

*П.Н. Кошина-Нагубаринова
В.Г. Пражинская
В.Н. Энтих*

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ
В ВОПРОСАХ
ОРОШЕНИЯ**

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
институт гидродинамики со АН СССР

П. Я. Полубаринова-Кочина,
В. Г. Пряжинская, В. Н. Эмих

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ
В ВОПРОСАХ ОРОШЕНИЯ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
Москва 1969

Математические методы в вопросах орошения. Полубаринова-Кочина П. Я., Пряжинская В. Г., Эмих В. Н. Изд-во «Наука», 1969.

В книге излагаются математические методы, позволяющие решать различные задачи, связанные с орошением. Так, исследуются случаи движения вод (приток к скважинам и дренажам и т. п.) в слоистых грунтах, т. е. в таких, где хорошо проницаемые слои перемежаются со слабопроницаемыми. Изучается форма линз пресной воды, образующихся под каналами. Рассматриваются задачи о движении вод в не полностью насыщенных грунтах и о движении вод различной минерализации. Рассматривается также ряд основных задач по применению методов линейного программирования (с расчетами на вычислительных машинах) для экономического обоснования проектирования орошения в данном районе. Приводятся необходимые математические выкладки и доказательства теорем. Для иллюстрации изложенных в книге методов даются примеры, относящиеся к условиям засушливой Кулундинской степи.

Книга предназначена для специалистов, интересующихся применением математических методов в орошении, новыми результатами исследований в области установившихся и неустановившихся движений подземных вод, а также экономико-математическими исследованиями по вопросам определения эффективности орошаемого земледелия.

Таблицы 34.

Иллюстраций 109.

Библиогр. 163 назо.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время математические методы изучения движения подземных вод широко применяются при исследовании различных вопросов, связанных с орошением. Существует обширная литература по дренажу, откачкам из скважин, режиму грунтовых вод.

Авторы настоящей книги встретились с необходимостью применения таких методов и с трудностями их применения, занимаясь в Институте гидродинамики Сибирского отделения Академии наук СССР вопросами орошения Кулундинской степи. Была организована комплексная Кулундинская экспедиция, в которой принимали участие несколько лабораторий институтов Сибирского отделения и других институтов Новосибирска и Москвы. Ряд исследований проводился еще раньше, до организации Сибирского отделения, Западно-Сибирским филиалом Академии наук СССР.

Уже издана книга по гидрогеологии Кулундинской степи сотрудниками лаборатории гидрологии б. Транспортно-энергетического института СО (см. [2] части второй), по водно-физическими свойствам Кулунды опубликованы результаты исследований лаборатории почвоведения Биологического института СО. Составляется общий сводный отчет по всем проведенным исследованиям. В частности, в нем примет участие Западно-Сибирское геологическое управление (ЗСГУ), организовавшее Кулундинскую гидрогеологическую станцию.

В настоящей работе материалы наблюдений служат лишь для иллюстрации применения излагаемых теорий.

Основное содержание двух первых частей книги составляют исследования по теории движения подземных вод, дополнительные к уже существующим, проведенные в основном сотрудниками и аспирантами Отдела прикладной гидродинамики Института гидродинамики СО. Иногда излагаются уже известные, но необходимые для связи результаты других авторов.

Выкладки и доказательства, как правило, приводятся. Они опускаются лишь в тех случаях, когда могут загромоздить изложение.

В тексте нет сколько-нибудь подробного обзора имеющихся исследований по затрагиваемым вопросам, и ссылки делаются лишь на те работы, которые имеют непосредственное отношение к излагаемым задачам и методам их решения.

Часть первая предлагаемой книги посвящена вопросам теории установившихся движений подземных вод. В ней излагаются главным образом исследования В. Н. Эмиха и С. Т. Рыбаковой, написана она В. Н. Эмихом.

Введение составлено П. Я. Полубариновой-Кочиной, вторая часть — неустановившиеся движения — ею же на основе работ А. Б. Бегматова, С. А. Муминова, Л. М. Плешаковой, В. Г. Пряжинской, М. А. Саттарова и Е. В. Щербань. В этой части § 16—18 написаны В. И. Пеньковским и С. Т. Рыбаковой.

Орошение больших площадей является сложным и дорогостоящим делом. Требуются экономическое обоснование необходимости орошения в данном районе и выяснение экономических перспектив развития орошаемого земледелия. В Г. Пряжинской (Институт гидродинамики СО АН СССР) и В.Л. Кардашем (Математический институт СО) были рассмотрены некоторые задачи оптимального планирования, представляющие специальный интерес в связи с проблемой орошения Кулундинской степи. Однако развивающаяся при этом методика может иметь и более широкие применения.

Вопросам экономико-математических исследований посвящена третья часть книги. Она написана В. Г. Пряжинской. Значительная работа по обсуждению материалов этой части выполнена Л. И. Нестеренко.

Главный инженер Ленгипроводхоза Н. А. Тимофеев представил нам схему орошения Кулундинской степи.

В оформлении книги участвовали Ф. Ф. Майкова, В. Л. Постнов, Л. В. Разгуляева и Л. З. Уйт, за что мы выражаем им нашу признательность.

*П. Полубаринова-Кочина
В. Пряжинская
В. Эмих*

ВВЕДЕНИЕ

1. Кулундинская степь расположена между Обью и Иртышом и занимает площадь около 13 млн. га (фиг. 1). Большая часть ее находится в Алтайском крае, но она заходит и в Казахстан, и в Новосибирскую область. Река Иртыш и штриховая линия, изображенная на фиг. 1, считаются границами Кулунды.

Кулундинская степь является основной житницей для Западной Сибири. Значение ее в ближайшее время возрастет в связи с интенсивным развитием нефтяной и газовой промышленности на севере Западно-Сибирской равнины.

Урожай в степи на неорошаемых землях являются крайне неустойчивыми из-за малого количества осадков, притом выпадающих далеко не всегда в пурпурное для растений время.

Для орошения Кулундинской степи можно использовать воды Оби, местный сток (для лиманного и регулярного орошения) и подземные воды.

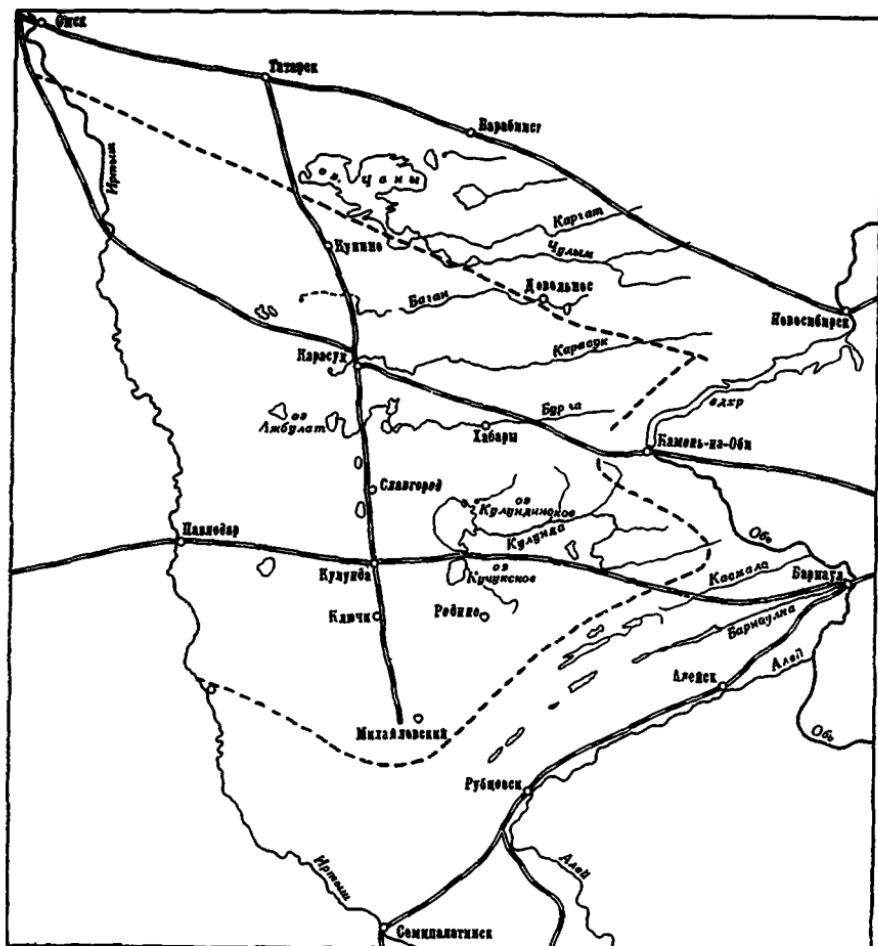
В геологическом строении Кулундинской степи [1] участвует сложный комплекс рыхлых мезо-кайнозойских осадков, покрывающих мощным пластом породы палеозойского фундамента (фиг. 2).

Палеозой, представленный глинистыми сланцами и границиами, неравномерно погружается под отложениями мезо-кайнозоя с юго-востока на северо-запад, залегая на глубинах 300—600 м в восточной части, 800—1300 м в центральной и северной частях Кулундинской степи, с отдельными местными поднятиями на широтах городов Славгорода и Карасука до глубины 400—500 м.

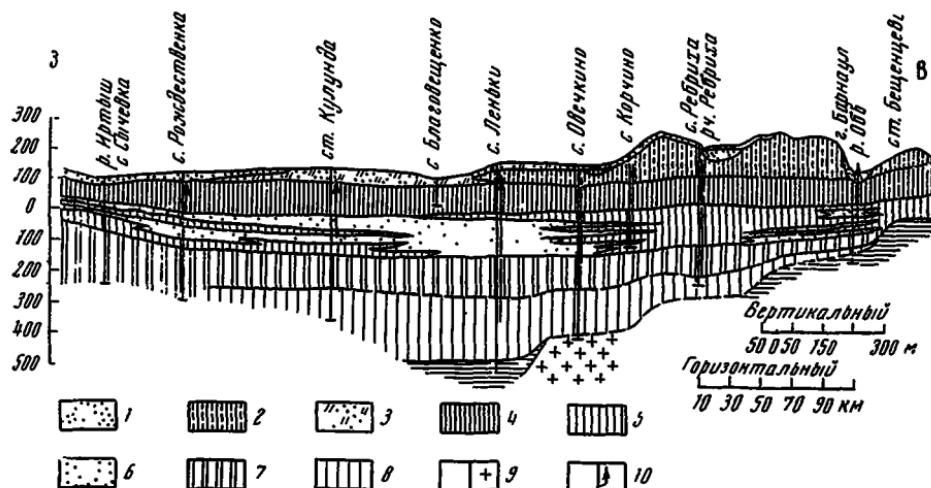
Среди рыхлой толщи мезо-кайнозоя установлены меловые, палеогеновые, неогеновые и четвертичные отложения, в разрезе которых заключены верхнечетвертичный, средне-верхнепалеогеновый и меловой водоносные комплексы, всего до 15 водоносных горизонтов. За исключением грунтовых вод, которые являются напорно-безнапорными, подземные воды рассматриваемой территории напорные. Минерализация их варьирует от 0.3 до 2.5 г/л и редко превышает 3 г/л. Но на отдельных участ-

ках встречаются солоноватые и соленые воды, приуроченные в основном к наиболее погруженным частям водоносных горизонтов. Тип вод преимущественно гидрокарбонатно-кальциевый, реже гидрокарбонатно-натриевый и сульфатно-натриевый.

Наиболее перспективным для целей орошения в центральной части Кулундинской степи является Кулундинский (нечетвертичный) водоносный комплекс, включающий два — три регионально взаимосвязанных водоносных горизонта. Водосодержащими породами являются серые разнозернистые пески, залегающие на глубине 3—10 м.



Фиг. 1. Карта Кулундинской степи



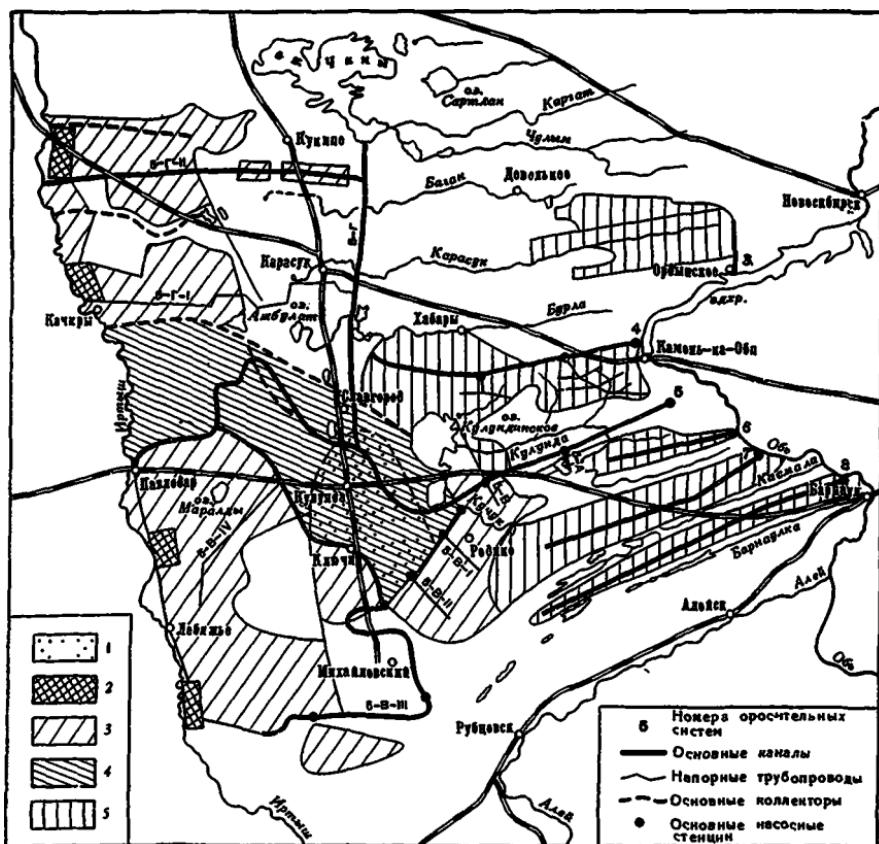
Фиг. 2. Геологический разрез центральной части Кулундинской степи (по С. Г. Бейруму и Е. В. Михайловой); абсолютные отметки по вертикали в м
 1 — верхнечетвертичные дельтовидно-эоловые суглинки, пески, супеси, пески древних речных долин; 2 — среднечетвертичные суглинки, глины; 3 — нижнечетвертичные пески; 4 — плиоценовые глины, пески, реже супеси, алевролиты; 5 — миоценовые глины; 6 — миоценовые пески с прослойями алевролита; 7 — палеогеновые опоковидные глины, супеси, 8 — иловые глины с прослойями глауконитового песка; 9 — палеозойские глинистые сланцы, граниты, 10 — уровень подземных вод в буровых скважинах

Производительность отдельных скважин достигает 25 л/сек при понижении до 5 м. Воды преимущественно пресные, минерализация их не превышает 1 г/л, тип вод гидрокарбонатно-кальциевый.

Водоносный комплекс неогеновых отложений включает до пяти водоносных горизонтов, содержащих напорные воды. Минерализация вод разнообразная, в основном 1—2 г/л, хлоридно-и сульфатнонатриевого типа.

Наибольшим распространением на территории Кулундинской степи пользуются четвертичные отложения, повсеместно содержащие в своих осадках грунтовые пресные воды.

2. О перспективах орошения Кулундинской степи. Более 30 лет тому назад инженером В. А. Мичковым был разработан проект орошения центральной части степи водами Оби путем сооружения водохранилища у г. Камень-на-Оби [2], где в перспективе была запланирована гидростанция. Но не очень большая эффективность ГЭС, обширная площадь затопления и относительная дороговизна строительства остановили доработку проекта. В 50-х годах проект орошения 1.2 млн. га был



Фиг. 3. Схема Ленгипрводхоза, 1964 г.

1 — I очередь — район использования грунтовых вод; 2 — II очередь орошения из р. Иртыша, 3 — II очередь орошения из р. Оби, 4 — III очередь; 5 — IV очередь орошения из р. Оби

пересоставлен Ленгипрводхозом, в настоящее время он опять пересматривается с учетом достижений современной техники и изменившихся условий энергоснабжения,—постройка Беловской и Ермаковской ГРЭС должна обеспечить электроэнергией степные районы. В качестве одного из вариантов намечается использование вод Оби путем непосредственной перекачки в каналы без устройства водохранилища. На фиг. 3 представлена предварительная схема Ленгипрводхоза 1964 г.

В последнее время проявляется интерес к вопросу об использовании подземных вод для орошения в Кулундинской степи, в ряде колхозов и совхозов орошаются небольшие участки

площадью обычно до 30 га. На Кулундинской опытной сельскохозяйственной станции за последние годы площадь орошения возросла с 48 до 150 га.

Важно выяснить, в каких пределах возможно дальнейшее использование подземных вод. Если будет осуществлено орошение водами Оби, то в какой мере возможно привлечение подземных вод для дренажа и орошения. По-видимому, без комбинированной системы нельзя будет получить хороших результатов ирригации.

3. Возможные опасные последствия орошения больших площадей. При орошении больших площадей резко изменяются природные условия и нарушается естественное равновесие речных и подземных вод. Поэтому за ошибки и промахи в планировании и осуществлении орошения следует обычно тяжелая расплата.

Хорошо известно, что спустя несколько лет после начала орошения часто начинается засоление и заболачивание земель. По официальным данным 1964 г., из 9.5 млн. га фактически орошаемых земель Советского Союза (площадь, имеющая оросительные системы, значительно больше) засолено 3 млн., т. е. более 30%. В качестве примера страны, где засоление и заболачивание привело катастрофические размеры, можно указать Западный Пакистан: свыше 2 млн. га в нем выведены из строя. Составлен проект мелиорации при помощи вертикального дренажа двух площадей по 400 тыс. га: в Пенджабе (север Западного Пакистана) и в Синде (юг Западного Пакистана). Начальные капиталовложения оцениваются в 55 млн. долларов для Пенджаба и от 130 до 165 млн. долларов для Синда [3], так как на юге подземные воды сильно засолены и дренаж там сложнее.

Основным вопросом для возможности орошения подземными водами является вопрос о водообильности пластов, из которых будет всстись откачка. При этом водообильность понимается в двух смыслах: 1) дебиты колодцев должны быть достаточно высокими, 2) восстановление уровня или напора подземных вод после откачек должно быть достаточно быстрым — иначе будет происходить истощение водоносных пластов.

Приведем примеры, показывающие, насколько реальна угроза истощения водоносных пластов при откачках, превышающих возможности их пополнения.

Наибольший процент использования подземных вод для ирригации имеется в США — около 30% площади всех орошаемых земель. Самые разветвленные оросительные системы находятся в Западных Штатах. Орошение подземными водами особенно развито в Аризоне и Калифорнии. Приведем данные

о снижении средних уровней воды в скважинах по этим штатам (табл. 1) [4].

Один фермер из Аризоны сказал в 1949 г.: десять лет тому назад, имея один насос и один хороший колодец с глубиной 40 м, можно было оросить 128 га, теперь — только половину, при откачке с глубины 70 м (см. [4]).

Таблица 1
Некоторые данные по скважинам США

Штат	Аризона			Калифорния	
	Годы	Количество колодцев	Средние уровни, м	Снижение в год, м	Средние уровни, м
1920	999	19	—	—	—
1940	1858	40	1	17.1	0.9
1950	4361	48	0.8	26.4	—

В 1949 г. вся орошаемая площадь в Аризоне составляла 386 тыс. га, из них колодцами орошалось 210 тыс. га, т. е. 54 %. Так как в 1949 г. было около 4000 колодцев, то один колодец приходился в среднем на площадь в 50 га.

В Калифорнии, в долине Сан-Хоакин, есть скважины до 900 м глубины. В графстве Керн, где развито хлопководство, за последние 5—10 лет ежегодное снижение достигает 4.5—9 м. В 1954 г. средний уровень воды в скважинах был 52.5 м при колебаниях от 18 до 150 м.

В Советском Союзе орошение подземными водами было развито слабо в основном из-за недостатка и дороговизны насосного оборудования и нехватки электроэнергии. В настоящее время оно все больше развивается. Проводятся опыты по вертикальному дренажу в Голодной степи. Много лет существует с устойчивым стоянием зеркала грунтовых вод Брилевская опытная станция на Украине, где ведется орошение подземными водами.

Вообще говоря, орошение подземными водами приносит хорошие результаты по рассолению. Так, в первые же годы откачек в долине р. Соленой (США, Аризона) стало наблюдаться быстрое рассоление ранее засоленных участков [5]. В дальнейшем, как уже сказано, началось истощение водоносных горизонтов. Теперь принимаются меры к тому, чтобы пополнить водоносные пласти путем подачи в грунт паводковых, дождевых и талых вод.

В некоторых случаях (пока еще редко отмечаемых) возможно образование верховодки в верхних горизонтах при от-

качке воды из более глубоких горизонтов и подаче ее для орошения.

Следует отметить еще одно последствие интенсивных откачек подземных вод — это оседание земной поверхности [6]. В районах длительного использования подземных вод для ирригации или водоснабжения больших городов образуются воронки депрессии, глубина которых может достигать 150 м, диаметры — десятков километров. Площадь мульды оседания обычно близка к площади воронки, а глубина просадки в общем пропорциональна понижению напора и в некоторых городах достигла 7—8 м.

Опускание земной поверхности происходит вследствие уплотнения сжимаемых пород (в основном глинистых): при значительных понижениях уровня уменьшается взвешивающее влияние воды и происходит как бы увеличение силы тяжести и возрастание давления на скелет породы.

Примером такого рода является долина Сан-Хоакин (Калифорния), в которой наблюдения за оседанием начались 20 лет тому назад. Тогда площадь мульды оседания составляет 3500 км², а величина оседания достигает 3 м.

Для борьбы с оседанием рекомендуют закачки воды и сжатого воздуха в пласты; если оседание уже имеется, то применяют подсыпку грунта или сооружение заградительных дамб.

Если гидрогеологические условия благоприятны, то орошение подземными водами в соединении с орошением поверхностными может дать очень хорошие результаты. Так, обнадеживающей признается перспектива смешанного орошения в Чуйской впадине, в Киргизии [7]. Там имеются области обильного горного питания подземных вод. Между тем орошение водами р. Чу уже подняло уровень грунтовых вод, местами до степени заболачивания, что требует проведения мелиораций.

В других межгорных впадинах, аналогичных Чуйской, также могут быть благоприятные условия для орошения с помощью трубчатых колодцев. В Кулундинской степи положение не столь хорошее, так как области бокового питания подземных вод далеки от засушливой части степи.

4. Изучение условий орошения в Кулундинской степи. Инженерная система орошения водами р. Алей имеется на юге Алтайского края, в Алейской степи, примыкающей к южной части Кулундинской степи,— это Алейская оросительная система (АОС) с управлением в г. Рубцовске. Опыт, приобретенный этой системой на протяжении почти 30 лет ее существования, может быть использован при проектировании орошения водами Оби. Наша группа воспользовалась материалами АОС для изучения вопросов экономической эффективности орошения в условиях

этой системы и разработки плана оптимального планирования для нее. Результаты изложены в части третьей книги.

Что касается орошения подземными водами, то давно уже возникла мысль об организации опытного участка, на котором можно было бы изучить особенности орошения в условиях Кулундинской степи, режим подземных вод, вопросы засоления и рассоления, вообще — действие вертикального дренажа.

Такой участок был выбран в центральной части Кулундинской степи — в Ключевском районе Алтайского края, около села Истимис (см. карту на фиг. 1). В настоящее время по нему ведется рабочее проектирование. В 1961 г. по предложению Главгеологии РСФСР Западно-Сибирское геологическое управление организовало Кулундинскую гидрологическую станцию в этом районе. Были пробурены эксплуатационные и наблюдательные скважины на площади, значительно большей той площади, которая была запроектирована под участок опытной станции.

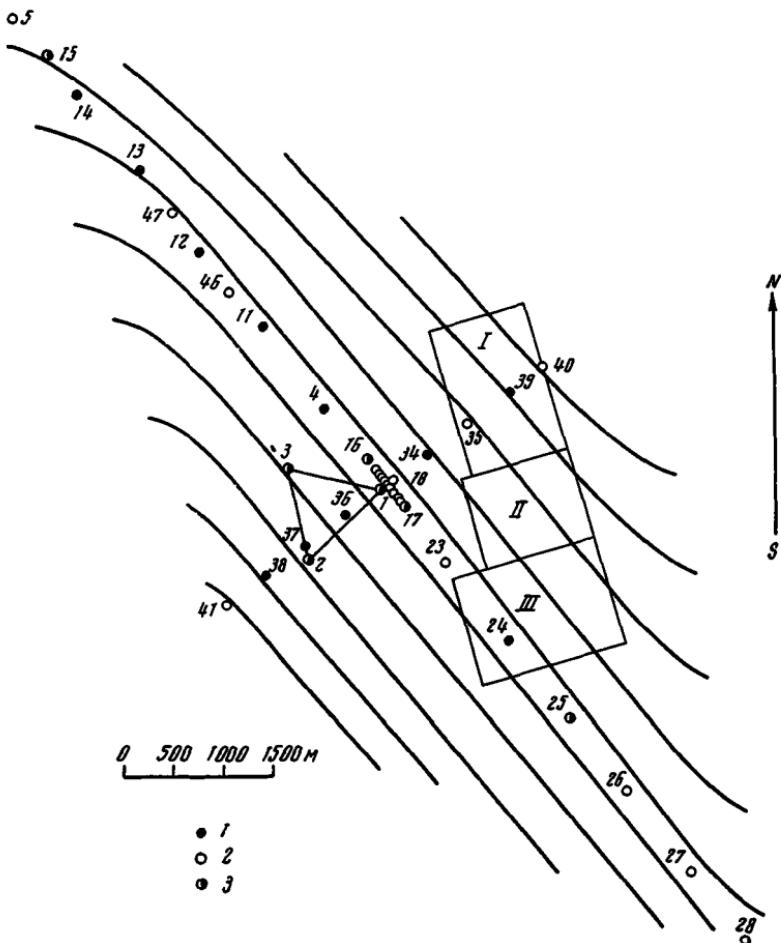
Гидрологическая станция в 1961—1964 гг. провела много наблюдений над работой скважин в двух водоносных пластах нижнечетвертичного горизонта. Отдельные скважины были пробурены на неоген, одна — структурная — на палеоген (атлым). Режимные наблюдения продолжаются.

Ключевской район и, в частности, площадь, на которой расположены скважины, были основным местом работ Кулундинской комплексной экспедиции Сибирского отделения Академии наук СССР. В работах экспедиции принимали участие сотрудники институтов Сибирского отделения: Гидродинамики, Транспортно-энергетического, Химико-металлургического, Биологического и Ботанического сада. В 1960—1962 гг. в экспедиционных работах участвовал также ВНИИГиМ.

5. Ключевской участок Кулундинской гидрологической станции. На рис. 4 показано расположение основных эксплуатационных и наблюдательных скважин. Короткая линия скважин следует среднему направлению потока грунтовых вод, которое определялось по трем скважинам (1, 2, 3). Длинная линия перпендикулярна этому направлению; расстояния между крайними скважинами по выбранным направлениям составляют соответственно 4 и 12 км.

Площадь, отводимая под опытный участок, представлена тремя прямоугольниками (*I*, *II*, *III*).

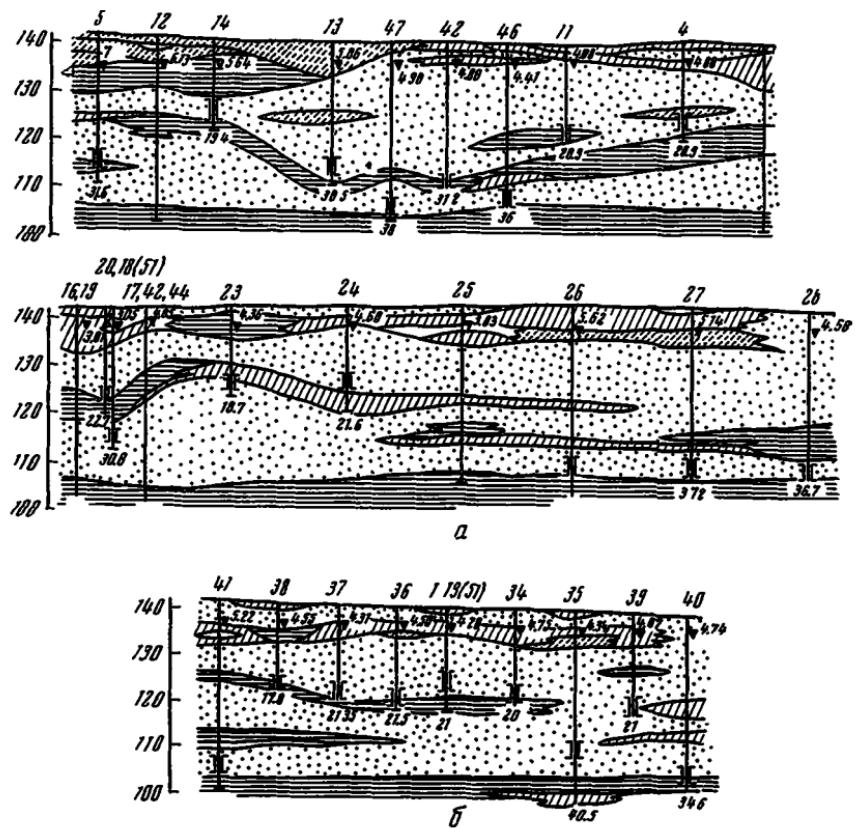
На рис. 5 приведены два разреза вертикальными плоскостями вдоль длинной и короткой осей скважин. На них показаны два водоносных горизонта нижнечетвертичных отложений, подстилаемых снизу мощным слоем глин. При расчетах этот слой принимался за абсолютный водоупор.



Фиг. 4. Расположение скважин Кулундинской гидрологической станции
 1 — скважины в первом водоносном горизонте; 2 — скважины во втором водоносном горизонте; 3 — скважины в неогеновом водоносном слое

Первый и второй водоносные горизонты разделены прослойками и линзами глин и суглинков. Грунты у поверхности земли сложены супесями и суглинками с прослойками глин.

Приведем некоторые сведения об основных скважинах по данным Кулундинской гидрологической станции. Нужно от-



Фиг. 5. Разрезы вдоль основных линий скважин
а — вдоль длиной оси скважин; б — вдоль короткой оси скважин

метить, что для орошения опытного участка предполагается откачивать воду из второго водоносного горизонта (табл. 2).

Откачки 1963 г. дали несколько большие значения удельных дебитов скважин второго горизонта. Они приведены в табл. 3.

Под достижимым дебитом мы понимаем дебит данной скважины при понижении, равном половине напора,— мы взяли для всех трех скважин понижение 16 м.

Кулундинской гидрогеологической станцией даны величины максимальных дебитов скважин № 18, 42 и 44, они равны соответственно 60, 80 и 178 м³/час. Если поставить вопрос так: каких были бы дебиты у каждой из рассматриваемых скважин, если бы

Таблица 2

Данные об эксплуатационных скважинах возле Истимиса (1961 г.)

№ скважины	19	18	42	44
	Первый горизонт		Второй горизонт	
Уровень земли, м	39.54	39.67	39.72	39.70
Отметка подошвы пласта, м	21.04	3.07	0.72	2.90
Мощность водоносных горизонтов, м:				
первого	11.9	2.2	7.8	12.9
второго	—	19.3	17.0	18.4
Длина рабочей части фильтра, м	3.5	8.25	4.7	4.0
Уровень, м				
статический	35.39	35.42	35.46	35.66
динамический	31.73	29.52	24.24	27.74
Понижение, м	3.66	5.90	11.22	7.92
Дебит:				
л/сек	4.55	4.50	6.13	7.10
м³/час	16.4	16.2	22.1	45.0
Удельный дебит, л/сек	1.2	0.76	0.55	1.58
Напор, м	14.35	32.35	34.74	32.76
Фильтр	—	Сетчатый	Гравийно-проводолочный	Каркасно-стержневой

они были снабжены фильтрами на всю мощность пласта в данном месте, то достижимые дебиты были бы раза в полтора больше выписанных в табл. 3.

Таблица 3

Дебиты скважин второго горизонта (1963 г.)

№ скважины	18	42	44	№ скважины	18	42	44
Удельный дебит:				Достижимый дебит:			
л/сек	0.84	0.73	1.58	л/сек	13.4	12.4	27.2
м³/час	3.0	2.6	5.7	м³/час	48	45	98
				Радиус влияния, м	1400	1400	1500

Нужно иметь также в виду, что из трех скважин наилучшим фильтром оборудована скважина № 44. Поэтому если на опытном орошаемом участке поставить каркасно-стержневые фильтры и иметь соответствующие насосы, то весьма вероятно, что можно получить запроектированный средний дебит каждой сква-

жины — $60 \text{ м}^3/\text{час}$ при учете взаимодействия всех девяти запроектированных скважин.

Была пробурена скважина на горизонт неогеновых отложений. Глубина ее 100 м , откачки дали очень малое количество воды из прослойки песков мощностью в 1 м среди мощных глин.

Палеоген (атлам) был вскрыт скважиной на глубину 221.5 м и дал самоизлив высотой 1.98 м над поверхностью земли с дебитом 0.33 л/сек , т. е. $1.2 \text{ м}^3/\text{час}$. Диаметр фильтра 89 мм , длина 1.2 м . Мощность песков — мелкозернистых вверху и гравелистых внизу — больше 30 м . Вода хорошая, слабо минерализованная, так же как вода нижнечетвертичных горизонтов. Минерализация неогена чуть больше.

По наблюдениям 1961 г. средняя мощность верхнего четвертичного горизонта $M_1 = 12.06 \text{ м}$, для нижнего, т. е. второго горизонта, $M_2 = 12.5 \text{ м}$. По уточненным данным 1964 г. получено $M_1 = 13.9 \text{ м}$, $M_2 = 10.3 \text{ м}$.

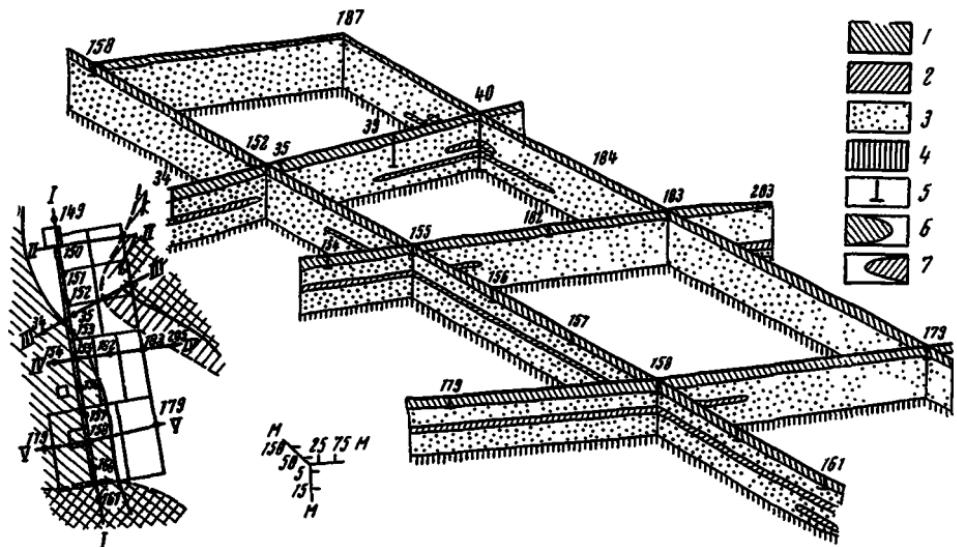
В результате длительных откачек — от 20 до 30 суток — получены радиусы влияния: для скважин № 18 и 42 — около 1400 м , для скважины № 44 — около 1500 м .

6. Проект опытного участка орошения подземными водами. Новосибирским проектным институтом Сибгипросельхозстрой по заданию Сибирского отделения АН СССР составлен проект опытнопроизводственного участка в Ключевском совхозе Алтайского края около села Истимис. В составлении проектного задания принимали участие представители Московского гидромелиоративного института, Омского сельскохозяйственного, Всесоюзного научно-исследовательского института гидротехники и мелиорации. В целях сопоставления различных способов полива вся намеченная к проектированию площадь около 400 га разбита на три самостоятельных участка (см. фиг. 4).

На первом участке площадь орошения составляет 147 га , на нем запроектировано орошение дождеванием из открытой оросительной сети дождевальной машиной ДДА-100М. На втором участке площадью 101 га предусмотрено орошение дождеванием из закрытой оросительной сети дождевальной машиной ДДН-45. На третьем участке с площадью орошения 147 га запроектировано орошение по бороздам из гибких поливных трубопроводов (полиэтиленовых).

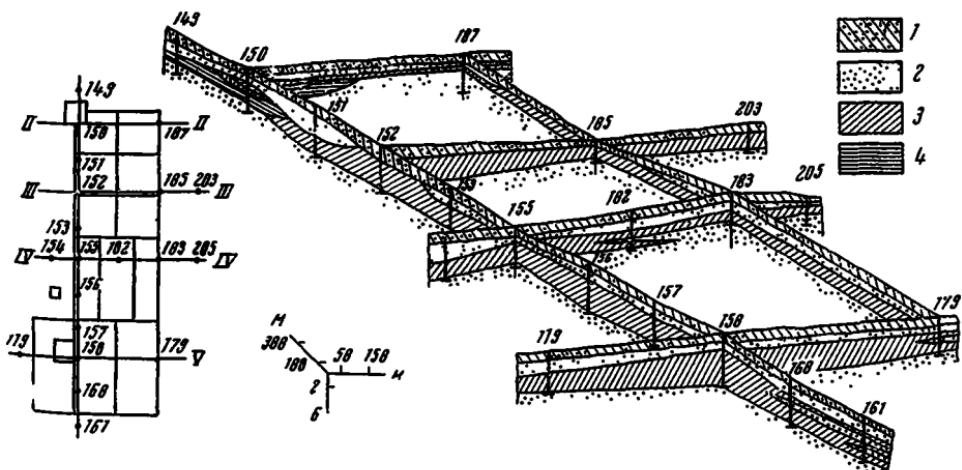
Проект составлен достаточно гибко для того, чтобы можно было испытывать и другие, вновь появляющиеся способы орошения.

Поверхность орошаемого участка ровная, с небольшими микропонижениями и незначительным уклоном на северо-восток и северо-запад.



Фиг. 6. Геологическое строение Ключевского опытного участка в аксонометрической проекции, а также схема расположения скважин

1 — песчано-глинистые отложения зоны аэрации; 2 — водоупорные прослои; 3 — пески водоносного горизонта, 4 — водоупор водоносного горизонта; 5 — скважины; 6 — первый водоупорный прослой (на схеме); 7 — второй водоупорный прослой (на схеме)



Фиг. 7. Геологическое строение зоны аэрации Ключевского опытного орошаемого участка в аксонометрической проекции, а также схема расположения скважин

1 = супесь; 2 = песок; 3 = глина; 4 = суглинок

Грунтовые воды в районе опытного орошаемого участка приурочены к отложениям кулундинской свиты (нижнечетвертичные). Водовмещающие породы представлены желтовато-серыми и серыми песками, преимущественно разнозернистыми, с прослойями серовато-зеленых и серых глин и суглинков, которые разделяют толщу песков на два, реже на три водоносных горизонта. Прослои не выдержаны по простиранию, и наличие в них «окон» обуславливает взаимосвязь водоносных горизонтов (на фиг. 6), представляющих единый водоносный комплекс.

Мощность водоносной толщи изменяется от 20.5 до 28.0 м, составляя в среднем 24.2 м. Средняя мощность верхнего водоносного горизонта 13.9 м, нижнего — 10.3 м.

Водоупором водоносного комплекса являются серовато-зеленые и красно-бурые глины неогена, залегающие на глубине 38—40 м с незначительным уклоном на север.

Кровлей водоносного комплекса служат большей частью светло-желтые и темно-коричневые песчаные тощие глины и суглинки покровных отложений мощностью от 0.6 до 5.5 м, почти повсеместно отмечаемые в геологическом строении зоны аэрации (фиг. 7).

Лишь на севере участка кровлей водоносного горизонта служат пески.

Глины в верхних прослойках перекрываются песками, переходящими в супесь. На глинах после поливов, при большом увлажнении зоны аэрации, может образовываться верховодка. По этому поводу Кулундинской экспедицией СО АН СССР были проведены опыты, показавшие, что рассасывание образующейся верховодки происходит быстро. В гл. I части второй книги проводятся некоторые теоретические исследования вопроса о верховодке. По-видимому, необходимо пробурить несколько скважин для сбрасывания излишков воды в водоносный пласт.

Вследствие наличия глин в своей кровле грунтовые воды приобретают незначительный местный напор на юго-западе участка. На большей части территории грунтовые воды имеют свободную поверхность, в общем повторяющую колебания микрорельефа местности. Уклоны зеркала грунтовых вод незначительны и в среднем составляют 0.0005.

Общее направление движения потоков — северо-восточное. Глубина залегания грунтовых вод 4—5 м.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Г. Б е й р о м, Е. В. М и х а й л о в а. Подземные воды Кулунды — на службу сельскому хозяйству.— Сов. геология, 1955, № 44.
2. В. А. М и ч к о в. Каменская ГЭС на Оби и орошение Кулунды. Новосибирск, 1964.
3. R. Rebelle Water.— Scient. Amer., 1961, N 8.
4. L. Ha u st ead, G. Fite. The agricultural regions of the United States. Norman, 1955. (Русск. перев.: Л. Х а ю с т е д, Дж. Ф а й т. Сельскохозяйственные районы США. ИЛ, 1957).
5. Ф. Б. Н е ль с о н - С к о р н я к о в. Дренаж при помощи глубоких колодезных насосов, практикующийся на системе р. Соленой в Аризоне, САСШ. Ташкент, 1930.
6. И. В. Г а р м о н о в, А. А. К о н о п л я н ц е в, Ф. В. К о т л о в. Оседания земной поверхности в связи с интенсивной откачкой подземных вод, эксплуатацией месторождений нефти и газа.— Отдел научно-техн. инф. Гос. геол. ком. СССР, вып. 17, серия Гидрогеол. и инж. геол., 1965, № 1.
7. М. А. С а б и т о в. Эффективность использования насосных скважин в оросительно-осушительных целях в Чуйской впадине. Автореф. Ташкент — Фрунзе, Киргиз. и.-и. ин-т водн. проблем и гидротехники, 1964.

