительной части главы рассматриваются процессы самоорганизации, имеющие место при фильтрации сложных сред.

## 7.1. Периодические и стохастические автоколебания в ротационных вискозиметрах\*

Опыт реологии тиксотропных сред показывает, что в ряде случаев экспериментальное определение их реологических параметров затрудняется невозможностью поддержания стационарных режимов течения. Так, при постоянном числе оборотов двигателя вискозиметра величина измеряемого касательного напряжения может меняться во времени достаточно сложным образом. Качественное описание этого эффекта приведено в [35]. Аналогичные осложнения возможны и в случае капиллярного вискозиметра, что, в частности, подтверждается опытами по исследованию колебательных режимов истечения полимерных растворов из капилляра [229]. Это явление в научной литературе получило название эластичной турбулентности. Для его объяснения привлекалась гипотеза проскальзывания жидкости у стенок вискозиметра или капилляра [46]. Высказывалось также предположение о том, что причиной возникновения эластичной турбулентности являются происходящие в процессе течения структурные перестройки [290].

Рассмотрим математическую модель, описывающую движение тиксотропной жидкости в зазоре между цилиндрами ротационного вискозиметра. Считая толщину зазора малой по сравнению с радиусами цилиндров, примем плоскую схему течения, согласно которой исследуемая жидкость находится между двумя параллельными пластинами, отстоящими друг от друга на расстоянии  $h$ .

Нижняя бесконечно протяженная пластина неподвижна, а верхняя – подвижная – обладает достаточно большой площадью, чтобы можно было бы пренебречь краевыми эффектами. Верхняя пластина приводится в поступательное движение с помощью пружины, один конец которой прикреплен к пластине, а другой движется с постоянной скоростью  $v_0$ .

Сдвиговое течение жидкости между пластинами описывается уравнением

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad 0 < y < h, \quad (7.1)$$

где  $v$ ,  $\rho$ ,  $\mu$  – соответственно скорость, плотность и вязкость жидкости,  $y$  – расстояние от нижней пластины.

---

\* Приведены результаты, полученные одним из авторов совместно с И.Ш. Ахатовым и И.Г. Хусаиновым.

Уравнение движения верхней пластины имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} - Q\mu \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{y=h} + f x = 0, \quad (7.2)$$

где  $x$  – абсолютное удлинение пружины,  
 $f$  – коэффициент ее жесткости,  
 $m, Q$  – масса и площадь верхней пластины.

Система уравнений (7.1), (7.2) замыкается с помощью граничных условий вида

$$v(0, t) = 0, \quad v(h, t) = v_0 - \frac{dx}{dt}. \quad (7.3)$$

Вязкость тиксотропной жидкости зависит от степени ее структурированности. В качестве количественной характеристики степени структурированности жидкости будем использовать концентрацию разрушенных в процессе течения связей  $s$ . Зависимость вязкости жидкости от концентрации  $s$  примем в виде

$$\mu(s) = \frac{\exp(-\sigma s^\beta) - \exp(-\sigma s_*^\beta)}{1 - \exp(-\sigma s_*^\beta)} \mu_0 + \frac{1 - \exp(-\sigma s^\beta)}{1 - \exp(-\sigma s_*^\beta)} \mu_*, \quad (7.4)$$

где  $\sigma, \beta$  – некоторые положительные постоянные.

В соответствии с этой параметризацией при  $s = 0$  вязкость жидкости максимальна и равна  $\mu_0$ . По мере разрушения связей (с увеличением  $s$ ) вязкость уменьшается по нелинейно-экспоненциальному закону, достигая своего минимального значения  $\mu_*$  при  $s = s_*$ .

Для описания процессов разрушения-восстановления связей между структурными элементами среды при сдвиговом течении введем следующее кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\alpha \{s - s_* [1 - \exp(-\gamma s \mu(s) \dot{\epsilon}^2)]\}, \quad (7.5)$$

где  $\alpha$  и  $\gamma$  – положительные постоянные,

$\dot{\epsilon} = \frac{\partial v}{\partial y}$  – скорость сдвига.

В соответствии с (7.5), равновесные значения концентрации разрушенных связей определяются уравнением

$$s = s_* [1 - \exp(-\gamma s \mu(s) \dot{\epsilon}^2)].$$

Легко видеть, что с увеличением  $\dot{\epsilon}$  ненулевой корень этого уравнения увеличивается, приближаясь к своему максимальному значению  $s_*$ . Разложение правой части уравнения (7.5) в ряд

$$s_* [1 - \exp(-\gamma s \mu(s) \dot{\epsilon}^2)] \approx s_* \gamma s \mu(s) \dot{\epsilon}^2$$

показывает, что при малых значениях скорости сдвига скорость разрушения связей прямо пропорциональна интенсивности вязкой диссипации энергии в потоке.

Система уравнений (7.1) – (7.5) после введения безразмерных переменных

$$V = \frac{v}{v_0}, \quad \tau = \alpha t, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad X = \frac{\alpha x}{v_0}, \quad S = \frac{s}{\sqrt[\beta]{\sigma}}, \quad v(S) = \mu(S) \frac{1 - \exp(-\sigma s_*^\beta)}{\mu_0 - \mu_*}$$

приобретает вид

$$\varepsilon \frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( v(S) \frac{\partial V}{\partial \eta} \right), \quad (7.6)$$

$$\varepsilon = \rho \alpha h^2 \frac{1 - \exp(-\sigma s_*^\beta)}{\mu_0 - \mu_*};$$

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} - \lambda v(S) \frac{\partial V}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} + F X = 0 \quad (7.7)$$

$$V(0, \tau) = 0, \quad V(1, \tau) = 1 - \frac{dX}{d\tau}, \quad (7.8)$$

$$v(S) = p + \exp(-S^\beta), \quad (7.9)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = -S + A \left\{ 1 - \exp \left( -GSv(S) \left( \frac{\partial V}{\partial \eta} \right)^2 \right) \right\}, \quad (7.10)$$

$$\lambda = \frac{Q}{m\alpha h} \left[ \frac{\mu_0 - \mu_*}{1 - \exp(-A^\beta)} \right], \quad F = \frac{f}{m\alpha^2},$$

$$p = \frac{\mu_* - \mu_0 \exp(-A^\beta)}{\mu_0 - \mu_*}, \quad A = S_* \sqrt[\beta]{\sigma},$$

$$G = \frac{\gamma}{\sqrt[\beta]{\sigma}} \cdot \frac{v_0^2}{h^2} \cdot \frac{\mu_0 - \mu_*}{1 - \exp(-A^\beta)}.$$

Приведенная постановка задачи может быть упрощена с учетом малости параметра  $\epsilon$  (т.е. фактически малости массы жидкости в зазоре). Пренебрегая в (7.6) членом  $\epsilon \frac{\partial V}{\partial \tau}$ , получим

$$v(S) \frac{\partial V}{\partial \eta} = \text{const}.$$

Решение этого уравнения неединственно. Оно может быть сконструировано как совокупность пространственных структур – «доменов», представляющих собой области с различными значениями концентрации  $S_i$  и скорости сдвига  $\left( \frac{\partial V}{\partial \eta} \right)_i$  (концентрация и скорость сдвига внутри каждого «домена» не зависят от  $\eta$ ) [203, 204]. При этом граничное условие (7.8) выполняется, если

$$\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial V}{\partial \eta} \right)_i H_i = 1 - \frac{dX}{d\tau}, \quad \sum_{i=1}^N H_i = 1,$$

где  $N$  – число «доменов»,  
 $H_i$  – толщина  $i$ -го домена.

Тогда система уравнений в частных производных (7.6) – (7.10) сводится к нелинейной динамической системе вида

$$\frac{d^2 X}{dt^2} - \lambda B + FX = 0, \quad B = \frac{1 - \frac{dX}{d\tau}}{\sum_{i=1}^N \frac{H_i}{v(S_i)}}, \quad (7.11)$$

$$\frac{dS_i}{d\tau} = -S_i + A \left[ 1 - \exp \left( \frac{-GS_i B^2}{v(S_i)} \right) \right], \quad (7.12)$$

$$v(S_i) = p + \exp(-S_i^\beta). \quad (7.13)$$

Исследование этой системы было проведено нами численно при следующих значениях параметров:  $N = 2$ ,  $\lambda = 25$ ,  $F = 17$ ,  $A = 4$ ,  $p = 0,1$ ,  $H_1 = H_2 = 0,5$ ,  $\beta = 10$ . Рассматривалось влияние величины безразмерной скорости сдвига  $\dot{E} = \sqrt{G}$  на характер движения системы.

Результаты расчетов суммированы на рис. 7.1, где показана зависимость безразмерного касательного напряжения  $T$  от  $\dot{E}$ .

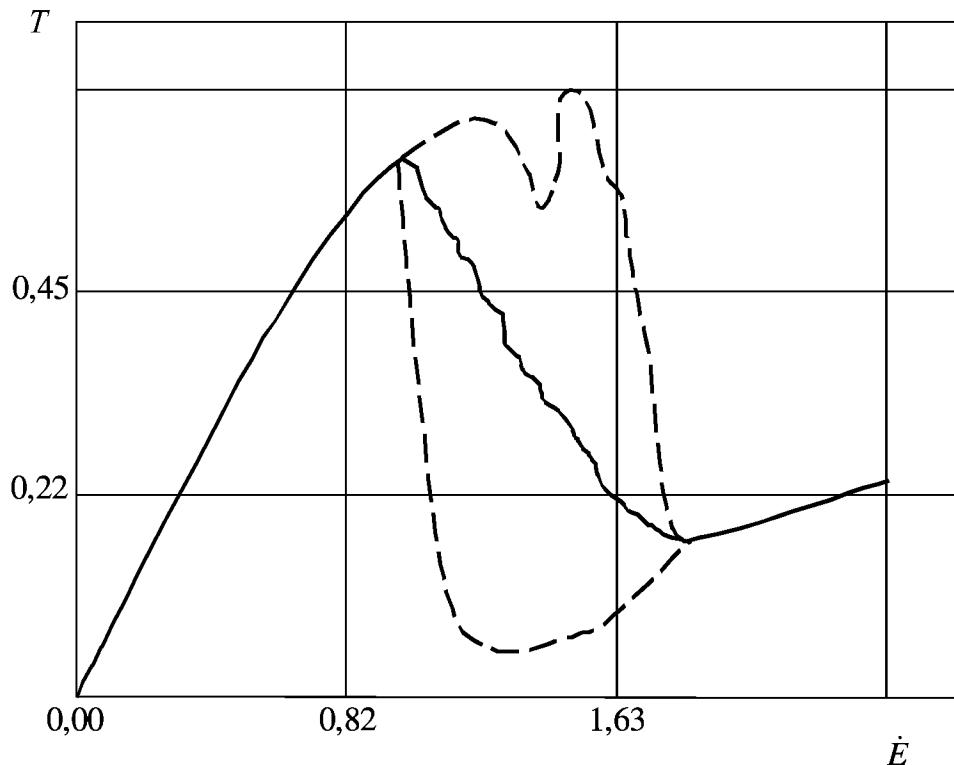


Рис. 7.1. Зависимость  $T$  от  $\dot{E}$

Эта зависимость характеризует положения равновесия рассматриваемой динамической системы, к которым, в случае устойчивости, решение стремится с течением времени. На рисунке эти устойчивые ветви отмечены жирными линиями. При малых значениях скорости сдвига ( $\dot{E} < 0,95$ ) структурные связи в жидкости не разрушаются. Имеет место простое сдвиговое течение жидкости с большой вязкостью, в которой не происходит разрушения поля течения на доменные структуры. Если в начальный момент времени по каким-либо причинам часть структурных связей нарушена, т.е.  $S_i(0) \neq 0$ , то эти разрушенные связи со временем полностью восстанавливаются.

С увеличением скорости сдвига ( $\dot{E} > 0,95$ ) происходит разделение поля течения на «доменные» структуры с разрушением части связей вблизи подвижной стенки. При этом нулевое состояние  $S_i = 0$  теряет устойчивость с рождением нового положения равновесия  $S_i \neq 0$ , которое, в свою очередь, при дальнейшем увеличении  $\dot{E}$  теряет устойчивость с образованием предельного цикла. Размах колебаний величины касательного напряжения ( $T_{\max}$  и  $T_{\min}$ ) показан на рис. 7.1 пунктирными линиями. Средние по времени значения  $T$  при этих колебаниях изображены тонкой сплошной линией.

При дальнейшем увеличении скорости сдвига  $\dot{E}$  имеет место процесс последовательного удвоения периода автоколебаний, приводящий к хаосу при  $\dot{E} = \dot{E}_\infty = 1,517$ . Наблюдающиеся при этом стохастические колебания величины касательного напряжения показаны на рис. 7.2.

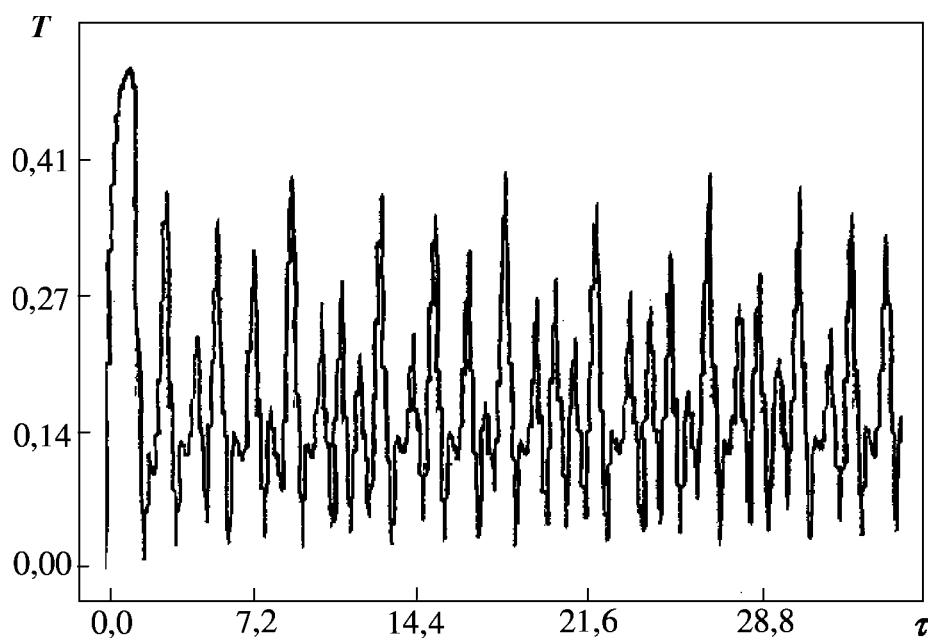
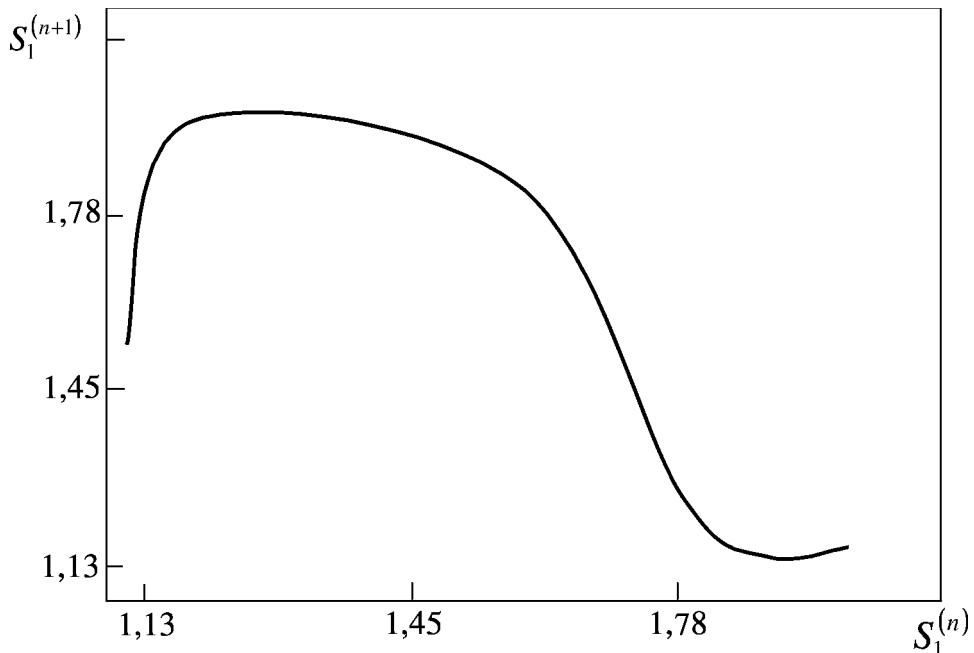


Рис. 7.2. Хаотические колебания касательного напряжения

Анализ соответствующего этому аттрактору отображения Лоренца (связи между последовательными экстремумами напряжения, рис. 7.3) показывает, что в исследуемой системе переход к хаосу реализуется по классическому сценарию Фейгенбаума. Об этом свидетельствует также то, что значения параметра  $\dot{E}_n^2$ , при которых происходит удвоение периода, подчиняются закону Фейгенбаума:

$$G_n - G_\infty = \frac{C}{\delta^n},$$

где в данном случае  $C = 6,54$ .



**Рис. 7.3. Одномерное отображение**

Для существования стохастического поведения необходимо выполнение условия размешивания, что обеспечивается экспоненциальным разбеганием траекторий в каждой точке аттрактора (см. главу 1). Характер этого разбегания можно оценить, исследуя энтропию Колмогорова, которая определяется выражением [163, 243]

$$K = \frac{1}{\tau} \ln \left( \frac{R(\tau)}{R(0)} \right),$$

где  $R(0)$  и  $R(\tau)$  – расстояния между двумя точками в фазовом пространстве соответственно в начальный момент времени и через промежуток времени, равный  $\tau$ .

Зависимость энтропии Колмогорова от  $\tau$  показана на рис. 7.4. Для стохастического процесса при  $\tau \rightarrow \infty$  величина энтропии должна быть больше нуля. Из рис. 7.4 видно, что со временем величина энтропии Колмогорова выходит на положительный стационарный уровень  $K_\infty = 0,057$ .

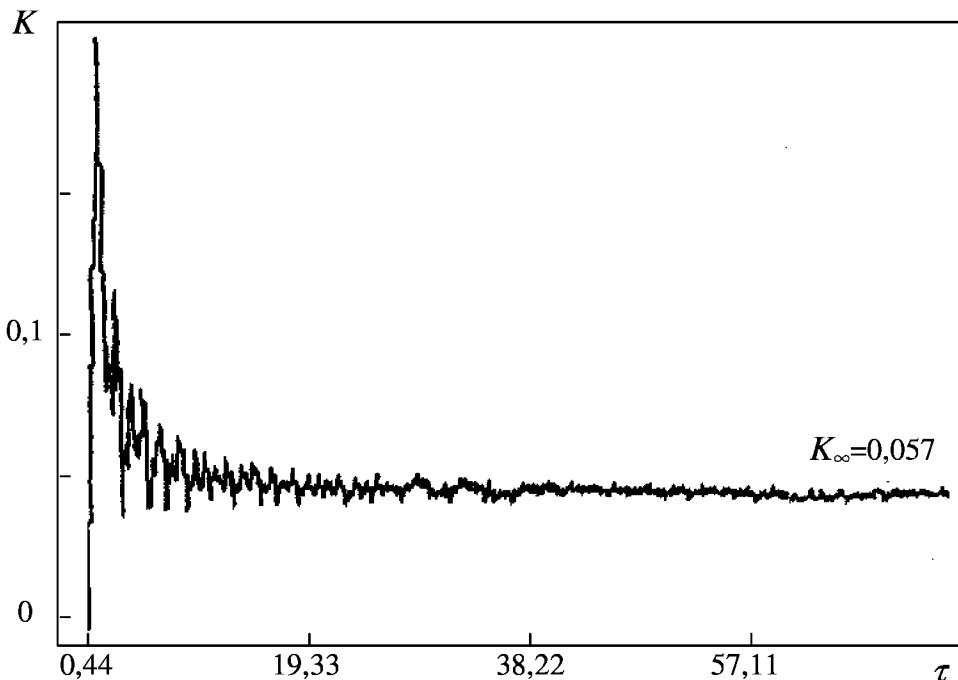


Рис. 7.4. Энтропия Колмогорова

При дальнейшем увеличении скорости сдвига ( $\dot{E} > 1,67$ ) имеет место обратный каскад бифуркаций Фейгенбаума, который при значении  $E = 1,87$  приводит к исчезновению автоколебаний с образованием устойчивого равновесия. Это равновесие характеризуется высокой степенью разрушения структурных связей близкого к подвижной стенке «домена». С увеличением  $\dot{E}$  число этих разрушенных связей возрастает, асимптотически стремясь к своему максимальному значению.

