

## **СЕРИЯ «СОВРЕМЕННЫЕ НЕФТЕГАЗОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»**

---

### **Редакционный совет:**

Главный редактор К. С. Басниев

Ответственный редактор А. В. Борисов

Е. И. Богомольный (Удмуртнефть)

А. И. Владимиров (РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина)

В. И. Грайфер (РИТЭК)

В. А. Журавлев (Удмуртский государственный университет)

В. И. Кудинов (Удмуртнефть)

О. Л. Кузнецов (РАЕН)

Н. Н. Лисовский (Министерство энергетики)

И. С. Мамаев (Институт компьютерных исследований)

В. И. Резуненко (ОАО Газпром)

С. Холдич (США)

**РГУ НЕФТИ  
И ГАЗА**  
имени И. М. Губкина



## **СЕРИЯ «СОВРЕМЕННЫЕ НЕФТЕГАЗОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»**

---

---

*Спонсор серии:* Российский государственный университет  
нефти и газа им. И. М. Губкина

### **Вышли в свет:**

*H. Накиценович, A. Грицевский, A. Грюблер, K. Риахи*  
Мировые перспективы природного газа

*B. H. Щелкачев, B. B. Лапук*  
Подземная гидравлика

*P. D. Каневская*  
Математическое моделирование гидродинамических процессов  
разработки месторождений углеводородов

*B. B. Лапук*  
Теоретические основы разработки месторождений природных газов

**Р. Д. Каневская**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ  
ПРОЦЕССОВ РАЗРАБОТКИ  
МЕСТОРОЖДЕНИЙ УГЛЕВОДОРОДОВ**

*Допущено в качестве учебного пособия для студентов  
высших учебных заведений, обучающихся по направлениям  
«прикладная математика», «нефтегазовое дело»  
(*«разработка и эксплуатация нефтяных и газовых  
месторождений»*), *«физические основы нефтегазового дела»*,  
*магистров по направлению «нефтегазовое дело».**



**Москва ♦ Ижевск**

**2002**

УДК 532

---

Интернет-магазин



<http://shop.rcd.ru>

---

- физика
- математика
- биология
- техника

**Каневская Р. Д.**

Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 140 стр.

Книга написана на основе курса лекций, прочитанных автором в Российском Государственном Университете нефти и газа им. И. М. Губкина. В пособии рассмотрены математические модели фильтрации и их использование для моделирования разработки месторождений нефти и газа.

Для студентов и аспирантов нефтегазовых вузов и факультетов. Полезна также специалистам, занимающимся моделированием разработки месторождений углеводородов.

**ISBN 5-93972-153-2**

© Институт компьютерных исследований, 2002

<http://rcd.ru>

## Введение

Разработка месторождений углеводородов представляет собой комплексную проблему, для успешного решения которой требуется привлечение знаний и опыта, накопленных в различных областях науки и инженерной практики. Применение комплексного мультидисциплинарного подхода стало особенно актуальным на современном этапе, характеризующемся, с одной стороны, существенным ухудшением структуры запасов нефти и газа, а с другой – созданием принципиально новых технологий в области исследования и моделирования геологического строения пласта, бурения и закачивания скважин, использованием новых быстродействующих компьютеров для проведения сложных вычислений, геологического и гидродинамического моделирования.

Одним из основных инструментов для обоснованного принятия стратегических и тактических решений при разработке месторождений углеводородов является моделирование процессов извлечения нефти и газа. Каждое месторождение уникально, неправильное применение тех или иных методов воздействия на пласт может привести к непоправимым последствиям для разработки, поэтому оценку эффективности различных технологий с учетом особенностей конкретного объекта и прогнозирование поведения этого объекта целесообразно осуществлять с помощью предварительного моделирования.

Процесс моделирования представляет собой воспроизведение поведения объекта с помощью модели. Важно отметить, что моделирование ни в коей мере не заменяет непосредственного изучения объекта, которое и является основным источником информации об объекте, используемой при моделировании.

Модели, как правило, бывают двух видов: **физические** и **математические**.

В большинстве случаев **физические модели** имеют ту же физическую природу, что и изучаемый объект. Эксперименты на физических моделях проводят для исследования закономерностей изучаемого явления. *Масштабные* модели строятся с соблюдением принципов подобия [25]. Необходимыми условиями такого моделирования являются геометрическое и физическое подобие модели и натуры: значения переменных величин, характеризующих явление для модели и для натуры в сходственные моменты времени в сходственных точках пространства, должны быть пропорциональны. Результаты экспериментов, поставленных на масштабной модели,

могут быть перенесены на изучаемый объект путем пересчета, т.е. умножения каждой из определяемых величин на постоянный для всех величин данной размерности множитель – коэффициент подобия. Однако изготовить полностью подобные модели пластов не представляется возможным, поэтому этот метод моделирования не получил широкого распространения при прогнозировании месторождений углеводородов. *Элементарные* модели обычно используют для проведения лабораторных экспериментов по изучению свойств пород и насыщающих их флюидов. В этих экспериментах, как правило, используют реальные или смоделированные пластовые породы и жидкости. Результаты лабораторных исследований являются важным источником информации о пласте.

Среди физических моделей отдельную группу составляют *аналоговые* модели, которые воспроизводят процесс физически подобный оригиналу, но подчиняющийся другой группе физических законов. Например, аналогия между характеристиками гидродинамических и электротехнических процессов использовалась в резистивно-емкостных сетках – электроинтеграторах, применяемых для создания электрических моделей нефтяных пластов. В таких моделях перепад давления моделировался электрическим напряжением, дебит жидкости – силой тока, проводимость – электрической проводимостью, объем флюидов – электрической емкостью и т.д. Аналогия между фильтрацией флюидов в пористой среде и потоком ионов в электрическом потенциальном поле использовалась в электролитических моделях пластов. Аналоговые модели обычно были очень громоздкими. Перестройка модели была сопряжена со значительными сложностями. Поэтому с появлением компьютеров и развитием вычислительной техники аналоговые модели были практически полностью вытеснены компьютерными математическими моделями [1,9,15,19,32,50,51].

**Математическая** модель представляет собой приближенное описание поведения изучаемого объекта с помощью математических символов. Процесс математического моделирования – изучения объекта с помощью математической модели – можно условно подразделить на четыре взаимосвязанных этапа:

1. формулирование в математических терминах законов, описывающих поведение объекта;
2. решение прямой задачи, т.е. получение путем исследования модели выходных данных для дальнейшего сопоставления с результатами наблюдений за объектом моделирования;
3. адаптация модели по результатам наблюдения, решение обратных задач, т.е. определение характеристик модели, которые оставались неопределенными;

4. анализ модели, ее модернизация по мере накопления новой информации об изучаемом объекте, постепенный переход к новой более совершенной модели.

Первый этап моделирования требует глубоких знаний об изучаемом объекте. Для создания модели пластовой системы используются обширные сведения из геологии и геофизики, гидромеханики и теории упругости, физики пласта и химии, теории и практики разработки месторождений, математики, численных методов и программирования. На этом этапе формулируются основные уравнения, описывающие процесс фильтрационного переноса жидкостей и газов в пористой среде и выражающие законы сохранения массы, энергии, закон движения, уравнение состояния. Определяются совокупности начальных и граничных условий, для которых будет решаться сформулированная система дифференциальных уравнений в частных производных. Количество и тип уравнений зависят от особенностей рассматриваемой задачи: геологического строения пласта, свойств фильтрующихся флюидов, моделируемого процесса добычи. Затем разрабатываются численные методы и алгоритмы для решения поставленной задачи. Создается математическая модель фильтрации – компьютерная программа, которая решает уравнения тепло- и массопереноса с заданными начальными и граничными условиями.

На втором этапе осуществляется решение прямой задачи для конкретного объекта разработки, т.е. для заданного набора входных данных. Формирование набора входных данных является самостоятельной сложной проблемой. На этом этапе информация о строении и свойствах пласта и насыщающих его жидкостей, о режимах и показателях работы скважин преобразуется к виду, требуемому для ввода в модель фильтрации. Важнейшим элементом моделирования является построение трехмерной геометрической модели пласта на основе интерпретации сейсмических исследований с последующим насыщением этой модели информацией о распределении основных геолого-физических характеристик пласта (пористости, проницаемости, насыщенности и др.) по данным геофизических и гидродинамических исследований скважин и изучения керна с использованием детерминистических или геолого-статистических методов. Объем пласта рассматривается как упорядоченная совокупность блоков, каждому из которых приписывается по одному значению каждого параметра. Ввод свойств породы и флюидов для каждого расчетного блока, площадь сечения которого в горизонтальной плоскости определяется сотнями квадратных метров при толщине в несколько метров, является очень сложной и трудоемкой задачей. Масштаб керна определяется сантиметрами. Геофизические измерения в скважинах, как правило, имеют радиус проникновения в пласт порядка нескольких метров.

О строении и свойствах межскважинного пространства можно судить только по данным отраженных сейсмических волн и вертикального сейсмического профилирования, а также по результатам гидродинамических исследований пласта, в частности, пьезометрии (гидропрослушивания). Однако по данным сейсмики не могут быть непосредственно определены свойства породы и пласта. Результаты закачки трассеров, гидропрослушивания и т.п. позволяют лишь косвенно оценивать осредненные значения фильтрационно-емкостных параметров, но не могут дать детальной картины распределения свойств. Поэтому при заполнении массивов данных о свойствах породы и жидкостей необходимо, во-первых, решать проблему интерполяции и экстраполяции данных измерений по скважинам на межскважинное пространство, а во-вторых, проблему усреднения или масштабирования данных, полученных на масштабах керна и геофизических исследований, на масштаб расчетных блоков. Проблема усреднения проницаемости, и особенно относительных фазовых проницаемостей, является очень сложной и до сих пор остается областью активных научных исследований. Перечисленные факторы в совокупности с ошибками измерений и низким качеством исходных данных, которое иногда имеет место, приводят к неопределенности в описании коллектора. Задача последующего моделирования – по возможности уменьшить эту неопределенность. В результате решения прямой задачи, т. е. проведения гидродинамических расчетов для заданного набора входных данных, определяются выходные характеристики модели – распределения потоков и давлений в пласте во времени, дебиты скважин и т. п. Эти результаты могут быть сопоставлены с данными наблюдений – замерами давлений и дебитов, показателями работы скважин.

На третьем этапе моделирования осуществляется адаптация математической модели по данным наблюдений. Путем воспроизведения истории разработки месторождения осуществляется уточнение основных фильтрационно-емкостных параметров пласта, заложенных в модель. Чаще всего корректируются абсолютные и фазовые проницаемости, объем контурной области, коэффициент сжимаемости пор, коэффициенты продуктивности и приемистости скважин. Обратная задача решается итерационно до тех пор, пока модель фильтрации не воспроизведет распределение давления и насыщенности, которое возникает в результате приложенного воздействия – заданных режимов работы добывающих и нагнетательных скважин. Этот этап моделирования, очень трудоемкий и требующий большого опыта и знаний, является необходимым для достоверного прогнозирования поведения пласта и оценки технологических показателей вариантов разработки.

Построенная таким образом модель объекта разработки используется затем для прогнозирования и планирования добычи,

оценки запасов, комплексной оптимизации пласта. На четвертом этапе моделирования по мере накопления информации об объекте модель пласта уточняется, совершенствуется, отражает новую информацию о пласте, технологические решения, применяемые на месторождении, и может использоваться для дальнейшего управления процессом разработки. В этом случае можно говорить о **постоянно-действующей геолого-технологической модели** месторождения.

Математическое моделирование применяется не только для решения проблем **прогнозирования, контроля и управления процессом разработки пласта**, хотя именно в этом состоит основное коммерческое использование моделей и соответствующих программных продуктов. Важнейшими сферами применения математического моделирования являются: **решение так называемых обратных задач** по уточнению строения и свойств пласта путем воспроизведения истории разработки, по обработке результатов исследования скважин, по изучению процессов вытеснения на керне и определению фазовых проницаемостей, **решение исследовательских задач** теории фильтрации, таких как создание моделей течения в неоднородных и трещиновато-поровых средах, изучение механизмов воздействия на пласт и моделирование новых технологий, исследование процессов конусообразования, притока к горизонтальным скважинам и трещинам гидроразрыва и т. п. Особое место занимают аналитические решения, полученные в рамках достаточно простых моделей, но важные для понимания механизмов фильтрационных процессов. Кроме того, аналитические решения применяются для тестирования компьютерных моделей фильтрации.

Основными элементами пакета программ для моделирования пласта являются предпроцессор, постпроцессор и собственно модели фильтрации [35]. На стадии **предпроцессора** осуществляется ввод данных о строении и свойствах пласта и пластовых жидкостей, в том числе построение и оцифровка разностной сетки, задание скважин, обработка баз данных с информацией о работе скважин, соединение и согласование информации из различных источников, выбор модели фильтрации, характеристик разностной сетки, методов решения системы уравнений. **Постпроцессор** осуществляет визуализацию результатов расчетов: построение различных карт, графиков, таблиц, анимацию результатов моделирования фильтрационных процессов в пласте. Развитый пакет программ включает в себя несколько **моделей фильтрации**, которые можно использовать по выбору в зависимости от моделируемого объекта и процесса:

- модели двух- и трехфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей (модель нелетучей нефти),
- модель многокомпонентной фильтрации (композиционная модель),

- модель неизотермической фильтрации,
- модели физико-химических методов воздействия на пласт (полимерного заводнения, закачки поверхностно-активных веществ, углекислого газа и т. п.),
- модели фильтрации в среде с двойной пористостью и с двойной проницаемостью для моделирования процессов в трещиновато-поровых коллекторах.

На разных стадиях моделирования пласта используются специальные опции, такие как

- **масштабирование** сеток при переходе от геологической модели к гидродинамической (осреднения данных геологической модели при построении и оцифровке более грубой сетки для моделирования фильтрации),
- **построение сеток различных типов** (блочно-центрированной, с распределенными узлами, с геометрией угловой точки, прямоугольной, цилиндрической, криволинейной, полигонов Вороного, гибкой, с локальным измельчением),
- **выбор методов аппроксимации и решения уравнений** (явный или неявный, прямой или итерационный, упорядочение и решение систем линейных уравнений, контроль за сходимостью),
- **инициализация** (моделирование начального равновесного распределения флюидов в пласте),
- **расчет эффективных фазовых проницаемостей и капиллярного давления**,
- **контроль за работой скважин** (задание дебитов, забойных давлений, ограничений для групп скважин).

Широкие возможности для комплексного анализа различных факторов, доступность, способность быстро обрабатывать большие объемы информации делают математическое моделирование незаменимым средством для изучения и управления процессами, происходящими в нефтяных и газовых пластах.

В данном учебном пособии рассматриваются вопросы построения математических моделей фильтрации и некоторые практические аспекты их использования для моделирования разработки месторождений нефти и газа. Учитывая большой объем и стремительное развитие научных исследований в данном направлении, следует особо отметить, что предлагаемая книга в соответствии со своим назначением не претендует на полноту библиографического обзора.

В основе книги лежат курсы лекций, прочитанных автором в Российском Государственном Университете нефти и газа им. И. М. Губкина для студентов кафедры прикладной математики и

компьютерного моделирования и кафедры разработки и эксплуатации газовых и газоконденсатных месторождений.

Данное учебное пособие предназначено для студентов нефтегазовых вузов и факультетов, обучающихся по направлениям «прикладная математика», «нефтегазовое дело» («разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений»), «физические основы нефтегазового дела», магистров по направлению «нефтегазовое дело». Книга будет полезна также аспирантам и специалистам, занимающимся моделированием разработки месторождений углеводородов.

Автор благодарит профессора В. М. Енгова, которому принадлежит идея создания данного курса лекций и соответствующего учебного пособия. Автор выражает глубокую признательность профессорам К. С. Басниеву и М. Г. Сухареву за поддержку и ценные обсуждения при подготовке данной книги.

## Глава 1

# ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Фильтрационный перенос жидкостей и газов в пористых средах, возникающий при извлечении углеводородов, описывается фундаментальными законами сохранения массы, импульса, энергии. Однако применить эти законы непосредственно для описания фильтрации в пористых средах чрезвычайно сложно, поэтому на практике используется полуэмпирический подход, основанный на применении закона Дарси взамен уравнения сохранения импульса. Учитывая, что предметом данного курса являются прикладные аспекты моделирования фильтрации, здесь представлены только те модели, которые широко используются при расчетах разработки месторождений. Изотермическая фильтрация описывается уравнениями сохранения массы, закона Дарси в совокупности с уравнениями фазового состояния. Если рассматриваются неизотермические процессы, учитывается также уравнение сохранения энергии.

### 1.1. Закон сохранения массы

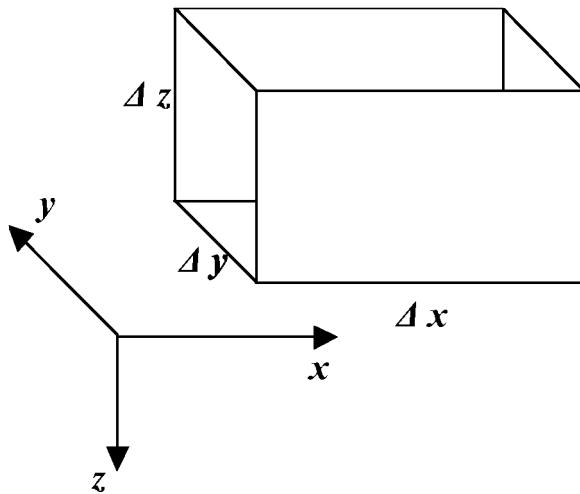
В основе рассмотрения лежит представление о пористой среде как о сплошной среде – фиктивном континууме, для каждой точки которого можно определить физические характеристики как непрерывные функции пространственных и временной координат. Значения физических переменных и параметров в точке пористой среды характеризуются представительными значениями для элементарного объема, содержащего эту точку. Элементарный объем должен быть достаточно большим по сравнению с размером пор и малым по сравнению с характерным масштабом пласта. Определим пористость  $m$  как долю элементарного объема, не занятую твердой матрицей.

Рассмотрим трехмерную фильтрацию однородного флюида. Выделим элементарный объем пористой среды в виде прямоугольного параллелепипеда с ребрами  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и  $\Delta z$ , рис.1.1. Поток массы флюида через каждую грань параллелепипеда за время  $\Delta t$  можно определить как  $\rho u_i \Delta t S_i$ , где  $\rho$  – плотность жидкости,  $u_i$  – скорость фильтрации

вдоль направления  $i$ , перпендикулярного грани,  $i = x, y, z$ ,  $S_i = V/\Delta i$  – площадь грани,  $V = \Delta x \Delta y \Delta z$ . Приток флюида в элементарный объем через грань  $i = \text{const}$  обозначим  $S_i (\rho u_i) \Delta t$ , отток через противоположную грань, отстоящую на расстоянии  $\Delta i$ , –

$$S_x [(\rho u_x)_x - (\rho u_x)_{x+\Delta x}] \Delta t + S_y [(\rho u_y)_y - (\rho u_y)_{y+\Delta y}] \Delta t + S_z [(\rho u_z)_z - (\rho u_z)_{z+\Delta z}] \Delta t.$$

$S_i (\rho u_i)_{i+\Delta i} \Delta t$ . Тогда изменение массы внутри элементарного объема за счет потока через его поверхность определяется выражением



**Рис.1.1. Элементарный объем.**

Это изменение массы должно быть скомпенсировано изменением за счет сжимаемости  $\left[ \frac{\partial}{\partial t} (m\rho) \right] \Delta t V$  и за счет потока, обусловленного действием распределенного внутри объема внешнего источника или стока с массовой интенсивностью  $\tilde{q}$ , который за время  $\Delta t$  составит  $\tilde{q} V \Delta t$ . Внешние источники или стоки обычно используются для учета в модели скважин или условий на границе пласта. Положим, что значение  $\tilde{q}$  положительно в случае стока и отрицательно в случае источника. В результате получим

$$\begin{aligned} & S_x [(\rho u_x)_x - (\rho u_x)_{x+\Delta x}] \Delta t + S_y [(\rho u_y)_y - (\rho u_y)_{y+\Delta y}] \Delta t + S_z [(\rho u_z)_z - (\rho u_z)_{z+\Delta z}] \Delta t = \\ & = \left[ \frac{\partial}{\partial t} (m\rho) \right] \Delta t V + \tilde{q} V \Delta t \end{aligned} \quad (1.1)$$

Поделив уравнение (1.1) на  $\Delta t V$ , имеем

$$\frac{(\rho u_x)_x - (\rho u_x)_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \frac{(\rho u_y)_y - (\rho u_y)_{y+\Delta y}}{\Delta y} + \frac{(\rho u_z)_z - (\rho u_z)_{z+\Delta z}}{\Delta z} = \frac{\partial}{\partial t} (m\rho) + \tilde{q}.$$

Переходя к пределу при  $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$ , получим уравнение сохранения массы (уравнение неразрывности) в декартовой системе координат

$$-\left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}\right] = \frac{\partial}{\partial t}(m\rho) + \tilde{q} \quad (1.2)$$

или, используя оператор дивергенции,

$$-\operatorname{div}(\rho u) = \frac{\partial}{\partial t}(m\rho) + \tilde{q}. \quad (1.3)$$

В цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  уравнение (1.3) имеет вид:

$$-\left[\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}\right] = \frac{\partial}{\partial t}(m\rho) + \tilde{q}. \quad (1.4)$$

В случае многофазной многокомпонентной фильтрации уравнение неразрывности (1.3) можно обобщить следующим образом [22]. Пусть рассматриваемая система состоит из  $n_l$  фаз и  $n_c$  компонентов. Обычно количество фаз – не более трех: нефть, вода и газ. Как правило, вода – смачивающая фаза, газ – несмачивающая фаза, а нефть имеет промежуточную смачиваемость. В некоторых углеводородных системах между фазами происходит значительный массообмен отдельными химическими соединениями (компонентами). В этом случае сохранение баланса масс должно выполняться не только для каждой фазы, но и для каждого компонента. Количество компонентов может быть произвольным. Компоненты имеют различную концентрацию в различных фазах. При этом каждая фаза перемещается с различной скоростью.

Насыщенность  $l$ -й фазой  $s_l$  определяется как доля порового пространства элементарного объема, занятая данной фазой. Пусть  $c_{lj}$  – массовая концентрация  $j$ -го компонента в  $l$ -й фазе. Тогда уравнение сохранения массы для  $j$ -го компонента имеет вид

$$-\sum_{l=1}^{n_l} \operatorname{div}(\rho_l c_{lj} u_l) = \frac{\partial}{\partial t} \left( m \sum_{l=1}^{n_l} s_l c_{lj} \rho_l \right) + \sum_{l=1}^{n_l} \tilde{q}_l \alpha_{lj} \quad (1.5)$$

Здесь  $\tilde{q}_l$  – интенсивность источника  $l$ -ой фазы,  $\alpha_{lj}$  – массовая доля компонента  $j$  в  $l$ -й фазе. Уравнение (1.5) учитывает только конвективный массоперенос, диффузионные процессы не учитываются.

При моделировании нефтяных пластов широкое распространение получила модель нелетучей нефти (*black oil model*), когда углеводородная система может быть аппроксимирована двумя компонентами: нелетучим (нефтью) и летучим (газом), растворимым в нефтяной фазе. Предполагается, что в пористой среде существуют

три отдельные фазы: вода, нефть и газ. Вода и нефть не смешиваются, не обмениваются массами и не меняют фазы. Газ растворим в нефти и нерастворим в воде. Предполагается, что флюиды в пласте находятся в состоянии термодинамического равновесия при постоянной температуре.

Пусть индекс  $i=1,2$  относится к нефтяному и газовому компонентам,  $l = o, w, g$  соответствует нефтяной, водной и газовой фазе. Тогда  $c_{g1} = 0$ ,  $c_{g2} = 1$ ,  $c_{w1} = c_{w2} = 0$ . Зависимость давление-объем-температура в системе может быть выражена с помощью объемных коэффициентов  $B_l$ , которые показывают, во сколько раз изменяется объем жидкости при выносе ее на свободную поверхность:

$$B_l = V_{lr}/V_{l0}. \quad (1.6)$$

Здесь  $V_{lr}$  и  $V_{l0}$  – объем жидкости  $l$ -ой фазы в пластовых и в нормальных условиях. Растворимость газа в нефти  $R$  определяет количество газа, растворенного в нефти. Предполагается, что в стандартных условиях растворимость равна нулю. Поэтому при выносе нефти на свободную поверхность можно определить объем дегазированной нефти  $V_{o0}$  и объем растворенного газа  $V_{dg0}$ , выделяющегося из нефти:

$$R = V_{dg0}/V_{o0}. \quad (1.7)$$

Учитывая компонентный состав нефтяной фазы, имеем [22]

$$M_{o0} = M_{or}c_{o1}, \quad M_{dg0} = M_{or}c_{o2}$$

Здесь  $M_{or}$  и  $M_{o0}$  – масса нефти с учетом растворенного газа соответственно в пластовых и в поверхностных условиях,  $M_{dg0}$  – масса растворенного газа. Выражая плотности фаз через объемы, объемные коэффициенты (1.6) и растворимость (1.7), получим:

$$\begin{aligned} c_{o1}\rho_o &= c_{o1}M_{or}/V_{or} = M_{o0}/(B_o V_{o0}) = \rho_{o0}/B_o \\ c_{o2}\rho_o &= c_{o2}M_{or}/V_{or} = M_{dg0}/(B_o V_{o0}) = (V_{dg0}\rho_{g0})/(B_o V_{o0}) = R\rho_{g0}/B_o \\ \rho_g &= M_g/V_{gr} = M_g/(B_g V_{g0}) = \rho_{g0}/B_g \\ \rho_w &= M_w/V_{wr} = M_w/(B_w V_{w0}) = \rho_{w0}/B_w \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь  $M_g$  – масса свободного газа,  $M_w$  – масса воды. Подставим выражения (1.8) в уравнения (1.5) с учетом того, что  $c_{g1} = 0$ ,  $c_{g2} = 1$ ,  $c_{w1} = c_{w2} = 0$ , а водный компонент содержится только в соответствующей фазе:

$$-div\left(\frac{\rho_{o0}u_o}{B_o}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(m\frac{s_o\rho_{o0}}{B_o}\right) + \tilde{Q}_o.$$

$$\begin{aligned}
& - \operatorname{div} \left( \frac{\rho_{g0} u_g}{B_g} + \frac{R \rho_{g0} u_o}{B_o} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ m \left( \frac{s_g \rho_{g0}}{B_g} + \frac{s_o \rho_{g0} R}{B_o} \right) \right] + \tilde{Q}_g \\
& - \operatorname{div} \left( \frac{\rho_{w0} u_w}{B_w} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( m \frac{s_w \rho_{w0}}{B_w} \right) + \tilde{Q}_w
\end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь  $\tilde{Q}_o$ ,  $\tilde{Q}_g$  и  $\tilde{Q}_w$  – массы компонентов, отбираемые из единичного объема пласта. Пусть  $Q_l = \tilde{Q}_l / \rho_l$  – соответствующие объемы, отбираемые при стандартных условиях. Учитывая, что газовый компонент присутствует как в свободном состоянии  $Q_{fg}$ , так и в нефтяной фазе, имеем  $Q_g = Q_{fg} + RQ_o$ . Разделив каждое из уравнений (1.9) на плотность соответствующей фазы, получим уравнения сохранения для трехфазной системы с нелетучей нефтью:

$$\begin{aligned}
& - \operatorname{div} \left( \frac{u_o}{B_o} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( m \frac{s_o}{B_o} \right) + Q_o. \\
& - \operatorname{div} \left( \frac{u_g}{B_g} + \frac{R u_o}{B_o} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ m \left( \frac{s_g}{B_g} + \frac{s_o R}{B_o} \right) \right] + Q_{fg} + RQ_o. \\
& - \operatorname{div} \left( \frac{u_w}{B_w} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( m \frac{s_w}{B_w} \right) + Q_w.
\end{aligned} \quad (1.10)$$

## 1.2. Закон Дарси

Закон Дарси выражает линейную зависимость скорости фильтрации  $\mathbf{u}$  от градиента давления  $\nabla p$ . Для однородной жидкости это соотношение имеет вид

$$u = -\frac{k}{\mu}(\nabla p - \rho g \nabla z). \quad (1.11)$$

Здесь  $k$  – тензор абсолютной проницаемости пористой среды,  $\mu$  – вязкость жидкости,  $g$  – ускорение свободного падения. Предполагается, что ось  $Z$  направлена вертикально вниз.

Условие  $u = 0$  определяет гидростатическое распределение давления:  $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$ ,  $\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g$ .

При решении многих практических задач предполагается, что направления главных осей тензора проницаемости совпадают с направлениями осей координат. В этом случае  $k$  – диагональный тензор:

$$k = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}.$$

Если  $k_x = k_y = k_z$ , среда называется изотропной, в противном случае – анизотропной. Характер осадконакопления часто приводит к вертикальной анизотропии природных резервуаров:  $k_z < k_{x,y}$ . Трещиноватые пласти также характеризуются естественной анизотропией: проницаемость вдоль направления основных трещин выше, чем в ортогональном направлении.

Экспериментально установлено, что при многофазной фильтрации закон Дарси может в широких пределах считаться справедливым для каждой фазы в отдельности:

$$u_l = -\frac{k_l}{\mu_l}(\nabla p_l - \rho_l g \nabla z). \quad (1.12)$$

Здесь  $k_l$  – фазовая проницаемость, которая, как и абсолютная проницаемость, является тензорной функцией; индекс  $l=o,w,g$  соответствует фазе. Относительные фазовые проницаемости  $k_{rl}$  определяются выражениями:  $k_l = k k_{rl}$ . Относительные фазовые проницаемости зависят от целого ряда характеристик: насыщенностей, градиента давления, капиллярных сил, структуры порового пространства и пр. Поскольку наиболее существенно фазовые проницаемости зависят от насыщенностей, в большинстве моделей фильтрации предполагается, что фазовые проницаемости являются функциями только насыщеностей.

### 1.3. Модели фильтрации

**Многокомпонентная (композиционная) модель** позволяет рассматривать достаточно сложные процессы фильтрации в нефтегазоконденсатных пластах с учетом межфазного массообмена отдельными компонентами. Предположим, что рассматриваемая система состоит из  $n_l$  фаз и  $n_c$  компонентов. Подстановка уравнений движения (1.12) в закон сохранения массы для каждого компонента (1.5) дает  $n_c$  уравнений:

$$\sum_{l=1}^{n_l} \operatorname{div} \left[ \rho_l c_{lj} \frac{k k_{rl}}{\mu_l} (\nabla p_l - \rho_l g \nabla z) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left( m \sum_{l=1}^{n_l} s_l c_{lj} \rho_l \right) + \sum_{l=1}^{n_l} \tilde{q}_l \alpha_{lj} \quad j = 1, \dots, n_c. \quad (1.13)$$

В уравнениях (1.13) плотности и вязкости фаз являются известными функциями давления и компонентного состава:  $\rho_l = \rho_l(p_l, c_{lj})$ ,  $\mu_l = \mu_l(p_l, c_{lj})$ . Относительные фазовые проницаемости также являются известными функциями насыщеностей  $k_{rl} = k_{rl}(s_1, \dots, s_{n_l})$ . Значения  $\tilde{q}_l$  и  $\alpha_{lj}$  определяются в соответствии с

граничными условиями. Таким образом, определению подлежат следующие неизвестные функции:

- массовые концентрации компонентов в каждой из фаз  $c_{lj}$ ,  $l=1,\dots,n_l, j=1,\dots,n_c$ ;
- давления в каждой из фаз  $p_l$ ,  $l=1,\dots,n_l$ ;
- насыщенности  $s_l$ ,  $l=1,\dots,n_l$ .

В результате общее число неизвестных составляет  $n_l n_c + 2n_l$ . Для замыкания системы уравнений (1.13) необходимо использовать дополнительные соотношения.

Гипотеза о существовании в каждой точке пористой среды локального термодинамического равновесия позволяет получить  $(n_l - 1)n_c$  независимых соотношений, которыми определяется распределение компонентов между фазами:

$$\frac{c_{lj}}{c_{mj}} = K_{jlm}(T, p, c_{ij}), \quad l, m, i = 1, \dots, n_l, \quad j = 1, \dots, n_c. \quad (1.14)$$

Здесь  $K_{jlm}$  – константы фазового равновесия, которые вычисляются по законам термодинамики в зависимости от состава фаз, давления и температуры.

Разность давлений на границе между фазами определяется действием капиллярных сил, учет которых позволяет ввести еще  $n_l - 1$  независимых соотношений:

$$p_l - p_m = p_{lm}(s_i), \quad l, m, i = 1, \dots, n_l. \quad (1.15)$$

Капиллярное давление  $p_{lm}(s_i)$  определяется экспериментально и при решении системы уравнений фильтрации является известной функцией насыщенностей.

Сумма насыщенностей всегда равна единице, поскольку поровое пространство заполнено флюидами:

$$\sum_{l=1}^{n_l} s_l = 1. \quad (1.16)$$

Сумма концентраций всех компонентов в каждой фазе тоже равна единице, что дает еще  $n_l$  соотношений:

$$\sum_{j=1}^{n_c} c_{lj} = 1, \quad l = 1, \dots, n_l. \quad (1.17)$$

Полученная таким образом система уравнений (1.13) – (1.17) содержит  $n_l n_c + 2n_l$  и является замкнутой.

Для решения многих практических задач многокомпонентной фильтрации зачастую используют различные упрощающие допущения, например:

- пренебрегают капиллярным скачком давления между фазами и предполагают, что давления в фазах равны ( $p_l = p$  для любого  $l$ );
- несколько компонентов, совместимых по характеру зависимостей давление-объем-температура и данным закона равновесия, группируют, снижая тем самым количество неизвестных;
- концентрации углеводородных компонентов в воде принимают равными нулю ( $c_{wj}=0$  для любого  $j \neq w$ ), т. е. предполагают, что массоперенос этих компонентов происходит только в нефтяной и газовой фазах.

В простейшем случае можно считать достаточным использование четырехкомпонентной модели, в которой углеводородная система моделируется тремя условными компонентами: легким газом, конденсатом (летучим компонентом) и нефтью (нелетучим компонентом). Каждый из этих трех компонентов может присутствовать в нефтяной фазе. В газовой фазе может присутствовать только два компонента: газовый и летучий (конденсат). Четвертый компонент – вода – содержится только в водной фазе, которая не смешивается и не обменивается массами с остальными фазами.

Моделирование нефтегазовых залежей или процессов закачки газа в нефтяные пласты осуществляется с использованием **модели трехфазной фильтрации** [1,20,35]. Наиболее распространенной является модель нелетучей нефти Маскета – Мереса (*black oil model*), в которой углеводородная система аппроксимируется двумя компонентами: нефтью и газом, растворимым в нефти. Подстановка закона Дарси (1.12) в уравнения сохранения для трехфазной системы (1.10) дает

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\frac{k_o}{\mu_o B_o}(\nabla p_o - \rho_o g \nabla z)\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(m \frac{s_o}{B_o}\right) + Q_o. \\ \operatorname{div}\left(\frac{k_g}{\mu_g B_g}(\nabla p_g - \rho_g g \nabla z) + \frac{R k_o}{\mu_o B_o}(\nabla p_o - \rho_o g \nabla z)\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[m\left(\frac{s_g}{B_g} + \frac{s_o R}{B_o}\right)\right] + Q_{fg} + RQ_o; \quad (1.18) \\ \operatorname{div}\left(\frac{k_w}{\mu_w B_w}(\nabla p_w - \rho_w g \nabla z)\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(m \frac{s_w}{B_w}\right) + Q_w. \end{aligned}$$

Для замыкания системы уравнений (1.18) используются соотношения (1.15), (1.16):

$$\begin{aligned} p_o - p_w &= p_{ow}(s_g, s_o, s_w). \\ p_g - p_o &= p_{go}(s_g, s_o, s_w). \\ s_g + s_o + s_w &= 1. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Для моделирования процессов вытеснения нефти водой при давлениях выше давления насыщения нефти газом достаточно

использовать **модель двухфазной фильтрации**. Соответствующие уравнения могут быть получены из (1.18), (1.19) при  $s_g = 0$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\frac{k_o}{\mu_o B_o}(\nabla p_o - \rho_o g \nabla z)\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(m \frac{s_o}{B_o}\right) + Q_o; \\ \operatorname{div}\left(\frac{k_w}{\mu_w B_w}(\nabla p_w - \rho_w g \nabla z)\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(m \frac{s_w}{B_w}\right) + Q_w; \\ p_o - p_w &= p_{ow}(s_o, s_w); \\ s_o + s_w &= 1. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Аналогичные уравнения используются для описания двухфазной фильтрации газа и воды в газовых пластах.

Для интерпретации результатов гидродинамических исследований скважин используется **модель фильтрации однородной жидкости**:

$$\operatorname{div}\left(\frac{k}{\mu B}(\nabla p - \rho g \nabla z)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{m}{B}\right) + Q.$$

Задачи исследования скважин чаще всего рассматриваются в двумерной постановке без учета гравитации:

$$\operatorname{div}\left(\frac{k}{\mu B} \nabla p\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{m}{B}\right) + Q. \quad (1.21)$$

**Модели физико-химических методов повышения нефтеотдачи.** Для повышения нефтеотдачи пластов вместо воды для вытеснения нефти используют различные агенты в виде водных растворов или в чистом виде. Механизмы увеличения полноты вытеснения нефти различны. При вытеснении нефти растворителями (спиртом, сжиженным углеводородным газом, азотом, углекислым газом), которые за счет молекулярной диффузии с течением времени полностью смешиваются с нефтью, нефть может быть полностью вымыта из пласта. При добавлении к закачиваемой в пласт воде поверхностно-активных веществ (ПАВ) поверхностное натяжение на границе с нефтью существенно снижается, увеличивается гидрофильтность пород-коллекторов и снижается остаточная нефтенасыщенность. Вытеснение нефти водными растворами полимеров, характеризующимися более высокой вязкостью, чем вода, также приводит к увеличению нефтеотдачи. Для моделирования фильтрационных процессов, происходящих в пласте при использовании физико-химических методов разработки, используются специальные математические модели. Процессы вытеснения нефти растворителями описываются моделями смешивающегося вытеснения – уравнения (1.13) – (1.17) для однофазной двухкомпонентной фильтрации (компоненты – нефть и растворитель). Однако приведенная модель не учитывает диффузионный перенос примеси, за счет которого происходит частичное или полное

смешивание вытесняющего агента с нефтью. Решение уравнений смешивающегося вытеснения с учетом молекулярной диффузии весьма затруднительно. По этой причине, а также потому, что частичная или полная смесимость некоторых флюидов наступает в зависимости от концентрации, распространение получили методы моделирования смешивающего вытеснения при помощи моделей фильтрации несмешивающихся жидкостей. Таким образом, процесс вытеснения нефти раствором активной примеси можно описать системой уравнений двухфазной фильтрации (1.20), дополненной уравнением баланса примеси [3]:

$$\operatorname{div} \left( \frac{k_w c}{\mu_w F_{rr} B_w} (\nabla p_w - \rho_w g \nabla z) + \frac{k_o \Phi}{\mu_o B_o} (\nabla p_o - \rho_o g \nabla z) \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( m \frac{s_w c}{B_w} + m \frac{s_o \Phi}{B_o} + a \right) + Q_w c^* + Q_o \Phi; \\ c^* = \begin{cases} c^0 & \text{при } Q_w < 0 \\ c & \text{при } Q_o \geq 0 \end{cases}. \quad (1.22)$$

Здесь  $c$  – объемная концентрация примеси в воде,  $c^0$  – концентрация примеси в закачиваемом растворе,  $\Phi = \Phi(c)$  – растворимость примеси в нефти,  $a = a(c)$  – адсорбция примеси на единицу объема породы пласта,  $F_{rr}$  – остаточный фактор сопротивления пористой среды для воды после контакта с раствором полимера. В уравнениях (1.20), (1.21) необходимо учесть зависимости фазовых проницаемостей, остаточной нефтенасыщенности, плотностей и вязкостей фаз от концентрации примеси. При описании смешивающегося вытеснения фазовые проницаемости являются линейными функциями насыщенности, а эффективные вязкости и плотности фаз, отражающие свойства флюидов, усредненные по расчетному блоку, могут быть определены, например, по специальным эмпирическим зависимостям, предложенным Тоддом и Лонгстаффом [1,58].

**Модели неизотермической фильтрации** используются для описания процессов извлечения нефти с применением различных теплоносителей (горячей воды, пара, очага внутрипластового горения). Эти технологии используются, в основном, для добычи высоковязких нефтей и битумов. При неизотермической фильтрации свойства и состав флюидов и фазовые проницаемости зависят еще от одной переменной – температуры. Поэтому для замыкания системы уравнений фильтрации необходимо дополнительное уравнение – закон сохранения энергии. В простейшем случае при вытеснении нефти горячей водой уравнение теплового баланса аналогично (1.22), а концентрация примеси – аналог температуры.

## 1.4. Свойства флюидов и породы

Нелинейный характер уравнений фильтрации и методы их решения во многом зависят от вида функциональных соотношений, которые определяют свойства флюидов и порового коллектора в зависимости от искомых переменных: давления, насыщенностей, концентраций, температуры. Рассмотрим кратко зависимости, входящие в систему уравнений трехфазной изотермической фильтрации (1.18) – (1.19).