Часть первая

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ

Процессы фильтрации являются чаще всего неустановившимися в силу того, что факторы, определяющие движение подземных вод, изменяются во времени, и стационарная фильтрация представляет некоторое предельное состояние процесса. Однако математическое исследование установившейся фильтрации, будучи более простым, позволяет в ряде случаев уяснить важные закономерности фильтрационных явлений. Рассмотрению отдельных задач установившейся фильтрации посвящена первая часть книги.

В первой главе приведены основные положения и уравнения гидравлической теории фильтрации в слоистых грунтах, которые используются затем при рассмотрении частных схем. Среди них — изложенные во второй главе задача о влиянии инфильтрации и испарения на характер распределения напоров в системе взаимосвязанных водоносных горизонтов и задача о горизонтальных совершенных дренах в безнапорном горизонте, гидравлически связанном через слабопроницаемую прослойку с нижележащим напорным слоем. В следующих двух главах исследуются вопросы притока к одной скважине и к системе скважин, работающих в одном или в нескольких взаимосвязанных водоносных горизонтах.

Пятая глава посвящена рассмотрению фильтрации к несовершенным дренам и скважинам. В случае плоскопараллельной фильтрации к дренам удается получить аналитическое решение и выяснить некоторые интересные закономерности процесса. Более сложными оказываются вопросы притока к несовершенным скважинам.

Несколько обособленной является шестая глава, в которой приведено решение задачи о линзе пресных вод при фильтрации на канала в гидродинамической постановке.

Глава I

ГИДРАВЛИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЙ В СЛОИСТЫХ ГРУНТАХ

Под слоистыми грунтами здесь мы будем понимать системы перемежающихся однородных слоев с различными коэффициентами фильтрации, причем хорошо проницаемые водопосные слои чередуются со слабопроницаемыми прослойками, коэффициенты фильтрации которых меньше коэффициентов фильтрации водоносных горизонтов в сотни и тысячи раз. К слоистым грунтам такого рода и относятся задачи, рассматриваемые в гл. I—IV.

§ 1. Основные допущения

Установим некоторые положения, которые послужат основой при математической схематизации задач фильтрации в слоистых грунтах.

Будем считать, что границы раздела между слоями являются горизонтальными плоскостями.

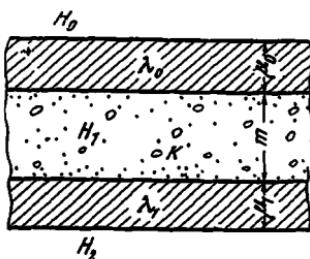
Рассмотрим сначала систему трех водоносных горизонтов, разделенных двумя слабопроницаемыми прослойками, с мощностями μ_0 и μ_1 и коэффициентами фильтрации λ_0 и λ_1 соответственно (фиг. 8). Пусть H_1 — напор в среднем горизонте, мощность которого m , а коэффициент фильтрации k . Напоры в верхнем и нижнем горизонтах на границах с прослойками обозначим соответственно через H_0 и H_2 .

Допустим, что H_0 , H_1 и H_2 не изменяются в горизонтальных направлениях, но $H_0 \neq H_2$; например, пусть $H_0 > H_2$. Тогда в рассматриваемой системе имеет место переток в вертикальном направлении, в данном случае сверху вниз. Этот вариант фильтрации в слоистых грунтах рассматривался в числе некоторых других еще в 30-х годах [1]. В пределах каждого слоя напор изменяется по вертикали линейно, а скорость фильтрации одинакова во всех слоях, что, пользуясь законом Дарси, можно записать так:

$$\frac{H_1^o - H_1^{oo}}{m} k = \frac{H_0 - H_1^o}{\mu_0} \lambda_0 = \frac{H_1^{oo} - H_2}{\mu_1} \lambda_1 = v \quad (1.1)$$

Здесь H_1^o и H_1^{oo} — величины напора в среднем горизонте соответственно на его кровле и подошве. Отношения k/m , λ_0/μ_0 и λ_1/μ_1 характеризуют проводимость соответствующих слоев в вертикальном направлении.

Соотношения (1.1) означают таким образом, что потери напора в пределах каждого слоя обратно пропорциональны их проводимостям. Поэтому если изменения напора при перетоке через прослойки измеряются десятками сантиметров или метрами, то в самих водоносных горизонтах эти изменения исчисляются миллиметрами и их долями, и, следовательно, ими можно



Фиг. 8

пренебречь. В дальнейшем мы принимаем допущение о *постоянстве напора в пределах водоносного горизонта при фильтрации в вертикальном направлении*.

Предположим теперь, что в водоносном горизонте по всей его мощности создано понижение напора вдоль некоторого вертикального сечения, например на цилиндрической поверхности скважины. Тогда в водоносном горизонте и прослойке возникает некоторый поток. При этом на границе горизонта с прослойкой, как известно [2], линии тока претерпевают преломление, определяемое соотношением

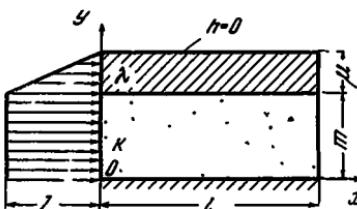
$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{k}{\lambda} \quad (1.2)$$

где α_1 и α_2 — углы, образуемые вектором скорости фильтрации и нормалью к линии раздела соответственно со стороны водоносного горизонта и прослойки; k и λ — коэффициенты фильтрации горизонта и прослойки. Учитывая сделанное выше замечание о величине k/λ , видим, что отношение $\operatorname{tg} \alpha_1/\operatorname{tg} \alpha_2$ велико. Это служит доводом в пользу допущения, используемого при решении задач фильтрации в слоистых грунтах: *на границе раздела слоев линии тока близки к вертикалям при подходе со стороны прослойки и к горизонтальным — со стороны хорошо проницаемого слоя*.

Следует отметить, что в равенстве (1.2) отношение $\operatorname{tg} \alpha_1 / \operatorname{tg} \alpha_2$ может быть велико и при малых значениях α_1 , если при этом α_2 — величина еще более высокого порядка малости. Однако на практике указанное допущение оправдывается при рассмотрении, например, фильтрации к скважинам.

Приоритет в развитии гидравлической теории фильтрации в многослойных грунтах в СССР принадлежит А. Н. Мятневу [3–5] и Н. К. Гиринскому [6, 7]. Из книги [8] известно, что в 1930 г. Де Гли (De Glee) рассматривал движение в водопроницаемом пласте при наличии смежных слабопроницаемых пластов.

Гидравлический подход неприменим вблизи несовершенных скважин, где играют роль вертикальные коэффициенты скорости фильтрации, но даже и



Фиг. 9

в случае совершенных скважин он может привести к погрешностям в некоторых областях движения. Вопрос о величинах этих погрешностей рассматривался различными исследователями начиная с Н. К. Гиринского [7].

Отметим в этом направлении статью С. Н. Нумерова и Р. М. Барсегяна [9], в которой сравниваются результаты решения однородной плоской задачи в гидродинамической и гидравлической постановках. Схема фильтрации изображена на фиг. 9. Подошва хорошо проницаемого слоя предполагается непроницаемой. На кровле прослойки, а также в сечении $x=l$ в пределах прослойки и водоносного горизонта поддерживается напор $h=0$, а в сечении $x=0$ в пределах горизонта — напор $h=1$, в то время как в пределах прослойки напор при $x=0$ изменяется линейно. Эта схема до некоторой степени соответствует картице, имеющей место в случае фильтрации к прямошлинейной галерее при наличии прямолинейного же контура питания

В гидродинамической постановке выражение для напоров в горизонте и прослойке получается в виде рядов Фурье по синусам в конечном промежутке $0 \leq x \leq l$; из этого выражения по закону Дарси определяется дебит галереи. Далее задача решается в полугидравлической постановке при допущении об отсутствии горизонтальных компонент скорости фильтрации в прослойке, в пределах же горизонта поток по-прежнему рассматривается как двумерный. Затем в дополнение к первому допущению напор в пределах горизонта осредняется по высоте, что равносильно пренебрежению вертикальным составляющим скорости фильтрации в хорошо проницаемом слое, и таким образом задача рассматривается в гидравлической постановке.

Сопоставление выражений для напора на кровле хорошо проницаемого слоя в гидродинамической и полугидравлической постановках показывает, что разность между этими выражениями имеет порядок величины $\delta = \lambda/k$ — отношения коэффициентов фильтрации прослойки и горизонта. Такой же порядок имеет и относительная ошибка при определении той части дебита галереи, которая обусловлена перетоком в рассматриваемый горизонт из вышележащего

через прослойку. Переход от полугидравлической постановки к гидравлической вносит в указанные величины дополнительные погрешности порядка $\delta \ln(1/\delta)$ и δ соответственно, причем $\delta = \delta t / \mu$, t и μ — мощности горизонта и прослойки.

В дальнейшем при рассмотрении фильтрации к совершенным скважинам и дренам мы будем пренебрегать вертикальными компонентами фильтрационных скоростей в хорошо проницаемых слоях и горизонтальными — в слабопроницаемых, т. е. рассматривать задачи в гидравлической постановке. Кроме того, предполагается, что жидкость и грунт несжимаемы, а течение подчиняется закону Дарси.

§ 2. Дифференциальные уравнения для напоров в случае нескольких водоносных горизонтов

Пусть m_i и k_i — соответственно мощность и коэффициент фильтрации i -го водоносного горизонта (фиг. 10); соответствующие параметры для j -й прослойки обозначим через μ_j и λ_j . Предположим, что верхний и нижний горизонты рассматриваемой системы сообщаются через прослойки соответственно с выше- и нижележащими водоносными горизонтами, напоры в которых H_0 и H_{n+1} примем постоянными.

Выделим элементарный параллелепипед, боковые поверхности которого параллельны координатным плоскостям, а верхнее и нижнее основания совпадают с кровлей и подошвой водопроницаемого горизонта (фиг. 11). Вследствие предположенной несжимаемости жидкости и грунта накопление жидкости в выделенном элементе должно равняться нулю. С другой стороны, это накопление можно подсчитать по закону Дарси как суммарное поступление жидкости в элемент через его грани.

Поступление через грань 1

$$Q_1 = -m_i k_i \frac{\partial h_i}{\partial x} dy$$

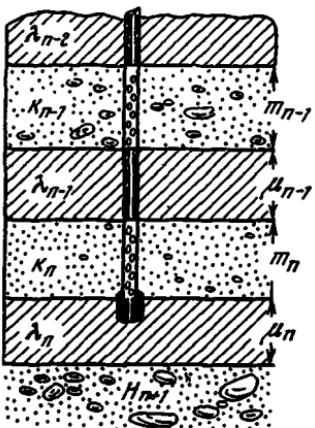
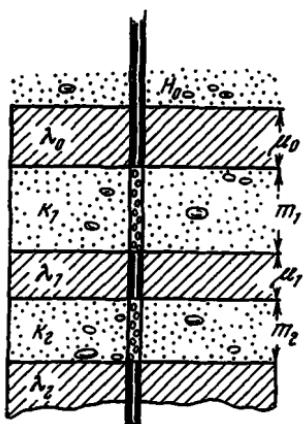
Поступление через грань 2

$$Q_2 = m_i k_i' \left(\frac{\partial h_i}{\partial x} + \frac{\partial^2 h_i}{\partial x^2} \right) dx dy$$

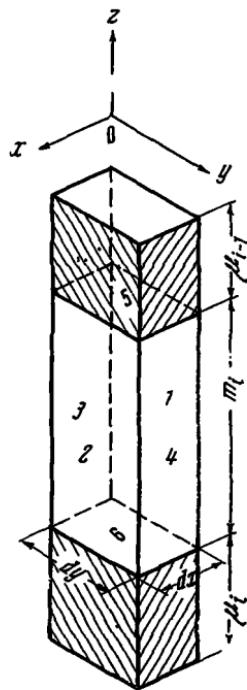
Аналогично

$$Q_3 = -m_i k_i \frac{\partial h_i}{\partial y} dx, \quad Q_4 = m_i k_i \left(\frac{\partial h_i}{\partial y} + \frac{\partial^2 h_i}{\partial y^2} \right) dy dx$$

$$Q_5 = \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_{i-1}} (h_{i-1} - h_i) dx dy, \quad Q_6 = \frac{\lambda_i}{\mu_i} (h_{i+1} - h_i) dx dy$$



Фиг. 10



Фиг. 11

Согласно сказанному выше, $Q_1 + \dots + Q_6 = 0$, поэтому получаем после упрощений следующее уравнение для h_i (уравнение неразрывности):

$$\beta_i \Delta h_i + \gamma_{i-1} h_{i-1} - (\gamma_{i-1} + \gamma_i) h_i + \gamma_{i+1} h_{i+1} = 0 \quad (2.1)$$

где $\beta_i = m_i k_i$, $\gamma_i = \lambda_i / \mu_i$ — величины, характеризующие пропускную способность i -го горизонта в горизонтальном и i -й прослойки — в вертикальном направлениях (произведение $m_i k_i$ называется проводимостью пласта);

$$\Delta h_i = \frac{\partial^2 h_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_i}{\partial y^2} \text{ — оператор Лапласа}$$

Объединяя уравнения вида (2.1) в систему, получаем

$$\begin{aligned} \beta_1 \Delta h_1 - (\gamma_0 + \gamma_1) h_1 + \gamma_1 h_2 &= -\gamma_0 H_0 \\ \beta_2 \Delta h_2 + \gamma_1 h_1 - (\gamma_1 + \gamma_2) h_2 + \gamma_2 h_3 &= 0 \\ \dots &\dots \\ \beta_n \Delta h_n + \gamma_{n-1} h_{n-1} - (\gamma_{n-1} + \gamma_n) h_n &= -\gamma_n H_{n+1} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для случая $n=3$ подобная система уравнений исследовалась в работе [10].

§ 3. Случай, когда имеется безнапорный пласт

Пусть первый горизонт является безнапорным. Если условимся в данном случае отсчитывать напоры от подошвы этого горизонта, то напор и мощность потока в нем будут характеризоваться одной и той же величиной h_1 , и вместо первого уравнения системы (2.2) имеем следующее:

$$\frac{k_1}{2} \Delta h_1^2 - \gamma_1 (h_1 - h_2) + w = 0 \quad (3.1)$$

Здесь $w=f(x, y)$ — инфильтрация (испарение) на свободную поверхность (в случае испарения $w<0$). Рассматривая (3.1) совместно с другими уравнениями системы (2.2), линеаризуем его применительно к этим уравнениям по h_1 , преобразуя первый член следующим образом:

$$\frac{k_1}{2} \Delta h_1^2 = k_1 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h_1 \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) \right] \approx k_1 \tilde{h}_1 \Delta h_1$$

где $\tilde{h}_1=\text{const}$ — некоторое среднее значение множителя h_1 при dh_1/dx и dh_1/dy . После линеаризации (3.1) примет вид

$$\beta_1 \Delta h_1 - \gamma_1 (h_1 - h_2) + w(x, y) = 0, \quad \beta_1 = k_1 \tilde{h}_1 \quad (3.2)$$

Предположим, что интенсивность испарения со свободной поверхности линейно зависит от глубины ее залегания, т. е. имеет место зависимость

$$w = \begin{cases} \varepsilon_0 (H - h_1)/(H' - H) & \text{при } H < h_1 < H' \\ 0 & \text{при } h_1 \leq H \end{cases} \quad (3.3)$$

Здесь ε_0 — интенсивность испарения у поверхности земли при $h_1=H'$. Выражение для w можно переписать так:

$$w = -\gamma_0 (h_1 - H)$$

причем

$$\gamma_0 = \begin{cases} \gamma_0/(H' - H) & \text{при } H < h_1 < H' \\ 0 & \text{при } h_1 \leq H \end{cases} \quad (3.4)$$

В результате линеаризованное уравнение (3.2) принимает вид

$$\beta_1 \Delta h_1 - \gamma_1 (h_1 - h_2) - \gamma_0 (h_1 - H) = 0$$

т. е. становится аналогичным первому уравнению системы (2.2), причем теперь роль напора H_0 играет так называемый «критический» уровень H (отсчитываемый от подошвы верхнего горизонта), ниже которого интенсивность испарения равна нулю.

Остановимся на случае, когда рассматривается один водонапорный горизонт, т. с. вместо системы имеем лишь одно уравнение (3.1).

Предположим, что верхний безнапорный горизонт с коэффициентом фильтрации k сообщается с нижележащим горизонтом, напор в котором равен H' , через прослойку мощности μ и с коэффициентом фильтрации λ (см. фиг. 13).

Пусть на свободную поверхность происходит инфильтрация w (или испарение). Тогда, обозначая в (3.1) $h_2 = H'$ и опуская индекс 1 у остальных величин, получаем уравнение

$$k \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] - \frac{\lambda}{\mu} (h - H') + w = 0 \quad (3.5)$$

Рассмотрим случай равномерной инфильтрации $w = \text{const}$.

Вводя обозначение

$$H = H' + w \frac{\mu}{\lambda} \quad (3.6)$$

получим

$$k \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right) \right] - \frac{\lambda}{\mu} (h - H) = 0 \quad (3.7)$$

В уравнении (3.7) инфильтрация w включена в напор H' и учитывается согласно (3.6) величиной H . Смысл последней нетрудно выяснить, если считать $h = \text{const}$; тогда согласно (3.7) $h = H$, т. е. H представляет уровень воды в верхнем горизонте, устанавливающийся там под влиянием напора H' в нижележащем горизонте и постоянной инфильтрации w , если другие факторы, влияющие на форму свободной поверхности, отсутствуют. В терминах § 4 величина H представляет «статический» уровень в безнапорном горизонте. Согласно (3.6) $H > H'$ при $w > 0$; разность $H - H'$ обеспечивает переток из верхнего горизонта в

нижележащий, компенсируя инфильтрационное питание: интенсивность перетока равна $(H - H') \lambda / \mu$. При $w < 0$ имеем $H < H'$, и в верхний горизонт происходит приток из нижележащего, компенсируя испарение. При $w = 0$ между обоими горизонтами устанавливается равновесие: $H = H'$.

§ 4. Исследование частного («статического») решения системы (2.2)

Если скважина не работает, то напоры во всех водоносных горизонтах (и прослойках) не зависят от x и y , т. е. $\Delta h_i = 0$. Тогда система (2.2) превратится в систему n алгебраических уравнений [11]

$$\begin{aligned} -\alpha_1 h_1 + \gamma_1 h_2 &= -\gamma_0 H_0 \\ \gamma_1 h_1 - \alpha_2 h_2 + \gamma_2 h_3 &= 0 \\ \dots &\dots \\ \gamma_{n-2} h_{n-2} - \alpha_{n-1} h_{n-1} + \gamma_{n-1} h_n &= 0 \\ \gamma_{n-1} h_{n-1} - \alpha_n h_n &= -\gamma_n H_{n+1} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь

$$\alpha_i = \gamma_{i-1} + \gamma_i$$

Методом полной математической индукции можно получить следующее выражение [11] для определителя системы (4.1):

$$D_n = (-1)^n \sum_{i=0}^n \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_{i-1} \gamma_{i+1} \dots \gamma_n \quad (4.2)$$

Допустим пока, что все $\gamma_i \neq 0$. Тогда $D_n \neq 0$ и система (3.1) имеет единственное решение

$$h_i = H_i = \text{const} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.3)$$

Таким образом, если скважина не работает, то при постоянных H_0 и H_{n+1} в i -м водоносном горизонте устанавливается средневзвешенный напор h_i , который непосредственно связан с напорами H_{i-1} и H_{i+1} в соседних горизонтах; в свою очередь H_{i-1} и H_{i+1} определяются напорами в других водоносных горизонтах, и в конечном счете напор H_i определенным образом выражается через H_0 и H_{n+1} .

Подставив решение (4.3) в i -е уравнение системы (4.1), получим

$$H_{i+1} - H_i = \frac{\gamma_{i-1}}{\gamma_i} (H_i - H_{i-1}) \quad (4.4)$$

Отсюда видно, что *статические напоры* H_i изменяются от *пласта к пласту* монотонно, а именно возрастают с глубиной при $H_{n+1} > H_0$ и убывают при $H_{n+1} < H_0$. В первом случае имеет место восходящий ток, который наблюдается обычно в так называемых областях разгрузки потоков грунтовых вод [1³, 1³], при этом напоры связаны соотношениями $H_0 < H_1 < \dots < H_n < H_{n+1}$. Второй случай соответствует нисходящему току областей питания; при этом $H_0 > H_1 > \dots > H_n > H_{n+1}$. Очевидно, при $H_0 = H_{n+1}$ напоры во всех горизонтах равны:

$$H_1 = \dots = H_n = H_0 = H_{n+1}$$

Рассматриваемое состояние будем условно называть *статическим*. На самом деле, как следует из вышеизложенного, в этом состоянии, вообще говоря, имеет место переток в вертикальном направлении.

Г л а в а II

НЕКОТОРЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ

В этой главе рассмотрены две задачи о движении в вертикальной плоскости:

1. Распределение напоров в водоносных горизонтах под влиянием инфильтрации на свободную поверхность верхнего горизонта в одной части гидрогеологического района и испарения — в другой. Принято сипусондальное распределение величины w .

2. Приток к горизонтальным дренам при наличии инфильтрации.

§ 5. Случай переменной инфильтрации

Напор в $(n+1)$ -м горизонте, с которым непосредственно сообщается нижний из рассматриваемой системы горизонтов, принимается постоянным. Таким образом, система (2.2) после замены ее первого уравнения на уравнение (3.2) запишется для нашего одномерного случая так:

$$\begin{aligned} \beta_1 \frac{d^2h_1}{dx^2} - \gamma_1 h_1 + \gamma_1 h_2 &= f(x) \\ \beta_2 \frac{d^2h_2}{dx^2} + \gamma_1 h_1 - (\gamma_1 + \gamma_2) h_2 + \gamma_2 h_3 &= 0 \\ \dots &\dots \\ \beta_n \frac{d^2h_n}{dx^2} + \gamma_{n-1} h_{n-1} - (\gamma_{n-1} + \gamma_n) h_n &= \gamma_n H_{n+1} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Функция $f(x)$, учитывающая инфильтрацию ($f(x) < 0$) или испарение ($f(x) > 0$), задана в виде [4]

$$f(x) = A \sin \alpha x + B \quad (5.2)$$

Тогда решение системы (5.1) можно составить из ее решения при $f(x) = B$ и решения при $f(x) = A \sin \alpha x$, $H_{n+1} = 0$. Если $f(x) = B$, то имеем случай постоянной в пределах рассматриваемого района инфильтрации ($B < 0$) или испарения ($B > 0$). Система (5.1) имеет частное решение вида (4.3), причем сама система (5.1) превращается при этом в систему (4.1), в которой

$-v_0(H_0 - H_1) = B$. Согласно сказанному выше, напоры H_i возрастают с глубиной при $B > 0$ (испарение) или убывают при $B < 0$ (инфилтрация).

Положим $f(x) = A \sin \alpha x$, $H_{n+1} = 0$. Эта зависимость учитывает «в чистом виде» изменение инфильтрации (испарения) с расстоянием, причем в той части, где $f(x) > 0$; па равномерную инфильтрацию или испарение накладываются изменения в сторону испарения, а при $f(x) < 0$ — в сторону инфильтрации. Параметр α , связанный с периодом L колебания синусоиды соотношением

$$\alpha \equiv 2\pi/L \quad (5.3)$$

а также амплитуда A считаются известными. Решение системы (5.1) в этом случае ищется в виде

$$h_i = M_i \sin \alpha x \quad (i = 1, \dots, n) \quad (5.4)$$

что после подстановки в (5.1) и сокращений дает следующую систему n алгебраических уравнений для M_t :

Определитель этой системы представляет полином n -й степени относительно a^2 . Если положить $a^2 = -\delta^2$, то относительно δ^2 получится полином, который, как показано в [11], имеет n простых положительных корней, а следовательно, рассматриваемый определитель отличен от нуля при всех действительных a (т. е. при $a^2 > 0$). Тогда система имеет единственное решение M_1, \dots, M_n , причем все M_i противоположны по знаку A и убывают по абсолютному значению.

Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим уравнения системы (5.5), начиная с последнего, которое перепишем так:

$$\gamma_{n-1} (M_{n-1} - M_n) = (\beta_n \alpha^2 + \gamma_n) M_n$$

Отсюда видно, что M_n и $M_{n-1} - M_n$ одного знака, т. е. если $M_n > 0$, то $M_{n-1} > M_n > 0$; в противном случае $M_{n-1} < M_n < 0$. Предпоследнее уравнение перепишем аналогично:

$$\gamma_{n-2}(M_{n-2} - M_{n-1}) = \gamma_{n-1}(M_{n-1} - M_n) + \beta_{n-1}\alpha^2 M_{n-1}$$

Видим, что $M_{n-2} - M_{n-1}$ одного знака с $M_{n-1} - M_n$ и M_{n-1} , а следовательно, и с M_n . Имеем либо $M_{n-2} > M_{n-1} > M_n > 0$, либо

$M_{n-2} < M_{n-1} < M_n < 0$. Продолжая эти рассуждения, убедимся в монотонном характере изменения коэффициентов. Наконец, переписывая первое уравнение в виде

$$A = -\gamma_1(M_1 - M_2) - \beta_1 \alpha^2 M_1$$

и учитывая, что $M_1 - M_2$ и M_1 одного знака, заключаем, что знаки A и коэффициентов M_1 противоположны.

Итак, если на постоянную по площади инфильтрацию (испарение) накладываются изменения синусоидального вида, то в водоносных горизонтах возникают аналогичные изменения «статических» напоров с тем же периодом α и с амплитудами M_1 , затухающими с глубиной.

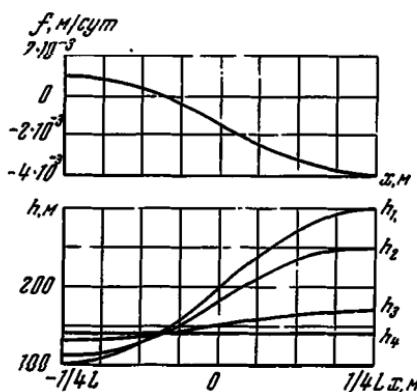
Зависимость (5.2) объединяет разобранные выше случаи питания и разгрузки подземных вод, причем координата x_0 границы раздела зон питания и разгрузки определяется из соотношения

$$f(x_0) = A \sin \alpha x_0 + B = 0$$

Решение же системы (5.1), если $f(x)$ задана в виде (5.2), имеет вид

$$h_i = H_i + M_i \sin \alpha x \quad (5.6)$$

В качестве примера в статье [14] рассматривается случай четырех горизонтов. Приблизительная картина распределения напоров в них известна (фиг. 12) и взята из статьи [15]. Это распределение можно



Фиг. 12. Кривые напоров в водоносных горизонтах и соответствующая им кривая $f(x)$ инфильтрации — испарения (формула (5.2))

представить зависимостями (5.6), и, таким образом, значения M_i задаются. При значениях $L=500-1000$ км согласно (5.3) $\alpha \approx 10^{-5}$ м⁻¹. Так как величины β_i изменяются в пределах 200—500 м³/сут, а величины γ_i — порядка $10^{-4}-10^{-6}$ сут⁻¹, то в уравнениях (5.5) выражениями $\beta_i \alpha^2$ можно пренебречь. Предположим далее, что все

γ_i равны между собой: $\gamma_i = \gamma$ ($i = 1, 2, 3$), причем величина γ неизвестна. Кроме нее требуется определить параметры A и B , при которых зависимость (5.2) давала бы картину, близкую к изображенной на фиг. 12. «Статические» напоры H_i (постоянные в каждом горизонте) равны значениям h_i из (5.6) при $x = 0$. В соответствии с фиг. 12 имеем

$$H_1 = \frac{300+100}{2} = 200 \text{ м}, \quad H_2 = \frac{250+110}{2} = 180 \text{ м}$$

$$H_3 = \frac{170+130}{2} = 150 \text{ м}, \quad H_4 = 140 \text{ м}$$

С другой стороны, H_i можно определить как решение системы (5.1) при $f(x) = B$, $n = 3$. При наших предположениях эта система примет вид ($h_i = \text{const}$)

$$\begin{aligned} -\gamma h_1 + \gamma h_2 &= B \\ \gamma h_1 - 2\gamma h_2 + \gamma h_3 &= 0 \\ \gamma h_2 - 2\gamma h_3 &= -\gamma H_4 \end{aligned}$$

Решая ее, найдем

$$H_1 = -\frac{3B}{\gamma} + H_4, \quad H_2 = -\frac{2B}{\gamma} + H_4, \quad H_3 = -\frac{B}{\gamma} + H_4$$

Величины напоров, связанные с этими соотношениями, согласуются с приведенными выше при $B/\gamma = -20 \text{ м}$, за исключением H_3 , которое теперь должно быть равным 160 м .

При $f(x) = A \sin \alpha x$, $H_{n+1} = 0$ система (5.1) имеет решение (5.4), причем для M_i ($i = 1, 2, 3$) получается следующая система:

$$\begin{aligned} -\gamma M_1 + \gamma M_2 &= A \\ \gamma M_1 - 2\gamma M_2 + \gamma M_3 &= 0 \\ \gamma M_2 - 2\gamma M_3 &= 0 \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$M_1 = -3A/\gamma, \quad M_2 = -2A/\gamma, \quad M_3 = -A/\gamma \quad (5.7)$$

В соответствии же с фиг. 12

$$M_1 = \frac{300-100}{2} = 100 \text{ м}, \quad M_2 = \frac{250-110}{2} = 70 \text{ м}, \quad M_3 = \frac{170-130}{2} = 20 \text{ м}$$

Если согласовать величины M_i , то получим $A/\gamma = -33.3 \text{ м}$, и тогда по (5.7) $M_2 = 66.7 \text{ м}$, $M_3 = 33.3 \text{ м}$, что несколько расходится с данными, особенно для величины M_3 . Заметим, что лучшее приближение к данной картине мы получили бы при найденных

A/γ и B/γ , если бы при $x=L/4$ вместо $h_3=170$ м имели $h_3=190$ м. Тогда $H_3=160$ м, $M_3=30$ м.

Итак, примем $A=-33.3 \gamma$, $B=-20 \gamma$. Тогда зависимость (5.2) принимает вид

$$f(x) = -\gamma (33.3 \sin \alpha x + 20) \quad (5.8)$$

Для определения γ достаточно задать $f(x)$ при некотором x . Пусть, например, известна средняя за летний период величина испарения в наиболее засушливой части области разгрузки, равная 10^{-3} м/сут. Имеем

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{L}{4}\right) &= -\gamma [33.3 \sin(-1/2 \pi) + 20] = 13.3 \gamma = 10^{-3} \\ \gamma &= 0.75 \cdot 10^{-4} \text{ сут}^{-1} \end{aligned}$$

Отметим, что в рассмотренном примере при незначительной амплитуде синусоиды, характеризующей инфильтрацию (испарение): $|A|=0,0025$ м/сут, — амплитуды колебаний напоров h_i в пределах рассматриваемого района весьма ощущимы. Такое распределение напоров создает, помимо вертикальных токов, потоки в самих горизонтах от областей питания к областям разгрузки. При этом часть воды, попав при инфильтрации в зону питания, затем уходит вглубь и одновременно переносится в зону разгрузки; здесь эта вода увлекается восходящими токами вверх и, достигнув поверхности земли, испаряется.

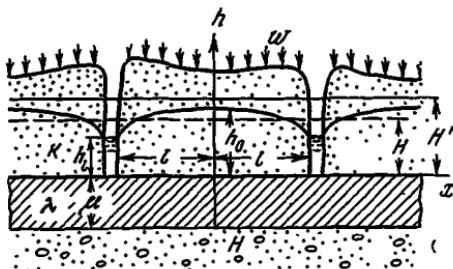
§ 6. Горизонтальные совершенные дрены в слоистых грунтах. Нелинейное уравнение

Задачам о притоке к горизонтальным дренам посвящено большое количество работ. В книге [15] содержатся методические указания по решению ряда задач плоской фильтрации к горизонтальным совершенным и несовершенным дренам в напорном и безнапорном потоках при разных очертаниях непроницаемого водоупора, подстилающего дреинируемый пласт, и различных граничных условиях. Эти рекомендации основаны на исследованиях многих авторов. В книге [16] рассмотрена линейная теория в слоистых грунтах.

Здесь приводится решение задачи о притоке к совершенным горизонтальным дренам в безнапорном движении со слабопроницаемым водоупором при галичии равномерной инфильтрации [17]. Для ординат свободной поверхности получается нелинейное уравнение. Его решение содержит эллиптические интегралы первого и второго рода, причем вычисления по нему являются трудоемкими. Поэтому даются также решения уравнений, полученных линеаризацией исходного уравнения по h и h^2 ; эти решения сравниваются с решением нелинейного уравнения.

Верхний безнапорный горизонт с коэффициентом фильтрации k прорезан горизонтальными дренами до границы со слабопроницаемой прослойкой, мощность которой равна μ , а коэффи-

циент фильтрации λ , и сообщается через последнюю с нижележащим напорным горизонтом (фиг. 13). Строго говоря, напор H' в этом горизонте может в какой-то степени изменяться под влиянием дренирования верхнего горизонта [18], однако мы будем пренебречь этим изменением, считая напор H' постоянным. Расстояние между двумя соседними дренами обозначим через $2l$; уровень в обеих дренах считаем пока одинаковым и равным h_l . Выбрав систему координат, как указано на фиг. 13, получим



Фиг. 13

для ординаты h свободной поверхности при наличии равномерной инфильтрации w уравнение (3.7), в котором теперь $dh/dy=0$ (рассматривается одномерная задача):

$$k \frac{d}{dx} \left(h \frac{dh}{dx} \right) - \frac{\lambda}{\mu} (h - H) = 0, \quad H = H' + \frac{w\mu}{\lambda} \quad (6.1)$$

Вводя безразмерные величины

$$h^o = h/H, \quad x^o = \omega x, \quad (\omega = \sqrt{\lambda/k\mu H}) \quad (6.2)$$

перепишем уравнение (6.1) в виде

$$\frac{d}{dx^o} \left(h^o \frac{dh^o}{dx^o} \right) - (h^o - 1) = 0$$

В дальнейшем мы будем иметь дело с безразмерными величинами (6.2). Для упрощения индекс сверху будем опускать, прибегая к нему лишь в примерах, где фигурируют как безразмерные, так и размерные величины. Таким образом, будем рассматривать уравнение

$$\frac{d}{dx} \left(h \frac{dh}{dx} \right) - (h - 1) = 0 \quad (6.3)$$

при следующих граничных условиях:

$$h \Big|_{x=0} = h_0, \quad \frac{dh}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \quad (6.4)$$

Легко убедиться в четности функции h , являющейся решением задачи (6.3) — (6.4).

Переписывая уравнение (6.3) в виде

$$\frac{1}{2} \frac{d^2h^2}{dx^2} = h - 1 \quad (6.5)$$

замечаем, что в случае понижающих дрен, когда $h_0 < 1$, имеем $[d^2h^2/dx^2]_{x=0} < 0$, т. е. в окрестности точки $x=0$ кривая h^2 является выпуклой кверху.

Согласно (6.4), $[dh^2/dx]_{x=0} = 0$ и, следовательно, функция h^2 достигает в точке $x=0$ максимума (равного h_0^2), т. е. в некоторой окрестности этой точки $h^2 < h_0^2$ и $h < h_0$, а разность $h - 1$ убывает по обе стороны от $x=0$. Обращаясь вновь к равенству (6.5), видим, что d^2h^2/dx^2 остается отрицательной, убывая (возрастая по модулю), т. е. кривая h^2 и дальше является выпуклой, причем кривизна ее все больше увеличивается. Так как $h > 0$, то это заключение можно сделать и относительно самой свободной поверхности. Аналогичные рассуждения приводят к выводу о вогнутости свободной поверхности в случае каналов, повышающих уровень грунтовых вод.

Перейдем к интегрированию уравнения (6.3). Оно является обыкновенным дифференциальным уравнением, не содержащим явно независимого переменного; следовательно, его порядок можно понизить на единицу. Положим $hdh/dx = u$. Тогда

$$\frac{d}{dx} \left(h \frac{dh}{dx} \right) = \frac{d}{dh} \left(h \frac{dh}{dx} \right) \frac{dh}{dx} = \frac{du}{dh} \frac{u}{h}$$

и уравнение (6.3) перейдет в следующее:

$$\frac{du}{dh} \frac{u}{h} - (h - 1) = 0$$

Разделяя переменные и интегрируя при условиях (6.4), получаем

$$u = h \frac{dh}{dx} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}(h - h_0)[h^2 + (h_0 - \frac{3}{2})h + h_0(h_0 - \frac{3}{2})]} \quad (6.6)$$

Повторное интегрирование даст следующее выражение:

$$x = \pm \sqrt{\frac{h}{3/2}} \int_{h_0}^h \frac{h dh}{\sqrt{(h-h_0)(h-h_1)(h-h_2)}} \quad (6.7)$$

Здесь h_1 и h_2 — корни квадратного трехчлена в подкоренном выражении правой части (6.6):

$$h_{1,2} = \frac{1}{4} [(3 - 2h_0) \pm \sqrt{(3 - 2h_0)(3 + 6h_0)}]$$

Нетрудно показать, что

$$h_2 < 0 \leq h_l \leq h \leq h_0 < h_1$$

Двойной знак в формуле (6.7) является выражением четности функции h . Выберем для рассмотрения правую половину свободной поверхности, которой для случая поникающих дрен в (6.7) соответствует знак минус ($h \leq h_0$). Далее, для приведения эллиптического интеграла в правой части формулы (6.7) к лежандровой форме [19] воспользуемся подстановкой

$$h = h_2 + (h_0 - h_2) \sin^2 \varphi \quad (6.8)$$

Выберем для φ такую ветвь, на которой

$$0 < \varphi_l \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi \text{ при } 0 \leq h_l \leq h \leq h_0$$

Замена (6.8) после некоторых преобразований приводит уравнение (6.7) к следующему виду:

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{3} \{ [S(h_0) + R(h_0)] [K(\lambda) - F(\varphi, \lambda)] - 2R(h_0) [E(\frac{1}{2}\pi, \lambda) - E(\varphi, \lambda)] \} R(h_0)^{-1/2} \quad (6.9)$$

$$S(h_0) = 3 - 2h_0, \quad R(h_0) = \sqrt{S(h_0)(3 + 6h_0)}, \quad \lambda^2 = \frac{h_0 - h_2}{h_1 - h_2}$$

$$F(\varphi, \lambda) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}}, \quad E(\varphi, \lambda) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad K(\lambda) = F(\frac{1}{2}\pi, \lambda)$$

Здесь $F(\varphi, \lambda)$ и $E(\varphi, \lambda)$ — неполные эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода при модуле λ , $K(\lambda)$ — полный эллиптический интеграл первого рода при модуле λ .

Формула (6.9) позволяет определить расстояние между дренами, при котором снижение уровня воды в дренах до заданной величины обеспечит понижение уровня в середине междренья

(где он максимален) до h_0 . Если же задача ставится иначе, например, требуется найти h_0 при заданных значениях x и h , то целесообразно предварительно построить по (6.9) соответствующие графики. Ввиду необходимости двойного интерполирования табличных значений эллиптических интегралов в (6.9) удобнее производить расчеты на ЭВМ.

С. Т. Рыбаковой составлена программа численного интегрирования на ЭВМ уравнения (6.3) при условии (6.4) по схеме Рунге — Кутта [20]. Интегрирование производилось для значений h_0 от 0.025 до 0.975 через 0.025. В каждом цикле интегрирование с заданным шагом продолжалось до тех значений x , пока соответствующие значения h оставались положительными: отрицательность последних, начиная с некоторого l , при заданном h_0 означает, что дрены, отстоящие одна от другой дальше, чем на l , даже при максимально возможном снижении уровня в них, т. с. до $h_l = 0$, не в состоянии обеспечить понижение уровня в середине междренья до величины h_0 .