Для подтверждения полученных результатов рассмотрим результаты вискозиметрических экспериментов, проведенных С.А. Коневым с расплавом парафина (нонодекан). Оказалось, что при температурах, близких к температуре кристаллизации парафина, значения касательного напряжения

$\tau$  испытывают незатухающие колебания, график которых представлен на рис. 7.5. Для этой кривой нами были вычислены корреляционная размерность  $\nu$  (см. раздел 1.3) и энтропия Колмогорова. Результаты расчетов корреляционной размерности приведены на рис. 7.6, из которого видно, что наблюдаемые хаотические колебания являются детерминированными, причем число динамических переменных, необходимых для описания рассматриваемого процесса, равно 4. Отметим, что вышеприведенные численные результаты были получены нами при анализе динамической системы, которая также имеет четвертый порядок.

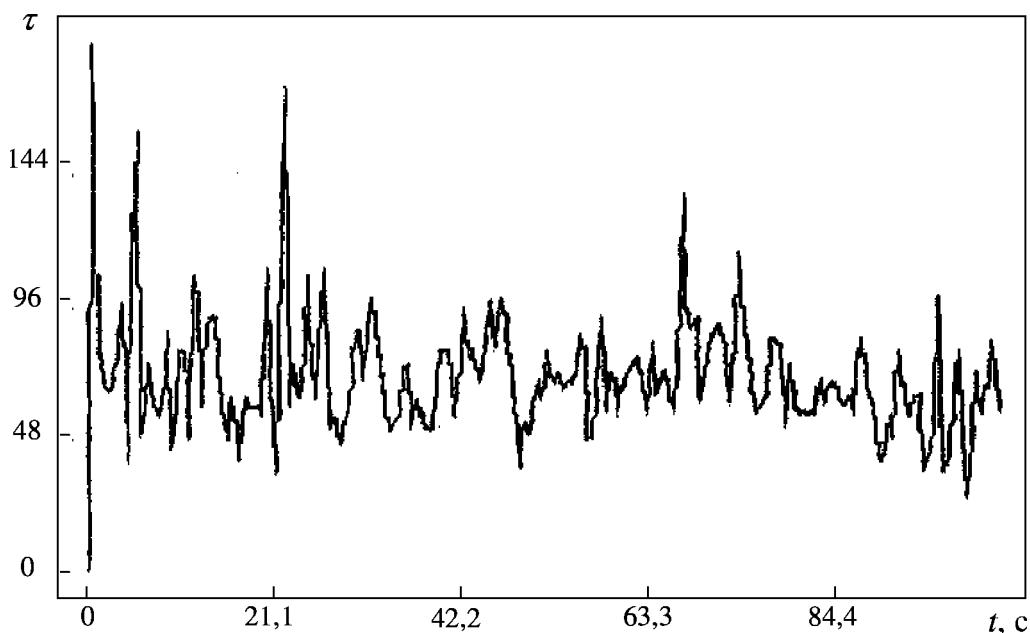


Рис. 7.5. Замеры касательного напряжения

Оценка снизу для энтропии Колмогорова вычислялась по формуле [243]

$$K = \lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{C_n(r)}{C_n(0)} \right)$$

и оказалась равной  $K = 0,1$ , что по порядку совпадает со значением, соответствующим модельной системе. Здесь  $C_n(r)$  – корреляционный интервал (см. раздел 1.2.4).

Полученные нами результаты позволяют по-новому взглянуть на эффект эластичной турбулентности и могут быть полезными при разра-

ботке нетрадиционных методов обработки данных реометрических экспериментов.

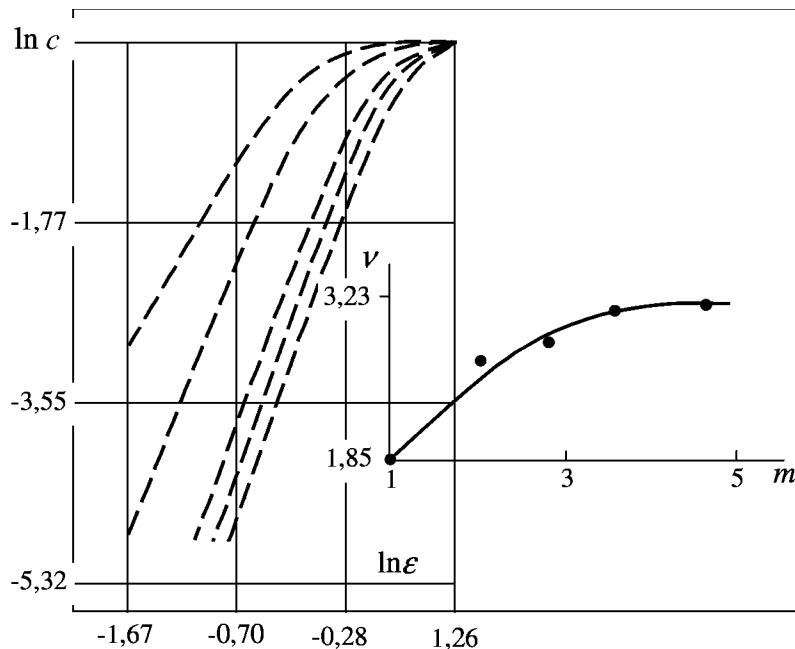


Рис. 7.6. Вычисление корреляционной зависимости

## 7.2. Анализ устойчивости движения колонны труб в тиксотропной жидкости

В практике бурения давно замечено, что при подъеме или спуске колонны бурильных труб возможны различные осложнения, связанные с изменением гидродинамического давления, оказываемого жидкостью на стенки скважины [73, 130, 151]. При спуске в скважину бурильной (или обсадной) колонны часть жидкости вытесняется в кольцевое пространство между колонной и стенками скважин, что приводит к возникновению градиента давления, тратящегося на преодоление сил инерции и трения. Тем самым на гидростатическое давление столба жидкости накладывается избыточное гидродинамическое давление, которое может привести к гидроразрыву пласта и к проникновению бурового раствора в образовавшиеся трещины. В некоторых случаях возможно даже смятие труб или разрушение клапанов. При подъеме труб из скважины давление в скважине, наоборот, уменьшается, что может вызвать приток в скважину пластовых флюидов и, как следствие, к аварийному фонтанированию или обвалу стенок скважины.

Расчет гидродинамических давлений, возникающих при спускоподъемных операциях, сводится к анализу движения жидкости между двумя

соосными цилиндрами, один из которых (внутренний) движется с некоторой скоростью. В случае стационарного движения вязкой и вязкопластичной жидкости эта задача решена в работах [80, 213]. Многочисленные теоретические и экспериментальные исследования показывают, что существенное влияние на величину гидродинамического давления оказывают силы инерции, а также эффекты, связанные с переменностью реологических параметров буровых жидкостей [151, 130, 179].

В данном разделе проводится анализ устойчивости движения колонны труб при проведении спускоперевозочных операций. Поскольку применяемые в бурении глинистые и цементные растворы являются тиксотропными средами, то при постановке задачи учитывается зависимость вязкости жидкости от концентрации разрушенных связей.

Пусть в скважине радиусом  $R_1$ , заполненной тиксотропной жидкостью, движется вниз закрытая снизу колонна труб, внешний радиус которых равен  $R_2$ . Тогда эпюра скорости жидкости в кольцевом пространстве между скважиной и трубами будет иметь вид, представленный на рис. 7.7. Пусть  $u_T$  – скорость смотки троса с барабана буровой лебедки. Она определяется бурильщиком и поэтому может считаться заданной функцией времени:  $u_T = f(t)$ . Из-за упругости тросов, на которых висит колонна, скорость последней может существенно отличаться от  $u_T$  (известно, что амплитуда колебаний скорости колонны, вызванных упругостью талевой системы, достигает 30 % от скорости движения троса [130]). Поэтому в схему, изображенную на рис. 7.7, введем пружину, расположенную между концом троса, сматывающегося с барабана лебедки (точкой А) и верхним концом бурильной колонны. Для полноты можно считать, что эта пружина моделирует упругость не только талевой системы, но и самой колонны труб.

В рамках сосредоточенной модели уравнение движения колонны имеет вид

$$M \frac{du}{dt} = -F_2 - pS_2 + Mg - k(x - \xi), \quad (7.14)$$

где  $M$  – масса колонны (вместе с массой жидкости, находящейся внутри нее),

$F_2$  – сила трения колонны в жидкости,

$S_2 = \pi R_2^2$  – площадь сечения колонны,

$p$  – давление у нижнего конца колонны,

$\xi$  – перемещение талевого троса,

$x$  – перемещение колонны,

$k$  – жесткость пружины, моделирующей суммарную упругость талевой системы и бурильной колонны,  
 $u$  – скорость движения колонны, связанная с ее перемещением:

$$\frac{dx}{dt} = u. \quad (7.15)$$

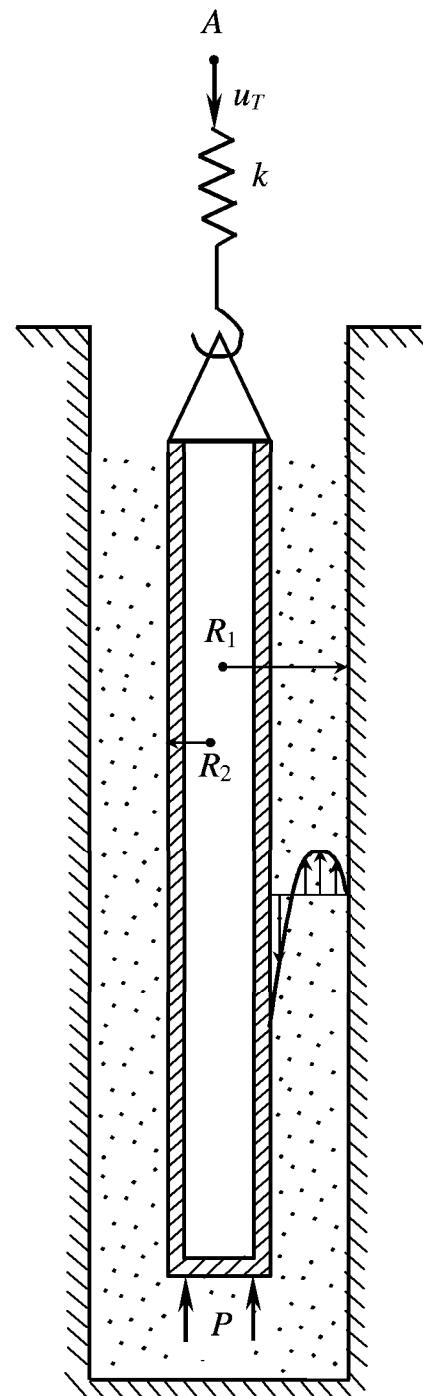


Рис. 7.7. Схема движения колонны труб

Величина  $\xi$  определяется уравнением

$$\frac{d\xi}{dt} = f(t). \quad (7.16)$$

Часто при оценке величины гидродинамического давления скорость троса (функцию  $f(t)$ ) считают постоянной. Более точный подход подразумевает учет того, что период спуска одной связки из нескольких труб (свечи) делится на три этапа: разгон, движение с установленнойся скоростью и торможение.

Уравнение движения жидкости, осредненное по сечению кольцевого пространства, можно записать в виде

$$m \frac{dv}{dt} = pS_k - F_1 - mg - F_2, \quad (7.17)$$

где  $m = \rho S_k L$  – масса жидкости в кольцевом пространстве,  
 $\rho$  – плотность жидкости,  
 $S_k = \pi(R_1^2 - R_2^2) \approx 2\pi R_2 h$  – площадь кольцевого сечения ( $h = R_1 - R_2$ ),  
 $L$  – длина колонны,  
 $F_1$  – сила трения жидкости о стенки скважины,  
 $v$  – средняя по сечению кольцевого пространства скорость жидкости.

Силы трения  $F_1$  и  $F_2$  будем приближенно определять выражениями, получаемыми для установившегося течения вязкой жидкости. Заменяя для простоты течение в кольцевом пространстве на плоское течение, можно получить следующее выражение для скорости жидкости  $w$  [213]:

$$w(y) = 3(2v + u) \left( \frac{y}{h} - \frac{y^2}{h^2} \right) - u \left( 1 - \frac{y}{h} \right), \quad (7.18)$$

откуда легко найти

$$F_1 = \alpha \mu \left( v + \frac{u}{3} \right), \quad F_2 = \alpha \mu \left( v + \frac{2u}{3} \right), \quad (7.19)$$

где  $\mu$  – вязкость жидкости,  
 $y$  – расстояние от внешней поверхности труб,  
 $\alpha = 12\pi R_2 \frac{L}{h}$ .

Буровые жидкости являются неильтоновскими средами, вязкость которых уменьшается с увеличением скорости сдвига. Поэтому величина  $\mu$  в (7.19) имеет смысл среднего по кольцевому сечению значения вязкости. Тиксотропность жидкости можно учесть, считая  $\mu$  функцией концентрации разрушенных связей  $s$ . По аналогии с (7.4) зададим эту зависимость в виде

$$\mu = \mu_* + (\mu_0 - \mu_*) \exp(-\sigma s^n). \quad (7.20)$$

Кинетическое уравнение, определяющее скорость разрушения связей, запишем как

$$\frac{ds}{dt} = -\gamma_1 s + \gamma_2 \Psi(s) \mu(s) \dot{\epsilon}^2, \quad (7.21)$$

$$\Psi(s) = \frac{s}{1 + Bs}.$$

При выводе (7.21) предполагалось, что интенсивность разрушения структуры пропорциональна скорости диссипации механической энергии ( $\sim \mu \dot{\epsilon}^2$ ). Функция  $\Psi(s)$  позволяет учесть то, что связи, разорванные в начале, служат «центрами», ускоряющими разрушение структуры. При  $s \rightarrow 0$   $\Psi(s) \sim s$ , а увеличение  $s$  приводит к ее насыщению.

Среднюю скорость сдвига будем определять выражением [213]

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{h} \int_0^h \left| \frac{\partial w}{\partial y} \right| dy = \frac{2w(y_0) + u}{h}, \quad (7.22)$$

где  $y_0 = \frac{(3v+2u)}{3(2v+u)} h$  – точка экстремума функции (7.18).

Для замыкания системы (7.14) – (7.22) выпишем уравнение, определяющее давление  $p$ . С учетом сжимаемости получим

$$\Omega_0 \beta_0 \frac{dp}{dt} = S_2 u - S_k v, \quad (7.23)$$

где  $\beta_0$  и  $\Omega_0$  – коэффициент сжимаемости и объем жидкости в скважине.

Перейдем к безразмерным величинам

$$u_1 = \frac{u}{u_0}, \quad v_1 = \frac{v}{v_0}, \quad p_1 = \frac{p - p_c}{p_0}, \quad \mu_1 = \frac{\mu}{\mu^1}, \quad \tau = \frac{t}{t_0},$$

$$\xi_1 = \frac{\xi - x + x_0}{\xi_0}, \quad \gamma = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \mu^1 \left( \frac{u_0}{h} \right)^2,$$

$$\beta = \frac{\Omega_0 \beta_0 p_0}{S_2 u_0 t_0}, \quad \varphi = \frac{m v_0}{\alpha \mu^1 u_0 t_0}, \quad A_1 = \frac{\mu_*}{\mu^1}, \quad A = \frac{\mu_0}{\mu^1},$$

$$f_1(\tau) = \frac{1}{u_0} f(t_0 \tau), \quad y_1 = \frac{3\lambda v_1 + 2u_1}{3(2\lambda v_1 + u_1)},$$

$$\dot{E} = \frac{\dot{\epsilon} h}{u_0}, \quad s_1 = \frac{s}{s_0}, \quad B_1 = s_0 B,$$

$$\Psi_1(s_1) = \frac{s_1}{1 + B_1 s_1},$$

где  $v_0 = \lambda u_0$ ,  $\lambda = \frac{S_2}{S_k}$ ,  $\xi_0 = ut_0$ ,  $s_0 = \sigma^{-\frac{1}{n}}$ ,  $t_0 = \sqrt{\frac{M}{k}}$ ,

$u_0$  – характерная скорость спуска колонны,

$p_c = \frac{mg}{S_k}$  – гидростатическое давление,

$p_0 = \frac{\alpha \mu_0 u_0}{S_k}$  – характерное значение гидродинамического давления,

обусловленного потерями на трение,

$x_0 = \frac{Mg - p_c S_2}{k}$  – растяжение «пружины» под действием веса

колонны (с учетом силы Архимеда),

$\mu^1$  – характерное значение вязкости жидкости.

Тогда вместо (7.14) – (7.23) получим систему уравнений

$$\frac{du_1}{d\tau} = -v \left[ \mu_1 \left( \lambda v_1 + \frac{2u_1}{3} \right) + \lambda p_1 \right] + \xi_1,$$

$$\varphi \frac{dv_1}{d\tau} = -\mu_1(2\lambda v_1 + u_1) + p_1,$$

$$\beta \frac{dp_1}{d\tau} = u_1 - v_1,$$

$$\frac{d\xi_1}{d\tau} = f_1(\tau) - u_1,$$

$$\frac{1}{\gamma_1} \frac{ds_1}{d\tau} = -s_1 + \psi_1(s_1) \mu_1 \dot{E}^2,$$

где  $\mu_1 = A_1 + (A - A_1) \exp(-s_1^n)$ ,

$$\dot{E} = 2w_1 + u_1,$$

$$w_1 = 3(2\lambda v_1 + u_1)(y_1 - y_1^2) - u_1(1 - y_1).$$

Для оценки коэффициентов этой системы примем следующие значения параметров:  $R_1 = 10 \cdot 10^{-2}$  м,  $R_2 = 5 \cdot 10^{-2}$  м,  $u_0 = 1$  м/с,  $L = 10^3$  м,  $\rho = 1,3 \cdot 10^3$  кг/м,  $M = 3 \cdot 10^4$  кг,  $m = 3,5 \cdot 10^4$  кг,  $k = 5 \cdot 10^5$  Н/м,  $\beta_0 = 5 \cdot 10^{-10}$  1/Па,  $\Omega_0 = 60$  м<sup>3</sup>,  $\mu_0 = 0,1$  Па·с,  $\mu_* = 0,01$  Па·с,  $B_1 = 0,01$ .

Тогда получим  $p_c \approx 13 \cdot 10^6$  Па,  $p_0 \approx 1 \cdot 10^6$  Па,  $t_0 \approx 0,2$  с,  $\xi_0 \approx 0,2$  м,  $\lambda \approx 0,3$ ,  $v_0 \approx 0,3$  м/с,  $\varphi \approx \frac{\lambda}{v}$ ,  $\beta \approx \frac{0,5}{v}$ ,  $v \approx 0,5$ .

Численный анализ системы был проведен нами при значениях параметров  $v = 0,5$ ,  $\lambda = 0,3$ ,  $\beta = \frac{0,5}{v}$ ,  $\varphi = \frac{\lambda}{v}$ ,  $A_1 = 0,5$ ,  $A = 5$ ,  $n = 5$ ,  $\gamma_1 = 1$ ,  $\gamma = 0,1$ .

Вначале считалось, что скорость спуска колонны постоянна:  $f_1 \equiv u_{T1}$  и исследовалась зависимость характера движения от значения  $u_{T1}$ . Показано, что при этом наблюдается та же бифуркационная картина (устойчивое движение с неразрушенной структурой – бифуркации Фейгенбаума – хаос – обратные бифуркации Фейгенбаума – устойчивое движение с разрушенной структурой), что и в случае движения в ротационном вискозиметре.

Показано, что колебания гидродинамического давления, вызванные неустойчивым движением колонны, могут стать весьма значительными ( $\sim 3$  МПа).