**Свойства флюидов.** Функциями одного лишь давления при пластовой температуре и неизменном составе фаз являются объемные коэффициенты и растворимость газа в нефти, а также вязкости фаз. Заметим, что плотности флюидов определяются через объемные коэффициенты и растворимость соотношениями (1.8).

Объемный коэффициент газа обычно задается в виде

$$B_g = p_{STC} / p_g. \quad (1.23)$$

Здесь  $p_{STC}$  – атмосферное давление.

Объемный коэффициент нефти – немонотонная функция давления. Он линейно возрастает от 1 до некоторого характерного значения  $B_{ob}$  при увеличении давления от атмосферного до давления насыщения нефти газом  $p_{ob}$ , а затем линейно убывает в соответствии с коэффициентом сжимаемости нефти. Рост объемного коэффициента в зависимости от давления при  $p < p_{ob}$  связан с увеличением количества растворенного газа. При давлении выше давления насыщения нефть ведет себя как слабосжимаемая жидкость, для которой сжимаемость

$$c_l = -\frac{1}{V_l} \frac{\partial V_l}{\partial p_l} \Bigg|_{T=const} = \frac{1}{\rho_l} \frac{\partial \rho_l}{\partial p_l} \Bigg|_{T=const} = -\frac{1}{B_l} \frac{\partial B_l}{\partial p_l} \Bigg|_{T=const}$$

постоянна во всем рассматриваемом диапазоне давления. Интегрируя это уравнение и учитывая, что величина сжимаемости мала, получим

$$B_l = B_{lb} \exp[-c_l(p_l - p_{lb})] = B_{lb} [1 - c_l(p_l - p_{lb})]. \quad (1.24)$$

Здесь  $B_{lb}$  – значение объемного коэффициента при давлении насыщения  $p_{lb}$ . Коэффициент сжимаемости нефти имеет величину порядка  $10^{-3}$  МПа<sup>-1</sup>.

Объемный коэффициент воды также обычно задается выражением вида (1.24). Причем коэффициент сжимаемости воды обычно меньше коэффициента сжимаемости нефти и имеет порядок  $10^{-4}$  МПа<sup>-1</sup>.

Коэффициент растворимости увеличивается от 0 до максимального значения  $R_b$  при возрастании давления от

атмосферного до давления насыщения нефти газом  $p_{ob}$ , а затем сохраняет постоянное значение.

Вязкости нефти и газа сильно зависят от температуры. Зависимость от давления не очень существенная, поэтому при проведении гидродинамических расчетов изотермической фильтрации вязкости всех фаз зачастую полагают постоянными.

Обычно все перечисленные зависимости определяют в лабораторных условиях путем анализа проб пластовых жидкостей. Характерный вид этих функций показан на рис. 1.2.

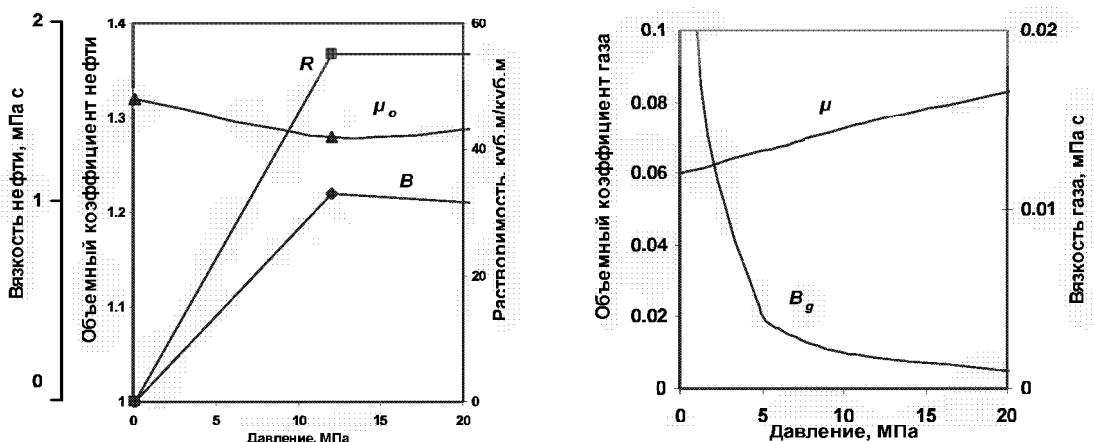


Рис. 1.2. Характерные зависимости свойств нефти и газа от давления.

**Свойства породы.** Для решения уравнений фильтрации должны быть заданы пористость, проницаемость, фазовые проницаемости и капиллярные давления. Изменение пористости в зависимости от пластового давления может быть задано в виде

$$m = m_b [1 + c_r (p - p_b)]. \quad (1.25)$$

Здесь  $c_r$  – коэффициент сжимаемости породы. Обычно значение коэффициента сжимаемости породы сравнимо с соответствующим значением для воды.

Подстановка выражений (1.24), (1.25) в (1.21) при пренебрежении слагаемыми порядка  $c_l(\nabla p)^2$  и  $c_l(c_l + c_r)$  дает уравнение фильтрации слабосжимаемого флюида, известного как уравнение диффузии или пьезопроводности [5,29]:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \eta = \frac{k}{m_b \mu_l (c_l + c_r)}. \quad (1.26)$$

Здесь  $\eta$  – коэффициент пьезопроводности. Термин «пьезопроводность» введен В. И. Щелкачевым по аналогии с температуропроводностью.

Аналогичное уравнение, описывающее фильтрацию газа, – уравнение Л. С. Лейбензона – может быть получено в результате подстановки выражений (1.23), (1.25) в (1.21):

$$\operatorname{div}\left(\frac{k}{\mu} p \nabla p\right) = \frac{\partial}{\partial t}(mp). \quad (1.27)$$

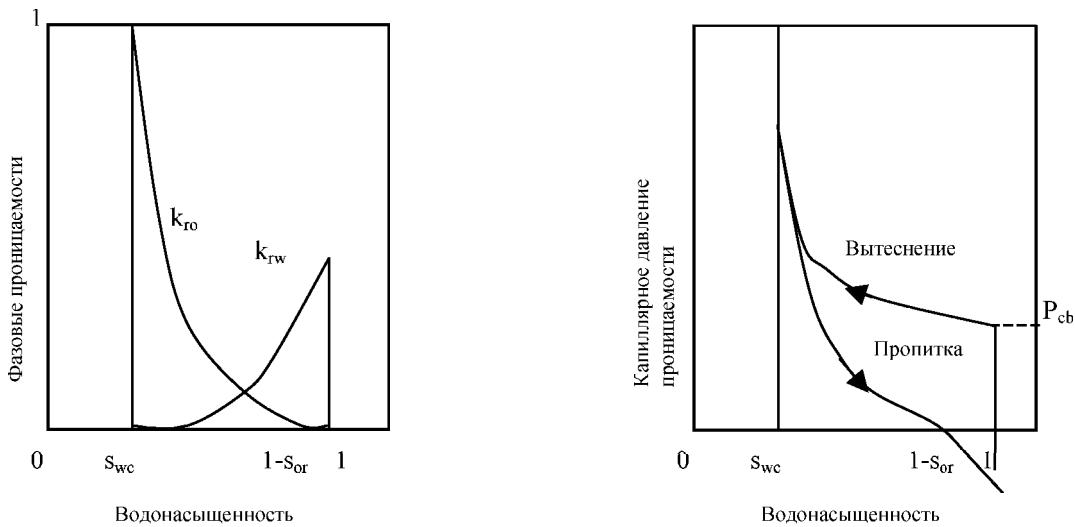
В результате умножения левой и правой части этого уравнения на  $p$  и последующей линеаризации имеем

$$\nabla^2 p^2 = \frac{1}{\bar{\eta}} \frac{\partial p^2}{\partial t}, \quad \bar{\eta} = \frac{kp_0}{m_b \mu_g}. \quad (1.28)$$

Здесь в качестве  $p_0$  обычно принимается начальное давление в пласте.

Значения абсолютной проницаемости задаются в соответствии с тензорным характером этого параметра. В силу естественной слоистости пласта, определяемой характером осадконакопления, главные оси тензора обычно горизонтальны и вертикальны, поэтому в декартовой системе координат, оси которой направлены вдоль главных осей тензора проницаемости, достаточно задать горизонтальную и вертикальную проницаемость. Кроме того, в некоторых случаях для учета анизотропии в горизонтальной плоскости, которая обычно отмечается в трещиноватых пластах, задаются различные значения проницаемости вдоль всех направлений. Иногда при моделировании фильтрации в трещиноватых пластах учитывают зависимость проницаемости от давления.

Основные нелинейности в уравнениях фильтрации связаны с видом зависимостей относительных фазовых проницаемостей и капиллярного давления от насыщенности, рис.1.3.



**Рис. 1.3. Характерные зависимости относительных фазовых проницаемостей и капиллярного давления от водонасыщенности в системе нефть-вода.**

На рис. 1.3 показаны типичные зависимости относительных фазовых проницаемостей для двухфазной системы нефть-вода. Насыщенность  $S_{wc}$ , при которой начинает двигаться вода, называется

остаточной или насыщенностью, связанной водой. Насыщенность  $s_{or}$ , при которой перестает двигаться вытесняемая фаза – нефть, называется остаточной нефтенасыщенностью. Соответственно,  $1-s_{or}$  – максимальная водонасыщенность, при которой существует двухфазное течение. При  $s_w < s_{wc}$  фазовая проницаемость для воды равна нулю. При  $s_w > 1-s_{or}$  фазовая проницаемость для нефти равна нулю. Аналогичный характер имеют зависимости относительных фазовых проницаемостей от насыщенности для двухфазных систем нефть-газ и газ-вода.

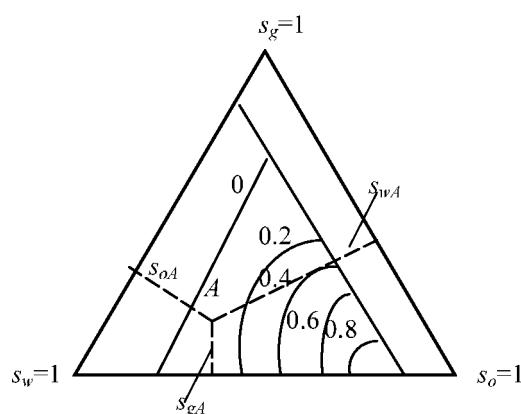
Согласно экспериментальным данным в случае трехфазной фильтрации относительные фазовые проницаемости для воды и для газа зависят только от соответствующей насыщенности:

$$k_{rw} = k_{rw}(s_w), \quad k_{rg} = k_{rg}(s_g). \quad (1.29)$$

тогда как фазовая проницаемость для нефти является функцией всех насыщенностей:

$$k_{ro} = k_{ro}(s_w, s_g). \quad (1.30)$$

Зависимость (1.30) обычно иллюстрируется с помощью треугольной диаграммы, рис. 1.4, которая представляет собой равносторонний треугольник с высотой 1. Каждой точке внутри треугольника соответствует трехфазная система, насыщенности фаз в которой определяются длинами перпендикуляров, опущенных из этой точки к сторонам треугольника, противолежащим вершинам, соответствующим 100%-ой насыщенности данной фазой. Для точки A отрезки, длины которых определяют насыщенности  $s_{oA}$ ,  $s_{wA}$ ,  $s_{gA}$ , показаны на рис. 1.4 пунктиром. На диаграмме изображаются изолинии относительной фазовой проницаемости для нефти. Каждой точке фиксированной изолинии соответствует одно и то же значение относительной фазовой проницаемости.



**Рис. 1.4. Относительные фазовые проницаемости для нефти при трехфазной фильтрации.**

Типичная кривая капиллярного давления при двухфазной фильтрации показана на рис. 1.3. Капиллярное давление зависит от насыщенности смачивающим флюидом и направления ее изменения

(вытеснение или пропитка). Давление  $P_{cb}$ , необходимое для начала процесса вытеснения, называется пороговым. Оно наиболее существенно для низкопроницаемых пород. При остаточной водонасыщенности  $s_{wc}$  вода, являющаяся смачивающей фазой, больше не вытесняется под действием градиента давления. Обычно предполагают, что в ходе вытеснения капиллярное давление неограниченно возрастает при приближении водонасыщенности к  $s_{wc}$ . В ходе цикла пропитки капиллярное давление ниже, чем при вытеснении. В численных расчетах необходимо вводить функцию капиллярного давления с ограниченной производной. При задании капиллярного давления обычно определяется безразмерная функция насыщенности смачивающей фазой – функция Леверетта  $J(s)$ , которая устанавливает связь между капиллярным давлением  $P_c$ , проницаемостью и пористостью среды:

$$J(s) = \frac{P_c}{\sigma \cos \theta} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1.31)$$

Здесь  $\sigma$  – коэффициент межфазного натяжения,  $\theta$  – краевой угол смачивания.

При исследовании трехфазной фильтрации обычно предполагается, что капиллярное давление на границе нефть-вода  $p_{ow}$  зависит только от водонасыщенности, а на границе нефть-газ  $p_{go}$  – только от газонасыщенности:

$$p_{ow} = p_{ow}(s_w), \quad p_{go} = p_{go}(s_g). \quad (1.32)$$

## 1.5. Начальные условия

Чаще всего начальным условием для пласта принимается состояние статического равновесия, при котором скорости всех фаз равны нулю. Согласно обобщенному закону Дарси (1.12) это условие обозначает, что при отсутствии непроницаемых перемычек в пласте, на которых  $k = 0$ , каждая фаза либо неподвижна ( $k_i = 0$ ), либо давление в ней распределено по гидростатическому закону и зависит только от вертикальной координаты  $z$ :

$$\frac{\partial p_l}{\partial z} = \rho_l g. \quad (1.33)$$

Таким образом, под действием капиллярных и гравитационных сил флюиды разделяются, причем в переходных зонах, где обе фазы подвижны, распределение насыщенностей определяется из условия капиллярно-гравитационного равновесия:

$$\frac{\partial(p_o - p_w)}{\partial z} = \frac{\partial p_{ow}}{\partial z} = (\rho_o - \rho_w)g \quad \text{на границе вода-нефть,} \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial(p_g - p_o)}{\partial z} = \frac{\partial p_{go}}{\partial z} = (\rho_g - \rho_o)g \quad \text{на границе нефть-газ.}$$

Природные пласти часто характеризуются слоистым строением, причем слои могут сообщаться один с другим. В этом случае функции пористости и абсолютной проницаемости могут быть разрывными. Из условия непрерывности давления в каждой фазе, а следовательно, и капиллярного давления, на разрыве проницаемости или пористости возникают так называемые «висячие» скачки насыщенности, которые имеют место в переходных зонах даже в условиях равновесия [32]. Величина скачка определяется из выражения для капиллярного давления (1.31):

$$\frac{J(s^+)}{J(s^-)} = \sqrt{\frac{k^+ m^-}{k^- m^+}}.$$

Здесь индексы «+» и «-» соответствуют значениям по разные стороны от разрыва.

Поскольку капиллярные давления  $p_{ow}$  и  $p_{go}$  определяются выражениями (1.31), (1.32), для однозначного задания начального равновесного состояния, в соответствии с (1.33), (1.34), необходимо задать одно значение давления на некоторой фиксированной глубине и два значения насыщенности, по одному в каждой переходной зоне. Эти значения должны соответствовать подвижным фазам и обычно определяются на условно принятых отметках водонефтяного и газонефтяного контактов.

При компьютерном моделировании пластов формирование начального равновесного состояния на модели называется инициализацией. Задача инициализации решается перед началом расчета динамических характеристик модели.

## 1.6. Границные условия

Границные условия отражают взаимодействие нефтяного или газового пласта с окружающей областью. Эти условия должны быть заданы на внешних границах моделируемой области и на скважинах. Обычно на границе  $\Gamma$  задается [1]:

- давление (постоянное или изменяющееся по заданному закону)  $p_l|_{\Gamma} = p_l^0(\Gamma, t);$  (1.35)

- условие непротекания (расход каждой фазы равен нулю)

$$\left. \frac{kk_{rl}}{\mu_l} (\nabla p_l - \rho_l g \nabla z) \cdot n \right|_{\Gamma} = 0; \quad (1.36)$$

3. расход одной из фаз (обычно нефти)

$$\frac{kk_{rl}}{\mu_l} (\nabla p_l - \rho_l g \nabla z) \cdot n \Big|_{\Gamma} = q_l(\Gamma, t) \quad (1.37)$$

$$\text{или } \int q_l(\gamma, t) d\gamma = q_{lT}(t); \quad (1.38)$$

4. расход жидкости (нефть+вода)  $q_o(\Gamma, t) + q_w(\Gamma, t) = q_{o+w}(\Gamma, t)$

$$\text{или } \int [q_o(\gamma, t) + q_w(\gamma, t)] d\gamma = q_{o+wT}(t); \quad (1.39)$$

5. суммарный расход (нефть+вода+газ)

$$q_o(\Gamma, t) + q_w(\Gamma, t) + q_g(\Gamma, t) = q_{o+w+g}(\Gamma, t)$$

$$\text{или } \int [q_o(\gamma, t) + q_w(\gamma, t) + q_g(\gamma, t)] d\gamma = q_{o+w+gT}(t). \quad (1.40)$$

Здесь  $n$  – вектор нормали к границе  $\Gamma$ ,  $q_l$  – расход или нормальная компонента скорости, а  $q_{lT}$  – полный поток фазы через границу. При задании на внешней границе пласта условий 3 – 5 действительный поток через нее моделируют с помощью функций-источников (стоков), которые могут быть включены в правую часть уравнений. В этом случае граничные условия заменяют однородными граничными условиями Неймана (условиями непротекания).

Как правило, при моделировании проницаемой границы с использованием условий 3 – 5 задается не распределенный расход или скорость (1.37), а полный поток – через границу одной (1.38) или нескольких фаз (1.39) или (1.40). На границе, где нагнетаются флюиды, расход каждой фазы известен, поэтому расход задается в виде (1.38). На границе, на которой флюиды отбираются, отыскивается неизвестное распределение флюидов по фазам, и граничные условия могут быть заданы в любом виде (1.38) – (1.40).

При задании полного потока в процессе моделирования он должен быть распределен вдоль границы, а при задании суммарного потока нескольких фаз – еще и по фазам. Поэтому граничные условия вида (1.38) – (1.40) характеризуют скорее ограничения на величину расхода, а не граничные условия. Как видно из соотношений (1.37) – (1.40) распределение суммарного расхода между отдельными фазами должно осуществляться в соответствии с распределением проводимостей и разностей потенциалов.

Распределение расходов вдоль границы не всегда можно проводить только с учетом распределения проводимостей. Например, при задании условий на скважине необходимо учитывать распределение давления в стволе скважины. Аналогично, на внешней границе моделируемой области, которая является частью большой не моделируемой в целом системы, для учета взаимодействия с окружающей системой должно задаваться конкретное распределение расходов вдоль границы.

При численном моделировании пласта основная проблема задания граничного условия в виде полного потока одной или нескольких фаз заключается в распределении расходов при неизвестном решении.

## Глава 2

# МЕТОДЫ ДИСКРЕТИЗАЦИИ УРАВНЕНИЙ И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Гидродинамические задачи, возникающие при разработке месторождений углеводородов, слишком сложны для того, чтобы допускать аналитические решения, поэтому важным аспектом моделирования является применение численных методов, позволяющих получать приближенные решения соответствующих задач.

В результате дискретизации дифференциальных уравнений с помощью метода конечных разностей непрерывное распределение параметров заменяется дискретным. Отыскиваются приближенные значения неизвестной функции для конечного множества точек области определения. Эти точки называются узлами сетки. Дифференциальное уравнение заменяется системой алгебраических уравнений для определения приближенных значений искомой функции во всех узлах сетки. Эти уравнения называются конечно-разностными, а процедура получения этих уравнений – дискретизацией. Если можно показать, что приближенное решение близко в определенном смысле в узлах сетки к истинному решению исходной задачи, то говорят, что оно аппроксимирует истинное решение. Основные методы дискретизации уравнений – это разложение в ряд Тейлора, интегральный и вариационный методы, что соответствует дифференциальной, интегральной и вариационной формам уравнения сохранения массы [1,23,35].

В этой главе описываются основные приемы дискретизации уравнений на примере уравнения однофазной фильтрации (1.26):

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (2.1)$$

Полное изложение теории численных методов решения дифференциальных уравнений, включая алгоритмы обращения разреженных матриц, используемые для решения систем линейных алгебраических уравнений, находится за рамками данного курса.

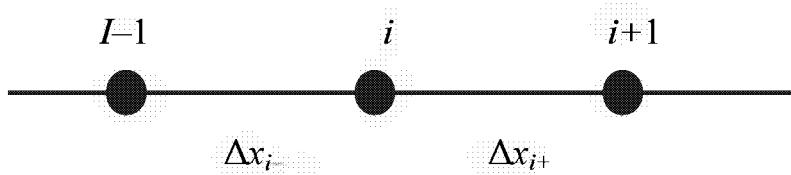
## 2.1. Дискретизация по пространству

В этом разделе рассматривается метод дискретизации по пространству, основанный на разложении в ряд Тейлора и интегральный метод.

Рассмотрим равномерную разностную сетку вдоль оси  $x$ , рис. 2.1. Обозначим через  $\Delta x_i$  расстояние между узлами. Выразим  $P_{i+1} = P(x_{i+1}, t) = P(x_i + \Delta x_i, t)$  и  $P_{i-1} = P(x_{i-1}, t) = P(x_i - \Delta x_i, t)$  через  $P_i = P(x_i, t)$ , используя разложение в ряд Тейлора:

$$P_{i+1} = P_i + \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_i (\Delta x_i) + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \Big|_i \frac{(\Delta x_i)^2}{2!} + \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \Big|_i \frac{(\Delta x_i)^3}{3!} + \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} \Big|_i \frac{(\Delta x_i)^4}{4!} + \frac{\partial^5 P}{\partial x^5} \Big|_i \frac{(\Delta x_i)^5}{5!} + \frac{\partial^6 P}{\partial x^6} \Big|_i \frac{(\Delta x_i)^6}{6!} + \dots, \quad (2.2)$$

$$P_{i-1} = P_i - \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_i (\Delta x_i) + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \Big|_i \frac{(\Delta x_i)^2}{2!} - \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \Big|_i \frac{(\Delta x_i)^3}{3!} + \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} \Big|_i \frac{(\Delta x_i)^4}{4!} - \frac{\partial^5 P}{\partial x^5} \Big|_i \frac{(\Delta x_i)^5}{5!} + \frac{\partial^6 P}{\partial x^6} \Big|_i \frac{(\Delta x_i)^6}{6!} - \dots. \quad (2.3)$$



**Рис. 2.1. Равномерная разностная сетка вдоль оси  $x$ :**

$$\Delta x_{i-} = \Delta x_{i+} = \Delta x_i.$$

С помощью этих разложений можно получить несколько аппроксимаций для первой производной в точке  $i$ . Аппроксимация разностью «вперед» следует из выражения (2.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_i &= \frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta x_i} + (R_{\text{if}})_i, \\ (R_{\text{if}})_i &= -\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \Big|_i \frac{(\Delta x_i)^2}{2!} - \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \Big|_i \frac{(\Delta x_i)^3}{3!} - \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} \Big|_i \frac{(\Delta x_i)^4}{4!} - \dots. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь  $(R_{\text{if}})_i$  – локальная погрешность дискретизации или погрешность аппроксимации, соответствующая аппроксимации разностью «вперед».

Аналогично из (2.3) получим выражение для аппроксимации разностью «назад»:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_i &= \frac{P_i - P_{i-1}}{\Delta x_i} + (R_{xb})_i, \\ (R_{xb})_i &= \left.\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right|_i \frac{(\Delta x_i)}{2!} - \left.\frac{\partial^3 P}{\partial x^3}\right|_i \frac{(\Delta x_i)^2}{3!} + \left.\frac{\partial^4 P}{\partial x^4}\right|_i \frac{(\Delta x_i)^3}{4!} - \dots .\end{aligned}\quad (2.5)$$

В соответствии с выражениями (2.4) и (2.5) аппроксимации первой производной разностью «вперед» и «назад» имеют первый порядок точности,  $O(\Delta x_i)$ , т. к. погрешности дискретизации имеют порядок  $\Delta x_i$ .

Аппроксимацией первой производной более высокого порядка точности является аппроксимация «центральной» разностью. Вычтем (2.3) из (2.2):

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_i &= \frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{2(\Delta x_i)} + (R_{xc})_i, \\ (R_{xc})_i &= \left.\frac{\partial^3 P}{\partial x^3}\right|_i \frac{(\Delta x_i)^2}{3!} - \left.\frac{\partial^5 P}{\partial x^5}\right|_i \frac{(\Delta x_i)^4}{5!} - \dots .\end{aligned}\quad (2.6)$$

Аппроксимация (2.6) второго порядка точности,  $O(\Delta x_i^2)$ .

Для аппроксимации второй производной сложим выражения (2.2) и (2.3):

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right|_i &= \frac{P_{i+1} - 2P_i + P_{i-1}}{(\Delta x_i)^2} + (R_{x2})_i, \\ (R_{x2})_i &= -2\left.\frac{\partial^4 P}{\partial x^4}\right|_i \frac{(\Delta x_i)^2}{4!} - 2\left.\frac{\partial^6 P}{\partial x^6}\right|_i \frac{(\Delta x_i)^4}{6!} - \dots .\end{aligned}\quad (2.7)$$

Аппроксимация второй производной также имеет второй порядок точности,  $O(\Delta x_i^2)$ .

Подставляя найденные аппроксимации производных в дифференциальные уравнения, получают конечно-разностные аппроксимации уравнений.

Интегральный метод аппроксимации больше отражает физический смысл изучаемого процесса и соответствует интегральной форме уравнений. В отличие от метода разложения в ряд Тейлора, в данном случае вводится дополнительное понятие «блока» или «ячейки». Вся рассматриваемая область разбивается на такие блоки, в каждом из которых находится по одному узлу. Значения искомой функции определяются в узлах. Интегрирование уравнения сохранения массы по объему блока с использованием формулы Грина позволяет получить конечно-разностные уравнения интегральным методом. В частности, уравнение одномерной однофазной фильтрации (2.1) в интегральной форме имеет вид:

$$S_x \left[ \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{i+0.5} - \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{i-0.5} \right] = S_x \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \frac{1}{\eta} \frac{\partial P}{\partial t} dx. \quad (2.8)$$

Здесь интегрирование проводится по объему блока, площадь поперечного сечения которого  $S_x$  постоянна. Блок для узла  $x_i$  определяется границами  $x_{i-0.5}$  и  $x_{i+0.5}$ . Подставляя разложения вида (2.6) в (2.8), получим

$$S_x \left[ \frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta x_i} - \frac{P_i - P_{i-1}}{\Delta x_i} \right] = S_x \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \frac{1}{\eta} \frac{\partial P}{\partial t} dx. \quad (2.9)$$

Если уравнение (2.9) разделить на объем блока  $S_x \Delta x_i$ , то в левой части получится аппроксимация (2.7). В уравнение в интегральном виде (2.9), в отличие от дифференциального представления, входят расходы флюида через границы блока, поэтому матрица коэффициентов системы линейных уравнений для вычисления  $P_i$  будет симметричной даже в случае неравномерной разностной сетки. Такое представление, во-первых, облегчает решение задачи, а во-вторых, пригодно для расчета материального баланса.

## 2.2. Дискретизация по времени

Введем временной шаг  $\Delta t$ . Решение отыскивается только на дискретных временных слоях  $t^0, t^1 = \Delta t, \dots, t^n = n\Delta t, \dots$ . Обозначим приближенное значение искомой функции в точке  $x_i$  в момент времени  $t^n$  через  $P_i^n$ . Аналогично (2.4), (2.5) производная по времени может быть аппроксимирована разностью «вперед» либо «назад»:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_i^n}{\partial t} &= \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} + (R_{tf})_i^n, \\ (R_{tf})_i^n &= -\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \Big|_i^n \frac{(\Delta t)}{2!} - \frac{\partial^3 P}{\partial t^3} \Big|_i^n \frac{(\Delta t)^2}{3!} - \frac{\partial^4 P}{\partial t^4} \Big|_i^n \frac{(\Delta t)^3}{4!} - \dots . \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_i^n}{\partial t} &= \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} + (R_{tb})_i^{n+1}, \\ (R_{tb})_i^{n+1} &= \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \Big|_i^{n+1} \frac{(\Delta t)}{2!} - \frac{\partial^3 P}{\partial t^3} \Big|_i^{n+1} \frac{(\Delta t)^2}{3!} + \frac{\partial^4 P}{\partial t^4} \Big|_i^{n+1} \frac{(\Delta t)^3}{4!} - \dots . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Аппроксимации (2.10), (2.11) имеют первый порядок точности,  $O(\Delta t)$ , т.к. погрешности дискретизации имеют порядок  $\Delta t$ .

Подстановка выражения (2.10) в уравнение (2.1), в котором аппроксимация левой части (2.7) вычисляется на  $n$ -ом слое, дает уравнение явного метода:

$$\frac{P_{i+1}^{n+1} - 2P_i^n + P_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x_i)^2} = \frac{1}{\eta} \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t}.$$

Начальные условия определяют значения искомой функции в начальный момент времени, т. е. при  $n = 0$ . Искомая величина в узле  $i$  на новом временном слое  $n+1$  может быть вычислена явно через значения на предыдущем слое:

$$P_i^{n+1} = \eta \frac{\Delta t}{(\Delta x_i)^2} P_{i-1}^n + \left[ 1 - 2\eta \frac{\Delta t}{(\Delta x_i)^2} \right] P_i^n + \eta \frac{\Delta t}{(\Delta x_i)^2} P_{i+1}^n. \quad (2.12)$$

Погрешность аппроксимации явной схемы (2.12) определяется как  $R_i^n = (R_{x2})_i^n - (R_{tf})_i^n$  и имеет порядок точности  $O(\Delta x_i^2) + O(\Delta t)$ .

Уравнение неявного метода выводится путем подстановки выражения (2.11) в уравнение (2.1), в котором аппроксимация левой части (2.7) вычисляется на новом  $n+1$ -ом слое:

$$\frac{P_{i+1}^{n+1} - 2P_i^{n+1} + P_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x_i)^2} = \frac{1}{\eta} \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t}.$$

Значения искомой функции на новом временном слое  $n+1$  в узле  $i$  связаны с неизвестными значениями в соседних узлах и поэтому вычисляются в результате решения системы линейных уравнений, т. е. неявно:

$$-\frac{\eta \Delta t}{(\Delta x_i)^2} P_{i-1}^{n+1} + \left[ 2 \frac{\eta \Delta t}{(\Delta x_i)^2} + 1 \right] P_i^{n+1} - \frac{\eta \Delta t}{(\Delta x_i)^2} P_{i+1}^{n+1} = P_i^n. \quad (2.13)$$

Погрешность аппроксимации неявной схемы (2.13)  $R_i^{n+1} = (R_{x2})_i^{n+1} - (R_{tf})_i^{n+1}$  имеет порядок точности  $O(\Delta x_i^2) + O(\Delta t)$ .

Значения искомой функции на границе области определяются граничными условиями. Для учета этих условий при приближенном решении могут быть введены фиктивные ячейки вне области (например, 0 и  $N+1$ , если  $i=1,\dots,N$ ), и соответствующие слагаемые в уравнениях (2.13) как известные могут быть перенесены в правую часть. Значения  $P_i^0$  для любого  $i$  определяются начальными условиями. Таким образом, система линейных уравнений (2.13) может быть представлена в матричном виде:

$$\mathbf{A} \mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{b}; \quad (2.14)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_i & a_i & c_i & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} P_1^n + \alpha P_0^{n+1} \\ P_2^n \\ \vdots \\ P_{N-1}^n \\ P_N^n + \alpha P_{N+1}^{n+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}^{n+1} = \begin{bmatrix} \vdots \\ P_i^{n+1} \\ \vdots \end{bmatrix};$$

$$a_i = 2\alpha + 1, \quad b_i = c_i = -\alpha, \quad \alpha = \frac{\eta \Delta t}{(\Delta x_i)^2}.$$

Здесь  $\mathbf{A}$  – матрица коэффициентов, имеющая три ненулевых диагонали, вектор  $\mathbf{b}$  определяется известными значениями с предыдущего слоя и граничными условиями,  $\mathbf{p}^{n+1}$  – вектор значений неизвестной функции в узлах разностной сетки,  $i=1,\dots,N$ .

Для того чтобы при дискретизации уравнения (2.1) учесть, каким образом изменяется искомая функция за шаг по времени, можно при аппроксимации левой части использовать средние значения искомой величины за соответствующий период:

$$P_i = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} P_i dt = \theta P_i^{n+1} + (1-\theta) P_i^n. \quad (2.15)$$

Здесь  $0 \leq \theta \leq 1$ , и предполагается, что временной шаг настолько мал, что функция  $P_i$  монотонна на этом интервале времени. В результате получается смешанная схема, включающая значения как на старом временном слое, так и на новом:

$$\theta \frac{P_{i+1}^{n+1} - 2P_i^{n+1} + P_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x_i)^2} + (1-\theta) \frac{P_{i+1}^n - 2P_i^n + P_{i-1}^n}{(\Delta x_i)^2} = \frac{1}{\eta} \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t}. \quad (2.16)$$

При  $\theta = 0$  уравнение (2.16) характеризует явную схему, при  $\theta = 1$  – полностью неявную схему, при  $\theta = 0.5$  – схему Кранка – Николсона. Схема Кранка – Николсона представляет собой разновидность неявного метода, т. к. для вычисления неизвестных значений функции на новом временном слое необходимо решать систему уравнений. При  $\theta = 0.5$  схема (2.16) имеет второй порядок точности по времени  $O(\Delta x_i^2) + O(\Delta t^2)$ .

### 2.3. Дискретизация уравнений в двух- и трехмерном случае

Представленные выше методы дискретизации уравнения (2.1) легко обобщаются на двух- и трехмерный случай. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (2.17)$$

Трехмерная моделируемая область может быть представлена сеточной областью, состоящей из прямоугольных блоков. Предположим, что шаг разностной сетки в каждом из направлений постоянный:  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и  $\Delta z$ . Пусть  $P_{ijk} = P(x_i, y_j, z_k, t)$  – значение искомой функции в узле  $(i, j, k)$ . Тогда по аналогии с уравнением (2.16) имеем

$$\begin{aligned} & \theta \left[ \frac{P_{i+1,jk}^{n+1} - 2P_{ijk}^{n+1} + P_{i-1,jk}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{P_{ij+1,k}^{n+1} - 2P_{ijk}^{n+1} + P_{ij-1,k}^{n+1}}{(\Delta y)^2} + \frac{P_{ijk+1}^{n+1} - 2P_{ijk}^{n+1} + P_{ijk-1}^{n+1}}{(\Delta z)^2} \right] + \\ & + (1-\theta) \left[ \frac{P_{i+1,jk}^n - 2P_{ijk}^n + P_{i-1,jk}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{P_{ij+1,k}^n - 2P_{ijk}^n + P_{ij-1,k}^n}{(\Delta y)^2} + \frac{P_{ijk+1}^n - 2P_{ijk}^n + P_{ijk-1}^n}{(\Delta z)^2} \right] = \\ & = \frac{1}{\eta} \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Для явной схемы  $\theta = 0$  и значение искомой переменной на новом временном слое определяется выражением

$$\begin{aligned} P_{ijk}^{n+1} = & \eta \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} P_{i-1,jk}^n + \eta \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} P_{ij-1,k}^n + \eta \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} P_{ijk-1}^n + \\ & + \left[ 1 - 2\eta \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} - 2\eta \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} - 2\eta \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} \right] P_{ijk}^n + \eta \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} P_{i+1,jk}^n + \\ & + \eta \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} P_{ij+1,k}^n + \eta \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} P_{ijk+1}^n. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Для полностью неявной схемы  $\theta = 1$  для расчета искомой переменной на новом временном слое  $n+1$  необходимо решить систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} & -\eta \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} P_{i-1,jk}^{n+1} - \eta \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} P_{ij-1,k}^{n+1} - \eta \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} P_{ijk-1}^{n+1} + \left[ 1 + 2\eta \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} + 2\eta \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} + 2\eta \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} \right] P_{ijk}^{n+1} - \\ & - \eta \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} P_{i+1,jk}^n - \eta \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} P_{ij+1,k}^n - \eta \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} P_{ijk+1}^n = P_{ijk}^n. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Если количество узлов разностной сетки в направлении оси  $x$  равно  $N_x$  ( $1 \leq i \leq N_x$ ), в направлении оси  $y$  –  $N_y$  ( $1 \leq j \leq N_y$ ), в направлении оси  $z$  –  $N_z$  ( $1 \leq k \leq N_z$ ), то система (2.20) содержит  $N_x N_y N_z$  уравнений. В этом случае матрица коэффициентов  $\mathbf{A}$  имеет семь ненулевых диагоналей. В двумерном случае количество уравнений равно  $N_x N_y$ , а матрица коэффициентов является пятидиагональной.

## 2.4. Погрешности дискретизации

В этом разделе рассматривается влияние погрешности аппроксимации на точность приближенного решения на примере уравнения (2.1) [1,35].

Разностный оператор  $L$  согласованно аппроксимирует соответствующий дифференциальный оператор  $A$  в точке  $x_i$ , если погрешность аппроксимации  $R_i = AP_i - LP_i \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$ . Более общее определение может быть сформулировано следующим образом:

Разностный оператор  $L$  **согласованно аппроксимирует** соответствующий дифференциальный оператор  $A$ , если  $\|R\| \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$ , где  $\|R\|$  – норма вектора  $R$ , содержащего компоненты  $R_i$ .

Согласованность – это свойство разностного оператора, а не решения.

Погрешностью приближенного решения в узле  $i$  называется разность между точным решением дифференциального уравнения  $\tilde{P}_i$  и его конечно-разностной аппроксимацией  $P_i$ :

$$e_i = \tilde{P}_i - P_i. \quad (2.21)$$

Разностный оператор **сходится** к дифференциальному оператору, если  $\|e_i\| \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Поскольку точное решение  $\tilde{P}_i$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.1), а приближенное решение  $P_i$  – уравнению (2.16), то погрешность приближенного решения (2.21) удовлетворяет тому же конечно-разностному уравнению, что и  $P_i$ , но с учетом источника, равного погрешности аппроксимации  $R_i$ :

$$\theta \frac{e_{i+1}^{n+1} - 2e_i^n + e_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x_i)^2} + (1-\theta) \frac{e_{i+1}^n - 2e_i^n + e_{i-1}^n}{(\Delta x_i)^2} = \frac{1}{\eta} \frac{e_i^{n+1} - e_i^n}{\Delta t} - \theta R_i^{n+1} - (1-\theta) R_i^n. \quad (2.22)$$

Для того чтобы исследовать сходимость приближенного решения, оценим увеличение погрешности, введенной при  $t = 0$ . Пусть  $E_n = \max_i |e_i^n|$ ,  $R = \max_{i,n} |R_i^n|$ . Тогда для полностью неявного метода ( $\theta = 1$ ) из уравнения (2.22) с учетом неравенства треугольника имеем

$$\begin{aligned} & \left| \left( 1 + 2 \frac{\eta \Delta t}{(\Delta x_i)^2} \right) e_i^{n+1} \right| - \left| \frac{\eta \Delta t}{(\Delta x_i)^2} e_{i+1}^{n+1} + \frac{\eta \Delta t}{(\Delta x_i)^2} e_{i-1}^{n+1} \right| \leq \\ & \leq \left| \left( 1 + 2 \frac{\eta \Delta t}{(\Delta x_i)^2} \right) e_i^n - \left( \frac{\eta \Delta t}{(\Delta x_i)^2} e_{i+1}^{n+1} + \frac{\eta \Delta t}{(\Delta x_i)^2} e_{i-1}^{n+1} \right) \right| = |e_i^n + \eta \Delta t R_i^{n+1}| \leq |e_i^n| + |\eta \Delta t R_i^{n+1}| \end{aligned} \quad (2.23)$$

Откуда

$$E_{n+1} \leq E_n + \eta \Delta t R \leq E_0 + \eta \Delta t (n+1)R = E_0 + \eta t^{n+1} R, \quad t^{n+1} = \Delta t(n+1). \quad (2.24)$$

Если  $E_0 = 0$ , то  $E_n \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow 0$  или при  $\Delta t \rightarrow 0$  и  $\Delta x_i \rightarrow 0$ .

Аналогично (2.23) для явного метода ( $\theta = 0$ ) получим

$$\begin{aligned} |e_i^{n+1}| &= \left| \frac{\eta \Delta t}{(\Delta x_i)^2} e_{i+1}^n + \left(1 - 2 \frac{\eta \Delta t}{(\Delta x_i)^2}\right) e_i^n + \frac{\eta \Delta t}{(\Delta x_i)^2} e_{i-1}^n + \eta \Delta t R_i^n \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{\eta \Delta t}{(\Delta x_i)^2} e_{i+1}^n \right| + \left| \left(1 - 2 \frac{\eta \Delta t}{(\Delta x_i)^2}\right) e_i^n \right| + \left| \frac{\eta \Delta t}{(\Delta x_i)^2} e_{i-1}^n \right| + |\eta \Delta t R_i^n| \end{aligned} . \quad (2.25)$$

При  $\frac{\eta \Delta t}{(\Delta x_i)^2} \leq 0.5$ , из выражения (2.25) следует (2.24). Таким образом, явная схема сходится условно при  $\frac{\eta \Delta t}{(\Delta x_i)^2} \leq 0.5$ , а неявная схема сходится безусловно.