На основе результатов вычислений построены графики ординаты h свободной поверхности (фиг. 14, а) и производной dh/dx (фиг. 14, б) для всех вышеуказанных значений h_0 при $x \geq 0$. Пользуясь графиками для h , можно решать задачи о нахождении каждой из трех величин: h_0 , h_l и $2l$, если заданы две остальные. С использованием же графика для dh/dx можно также определять расход Q каждой из дрен со стороны междренья на единицу длины дrenы по формуле

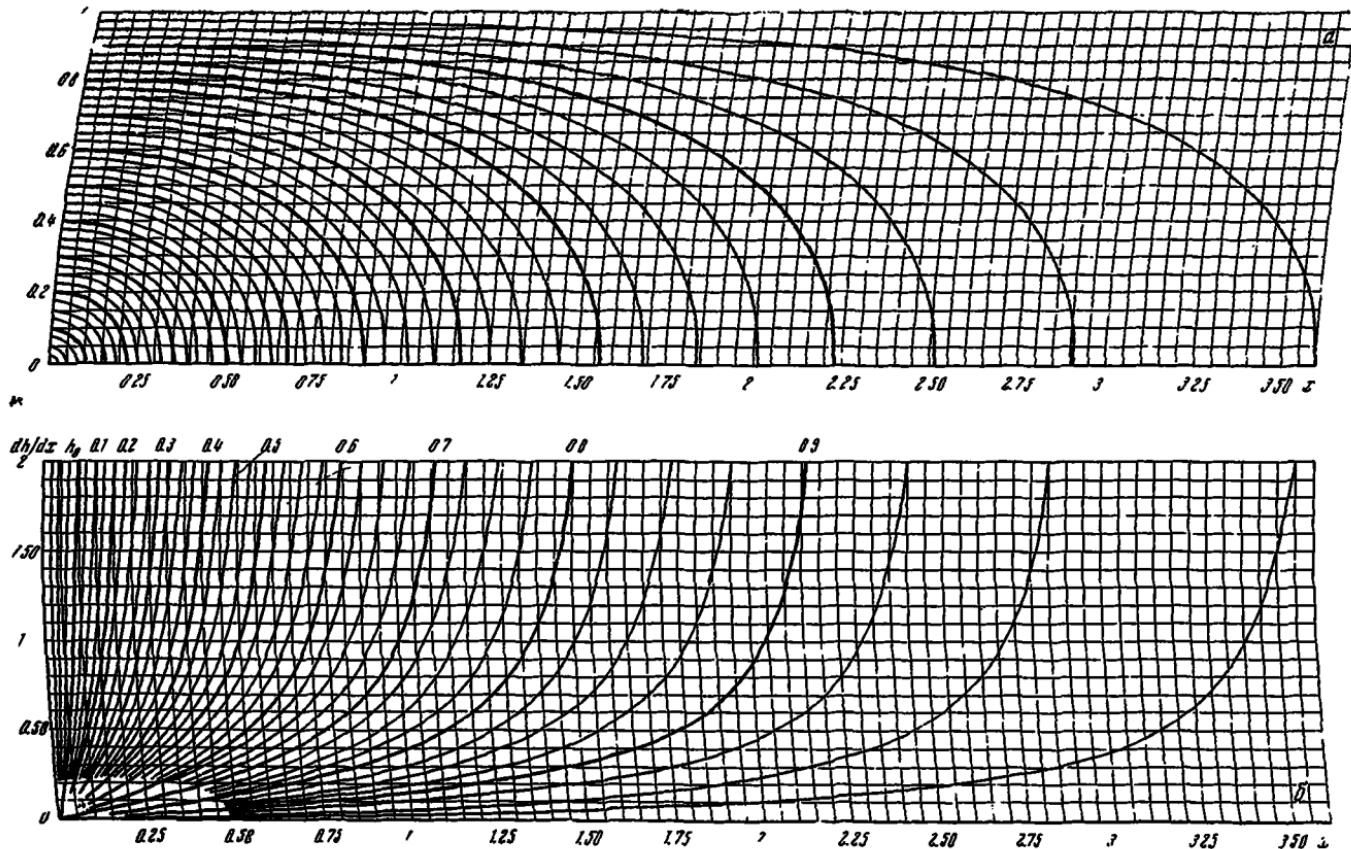
$$Q = k\omega H_1^3 Q^0 = k\omega H_1^3 h_l \left| \frac{dh}{dx} \right|_{x=l} \quad (6.10)$$

(Q^0 — безразмерный расход)

Расход Q можно вычислить по (6.10) и аналитически, используя выражение (6.6); при этом предварительно надо найти уровень h_l в дренах.

Расчеты на ЭВМ выполнены для некоторых значений исходных параметров также по формуле (6.9) с целью проверки последней; при этом задавались значения h , полученные ранее в результате численного интегрирования уравнения (6.3) (при тех же значениях h_0), а соответствующие значения x , задававшиеся прежде, теперь вычислялись; совпадение с результатами численного интегрирования оказалось практически полным.

Заметим, что графики фиг. 14 можно использовать также в случае, когда коэффициент фильтрации является кусочно-постоянной функцией x , что соответствует наличию в верхнем горизонте макронесоднородностей. Эти изменения проницаемости учитываются масштабным коэффициентом ω , посредством которого



Фиг. 14 Графики правых половин свободной поверхности в междрене при различных h_0 — уравнение (6.3) при условиях (6.4) (а) и графики производных dh/dx (б)

согласно (6.2) производится пересчет безразмерных координат x^0 в размерные x . В этом случае функция h по-прежнему непрерывна, в то время как производная dh/dx претерпевает скачок на границе раздела сред с различными проницаемостями; второе обстоятельство является отражением принципа непрерывного изменения расхода потока.

Мы предполагали пока, что уровни в обеих дренах одинаковы, так что при данном выборе осей координат картина оказывается симметричной относительно оси h . Можно, однако, расширить постановку задачи: пусть уровни h_1 и h_2 в левой и правой дренах с заданным расстоянием L между ними различны. Тогда речь будет идти о нахождении интегральной кривой уравнения (6.3), проходящей через две заданные точки; начало координат можно выбрать на оси x пока произвольно. В некоторой точке междренья ордината свободной поверхности достигает максимума h_0 ; при этом $h'=0$. Если перенести начало координат в эту точку, то в новой системе координат искомая интегральная кривая является некоторой интегральной кривой уравнения (6.3) при условиях (6.4) и, следовательно, для ее нахождения можно воспользоваться имеющимися графиками.

Практически это можно осуществить следующим путем. Используя графики фиг. 14, а, построим вспомогательный график, по оси абсцисс которого будем откладывать значения h_0 , а по оси ординат — сумму абсцисс двух точек на соответствующей интегральной кривой, ординаты которых равны h_1 и h_2 . Построив таким образом кривую, найдем на ней точку с ординатой L ; ее абсцисса определит искомое значение h_0 . После выделения нужной интегральной кривой определяются также при помощи фиг. 14, а и координаты самих дрен, как и любой точки междренья, в которой потребовалось бы определить уровень.

Еще более просто, также графически, решается данная задача, если предварительно достроить левые половины интегральных кривых, симметричные правым половинам, представленным на фиг. 14. Затем на кальке из концов отрезка длины L восстановим два перпендикуляриых к нему отрезка, равных по длине приведенным уровням в дренах. Далее, накладывая «патрон» из кальки на дополненный график и перемещая его так, чтобы отрезок на кальке, соединяющий отрезки-дрены, все время оставался совмещенным с осью x на графиках, найдем такое значение h_0 , чтобы на соответствующей интегральной кривой оказались концы обоих отрезков-дрен. При этом, вообще говоря, придется прибегнуть к интерполяции, ибо на графиках даны кривые лишь для некоторых значений h_0 .

Пример. Уровни в дренах от водоупора равны 3 и 3,5 м, расстояние между дренами $L=300$ м, коэффициенты фильтрации верхнего горизонта и

прослойки равны соответственно 10 и 0,01 м/сут, мощность прослойки $\mu = 2$ м, напор в нижележащем горизонте $H = 4$ м, интенсивность инфильтрации $w = 0,005$ м/сут. Определить уровень в междрене на расстоянии 100 м от левой дрены (с меньшим уровнем) и расход каждой из дрен (со стороны междреня).

Решение. Согласно (6.1), «статический» уровень в верхнем горизонте

$$H_1 = 4 \text{ м} + \frac{0,005 \text{ м/сум} \cdot 2 \text{ м}}{0,01 \text{ м/сум}} = 5 \text{ м}$$

Перейдем по формулам (6.2) к безразмерным параметрам. Имеем

$$h_1^o = \frac{3 \text{ м}}{5 \text{ м}} = 0,6, \quad h_2^o = \frac{3,5 \text{ м}}{5 \text{ м}} = 0,7, \quad L^o = L_0 = 300 \text{ м} \sqrt{\frac{0,01 \text{ м/сум}}{10 \text{ м/сум} \cdot 2 \text{ м} \cdot 5 \text{ м}}} = 3,0$$

Из фиг. 14, а видим, что $L^o = 2,94$ при $h_0^o = 0,875$ и $L^o = 3,40$ при $h_0^o = 0,900$. В результате графической интерполяции находим нужное значение $h_0^o = 0,878$. Вновь обращаясь к фиг. 14, а, определяем $l_1^o = 1,62$ и $l_2^o = 1,38$. Таким образом точке, отстоящей от левой дрены на расстояние 100 м, соответствует безразмерная абсцисса $x^o = -0,62$. При помощи фиг. 14, а находим для кривой с параметром $h_0^o = 0,878$ путем интерполяции $h^o(-0,62) = h^o(0,62) = 0,85$, или, в пересчете на действительные уровни, $h|_{x=-100 \text{ м}} = 0,85 \cdot 5 \text{ м} = 4,25 \text{ м}$. Затем по формуле (6.10) определяем расходы Q_L и Q_R — левой и правой дрен на метровых длины со стороны междреня; при этом используем также фиг. 14, б:

$$Q_L = k_0 H_1^2 \left(h^o \left| \frac{dh^o}{dx^o} \right| \right)_{x^o=1,62} = 10 \text{ м/сум} \cdot 0,01 \text{ м}^{-1} \cdot 25 \text{ м}^2 \cdot 0,6 \cdot 0,55 = \\ = 0,825 \text{ м}^3/\text{сум}/\text{1 пог. м}.$$

$$Q_R = k_0 H_1^2 \left(h^o \left| \frac{dh^o}{dx^o} \right| \right)_{x^o=1,38} = 10 \text{ м/сум} \cdot 0,01 \text{ м}^{-1} \cdot 25 \text{ м}^2 \cdot 0,7 \cdot 0,34 = \\ = 0,595 \text{ м}^3/\text{сум}/\text{1 пог. м}$$

§ 7. Линеаризованные уравнения и их решения

Ввиду того что решение нелинейного уравнения (6.3) оказывается довольно сложным, на практике прибегают к линеаризации этого уравнения, которую можно осуществить двумя путями.

1. **Линеаризация по h .** В уравнении (6.3) заменим множитель h при dh/dx некоторым постоянным значением h^* . Тогда уравнение (6.3) перейдет в следующее:

$$h^* h'' - (h - 1) = 0 \tag{7.1}$$

Решение уравнения (7.1) при условиях (6.4) имеет вид

$$h = 1 - (1 - h_0) \operatorname{ch}(x/Vh^*) \tag{7.2}$$

В книге В. А. Ионата ([16], стр 216) приводится решение уравнения (7.1) при задании уровня в дренах:

$$h|_{x \rightarrow \pm\infty} = h_i \quad (7.3)$$

В наших обозначениях это решение выглядит так:

$$h = 1 - (1 - h_i) \frac{\operatorname{ch}(x/\sqrt{h^*})}{\operatorname{ch}(l/\sqrt{h^*})} \quad (7.4)$$

2. Линеаризация по h^2 . Умножим второй член левой части уравнения (6.3) на выражение $(h+1)/2h^{**}$, где постоянная h^{**} выбирается так, чтобы дробь по возможности меньше отличалась от единицы. В результате вместо уравнения (6.3) получим следующее:

$$h^{**}(h^2)'' - (h^2 - 1) = 0 \quad (7.5)$$

При условиях (6.4) решение уравнения (7.5) таково:

$$h^2 = 1 - (1 - h_0^*) \operatorname{ch}(x/\sqrt{h^{**}}) \quad (7.6)$$

Если же вместо уровня h_0 в середине междреня известен уровень h_i в дренах, т. е. вместо условий (6.4) заданы условия (7.3), то решение уравнения (7.5) будет следующим:

$$h^2 = 1 - (1 - h_i^*) \frac{\operatorname{ch}(x/\sqrt{h^{**}})}{\operatorname{ch}(l/\sqrt{h^{**}})} \quad (7.7)$$

Выбор постоянных h^* и h^{**} можно осуществить разными способами. При этом надо стараться по возможности меньше исказить исходное уравнение. Выполнить это требование тем легче, чем меньше изменяется h в пределах междреня, т. е. чем положе свободная поверхность.

Если, например, задать h^* и h^{**} таким образом.

$$h^* = h_0, \quad h^{**} = 1/2(1 + h_0) \quad (7.8)$$

то наименьшее расхождение между решениями нелинейного и линеаризованного уравнений при одинаковых условиях (6.4) имеет место для малых значений x , когда $h \approx h_0$. Остановимся в дальнейшем на этом выборе. Тогда решения (7.2) и (7.6) примут соответственно вид

$$h = 1 - (1 - h_0) \operatorname{ch}(x/\sqrt{h_0}) \quad (7.9)$$

$$h^2 = 1 - (1 - h_0^*) \operatorname{ch}(x/\sqrt{1/2(1 + h_0)}) \quad (7.10)$$

При линеаризации по h^2 формула (6.10) для расхода дрен запишется с учетом (7.10) так:

$$Q = k\omega H_1^2 (1 - h_0) \sqrt{1/2(1 + h_0)} \operatorname{sh}(l/\sqrt{1/2(1 + h_0)}) \quad (7.11)$$

Для вычисления же расхода при линеаризации по h формула (6.10) непригодна, так как согласно этой формуле $\lim Q=0$ при $h_l \rightarrow 0$: в силу (7.9) производная dh/dx при $h_l \rightarrow 0$ не стремится к ∞ , компенсируя убывание h_l , как это имеет место при линеаризации по h^2 или для нелинейного уравнения. В данном случае в соответствии с принципом осреднения потока по мощности, положенным в основу линеаризации по h , расход следует вычислять по формуле

$$Q = k\omega H_1^2 h_0 \left| \frac{dh}{dx} \right|_{x=l}$$

или согласно (7.9)

$$Q = k\omega H_1^3 (1 - h_0) \sqrt{h_0} \operatorname{sh}(l/\sqrt{h_0}) \quad (7.12)$$

Вновь предположим, что уровни в дренах различны. Возьмем за основу уравнение (7.5), общее решение которого при выборе h^{**} согласно (7.8) имеет вид

$$h^2 = 1 + C_1 \operatorname{sh}(x/\sqrt{1/2(1 + h_0)}) + C_2 \operatorname{ch}(x/\sqrt{1/2(1 + h_0)}) \quad (7.13)$$

Выделим частное решение, удовлетворяющее условиям

$$h(-l_1) = h_1 \quad h(l_2) = h_2 \quad (l_1 + l_2 = L) \quad (7.14)$$

В качестве начала координат $x=0$ удобно по-прежнему выбрать точку, в которой уровень достигает максимума h_0 . Так как тогда $h'(0)=0$, то имеем $C_1=0$ и выражение (7.13) упрощается, принимая вид (7.10). Однако теперь неизвестны значения величин h_0 , l_1 и l_2 ; дано лишь соотношение между двумя последними: $l_1 + l_2 = L$ (ср. с § 6). Используя условия (7.14), получим, последовательно полагая в (7.10) $x=-l_1$, $h=h_1$ и $x=l_2=L-l_1$, $h=h_2$:

$$l_1 = \sqrt{\frac{1+h_0}{2}} \operatorname{ar ch} \frac{1-h_1^2}{1-h_0^2} \quad (7.15)$$

$$L - l_1 = \sqrt{\frac{1+h_0}{2}} \operatorname{ar ch} \frac{1-h_2^2}{1-h_0^2}$$

откуда имеем

$$L = \sqrt{\frac{1+h_0}{2}} \left(\operatorname{ar ch} \frac{1-h_1^2}{1-h_0^2} + \operatorname{ar ch} \frac{1-h_2^2}{1-h_0^2} \right) \quad (7.16)$$

Из соотношения (7.16) подбором или графически находим h_0 , после чего по формулам (7.15) определяем положение дрен в преобразованной системе координат. Сориентировав таким образом дрены и имея решенис (7.10), найдем затем интересующие нас величины: расход дрен, уровень в любой точке между дренья.

Пример. Вернемся к задаче, рассмотренной в § 6 для нелинейного уравнения. Из соотношения (7.16) при выбранных параметрах вычисляем $h_0 = 0.8763$, затем по формуле (7.10) найдем

$$h^\circ(-0.62) = 0.847, \text{ т. с. } h|_{x=-62 \text{ м}} = 4.235 \text{ м}$$

Пользуясь формулой (7.11), определим расход дреи:

$$Q_\pi = 0.1198 \cdot 10 \text{ м/сум} \cdot 0.01 \text{ м}^{-1} \cdot 25 \text{ м}^2 \cdot \operatorname{sh}(1.0324 \cdot 1.62) = 0.7690 \text{ м}^3/\text{сум}/1 \text{ пог. м}$$

$$Q_\pi = 0.5865 \text{ м}^3/\text{сум}/1 \text{ пог. м}$$

Если использовать решение (7.9) уравнения, линеаризованного по h , то для определения h_0 получим следующее соотношение, аналогичное соотношению (7.16):

$$L^\circ = \sqrt{\frac{1 - h_0^\circ}{h_0^\circ}} \left(\operatorname{ar ch} \frac{1 - h_1^\circ}{1 - h_0^\circ} + \operatorname{ar ch} \frac{1 - h_2^\circ}{1 - h_0^\circ} \right)$$

из которого найдем для нашего примера значение $h_0^\circ = 0.8672$.

По формулам (7.9) и (7.12) получаем

$$h^\circ(-0.62) = 0.836, \text{ т. е. } h|_{x=-62 \text{ м}} = 4.180 \text{ м}$$

$$Q_\pi = 0.8540 \text{ м}^3/\text{сум}/1 \text{ пог. м}, Q_\pi = 0.6460 \text{ м}^3/\text{сум}/1 \text{ пог. м}$$

Сравнивая результаты вычислений, видим, что при одинаковых граничных условиях (7.14) обе линеаризации дают интегральные кривые более пологие, чем соответствующая кривая нелинейного уравнения, причем лучшее приближение к последней обеспечивает линеаризация по h^2 . Далее, первая линеаризация дает завышенные значения расхода дреи, а вторая — заниженные. Последнее становится понятным, если учесть, что при линеаризации по h^2 значения $|dh/dx|$ на дренах оказываются меньшими, чем при решении нелинейного уравнения, если уровни на дренах в обоих случаях одинаковы.

Проведем в общем виде сравнение решений нелинейного и линеаризованного уравнений, подчиненных одинаковым условиям (6.4), или, иначе говоря, проследим за взаимным расположением интегральных кривых свободной поверхности, выходящих из одной и той же точки $x=0, h=h_0$ ($x=0$ — точка максимума).

Докажем, что при этих условиях интегральные кривые уравнения, линеаризованного по h , лежат выше соответствующих кривых уравнения, линеаризованного по h^2 ; последние в свою оче-

редь лежат выше соответствующих кривых нелинейного уравнения. В отношении же расходов картина в данном случае обратная: обе линеаризации дают заниженные значения расходов, причем лучшее приближение обеспечивает первая линеаризация.

Вследствие четности всех сравниваемых функций достаточно провести рассуждения для $x \geq 0$. Сначала сравним решения линеаризованных уравнений. Снабжая для различия функцию h при линеаризации по h и по h^2 соответственно индексами 1 и 2 снизу, перепишем совместно уравнения (7.1) и (7.5) с учетом (7.8)

$$h_0 h_1'' - (h_1 - 1) = 0 \quad (7.17)$$

$$(h_0 + 1) h_2 h_2'' + (h_0 + 1) (h_2')^2 - (h_2^2 - 1) = 0 \quad (7.18)$$

Умножая (7.17) на $(h_0 + 1) h_2$, а (7.18) — на h_0 и вычитая затем второе уравнение из первого, найдем

$$u'' = \frac{(h_0 + 1) h_0 (h_2')^2 + h_0 (h_2 + 1) u + (h_0 - h_2) (1 - h_1)}{h_0 (h_0 + 1) h_2} \quad (7.19)$$

Здесь $u = h_1 - h_2$ — расхождение между решениями линеаризованных уравнений. Учитывая условия (6.4), получаем

$$u''|_{x=0} = 0 \quad (7.20)$$

Мы видим, что вблизи точки $x = 0$ расхождение между h_1 и h_2 столь мало, что его не удается зафиксировать при помощи второй производной. Далее вследствие четности функций h_1 и h_2 , а следовательно, и функции u при $x = 0$ имеем $h_1''' = h_2''' = u''' = 0$. Для изучения поведения $u^{IV}|_{x=0}$ дважды продифференцируем уравнения (7.17) и (7.18); первое уравнение после дифференцирования умножим на $(h_0 + 1)$:

$$(h_0 + 1) h_0 h_1^{IV} - (h_0 + 1) h_1'' = 0$$

$$(h_0 + 1) h_2 h_2^{IV} + 3(h_0 + 1) h_2 h_2''' + 2(h_0 + 1) (h_2'')^2 - 2h_2 h_2'' - 2(h_2')^2 = 0$$

Положим в этих уравнениях $x = 0$. Вычитая затем второе уравнение из первого, получим с учетом условий (6.4) и равенства (7.20)

$$u^{IV}|_{x=0} = \left. \frac{(1 - h_0) h_2'' + 2(h_0 + 1) (h_2')^2}{h_0 (h_0 + 1)} \right|_{x=0}$$

Из уравнения (7.17) найдем

$$h_2''|_{x=0} = (h_0 - 1)/h_0$$

Внося это выражение в предыдущее равенство, будем иметь

$$u^{IV}|_{x=0} = \frac{(2+h_0)(1-h_0)^2}{h_0^3(1+h_0)} > 0$$

Но тогда функция u и первые три производные, будучи равными нулю при $x=0$, становятся положительными при $x>0$, т. е. имеем $h_1>h_2$. Принимая во внимание соотношение (7.19), можем заключить, что и в дальнейшем $u''>0$, $u'>0$. Таким образом, при $x\neq 0$ интегральная кривая h_1 оказывается выше соответствующей кривой h_2 , причем расхождение между ними растет с ростом x .

Аналогично сравним соответствующие решения h нелинейного уравнения и h_2 — уравнения, линеаризованного по h^2 . Перепишем уравнения (7.5) и (6.3) в следующем виде:

$$(h_0 + 1) z'' - 2(z_2 - 1) = 0 \quad (z_2 = h_2^2) \quad (7.21)$$

$$z'' - 2(\sqrt{z} - 1) = 0 \quad (z = h^2) \quad (7.22)$$

Умножим уравнение (7.22) на h_0+1 и вычтем его затем из (7.21), тогда будем иметь ($v=z-z_2$)

$$v'' = \frac{2v + 2(1 - \sqrt{z})(h_0 - \sqrt{z})}{h_0 + 1} \quad (7.23)$$

Так как $v=0$, $z=h_0^2$ при $x=0$, то имеем

$$v''|_{x=0} = 0 \quad (7.24)$$

Вследствие четности функции v имеем $v'''|_{x=0}=0$. Далее в результате двукратного дифференцирования равенства (7.23) получим с учетом (6.4), (7.21) и (7.22)

$$v^{IV}|_{x=0} = \frac{2(1-h_0)^2}{h_0(1+h_0)} > 0$$

Рассуждая теперь, как и выше в отношении функции u , мы видим, что интегральная кривая h_2 , касающаяся в точке $x=0$ кривой h , лежит выше последней при $x>0$.

Аналогично доказывается и вторая часть утверждения, касающаяся расходов. При сравнении линеаризаций удобно исходить непосредственно из выражений (7.11) и (7.12). Снабжая расходы при линеаризации по h и h^2 соответственно индексами 1 и

2 снизу, будем иметь

$$\frac{d(Q_1 - Q_2)}{dx} = k\omega H_1^2 (1 - h_0) [\operatorname{ch}(x/\sqrt{h_0}) - \operatorname{ch}(x/\sqrt{1/2(1+h_0)})]$$

т. е. для $x > 0$ имеем $Q_1 > Q_2$ ($Q_1 = Q_2 = 0$ при $x = 0$).

Наконец, переписывая совместно уравнения (6.3) и (7.1) с учетом (7.8) в виде

$$\frac{d}{dx} \left(h \frac{dh}{dx} \right) - (h - 1) = 0, \quad \frac{d}{dx} \left(h_0 \frac{dh_1}{dx} \right) - (h_1 - 1) = 0$$

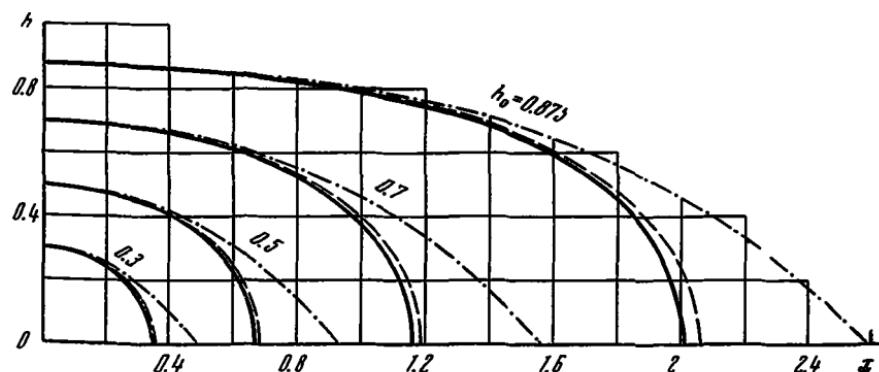
вычитая затем второе уравнение из первого и учитывая полученный выше результат ($h_1 \geq h$ при $x \geq 0$), получаем соотношения

$$h \frac{dh}{dx} \leq h_0 \frac{dh_1}{dx} \leq 0 \quad \text{или} \quad \left| h \frac{dh}{dx} \right| \geq \left| h_0 \frac{dh_1}{dx} \right| \geq 0$$

причем равенства имеют место при $x = 0$. Следовательно,

$$Q > Q_1 > Q_2 \quad \text{при } x > 0$$

Для более наглядного представления о взаимном расположении интегральных кривых при одинаковых условиях (6.4) построен график (фиг. 15), из которого видно, что расхождение



Фиг. 15 Графики свободной поверхности для нелинейного уравнения (6.3) — сплошные линии, при линеаризации по h^2 — пунктирные линии и при линеаризации по h — штрих-пунктирные линии

Между кривыми становится тем ощутимее, чем меньше отношение h/h_0 ; особенно большую погрешность при этом дает линеаризация по h . Соотношение же между расходами проиллюстрируем на следующем примере. Пусть $h_0 = 0.9$. Тогда приведенный расход $Q_0 = Q/k\omega H_1^2$, подсчитанный для нелинейного уравнения по

формуле (6.10) — с использованием результатов численного интегрирования, — при линеаризации по h — по формуле (7.12) и при линеаризации по h^2 — по формуле (7.11) имеет соответственно следующие значения:

(6.10)	(7.12)	(7.11)
0.1200,	0.1196,	0.1185 при $x^\circ = 1$
0.4136,	0.3847,	0.3741 при $x^\circ = 2$

Таким образом, при условиях (6.4) и выборе параметров линеаризации согласно (7.8) более точные значения для дебита получаются при линеаризации по h . Что же касается кривых свободной поверхности, то лучшей оказывается линеаризация по h^2 . В статье [17] по этому пункту было сделано противоположное заключение. Это объясняется тем, что при линеаризации по h^2 ранее принималось $h^{**} = h_0$; при этом дробь $(h+1)/2h_0$, на которую множится второй член уравнения (6.3), может оказаться гораздо большей единицы, особенно для малых h_0 и при малых значениях x , когда $h \approx h_0$, и линеаризация будет трубой.

В последнее время В. И. Пеньковским и С. Т. Рыбаковой проведены исследования фильтрации с учетом начальных градиентов пласта и слабопроницаемого водоупора. Решение одной из таких задач о горизонтальных совершенных дренах приводится в приложении (стр. 408).

Г л а в а III

СКВАЖИНА В СЛОИСТЫХ ГРУНТАХ

В этой главе рассматриваются осесимметричные движения — приток воды к одной соверленной скважине. Предварительно остановимся на простейших случаях — одной скважине в одном напорном пласте со слабопроницаемым нижним и верхним водоупорами и одной скважине в безнапорном движении при слабопроницаемом водоупоре. Затем рассмотрим случай, когда скважина проходит через n хорошоизученных пластов, перемежающихся со слабопроницаемыми, и отдельно — случай, когда крайние водоупоры непроницаемы.

В качестве примера приложения общей теории подробно рассмотрим работу скважины в двух водоносных горизонтах.

§ 8. Скважина в одном напорном пласте

Пусть напорный пласт, из которого ведется откачка, граничит с двумя слабопроницаемыми пластами (см. фиг. 8), причем напоры H_0 и H_2 будем считать постоянными. Тогда вместо системы (2.2) будем иметь одно уравнение — первое из системы (2.2), причем будем употреблять обозначения

$$h = h_1, \quad \beta = km, \quad \gamma_0 = \lambda_0/\mu_0, \quad \gamma_1 = \lambda_1/\mu_1 \\ 3\Delta h - \gamma_0(h - H_0) - \gamma_1(h - H_2) = 0 \quad (8.1)$$

или

$$\Delta h - \omega^2(h - H) = 0 \quad (8.2)$$

где

$$\omega^2 = (\gamma_0 + \gamma_1)/km \quad (8.3)$$

$$H = (\gamma_0 H_0 + \gamma_1 H_2)/km \quad (8.4)$$

Видим, что H — некоторое средневзвешенное из двух напоров, H_0 и H_2 .

Считая движение осесимметричным и располагая скважину вдоль оси $x=0$, $y=0$, получаем

$$\Delta h = \frac{d^2h}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dh}{dr} \quad (8.5)$$

Тогда уравнение (4.2) будет уравнением Бесселя

$$\frac{d^2h}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dh}{dr} - \omega^2(h - H) = 0 \quad (8.6)$$

имеющим частные решения

$$h_0 = H, \quad h_1 = K_0(\omega r), \quad h_2 = I_0(\omega r)$$

где $I_0(x)$ и $K_0(x)$ — цилиндрические функции мнимого аргумента (модифицированные функции Бесселя). Общее решение (8.6) имеет вид

$$h = H + CK_0(\omega r) + DI_0(\omega r) \quad (8.7)$$

Рассматривая движение в безграничной области, положим, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h(r) = H$$

Тогда нужно положить $D=0$, так как $I(\infty)=\infty$ ($K(\infty)=0$). На скважине при $r=r_0$ будем считать напор заданным: $h(r_0)=h_0$. Тогда вместо (8.7) получим

$$h = H - \frac{H - h_0}{K_0(\omega r_0)} K_0(\omega r) \quad (8.8)$$

Дебит скважины определится по формуле

$$Q = -2\pi k m r_0 \left. \frac{dh}{dr} \right|_{r=r_0} = \frac{2\pi k m \omega r_0 (H - h_0) K_1(\omega r_0)}{K_0(\omega r_0)} \quad (8.9)$$

так как $K'_0(x) = -K_1(x)$.

Величина ωr_0 является малой для скважин обычного радиуса (порядка 0.1 м) и в силу предположения о малости λ_0/k и λ_1/k . Поэтому можно воспользоваться приближенными выражениями

$$K_1(x) \approx 1/x, \quad K_0(x) \approx -C - \ln(x/2) = \ln(1.123/x) \quad (8.10)$$

где $C=0.5722$ — эйлерова постоянная.

Тогда для Q получим приближенную формулу

$$Q \approx \frac{2\pi k m (H - h_0)}{\ln(R/r_0)} \quad (8.11)$$

где введено обозначение

$$R = 1.123/\omega \quad (8.12)$$

Формула (8.11) совпадает с формулой Дюпюи для случая, когда $h=h_0$ при $r=r_0$ и $h=H$ при $r=R$.

На самом деле при $r=R$ обычно по формуле (8.8) величина h еще достаточно сильно отличается от H вследствие того, что $K_0(\omega r)$ довольно медленно стремится к нулю: воронка депрессии по уравнению (8.8) вблизи скважины круто изменяется по логарифмической кривой, затем это изменение становится более медленным. Однако все же можно считать R радиусом влияния скважины (более подробно см. об этом § 15 части второй). Согласно (8.3) для R имеем

$$R = \frac{1.123 \sqrt{km}}{\sqrt{\lambda_0/\mu_0 + \lambda_1/\mu_1}} \quad (8.13)$$

В табл. 3 приведены замеренные Кулундинской гидрогеологической станцией значения радиусов влияния трех скважин второго водоносного горизонта,— они равны 1400 и 1500 м. Полагая $R=1500$ м, находим

$$\omega^2 = \left(\frac{1.123}{R} \right)^2 \approx 0.55 \cdot 10^{-6} \text{ м}^{-1}$$

Принимая $k=10 \div 20$ м, $m_1=m_0=10$ м, будем иметь

$$\frac{\lambda_0}{\mu_0} + \frac{\lambda_1}{\mu_1} = (0.6 \div 1.1) \cdot 10^{-5} \text{ сут}^{-1}$$

Поэтому каждое из отношений λ_0/μ_0 и λ_1/μ_1 имеет порядок $10^{-5} \div 10^{-6} \text{ сут}^{-1}$.

§ 9. Скважина в безнапорном движении со слабопроницаемым водоупором

Пусть в верхнем горизонте работает совершенная скважина, на внешней стенке которой ($r=r_0$) поддерживается постоянный уровень h_0 . Пренебрегая вертикальными составляющими скорости, которые теперь появляются также вследствие безнапорного характера движения, будем по-прежнему считать поток плоскорадиальным, осесимметричным. Тогда уравнение (3.1) примет вид ($w=0$):

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(rh \frac{dh}{dr} \right) - \frac{\lambda}{k\mu} (h - H) = 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (9.1)$$

Зададим следующие граничные условия:

$$h(r_0) = h_0 = \text{const}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} h = H \quad (9.2)$$

Решение уравнения (9.1) при условиях (9.2) существует и единственно, причем ему соответствует одно и только одно значение $dh/dr_{r=r_0}$ (см. [21], стр. 75), т. е. при условиях (9.2) дебит скважины совершенно определенный. Однако проинтегрировать нелинейное уравнение (8.4) в замкнутой форме не удается, поэтому сюда приходится либо линеаризовать, либо решать численно.

Первый способ линеаризации уравнения (9.1) (линеаризация по h), примененный А. Н. Мятисевым [9], состоит в замене в (9.1) переменного множителя h при dh/dr некоторым постоянным значением \tilde{h} , что равносильно осреднению мощности потока. Если исходить из того, что на некотором расстоянии от скважины со все большей точностью начинает выполняться приближенное равенство $\tilde{h} \approx H$, то можно положить $\tilde{h} = H$ (А. Н. Мятисев предлагает принять $h = h_0$). Тогда вместо уравнения (9.1) получим следующее:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dh}{dr} \right) - \frac{\lambda}{k\mu H} (h - H) = 0 \quad (9.3)$$

П. Я. Полубариновой-Кочиной предложен [22] способ линеаризации уравнения (9.1) по h^2 . Умножим второй член левой части уравнения (9.1) на $(h+H)/2\tilde{h}$, где величина \tilde{h} выбирается с таким расчетом, чтобы эта дробь была по-возможности ближе к единице. Если принять $\tilde{h} = H$, то указанное условие выполняется с любой точностью, начиная с некоторого расстояния от скважины. Вместо уравнения (9.1) получим теперь следующее линейное относительно h^2 уравнение:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dh^2}{dr} \right) - \frac{\lambda}{k\mu H} (h^2 - H^2) = 0 \quad (9.4)$$

Уравнения (9.3) и (9.4) являются уравнениями Бесселя относительно $h - H$ и $h^2 - H^2$ соответственно. Их решения представляют линейную комбинацию функций $I_0(\omega r)$ и $K_0(\omega r)$ ($\omega = \sqrt{\lambda/k\mu H}$), причем, если потребовать от решений выполнения второго условия (9.2), то остаются лишь функции $K_0(\omega r)$ (ибо $\lim I_0(\omega r) = \infty$ при $r \rightarrow \infty$). Итак, выражения

$$h_1 = H - \frac{H - h_0}{K_0(\omega r_0)} K_0(\omega r) \quad (9.5)$$

$$h_2^2 = H^2 - \frac{H^2 - h_0^2}{K_0(\omega r_0)} K_0(\omega r) \quad (9.6)$$

суть решения соответствующих уравнений (9.3) и (9.4), удовлетворяющие второму условию (9.2). Заметим, что в (9.5) и (9.6) ω одинаковы.

Введем обозначения

$$A = \frac{H - h_0}{K_0(\omega r_0)}, \quad B = \frac{H^2 - h_0^2}{K_0(\omega r_0)} \quad (9.7)$$

Сравним решения (9.5) и (9.6) и для $r_0 < r < \infty$. Согласно (9.5) — (9.7) имеем

$$\begin{aligned} \frac{h_1 - h_2}{H} &= \frac{h_1}{H} - \left(\frac{h_2}{H}\right)^2 + \left(\frac{h_2}{H}\right)^2 - \frac{h_2}{H} = \left(\frac{A}{H} - \frac{B}{H^2}\right) K_0(\omega r) + \\ &+ \left(\frac{h_2}{H}\right)^2 - \frac{h_2}{H} = \left[\left(\frac{h_0}{H}\right)^2 - \frac{h_0}{H}\right] \frac{K_0(\omega r)}{K_0(\omega r_0)} + \left(\frac{h_2}{H}\right)^2 - \frac{h_2}{H} < 0 \end{aligned}$$

так как h_0/H и h_2/H меньше единицы.

Следовательно, интегральная кривая (9.5) уравнения (9.3), линеаризованного по h , лежит ниже интегральной кривой (9.6) уравнения (9.4), линеаризованного по h^2 , при одинаковых граничных значениях обоих решений.

Дебит скважин. Формула для дебита скважины на основании (9.6) будет

$$Q = 2\pi k \left(rh \frac{dh}{dr} \right)_{r=r_0} = \frac{\pi k (H^2 - h_0^2)}{K_0(\omega r_0)} K_1(\omega r_0) \quad (9.8)$$

Вследствие малости величины ωr_0 можно принять согласно (8.10)

$$K_0(\omega r_0) \approx \ln \frac{R}{r_0} \quad \left(R = \frac{1.123}{\omega} \right), \quad K_1(\omega r_0) \approx \frac{1}{\omega r_0}$$

и (9.8) перепишется так:

$$Q = \frac{\pi k (H^2 - h_0^2)}{\ln(R/r_0)} \quad (9.9)$$

Для расхода получается такое же выражение, какое он имеет в случае непроницаемого водоупора при наличии цилиндрического контура питания радиусом $R = 1.123/\omega$ с уровнем на нем H . Отметим, что при линеаризации по h для дебита получили бы формулу вида (8.11), как для напорного пласта, при несколько ином значении ω .

Обе схемы безнапорного движения — с непроницаемым водоупором и контуром питания $r=R$ со слабопроницаемым водоупором при том же R — имеют одинаковые дебиты, но кривые уровня будут различаться. В частности, при $r=R$ для слабо-

проницаемого водоупора уровень h определяется из равенства

$$h^2 = H^2 - \frac{H^2 - h_0^2}{K_0(\omega r_0)} K_0(1.123) = H^2 - 0.3541 \frac{H^2 - h_0^2}{K_0(\omega r_0)} \quad (9.10)$$

Чем меньше проницаемость водоупора, а следовательно и ω , тем больше R и тем меньше при этом значении R различие между h и H , определяемое формулой (9.10). Поэтому при малых ω (порядка 10^{-4} — 10^{-6} м^{-1}), когда эта разница становится пре-небрежимо малой, величину $R=1.123/\omega$ можно условно принять за радиус влияния скважины.

Предположим далее, что в условиях установившегося притока к скважине в некоторых двух точках измерены (при помощи наблюдательных скважин) уровни свободной поверхности, т. е. имеем

$$h = H_1 \text{ при } r = r_1, \quad h = H_2 \text{ при } r = r_2$$

Подставив эти условия в уравнение для свободной поверхности

$$h^2 = H^2 + CK_0(\omega r)$$

получим

$$K_0(\omega r_1)(H^2 - h_1^2) = K_0(\omega r_2)(H^2 - h_2^2) \quad (9.11)$$

Из этого соотношения можно определить ω , а следовательно, проводимость прослойки, подстилающей водоносный горизонт.

При достаточно малых ωr_1 и ωr_2 можно воспользоваться приближенным равенством (8.10) и преобразовать (9.11) следующим образом:

$$\ln \frac{\omega}{1.123} = \frac{H^2 - h_2^2}{h_2^2 - h_1^2} \ln r_1 - \frac{H^2 - h_1^2}{h_2^2 - h_1^2} \ln r_2 \quad (9.12)$$

Откуда

$$\omega = \frac{1.123}{r_1} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^{\theta_1} = \frac{1.123}{r_2} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^{\theta_2}$$

$$\left(\theta_1 = \frac{1 - \bar{h}_1^2}{\bar{h}_2^2 - \bar{h}_1^2}, \quad \theta_2 = \frac{1 - \bar{h}_2^2}{\bar{h}_2^2 - \bar{h}_1^2}, \quad \bar{h}_1 = \frac{h_1}{H}, \quad \bar{h}_2 = \frac{h_2}{H} \right)$$

Для напорного горизонта вместо (9.11) и (9.12) имеем следующие соотношения:

$$K_0(\omega r_1)(H - h_2) = K_0(\omega r_2)(H - h_1) \quad (9.13)$$

$$\omega = \frac{1.123}{r_1} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^{\theta_1} = \frac{1.123}{r_2} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^{\theta_2} \left(\theta_1 = \frac{1 - \bar{h}_1}{\bar{h}_2 - \bar{h}_1}, \theta_2 = \frac{1 - \bar{h}_2}{\bar{h}_2 - \bar{h}_1} \right) \quad (9.14)$$

Заметим, что судить о степени малости величин ω_1 и ω_2 до вычисления ω можно лишь, имея представление о порядке ω , после же подсчета ω по формулам (9.12) или (9.14) станет ясным, насколько обосновано допущение о его малости. Если же заранее нет уверенности в том, что ω_1 и ω_2 достаточно малы, то для вычисления ω следует пользоваться более точными зависимостями (9.11) или (9.13).

Описанный способ определения коэффициента фильтрации слабопроницаемой прослойки был предложен А. Н. Мятлевым [4].

Нелинейное уравнение. Хотя уравнение (9.1), как это отмечалось выше, не интегрируется в замкнутой форме, его решение, удовлетворяющее условиям (9.2), можно оценить, например, при помощи соответствующего (удовлетворяющего тем же граничным условиям) решения (9.6) уравнения (9.4). Сделаем в (9.1) и (9.4) замену: $r = e^\rho$, $h = zH$. Тогда эти уравнения примут соответственно вид [23]

$$(z^2)'' + 2e^{2\rho}\omega^2(1-z) = 0 \quad (9.15)$$

$$(z_2^3)'' + e^{2\rho}\omega^2(1-z_2) = 0 \quad (9.16)$$

$$(\omega^2 = \lambda |k\mu H|)$$

Штрихами обозначены производные z по ρ . Граничные условия (9.2) преобразуются в следующие:

$$z(\rho_0) = z_0, \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} z(\rho) = 1 \quad (9.17)$$

Вычитая (9.16) из (9.15), получаем

$$u'' = \omega^2 e^{2\rho} [u - (1-z)^2], \quad u = z^2 - z_2^2 \quad (9.18)$$

Потребуем пока, чтобы решения z и z_2 уравнений (9.15) и (9.16) удовлетворяли первому условию (9.17), а вместо второго поставим следующее:

$$z'(\rho_0) = z_2'(\rho_0) = z_0'$$

т. е. для обоих уравнений ставится задача Коши при одинаковых начальных условиях. Тогда начальные данные задачи Коши для уравнения (9.18) таковы:

$$u(\rho_0) = u'(\rho_0) = 0 \quad (9.19)$$

В силу (9.18) $u''(\rho_0) < 0$ и согласно (9.19) в окрестности ρ_0 $u'(\rho) < 0$ и убывает, а значит, $u(\rho) < 0$ и также убывает. Так будет продолжаться и дальше, ибо превращению u из отрица-

тельной величины в положительную должно предшествовать изменение знака с минуса на плюс у первой, а стало быть, и у второй производной; между тем последняя согласно (9.18) не может стать положительной раньше и. Итак, $u = z^2 - z_2^2 < 0$ для $\rho_0 < \rho < \infty$, т. с. интегральная кривая уравнения (9.16), выходящая из той же точки на стенке скважины и под тем углом, что и кривая уравнения (9.15), оказывается выше последней, все больше отклоняясь от нее с ростом ρ ($u' < 0$).