Как уже отмечалось, на практике спуск колонны труб происходит неравномерно и по частям. Поэтому нами были проведены расчеты для функции  $f_1(\tau)$  следующего вида:

$$f_1(\tau) = \begin{cases} u_{T1} \frac{\tau}{\tau_1}, & 0 \leq \tau < \tau_1; \\ u_{T1}, & \tau_1 \leq \tau < \tau_2 - \tau_1; \\ u_{T1} \frac{\tau_2 - \tau}{\tau_1}, & \tau_2 - \tau_1 \leq \tau < \tau_2; \\ 0, & \tau \geq \tau_2. \end{cases}$$

На рис. 7.8 приведена зависимость  $p_1 = p_1(\tau)$ , полученная для выше-приведенных значений параметров при  $\tau_2 = 50$ ,  $\tau_1 = \frac{\tau_2}{6}$ ,  $u_{T1} = 1,25$  и начальных условиях  $u_1(0) = v_1(0) = \xi_1(0) = p_1(0) = 0$ ,  $s_1(0) = 0,01$  (кривая 1).

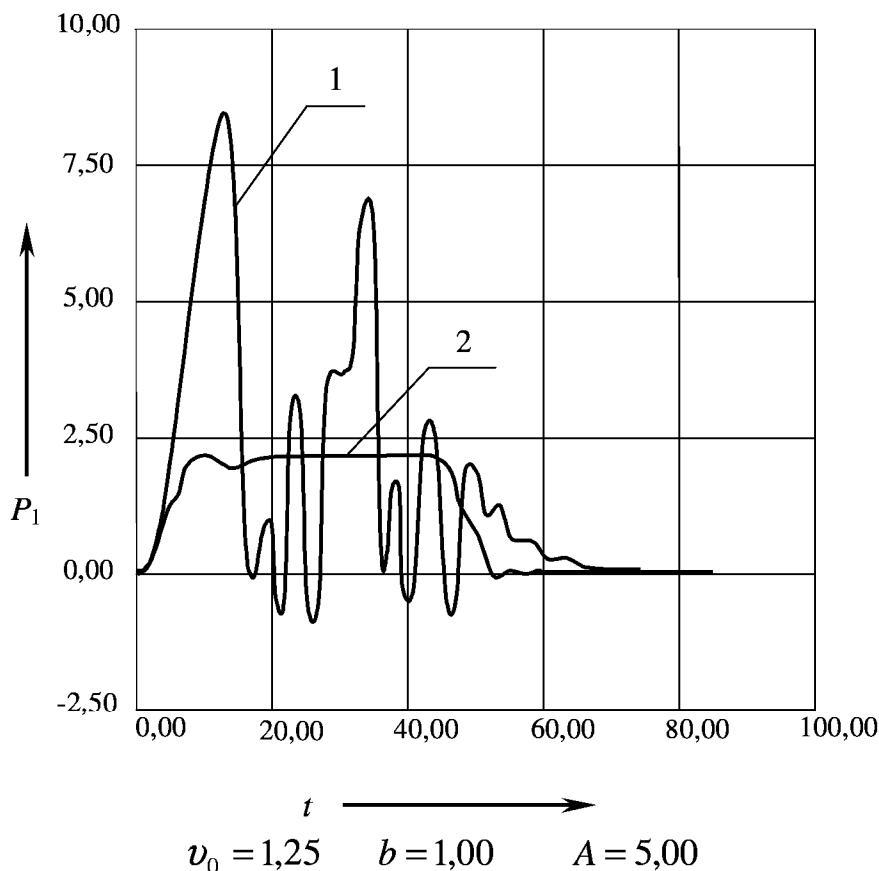


Рис. 7.8. Зависимость гидродинамического давления от времени

Для сравнения на этом же рисунке приведена (кривая 2) зависимость  $p_1 = p_1(\tau)$ , соответствующая движению ньютоновской нефти (она получена путем расчетов по приведенной выше модели при  $A_1 = A_2 = 1$ ). Как видим, и в этом случае при движении в тиксотропной жидкости наблюдаются колебания гидродинамического давления довольно значительной амплитуды.

Таким образом, движение колонны труб, сопровождающееся интенсивным разрушением структуры жидкости, может потерять устойчивость за счет возникновения периодических и стохастических колебаний, приводящих к опасным пульсациям гидродинамического давления на стенки скважины. Полученные выше результаты важны для понимания механизмов возникновения осложнений в процессе бурения и могут оказаться полезными при выборе режимов проведения спускоподъемных операций.

### 7.3. Исследование особенностей движения реопектических сред по трубам

Настоящий раздел посвящен исследованию нестационарных процессов, имеющих место при движении реопектических жидкостей. В нем приведены результаты лабораторных экспериментов по исследованию течения в трубах суспензии, представляющей собой взвесь кварцевого песка в растворе бентонита. Этот материал можно определить как реопектическую среду, поскольку если перепад давления на концах трубы достаточно мал, то после начала течения скорость суспензии постепенно уменьшается, пока не станет равной нулю. С увеличением же перепада давления течение вновь возобновляется. Как известно, такого рода явления типичны для реопектиков. Опыты показали, что приближение к стационарным режимам течения имеет колебательный характер. В ряде случаев стационарные режимы течения теряют устойчивость и наблюдаются незатухающие колебания расхода суспензии при постоянном значении перепада давления. Этот эффект аналогичен явлению эластичной турбулентности, обнаруженному ранее в экспериментах по движению тиксотропных сред (раздел 7.1).

### 7.3.1. Экспериментальное изучение закономерностей движения реопектических сред по трубам

Рассмотрим результаты лабораторных экспериментов по исследованию течения в трубе суспензии, представляющей собой взвесь кварцевого песка (с диаметром песчинок  $\leq 2 \cdot 10^{-5}$  м) в растворе бентонита (данные Г.М. Панахова и Н.М. Сафарова). Длина трубы  $L = 3,0$  м, ее внутренний диаметр  $d = 0,016$  м.

В ходе экспериментов определялась зависимость массового расхода жидкости  $G$  от времени при постоянном значении перепада давления  $\Delta p$ . Перед каждой серией экспериментов труба тщательно промывалась водой и просушивалась. Путем долгого отстаивания суспензии было показано, что она устойчива, т.е. осаждения песка (за время, намного превышающее время проведения экспериментов) не происходит. На рис. 7.9 представлены кривые  $G = G(t)$ , снятые при течении суспензии, содержащей 20 % песка по весу (плотность смеси  $1,32 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>) при значениях перепада давления, равных  $\Delta p = 1,1 \cdot 10^4$  Па,  $1,3 \cdot 10^4$  Па,  $1,4 \cdot 10^4$  Па и  $1,5 \cdot 10^4$  Па (кривые 1, 2, 3 и 4 соответственно). Как видим, характер движения суспензии существенно зависит от величины приложенного перепада давления.

Если перепад давления мал, то расход жидкости с течением времени уменьшается, пока не станет равным нулю. Для объяснения этого можно предположить, что при медленных течениях суспензии происходит реопектическое структурообразование, повышающее предельное напряжение сдвига жидкости. Отнесение суспензии к классу реопектических сред оправдывается также тем, что растворы бентонита и сами по себе проявляют реопектические свойства [219].

При достижении некоторого критического значения перепада давления «запирания» трубы не происходит (см. кривую 4). Это согласуется с тем фактом, что свойство реопексии обнаруживается лишь при достаточно малых скоростях сдвига; с увеличением скорости сдвиговой деформации начинают превалировать процессы разрушения структуры. Парадоксальным является то обстоятельство, что в некоторой области увеличение перепада давления ведет к более быстрому «запиранию» трубы. Это свидетельствует о том, что при малых скоростях течения скорость структурообразования увеличивается с увеличением скорости сдвиговой деформации.

Отметим также то обстоятельство, что при приближении к стационарным состояниям значения расхода испытывают затухающие колебания, амплитуда которых превышает возможные ошибки замеров.

Опыты, проведенные при других значениях концентрации песка, показали, что увеличение его содержания вплоть до 40 % к качественному изменению наблюдавшейся картины не приводит. При течении менее

концентрированных суспензий эффект «запирания» может отсутствовать, но наблюдаются незатухающие колебания расхода довольно значительной (по сравнению со средним значением  $G$ ) амплитуды (рис. 7.10, на котором приведены замеры расхода 10%-й суспензии).

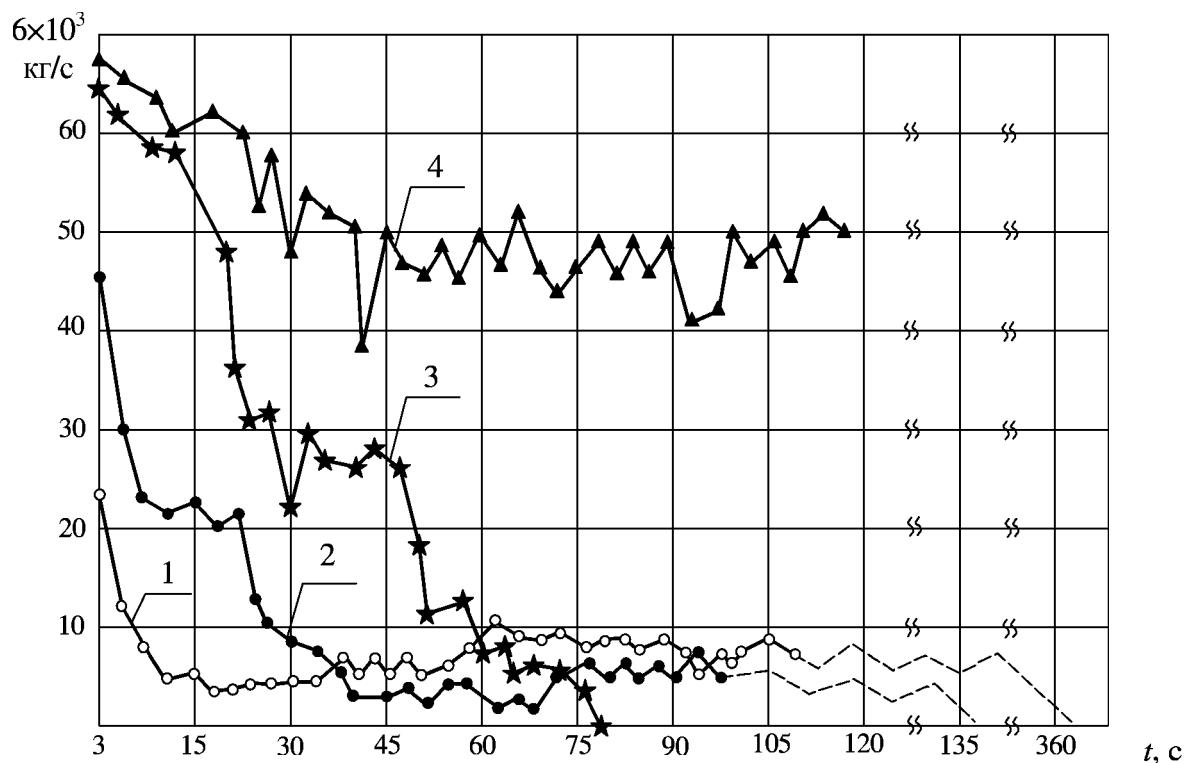


Рис. 7.9. Зависимости  $G = G(t)$  для 20%-й суспензии

Отмеченные выше закономерности могут привести к осложнениям в различных технологических процессах. Например, транспортировка по трубам неильтоновских сред, проявляющих реопектические свойства, может привести к аварийной остановке трубопровода. Можно также предположить, что «запирание» потока реопектической жидкости является причиной прихвата инструмента в процессе бурения и образования «висящих» пробок при эксплуатации пескопроявляющих скважин.

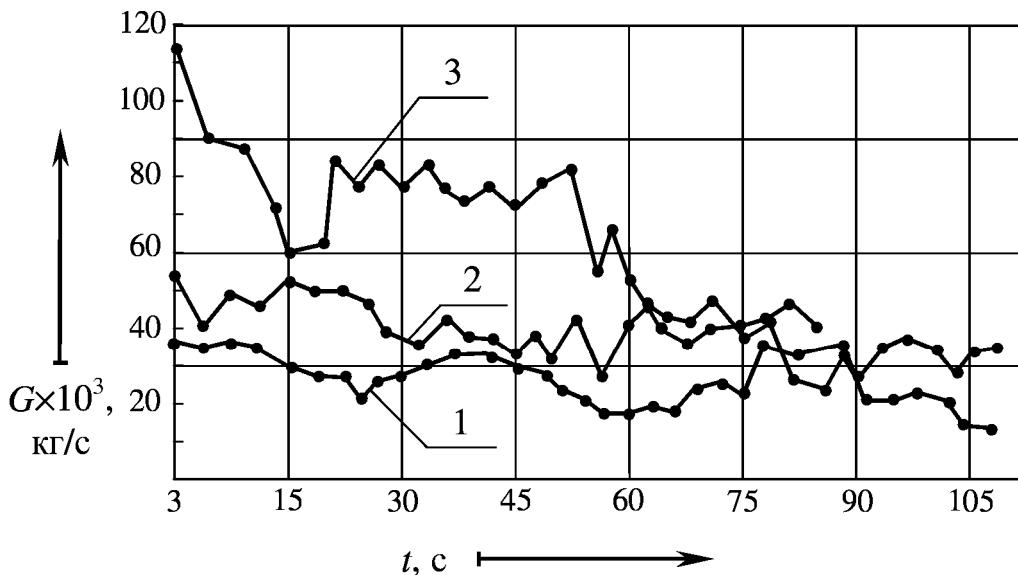


Рис. 7.10. Зависимости  $G = G(t)$  для 10%-й суспензии

### 7.3.2. Моделирование течения реопектических сред по трубам

Выпишем уравнения, описывающие течение реопектической жидкости в трубе. Прежде всего оценим вклад инерционных сил, определяемый отношением

$$\delta = \left( \frac{\rho w_*}{t_*} \right) \frac{1}{\theta_*},$$

где  $\rho$  – плотность среды,

$w_* = \frac{G_*}{\pi \rho R^2}$ ,  $G_*$ ,  $t_*$  и  $\theta_*$  – характерные значения средней скорости течения, массового расхода, времени нестационарных процессов и градиента давления соответственно,

$R$  – радиус трубы.

Приняв по условиям эксперимента,  $t_* = 30$  с,  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $R = 10^{-2}$  м,  $G_* = 5 \cdot 10^{-2}$  кг/с,  $\theta_* = 10^3$  Па/м, получим  $w_* \approx 0,1$  м/с,  $\delta \approx 10^{-3} \ll 1$ . Таким образом, влиянием сил инерции можно пренебречь. Пренебрегаем также сжимаемостью жидкости и будем считать трубу бесконечно длинной. Первое из последних двух предположений вполне оправдано, т.к.

$$\frac{L}{c \cdot t_*} \ll 1,$$

где  $L$  – длина трубы,  
 $c$  – скорость звука.

Предположение же о бесконечно большой длине трубы является существенной идеализацией, поскольку время нестационарных процессов  $t_*$  одного порядка с характерным временем прохождения трубы частицами жидкости  $\frac{L}{w_*}$ . Однако при качественном описании наблюдаемых явлений оно также может быть принято.

В рамках структурно-кинетического подхода (см. главу 3) реологию реопектических сред можно определить процессами восстановления и разрушения структуры, схематично представляя их как прямую и обратную химические реакции, суммарное действие которых описывается некоторым кинетическим уравнением относительно концентрации структурных связей  $s$ . Анализ экспериментальных данных показывает, что реопектические жидкости являются нелинейными вязкопластичными средами с переменным значением предельного напряжения сдвига, поэтому реологическое уравнение для них может быть принято в виде

$$\tau = \tau_0 + f(\dot{\varepsilon}),$$

где  $\tau$  и  $\dot{\varepsilon}$  – касательное напряжение и скорость сдвига на стенках трубы,  $f(\dot{\varepsilon})$  – некоторая функция, определяющая структурную вязкость,  $\tau_0 = \tau_0(s)$  – предельное напряжение сдвига, зависящее от концентрации структурных связей, образующихся при течении.

Для простоты аппроксимируем эту зависимость линейной функцией

$$\tau = \tau_1(1 + \gamma s).$$

Будем считать, что при малых скоростях сдвига имеет место структурообразование жидкости со скоростью, пропорциональной  $\dot{\varepsilon}$ , а при увеличении  $\dot{\varepsilon}$  начинают проявлять себя процессы разрушения связей, происходящие с некоторым временем запаздывания  $\lambda$ . Тогда кинетическое уравнение, определяющее относительную скорость изменения концентрации связей, может быть записано в виде

$$\frac{1}{s} \frac{ds(t)}{dt} = a \cdot \varepsilon(t) - \beta [s \cdot \dot{\varepsilon}^2]_\lambda,$$

где  $\alpha, \beta$  – положительные коэффициенты, определяющие скорости восстановления и разрушения связей,

$$[g]_\lambda = g(t - \lambda).$$

Использование уравнения с отклоняющимся аргументом позволяет преодолеть сложности, возникающие при попытке явного описания многостадийных процессов структурных преобразований. При отсутствии необходимой информации о свойствах отдельных элементов структуры и деталях взаимодействия между ними этот прием позволяет в достаточно простой форме неким интегральным образом учесть эффекты запаздывания и адекватно описывает некоторые особенности движения реофизически сложных сред (см. раздел 3.2.4).

О средней для простоты все рассматриваемые величины по сечению трубы, положим

$$\dot{\varepsilon} = \nu w,$$

что после обезразмеривания приводит к модели

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = s(\dot{\varepsilon} - B[s \dot{\varepsilon}^2]_\lambda), \\ w = \dot{\varepsilon} = \varphi(s). \end{cases} \quad (7.24)$$

Здесь

$$\varphi(s) = \frac{1}{\dot{\varepsilon}_*} \varphi_1[\tau_1(A - s)], \quad A = \frac{R\theta}{2\tau_1} - 1, \quad B = \frac{\dot{\varepsilon}_* \beta}{\alpha \gamma}, \quad s \mapsto \gamma s,$$

$$\dot{\varepsilon} \mapsto \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_*}, \quad t \mapsto \frac{t}{t_*}, \quad w \mapsto \frac{w}{w_*}, \quad \lambda \mapsto \frac{\lambda}{t_*},$$

$$\dot{\varepsilon}_* = \nu w_*, \quad t_* = \frac{1}{\alpha \dot{\varepsilon}_*}, \quad \nu \approx \frac{4}{R}, \quad \dot{\varepsilon} = \varphi_1(z),$$

где  $t_*$  – характерное время реопективского структурообразования,  $\theta$  – градиент давления,  $\varphi_1(z)$  – функция, обратная  $z = f(\dot{\varepsilon}); (\varphi_1(0) = 0)$ .

Стационарные точки уравнения (7.24) определяются из условий

$$s = s_1 = 0, w = \varphi(s) = 0 \quad (7.25)$$

и

$$B\varphi(s) = \frac{1}{s}. \quad (7.26)$$

Условие (7.25) определяет точку покоя  $s = s_0 = A$ , соответствующую «запиранию» потока. Решения уравнения (7.26) зависят от взаимного расположения функций  $B\varphi(s)$  и  $\frac{1}{s}$ .

Легко видеть, что при достаточно малых  $A$  и  $B$  (т.е. при малых градиенте давления и скорости разрушения связей) уравнение (7.26) решений не имеет. Увеличение этих параметров приводит к появлению дополнительных точек равновесия, соответствующих стационарному течению жидкости. Для исследования устойчивости точек равновесия  $s_i$  ( $i = 0, 1, \dots$ ) положим в (7.24)  $s = s_i + \tilde{s}$  и линеаризуем по  $\tilde{s}$ . Для точки равновесия  $s = s_1 = 0$ , таким образом, получим

$$\frac{d\tilde{s}}{dt} = \varphi(0) \tilde{s}.$$

Поскольку  $\varphi(0) > 0$ , то эта точка неустойчива. При  $i \neq 1$  имеем уравнение

$$\frac{d\tilde{s}}{dt_1} = -\tilde{s} + C[\tilde{s}]_\lambda,$$

где

$$t_1 = s_i |\varphi'_i| t, \quad C = B\varphi_i s_i \left( 2 - \frac{\varphi_i}{s_i |\varphi'_i|} \right), \quad \varphi_i = \varphi(s_i).$$

(Предполагается, что функция  $\varphi(s_i)$  монотонно убывающая.)

Поскольку при  $s = s_0$   $C = 0$ , то эта точка устойчива всегда. Остальные точки равновесия устойчивы, если  $|C| < 1$ , апериодически неустойчивы при  $C > 1$  и колебательно неустойчивы при  $C < -1$  и достаточно больших  $\lambda$  [243].