Численный алгоритм называется **устойчивым**, если произвольные погрешности, возникшие на некоторой стадии вычислений, при последующих расчетах не возрастают.

Понятие устойчивости важно для нестационарных задач, в которых решение строится на последовательности временных шагов. В этом случае ошибки, возникшие на некотором временном слое, будут влиять на поведение решения на всех последующих временных слоях. Причем это относится как к ошибкам округления, так и к погрешностям дискретизации. Численная схема, для которой погрешности, вызванные  $E_0$ , растут во времени, называется неустойчивой.

Пусть приближенное решение  $P_k^n$  вычисляется с ошибкой  $\varepsilon_k^n$ , т. е. определяется  $\bar{P}_k^n = P_k^n + \varepsilon_k^n$ . Тогда численная схема устойчива, если  $\left| \frac{\varepsilon^{n+1}}{\varepsilon^n} \right| \leq 1$ , и неустойчива в противном случае. Для анализа устойчивости применяют метод рядов Фурье или матричный метод.

Рассмотрим сначала **метод рядов Фурье** для исследования устойчивости схемы (2.16). Полагая, что возмущенное решение  $\bar{P}_k^n$ , как и  $P_k^n$ , удовлетворяет уравнению (2.16), получим

$$\theta \frac{\varepsilon_{k+1}^{n+1} - 2\varepsilon_k^{n+1} + \varepsilon_{k-1}^{n+1}}{(\Delta x_i)^2} + (1-\theta) \frac{\varepsilon_{k+1}^n - 2\varepsilon_k^n + \varepsilon_{k-1}^n}{(\Delta x_i)^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\varepsilon_k^{n+1} - \varepsilon_k^n}{\Delta t}. \quad (2.26)$$

Ошибка  $\varepsilon_k^n$  может быть представлена в виде ряда Фурье:

$$\varepsilon_k^n = \sum_{m=1}^N \zeta_m^n e^{i \frac{\pi m k \Delta x}{L}}. \quad (2.27)$$

Здесь  $L$  – длина отрезка, на котором строится решение,  $N$  – общее число узлов на этом отрезке,  $\Delta x$  – расстояние между узлами,  $\zeta_m^n$  – амплитуда  $m$ -ой гармоники. В соответствии с принципом суперпозиции можно предположить, что каждое из слагаемых в выражении (2.27) удовлетворяет конечно-разностному уравнению (2.26). Проанализируем рост каждого слагаемого

$$\varepsilon_{km}^n = \zeta_m^n e^{i \frac{\pi m k \Delta x}{L}}$$

при переходе к новому временному слою

$$\varepsilon_{km}^{n+1} = \zeta_m^{n+1} e^{i \frac{\pi m k \Delta x}{L}}.$$

Из уравнения (2.26) имеем

$$\theta \frac{\varepsilon_{k+1m}^{n+1} - 2\varepsilon_{km}^{n+1} + \varepsilon_{k-1m}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + (1-\theta) \frac{\varepsilon_{k+1m}^n - 2\varepsilon_{km}^n + \varepsilon_{k-1m}^n}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\varepsilon_{km}^{n+1} - \varepsilon_{km}^n}{\Delta t}.$$

Откуда

$$\begin{aligned} \theta \zeta_m^{n+1} \left[ e^{i \frac{\pi m (k+1) \Delta x}{L}} - 2e^{i \frac{\pi m k \Delta x}{L}} + e^{i \frac{\pi m (k-1) \Delta x}{L}} \right] + (1-\theta) \zeta_m^n \left[ e^{i \frac{\pi m (k+1) \Delta x}{L}} - 2e^{i \frac{\pi m k \Delta x}{L}} + e^{i \frac{\pi m (k-1) \Delta x}{L}} \right] = \\ = \frac{(\Delta x)^2}{\eta \Delta t} (\zeta_m^{n+1} - \zeta_m^n) e^{i \frac{\pi m k \Delta x}{L}} \end{aligned}$$

или

$$\theta \zeta_m^{n+1} \left[ e^{i \frac{\pi m \Delta x}{L}} - 2 + e^{-i \frac{\pi m \Delta x}{L}} \right] + (1-\theta) \zeta_m^n \left[ e^{i \frac{\pi m \Delta x}{L}} - 2 + e^{-i \frac{\pi m \Delta x}{L}} \right] = \frac{(\Delta x)^2}{\eta \Delta t} (\zeta_m^{n+1} - \zeta_m^n). \quad (2.28)$$

Введем коэффициент усиления

$$\zeta_m = \frac{\zeta_m^{n+1}}{\zeta_m^n}$$

и оценим его величину, пользуясь уравнением (2.28):

$$-4\theta \zeta_m \sin^2 \frac{\pi m \Delta x}{2L} - 4(1-\theta) \sin^2 \frac{\pi m \Delta x}{2L} = \frac{(\Delta x)^2}{\eta \Delta t} (\zeta_m - 1)$$

или

$$\zeta_m = \frac{1 - 4(1-\theta) \frac{\eta \Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 \frac{\pi m \Delta x}{2L}}{1 + 4\theta \frac{\eta \Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 \frac{\pi m \Delta x}{2L}}. \quad (2.29)$$

Разностное уравнение устойчиво, если

$$|\zeta_m| \leq 1. \quad (2.30)$$

Из уравнения (2.29) следует, что если  $\theta \geq 0.5$ , то условие (2.30) выполняется при любых значениях  $\Delta x$  и  $\Delta t$ . Таким образом, неявная схема ( $\theta = 1$ ) и схема Кранка – Николсона ( $\theta = 0.5$ ) являются безусловно устойчивыми.

Для явной схемы ( $\theta = 0$ ) из (2.29) имеем

$$\zeta_m = 1 - 4 \frac{\eta \Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 \frac{\pi m \Delta x}{2L}.$$

В этом случае условие (2.30) выполняется, если

$$0 \leq \frac{\eta \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 0.5. \quad (2.31)$$

Аналогично может быть показана безусловная устойчивость неявной схемы для двух- и трехмерной задачи и получено условие устойчивости явной схемы. Это условие для двух- и трехмерного случая имеет вид соответственно:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \eta \Delta t \left( \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right) \leq 0.5; \\ 0 &\leq \eta \Delta t \left( \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right) \leq 0.5. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Таким образом, понятия устойчивости и сходимости являются взаимосвязанными. Для практических задач доказать сходимость достаточно сложно, тогда как устойчивость исследуется гораздо более простыми методами. Поэтому важное значение имеет следующая **теорема Лакса**, справедливая для линейных задач [1]:

Для согласованной аппроксимации устойчивость является необходимым и достаточным условием сходимости.

В методе рядов Фурье не учитываются граничные условия. Другим методом исследования устойчивости, учитывающим дискретизацию граничных условий, является **матричный метод**. Суть этого метода состоит в следующем. Любая двухслойная разностная схема может быть представлена в матричном виде:

$$\mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{B} \mathbf{p}^n + \mathbf{k}. \quad (2.33)$$

Если начальный вектор вычисляется с ошибкой

$$\mathbf{p}^0* = \mathbf{p}^0 + \boldsymbol{\varepsilon}^0,$$

а все остальные вычисления осуществляются без ошибок, то решение на временном слое  $n$  будет иметь вид

$$\mathbf{p}^n* = \mathbf{p}^n + \boldsymbol{\varepsilon}^n, \text{ где } \boldsymbol{\varepsilon}^n = \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}^{n-1} = \mathbf{B}^n \boldsymbol{\varepsilon}^0. \quad (2.34)$$

Для устойчивости разностной схемы погрешность  $\boldsymbol{\varepsilon}^n$  должна оставаться ограниченной. Если  $\mathbf{B}$  – симметричная матрица

размерности  $N \times N$ , то она имеет  $N$  действительных собственных значений  $\lambda_i$  и, соответственно,  $N$  взаимно ортогональных собственных векторов  $\mathbf{v}_i$ :

$$\mathbf{B}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.35)$$

Выразим вектор  $\boldsymbol{\epsilon}^0$  через  $\mathbf{v}_i$ :

$$\boldsymbol{\epsilon}^0 = \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{v}_i. \quad (2.36)$$

Подставляя в (2.34) выражения (2.35) и (2.36), получим

$$\boldsymbol{\epsilon}^n = \sum_{i=1}^N a_i \lambda_i^n \mathbf{v}_i \leq \max_i |\lambda_i|^n \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{v}_i = \max_i |\lambda_i|^n \boldsymbol{\epsilon}^0. \quad (2.37)$$

Наибольшее по абсолютной величине собственное значение матрицы называется ее спектральным радиусом:

$$\rho(\mathbf{B}) = \max_i |\lambda_i|.$$

Из (2.37) следует, что  $\boldsymbol{\epsilon}^n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , если  $\max_i |\lambda_i| < 1$ .

Таким образом, для симметричной матрицы  $\mathbf{B}$  разностная схема устойчива, если  $\max_i |\lambda_i| < 1$ .

В общем случае, справедлива следующая **теорема** [28]:

Для устойчивости разностной схемы необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы  $\mathbf{B}$  по модулю были меньше единицы. Кроме того, достаточно, чтобы произвольная норма матрицы  $\mathbf{B}$  была меньше единицы.

## 2.5. Типы сеток и задание граничных условий

В этом разделе рассматриваются два метода построения прямоугольных сеток, которые наиболее широко применяются при моделировании пластов [35].

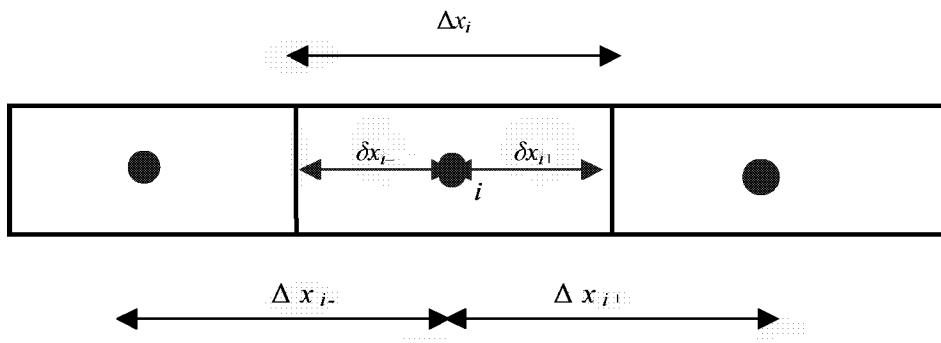
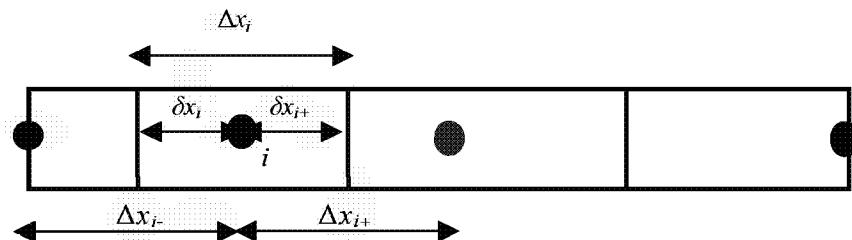


Рис. 2.2. Блочно-центрированная сетка.

При построении **блочно-центрированной сетки** моделируемая область прежде всего разбивается на сеточные блоки, в общем случае неравномерно. Затем в центрах блоков помещаются узлы. В этом

случае отсутствуют узлы на границе области, а узлы, находящиеся в смежных блоках, могут иметь различные расстояния до общей грани, рис. 2.2.

Построение **сетки с распределенными узлами** начинается с размещения узлов, причем первый и последний узлы помещаются на границы области, а остальные – между ними, возможно неравномерно. Границы сеточных блоков находятся посередине между узлами. В этом случае, если узлы располагаются на равных расстояниях, размеры первого и последнего блока оказываются меньше, рис. 2.3.



**Рис. 2.3. Сетка с распределенными узлами.**

Пусть  $\Delta x_i$  – длина  $i$ -го блока,  $\Delta x_{i+}$  и  $\Delta x_{i-}$  – расстояние от узла  $i$  до узла  $i+1$  и  $i-1$  соответственно,  $\delta x_{i+}$  и  $\delta x_{i-}$  – расстояние от узла  $i$  до соответствующих границ блока,

$$\Delta x_i = \delta x_{i+} + \delta x_{i-} \quad (2.38)$$

Тогда для блочно-центрированной сетки имеем

$$\begin{aligned} \delta x_{i+} &= \delta x_{i-} = \frac{\Delta x_i}{2}, \\ \Delta x_{i\pm} &= \frac{\Delta x_i + \Delta x_{i\mp}}{2}; \end{aligned} \quad (2.39)$$

для сетки с распределенными узлами:

$$\begin{aligned} \delta x_{i+} &= \delta x_{i+1-}, \\ \delta x_{i-} &= \delta x_{i-1+}, \\ \Delta x_i &= \frac{\Delta x_{i+} + \Delta x_{i-}}{2}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

При использовании блочно-центрированной сетки минимизируется ошибка дискретизации аккумулирующих членов (производной по времени) в уравнении сохранения массы, т. к. центр блока совпадает с его центром масс. Применение сетки с распределенными узлами позволяет наилучшим образом аппроксимировать потоковые члены (производная по направлению), т. к. общая граница соседних блоков находится посередине между узлами сетки.

Дискретизация граничных условий зависит от типа используемой разностной сетки. Наиболее распространенные виды граничных условий, применяемые в задачах моделирования пластов, это

- граничные условия первого рода (условия Дирихле), когда на границе задается значение неизвестной функции, например, давления:

$$P(0, t) = f_1(t); \quad (2.41)$$

- граничные условия второго рода (условия Неймана), когда на границе задается градиент неизвестной функции, например, отыскивается давление при заданном расходе флюида через границу:

$$\left. \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = f_2(t); \quad (2.42)$$

- граничные условия третьего рода (смешанные):

$$\left. a \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} + bP(0, t) = f_3(t). \quad (2.43)$$

Условия третьего рода могут возникнуть, например, в следующей ситуации. Допустим, что пласт контактирует с другим пластом, в котором среднее давление изменяется в соответствии с заданным законом  $P_a(t)$  и влияние которого учитывается путем задания перетока флюида через границу:

$$q_a(t) = b[P_a(t) - P(0, t)]. \quad (2.44)$$

Здесь  $b$  – аналог коэффициента продуктивности. С другой стороны, в соответствии с законом Дарси:

$$q_a(t) = a \left. \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0}. \quad (2.45)$$

Приравнивая (2.44) и (2.45), получим условие вида (2.43):

$$\left. a \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} + bP(0, t) = bP_a(t).$$

Конечно-разностная аппроксимация граничного условия первого рода (2.41) для блочно-центрированной сетки в простейшем случае имеет первый порядок точности, т. к. ближайший узел расположен на расстоянии  $\Delta x_1 / 2$  от границы:

$$P_1^n = f_1(t^n) + O(\Delta x_1). \quad (2.46)$$

Для сетки с распределенными узлами условие (2.41) имеет вид:

$$P_1^n = f_1(t^n). \quad (2.47)$$

Для аппроксимации граничного условия второго рода широко используется метод отражения – метод второго порядка точности. В соответствии с этим методом вводится фиктивный узел 0, расположенный за пределами моделируемой области. В случае блочно-центрированной сетки этот узел является зеркальным

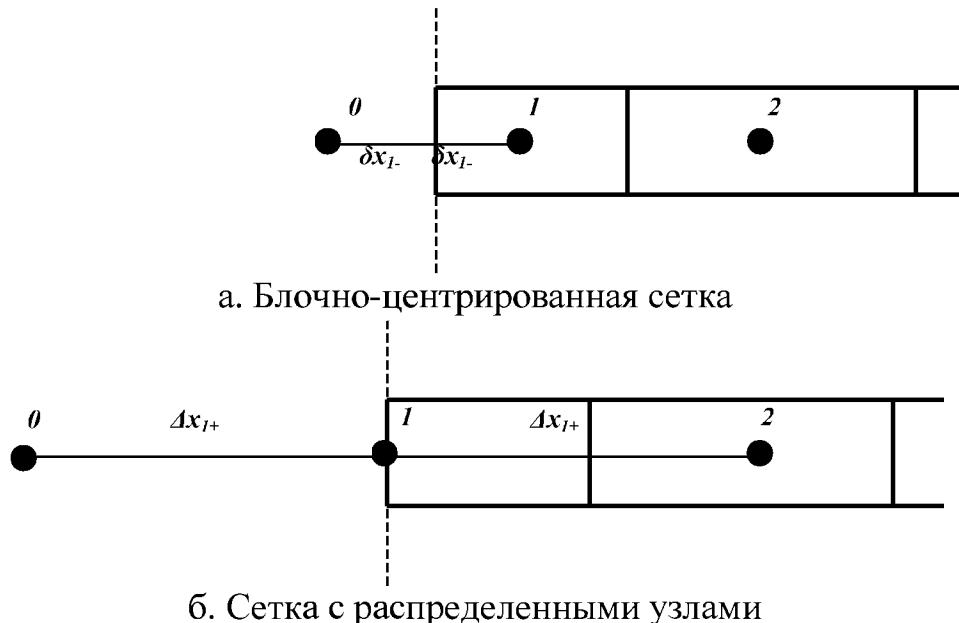
отражением относительно границы первого узла, а в случае сетки с распределенными узлами – второго узла, рис. 2.4.

Аппроксимация условия (2.42) для блочно-центрированной сетки имеет вид:

$$f_2(t^n) = \frac{P_1^n - P_0^n}{\Delta x_1} + O(\Delta x_1^2). \quad (2.48)$$

Аналогично для сетки с распределенными узлами имеем

$$f_2(t^n) = \frac{P_2^n - P_0^n}{2\Delta x_{1+}} + O(\Delta x_1^2). \quad (2.49)$$



**Рис. 2.4. Метод отражения для аппроксимации граничных условий.**

Значение  $P_0^n$  неизвестно, но оно может быть исключено из разностного уравнения, записанного для узла 0, при помощи условия (2.48) или (2.49).

Границочное условие (2.43) для сетки с распределенными узлами может быть аппроксимировано следующим образом:

$$f_3(t^n) = a \frac{P_2^n - P_0^n}{2\Delta x_{1+}} + bP_1^n + O(\Delta x_1^2). \quad (2.50)$$

В случае блочно-центрированной сетки конечно-разностное уравнение имеет более сложный вид [1].

## 2.6. Понятие о материальном балансе

С инженерной точки зрения условие материального баланса – это выражение сохранения массы во всей системе. Для соблюдения этого условия предпочтительно использовать интегральный метод

дискретизации, основанный на представлении уравнения сохранения массы в интегральном виде. В этом случае матрица фильтрационных коэффициентов симметрична и имеет нулевые суммы по строкам за исключением границ.

Непрерывной во времени формой уравнения материального баланса является выражение

$$Q_\Gamma + \sum_i \frac{\partial M_i}{\partial t} + \sum_i Q_i = 0. \quad (2.51)$$

Здесь  $Q_\Gamma$  – переток через границы,  $Q_i$  – интенсивность источника или стока, находящегося в блоке  $i$ ,  $M_i = V_i m_i / B_i$  – масса флюида в блоке объема  $V_i$ . Производная по времени выражает скорость изменения массы за счет сжимаемости. Суммирование ведется по всем блокам сеточной области. Дискретизация по времени уравнения (2.51) дает выражение материального баланса за временной шаг, при условии, что  $Q_\Gamma$  и  $Q_i$  постоянны в этом промежутке времени:

$$Q_\Gamma \Delta t + \sum_i (M_i^{n+1} - M_i^n) + \sum_i Q_i \Delta t = 0. \quad (2.52)$$

**Раскрытие членов, содержащих производную по времени, должно выполняться в виде, удовлетворяющем уравнению (2.52).** Разностные схемы, удовлетворяющие условию материального баланса, называются **консервативными** [1,23]. Для решения нелинейных уравнений рекомендуется использовать только консервативные схемы, т. к. использование неконсервативных схем может привести не только к погрешностям при определении материального баланса, но и послужить причиной неустойчивости.

## Глава 3

# ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МНОГОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В этой главе описываются методы дискретизации и решения уравнений многофазной фильтрации на примере модели нелетучей нефти (1.18), (1.19).

Основная проблема обусловлена нелинейным характером рассматриваемых уравнений, особенно связанным с зависимостью фазовых проницаемостей от насыщенностей. Кроме того, при дискретизации уравнений необходимо учитывать наличие переменных коэффициентов (проницаемости, пористости), которые могут довольно сильно изменяться по пространству.

Отдельно рассматриваются вопросы дискретизации аккумулирующих членов уравнений (производных по времени), потоковых членов (производных по пространству), источников и стоков, учета нелинейностей и переменных коэффициентов [1,35,45,50].

Нелинейный характер уравнений определяется сложной зависимостью коэффициентов от искомых функций – давления и насыщенностей. В зависимости от способа аппроксимации производных можно получить линейные или нелинейные алгебраические уравнения. Нелинейные уравнения могут быть линеаризованы или решены итерационно. Все нелинейности можно разделить на две группы: сильные и слабые. К слабым нелинейностям относятся коэффициенты, зависящие только от давления одной фазы (объемные коэффициенты, удельные веса, растворимость, вязкости). Влияние слабых нелинейностей зависит от степени изменения давления. К сильным нелинейностям относятся функции, зависящие от насыщенностей и капиллярного давления.

### 3.1. Дискретизация производной по времени

Рассматривается аппроксимация производной по времени выражения вида  $\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{ms_l}{B_l} \right]$  или  $\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{ms_o R}{B_o} \right]$ . Каждая из функций, стоящих под знаком производной, изменяется во времени, поскольку

зависит от давления или насыщенности. Аппроксимация, удовлетворяющая условию материального баланса (2.52), имеет вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{ms_l}{B_l} \right] &\approx \frac{1}{\Delta t} \left\{ \left[ \frac{ms_l}{B_l} \right]^{n+1} - \left[ \frac{ms_l}{B_l} \right]^n \right\} = \\
&= \frac{1}{\Delta t} \left\{ \left[ \frac{1}{B_l^n} \left( \frac{m^{n+1} - m^n}{p_o^{n+1} - p_o^n} \right) + m^{n+1} \left( \frac{(1/B_l)^{n+1} - (1/B_l)^n}{p_o^{n+1} - p_o^n} \right) \right] s_l^n (p_o^{n+1} - p_o^n) + \left[ \frac{m}{B_l} \right]^{n+1} (s_l^{n+1} - s_l^n) \right\} = \\
&= \frac{1}{\Delta t} \left\{ C_{lp} (p_o^{n+1} - p_o^n) + C_{ls} (s_l^{n+1} - s_l^n) \right\}, \\
\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{ms_o R}{B_o} \right] &\approx \frac{1}{\Delta t} \left\{ \left[ \frac{ms_o R}{B_o} \right]^{n+1} - \left[ \frac{ms_o R}{B_o} \right]^n \right\} = \\
&= \frac{1}{\Delta t} \left\{ \left[ \frac{1}{B_o^n} \left( \frac{m^{n+1} - m^n}{p_o^{n+1} - p_o^n} \right) + m^{n+1} \left( \frac{(1/B_o)^{n+1} - (1/B_o)^n}{p_o^{n+1} - p_o^n} \right) \right] R^n + \left( \frac{m}{B_o} \right)^{n+1} \left( \frac{R^{n+1} - R^n}{p_o^{n+1} - p_o^n} \right) s_o^n (p_o^{n+1} - p_o^n) + \right. \\
&\quad \left. + \left[ \frac{m}{B_o} \right]^{n+1} R^{n+1} (s_o^{n+1} - s_o^n) \right\} = \frac{1}{\Delta t} \left\{ C_{dgp} (p_o^{n+1} - p_o^n) + C_{dgs} (s_o^{n+1} - s_o^n) \right\}, \\
C_{lp} &= \left[ \frac{1}{B_l^n} \left( \frac{m^{n+1} - m^n}{p_o^{n+1} - p_o^n} \right) + m^{n+1} \left( \frac{(1/B_l)^{n+1} - (1/B_l)^n}{p_o^{n+1} - p_o^n} \right) \right] s_l^n, \quad C_{ls} = \left[ \frac{m}{B_l} \right]^{n+1}, \quad C_{dgs} = \left[ \frac{m}{B_l} \right]^{n+1} R^{n+1} \\
C_{dgp} &= \left[ \left( \frac{1}{B_o^n} \left( \frac{m^{n+1} - m^n}{p_o^{n+1} - p_o^n} \right) + m^{n+1} \left( \frac{(1/B_o)^{n+1} - (1/B_o)^n}{p_o^{n+1} - p_o^n} \right) \right) R^n + \left( \frac{m}{B_o} \right)^{n+1} \left( \frac{R^{n+1} - R^n}{p_o^{n+1} - p_o^n} \right) \right] s_o^n.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Важным преимуществом аппроксимации (3.1) является не только консервативность, но и то, что коэффициенты, зависящие от насыщенности и относящиеся к сильным нелинейностям, берутся с предыдущего временного слоя.

### 3.2. Дискретизация производных по пространству, аппроксимация межблочных проводимостей

Рассматривается аппроксимация слагаемого вида  $\frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda \frac{\partial p}{\partial x} \right]$ , в котором  $\lambda(p, s, x)$  – фазовая проводимость. При однофазной фильтрации проводимость зависит от координат как функция абсолютной проницаемости, переменной по пространству, и давления, определяющего значения вязкости и объемного коэффициента

жидкости:  $\lambda = \frac{k}{\mu B}$ . При многофазной фильтрации проводимость зависит еще и от насыщенности, как функция фазовой проницаемости  $\lambda = \frac{kk_r}{\mu B}$ .

Рассмотрим вначале однофазную фильтрацию. Для того чтобы более точно учесть потоки через границы разностного блока, введем фиктивные узлы сетки с полуцелыми номерами, находящиеся на границах блока. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda \frac{\partial p}{\partial x} \right]_i &\approx \frac{1}{\Delta x_i} \left[ \lambda_{i+0.5} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{i+0.5} - \lambda_{i-0.5} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{i-0.5} \right] \approx \\ &\approx \frac{1}{\Delta x_i} \left[ \lambda_{i+0.5} \left( \frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta x_{i+}} \right) - \lambda_{i-0.5} \left( \frac{p_i - p_{i-1}}{\Delta x_{i-}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь используются аппроксимации центральными разностями, сетка в общем случае неравномерная. Оценим погрешность аппроксимации (3.2) для блочно-центрированной сетки и для сетки с распределенными узлами. Рассмотрим вначале случай, когда межблочная проводимость  $\lambda_{i\pm0.5}$  определяется как среднее арифметическое:

$$\lambda_{i\pm0.5} = \frac{\lambda_i + \lambda_{i\pm1}}{2}. \quad (3.3)$$

Подставим (3.3) в (3.2), определяя значения  $p_{i\pm1}$  и  $\lambda_{i\pm1}$  через значения функций и их производных в точке  $i$  с использованием рядов Тейлора:

$$\begin{aligned} R_i &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda \frac{\partial p}{\partial x} \right]_i - \frac{1}{\Delta x_i} \left[ \lambda_{i+0.5} \left( \frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta x_{i+}} \right) - \lambda_{i-0.5} \left( \frac{p_i - p_{i-1}}{\Delta x_{i-}} \right) \right] = \\ &= \left( 1 - \frac{\Delta x_{i+} + \Delta x_{i-}}{2\Delta x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda \frac{\partial p}{\partial x} \right]_i + O(\Delta x). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из полученного выражения с учетом (2.40) следует, что аппроксимация (3.2) для сетки с распределенными узлами имеет по крайней мере первый порядок точности и, следовательно, согласована. Поэтому любая устойчивая аппроксимация производной по времени обеспечивает сходимость решения.

Для блочно-центрированной сетки в общем случае аппроксимация не согласована, т. к. выражение в правой части (3.4) может иметь нулевой порядок точности. Согласованность достигается только в случае  $\Delta x_{i+} + \Delta x_{i-} - 2\Delta x_i = 0$ , например, для равномерной сетки.

Обычно отдельные множители, которые определяют межблочную проводимость, аппроксимируются по-разному. Множитель  $k_{i\pm 0.5}$  или  $(kS)_{i\pm 0.5}$ , где  $S$  – площадь поперечного сечения блока в соответствующем направлении, зависит только от координат.

Множитель вида  $\left(\frac{1}{\mu_l B_l}\right)$  или  $\left(\frac{R}{\mu_l B_l}\right)$  относят к слабым нелинейностям, т. к. он зависит от давления, которое между соседними блоками, как правило, изменяется несильно. И наконец, фазовые проницаемости являются сильными нелинейностями, поскольку зависят от насыщенности.

**Аппроксимация абсолютных проницаемостей.** Аппроксимация выражения  $(kS)_{i\pm 0.5}$  зависит только от геометрии сетки. Пусть значения  $(kS)_{i\pm 0.5}$  в соседних блоках различаются, являясь при этом постоянными в пределах каждого блока. Расход через границу, разделяющую блоки  $i$  и  $i+1$ , определяется выражением

$$q_{i+0.5} = \left(\frac{kS}{\mu}\right)_{i+0.5} \frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta x_{i+}}. \quad (3.5)$$

С другой стороны, учитывая давление на границе раздела  $p_{i+0.5}$ , имеем

$$q_{i+0.5} = \left(\frac{kS}{\mu}\right)_i \frac{p_{i+0.5} - p_i}{\delta x_{i+}} = \left(\frac{kS}{\mu}\right)_{i+1} \frac{p_{i+1} - p_{i+0.5}}{\delta x_{i+1-}}. \quad (3.6)$$

Исключая  $q_{i+0.5}$  и  $p_{i+0.5}$  из уравнений (3.5), (3.6) и пренебрегая изменением вязкости, получим

$$[kS]_{i+0.5} = \Delta x_{i+} \left( \frac{\delta x_{i+}}{[kS]_i} + \frac{\delta x_{i+1-}}{[kS]_{i+1}} \right)^{-1} = (\delta x_{i+} + \delta x_{i+1-}) \left( \frac{\delta x_{i+}}{[kS]_i} + \frac{\delta x_{i+1-}}{[kS]_{i+1}} \right)^{-1}. \quad (3.7)$$

При  $S = const$  имеем

$$k_{i+0.5} = \Delta x_{i+} \left( \frac{\delta x_{i+}}{k_i} + \frac{\delta x_{i+1-}}{k_{i+1}} \right)^{-1}.$$

Таким образом, межблочная проницаемость вычисляется как среднее гармоническое проницаемостей соседних блоков. Аналогично, при  $k = const$

$$S_{i+0.5} = \Delta x_{i+} \left( \frac{\delta x_{i+}}{S_i} + \frac{\delta x_{i+1-}}{S_{i+1}} \right)^{-1}.$$

Подставляя в (3.4) вместо (3.3) выражение вида (3.7), получим

$$\begin{aligned}
R_i &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda \frac{\partial p}{\partial x} \right]_i - \frac{1}{\Delta x_i} \left[ \lambda_{i+0.5} \left( \frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta x_{i+}} \right) - \lambda_{i-0.5} \left( \frac{p_i - p_{i-1}}{\Delta x_{i-}} \right) \right] = \\
&= \left( 1 - \frac{\delta x_{i-1+} + \delta x_{i+1-}}{\Delta x_i} \right) \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} \right]_i + \left( 1 - \frac{\Delta x_{i+} + \Delta x_{i-}}{2 \Delta x_i} \right) \left[ \lambda \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right]_i + O(\Delta x).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Из (3.8) следует, что аппроксимация межблочных проводимостей средним гармоническим, как и (3.3), приводит в общем случае к несогласованной аппроксимации выражения (3.2) для блочно-центрированной сетки и к согласованной аппроксимации для сетки с распределенными узлами.

**Аппроксимация слабых нелинейностей.** Функции  $\left( \frac{1}{\mu_l B_l} \right)$  и  $\left( \frac{R}{\mu_l B_l} \right)$  вычисляются в целых узлах, поэтому значения  $\left( \frac{1}{\mu_l B_l} \right)_{i+0.5}$  и  $\left( \frac{R}{\mu_l B_l} \right)_{i+0.5}$  должны быть получены в результате аппроксимации. Эти выражения зависят только от давления, которое между соседними узлами изменяется не сильно. Поэтому при их аппроксимации обычно используются средние арифметические значения одним из следующих способов:

1. все функции, входящие в аппроксимируемое выражение, определяются при среднем давлении  $p_{i+0.5} = 0.5(p_i + p_{i+1})$ ;

2. определяется среднее значение каждой функции, например,  $B_{l,i+0.5} = 0.5(B_{l,i} + B_{l,i+1})$ , а затем вычисляется весь комплекс:

$$\left( \frac{1}{\mu_l B_l} \right)_{i+0.5} = \frac{1}{\mu_{l,i+0.5} B_{l,i+0.5}} \text{ или } \left( \frac{R}{\mu_l B_l} \right)_{i+0.5} = \frac{R_{i+0.5}}{\mu_{l,i+0.5} B_{l,i+0.5}};$$

3. определяется среднее арифметическое для всего выражения, например,  $\left( \frac{R}{\mu_l B_l} \right)_{i+0.5} = 0.5 \left[ \left( \frac{R}{\mu_l B_l} \right)_i + \left( \frac{R}{\mu_l B_l} \right)_{i+1} \right]$ .

Каждая из этих аппроксимаций имеет второй порядок точности.

**Аппроксимация сильных нелинейностей.** Наиболее сложную задачу представляет собой аппроксимация фазовых проницаемостей (сильных нелинейностей). В случае многофазной фильтрации, аппроксимация межблочной проводимости вида (3.7), т. е. как среднего гармонического, может привести к неверному результату. Рассмотрим два соседних блока  $i$  и  $i+1$ . Пусть течение направлено из блока  $i$  в блок  $i+1$  ( $p_i \geq p_{i+1}$ ). При вытеснении нефти водой наибольшее изменение фазовой проницаемости соответствует

моменту прохождения фронтом насыщенности границы между блоками. Тогда

$$k_w(s_{wi+1}) = 0, \quad k_w(s_{wi}) \geq k_w(s_{wf}). \quad (3.9)$$

Здесь  $s_{wf}$  – фронтовое значение насыщенности. Вычисляя межблочную проводимость для водной фазы как среднее гармоническое, с учетом (3.9) получим

$$\lambda_{wi+0.5} = \Delta x_{i+} \lambda_{wi} \lambda_{wi+1} (\delta x_{i+} \lambda_{wi+1} + \delta x_{i+1-} \lambda_{wi})^{-1} = 0.$$

Равенство нулю межблочной проводимости приводит к отсутствию течения, что неверно. Результаты тестирования путем сопоставления численного и аналитического решения задачи Баклея – Леверетта [3,5] показывают, что вычисление межблочной проводимости как средневзвешенного значения также приводит к неверным результатам [1].

Наиболее правдоподобные результаты дает схема с определением фазовых проницаемостей «вверх по потоку» [1,15,50]. Для получения аппроксимации первого порядка применяется одноточечное взвешивание:

$$k_{rl,i+0.5} = \begin{cases} k_{rl}(s_i), & \text{если поток направлен из блока } i \text{ в } i+1 \\ k_{rl}(s_{i+1}), & \text{если поток направлен из блока } i+1 \text{ в } i. \end{cases} \quad (3.10)$$

Направление потока определяется знаком разности потенциалов:

$$\Delta\Phi_{li+0.5} = p_{li+1} - p_{li} - \rho_{li+0.5} g(z_{li+1} - z_{li}).$$

Если  $\Delta\Phi_{li+0.5} < 0$ , то течение направлено из ячейки  $i$  в ячейку  $i+1$ , и наоборот в противоположном случае.

Вместо (3.10) можно применять аппроксимацию второго порядка точности, которая определяется с использованием значений насыщенности в двух соседних узлах «вверх по потоку» [1].

### 3.3. Аппроксимация проводимостей по времени

Проблема аппроксимации межблочных проводимостей по времени, так же как проблема аппроксимации по пространству, может быть разделена на две: аппроксимация слабых нелинейностей  $F_p$  (зависимостей от давления) и аппроксимация сильных нелинейностей  $F_s$  (зависимостей от насыщенности) [1,45].

**Аппроксимация слабых нелинейностей.** Влияние способа аппроксимации этих нелинейностей на устойчивость модели зависит от величины изменения давления за шаг по времени. Рассмотрим два основных метода: явный и полностью неявный.

При явном методе значения давления берутся с предыдущего слоя:

$$F_{p_{i+0.5}}^{n+1} \approx F_{p_{i+0.5}}^n = F_{p_{i+0.5}}(p_i^n, p_{i+1}^n). \quad (3.11)$$

При полностью неявном методе проводимость на новом временном слое отыскивается итерационно. Используется аппроксимация первого порядка:

$$\begin{aligned} F_{p_{i+0.5}}^{n+1} &\approx F_{p_{i+0.5}}^{n+1(v+1)} = \\ &= F_{p_{i+0.5}}^{n+1(v)} + \left( \frac{\partial F_{p_{i+0.5}}}{\partial p_i} \right)^{n+1(v)} \left( p_i^{n+1(v+1)} - p_i^{n+1(v)} \right) + \left( \frac{\partial F_{p_{i+0.5}}}{\partial p_{i+1}} \right)^{n+1(v)} \left( p_{i+1}^{n+1(v+1)} - p_{i+1}^{n+1(v)} \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Здесь  $(v)$  – номер итерации по времени при расчете решения на  $(n+1)$ -ом временном слое.

Способ учета слабых нелинейностей несущественно сказывается на устойчивости конечно-разностных уравнений. Поэтому часто используют явный метод как самый простой. В полностью неявных схемах используют неявное представление проводимостей.

**Аппроксимация сильных нелинейностей.** От метода учета сильных нелинейностей определяющим образом зависит устойчивость решения. В последующем рассмотрении предполагается, что проводимости аппроксимируются «вверх по потоку» с использованием одноточечного взвешивания.

*Явный метод* – самый простой – является только условно устойчивым. Однако при использовании схем, явных по насыщенности, применяется именно этот метод. Аппроксимация имеет вид:

$$F_s^{n+1} \approx F_s(s_w^n, s_g^n). \quad (3.13)$$

Здесь предполагается, что нефтенасыщенность может быть исключена из уравнений с использованием соотношения (1.16).

*Метод простой итерации* можно представить следующим образом:

$$F_s^{n+1} \approx F_s^{n+1(v)} = F_s(s_w^{(v)}, s_g^{(v)}). \quad (3.14)$$

Этот метод имеет тот же предел устойчивости, что и явный метод.

*Линеаризованный неявный метод* осуществляется в два этапа. На первом этапе проводится экстраполяция проводимости с применением аппроксимации первого порядка точности для  $F_s^{n+1}$ :

$$F_s^{n+1} \approx F_s^n + \left( \frac{\partial F_s}{\partial s_w} \right)^n \left( s_w^{n+1} - s_w^n \right) + \left( \frac{\partial F_s}{\partial s_g} \right)^n \left( s_g^{n+1} - s_g^n \right). \quad (3.15)$$

Здесь частные производные вычисляются с использованием значений насыщенности на временном слое  $n$  в точке, расположенной

«вверх по потоку». На втором этапе аппроксимация (3.15) подставляется в соответствующие слагаемые уравнений фильтрации, которые затем линеаризуются. В результате получаются выражения вида:

$$\begin{aligned}
 & \lambda_{l_{i+0.5}}^{n+1} (p_{l_{i+1}}^{n+1} - p_{l_i}^{n+1}) \approx \lambda_{l_{i+0.5}}^n (p_{l_{i+1}}^{n+1} - p_{l_i}^{n+1}) + \\
 & + \left( \frac{\partial \lambda_{l_{i+0.5}}}{\partial s_w} \right)^n (s_w^{n+1} - s_w^n) (p_{l_{i+1}}^{n+1} - p_{l_i}^{n+1}) + \left( \frac{\partial \lambda_{l_{i+0.5}}}{\partial s_g} \right)^n (s_g^{n+1} - s_g^n) (p_{l_{i+1}}^{n+1} - p_{l_i}^{n+1}) \approx \\
 & \approx \lambda_{l_{i+0.5}}^n (p_{l_{i+1}}^{n+1} - p_{l_i}^{n+1}) + \\
 & + \left( \frac{\partial \lambda_{l_{i+0.5}}}{\partial s_w} \right)^n (s_w^{n+1} - s_w^n) (p_{l_{i+1}}^n - p_{l_i}^n) + \left( \frac{\partial \lambda_{l_{i+0.5}}}{\partial s_g} \right)^n (s_g^{n+1} - s_g^n) (p_{l_{i+1}}^n - p_{l_i}^n).
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Здесь слагаемые, содержащие нелинейные множители вида  $(s^{n+1} - s^n)(p_{l_{i+1}}^{n+1} - p_{l_i}^{n+1})$ , линеаризованы. Устойчивость этого метода вдвое выше, чем для явного метода [1,45].

В полуявлном методе сохраняется нелинейность в выражении (3.16) и затем уравнения решаются с использованием ньютоновских итераций.