Если же решения уравнений (9.15) и (9.16) подчинить теперь условиям (9.17), то интегральная кривая уравнения (9.16), линеаризованного по h^2 , расположится ниже соответствующей кривой нелинейного уравнения (9.15). Выше было выяснено, что соответствующая кривая уравнения (9.3), линеаризованного по h , окажется еще ниже.

Такое расположение кривых было обнаружено и в результате непосредственного сравнения решений уравнений (9.1), (9.3) и (9.4) при условиях (9.2), сделанного С. Т. Рыбаковой [24]. Интегрирование уравнения (9.1) осуществлялось на ЭВМ как решение задачи Коши, причем значение h_0 задавалось, а значение h'_0 определялось в некотором интервале так, чтобы решение соответствующей задачи Коши удовлетворяло второму условию (9.2). Как указывалось в начале параграфа, это значение h'_0 единственно. Если начальное значение производной выбрано большим $h'_0 : h'(\rho_0) > h'_0$, то $\lim h(\rho) = \infty$ при $\rho \rightarrow \infty$, и при численном интегрировании с некоторых пор оказывается $h(\rho) > 1$; если же $h'(\rho_0) < h'_0$, то $\lim h(\rho) = -\infty$ при $\rho \rightarrow \infty$, и при интегрировании $h(\rho)$ начинает с некоторых пор убывать. Эти признаки и были использованы: при проявлении одного из них интегрирование с выбранным $h'(\rho_0)$ прекращалось и одновременно в зависимости от того, какой признак проявлялся, делалось заключение о том, является ли выбранное $h'(\rho_0)$ большим или меньшим истинного значения h'_0 (соответствующего условиям (9.2)). В результате исходный интервал, в котором должно находиться h_0 , сужался до заданных размеров, которые и определяют точность вычисления h'_0 . Интегрирование велось по схеме Рунге — Кутта, причем величина шага определенным образом увеличивалась с ростом r (это обстоятельство в статье [24] не отмечено). Оказалось, что для указанной задачи линеаризация по h^2 дает хорошее приближение к численному решению нелинейного уравнения (8.4), в то время как при линеаризации по h свободная поверхность и дебит сильно занижены, а для малых понижений формула для дебита оказывается совершенно неверной [24].

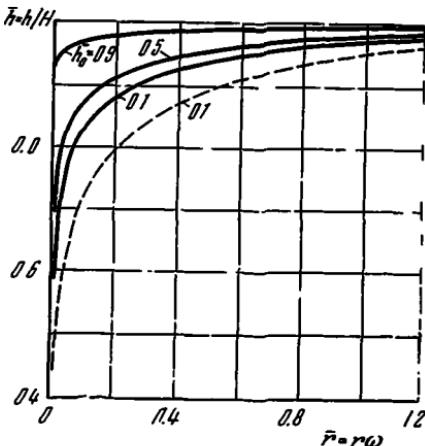
В табл. 4, взятой из статьи [24], приведены значения дебита Q , Q_1 , Q_2 , подсчитанные соответственно для решений нелинейного и линейного уравнений

Таблица 4
Значения Q , Q_1 и Q_2 ($\Delta Q_{1,2} = Q - Q_{1,2}$)

$\bar{h}_0 = \frac{h_0}{H}$	$Q, \text{м}^3/\text{сут}$	$Q_2, \text{м}^3/\text{сут}$	$Q_1, \text{м}^3/\text{сут}$	$\Delta Q_2, \text{м}^3/\text{сут}$	$\frac{\Delta Q_2}{Q} \cdot 100\%$	$\frac{\Delta Q_2}{Q} \cdot 100\%$	$\frac{\Delta Q_1}{Q} \cdot 100\%$
0.9	619.1	618.8	586	0.30	0.049	33.1	5.35
0.8	1174	1173	1042	1.00	0.085	132.0	11.25
0.7	1663	1661	1368	2.00	0.12	295.0	17.74
0.6	2088	2084	1563	4.00	0.19	525.0	25.14
0.5	2448	2443	1628	5.00	0.20	820.0	33.50
0.4	2742	2736	—	6.00	0.22	—	—
0.3	2971	2964	—	7.00	0.24	—	—
0.2	3135	3127	—	8.00	0.26	—	—
0.1	3293	3224	—	69.00	2.10	—	—

(при первом и втором способах линеаризации) при следующих значениях параметров. $H=20 \text{ м}$, $k=20 \text{ м}$, $\lambda=0.1 \text{ м}/\text{сут}$, $\mu=10 \text{ м}$, $r_0=0.1 \text{ м}$, а начальный уровень h_0 , отнесенный к H , задавался последовательно равным 0.9; 0.8; ...; 0.1 м .

Для всех начальных значений $\bar{h}_0=h_0/H$ расхождение между Q и Q_2 составляет десятые и сотые доли процента и только для $\bar{h}_0=0.1$ оно достигает



Фиг. 16. Кривые депрессии при различных понижениях на скважине для нелинейного уравнения (9.1) и при линеаризации по h^2 — сплошные линии и при линеаризации по h для $h_0=0.1$ — пунктирияя линия

2.14% от Q_2 , в чем, по-видимому, проявилось не вполне удачное регулирование величины шага при численном интегрировании. На фиг. 16 представлены графики свободной поверхности, построенные для $h_0=0.1; 0.5; 0.9$ по результатам интегрирования уравнения (9.1), которое предварительно было приведено к безразмерному виду:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\bar{r} \bar{h} \frac{d\bar{h}}{d\bar{r}} \right) - (\bar{h} - 1) = 0$$

$$\bar{h} = h/H, \bar{r} = \omega r, \quad \omega = \sqrt{\lambda/k\mu H}$$

Кроме того, для $h_0=0.1$ вычерчена (пунктирной линией) интегральная кривая уравнения (9.3), линеаризованного по h (также в безразмерных координатах). Мы видим, что ее отклонение от соответствующей кривой нелинейного уравнения значительно. Это обусловлено погрешностью линеаризации. При больших h_0 эта разница уменьшается, а для 0.9 ее не удается отстичь на данном графике. Что касается интегральных кривых уравнения, линеаризованного по h^2 , то их отклонение от соответствующих кривых нелинейного уравнения ничтожно, и на графике обе сравниваемые кривые сливаются.

Выводы С. Т. Рыбаковой подтверждаются расчетами В. Г. Меламеда [23], который предварительно преобразовал уравнение (9.1) к виду (9.15), более удобному для исследования и интегрирования, дал верхнюю и нижнюю оценки для искомого значения z_e , которые служат концами исходного интервала для $z'(\rho_0)$, а также указал способ определения такого ρ_e , начиная с которого решение (9.15) при условиях (9.17) заведомо попадает в ε -окрестность единицы. Это значение ρ_e предлагается брать в качестве верхнего предела интегрирования уравнения (9.15). Однако при первых циклах интегрирования, когда выбираемое значение $z'(\rho_0)$ еще может существенно отличаться от истинного z_e , отклонение получаемого решения от искомого решения задачи (9.15) — (9.17) подчас обнаруживается по одному из указанных выше признаков при значениях ρ , значительно меньших ρ_e , и тогда нет смысла продолжать интегрирование. В дальнейшем же, при уточнении значений $z'(\rho_0)$, проявление этих признаков может наступить позже, при $\rho > \rho_e$, и тогда, по-видимому, интегрирование целесообразно прекращать при $\rho = \rho_e$.

Интегрирование в статье [23] велось с автоматическим выбором шага, чем достигнута несколько большая точность расчетов.

§ 10. Осесимметричный приток к скважине, проходящей через n водоносных горизонтов

Перейдем теперь к случаю, когда скважина проходит через n водоносных пластов. Так как поток, будучи неограниченным в плане, является осесимметричным, то

$$\Delta h_i = \frac{d^2 h_i}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dh_i}{dr} \quad (i = 1, \dots, n)$$

Для напоров h_i имеем систему уравнений (2.2). Общее решение этой системы получим, складывая частное ее решение, исследованное в § 4, с общим решением соответствующей ей однородной системы. Это последнее решение будем искать в следующем виде:

$$h_i^0 = C_i K_0(\omega r) + D_i I_0(\omega r) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (10.1)$$

Здесь $I_0(\omega r)$ и $K_0(\omega r)$ — функции Бесселя нулевого порядка чисто мнимого аргумента соответственно первого и второго рода. Подставляя h_i^0 в однородную систему, соответствующую систе-

ме (2.2), и учитывая, что

$$\Delta h_i^0 = C_i \omega^2 K_0(\omega r) + D_i \omega^2 I_0(\omega r)$$

а также что $K_0(\omega r)$ и $I_0(\omega r)$ линейно независимы, получим систему

$$\begin{aligned} (\beta\omega^2 - \alpha_1)C_1 + \gamma_1 C_2 &= 0 \\ \gamma_1 C_1 + (\beta_2\omega^2 - \alpha_2)C_2 + \gamma_2 C_3 &= 0 \\ \dots &\dots \\ \gamma_{n-2} C_{n-2} + (\beta_{n-1}\omega^2 - \alpha_{n-1})C_{n-1} + \gamma_{n-1} C_n &= 0 \\ \gamma_{n-1} C_{n-1} + (\beta_n\omega^2 - \alpha_n)C_n &= 0 \end{aligned} \quad (10.2)$$

и точно такую же систему для коэффициентов D_i .

Для существования ненулевого решения C_i этой однородной системы алгебраических уравнений необходимо и достаточно равенство нулю ее определителя. Это условие дает характеристическое уравнение n -го порядка относительно ω^2 . Как показано в [11], оно имеет n простых положительных корней ω_k^2 (при условии, что все $\gamma_i \neq 0$); следовательно, все ω_k ($k = 1, \dots, n$) вещественны и решение системы (2.2) действительно выражается через функции Бесселя нулевого порядка чисто мнимого аргумента. Ввиду того что при каждом корне ω_k ранг матрицы коэффициентов системы (10.2) оказывается равным $n-1$, обе группы постоянных C_i и D_i ($i = 1, \dots, n$) определяются при данном ω_k с точностью до множителя, и можно выразить $n-1$ постоянных, например C_2, \dots, C_n через C_1 , а постоянные D_2, \dots, D_n через D_1 :

$$C_{ik} = \alpha_{ik} C_{1k}, \quad D_{ik} = \alpha_{ik} D_{1k} \quad (i, k = 1, \dots, n; \alpha_{1k} \neq 1) \quad (10.3)$$

Здесь α_{ik} — определенные постоянные. Общее решение системы (2.2) можно теперь представить так:

$$h_i = H_i + \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} [C_{1k} K_0(\omega_k r) + D_{1k} I_0(\omega_k r)] \quad (i = 1, \dots, n) \quad (10.4)$$

Для определения $2n$ коэффициентов C_{1k}, D_{1k} ($k = 1, \dots, n$) следует задать $2n$ граничных условий. В связи с этим рассмотрим следующие случаи.

1. Фильтрация происходит в ограниченной области с исключением окрестности линии $r = 0$ (т. е. вне скважины, при $r \geq r_0$, где r_0 — радиус скважины). Так как при $r_0 \leq r \leq R$ функции $K_0(\omega r)$ и $I_0(\omega r)$ ограничены, то напор h_i , определенный формулой (10.4), также ограничен, что и должно быть по физическому смыслу задачи.

Задавая напоры на стенке скважины в каждом горизонте или количество воды, откачиваемой скважиной в единицу времени из каждого горизонта, получим n граничных условий. Другую группу условий можно получить, задав h_i или dh_i/dr в каждом горизонте на некоторых расстояниях от скважины; например, можно задать $h_i(R)$, $i = 1, \dots, n$, введя тем самым в задачу цилиндрический контур питания.

2. Область фильтрации неограничена. Требуя ограниченности от h_i , мы приходим к тому, что $D_{1k} = 0$ ($k = 1, \dots, n$), ибо $\lim J_0(\omega_k r) = \infty$ при $r \rightarrow \infty$. Решение (10.4) принимает теперь следующий вид:

$$h_i = H_i + \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} C_{1k} K_0(\omega_k r) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (10.5)$$

Оставшиеся n постоянных C_{1k} можно определить, задав условия на скважине.

Согласно (10.5) $\lim h_i = H_i$ при $r \rightarrow \infty$, т. е. при удалении от скважины напоры в горизонтах стремятся к напорам H_i , которые установились до откачки (см. § 4).

§ 11. Изолированная система водоносных горизонтов

До сих пор существенным являлось предположение о том, что верхний и нижний горизонты рассматриваемой системы сообщаются через прослойки соответственно с выше- и нижележащими горизонтами, постоянные напоры H_0 и H_{n+1} в которых вместе с напорами на скважине (а в случае ограниченной области — и с напорами на границе) определяют режим в оставшихся водоносных горизонтах и которые, следовательно, являются водоносными слоями, питающими данную систему горизонтов. Предположим теперь, что система изолирована в этом смысле снизу непроницаемым водоупором, т. е. что $\gamma_n = (\lambda_n / \mu_n) = 0$, но $\gamma_0 \neq 0$. Снова исходя из случая, когда скважина не работает, обратимся к системе уравнений (4.1), в которой положим $\gamma_n = 0$. Тогда, начав с последнего уравнения, обнаружим следующую зависимость:

$$H_1 = \dots = H_n = H_0$$

Итак, в данном случае в частично изолированной системе водоносных горизонтов устанавливается статическое состояние уже в строгом смысле этого термина: напоры H_i во всех горизонтах равны напору H_0 в питающем пласте. Такое выравнивание напоров означает отсутствие «сквозного» вертикального тока, что обусловлено непроницаемостью n -й прослойки. Аналогичная картина будет, очевидно, и при $\gamma_0 = 0$, $\gamma_n \neq 0$.

Если в рассматриваемой схеме скважина работает, то общее решение также будет иметь вид (10.4) или (10.5) (в зависимости от того, рассматривается ли фильтрация в ограниченной или в неограниченной области), ибо, как оказывается [1], при частичной изоляции системы горизонтов остается в силе обстоятельство, обуславливающее указанный вид решения: характеристическое уравнение для ω по-прежнему имеет n простых положительных корней.

Остановимся на случае $\gamma_0 = \gamma_n = 0$: система водоносных горизонтов изолирована от питающих слоев и сверху и снизу. Как и в случае частичной изоляции системы горизонтов, обнаруживаем из (4.1), что в статическом состоянии во всех горизонтах происходит выравнивание напоров, но уже, разумеется, независимо от H_0 или H_{n+1} :

$$H_1 = \dots = H_n = H \quad (11.1)$$

Если теперь скважина работает, то, вновь отыскивая решение однородной системы, соответствующей системе (2.2), в виде (10.1), мы получим, что один из корней характеристического уравнения, например ω_n , равен нулю. В том, что такой корень найдется, нетрудно убедиться, если учесть, что при $\omega=0$ определитель системы (10.2) совпадает с определителем системы (4.1); последний же определяется выражением (4.2), из которого видно, что в данном случае ($\gamma_0 = \gamma_n = 0$) $D_n = 0$. Далее оказывается, что такой корень простой. Соответствующее ему решение будем искать в виде

$$h_{i0} = A_i + B_i \ln r \quad (i = 1, \dots, n) \quad (11.2)$$

исходя из асимптотики функций $K_0(x)$ и $I_0(x)$ при малых x .

Подстановка (11.2) в систему (2.2) (при $\gamma_0 = \gamma_n = 0$) с учетом равенства $\Delta \ln r = 0$ дает

$$A_1 = \dots = A_n = A, B_1 = \dots = B_n = B$$

Остальным, ненулевым корням характеристического уравнения по-прежнему соответствуют решения вида (10.1), и, таким образом, общее решение системы (2.2) можно представить так:

$$h_i = A + B \ln r + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{ik} [C_{1k} K_0(\omega_k r) + D_{1k} I_0(\omega_k r)] \quad (i = 1, \dots, n) \quad (11.3)$$

Конкретный вид решения, как и в случае неизолированной системы, зависит от характера граничных условий. Если рас-

сматривать фильтрацию в бесконечной области и потребовать ограниченности h_i при $r \rightarrow \infty$, то это даст

$$B = D_{11} = \dots = D_{1,n-1} = 0$$

и уравнение (11.3) примет вид

$$h_i = A + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{ik} C_{1k} K_0(\omega_k r) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (11.4)$$

Предположим далее, что на стенке скважины поддерживается напор, одинаковый в каждом горизонте:

$$h_i(r_0) = H_0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

Тогда (11.4) превратится в следующую систему алгебраических уравнений относительно постоянных $A = H_0, C_{11}, \dots, C_{1,n-1}$

$$A - H_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{ik} C_{1k} K_0(\omega_k \delta) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

Можно показать, что определитель этой системы не равен нулю и, следовательно, она определяет единственное тривиальное решение: $A = H_0 = C_{11} = \dots = C_{1,n-1} = 0$. Тогда (11.3) принимает вид

$$h_i - H_0 = \text{const} \quad (i = 1, \dots, n)$$

т. е. напор во всех горизонтах становится равным H_0 и фильтрация прекращается. Если же напоры на стенке скважины в различных горизонтах разные $h_i(r_0) = H_{0i}$ ($i = 1, \dots, n$), то, вообще говоря, не все C_{ki} равны нулю и напоры в горизонтах изменяются с расстоянием от скважины. Однако ввиду изоляции системы водоносных горизонтов от питающих слоев и при отсутствии питания со стороны откачка скважиной воды из некоторого горизонта возможна в установившемся состоянии лишь благодаря тому, что та же скважина одновременно закачивает воду в другой горизонт (где значение H_{0i} больше). Из этого и других подобных горизонтов вода будет перетекать через прослойки в горизонты, из которых она затем откачивается, так что суммарный дебит скважины будет равен нулю.

Рассмотрим случай $n=1$: скважина эксплуатирует один водоносный горизонт. Для этого случая решение задачи дано Н. К. Гиринским [6] и А. Н. Мятисевым [3-5]. В системе (2.2) остается теперь только первое уравнение, причем в нем

$h_2 = H_2 = \text{const}$, и уравнение принимает вид

$$\beta_1 \Delta h_1 - (\gamma_0 + \gamma_1) h_1 + \gamma_1 H_2 + \gamma_0 H_0 = 0 \quad (11.5)$$

или

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{h} - \omega^2 \tilde{h} &= 0 \\ \tilde{h} = h_1 - H_1, \quad H_1 &= \frac{\gamma_1 H_2 + \gamma_0 H_0}{\gamma_0 + \gamma_1}, \quad \omega^2 = \frac{\gamma_0 + \gamma_1}{\beta_1} \end{aligned} \quad (11.6)$$

В развернутом виде уравнение (11.6) записывается так:

$$\frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial r} - \omega^2 \tilde{h} = 0 \quad (11.7)$$

Это уравнение Бесселя, общее решение которого имеет вид

$$\tilde{h} = CK_0(\omega r) + DI_0(\omega r)$$

или

$$h_1 = H_1 + CK_0(\omega r) + DI_0(\omega r) \quad (11.8)$$

Здесь H_1 представляет средневзвешенный напор, который, как это видно из (11.5), устанавливается в рассматриваемом горизонте под влиянием напоров в соседних, если скважина не работает. Величина ω^2 согласно (11.6) характеризует гидравлическую связь данного горизонта с соседними; эта связь осуществляется через прослойки, проницаемости λ_0 и λ_1 , которых входят в ω^2 . Если $\omega \neq 0$, т. е. эксплуатируемый горизонт не полностью изолирован от соседних, то решение (11.8) можно рассматривать как в конечной, так и в бесконечной области; в последнем случае $D=0$. Если же $\omega=0$ (горизонт изолирован), то вместо (11.6) имеем уравнение $\Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} = 0$, решение которого таково:

$$h = A + B \ln r \quad (11.9)$$

Отсюда видно, что в изолированном горизонте установившийся осесимметричный приток к скважине возможен только при наличии цилиндрического (или близкого к нему) контура питания на некотором расстоянии R от оси скважины с условием на нем

$$h(R) = H_1 = \text{const}$$

Если же рассматривать решение (11.9) в бесконечной области, то условие его ограниченности при $r \rightarrow \infty$ дает $B=0$ и, таким образом, $h=A=\text{const}$: во всем пласте устанавливается постоян-

ный напор, равный напору на стенке скважины, и течение прекращается. Иначе говоря, непрерывная откачка, не компенсируемая поступлением в горизонт воды извне, приводит к истощению запасов воды в горизонте.

§ 12. Скважина в двух напорных водоносных горизонтах

В качестве иллюстрации приведем задачу о скважине в двух водоносных горизонтах, рассмотренную С. Т. Рыбаковой. Схемой, иллюстрирующей постановку задачи, может служить фиг. 10 при $n=2$. Задача состоит в исследовании характера взаимодействия водоносных горизонтов (перетоков, величин понижений напора) при изменении параметров пластов и при различных соотношениях дебитов скважины из первого и второго горизонтов.

Для напоров h_1 и h_2 в горизонтах, эксплуатируемых скважиной, имеем систему уравнений вида (2.2) при $n=2$. Напоры H_0 и H_3 в соседних горизонтах считаем постоянными; сверх того, положим $H_0=H_3=H$. Так как тогда в статическом состоянии $H_1=H_2=H$, то тем самым из рассмотрения исключается равномерный «сквозной» переток, существующий до откачки при $H_0 \neq H_3$ (см. § 4) и не имеющий непосредственного отношения к работе скважин, и изучается «в чистом виде» картина, обусловленная откачкой.

Условимся обозначать символом h_i напор в i -м горизонте ($i=1, 2$), отнесенный к статическому напору H . Тогда для напоров h_1 и h_2 получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \beta_1 \Delta h_1 - (\gamma_0 + \gamma_1) h_1 + \gamma_1 h_2 &= -\gamma_0 \\ \beta_2 \Delta h_2 + \gamma_1 h_1 - (\gamma_1 + \gamma_2) h_2 &= -\gamma_2 \\ \Delta h_{1,2} &= \frac{\partial^2 h_{1,2}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h_{1,2}}{\partial r} \end{aligned} \quad (12.1)$$

Переходя к безразмерному радиусу-вектору ξ

$$r = l\xi, \quad l = \sqrt{\beta_1/\gamma_1} \quad (12.2)$$

перепишем систему (12.1) в виде

$$\begin{aligned} \Delta h_1 - (\varepsilon_0 + 1) h_1 + h_2 &= -\varepsilon_0 \\ \Delta h_2 + \varepsilon_1 h_1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) h_2 &= -\varepsilon_2 \\ \Delta h_{1,2} &= \frac{\partial^2 h_{1,2}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial h_{1,2}}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_1}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\beta_1}{\beta_2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\gamma_2 \beta_1}{\gamma_1 \beta_2} \end{aligned} \quad (12.3)$$

В соответствии с § 10 решение системы (12.3), ограниченное на бесконечности, можно записать так:

$$\begin{aligned} h_1 &= 1 + C_1 K_0(\omega_1, \xi) + C_2 K_0(\omega_2 \xi) \\ h_2 &= 1 + \alpha_1 C_1 K_0(\omega_1, \xi) + \alpha_2 C_2 K_0(\omega_2 \xi) \\ \alpha_{1,2} &= \varepsilon_1 / (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \omega_{1,2}^2) \\ \omega_{1,2}^2 &= \frac{1}{2} (1 + \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (1 + \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - [\varepsilon_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_2]} \end{aligned} \quad (12.4)$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 задаются безразмерные расходы скважины из обоих горизонтов:

$$\left(\xi \frac{dh_{1,2}}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_0} = q_{1,2}, \quad q_{1,2} = \frac{Q_{1,2}}{2\pi \beta_{1,2} H}, \quad \xi_0 = \frac{r_0}{l} \quad (12.5)$$

Здесь r_0 — радиус скважины, Q_1 и Q_2 — ее дебиты из первого и второго горизонтов. При дифференцировании (12.4) для малых x используются равенства

$$K_0'(x) = -K_1(x) \quad \text{и} \quad K_1(x) \approx 1/x$$

В результате уравнения (12.4) приводятся к виду

$$S_1 = \frac{1 - h_1}{q_2} = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \left[\left(1 - \frac{Q_1 \alpha_2}{Q_2 \varepsilon_1} \right) K_0(\omega_1 \xi) - \left(1 - \frac{Q_1 \alpha_1}{Q_2 \varepsilon_1} \right) K_0(\omega_2 \xi) \right] \quad (12.6)$$

$$S_2 = \frac{1 - h_2}{q_2} = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \left[\alpha_1 \left(1 - \frac{Q_1 \alpha_2}{Q_2 \varepsilon_1} \right) K_0(\omega_1 \xi) - \alpha_2 \left(1 - \frac{Q_1 \alpha_1}{Q_2 \varepsilon_1} \right) K_0(\omega_2 \xi) \right]$$

Величина перетока Q^* из i -го горизонта в $(i+1)$ -й ($i=0, 1, 2$) определяется по закону Дарси

$$Q_i^* = 2\pi \gamma_i \int_0^\infty (H_i - H_{i+1}) r dr = 2\pi \gamma_i l^2 H \int_0^\infty (h_i - h_{i+1}) \xi d\xi$$

Используя далее формулы (12.6) и учитывая, что [25]

$$\int_0^\infty K_0(x) dx = 1$$

а также выражения (12.4) для $\alpha_{1,2}$ и $\omega_{1,2}^2$, придем к следующим

зависимостям для безразмерных перетоков $Q_i^{\circ} = Q_i/Q_2$ ($i = 0, 1, 2$):

$$\begin{aligned} Q_0^{\circ} &= \frac{\varepsilon_0 [\varepsilon_1 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) Q_1/Q_2]}{\varepsilon_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_2} \\ Q_1^{\circ} &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 - \varepsilon_2 Q_1/Q_2}{\varepsilon_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_2} \\ Q_2^{\circ} &= -\frac{\varepsilon_2 (1 - \varepsilon_0 + Q_1/Q_2)}{\varepsilon_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_2} \end{aligned} \quad (12.7)$$

По физическому смыслу задачи величины Q_i° должны быть связаны соотношениями

$$Q_0^{\circ} - Q_1^{\circ} = Q_1/Q_2, \quad Q_1^{\circ} - Q_2^{\circ} = 1 \quad (12.8)$$

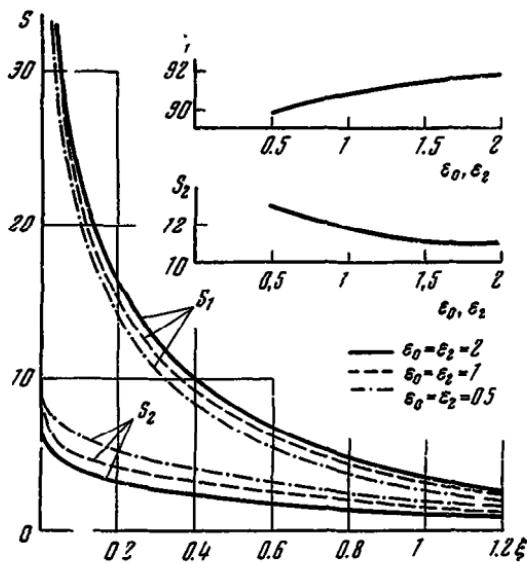
левые части которых выражают разности между притоком и оттоком воды для первого и второго горизонтов, а правые — равные им (в условиях установившегося движения) дебиты скважины за счет соответствующего горизонта; все величины отнесены к Q_2 .

Легко убедиться в том, что Q_i° , определенные равенствами (12.7), удовлетворяют соотношениям (12.8). Поэтому, найдя из (12.7) одну из величин Q_i° , можно затем для определения двух остальных прибегнуть к равенствам (12.8).

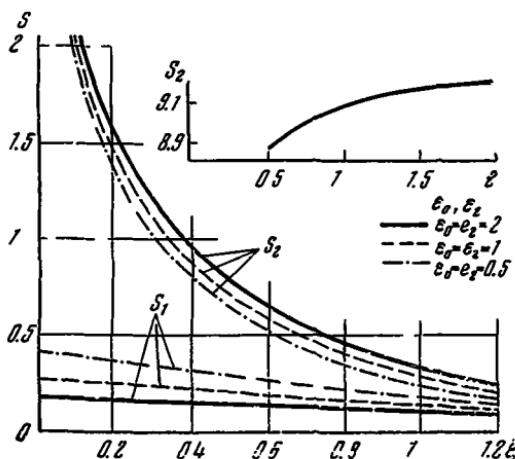
При некоторых комбинациях параметров ε_0 , ε_1 , ε_2 и Q_1/Q_2 С. Т. Рыбаковой проведены вычисления величин S_1 , S_2 , Q_0° , Q_1° и Q_2° (формулы (12.6) и (12.7)) по программе для ЭВМ. В табл. 5 приведены значения безразмерных перетоков Q_i° ; на фиг. 17—19 построены кривые безразмерных понижений S_1 и S_2 . Каждая фигура отвечает некоторому фиксированному отношению Q_1/Q_2 ; при этом для фиг. 17 и 18 $\varepsilon_1 = 1$, а параметры ε_0 и ε_2 равны между собой и принимают последовательно значения 0.5; 1.0 и 2.0 (строки 8, 3 и 9 табл. 5); для фиг. 19 $\varepsilon_0 = 1$.

Отдельные графики в верхней правой части фигур представляют значения S_1 и S_2 при $\xi = 0.0001$; при $Q_1/Q_2 = 0$ построен только график для S_2 , так как характер изменения S_1 при малых хорошо проявляется и на общем графике.

Как следует из формул (12.3), изменение параметров того или иного пласта можно осуществить путем надлежащего изменения величин ε_0 , ε_1 и ε_2 . Так, например, выбор различных значений ε_0 при фиксировании ε_1 и ε_2 означает варьирование проводимости γ_0 верхней прослойки, а изменение ε_2 при фиксированных ε_0 и ε_1 равносильно изменению γ_2 — проводимости нижней прослойки.



Фиг. 17. График безразмерных понижений S_1 и S_2 в горизонтах при $Q_1/Q_2=10$, $\varepsilon_1=1$; для верхних графиков $\xi=0.0001$



Фиг. 18. График безразмерных понижений S_1 и S_2 в горизонтах при $Q_1/Q_2=0$, $\varepsilon_1=1$; для верхних графиков $\xi=0.0001$

Таблица 5

Дебиты скважин разных горизонтов

№ варианта	Q ₁ /Q ₂			0			0.5			1.0			10.0		
	ε ₀	ε ₁	ε ₂	Q ₀ [°]	Q ₁ [°]	-Q ₂ [°]	Q ₀ [°]	Q ₁ [°]	-Q ₂ [°]	Q ₀ [°]	Q ₁ [°]	-Q ₂ [°]	Q ₀ [°]	Q ₁ [°]	-Q ₂ [°]
1	0.0			0.000	0.000	1.000	0.000	-0.500	1.500	0.000	-1.000	2.000	0.000	-10.000	11.000
2	0.5	1.0	1.0	0.250	0.250	0.750	0.500	0.000	1.000	0.750	-0.250	1.250	5.250	-4.750	5.750
3	1.0			0.333	0.333	0.667	0.667	0.167	0.833	1.000	0.000	1.000	7.000	-3.000	4.000
4	2.0			0.400	0.400	0.600	0.800	0.300	0.700	1.200	0.200	0.800	8.400	-1.600	2.600
5			0.0	1.000	1.000	0.000	1.500	1.000	0.000	2.000	1.000	0.000	11.00	1.100	0.000
6	1.0	1.0	0.5	0.500	0.500	0.875	0.375	0.625	1.250	0.250	0.750	8.000	-2.000	3.000	
(3)			1.0	0.333	0.333	0.667	0.667	0.167	0.833	1.000	0.000	1.000	7.000	-3.000	4.000
7			2.0	0.200	0.200	0.800	0.500	0.000	1.000	0.800	-0.200	1.200	6.200	-3.800	4.800
8	0.5		0.5	0.400	0.400	0.600	0.700	0.200	0.800	1.000	0.000	1.000	6.400	-3.600	4.600
(3)	1.0	1.0	1.0	0.333	0.333	0.667	0.667	0.167	0.833	1.000	0.000	1.000	7.000	-3.000	4.000
9	2.0		2.0	0.250	0.250	0.750	0.625	0.125	0.875	1.000	0.000	1.000	7.750	-2.250	3.250
10		0.5	0.5	0.333	0.333	0.667	0.667	0.167	0.833	1.000	0.000	1.000	7.000	-3.000	4.000
(3)	1.0	1.0	1.0	0.333	0.333	0.667	0.667	0.167	0.833	1.000	0.000	1.000	7.000	-3.000	4.000
11		2.0	2.0	0.333	0.333	0.667	0.667	0.167	0.833	1.000	0.000	1.000	7.000	-3.000	4.000

Одновременно же увеличение или уменьшение параметров ε_0 и ε_2 в одинаковое число раз можно интерпретировать двояко: либо как такое же изменение величин γ_0 и γ_2 , либо как уменьшение или соответственно увеличение проводимости γ_1 средней проплойки. Во втором случае согласно (12.2) изменяется и l , что следует учесть при сопоставлении кривых понижения: безразмерные координаты ξ для всех сравниваемых вариантов приводятся к одному масштабу, после чего для всех кривых одинаковым значениям ξ соответствуют одинаковые r . На фиг. 17 и 18, отражающих изменение именно параметра γ_1 , за основу взят масштаб для случая $\varepsilon_0 = \varepsilon_2 = 1.0$; при этом в соответствии с (12.2) в случае $\varepsilon_0 = \varepsilon_2 = 0.5$ (двукратное увеличение γ_1) безразмерные координаты ξ следует уменьшить в $\sqrt{2}$ раз, а при $\varepsilon_0 = \varepsilon_2 = 2.0$ (двукратное уменьшение γ_1) увеличить в $\sqrt{2}$ раз.

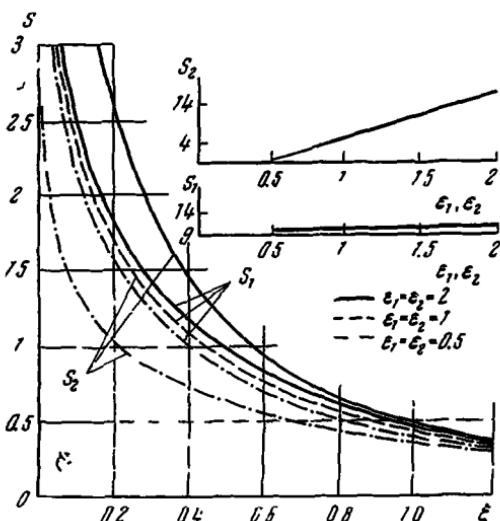
Из формул (12.7) видно, что при любом соотношении Q_1/Q_2 перетоки Q_0 и Q_2 сохраняют знаки, будучи направленными соответственно вниз и вверх. Естественно, $Q_0^{\circ}=0$ при $\varepsilon_0=0$, а $Q_2^{\circ}=0$ при $\varepsilon_2=0$. Если же $\varepsilon_0=\varepsilon_2=0$, т. е. рассматриваемая система горизонтов полностью изолирована от питающих и $Q_0^{\circ}=Q_1^{\circ}=Q_2^{\circ}=0$.

=0. Характер же изменения перетока Q_1° между первым и вторым горизонтами более сложен.

Как следует из второй формулы (12.7), направление перетока зависит от знака величины $\varepsilon_0\varepsilon_1 - \varepsilon_2 Q_1/Q_2$: при $Q_1/Q_2 > \varepsilon_0\varepsilon_1/\varepsilon_2$ переток направлен вверх, в противном случае — вниз.

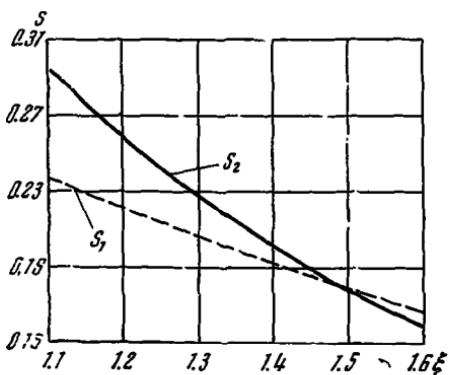
При выполнении же равенства $Q_1/Q_2 = \varepsilon_0\varepsilon_1/\varepsilon_2$ суммарный переток $Q_1^{\circ}=0$, однако это не означает, что между первым и вторым горизонтом существует полное равновесие.

Иллюстрацией этого может служить фиг. 20, на которой изображены кривые понижений S_1 и S_2 для случая $\varepsilon_0=0$, $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1.0$, $Q_1/Q_2=0$. При этих значениях параметров для $\xi \approx 1.49$ кривые пересекаются, т. е. $S_1=S_2$; график построен в окрестности указанного значения ξ . В данном случае откачка ведется только из второго горизонта, и вблизи скважины, в радиусе $\xi \approx 1.49$, запасы воды в этом пласте восполняются как из третьего, питающего горизонта, так из первого ($S_2 > S_1$). Но последний изолирован сверху от питающего нулевого горизонта ($\varepsilon_0=0$) и поэтому вынужден восполнить отдачу воды во второй горизонт непосредственно за счет него же (при $\xi > 1.49$, когда $S_2 < S_1$), а в конечном итоге — за счет третьего горизонта.



Фиг. 19. График безразмерных понижений S_1 и S_2 в горизонтах при $Q_1/Q_2=1$, $\epsilon_0=1$; для верхних графиков $\xi=0.0001$

Изменение проводимостей водоносных горизонтов обеспечивается одновременным изменением параметров ϵ_1 и ϵ_2 в одинаковое число раз. Если, например, ϵ_1 и ϵ_2 возрастают в n раз, то это можно рассматривать либо как результат такого же возрастания параметра β_1 , и тогда ввиду изменения l



Фиг. 20. Кривые безразмерных понижений S_1 и S_2 (формулы (12.6)) при $Q_1/Q_2=0$, $\epsilon_0=0$, $\epsilon_1=\epsilon_2=1$ в окрестности «точки равновесия» ($S_1=S_2$)

следует привести безразмерные координаты ξ к одному масштабу при сравнении кривых понижений, либо как результат уменьшения в n раз параметра β_2 , а так как последний входит в величину q_2 , к которой отнесены понижения (см. формулы (12.5) и

(12.6)), то в данном случае следует привести к одному масштабу сами величины S_1 и S_2 . Графики фиг. 19 отражают изменение параметра β_2 . Изменение параметров β_1 и β_2 при данных дебитах не отражается на величинах перетоков; это видно из последних трех строк табл. 5 и непосредственно усматривается из формул (12.7).

Вычисления показывают, что при увеличении коэффициента проводимости одного из эксплуатируемых горизонтов и сохранении прочих исходных параметров неизменными уменьшается величина понижения напора в данном горизонте и в меньшей степени — в соседнем. Такое явление легко объяснить: усиление проводимости пласта позволяет обеспечить те же дебиты ценой меньших понижений напора, а это благоприятно сказывается и на соседнем горизонте, ибо условия для его подпитывания из данного горизонта улучшаются и для достижения прежних дебитов теперь также достаточно несколько меньших понижений. Отмечено обстоятельство проявляется особенно ярко в случае больших дебитов из того горизонта, проводимость которого меняется. Для иллюстрации сказанного приведем табл. 6, характеризующую уменьшение ΔS_1 и ΔS_2 понижений S_1 и S_2 в точке $\xi=0.0001$ при $\varepsilon_0=1.0$, различных отношениях Q_1/Q_2 и при одновременном увеличении параметров ε_1 и ε_2 от 0.5 до 2.0; в данном случае это интерпретируется как возрастание параметра β_1 проводимости первого горизонта.

Таблица 6

Q_1/Q_2	ΔS_1	ΔS_2
0.0	0.19	0.04
0.5	6.53	0.13
1.0	12.86	0.23
10.0	126.88	1.93

Г л а в а IV

ГРУППЫ СКВАЖИН В СЛОИСТЫХ ГРУНТАХ

Здесь рассмотрены пространственные движения в нашей гидравлической постановке — движения, в которых напоры зависят от двух координат x и y . В § 13 излагается общая теория m скважин в n водоносных горизонтах, в § 14 рассмотрены случаи двух и четырех скважин в горизонте, в § 15 — две скважины в двух разных горизонтах.