Для конкретизации вида функции  $\varphi(s)$  в работе использовалась зависимость  $w_0 = w_0(\tau)$ , определенная по результатам описанных выше экспериментов ( $w_0 = w_0|_{t=0}$  – значение средней скорости жидкости в

момент начала движения под действием градиента давления  $\theta$ ). В качестве примера на рис. 7.11 представлена эта зависимость, полученная при исследовании движения 20%-й суспензии в трубе диаметром 16 мм. Поскольку перед снятием каждой кривой  $w = w(\tau)$  система приводилась к исходному состоянию, то  $s|_{t=0} = 0$ . Поэтому по форме кривой  $w_0(\tau)$  можно судить о виде функции  $\varphi(\tau - \tau_1)$ .

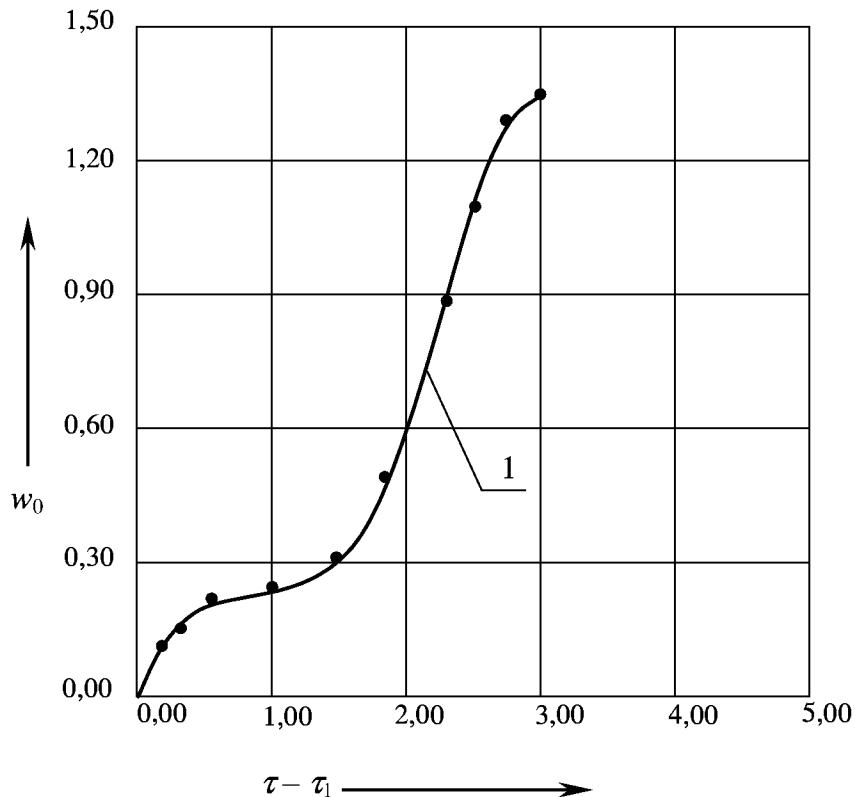


Рис. 7.11. Зависимость  $w_0$  от  $\tau - \tau_1$

Приведем некоторые результаты, полученные в ходе исследования предложенной модели. На рис. 7.12 представлены кривые  $w = w(\tau)$ , полученные численным интегрированием уравнения (7.24) при условии  $s, w = 0$  ( $t < 0$ ) и значениях параметров  $B = 0,5$ ,  $\lambda = 2$ . Как видно, предложенная модель качественно верно описывает экспериментально обнаруженные закономерности (ср. с рис. 7.9).

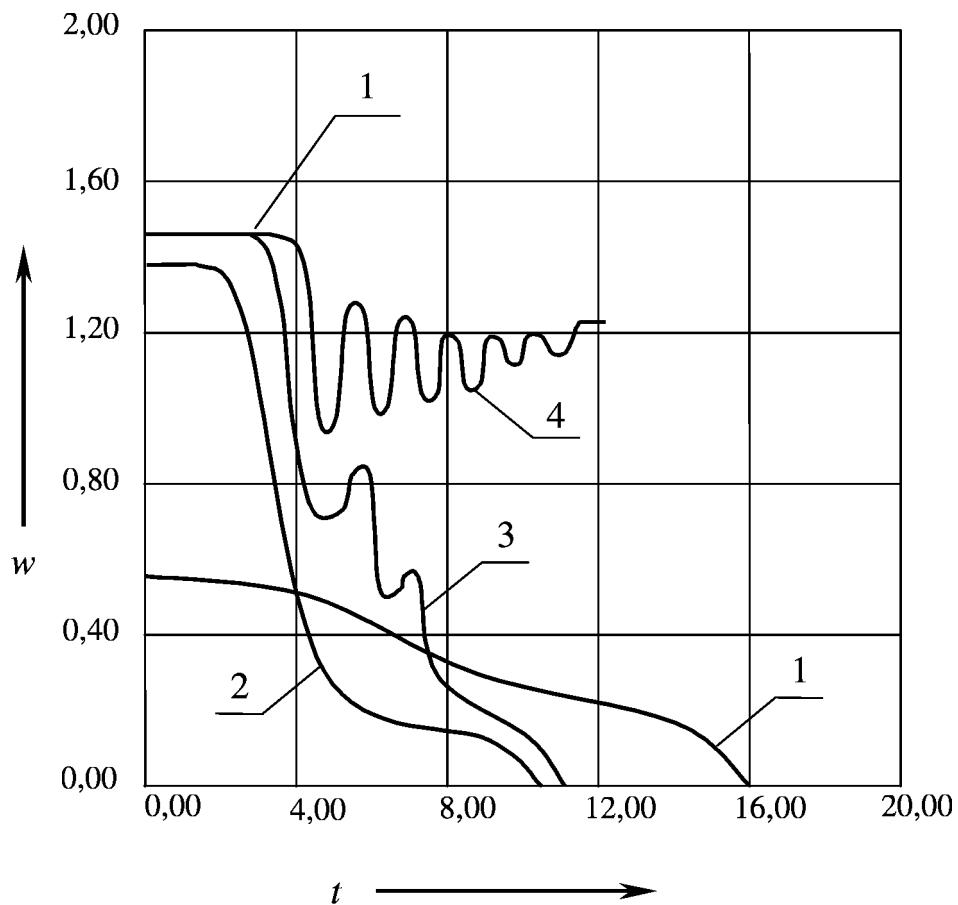


Рис. 7.12. Графики зависимостей  $w = w(t)$

Расчеты показали, что при увеличении градиента давления стационарные режимы течения могут потерять устойчивость, и в системе возникают периодические автоколебания. Модель (7.24) допускает и детерминированные хаотические колебания, установление которых происходит по универсальному сценарию М. Фейгенбаума, через каскад бифуркаций последовательного удвоения периода. При дальнейшем увеличении градиента давления движение вначале упорядочивается, а затем вновь хаотизируется.

Таким образом, наблюдаемые в опытах особенности течения реопективских жидкостей могут быть объяснены конкуренцией двух противоположных процессов: структурообразования при малых скоростях сдвига и разрушения структуры при увеличении скорости сдвига.

Показано, что наличие времени запаздывания в процессах разрушения структуры может привести к возникновению незатухающих колебаний расхода жидкости, движущейся под действием постоянного градиента давления. Фазовое пространство системы может иметь несколько устойчивых точек равновесия, а также притягивающие множества в виде предельных циклов и странных аттракторов. Наличие столь сложного фазового

портрета расширяет возможности управления движением реопектической жидкости путем «выведения» на требуемый режим течения.

#### 7.4. Эффекты локализации при фильтрации реопектических жидкостей

Для описания нестационарной радиально-симметричной фильтрации реопектических сред может быть предложена система уравнений

$$m\beta_0 \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{x^d} \frac{\partial}{\partial x} (x^d v); \quad (7.27)$$

$x \in (x_1, +\infty), \quad t \in (0, +\infty);$

$$v = \begin{cases} -\frac{k}{\mu(|v|)} Z \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right), & Z > 0; \\ 0, & Z \leq 0; \end{cases} \quad (7.28)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = s^{n_0} (\alpha v^{m_1} - \beta [s v^{m_2}]_\lambda), \quad m_2 > m_1, \quad (7.29)$$

где  $m$ ,  $\beta_0$  и  $k$  – пористость, сжимаемость и проницаемость пористой среды,

$p$  – давление,

$\mu = \mu(|v|)$  – вязкость жидкости, зависящая от скорости фильтрации  $v$ ,

$$Z = \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| - \theta,$$

$\theta = \theta(s)$  – начальный градиент, зависящий от концентрации  $s$ , образующихся при сдвиговых деформациях связей,

$\alpha$  и  $\beta$  – константы образования и разрушения связей,

$n_0$ ,  $m_1$ ,  $m_2 > 0$  – коэффициенты, определяющие нелинейную зависимость интенсивности процессов образования и разрушения связей от их концентрации и скорости фильтрации,

$\lambda$  – время запаздывания,

$d = 0$ , 1 или 2 для плоской, плоскорадиальной и сферической фильтрации соответственно.

Система (7.27) – (7.29) допускает весьма сложные движения и, в частности, может иметь решения в виде периодических и стохастических автоволн. Однако мы рассмотрим здесь только эффекты локализации граничных режимов. Анализ таких решений оказывается полезным при разработке стратегии управления технологическими процессами, требующими ограничения проникновения жидкостей в пористую среду. В частности, они могут быть использованы при бурении для создания кольматационных барьеров регулируемой толщины [73, 151], а также при проведении гидроизрыва для уменьшения поглощения пластом жидкости разрыва и жидкости – песконосителя.

Для простоты аппроксимируем функцию  $\theta(s)$  линейной зависимостью

$$\theta = \theta_1 + \gamma s$$

и пренебрегаем в (7.29) процессами разрушения связей, считая, что  $\frac{\beta v^{m_2-m_1}}{\alpha} \ll 1$ . Ограничимся рассмотрением монотонно убывающих по  $x$  решений и перейдем к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{p}{p_0}, & \bar{\theta} &= \frac{\theta}{\theta_0}, & \bar{Z} &= \frac{Z}{\theta_0}, & \bar{v} &= \frac{v}{v_0}, & \mu_1(\bar{v}) &= \frac{\mu(v_0 \bar{v})}{\mu_0}, \\ \bar{t} &= \frac{t}{t_0}, & \bar{x} &= \frac{x}{x_0}, & \alpha_1 &= \frac{\alpha \theta_0^{n_0-1} v_0^{m_1}}{\gamma^{n_0-1}}, \end{aligned}$$

где  $p_0$ ,  $\theta_0$  и  $\mu_0$  – некоторые характерные значения давления, начального градиента давления и вязкости,

$$x_0 = \frac{p_0}{\theta_0}, \quad v_0 = \frac{k}{\mu_0} \theta_0, \quad t_0 = \frac{x_0^2}{\chi},$$

$\chi = \frac{k}{m \beta_0 \mu}$  – коэффициент пьезопроводности.

После дифференцирования (7.7) по  $x$  получим систему

$$\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[ \frac{1}{\bar{x}^d} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{x}^d \Phi(\bar{Z})) \right], \quad (7.30)$$

$$\bar{x} \in R, \quad \bar{t} \in (0, +\infty),$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = \alpha_1 (\bar{\theta} - \bar{\theta}_1)^{n_0} \bar{v}^{m_1} \quad (7.31)$$

где  $R$  – область, в которой  $\bar{Z} > 0$ ,  $\bar{v} = \Phi(\bar{Z})$  – функция, обратная функции  $\bar{Z} = \bar{v}\mu_1(\bar{v})$ .

Будем считать, что функция  $\Phi(\bar{Z})$  монотонно возрастающая, причем

$$\Phi'(0) = 0. \quad (7.32)$$

В дальнейшем будут использоваться только безразмерные величины, поэтому черточки над ними будем опускать. В силу (7.32) уравнение (7.30) является вырожденным: при  $\bar{Z} = 0$  нарушается условие его параболичности. Как известно [199], такие уравнения могут иметь обобщенные решения, описывающие распространение возмущений с конечной глубиной проникновения (как уже отмечалось, именно такие решения и интересуют нас). Для более детального исследования поведения локализованных режимов аппроксимируем функцию  $\Phi(Z)$  степенной зависимостью:

$$\Phi(Z) = Z^{\lambda_1}. \quad \lambda_1 = \text{const} > 1.$$

Прежде всего, рассмотрим решения (7.30), соответствующие фильтрации при отсутствии реопектических эффектов. Положив  $\alpha_1 = 0$ ,  $\theta = \theta_1 = \text{const}$  и сделав замену

$$u = x^{d/\lambda_1} Z, \quad Y = x^\sigma, \quad \tau = \sigma^2 t,$$

получим из (7.30)

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = y^{d_1} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{y^{d_1}} \frac{\partial u^{\lambda_1}}{\partial y} \right), \quad (7.33)$$

где

$$\sigma = 1 + \frac{d}{2} \left( \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1} \right), \quad d_1 = \frac{d}{2\sigma\lambda_1} (\lambda + 1).$$

Рассмотрим решения (7.33) в виде бегущей волны [199]

$$u(y, \tau) = \begin{cases} T(\tau)[\xi^2(\tau) - y^2]^n, & y < \xi(\tau), \\ 0, & y \geq \xi(\tau). \end{cases} \quad (7.34)$$

Подставив (7.34) в (7.33), получим

$$\begin{aligned} \dot{T}(\xi^2 - y^2)^n + 2n\xi\xi' T(\xi^2 - y^2)^{n-1} = \\ = T^{\lambda_1} \left[ 4n\lambda_1(n\lambda_1 - 1)y^2(\xi^2 - y^2)^{n\lambda_1 - 2} - 2(1 - d_1)n\lambda_1(\xi^2 - y^2)^{n\lambda_1 - 1} \right]. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Положив  $n = \frac{1}{\lambda_1 - 1}$  и считая, что функция  $\xi(\tau)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{dt} = \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 - 1} T^{\lambda_1 - 1}, \quad (7.36)$$

можно сократить в (7.35) множители вида  $(\xi^2 - y^2)^n$  и получить уравнение относительно  $T(\tau)$ :

$$\frac{dT}{d\tau} = -B_0 T^{\lambda_1}, \quad (7.37)$$

где

$$B_0 = \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 - 1} \left( \frac{2}{\lambda_1 - 1} + 1 - d_1 \right).$$

Из (7.36), (7.37) легко получить

$$T = \frac{T_0}{(B\tau + 1)^{1/(\lambda_1 - 1)}},$$

$$\xi = \xi_0(B\tau + 1)^\delta,$$

где

$$B = B_0(\lambda_1 - 1)T_0^{\lambda_1 - 1}, \quad T_0 = T(0), \quad \xi_0 = \xi(0),$$

$$\delta = \frac{1}{2 + (\lambda_1 - 1)(1 - d_1)} > 0.$$

Это решение представляет собой бегущую волну с фронтом в точке  $x = l(\tau) = \xi^{1/\sigma}(\tau)$ . Как видно,  $l(\tau) \rightarrow \infty$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . Распределение давления, соответствующее этому решению, определяется выражением

$$p(x, \tau) = \begin{cases} \theta_1(l - x) + T(\tau) \int\limits_x^l x^{-\frac{d}{\lambda_1}} (l^{2\sigma} - x^{2\sigma})^n dx, & x_1 \leq x \leq l(\tau), \\ 0, & x > l(\tau). \end{cases} \quad (7.38)$$

В некоторых случаях интеграл в (7.38) может быть легко взят. Так, если  $\lambda_1 = 2$  и  $d = 0$ , то  $n = 1$ ,  $\sigma = 1$ ,  $d_1 = 0$ . При этом

$$p(x, \tau) = \theta_1(l - x) + T(\tau) \left[ l^2(l - x) - \frac{1}{3}(l^3 - x^3) \right],$$

$$x_1 \leq x \leq l(\tau).$$

Положив  $x_1 = 0$ , определим изменение давления на границе пористой среды  $p_1(\tau) = p(x_1, \tau)$ :

$$p_1(\tau) = l_0 \theta_1(B\tau + 1)^{\frac{1}{3}} + 2 \frac{T_0 l_0^3}{3}.$$

Таким образом, при  $\theta_1 \neq 0$  полученное решение соответствует безгранично растущему давлению на стенках скважины.

Покажем теперь, что при учете реопрективских свойств жидкости возможно построение локализованных решений с конечным при  $t \rightarrow \infty$  значением давления. Для  $\alpha_1 \neq 0$ ,  $m_1 = \frac{1}{\lambda_1}$  и  $n_0 = 0$  из (7.30) и (7.31) аналогично предыдущему можно получить уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = y^{d_1} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{y^{d_1}} \frac{\partial u^{\lambda_1}}{\partial y} \right) - \alpha_1 u, \quad (7.39)$$

решение которого вновь ищется в виде (7.34). При этом функции  $T(\tau)$ ,  $\xi(\tau)$  и  $\theta(x, \tau)$  определяются уравнениями

$$\frac{dT}{d\tau_1} = -T^{\lambda_1} - \alpha_2 T, \quad (7.40)$$

$$\frac{d\xi}{d\tau_1} = b\xi T^{\lambda_1 - 1}, \quad (7.41)$$

$$b = \frac{2\lambda_1}{B_0(\lambda_1 - 1)},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau_1} = \begin{cases} \alpha_2 T(\tau_1) x^{-\frac{d}{\lambda_1}} [\xi^2(\tau_1) - x^{2\sigma}]^n, & x \leq l(\tau_1), \\ 0, & x > l(\tau_1) \end{cases} \quad (7.42)$$

где  $\tau_1 = B_0 \tau$ ,  $\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{B_0}$ ,  $l = \xi^{1/\sigma}(\tau_1)$ .

Из (7.40) и (7.42) следует, что при  $\tau_1 \rightarrow \infty$  граница локализованной области  $l(\tau_1)$  стремится к конечному пределу  $l_\infty$ :

$$\ln l(\tau_1) \approx \ln l_\infty - C \exp(-\alpha_2(\lambda_1 - 1)\tau_1),$$

где  $C$  – некоторая постоянная.

Следовательно, полученное решение соответствует останавливающейся волне. Для примера вновь рассмотрим частный случай задаваясь значениями  $\lambda_1 = 2$ ,  $d = 0$ ,  $x_1 = 0$ . Тогда  $\sigma = 1$ ,  $d_1 = 0$ ,  $B_0 = 12$ . Считая, что  $\theta(x, 0) \equiv 0$ , получим

$$p(x, \tau_1) = F(x, \tau_1) + \alpha_2 \int_{\tau_0(x)}^{\tau_1} F(x, \tau_1) d\tau_1,$$

где

$$F(x, \tau_1) = T(\tau_1) \left[ l^2(l - x) - \frac{1}{3}(l^3 - x^3) \right],$$

$$\tau_0 = \tau_0(l) – \text{функция, обратная к } l(\tau_0).$$

На рис. 7.13, б изображены графики функции  $p(x, \tau_1)$  в различные моменты времени, полученные путем численного интегрирования уравнений (7.40) – (7.41) при  $\alpha_2 = 1$ ,  $T_0 = 20$ ,  $\xi_0 = 0.1$ . Кривая 1 на этом рисунке соответствует остановившейся волне, а на рис. 7.13, а) изображен гранич-

ный режим  $p_1 = p(0_1, \tau_1)$ . На рис. 7.14, б) представлены остановившиеся волны, соответствующие различным законам изменения давления на границе (рис. 7.14, а). По виду этих кривых может быть сделан вывод о том, что чем больше скорость изменения давления на границе, тем больший перепад давления (при примерно одинаковой толщине) выдерживает локализованная зона.