*Полностью неявный метод* основан на решении нелинейных уравнений с неявными проводимостями методом Ньютона. Линеаризованный неявный метод можно интерпретировать как первую итерацию метода Ньютона. Неявный метод является безусловно устойчивым, однако характеризуется большими погрешностями аппроксимации, чем явный метод. Поэтому для многих задач трехфазной фильтрации линеаризованный неявный метод обеспечивает разумное соотношение устойчивости и погрешностей аппроксимации. Однако для решения сложных задач многокомпонентной и неизотермической фильтрации используют неявный метод.

### 3.4. Аппроксимация слагаемых, учитывающих источники и стоки

Как уже указывалось, граничные условия в конечно-разностных уравнениях удобно учитывать в виде слагаемых характеризующих источники (стоки). Поскольку уравнение сохранения массы в конечно-разностном виде записывается для целого блока, то положение источника или стока в пределах блока несущественно и его можно менять, поэтому скважины иногда «сносят» в узлы разностной сетки. Это характеризует предел «разрешающей способности» конечно-разностной аппроксимации.

Аппроксимация источников во времени для обеспечения устойчивости должна быть согласована с аппроксимацией сильных нелинейностей в проводимостях или даже обладать большей степенью неявности [45]. Таким образом, способы аппроксимации источников во времени аналогичны (3.13) – (3.16).

При явном методе и заданном дебите его значение берется с предыдущего слоя:

$$Q_l^{n+1} \approx Q_l^n, \quad l = o, w, g. \quad (3.17)$$

Если используется явный метод аппроксимации проводимости, но давление вычисляется неявно, то граничное условие в виде заданного давления учитывается слагаемым с неявлым давлением:

$$Q_l^{n+1} \approx Q_l^n + \left( \frac{\partial Q_l}{\partial p_l} \right)^n (p_l^{n+1} - p_l^n). \quad (3.18)$$

Аналогично записывается выражение для аппроксимации дебита линеаризованным неявлым методом:

$$Q_l^{n+1} \approx Q_l^n + \left( \frac{\partial Q_l}{\partial p_l} \right)^n (p_l^{n+1} - p_l^n) + \left( \frac{\partial Q_l}{\partial s_w} \right)^n (s_w^{n+1} - s_w^n) + \left( \frac{\partial Q_l}{\partial s_g} \right)^n (s_g^{n+1} - s_g^n). \quad (3.19)$$

В этом выражении некоторые или все неявлые составляющие могут быть равны нулю. Например, при заданном дебите не учитывается слагаемое, неявлное по давлению.

### 3.5. Неявлная схема для уравнений многофазной фильтрации. Метод совместного решения (SS-метод – Simultaneous Solution)

Используя аппроксимации, приведенные в данной главе, представим неявлую конечно-разностную схему для системы уравнений трехфазной фильтрации (1.18):

уравнение сохранения массы нефти:

$$\begin{aligned} & [T_{oi+0.5jk}(p_{oi+1jk} - p_{oijk}) - T_{oi-0.5jk}(p_{oi-1jk} - p_{oijk})]^{n+1} - \\ & - [T_{oi+0.5jk}\rho_{oi+0.5jk}g(z_{i+1jk} - z_{ijk}) - T_{oi-0.5jk}\rho_{oi-0.5jk}g(z_{i-1jk} - z_{ijk})]^{n+1} + \\ & + [T_{oi+0.5jk}(p_{oi+1jk} - p_{oijk}) - T_{oi-0.5jk}(p_{oi-1jk} - p_{oijk})]^{n+1} - \\ & - [T_{oi+0.5jk}\rho_{oi+0.5jk}g(z_{i+1jk} - z_{ijk}) - T_{oi-0.5jk}\rho_{oi-0.5jk}g(z_{i-1jk} - z_{ijk})]^{n+1} + \\ & + [T_{oi+0.5jk}(p_{oi+1jk} - p_{oijk}) - T_{oi-0.5jk}(p_{oi-1jk} - p_{oijk})]^{n+1} - \\ & - [T_{oi+0.5jk}\rho_{oi+0.5jk}g(z_{i+1jk} - z_{ijk}) - T_{oi-0.5jk}\rho_{oi-0.5jk}g(z_{i-1jk} - z_{ijk})]^{n+1} = \\ & = \frac{V_{ijk}}{\Delta t} \left\{ \left[ \frac{ms_o}{B_o} \right]^{n+1} - \left[ \frac{ms_o}{B_o} \right]^n \right\}_{ijk} + Q_{oijk}^{n+1}; \end{aligned} \quad (3.20)$$

уравнение сохранения массы воды:

$$\begin{aligned}
& \left[ T_{wi+0.5jk} (p_{wi+1jk} - p_{wijk}) - T_{wi-0.5jk} (p_{wi-1jk} - p_{wijk}) \right]^{n+1} - \\
& - \left[ T_{wi+0.5jk} \rho_{wi+0.5jk} g(z_{i+1jk} - z_{ijk}) - T_{wi-0.5jk} \rho_{wi-0.5jk} g(z_{i-1jk} - z_{ijk}) \right]^{n+1} + \\
& + \left[ T_{wi+0.5jk} (p_{wi+1jk} - p_{wijk}) - T_{wi-0.5jk} (p_{wi-1jk} - p_{wijk}) \right]^{n+1} - \\
& - \left[ T_{wi+0.5jk} \rho_{wi+0.5jk} g(z_{i+1jk} - z_{ijk}) - T_{wi-0.5jk} \rho_{wi-0.5jk} g(z_{i-1jk} - z_{ijk}) \right]^{n+1} + \\
& + \left[ T_{wi+0.5jk} (p_{wi+1jk} - p_{wijk}) - T_{wi-0.5jk} (p_{wi-1jk} - p_{wijk}) \right]^{n+1} - \\
& - \left[ T_{wi+0.5jk} \rho_{wi+0.5jk} g(z_{i+1jk} - z_{ijk}) - T_{wi-0.5jk} \rho_{wi-0.5jk} g(z_{i-1jk} - z_{ijk}) \right]^{n+1} = \\
& = \frac{V_{ijk}}{\Delta t} \left\{ \left[ \frac{ms_w}{B_w} \right]^{n+1} - \left[ \frac{ms_w}{B_w} \right]^n \right\}_{ijk} + Q_{wijk}^{n+1}; \tag{3.21}
\end{aligned}$$

уравнение сохранения массы газа:

$$\begin{aligned}
& \left[ T_{gi+0.5jk} (p_{gi+1jk} - p_{gijk}) - T_{gi-0.5jk} (p_{gi-1jk} - p_{gijk}) \right]^{n+1} + \\
& + \left[ T_{oi+0.5jk} R_{i+0.5jk} (p_{oi+1jk} - p_{oijk}) - T_{oi-0.5jk} R_{i-0.5jk} (p_{oi-1jk} - p_{oijk}) \right]^{n+1} - \\
& - \left[ T_{gi+0.5jk} \rho_{gi+0.5jk} g(z_{i+1jk} - z_{ijk}) - T_{gi-0.5jk} \rho_{gi-0.5jk} g(z_{i-1jk} - z_{ijk}) \right]^{n+1} - \\
& - \left[ T_{oi+0.5jk} R_{i+0.5jk} \rho_{oi+0.5jk} g(z_{i+1jk} - z_{ijk}) - T_{oi-0.5jk} R_{i-0.5jk} \rho_{oi-0.5jk} g(z_{i-1jk} - z_{ijk}) \right]^{n+1} + \\
& + \left[ T_{gi+0.5jk} (p_{gi+1jk} - p_{gijk}) - T_{gi-0.5jk} (p_{gi-1jk} - p_{gijk}) \right]^{n+1} + \\
& + \left[ T_{oi+0.5jk} R_{i+0.5jk} (p_{oi+1jk} - p_{oijk}) - T_{oi-0.5jk} R_{i-0.5jk} (p_{oi-1jk} - p_{oijk}) \right]^{n+1} - \\
& - \left[ T_{gi+0.5jk} \rho_{gi+0.5jk} g(z_{i+1jk} - z_{ijk}) - T_{gi-0.5jk} \rho_{gi-0.5jk} g(z_{i-1jk} - z_{ijk}) \right]^{n+1} - \\
& - \left[ T_{oi+0.5jk} R_{i+0.5jk} \rho_{oi+0.5jk} g(z_{i+1jk} - z_{ijk}) - T_{oi-0.5jk} R_{i-0.5jk} \rho_{oi-0.5jk} g(z_{i-1jk} - z_{ijk}) \right]^{n+1} + \\
& + \left[ T_{gi+0.5jk} (p_{gi+1jk} - p_{gijk}) - T_{gi-0.5jk} (p_{gi-1jk} - p_{gijk}) \right]^{n+1} + \\
& + \left[ T_{oi+0.5jk} R_{i+0.5jk} (p_{oi+1jk} - p_{oijk}) - T_{oi-0.5jk} R_{i-0.5jk} (p_{oi-1jk} - p_{oijk}) \right]^{n+1} - \\
& - \left[ T_{gi+0.5jk} \rho_{gi+0.5jk} g(z_{i+1jk} - z_{ijk}) - T_{gi-0.5jk} \rho_{gi-0.5jk} g(z_{i-1jk} - z_{ijk}) \right]^{n+1} - \\
& - \left[ T_{oi+0.5jk} R_{i+0.5jk} \rho_{oi+0.5jk} g(z_{i+1jk} - z_{ijk}) - T_{oi-0.5jk} R_{i-0.5jk} \rho_{oi-0.5jk} g(z_{i-1jk} - z_{ijk}) \right]^{n+1} = \\
& = \frac{V_{ijk}}{\Delta t} \left\{ \left[ \frac{ms_g}{B_g} \right]^{n+1} - \left[ \frac{ms_g}{B_g} \right]^n + \left[ \frac{mRs_o}{B_o} \right]^{n+1} - \left[ \frac{mRs_o}{B_o} \right]^n \right\}_{ijk} + Q_{fgijk}^{n+1} + R_{ijk}^{n+1} Q_{oijk}^{n+1} \tag{3.22}
\end{aligned}$$

$$T_{li\pm 0.5jk} = \frac{S_{xi\pm 0.5}}{\Delta x_{i\pm}} \left( \frac{k_x k_{rl}}{\mu_l B_l} \right)_{i\pm 0.5jk}, \quad T_{lij\pm 0.5k} = \frac{S_{yj\pm 0.5}}{\Delta y_{j\pm}} \left( \frac{k_y k_{rl}}{\mu_l B_l} \right)_{ij\pm 0.5k}, \quad T_{lijk\pm 0.5} = \frac{S_{zk\pm 0.5}}{\Delta z_{k\pm}} \left( \frac{k_z k_{rl}}{\mu_l B_l} \right)_{ijk\pm 0.5}.$$

Здесь  $V_{ijk}$  – объем сеточного блока,  $S_{xi\pm 0.5}, S_{yj\pm 0.5}, S_{zk\pm 0.5}$  – площадь проекции боковой грани блока на плоскость, нормальную соответствующей оси  $x, y$  или  $z$ ; например, в случае прямоугольной сетки  $V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ ,  $S_x = \Delta y_j \Delta z_k$ .

В уравнения (3.20) – (3.22) входят коэффициенты, значения которых определяются неявно, поэтому для их решения требуются итерации. Систему нелинейных уравнений (3.20) – (3.22) после подстановки замыкающих соотношений (1.19) можно представить в виде

$$\vec{F}(\vec{u}^{n+1}) \equiv \vec{F}^{n+1} = \vec{0}. \quad (3.23)$$

Здесь  $\vec{u}^{n+1}$  – вектор неизвестных. Элементами этого вектора являются значения давления и насыщенности во всех блоках на данном временном слое. Систему уравнений вида (3.23) можно решить методом Ньютона:

$$\mathbf{J}^{(\nu)} \delta^{(\nu+1)} = -\vec{F}^{(\nu)}, \quad \delta^{(\nu+1)} = \vec{u}^{(\nu+1)} - \vec{u}^{(\nu)}, \quad \vec{u}^{(0)} = \vec{u}^n. \quad (3.24)$$

Здесь  $\nu$  – номер итерации,  $\mathbf{J}$  – якобиан векторной функции, соответствующий векторному обобщению производной, используемой в классическом методе Ньютона для одного уравнения:

$$\mathbf{J}^{(\nu)} = \left( \frac{\partial F_m}{\partial u_l} \right)^{(\nu)}. \quad (3.25)$$

Рассмотрим сначала случай однофазной фильтрации, когда для каждого сеточного блока решается только одно уравнение и отыскиваются значения давления. Для индексации уравнений и неизвестных в (3.23) – (3.25) вместо индексов  $m, l$  естественно использовать сеточные координаты  $i, j, k$ , представляющие собой номера блоков вдоль направлений  $x, y, z$  соответственно. Ненулевыми элементами строки матрицы  $\mathbf{J}$ , соответствующего сеточному блоку  $(i, j, k)$ , являются

$$\frac{\partial F_{ijk}}{\partial u_{ijk-1}}, \dots, \frac{\partial F_{ijk}}{\partial u_{ij-1k}}, \dots, \frac{\partial F_{ijk}}{\partial u_{i-1jk}}, \frac{\partial F_{ijk}}{\partial u_{ijk}}, \frac{\partial F_{ijk}}{\partial u_{i+1jk}}, \dots, \frac{\partial F_{ijk}}{\partial u_{ij+1k}}, \dots, \frac{\partial F_{ijk}}{\partial u_{ijk+1}}. \quad (3.26)$$

Таким образом, в трехмерном случае в каждой строке якобиана не более семи ненулевых элементов, в двумерном случае таких элементов не более пяти, а в одномерном – не более трех. Соответствующие матрицы являются семи-, пяти- и трехдиагональными.

При решении многофазных задач в (3.26) удобно перейти к векторным функциям

$$\frac{\partial \vec{F}_{ijk}}{\partial \vec{u}_{ijk-1}}, \dots, \frac{\partial \vec{F}_{ijk}}{\partial \vec{u}_{ij-1k}}, \dots, \frac{\partial \vec{F}_{ijk}}{\partial \vec{u}_{i-1jk}}, \frac{\partial \vec{F}_{ijk}}{\partial \vec{u}_{ijk}}, \frac{\partial \vec{F}_{ijk}}{\partial \vec{u}_{i+1jk}}, \dots, \frac{\partial \vec{F}_{ijk}}{\partial \vec{u}_{ij+1k}}, \dots, \frac{\partial \vec{F}_{ijk}}{\partial \vec{u}_{ijk+1}},$$

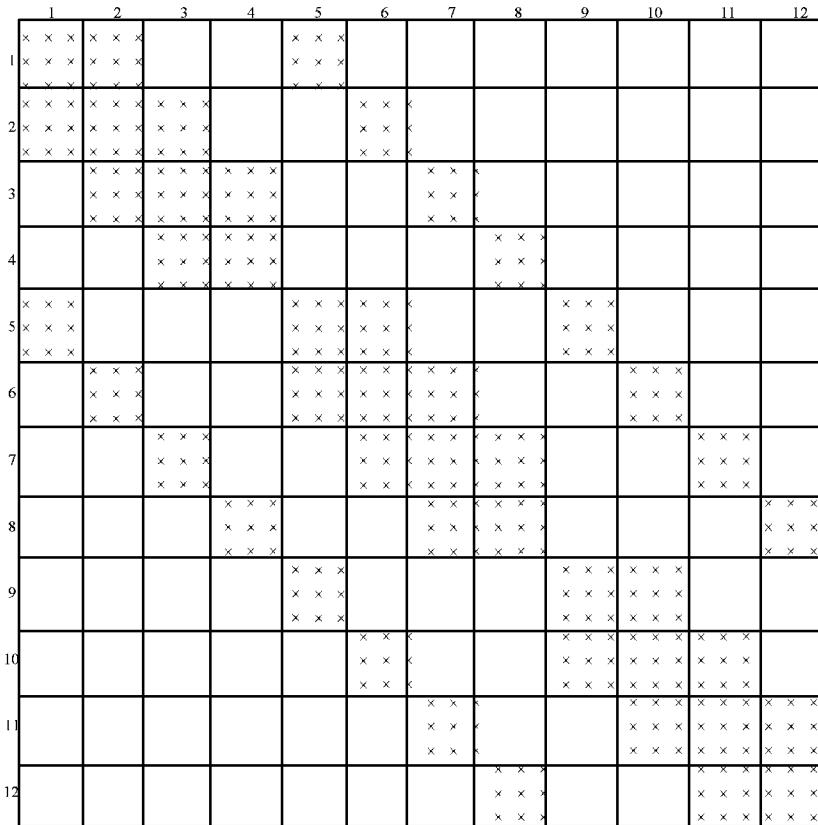
которые в случае системы уравнений трехфазной фильтрации относительно  $p_o, s_w, s_g$  имеют вид:

$$\vec{F}_{ijk} = \begin{pmatrix} F_{oijk} \\ F_{wijk} \\ F_{gijk} \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_{ijk} = \begin{pmatrix} p_{oijk} \\ s_{wijk} \\ s_{gijk} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{F}_{ijk}}{\partial \vec{u}_{lmn}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{oijk}}{\partial p_{olmn}} & \frac{\partial F_{oijk}}{\partial s_{wlmn}} & \frac{\partial F_{oijk}}{\partial s_{glmn}} \\ \frac{\partial F_{wijk}}{\partial p_{olmn}} & \frac{\partial F_{wijk}}{\partial s_{wlmn}} & \frac{\partial F_{wijk}}{\partial s_{glmn}} \\ \frac{\partial F_{gijk}}{\partial p_{olmn}} & \frac{\partial F_{gijk}}{\partial s_{wlmn}} & \frac{\partial F_{gijk}}{\partial s_{glmn}} \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Соответствующая матрица Якоби обладает блочно-диагональной структурой. Как видно из (3.27), в случае трехфазной фильтрации размерность каждого блока матрицы 3x3, а в случае двухфазной фильтрации – 2x2.

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	5	6	7	8
3	9	10	11	12

**Рис. 3.1. Двумерная сеточная область.**



**Рис. 3.2. Структура матрицы для сеточной области, показанной на рис. 3.1, при использовании неявного метода.**

В качестве примера на рис. 3.2 представлена структура матрицы Якоби для моделирования трехфазной фильтрации в двумерной

области, показанной на рис. 3.1. Ненулевые элементы помечены «х». Нулевые блоки (5,4), (4,5), (9,8), (8,9) на ненулевых диагоналях соответствуют приграничным ячейкам сеточной области.

При моделировании двухфазной фильтрации, например, нефти и воды, удобно представить соответствующую систему уравнений относительно переменных  $p_o$ ,  $p_w$ . Приращение насыщенности выражается с использованием функции капиллярного давления:

$$s_l^{n+1} - s_l^n = \left( \frac{ds_l}{dp_{ow}} \right) (p_{ow}^{n+1} - p_{ow}^n). \quad (3.28)$$

Такое представление удовлетворяет условию консервативности только в случае, когда выражение (3.28) является точным, т. е. производная  $\left( \frac{ds_l}{dp_{ow}} \right)$  определяется как тангенс угла наклона хорды:

$$\frac{ds_l}{dp_{ow}} = \frac{s_l^{n+1} - s_l^n}{p_{ow}^{n+1} - p_{ow}^n}.$$

Для того чтобы последнее выражение было явным, часто предполагают, что капиллярное давление является линейной функцией насыщенности. В противном случае, требуются итерации. В рассматриваемом случае выражения (3.27) принимают вид:

$$\vec{F}_{ijk} = \begin{pmatrix} F_{oijk} \\ F_{wijk} \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_{ijk} = \begin{pmatrix} p_{oijk} \\ p_{wijk} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{F}_{ijk}}{\partial \vec{u}_{lmn}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{oijk}}{\partial p_{olmn}} & \frac{\partial F_{oijk}}{\partial p_{wlmn}} \\ \frac{\partial F_{wijk}}{\partial p_{olmn}} & \frac{\partial F_{wijk}}{\partial p_{wlmn}} \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Причем блоки  $\frac{\partial \vec{F}_{ijk}}{\partial \vec{u}_{lmn}}$  содержат четыре ненулевых элемента только при  $(i, j, k) = (l, m, n)$ . Остальные ненулевые блоки имеют диагональную структуру.

Представленный вид SS-метода для двухфазной фильтрации можно использовать только при ненулевом капиллярном давлении. Поэтому, если производится моделирование процесса без учета капиллярного давления, вводится фиктивное малое  $p_{ow}$ , причем выбирается линейная зависимость от насыщенности.

Если итерационный процесс (3.24) сходится, то  $\delta^{(\nu)}$  и  $\vec{F}^{(\nu)}$  стремятся к нулю. Каждый из этих критериев может применяться для проверки сходимости [35]. Например, при использовании первого критерия итерации производят до тех пор, пока изменения каждой переменной за итерацию не окажутся меньше максимально

допустимого значения. В модели трехфазной фильтрации ограничивают изменение давления и насыщенности:

$$\|\bar{p}^{(v+1)} - \bar{p}^{(v)}\| \leq \varepsilon_p \text{ и } \max_l \|\bar{s}_l^{(v+1)} - \bar{s}_l^{(v)}\| \leq \varepsilon_s. \quad (3.30)$$

Обычно в расчетах используют следующие стандартные значения:  $\varepsilon_p = 10^{-2} - 10^{-1}$  МПа,  $\varepsilon_s = 0.005$  [35].

### 3.6. Метод неявный по давлению, явный по насыщенности (Implicit Pressure Explicit Saturation - IMPES)

Наиболее трудоемким элементом численного решения системы уравнений многофазной фильтрации является многократное решение системы линейных алгебраических уравнений вида (3.24). Количество вычислений существенно снижается при уменьшении количества уравнений для каждого расчетного блока, а следовательно, и общей размерности линейной системы. При использовании IMPES-метода количество уравнений для каждого блока, решаемых неявно, сокращается до одного, что приводит к значительной экономии вычислительных ресурсов. Суть метода состоит в следующем [1,35,45,50]:

- в результате линейной комбинации уравнений фильтрации (например, (3.20) – (3.22)) выводится одно уравнение для расчета давления, которое решается неявно;
- с учетом найденных значений давления явно рассчитывается распределение насыщенностей.

Явное вычисление насыщенностей требует ограничения шага по времени для обеспечения устойчивости решения.

Основное допущение метода состоит в том, что проводимости и капиллярные давления определяются явно, т. е. соответствующие значения берутся с предыдущего временного слоя. Отсюда следует, что  $p_w^{n+1} - p_w^n = p_o^{n+1} - p_o^n = p_g^{n+1} - p_g^n$ , и поэтому удобно в левой части уравнений (3.20) – (3.22) перейти к переменной  $p_o$ . Сокращенно обозначив левые части уравнений (3.20) – (3.22) соответственно  $L_o(p_o^{n+1})$ ,  $L_w(p_w^{n+1})$  и  $L_g(p_g^{n+1}) + L_{dg}(p_o^{n+1})$ , с учетом (3.1) получим

$$L_o(p_o^{n+1}) = \frac{V_{ijk}}{\Delta t} \left\{ C_{op} (p_o^{n+1} - p_o^n) + C_{os} (s_o^{n+1} - s_o^n) \right\} + Q_o, \\ L_w(p_o^{n+1} - p_{ow}^n) = \frac{V_{ijk}}{\Delta t} \left\{ C_{wp} (p_o^{n+1} - p_o^n) + C_{ws} (s_w^{n+1} - s_w^n) \right\} + Q_w, \quad (3.31)$$

$$L_g(p_o^{n+1} + p_{go}^n) + L_{dg}(p_o^{n+1}) = \\ = \frac{V_{ijk}}{\Delta t} \{ C_{gp}(p_o^{n+1} - p_o^n) + C_{gs}(s_g^{n+1} - s_g^n) + C_{dgp}(p_o^{n+1} - p_o^n) + C_{dgs}(s_o^{n+1} - s_o^n) \} + Q_{fg} + RQ_o .$$

Неявные насыщенности входят в правую часть уравнений (3.31). Их можно исключить, составив линейную комбинацию уравнений и воспользовавшись соотношением:

$$(s_o^{n+1} - s_o^n) + (s_w^{n+1} - s_w^n) + (s_g^{n+1} - s_g^n) = 0 . \quad (3.32)$$

Сложим уравнения (3.31), предварительно умножив второе из них на  $A$ , а третье – на  $B$ . Определим значения  $A$  и  $B$  таким образом, чтобы все слагаемые, содержащие  $(s_o^{n+1} - s_o^n)$ ,  $(s_w^{n+1} - s_w^n)$  и  $(s_g^{n+1} - s_g^n)$ , в результирующем уравнении исчезли:

$$C_{os}(s_o^{n+1} - s_o^n) + AC_{ws}(s_w^{n+1} - s_w^n) + BC_{gs}(s_g^{n+1} - s_g^n) + BC_{dgs}(s_o^{n+1} - s_o^n) = 0 .$$

Отсюда с учетом (3.32) имеем

$$\begin{aligned} A &= BC_{gs}/C_{ws}, \\ B &= C_{os}/(C_{gs} - C_{dgs}). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Таким образом, уравнение для неявного расчета давления принимает вид:

$$L_o(p_o^{n+1}) + AL_w(p_o^{n+1} - p_{ow}^n) + BL_g(p_o^{n+1} + p_{go}^n) + BL_{dg}(p_o^{n+1}) = \\ = \frac{V_{ijk}}{\Delta t} (C_{op} + AC_{wp} + BC_{gp} + BC_{dgp})(p_o^{n+1} - p_o^n) + Q_o + AQ_w + B(Q_{fg} + RQ_o) . \quad (3.34)$$

Если представить систему (3.34) в матричном виде, ее структура будет такой же, как и для однофазной фильтрации. Матрица коэффициентов будет соответственно трех-, пяти- и семидиагональной для одно-, двух- и трехмерного случаев. На рис. 3.3 представлена структура матрицы IMPES-метода для примера, показанного на рис. 3.1. Ненулевые элементы помечены «x».

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	x			x								
2	x	x			x							
3	x	x	x			x						
4		x	x				x					
5				x	x			x				
6	x		x	x	x				x			
7	x		x	x	x					x		
8	x			x	x						x	
9		x				x	x					
10			x			x	x	x	x			
11			x				x	x	x	x		
12				x			x	x	x	x		

**Рис. 3.3. Структура матрицы для сеточной области, показанной на рис. 3.1, при использовании IMPES-метода.**

После вычисления давления насыщенности определяются явно:

$$\begin{aligned} s_o^{n+1} &= s_o^n + \frac{\Delta t}{V_{ijk} C_{os}} [L_o(p_o^{n+1}) - Q_o] - \frac{C_{op}}{C_{os}} (p_o^{n+1} - p_o^n) \\ s_w^{n+1} &= s_w^n + \frac{\Delta t}{V_{ijk} C_{ws}} [L_w(p_o^{n+1} - p_{ow}^n) - Q_w] - \frac{C_{wp}}{C_{ws}} (p_o^{n+1} - p_o^n) \\ s_g^{n+1} &= 1 - s_o^{n+1} - s_w^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Затем пересчитываются капиллярные давления и проводимости, которые используются на следующем временном шаге.

### 3.7. Анализ устойчивости и выбор шага по времени для IMPES- и SS-методов

В общем случае не представляется возможным доказать сходимость конечно-разностных уравнений фильтрации к дифференциальным. Это связано, во-первых, с сильной нелинейностью уравнений, особенно по проводимостям, и во-вторых, с необходимостью определения эффективных характеристик для каждого расчетного блока, обусловленной неоднородным строением пластов. Устойчивость является необходимым, но не достаточным условием сходимости. Так, например, устойчивая и согласованная аппроксимация межблочных проводимостей средним гармоническим (3.7) обеспечивает сходимость в случае линейной задачи, соответствующей однофазной фильтрации, и приводит к неверному результату в двухфазном случае.

SS-метод является полностью неявным и поэтому безусловно устойчивым. Тем не менее, ограничение на шаг по времени необходимо вводить, но не из-за критерия устойчивости, а исходя из нелинейного характера уравнений. Во-первых, большой шаг по времени приведет к большим погрешностям дискретизации. Во-вторых, при увеличении шага увеличивается число итераций за шаг по времени. Затраты вычислительных ресурсов на одну итерацию практически такие же, как на один шаг, при расчете которого не требуется проведение дополнительных итераций. Для ограничения шага по времени можно ограничить максимальное изменение переменной за шаг. В этом случае величину нового временного шага оценивают следующим образом:

$$\Delta t^{n+1} = \Delta t^n \min_{k,v} \left[ \frac{(1+\omega)\eta_v}{\delta_{vk} + \omega\eta_v} \right].$$

Здесь индекс  $k$  соответствует номеру расчетного блока, индекс  $v$  обозначает каждую из основных переменных, относительно которых

решается задача (например, насыщенность и давление),  $\eta_v$  – максимально допустимое изменение переменной  $v$  за шаг,  $\delta_{vi}$  – изменение переменной за предыдущий шаг  $\Delta t^n$ ,  $\omega$  – числовой параметр ( $0 \leq \omega \leq 1$ ).

Устойчивость IMPES-метода является условной, т. к. она ограничивается явным учетом капиллярного давления и проводимостей. Ограничение, связанное с явным учетом проводимостей, относится также и к модификациям SS-метода, в которых проводимости определяются явно. При выводе условия устойчивости для простоты рассмотрим случай одномерной двухфазной фильтрации несжимаемых жидкостей (нефти и воды) без учета гравитации.

При анализе **устойчивости решения по отношению к капиллярному давлению** предположим, что проводимости и производная капиллярного давления  $dp_{ow}/ds_w$  постоянны. Тогда система уравнений (3.20), (3.21) примет вид:

$$\begin{aligned} T_o(p_{ok+1} - 2p_{ok} + p_{ok-1})^{n+1} &= -\frac{m_k V_k}{\Delta t} (s_{wk}^{n+1} - s_{wk}^n) + Q_{ok}; \\ T_w(p_{ok+1} - 2p_{ok} + p_{ok-1})^{n+1} - T_w \frac{dp_{ow}}{ds_w} (s_{wk+1} - 2s_{wk} + s_{wk-1})^n &= \frac{m_k V_k}{\Delta t} (s_{wk}^{n+1} - s_{wk}^n) + Q_{wk}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Обозначим ошибки при вычислении  $p_o$  и  $s_w$  соответственно  $\varepsilon_p$  и  $\varepsilon_s$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{pk}^n &= \tilde{p}_{ok}^n - p_{ok}^n, \\ \varepsilon_{sk}^n &= \tilde{s}_{wk}^n - s_{wk}^n. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Здесь  $\tilde{p}_{ok}^n$ ,  $\tilde{s}_{wk}^n$  – точные решения. Если пренебречь погрешностями аппроксимации, то, как показано в разделе 2.4, ошибки удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} T_o(\varepsilon_{pk+1} - 2\varepsilon_{pk} + \varepsilon_{pk-1})^{n+1} &= -\frac{m_k V_k}{\Delta t} (\varepsilon_{sk}^{n+1} - \varepsilon_{sk}^n), \\ T_w(\varepsilon_{pk+1} - 2\varepsilon_{pk} + \varepsilon_{pk-1})^{n+1} - T_w \frac{dp_{ow}}{ds_w} (\varepsilon_{sk+1} - 2\varepsilon_{sk} + \varepsilon_{sk-1})^n &= \frac{m_k V_k}{\Delta t} (\varepsilon_{sk}^{n+1} - \varepsilon_{sk}^n) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Сложим уравнения (3.38):

$$(\varepsilon_{pk+1} - 2\varepsilon_{pk} + \varepsilon_{pk-1})^{n+1} = \frac{T_w}{T_o + T_w} \frac{dp_{ow}}{ds_w} (\varepsilon_{sk+1} - 2\varepsilon_{sk} + \varepsilon_{sk-1})^n. \quad (3.39)$$

Подставляя выражение (3.39) в первое из уравнений (3.38), получим

$$\frac{T_o T_w}{T_o + T_w} \frac{dp_{ow}}{ds_w} (\varepsilon_{sk+1} - 2\varepsilon_{sk} + \varepsilon_{sk-1})^n = -\frac{m_k V_k}{\Delta t} (\varepsilon_{sk}^{n+1} - \varepsilon_{sk}^n). \quad (3.40)$$

Уравнение (3.40) совпадает с уравнением (2.26), в котором  $\theta = 0$ ,  $\frac{(\Delta x_k)^2}{\eta} = -\frac{m_k V_k}{(dp_{ow}/ds_w)} \frac{T_o + T_w}{T_o T_w}$ . Поэтому условие устойчивости аналогично (2.31):

$$\Delta t \leq 0.5 \frac{m_k V_k}{|dp_{ow}/ds_w|} \frac{T_o + T_w}{T_o T_w}.$$

Это условие должно выполняться для всех точек  $k$  и для любого значения насыщенности  $s_w$ , поэтому для регулярной сетки имеем

$$\Delta t \leq 0.5 (\Delta x)^2 \min_k \left( \frac{m_k}{k_k} \right) \frac{1}{\max_{s_w} |dp_{ow}/ds_w|} \min_{s_w} \left( \frac{\mu_o}{k_{ro}} + \frac{\mu_w}{k_{rw}} \right). \quad (3.41)$$

Аналогично, методом рядов Фурье можно получить условие устойчивости решений IMPES-методом по отношению к капиллярному давлению для двух- и трехмерной фильтрации в анизотропном пласте. В трехмерном случае оно имеет вид:

$$\Delta t \leq 0.5 \min_k \left[ m_k \left( \frac{k_{xk}}{(\Delta x)^2} + \frac{k_{yk}}{(\Delta y)^2} + \frac{k_{zk}}{(\Delta z)^2} \right)^{-1} \right] \frac{1}{\max_{s_w} |dp_{ow}/ds_w|} \min_{s_w} \left( \frac{\mu_o}{k_{ro}} + \frac{\mu_w}{k_{rw}} \right). \quad (3.42)$$

В отличие от IMPES-метода, SS-метод безусловно устойчив относительно капиллярного давления. Покажем безусловную устойчивость SS-метода относительно основных переменных. Для простоты будем использовать те же предположения, что и при анализе системы (3.36), т. е. рассмотрим одномерную двухфазную фильтрацию несжимаемых жидкостей без учета гравитации при постоянных проводимостях и  $dp_{ow}/ds_w$ . В переменных  $p_o$ ,  $p_w$  система уравнений (3.36) имеет вид:

$$\begin{aligned} T_o (p_{ok+1} - 2p_{ok} + p_{ok-1})^{n+1} &= -\frac{m_k V_k}{\Delta t} \left( \frac{dp_{ow}}{ds_w} \right)^{-1} [(p_{ok}^{n+1} - p_{ok}^n) - (p_{wk}^{n+1} - p_{wk}^n)] + Q_{ok}; \\ T_w (p_{wk+1} - 2p_{wk} + p_{wk-1})^{n+1} &= \frac{m_k V_k}{\Delta t} \left( \frac{dp_{ow}}{ds_w} \right)^{-1} [(p_{ok}^{n+1} - p_{ok}^n) - (p_{wk}^{n+1} - p_{wk}^n)] + Q_{wk}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Определим ошибки при вычислении  $p_o$  и  $p_w$  соответственно  $\epsilon_o$  и  $\epsilon_w$ :

$$\begin{aligned} \epsilon_{oi}^n &= p_{oi}^n - \tilde{p}_{oi}^n; \\ \epsilon_{wi}^n &= p_{wi}^n - \tilde{p}_{wi}^n. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Уравнения для ошибок аналогичны (3.38):

$$\begin{aligned} T_o (\varepsilon_{ok+1} - 2\varepsilon_{ok} + \varepsilon_{ok-1})^{n+1} &= -\frac{m_k V_k}{\Delta t} \left( \frac{dp_{ow}}{ds_w} \right)^{-1} [(\varepsilon_{ok}^{n+1} - \varepsilon_{ok}^n) - (\varepsilon_{wk}^{n+1} - \varepsilon_{wk}^n)]; \\ T_w (\varepsilon_{wk+1} - 2\varepsilon_{wk} + \varepsilon_{wk-1})^{n+1} &= \frac{m_k V_k}{\Delta t} \left( \frac{dp_{ow}}{ds_w} \right)^{-1} [(\varepsilon_{ok}^{n+1} - \varepsilon_{ok}^n) - (\varepsilon_{wk}^{n+1} - \varepsilon_{wk}^n)]. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Применяя метод рядов Фурье, представим ошибки  $\varepsilon_o$  и  $\varepsilon_w$  в виде рядов (2.27) и проанализируем рост каждого члена соответствующего ряда:

$$\varepsilon_{lm}^n = \zeta_{lm}^n e^{i\alpha_l k}, \quad \alpha_l = \frac{m_l \pi \Delta x}{L}, \quad l = o, w. \quad (3.46)$$

Здесь использованы те же обозначения, что и в (2.27). После подстановки (3.46) в уравнения (3.45) и последующих преобразований получим выражение для коэффициента усиления:

$$\zeta = \left[ 1 - 4 \frac{\Delta t}{m_k V_k} \frac{dp_{ow}}{ds_w} \frac{T_o T_w}{T_o + T_w} \frac{\sin^2 0.5\alpha_o \sin^2 0.5\alpha_w}{\sin^2 0.5\alpha_o + \sin^2 0.5\alpha_w} \right]^{-1} < 1. \quad (3.47)$$

Неравенство (3.47) выполняется безусловно, т. к.  $dp_{ow}/ds_w < 0$ , и выражение в квадратных скобках всегда больше единицы.

Проанализируем теперь **устойчивость IMPES- и SS-методов при явном учете проводимостей**. Для простоты будем рассматривать одномерную двухфазную фильтрацию несжимаемых жидкостей, пренебрегая капиллярным давлением и гравитацией. Тогда при равномерной разностной сетке для блока, не содержащего источника, уравнения (3.20), (3.21) могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} u_T S_x (F_k^n - F_{k-1}^n) &= \frac{mV}{\Delta t} (s_{wk}^{n+1} - s_{wk}^n), \quad F_k^n = T_{wk}^n / (T_{wk}^n + T_{ok}^n); \\ (T_{wk}^n + T_{ok}^n) (p_{k+1} - p_k)^{n+1} &= (T_{wk-1}^n + T_{ok-1}^n) (p_k - p_{k-1})^{n+1} = u_T S_x. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Здесь предполагается, что течение происходит в положительном направлении оси  $x$ . Взвешивание проводимостей осуществляется вверх по потоку. Если пренебречь изменениями  $dF/ds_w$ , то первое из уравнений (3.48) можно представить в виде

$$u_T S_x dF/ds_w (s_{wk}^n - s_{wk-1}^n) = \frac{mV}{\Delta t} (s_{wk}^{n+1} - s_{wk}^n).$$

Это уравнение – конечно-разностный аналог уравнения Баклея – Леверетта. Ошибка  $\varepsilon_s$  определяется из уравнения

$$u_T S_x dF/ds_w (\varepsilon_{sk}^n - \varepsilon_{sk-1}^n) = \frac{mV}{\Delta t} (\varepsilon_{sk}^{n+1} - \varepsilon_{sk}^n).$$

Применяя для анализа устойчивости метод рядов Фурье, получим выражение для коэффициента усиления:

$$\zeta = 1 - u_T S_x dF/ds_w \frac{\Delta t}{mV} \left( 1 - e^{-\frac{i\pi m \Delta x}{L}} \right). \quad (3.49)$$

Здесь использованы те же обозначения, что и в (2.27).

Из (3.49) имеем

$$\begin{aligned} |\zeta| &= \left| 1 - u_T S_x dF/ds_w \frac{\Delta t}{mV} \left( 2 \sin^2 \frac{\pi m \Delta x}{2L} - i 2 \sin \frac{\pi m \Delta x}{2L} \cos \frac{\pi m \Delta x}{2L} \right) \right| = \\ &= \left[ \left( 1 - 2 u_T S_x dF/ds_w \frac{\Delta t}{mV} \sin^2 \frac{\pi m \Delta x}{2L} \right)^2 + 4 \left( u_T S_x dF/ds_w \frac{\Delta t}{mV} \sin \frac{\pi m \Delta x}{2L} \cos \frac{\pi m \Delta x}{2L} \right)^2 \right]^{0.5}. \end{aligned}$$

Решая неравенство  $|\zeta| < 1$ , получим условие устойчивости:

$$u_T S_x dF/ds_w \frac{\Delta t}{mV} < 1$$

или

$$\frac{u_T}{m} dF/ds_w \Delta t < \Delta x. \quad (3.50)$$

Уравнение (3.50) имеет простую физическую интерпретацию.

Из теории Баклея – Леверетта известно, что выражение  $\frac{u_T}{m} dF/ds_w$

представляет собой скорость характеристики  $s_w = const$ . Эта скорость максимальна на фронте вытеснения. Для обеспечения устойчивости неравенство (3.50) должно выполняться при всех  $s_w$ . А это обозначает, что **за один шаг по времени фронт вытеснения может продвинуться не более чем на одну ячейку или пропускная способность блока за один временной шаг менее его порового объема**. Такая интерпретация предела устойчивости при явном задании проводимостей широко используется в литературе по численным методам в гидродинамике [1,21,23].