§ 13. m совершенных скважин в n водоносных горизонтах

В случае скважин, центры которых в плане находятся в точках (x_l, y_l) ($l=1, \dots, m$), течение уже не будет осесимметричным, и система уравнений для напоров принимает вид (см. § 2)

$$\beta_l \left(\frac{\partial^2 h_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_l}{\partial y^2} \right) + \gamma_{l-1} h_{l-1} - (\gamma_{l-1} + \gamma_l) h_l + \gamma_l h_{l+1} = 0 \quad (l=1, \dots, n) \quad (13.1)$$

$$h_0 = H_0 = \text{const}, \quad h_{n+1} = H_{n+1} = \text{const}$$

Для случая, когда каждая из m скважин эксплуатирует n горизонтов, общее решение системы (13.1) ищем в виде

$$h_l = H_l + \sum_{l=1}^m [C_l^l K_0(\omega \rho_l) \cdot |D_l^l I_0(\omega \rho_l)|] \quad (13.2)$$

$$\rho_l = \sqrt{(x - x_l)^2 + (y - y_l)^2}$$

Здесь H_l — частное решение системы (13.1), отвечающее статическому состоянию (см. § 4). Подставляя (13.2) в (13.1) и учитывая, что

$$\Delta K_0(\omega \rho_l) = \omega^2 K_0(\omega \rho_l), \quad \Delta I_0(\omega \rho_l) = \omega^2 I_0(\omega \rho_l)$$

а функции $K_0(\omega \rho_l)$ и $I_0(\omega \rho_l)$ линейно независимы, получаем $2m$ систем уравнений вида (10.2): m — для C_l^l и m — для D_l^l . Характе-

ристическое уравнение для всех систем одно и то же, ибо его коэффициенты зависят только от параметров пластов. Повторяя рассуждения § 10, приедем к решению следующего вида:

$$h_l = H_l - \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} [C_{1k}^l K_0(\omega_k \rho_i) + D_{1k}^l I_0(\omega_k \rho_i)] \quad (i=1, \dots, n; \alpha_{ik}=1) \quad (13.3)$$

Для определения постоянных надо задать соответствующее число граничных условий. Следует заметить, что, в отличие от случая одной совершенной скважины, эквипотенциалы теперь отличаются от круговых цилиндрических поверхностей. Однако для эквипотенциалей, близких к осям скважин, это отличие мало, и можно принять эквипотенциаль, проходящую, например, через точку $(x_l - r_{il}, y_l)$, где r_{il} — радиус i -й скважины, за стенку i -й скважины и положить на ней $h_i = H_{i0} = \text{const}$.

Пусть i -я скважина не эксплуатирует i -й горизонт. Тогда функция h_i не должна иметь особенности при $r=r_i$. Выделяя члены, за счет которых эта особенность может возникнуть:

$$S_{ii} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} C_{1k}^i K_0(\omega_k \rho_i)$$

и записывая асимптотическое представление этой суммы при малых ρ_i (см. формулу (8.10))

$$S_{ii} \approx -\ln \rho_i \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} C_{1k}^i - \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} C_{1k}^i \left(C + \ln \frac{\omega_k}{2} \right) \\ (C — \text{постоянная Эйлера})$$

заключаем, что ограниченность S_{ii} при $\rho_i \rightarrow 0$ будет обеспечена равенством

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} C_{1k}^i = 0 \quad (13.4)$$

§ 14. Скважины в одном горизонте

Рассмотрим вопрос о взаимодействии нескольких скважин, одновременно работающих в безнапорном водоносном горизонте, подстилаемом слабопроницаемым водоупором [26]. В обозначениях предыдущего параграфа уравнение для ординаты h свободной поверхности имеет вид (3.7) при $w=0$. После линеаризации

(3.7) по h^2 приDEM к следующему уравнению:

$$\Delta h^2 - \omega^2 (h^2 - H^2) = 0 \quad \omega = \sqrt{\lambda/k\mu H} \quad (14.1)$$

Общее решение уравнения (14.1), ограниченное на ∞ , для случая m скважин имеет вид (см. § 8)

$$h^2 = H^2 + \sum_{i=1}^m C_i K_0(\omega \rho_i) \quad \rho_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \quad (14.2)$$

Здесь x_i, y_i — координаты центра (в плане) i -й скважины.

Постоянные C_i можно определить, задавая либо напоры на внешней стенке каждой из скважин, либо их дебиты.

Рассмотрим несколько конкретных схем. Условимся отсчитывать уровни от подошвы данного водоносного горизонта.

1. Две скважины. Примем, что радиусы обеих скважин равны r_0 , а уровни на их внешних стенках одинаковы. В качестве оси h выберем ось симметрии скважин; через их оси направим плоскость xy . Благодаря предположенной симметрии расчеты упрощаются, а выводы о характере взаимодействия скважин более наглядны без ущерба для их общности. Обратимся к формуле (14.2), в которой положим $m=2$. Используя условия

$$h = h_0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} \rho_1 = \rho_0, \rho_2 \approx 2l \\ \rho_2 = \rho_0, \rho_1 \approx 2l \end{cases}$$

т. е. задавая уровень h_0 , одинаковый на стенках обеих скважин, найдем

$$C_1 = C_2 = C := - \frac{H^2 - h_0^2}{K_0(\omega \rho_0) + K_0(2\omega l)} \quad (14.3)$$

Здесь $2l$ — расстояние между осями скважин. Если $2l \gg r_0$, то дебит каждой из двух одновременно работающих скважин выразится формулой

$$Q = 2\pi \rho_0 k \left(h \frac{\partial h}{\partial \rho_1} \right)_{\rho_1=r_0} \approx -\pi k C = \frac{\pi k (H^2 - h_0^2)}{K_0(\omega \rho_0) + K_0(2\omega l)} \quad (14.4)$$

Дебит Q_0 одиночной скважины можно получить из (14.4) при $l=\infty$:

$$Q_0 = \frac{\pi k (H^2 - h_0^2)}{K_0(\omega \rho_0)}$$

Для коэффициента η взаимодействия скважин имеем

$$\eta = \frac{Q}{Q_0} = \frac{1}{1 + \delta}, \quad \delta = \frac{K_0(2\omega l)}{K_0(\omega \rho_0)} \quad (14.5)$$

Отсюда видно, что взаимодействие скважин ослабевает с увеличением расстояния между ними, а также по мере улучшения водопроводимости прослойки, подстилающей эксплуатируемый горизонт (увеличения ω).

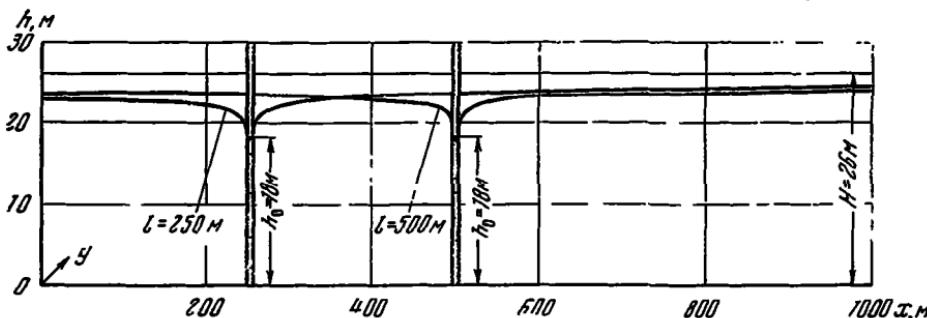
Уравнение (14.2) для свободной поверхности в этом случае имеет вид

$$h^2 = H^2 + C [K_0(\omega \rho_1) + K_0(\omega \rho_2)] \quad (14.6)$$

$$\rho_1 = \sqrt{(x+l)^2 + y^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{(x-l)^2 + y^2}$$

Постоянная C определяется выражением (14.3).

По формуле (14.6) составлена табл. 7 и построены кривые свободной поверхности в плоскости xh для $l=250$ и 500 м (фиг. 21). При этом для каждого l на графиках изображена



Фиг. 21. Графики свободной поверхности в правой полуплоскости для двух скважин при $l=250$ и 500 м

только правая скважина, а кривые построены для $x \geq 0$; для $x < 0$ картина симметрична. Значения остальных параметров таковы: $H=26$ м, $h_0=18$ м, $k=32$ м/сут, $\lambda=0.001$ м/сут, $\mu=25$ м, $\rho_0=-0.15$ м. Графики свободной поверхности в плоскости uh даны на фиг. 22 (табл. 8). Величина η , подсчитанная при указанных параметрах по (14.5), равна 0.816 при $l=250$ м и 0.865 при $l=500$ м.

2. Четыре скважины, центры которых (в плане) — вершины квадрата. Выбрав систему координат так, чтобы оси скважин оказались в двух вертикальных координатных плоскостях xh и

Таблица 7

Значения h в плоскости xh (две скважины; формула (14.6) при $y=0$)

$l=250 \text{ м}$		$l=500 \text{ м}$		$l=250 \text{ м}$		$l=500 \text{ м}$	
$x, \text{ м}$	$h, \text{ м}$						
0	22.6	0	23.3	252	19.9	502	20.0
100	22.5	250	23.1	260	20.9	510	21.1
150	22.35	400	22.6	300	22.05	525	21.8
200	21.55	475	21.75	400	22.9	600	22.75
240	20.9	490	21.05	750	23.8	750	23.4
248	19.9	498	20.0	1750	24.8	1500	23.9
249.85	18.0	499.85	18.0	4750	25.6	3500	25.0
250.15		500.15		5500	26.0	5700	26.0

Таблица 8

Значение h в плоскости yh (две скважины; формула (14.6) при $x=0$)

$l=250$		$l=500 \text{ м}$		$l=250 \text{ м}$		$l=500 \text{ м}$	
$y, \text{ м}$	$h, \text{ м}$	$y, \text{ м}$	$h, \text{ м}$	$y, \text{ м}$	$h, \text{ м}$	$y, \text{ м}$	$h, \text{ м}$
0	22.6	0	23.30	1500	24.6	2000	24.85
100	22.7	100	23.32	2500	25.1	5000	25.60
250	23.0	250	23.40	5000	25.6	10 000	26.0
500	23.6	500	23.70	10 000	26.0		
1000	24.2	1000	24.20				

yh (фиг. 23), получим следующие уравнения для h :

$$h^2 = H^2 + \sum_{i=1}^4 C_i K_0(\omega \rho_i) \quad (14.7)$$

$$\rho_1 = \sqrt{(x+l)^2 + y^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{(x-l)^2 + y^2}$$

$$\rho_3 = \sqrt{x^2 + (y+l)^2}, \quad \rho_4 = \sqrt{x^2 + (y-l)^2}$$

Вновь считая скважины одинаковыми во всех отношениях и задавая уровень h_0 на стеках скважин, найдем

$$C_1 = \dots C_4 = C = -\frac{H^2 - h_0^2}{K_0(\omega \rho_0) + K_0(2\omega l) + 2K_0(\sqrt{2}\omega l)}$$

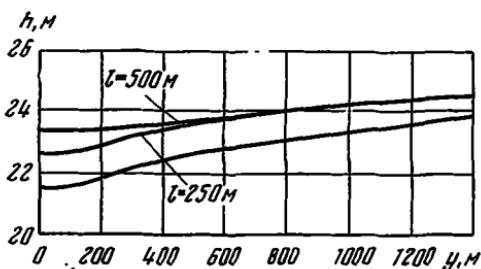
Для дебита Q каждой из четырех одновременно работающих скважин получим выражение

$$Q = -\pi k C = \frac{\pi k (H^2 - h_0^2)}{K_0 (\omega \rho_0) + K_0 (2\omega l) + 2K_0 (\sqrt{2}\omega l)} \quad (14.8)$$

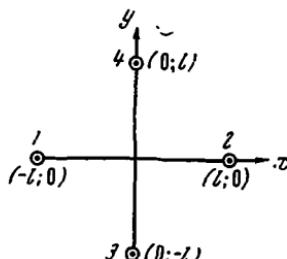
Далее имсем

$$\eta = \frac{Q}{Q_0} = \frac{1}{1 + \delta}, \quad \delta = \frac{K_0 (2\omega l) + 2K_0 (\sqrt{2}\omega l)}{K_0 (\omega \rho_0)} \quad (14.9)$$

Кроме тех выводов, которые были сделаны для двух скважин, здесь можно добавить, что при одинаковых параметрах дебит каждой из одновременно работающих скважин в данном случае меньше, чем в случае двух скважин. Это следует из сравнения формул (14.8) и (14.9) соответственно с формулами (14.4) и (14.5).



Фиг. 22. Графики свободной поверхности в правой полуплоскости



Фиг. 23. Расположение скважин

При $\delta = 0.1$ м и прежних значениях остальных параметров величина η , подсчитанная по формуле (14.9) для $l = 250, 1000$ и 5000 м, оказалась равной соответственно $0.590; 0.740$ и 0.962 .

Вычисление при помощи формулы (14.7) понижение в начале координат при $l = 250$ м оказалось равным 5.7 м.

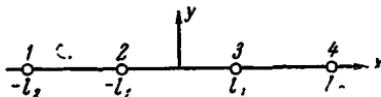
3. Четыре скважины, оси которых расположены в одной плоскости. Указанную плоскость возьмем за координатную плоскость xy . Далее предположим, что левые скважины симметричны правым относительно некоторой оси, которую примем за ось h . Расстояние каждой из средних скважин 2 и 3 от оси h обозначим через l_1 , каждой из крайних — 1 и 4 — через l_2 (фиг. 24).

Для h имсем вновь уравнение вида (14.7), причем

$$\rho_1 = \sqrt{(x + l_2)^2 + y^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{(x + l_1)^2 + y^2}$$

$$\rho_3 = \sqrt{(x - l_1)^2 + y^2}, \quad \rho_4 = \sqrt{(x - l_2)^2 + y^2}$$

В отличие от двух предыдущих схем даже при одинаковых радиусах ρ_0 всех скважин и одинаковых понижениях на них в-



Фиг. 24. Расположение скважин

равных условиях окажутся не все скважины, а именно дебит каждой из скважин 2 и 3 будет меньшим дебита каждой из скважин 1 и 4. Поставим задачу иначе: пусть динамический уровень на скважинах 1 и 4 равен h_{01} , а на скважинах 2 и 3 — h_{02} , т. е. имеем

(14.10)

$$h = h_{01} \text{ при } \rho_1 = \rho_0, \quad \rho_2 \approx l_2 - l_1, \quad \rho_3 \approx l_2 + l_1, \quad \rho_4 \approx 2l_2$$

$$h = h_{01} \text{ при } \rho_1 \approx 2l_2, \quad \rho_2 \approx l_2 + l_1, \quad \rho_3 \approx l_2 - l_1, \quad \rho_4 = \rho_0$$

$$h = h_{02} \text{ при } \rho_1 \approx l_2 - l_1, \quad \rho_2 = \rho_0, \quad \rho_3 \approx 2l_1, \quad \rho_4 \approx l_2 + l_1$$

$$h = h_{02} \text{ при } \rho_1 \approx l_2 + l_1, \quad \rho_2 \approx 2l_1, \quad \rho_3 = \rho_0, \quad \rho_4 \approx l_2 - l_1$$

Выясним, какому соотношению должны удовлетворять h_{01} и h_{02} , для того чтобы дебиты всех скважин были бы одинаковыми.

Используя условия (14.10), находим следующую систему уравнений для постоянных C_1, C_2, C_3 и C_4 :

(14.11)

$$C_1 K_0(\omega \rho_0) + C_2 K_0[\omega(l_2 - l_1)] + C_3 K_0[\omega(l_2 + l_1)] + C_4 K_0(2\omega l_2) = h_{01}^2 - H^2$$

$$C_1 K_0(2\omega l_2) + C_2 K_0[\omega(l_2 + l_1)] + C_3 K_0[\omega(l_2 - l_1)] + C_4 K_0(\omega \rho_0) = h_{01}^2 - H^2$$

$$C_1 K_0[\omega(l_2 - l_1)] + C_2 K_0(\omega \rho_0) + C_3 K_0(2\omega l_1) + C_4 K_0[\omega(l_2 + l_1)] = h_{02}^2 - H^2$$

$$C_1 K_0[\omega(l_2 + l_1)] + C_2 K_0(2\omega l_1) + C_3 K_0(\omega \rho_0) + C_4 K_0[\omega(l_2 - l_1)] = h_{02}^2 - H^2$$

Вычитая второе уравнение из первого, а четвертое из третьего, получаем

$$(C_1 - C_4)[K_0(\omega \rho_0) - K_0(2\omega l_2)] + (C_2 - C_3)\{K_0[\omega(l_2 - l_1)] - K_0[\omega(l_2 + l_1)]\} = 0$$

$$(C_1 - C_4)\{K_0[\omega(l_2 - l_1)] - K_0[\omega(l_2 + l_1)]\} + (C_2 - C_3)[K_0(\omega \rho_0) - K_0(2\omega l_2)] = 0$$

Так как определитель этой системы отличен от нуля, то система имеет единственное нулевое решение, и, следовательно, $C_1=C_4=A$, $C_2=C_3=B$. Тогда система (14.11) переходит в следующую:

$$A \{K_0(\omega\rho_0) + K_0(2\omega l_2)\} + B \{K_0[\omega(l_2 - l_1)] + K_0[\omega(l_2 + l_1)]\} = h_{01}^2 - H^2 \quad (14.12)$$

$$A \{K_0[\omega(l_2 - l_1)] + K_0[\omega(l_2 + l_1)]\} + B \{K_0(\omega\rho_0) + K_0(2\omega l_1)\} = h_{02}^2 - H^2$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} C_1 = C_4 = A &= \\ = - \frac{(H^2 - h_{01}^2) \{K_0(\omega\rho_0) + K_0(2\omega l_2)\} - (H^2 - h_{02}^2) \{K_0[\omega(l_2 - l_1)] + K_0[\omega(l_2 + l_1)]\}}{\Delta} \end{aligned} \quad (14.13)$$

$$\begin{aligned} C_2 = C_3 = B &= \\ = - \frac{(H^2 - h_{02}^2) \{K_0(\omega\rho_0) + K_0(2\omega l_1)\} - (H^2 - h_{01}^2) \{K_0[\omega(l_2 - l_1)] + K_0[\omega(l_2 + l_1)]\}}{\Delta} \end{aligned}$$

Здесь Δ — определитель системы (14.12).

Дебиты скважин 1 и 4, а также 2 и 3 попарно равны и определяются выражениями

$$Q_1 = Q_4 = Q^{(1)} = -\pi k A, \quad Q_2 = Q_3 = Q^{(2)} = -\pi k B \quad (14.14)$$

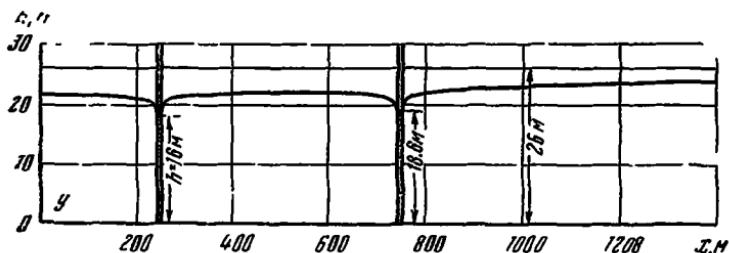
Следовательно, для равенства дебитов всех скважин необходимо, чтобы $A=B$. Используя равенства (14.13), получаем для уровней h_{01} и h_{02} на стенках скважин следующее соотношение:

$$(H^2 - h_{01}^2) \{K_0(\omega\rho_0) + K_0[\omega(l_2 - l_1)] + K_0[\omega(l_2 + l_1)] + K_0(2\omega l_1)\} = (H^2 - h_{02}^2) \{K_0(\omega\rho_0) + K_0[\omega(l_2 - l_1)] + K_0[\omega(l_2 + l_1)] + K_0(2\omega l_2)\}$$

Отсюда следует, что

$$H^2 - h_{01}^2 < H^2 - h_{02}^2, \quad H - h_{01} < H - h_{02}$$

Этот результат отражает тот факт, что средние скважины должны работать с большим понижением, чтобы дебит их был равен дебиту крайних скважин (при прочих равных условиях). Так, при $l_1=250$ м, $l_2=750$ м, $h_{20}=18$ м, $\rho_0=0.15$ м и прежних (см. п. 1) значениях остальных параметров $h_{10}=18.6$ м. Построены графики свободной поверхности в плоскостях xh (фиг. 25) и yh (фиг. 22), соответствующие расчетные данные приведены в табл. 9.



Фиг. 25. График свободной поверхности в правой полуплоскости xh для четырех скважин на одной линии ($l_1=250$ м и $l_2=750$ м)

Таблица 9

Значения h в плоскостях xh и yh (четыре скважины в одной плоскости; формулы (14.7) и (14.13))

$y=0$				$x=0$	
x , м	h , м	x , м	h , м	y , м	h , м
0	21.6	400	21.5	0	21.6
100	21.5	500	21.8	100	21.7
150	21.4	600	21.8	250	22.0
200	21.1	650	21.7	400	22.4
240	20.3	700	21.5	500	22.55
245	20.0	745	20.4	600	22.7
248	19.5	749.85	18.6	750	23.0
			750.15		
249.85					
250.15	18.0	755	20.4	1000	23.4
252	19.5	800	21.7	1500	24.0
255	20.0	1000	22.7	3000	24.8
260	20.3	1500	23.7	5000	25.4
275	20.7	4250	25.2	10 000	26.0
300	21.1	8250	26.0		

Формулы (14.14) и (14.13) позволяют найти отношение debitов каждой из пар скважин при одинаковых понижениях на всех четырех скважинах:

$$\frac{Q^{(1)}}{Q^{(2)}} = \frac{1 + \delta_1}{1 + \delta_2}, \quad \delta_{1,2} = \frac{K_0 (2\omega l_{1,2})}{K_0 (\omega p_0) - K_0 [\omega (l_2 - l_1)] - K_0 [\omega (l_2 + l_1)]}$$

Так как $l_2 > l_1$, то $\delta_2 < \delta_1$ и $Q^{(2)} < Q^{(1)}$. Тем самым обосновано утверждение, высказанное в начале пункта.

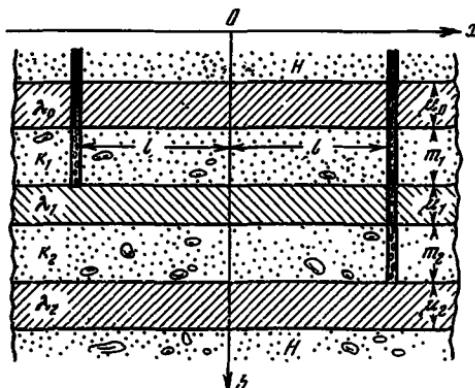
При $l_2 \rightarrow \infty$, учитывая, что $\lim K_0(x) = 0$ при $r \rightarrow \infty$, в пределе получаем согласно (14.14) и (14.13) следующее:

$$Q^{(1)} = \frac{\pi k (H^2 - h_{01}^2)}{K_0(\omega p_0)}, \quad Q^{(2)} = \frac{\pi k (H_2 - h_{02}^2)}{K_0(\omega p_0) + K_0(2\omega l_1)}$$

Первая формула выражает дебит одиночной скважины; это соответствует тому, что при больших l_2 каждую из крайних скважин можно рассматривать как одиночную. Вторая формула совпадает с формулой (14.4) для дебита каждой из двух одновременно работающих скважин.

§ 15. Две скважины в двух напорных горизонтах

Проиллюстрируем применение методов, изложенных в предыдущих параграфах, на следующей задаче. Две совершенные скважины, отстоящие одна от другой на расстояние $2l$, работают каждая в одном из двух напорных горизонтов, которые сообщаются через слабопроницаемые прослойки как между собой, так и с соседними водоносными горизонтами (фиг. 26). Напоры в



Фиг. 26

последних примем, как и в задаче, рассмотренной в § 12, постоянными и равными: $H_0 = H_3 = H$, ибо здесь нас также интересуют не равномерные перетоки, а эффекты, вызываемые откачкой. Вследствие этого допущения до начала откачки напоры в горизонтах, где имеются скважины, также равны H , а пьезометрическая поверхность во всех горизонтах представляет некоторую горизонтальную плоскость. Если взять ее за плоскость сравнения напоров, а ось напоров направить вниз, то $H=0$ и

вспомогательные напоры при откачке будут равны понижениям. Начало координат выберем в плоскости сравнения напоров в середине отрезка, соединяющего центры скважин; ось x направим по линии центров (фиг. 27). С учетом принятых предпосылок система (2.2) для напоров h_1 и h_2 в рассматриваемых горизонтах является однородной и в обозначениях § 2 имеет вид

$$\begin{aligned}\beta_1 \Delta h_1 - (\gamma_0 + \gamma_1) h_1 + \gamma_1 h_2 &= 0 \\ \beta_2 \Delta h_2 + \gamma h_1 - (\gamma_1 + \gamma_2) h_2 &= 0\end{aligned}\quad (15.1)$$

Рассматривая задачу в неограниченной области, будем в соответствии с § 13 искать решение системы (15.1) в виде

$$h_1 = C_1^1 K_0(\omega \rho_1) + C_1^2 K_0(\omega \rho_2) \quad (15.2)$$

$$h_2 = C_2^1 K_0(\omega \rho_1) + C_2^2 K_0(\omega \rho_2)$$

$$\rho_1 = \sqrt{(x+l)^2 + y^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{(x-l)^2 + y^2}$$

Подставив (15.2) в (15.1), получим (см. § 13) для обеих групп коэффициентов C_1^1, C_2^1 , и C_1^2, C_2^2 одинаковые системы однородных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}(\beta_1 \omega^2 - \gamma_0 - \gamma_1) C_1 + \gamma_1 C_2 &= 0 \\ \gamma_1 C_1 + (\beta_2 \omega^2 - \gamma_1 - \gamma_2) C_2 &= 0\end{aligned}\quad (15.3)$$

Условие существования неиулевого решения этой системы дает для ω^2 характеристическое уравнение, корни которого таковы:

$$\begin{aligned}\omega_{1,2}^2 = (2\beta_1 \beta_2)^{-1} [\beta_1(\gamma_1 + \gamma_2) + \beta_2(\gamma_0 + \gamma_1) \pm \\ \pm \sqrt{[\beta_1(\gamma_1 + \gamma_2) - \beta_2(\gamma_0 + \gamma_1)]^2 + 4\beta_1 \beta_2 \gamma_1^2}] \quad (15.4)\end{aligned}$$

Видим, что оба корня положительны (см. § 10).

Для каждого корня: ω_1^2 и ω_2^2 — система (15.3) определяет соотношение между C_2 и C_1 . Имеем

$$\begin{aligned}C_{21}' = \alpha_1 C_{11}', \quad C_{22}' = \alpha_2 C_{12}', \quad C_{21}^2 = \alpha_1 C_{11}^2, \quad C_{22}^2 = \alpha_2 C_{12}^2 \\ \alpha_1 = -\frac{\beta_1 \omega_1^2 - \gamma_0 - \gamma_1}{\gamma_1} = -\frac{\gamma_1}{\beta_2 \omega_1^2 - \gamma_1 - \gamma_2} \\ \alpha_2 = -\frac{\beta_1 \omega_2^2 - \gamma_0 - \gamma_1}{\gamma_1} = -\frac{\gamma_1}{\beta_2 \omega_2^2 - \gamma_1 - \gamma_2}\end{aligned}\quad (15.5)$$

Таким образом, решение системы (15.1) получим в виде

$$h_1 = C_{11}^1 K_0(\omega_1 \rho_1) + C_{12}^1 K_0(\omega_2 \rho_1) + C_{11}^2 K_0(\omega_1 \rho_2) + C_{12}^2 K_0(\omega_2 \rho_2)$$

$$h_2 = \alpha_1 C_{11}^1 K_0(\omega_1 \rho_1) + \alpha_2 C_{12}^1 K_0(\omega_2 \rho_1) + \alpha_1 C_{11}^2 K_0(\omega_1 \rho_2) + \alpha_2 C_{12}^2 K_0(\omega_2 \rho_2).$$

Так как по условию первая скважина не эксплуатирует нижний горизонт, а вторая — верхний, то функция h_1 не должна иметь особенности при $\rho_2=0$, а функция h_2 — при $\rho_1=0$. Тогда согласно (13.4) получаем

$$C_{11}^2 = -C_{12}^2 = C_2,$$

$$\alpha_1 C_{11}^1 = -\alpha_2 C_{12}^1 = \alpha_1 C_1$$

и решение перепишется так:

$$h_1 = C_1 \left[K_0(\omega_1 \rho_1) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} K_0(\omega_2 \rho_1) \right] + C_2 [K_0(\omega_1 \rho_2) - K_0(\omega_2 \rho_2)] \quad (15.6)$$

$$h_2 = \alpha_1 C_1 [K_0(\omega_1 \rho_1) - K_0(\omega_2 \rho_1)] + C_2 [\alpha_1 K_0(\omega_1 \rho_2) - \alpha_2 K_0(\omega_2 \rho_2)]$$

Принимая за стенки скважин эквипотенциали, проходящие через точки $(-l + \rho_{01}, 0)$ и $(l - \rho_{02}, 0)$ (ρ_{01} и ρ_{02} — радиусы скважин 1 и 2), и задавая на них напоры, или (что в данном случае одно и тоже) понижения

$$h_1 = h_{10} = S_{10} \quad \text{при } \rho_1 = \rho_{01}, \rho_2 = 2l - \rho_{01}$$

$$h_2 = h_{20} = S_{20} \quad \text{при } \rho_1 = 2l - \rho_{02}, \rho_2 = \rho_{02}$$

получаем систему для определения C_1 и C_2 .

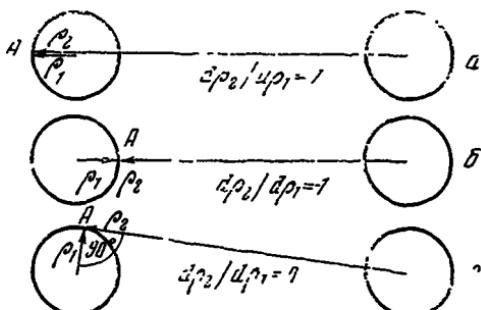
Исходя из формул (15.6), определим дебит каждой скважины. Обозначим через Q_{ii} количество воды, отбираемой в единицу времени i -й скважиной из i -го горизонта. Тогда для Q_{11} , например, формула такова:

$$Q_{11} = k_1 m_1 \rho_{01} \int_0^{2\pi} \left. \frac{\partial h_1}{\partial \rho_1} \right|_{\rho_1=\rho_{01}} d\varphi = 2\pi k_1 m_1 \rho_{01} \left\langle \frac{\partial h_1}{\partial \rho_1} \right\rangle_{\rho_1=\rho_{01}} \quad (15.7)$$

Здесь $\left\langle \frac{\partial h_1}{\partial \rho_1} \right\rangle_{\rho_1=\rho_{01}}$ — среднее интегральное значение $\partial h_1 / \partial \rho_1$ на стенке первой скважины в первом горизонте. Учитывая, что $K'_0(x) = -K_1(x)$ и для малых x $K_1(x) \approx 1/x$, получаем согласно первой формуле (15.6)

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial h_1}{\partial \rho_1} \right|_{\rho_1=\rho_{01}} &= C_1 \left[\omega_2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} K_1(\omega_2 \rho_{01}) - \omega_1 K_1(\omega_1 \rho_{01}) \right] + \\ &+ C_2 \left\{ [\omega_3 K_1(\rho_2 \omega_2) - \omega_1 K_1(\rho_2 \omega_1)] \frac{\partial \rho_2}{\partial \rho_1} \right\} = \\ &= C_1 \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_2 \rho_{01}} + C_2 \left\{ [\omega_2 K_1(\rho_2 \omega_2) - \omega_1 K_1(\rho_2 \omega_1)] \frac{\partial \rho_2}{\partial \rho_1} \right\} \rho_1 = \rho_{01} \end{aligned}$$

Будем считать $l \gg \rho_{01}$, $l \gg \rho_{02}$. Тогда $\rho_2 \approx 2l$ при $\rho_1 = \rho_{01}$; квадратная скобка, будучи малой, изменяется незначительно, и второе слагаемое первой части достигает при $\rho_1 = \rho_{01}$ экстремальных значений в точках, лежащих (в плане) на линии центров скважин,



Фиг. 27

т. е. в положениях *a* и *б* на фиг. 27. Эти значения противоположны по знаку и незначительно различаются по величине (ввиду разницы в величинах ρ_2 в положениях *a* и *б*).

Следовательно, абсолютная величина второго слагаемого мала, а кроме того, на контуре скважины положительные и отрицательные значения этого слагаемого отчасти взаимно погашаются, так что мы можем и пренебречь и в качестве среднего значения $\langle dh_1/d\rho \rangle$ при $\rho_1 = \rho_{01}$ в (15.7) взять $C_1(\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_2 \rho_{01}$, т. е. то значение, которое производная $dh_1/d\rho$ принимает в положении в (фиг. 27) и симметричном ему относительно линии центров; при этом $d\rho_2/d\rho_1 = 0$ (фиг. 27, *в*). Тогда согласно (15.7)

$$Q_{11} \approx 2\pi k_1 m_1 C_1 (\alpha_1 - \alpha_2) / \alpha_2 \quad (15.8)$$

Из второго уравнения (15.6) найдем

$$Q_{22} \approx 2\pi k_1 m_1 C_2 (\alpha_2 - \alpha_1) \quad (15.9)$$

Рассуждая аналогично, нетрудно убедиться, что $Q_{12} = Q_{21} = 0$, как и должно быть по условию задачи.

Используем выведенные формулы для получения количественных характеристик взаимодействия скважин, одновременно работающих в двух горизонтах, при конкретных значениях параметров. Для упрощения расчетных формул предположим, что проводимости обоих горизонтов одинаковы: $\beta_1 = \beta_2 = \beta$; то же предположение сделаем относительно проводимостей верхней и нижней прослоек: $\gamma_0 = \gamma_2 = \gamma$. Далее примем, что радиусы обеих скважин равны: $r_0 = r_2 = r_0$, а понижения на них одинаковы: $S_{01} = S_{20} = S_0$. Проводимость γ_1 средней прослойки (разделяющей каптируемые горизонты), проводимость γ верхней и нижней прослоек и расстояние $2l$ между скважинами предполагаются переменными. Нас интересует, как при изменении этих параметров изменяются напоры в каждом горизонте и дебиты каждой из скважин. Если при этом остальные параметры зафиксированы, как предложено выше, то, очевидно, обе скважины работают в одинаковых условиях. Расчеты при этом, как увидим ниже, облегчаются, однако выявляемая картина в качественном отношении характерна и для других случаев.

При указанном выборе параметров выражения (15.4) упрощаются:

$$\omega_1^3 = 2\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}, \quad \omega_2^3 = \bar{\gamma} \quad (\bar{\gamma} = \gamma/\beta, \bar{\gamma}_1 = \gamma_1/\beta) \quad (15.10)$$

Далее, по формулам (15.5) найдем

$$\alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 1 \quad (15.11)$$

и равенства (15.6) примут вид

$$h_1 = C_1 [K_0(\omega_1 r_1) + K_0(\omega_2 r_1)] + C_2 [K_0(\omega_1 r_2) - K_0(\omega_2 r_2)] \quad (15.12)$$

$$h_2 = -C_1 [K_0(\omega_1 r_1) - K_0(\omega_2 r_1)] - C_2 [K_0(\omega_1 r_2) + K_0(\omega_2 r_2)]$$

Используя условия на скважинах

$$h_1 = S_0 \text{ при } r_1 = r_0, \quad r_2 = 2l - r_0 \approx 2l$$

$$h_2 = S_0 \text{ при } r_1 = 2l - r_0 \approx 2l, \quad r_2 = r_0$$

получаем для C_1 и C_2 систему

$$MC_1 + NC_2 = S_0$$

$$-NC_1 - MC_2 = S_0$$

$$M = K_0(\omega_1 r_0) + K_0(\omega_2 r_0), \quad N = K_0(2l\omega_1) - K_0(2l\omega_2)$$

Отсюда находим

$$(M + N)(C_1 + C_2) = 0, \quad C_1 = -C_2 = C = \frac{S_0}{M - N}$$

и уравнения (15.12) принимают вид

$$\begin{aligned} h_1 &= C [K_0(\omega_1\rho_1) + K_0(\omega_2\rho_1) - K_0(\omega_1\rho_2) + K_0(\omega_2\rho_2)] \\ h_2 &= C [K_0(\omega_1\rho_2) + K_0(\omega_2\rho_2) - K_0(\omega_1\rho_1) + K_0(\omega_2\rho_1)] \end{aligned} \quad (15.13)$$

Из (15.13) видно, что пьезометрические поверхности для h_1 и h_2 симметричны относительно плоскости yz : если ρ_1 и ρ_2 в первом уравнении (15.13) принимают значения, соответственно равные значениям ρ_2 и ρ_1 во втором, то h_1 и h_2 одинаковы.

Дебиты обеих скважин в данном случае также должны быть одинаковыми. Их можно подсчитать по формулам (15.8) и (15.9), согласно которым Q_{11} и Q_{22} будут теперь отрицательными, так как ось h направлена вниз и, например, $(dh_1/d\rho_1) < 0$ при $\rho_1 = \rho_0$. Так как нас интересуют абсолютные величины дебитов, то, меняя в (15.8) и (15.9) знаки и учитывая (15.11) и (15.13), найдем

$$Q_{11} = Q_{22} = Q = 2\pi\beta C = \frac{4\pi\beta S_0}{K_0(\omega_1\rho_0) + K_0(\omega_2\rho_0) - K_0(2l\omega_1) + K_0(2l\omega_2)} \quad (15.14)$$

Если вторая скважина не работает, т. е. $Q_{22} = 0$, то согласно (15.9) $C_2 = 0$, и уравнения (15.12) упрощаются

$$h_1 = C [K_0(\omega_1\rho_1) + K_0(\omega_2\rho_1)], \quad h_2 = -C [K_0(\omega_1\rho_1) - K_0(\omega_2\rho_1)] \quad (15.15)$$

Используя условие $h_1 = S_0$ при $\rho_1 = \rho_0$, получаем из первого уравнения (15.15)

$$C = \frac{S_0}{K_0(\omega_1\rho_0) + K_0(\omega_2\rho_0)} \quad (15.16)$$

после чего по второму уравнению можно подсчитать понижение, возникающее во втором горизонте при откачке из первого. В частности, при $\rho_1 = 0$, т. е. непосредственно под первой скважиной, где понижение во втором горизонте максимально, имеем, учитывая (8.10) и (15.10):

$$h_2|_{\rho_1=0} = \lim_{\rho_1 \rightarrow 0} C [K_0(\omega_2\rho_1) - K_0(\omega_1\rho_1)] = C \ln \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{C}{2} \ln \left(1 + \frac{2\gamma_1}{\gamma} \right)$$

Эта формула позволяет оценить величину погрешности, обусловленной принятием исходной предпосылки о постоянстве напоров H_0 и H_3 в «питающих» горизонтах: на самом деле в этих горизонтах под влиянием откачки из соседних также возникают некоторые понижения напоров. При учете этих понижений в данной задаче пришлось бы иметь дело не с системой (15.1), а с аналогичной системой четырех уравнений.

Согласно (15.8) и (15.16), дебит Q_0 одиночной скважины определяется формулой

$$Q_0 = \frac{4\pi S_0}{K_0(\omega_1 p_0) + K_0(\omega_2 p_0)} \quad (15.17)$$

Степень взаимодействия скважин при их одновременной работе можно охарактеризовать отношением $\eta = Q/Q_0$ дебита каждой из двух одновременно работающих скважин (с одинаковым понижением) к дебиту одиночной скважины (при том же понижении). Имеем согласно (15.14) и (15.17)

$$\eta = \frac{Q}{Q_0} = \frac{1}{1 + \delta}, \quad \delta = \frac{K_0(2l\omega_2) - K_0(2l\omega_1)}{K_0(p_0\omega_2) + K_0(p_0\omega_1)} \quad (15.18)$$

Заметим, что формула (15.14), использованная при выводе соотношений (15.18), получена со ссылкой на формулы (15.8) и (15.9), при выводе которых предполагалось, что $l \gg r_0$. Следовательно, для малых l формулы (15.14) и (15.18) следует пересмотреть. Пусть $l=0$, т. е. обе скважины имеют общую ось. Тогда решение имеет вид (10.5); при нашем выборе плоскости сравнения напоров и при a_{12} , найденных согласно (15.11), эти выражения запишутся так:

$$h_1 = C_1 K_0(\omega_1 \rho) + C_2 K_0(\omega_2 \rho), \quad h_2 = -C_1 K_0(\omega_1 \rho) + C_2 K_0(\omega_2 \rho) \quad (15.19)$$

Задавая на стенах обеих скважин одинаковые понижения $h_1|_{\rho=\rho_0} = h_2|_{\rho=\rho_0} = S_0$, найдем

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{S_0}{K_0(\omega_2 \rho_0)}$$

и формулы (15.19) принимают вид

$$h_1 = h_2 = h = \frac{S_0}{K_0(\omega_2 \rho_0)} K_0(\omega_2 \rho) \quad (15.20)$$

Дебит каждой из этих скважин определится так:

$$Q = -2\pi\rho_0\beta \frac{dh}{d\rho}|_{\rho=\rho_0} = 2\pi\omega_2\rho_0\beta K_1(\omega_2 \rho)|_{\rho=\rho_0} \frac{S_0}{K_0(\omega_2 \rho_0)} = \frac{2\pi\beta S_0}{K_0(\omega_2 \rho_0)} \quad (15.21)$$

Обращаясь к формулам (15.10), видим, что Q не зависит от γ_1 — проницаемости средней прослойки. Это объясняется тем, что в данном случае воронки депрессии обеих скважин не только одинаковы по форме, что обусловлено специальным выбором параметров, но и оказываются совмещенными, поскольку совмещены оси скважин ($l=0$). При этом $h_1=h_2$ для всех ρ и перетоки из одного горизонта в другой отсутствуют. Иными словами, понижения, создаваемые каждой из одновременно работающих скважин, в данном случае взаимно уравновешиваются, и напор в каждом из горизонтов устанавливается таким, каким он был бы при полной непроницаемости разделяющей их прослойки, т. е. при $\gamma_1=0$.

Наконец, предположим, что в рассматриваемом случае ($l=0$) вторая скважина не работает. Если исходить из (15.19), то $C_1=C_2=C$, так как h_2 не должно теперь иметь особенности при $\rho=0$ (см. § 13), и уравнения (15.19) переходят в (15.15). Для дебита Q_0 вновь получаем формулу (15.17), а вместо (15.18) получим, учитывая (15.21), следующее выражение:

$$\eta = \frac{Q}{Q_0} = \frac{K_0(\omega_1 p_0) + K_0(\omega_2 p_0)}{2 K_0(\omega_2 p_0)} \quad (15.22)$$

Обратимся к графикам зависимостей η от каждого из трех параметров: l , γ_1 и γ (фиг. 28); второй и третий графики построены в логарифмическом масштабе. Вычисления коэффициента η производились по формуле (15.18) при $l \neq 0$ и по формуле (15.22) при $l=0$; во всех случаях принималось $p_0=0.1$ м.