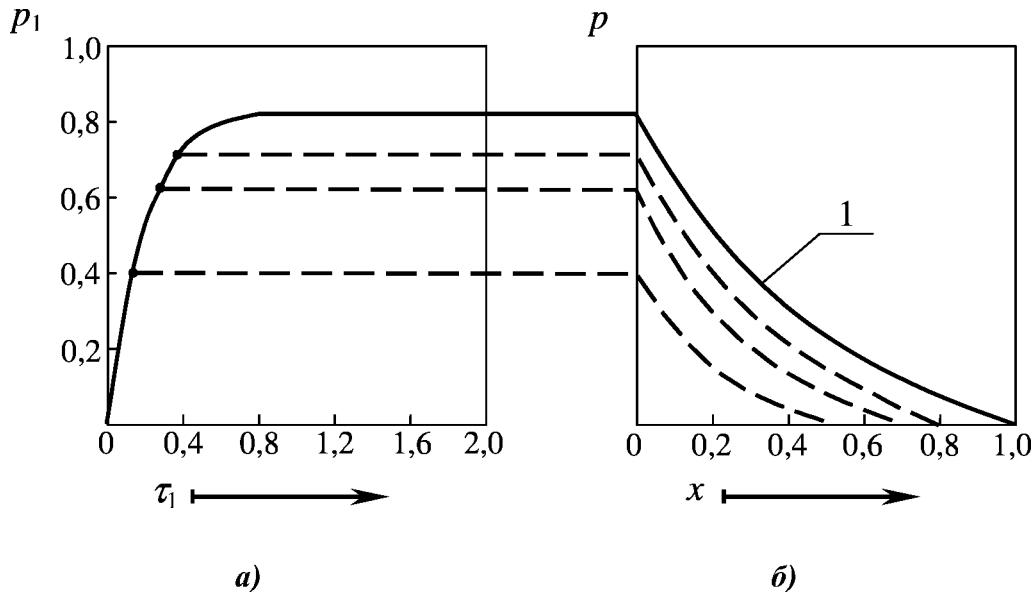


Рис. 7.13. Останавливающаяся волна

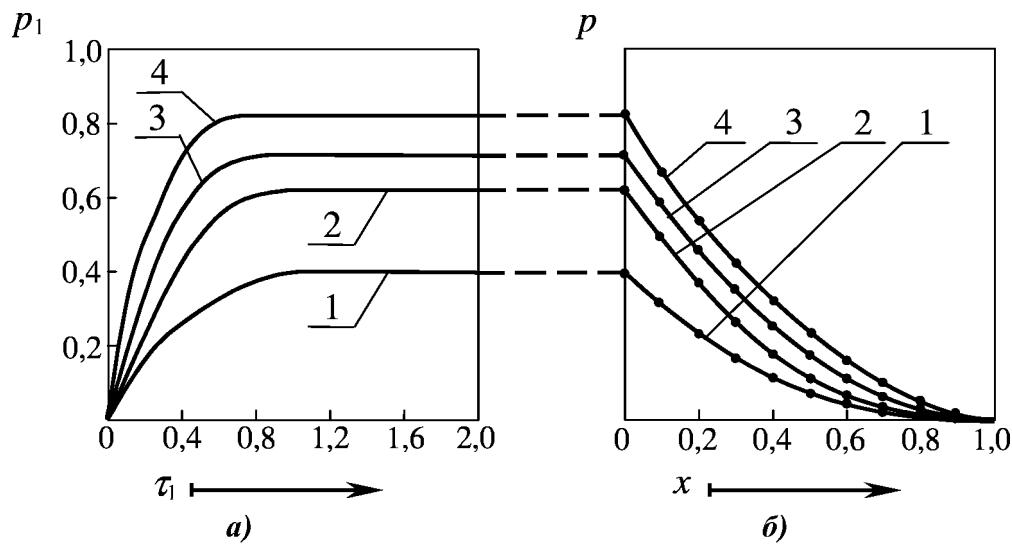


Рис. 7.14. Локализованные структуры при различных граничных режимах

Как уже отмечалось, локализованные зоны реопектически «загустевшей» жидкости могут быть использованы для создания кольматационных барьеров, предотвращающих загрязнение пласта буровыми растворами. С этой точки зрения, полученные нами результаты весьма важны, поскольку они показывают возможность регулирования ширины барьера путем управления темпами изменения давления на границе пористой среды.

Для подтверждения теоретических выводов рассмотрим эксперименты по исследованию фильтрации водополимерных буровых растворов, реопектические свойства которых обусловлены описанным в [234] механизмом «затвердевания» полимерных клубков. Лабораторная установка, на которой проводились опыты, состоит из измерительного процесса, бомбы высокого давления и модели пласта, составленной из трех соединенных друг с другом трубок, набитых кварцевым песком. Такое устройство позволяет расположить по длине модели четыре образцовых манометра. В ходе опытов в бомбе высокого давления, наполненной 1%-ным раствором полимерного реагента К-4, при помощи пресса создавалось давление 4 МПа. Затем через вентиль, расположенный на входе колонки, водополимерный раствор начинал проникать в модель пласта. Регулированием скорости открытия вентиля на входе пористой среды задавали разные темпы изменения давления и по замерам, производимым манометрами, следили за глубиной проникновения раствора. На рис. 7.15 и 7.16 представлены распределения давления, соответствующие мгновенному подъему давления на границе и подъему с темпом изменения 0,4 МПа/с.

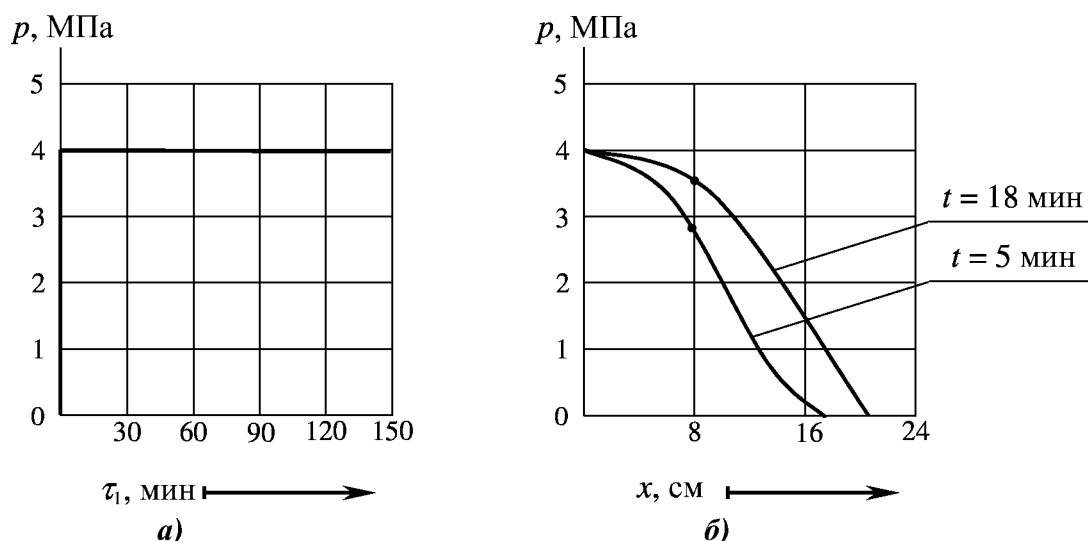
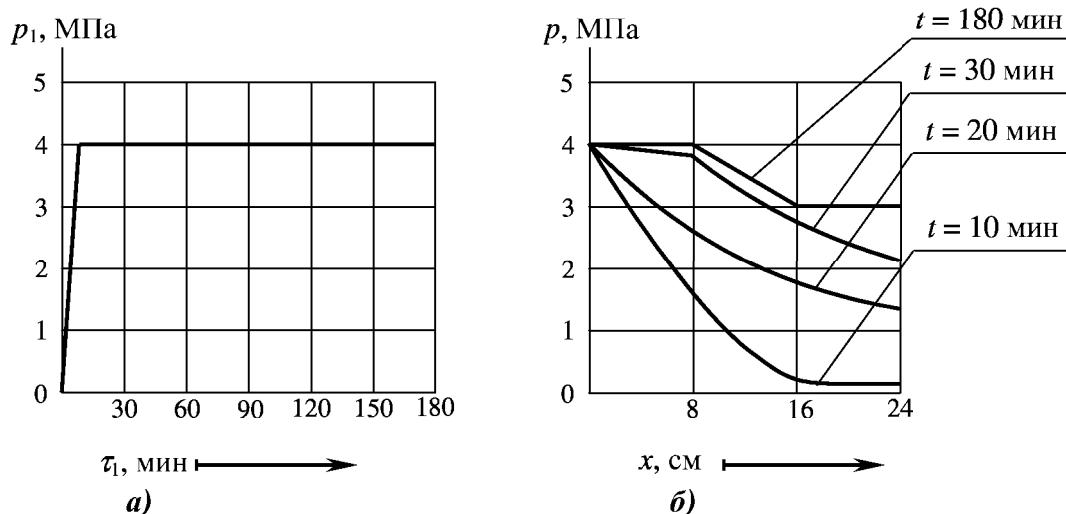


Рис. 7.15. Локализованные структуры при быстром изменении давления на границе



**Рис. 7.16. Локализованные структуры  
при медленном изменении давления на границе**

Как видим, при быстром изменении давления наблюдается останавливающаяся волна, не доходящая до конца модели пласта. Уменьшение темпа подъема давления приводит к тому, что водополимерный раствор проникает на всю длину модели и созданный барьер выдерживает перепад давления всего лишь в 1 МПа.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### **Лемма 1.**

Пусть производная функции  $F(s)$  не обращается в нуль на любом интервале  $(-a, a)$ , а именно

$$|F'(s)| \geq A > 0 , \quad (\text{п.1.1})$$

и постоянная  $A$  не зависит от  $a$ . Тогда в прямоугольнике  $0 \leq \xi \leq \xi_0$ ,  $0 \leq \theta \leq \theta_0$ , где  $\theta_0 < \frac{\tau}{2}$ ,  $\xi_0 < \frac{\tau A}{2}$  для последовательных приближений справедливы оценки

$$\left| \overset{(n)}{s}(\xi, \theta) \right| \leq M , \quad \left| \overset{(n)}{\tilde{s}}(\xi, \theta) \right| \leq M , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{п.1.2})$$

Здесь постоянная  $M$  определяется так

$$M = \max \left\{ \frac{s_0 \tau}{\tau - 2\theta_0}, \frac{s_k \tau A}{\tau A - 2\xi_0}, s_0 + \frac{(s_k - s_0)}{\tau} \theta_0, s_k + \frac{(s_k - s_0) \xi_0}{\tau A} \right\}. \quad (\text{п.1.3})$$

### **Доказательство:**

Из (2.13) при  $n = 0$  имеем

$$\overset{(1)}{s} = s_0 + \frac{s_k - s_0}{\tau} \theta, \quad \overset{(1)}{\tilde{s}} = s_k + \frac{1}{\tau F'(s_k)} (s_0 - s_k) \xi.$$

Откуда согласно (п.1.1) и (п.1.3) получаем, что

$$\left| \overset{(1)}{s}(\xi, \theta) \right| \leq M , \quad \left| \overset{(1)}{\tilde{s}}(\xi, \theta) \right| \leq M \quad (\text{п.1.4})$$

в прямоугольнике  $0 \leq \xi \leq \xi_0$ ,  $0 \leq \theta \leq \theta_0$ .

Теперь используя оценки (2.8) из (2.4) при  $n=1$  получаем, что

$$\left| {}^{(2)}s(\xi, \eta) \right| \leq s_0 + \frac{2}{\tau} M \theta \quad \text{и} \quad \left| {}^{(2)}\tilde{s}(\xi, \eta) \right| \leq s_k + \frac{2M\xi}{\tau A}.$$

Далее на постоянную  $M$  наложим требования вида

$$s_0 + \frac{2}{\tau} M \theta_0 \leq M, \quad s_k + \frac{2}{\tau A} M \xi_0 \leq M.$$

То есть

$$s_0 \leq M \left( 1 - \frac{2\theta_0}{\tau} \right) \quad \text{и} \quad s_k \leq M \left( 1 - \frac{2\xi_0}{\tau A} \right).$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \theta_0 &< \frac{\tau}{2} & \text{и} & \xi_0 < \frac{\tau A}{2}, \\ \frac{s_0 \tau}{\tau - 2\theta_0} &\leq M & \text{и} & \frac{s_k \tau A}{\tau A - 2\xi_0} \leq M. \end{aligned} \tag{п.1.5}$$

Согласно (п. 1.5) постоянную  $M$  определим теперь по формуле (п. 1.3). И, наконец, справедливость оценок (п. 1.2) докажем методом математической индукции. Пусть оценки (п. 1.2) верны для  $n$ . Тогда из (2.13) получаем, что в прямоугольнике  $0 \leq \xi \leq \xi_0, 0 \leq \theta \leq \theta_0$  имеют место оценки

$$\left| {}^{(n+1)}s(\xi, \theta) \right| \leq s_0 + \frac{2M\theta_0}{\tau} \quad \text{и} \quad \left| {}^{(n+1)}\tilde{s}(\xi, \theta) \right| \leq s_k + \frac{2M\xi_0}{\tau A}.$$

Теперь, учитывая (п. 1.3) получаем, что

$$\left| {}^{(n+1)}s(\xi, \theta) \right| \leq M \quad \text{и} \quad \left| {}^{(n+1)}\tilde{s}(\xi, \theta) \right| \leq M.$$

Лемма доказана.

**Теорема 1.**

Пусть выполнены условия:

$$|F'(s)| \geq A > 0, \quad |F''(s)| \leq B, \quad s \in [-M, M]. \quad (\text{п.1.6})$$

Тогда в прямоугольнике  $0 \leq \xi \leq \xi_0, 0 \leq \theta \leq \theta_0$  существует и притом единственное решение системы интегральных уравнений (2.12).

**Доказательство.**

Покажем сходимость последовательных приближений (2.13). Для этого вычтем из равенств (2.13) аналогичные равенства, получаемые заменой  $n$  на  $n-1$  будем иметь

$$\begin{aligned} {}^{(n+1)}s(\xi, \theta) - {}^{(n)}s(\xi, \theta) &= \\ = \frac{1}{\tau} \int_0^\theta &\left[ \left( {}^{(n)}\tilde{s}(\xi, \eta) - {}^{(n-1)}\tilde{s}(\xi, \eta) \right) - \left( {}^{(n)}s(\xi, \eta) - {}^{(n-1)}\tilde{s}(\xi, \eta) \right) \right] d\eta, \end{aligned} \quad (\text{п.1.7})$$

$$\begin{aligned} {}^{(n+1)}\tilde{s}(\xi, \theta) - {}^{(n)}s(\xi, \theta) &= \\ = \frac{1}{\tau} \int_0^\xi &\left\{ \frac{1}{F'({}^{(n)}\tilde{s}(\eta, \theta))} \left[ \left( {}^{(n)}s(\eta, \theta) - {}^{(n-1)}s(\eta, \theta) \right) - \left( {}^{(n)}\tilde{s}(\eta, \theta) - {}^{(n-1)}\tilde{s}(\eta, \theta) \right) \right] + \right. \end{aligned} \quad (\text{п.1.8})$$

$$\left. + \left[ \frac{1}{F'({}^{(n)}\tilde{s}(\eta, \theta))} - \frac{1}{F'({}^{(n-1)}\tilde{s}(\eta, \theta))} \right] \left( {}^{(n-1)}s(\eta, \theta) - {}^{(n-1)}\tilde{s}(\eta, \theta) \right) \right\} d\eta.$$

Соотношение (п. 1.8) перепишем следующим образом

$$\begin{aligned}
 & \overset{(n+1)}{\tilde{s}}(\xi, \theta) - \overset{(n)}{s}(\xi, \theta) = \\
 & = \frac{1}{\tau} \int_0^\xi \left\{ \frac{1}{F' \left( \overset{(n)}{\tilde{s}}(\eta, \theta) \right)} \left[ \left( \overset{(n)}{s}(\eta, \theta) - \overset{(n-1)}{s}(\eta, \theta) \right) - \left( \overset{(n)}{\tilde{s}}(\eta, \theta) - \overset{(n-1)}{\tilde{s}}(\eta, \theta) \right) \right] - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{F'' \left( \overset{(n-1)}{\tilde{s}}(\eta, \theta) + \alpha \left( \overset{(n)}{\tilde{s}}(\eta, \theta) - \overset{(n-1)}{\tilde{s}}(\eta, \theta) \right) \right)}{F'^2 \left( \overset{(n-1)}{\tilde{s}}(\eta, \theta) + \alpha \left( \overset{(n)}{\tilde{s}}(\eta, \theta) - \overset{(n-1)}{s}(\eta, \theta) \right) \right)} \times \right. \\
 & \quad \left. \times \left( \overset{(n)}{\tilde{s}}(\eta, \theta) - \overset{(n-1)}{\tilde{s}}(\eta, \theta) \right) \left( \overset{(n-1)}{s}(\eta, \theta) - \overset{(n-1)}{\tilde{s}}(\eta, \theta) \right) \right] d\eta. \tag{п.1.9}
 \end{aligned}$$

Теперь, учитывая оценки (п. 1.2) и (п. 1.6) из (п. 1.7) и (п. 1.9), получаем

$$\left| \overset{(n+1)}{s} - \overset{(n)}{s} \right| \leq \frac{1}{\tau} \int_0^\theta \left[ \left| \overset{(n)}{\tilde{s}} - \overset{(n-1)}{\tilde{s}} \right| + \left| \overset{(n)}{s} - \overset{(n-1)}{s} \right| \right] d\eta, \tag{п.1.10}$$

$$\left| \overset{(n+1)}{\tilde{s}} - \overset{(n)}{\tilde{s}} \right| \leq \frac{1}{\tau} \int_0^\xi \left\{ \frac{1}{A} \left[ \left| \overset{(n)}{s} - \overset{(n-1)}{s} \right| + \left| \overset{(n)}{\tilde{s}} - \overset{(n-1)}{\tilde{s}} \right| \right] + \frac{2MB}{A^2} \left| \overset{(n)}{\tilde{s}} - \overset{(n-1)}{\tilde{s}} \right| \right\} d\eta. \tag{п.1.11}$$

Далее, полагая

$$p_n = \left| \overset{(n)}{s} - \overset{(n-1)}{s} \right| + \left| \overset{(n)}{\tilde{s}} - \overset{(n-1)}{\tilde{s}} \right|, \quad n=1,2,\dots$$

из (п. 1.10) и (п. 1.11) получаем, что

$$p_{n+1}(\xi, \theta) \leq C \left[ \int_0^\theta p_n(\xi, \eta) d\eta + \int_0^\xi p_n(\eta, \theta) d\eta \right], \tag{п.1.12}$$

$n=1, 2, \dots$  Здесь постоянная  $C$  зависит от  $\tau, A, B$  и  $M$ .

Теперь в силу Леммы 1 имеем

$$p_1(\xi, \theta) \leq 4M$$

в прямоугольнике  $0 \leq \xi \leq \xi_0$ ,  $0 \leq \theta \leq \theta_0$  и тогда из (п.1.12) при  $n=1$  получаем

$$p_2(\xi, \theta) \leq 4MC(\theta + \xi). \quad (\text{п. 1.13})$$

Далее, используя (п. 1.13) из (п. 1.12) для  $n = 2$  будем иметь

$$p_3(\xi, \theta) \leq 4MC^2(\theta + \xi)^2.$$

Аналогично получаем, что

$$p_4(\xi, \theta) \leq \frac{4MC^3 2(\theta + \xi)^3}{3}, \quad p_5(\xi, \theta) \leq \frac{4MC^2 2^2(\theta + \xi)^4}{3 \cdot 4}$$

и вообще

$$p_n(\xi, \theta) \leq \frac{2^n MC^{n-1}}{(n-1)!} (\theta + \xi)^{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots. \quad (\text{п.1.14})$$

Формулу (п. 1.14) легко обосновать методом математической индукции.

Доказанное таким образом неравенство (п.1.14) показывает, что два ряда

$$\begin{aligned} & s + \left( \begin{smallmatrix} (1) & (0) \\ s - s \end{smallmatrix} \right) + \left( \begin{smallmatrix} (2) & (1) \\ s - s \end{smallmatrix} \right) + \cdots + \left( \begin{smallmatrix} (n) & (n-1) \\ s - s \end{smallmatrix} \right) + \cdots \\ & \tilde{s} + \left( \begin{smallmatrix} (1) & (0) \\ \tilde{s} - \tilde{s} \end{smallmatrix} \right) + \left( \begin{smallmatrix} (2) & (1) \\ \tilde{s} - \tilde{s} \end{smallmatrix} \right) + \cdots + \left( \begin{smallmatrix} (n) & (n-1) \\ \tilde{s} - \tilde{s} \end{smallmatrix} \right) + \cdots \end{aligned} \quad (\text{п.1.15})$$

допускают в качестве мажоранты ряд из функций  $M$  и  $p_n(\xi, \theta)$ :

$$M + p_1(\xi, \theta) + p_2(\xi, \theta) + \cdots + p_n(\xi, \theta) + \dots,$$

который, в свою очередь, допускает в качестве мажоранты сходящийся ряд с постоянными членами

$$M + 4M + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n MC^{n-1}}{(n-1)!} (\xi_0 + \theta_0)^{n-1} = 3M + 2Me^{[2C(\xi_0 + \theta_0)]}.$$

Следовательно, ряды (п. 1.15) абсолютно и равномерно сходятся в прямоугольнике  $0 \leq \xi < \xi_0$ ,  $0 \leq \theta \leq \theta_0$ , последнее равносильно тому, что  $s^{(n)}$  и  $\tilde{s}^{(n)}$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно стремятся к некоторым вполне определенным пределам  $s$  и  $\tilde{s}$  соответственно.