Аналогично можно получить условие устойчивости по отношению к проводимостям для двух- и трехмерной фильтрации. Оно имеет вид соответственно:

$$\frac{dF/ds_w \Delta t}{m} \left( \frac{u_{Tx}}{\Delta x} + \frac{u_{Ty}}{\Delta y} \right) < 1; \quad (3.51)$$

$$\frac{dF/ds_w \Delta t}{m} \left( \frac{u_{Tx}}{\Delta x} + \frac{u_{Ty}}{\Delta y} + \frac{u_{Tz}}{\Delta z} \right) < 1. \quad (3.52)$$

Здесь  $u_{Tx}$ ,  $u_{Ty}$  и  $u_{Tz}$  – компоненты суммарной скорости фильтрации. Выражения (3.50) – (3.52) можно записать следующим образом:

$$\frac{l_x}{\Delta x} < 1; \quad (3.53)$$

$$\frac{l_x}{\Delta x} + \frac{l_y}{\Delta y} < 1; \quad (3.54)$$

$$\frac{l_x}{\Delta x} + \frac{l_y}{\Delta y} + \frac{l_z}{\Delta z} < 1. \quad (3.55)$$

Здесь  $l_x$ ,  $l_y$ ,  $l_z$  – расстояния, проходимые фронтом за один временной шаг в направлении  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно. Из неравенств (3.53) – (3.55) следует, что при увеличении размерности задачи ограничение устойчивости усиливается [1].

## **Глава 4**

### **МОДЕЛИРОВАНИЕ СКВАЖИН**

Корректный учет взаимодействия пласта и скважины является одним из основополагающих элементов моделирования процессов разработки. Контур скважины является границей пласта, на которой должны быть заданы соответствующие граничные условия. Учитывая размеры этой границы, скважины часто рассматривают как точечные источники или стоки в двумерных моделях или линейные источники или стоки при трехмерном моделировании. В сеточных моделях, где местоположение скважины внутри сеточного блока не может быть уточнено, рассматривают распределенные по объему блока источники или стоки, которые учитываются в уравнении сохранения массы (1.5), (1.10). В прискважинной зоне, размеры которой могут быть значительно меньше, чем используемые при моделировании размеры сеточных блоков, происходят существенные изменения давления и насыщенности, поэтому среднее давление в блоке, как и средняя насыщенность, отличается от соответствующего значения вблизи скважины. Для учета этого явления требуется использование специальных моделей скважины, которые должны быть сопряжены с моделями пласта. В модели скважины учитываются ее геометрические характеристики (радиус, степень и характер вскрытия пласта, инклинометрия, местоположение внутри сеточного блока) и свойства призабойной зоны пласта (распределение проницаемости, насыщенности и т. д.). Если внутри сеточного блока находится несколько скважин, учитывается их взаимодействие и в модели пласта используется модель укрупненной скважины. Если скважина проходит через несколько сеточных блоков, то учитывается взаимодействие этих блоков через скважину. Возможно задание ограничений на технологические показатели работы скважин (дебиты, давления, обводненность, газовый фактор и т. д.). В данной главе рассматриваются общепринятые подходы к решению этих проблем.

#### **4.1. Учет скважины в сеточной модели пласта**

Метод учета скважин в численных моделях фильтрации основан на допущении того, что вблизи скважины течение описывается аналитическим решением, граничные условия для которого определяются

из численного решения задачи для пласта. Этот подход впервые предложен Д. Писманом [52].

Рассматривается плоское установившееся течение однородной несжимаемой жидкости и предполагается, что в окрестности скважины, ось которой параллельна оси  $z$ , характер течения близок к радиальному. Тогда приток  $Q_0$  к участку скважины длины  $\Delta z$  описывается формулой Дюпюи:

$$Q_0 = \frac{2\pi k \Delta z}{\mu} \frac{p - p_w}{\ln R / r_w}, \quad (4.1)$$

Здесь  $p$  – давление на расстоянии  $R$  от оси скважины,  $p_w$  – забойное давление,  $r_w'$  – приведенный радиус скважины. Конечно-разностная аппроксимация уравнения материального баланса для ячейки, содержащей скважину, имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{k \Delta z}{\mu} \sum_{i=1}^4 a_i (p_i - p_0) - Q_0 &= 0; \\ a_i = \frac{\Delta y}{\Delta x_i}, \quad i = 1, 3; \quad a_i = \frac{\Delta x}{\Delta y_i}, \quad i = 2, 4. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь используется пятиточечный шаблон,  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  – размеры ячейки,  $\Delta x_i, \Delta y_i$  – расстояния от узла, находящегося в данной ячейке до соседних узлов,  $i=1, \dots, 4$ ,  $p_i$  – давления в соответствующих узлах сетки,  $p_0$  – давление в рассматриваемой ячейке, рис. 4.1. Предполагая, что вблизи скважины, в том числе и в области, моделируемой соседними блоками, характер течения близок к радиальному, в соответствии с (4.1) имеем

$$\begin{aligned} p_{1,3} &= p_w + Q_0 \frac{\mu}{2\pi k \Delta z} \ln \Delta x_{1,3} / r_w', \\ p_{2,4} &= p_w + Q_0 \frac{\mu}{2\pi k \Delta z} \ln \Delta y_{2,4} / r_w', \\ p_0 &= p_w + Q_0 \frac{\mu}{2\pi k \Delta z} \ln r_0 / r_w'. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь  $r_0$  – эффективный радиус расчетного блока, соответствующий такому расстоянию от его центра, на котором давление равно давлению в ячейке  $p_0$ , рассчитанному при решении уравнения в конечных разностях (4.2).

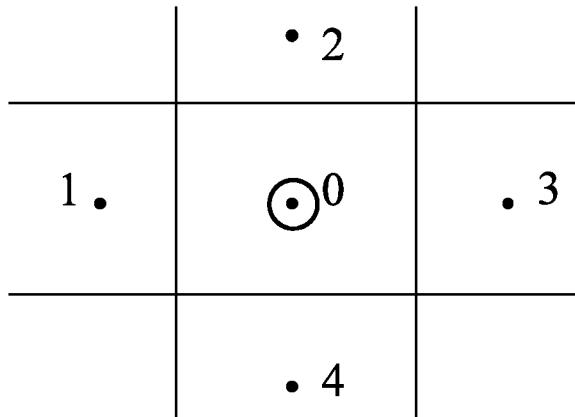
Предполагая, что сетка квадратная  $\Delta x_i = \Delta y_j$  при  $i, j = 1, 2, 3, 4$  и подставляя соотношения (4.3) в (4.2), получим

$$Q_0 = \frac{2\pi k \Delta z}{\mu} \frac{p_0 - p_w}{\ln r_0 / r_w};$$

$$r_0 = \Delta x \exp\left(-\frac{\pi}{2}\right) \approx 0.2 \Delta x. \quad (4.4)$$

Если  $\Delta x \neq \Delta y$ , но  $\Delta x_1 = \Delta x_3$ ,  $\Delta y_2 = \Delta y_4$ , то

$$r_0 = \Delta x \exp\left(\frac{\ln \alpha - \pi \alpha}{1 + \alpha^2}\right), \quad \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (4.5)$$



**Рис. 4.1. Пятиточечный шаблон для аппроксимации уравнения материального баланса (0, 1, 2, 3, 4 – узлы разностной сетки)**

Аналогично могут быть выведены выражения для эффективного радиуса  $r_0$  для блока, находящегося на границе области. В этом случае одна или две его грани непроницаемые, что должно быть учтено в (4.2). При этом необходимо учитывать, какая сетка используется: блочно-центрированная или с распределенными узлами. Если узел, в котором находится скважина, расположен на непроницаемой границе области, то выражение для дебита (4.1) надо умножить на  $\frac{1}{4}$  или на  $\frac{1}{2}$  в зависимости от положения скважины в углу или на боковой границе.

Выражения (4.4), (4.5) приближенные, т. к. основаны на предположении о радиальной фильтрации (4.3). Показано, что эта гипотеза справедлива при  $1 \leq \alpha \leq 3$ . Точное выражение имеет вид [53]:

$$r_0 = \frac{1}{4} \exp(-C) \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = 0.140365 \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}. \quad (4.6)$$

Здесь  $C = 0.5772157$  – константа Эйлера.

В случае анизотропного по проницаемости пласта дебит скважины и эквивалентный радиус блока определяются следующим образом [53]:

$$Q_0 = \frac{2\pi \sqrt{k_x k_y} \Delta z}{\mu} \frac{p_0 - p_w}{\ln r_0 / r_w}; \quad (4.7)$$

$$r_0 = 0.28 \frac{\sqrt{\sqrt{k_y/k_x}(\Delta x)^2 + \sqrt{k_x/k_y}(\Delta y)^2}}{\sqrt[4]{k_y/k_x} + \sqrt[4]{k_x/k_y}}. \quad (4.8)$$

Выражения (4.4), (4.6), (4.8) получены для отдельно стоящей скважины, т. е. в предположении, что другие скважины и границы пласта достаточно удалены и не влияют на характер фильтрации вблизи нее. Практически это обозначает, что между соседними скважинами должно быть не менее 10 ячеек, а между скважиной и ближайшей границей моделируемой области – не менее 5 ячеек [30,35,53].

## 4.2. Моделирование горизонтальных скважин и трещин гидравлического разрыва

Для моделирования горизонтальной скважины, направленной вдоль одной из осей  $x$  или  $y$ , применимы выражения (4.7), (4.8), где  $z$  заменяется на  $x$  или  $y$  в соответствии с направлением ствола скважины, и наоборот. Допустим, что скважина направлена вдоль оси  $y$ . Ограничения в использовании представленных зависимостей для горизонтальных скважин связаны с большой разницей в размерах сеточных блоков  $\Delta z$  и  $\Delta x$ . Выражение (4.8) получено в предположении, что фильтрационные потоки почти равномерно распределены вокруг сеточного блока, содержащего скважину. Большие различия в размерах сеточных блоков в направлениях, перпендикулярных оси скважины,  $\Delta z$  и  $\Delta x$ , приводят к неравномерности распределения потока. Если размер блоков вдоль основного направления потока, которое в рассматриваемом случае совпадает с направлением оси  $x$ , намного больше, т. е.  $\Delta x \gg \Delta z$ , то истинное значение  $r_0$  должно быть выше, чем определяемое выражением (4.8). Этот случай зачастую имеет место при моделировании горизонтальных скважин. Показано, что выражение для  $r_0$ , аналогичное (4.8), в котором  $y$  заменяется на  $z$ , имеет по-

грешность до 10% при  $\frac{\Delta x}{\Delta z} \sqrt{\frac{k_z}{k_x}} \leq 0.9N_1$ , где  $N_1$  – количество сеточных

блоков до ближайшей границы (кровли или подошвы пласта) [54]. Если это неравенство не выполняется, то для вычисления эффективного радиуса горизонтальной скважины необходимо применять более сложные формулы [37].

Использование модели скважины вида (4.7), (4.8) позволяет рассчитать эквивалентный радиус блока  $r_0$  и установить связь в численной модели между дебитом скважины  $Q_0$  и забойным давлением  $p_w$ . Уравнение (4.7) часто представляют в виде

$$Q_0 = \frac{WI}{\mu} (p_0 - p_w), \quad WI = \frac{2\pi \sqrt{k_x k_y} \Delta z}{\ln(r_0/r_w) + s}. \quad (4.9)$$

Здесь  $WI$  – коэффициент продуктивности скважины, который не зависит от свойств жидкости, а определяется только свойствами пласта и геометрией системы пласт – скважина. В выражении (4.9)  $r_w$  – геометрический радиус скважины,  $s = \ln(r_w/r_w')$  – скин-фактор, который определяется отношением геометрического радиуса скважины к приведенному и учитывает несовершенство скважины по характеру и степени вскрытия, загрязнение призабойной зоны скважины, применение методов интенсификации скважин (кислотные обработки, глубокая перфорация и т. п.). Исключение составляет такой метод интенсификации, как гидравлический разрыв пласта. Это связано с тем, что выражения (4.7), (4.9) выводились в предположении  $r_0 \gg r_w$ , а при гидравлическом разрыве это условие нарушается, так как в пласте вблизи скважины создаются искусственные трещины, протяженность которых может составлять десятки и сотни метров, и тем самым существенно увеличивается приведенный радиус скважины.

Модель скважины, пересеченной трещиной гидравлического разрыва, также может быть построена путем сопряжения конечно-разностной аппроксимации течения в пласте и аналитической модели течения в окрестности трещины [13]. Для простоты рассматривается изотропный пласт. Предполагается, что трещина вертикальная (параллельная стволу скважины), симметричная относительно оси скважины. Уравнение (4.2) решается совместно с уравнением, определяющим распределение давления вокруг трещины [13]. В простейшем случае, когда отношение проницаемости трещины к проницаемости пласта стремится к бесконечности, а ширина трещины пренебрежимо мала по сравнению с ее длиной, распределение давления вокруг трещины определяется выражением [29]:

$$Q_0 = \frac{2\pi k \Delta z}{\mu} \frac{p - p_w}{P(Z)}, \quad P(Z) = \operatorname{Re} \left( \ln \left[ Z + \sqrt{\frac{Z^2}{f^2} - 1} \right] \right). \quad (4.10)$$

Здесь  $f$  – полудлина трещины (расстояние от оси скважины до одного из концов трещины),  $p$  – давление в точке  $Z = x + iy$  в системе координат, связанной с центром трещины, направленной вдоль оси  $x$ . Предполагается, что  $f \gg r_w$ .

Рассматриваются два подхода: 1) трещина моделируется как совокупность стоков (источников), расположенных по одному в каждом расчетном блоке, через который она проходит; при этом дебит скважины определяется суммированием дебитов отдельных стоков; 2) те-

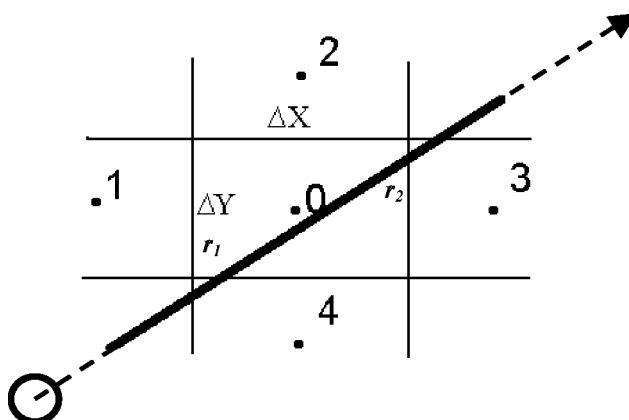
чение в трещине моделируется численно и предполагается одно- или двухмерным соответственно при двух- и трехмерном моделировании пласта; при этом считается, что в окрестности скважины структура течения достаточно хорошо описывается аналитическим решением типа (4.10), на основе которого выводится формула притока.

В общем случае трещина проходит через несколько расчетных ячеек и произвольно ориентирована по отношению к разностной сетке, рис. 4.2. Пусть  $r_{1,2}$  – расстояния границ ячейки от центра трещины, отсчитываемые вдоль оси трещины. Часть потока  $q$  из пласта в трещину, приходящаяся на данную ячейку, определяется выражением:

$$q = 2 \int_{r_1}^{r_2} v_n ds = \frac{Q_0}{\pi} (\Psi(r_1) - \Psi(r_2)); \quad (4.11)$$

$$\Psi(r_i) = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{f^2 - r_i^2}}{r_i}, \quad \Psi(r_w) = \frac{\pi}{2}.$$

Здесь  $v_n$  – нормальная к границе трещины составляющая скорости потока,  $s$  – направление касательной.



**Рис. 4.2. Трещина гидравлического разрыва в сеточной модели.**

Рассмотрим сначала метод моделирования трещины как совокупности стоков. Конечно-разностная аппроксимация уравнения материального баланса для ячейки, через которую проходит трещина, аналогична (4.2):

$$\frac{k\Delta z}{\mu} \sum_{i=1}^4 a_i (p_i - p_0) - q = 0. \quad (4.12)$$

Из уравнений (4.10) – (4.12) имеем:

для ячейки, в которой расположен центр трещины (сток)

$$q = \frac{k\Delta z}{\mu} \frac{2(\pi - \Psi(r_1) - \Psi(r_2)) \sum_{i=1}^4 a_i (p_0 - p_w)}{\sum_{i=1}^4 a_i P(Z_i) - 2(\pi - \Psi(r_1) - \Psi(r_2))}; \quad (4.13)$$

для любой другой ячейки, через которую проходит трещина

$$q = \frac{k\Delta z}{\mu} \frac{2(\Psi(r_1) - \Psi(r_2)) \sum_{i=1}^4 a_i (p_0 - p_w)}{\sum_{i=1}^4 a_i P(Z_i) - 2(\Psi(r_1) - \Psi(r_2))}.$$

Здесь  $Z_i$  – комплексная координата  $i$ -ого узла в системе координат, связанной с трещиной;  $r_1, r_2$  – расстояния точек пересечения трещины с границами ячейки от центра трещины. Если трещина заканчивается внутри ячейки, то  $r_2 = f$ .

Заметим, что если трещина отсутствует, то  $P(Z_i) = \ln|Z_i|/r_w$ ,  $\Psi(r_{1,2}) = 0$  и формула (4.13) совпадает с (4.4), (4.5).

Рассмотрим теперь второй подход к моделированию трещин, при котором течение вдоль трещины и обмен потоками с пластом рассчитываются конечно-разностными методами. Учитывается пропускная способность трещины, определяемая ее раскрытием (ширина)  $w$  и проницаемостью  $k_f$ . Если не учитывается заполнитель трещины, поддерживающий ее в раскрытом состоянии, то  $k_f = 10^{-8} w^2 / 12$  [2]. Предполагается, что большая ось трещины направлена вдоль оси  $x$  разностной сетки, центр трещины находится в узле разностной сетки. Формула притока вводится только для ячейки, содержащей центр трещины. Уравнение материального баланса для этой ячейки имеет вид:

$$\frac{k\Delta z}{\mu} \sum_{i=1}^4 c_i (p_i - p_0) - Q_0 = 0;$$

$$c_{1,3} = a_{1,3} \left( 1 + \frac{w k_f}{\Delta y k} \right), \quad c_{2,4} = a_{2,4}.$$

Аналогично (4.13) получим формулу притока:

$$Q_0 = \frac{k\Delta z}{\mu} \frac{2\pi \sum_{i=1}^4 c_i (p_0 - p_w)}{\sum_{i=1}^4 c_i P(Z_i) - 2\pi}. \quad (4.14)$$

Если вся трещина содержится внутри одной ячейки, то  $c_{1,3} = a_{1,3}$ ,  $r_{1,2} = f$  и формулы (4.13), (4.14) совпадают.

При использовании второго подхода течение внутри трещины моделируется отдельно. Предполагается, что оно является одномерным и направлено вдоль трещины к скважине. Ширина трещины в численной модели принимается постоянной, равной  $w$ . Объем трещины внутри каждой ячейки пласта пренебрежимо мал по сравнению с объемом ячейки. Узлы разностной сетки модели трещины совпадают с узлами сетки модели пласта. Предполагается, что для каждого узла давления в трещине и в пласте одинаковые [14]. Это предположение позволяет замкнуть систему уравнений неразрывности и движения для пласта и для трещины и вычислить перетоки  $q$  между ними в каждой ячейке. Сеточные блоки в трещине вдоль вертикального направления  $z$  не взаимодействуют. Предполагается, что если трещина проходит через добывающую скважину, то флюиды в нее только втекают, при этом потоки направлены вдоль трещины к скважине. Если трещина проходит через нагнетательную скважину, то потоки направлены от скважины; в этом случае жидкости только вытекают в пласт.

#### **4.3. Обобщение формул притока на случай многофазной фильтрации**

В случае многофазной фильтрации приток каждой фазы в скважину определяется с учетом (4.9) и обобщенного закона Дарси:

$$Q_{0l} = WI\lambda_l(p_{0l} - p_w), \quad \lambda_l = \frac{k_{rl}}{\mu_l B_l}, \quad l = o, w, g. \quad (4.15)$$

Здесь предполагается, что дебиты определены в стандартных условиях, поэтому фазовая подвижность  $\lambda_l$  зависит от объемного коэффициента  $B_l$ .

На скважине может быть задан либо дебит одной фазы (например, нефти), либо дебит жидкости (нефть+вода), либо суммарный дебит (нефть+вода+газ). Если задан дебит нефти, то дебиты воды и газа определяются выражениями:

$$Q_{0l} = \frac{\lambda_l(p_{0l} - p_w)}{\lambda_o(p_{0o} - p_w)} Q_{0o}, \quad l = w, g.$$

При заданном дебите жидкости

$$Q_{0L} = WI[\lambda_o(p_{0o} - p_w) + \lambda_w(p_{0w} - p_w)] \quad (4.16)$$

дебиты фаз вычисляются так:

$$Q_{0l} = \frac{\lambda_l(p_{0l} - p_w)}{\lambda_o(p_{0o} - p_w) + \lambda_w(p_{0w} - p_w)} Q_{0L}, \quad l = o, w, g.$$

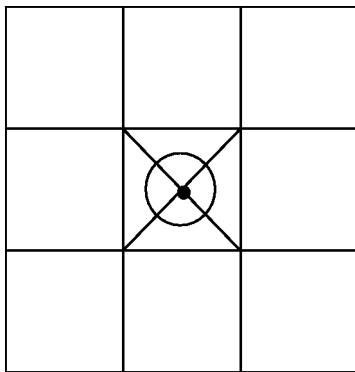
Если задан суммарный расход

$$Q_{0T} = WI[\lambda_o(p_{0o} - p_w) + \lambda_w(p_{0w} - p_w) + \lambda_g(p_{0g} - p_w)], \quad (4.17)$$

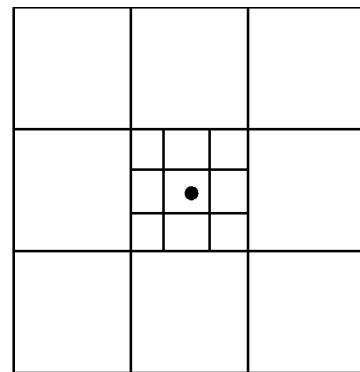
дебиты фаз определяются выражениями:

$$Q_{0l} = \frac{\lambda_l(p_{0l} - p_w)}{\sum_l \lambda_l(p_{0l} - p_w)} Q_{0T}, \quad l = o, w, g.$$

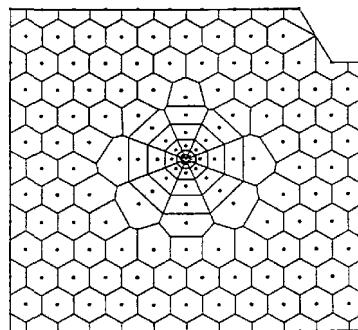
Решая соответствующее уравнение (4.15) – (4.17) совместно с уравнениями фильтрации, при заданном дебите можно вычислить неизвестное забойное давление  $p_w$ .



Смешанная сетка



Прямоугольная сетка



Полигоны Вороного

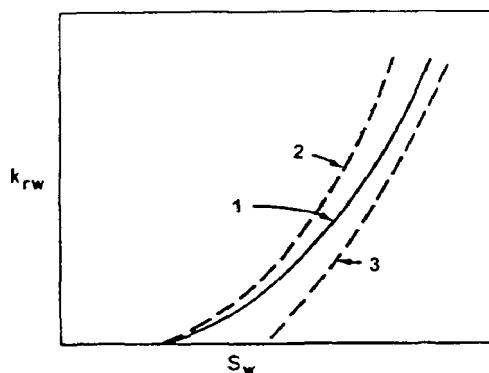
**Рис. 4.3. Локальное измельчение сетки.**

Подвижность фазы  $\lambda_l$  зависит от давления и насыщенности в ячейке, в которой расположена скважина. Если размер ячейки невелик, то соответствующие значения в ячейке и вблизи скважины различаются незначительно. Обычно сеточные блоки достаточно крупные, поэтому вычисление подвижности вблизи скважины с использованием средней насыщенности и среднего давления в блоке может приводить к большим ошибкам. Необходимо учитывать локальные эффек-

ты, которые могут быть связаны, например, с конусообразованием или с выделением газа при снижении забойного давления ниже давления насыщения. Основными средствами учета этих эффектов является локальное измельчение сетки или введение специальных модифицированных фазовых проницаемостей для скважин.

Различные варианты локального измельчения сетки вблизи скважин показаны на рис. 4.3 [35].

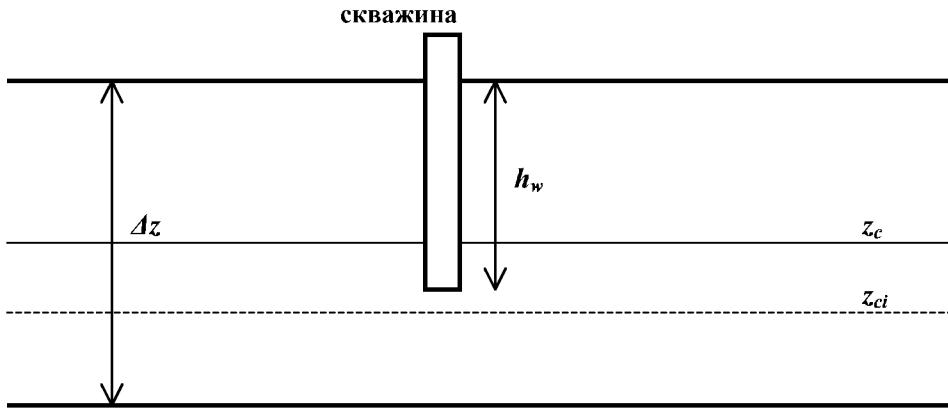
Модифицированные фазовые проницаемости для скважин могут вводиться для учета разнообразных эффектов. Например, если вода подходит к скважине по латеральному направлению от боковых границ сеточного блока, то фазовая проницаемость воды для скважины должна быть ниже, чем для сеточного блока, ее содержащего. Если в добывающей скважине рост обводненности связан с подъемом воды снизу, то фазовая проницаемость воды для скважины, наоборот, будет выше, чем для сеточного блока, рис. 4.4 [35]. Таким образом, посредством введения модифицированных фазовых проницаемостей для скважин, расположенных в зоне газонефтяного (ГНК) или водонефтяного (ВНК) контакта, может быть учтено конусообразование. При определении модифицированных фазовых проницаемостей можно воспользоваться гипотезой о равновесном распределении флюидов под действием капиллярных и гравитационных сил (глава 6). В этом случае модифицированная фазовая проницаемость для скважины в отличие от фазовой проницаемости для сеточного блока осредняется не по толщине сеточного блока  $\Delta z$ , а по длине перфорированного интервала  $h_w$ , рис. 4.5.



**Рис. 4.4. Модифицированная фазовая проницаемость воды для скважины (2, 3), отличная от фазовой проницаемости для сеточного блока (1):**

**2 – образование конуса подошвенной воды**

**3 – вытеснение по латерали от боковых границ**



**Рис. 4.5. Гравитационное равновесие нефти и воды вблизи скважины ( $z_{ci}$  и  $z_c$  – начальное и текущее положения водонефтяного контакта).**

Таким образом, модифицированные фазовые проницаемости для добывающих скважин определяются в зависимости от насыщенности в сеточном блоке. В случае нагнетательной скважины определение фазовых подвижностей «против потока» может привести к ошибкам. Суммарный объем флюидов, поступающих через скважину, должен быть сбалансирован объемом вытекающих из сеточного блока жидкостей, поэтому

$$\left( \sum_l \frac{k_{rl}}{\mu_l} \right)_{inj} = \sum_l \frac{k_{rl}}{\mu_l}.$$

Здесь индекс  $inj$  относится к нагнетательной скважине, а в правой части уравнения стоят подвижности фаз в пласте. Например, при закачке воды в нефтяной пласт относительная фазовая проницаемость воды для скважины должна определяться с учетом насыщенности, связанной водой и остаточной нефтью, и будет отлична от единицы.

При моделировании трещин гидравлического разрыва фазовые проницаемости в трещине обычно принимаются равными соответствующим насыщенностям, т. к. считается, что действием капиллярных сил в очень крупных порах можно пренебречь. Кроме того, предполагается, что в трещине насыщенности связанной водой, остаточной нефтью и защемленным газом равны нулю.

#### 4.4. Моделирование скважин, вскрывающих несколько слоев

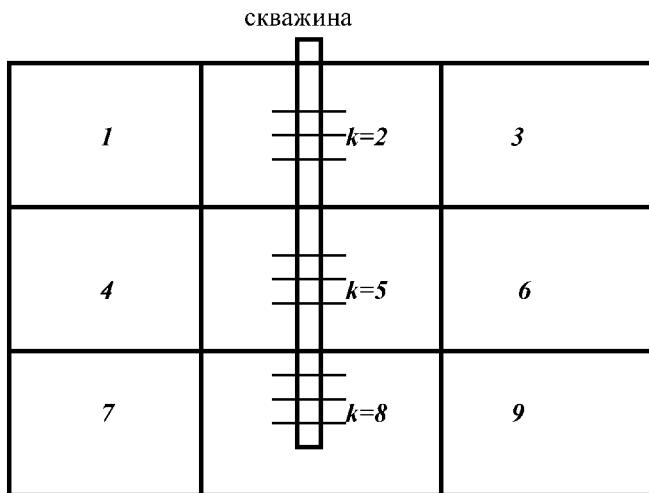
При использовании трехмерных моделей или двумерных моделей в вертикальной плоскости часто возникает ситуация, когда моде-

лируется скважина, вскрывающая несколько слоев. Тогда дебит фазы  $l$  вычисляется по формуле

$$Q_l = \sum_k WI_k \lambda_{lk} (p_{lk} - p_{wk}), \quad l=o,w,g. \quad (4.18)$$

Здесь суммирование ведется по всем ячейкам, вскрытых скважиной,  $p_{wk}$  – забойное давление в ячейке  $k$ , рис. 4.6. Суммарный дебит определяется как

$$Q = \sum_l \sum_k WI_k \lambda_{lk} (p_{lk} - p_{wk}). \quad (4.19)$$



**Рис. 4.6. Скважина, вскрывающая несколько слоев.**

Часто капиллярными силами пренебрегают, тогда  $p_{lk} = p_k$  и формула (4.19) принимает вид:

$$Q = \sum_l \sum_k WI_k \lambda_{lk} (p_k - p_{wk}). \quad (4.20)$$

Если в качестве граничного условия на скважине задается забойное давление  $p_w^0$ , обычно указывается глубина, которой оно соответствует, например, кровля пласта  $D^0$ . Тогда возникает задача определения значений забойного давления  $p_{wk}$  для каждого слоя сеточной области. В простейшем случае предполагается, что забойное давление распределено по гидростатическому закону:

$$p_{wk} = p_w^0 + \bar{\gamma} (D_k - D^0), \quad \bar{\gamma} = \frac{\sum_l \sum_k \gamma_{lk} Q_{lk}}{\sum_l \sum_k Q_{lk}}. \quad (4.21)$$

Здесь  $D_k$  – глубина соответствующей ячейки,  $\gamma_{lk}$  – удельный вес фазы на этой глубине,  $\bar{\gamma}$  – средний удельный вес смеси в стволе скважины.

Вместо гипотезы о гидростатическом распределении давления в стволе скважины при расчете дебитов из отдельных слоев иногда предполагают постоянство депрессии  $p_k - p_{wk} = \Delta p = const$ . В этом случае дебит каждого слоя пропорционален  $WI_k \lambda_{lk}$ . Недостатком такого подхода является неучет распределения давления в стволе скважины. Поэтому никак не могут быть смоделированы такие явления, как внутрискважинные перетоки флюидов из одного изолированного слоя в другой.

Подстановка выражений (4.21) в (4.18) – (4.20) позволяет выразить дебит скважины через заданное забойное давление. Например, выражение для фазового дебита (4.18) примет вид:

$$Q_l = \sum_k WI_k \lambda_{lk} [p_{lk} - p_w^0 - \bar{\gamma}(D_k - D^0)]. \quad (4.22)$$

Причем для подстановки в уравнения фильтрации используются отдельные слагаемые выражения (4.22), соответствующие дебиту одной фазы, приходящемуся на один вскрытый сеточный блок.

Если в качестве граничного условия задано не забойное давление, а дебит одной из фаз, например, нефти, или суммарный дебит жидкости, то неизвестное забойное давление  $p_w^0$  можно выразить через дебит, используя зависимость вида (4.22).

Для повышения устойчивости вычислений слагаемые, зависящие от насыщенности и давления на скважине, вычисляются неявно не только в полностью неявных моделях, но и при использовании IMPES-метода.

#### **4.5. Моделирование технологических ограничений при работе скважин**

Граничные условия на скважинах обычно задаются в виде забойного давления либо дебита одной или нескольких фаз (раздел 1.6). Помимо этих условий могут быть заданы некоторые дополнительные ограничения, которые позволяют смоделировать автоматическое отключение скважины или переход от одного вида граничного условия к другому. Чаще всего эти ограничения учитываются при прогнозировании технологических показателей разработки. Ограничения могут быть заданы для каждой скважины и для групп скважин [45, 50].

В качестве ограничений для одной скважины обычно задается:

- предельная обводненность;
- предельный газовый фактор;
- максимально допустимый дебит нефти, жидкости или газа;
- минимально допустимый дебит нефти или газа;
- максимально допустимый расход нагнетательных скважин;
- минимально допустимое забойное давление (для добывающих скважин);
- максимально допустимое забойное давление (для нагнетательных скважин);
- максимально допустимая депрессия на пласт.

Эти ограничения работают по-разному. При достижении предельной обводненности, предельного газового фактора или минимально допустимого дебита нефти или газа скважина должна быть автоматически отключена. Ограничение на максимально допустимый дебит обычно используется при задании граничного условия в виде забойного давления. В этом случае при превышении дебитом заданного значения забойное давление на добывающей скважине автоматически повышается до такого значения, при котором будет выполнено ограничение. Аналогично, в случае нагнетательной скважины забойное давление снижается до такой величины, при которой расход не превышает заданного значения. Ограничение на максимально допустимую депрессию или минимально допустимое забойное давление для добывающих скважин и максимально допустимое давление нагнетания используется при задании граничного условия в виде дебита или расхода. В этом случае при нарушении ограничения дебит или расход автоматически снижаются до необходимого уровня.

Ограничения для группы скважин обычно задаются в виде:

- предельной обводненности,
- предельного газового фактора,
- максимально допустимого дебита нефти, жидкости или газа,
- максимально допустимого расхода нагнетательных скважин.

Соблюдение этих ограничений достигается такими же средствами, как и для одной скважины.

## Глава 5

# ИСХОДНАЯ ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ

При построении математической модели участка, пласта или месторождения в целом используется очень большой объем информации о пласте, насыщающих его флюидах, работе скважин [15,50].

Основные свойства пластовых флюидов (вязкости, плотности, объемные коэффициенты, растворимости) изменяются в зависимости от давления и температуры. Характерный вид наиболее часто используемых при моделировании зависимостей представлен в разделе 1.4. Обычно они определяются в ходе лабораторных исследований проб пластовых жидкостей. Результаты представляются либо в виде таблиц, либо в виде функциональных зависимостей известного вида, например, полиномов, степенных функций и т. п. В последнем случае задаются полученные в результате экспериментов коэффициенты и показатели степени, определяющие конкретный вид зависимостей. При задании исходных данных в виде таблиц в ходе моделирования необходимые значения параметров отыскиваются путем интерполяции по табличным значениям. При моделировании крупных или многопластовых объектов свойства жидкостей могут изменяться в пределах моделируемой области. Тогда модель объекта разбивается на отдельные зоны, для каждой из которых свойства флюидов задаются отдельно. Поскольку модель объекта представляет собой совокупность сеточных блоков, каждому из которых приписывается то или иное значение каждой переменной, для выделения зон вводится дополнительный целочисленный параметр, значение которого для каждого блока соответствует номеру зоны.

Показатели работы скважин постоянно регистрируются и вносятся в специальную базу данных, которая используется при моделировании. Записывается тип скважины (добывающая или нагнетательная), состояние (работает или не работает), дебит или расход каждой фазы, забойное и пластовое давление. Часть этих данных учитывается при моделировании в качестве граничных условий, а остальные служат для проверки адекватности построенной модели. Обычно изменяющиеся во времени граничные условия задаются с определенным шагом (например, один год), тогда перед вводом в модель эти показатели осредняются по времени.

Наиболее серьезную проблему представляет задание свойств пласта, поскольку исходная информация об этих параметрах всегда очень ограничена. После построения трехмерной геометрической модели резервуара на основе интерпретации сейсмики эта модель наполняется информацией о распределении основных геологофизических характеристик пласта (пористости, проницаемости, насыщенности и др.) по данным геофизических и гидродинамических исследований скважин и изучения керна с использованием детерминистических или геолого-статистических методов. Масштаб керна определяется сантиметрами. Геофизические измерения в скважинах, как правило, имеют радиус проникновения в пласт порядка нескольких метров. О строении и свойствах межскважинного пространства можно судить только по данным отраженных сейсмических волн и вертикального сейсмического профилирования, а также по результатам гидродинамических исследований пласта. Однако по данным сейсмики не могут быть непосредственно определены свойства породы и пласта. Результаты закачки трассеров, гидропрослушивания и т. п. позволяют лишь косвенно оценивать осредненные значения фильтрационно-емкостных параметров, но не могут дать детальной картины распределения свойств. Поэтому при задании свойств пласта для каждого расчетного блока, площадь сечения которого в горизонтальной плоскости определяется сотнями квадратных метров при толщине в несколько метров, необходимо, во-первых, решать проблему интерполяции и экстраполяции данных измерений по скважинам на межскважинное пространство, а во-вторых, проблему усреднения или масштабирования данных, полученных на масштабах керна и геофизических исследований, на масштаб расчетного блока. Проблеме осреднения и масштабирования данных посвящена глава 7 и частично глава 6. В данной главе рассматриваются основные методы определения параметров пласта.

## **5.1. Определение геометрических размеров пласта**

Наиболее современные методы построения геометрической модели залежи основаны на обработке результатов трехмерной сейсмики. Эти данные увязываются с результатами бурения и геофизических исследований скважин. В результате определяется местоположение отдельных структурных образований, формирующих пласт, границ залежей, тектонических нарушений. В модель вводятся абсолютные отметки кровли и подошвы пласта и отдельных слоев, соответствующие общие и эффективные толщины, песчанистость – отношение эффективной толщины к общей толщине пласта. Эффективная толщина представляет собой толщину коллектора, содержащего и фильтрующего пластовые жидкости, в отличие от

общей толщины, включающей в себя также глинистые прослои. При подсчете запасов вводится также эффективная нефтенасыщенная толщина.

Все эти данные задаются в виде числовых массивов. Размерность массивов определяется количеством сеточных блоков. Каждому блоку расчетной модели приписываются любые два из трех параметров: отметка кровли, отметка подошвы или толщина. Если моделируемые слои не разделены перемычками, то кровля нижележащего слоя может совпадать с подошвой вышележащего. Кроме того, для каждого блока задается значение коэффициента песчанистости. Этот параметр подобно пористости ограничивает поровый объем блока.

## 5.2. Данные о пористости

Для определения пористости используют, в основном, геофизические данные и результаты лабораторного исследования керна [2,15].

Для оценки пористости применяются такие геофизические методы, как метод сопротивлений, акустический и нейтронный. Методом сопротивлений пористость определяется по отношению удельного электрического сопротивления водонасыщенного пласта к удельному сопротивлению насыщающей его воды. При использовании акустического метода регистрируется время прохождения звука через породу, которое зависит от содержания флюидов в поровом пространстве.

При измерении пористости в лаборатории обычно определяют любые два из трех параметров: общий объем образца  $V_{\text{обр}}$ , объем пор образца  $V_{\text{пор}}$  и объем зерен породы  $V_{\text{зер}}$ . Полная пористость

$$m = \frac{V_{\text{пор}}}{V_{\text{обр}}} = \frac{V_{\text{обр}} - V_{\text{зер}}}{V_{\text{обр}}}$$

может быть на 5 – 6% выше открытой пористости, которая характеризует отношение суммарного объема открытых сообщающихся пор к общему объему образца. Открытая пористость коллекторов нефти и газа может достигать 35%, составляя по большинству залежей 12 – 25%.

Важным параметром для определения порового объема при моделировании динамических процессов является коэффициент сжимаемости породы, который характеризует изменение пористости в зависимости от давления (см. (1.25)). Этот коэффициент обычно определяют при лабораторном исследовании керна или используют известные из литературы зависимости сжимаемости от пористости или от вертикального горного давления. Особенно актуальным учет

сжимаемости породы становится при моделировании трещиноватых или трещиново-поровых коллекторов, т. к. сжимаемость трещин может превышать сжимаемость пор на один-два порядка.

При определении пористости пласта можно руководствоваться также корреляционными соотношениями, связывающими пористость с глубиной залегания пласта для различных типов породы и обусловленными естественным уплотнением породы [15].

При интерпретации результаты различных видов исследований должны быть согласованы.

### **5.3. Информация о насыщенности и капиллярном давлении**

Источниками информации о насыщенности пласта являются исследования керна и геофизические исследования, в частности результаты электрометрии скважин [2,50]. По керну начальная нефтенасыщенность и насыщенность связанной водой могут быть определены путем взвешивания насыщенного и экстрагированного образца при известной пористости и плотностях флюидов. Но основным лабораторным методом является измерение капиллярного давления на образцах, отобранных при вскрытии раствором на нефтяной основе с тем, чтобы минимизировать ошибки, связанные с изменением смачиваемости. Данные капиллярного давления увязываются с результатами электрометрии скважин, когда по замерам электрического сопротивления определяется характер насыщения пласта.