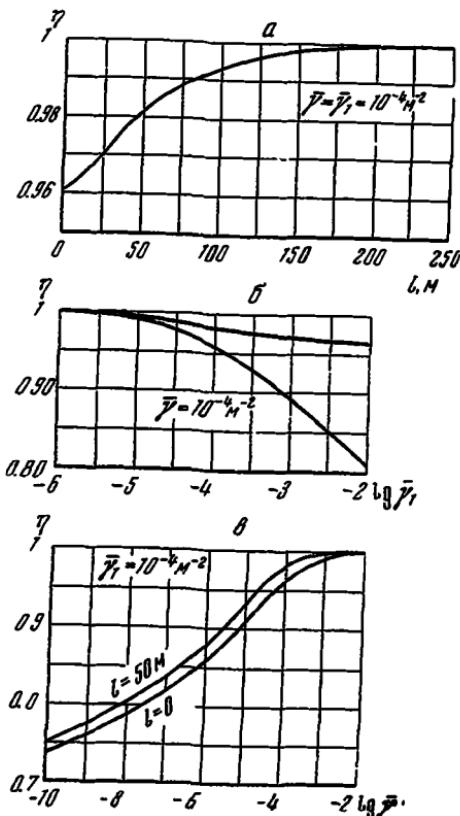
1. Зависимость η от l (фиг. 28, а) выражает уменьшение взаимодействия скважин при увеличении расстояния между ними¹: η изменяется от некоторого минимального значения при $l=0$ до единицы при $l=\infty$. Такая закономерность объясняется тем, что с увеличением l депрессионные воронки перекрываются все в меньшей степени, а следовательно, усиливается (до определенных пределов) подпитывание горизонта вблизи эксплуатирующей его скважины из соседнего горизонта: это подпитывание обусловлено разностью напоров в горизонтах. По мере приближения к другой скважине соотношение напоров изменяется: в соседнем эксплуатируемом горизонте напор уменьшается, и данный горизонт, продолжая по-прежнему питаться из другого соседнего горизонта (напор в котором постоянен), теперь уже и сам частично питает эксплуатируемый соседний горизонт.

¹ Говоря об изменении того или иного параметра, мы имеем в виду не буквальное его изменение по нашему произволу, а сопоставление схем с различными величинами данного параметра и одинаковыми значениями прочих.

2. Если отнести изменение параметра $\bar{\gamma}_1$ за счет соответствующего изменения γ_1 , а параметр β считать фиксированным (см. формулы (15.10)), то зависимость η от γ_1 , представленную на фиг. 28, б, можно интерпретировать как усиление взаимодействия скважин (η уменьшается) с увеличением проводимости средней прослойки. Это вызвано тем, что дебит Q каждой из взаимодействующих скважин увеличивается с ростом $\bar{\gamma}_1$ медленнее, чем дебит Q_0 одиночной скважины; это торможение роста Q вызвано взаимодействием скважин и, как уже отмечалось, оказывается тем сильнее, чем меньше l , а при $l=0$ рост Q с увеличением γ_1 совсем прекращается (при одинаковых понижениях на скважинах). На графике это обстоятельство проявляется в том, что кривая для $l=0$ лежит ниже кривой для $l=50 \text{ м}$, причем в первом случае диапазон изменения η шире, чем во втором (для того же интервала значений $\bar{\gamma}_1$). При уменьшении $\bar{\gamma}_1$ для всех

l величина $\eta \rightarrow 1$, что означает уменьшение взаимодействия скважин по мере усиления изоляции водоносных горизонтов друг от друга.

3. С ростом $\bar{\gamma}$ (при неизменном $\bar{\gamma}_1$) наблюдается (фиг. 28, в) увеличение η , т. е. уменьшение взаимодействия скважины. Если отнести изменение γ за счет параметра $\bar{\gamma}$, то с физической точки зрения отмеченный факт означает, что благодаря улучшению связи с питающим соседним горизонтом на дебите той или иной скважины все меньше сказывается производимая одновременно откачка из другого соседнего горизонта. Картину аналогична той, которая имеет место при уменьшении $\bar{\gamma}_1$ и неизменном $\bar{\gamma}$ (см. п. 2). Если же $\bar{\gamma} \rightarrow 0$, то эксплуатируемые горизонты все



Фиг. 28. Графики коэффициента взаимодействия скважин

Таблица 10

Понижения S_1 и S_2 (в м) в верхнем и нижнем горизонтах в плоскости xh при одновременной работе скважин (формулы (15.13) и (15.19); $\rho_0=0.1$ м, $S_0=10$ м); в нижней части — значения $S=S_1=S_2$ при $t=0$

$x, \text{м}$	$\gamma_1=10^{-4} \text{ м}^{-2}$		$x, \text{м}$	$\gamma_1=12 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-2}$	
	S_1	S_2		S_1	S_2
$l=50 \text{ м}$					
0	1.344	1.344	0	1.438	1.438
30	0.962	2.407	30	1.484	2.132
40	0.887	3.348	40	1.553	2.980
45	0.857	4.338	45	1.579	3.970
49	0.826	6.665	46	1.583	4.302
49.9	0.821	10.000	47	1.585	4.373
50	0.821	∞	48	1.586	5.356
50.1	0.820	10.000	49	1.585	6.425
52	0.814	6.651	49.9	1.584	10.00
60	0.739	3.303	50	1.582	∞
100	0.431	1.160	50.1	1.581	10.00
150	0.288	0.489	60	1.455	2.988
550	0.00365	0.00354	100	0.837	0.934
			150	0.413	0.419
			550	0.00384	0.00385
$l=10 \text{ м}$					
0	3.465	3.465	0	3.525	3.525
5	2.907	4.438	5	3.060	4.412
9	2.597	7.429	7	2.924	5.087
9.9	2.537	10.000	9	2.804	6.671
10	2.530	∞	2.9	2.754	10.000
10.1	2.523	10.000	10	2.747	10.000
11	2.498	6.475	10.1	2.743	6.449
20	1.999	3.426	11	2.691	5.035
110	0.488	0.567	13	2.581	4.285
510	0.00047	0.00048	15	2.478	3.276
			20	2.243	2.550
			30	2.058	1.182
			60	1.120	∞
$x=0.1$	1	5 10	20	50 100	500
$S=10.000$	6.722	4.444 3.446	2.495	1.316 0.599	0.0053

Таблица 10

Понижения S_1 и S_2 (в м) в плоскости xh ; каптируется только первый горизонт (формула (15.15); $\rho_2=0.1$ м, $S_0=10$ м)

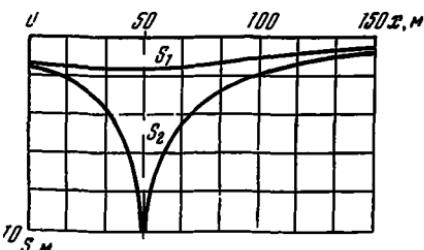
$x, \text{м}$	S_1	S_2	$x, \text{м}$	S_1	S_2
$\bar{\gamma}_1 = 10^{-4} \text{ м}^{-2}$					
0	∞	0.407	20	2.219	0.378
0.1	10.000	0.407	50	1.064	0.306
1	6.388	0.407	100	0.430	0.194
5	4.217	0.398	200	0.060	0.069
10	3.200	0.396			
$\bar{\gamma}_1 = 12 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-2}$					
0	∞	1.294	5	3.745	1.265
0.1	10.000	1.296			
1	6.302	1.293	10	2.696	1.209
2	5.192	1.288	20	1.748	1.071
3	4.547	1.282	50	0.794	0.693
4	4.093	1.274	100	0.335	0.335
			500	0.003	0.003

больше изолируются от питающих их пластов, что отражается на уменьшении дебита скважин, работающих как одновременно, так и порознь: это видно также из формул (15.14), (15.17) и (15.21). При этом $\eta \rightarrow 1/2$: одиночная скважина получает из соседнего горизонта почти столько же воды, как и из своего. В случае одновременной откачки это дополнительное питание в той или иной степени забирается другой скважиной, причем взаимодействие скважин ослабевает с ростом l очень медленно (для малых γ дебиты одновременно работающих скважин при $l=0$ и 50 м почти одинаковы). Зависимость η от γ также проявляется тем ярче, чем меньше l .

Расчеты и связанные с ними выводы были сделаны, как отмечалось выше, при фиксированном значении коэффициента β водопроводимости обоих водоносных горизонтов, и поэтому изменения параметров γ и γ_1 связывались с изменением проводимостей прослоек γ и γ_1 . Можно, однако, пользуясь теми же формулами, проследить за поведением η в зависимости от изменения β ; при этом параметры γ и γ_1 , а следовательно ω_1 и ω_2 , одновременно изменяются в одинаковое число раз. Исходя из формул (15.18) или (15.22), а также учитывая поведение функции $K_0(x)$, нетрудно обнаружить, что с возрастанием β коэффи-

циент η также растет, в чем находит выражение уменьшение взаимодействия скважин при увеличении водопроводимости горизонтов; при убывании β картина обратная. Наиболее отчетливо эта закономерность также проявляется при малых l и в особенности при $i=0$.

В табл. 10 и 11 даны результаты вычисления напоров по формулам (15.13) для $l=10$ и 50 м и по (15.19) — для $l=0$; для каждого l принималось последовательно $\gamma_1=10^{-4}$ м $^{-2}$ и $\gamma_2=12 \cdot 10^{-4}$ м $^{-2}$, во всех случаях $\gamma=10^{-4}$ м $^{-2}$ $\rho_0=0.1$ м, $S_0=10$ м. Для сравнения по формулам (15.5) для тех же γ и γ_1 подсчитаны напоры h_1 и h_2 в случае, когда работает только скважина в верхнем горизонте с прежним понижением. Случай $l=50$ м, $\gamma_1=12 \cdot 10^{-4}$ м $^{-2}$, для которого построен график (фиг. 29), интересен в том отношении, что при одновре-



Фиг. 29. Графики напоров в правой полуплоскости для случая $\gamma=10^{-4}$ м $^{-2}$, $\rho_0=0.1$ м, $l=10$ и 50 м, $\gamma_1=12 \cdot 10^{-4}$ м $^{-2}$ (формула (15.13))

мениной работе скважин напор h_1 при удалении от первой скважины вначале растет, но с некоторых пор начинает даже убывать под влиянием понижения в соседнем горизонте; при дальнейшем удалении от первой, а также от второй скважин процесс возрастания h_1 восстанавливается.

Заметим, что при определении коэффициентов в уравнениях для напоров в качестве граничных условий предлагалось задавать уровни на внешних стенах скважин; для их измерения надо иметь затрубные скважины. Более надежным является задание дебитов скважин; такой способ определения коэффициентов применялся, например в [10], а также в задаче, описанной в § 12. В нашей задаче выражение C через дебиты можно найти, например, при помощи соотношений (15.14), из которых $C=Q/2\pi\beta$. При этом напоры на внешних стенах скважин определяются из соответствующих уравнений, поскольку коэффициенты уже будут найдены.

Г л а в а V

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРИТОКА К НЕСОВЕРШЕННЫМ ДРЕНАМ И СКВАЖИНАМ

Как правило, фильтры в скважинах устанавливаются не на всю мощность водопроницаемого горизонта, а на некоторую ее часть. Такая скважина называется *несовершенной по степени вскрытия пласта*. Кроме того, обычно имеет место *несовершенство по характеру вскрытия*: водоприемная часть скважины обсаживается перфорированной трубой (фильтром) или же отверстия устраиваются в предварительно оциментированной стенке водоприемной части. Оба фактора приводят к уменьшению дебита несовершенной скважины по сравнению с дебитом совершенной того же диаметра и при одинаковом понижении.

Очевидно, в случае несовершенных скважин гидравлическая постановка задачи для всей области оказывается неприемлемой, ибо вертикальные составляющие фильтрационных скоростей вблизи скважины играют существенную роль. Добавление вертикальной компоненты усложняет уравнения движения; так, для осесимметричного притока к одной скважине вместо обыкновенного дифференциального уравнения имеем теперь для напора следующее дифференциальное уравнение в частных производных:

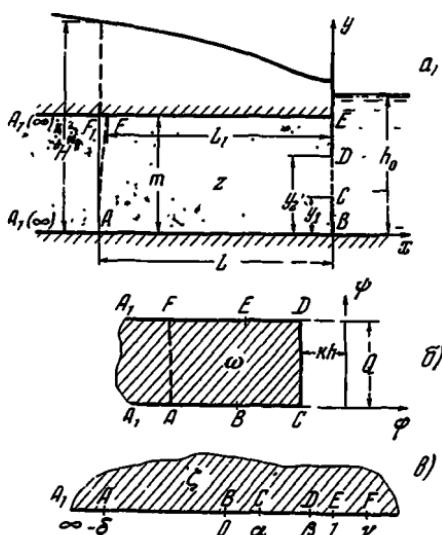
$$\Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (a)$$

Таким образом, задача сводится к интегрированию уравнения Лапласа (a) при граничных условиях, определяемых физической постановкой задачи. Непосредственное решение уравнения (a), включая численные расчеты по формулам, встречает большинство трудности, особенно для потока со свободной поверхностью. Поэтому в качестве первого приближения к решению этой проблемы были рассмотрены [27–29] некоторые ее плоские аналоги — задачи о притоке к несовершенной прямолинейной галерее.

§ 16. Приток к несовершенной галерее в напорном пласте

На фиг. 30, *a* изображено одно из сечений напорного потока к несовершенной галерее *CD*, перпендикулярной к плоскости чертежа. Участки *BC* и *DE* суть непроницаемые стенки (линии тока), а участок *CD* — водоприемная часть (эквидиотенциаль). Вдоль *CD* напор равен *h₀*. Кровля *A₁E* и подошва *A₂B* пласти предполагаются непроницаемыми. Вблизи галерии напор существенно зависит от вертикальной координаты, но по мере уда-

ления от галереи эквипотенциали все больше приближаются к вертикальным линиям; следовательно, можно считать, что, начиная с некоторого расстояния, напор является функцией только координаты x и возрастает по линейному закону. Последнее утверждение следует из того, что через каждое вертикальное сечение (единичной ширины) в единицу времени протекает одинаковое количество жидкости (условие неразрывности потока). Пользуясь законом Дарси и принимая вертикальные сечения за эквипотенциали (на значительном удалении от галерей), мы можем записать это так:



Фиг. 30

ся поэтому не вполне естественным: напор в действительности ограничен. Однако математическое решение при такой постановке упрощается по сравнению со случаем ограниченного пласта с прямолинейным контуром питания ввиду уменьшения числа особых точек, а указанную неувязку с физической картиной можно затем устранить, ограничив область потока некоторой эквипотенциалью, получаемой из решения.

Ранее В. Н. Николаевским была рассмотрена [30] аналогичная задача для ограниченного пласта при симметричном расположении фильтра относительно средней линии пласта; решение в этом случае выражается через эллиптические интегралы первого рода.

В результате конформного отображения областей потока z и комплексного потенциала ω (фиг. 30, б) на верхнюю полуплоскость ζ (фиг. 30, в) по формуле Кристоффеля — Шварца для z и ω получаются следующие выражения:

$$z = i \frac{2m}{\pi} \operatorname{arcsin} V \bar{\zeta} \quad (16.3)$$

$$\omega = -\frac{2Q}{\pi} \ln \frac{V \bar{\zeta} - \beta + V \bar{\zeta} - \alpha}{\sqrt{\beta - \alpha}} - kh_0 + iQ \quad (16.4)$$

Интегрируя (16.1), получим

$$km \cdot 1 \frac{dh}{dx} = Q = \text{const} \quad (16.1)$$

Рассмотрение потока в неограниченной области является

Выражение (16.3) удобно для участка границы BE ($0 \leq \zeta \leq 1$), а выражение (16.4) — для участка DF ($\beta \leq \zeta < \infty$); для остальных участков границы эти равенства нужно преобразовать. Из (16.3) можно выразить параметры α и β — координаты точек C и D на плоскости ζ — через координаты y_1 и y_2 этих точек на плоскости z :

$$\alpha = \sin^2 \frac{\pi y_1}{2m}, \quad \beta = \sin^2 \frac{\pi y_2}{2m} \quad (16.5)$$

Формула (16.4) для ω содержит Q -дебит галереи, который предстоит определить. По этой формуле можно проследить за изменением напора h вдоль кровли ($1 \leq \zeta < \infty$):

$$h = h_0 + \frac{2Q}{\pi k} \ln \frac{\sqrt{\beta - \bar{\beta}} + \sqrt{\alpha - \bar{\alpha}}}{\sqrt{\beta - \alpha}} \quad (16.6)$$

Для подошвы A_1B ($-\infty < \zeta \leq 0$) уравнение (16.4) можно преобразовать к виду

$$\omega = -kh = -\frac{2Q}{\pi} \ln \frac{\sqrt{\beta - \zeta} + \sqrt{\alpha - \zeta}}{\sqrt{\beta - \alpha}} - kh_0$$

Отсюда находим

$$h = h_0 + \frac{2Q}{\pi k} \ln \frac{\sqrt{\beta - \zeta} + \sqrt{\alpha - \zeta}}{\sqrt{\beta - \alpha}} \quad (16.7)$$

Из (16.3) для подошвы и кровли получаем соответственно

$$\zeta = -\operatorname{sh}^2 \frac{\pi x}{2m} \quad (16.8)$$

$$\zeta = \operatorname{ch}^2 \frac{\pi x}{2m} \quad (16.9)$$

Возьмем на подошве и кровле точки A и F_1 , находящиеся на одинаковом расстоянии L от прямой BE . Положение соответствующих им точек A и F_1 на полуплоскости ζ определяется соответственно из соотношений (16.8) и (16.9)

$$\zeta = -\delta = -\operatorname{sh}^2 \frac{\pi L}{2m} \quad (16.10)$$

$$\zeta = \gamma = \operatorname{ch}^2 \frac{\pi L}{2m} \quad (16.11)$$

Для достаточно больших L можно считать

$$\gamma \approx \delta \approx \exp \frac{\pi L}{m} \quad (16.12)$$

Вместе с тем для больших L параметры γ и δ , как это видно из (16.12), велики по сравнению с α и β ($0 < \alpha < \beta < 1$). Учитывая это, найдем по формулам (16.7) и (16.6) выражения для напора h соответственно в точках A и F_1 :

$$h_A = h_0 + \frac{2Q}{\pi k} \ln \frac{\sqrt{\beta - \gamma} + \sqrt{\alpha - \delta}}{\sqrt{\beta - \alpha}} \approx h_0 + \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{4\delta}{\beta - \alpha} \approx h_0 + \frac{Q}{\pi k} \left[\frac{\pi L}{m} - \ln(\beta - \alpha) \right] \quad (16.13)$$

$$h_{F_1} = h_0 + \frac{2Q}{\pi k} \ln \frac{\sqrt{\gamma - \beta} + \sqrt{\gamma - \alpha}}{\sqrt{\beta - \alpha}} \approx h_0 + \frac{Q}{\pi k} \left[\frac{\pi L}{m} - \ln(\beta - \alpha) \right] \quad (16.14)$$

Мы видим, что $h_A \approx h_{F_1}$. Это значит, что отрезок вертикальной прямой $x = -L$, $0 \leq y \leq T$, достаточно удаленный от галереи, можно принять за эквипотенциаль и рассматривать поток в ограниченной области, заключенной между этим отрезком и галереей. Кроме того, как видно из (16.13) и (16.14), напор вдоль кровли и подошвы при больших L изменяется почти линейно (ср. с (16.2))

$$h_A \approx h_{F_1} \approx h_0 + \frac{Q}{km} L - \frac{Q}{\pi k} \ln(\beta - \alpha)$$

Если принять эту зависимость, то для дебита получается следующая формула:

$$Q = \frac{km(H - h_0)}{L + C}, \quad C = \frac{m}{\pi} \ln \frac{1}{\beta - \alpha} = -\frac{m}{\pi} \ln \left(\sin^2 \frac{\pi y_2}{2m} - \sin^2 \frac{\pi y_1}{2m} \right) \quad (16.15)$$

Здесь H — напор при $x = -L$.

Величину C можно рассматривать как меру дополнительного фильтрационного сопротивления, обусловленного несовершенством галереи. Согласно (16.15), это сопротивление учитывается тем, что в формуле для дебита длина L пути фильтрации увеличивается на C . В частном случае (при $y_1=0$, $y_2=m$) галерея является совершенной, поток одномерным, при этом $C=0$ и дебит

бит галерен определяется формулой

$$Q = km(H - h_0)/L$$

Распределение напора вдоль верхней стенки DE ($\beta \leq \zeta \leq 1$) определяется уравнением (16.6), а вдоль нижней стенки BC ($0 \leq \zeta \leq a$) — уравнением (16.7); так как на этих участках $0 \leq \zeta \leq 1$, то согласно (16.3) имеем

$$\zeta = \sin^2 \frac{\pi y}{2m}$$

С учетом этого равенства, а также соотношений (16.5) получим:

вдоль DE ($y_2 \leq y \leq m$)

$$\bar{h} = \frac{h - h_0}{2Q/\pi k} = \ln \frac{\sqrt{\sin^2 \eta - \sin^2 \eta_2} + \sqrt{\sin^2 \eta - \sin^2 \eta_1}}{\sqrt{\sin^2 \eta_2 - \sin^2 \eta_1}} \quad (16.16)$$

$$\eta = \frac{\pi y}{2m}, \quad \eta_1 = \frac{\pi y_1}{2m}, \quad \eta_2 = \frac{\pi y_2}{2m}$$

вдоль BC ($0 < y < y_1$)

$$\bar{h} = \ln \frac{\sqrt{\sin^2 \eta_2 - \sin^2 \eta} + \sqrt{\sin^2 \eta_1 - \sin^2 \eta}}{\sqrt{\sin^2 \eta_2 - \sin^2 \eta_1}} \quad (16.17)$$

Полагая в (16.16) $y = m$ ($\eta = 1/2\pi$) и учитывая (16.15), найдем после элементарных преобразований следующее выражение для напора H_0 в точке E :

$$\frac{H_0 - h_0}{H - h_0} = \frac{\ln(\cos \eta_1 + \cos \eta_2) - \ln(\cos \eta_1 - \cos \eta_2)}{\pi L/m - \ln(\cos^2 \eta_1 - \cos^2 \eta_2)} \quad (16.18)$$

Аналогично из (16.17) получим формулу для напора H_{00} в точке B ($y = 0$).

$$\frac{H_{00} - h_0}{H - h_0} = \frac{\ln(\sin \eta_2 + \sin \eta_1) - \ln(\sin \eta_2 - \sin \eta_1)}{\pi L/m - \ln(\sin^2 \eta_2 - \sin^2 \eta_1)} \quad (16.19)$$

Равенства (16.18) и (16.19), будучи, как и выражение (16.15) для дебита, приближенными, обеспечивают хорошую точность при достаточно больших (порядка 4—5) значениях величины L/m .

В результате вычислений, выполненных Л. М. Плещаковой по формулам (16.16) и (16.17), построены графики безразмерного напора

$$\bar{h} = \frac{h - h_0}{2Q/\pi k}$$

вдоль верхней и нижней стенок галереи при различных значениях параметров η_1 и η_2 , т. е. при различных размерах и положениях водоприемной части (фиг. 31). Каждый график построен при фиксированном значении $y_1 = y_1/m$, т. е. при определенном положении нижнего конца фильтра; при этом параметру $y_2 = y_2/m$ придавалась ряд значений через 0.1 и по формулам (16.16) и (16.17) подсчитывалась величина \bar{h} при изменении y соответственно вдоль верхней и нижней стенок галерен. Далее, так как при двух положениях фильтра, симметричных относительно средней линии пласта, картина распределения напора также симметрична, то приведенные графики можно использовать для всех случаев, когда $y_1 = 0; 0.1; 0.2; \dots; 0.9$; $y_2 = 0.1; 0.2; \dots; 1.0$, причем $y_2 > y_1$. Так, например, при $y_1 = 0.2$, $y_2 = 0.9$ можно использовать «симметричный» вариант $y_1 = 0.1$, $y_2 = 0.8$, имеющийся на графике фиг. 31, б; случай $y_1 = 0.6$, $y_2 = 1.0$ соответствует на графике фиг. 31, а случаю $y_1 = 0$, $y_2 = 0.4$ и т. д. Аналогичные замечания можно сделать и в отношении табл. 12, в которую введены значения приведенного фильтрационного сопротивления $\bar{C} = C/m$, вычисленные Л. М. Плещаковой по формуле (16.15).

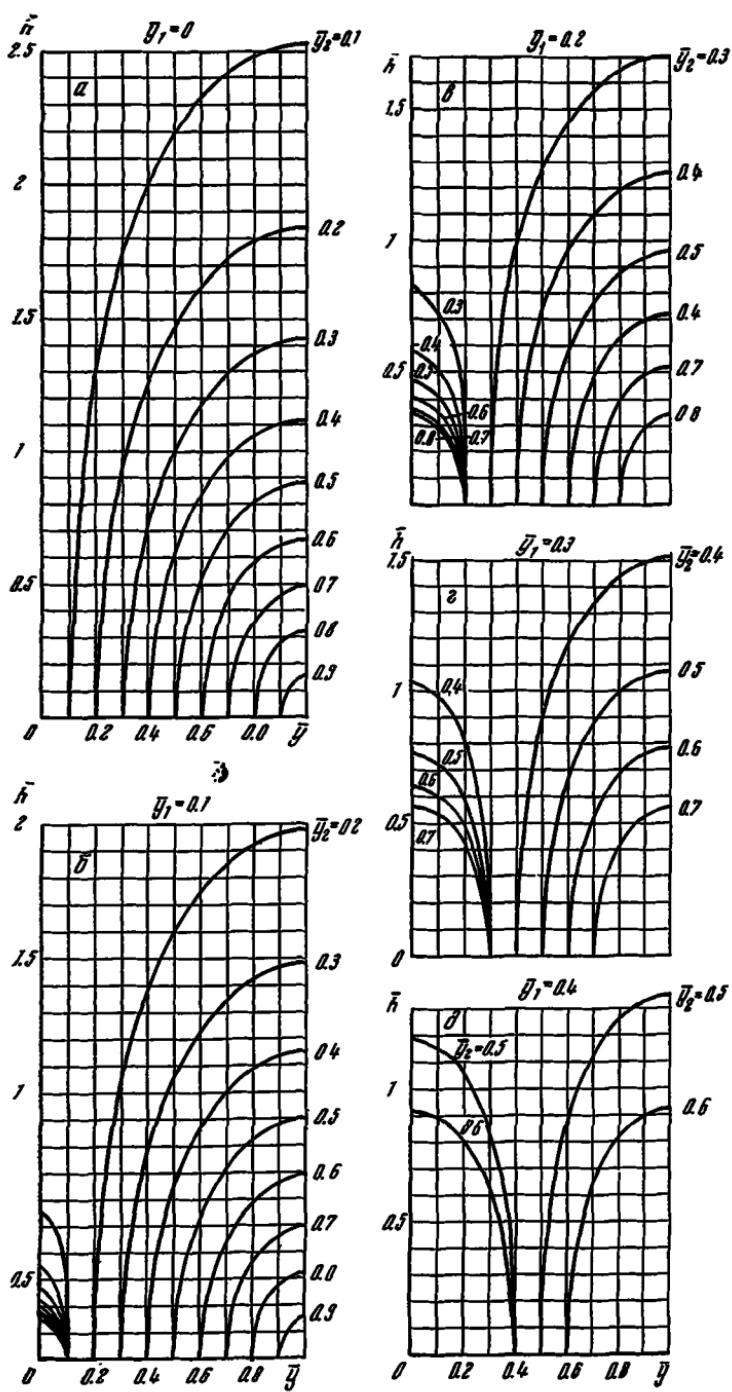
Таблица 12

Приведенные фильтрационные сопротивления $\bar{C} = C/m$ (формула (16.15))

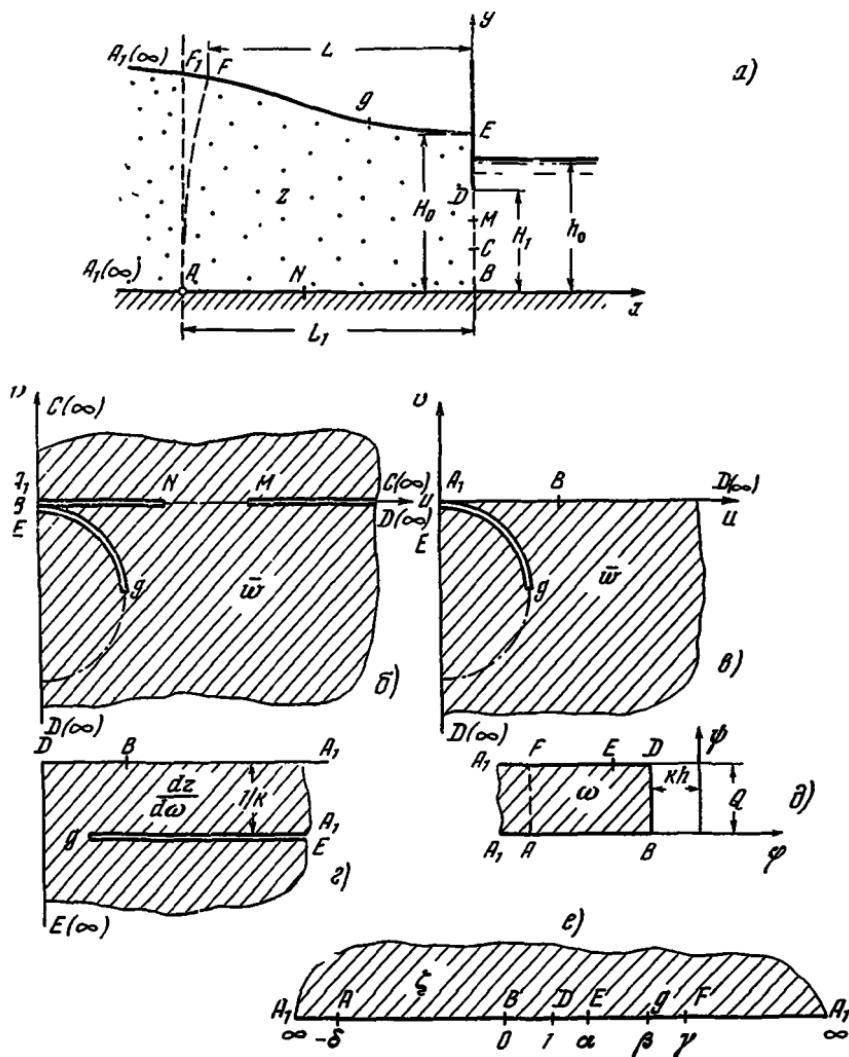
\bar{y}_2	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
\bar{y}_1	0.1806	0.7477	0.5026	0.3380	0.2206	0.1253	0.0732	0.0318	0.0076
0.0	0.8419	0.5430	0.3615	0.2365	0.1473	0.0834	0.0407	0.0159	
0.1		0.7009	0.4411	0.2881	0.1856	0.1143	0.0672		
0.2			0.6267	0.3899	0.2566	0.1690			
0.3				0.5949	0.3746				
0.4									

§ 17. Приток к несовершенной галерее в безнапорном пласте

Вместо кровли для напорного случая имеем теперь в качестве верхней границы области фильтрации свободную поверхность (фиг. 32, а), положение которой неизвестно заранее. Как и в предыдущей задаче, решение будем искать сначала для неограниченной области фильтрации. Границы годографа скорости w (фиг. 32, б) суть отрезки прямых и дуги окружностей, проходящих через начало координат. Следовательно, инверсия годографа относительно окружности с центром в начале координат даст область, ограниченную только отрезками прямых. Другой такой областью, а именно полуполосой, будет область комплексного потенциала ω . Отображая обе эти области на полуплоскость,



Фиг. 31. Графики распределения напора на стенах галереи при различных положениях водоприемной части (формулы (16.16) и (16.17))



Фиг. 32

получаем решение в интегралах. Однако при наличии нижней стенки область годографа (а значит, и область инверсии годографа) имеет восемь угловых точек, и решение из-за большого числа неизвестных параметров получается очень громоздким. Поэтому ограничимся случаем, когда $y_1=0$, т. е. фильтр примыкает к подошве. Точка C на области z совпадает тогда с точкой B . Число особых точек уменьшается до пяти: A_1, B, D, E, G .

Отображая область комплексного потенциала ω (фиг. 32, δ) на верхнюю полуплоскость ζ (фиг. 32, e), получаем

$$\omega = -M \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{V\zeta(1-\zeta)} - kh_0 = i \frac{2Q}{\pi} \operatorname{arc sin} \sqrt{\zeta} - kh_0 \quad (17.1)$$

Это выражение удобно для участка BD ($0 \leq \zeta \leq 1$). При $\zeta > 1$ преобразуем его, учитывая, что

$$\sqrt{1-\zeta} = -i\sqrt{\zeta-1}$$

$$\begin{aligned} \omega = i \frac{Q}{\pi} \int_0^1 \frac{d\zeta}{V\zeta(1-\zeta)} - kh_0 &= -\frac{Q}{\pi} \int_1^\zeta \frac{d\zeta}{V\zeta(\zeta-1)} + \\ + i \frac{Q}{\pi} \int_0^1 \frac{d\zeta}{V\zeta(1-\zeta)} - kh_0 &= -\frac{2Q}{\pi} \operatorname{ar ch} \sqrt{\zeta} - kh_0 + iQ \end{aligned} \quad (17.2)$$

Отсюда, полагая $\zeta = a$, $\omega = -kH_0 + iQ$ (H_0 — неизвестное значение ординаты свободной поверхности в точке E), имеем

$$H_0 = h_0 + \frac{2Q}{\pi k} \ln (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha-1}) \quad (17.3)$$

$$\alpha = \operatorname{ch}^2 \frac{\pi k (H_0 - h_0)}{2Q} \quad (17.4)$$

Далее отобразим на полуплоскость ζ область инверсии годографа скорости относительно окружности единичного радиуса с центром в начале координат (фиг. 32, e , g):

$$\begin{aligned} \frac{1}{w} = \frac{dz}{d\omega} &= N \int_\zeta^1 \frac{(\beta-\zeta) d\zeta}{V\zeta(1-\zeta)(\alpha-\zeta)^{1/2}} = N \left[\int_\zeta^1 \frac{d\zeta}{V(1-\zeta)(\alpha-\zeta)} + \right. \\ \left. + (\beta-\alpha) \int_\zeta^1 \frac{d\zeta}{V\zeta(1-\zeta)(\alpha-\zeta)^{1/2}} \right] = 2N \left(\ln \frac{\sqrt{\alpha-\zeta} + \sqrt{1-\zeta}}{\sqrt{\alpha-1}} + \frac{\beta-\alpha}{\alpha-1} \sqrt{\frac{1-\zeta}{\alpha-\zeta}} \right) \end{aligned} \quad (17.5)$$

Эта запись удобна для $-\infty < \zeta \leq 1$. Для определения постоянной N обойдем точки $\zeta = a$ и $\zeta = 1$ в отрицательном направлении,

тогда для $\alpha \leq \zeta < \infty$ (свободная поверхность EF) будем иметь

$$\sqrt{1-\zeta} = -i\sqrt{\zeta-1}, \quad \sqrt{\alpha-\zeta} = -i\sqrt{\zeta-\alpha}$$

$$\frac{dz}{d\omega} = 2N \left[\ln \frac{\sqrt{\zeta-\alpha} + \sqrt{\zeta-1}}{\sqrt{\alpha-1}} + \frac{\beta-\alpha}{\alpha-1} \sqrt{\frac{\zeta-1}{\zeta-\alpha}} \right] - i\pi N \quad (17.6)$$

Формулу (17.6) можно рассматривать и как результат перехода с участка A_1B непосредственно на участок A_1E путем обхода точки $\zeta = \infty$. Так как в окрестности этой точки и при одинаковых абсолютных величинах ζ выражения, стоящие в правых частях формул (17.5) и (17.6), имеют одинаковые действительные части, то при указанном обходе правая часть равенства (17.5) получает приращение $-i\pi N$, а левая, как это видно из фиг. 32, z , приращение $-i/k$, т. е. имеем

$$-i\pi N = -i/k, \quad \text{или} \quad N = 1/\pi k \quad (17.7)$$

Для свободной поверхности из формулы (17.2) получаем

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = -\frac{Q}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)}} \quad (17.8)$$

Перемножая (17.6) и (17.8), найдем, учитывая (17.7):

$$\frac{dz}{d\zeta} = -\frac{2Q}{\pi^2 k} \left[\frac{1}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)}} \ln \frac{\sqrt{\zeta-\alpha} + \sqrt{\zeta-1}}{\sqrt{\alpha-1}} + \frac{\beta-\alpha}{\alpha-1} \frac{1}{\sqrt{\zeta(\zeta-\alpha)}} \right] + i \frac{Q}{\pi k} \frac{1}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)}} \quad (17.9)$$

Интегрируя (17.9) с учетом (17.3) и разделяя затем действительную и мнимую части, получаем уравнение свободной поверхности в параметрической форме

$$z = -\frac{2Q}{\pi^2 k} \left[\int_a^\zeta \frac{\ln \frac{\sqrt{\zeta-\alpha} + \sqrt{\zeta-1}}{\sqrt{\alpha-1}}}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)}} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)}} + A \ln \frac{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\zeta-\alpha}}{\sqrt{\alpha}} \right] + i \left[\frac{2Q}{\pi k} \ln \left(\sqrt{\zeta} + \sqrt{\zeta-1} \right) + h_0 \right] \quad (17.10)$$

$$x = -\frac{2Q}{\pi^2 k} \left[\int_a^\zeta \frac{\ln \frac{\sqrt{\zeta-\alpha} + \sqrt{\zeta-1}}{\sqrt{\alpha-1}}}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)}} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)}} + A \ln \frac{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\zeta-\alpha}}{\sqrt{\alpha}} \right] \quad (17.11)$$

$$y = \frac{2Q}{\pi k} \ln (\sqrt{\xi} + \sqrt{\xi - 1}) + h_0 \quad (\alpha \leq \xi < \infty)$$

$$A = 2 \frac{\beta - \alpha}{\alpha - 1}$$

Предположим, что на некотором расстоянии L от галереи найдено положение свободной поверхности: $h=H$, т. е. известно значение $\omega=-kH+iQ$ в точке F (фиг. 32, а). По формуле (17.2) найдем соответствующее значение $\xi=\gamma$:

$$\gamma = \operatorname{ch}^2 \frac{\pi k (H - h_0)}{2Q} \quad (17.12)$$

Положив в первом уравнении (17.11) $x=-L$, $\xi=\gamma$, получим

$$L = \frac{2Q}{\pi^2 k} \left[\int_{\alpha}^{\gamma} \ln \frac{\sqrt{\xi - \alpha} + \sqrt{\xi - 1}}{\sqrt{\alpha - 1}} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(\xi - 1)}} + A \ln \frac{\sqrt{\gamma} + \sqrt{\gamma - \alpha}}{\sqrt{\alpha}} \right] \quad (17.13)$$

Преобразуем равенство (17.10) для участка BD ($1 \leq \xi \leq \alpha$), на котором

$$\sqrt{\xi - \alpha} = i\sqrt{\alpha - \xi}$$

$$\ln \frac{\sqrt{\xi} + i\sqrt{\alpha - \xi}}{\sqrt{\alpha}} = i \operatorname{arc tg} \sqrt{\frac{\alpha - \xi}{\xi}} = i \operatorname{arc cos} \sqrt{\frac{\xi}{\alpha}}$$

$$\ln \frac{\sqrt{\xi - 1} + i\sqrt{\alpha - \xi}}{\sqrt{\alpha - 1}} = i \operatorname{arc tg} \sqrt{\frac{\alpha - \xi}{\xi - 1}} = i \operatorname{arc sin} \sqrt{\frac{\alpha - \xi}{\alpha - 1}} \quad (17.14)$$

Следовательно,

$$z = iy = i \frac{2Q}{\pi^2 k} \left[\int_{\xi}^{\alpha} \operatorname{arc sin} \sqrt{\frac{\alpha - \xi}{\alpha - 1}} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(\xi - 1)}} - A \operatorname{arc cos} \sqrt{\frac{\xi}{\alpha}} - \pi \ln (\sqrt{\xi} + \sqrt{\xi - 1}) \right] + ih_0$$

Используя соответствие $z=iH$, $\zeta=1$, получаем

$$h_0 - H_1 = \frac{2Q}{\pi^2 k} \left[A \operatorname{arc} \cos \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \int_1^\alpha \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{\alpha-\zeta}{\alpha-1}} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)}} \right] \quad (17.15)$$

Перейдем далее на участок BD ($0 \leq \zeta \leq 1$). Для этого участка получено равенство (17.5)

$$\frac{dz}{d\omega} = \frac{2}{\pi k} \left(\ln \frac{\sqrt{\alpha-\zeta} + \sqrt{1-\zeta}}{\sqrt{\alpha-1}} + \frac{A}{2} \sqrt{\frac{1-\zeta}{\alpha-\zeta}} \right)$$

и, кроме того, согласно (17.1)

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = i \frac{Q}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)}}$$

Следовательно,

$$\frac{dz}{d\zeta} = i \frac{2Q}{\pi^2 k} \left[\ln \frac{\sqrt{\alpha-\zeta} + \sqrt{1-\zeta}}{\sqrt{\alpha-1}} \frac{1}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)}} + \frac{A}{2} \frac{1}{\sqrt{\zeta(\alpha-\zeta)}} \right] \quad (17.16)$$

Интегрируя это уравнение по ζ от 0 до 1 и по z от 0 до iH_1 , найдем

$$H_1 = \frac{2Q}{\pi^2 k} \left[\int_0^1 \ln \frac{\sqrt{\alpha-\zeta} + \sqrt{1-\zeta}}{\sqrt{\alpha-1}} \frac{1}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)}} + A \operatorname{arc} \sin \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right] \quad (17.17)$$

Перейдем, наконец, на участок A_1B ($-\infty < \zeta < 0$), где $\sqrt{\zeta} = i\sqrt{-\zeta}$. С учетом этого (17.16) преобразуем так:

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{dx}{d\zeta} = \frac{2Q}{\pi^2 k} \left[\ln \frac{\sqrt{\alpha-\zeta} + \sqrt{1-\zeta}}{\sqrt{\alpha-1}} \frac{1}{\sqrt{-\zeta(1-\zeta)}} + \frac{A}{2} \frac{1}{\sqrt{-\zeta(\alpha-\zeta)}} \right] \quad (17.18)$$

Кроме того, на A_1B имеет место равенство

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = \frac{Q}{\pi} \frac{1}{\sqrt{-\zeta(1-\zeta)}}$$

Откуда

$$\omega = -\frac{2Q}{\pi} \ln (\sqrt{-\zeta} + \sqrt{-\zeta+1}) - kh_0, \quad \zeta = -\operatorname{sh}^2 \frac{\pi k (h-h_0)}{2Q}$$

Для точки A , в которой $h = H$, имеем

$$\zeta = -\delta = -\operatorname{sh}^2 \frac{\pi k (H - h_0)}{2Q} \quad (17.19)$$

Сравнивая (17.19) и (17.12), заключаем, что можно считать

$$\gamma \approx \delta \text{ при } \frac{\pi k (H - h_0)}{2Q} > 5$$

Проинтегрируем (17.18), делая замену $-\zeta = \sigma$

$$L_1 = \frac{2Q}{\pi^2 k} \left[\int_0^\delta \ln \frac{\sqrt{\alpha + \sigma} + \sqrt{1 + \sigma}}{\sqrt{\alpha - 1}} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma(1 + \sigma)}} + A \ln \frac{\sqrt{\delta} + \sqrt{\delta + \alpha}}{\sqrt{\alpha}} \right] \quad (17.20)$$

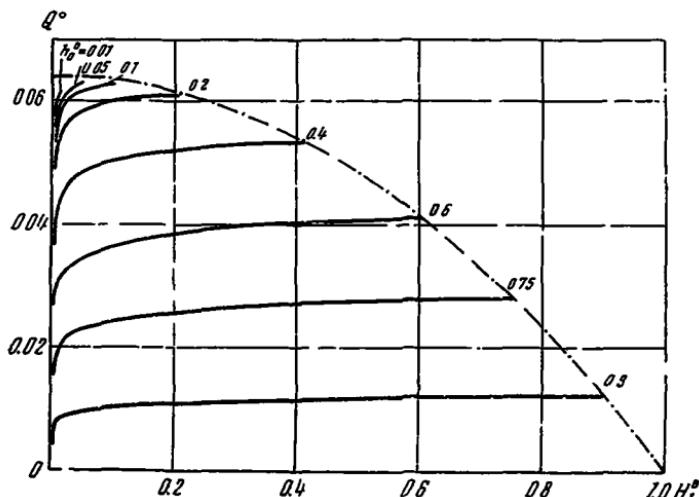
Совместно с В. А. Постновым была составлена программа расчетов на ЭВМ по полученным формулам. Исходными данными при вычислениях являются следующие величины: уровень h_0 в галерее, длина H_1 ее водоприемной части и ордината H свободной поверхности на расстоянии L от галереи по горизонтали. При задании этих параметров по программе определяются координаты ряда точек свободной поверхности, в частности ордината H_0 , точка выхода ее на непроницаемый экран, а также величина безразмерного дебита галереи:

$$Q^o = 2Q/\pi k H$$

Основным в программе выражением является выражение (17.13) для L , которое используется как уравнение для определения параметра α . Правую часть равенства (17.13) действительно можно рассматривать как функцию α , поскольку все остальные входящие в нее величины (Q , A и γ) выражаются через α посредством соотношений (17.12), (17.15) и (17.17). Координаты точек свободной поверхности определяются после вычисления α по уравнениям (17.11).