Далее, эти пределы удовлетворяют интегральным уравнениям (2.12), так как в формулах (2.13) можно перейти к пределу при  $n \rightarrow \infty$  «под знаками интегралов», в результате чего эти формулы перейдут в интегральные уравнения (2.12).

Докажем наконец, что функции  $s$  и  $\tilde{s}$  образуют единственное решение системы интегральных уравнений (2.12).

Действительно, пусть  $s^*$  и  $\tilde{s}^*$  – какое-нибудь решение системы интегральных уравнений (2.12). Тогда, вычтя из рекуррентных формул (2.13) интегральные уравнения (2.12), в которые вместо  $s$  и  $\tilde{s}$  подставлены соответственно  $s^*$  и  $\tilde{s}^*$ , мы, как и выше, получаем формулы, аналогичные (п. 1.10) и (п. 1.11):

$$\begin{aligned} \left| s^{(n+1)} - s^* \right| &\leq \frac{1}{\tau} \int_0^\theta \left[ \left| \tilde{s}^{(n)} - \tilde{s}^* \right| + \left| s^{(n)} - s^* \right| \right] d\eta, \\ \left| \tilde{s}^{(n+1)} - \tilde{s}^* \right| &\leq \frac{1}{\tau} \int_0^\xi \left\{ \frac{1}{A} \left[ \left| s^{(n)} - s^* \right| + \left| \tilde{s}^{(n)} - \tilde{s}^* \right| \right] + \frac{2MB}{A^2} \left| \tilde{s}^{(n)} - \tilde{s}^* \right| \right\} d\eta. \end{aligned}$$

Откуда, если положить

$$p_n^*(\xi, \theta) = \left| s^{(n)} - s^* \right| + \left| \tilde{s}^{(n)} - \tilde{s}^* \right|,$$

следует, как и выше, что

$$p_{n+1}^*(\xi, \theta) \leq C \left[ \int_0^\theta p_n^*(\xi, \eta) d\eta + \int_0^\xi p_n^*(\eta, \theta) d\eta \right].$$

Но из этого неравенства, имеющего точно тот же вид, что и (п. 1.12), получаем оценку

$$p_n^*(\xi, \theta) \leq \frac{2^n M C^{n-1}}{(n-1)!} (\theta + \xi)^{n-1}.$$

Следовательно,  $p_n^*$ , не превосходя общего члена всюду сходящегося ряда, необходимо стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , откуда тем более

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| s^{(n)} - s^* \right| = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \tilde{s}^{(n)} - \tilde{s}^* \right| = 0,$$

т.е.  $s^{(n)}$  и  $\tilde{s}^{(n)}$  необходимо должны совпадать соответственно с пределами  $s$  и  $\tilde{s}$  при  $n \rightarrow \infty$ , ранее обозначенными через  $s$  и  $\tilde{s}$ .

Тем самым теорема доказана.

**Замечание 1.** Используя принцип продолжения решения, можно доказать существование и единственность решения системы интегральных уравнений (2.12) в произвольном прямоугольнике  $R$ .

**Замечание 2.** Так как решение системы (2.3)  $s(\xi, \theta)$  и  $\tilde{s}(\xi, \theta)$  – непрерывные функции в прямоугольнике  $R$ , то и производные  $\frac{\partial s(\xi, \theta)}{\partial \theta}$  и  $\frac{\partial \tilde{s}(\xi, \theta)}{\partial \xi}$  – суть непрерывные функции в  $R$ .

**Замечание 3.** Теорема 1 справедлива и в случае, если  $s_0 = s_0(\xi)$  и  $s_k = s_k(\theta)$  являются гладкими функциями.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### Построение точного решения модельной задачи

Построим решение исходной задачи (2.7) – (2.8) в случае, когда функция  $F(s)$  – линейная, т.е.,  $F(s)=As+B$ ,  $A, B$  – постоянные.

Таким образом, система уравнений (2.7), соответствующая рассматриваемой задаче, имеет вид

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} = \frac{1}{\tau}(\tilde{s} - s), \quad \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \xi} = \frac{1}{\tau A}(s - \tilde{s}) \quad (\text{п. 2.1})$$

$$s(\xi, 0) = s_0, \quad \tilde{s}(0, \theta) = s_k. \quad (\text{п. 2.2})$$

Положим

$$\theta = \tau y, \quad \xi = -\tau x A, \quad s(\xi, \theta) = p(x, y), \quad \tilde{s}(\xi, \theta) = q(x, y) \quad (\text{п. 2.3})$$

тогда (п. 2.1), (п. 2.2) сводится к следующей задаче:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = q - p, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = q - p, \quad (\text{п. 2.4})$$

$$p(x, 0) = s_0, \quad q(0, y) = s_k. \quad (\text{п. 2.5})$$

Далее решение задачи (п. 2.4), (п. 2.5) будем искать в виде:

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(x) y^i, \quad q(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i(x) y^i. \quad (\text{п. 2.6})$$

Подстановка рядов (п. 2.6) в уравнения (п. 2.4), приводит к следующим соотношениям на неизвестные функции  $p_i(x)$  и  $q_i(x)$ :

$$(1+i)p_{i+1}(x) = q_i(x) - p_i(x), \quad q'_i(x) = (1+i)p_{i+1}(x), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{п. 2.7})$$

При этом граничные условия (п. 2.5) приводятся к виду

$$p_0(x) = s_0, \quad q_0(0) = s_k, \quad q_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (\text{п. 2.8})$$

Теперь из (п. 2.7) и (п. 2.8) получаем задачу для определения коэффициентов  $p_i(x)$  вида:

$$p'_{i+1}(x) - p_{i+1}(x) = -\frac{1}{(i+1)} p'_i(x), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{п. 2.9})$$

$$p_0(x) = s_0, \quad p_1(0) = s_k - s_0, \quad p_{i+1}(0) = -\frac{1}{(i+1)} p_i(0), \quad i = 1, 2, \dots \quad (\text{п. 2.10})$$

Из (п. 2.10) находим

$$p_{i+1}(0) = \frac{(-1)^i}{(1+i)!} (s_k - s_0), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{п. 2.11})$$

Далее в уравнениях (п. 2.9) удобно для дальнейшего положить

$$p_i(x) = h_i(x) e^x, \quad i = 1, 2, \dots \quad (\text{п. 2.12})$$

Тогда подстановка (п. 2.12) в (п. 2.9) дает

$$h'_{i+1}(x) = -\frac{1}{(i+1)} [h'_i(x) + h_i(x)], \quad i = 1, 2, \dots \quad (\text{п. 2.13})$$

В силу (п. 2.11) и (п. 2.12)

$$h_{i+1}(0) = \frac{(-1)^i}{(1+i)!} (s_k - s_0), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{п. 2.14})$$

а из (п. 2.9) при  $i = 0$  с учетом условий (п. 2.10) будем иметь

$$p_1(x) = (s_k - s_0) e^x.$$

Следовательно, согласно (п. 2.12)

$$h_1(x) = s_k - s_0. \quad (\text{п. 2.15})$$

Теперь из (п. 2.13) и (п. 2.14) получаем

$$h_{i+1}(x) = -\frac{1}{(i+1)} \left[ h_i(x) + \int_0^x h_i(\eta) d\eta \right], \quad i = 1, 2, \dots \quad (\text{п. 2.16})$$

И, наконец, учитывая (п. 2.15), из (п. 2.16) находим, что

$$h_i(x) = \frac{(-1)^{i+1}(s_k - s_0)}{i!} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{k!} C_{i-1}^k x^k, \quad i=1,2,\dots \quad (\text{п. 2.17})$$

Здесь

$$C_{i-1}^k = \frac{(i-1)!}{k!(i-1-k)!}, \quad 0!=1.$$

Формула (п. 2.17) обосновывается принципом математической индукции с использованием соотношения

$$C_{i-1}^k + C_{i-1}^{k-1} = C_i^k.$$

Таким образом, согласно формулам (п. 2.6), (п. 2.7), (п. 2.8), (п. 2.12), (п. 2.17) имеем

$$\begin{aligned} p(x, y) &= s_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{i+1}(s_k - s_0)}{i!} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{j!} C_{i-1}^j x^j \right\} e^x y^i, \\ q(x, y) &= s_0 + (s_k - s_0) e^x + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^i(s_k - s_0)}{i!} \sum_{j=1}^i \frac{1}{j!} C_{i-1}^{j-1} x^j \right\} e^x y^i. \end{aligned} \quad (\text{п. 2.18})$$

Итак, формулы (п. 2.18) дают решение задачи (п. 2.4), (п. 2.5).

Теперь, возвращаясь к старым переменным (п. 2.3), получаем из (п. 2.18) решение исходной задачи (п. 2.1), (п. 2.2):

$$s(\xi, \theta) = s_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{i+1}}{i!} (s_k - s_0) \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{j!} C_{i-1}^j \left( -\frac{\xi}{\tau A} \right)^j \right\} e^{-\frac{\xi}{\tau A}} \left( \frac{Q}{\tau} \right)^i, \quad (\text{п. 2.19})$$

$$\tilde{s}(\xi, \theta) = s_0 + (s_k - s_0) e^{-\frac{\xi}{\tau A}} + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^i(s_k - s_0)}{i!} \sum_{j=1}^i \frac{1}{j!} C_{i-1}^{j-1} \left( -\frac{\xi}{\tau A} \right)^j \right\} e^{-\frac{\xi}{\tau A}} \left( \frac{\theta}{\tau} \right)^i.$$

Отметим, что формулы (п. 2.2.19) можно получить, решая систему интегральных уравнений (2.12) в случае  $F(s) = As + B$  методом последовательных приближений.

## **ЛИТЕРАТУРА**

1. Абрагам А. Время вспять или физик, физик, где ты был. – М.: Наука, 1991. – 323 с.
2. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем.– М.: Недра, 1982.– 407 с.
3. Акилов Ж.А. Нестационарные движения вязкоупругой жидкости.– Ташкент: Фан, 1972. – 104 с.
4. Ализаде И.М., Аметов И.М., Мамезаде Р.Б. О нестационарной фильтрации вязко–упругих жидкостей в пористой среде // Изв. ВУЗов. Нефть и газ. – 1974, №9. – С.52–54.
5. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. – М.: Машиностроение, 1988. –280 с.
6. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, – 1988. – 286 с.
7. Алишаев М.Г. О нестационарной фильтрации с начальным градиентом // Труды ВНИИ. Теория и практика добычи нефти. – Недра, 1968. – С.202–210.
8. Алишаев М.Г. О нестационарной фильтрации с релаксацией давления // Гидромеханика. – 1974, выпуск 3. – С.166–177.
9. Алишаев М.Г., Мирзаджанзаде А.Х. К учету явлений запаздывания в теории фильтрации // Изв. вузов. Нефть и газ. – 1975, №6. – С.71–74.
10. Аметов И.М. Фильтрация газированной жидкости при неравновесных условиях // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1980, №3. – С.144–148.
11. Аметов И.М., Аметов А.М. Нелинейные волны и локализованные структуры при двухфазной фильтрации // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1988, №1. – С.71–76.

12. Аметов И.М., Байдиков Ю.Н., Рузин Л.М. и др. Добыча тяжелых и высоковязких нефтей. – М.: Недра, 1985. – С.205.
13. Аметов И.М., Дорфман М.Б. Движение вязкоупругих жидкостей в пористой среде // ИФЖ. – 1987. – Т.52, №5. – С.751–755.
14. Аметов И.М., Шерстнев Н.М. Применение композитных систем в технологических операциях эксплуатации скважин. – М.: Недра, 1989. – 213 с.
15. Анализ существующей системы разработки и составление геолого-технических мероприятий по организации показателей разработки Северо-Салымского месторождения. Этапы 3,5 // Отчет о НИР. Под руководством Телина А.Г. – Уфа: ВНИИЦ Нефтегазтехнология, 1993. – 41с.
16. Андерсон Д., Таннхилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. – М.: Мир, 1990. – 384 с.
17. Ахмедов К.А.О применении идентификационных моделей при расчете фазовых превращений // Изв. вузов. Нефть и газ. – 1978. – №6. – С.26–30.
18. Бабин А.В., Вишин М.И. АтTRACTоры эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности // УМН. – 1983. – Т.38, №4. – С.133–187.
19. Бабушкин А.Б., Гончарский А.Б. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. – М.: Изд–во МГУ. – 1989. – 199с.
20. Бан А., Богомолова А.Ф., Максимов В.А., Николаевский В.Н., Оганджаняц В.Г., Рыжик В.М. Влияние свойств горных пород на движение в них жидкости. – М.: Гостоптехиздат. – 1962. – 275с.
21. Баренблatt Г.И., Желтов Ю.П., Коцина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // ПММ. – 1960. – Т.24, №5. – С.852–864.
22. Баренблatt Г.И. Фильтрация двух несмешивающихся жидкостей в однородной пористой среде // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1971. – №5. – С.144–151.

23. Баренблatt Г.И., Винниченко А.П. Неравновесная фильтрация несмешивающихся жидкостей // Успехи механики. – 1980 – №3. – С.52–58.
24. Баренблatt Г.И., Гильман А.А. Математическая модель неравновесной протовоточной капиллярной пропитки // ИФЖ. – 1987. – Т.52, №3. – С.456–461.
25. Баренблatt Г.И., Ентов В.И. Неравновесные эффекты при фильтрации несмешивающихся жидкостей // Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. – Новосибирск: ИТПМ, 1972. – С.33–43.
26. Баренблatt Г.И., Ентов В.И., Рыжик В.М. Движение жидкости и газов в природных пластах. – М.: Недра, 1984. – 211с.
27. Баренблatt Г.И., Ентов В.И., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. – М.: Недра, 1972. – 286с.
28. Баренблatt Г.И., Мамедов Ю.Г., Мирзаджанзаде А.Х. Неравновесные эффекты при фильтрации вязкоупругих жидкостей // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1973. – №5. – С.76–83.
29. Бармин А.А., Гарагаш Д.И. О фильтрации эмульсии в пористой среде с учетом межфазного массообмена компонентами // Изв. РАН. МЖГ. – 1997. – №1. – С.77–88.
30. Басниев К.С., Бедриковецкий П.Г., Дединец Е.Н. Определение эффективной проницаемости трещиновато–пористой среды // ИФЖ. – 1988. – Т.55, №3. – С.940–948.
31. Басниев К.С., Власов А.М., Коцина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидравлика. – М.: Недра, 1986. – 304с.
32. Басович И.Б. Об определении параметров пласта с применением модулирующих функций // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1973. – №5. – С.154 –158.
33. Басович И.Б. Определение переменной проницаемости пласта в случае радиальной симметрии по опытным откачкам из центральной скважины // ПММ. – 1974. – Т.38, №3. – С.514–522.

34. Бек Дж., Блокуэлл Б., Сент–Клер Ч. Некорректные обратные задачи теплопроводности. – М.: Мир, 1989. – С. 310.
35. Белкин И.М., Виноградов Г.В., Леонов А.И. Ротационные приборы. Измерение вязкости и физико–механических характеристик материалов. – М.: Машиностроение, 1987. – 272 с.
36. Беллман Р., Заде Л. Принятие решений в расплывчатых условиях // Вопросы анализа и процедуры принятия решений. – М.: Мир, 1976. – С.172–215.
37. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. – М.: Наука, 1984. – 520с.
38. Белоцерковский О.М. Численный эксперимент в турбулентности: от порядка к хаосу. – М.: Наука, 1997. – 207с.
39. Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложения математики. – М.: Наука, 1983. – 328 с.
40. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – С.503.
41. Боксерман А.А., Желтов Ю.П., Кочешков А.А. О движении несмешивающихся жидкостей в трещиновато–пористой среде // ДАН СССР. – 1964. – Т.155, №6. – 1282–1285.
42. Болотов А.А., Мирзаджанадзе А.Х., Нестеров А.А. Реологические свойства растворов газов в жидкости в области давления насыщения // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1988. – №1. – С.172–175.
43. Бочаров О.Б. Влияние неравновесности на двухфазное течение в пористой среде // Гидродинамика и тепломассообмен в неподвижных зернистых слоях. – Новосибирск: Институт теплофизики, 1991. – С.89–95.
44. Бочаров О.Б., Витовский О.В., Кузнецов В.В. Структура скачков насыщенности при неравновесном вытеснении в пористых средах // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1990. – №6. – С.97–104.

45. Бочевер Ф.М., Гармонов И.В., Лебедев А.В., Шестоков В.М. Основы гидрогеологических расчетов. – М.: Недра, 1969. – 367с.
46. Буевич Ю.А., Леонов А.И. Автоколебания в куэттовском течении несжимаемой максвелловской жидкости // ПМТФ. – 1966. – №2. – С.305 – 311.
47. Буевич Ю.А. О докритическом образовании зародышей в жидкости с ПАВ // ИФЖ. – 1987. – Т.52, №3. – С.394–402.
48. Буевич Ю.А., Макаров В.Г. Континуальная механика монодисперсных суспензий. Реологические уравнения состояния для суспензий умеренной концентрации // ПММ. – 1973. – Т.37, №6. – С.1059–1077.
49. Буевич Ю.А., Мамбетов У.М. К теории совместной фильтрации несмешивающихся жидкостей // ИФЖ. – 1991. – Т.10, №3. – С.98–107.
50. Булгакова Г.Т. Хасанов М.М. Автоколебания в гидродинамике газированной жидкости // Изв. вузов. Нефть и газ. – 2000. – №2. – С.61–66.
51. Булгакова Г.Т., Каримов И.В. Численные исследования релаксационной фильтрации двухфазной жидкости // Мат. 2-ой межд. конф. Проблемы строительного комплекса России. – Уфа: УГНТУ, 1998. – С.40–43.
52. Булгакова Г.Т., Блинов С.А., Овсяков А.В. Экспериментальные исследования фильтрационных свойств пласта при повторном насыщении его промытых зон // Нефтепромысловое дело. – 1998. – №6. – С.34–36.
53. Булгакова Г.Т., Калякин Л.А., Хасанов М.М. Нестационарные режимы неравновесной двухфазной фильтрации // Прикладная математика и механика. – 2000. – Том 64, №2. – С.293–298.
54. Булгакова Г.Т., Каримов И.В. Численное исследование прямой и обратной задач нестационарной неравновесной фильтрации неоднородных жидкостей // Изв. Вузов. Нефть и газ. – 1998. – №2. – С. 37–43.

55. Булгакова Г.Т., Калякин.Л.А., Хасанов М.М. Неустойчивые режимы фильтрации газированной жидкости // ПМТФ. – 2000. – т.41, № 6. – С.78 – 85.
56. Булыгин В.Я. Гидромеханика нефтяного пласта. – М.: Недра, 1974. – 232с.
57. Бураков М.М. Об уравнении движения жидкости в теории релаксационной фильтрации // Изв.Вузов. Нефть и газ. – 1994. – №6. – С.83–88.
58. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 384 с.
59. Быков В.Г., Николаевский В.Н. Нелинейные волны в пористых насыщенных средах // Доклады РАН. – 1993. – Т.328, №1. – С.35–38.
60. Быков В.Г., Николаевский В.Н. Нелинейные геоакустические волны в морских осадках // Акустический журнал. – 1990. – Т. 36. – Вып. 4. – С.606–610.
61. Вабишевич П.Н. Численное решение задач продолжения нестационарных полей по данным точечных наблюдений // Тр. 2-ой международной конференции «Идентификация динамических систем и обратные задачи». – С.-Петербург, 1994. – Т.1. – С.А–2–1 – А–2–12.
62. Вабишевич П.Н. Численные методы решения задач со свободной границей. – М.: Изд–во МГУ. – 1987. – 163с.
63. Вабишевич П.Н., Денисенко А.Ю. Численные методы решения коэффициентной обратной задачи //Методы математического моделирования и вычислительной диагностики. – М.: Изд–во МГУ. – 1990. – С.35–45.
64. Вапник В.Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. – М.: Наука, 1979. – 498с.
65. Вапник В.Н., Глазкова Т.Г., Кащеев Т.А. и др. Алгоритмы и программы восстановления зависимостей // Под ред. В.Н.Вапника. – М.: Недра, 1984. – 815с.