В модель обычно вводятся абсолютные отметки газонефтяного (ГНК) и водонефтяного (ВНК) контактов. Предполагается, что на поверхности контакта соответствующее капиллярное давление равно нулю. Часто при моделировании пренебрегают переходной зоной и задают водонасыщенность выше ВНК, равной насыщенности связанной водой. Аналогично, выше ГНК нефтенасыщенность задается равной остаточной. Если переходная зона учитывается, то важно качественно определить функцию капиллярного давления, т. к. в этом случае по виду этой зависимости определяется начальное распределение насыщенности по толщине пласта из условия капиллярно-гравитационного равновесия.

В некоторых случаях при задании начальной насыщенности руководствуются корреляционными зависимостями между пористостью, насыщенностью и кривыми капиллярного давления, между абсолютной проницаемостью и насыщенностью связанной водой и т. п., учитывая при этом результаты независимых определений пористости и проницаемости.

Данные о капиллярном давлении обычно вводят в виде таблиц в зависимости от насыщенности, причем при численном моделировании

задают конечное значение капиллярного давления на границе нефть-вода при насыщенности связанный водой и на границе нефть-газ при остаточной нефтенасыщенности.

#### 5.4. Данные об абсолютной проницаемости

Проницаемость является наиболее изменчивым свойством коллектора, существенно влияющим на фильтрационные процессы и уровни добычи жидкости. Проницаемость определяется лабораторным путем по образцам породы, отобранным из пласта, либо по результатам гидродинамических исследований скважин. Если отсутствуют данные, полученные этими методами, пользуются регрессионным анализом и определяют проницаемость в зависимости от других известных параметров (например, пористости), причем коэффициенты уравнения регрессии находят по имеющейся информации для других областей пласта со сходными характеристиками.

Лабораторные измерения проницаемости основаны на измерении расхода  $Q$  жидкости или газа через образец пористой среды при заданном перепаде давления  $\Delta p$ . Чтобы убедиться, что замеры производятся при ламинарном режиме фильтрации, можно задать несколько перепадов давления и построить график  $Q = Q(\Delta p)$ , который в этом случае является прямой линией, проходящей через начало координат. Искривление графика указывает на начало турбулентного режима. По наклону прямолинейного участка находят проницаемость  $k$ :

$$Q = \frac{kS}{\mu} \frac{\Delta p}{L}.$$

Здесь вязкость жидкости  $\mu$ , площадь поперечного сечения  $S$  и длина  $L$  образца являются известными параметрами. При интерпретации результатов лабораторных измерений и их использовании при моделировании необходимо учитывать, что при извлечении керна из скважины на поверхность все силы, действующие на образец породы, снимаются, что ведет к его расширению и изменению геометрии поровых каналов. Уменьшение проницаемости в пластовых условиях под действием давления вышележащих пород может достигать в некоторых случаях 60% [2].

Размеры кернов определяются десятками сантиметров, поэтому для суждения о распределении проницаемости в межскважинном пространстве данных лабораторных измерений недостаточно. Наиболее достоверную информацию об эффективной проницаемости пласта на масштабах, сопоставимых с расстояниями между

скважинами, можно получить по результатам гидродинамических исследований скважин и гидропрослушивания (пьезометрии). В этом случае для определения параметров пласта решается обратная задача, и проницаемость определяется по данным поведения давления на упругом режиме фильтрации. Методы интерпретации результатов гидродинамических исследований основаны на решении уравнения пьезопроводности (1.26) [5,29,44]

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.1)$$

относительно  $p = p(r, t)$  с начальными и краевыми условиями

$$p(r, 0) = p_i, \quad Q(0, t) = \frac{2\pi kh}{\mu} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=0} = Q_0 B : \quad (5.2)$$

Здесь  $r$  – расстояние от оси скважины,  $p_i$  – начальное давление,  $Q_0$  – дебит скважины в нормальных условиях. Задача (5.1), (5.2) допускает автомодельное решение

$$p = p(\xi), \quad \xi = r/\sqrt{t}.$$

Это решение имеет вид:

$$p = p_i + \frac{Q_0 \mu B}{4\pi kh} \operatorname{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\eta t}\right);$$

$$-\operatorname{Ei}(-x) = \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u} du = -\ln x - C - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n n!}.$$
(5.3)

Здесь  $\operatorname{Ei}(x)$  – интегральная показательная функция,  $C=0.5772\dots$  – постоянная Эйлера. При  $x = \frac{r^2}{4\eta t} < 0.1$ , т. е. при больших  $t$  либо малых  $r$ , приближенно

$$-\operatorname{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\eta t}\right) = \ln \frac{4\eta t}{r^2} - C = \ln \frac{2.25\eta t}{r^2}$$

и, следовательно,

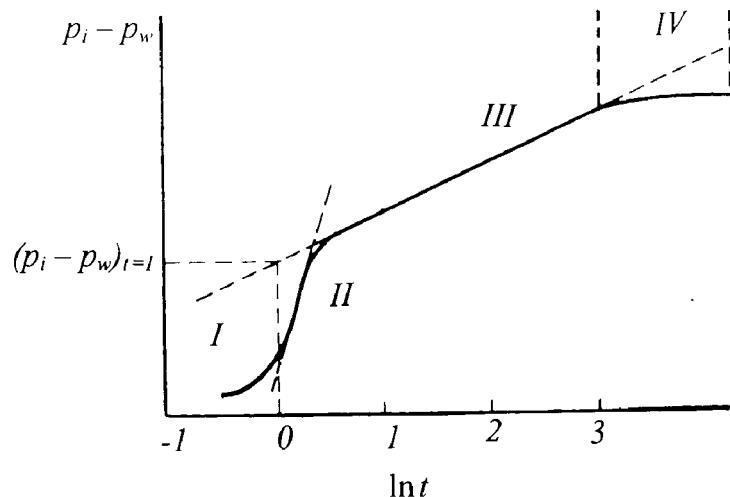
$$p = p_i - \frac{Q_0 \mu B}{4\pi kh} \ln \frac{2.25\eta t}{r^2}. \quad (5.4)$$

Выражение (5.4) описывает, в частности, снижение забойного давления  $p_w$  от начального пластового  $p_i$  при пуске скважины с постоянным дебитом  $Q_0$  в неограниченном пласте:

$$p_i - p_w = \frac{Q_0 \mu B}{4\pi kh} \ln \frac{2.25\eta t}{r_w^2} = \frac{Q_0 \mu B}{4\pi kh} \ln t + \frac{Q_0 \mu B}{4\pi kh} \ln \frac{2.25\eta}{r_w^2}, \quad p_w = p(r_w', t). \quad (5.5)$$

Здесь  $r_w'$  – приведенный радиус скважины, значение которого определяется не только характером и степенью вскрытия пласта, но и

дополнительным фильтрационным сопротивлением призабойной зоны (скин-эффект). График зависимости  $(p_i - p_w)$  от  $\ln t$  в полулогарифмических координатах, согласно (5.5), представляет собой прямую линию, по угловому коэффициенту которой при известной толщине пласта, дебите, объемном коэффициенте и вязкости жидкости может быть найдена абсолютная проницаемость. Координата точки пересечения прямой с осью  $\ln t = 0$  при известном коэффициенте пьезопроводности может быть использована для определения приведенного радиуса скважины и оценки скин-эффекта. Реальные зависимости  $(p_i - p_w)$  от  $\ln t$  имеют характерный вид, представленный на рис. 5.1. На графике выделяются четыре режима фильтрации: начальный, связанный с эффектами накопления жидкости в стволе скважины, переходный, собственно прямая полулогарифмическая зависимость (5.5) и поздний, на котором отклонение от зависимости (5.5) обусловлено влиянием границ пласта.



**Рис. 5.1. Режимы фильтрации при пуске скважины с постоянным дебитом:**

**I – начальный, связанный с накоплением жидкости в стволе скважины; II – переходный; III – основной; IV – поздний, обусловленный влиянием границ пласта.**

Выражение (5.5) описывает изменение давления при пуске скважины. Гидродинамические исследования скважин чаще проводят при остановке скважины. Решение уравнения (5.1), описывающее изменение давления в этом случае, может быть получено методом суперпозиции. Изменение дебита скважины с величины  $Q_0$  на  $Q_1$  в момент времени  $t_1$  моделируется включением второго стока (источника) с дебитом  $-(Q_0 - Q_1)$ , находящегося в той же точке. Результирующее распределение давления определяется суммированием эффектов, вызванных отдельными источниками.

Например, пусть скважина эксплуатировалась перед остановкой довольно долго с дебитом  $Q_0$  и давление достигло псевдоустойчивого состояния. Тогда перед остановкой распределение давления определялось уравнением Лапласа и имело вид:

$$p = p_w + \frac{Q_0 \mu B}{2\pi k h} \ln \frac{r}{r_w}. \quad (5.6)$$

Мгновенная остановка скважины в момент  $t = 0$  имитируется включением источника с дебитом  $-Q_0$ , находящегося в той же точке пласта. Характер восстановления забойного давления определяется в соответствии с (5.4), (5.6) и принципом суперпозиции:

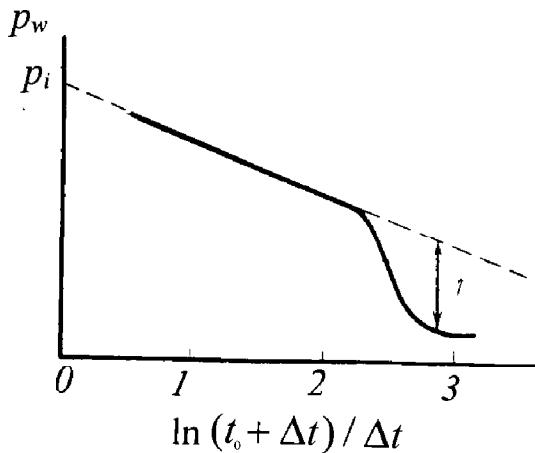
$$\Delta p = p_w(t) - p_w(0) = \frac{Q_0 \mu B}{4\pi k h} \ln t + \frac{Q_0 \mu B}{4\pi k h} \ln \frac{2.25\eta}{r_w^2}. \quad (5.7)$$

По фактическим данным восстановления давления с учетом зависимости (5.7) определяются параметры пласта и скин-эффект аналогично исследованиям падения давления на основе (5.5). Недостатком этого метода является то, что в его основе лежит предположение о том, что перед остановкой скважина эксплуатировалась долго, в результате чего установилось стационарное распределение давления. Другой широко известный метод исследования восстановления давления (метод Хорнера) [15,44] предполагает, что перед остановкой распределение давления в пласте определялось выражением (5.4), а забойное давление – выражением (5.5). Мгновенная остановка скважины в момент  $t = t_0$  эквивалентна появлению дополнительного источника с дебитом  $-Q_0$  в той же точке пласта, в которой расположена скважина. В соответствии с принципом суперпозиции забойное давление определяется выражением:

$$\begin{aligned} p_w &= p_i - \frac{Q_0 \mu B}{4\pi k h} \ln \frac{2.25\eta t}{r_w^2} + \frac{Q_0 \mu B}{4\pi k h} \ln \frac{2.25\eta(t - t_0)}{r_w^2} = \\ &= p_i - \frac{Q_0 \mu B}{4\pi k h} \ln \frac{t_0 + \Delta t}{\Delta t}, \quad t = t_0 + \Delta t \end{aligned} \quad . \quad (5.8)$$

По результатам измерений строится график  $p_w$  от  $\ln \frac{t_0 + \Delta t}{\Delta t}$ .

Начальное давление  $p_i$  определяется в результате экстраполяции при  $\Delta t \rightarrow \infty$  и соответствует точке пересечения графика с осью ординат. Абсолютная проницаемость может быть найдена по угловому коэффициенту прямолинейного участка графика, рис. 5.2.



**Рис. 5.2. Кривая восстановления давления по методу Хорнера  
(1 – отклонение давления, вызванное накоплением жидкости в стволе скважины)**

Более общим методом интерпретации результатов исследования скважин является метод совмещения кривой [15,44]. В основе этого метода лежит решение уравнения упругого режима (5.1) с учетом накопления флюида в стволе скважины, а также геометрической формы пласта. Это уравнение в безразмерных переменных может быть представлено в виде:

$$p_i - p_w(t) = \frac{Q_0 \mu}{4\pi k h} [p_D(t_D, \bar{C}, \text{геометрия}) + s] \quad (5.9)$$

$$p_D = \frac{2\pi k h}{Q_0 \mu} \Delta p, \quad t_D = \frac{\eta t}{r_w^2}, \quad s = 2 \ln \frac{r_w}{r_w}$$

Здесь  $p_D$  и  $t_D$  – безразмерное давление и время,  $s$  – скин-фактор. Параметр  $\bar{C}$  выражает безразмерное накопленное количество жидкости в стволе скважины, которое определяется по начальному

участку кривой восстановления давления как  $\bar{C} = \frac{t_D}{p_D}$ .

Основная идея метода связана с представлением теоретических зависимостей давления от времени (5.9), построенных для различных  $\bar{C}$ ,  $s$  и конфигураций пласта, в двойных логарифмических координатах:

$$\lg p_D = \lg \frac{2\pi k h}{Q_0 \mu B} + \lg(p_i - p_w), \quad \lg t_D = \lg \frac{\eta}{r_w^2} + \lg t.$$

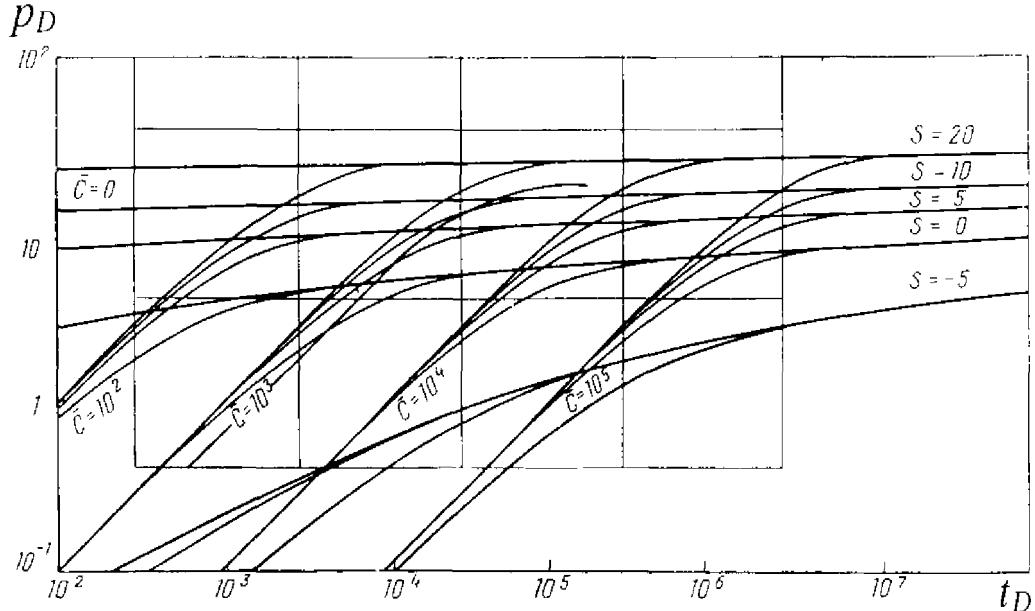
В этом случае графики в размерных и в безразмерных переменных совмещаются один с другим параллельным переносом. Причем параметры пласта определяются по координатам вектора смещения фактической кривой.

Интерпретация результатов исследования восстановления давления осуществляется следующим образом. После представления

исходных данных в виде графика  $\lg(p_i - p_w)$  от  $\lg t$  по начальному участку кривой, соответствующему периоду накопления жидкости в стволе скважины, определяется параметр накопления  $\bar{C}$ , учитывая, что этот участок имеет единичный угловой коэффициент

$$\lg p_D = \lg t_D - \lg \bar{C}.$$

Затем подбирается модельная кривая, с которой фактическая зависимость совмещается наилучшим образом, рис. 5.3. После этого на основе (5.9) определяются параметры пласта и скин-фактор.



**Рис. 5.3. Метод совмещения кривой [15].**

Интерпретация результатов гидродинамических исследований газовых скважин имеет свои отличительные особенности, которые в первую очередь связаны с различиями в физических свойствах газа и нефти и необходимостью использования вместо уравнения пьезопроводности (5.1) уравнения Лейбензона (1.27):

$$\frac{\partial^2 p^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p^2}{\partial r} = \frac{2\mu m}{k} \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Для решения этого нелинейного уравнения обычно применяются численные методы или рассматривается линеаризованное уравнение (1.28):

$$\frac{\partial^2 p^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p^2}{\partial r} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p^2}{\partial t}. \quad (5.10)$$

В случае притока газа начальные и краевые условия (5.2) с учетом (1.23) принимают вид:

$$p(r, 0) = p_i, \quad Q(0, t) = \frac{2\pi k h}{\mu} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=0} = Q_0 \frac{p_{SIC}}{p}$$

или

$$p^2(r,0) = p_i^2, \quad Q_0 P_{STC} = \frac{\pi k h}{\mu} \left( r \frac{\partial p^2}{\partial r} \right)_{r=0}. \quad (5.11)$$

Решение задачи (5.10), (5.11) аналогично (5.4):

$$p^2 = p_i^2 - \frac{Q_0 \mu p_{STC}}{2 \pi k h} \ln \frac{2.25 \bar{\eta} t}{r^2}.$$

Соответственно могут быть преобразованы и выражения (5.5) – (5.8), в которых  $p$  заменяется на  $p^2$ , а  $\frac{Q_0 \mu B}{2 \pi k h}$  – на  $\frac{Q_0 \mu p_{STC}}{\pi k h}$ .

## 5.5. Данные об относительных фазовых проницаемостях

Основными методами определения относительных фазовых проницаемостей являются лабораторные исследования вытеснения флюидов из керна при стационарных либо при нестационарных условиях. Кроме того, относительные проницаемости определяются по промысловым данным, по данным капиллярного давления и по аналогии с использованием опубликованных зависимостей [2].

В опытах по стационарной фильтрации для двухфазной системы (например, нефть – вода) сначала проводится 100%-ое насыщение образца смачивающей фазой. Затем в керн вводятся обе фазы в определенной пропорции и фильтруются до тех пор, пока на выходе не будет получена та же пропорция, что и на входе. При достижении этого условия течение в керне считается установившимся, а насыщенность – постоянной. Насыщенность образца  $s$  определяется одним из известных методов, например, весовым, или путем измерения электрического сопротивления керна, или по балансу объемов нагнетаемых и извлекаемых фаз. Соответствующее значение фазовой проницаемости определяется на основе обобщенного закона Дарси:

$$k_{rl}(s) = \frac{Q_l \mu}{k S \Delta p / L}, \quad l = o, w.$$

Затем пропорцию нагнетаемых фаз меняют таким образом, чтобы часть смачивающей фазы была вытеснена из керна и вновь создались условия стационарной фильтрации. Измерения повторяются до тех пор, пока не будут получены кривые фазовых проницаемостей во всем интервале изменения насыщенности.

Определение относительных фазовых проницаемостей по данным нестационарной фильтрации (в ходе эксперимента по вытеснению из образца одной фазы другой) основано на решении обратной задачи в рамках одномерной модели двухфазной фильтрации Баклея – Леверетта [2,5,33]. В образец, насыщенный

нефтью и связанной водой  $s_{wc}$ , с одного конца с постоянным расходом  $Q$  подается вода, а из выходного сечения вытекают нефть и вода. В ходе опыта регистрируется объем добытой нефти  $V_o$  и суммарный прокачанный объем воды  $V_w$ . Образец считается однородным с известной проницаемостью  $k$ , пористостью  $m$ , длиной  $L$ , площадью поперечного сечения  $S$  и поровым объемом  $V_p = SLm$ .

Пусть  $F$  – доля воды в потоке добываемой продукции (на выходе из образца). Тогда расход нефти через выходное сечение равен  $Q(1-F)$ , поскольку суммарный расход фаз постоянен вдоль образца, а  $1-F$  – доля нефти в потоке добываемой продукции. Учитывая, что  $V_o = \int_0^T Q(1-F)dt$ , а  $V_w = QT$  в любой фиксированный момент времени  $T$ , имеем

$$1-F = \frac{dV_o}{dV_w}. \quad (5.12)$$

Средняя насыщенность керна определяется методом материального баланса по количеству извлеченной из образца нефти:

$$\bar{s}_w = s_{wc} + V_o/V_p. \quad (5.13)$$

Пользуясь известным видом решения задачи Баклея – Леверетта о вытеснении нефти водой, можно по средней насыщенности вычислить насыщенность на выходе из образца  $s_w$ :

$$\frac{1-F}{\bar{s}_w - s_w} = \frac{dF}{ds_w} = \frac{V_p}{V_w}. \quad (5.14)$$

Подставляя (5.13) в (5.14), получим

$$s_w = s_{wc} + \frac{V_o}{V_p} - \frac{V_w}{V_p}(1-F). \quad (5.15)$$

По набору экспериментальных данных  $(V_w, V_o)$ , замеренных в ходе опыта по вытеснению, с использованием соотношений (5.12), (5.15) определяются пары значений  $(s_w, F)$ . Доля воды в потоке  $F$  выражается через отношение фазовых проницаемостей:

$$F = \left[ 1 + \frac{\mu_w}{\mu_o} \frac{k_{ro}}{k_{rw}} \right]^{-1}. \quad (5.16)$$

Таким образом, по данным вытеснения может быть найдено отношение фазовых проницаемостей в зависимости от насыщенности. Представленный метод был разработан Велджем. Для того чтобы найти значения фазовых проницаемостей, необходимо воспользоваться дополнительными данными, например, значениями перепада давлений между входным и выходным сечениями образца,

которые регистрируются в ходе эксперимента помимо объема добытой нефти и суммарного прокачанного объема воды. Интегрируя выражение для суммарной скорости фильтрации, получим

$$\Delta p = \frac{Q}{Sk} \int_0^L \left[ \frac{k_{ro}}{\mu_o} + \frac{k_{rw}}{\mu_w} \right]^{-1} dx. \quad (5.17)$$

Распределение насыщенности вдоль образца в фиксированный момент времени  $T$  определяется решением задачи Баклея – Леверетта:

$$x = \frac{V_w}{Sm} F'. \quad (5.18)$$

Подставляя (5.18) в (5.17), имеем

$$\Delta p = \frac{QV_w}{S^2 km} \int_0^{F'_1} \left[ \frac{k_{ro}}{\mu_o} + \frac{k_{rw}}{\mu_w} \right]^{-1} dF'. \quad (5.19)$$

Здесь значение  $F'_1$  определяется на выходе из образца согласно (5.18):

$$F'_1 = \frac{SLm}{V_w}. \quad (5.20)$$

Дифференцируя (5.19), с учетом (5.20) получим:

$$\frac{k_{ro}}{\mu_o} + \frac{k_{rw}}{\mu_w} = \frac{LQ}{kS} \frac{d(1/V_w)}{d(\Delta p/V_w)}. \quad (5.21)$$

Используя выражения (5.12), (5.15) и (5.21), по данным опыта по вытеснению можно определить фазовые проницаемости в зависимости от насыщенности. Этот метод решения обратной задачи по нахождению фазовых проницаемостей был предложен Д. А. Эфросом [33].

Основным преимуществом метода вытеснения по сравнению с экспериментом по стационарной фильтрации является возможность быстро провести опыт на кернах небольших размеров. Недостаток метода заключается в том, что он позволяет определить лишь часть кривых относительных фазовых проницаемостей при водонасыщенности выше значения на фронте вытеснения.

Лабораторные исследования относительных фазовых проницаемостей как при стационарной фильтрации, так и при вытеснении должны проводиться при достаточно больших перепадах давления между входным и выходным сечениями образца для того, чтобы исключить влияние концевых эффектов, связанных с проявлением капиллярных сил на выходе из образца и приводящих к появлению градиента насыщенности на выходной поверхности керна.

Аналогично методу вытеснения оценивается отношение фазовых проницаемостей по промысловым данным. Учитывая, что дебит каждой фазы в продукции скважины определяется в

соответствии с законом Дарси, и приводя объемные дебиты к пластовым условиям, имеем

$$\frac{Q_i}{Q_j} = \frac{\mu_j}{\mu_i} \frac{k_{ri}}{k_{rj}}, \quad i, j = o, w, g.$$

Здесь пренебрегается капиллярным скачком давления между фазами. Соответствующее значение насыщенности оценивается любым известным методом.

Относительные фазовые проницаемости могут быть определены также расчетным путем по данным капиллярного давления. В основе этого метода лежит представление о пористой среде как о сети капилляров случайного радиуса и длины [2,26]. Используя специальные гипотезы о порядке заполнения капилляров смачивающей и несмачивающей фазами, вычисляется насыщенность среды и соответствующие значения фазовых проницаемостей. Например, в простейшем случае среды, представляющей собой пучок параллельных капилляров одинаковой длины и различного радиуса, фазовые проницаемости для системы нефть-вода имеют вид:

$$k_{rw} = \left( \int_0^{s_u} \frac{ds}{P_c^2} \right) \Bigg/ \left( \int_0^1 \frac{ds}{P_c^2} \right), \quad k_{ro} = \left( \int_{s_w}^1 \frac{ds}{P_c^2} \right) \Bigg/ \left( \int_0^1 \frac{ds}{P_c^2} \right).$$

Здесь предполагается, что вода является смачивающей фазой и поэтому заполняет более мелкие капилляры.

Часто при моделировании используют известный вид функциональных зависимостей относительных фазовых проницаемостей от насыщенностей [15]:

$$k_{ri} = A_i \left( \frac{s_i - s_{ir,c}}{1 - s_{wc} - s_{or} - s_{gc}} \right)^{\gamma_i}, \quad i = o, w, g.$$

Здесь коэффициент  $A_i$  и показатель степени  $\gamma_i$  обычно задаются по аналогии с другими месторождениями,  $s_{wc}, s_{or}, s_{gc}$  — насыщенности связанный водой, остаточной нефтью и защемленным газом, которые должны быть определены экспериментально.

Определение относительных фазовых проницаемостей в случае трехфазной фильтрации является значительно более сложной задачей и соответствующие эксперименты проводятся достаточно редко. Практически фазовые проницаемости для трехфазной системы определяют по данным двухфазной фильтрации в системе нефть-вода и в системе нефть-газ. При этом предполагается, что вода — наиболее смачивающая фаза, а газ — наименее смачивающая фаза. Наибольшее распространение получили две модели, предложенные Стоуном [55,56]. Фазовые проницаемости для газа и воды в соответствии с (1.29) определяются по данным двухфазной фильтрации. Для простоты предполагается, что газонасыщенность защемленным газом

равна нулю, т. е. газ вытесняется полностью. Зависимость (1.30) фазовой проницаемости для нефти вводится с использованием нормализованных насыщенностей:

$$\begin{aligned} s_o^* &= \frac{s_o - s_{om}}{1 - s_{wc} - s_{om}}, & s_o &\geq s_{om}; \\ s_w^* &= \frac{s_w - s_{wc}}{1 - s_{wc} - s_{om}}, & s_w &\geq s_{wc}; \\ s_g^* &= \frac{s_g}{1 - s_{wc} - s_{om}}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Здесь  $s_{om}$  – остаточная нефтенасыщенность при вытеснении нефти водой и газом одновременно. Экспериментально установлено, что остаточная нефтенасыщенность  $s_{om}$  ниже, чем при вытеснении нефти водой. Причем величина  $s_{om}$  снижается с увеличением газонасыщенности. Для учета этого фактора при моделировании предложена следующая зависимость [1]:

$$\begin{aligned} s_{om} &= \alpha s_{orw} + (1 - \alpha) s_{org}; \\ \alpha &= 1 - \frac{s_g}{1 - s_{wc} - s_{org}}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Здесь  $s_{orw}$  – остаточная нефтенасыщенность в системе нефть-вода,  $s_{org}$  – остаточная нефтенасыщенность в системе нефть-газ.

В соответствии с первой моделью Стоуна относительная фазовая проницаемость для нефти предполагается равной [56]

$$\begin{aligned} k_{ro} &= s_o^* \beta_w \beta_g; \\ \beta_w &= \frac{k_{row}(s_w)}{1 - s_w^*}, & \beta_g &= \frac{k_{rog}(s_g)}{1 - s_g^*}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Здесь  $k_{row}$  и  $k_{rog}$  – относительные фазовые проницаемости для нефти в системе нефть-вода и нефть-газ соответственно.

Вторая модель Стоуна основана на аналогии с течением в канале [55]:

$$k_{ro} = (k_{row} + k_{rw})(k_{rog} + k_{rg}) - k_{rw} - k_{rg}, \quad k_{ro} \geq 0. \quad (5.25)$$

Зависимости (5.24) и (5.25) точно отражают процессы в двухфазных системах только в случае, когда

$$k_{row}(s_{wc}) = k_{rog}(s_g = 0) = 1.$$

Для того чтобы снять это ограничение, фазовую проницаемость для нефти в системе нефть-газ получают в присутствии остаточной воды:

$$k_{rog} = k_{rog}(s_g, s_{wc}).$$

Тогда модель (5.24) может быть видоизменена следующим образом [1]:

$$k_{ro} = s_o^* \beta_w \beta_g / k_{rocw}; \\ \beta_w = \frac{k_{row}(s_w)}{1 - s_w^*}, \quad \beta_g = \frac{k_{rog}(s_g, s_{wc})}{1 - s_g^*}. \quad (5.26)$$

Здесь  $k_{rocw} = k_{row}(s_{wc}) = k_{rog}(0, s_{wc})$  – относительная фазовая проницаемость для нефти при максимальной нефтенасыщенности.

Вторая модель Стоуна (5.25) преобразуется к виду [1]:

$$k_{ro} = k_{rocw} \left[ \left( \frac{k_{row}}{k_{rocw}} + k_{rw} \right) \left( \frac{k_{rog}(s_g, s_{wc})}{k_{rocw}} + k_{rg} \right) - k_{rw} - k_{rg} \right], \quad k_{ro} \geq 0. \quad (5.27)$$

При проведении конкретных расчетов следует иметь в виду, что зависимости (5.26) и (5.27) могут давать совершенно разные значения относительной фазовой проницаемости при небольшой насыщенности подвижной нефтью.

## **Глава 6**

### **СХЕМАТИЗАЦИЯ ПЛАСТА И ВЫБОР РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ**

Выбор расчетной модели, используемой для описания течения флюидов в пласте, представляет собой комплексную проблему, решение которой является залогом успеха при прогнозировании поведения пласта или исследовании фильтрационных процессов. В основе должно лежать понимание цели исследования и степени достоверности ожидаемых результатов с учетом всех доступных данных о пласте и насыщающих его флюидах. Исходя из этого основными аспектами выбора модели являются:

- схематизация строения пласта с учетом определяющих факторов и механизмов, влияющих на процесс фильтрации;
- определение числа фаз и компонентов, учитываемых в модели фильтрации;
- определение размерности модели;
- определение начальных и граничных условий;
- определение геометрических размеров расчетных блоков;
- при необходимости – учет специальных процессов физико-химической и неизотермической гидродинамики;
- выбор метода решения уравнений и параметров численного метода.

#### **6.1. Схематизация пласта путем введения модифицированных фазовых проницаемостей и псевдокапиллярного давления**

Одной из наиболее простых и достаточно распространенных схем неоднородного пласта является **слоистый пласт**.

Если слои не сообщаются, то каждый из них может моделироваться по отдельности. Слои необходимо моделировать совместно, даже если они отделены один от другого в следующих случаях: при совместной разработке, если слои сообщаются через скважины или если невозможно разделить продукцию и закачку скважин по слоям; если имеется общая законтурная область. Во всех этих ситуациях реализуются схемы послойного течения, а взаимодействие слоев учитывается через граничные условия. Попытка осреднить течение по вертикали и свести задачу к двумерной приводит к изменению вида исходных уравнений. В частности,

оказывается, что эффективные фазовые проницаемости в такой системе являются нелокальными характеристиками и зависят не только от средней насыщенности, но и от граничных условий и времени.

Если слои сообщаются, то в общем случае необходимо использовать трехмерное моделирование. Упрощение допускается лишь в случае, когда толщина пласта намного меньше характерного продольного размера, а капиллярные и гравитационные силы, способствующие перераспределению флюидов по вертикали, несущественны по сравнению с действием внешнего перепада давления, обуславливающего течение между скважинами [11]. Тогда трехмерное течение можно описывать при помощи осредненных по вертикали двумерных моделей с использованием осредненных или так называемых **модифицированных (псевдофункций) относительных фазовых проницаемостей и капиллярного давления**. Модифицированные фазовые проницаемости и капиллярное давление учитываются в моделях пониженной размерности вместо исходных зависимостей. Основное предположение при введении модифицированных фазовых проницаемостей слоистого пласта состоит в постоянстве по вертикали продольной составляющей градиента давления [17,46]. В этом случае обобщенный закон Дарси

может быть записан для средней скорости фильтрации  $\bar{u}_l = \frac{1}{H} \int_0^H u_l dz$  с

учетом осредненных по толщине абсолютной и относительных проницаемостей. Здесь  $H$  – толщина пласта.

При осреднении исходных уравнений фильтрации по толщине пласта средняя насыщенность и модифицированные фазовые проницаемости вводятся следующим образом:

$$\bar{s}_l = \frac{\int_0^H m s_l dz}{\int_0^H m dz}, \quad \bar{k}_{rl} = \frac{\int_0^H k k_{rl} dz}{\int_0^H k dz}, \quad \bar{k} = \frac{\int_0^H k dz}{H}, \quad l = o, w. \quad (6.1)$$

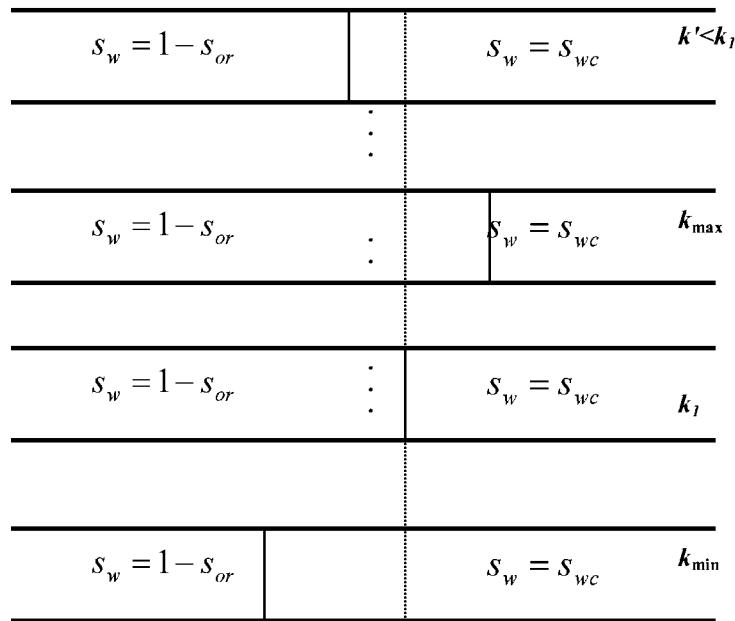
Наиболее простой вид модифицированные фазовые проницаемости слоистого пласта имеют в случае поршневого вытеснения нефти водой в каждом слое. Пусть водонасыщенность перед фронтом вытеснения равна  $s_{wc}$ , позади фронта вытеснения –  $(1 - s_{or})$ , пористость слоев одинаковая. Предполагается, что более проницаемые слои заполняются водой быстрее, чем менее проницаемые, рис. 6.1. Если известна функция распределения проницаемости  $F(k)$  ( $k_{\min} \leq k \leq k_{\max}$ ,  $F(k_{\min}) = 0$ ,  $F(k_{\max}) = 1$ ), то

модифицированные фазовые проницаемости и средняя водонасыщенность определяются выражениями:

$$\bar{s}_w = (1 - s_{or}) \int_{k_1}^{k_{\max}} dF(k) + s_{wc} \int_{k_{\min}}^{k_1} dF(k), \quad \bar{k}_w = \frac{1}{k} \int_{k_1}^{k_{\max}} k dF(k), \quad \bar{k}_o = 1 - \bar{k}_w, \quad \bar{k} = \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} k dF(k). \quad (6.2)$$

Здесь  $k_1$  – минимальная проницаемость слоя, заполненного водой при данной средней водонасыщенности:

$$k_1 = F^{-1} \left( \frac{1 - s_{or} - \bar{s}_w}{1 - s_{or} - s_{wc}} \right) \quad (6.3)$$



**Рис. 6.1. Схема слоистого пласта.**

Поэтому выражения (6.2), (6.3) определяют модифицированные фазовые проницаемости слоистого пласта как функции средней насыщенности. Выражения (6.2), (6.3) допускают обобщение на случай переменной пористости, двухфазного вытеснения в каждом слое, различия фазовых проницаемостей по слоям и т. п.[12].

Кроме слоистого пласта, существует еще одна модель трехмерного коллектора, в рамках которой допускается осреднение по вертикали и сведение задачи к двумерной. Это так называемая **модель вертикального равновесия** [16,42]. Согласно этой схеме предполагается, что флюиды в пласте мгновенно перераспределяются по вертикали в соответствии с условием капиллярно-гравитационного равновесия. Эта гипотеза справедлива в пластах с высокой проницаемостью в вертикальном направлении и толщиной, незначительной по сравнению с характерным продольным размером. Причем скорость фильтрационного переноса в продольном направлении, обусловленная действием внешнего перепада давления,

должна быть небольшой по сравнению со скоростью перераспределения флюидов по вертикали под действием капиллярных и гравитационных сил [11]. В условиях капиллярно-гравитационного равновесия (1.32) значение средней насыщенности (6.1) однозначно определяет распределение насыщенности по вертикали. Кроме того, поскольку продольная составляющая градиента давления не зависит от вертикальной координаты, допустимо осреднение закона Дарси и введение модифицированных фазовых проницаемостей (6.1). Вычисление псевдофункций для каждого значения средней насыщенности осуществляется с учетом известного распределения насыщенности по вертикали и вида исходных фазовых проницаемостей.

Для учета разницы давлений в фазах вводится **псевдокапиллярное давление**. Выбирается некоторая базисная поверхность, к которой приводятся давления: обычно это – кровля, подошва или середина пласта. Псевдокапиллярное давление определяется для каждого значения средней насыщенности как разность давлений в соответствующих фазах на базисной поверхности.

Если действием капиллярных сил, по сравнению с гравитационными, можно пренебречь, то концепция вертикального равновесия сводится к модели гравитационной сегрегации флюидов [41]. Эта модель является наиболее простой и наглядной. Рассмотрим двухфазную систему нефть-вода в пласте постоянной пористости и толщины  $H$ , рис. 6.2.



**Рис. 6.2. Схема гравитационного равновесия.**

При заданном начальном положении водонефтяного контакта  $z_{ci}$  средняя начальная водонасыщенность определяется следующим образом:

$$\bar{s}_{wi} = \frac{s_{wc}z_{ci} + 1(H - z_{ci})}{H}. \quad (6.4)$$

В последующие моменты времени выражение для средней водонасыщенности зависит от направления перемещения водонефтяного контакта  $z_c$ :

$$\bar{s}_w = \begin{cases} \frac{s_{wc}z_c + (1-s_{or})(z_{ci} - z_c) + 1(H - z_{ci})}{H}, & \text{при } 0 \leq z_c < z_{ci}; \\ \frac{s_{wc}z_c + 1(H - z_c)}{H}, & \text{при } H \geq z_c \geq z_{ci}. \end{cases} \quad (6.5)$$

Если водонефтяной контакт поднимается, то необходимо учитывать остаточную нефтенасыщенность. Модифицированные фазовые проницаемости определяются в соответствии с (6.1) и зависят только от начального положения контакта и от значений исходных фазовых проницаемостей в концевых точках: при остаточной нефтенасыщенности и при насыщенности связанной водой. При постоянной абсолютной проницаемости они имеют вид:

$$\bar{k}_{rw} = \begin{cases} \frac{0z_c + k_{rw}(1-s_{or})(z_{ci} - z_c) + 1(H - z_{ci})}{H}, & \text{при } 0 \leq z_c < z_{ci}; \\ \frac{0z_c + 1(H - z_c)}{H}, & \text{при } H \geq z_c \geq z_{ci}; \end{cases} \quad (6.6)$$

$$\bar{k}_{ro} = \frac{k_{ro}(s_{wc})z_c + 0(H - z_c)}{H}.$$

Подставляя (6.5) в (6.6), получаем выражения модифицированных фазовых проницаемостей гравитационного равновесия в зависимости от средней водонасыщенности:

$$\bar{k}_{rw} = \begin{cases} \frac{k_{rw}(1-s_{or})\bar{s}_w + k_{rw}(1-s_{or})(z_{ci}(1-s_{wc})-H)}{H(1-s_{or}-s_{wc})} + 1 - \frac{z_{ci}}{H}, & \text{при } \bar{s}_w \geq 1 - \frac{z_{ci}(1-s_{wc})}{H}; \\ \frac{\bar{s}_w - s_{wc}}{1-s_{wc}}, & \text{при } \bar{s}_w < 1 - \frac{z_{ci}(1-s_{wc})}{H}; \end{cases} \quad (6.7)$$

$$\bar{k}_{ro} = \begin{cases} \frac{k_{ro}(s_{wc})}{1-s_{or}-s_{wc}} \left(1 - s_{or} \frac{z_{ci}}{H} - \bar{s}_w\right), & \text{при } \bar{s}_w \geq 1 - \frac{z_{ci}(1-s_{wc})}{H}; \\ \frac{k_{ro}(s_{wc})}{1-s_{wc}} (1 - \bar{s}_w), & \text{при } \bar{s}_w < 1 - \frac{z_{ci}(1-s_{wc})}{H}. \end{cases}$$

Псевдокапиллярное давление определяется как разность давлений в отдельных фазах, приведенных к базисной поверхности. Поскольку капиллярное давление не учитывается, то давления в нефти и воде на контакте равны  $p_c$ . Для любого значения  $z$  давления в каждой из фаз имеют вид:

$$p_o(z) = p_c + \rho_o g(z - z_c);$$

$$p_w(z) = p_c + \rho_w g(z - z_c). \quad (6.8)$$

Соответственно псевдокапиллярное давление определяется разностью выражений (6.8) при  $z = 0$ . Учитывая (6.5), имеем

$$\bar{p}_{ow} = (\rho_w - \rho_o)gz_c = \begin{cases} (\rho_w - \rho_o)g \frac{H(1 - \bar{s}_w) - z_{ci}s_{or}}{1 - s_{or} - s_{wc}}, & \text{при } \bar{s}_w \geq 1 - \frac{z_{ci}(1 - s_{wc})}{H}; \\ (\rho_w - \rho_o)g \frac{H(1 - \bar{s}_w)}{1 - s_{wc}}, & \text{при } \bar{s}_w < 1 - \frac{z_{ci}(1 - s_{wc})}{H}. \end{cases} \quad (6.9)$$

Отметим, что эта величина не имеет никакого отношения к действию капиллярных сил.