Наибольший интерес представляют зависимости дебита галереи и ординаты H_0 от степени заглубления экрана, т. е. от величины H_1 , а также от уровня h_0 в галерее при фиксированных параметрах L и H . Эти зависимости представлены графически на фиг. 33 и 34 для случая $L^o = L/H = 5$. Каждая кривая отвечает некоторой величине приведенного уровня $h_0^o = h_0/H$ в галерее; при фиксированном h_0^o параметру H_1^o придавался ряд значений в интервале $(0, h_0^o)$.

Как видно из графиков, заглубление экрана (уменьшение H_1^o) сопровождается убыванием дебита галереи и подъемом свободной поверхности, что, в частности, выражается в увеличении H_0^o ; оба эти обстоятельства характеризуют усиление подпора. При $H_1^o = 0$, т. е. при полном закрытии галереи, дебит ее $Q^o = 0$, однако убывание дебита с заглублением экрана происходит довольно медленно, и величина его остается ощутимой даже при очень малых значениях H_1^o . Так например, для случая $h_0^o = 0.9$ убывание H_1^o от 0.9 до 10^{-4} вызывает лишь двукратное уменьшение величины Q^o : от 0.0121 до 0.0060. При меньших же значениях h_0^o расширяется диапазон изменения величины Q^o , поскольку верхней границей ее значений является Q_0^o — безразмерный дебит галереи при отсут-



Фиг. 33. Зависимость безразмерного дебита галерен от длины водоприемной части галерен при различных уровнях в пойме

ствии перемычки, определяемый согласно формуле Дюпон:

$$Q_0^o = \frac{1 - (h_0^o)^2}{\pi L} \quad (17.21)$$

Дуга параболы — штрих-пунктирная линия на фиг. 33 — выражает зависимость (17.21) величины Q_0^o от h_0^o ; при этом на графике вдоль оси абсцисс должна откладываться величина h_0^o . При $H_1^o \approx h^o$ выполняются приближенные равенства $Q^o \approx Q_0^o$, $H_0^o \approx h_0^o$ и только для малых h_0^o они уступают место неравенствам $Q^o < Q_0^o$, $H_0^o > h_0^o$ даже при $H_1^o = h_0^o$ (случай $H_1^o > h_0^o$ выходит за рамки рассматриваемой схемы).

Гораздо ярче проявляется зависимость дебита от уровня в галерее. Например, в случае $H_1^o = 0.1$ уменьшение h_0^o от 0.9 до 0.1 влечет возрастание Q^o от 0.0100 до 0.0626, т. е. более чем в 6 раз.

Отмеченные закономерности приводят к заключению о том, что дебит галерей зависит от величины понижения в большей мере, чем от степени несовершенства галерей.

На фиг. 35 построены кривые свободной поверхности при $L^o = 2.5$, $h_0^o = 0.4$; для верхней кривой параметр H_1^o принимает значение 0.1, для нижней — 0.4. В случае $H_1^o = 0.01$ влияние подпора отчетливо проявляется в форме кривой, выходящей на экран под прямым углом. На некотором расстоянии от галерен кривая имеет точку перегиба; при дальнейшем удалении свободная поверхность постепенно выравнивается. В случае же $H_1^o = 0.4$, когда подпор, создаваемый заслонкой, весьма мал, свободная поверхность не только располагается ниже

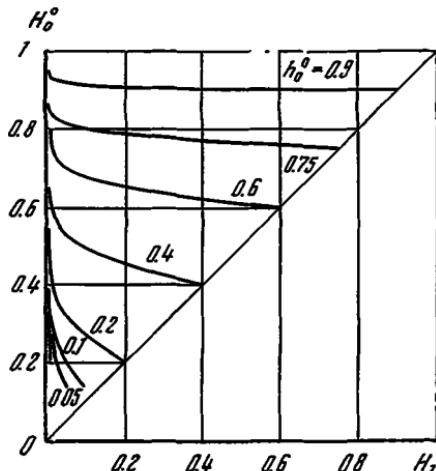
поверхности при $H_1^o = 0.01$, но и отличается от последней качественно: вблизи галерен построенная кривая напоминает по форме кривую свободной поверхности при отсутствии экрана, когда она выходит на промежуток высачивания, касаясь его. В данном же случае кривая свободной поверхности, как и при $H_1^o = 0.01$, образует с экраном прямой угол, но этот факт на графике несколько завуалирован ввиду наличия участка кругого спада кривой в непосредственной близости от галерен. Точка перегиба свободной поверхности при $H_1^o = 0.4$ близка к точке выхода поверхности на экран. Это обстоятельство усматривается из последнего равенства (17.11), которое перепишем в виде

$$\beta - \alpha = 1/A (\alpha - 1)$$

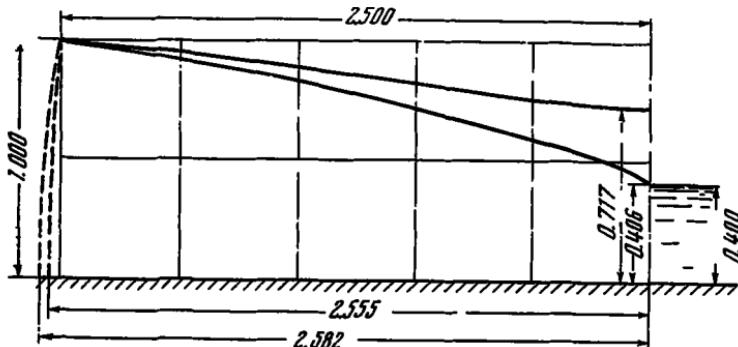
При $H_1^o \approx h_0^o$ параметр α близок к единице, величина A принимает значения, равные нескольким десяткам или сотням, а в целом величина $\beta - \alpha$ оказывается при вычислениях малой. Это обуславливает близость точек

E и G , поскольку параметры α и β есть аффинсы этих точек на плоскости ζ (фиг. 32, e).

При расчётах для каждого варианта по формуле (17.20) определяется величина L_1 — координата точки A на подошве пласта, напор в которой равен ординате точки F свободной поверхности; иными словами, вычисляются координаты точек выхода на подошву пласта эквипотенциалей, проходящих через точку (L, H) . На фиг. 35 эти эквипотенциали обозначены пунктирны-



Фиг. 34. Зависимость ординаты точки выхода свободной поверхности на экран от длины водоприемной части галереи при различных уровнях в цей



Фиг. 35. Графики свободной поверхности при $L^o = 2.5$, $h_0^o = 0.4$; для верхней кривой $H_1^o = 0.01$, для нижней — $H_1^o = 0.4$

ми линиями. Напомним, что в случаях, изображенных на фиг. 35, было принято $L^o = 2.5$; при этом для $H_1^o = 0.4$ и $H_1^o = 0.01$ получены соответственно значения $L_1^o = -2.582$ и 2.555 . Для других же вариантов, по которым построены графики на фиг. 33 и 34 и для которых принималось $L^o = 5$, разность $L_1^o - L^o$ достигает величины 0.01 ± 0.04 . Таким образом, на достаточном удалении от галереи, практически

Таблица 13

Значения H_0 (см)

H_1 см	6	8	9,5	11
h_0 см				
7	—	17.1	18.1	19.1
6	19.0	20.2	20.7	21.2
5	19.85	20.8	21.2	22.2

уже при $L^o = 3 \div 5$, имеет место приближенное равенство $L_1 \approx L$, которое выполняется тем точнее, чем больше h_0 при данном H_1^o или чем меньше H_1^o при фиксированном h_0 . Это значит, что на указанном расстоянии эквипотенциали мало отличаются от отсаков вертикальных прямых, и если ограничить область фильтрации одной из таких эквипотенциалей, то рассматриваемая задача будет близка к задаче о фильтрации через земляную перемычку соответствующей ширины с вертикальными откосами при наличии на низовом откосе пепроницаемого экрана. Решение последней задачи в гидродинамической постановке приведено в статье [28]. Из-за появления дополнительной угловой точки решение получается громоздким. При некоторых упрощающих предположениях были сделаны вычисления и построены графики для ordinаты H_0 .

Эта задача была также смоделирована в щелевом лотке [29]. При этом исследовалось изменение H_0 в зависимости от параметров H_1 и h_0 (в обозначениях настоящего параграфа) при постоянном значении $H = 28$ см; длина лотка $L = 63$ см. В результате опыта было обнаружено увеличение H_0 с уменьшением H_1 при фиксированном h_0 , а также с возрастанием h_0 при неизменном H_1 . Эти закономерности иллюстрируются табл. 13, составленной на основе таблицы из статьи [29].

§ 18. О дебите несовершенной скважины

Рассмотрим скважину, несовершенную по степени вскрытия пласта. В случае потока со свободной поверхностью в пласте с непроницаемым водоупором для дебита совершенной скважины Q_0 имеем известную формулу Дюпюи

$$Q_0 = \frac{\pi k (H^o - h_0^o)}{\ln (R/r_0)} \quad (18.1)$$

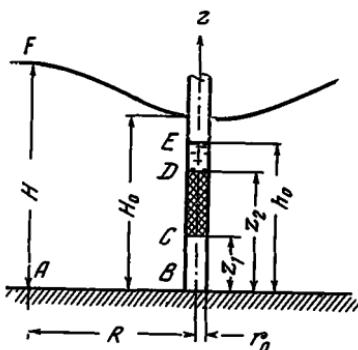
Дебит Q несовершенной скважины того же радиуса и при том же понижении будет меньшим Q_0 . В статье [31] для величины Q_0 получены оценки в виде неравенств. Рассматриваемая схема при-

года изображена на фиг. 36. Дебит скважины можно определить как расход через боковую поверхность цилиндра радиусом r

$$Q = 2\pi k \int_0^{Z(r)} r \frac{\partial h(r, z)}{\partial r} dz = 2\pi k \int_0^{Z(r)} \frac{\partial h(r, z)}{\partial \ln r} dz = 2\pi k \left[\frac{dI(r, Z)}{d \ln r} - Z \frac{dz}{d \ln r} \right]$$

$$I(r, Z) = \int_0^{Z(r)} h(r, z) dz \quad (18.2)$$

Здесь $Z(r)$ — ордината свободной поверхности.



Фиг. 36

Интегрируя (18.2) при условиях $Z(r_0) = H_0$, $h(R, z) = Z(R) = H$, т. е. $I(R) = H^2$, получаем

$$Q \ln \frac{R}{r_0} = 2\pi k \left[\frac{1}{2}(H^2 + H_0^2) - \int_0^{H_0} h(r_0, z) dz \right]$$

На участках BC и DE , т. е. на непроницаемых стенках скважины, распределение напора неизвестно; в промежутке же CD (фильтр скважины) $h(r_0, z) = h = \text{const}$. Учитывая это, получаем:

$$Q \ln \frac{R}{r_0} = 2\pi k \left[\frac{H^2 + H_0^2}{2} - h_0(z_2 - z_1) - \int_0^{z_1} h(r_0, z) dz - \int_{z_2}^{H_0} h(r_0, z) dz \right] =$$

$$= \pi k [(H^2 - h^2) + (H_0^2 + h_0^2) - 2h_0(z_2 - z_1) - 2h^{**}z_1 - 2h^*(H_0 - z_2)]. \quad (18.3)$$

Здесь

$$h^* = \frac{1}{H_0 - z_2} \int_{z_2}^{H_0} h(r_0, z) dz \quad \text{и} \quad h^{**} = \frac{1}{z_1} \int_0^{z_1} h(r_0, z) dz$$

— средние значения напоров на участках BC и DE . Сравнивая (18.3) с (18.1), найдем отношение дебитов несовершенной и совершенной скважин:

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{2h_0(z_3-z_1) + 2h^{**}z_1 + 2h^*(H_0-z) - (H_0^2 + h_0^2)}{H^2 - h_0^2} \quad (18.4)$$

Учитывая, что скорость фильтрации на участках BC и DE изменяется от 0 в точках B и E до ∞ в точках C и D и, следовательно, кривые напоров на этих участках являются выпуклыми и имеют в точках B и E вертикальные, а в точках C и D горизонтальные касательные, можем написать

$$\frac{1}{2}(h_0 + H_{00}) < h^{**} < H_{00}, \quad \frac{1}{2}(h_0 + H_0) < h^* < H_0 \quad (18.5)$$

где H_{00} — напор в точке B .

Тогда для Q/Q_0 , выраженного формулой (18.4), можно получить следующие нижнюю и верхнюю оценки:

$$1 - \frac{(H_0-h_0)(H_0+h_0-2z_3) + 2z_1(H_{00}-h_0)}{H^2 - h_0^2} < \frac{Q}{Q_0} < \\ < 1 - \frac{(H_0-h_0)(h_0-z_3) + z_1(H_{00}-h_0)}{H^2 - h_0^2} \quad (18.6)$$

Вместо неравенств (18.6) можно написать также равенства

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{(H_0-h_0)(H_0+h_0-2z_3) + 2z_1(H_{00}-h_0)}{H^2 - h_0^2} + \\ + \xi \frac{(H_0-h_0)(H_0-z_3) + z_1(H_{00}-h_0)}{H^2 - h_0^2} = \\ = 1 - \frac{(H_0-h_0)(h_0-z_3) + z_1(H_{00}-h_0)}{H^2 - h_0^2} - \eta \frac{(H_0-h_0)(H_0-z_3) + z_1(H_{00}-h_0)}{H^2 - h_0^2} \quad (18.7)$$

Здесь ξ и η — некоторые постоянные, заключенные между нулем и единицей, причем $\xi + \eta = 1$.

Величины H_0 и H_{00} заранее неизвестны, и оценки (18.6) становятся определенными только тогда, когда эти величины каким-то образом измерены, например при помощи затрубных скважин-льзометров.

Для случая напорного пласта мощностью m дебит совершенной скважины выражается формулой

$$Q_0 = \frac{2\pi km(H - h_0)}{\ln R/r_0}$$

Исходная формула для дебита Q несовершенной скважины имеет теперь вид

$$Q = 2\pi k \int_0^m r \frac{\partial h(r, z)}{\partial r} dz = 2\pi k \frac{dJ}{d \ln r}, \quad J = \int_0^m h(r, z) dz$$

В результате интегрирования от r_0 до R , учитывая, что

$$h(R, z) = H = \text{const}, \quad h(r_0, z) = h \quad \text{при } z_1 \leq z \leq z_2$$

получаем

$$Q = \frac{2\pi k}{\ln(R/r_0)} [m(H - h_0) - (m - z_2)(h^* - h_0) - z_1(h^{**} - h_0)]$$

Здесь h^* и h^{**} — средние значения напоров на участках $[0, z_1]$ и $[z_2, m]$. Для отношения дебитов получаем формулу

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{z_1(h^{**} - h_0) + (m - z_2)(h^* - h_0)}{m(H - h_0)}$$

Используя неравенства (18.5), можно найти для Q/Q_0 следующие оценки:

$$1 - \alpha < \frac{Q}{Q_0} < 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \left(\alpha = \frac{z_1(H_0 - h_0) - (m - z_2)(H_0 - h_0)}{m(H - h_0)} \right)$$

Это можно записать также в виде равенств

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \alpha - \xi \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha - \eta \frac{\alpha}{2}$$

$$(0 < \xi < 1, 0 < \eta < 1, \xi + \eta = 1)$$

Для вычисления дебита несовершенной скважины в напорном пласте пользуются известной формулой Маскета [82]

$$Q = \frac{2\pi km}{F(\bar{l})}(H - h_0)$$

$$F(\bar{l}) = \frac{1}{2\bar{l}} \left[2 \ln \frac{4m}{r_0} - \ln \frac{\Gamma(0.875\bar{l}) \Gamma(0.125\bar{l})}{\Gamma(1-0.875\bar{l}) \Gamma(1-0.125\bar{l})} \right] - \ln \frac{4m}{R} \quad (18.8)$$

полученной для скважины с донным притоком, фильтр которой примыкает к кровле или к подошве пласта ($\bar{l} = l/m$ — относительное вскрытие пласта, l — длина фильтра). При выводе формулы (18.8) Маскет рассматривал вначале линейный сток длиной l с

равномерно распределенной на нем интенсивностью точечных стоков, определенным образом связанный с дебитом скважины. Было найдено выражение для потенциала, создаваемого стоком; при этом эквипотенциали вблизи стока имеют форму, близкую к полуэллипсондам вращения. Одна из таких эквипотенциалей, пересекающая действительный цилиндрический фильтр на расстоянии $l_0 = \frac{3}{4}l$ от кровли, принималась за фиктивный фильтр скважин из соображений равенства потенциала на ней среднему значению потенциала

Фиг. 37. График $f(l)$, входящий в формулу (18.8)

на цилиндрической поверхности $r = r_0$. Значение потенциала на этом фиктивном фильтре задавалось; с другой стороны, из общего решения для этого потенциала получалось выражение, включающее искомый дебит. В результате для дебита была получена формула (18.8).

Для выражения

$$f(\bar{l}) = \ln \frac{\Gamma(0.875\bar{l}) \Gamma(0.125\bar{l})}{\Gamma(1-0.875\bar{l}) \Gamma(1-0.125\bar{l})}$$

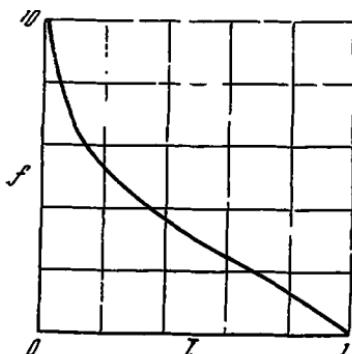
Маскетом был составлен график (фиг. 37).

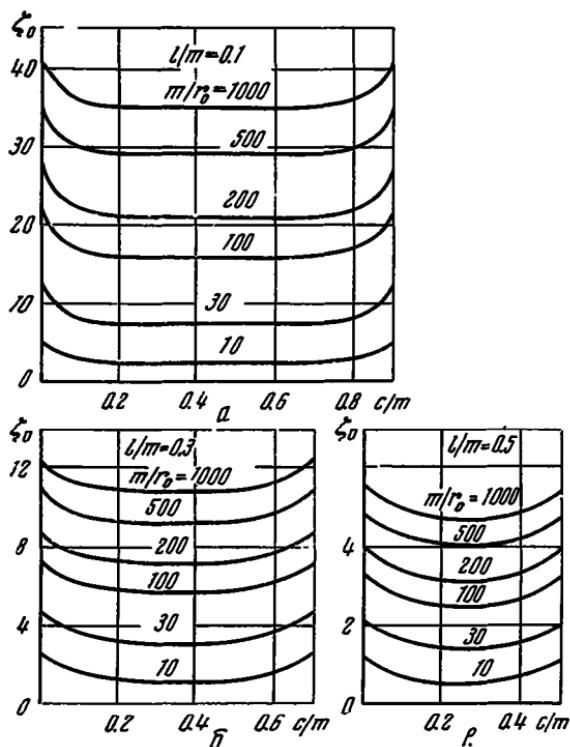
В книге [33] (§ 10) на основе решения задачи о неустановившемся притоке к несовершенной скважине даны формулы для расчета дополнительного фильтрационного сопротивления за счет несовершенства скважин. Для понижения напора на скважине $H - h_0$ формула имеет вид

$$H - h_0 = \frac{Q}{2\pi k} \left[-\frac{1}{2} Ei(-\alpha) + \zeta \left(\frac{m}{r_0}, \frac{l}{m}, \frac{c}{m}, \alpha \right) \right]$$

$$\alpha = \frac{r_0^2}{4at}, \quad \zeta = \zeta \left(\frac{m}{r_0}, \frac{l}{m}, \frac{c}{m}, \alpha \right), \quad -Ei(-\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{e^{-u}}{u} du$$

Здесь r_0 — радиус скважины; a — коэффициент пьезопроводности (или уровнепроводности) пласта; $-Ei$ — интегральный





Фиг. 38. Графики коэффициента фильтрационных сопротивлений для несовершенной скважины из книги [33]

экспоненциал; ζ — коэффициент сопротивления за счет несовершенства скважины, зависящий от радиуса скважины r_0 , мощности пласта m , длины фильтра l (в напорном потоке) и расстояния c верхнего конца фильтра от кровли пласта; кроме того, ζ через параметр α зависит и от времени, однако при $\alpha < 5 \cdot 10^{-5}$ (т. е. начиная с некоторого момента) этой зависимостью можно пренебречь и пользоваться значениями ζ_0 при установившемся движении.

Для этого случая в книге [33] даны графики зависимости ζ_0 от c/m при некоторых значениях параметров m/r_0 , l/m (фиг. 38), а для $c/m=0$ приведена табл. 14 значений $\zeta_0(m/r_0, l/m)$.

Как видно из графиков, коэффициент сопротивления практически остается на минимальном уровне, пока концы фильтра отстоят от соответствующих границ пласта далее чем на 0,2 его мощности; при этом дебит скважины — для определенного понижения — максимальен. При меньших удалениях концов фильтра от границ пласта наблюдается возрастание сопротивления и соответ-

Таблица 14

Значения ζ_0 (m/r_0 , l/m)

m/r_0 l/m	0.5	1	3	10	30
0.05	0.00212	0.0675	1.15	6.3	17.75
0.1	0.001955	0.061	1.02	5.2	12.25
0.3	0.001485	0.0454	0.645	2.395	4.6
0.5	0.00085	0.0247	0.328	1.13	2.105
0.7	0.000273	0.00835	0.1185	0.4395	0.845
0.9	0.000241	0.00075	0.01255	0.064	0.151
m/r_0 l/m	100	200	500	1000	2000
0.05	39.95	47	63	74.5	84.5
0.1	21.75	27.45	35.1	40.9	46.75
0.3	7.25	8.85	10.9	12.45	14.1
0.5	3.25	3.93	4.82	5.5	6.2
0.7	1.335	1.62	2.005	2.29	2.595
0.9	0.2695	0.3385	0.4335	0.505	0.575

ственное уменьшение дебита; этот эффект проявляется ярче для скважин относительно большого диаметра, тощие, при малых значениях отношения m/r_0 .

Табл. 14 была использована для определения коэффициентов фильтрации k в районе опытной станции Кулундинской экспедиции по данным откачек из несовершенных скважин.

Для примера рассмотрим, как производились расчеты скважины № 42. По формуле

$$Q = \frac{2\pi k m (H_l - h_0)}{\ln(R_l/r_0) + \zeta}$$

где h_0 — напор у скважины № 42 (из которой велась откачка), Q — ее дебит, H_l — уровень в i -й наблюдательной скважине, R_l — ее расстояние от скважины № 42, определялась величина коэффициента фильтрации k :

$$k = \frac{Q(\ln(R_l/r_0) + \zeta)}{2\pi m (H_l - h_0)} = \frac{Q(\ln(R_l/r_0) + \zeta)}{2\pi m (S_0 - S_i)} \quad (18.9)$$

Здесь S_0 и S_i — понижения для 42-й и i -й наблюдательной скважины.

Параметры, при которых производились расчеты, следующие: $Q = 529.7 \text{ м}^3/\text{сутк}$, $S_0 = 11.22 \text{ м}$, $r_0 = 0.084 \text{ м}$, $m = 17 \text{ м}$; длина фильтра 42-й скважины $l = 4.7 \text{ м}$; при этом в процессе установившейся откачки в наблюдательных скважинах

№ 32, 30 и 18, для которых R_i равны соответственно 152, 240 и 247 м, были замечены следующие понижения S_i : 0.12; 0.20 и 0.20 м. По табл. 14 найдено $\zeta_0 \approx 10$.

Подставив эти значения для каждой из наблюдательных скважин в формулу (18.9) и произведя вычисления, найдем

$$k_{32} = 7.82 \text{ м/сут}, \quad k_{30} = 8.08 \text{ м/сут}, \quad k_{18} = 8.09 \text{ м/сут}$$

(индекс снизу означает номер скважины)

Среднее значение коэффициента фильтрации $k_{cp} = 8 \text{ м/сут}$. Заметим, что без учета поправки ζ на несовершенство скважины k_{cp} получается заниженным, а именно $k_{cp} = 3.51 \text{ м/сут}$.

§ 19. Внутренняя задача для скважины

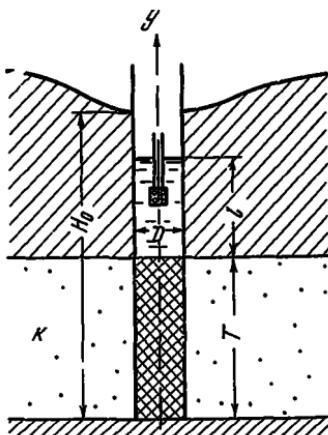
Приток жидкости в скважину сопровождается падением пьезометрического напора на всем пути движения жидкости вплоть до всасывающей части насоса. Обычно при расчетах дебита скважин пользуются зависимостями, учитывающими только фильтрационные потери в пласте, т. е. рассматривается так называемая внешняя задача. При этом надо знать величину напора на границе скважины с грунтом.

Изучение потерь напора при прохождении жидкости через фильтр и внутри фильтра составляет содержание внутренней задачи для скважины. Наиболее широко эта задача для совершенной скважины рассмотрена в работе [34], результаты которой излагаются ниже.

Рассматриваемая схема потока изображена на фиг. 39. Водоприемная часть насоса расположена в скважине выше кровли пласта под водой. Дифференциальное уравнение потерь напора потока в фильтре представлено в виде

$$dh + d\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right) + idy + \frac{\alpha v^2}{g} \frac{dQ}{Q} = 0 \quad \left(h = \frac{p}{\gamma} + y\right) \quad (19.1)$$

Здесь h — пьезометрический напор; p — давление; γ — удельный вес; v — средняя по сечению скорость потока; α — коэффициент количества движения, учитывающий неравномерность



Фиг. 39

распределения скоростей по сечению; g — ускорение силы тяжести; i — градиент потерь напора за счет сопротивления погону внутри фильтра; Q — расход потока через данное сечение. Уравнение (19.1) отличается от уравнения Бернулли для идеальной жидкости двумя последними слагаемыми в левой части, учитывающими потери напора вследствие сопротивления потоку в фильтре, а также за счет изменения расхода Q по длине фильтра.

Согласно с уравнениями

$$dQ = \pi D m B (H_0 - h)^{1/n} dy \quad (19.2)$$

$$i = AQ^{n_1} \quad (19.3)$$

характеризующими потери напора при просачивании через фильтр и внутри фильтра, уравнение (19.1) образует замкнутую систему уравнений относительно Q , h и i . В уравнениях (19.2) и (19.3) A и B — постоянные, подлежащие определению; m — порозность фильтра до установки его в пласт; n и n_1 — числа, характеризующие режим течения жидкости через фильтр и внутри него; H_0 — напор на внешней стенке фильтра — считается постоянным.

В результате исключения h и i посредством (19.2) и (19.3) из уравнения (19.1) последнее превращается в следующее нелинейное дифференциальное уравнение для расхода (при $a=1$):

$$\frac{d^2Q}{dy^2} \left(\frac{dQ}{dy} \right)^{n-1} - \frac{32\pi^{n-2} m^n B^n D^{n-4}}{ng} Q \frac{dQ}{dy} - \frac{\pi^n m^n B^n A D^n}{n} Q^{n_1} = 0 \quad (19.4)$$

Если пренебречь потерями на трение в фильтре, т. е. положить $A=0$ и считать $n=2$, то уравнение (19.4) становится линейным и легко интегрируется. Этот случай исследован в работе американских авторов [85], которые вместо уравнения (19.4) при $A=0$ рассматривали уравнение для напоров и получили следующее выражение для коэффициента потерь напора при прохождении сквозь фильтр (в обозначениях настоящего параграфа):

$$\zeta = \frac{H_0 - h_1}{v^2/2g} = 2 \operatorname{ctgh}^2 \frac{CT}{2D}, \quad C = \frac{8Bm}{Vg} \quad (19.5)$$

где T — мощность пласта. Полученные зависимости были исследованы теоретически и экспериментально, на лабораторных фильтрах, с точки зрения уменьшения потерь напора. Хорошее согласие теории с экспериментом было достигнуто при учете сжатия потока в фильтре жидкостью, входящей в фильтр путем уменьшения расчетного диаметра фильтра до 0.96 от истинного.

В работе [34] уравнение (19.4) интегрируется для $n=n_1=1$ (линейный режим); при этом опускается второй член, включающий изменение скоростного напора, а также потери, вызванные увеличением расхода по длине фильтра. Рассмотрен также практически интересный случай $n=n_1=2$ (квадратичный режим), для которого решение уравнения (19.4) отыскивалось в виде ряда по степеням малого параметра. Первое приближение, вполне достаточное для практических потребностей, дает для Q следующее выражение:

$$Q(y) = \frac{1}{4} \pi D^2 \sqrt{g(H_0 - h_0)} [\operatorname{sh} \eta y + \sigma (2 \operatorname{ch} \eta y \ln \operatorname{ch} \eta y - \eta y \operatorname{sh} \eta y)] \quad (19.6)$$

$$\sigma = \frac{1}{256} A \pi^2 D^6 \sqrt{g}, \quad \eta = 4mB/D \sqrt{g} \quad h_0 = h|_{y=0}$$

Решение (19.6) удовлетворяет начальным условиям

$$Q|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{dQ}{dy} \right|_{y=0} = \pi mBD \sqrt{H_0 - h_0} \quad (19.7)$$

при которых и интегрировалось уравнение (19.4). Вместе с соотношением (19.2) зависимость (19.6) позволяет получить следующую формулу для распределения напора по длине фильтра:

$$h(y) = H_0 - \frac{16Q_0^2}{g\pi^2 D^4} \psi^3(\eta y) \quad \psi(\eta y) = \frac{\operatorname{ch} \eta y + \sigma [\operatorname{sh} \eta y (1 - 2 \ln \operatorname{ch} \eta y) - \eta y \operatorname{ch} \eta y]}{\operatorname{sh} \eta y + \sigma [2 \operatorname{ch} \eta T \ln \operatorname{ch} \eta T - \eta T \operatorname{sh} \eta T]} \quad (19.8)$$

Здесь Q_0 — пока неизвестный расход через сечение $y=T$ и выше, т. е. дебит скважины. Для его определения привлекается уравнение гидравлических потерь в глухой части трубы (на трение):

$$dh/dy = -\beta Q_0^2 = \text{const}$$

Интегрируя это уравнение по y от T до $T+l$ и по h от $h(T)=h_1$ до $h(T+l)=T+l=h_c$ (см. фиг. 32), получаем

$$h_c - h_1 = -\beta Q_0^2 l \quad (19.9)$$

Если положить в (19.8) $y=T$, $h=h_1$ и исключить затем h_1 из (19.8) и (19.9), то для Q_0 получится формула

$$Q_0^2 = \frac{H_0 - h_c}{\beta l + (16/g\pi^2 D^4) \psi^3(\lambda T)} \quad (19.10)$$

Коэффициент β гидравлических потерь в глухой части трубы считается известным. Коэффициенты A и B можно определить, например, из формулы (19.8), если известен напор в двух каких-то точках данного фильтра.

Для коэффициента потери напора формула (19.8) дает следующее выражение:

$$\zeta = \frac{H_0 - h_1}{v_0^2/2g} = \frac{H_0 - h_1}{8Q_0^2/g\pi^2 D^4} = 2 \operatorname{cth}^2 \eta T \omega(\eta T) \quad (19.11)$$

$$\omega(\eta T) = \left[\frac{(1-\sigma) \eta T + \sigma \operatorname{th} \eta T (1+2 \operatorname{ch} \ln \eta T)}{(1-\sigma) \eta T + 2 \sigma \operatorname{cth} \eta T \ln \operatorname{ch} \eta T} \right]^2$$

Сравнивая (19.11) и (19.5) и учитывая при этом, что

$$\eta T = \frac{4mBT}{D \sqrt{g}} = \frac{CT}{2D}$$

видим, что (19.5) отличается от (19.11) множителем $\omega(\eta T)$ в последней. Если пренебречь потерями на сопротивление потоку в фильтре, т. с. считать $A=\sigma=0$, то $\omega(\eta T)=1$ и формула (19.11) переходит в (19.5).

В табл. 15 приведены значения ζ , вычисленные на основе формулы (19.11); эта таблица взята из [34]. Из нее следует, что с ростом параметра ηT значение ζ асимптотически стремится к минимальной величине, равной 2. В частности, при $\sigma=0$ уже для $\eta T \geq 6$ можно считать $\zeta=2$, этот вывод был сделан и в работе [35]. С ростом σ , т. е. с увеличением сопротивления потоку в фильтре (см. (19.6)), коэффициент ζ для данных значений ηT растет.

При наличии гравийной обсыпки вокруг фильтра потери напора при фильтрации через гравий можно включить в потери через фильтр и по-прежнему учитывать их равенством (19.2), при этом H_0 означает напор на границе гравия с грунтом. Для данной конструкции фильтра и структуры гравия коэффициенты A и B являются более или менее постоянными, и после их определения (на каком-нибудь фильтре данной конструкции) можно воспользоваться табл. 15 для выбора оптимальных размеров фильтра, т. е. таких размеров, при которых для определенного дебита скважины потери напора при потоке через фильтр и внутри него были бы минимальными.

Приведенные формулы получены в [34] в предположении о равномерной перфорации фильтра скважины. При этом, как это следует из выражения (19.6), приток жидкости в фильтр происходит неравномерно по длине: у основания фильтра входные скорости ничтожно малы (см. 19.7)), а в верхней части резко возрастают, что может привести к выносу песка в скважину в

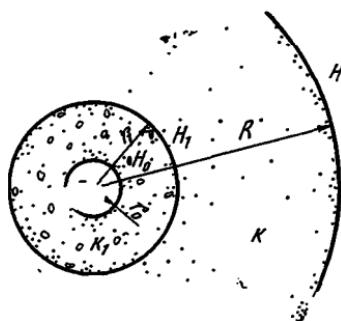
Таблица 15

Значения коэффициента потерь напора ζ при потоке через фильтр и в фильтре (формула (19.11))

$\frac{\sigma}{\eta T}$	0	0.031	0.156	0.313	1.563	3.125	6.255
0.07	409.34	409.46	409.55	409.61	409.70	410.28	410.86
0.1	201.28	201.29	201.44	201.60	202.89	204.51	207.77
0.2	51.330	51.358	51.533	51.739	53.401	55.414	59.422
0.3	23.556	23.603	23.839	24.124	26.467	29.414	35.233
0.4	13.844	13.899	14.150	14.473	16.994	20.235	26.709
0.5	9.356	9.413	9.658	9.792	12.786	15.740	22.047
0.6	6.934	6.989	7.242	7.505	10.068	13.194	19.130
0.7	5.472	5.538	5.788	6.224	8.632	11.744	17.416
0.8	4.530	4.594	4.834	5.259	7.644	10.682	15.604
0.9	3.898	3.960	4.199	4.525	6.577	9.136	13.425
1.0	3.457	3.514	3.754	4.089	6.366	8.917	12.865
1.2	2.875	2.933	3.179	3.471	5.692	7.942	10.086
1.4	2.551	2.607	2.839	3.121	5.122	7.013	9.443
1.6	2.354	2.444	2.632	2.903	4.720	6.307	8.188
1.8	2.231	2.321	2.495	2.753	4.375	5.777	7.171
2.0	2.152	2.279	2.427	2.685	4.309	5.550	6.872
2.5	2.054	2.099	2.274	2.472	3.585	4.319	5.025
3.0	2.020	2.054	2.162	2.376	3.021	3.419	3.752
3.5	2.007	2.041	2.169	2.363	3.002	3.397	3.729
4.0	2.0024	2.033	2.145	2.267	2.840	3.139	3.394
4.5	2.0008	2.0278	2.1267	2.231	2.492	2.968	3.171
5.0	2.0004	2.0244	2.1098	2.184	2.482	2.823	2.987
5.5	2.0000	2.0221	2.1012	2.188	2.476	2.733	2.875
6.0	2.0000	2.0200	2.0931	2.1672	2.498	2.659	2.705

этой части при недогрузке нижней части фильтра. Этот вопрос более детально исследован в работах [36, 37]. Путем надлежащего выбора плотности перфорации можно добиться равномерного притока в фильтр по всей его длине, и хотя это не дает заметного увеличения дебита [37], такие фильтры в конструктивном отношении оказываются предпочтительней фильтров с равномерной перфорацией.

Влияние потерь напора в гравийной обсыпке можно учесть в рамках внешней задачи следующим образом. Пусть фильтр радиусом r_0 обсыпан равномерным слоем гравия, причем коэффициент фильтрации обсыпки равен k_1 , грунта — k , а радиус цилиндрической границы гравийной зоны с грунтом — r_1 .



Фиг. 40

(фиг. 40); напор при $r=r_1$ обозначим через H_1 . Предположим, что фильтрация происходит в напорном пласте с непроницаемым водоупором. Тогда для каждой из зон — грунта и обсыпки — можем составить уравнения

$$Q_0 = \frac{2\pi kT(H - H_1)}{\ln(R/r_1)} = \frac{2\pi k_1 T(H_1 - H_0)}{\ln(r_1/r_0)} \quad (19.12)$$

Здесь H_0 — напор на стенке скважины при $r=r_0$, H — напор при $r=R$. Исключив из (19.12) H_1 , получим

$$Q_0 = \frac{2\pi kT(H - H_0)}{(k/k_1) \ln(r_1/r_0) - \ln(R/r_1)} \quad (19.13)$$

Если же не учитывать разницы между k и k_1 , т. е. считать $k=k_1$, то вместо (19.13) будем иметь обычную формулу

$$Q = \frac{2\pi kT(H - H_0)}{\ln(R/r_0)} \quad (19.14)$$

Найдем отношение дебитов

$$\eta = \frac{Q}{Q_0} = \frac{\ln(R/r_1) + (k/k_1) \ln(r_1/r_0)}{\ln(R/r_1) + \ln(r_1/r_0)} \quad (19.15)$$

Пусть, например, $r_0 = 0.11$ м, $r_1 = 0.3$ м, $R = 300$ м. Тогда по (19.15) получим

$$\eta = \frac{7 + (k/k_1)}{7 + 1}$$

Для $k/k_1 = 0.5$ имеем $\eta = 0.9375$, т. е. дебит скважины, подсчитанный по (19.14) без учета более высокой проницаемости обсыпки, оказывается заниженным на 6,25%; $\eta = 0.9$ при $k/k_1 = 0.2$.

Предположим теперь, что в формуле (19.10), определяющей дебит скважины (во внутренней задаче), напор H_0 на внешней поверхности фильтра неизвестен. Тогда можно привлечь уравнение для дебита, полученное при решении внешней задачи, соответствующей данным условиям. Пусть, например, таким уравнением является уравнение (19.13).