66. Вахитов Г.Г., Розенберг М.Д., Борисов Ю.П. и др. Экспериментальные исследования фильтрации в нефтяном пласте // В кн. Проблемы теории фильтрации и механики процессов повышения нефтедобычи. М.:Наука, 1987. – С.57 – 67.
67. Винниченко А.П. К теории нестационарной фильтрации несмешивающихся жидкостей в пористой среде // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1978. – №3. – С.57–59.
68. Виноградов Г.В., Малкин А.Я. Реология полимеров. – М.: Химия, 1977. – 439 с.
69. Вирновский Г.А., Левитан Е.И. Об идентификации двумерной модели течения однородной жидкости в пористой среде // Ж. Вычисл. матем. и матем. физ. – 1990. – Т.30, №5. – С.727–735.
70. Всеволожский В.А. Основы гидрогеологии. – М.: Изд–во МГУ, 1991. – 351с.
71. Гасанов Г.Т., Саттаров Р.М. Об определении физико–механических свойств вязко–упругих сред // Изв. вузов. Нефть и газ. – 1976. – №10. – С.69–71.
72. Георгиевский В.Б. Унифицированные алгоритмы для определения фильтрационных параметров. – Киев: Наукова Думка, 1967. – 328с.
73. Гидравлика глинистых и цементных растворов / А.Х. Мирзаджанзаде и др. – М.: Недра, 1966. – 288 с.
74. Гласко В.Б. Обратные задачи математической физики. – М.: Изд–во МГУ, 1984. – 111с.
75. Гленсдорф П., Пригожин И.Р. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций.– М.: Мир, 1973. – 280с.
76. Гнатюк Р.А., Лысянская Э.В., Василечко В.П. Определение фазовых проницаемостей для газа и нефти по экспериментальным данным // Исследования в области разработки нефтяных месторождений. – 1869. – Вып. 3. – С.37–40.

77. Гогосов В.В., Николаевский В.Н. Реология суспензий. – М.: Мир, 1975. – 334 с.
78. Голф–Рахт Т.Д. Основы нефтепромысловой геологии и разработки трещиноватых коллекторов. – М.: Недра, 1986. – С.607.
79. Горбунов В.Е. О свойствах смесей флюидов. – М.: ВНИИЭГазпром, 1990. – 70с.
80. Гукасов Н.А., Пирвердян А.М. Об определении гидромеханического давления на забое скважины при спускоподъемных операциях // НХ. – 1959. – №8. – С.25 – 28.
81. Гурбанов Р.С., Касимов А.Ф., Мирзаджанзаде А.Х. Гидродинамика вязко–пластичных сред // Изв. АН СССР.МЖГ. – 1967. – №8. – С.171–178.
82. Гуревич Г.Р. Гидродинамические модели фильтрации многокомпонентных углеводородных смесей. // Тр. МИНХ и ГП им. Губкина. – 1972. – Вып.88. – С.116–121.
83. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге–Кутта для жестких нелинейных ДУ. – М.: Мир, 1988. – 332 с.
84. Динариев О.Ю., Николаев О.В. О релаксационных процессах в низко–проницаемых пористых материалах // ИФЖ. – 1990. – Т.58, №1. – С.78–82.
85. Добрынин В.М., Ковалев А.Г., Кузнецов А.М. Фазовые проницаемости коллекторов нефти и газа. – М.: ВНИИОЭНГ, 1988. – 55с.
86. Дубенко Т.И. Идентификация и оценивание параметров в стохастических системах, описываемых уравнениями с частичными производными // Автоматика и телемеханика. – 1983. – №12. – С.5–19.
87. Дулан Э., Миддер Дж., Шиндерс У. Равномерные численные методы решения задач с граничным слоем. – М.: Мир, 1983. – 200 с.

88. Дьедни А.К. О разуме, машинах и метафизике // В мире науки. – 1980. – № 2, – С. 82–86.
89. Ентов В.М. К теории неравновесных эффектов при фильтрации неоднородных жидкостей // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1980. – №3. – С.52–58.
90. Ентов В.М. Физико–химическая гидродинамика процессов в пористых средах. Математические модели методов повышения нефтеотдачи пластов // Успехи механики. – 1981. – Т.4, №3. – С.41–79.
91. Ентов В.М., Беликова М.Г., Чен–Син Э. Моделирование неравновесной и нелинейной фильтрации в сетке капилляров // Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. – Новосибирск: ИТПМ, 1977. – С.17–24.
92. Ентов В.М., Зазовский А.Ф. Гидродинамика процессов повышения нефтеотдачи. – М.: Недра, 1983. – 232 с.
93. Ентов В.М., Зак С.А., Чен–Син Э. Моделирование вытеснения нефти полимерным раствором // ИФЖ. – 1985. – Т.48, №2. – С.214–219.
94. Ентов В.М., Зак С.А., Чен–Син Э. О двухфазном течении в пористой среде с микрогетерогенной смачиваемостью // ДАН СССР. – 1984. – Т.274, №6. – С.1334–1337.
95. Ентов В.М., Коноплева А.В., Семенов Н.А. Моделирование электроосмотического вытеснения и процесса коммутации пористой среды // Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. – Новосибирск: ИТПМ, 1980. – С.92–97.
96. Ентов В.М., Фельдман А.Е., Чен–Син Э. Моделирование процесса капиллярного вытеснения в пористой среде // Изв. АН СССР. Программирование. – 1975. – №3. – С.67–74.
97. Ентов В.М., Чен–Син Э. Микромеханика двухфазного течения в пористых средах // Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. – Новосибирск: ИТПМ, 1987. – С.120 –129.

98. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976. – 168 с.
99. Зиновьева Л.А. Приближенный метод расчета притока газированной нефти к скважинам с учетом реальных свойств пластовых нефтей // Тр. ВНИИ. – 1954. – №6. – С.254–269.
100. Искендеров А.Д. Некоторые обратные задачи для определения фильтрационных и теплофизических параметров // Неклассические методы в геофизике. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1977. – С.54–63.
101. Искендеров А.Д. Об одной обратной задаче для квазилинейных параболических уравнений // ДУ. – 1974. – №5. – Вып.10. – С.890–898.
102. Кадет В.В., Селяков В.И. Исследование влияния вязкости и капиллярных сил на процесс нестационарной двухфазной фильтрации // Доклады РАН. – 1996. – Т.350, №5. – С.622–626.
103. Кальоти.Дж. От восприятия к мысли.–М.: Мир, 1998. – 221 с.
104. Каракин А.В., Леонов А.И. Об автоколебаниях при истечении полимерных растворов из капилляра // ПМТФ. – 1968. – №3.–С. 110 – 114.
105. Каракурин Н.Т., Кондаратцев С.А., Хасанов М.М. К обратной задаче теории двухфазной фильтрации // ПММ. – 1996. – Т.60, №3. – С.489–493.
106. Кац Р.М. Об одной модели многофазной фильтрации в трещиновато–пористых средах // Труды ВНИИ. – 1984. – №. 83. – С.46–51.
107. Кац Р.М., Авакян Э.А. Численное моделирование процесса вытеснения нефти водой из трещиновато–пористого коллектора // Труды ВНИИ. – 1984. – №. 87. – С.88–94 .
108. Кац Р.М., Ледович И.С. Математическая модель двумерной двухфазной фильтрации слабосжимаемых жидкостей в трещиновато–пористых средах // Труды ВНИИ. – 1984. – №.83. – С.78–86.

109. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы. – М.: Мир, 1964. – 351с.
110. Коновалов А.Н. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. – Новосибирск: Наука, 1988. – 157с.
111. Косевич А.М., Ковалев А.С. Введение в нелинейную физическую механику. – Киев: Наукова думка, 1989. – 304с.
112. Костерин А.В. Об уравнениях неравновесной фильтрации // ИФЖ. – 1980. – Т.39, №1. – С.77–80.
113. Кричлоу Г.Б. Современная разработка нефтяных месторождений – проблемы моделирования. – М.: Недра, 1979. – 303с.
114. Кузнецов В.В., Димов С.В. Микроструктура двухфазного течения в пористой среде // Гидродинамика и тепломассоперенос в пористых средах. – Новосибирск: институт теплофизики, 1991. – С.71–88.
115. Курбанов А.К. Об уравнениях движения двухфазных жидкостей в пористой среде // Теория и практика добычи нефти. – М.: Недра., 1968. – С.281–286.
116. Курдюмов С.П. Законы эволюции и самоорганизация сложных систем // Третья всесоюзная конференция «Нелинейные явления». – М.: Наука, 1981. – С.86–94
117. Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г. Одномерные обратные задачи математической физики. – Новосибирск: Наука, 1982. – 88с.
118. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука, 1980. – 286с.
119. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны.– М.: Наука, 1997. – 496с.
120. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. – М.: Мир, 1970. – 336с.

121. Лебедев С.А., Усенко В.Ф., Швидлер М.И. О фильтрации потока переходящего из однофазного состояния в двухфазное // Изв. АН СССР. ОТН. – 1958. – №7. – С.56–60.
122. Леви Б.И., Глейзер С.Н. Расчет относительных проницаемостей по лабораторным данным нестационарной фильтрации трехфазной системы // Проблемы развития Западно-Сибирского топливного комплекса. – Тюмень. – 1984. – Вып.84. – С.43–46.
123. Леви Б.И., Зайдель Я.М., Шахмаева А.Г. О некоторых разностных схемах для решения задач двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей // Численные методы решения задач фильтрации несжимаемой жидкости. – Новосибирск: ИТПМ, 1975. – С.170–183.
124. Леви Б.И., Зайдель Я.М., Шахмаева А.Г. Численное решение многомерных задач вытеснения вязко–пластичных жидкостей // Численные методы решения задач фильтрации несжимаемой жидкости. – Новосибирск: ИТПМ, 1975. – С.184–192.
125. Левченко Д.Н., Бергштейн Н.В., Худякова А.Д. и др. Эмульсии нефти с водой и методы их разрушения. – М.: Химия, 1967. – 200 с.
126. Лейбензон Л.С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. – М.–Л.: Гостоптехиздат, 1949. – 628 с.
127. Лионс Ж.–Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 414с.
128. Логинов Б.Г., Блажевич В.А. Гидравлический разрыв пластов. – М.: Недра, 1966. – 147 с.
129. Лоскутов Л.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. – М.: Наука, – 1990. – 270с.
130. Маковей Н. Гидравлика бурения. – М.: Недра, 1986. – 305 с.
131. Манучарянц Э.О., Юдин В.А., Мишина А.Ю. Численное моделирование неравновесного вытеснения несмешивающихся жидкостей в пористой среде // Численные методы решения задач фильтрации мно-

- гофазной несжимаемой жидкости. – Новосибирск: ИТПМ, 1987. – С.190–195.
132. Мартос В.Н. Некоторые физические закономерности фильтрации газированной жидкости // В кн. Фильтрация, теплоперенос и нефтегазоотдача в сложных пластовых системах. – М.: Недра, 1978. – Вып.9. – С.36–45.
133. Мартос В.Н., Рыжик В.М. Определение динамических кривых капиллярного давления методом стабилизированной зоны // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1972. – №2. – С.57–60.
134. Мархасин И.Л. Физико–химическая механика нефтяного пласта. – М.: Недра, 1977. – 215с.
135. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука, 1982. – 320с.
136. Марчук Г.И. Методы расщепления. – М.: Наука, 1988. – 264с.
137. Марчук Г.И. О постановке некорректных обратных задач // Док. АН СССР. – 1964. – Т.156, №3. – С.503–506.
138. Марчук Г.И., Мирзаджанзаде А.Х., Желтов Ю.В. и др. Физико–геологические проблемы повышения нефтегазоотдачи пластов. – М.: Недра, 1975. 232 с.
139. Маскет М. Течение однородной жидкости в пористой среде. – М.–Л.: Гостоптехиздат, 1949. – 628с.
140. Маскет М. Физические основы технологии добычи нефти. – М.: Гостоптехиздат, 1953. – 607с.
141. Мац А.А. Экспериментальные исследования капиллярного вытеснения несмачивающей жидкости смачивающей на микромоделях пористых сред // Сб. научных трудов ВНИИ. – 1983. – №83. – С.3–11.
142. Мац А.А., Полищук А.М. Визуализация нефти, остающейся в пористой среде после заводнения // Математические методы в задачах петрофизики и корреляции. – М.: Наука, 1983. – С.125–130.

143. Медведков В.И. Расщепление потока по микроструктуре пористой среды в задачах вытеснения нефти водой // Численные методы решения задач фильтрации несжимаемой жидкости. – Новосибирск: ИТПМ, 1975. – С.214–223.
144. Медведков В.И. Условия устойчивого термодинамического равновесия и релаксации системы пористый скелет–вода–нефть // Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. – Новосибирск: ИТПМ, 1980. – С.156–164.
145. Меликов Г.Х., Азизов М.Г. Экспериментальное исследование влияния релаксационных свойств газожидкостных систем на фильтрацию в неоднородных пористых средах // Изв. вузов. Нефть и газ. – 1988. – №10. – С.35–38.
146. Мирзаджанзаде А.Х. и др. Некоторые особенности разработки и эксплуатации месторождений неньютоновских нефтей // Изв. АН Аз. ССР. сер. физ. тех. и мат. наук. – 1967. – №3–4. – С.137–144.
147. Мирзаджанзаде А.Х., Аметов И.М., Боксерман А.А. Новые перспективные направления исследований в нефтегазодобыче // Нефтяное хозяйство. – 1992. – №11. – С.14–15.
148. Мирзаджанзаде А.Х., Шахвердиев А.Х. Динамические процессы в нефтегазодобыче: Системный анализ, диагноз, прогноз. – М.: Наука, 1997. – 254с.
149. Мирзаджанзаде А.Х.. Ковалев Г.А.. Зайцев Ю.В. Особенности эксплуатации месторождений аномальных нефтей. – М.: Недра, 1972. – 200 с.
150. Мирзаджанзаде А.Х., Спивак А.И., Мавлютов М.Р. Гидроаэромеханика в бурении. – Уфа: Изд–во Уфим. нефт. ин – та, 1984. – 238 с.
151. Мирзаджанзаде А.Х., Ентов В.М. Гидродинамика в бурении. – М.: Недра, 1977. – 183 с.
152. Митлин В.С. Автоколебательные режимы течения двухфазных многокомпонентных смесей через пористые среды // Докл. АН СССР. – Т.296, №6. – С.1323–1326.

153. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. – М.: Наука, 1978. – 352с.
154. Молокович Ю.М. К теории линейной фильтрации с учетом релаксационных эффектов // Изв. Вузов. Математика. – 1977. – №5.– С.66–73.
155. Молокович Ю.М. Особенности одномерной нестационарной фильтрации при учете двойной релаксации // Численное решение задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. – Новосибирск: ИТПМ, 1977. – С.152–157.
156. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука, 1987. – 240с.
157. Мукук К В. Элементы гидравлики релаксирующих аномальных систем. – Ташкент: Фан, 1980. – 121с.
158. Мун Ф. Хаотические колебания. – М.: Мир, 1990. – 312с.
159. Муркес М.Н., Рождественский В.А., Шовкринский Г.Ю. Два численных метода решения одномерных задач фильтрации многокомпонентных систем // Вычислительная математика и математическая физика. – М.: 1977. – Т.17, №3. – С.697–705.
160. Мухамадуллин М.Л. К изучению притока нефти в скважину при локальном разгазировании залежи // Нефть и газ. – Алма–Ата. – 1975. – Вып.4. – С.175–177.
161. Найфе А.Х. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 455 с.
162. Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
163. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
164. Непримеров Н.Н. Влияние промыслового эксперимента на развитие теории фильтрации // В кн. Проблемы теории фильтрации и механика процессов повышения нефтедобычи. – М.:Наука,1987.– С.153–162.

165. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред, ч.1. – М:Наука, 1987. – 464 с.
166. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред, ч.2. – М: Наука, 1987. – 359 с.
167. Нигматулин Р.И., Ахметов А.Г., Федоров К.М. О многофазных фильтрационных течениях в пористых средах //Проблемы теории фильтрации и механики процессов повышения нефтеотдачи. – М.: Наука, 1987. – С.162–169.
168. Нигматулин Р.И., Сургучев М.Л., Федоров К.М. и др. Математическое моделирование мицелярно–полимерного заводнения // ДАН СССР. – 1980. Т.255, №1. – С.52–56.
169. Нигматуллин Р.И. Особенности релаксации систем с «остаточной» памятью // ФТТ. –1985. –Т.27. №5. С.1583 – 1586.
170. Николаевский В.Н. Геомеханика и флюидодинамика. – М.: Недра, 1996. – 448с.
171. Николаевский В.Н. Математическое моделирование физико–химического воздействия на нефеводонасыщенные пласты // Фундаментальные проблемы нефти и газа. – М.: ГАНГ, 1996. – Т.4. – С.265–280.
172. Николаевский В.Н. Механика пористых и трещиноватых сред. – М.: Недра, 1984. – 232с.
173. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Г. и др. Механика насыщенных пористых сред. – М.: Недра, 1970. – 339 с.
174. Николаевский В.Н., Бондарев Э.А., Миркин М.И. и др. Движение углеводородных смесей в пористой среде. – М.: Недра, 1968.– 190с.
175. Николис Г. Пригожин И., Самоорганизация в неравновесных системах. – М.: Мир, 1979. – 512 с.
176. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного. – М.:Мир, 1990. – 342.с.

177. Нустрев В.С. Процессы восстановления давления в трещиноватых коллекторах // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1990. – №5. – С. 77–83.
178. Оганджанянц В.Г., Мац А.А. Экспериментальное исследование скорости вытеснения на нефтеотдачу однородного пласта // Тр.ВНИИ.Вып.60. – М.: Недра,1974. – С.37–47.
179. Огиболов П.М., Мирзадажанзаде А.Х. Нестационарные движения вязкопластичных сред. – М.:МГУ, 1977. – 373 с.
180. Орлов Г.А., Кендис М.Ш., Глушенко В.Н. Применение обратных эмульсий в нефтедобыче. – М.: Недра, 1991. – 225с.
181. Осипов П.П.. Балаян Н.М. Классификация линейных релаксационных моделей двухфазной фильтрации // ИФЖ. – 1987. – Т.53, №2. – С.253–258.
182. ОСП 39–235–89. Нефть. Метод определения относительных фазовых проницаемостей в лабораторных условиях при совместной стационарной фильтрации. – М.: Миннефтепром, 1989. – 23с.
183. Панфилов М.Б., Панфилова И.В. Осредненные модели фильтрационных процессов с неоднородной внутренней структурой. – М.: Наука, 1996. – 383с.
184. Панфилов М.Б.. Панфилова И.В. Осредненная модель с капиллярной неравновесностью для двухфазного течения в сильнонеоднородной среде // Изв. РАН. МЖГ. – 1998. – №3. – С.93–103.
185. Петров Г.И. Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости // ПММ. – 1940. – Т.8, №3. – С.3–12.
186. Рабинович М.И., Сущик М.М. Регулярная и хаотическая динамика структур в течениях жидкости // Успехи физических наук. – 1990. – Т.160, №1. – С.3–64.
187. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. – М.: Наука,1984.
188. Разработка нефтяных месторождений (под ред. Хисамутдинова Н.И., Ибрагимова Г.З.) М.: ВНИИОЭНГ, 1994. – Т.1. – 240 с.

189. Ребиндер П.А. Избранные труды. Поверхностные явления в дисперсных системах. Физико–химическая механика. – М.: Наука, 1979. – 382 с.
190. Ребиндер П.А. Физико–химическая механика дисперсных структур. – М.: Наука, 1966. – 400 с.
191. Рейнер М. Реология. – М.:Наука, 1965. – 224 с.
192. Регулирующие алгоритмы и априорная информация // Тихонов А.Н. и др. – М.: Наука, 1983. – 200с.
193. Розенберг М.Д., Кундин С.А., Курбанов А.К. и др. Фильтрация газированной жидкости и других многокомпонентных смесей в нефтяных пластах. – М.: Недра, 1969. – 456 с.
194. Романов В.Г. Некорректные обратные задачи для уравнений гиперболического типа. – Новосибирск: Наука, СО АН, 1972. – 162с.
195. Романовский М.Р. Применение априорной информации для обеспечения идентификации математической модели // ИФЖ. – 1989. – Т.56, №5. – С.611–616.
196. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1976. – 616с.
197. Рыжик В.М. Вытеснение нефти водой в пористой среде с малопроницаемыми включениями // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1964. – №1. – С.126–132.
198. Самарский А.А. Теория разностных систем. – М.: Наука. – 1983. – 611с.
199. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. – М.:Наука, 1987. – 480 с.
200. Саттаров Р.М. Диагностирование реологических свойств вязкоупругих сред при их движении в трубах // ИФЖ. – 1991. – Т.41, №6. – С.1016–1026.