В общем случае, когда не применимы описанные выше схемы пласта, допускающие понижение размерности задачи, с этой целью используются **динамические модифицированные фазовые проницаемости**. Динамические псевдофункции строятся по результатам моделирования двумерной фильтрации в характерном вертикальном сечении пласта при условиях, ожидаемых для осредненной по толщине модели. Они зависят от начальных условий, направления процесса изменения насыщенности, вязкостей, капиллярных и гравитационных сил, неоднородности пласта, размеров сеточных блоков и могут быть переменными во времени и пространстве. В некоторых случаях динамические псевдофункции применяются не для понижения размерности, а для загрубления модели и перехода к более крупным сеточным блокам. Для получения динамических псевдофункций фазовых проницаемостей и капиллярного давления, а также осредненных значений насыщенности обрабатываются результаты моделирования фильтрации в вертикальной плоскости [35,49,50,57].

В модели Стоуна [57] по результатам решения профильной задачи с мелкой сеткой для каждого сеточного блока задачи с укрупненными ячейками вычисляются суммарные расходы  $\bar{q}_t$ , осредненные доли фаз в потоке  $\bar{F}_t$  и средняя суммарная подвижность фаз  $\bar{\lambda}_t$ :

$$\begin{aligned} \bar{q}_t &= -\bar{T} [\bar{\lambda}_o(\Delta p_o - \rho_o g \Delta D) + \bar{\lambda}_w(\Delta p_w - \rho_w g \Delta D) + \bar{\lambda}_g(\Delta p_g - \rho_g g \Delta D)] = \\ &= -\sum_k \left\{ T [\lambda_o(\Delta p_o - \rho_o g \Delta D) + \lambda_w(\Delta p_w - \rho_w g \Delta D) + \lambda_g(\Delta p_g - \rho_g g \Delta D)] \right\}_k; \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\bar{F}_t = \frac{\sum_k q_{tk}}{\sum_k q_{tk}} = \frac{\sum_k (q_t F_l)_k}{\sum_k q_{tk}}, \quad l = o, w, g; \quad (6.11)$$

$$\bar{\lambda}_t = \frac{\sum_k (T \lambda_t)_k}{\sum_k T_k}. \quad (6.12)$$

Здесь  $T$  и  $\bar{T}$  - межблочные проводимости,  $D$  и  $\bar{D}$  - превышения сеточных блоков над некоторой горизонтальной поверхностью,  $(\Delta p_l - \rho_l g \Delta D)$  и  $(\Delta p_{\bar{l}} - \rho_{\bar{l}} g \Delta D)$  - разности потенциалов соседних блоков соответственно для моделей с мелкой и крупной сеткой. Здесь

и далее суммирование ведется по слоям модели с мелкой сеткой, объединяемым в один укрупненный слой.

Псевдокапиллярное давление вводится с учетом выражения для суммарного расхода, записанного для осредненных величин:

$$\begin{aligned} \bar{q}_t &= -\bar{T}\lambda_t(\Delta p_o + \rho_og\Delta D) + \bar{T}\lambda_w(\Delta p_{ow} + \Delta\rho_{wo}g\Delta D) - \bar{T}\lambda_g(\Delta p_{og} + \Delta\rho_{og}g\Delta D) = \\ &= -\sum_k \{T\lambda_t(\Delta p_o + \rho_og\Delta D)\}_k + \sum_k \{T\lambda_w(\Delta p_{ow} + \Delta\rho_{wo}g\Delta D)\}_k - \sum_k \{T\lambda_g(\Delta p_{og} + \Delta\rho_{og}g\Delta D)\}_k. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Приравнивая соответственно вторые и третьи слагаемые в левой и правой части (6.13), получим выражения для разности псевдокапиллярных давлений соседних блоков осредненной модели:

$$\begin{aligned} \Delta\bar{p}_{ow} &= \frac{\sum_k \{T\lambda_w(\Delta p_{ow} + \Delta\rho_{wo}g\Delta D)\}_k}{\bar{T}\lambda_w} - \Delta\rho_{wo}g\Delta D; \\ \Delta\bar{p}_{og} &= \frac{\sum_k \{T\lambda_g(\Delta p_{og} + \Delta\rho_{og}g\Delta D)\}_k}{\bar{T}\lambda_g} - \Delta\rho_{og}g\Delta D. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Собственно значения псевдокапиллярных давлений в данной модели не определяются, т. к. они не входят в явном виде в уравнения фильтрации.

Модифицированные фазовые проницаемости определяются через суммарный расход и осредненные доли фаз в потоке, исходя из обобщенного закона Дарси, связывающего осредненные характеристики:

$$\bar{k}_{rl} = -\frac{\bar{q}_t \bar{\mu}_l \bar{F}_l}{\bar{T}(\Delta p_l - \rho_l g \Delta D)}, \quad l = o, w, g.$$

Отсюда с учетом (6.13) имеем:

$$\begin{aligned} \bar{k}_{ro} &= -\frac{\bar{\lambda}_t \bar{\mu}_o \bar{F}_o}{1 - \frac{1}{\bar{q}_t} \sum_k \{T\lambda_w(\Delta p_{ow} + \Delta\rho_{wo}g\Delta D)\}_k + \frac{1}{\bar{q}_t} \sum_k \{T\lambda_g(\Delta p_{og} + \Delta\rho_{og}g\Delta D)\}_k}; \\ \bar{k}_{rg} &= -\frac{\bar{\lambda}_t \bar{\mu}_g \bar{F}_g}{1 - \frac{1}{\bar{q}_t} \sum_k \{T\lambda_w(\Delta p_{ow} + \Delta\rho_{wo}g\Delta D)\}_k - \frac{1}{\bar{q}_t} \sum_k \{T(\lambda_o + \lambda_w)(\Delta p_{og} + \Delta\rho_{og}g\Delta D)\}_k}; \\ \bar{k}_{rw} &= \bar{\mu}_w (\bar{\lambda}_t - \bar{\lambda}_o - \bar{\lambda}_g). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Другой подход к введению динамических псевдофункций в отличие от (6.14), (6.15) основан на непосредственном вычислении фазовых потоков с использованием исходной профильной модели. В модели Кайта и Берри [49] модифицированные фазовые проницаемости определяются следующим образом:

$$\bar{k}_{rl} = -\frac{\bar{\mu}_l \sum_k q_{lk}}{\bar{T}(\Delta p_l - \rho_l g \Delta D)}, \quad l = o, w, g. \quad (6.16)$$

Псевдокапиллярное давление определяется как разность средневзвешенных давлений в отдельных фазах:

$$\begin{aligned}\bar{p}_{ow} &= \bar{p}_o - \bar{p}_w, \quad \bar{p}_{og} = \bar{p}_o - \bar{p}_g; \\ \bar{p}_l &= \frac{\sum_k (k_{rl} k h p_l)_k}{\sum_k (k_{rl} k h p_l)_k}, \quad l = o, w, g.\end{aligned}\tag{6.17}$$

Здесь  $h_k$  – толщина слоя в модели с мелкой сеткой.

Отметим, что динамические псевдофункции (6.15), (6.17) вводятся формально и в некоторых случаях могут быть немонотонными, принимать отрицательные значения или быть больше 1.

Обычно перед применением динамических псевдофункций проводится обоснование этого подхода путем сопоставления результатов расчетов с использованием двумерной модели характерного вертикального сечения пласта и осредненной одномерной модели.

## 6.2. Моделирование кавернозно-трещиновато-поровых пластов

Наиболее сложным строением характеризуются кавернозно-трещиновато-поровые пласты, имеющие несколько типов пустот, в которых содержатся и фильтруются флюиды. Собственно порода – или матрица – обладает системой равномерно распределенных мелких поровых каналов, обусловленной кристаллической структурой слагающего ее материала. Кроме того, могут встретиться еще одна или несколько систем более крупных поровых каналов, образовавшихся в результате выщелачивания или растрескивания исходного материала. Вторичные поровые каналы, образовавшиеся вследствие выщелачивания, называются **кавернами**. Результатом растрескивания первичной породы являются трещины. Каверны и трещины резко отличаются по размеру и распределению по размеру от межзерновых пор и оказывают существенное влияние на пористость и проницаемость породы. В трещиноватых пластах фильтрация происходит в основном по системе трещин, тогда как большая часть флюида содержится в низкопроницаемой матрице (трещинная пористость составляет 0.1 – 1% от общего объема). Вытеснение жидкостей из блоков матрицы в трещины происходит под действием капиллярных сил [8,50].

Для математического моделирования трещиновато-поровых коллекторов используются специальные методы. В отдельных случаях при решении исследовательских задач, связанных с изучением взаимодействия отдельного низкопроницаемого блока и окружающих его трещин, применяется детальное моделирование с использованием

измельчения разностной сетки и явным учетом в модели геометрии блоков и трещин [8,35]. Однако при моделировании реальных пластов и решении практических задач такой подход не применим. Как правило, используются существенные упрощения. Наиболее простой метод учета трещиноватого строения пласта связан с моделированием анизотропии проницаемости. В этом случае матрица и трещины рассматриваются как единая система, характеризующаяся суммарной пористостью. Анизотропия проницаемости позволяет учесть в модели эффективную проницаемость среды вдоль основного направления распространения трещин и перпендикулярно ему. Более общий подход основан на использовании концепции двойной среды [4], когда матрица и трещины представляются в виде вложенных континуумов, каждый из которых характеризуется своей проницаемостью и пористостью. С помощью специального закона учитывается массообмен между средами. Среда, моделирующая трещины, обычно характеризуется очень высокой проводимостью, но имеет незначительный объем. Матрица, как правило, имеет существенно более высокую пористость и очень низкую проницаемость. Часто принимается, что фильтрация происходит только по системе трещин, объем которых пренебрежимо мал. При моделировании многофазной фильтрации в трещиновато-поровом пласте определяются насыщенности и давления фаз в каждой из сред. Переток каждой фазы из одной среды в другую учитывается в уравнении сохранения массы в виде источника или стока. Интенсивность перетока определяется с использованием дополнительных гипотез или результатов лабораторного или вычислительного эксперимента. Часто предполагается, что интенсивность перетока пропорциональна разности давлений в матрице и трещине, а коэффициент пропорциональности зависит от геометрии блоков и трещин, их абсолютных и относительных проницаемостей, капиллярных давлений, разности плотностей фаз и т. д. Конкретный вид зависимости может быть определен по результатам детального математического моделирования отдельного блока и окружающих его трещин либо в ходе лабораторных экспериментов. Иногда в рамках концепции двойной среды используется приближенный подход, в соответствии с которым давление в матрице и в трещинах предполагается одинаковым [14,50]. В этом случае при однофазной фильтрации система уравнений сохранения массы в матрице и в трещинах относительно давления и перетока является замкнутой. При многофазной фильтрации суммарный переток фаз вычисляется аналогично, но для замыкания системы уравнений требуются дополнительные соотношения для определения интенсивности массообмена отдельными фазами. Наиболее простой способ состоит в использовании гипотезы о том, что фазовый состав перетекающего флюида может быть определен

«вверх по потоку» по аналогии с (3.9). В более общем случае потоки отдельных фаз могут быть направлены в противоположных направлениях.

### **6.3. Выбор модели фильтрации**

Выбор модели фильтрации определяется типом залежи, свойствами насыщающих пласт флюидов и нагнетаемых агентов с учетом характера моделируемых процессов разработки (см. раздел 1.3). Для моделирования газовой залежи в режиме истощения применима модель однофазной фильтрации. Двухфазная математическая модель (нефть+вода или нефть+газ) позволяет моделировать процессы вытеснения нефти водой при давлениях выше давления насыщения нефти газом либо процессов истощения с выделением газа при прогнозировании нефтяных месторождений. Двухфазная математическая модель (газ+вода) может также использоваться для моделирования газовых месторождений с активной законтурной областью или подземных хранилищ газа в водоносных пластах. Расчеты нефте- и газоотдачи нефтегазовых залежей или при закачке газа в нефтяные пласти осуществляются с использованием модели трехфазной фильтрации (нефть+газ+вода). При прогнозировании нефтегазоконденсатных пластов и процессов водогазовой репрессии для учета межфазного массообмена отдельными химическими соединениями (компонентами) необходимо использовать многокомпонентную (композиционную) модель. Для оценки эффекта от применения физико-химических методов (закачки поверхностно-активных веществ, полимеров, растворителей, термических методов и т. п.) используются специальные математические модели, учитывающие механизмы соответствующих процессов.

### **6.4. Определение размерности модели**

Выбор размерности математической модели осуществляется с учетом стадии разработки, определяющей объем исходной информации о пласте, и типа залежи.

Одномерные модели используются для решения исследовательских задач, оценки чувствительности поведения пласта к изменению различных параметров (проницаемостей, соотношения подвижностей фаз, вида относительных фазовых проницаемостей и т. п.), изучения влияния неоднородности пласта в направлении фильтрации. Одномерная радиальная модель может использоваться при моделировании скважин, например, при исследовании

восстановления давления, при изучении процессов разгазирования нефти, выпадения конденсата в прискважинной области и т. п.

На начальном этапе изучения пласта для оценки коэффициента нефтеизвлечения с учетом влияния геометрии залежи и оптимизации системы расстановки скважин целесообразно использование двухмерных моделей. При прогнозировании водоплавающих залежей и залежей с газовой шапкой рекомендуется использование схемы капиллярно-гравитационного или гравитационного равновесия (псевдотрехмерная модель). Двумерные модели фильтрации в вертикальной плоскости используются для изучения процессов, в которых существенную роль играют эффекты перераспределения флюидов по вертикали под действием капиллярных, гравитационных сил и вязкостей, в том числе в слоисто-неоднородных пластах. Такие модели также используются для получения модифицированных фазовых проницаемостей для двухмерных по площади залежи и трехмерных моделей. Двумерные модели радиальной фильтрации применяются в основном для исследования поведения скважин, особенностей образования конусов газа и воды при разработке месторождений с газовой шапкой или подошвенной водой.

При детальном моделировании залежей для учета неоднородного строения пластов, их линзовидности, прерывистости, интерференции скважин и других факторов рекомендуется использование трехмерных моделей. Однако в некоторых случаях для моделирования тонких пластов с небольшими водонефтяными зонами допустимо использование двухмерных математических моделей с модифицированными фазовыми проницаемостями. Двумерные модели могут использоваться при построении иерархических моделей многоскважинных систем (более 1000 скважин) на промежуточном этапе для определения граничных условий для трехмерных моделей отдельных участков залежи.

## 6.5. Определение размеров расчетных блоков

Размер расчетного блока фильтрационной модели, которому приписывается одно значение каждого расчетного параметра (эффективной проницаемости, пористости, насыщенности, давления), определяется с учетом масштаба анализируемых фильтрационных процессов. При выборе размеров сеточных блоков необходимо руководствоваться критериями:

- необходимой степени подробности фильтрационной модели;
- точности вычислений;
- возможностей вычислительной техники.

Сетка должна быть достаточно мелкой для того, чтобы с необходимой для целей исследования степенью подробности описывать геометрию пласта, изменчивость геолого-физических параметров коллектора и фильтрующихся флюидов, распределение насыщенностей и давлений в пространстве и во времени.

Размеры сеточных блоков и временного шага должны обеспечивать требуемую точность и устойчивость вычислений. При выборе шага учитывается расстояние между скважинами, возможность при необходимости моделировать горизонтальную скважину или трещину гидравлического разрыва несколькими расчетными ячейками. Для адекватного отражения процессов многофазной фильтрации количество ячеек между скважинами определяется из условия достижения сходимости результатов расчетов при измельчении разностной сетки. По опыту моделирования оно должно быть не менее пяти [30,35].

Размеры расчетных блоков по вертикали определяются в основном толщинами геологических слоев пласта. Обычно количество слоев сеточной модели по вертикали не превышает 10–20.

Количество сеточных блоков фильтрационной модели, позволяющее проводить многовариантные расчеты за разумное время, при нынешнем состоянии вычислительной техники составляет несколько сотен тысяч (200 – 300 тысяч). Характерный размер сеточного блока в горизонтальной плоскости составляет 100x100 м, по вертикали – от 1 до нескольких метров. Таким образом, при сетке скважин 500x500 м на одну скважину на плоскости приходится порядка 25 расчетных блоков. Если количество скважин равно 1000, то число разностных слоев по вертикали не должно превышать 10, т. к. тогда общая размерность модели составит 250 000 сеточных блоков.

Использование моделей с изменяющимися по площади размерами сеточных блоков позволяет адекватно отображать пласти при минимальных затратах вычислительных ресурсов. Так, при моделировании зон однофазного течения, например, активной законтурной области, можно использовать очень крупные сеточные блоки. Однако увеличивать размеры блоков следует постепенно для того, чтобы не допустить резкого контраста в соседних ячейках и адекватно смоделировать процесс взаимодействия пласта законтурной области. Вблизи скважин, наоборот, необходимо использовать мелкую сетку. Для изучения наиболее сложных многофазных течений, например, процесса конусообразования, применяется локальное измельчение сетки. Если при локальном измельчении сетки оказывается, что один более крупный блок граничит с несколькими мелкими, то изменяется вид матричных уравнений, описывающих фильтрацию, и для решения таких задач требуются специальные программные средства.

Для комплексного изучения сложных многоскважинных объектов иногда применяют многоуровневые иерархические модели фильтрации [50]. В этом случае модель первого уровня строится с использованием крупной разностной сетки для объекта в целом, включая законтурную область. Затем выделяются участки, представляющие особый интерес, для которых создаются более подробные модели с мелкой сеткой. Граничные условия для таких моделей более высокого уровня определяются, исходя из результатов моделирования на предыдущем уровне. В результате решения задачи декомпозиции модели первого уровня находят изменяющиеся во времени распределения давления и потоков вдоль границ выделенных участков. Затем осуществляется решение задач второго уровня, обеспечивающее более детальное изучение отдельных участков. Такие модели с постепенным переходом к более мелким сеткам можно строить вплоть до подробной модели единичной скважины.

При построении разностной сетки важно правильно выбрать не только размеры сеточных блоков, но и направления осей координат. При ориентации разностной сетки относительно частей света, в первую очередь, необходимо учитывать анизотропию пласта по проницаемости. Оси координат должны быть направлены вдоль направлений главных осей тензора проницаемости, т. к. в противном случае либо не будет корректно учтена анизотропия, либо в исходных уравнениях фильтрации появятся смешанные производные, что не предусмотрено в большинстве используемых решателей. В изотропных пластах при выборе ориентации сетки стремятся уменьшить ошибки вычислений, связанные с ориентационным эффектом. Он проявляется во влиянии на результаты расчетов ориентации сетки относительно взаимного расположения добывающих и нагнетательных скважин. В большинстве случаев этот эффект оказывается несущественным, за исключением неблагоприятной ситуации, когда вытесняющая фаза намного более подвижная, чем вытесняемая (например, при вытеснении высоковязкой нефти водой) [50]. Рекомендуется по возможности использовать ортогональные сетки.

## 6.6. Задание исходных данных для моделирования

Информация о строении и свойствах пласта и насыщающих его жидкостей, о режимах и показателях работы скважин должна быть преобразована к виду, требуемому для ввода в модель фильтрации [15,50]. Объем пласта рассматривается как упорядоченная совокупность блоков, каждому из которых приписывается по одному значению каждого параметра. Ввод свойств породы и флюидов для каждого расчетного блока, площадь сечения которого в

горизонтальной плоскости определяется сотнями квадратных метров при толщине в несколько метров, является очень сложной и трудоемкой задачей. В результате построения фильтрационной модели должна быть создана разностная сетка, учитываящая все крупномасштабные детали строения пласта, зональную и слоистую неоднородность, систему размещения скважин.

Каждому блоку сетки присваивается значение абсолютной глубины кровли, общей и эффективной толщины, пористости, проницаемости в различных направлениях, насыщенности нефтью, водой и газом. Функции фазовых проницаемостей и капиллярного давления от насыщенности обычно задаются в табличном виде для различных зон пласта. В табличном виде в зависимости от давления при пластовой температуре задаются также физические свойства жидкостей (вязкости, объемные коэффициенты, растворимость газа в нефти и в воде, коэффициенты сжимаемости и другие свойства с учетом типа модели) и порового пространства (сжимаемость, возможно, проницаемость и др.). Плотности фаз задаются в стандартных условиях.

Начальное распределение давлений и насыщенностей в пласте может быть либо задано в виде известных значений для каждой ячейки модели, либо вычислено исходя из условия капиллярно-гравитационного равновесия.

На границах объекта моделирования (залежи, участка) обычно задаются перетоки флюидов или давления как функции времени. При моделировании активной водонапорной системы обычно определяется объем и упругий запас контурной области. При схематизации пласта руководствуются формой залежи и границ зон замещения и выклинивания коллекторов. Сеточные блоки, оказавшиеся за пределами моделируемой области, исключаются из расчетов путем задания для них нулевой проницаемости или порового объема. Если пласт имеет разрывное строение, связанное с наличием глинистых перемычек, тектонических нарушений и т. п., то соответствующие поверхности моделируются как непроницаемые границы между областями. Если разлом является частично проницаемым, то это учитывается в модели введением специального коэффициента – множителя для соответствующих межблочных проводимостей.

Для задания скважин указываются сеточные координаты, перечисляются ячейки, вскрываемые скважиной, в том или ином виде приводится коэффициент продуктивности, в зависимости от времени задается коэффициент эксплуатации и режим работы (забойное или устьевое давление, депрессия, дебиты фаз и т. п.).

## **Глава 7**

# **МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РАСЧЕТНЫХ БЛОКОВ. МАСШТАБИРОВАНИЕ И ОСРЕДНЕНИЕ**

В этой главе рассматривается один из наиболее сложных вопросов моделирования пластов – приведение данных, полученных разными методами исследований и характеризующихся разными масштабами осреднения к масштабу расчетных блоков (*upscaling*). Фактически задача масштабирования данных возникает на двух этапах моделирования пласта: во-первых, при распространении данных, полученных на керне, на расчетные блоки геологической модели, а во-вторых, при переходе от геологической модели к гидродинамической. Размерность геологических моделей, построенных по данным трехмерной сейсмики, может составлять миллионы расчетных блоков, тогда как размерность фильтрационной модели, как правило, на порядок меньше. Поэтому при переходе от одной модели к другой осуществляется укрупнение расчетных ячеек. Для определения эффективных характеристик укрупненных расчетных блоков используются различные методы усреднения и масштабирования данных. Это позволяет описывать неоднородный блок сложной структуры как однородный с эффективными параметрами. Задача определения эффективной пористости и насыщенности решается довольно просто: пористость усредняется по объему, а насыщенность – по поровому объему расчетного блока. Проблема усреднения проницаемости, и особенно относительных фазовых проницаемостей, является более сложной и до сих пор остается областью активных научных исследований.

### **7.1. Постановка задачи об определении эффективной проницаемости**

Абсолютная проницаемость является наиболее изменчивым параметром пластовой системы. В пределах одного пласта на сравнительно небольших расстояниях проницаемость может меняться в десятки и даже в сотни раз. Учитывая, что фактически этот параметр может быть охарактеризован лишь точечными замерами в скважинах, наиболее естественным является представление поля проницаемости

как случайного. Для описания фильтрации в среде со случайными неоднородностями необходимо найти математические ожидания давления, скоростей фильтрации и других характеристик процесса. В результате будет определена и эффективная проницаемость. Однако если масштаб неоднородности сравним с размерами системы, то эффективные характеристики будут зависеть не только от свойств среды, но и от размеров рассматриваемой области и граничных условий. Если характерный размер системы намного больше масштаба неоднородности, можно не учитывать граничные условия и рассматривать неограниченную область. Но в этом случае эффективная проницаемость должна зависеть от всех параметров случайного поля, например, от всех моментов; следовательно, если такая зависимость и будет найдена, то она должна иметь достаточно сложную структуру. Поэтому точные решения задачи определения эффективной проницаемости существуют только для сред достаточно простой структуры.

Задача определения эффективной проницаемости или проводимости формулируется следующим образом [31]. Рассматривается фильтрация однородной несжимаемой жидкости в неоднородной по проницаемости среде:

$$\operatorname{div} u = 0, \quad u = -\lambda \nabla p. \quad (7.1)$$

Проводимость среды  $\lambda = k/\mu$  является случайным тензором, зависящим от координат. Эффективная проводимость  $\lambda^*$  определяется выражением

$$\bar{u} = -\lambda^* \bar{\nabla} p. \quad (7.2)$$

Здесь черта сверху обозначает осреднение по объему.

Остановимся на известных точных решениях задачи определения эффективной проводимости. В случае одномерных слоистых систем эффективная проводимость вдоль направления залегания слоев имеет вид  $\lambda^* = \bar{\lambda}$ , а перпендикулярно этому направлению  $\lambda^* = (\bar{\lambda}^{-1})^{-1}$ .

Для двумерной системы получено точное решение [10], из которого следует, что если область разбита на две подобласти, в среднем эквивалентные по форме, но различающиеся по проводимости  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , и доли этих подобластей равны 0.5, то эффективная проводимость среды равна

$$\lambda^* = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}. \quad (7.3)$$

Примером такой системы является «шахматная доска». Найдено также значение эффективной проводимости двумерного поля для случая, когда плотность распределения  $\chi = \ln \lambda - \bar{\ln \lambda}$  является четной функцией  $\chi$ :

$$\lambda^* = \exp\left(\ln \bar{\lambda}\right) = \left(\bar{\lambda} \bar{\lambda}^{-1}\right)^{1/2}. \quad (7.4)$$

Известно приближенное решение, полученное методом возмущений [18]:

$$\lambda^* = \bar{\lambda} \left(1 - \frac{\overline{(\lambda - \bar{\lambda})^2}}{n \bar{\lambda}^2}\right) = \bar{\lambda} \exp\left(-\frac{\overline{(\lambda - \bar{\lambda})^2}}{n \bar{\lambda}^2}\right). \quad (7.5)$$

Здесь  $n = 1, 2, 3$  - размерность пространства. Однако при сильных флуктуациях поля проницаемости формула (7.5) дает неверный результат. Если  $\ln \lambda$  распределен по нормальному закону, то выражение (7.5) при  $n = 3$  может быть представлено в виде

$$\lambda^* = \bar{\lambda}^{2/3} \bar{\lambda}^{-1/3}.$$

Последнюю формулу и зависимость (7.4) можно объединить следующим образом:

$$\lambda^* = \bar{\lambda}^{1-1/n} \bar{\lambda}^{-1/n}.$$

Наиболее распространенным методом, позволяющим получать конструктивные результаты для различных неоднородных полей, является проведение вычислительного эксперимента методом Монте-Карло [27, 47]. В этом случае моделируются реализации неоднородного поля проницаемости, потом для каждой из них численно решается краевая задача. Полученные результаты усредняются, и затем вычисляется эффективная проводимость. Если масштаб корреляции неоднородного поля существенно меньше размеров области, этот метод позволяет получать результаты для сильно неоднородных полей.

Практически при компьютерном моделировании пластов определение эффективной проницаемости расчетных блоков гидродинамической модели осуществляется в два этапа:

- в ходе построения геологической модели с использованием геостатистических методов генерируется поле проницаемости, т. е. для каждой ячейки геологической модели вводится некоторое значение в соответствии с заданным распределением;
- для каждой ячейки гидродинамической модели, представляющей собой объединение более мелких блоков геологической модели, вычисляется значение эффективной проницаемости.

Таким образом, при компьютерном моделировании пластов задача определения эффективной проницаемости сводится к вычислению этой характеристики для заданного дискретного распределения, поскольку каждый расчетный блок разбит на элементарные блоки, проницаемости которых известны.

## 7.2. Определение эффективной проницаемости укрупненного расчетного блока

Расчеты с использованием эффективных проницаемостей укрупненных расчетных блоков должны давать те же значения расходов через укрупненные блоки, что и расчеты с использованием более детальных сеток, когда укрупненный блок является неоднородным, состоящим из совокупности элементарных блоков, различающихся по проницаемости. В этом разделе описываются наиболее распространенные методы определения эффективной проницаемости при укрупнении масштаба [39,40,43,48].

**Метод давлений (метод прямого имитационного моделирования)** [39,43]. Этот метод является наиболее трудоемким, но, по-видимому, наилучшим образом учитывает исходное распределение неоднородности. Он состоит в том, что однофазная фильтрация рассчитывается на модели с мелкой сеткой, а затем при тех же начальных и граничных условиях подбираются такие эффективные параметры для модели с укрупненными блоками, при которых воспроизводятся те же потоки и давления, что и на модели с мелкой сеткой. Эта задача решается для каждого укрупненного блока. Получаемые результаты существенно зависят от граничных условий. Наиболее часто решается уравнение эллиптического типа  $\operatorname{div}[k(x, y, z)\nabla p] = 0$  для области в форме шестиугранника с непроницаемыми боковыми гранями и заданными давлениями на входном и выходном сечениях  $p_{in} = 1$  и  $p_{out} = 0$  соответственно. Для учета эффективной анизотропии вычисляются эффективные проницаемости вдоль направлений  $x$ ,  $y$  и  $z$ . В результате определяется диагональный тензор эффективных проницаемостей, который может быть непосредственно использован в программах гидродинамического моделирования.

На самом деле, при проведении гидродинамических расчетов на сеточных моделях учитываются не эффективные проницаемости крупных блоков, а проводимости между центрами блоков, имеющих общие грани. Поэтому основная задача состоит именно в вычислении межблочных проводимостей:

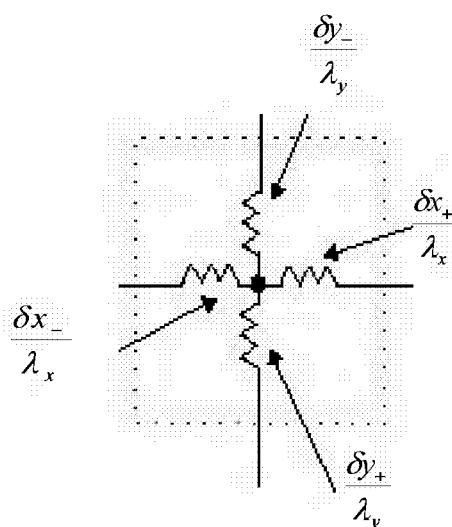
$$\lambda_{xi+0.5}^* = \left( \delta x_{i+}^* + \delta x_{i+1-}^* \right) \left( \frac{\delta x_{i+}^*}{\lambda_{xi+}^*} + \frac{\delta x_{i+1-}^*}{\lambda_{xi+1-}^*} \right)^{-1}. \quad (7.6)$$

Здесь для примера представлено выражение для проводимости вдоль направления  $x$ . Звездочкой помечены характеристики укрупненного блока в отличие от аналогичных параметров элементарных блоков. В выражение (7.6) входят **полублоочные** проводимости  $\lambda_{xi+}^*$  и  $\lambda_{xi-}^*$  – проводимости между центральным

сечением блока и соответствующими боковыми гранями. Их значения могут различаться, поскольку крупный блок изначально является неоднородным и разбит на элементарные блоки. Таким образом, в общем случае при трехмерном моделировании для каждого укрупненного блока необходимо решить шесть задач для полублоков и вычислить шесть полублочных проводимостей – по две в каждом направлении. В каждой из этих задач задается равномерное распределение давления на двух противоположных поверхностях полублока и вычисляется величина потока от одной из этих поверхностей к другой, в предположении отсутствия течения через боковые грани. Затем определяются полублочные проводимости в соответствующих направлениях:

$$\begin{aligned}\lambda_{xi\pm}^* &= q_{xi\pm}^* \delta x_{i\pm}^* / (p_{in} - p_{out}), \\ \lambda_{yj\pm}^* &= q_{yj\pm}^* \delta y_{j\pm}^* / (p_{in} - p_{out}) \\ \lambda_{zk\pm}^* &= q_{zk\pm}^* \delta z_{k\pm}^* / (p_{in} - p_{out}).\end{aligned}\quad (7.7)$$

В дискретном случае, когда укрупненный блок состоит из элементарных блоков, проводимости которых постоянны, поиск каждой полублочной проводимости для укрупненного блока аналогичен решению эквивалентной электрической задачи. Эквивалентное сопротивление элементарного блока в направлении  $x$  обратно пропорционально его проводимости  $\Delta x_i / \lambda_{xi} = (\delta x_{i-} + \delta x_{i+}) / \lambda_{xi}$ . Оно эквивалентно двум включенным последовательно сопротивлениям полублоков  $\delta x_{i-} / \lambda_{xi}$  и  $\delta x_{i+} / \lambda_{xi}$ . Аналогично можно использовать по два сопротивления для моделирования проводимостей элементарного блока в направлениях  $y$  и  $z$  соответственно. Таким образом, каждый элементарный блок может быть представлен цепью сопротивлений, которая в двумерном случае имеет вид креста, рис. 7.1.



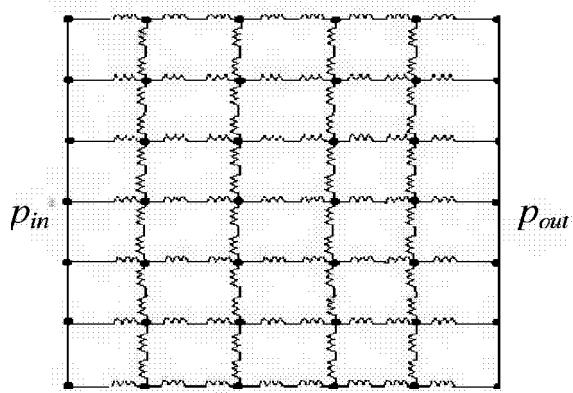
**Рис. 7.1. Электрическая цепь для элементарного блока.**

Для вычисления проводимости полублока укрупненного блока необходимо найти эквивалентное электрическое сопротивление сети, имеющей вид решетки. Пример такой сети для двумерного случая показан на рис. 7.2. В этом примере полублок состоит из 28 элементарных блоков: четырех блоков вдоль направления  $x$  и семи блоков в направлении  $y$ . Узлы решетки являются центрами элементарных блоков. Сопротивление каждого резистора обратно пропорционально одной из полублочных проводимостей элементарного блока. По аналогии, электрическое напряжение эквивалентно перепаду давления, а направление тока совпадает с направлением течения жидкости. У элементарных блоков, примыкающих к боковым граням укрупненного блока, вследствие условия на отсутствие потока через эти поверхности отсутствуют соответствующие резисторы. На входной и выходной грани полублока задано постоянное давление или потенциал  $p_{in}$  и  $p_{out}$ .

Для расчета полублочной проводимости используются законы Ома и Кирхгофа. В результате получается система линейных уравнений для определения напряжений (давлений) в каждом узле электрической цепи. Количество уравнений в системе равно количеству элементарных блоков в половине крупного блока. Система может быть решена как прямым методом с использованием ленточного алгоритма, так и итерационно. После нахождения давления в узлах поток через левую поверхность и соответствующая полублочная проводимость укрупненного блока вычисляются по формулам:

$$q_{xi-}^* = \sum_{j=1}^{NY} \sum_{k=1}^{NZ} \frac{\lambda_{x1jk-}}{\delta x_{1jk-}} (p_{in} - p_{1jk-}); \\ \lambda_{xi-}^* = q_{xi-}^* \delta x_{i-} / (p_{in} - p_{out}). \quad (7.8)$$

Здесь  $NX, NY, NZ$  – количество элементарных блоков внутри укрупненного в соответствующих направлениях. Аналогично вычисляются остальные полублочные проводимости.



**Рис. 7.2. Электрическая сеть для расчета полублочной проводимости**

Основная трудность в использовании прямого метода связана с необходимостью решения систем линейных уравнений большой размерности, поэтому были разработаны также приближенные методы вычисления полублочных проводимостей.

**Метод ренормализации** [48] предлагает более быстрый, но несколько менее точный способ вычисления эффективных проницаемостей. Этот метод позволяет быстро вычислять эффективную проводимость для очень больших сеток. Суть метода состоит в иерархическом подходе, когда большая задача разбивается на дерево решаемых задач. Строятся последовательно укрупняющиеся решетки проводников, проводимость которых вычисляется на основе прямых выражений. На первом этапе каждое соединение элементарных блоков  $2 \times 2 \times 2$  заменяется одним более крупным блоком и вычисляется эффективная проводимость этого блока. Затем таким же образом объединяются соединения более крупных блоков, и т. д. Процедура многократно повторяется и в результате позволяет быстро оценить эффективную проницаемость укрупненного блока, рис. 7.3. Для непосредственного вычисления эффективной проводимости последовательности из четырех ячеек в двумерном случае и из восьми ячеек в трехмерном случае используется электрогидродинамическая аналогия, рис. 7.4. При определении результирующего сопротивления применяется преобразование соединения сопротивлений треугольником в звезду.

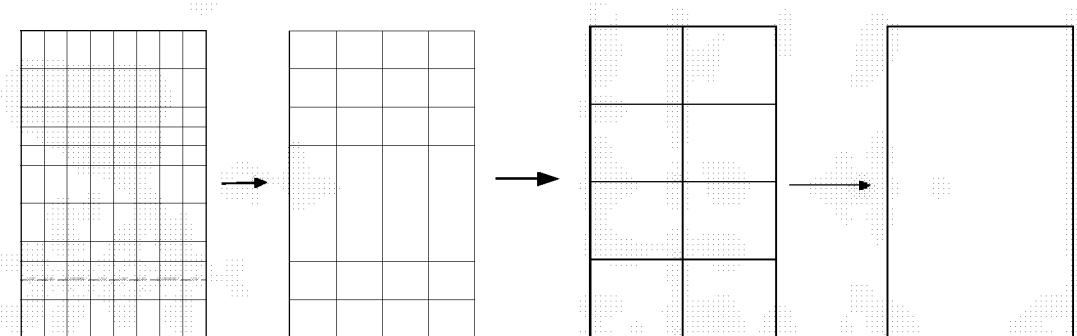


Рис. 7.3. Процедура ренормализации.

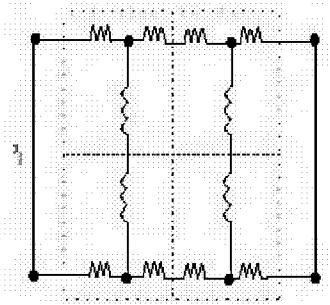


Рис. 7.4. Элементарное соединение в методе ренормализации (двумерный случай).

**Метод гармонического суммирования** основан на вычислении гармонического и арифметического среднего сопротивлений для различных последовательностей блоков. Этот метод увеличивает скорость вычислений, но, возможно, имеет меньшую точность. Наиболее простыми являются следующие варианты метода: метод параллельных трубок, метод серий и гармоническое среднее методов параллельных трубок и серий. В **методе параллельных трубок** рассматриваются последовательности элементарных блоков в виде трубок от входного сечения к выходному. Схема соответствующей электрической цепи представлена на рис. 7.5. В **методе серий** предполагается, что все элементарные блоки в направлении, ортогональном течению, полностью сообщаются, а затем все слои объединяются в серии. Схема соответствующей электрической цепи представлена на рис. 7.6.