201. Саульев В.К. О регулярных неоднородных сеточных схемах и квазистойчивости // ДУ. – 1965. – №7. – С.421–425.
202. Свалов А.М. Об одной модели тиксотропных систем // Колл. журнал. – 1987. – Т. 49, вып.4. –С.799 – 802.
203. Столин А.М., Худяев С.И., Бучацкий Л.М. К теории сверханомалии вязкости структурированных систем // ДАН СССР. – 1978. – Т. 243, № 2. – С. 430 – 433.
204. Столин А.М., Худяев С.И. Образование пространственно неоднородных состояний структурированной жидкости при аномалии вязкости // ДАН СССР. – 1981. – Т.260, №5.С.1180 –1184.
205. Седов Л.И. Механика сплошных сред. – М.: Наука, 1976. – Т.1. – 586с.
206. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. – М.: Мир, 1990. – 240 с.
207. Селяков В.И., Кадет В.В. Перколяционные модели процессов переноса в микронеоднородных средах. – М.: Недра, 1995. – 222с.
208. Соловьёва Е.Н., Успенский А.Б. Схемы сквозного счета численного решения краевых задач с неизвестными границами для одномерных уравнений параболического типа // Численные методы в газовой динамике. – М.:МГУ, 1975. – Вып.4. – С.3–23.
209. Сулейманов Б.А. Эффективная проницаемость при фильтрации газированной жидкости в докритической области // Тр. ИММ АН Азерб. – 1996. – Т.5 (8). – С.151–153.
210. Сулейманов Б.А., Азизов Х.В. Об особенностях течения газированной жидкости в пористом теле // Коллоидный журнал. – 1995. – №6. – С.862–867.
211. Султанов Б.И. О фильтрации вязко–пластичных жидкостей в пористой среде // Азербайджанское нефтяное хозяйство. – 1962. – №1. – С.25 – 28.

212. Сургучев М.Л., Желтов Ю.В., Симкин Э.М. Физико–химические ми–кропроцессы в нефтегазоносных пластах. – М.: Недра, 1984. – 215 с.
213. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. – М.: Физматгиз, 1951. – 211 с.
214. Теория и практика применения неравновесных систем в нефтедобыче / А.Х. Мирзаджанзаде, Ф.Г. Максудов, Р.И. Нигматуллин и др. – Баку: Элм, 1985. – 220 с.
215. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 287с.
216. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягода А.Г. Численные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1990. – 230с.
217. Тобольский А. Свойства и структура полимеров. – М.: Химия, 1964. – 332 с.
218. Уокер Дж. Физический фейрфэрк. – М.: Мир, 1989. – 298 с.
219. Уилкинсон У.Л. Неньютоновские жидкости. –М.: Мир, 1964. – 216 с.
220. Усенко В.Ф. Исследование нефтяных месторождений при давлениях ниже давления насыщения. – М.: Недра, 1967. – 215с.
221. Усенко В.Ф., Пияков Г.Н., Кудашев Р.И. Изменение нефтенасыщен–ности после повторного нефтенасыщения заводненных пластов // Нефтяное хозяйство. – 1882. – №6. – С.25–29.
222. Федер Е. Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 254 с.
223. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. – М.:Изд–во Московского физико–технического института, 1994. – 527с.
224. Фракталы в физике /Под ред А.Пьетронеро, Э.Тозатти. –М.:Мир, 1988. – 672 с.
225. Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкостей. – М.: Наука, 1975. – 592с.

226. Хаген Г. Синергетика.–М.: Мир, 1980.–300 с.
227. Халиков Г.А. Газовые методы интенсификации нефтедобычи. – М.:Недра, 1997. – 192с.
228. Халимов Э.М., Леви Б.И., Дзюба В.И. Технология повышения нефтеотдачи пластов. – М.: Недра, 1984. – 217с.
229. Харин В.Т. Реология вязкоупругих тиксотропных жидкостей типа нефти и полимерных растворов или расплавов // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1984. – № 3. – С. 21 – 26.
230. Хасанов М.М. Булгакова Г.Т. О релаксационных автоколебаниях при нестационарной двухфазной фильтрации // Нефтепромысловое дело. – 1998. – N 6. – С.31–34.
231. Хасанов М.М. Исследование устойчивости фильтрации жидкостей с зародышами газа // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1994. – №2. – С.66–72.
232. Хасанов М.М., Булгакова Г.Т. Неравновесные и нелинейные эффекты в процессах двухфазной фильтрации // Доклады Академии наук. – 1999. – Том 366, № 6. – С.768–770.
233. Хасанов М.М., Кондаратцев С.А., Каракурин Н.Т. Об использовании априорной информации при определении фазовых проницаемостей по данным нестационарных исследований // Нефтепромысловое дело. – 1995. – №8–10. – С.12–15.
234. Хасанов М.М., Ягубов И.Н. О колебаниях расхода при фильтрации полимерных растворов // ИФЖ. – 1990. – Т.59, №2. – С.211–215.
235. Хейфец Л.И., Неймарк А.В. Многофазные процессы в пористых средах. – М.: Химия, 1982. – 320с.
236. Цыбульский Г.П. Уравнения макронеравновесной фильтрации // Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск, 1985. – Т.16, №5. – С.133–140.
237. Цыбульский Г.П. Уравнения неравновесной двухфазной фильтрации // Численные методы решения задач фильтрации несжимаемой жидкости. – Новосибирск: ИТПМ, 1977. – С.203–213.

238. Чайковский Ю.В. Излом творения // Химия и жизнь. – 1993. – № 7. – С.18 – 22.
239. Чураев Н.В. Физикохимия процессов массопереноса в пористых телах. – М.: Химия, 1990. – С.271.
240. Шагапов В.Ш. О фильтрации газированной жидкости // ПМТФ. – 1993. – №5. – С.97–105.
241. Шалимов Б.В. Численное моделирование одномерной трехфазной фильтрации // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1975. – №6. – С.59–66.
242. Штенгелев Р.С. и др. Гидродинамические расчеты на ЭВМ. – М.: МГУ, 1994. – 336с.
243. Шустер Г. Детерминированный хаос. – М.: Мир, 1990. – 312с.
244. Amaefull J., Handy L. The effect of interfacial tensions on relative oil–water permeabilities on consolidated porous media // S.P.E.J. – 1982. – V.22, №3. – P.371–381.
245. Barker J.A. Block–geometry functions characterising transport in densely fissured media // J. Hydrol.– 1985. – V.77. – P.263–279.
246. Bell J.B., Trangenstein J.A., Shubin G.R. Conservation laws of mixed type describing three–phase flow in porous media // SIAM J. Appl. Math. – 1986. – V.46, №6. – P.1000–1017.
247. Blunt M.J., King P. Relative permabilities from two and three dimensional pore scale network modelling // Transport in porous media. – 1991. – №6. – P.107–119.
248. Bohm M., Showalter R.E. Diffusion in fissured media // SIAM J.Math. Anal. – 1985. – V.16, №3. – P.500–509.
249. Braester C. Simultaneous flow of immiscible liquids through porous fissured media // Soc. Pet. Eng. J. – 1972. – August. – P.297– 305.
250. Buckley S., Leverett M.C. Mechanism of fluid in sands // Trans. AIME. 1942.V.146. P.107–116.

251. Bulgakova G.T., Avdonin V.A. Mathematical modelling of transient thermal fields in wells and reservoirs // Proc. of Intern. Conf. on flow through porous media. Moscow, Sept., 21–26, 1992. P5–P9.
252. Camp T.R. Theory of water filtration // Free Am. Soc. Civil Eng. – 1964. – v.90 (SAU). – Paper 3990. – P.1–30.
253. Chatsits I., Dullien F.A. Dynamic immiscible displacement mechanisms in pore doublets // I.Coll. Interface Sci. – 1983. – S1 (1). – P.199–222.
254. Chavent G., Dupuy M., Lemonier P. History matching by use of optimal control theory // Soc. Petrol. Eng. J. – 1975. – V.15, №1. – P.74–86.
255. Chen W.H., Gavalas G.R., Seinfeld J.N., Wasserman M.L. A new algorithm for automatic history matcing // Soc Petr. Engrs J. – 1974. – V. 14, №6. – P.593–608.
256. Chen Z.X. Analytical solutions for double-porosity, double-permeability and layered systems // J.Petrol. and End. – 1990. – V.5, №3. – P.1–24.
257. De Swaan A.O. Analytic solutions for determining naturally fractured reservoir properties by well testing // SPE J. – 1976. – №6. – P.117–122.
258. Dean R.H., Lo L.L. Simulations of naturally fractured reservoirs // SPE Reservoir Eny. – 1988. – V.3, №2. – P.638–648.
259. Duguid I.O., Lee P.C. Flow in fractured porous media // Water Resour. Res. – 1977. – V.13, №3. – P.558–566.
260. Egbogan E.O., Dawe R.A. Microvisual studies of size distribution of oil droplets in porous media // Bull. of Can.Petrol.Geol. – 1980. – 28 (2). – P.200–210.
261. Eilerts K.C., Somner E.F. Integration of Partial Differential Equation for Transient Radial Flow of Gas-condensate Fluids in Porous Structures // Soc. Petrol. Eng. J. – 1965. – V.2, №2. – P. 141–152.
262. Evans R.D. A proposed model for multiphase flow through naturally fractural reservoir // SPE J. – 1965. – V.22, №5. – P.669–680.

263. Fasano A. Liquid Flow in Partially Saturated Porous Media // J. Inst. Maths. Applics. – 1979. – №23. – P.503–517.
264. Fulcher R. A., Ertekin T. Effect of capillary number and it's constituents on two phase relative permeability curves // J.P.T. – 1985. – V.37, №2. – P.249–260.
265. Gane C.R., Gourlay A.R. Block Hopscotch Procedures for Second Order Parabolic Differential Equations // Journal of Institute of Mathematics and its Applications (ZIMA). – 19 (1977). – P.205–216.
266. Gilman A. Non – equilibrium imbibition of a porous block // Europ. Jnl. of Applied Mathematics. – 1996. – V.7. – P.43–52.
267. Honarpour M.M., Cullick A.S., Soad N. Effect of rock heterogeneity on relative permeability: implications for scaleup // J. Petrol. Technol. – 1995. – V.47, № 11. – P.980–986.
268. Hornung U., Showalter R.E. Diffusions models for fracturemedia // J. Math. Anal. and Appl. – 1990. – V.147, № 1. – P.69–80.
269. Hornung U., Showalter R.E., Walkington N.J. Micro–structure models of diffusion in fissured media // J.Math. Anal. and Appl. – 1991. – V.155, №1. – P.1–20.
270. Islam H.R. Faroug All S.M. Numerical simulation of emulsion flow through porous media // J. Canad. Petroleum Technology. – 1994. – V.33, №3. – P.59–63.
271. Kent T.L., Dixon T.N., Pierson R.G. Fractured reservoirs simulation // SPE J. – 1983. – V.23, №1. – P.42–54.
272. Khalili N., Valliapan S. Unified theory of Flow and deformation in double porous media // Eur. J. Mech. – 1996. – V.15, №2. – P.321–336.
273. Khasanov M.M. Bulgakova G.T. Mathematical modelling of non–liner effects in two phase fluid filtration flow // ECMOR VI Proceedings. – 1998. – P.C07–C08.

274. Kravaris G., Seinfeld J.H. Identification of spatially varying parameters in distributed parameter system by discrete regularisation // J.Of Mathematical Analysis and Application. – 1986. – V.119. – P.128–152.
275. Kravaris G., Seinfeld J.H. Identification of parameters in distributed parameter system by regularisation // SIAM J. Control and Optimisation. – 1985. – V.23, №2. – P.217–241.
276. Larson R.G., Scriven L.E., Davies H.T. Percolation theory of two-phase flow in porous media // Chem.Eng.Sci. – 1981. – 36 (1). – P.57–73.
277. Larson R.G., Davies H.T., Scriven L.E. Displacement of residual nonwetting fluid from porous media // Chem.Eng.Sci. – 1981. – 35 (1). – P.75–85.
278. Lenormand R., Touboul E., Zarcone C. Numerical models and experiments on immiscible displacement in porous media // J. Fluid Mech. – 1988. – V.189. – P.165–187.
279. Lenormand R., Zarcone C. Sarr A. Mechanism of the displacement of one fluid by another in a network of capillary ducts // J.Fluid Mech. – 1983. – V.135. – P.337–353.
280. Leverett M.C. Flow of oil – water mixtures through unconsolidated sands. Trans AIME. – 1939. – V.132. – P. 152–159.
281. Lewis R.W., Ghafouri H.R. A novel finite element double porosity model for multiphase flow through deformable fractured porous media // Int. Jnl. for Numerical and anal. Methods in geomechanics. – 1997. – V.21. – P.789–816.
282. Lu Julin, Xia Tian–zhan. Solution of relative permeability of two-phase flow in porous medium // J.Hydrodin. B. – 1994. – V.6, № 1. – P.74–85.
283. Mandelbrot B.B. How long is the coast of Britain? Statistical self – similarity and fractal demension // Science. – 1867. – V.155. – P.636 – 638.
284. Megenes E. Boundary Value Problems for Linear Evolution Partial Differential Equations // Proceeding of the NATO Advanced Study Inst. Topics in Parabolic Equations: Some Typical Free Boundary Problems. – 1977. – P. 239–312.

285. Morrow N.R., Chatzis I., Lim H.T. Relatives permeabilities at reduced residual oil saturations // J. Canad. Petrol. Technol. – 1985. – V. 24. – P. 62–69.
286. Myerholtz R.W. Oscillating flow behavior of high-density polyethylene melts // J. Appl. Polimer. Sci. – 1967. V.2. – № 5. – P. 300 – 307.
287. Naar J., Wygal R.J., Hunderson J.H. Imbiliation relative permeability in unconsolidated porous media // SPEJ. – 1962. – №2. – P.13–17.
288. Odeh A.S. Unsteady-state behaviour of fractured reservoirs // SPE J. – 1965. – №1. – P.60–66.
289. Olarewaju J.S., Lee W.J. New pressure-transient analysis model for dual-porosity reservoir // SPE Form. Evaluation. – 1989. – №9. – P.384–390.
290. Overdiep W.S. Van Vrvelen D/W/ Studies of non – newtonian flow/1. Criterion of flow instability // J. Appl. Polimer Sci. – 1965. V.9, № 8. – P.302 – 311
291. Rappoport L.A., Leas W.I. Properties of linear water – floods // Trans. AIME. – 1953. –V.198. – P.139–148.
292. Rider W.J., Kothe D.B., Mosso S.J. Accurate solution algorithms for incompressible multiphase flows // AIAA Pap. – 1995. – №0699. – P.1–18.
293. Stridand B., Leptoukh G., Roland Ch. Molecular dynamics simulations of phase separation in porous media // J. Phys. A. – 1995. – V.28, №14. – P.L403–L408.
294. Swing R.E. Simulation techniques for multicomponent flows // Commun. Appl. Numer. Meth. – 1988. – V.4, №3. – P.335–342.
295. Turba A.C. Calculation of Dynamic Gas–Oil Ratio in Biphase Ascension under Bubble Flow Conditions // Chem. Oil and Gas Romania. – 1970. – V.6, №1. – P.109–125.
296. Vidales A.M., Faccio R.J. Capillary hysteresis in porous media // J.Phys.: Condens. Matter. – 1995. – V.7, №20. – P. 3835–3843.

297. Watson A.T., Seinfeld J.N., Gavalas G.R., Woo P.T. History matching in two-phase petroleum reservoir // Soc. Petrol. Eng. J. – 1980. – V.20, №6. – P.521–532.
298. William G. Anderson. Wettability literature survey – part 5: The effects of wettability on relative permeability // J.P.T. – 1987. – V.39, №11. – P.1435–1468.
299. Wu J. S., Prues K. A multiple-porosity method for simulation of naturally fractured petroleum reservoirs // SPE Res. Eny. – 1988. – V.3, №1. – P.327.
300. Wycoff R.D., Botset H.F. Flow of Gas–Liquid Mixtures through Unconsolidated Sands // Physics. – 1936. – V.7, №9. – P.325.
301. Zak.M. Two types of chaos in non – Linear mechanics // Int.J. Non Linear Mechanics. –1985. –T.20, № 4. – P.297 – 308.

# **СОДЕРЖАНИЕ**

<b>От редакционного совета.....</b>	<b>5</b>
<b>Введение .....</b>	<b>6</b>
<b>Глава 1. Основные понятия теории самоорганизации .....</b>	<b>13</b>
1.1. Фракталы .....	15
1.2. Детерминированный хаос .....	26
<b>Глава 2. Решение обратной задачи нестационарной неравновесной фильтрации двухфазной жидкости .....</b>	<b>47</b>
2.1. Неравновесные модели двухфазной фильтрации .....	47
2.2. Исследование модели неравновесной фильтрации несмешивающихся жидкостей .....	54
2.3. Алгоритмы решения обратной задачи определения неравновесных ОФП .....	65
2.4. Примеры обработки данных нестационарных исследований .	70
<b>Глава 3. Моделирование движения сложных сред .....</b>	<b>75</b>
3.1. Основные понятия реологии .....	75
3.2. Неньютоновские жидкости .....	82
3.3. К учету явлений запаздывания в теории фильтрации .....	113
3.4. Масштабная инвариантность временных иерархий в процессах релаксации вязкоупругих сред .....	121
<b>Глава 4. Исследование моделей нестационарной фильтрации неньютоновских сред .....</b>	<b>130</b>
4.1. Моделирование вытеснения вязкоупругой жидкости .....	130
4.2. Численные исследования влияния релаксационных свойств на процесс двухфазной фильтрации .....	133

4.3. Нестационарные режимы неравновесной двухфазной фильтрации .....	138
<b>Глава 5. Исследование процессов неравновесной двухфазной фильтрации в неоднородных средах .....</b>	<b>158</b>
5.1. Экспериментальные исследования фильтрационных свойств пласта при повторном насыщении нефтью промытых зон пласта....	160
5.2. Математическая модель двухфазной фильтрации в средах с двойной пористостью .....	171
5.3. Численная реализация модели и результаты расчётов .....	177
<b>Глава 6. Исследование устойчивости неравновесной фильтрации газированной жидкости .....</b>	<b>186</b>
6.1. Уравнения неравновесной нестационарной фильтрации газированной жидкости .....	187
6.2. Линейный анализ устойчивости стационарных режимов .....	192
6.3. Численное решение линейной задачи .....	195
6.4. Решение задачи о нестационарном притоке газированной жидкости к скважине в режиме локального разгазирования .....	207
<b>Глава 7. Процессы самоорганизации в неильтоновских системах .....</b>	<b>213</b>
7.1. Периодические и стохастические автоколебания в ротационных вискозиметрах .....	214
7.2. Анализ устойчивости движения колонны труб в тиксотропной жидкости .....	223
7.3. Исследование особенностей движения реопектических сред по трубам .....	231
7.4. Эффекты локализации при фильтрации реопектических жидкостей .....	240
<b>Приложение 1 .....</b>	<b>249</b>
<b>Приложение 2 .....</b>	<b>256</b>
<b>Литература .....</b>	<b>259</b>

**Хасанов Марс Магнавиевич  
Булгакова Гузель Талгатовна**

**НЕЛИНЕЙНЫЕ И НЕРАВНОВЕСНЫЕ  
ЭФФЕКТЫ В РЕОЛОГИЧЕСКИ  
СЛОЖНЫХ СРЕДАХ**

*Дизайнер М. В. Ботя  
Технический редактор А. В. Широбоков  
Корректор М. А. Ложкина*

---

Подписано в печать 29.01.03. Формат 60 84 1/16.

Усл.печ.л. 16,74. Уч.изд.л. 16,19.

Гарнитура Times. Бумага офсетная №1.

Тираж 1000 экз. Печать офсетная. Заказ №

АНО «Институт компьютерных исследований»  
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

Лицензия на издательскую деятельность ЛУ № 084 от 03.04.00.  
<http://rcd.ru> E-mail: [borisov@rcd.ru](mailto:borisov@rcd.ru)

Отпечатано в полном соответствии с качеством  
предоставленных диапозитивов в ФГУИПП «Вятка»  
610033, г. Киров, ул. Московская, 122

---