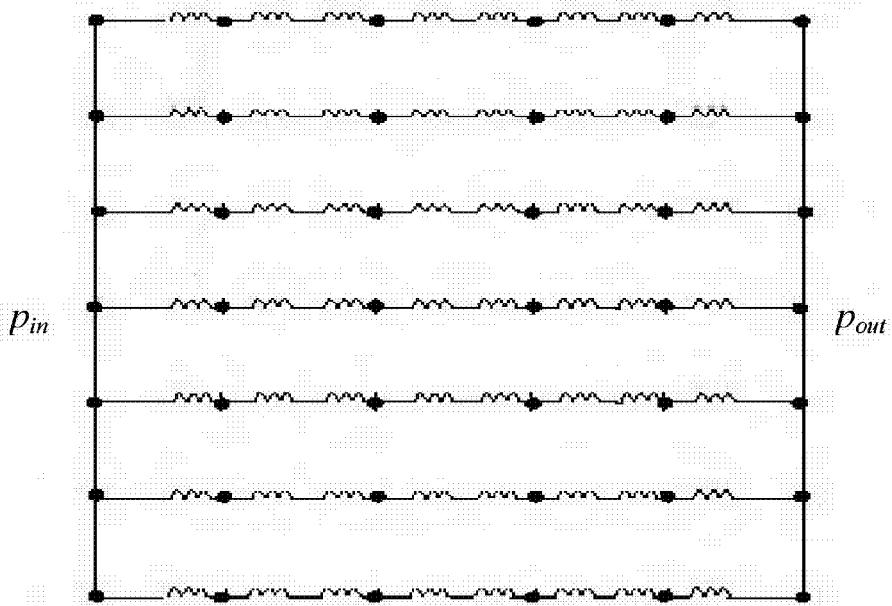


Рис. 7.5. Электрическая цепь для метода параллельных трубок.

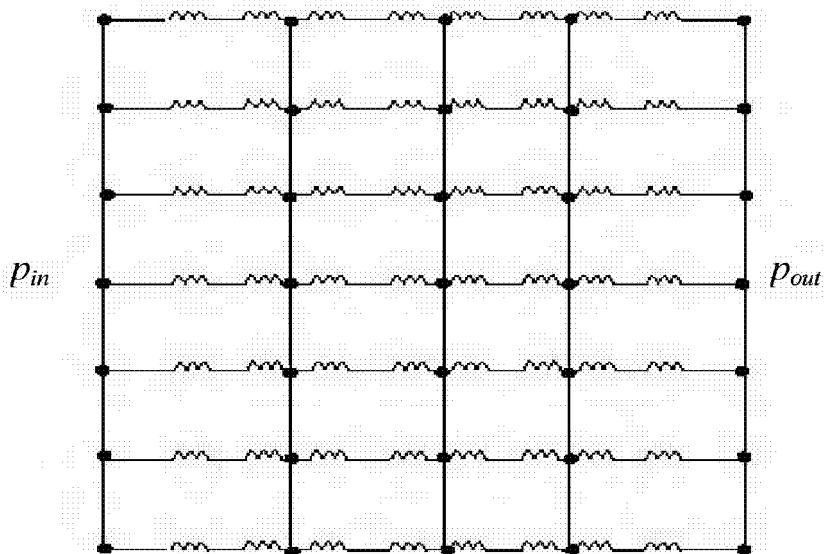


Рис. 7.6. Электрическая цепь для метода серий.

Сопоставляя рис. 7.4 – 7.6, можно увидеть, что метод параллельных трубок дает заниженные, а метод серий – завышенные значения проводимости, поэтому используется еще и третий метод, в котором полублочные проводимости вычисляются как **гармоническое среднее результатов метода параллельных трубок и метода серий**. Этот метод дает намного более точные результаты, чем два предыдущих.

Следует также упомянуть другие методы определения эффективной проводимости. **Метод эффективной среды** [18,48] или самосогласования состоит в том, что при расчете поля внутри единичного включения окружающая его неоднородная среда замещается эффективной однородной средой, проводимость которой равна искомой эффективной проводимости. Уравнение для отыскания эффективной проводимости получается в результате усреднения рассчитанного поля давления по всем включениям и приравнивания его заданному макроскопическому полю. В асимптотическом методе **гомогенизации** [6,24,34] предполагается, что эффективная среда получается из реальной, если устремить масштаб неоднородности к нулю. **Вариационные методы** [7,31] основаны на вариационных принципах механики: минимума потенциальной и дополнительной энергии. Использование этих методов позволяет получить двусторонние оценки для эффективной проницаемости. Причем «вилка» будет тем уже, чем больше информации о рассматриваемой системе используется при построении границ. Если не использовать никакой дополнительной информации, то вариационные принципы дают универсальную оценку: эффективная проводимость любой среды заключена между средней гармонической и средней арифметической проводимостями. **Метод перколоции** [26] основан на рассмотрении решеточных моделей пористой среды, которая представляется в виде несвязных систем каналов.

**Основные ограничения при укрупнении масштаба** для однофазной фильтрации связаны с тем, что по результату почти невозможно узнать о предположениях, сделанных в ходе его получения. До сих пор не существует надежной теории, однозначно определяющей качество аппроксимации для осредненного значения. Для некоторых случаев вообще не удается получить хорошие оценки эффективной проницаемости, например, в ситуации, когда имеются сильные перетоки через углы сеточных блоков. Кроме того, значения эффективной проницаемости зависят от разностного оператора, применяемого для расчета поля давлений на исходной мелкой сетке. Это может иметь особое значение при вычислении эффективных проницаемостей вдоль вертикали, т. к. в этом случае геометрические размеры сеточных блоков в разных направлениях существенно различаются.

Важную проблему, связанную с оценкой эффективной проницаемости при укрупнении масштаба, представляет определение эффективных коэффициентов продуктивности скважин для укрупненных моделей [40]. Это связано с тем, что расчетный коэффициент продуктивности скважины в укрупненной модели и, соответственно, ее дебит, будут определяться эффективной проницаемостью укрупненного блока, тогда как изначально фактическая проницаемость пласта в зоне расположения скважины могла быть совсем иной.

При укрупнении масштаба следует иметь в виду, что в некоторых случаях способы объединения блоков мелкой сетки в крупные блоки влияют на результат. Ни одна из процедур укрупнения масштаба не дает критериев оценки качества аппроксимации, поэтому необходимо применять независимые способы проверки. Однако в случае осмысленного использования однофазное укрупнение масштаба может быть очень эффективным инструментом улучшения качества гидродинамического моделирования, поскольку оно обеспечивает более детальный учет геологического строения.

### 7.3. Укрупнение масштаба при двухфазной фильтрации

Очевидно, что при укрупнении масштаба в случае многофазной фильтрации необходимо также масштабировать данные о фазовых проницаемостях [38,40]. Например, при наличии тонкого высокопроводящего слоя внутри укрупненного блока неизбежны ускоренные прорывы воды, которые нельзя будет получить на укрупненной модели без модификации фазовых проницаемостей. Методы укрупнения масштаба в случае многофазной фильтрации являются в настоящее время областью активных научных исследований. Некоторые авторы предлагают использовать для масштабирования фазовых проницаемостей те же методы, что и для однофазного осреднения. Другие показывают возможность использования в укрупненных моделях исходных фазовых проницаемостей. Дополнительные возможности для укрупнения масштаба фазовых проницаемостей появляются при использовании тех же подходов, что и при построении модифицированных фазовых проницаемостей (см. раздел 6.1), но для каждого сеточного блока. Наилучшие результаты могут быть получены в случае, когда для укрупненного блока допустимо предположение о капиллярно-гравитационном равновесии либо о преобладании вязкостных сил. При переходе от масштаба керна к масштабу блоков геологической модели, по-видимому, может быть принята гипотеза о капиллярном равновесии, т. к. капиллярные силы наиболее значимы на малых масштабах.

При укрупнении масштаба для многофазной фильтрации эффективные относительные проницаемости могут определяться для каждого укрупненного блока, поэтому возникает проблема группирования кривых и уменьшения их количества. Один из способов ее решения – объединение на основе близости значений некоторых ключевых параметров. Например, для двухфазной фильтрации такими параметрами могут быть насыщенность на фронте вытеснения, производная функции Баклея – Леверетта в этой точке и минимум функции суммарной подвижности фаз [40].

В целом, процедуры укрупнения масштаба для многофазной фильтрации развиты гораздо хуже, чем для однофазной. Методы и алгоритмы вычисления относительных проницаемостей укрупненных блоков находятся на стадии изучения и создания, поэтому еще не имеется значительного опыта их практического использования.

## **Глава 8**

# **ВОСПРОИЗВЕДЕНИЕ ИСТОРИИ РАЗРАБОТКИ. ПОСТОЯННОДЕЙСТВУЮЩИЕ МОДЕЛИ. ПРОГНОЗ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РАЗРАБОТКИ С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛИ**

### **8.1. Воспроизведение истории разработки – неотъемлемый этап моделирования**

Высокая степень неопределенности исходной информации при построении модели пласта делает необходимым этапом моделирования адаптацию модели по данным наблюдений. На этом этапе путем решения обратной задачи осуществляется идентификация основных фильтрационно-емкостных параметров пласта, заложенных в модель. Этот процесс называется воспроизведением истории разработки [35,50]. Корректируются обычно те параметры, которые имеют наибольшую неопределенность и при этом сильнее влияют на решение; чаще всего это – абсолютные и фазовые проницаемости, объем законтурной области, коэффициент сжимаемости пор, коэффициенты продуктивности и приемистости скважин.

При воспроизведении истории разработки обычно известны фактические поля давлений, добыча и закачка каждого компонента по скважинам. Обратная задача решается итерационно до тех пор, пока модель фильтрации не воспроизведет распределение давления и насыщенностей, которые возникают в результате приложенного воздействия – заданной добычи и закачки скважин. Процедура идентификации параметров пласта может быть автоматизированной или осуществляться вручную. Каждый из этих способов имеет свои достоинства и недостатки. Несмотря на высокую трудоемкость, наиболее часто используемым и предпочтительным является способ ручной подгонки истории. В ходе ручного воспроизведения истории улучшается понимание процессов, происходящих в пласте; могут быть определены именно те параметры, к изменению которых наиболее чувствительна модель. В этом случае могут рассматриваться более сложные модели и в полной мере используются знания и опыт инженера. При автоматизированной подгонке производятся многократные расчеты по модели с целью отыскания тех значений

выбранных параметров пласта, при которых разница между наблюдаемыми и расчетными показателями разработки минимальная. Поэтому при автоматизированном воспроизведении истории обычно используют упрощенные модели и ограничивают набор корректируемых параметров. Алгоритмы автоматизированной идентификации модели обычно основаны на поиске минимума функционала:

$$S = \sum_{i=1}^n w_i (X_i - X_{oi})^2.$$

Здесь  $w_i$  – весовые коэффициенты,  $X_i$  и  $X_{oi}$  – расчетные и наблюдаемые значения показателей, по которым ведется подгонка. Это могут быть значения пластового давления, обводненности и газового фактора по отдельным скважинам или по их группам на заданные моменты времени и т. д. Весовые коэффициенты обычно равны единице, но в зависимости от целей подгонки могут изменяться для того, чтобы обеспечить различное влияние отдельных факторов на результирующее решение.

Как известно, обратная задача для системы нелинейных дифференциальных уравнений может иметь не единственное решение, поэтому нельзя принимать найденные в результате идентификации значения параметров пласта в качестве истинных. Особенности строения пласта, выявленные в ходе воспроизведения истории разработки, должны быть непосредственно подтверждены или опровергнуты непосредственными исследованиями.

Даже при хорошей подгонке истории по имеющимся данным нет никакой гарантии, что новые фактические данные будут воспроизведены моделью без ее дополнительной корректировки. Поэтому при решении задачи идентификации модели необходимо использовать всю имеющуюся информацию в наиболее полном объеме.

## **8.2. Некоторые рекомендации по воспроизведению истории разработки**

Четких правил, руководствуясь которыми можно было бы быстро и качественно воспроизвести историю, не существует, однако при решении задачи идентификации модели важно понимать, как тот или иной параметр пласта влияет на наблюдаемые показатели [35]:

- средний уровень пластового давления,
- распределение давлений в пласте,
- распределение насыщенности,
- забойные давления.

**Средний уровень пластового давления** определяется в основном суммарным поровым объемом  $V_p$ , в том числе объемом законтурной области, и сжимаемостью пластовой системы  $c_t$ :

$$c_t = -\frac{1}{V_p} \frac{\partial V_p}{\partial p}, \quad c_t = (1-m)c_r + m(c_o s_o + c_w s_w + c_g s_g).$$

Поскольку поровый объем пласта определяет запасы углеводородов, этот параметр не может сильно варьироваться при воспроизведении истории. Сжимаемость флюидов и породы измеряется в лаборатории. Поэтому основные возможности корректировки модели связаны с подбором объема законтурной области. Важно не только правильно оценить объем законтурной области, но и степень ее связи с основным пластом.

**Распределение давления в пласте** формируется в результате фильтрации и определяется полем проводимостей. Для его корректировки можно модифицировать абсолютную и относительные проницаемости. При этом следует учесть, что изменение фазовых проницаемостей в области расположения скважин приведет к изменению соотношения фаз в потоке добываемой продукции. Если предполагается наличие в пласте нарушений, являющихся полными или частичными барьерами для фильтрации, при подгонке распределения давления уточняют расположение и проводимость этих барьеров.

**Распределение насыщенности** изменяется в результате работы добывающих и нагнетательных скважин и влияет на текущие значения обводненности и газового фактора. Соотношения воды, нефти и газа в продукции скважин (в поверхностных условиях) определяются отношением текущих подвижностей фаз и объемных коэффициентов:

$$\frac{Q_{0w}}{Q_{0o}} = \frac{k_{rw} \mu_o B_o}{k_{ro} \mu_w B_w};$$

$$\frac{Q_{0g}}{Q_{0o}} = R + \frac{k_{rg} \mu_o B_o}{k_{ro} \mu_g B_g}.$$

Изменения расчетной доли фаз в добываемой продукции можно добиться путем изменения фазовых проницаемостей. В некоторых программах допускается задание отдельных фазовых проницаемостей для каждой скважины или для групп скважин. В этом случае подгонка может быть осуществлена локальным изменением этих параметров. При корректировке фазовых проницаемостей может измениться и распределение давления. При моделировании процессов конусообразования для подгонки показателей по скважинам иногда изменяют вертикальную анизотропию или моделируют

горизонтальные глинистые барьеры, отделяющие слои пласта с разным насыщением.

Воспроизведение **забойного давления** при заданных дебитах скважин осуществляется путем подбора коэффициентов продуктивности или приемистости скважин, определяющих их пропускную способность. Если пластовое давление  $p_0$  в ячейке, в которой расположена скважина, уже воспроизведено на модели, то коэффициент продуктивности  $PI$  должен удовлетворять соотношению:

$$Q_0 = PI(p_0 - p_w).$$

Правильное определение этих коэффициентов важно для корректного прогнозирования технологических показателей работы скважин.

### **8.3. Процедура воспроизведения истории разработки**

В целом, процедуру воспроизведения истории разработки можно представить следующим образом:

- 1. Определение целей воспроизведения истории.** При воспроизведении истории проверяется и идентифицируется построенная модель пласта; могут быть уточнены особенности его строения, объем законтурной области; выявлены недостоверные исходные данные и параметры, к которым наиболее чувствительна модель; определены отклонения от нормальных, средних для данной площади, условий разработки, как в отдельных скважинах, так и на некоторых участках. Степень детальности идентификации моделей, которые будут использоваться только для прогноза интегральных показателей разработки или еще и для управления работой отдельных скважин, должна быть различной.
- 2. Выбор метода воспроизведения истории – ручного или автоматизированного – определяется целями работы, доступными временными и материальными ресурсами.**
- 3. Выбор целевой функции при воспроизведении истории,** т. е. фактических показателей разработки, которые будут подгоняться, и критерия успешности процедуры, осуществляется с учетом доступности и качества исходных данных о добыче и закачке и целей исследования. При высокой достоверности исходной информации желательно стремиться к совпадению расчетных и фактических показателей по отдельным скважинам и, следовательно, по объекту в целом. При несовпадении надо выявить причины расхождений, возможна постановка задачи по проведению дополнительных

геофизических и гидродинамических исследований с целью уточнения скин-фактора по отдельным скважинам, определения заколонных перетоков, ухода закачиваемой воды в другие пласты и т. п. В некоторых случаях, особенно при низком качестве исходной информации, стремятся только к воспроизведению интегральных показателей по участку или месторождению, не добиваясь совпадения по скважинам. Иногда помимо интегральных показателей подгоняют показатели только по высокодебитным скважинам.

- 4. Определение параметров пласта, которые могут быть изменены при воспроизведении истории.** Как правило, эти параметры характеризуются наибольшей степенью неопределенности и при этом существенно влияют на поведение пласта. К ним относятся объем и степень активности законтурной области, поровый объем и сжимаемость пластовой системы, распределение абсолютной и фазовых проницаемостей. Параметры и свойства пласта, которые могут быть подвергнуты корректировке, ранжируются по степени достоверности исходной информации о них. В некоторых случаях для подтверждения или опровержения гипотез о строении и свойствах пласта, выдвинутых в ходе воспроизведения истории, могут быть поставлены специальные промысловые эксперименты.
- 5. Проведение многовариантных расчетов с целью идентификации модели.** Сначала на модели воспроизводится изменение уровней и распределения пластового давления во времени. Эти расчеты рекомендуется проводить, задавая граничные условия на скважинах в виде суммарного отбора или закачки всех фаз, т. к. в этом случае в модели повторяется фактический суммарный объем флюидов в пласте. На следующей стадии подгоняется распределение насыщенности, причем сначала воспроизводятся интегральные показатели: суммарный отбор нефти, воды и газа по участкам или пласту в целом. На этой стадии можно использовать те же граничные условия на скважинах и в результате получить единые для каждого участка или пласта фазовые проницаемости. На следующей стадии воспроизводятся показатели по отдельным скважинам. С этой целью обычно уточняют фазовые проницаемости вокруг скважин. При воспроизведении насыщенности может измениться поле давления, поэтому процедуру настройки модели обычно проводят путем нескольких итераций. И наконец, после того как поля давления и насыщенностей восстановлены, подбирают коэффициенты продуктивности и приемистости таким образом, чтобы воспроизвести забойные давления по скважинам.

**6. Проверка критерия воспроизведения истории, определенного в п. 3.** Если критерий выполнен, то задача идентификации модели решена. В противном случае, осуществляется переход к п. 4 с целью выбора новых параметров для корректировки в соответствии с ранжированием.

Задача воспроизведения истории является очень сложной и неоднозначной, поэтому далеко не всегда удается качественно воспроизвести показатели по всем скважинам за весь период времени. Если основная цель моделирования – дальнейшее прогнозирование технологических показателей разработки, то следует стремиться к тому, чтобы наилучшим образом был воспроизведен последний период истории, непосредственно предшествующий прогнозному. Если модель будет использоваться еще и для расстановки новых скважин и прогнозирования динамики их обводнения, то необходимо также качественно воспроизвести момент прорыва воды к скважинам и показатели их работы на раннем этапе.

Построенная в результате модель объекта разработки используется затем для прогнозирования и планирования добычи, оценки запасов, комплексной оптимизации пласта. Необходимо иметь в виду, что достоверность прогноза снижается по мере увеличения его срока. Поэтому по мере накопления информации об объекте модель пласта должна уточняться, совершенствоваться, отражать и воспроизводить новую информацию о пласте и технологические решения, применяемые на месторождении. Только такая модель может использоваться для дальнейшего управления процессом разработки. В этом случае можно говорить о **постоянно – действующей геолого-технологической модели** месторождения.

#### **8.4. Прогнозирование технологических показателей**

Хотя прогнозирование является обычно заключительным этапом моделирования, возможные сценарии или варианты разработки, которые будут рассматриваться, желательно выработать заранее для того, чтобы выбрать такую модель фильтрации, которая позволит их проанализировать, а также уточнить путем воспроизведения истории или в ходе дополнительных промысловых экспериментов те параметры пласта, которые могут оказаться существенными для реализации той или иной технологии.

Прогнозирование обычно проводится по нескольким сценариям разработки. В первую очередь, это – базовый вариант, который предусматривает продолжение разработки по тому сценарию, по которому месторождение разрабатывалось до сих пор. Кроме того, рассматриваются варианты, содержащие альтернативные стратегии разработки месторождения. На этапе использования модели для

предсказания поведения пласта в будущем предполагается, что она включает в себя всю доступную информацию об изучаемом объекте. Однако, учитывая, что задача воспроизведения истории имеет неединственное решение, на стадии прогнозирования в некоторых случаях проводят исследование чувствительности модели к варьированию тех параметров пласта, которые могут существенно повлиять на прогнозные показатели, хотя модель и была нечувствительна к их изменению при воспроизведении истории. Для оценки чувствительности рассматриваются дополнительные прогнозные варианты.

При составлении прогнозных вариантов разработки учитывается опыт разработки данного и других аналогичных месторождений, а также технические возможности для реализации предлагаемых новых технологий.

Важной проблемой является моделирование гладкого перехода от истории к прогнозу. При переходе к прогнозированию изменяют граничные условия на скважинах. Воспроизведение истории обычно осуществляется с заданными фактическими дебитами нефти, газа или жидкости. На стадии прогноза эти характеристики подлежат определению и в качестве граничного условия, как правило, задается забойное давление или депрессия, сформировавшиеся к концу периода истории. Изменение граничных условий в некоторых случаях приводит к резкому изменению расчетных показателей работы скважин (например, дебитов). Для того чтобы этого не происходило, необходимо произвести «калибровку» скважин – уточнение коэффициентов продуктивности  $PI$ , которые зависят только от геометрии системы пласт-скважина и свойств призабойной зоны. Фактически эти коэффициенты подбираются таким образом, чтобы дебит каждой скважины не изменялся в момент перехода от истории к прогнозу.

В некоторых случаях последние один или два года истории моделируют в режиме прогноза, тогда «калибровку» скважин можно произвести путем сопоставления фактических и расчетных данных. Если были выявлены расхождения не только по абсолютным значениям дебитов, но и по обводненности или газовому фактору, то «калибровке» подлежат не только коэффициенты  $PI$ , но и фазовые проницаемости для скважин или даже для областей пласта, в которых расположены скважины. Если фактически нефтяная скважина добывает воду или газ, а расчетная обводненность или газовый фактор отличны от нуля, но не совпадают с фактическими данными, то достаточно откорректировать только фазовые проницаемости для скважины. Если же в реальности скважина должна добывать эти флюиды, а в модели они даже не содержатся в подвижном состоянии в ячейке, в которой расположена скважина, следует изменить фазовые проницаемости для пласта.

Помимо граничных условий на стадии прогноза задаются также ограничения на работу скважин. Эти ограничения позволяют моделировать автоматическое отключение скважин или переход от одного вида граничных условий к другому. При воспроизведении истории разработки такие ограничения, как правило, не задаются, поскольку изменение режимов работы скважин в модели на этой стадии определяется фактическими данными и заранее известно. Примерный перечень возможных ограничений приведен в разделе 4.5.

Нельзя ожидать, что прогнозные расчеты позволят предсказать поведение каждой скважины. Слишком много неопределенностей имеется при построении модели, и все они не могут быть устраниены при воспроизведении истории разработки. Цель прогнозных расчетов – предсказать на ближайший срок интегральные технологические показатели по пласту в целом и по отдельным достаточно большим участкам. На основе моделей делаются также долгосрочные прогнозы, в том числе и на весь срок разработки, но достоверность этих прогнозов тем ниже, чем на более ранней стадии разработки они проводятся.

После выполнения прогнозного расчета по каждому варианту разработки, полученные результаты анализируются. Строятся графики изменения добычи, закачки, среднего пластового давления и количества скважин во времени. Анализируются дебиты и забойные давления по скважинам; в случае, если получены нереальные значения, модель соответствующей скважины корректируется. Распределения давления и насыщенности на заданные моменты времени выдаются в виде трехмерных изображений, строятся соответствующие карты. Анализ результатов расчетов по базовому варианту помогает сформировать варианты с более эффективной стратегией разработки. В результате сопоставления вариантов и их технико-экономических показателей определяется рекомендуемый сценарий разработки. Несмотря на невысокую достоверность долгосрочных прогнозов абсолютных показателей эксплуатации пласта, относительная разница между показателями, рассчитанными для различных сценариев разработки, обычно менее чувствительна к изменениям модели, поэтому математическое моделирование сейчас является основным инструментом для выбора оптимальной стратегии разработки.

## **Заключение**

В заключение приведем «десять золотых правил» для инженеров, которые занимаются моделированием пластов, составленных одним из крупнейших специалистов в этой области – Азизом [36]:

- 1. Сформулируйте задачу и определите цели исследования.** Перед началом моделирования изучите геолого-физические характеристики пласта и насыщающих его флюидов, а также их динамическое поведение. Прежде всего ясно определите и зафиксируйте цели исследования. Оцените, насколько эти цели реалистичны. Все это поможет выбрать наиболее подходящую модель для исследования.
- 2. Упрощайте.** Используйте наиболее простые модели, отражающие природу пласта, цели исследования и имеющиеся данные. Простые аналитические модели или балансовые расчеты для одиночного блока, на которых основана классическая разработка пластов, – зачастую, это все, что необходимо. В то же время, наиболее сложные из доступных моделей могут не отвечать конкретным потребностям. Следует учитывать возможности и ограничения модели.
- 3. Оценивайте степень взаимодействия различных элементов системы.** Пласт не является изолированным объектом. Он может сообщаться с водонапорной системой и через нее – с другими пластами. Кроме того, пласт сообщается через скважины с наземными сооружениями. Изоляция различных компонентов системы при проведении отдельного исследования часто приводит к неверным результатам из-за пренебрежения взаимодействием различных элементов единой системы. Однако, если возможно, не бойтесь разбивать большую проблему на части. Это приведет не только к значительной экономии, но и к лучшему пониманию сложных механизмов.

- 4. Не думайте, что больше – всегда лучше.** Объем исследования всегда ограничивается вычислительными ресурсами или бюджетом. Инженеры, которые занимаются моделированием, часто полагают, что ни один компьютер не позволяет моделировать именно ту задачу, которую они считают нужным рассматривать, поэтому они просто стремятся увеличивать размерность модели в соответствии с имеющимися вычислительными мощностями. Но увеличение числа расчетных блоков и компонентов не приводит автоматически к увеличению точности и достоверности. В действительности, в некоторых случаях верно обратное. Поэтому необходимо обоснованно определять количество расчетных блоков, используемое в каждом исследовании.
- 5. Доверяйте здравому смыслу.** Помните, что моделирование не является точной наукой. Все модели основаны на предположениях и дают только приближенные решения реальных задач. Следовательно, только хорошее понимание задачи и модели – необходимое условие успеха. Численная аппроксимация может привести к таким «псевдофизическим» феноменам, как численная дисперсия. Используйте свой здравый смысл и опыт, особенно если он основан на анализе промысловых и лабораторных наблюдений. Внимательно проверяйте входные и выходные данные. Проводите простые расчеты методом материального баланса, чтобы проверить результаты расчетов. Уделяйте особое внимание нереальным значениям физических параметров.
- 6. Не ожидайте от модели больше, чем она может дать.** Часто самое большое, что можно получить в результате исследования, – это лишь некоторые указания для относительного сопоставления доступных вариантов. В других случаях можно ожидать гораздо большего, но, не учитывая какой-либо физический механизм при построении модели, нельзя изучить его влияние на процессы в пласте с использованием данной модели.
- 7. Проблема корректировки параметров при воспроизведении истории.** Всегда подвергайте сомнению подбор данных при воспроизведении истории. Помните, что эта задача имеет не единственное решение. Самое разумное решение будет получено только в результате тщательного анализа его приемлемости с физической и геологической точки зрения. Хорошее совпадение истории при нереальных значениях корректируемых параметров приведет к плохому прогнозу. Хорошее качество воспроизведения истории не всегда гарантирует достоверный прогноз.

- 8. Не сглаживайте крайности.** Уделяйте внимание крайним значениям проницаемости (барьерам и каналам). Будьте внимательны при осреднении для того, чтобы не потерять важную информацию о крайних значениях. Никогда не усредняйте крайние значения.
- 9. Уделяйте внимание масштабам измерения и использования параметров.** Величины, измеренные на масштабе керна, не могут непосредственно применяться на масштабах более крупных блоков, однако эти данные должны быть обязательно учтены при определении значений параметров на других масштабах. Осреднение может изменить природу усредняемого параметра. Например, проницаемость может быть скаляром на некоем малом масштабе и тензором на большем масштабе. Даже смысл капиллярного давления и фазовых проницаемостей может различаться на разных масштабах. Кроме того, вследствие осреднения в уравнениях фильтрации может появиться дисперсионное слагаемое.
- 10. Не скучитесь на необходимые лабораторные исследования.** Модели не заменяют хороших лабораторных экспериментов, которые ставятся для приобретения понимания природы моделируемого процесса или для измерения значимых параметров уравнений, которые решаются при моделировании. Планируйте лабораторную работу с учетом разумного использования полученной информации. Научитесь тому, как масштабировать данные.

## **Литература**

1. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. – М.:Недра, 1982. – 408 с.
2. Амикс Д., Басс Д., Уайтинг Р. Физика нефтяного пласта. – М.: Гостоптехиздат, 1962. – 572 с.
3. Баренблatt Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в пористых пластах.– М.: Недра, 1984.– 208 с.
4. Баренблatt Г.И., Желтов Ю.П., Kochina И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах./Прикл. матем. и мех. – 1960. – Т. 24. – № 5. – С. 852–864.
5. Басниев К.С., Kochina И.Н., Максимов В.М. Подземная гидродинамика.– М.: Недра, 1993.– 416 с.
6. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
7. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. – М.: Наука, 1983. – 448 с.
8. Голф–Рахт Т.Д. Основы нефтепромысловой геологии и разработки трещиноватых коллекторов.– М.: Недра, 1986.– 608 с.
9. Данилов В.Л., Кац Р.М. Гидродинамические расчеты взаимного вытеснения жидкостей в пористой среде. – М.: Недра, 1980.– 264 с.
- 10.Дыхне А.М. Проводимость двумерной двухфазной системы// Журн. эксп. техн. физики. – 1970. – Т.59. – Вып. 1. – С. 111–115.

- 11.Каневская Р.Д. Асимптотический анализ влияния капиллярных и гравитационных сил на двумерный фильтрационный перенос двухфазных систем.// Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.– 1988.– № 4.– С. 88–95.
- 12.Каневская Р.Д. Влияние неполноты вытеснения нефти водой в отдельных пропластках на вид модифицированных фазовых проницаемостей слоистого пласта.// Сб. науч. тр. ВНИИ.– Вып. 103.– М., 1988.– С.110–121.
- 13.Каневская Р.Д. Математическое моделирование разработки месторождений нефти и газа с применением гидравлического разрыва пласта. – М.: Недра, 1999.– 213 с.
- 14.Кац Р.М., Андриасов А.Р. Математическая модель трехфазной фильтрации в трещиновато–пористой среде.// Сб. науч. тр. ВНИИ.–М., 1986.– Вып. 95.– С. 61–66.
- 15.Кричлоу Г.Б. Современная разработка нефтяных месторождений – проблемы моделирования.– М.: Недра, 1979.– 303 с.
- 16.Курбанов А.К. О некоторых обобщениях уравнений фильтрации двухфазной жидкости.// Науч.–техн. сб. ВНИИ.–М., 1961.– Вып. 15.– С. 32–38.
- 17.Курбанов А.К., Атанов Г.А. К вопросу о вытеснении нефти водой из неоднородного пласта.// Нефть и газ Тюмени.– 1974.– Вып. 13.– С. 36–38.
- 18.Ландау Л.Д. Электродинамика сплошных сред. – М.: Физматгиз, 1966. – 415 с.
- 19.Максимов М.М., Рыбицкая Л.П. Математическое моделирование процессов разработки нефтяных месторождений.– М.: Недра, 1976.– 264 с.
- 20.Маскет М. Физические основы технологии добычи нефти. – М.: Гостоптехиздат, 1953.– 606 с.
- 21.Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 688 с.
- 22.Розенберг М.Д., Кундин С.А. Многофазная многокомпонентная фильтрация при добыче нефти и газа. – М.: Недра, 1976. – 335 с.

23. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 552 с.
24. Санчес–Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. – М.: Мир, 1984. – 472 с.
25. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
26. Селяков В.И., Кадет В.И. Перколяционные модели процессов переноса в микронеоднородных средах. – М.: Недра, 1995. – 22 с.
27. Соболь И.М. Численные методы Монте–Карло. – М.: Наука, 1973.
28. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – М.: Физматгиз, 1963.
29. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. – М.: Гостоптехиздат, 1963. – 346 с.
30. Шалимов Б.В., Швидлер М.И. О влиянии сетки на точность расчета гидродинамических показателей при численном моделировании пласта.// Сб. науч. тр. ВНИИ.– Вып. 106. – М, 1991. – С.25–38.
31. Швидлер М.И. Статистическая гидродинамика пористых сред. – М.: Недра, 1985. – 288 с.
32. Швидлер М.И., Леви Б.И. Одномерная фильтрация несмешивающихся жидкостей. – М.: Недра, 1970. – 156 с.
33. Эфрос Д.А. Исследования фильтрации неоднородных систем. – Л.: Гостоптехиздат, 1963. – 352 с.
34. Amaziane B., Bourgeat A., Koebbe J. Numerical simulation and homogenization of two-phase flow in heterogeneous porous media.//Transport in porous media. – 1991. – № 6. – P. 519–538.
35. Aziz K. Notes for petroleum reservoir simulation. – Stanford University, Stanford, California. – 1994. – 471 pp.
36. Aziz K. Ten golden rules for simulation engineers. // J. Petrol. Technol.– 1989.–V.41, № 11.– P. 1157.

- 37.Babu D.K., Odeh A.S. Productivity of a horizontal well. // SPE Res. Eng. – 1989. – № 4. – P. 417–421.
- 38.Barker J.W., Thibeau S. A critical review of the use of pseudorelative permeabilities for upscaling.//SPE Res. Eng. – 1997.– № 2.–P. 138–143.
- 39.Begg S.H., Carter R.R., Dranfield P. Assigning effective values to simulator gridblock parameters for heterogeneous reservoirs.// Spe res.eng. –1989. – № 4. – p.455–470.
- 40.Christie M-A. Upscaling for reservoir simulation.// J. Petrol. Technol. – 1996. – V. 48, № 11. – P.1004–1010.
- 41.Coats K.H., Dempsey T.K., Henderson T.H. The use of vertical equilibrium in two-dimensional simulation of three-dimensional reservoir performance. // SPE Journal. –1971. – V.11, № 1.– P.63–71.
- 42.Coats K.H., Nielsen R.L., Terhune M.H., Weber A.G. Simulation of three-dimensional two-phase flow in oil and gas reservoirs. // SPE Journal. – 1967. – V. 7, № 4. – P. 377–388.
- 43.Durlofsky L.J. Numerical calculation of equivalent gridblock permeability tensors for heterogeneous porous media.// Water Resources Research. – 1991. – V. 27, № 5. – P. 699–711.
- 44.Economides M.J., Nolte K.G. Reservoir Stimulation.– Prentice Hall, Eglewood Cliffs, New Jersey 07632.– 1989.– 430 pp.
- 45.Ertekin T., Abou-Kassem J.H., King G.R. Basic applied reservoir simulation. – Richardson, Texas. – 2001. – 406 pp.
- 46.Hearn C.L. Simulation of stratified waterflooding by pseudorelative permeability curves.//J. Petrol. Technol. – 1971. – V. 23, № 7. – P.805–813.
- 47.Isaaks E.H., Srivastava R.M. An introduction to Applied geostatistics. – New York, Oxford: Oxford University Press, 1989. – 562 pp.
- 48.King P.R. The use of renormalization for calculating effective permeability.// Transport in porous media. – 1989. – V. 4, № 1. – P.37–58.

- 49.Kyte J.R., Berry D.W. New pseudofunctions to control numerical dispersion.// SPE Journal. –1975.– V. 15, № 3. – P. 269–276.
- 50.Mattax C.C., Dalton R.L. Reservoir simulation. – SPE Monograph vol. 13. – Richardson, Texas. – 1990. – 174 pp.
- 51.Peaceman D.W. Fundamentals of numerical reservoir simulation. – Amsterdam – Oxford – New York: Elsevier Scientific Publishing Company, 1977. – 176 pp.
- 52.Peaceman D.W. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation. // SPE Journal. – 1978.– V.18, № 3.– P. 183–194.
- 53.Peaceman D.W. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation with nonsquare grid blocks and anisotropic permeability. // SPE Journal. – 1983. – V.23, № 3. – P. 531–543.
54. Peaceman D.W. Representation of horizontal well in numerical reservoir simulation. // SPE 21217 Advanced technology Series, April 1993. – V.1, № 1. – P. 153–162.
- 55.Stone H.L. Estimation of three-phase relative permeability and residual oil data.// J. Canad. Petrol. Technol. – 1973. – V.12, № 4. – P. 53–61.
- 56.Stone H.L. Probability model for estimating three-phase relative permeability.// J. Petrol. Technol. – 1970. – V.22, № 2. – P. 214–218.
- 57.Stone H.L. Rigorous black–oil pseudofunctions.// Paper SPE 21207. – 1991.
- 58.Todd M.R., Longstaff W.J. The development, testing and application of a numerical simulator for predicting miscible flood performance.// J. Petrol. Technol. –1972. – V. 24, № 7. – P. 874–882.

# Оглавление

Введение.	5
Глава 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА.	12
1.1. Закон сохранения массы.	12
1.2. Закон Дарси.	16
1.3. Модели фильтрации.	17
1.4. Свойства флюидов и породы.	22
1.6. Начальные условия.	26
1.7. Граничные условия.	27
Глава 2. МЕТОДЫ ДИСКРЕТИЗАЦИИ УРАВНЕНИЙ И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ.	30
2.1. Дискретизация по пространству.	31
2.2. Дискретизация по времени.	33
2.3. Дискретизация уравнений в двух– и трехмерном случае.	36
2.4. Погрешности дискретизации.	37
2.5. Типы сеток и задание граничных условий.	41
2.6. Понятие о материальном балансе.	44
Глава 3. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МНОГОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ.	46
3.1. Дискретизация производной по времени.	46
3.2. Дискретизация производных по пространству, аппроксимация проводимостей.	47
3.3. Аппроксимация проводимостей по времени.	51
3.4. Аппроксимация слагаемых, учитывающих источники и стоки.	53
3.5. Неявная схема для уравнений многофазной фильтрации. Метод совместного решения (SS–метод).	54
3.6. Метод неявный по давлению, явный по насыщенности (IMPES–).	59
3.7. Анализ устойчивости и выбор шага по времени для IMPES– и SS–методов.	61
Глава 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ СКВАЖИН.	67
4.1. Учет скважины в сеточной модели пласта.	67
4.2. Моделирование горизонтальных скважин и трещин гидравлического разрыва.	70
4.3. Обобщение формул притока на случай многофазной фильтрации.	74

4.4. Моделирование скважин, вскрывающих несколько слоев.	77
4.5. Моделирование технологических ограничений при работе скважин.	79
<b>Глава 5. ИСХОДНАЯ ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ.</b>	<b>81</b>
5.1. Определение геометрических размеров пласта.	82
5.2. Данные о пористости.	83
5.3. Информация о насыщенности и капиллярном давлении.	84
5.4. Данные об абсолютной проницаемости.	85
5.5. Данные об относительных фазовых проницаемостях.	91
<b>Глава 6. СХЕМАТИЗАЦИЯ ПЛАСТА И ВЫБОР РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ.</b>	<b>97</b>
6.1. Схематизация пласта путем введения модифицированных фазовых проницаемостей и псевдокапиллярного давления.	97
6.2. Моделирование кавернозно–трещиновато–поровых пластов.	104
6.3. Выбор модели фильтрации.	106
6.4. Определение размерности модели.	106
6.6. Определение размеров расчетных блоков.	107
6.7. Задание исходных данных для моделирования.	109
<b>Глава 7. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РАСЧЕТНЫХ БЛОКОВ. МАСШТАБИРОВАНИЕ И ОСРЕДНЕНИЕ.</b>	<b>111</b>
7.1. Постановка задачи об определении эффективной проницаемости.	111
7.2. Определение эффективной проницаемости укрупненного расчетного блока.	114
7.3. Укрупнение масштаба при двухфазной фильтрации.	120
<b>Глава 8. ВОСПРОИЗВЕДЕНИЕ ИСТОРИИ РАЗРАБОТКИ. ПОСТОЯННОДЕЙСТВУЮЩИЕ МОДЕЛИ. ПРОГНОЗ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РАЗРАБОТКИ С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛИ.</b>	<b>122</b>
8.1. Воспроизведение истории разработки – неотъемлемый этап моделирования.	122
8.2. Некоторые рекомендации по воспроизведению истории разработки.	144
8.3. Процедура воспроизведения истории разработки.	123
8.4. Прогнозирование технологических показателей.	127
Заключение.	130
Литература.	133

**Каневская Регина Дмитриевна**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ РАЗРАБОТКИ  
МЕСТОРОЖДЕНИЙ УГЛЕВОДОРОДОВ**

*Дизайнер М. В. Ботя*

*Технический редактор А. В. Широбоков*

*Корректор М. А. Ложкина*

---

Подписано в печать 29.06.02. Формат 60 × 84 1/16.

Усл.печ.л. 8,14. Уч.изд.л. 8,79.

Гарнитура Таймс. Бумага офсетная №1.

Печать офсетная. Заказ №40.

АНО «Институт компьютерных исследований»

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

Лицензия на издательскую деятельность ЛУ № 084 от 03.04.00.

<http://rcd.ru> E-mail: borisov@rcd.ru

---