Исключив из (19.10) и (19.13) H_0 , получим для искомого дебита Q_0 квадратное уравнение

$$\left(\beta l + \frac{16}{g\pi^2 D^2} \psi^2(\lambda T) \right) Q_0^2 + \frac{\ln(R/r_1) + (k/k_1) \ln(r_1/r_0)}{2\pi k T} Q_0 - (H - h_c) = 0.$$

В заключение приведем эмпирическую формулу для потерь напора при потоке через фильтр (см. [33], стр. 110). Эта формула имеет следующий вид:

$$\Delta h = H_0 - h_c = 0.5 \frac{(H - h_c)^n}{H} \quad (19.16)$$

где h_c — уровень в скважине, H_0 — напор на внешней стенке фильтра, H — напор до откачки; показатель n различен для разных конструкций фильтра; например, для дырчатых, сетчатых и гравийных фильтров $n=2.2$.

Формула (19.16) не подтверждается на примере скважин Кулундипской гидрогеологической станции. Так, для скважины № 18 при откачке имели $H=32.35$ м, $h_c=21.81$ м, $H-h_c=10.54$ м. При этих данных вычисления по формуле (19.16) для $n=2.2$ дают $H_0 - h_c=2.75$ м; в результате же замера найдено $H_0=29.37$ м, так что $H_0 - h_c=7.56$ м.

Глава VI

ЗАДАЧА О ЛИНЗЕ ПРЕСНЫХ ВОД ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ ИЗ КАНАЛА

Большой известностью пользуются так называемые линзы пресных подземных вод, встречающиеся в различных естественных условиях: на островах, в прибрежных зонах, в пустынях, вблизи оросительных каналов. Зачастую эти линзы окружены солеными водами и представляют большую ценность, особенно в засушливых районах. Широкие исследования по линзам пресных вод в пустынях содержатся в трудах В. Н. Кунина [39, 40]. Ряд авторов рассматривали задачу о форме линз, образующихся в разных условиях. Довольно подробный обзор работ по этому вопросу с библиографией содержит статья С. Ф. Аверьянова в книге [41], укажем также на статьи [42, 43].

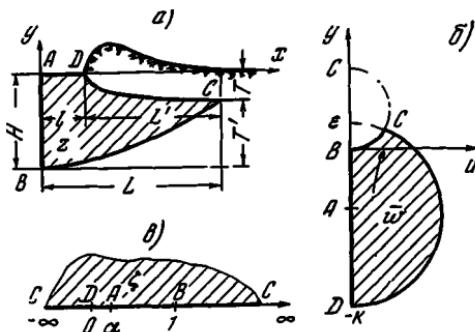
В настоящей главе приводится гидродинамическое решение плоской стационарной задачи о линзе пресных вод, устанавливающейся при фильтрации из канала путем вытеснения из зоны канала соленых грунтовых вод; при этом со свободной поверхности происходит испарение, компенсирующее фильтрацию через дно канала. В зависимости от задания закона испарения возникают две постановки задачи; получающиеся при этом решения по форме совершенно различны, но после проведения по ним вычислений обнаруживаются общие закономерности и даже сходства количественного характера. Это дает основания сделать некоторые общие заключения о зависимости размеров линзы от различных факторов.

§ 20. Решение задачи при допущении о пропорциональности испарения длине горизонтальной проекции соответствующего участка свободной поверхности [44]

Ввиду симметрии ограничимся рассмотрением правой половины области движения, изображенной на фиг. 41, а. Дно канала предполагается плоским, глубина воды в канале бесконечно малой (фильтрация через откосы отсутствует). При указанном на фиг. 41, а выборе осей координат и при совмещении плоскости сравнения потенциалов с плоскостью $y=0$ на границе области движения выполняются следующие условия ([2], стр. 46—49):

$$\begin{aligned}y &= 0, \quad \varphi = 0 && \text{на } AD \text{ (дно канала)} \\x &= 0, \quad \psi = 0 && \text{на } AB \text{ (линия симметрии)} \\ \varphi + ky &= 0, \quad \psi + ex = \frac{1}{2}Q + \varepsilon l && \text{на } CD \text{ (свободная поверхность)} \\ \varphi - cy &= (c+k)T, \quad \psi = 0 && \text{на } BC \text{ (поверхность раздела)} \\ &&& (c = k(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1 = k\Delta\rho)\end{aligned}$$

Здесь φ и ψ — потенциал скорости и функция тока; k — коэффициент фильтрации грунта; l — половина ширины канала; T — глубина соленых грунтовых вод (до фильтрации из канала); ρ_1 и ρ_2 — соответственно плотность вод, фильтрующихся из канала



Фиг. 41

и соленых грунтовых вод. Остановимся на втором условии на свободной поверхности CD :

$$\psi + ex = \frac{1}{2}Q + el = \text{const} \quad (20.1)$$

Для выяснения физического смысла закона (20.1) запишем его для некоторых двух точек M_1 и M_2 свободной поверхности с абсциссами x_1 и x_2 соответственно

$$\psi_{M_1} + ex_1 = \frac{1}{2}Q + el, \quad \psi_{M_2} + ex_2 = \frac{1}{2}Q + el$$

т. е.

$$\psi_{M_1} - \psi_{M_2} = e(x_2 - x_1) \quad (20.2)$$

Величина в левой части уравнения (20.2) выражает поток жидкости (в данном случае испарение) через участок M_1M_2 свободной поверхности; этот поток оказывается пропорциональным длине $x_2 - x_1$, горизонтальной проекции участка. Аналогичное условие на свободной поверхности имеет место при равномерной инфильтрации. Ниже (см. § 22) мы остановимся на вопросе о том, в какой степени зависимость вида (20.1) пригодна для задания испарения.

В равенстве (20.1) Q означает неизвестный заранее фильтрационный расход воды на единицу длины дна канала.

Отметим еще одно допущение: толщину переходной зоны между пресной и соленой водой мы считаем настолько незначительной, что при математической схематизации ею можно

пренебречь и полагать, как это принято в таких случаях, что между обеими зонами существует резко выраженная граница раздела BC . Второе соотношение на ней, аналогичное условию на свободной поверхности, является следствием предпосылок о непрерывном изменении давления при переходе через границу раздела и об отсутствии движения в зоне соленых вод ([²], стр. 404—405).

При данной постановке задачи в зависимости от соотношения величин c и ϵ возникают различные случаи. Начнем со случая $c > \epsilon$, которому отвечают схема, изображенная на фиг. 41, а, и выписанные выше граничные условия.

На фиг. 41, б представлен годограф скорости \bar{w} , участки границы которого (или их продолжения) не имеют общей точки, что не позволяет воспользоваться при решении задачи методом конформных отображений (см. [⁴⁵], § 73). Ниже дано ее решение при помощи метода П. Я. Полубариновой-Кочиной, основанного на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений (см. [³], гл. VII).

Решение той или иной задачи плоской установившейся фильтрации в гидродинамической постановке сводится, как известно, к нахождению функций, отображающих область фильтрации z и область комплексного потенциала ω на некоторую вспомогательную область, в качестве которой обычно берется верхняя полуплоскость.

Для данной задачи соответствие между угловыми точками области z и точками действительной оси вспомогательной полуплоскости ζ указано на фиг. 41, в. В используемом здесь методе искомыми являются функции

$$Z = dz/d\zeta, \quad \Omega = d\omega/d\zeta \quad (20.3)$$

которые отыскиваются как решения некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка класса Фукса (с регулярными особыми точками) [⁴⁶].

Для составления уравнения необходимо предварительно определить показатели в особых точках. В данном случае это было проделано по методу, основанному на следующем утверждении Б. К. Ризенкампа (см. [⁴⁷], § 26; приводим его в несколько иной формулировке).

Если w_1 и w_2 — комплексные координаты точек пересечения окружностей, дугами которых в плоскости ω являются два каких-то соседних участка границы области движения, то функции

$$\Phi_1 = \omega - w_1 z, \quad \Phi_2 = \omega - w_2 z \quad (20.4)$$

переводят эти участки в отрезки прямых.

Таким же свойством обладают и функции

$$W_1 = \frac{d\Phi_1}{d\zeta} = \Omega - w_1 Z, \quad W_2 = \frac{d\Phi_2}{d\zeta} = \Omega - w_2 Z \quad (20.5)$$

Найдя с помощью годографа скорости величин w_1 и w_2 , построим области функций (20.4) в окрестности данной особой точки (которая является одной из точек, указанных в утверждении). Эти области суть прямолинейные углы. Зная величины этих углов, а следовательно и величины πv_1 и πv_2 углов, представляющих в окрестности данной точки области функций W_1 и W_2 , найдем и значения v_1 и v_2 показателей в этой особой точке. Если на плоскости ζ ей соответствует точка $\zeta = \infty$ (такой в нашем случае является точка C), то показатели в ней равны $v_1 + 2$ и $v_2 + 2$.

Определенные таким образом показатели отражают особенности дифференциального уравнения и могут быть представлены символом Римана, введенным для обозначений общего интеграла уравнения Y :

$$Y = P \left\{ \begin{matrix} 0 & \alpha & 1 & \infty \\ 0 & -1/2 & 0 & \gamma'_1 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 & \gamma'_2 \end{matrix} \right\} \zeta$$

В первой строке фигурируют особые точки, во второй и третьей — показатели в них. Показатели γ'_1 и γ'_2 в точке $\zeta = \infty$ таковы:

$$\gamma'_1 = 2 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{e(c+k)}{k(c-e)}}$$

$$\gamma'_2 = 1 + \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{e(c+k)}{k(c-e)}}$$

Особенность в точке $\zeta = a$ является устранимой: путем замены

$$Y = (\zeta - a)^{-1/2} \tilde{Y} \quad (20.6)$$

перейдем к новой искомой функции \tilde{Y} , для которой точка $\zeta = a$ является обыкновенной. Символически ее можно представить так:

$$\tilde{Y} = P \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \gamma_1 \\ -1/2 & -1/2 & \gamma_2 \end{matrix} \right\} \zeta$$

причем

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \gamma_1' - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{e(c+k)}{k(c-e)}} \\ \gamma_2 &= \gamma_2' - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{e(c+k)}{k(c-e)}}\end{aligned}\quad (20.7)$$

Уравнение для \tilde{Y} имеет следующий вид [20, 46]:

$$\tilde{Y}'' + \left[\frac{3}{2\zeta} - \frac{3}{2(\zeta-1)} \right] \tilde{Y}' + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\zeta(\zeta-1)} \tilde{Y} = 0 \quad (20.8)$$

Это уравнение называется уравнением Гаусса. Его канонические интегралы выражаются через гипергеометрические функции, или гипергеометрические ряды, и имеют в нашей задаче вид. В окрестности точки $\zeta=0$ ($|\zeta|<1$)

$$\begin{aligned}U_0 &= F(\gamma_1, \gamma_2, \frac{3}{2}, \zeta) \\ V_0 &= \zeta^{-1/2} F(\gamma_1 - 1/2, \gamma_2 - 1/2, 1/2, \zeta)\end{aligned}\quad (20.9)$$

В окрестности точки $\zeta=1$ ($|\zeta-1|<1$)

$$\begin{aligned}U_1 &= F(\gamma_1, \gamma_2, \frac{3}{2}, 1-\zeta) \\ v_1 &= (1-\zeta)^{-1/2} F(\frac{3}{2}-\gamma_1, \frac{3}{2}-\gamma_2, \frac{1}{2}, 1-\zeta) = \\ &= (1-\zeta)^{-1/2} F(\gamma_2 - 1/2, \gamma_1 - 1/2, 1/2, 1-\zeta)\end{aligned}\quad (20.10)$$

В окрестности точки $\zeta=\infty$ ($|\zeta|>1$)

$$\begin{aligned}U_\infty &= \zeta^{-\gamma_1} F(\gamma_1, \gamma_1 - 1/2, \gamma_1 - \gamma_2 + 1, 1/\zeta) \\ V_\infty &= \zeta^{-\gamma_2} F(\gamma_2, \gamma_2 - 1/2, \gamma_2 - \gamma_1 + 1, 1/\zeta)\end{aligned}\quad (20.11)$$

Здесь используется обозначение для гипергеометрической функции

$$\begin{aligned}F(a, b, c, x) &= 1 + \frac{ab}{c \cdot 1!} x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)2!} x^2 + \dots \\ &\dots + \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)b(b+1)\dots(b+n-1)}{c(c+1)\dots(c+n-1)n!} x^n + \dots\end{aligned}$$

Канонические интегралы уравнения для функции Y отличаются от выражений (20.9)–(20.11) множителем $(\zeta-a)^{-1/2}$ (см. (20.6)). С другой стороны, можно показать, что эти интегралы с точностью до постоянного вещественного множителя представ-

ляют функции (20.5), использованные для определения показателей. Для точки $\zeta=0$ имеем $w_1=ik$, $w_2=-ie$, причем в этом случае w_1 соответствует интегралу U_0 , а w_2 — интегралу V_0 . Таким образом, получаем

$$\Omega - ikZ = A(\zeta - z)^{-1/2} U_0, \quad \Omega + ieZ = B(\zeta - z)^{-1/2} V_0 \quad (20.12)$$

Для данных параметров гипергеометрические функции, входящие в (20.9), можно выразить через тригонометрические посредством соотношений Гаусса [48]

$$\begin{aligned} F(1-\delta, 1-\delta, \frac{3}{2}, \sin^2 t) &= \frac{\sin 2\delta t}{\delta \sin 2t} \\ F(\frac{1}{2}+\delta, \frac{1}{2}-\delta, \frac{1}{2}, \sin^2 t) &= \frac{\cos 2\delta t}{\cos t} \end{aligned} \quad (20.13)$$

В нашем случае согласно (20.9)

$$\gamma_1 = 1 + \delta, \quad \gamma_2 = 1 - \delta, \quad t = \arcsin \sqrt{\zeta}$$

причем в соответствии с равенствами (20.7)

$$\delta = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{k(c-e)}{e(c+k)}}. \quad (20.14)$$

В качестве t следует взять главную ветвь арксинуса, на которой $0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$ при $0 \leq \zeta \leq 1$; тогда при $\zeta = \sin^2 t = 0$ правая часть первого соотношения (20.13) определяется как $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2\delta t}{2\delta \sin t \cos t} = 1$ и совпадает с левой частью.

Таким образом,

$$t = \arcsin \sqrt{\zeta} \quad (20.15)$$

Соотношения (20.9) перепишутся теперь так:

$$U_0 = \frac{\sin 2\delta t}{\delta \sin t}, \quad V_0 = \frac{2 \cos 2\delta t}{\sin 2t} \quad (0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi) \quad (20.16)$$

Принимая во внимание соотношение $\Omega/Z = d\omega/dz = w$, вытекающее из (20.3), найдем отношение $-\mu$ постоянных A и B в (20.12):

$$-\mu = \frac{A}{B} = \frac{\Omega - ikZ}{\Omega + ieZ} \frac{V_0}{U_0} = \frac{w - ik}{w + ie} \frac{V_0}{U_0}$$

Положим здесь $\zeta=1$ ($t=1/2\pi$), $w=0$. Так как при этом согласно (20.16)

$$\frac{V_0}{U_0} = 2\delta \operatorname{ctg} \delta\pi$$

то, учитывая (20.14), получаем

$$\mu = 2\delta \frac{k}{e} \operatorname{ctg} \delta\pi = 2\delta \sqrt{\frac{k(c+k)}{e(c-e)}}$$

Из уравнений (20.12) найдем

$$Z = \frac{dz}{d\zeta} = -iB \frac{\mu U_0 + V_0}{(k+e)\sqrt{\zeta-\alpha}}, \quad \Omega = \frac{d\omega}{d\zeta} = B \frac{kV_0 - \mu e U_0}{(k+e)\sqrt{\zeta-\alpha}} \quad (20.17)$$

Используя выражения (20.15) и (20.16), а также вводя обозначение

$$\lambda = \frac{\mu}{2\delta} = \frac{k}{e} \operatorname{ctg} \delta\pi = \sqrt{\frac{k(c+k)}{e(c-e)}} \quad (20.18)$$

представим уравнения (20.17) для участка AB в виде

$$\frac{dz}{dt} = -iC \frac{\lambda \sin 2\delta t + \cos 2\delta t}{\sqrt{\sin^2 t - \alpha}}, \quad \frac{d\omega}{dt} = -C \frac{e\lambda \sin 2\delta t - k \cos 2\delta t}{\sqrt{\sin^2 t - \alpha}} \quad (20.19)$$

$$(\arcsin \sqrt{\alpha} \leq t \leq 1/2\pi)$$

Здесь $C=2B/(k+e)$ — вещественная постоянная.

Обойдем в положительном направлении точку $\zeta=a$. Тогда на AD имеем

$$\sqrt{\zeta-\alpha} = i\sqrt{\alpha-\zeta}$$

и уравнения для z и ω примут вид

$$\frac{dz}{dt} = C \frac{\lambda \sin 2\delta t + \cos 2\delta t}{\sqrt{\alpha - \sin^2 t}}, \quad \frac{d\omega}{dt} = iC \frac{e\lambda \sin 2\delta t - k \cos 2\delta t}{\sqrt{\alpha - \sin^2 t}} \quad (20.20)$$

$$(0 \leq t \leq \arcsin \sqrt{\alpha})$$

Перейдем на участок CD (свободная поверхность), обойдя точку $\zeta=0$ в положительном направлении. Тогда имеем $\sqrt{\zeta}=i\sqrt{-\zeta}$, $t=\arcsin \sqrt{-\zeta}=-i \operatorname{arsh} \sqrt{-\zeta}=-i\tau$ и для участка CD уравнения запишутся так:

$$\frac{dz}{d\tau} = C \frac{\lambda \operatorname{sh} 2\delta\tau - i \operatorname{ch} 2\delta\tau}{\sqrt{\alpha + \operatorname{sh}^2 \tau}}, \quad \frac{d\omega}{d\tau} = C \frac{k \operatorname{ch} 2\delta\tau - ie\lambda \operatorname{sh} 2\delta\tau}{\sqrt{\alpha + \operatorname{sh}^2 \tau}} \quad (20.21)$$

$$(0 \leq \tau \leq \infty)$$

Заметим, что правые части равенств (20.12), из которых получены последующие уравнения, содержат гипергеометрические функции, сходимость которых, вообще говоря, гарантируется только в круге $|\zeta| < 1$. Однако в данном случае при помощи соотношений (20.13) функции U_0 и V_0 удалось продолжить на всю отрицательную полусось $\zeta < 0$, на которой и действительны уравнения (20.21).

Для участка BC (поверхность раздела), где $0 \leq \zeta \leq \infty$, воспользуемся каноническими интегралами (20.10) в окрестности точки $\zeta = 1$ ($|\zeta - 1| < 1$). Для нее $w_1 = 0$, $\omega_2 = ic$ и, следовательно, имеем

$$W_1 = \Omega = M(\zeta - \alpha)^{-1/2} U_1, \quad W_2 = \Omega + icZ - N(\zeta - \alpha)^{-1/2} V_1 \quad (20.22)$$

Сравнивая (20.10) и (20.9), видим, что для U_1 и V_1 имеет место такое же представление через тригонометрические функции, как и для U_0 и V_0 :

$$U_1 = \frac{\sin 2\delta t}{\delta \sin 2t}, \quad V_1 = \frac{2 \cos 2\delta t}{\sin 2t} \quad (0 \leq t \leq \pi/2) \quad (20.23)$$

причем теперь

$$1 - \zeta = \sin^2 t$$

Будем рассматривать пока выражения (20.23) для $0 \leq \zeta \leq 1$. При этом $1 \geq \sin^2 t \geq 0$; в качестве $t = \arcsin \sqrt{1 - \zeta}$ возьмем главную ветвь. Аналогично тому, как это было сделано для μ , найдем из равенств (20.22), используя точку $\zeta = 0$ ($w = ik$) и учитывая соотношение (20.14):

$$\nu = \frac{M}{N} = \frac{2\delta k}{c + k} \operatorname{ctg} \delta \pi. \quad (20.24)$$

Из системы (20.22) определим Z и Ω :

$$Z = \frac{dz}{d\zeta} = i \frac{N}{C} (\zeta - \alpha)^{-1/2} (\nu U_1 - V_1) \quad (20.25)$$

$$\Omega = \frac{d\omega}{d\zeta} = \nu N (\zeta - \alpha)^{-1/2} U_1$$

Так как на участке $0 \leq \zeta \leq 1$ правые части соответствующих равенств (20.17) и (20.25) должны совпадать, то, приравнивая их, а также учитывая известные соотношения между различными ветвями гипергеометрических функций (см., например, [2], стр. 315), найдем после некоторых выкладок связь между

постоянными N и C :

$$N = \frac{C(c+k)}{2 \cos \delta\pi} \quad (20.26)$$

Остается преобразовать выражения (20.23) для участка BC ($1 \leq \zeta \leq \infty$). Переходя на него путем обхода точки $\zeta=1$ в отрицательном направлении на угол π , будем иметь

$$t = \arcsin \sqrt{1-\zeta} = \arcsin (-i \sqrt{\zeta-1}) = -i \operatorname{arsh} \sqrt{\zeta-1} = -i\tau$$

$$\zeta = 1 + \operatorname{sh}^2 \tau, \quad \zeta - \alpha = 1 - \alpha + \operatorname{sh}^2 \tau, \quad \sin 2t = -i \operatorname{sh} 2\tau$$

$$\sin 2\delta t = -i \operatorname{sh} 2\delta\tau, \quad \cos 2\delta t = \operatorname{ch} 2\delta\tau, \quad d\zeta = \operatorname{sh} 2\tau d\tau$$

С учетом этих равенств, а также соотношений (20.23), (20.24) и (20.26) уравнения (20.25) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= \frac{C}{c \cos \delta\pi} \frac{(c+k) \operatorname{ch} 2\delta\tau + ik \operatorname{ctg} \delta\pi \operatorname{sh} 2\delta\tau}{\sqrt{1-\alpha+\operatorname{sh}^2 \tau}} \\ \frac{d\omega}{d\tau} &= \frac{Ch}{\sin \delta\pi} \frac{\operatorname{sh} 2\delta\tau}{\sqrt{1-\alpha+\operatorname{sh}^2 \tau}} \end{aligned} \quad (20.27)$$

$(0 \leq \tau \leq \infty)$

Основной интерес представляют первые уравнения (20.21) и (20.27) для правых ветвей свободной поверхности и поверхности раздела. Разделив в этих уравнениях действительные и мнимые части и затем проинтегрировав их, получим параметрические уравнения указанных участков границы линзы.

Свободная поверхность CD

$$x = l + C\lambda \int_0^\tau \frac{\operatorname{sh} 2\delta\tau}{\sqrt{\alpha+\operatorname{sh}^2 \tau}} d\tau, \quad y = -C \int_0^\tau \frac{\operatorname{ch} 2\delta\tau}{\sqrt{\alpha+\operatorname{sh}^2 \tau}} d\tau \quad (20.28)$$

$(0 \leq \tau \leq \infty)$

Поверхность раздела

$$\begin{aligned} x &= C \frac{c+k}{c \cos \delta\pi} \int_0^\tau \frac{\operatorname{ch} 2\delta\tau}{\sqrt{1-\alpha+\operatorname{sh}^2 \tau}} d\tau \\ y &= -H + C \frac{k}{c \sin \delta\pi} \int_0^\tau \frac{\operatorname{sh} 2\delta\tau}{\sqrt{1-\alpha+\operatorname{sh}^2 \tau}} d\tau \end{aligned} \quad (20.29)$$

$(0 \leq \tau \leq \infty)$

Интегралы в уравнениях (20.28) и (20.29) при $\tau = \infty$ оказываются несобственными, что создает трудности при вычислении их на ЭВМ. Однако посредством замены переменной

$$u = e^{-(1-2\delta)\tau} \quad (20.30)$$

эти интегралы приводятся к собственным, а уравнения (20.28) и (20.29) преобразуются с учетом (20.18) следующим образом.

Свободная поверхность CD

$$x = l - D \left(\frac{1 + \Delta\rho}{e^0 (\Delta\rho - e^0)} \right)^{1/2} J_1(u, \alpha), \quad y = -D J_2(u, \alpha) \quad (20.31)$$

$$J_{1,2}(u, \alpha) = \int_u^1 \frac{(1 \mp u^\theta) du}{\sqrt{1 - (2 - 4\alpha) u^\theta + u^{2\theta}}} \\ (0 \leq u \leq 1)$$

Поверхность раздела BC

$$x = D \left(\frac{(1 + \Delta\rho)(1 + e^0)}{e^0 \Delta\rho} \right)^{1/2} J_3(u, \alpha) \\ y = -H + D \left(\frac{1 - e^0}{\Delta\rho (\Delta\rho - e^0)} \right)^{1/2} J_4(u, \alpha) \quad (20.32)$$

$$J_{3,4}(u, \alpha) = \int_u^1 \frac{(1 \pm u^\theta) du}{\sqrt{(1 + (2 - 4\alpha) u^\theta + u^{2\theta}} \\ (0 \leq u \leq 1)}$$

В этих уравнениях

$$D = \frac{C}{1-2\delta}, \quad \theta = \frac{4\delta}{1-2\delta}, \quad 0 = \frac{2}{1-2\delta} \quad (20.33)$$

$$e^0 = \frac{e}{k}, \quad \Delta\rho = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} = \frac{c}{k}$$

Последние считаются заданными в каждом конкретном случае, и, таким образом, уравнения (20.31) и (20.32) содержат две неизвестные константы: параметр отображения α и вещественную постоянную D .

Для определения α можно задать отношение половины ширины канала l к глубине поверхности грунтовых вод T вне линзы, равной ординате точки C . Величину l получим, интегрируя первое уравнение (20.20) по t от 0 до $\arcsin \sqrt{\alpha}$; одновременно

сделаем замену $t = \arcsin(\sqrt{\alpha} \sin v)$, с помощью которой устраняется особенность подынтегральной функции на верхнем пределе интегрирования:

$$l := (1 - 2\delta) D J(\alpha)$$

$$J(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{\lambda \sin[2\delta \arcsin(\sqrt{\alpha} \sin v)] - \cos[2\delta \arcsin(\sqrt{\alpha} \sin v)]}{\sqrt{1 - \alpha \sin^2 v}} dv \quad (20.34)$$

Разделив равенство (20.34) на второе уравнение (20.31), в котором предварительно положим $u=0$, получим следующее уравнение для определения параметра α :

$$\frac{(1 - 2\delta) J(\alpha)}{J_2(0, \alpha)} = l^o \quad \left(l^o = \frac{l}{T} \right) \quad (20.35)$$

Что касается постоянной D , то она определяется в результате задания размера одного из участков границы, например величины T , если параметр α предварительно найден.

Для электронной вычислительной машины М-20 составлена программа вычисления координат неизвестных участков границы линзы, свободной поверхности и поверхности раздела по уравнениям (20.28) и (20.29). Предварительно из уравнения (20.35) определяется параметр α . Для проверки правильности расчетов можно воспользоваться равенством (см. фиг. 41, а)

$$L = l + L'$$

в котором L и L' — длины горизонтальных проекций участков CD и BC — вычисляются непосредственно, а величина l известна, поскольку задаются величины l/T и T .

Другим контрольным соотношением является следующее:

$$H = T + T'$$

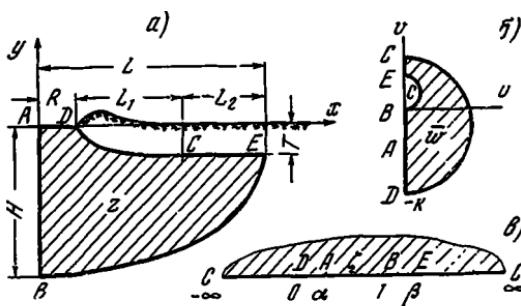
где T' — длина вертикальной проекции участка BC — определяется при расчетах, а максимальная глубина линзы H получается в результате интегрирования первого уравнения (20.19) по t от $\arcsin \sqrt{\alpha}$ до $\pi/2$; одновременно с помощью замены $t = \arcsin \sqrt{\alpha} + (1 - \alpha) \sin^2 v$ устраним особенность подынтегральной функции на нижнем пределе интегрирования. Имеем

$$H = D(1 - 2\delta) \int_0^{\pi/2} \left\{ \lambda \sin[2\delta \arcsin \sqrt{\alpha} + (1 - \alpha) \sin^2 v] + \right. \\ \left. + \cos[2\delta \arcsin \sqrt{\alpha} + (1 - \alpha) \sin^2 v] \right\} \frac{dv}{\sqrt{\alpha + (1 - \alpha) \sin^2 v}}$$

В § 21 на основе найденного решения будут выведены приближенные зависимости, определяющие размеры линзы, и дан анализ этих зависимостей, результаты же приведенных расчетов на ЭВМ будут проанализированы в § 24 в сопоставлении с результатами, получающимися при другой постановке.

В обозначениях (20.33) до сих пор мы имели дело со случаем $\Delta\rho > \varepsilon^o$. Предположим теперь, что выполняется соотношение $\Delta\rho < \varepsilon^o$ ($c < \varepsilon$).

Годограф скорости для этого случая представлен фиг. 42, б. Для замыкания границы годографа в плоскости ω должен существовать некоторый промежуточный участок CE между участками CD и BE . Отрезку CE , изображенному на фиг. 42, б,



Фиг. 42

в области z соответствует горизонтальный участок, являющийся продолжением свободной поверхности (фиг. 42, а), причем интенсивность испарения на нем убывает от ε в точке C до c в точке E .

На практике более распространенным является, по-видимому, случай $\Delta\rho > \varepsilon^o$. Действительно, в ряде засушливых областей грунтовые воды имеют обычно довольно высокую минерализацию — порядка 15—20 г/л и выше, что соответствует значениям $\Delta\rho > 0.01$. С другой стороны, параметр ε , который при постановке задачи принимается равным некоторому среднему значению интенсивности испарения со свободной поверхности линзы (см. § 22), исчисляется величинами порядка 0.001—0.005 м/сутки, а будучи отнесенными к коэффициенту фильтрации k , равному, например, для мелководистых песков 5—10 м/сутки, он оказывается еще меньшим. Эти прикидки позволяют ограничиться детальным изучением задачи при $\Delta\rho > \varepsilon^o$; на случае же $\Delta\rho < \varepsilon^o$ мы остановимся лишь вкратце.

Решение и в этом случае найдено путем применения аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. Соответствие между точками z и ζ указано на фиг. 42, в.

Число точек с неустранимой особенностью равно теперь четырем: это точки C, D, B и E . Схема решения такова. Вначале, как и в предыдущем случае, определяются показатели в особых точках; общий интеграл линейного дифференциального уравнения выражается при помощи символа Римана следующим образом:

$$Y = P \left\{ \begin{matrix} 0 & \alpha & 1 & \beta & \infty \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & 2 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & 5/2 \end{matrix} \right\} \zeta$$

В результате замены

$$Y = (\zeta - \alpha)^{-1/2} \tilde{Y} \quad (20.36)$$

перейдем к функции \tilde{Y} ; для нее соответствующее дифференциальное уравнение имеет точку $\xi = \alpha$ уже в качестве обыкновенной:

$$\tilde{Y} = P \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & \beta & \infty \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 & 2 \end{matrix} \right\} \zeta$$

Само уравнение записывается так [46]:

$$\tilde{Y}'' + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta-1} + \frac{1}{\zeta-\beta} \right) \tilde{Y}' + \frac{3(\zeta-\lambda)}{\zeta(\zeta-1)(\zeta-\beta)} \tilde{Y} = 0 \quad (20.37)$$

Здесь λ — неизвестный заранее аксессорный параметр.

Затем область комплексной скорости ω отображается на полуплоскость ζ . Учитывая, что

$$\omega = \frac{d\omega}{dz} = \frac{\Omega}{Z} = \frac{\bar{\Omega}}{\bar{Z}} \quad (20.38)$$

где интегралы $\bar{\Omega}$ и \bar{Z} уравнения (20.37) связаны с искомыми функциями Ω и Z соотношениями вида (20.36), находим в результате отображения отношение двух линейно независимых интегралов $\bar{\Omega}$ и \bar{Z} уравнения (20.37). Пользуясь далее формулой Остроградского — Лиувилля, из уравнения

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\frac{\bar{\Omega}}{\bar{Z}} \right) = \frac{A}{\bar{Z}^2} \exp \left[- \int p(\zeta) d\zeta \right], \quad A = \text{const} \quad (20.39)$$

где $p(\zeta) = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta-1} + \frac{1}{\zeta-\beta} \right)$

— коэффициент при \tilde{Y}' в уравнении (20.37), найдем \tilde{Z} , из (20.38) — $\tilde{\Omega}$, а затем, учитывая соотношение (20.36), определим искомые функции Z и Ω .

Решение имеет сложный вид. Выпишем здесь в комплексной форме дифференциальные уравнения, полученные для участка CD свободной поверхности и для поверхности раздела BE .

Участок CD

$$Z = \frac{dz}{d\zeta} = C \frac{B_1}{\sqrt{-\zeta(\alpha-\zeta)(1-\zeta)(\beta-\zeta)}} F \left(\arcsin \sqrt{\frac{-\zeta}{1-\zeta}}; \sqrt{1-\frac{1}{\beta}} \right) \quad (20.40)$$

$$B_1 = \operatorname{sh} \ln \sqrt{C_1} \cos \frac{\pi}{2K(\sqrt{1-\beta^{-1}})} + i \operatorname{ch} \ln \sqrt{C_1} \sin \frac{\pi}{2K(\sqrt{1-\beta^{-1}})} \quad (-\infty \leq \zeta \leq 0)$$

Участок BE

$$Z = \frac{dz}{d\zeta} = C \frac{B_2}{\sqrt{\zeta(\zeta-\alpha)(\zeta-1)(\beta-\zeta)}} F \left(\arcsin \sqrt{\frac{\beta-\zeta}{\beta-1}}; \sqrt{1-\frac{1}{\beta}} \right) \quad (20.41)$$

$$B_2 = \operatorname{sh} \ln \sqrt{C_0} \sin \frac{\pi}{2K(\sqrt{1-\beta^{-1}})} + i \operatorname{ch} \ln \sqrt{C_0} \cos \frac{\pi}{2K(\sqrt{1-\beta^{-1}})} \quad (1 \leq \zeta \leq \beta)$$

В этих уравнениях C — неизвестная постоянная, F и K — обозначения эллиптических интегралов первого рода (см. § 6): постоянные C_0 и C_1 выражаются через параметры (20.33) так:

$$C_0 = \frac{\varepsilon^o + \chi}{\varepsilon^o - \chi}, \quad C_1 = \frac{1 + \Delta\rho + \chi}{1 + \Delta\rho - \chi}, \quad \chi = \sqrt{\varepsilon^o(\varepsilon^o - \Delta\rho)(1 + \Delta\rho)}$$

Для параметра β при отображении области ω на полуплоскость ζ получается следующее соотношение:

$$\frac{K(\sqrt{1/\beta})}{K(\sqrt{1-1/\beta})} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{C_0}{C_1} \quad (20.42)$$

Вычисления на ЭВМ проводились в той же последовательности, что и для случая $\Delta\rho > \varepsilon^o$: вначале из соотношения, аналогичного соотношению (20.35), определялся параметр α (параметр β вычислялся предварительно из (20.42)); затем путем интегрирования уравнений (20.40) и (20.41), преобразованных к виду, удобному для расчетов, вычислялись координаты отдельных точек участка CD свободной поверхности и поверхности раздела BE ; кроме того, для контроля вычислений по соответствующему уравнению подсчитывалась максимальная глубина H линзы.

Был рассмотрен также случай $\Delta\rho = \varepsilon^o$, для которого решение получается

методом конформных отображений. Так как этот случай является сугубо частным и к тому же получается как предельный из случая $\Delta\rho > \varepsilon^0$, мы не будем специально останавливаться на нем.

§ 21. О расчете размеров линзы и некоторых приближенных зависимостях для случая $\Delta\rho > \varepsilon^0$

Если положить в уравнениях (20.31) и (20.32) $u=0$, то получим равенства, определяющие размеры горизонтальных и вертикальных проекций свободной поверхности и поверхности раздела линзы.

Для свободной поверхности CD имеем (фиг. 41, а)

$$\begin{aligned} L' = L - l &= D \sqrt{\frac{1 + \Delta\rho}{\varepsilon^0 (\Delta\rho - \varepsilon^0)}} J_1(1, 2\delta, \alpha) \\ T &= DJ_2(1, 2\delta, \alpha) \end{aligned} \quad (21.1)$$

Для поверхности раздела BC

$$\begin{aligned} L &= D \sqrt{\frac{(1 + \Delta\rho)(1 + \varepsilon^0)}{\Delta\rho\varepsilon^0}} J_3(1, 2\delta, \alpha) \\ T' &= D \sqrt{\frac{1 + \varepsilon^0}{\Delta\rho(\Delta\rho - \varepsilon^0)}} J_4(1, 2\delta, \alpha) \end{aligned} \quad (21.2)$$

В уравнениях (21.1) и (21.2) используются обозначения

$$\begin{aligned} J_{1,2}(u, 2\delta, \alpha) &= \int_0^u \frac{(1 \mp u^\theta) du}{\sqrt{1 - (2 - 4\alpha)u^\theta + u^{2\theta}}} \\ J_{3,4}(u, 2\delta, \alpha) &= J_{2,1}(u, 2\delta, 1-\alpha) \end{aligned} \quad (21.3)$$

где ϑ и θ определяются согласно (20.33).

Соотношение (20.35) перепишем так:

$$\lambda\Phi_1(2\delta, \alpha) + \Phi_2(2\delta, \alpha) = l^0 \quad (21.4)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1(2\delta, \alpha) &= (1-2\delta) \frac{J_3(2\delta, \alpha)}{J_2(1, 2\delta, \alpha)} \\ \Phi_2(2\delta, \alpha) &= (1-2\delta) \frac{J_4(2\delta, \alpha)}{J_2(1, 2\delta, \alpha)} \end{aligned} \quad (21.5)$$

$$J_5(2\delta, \alpha) = \int_0^{1/2\pi} \frac{\sin [2\delta \arcsin (\sqrt{\alpha} \sin v)]}{\sqrt{1 - \alpha \sin^2 v}} dv \quad (21.5)$$

$$J_6(2\delta, \alpha) = \int_0^{1/2\pi} \frac{\cos [2\delta \arcsin (\sqrt{\alpha} \sin v)]}{\sqrt{1 - \alpha \sin^2 v}} dv$$

Параметры 2δ и λ имеют согласно (20.14) и (20.18) и (20.33) следующий вид:

$$2\delta = \frac{1}{2}\pi \operatorname{arc tg} \sqrt{\frac{\Delta p - e^\circ}{e^\circ (1 + \Delta p)}} \quad (21.6)$$

$$\lambda = \frac{\operatorname{ctg} \delta \pi}{e^\circ} = \sqrt{\frac{1 + \Delta p}{e^\circ (\Delta p - e^\circ)}} \quad (21.7)$$

В табл. 16 даны значения интегралов $J_1(1, 2\delta, \alpha)$ и $J_2(1, 2\delta, \alpha)$ во всем диапазоне изменения параметров 2δ и α ($0 < 2\delta < 1$, $0 < \alpha < 1$). Пользуясь этой таблицей, можно определить размеры линзы при заданных параметрах Δp и e° , через которые посредством равенства (21.6) выражается 2δ , а также при известном значении α . Последний же находится из соотношения (21.4). Для удобства пользования этим соотношением в табл. 16 приводятся значения функций $\Phi_1(2\delta, \alpha)$ и $\Phi_2(2\delta, \alpha)$, определяемых равенствами (21.5).

На основе уравнений (21.1) и (21.2) можно дать приближенные формулы для размеров линзы, а также сделать некоторые заключения о зависимости этих размеров от физических параметров.

Так как интегралы $J_1 - J_4$, входящие в уравнения (21.1) и (21.2), однотипны, достаточно рассмотреть преобразования для интеграла $J_1(1, 2\delta, \alpha)$. Вводя обозначение

$$b = 2 - 4\alpha \quad (21.8)$$

и производя в интеграле $J_1(1, 2\delta, \alpha)$ замену переменной

$$t = u^{\frac{2}{1-2\delta}}$$

будем иметь

$$J_1(1, 2\delta, \alpha) = \frac{1 - 2\delta}{2} \int_0^1 \frac{(1 - t^{2\delta}) t^{-1/2 - \delta}}{\sqrt{1 - bt + t^2}} dt$$

Таблица 16

Значения интегралов $J_1(1, 2\delta, \alpha)$, $J_2(1, 2\delta, \alpha)$ и функций $\Phi_1(2\delta, \alpha)$, $\Phi_2(2\delta, \alpha)$, вычисленных на ЭВМ М-20

α	Функ- ция	0.01	0.02	0.04	0.06	0.08	0.09	0.05
0.001	J_1	0.2211	0.4033	0.6773	0.8574	0.9619	0.9890	0.9965
	J_2	4.3761	3.9429	3.1432	2.4017	1.6933	1.3457	1.1727
	$10^3 \Phi_1$	0.6498	1.2840	2.4144	3.1611	2.9895	2.1166	1.3008
	Φ_2	0.3231	0.3188	0.2999	0.2617	0.1856	0.1167	0.0670
0.005	J_1	0.2178	0.3975	0.6685	0.8485	0.9560	0.9856	0.9947
	J_2	3.6544	3.3013	2.6619	2.0806	1.5325	1.2653	1.1325
	$10^3 \Phi_1$	1.7460	3.4336	6.3882	8.1728	7.3956	5.0082	2.9708
	Φ_2	0.3873	0.3811	0.3544	0.3032	0.2051	0.1242	0.0694
0.01	J_1	0.2154	0.3932	0.6621	0.8421	0.9517	0.9832	0.9934
	J_2	3.3451	3.0263	2.4554	1.9427	1.4634	1.2307	1.1152
	$10^2 \Phi_1$	0.2711	0.5310	0.9816	1.2408	1.0974	0.7338	0.4274
	Φ_2	0.4707	0.4162	0.3846	0.3239	0.2148	0.1273	0.0704
0.05	J_1	0.2062	0.3768	0.6373	0.8171	0.9349	0.9737	0.9884
	J_2	2.6364	2.3959	1.9814	1.6254	1.3038	1.1506	1.0751
	$10^2 \Phi_1$	0.7807	1.5273	2.7680	3.3708	2.7969	1.7811	1.0055
	Φ_2	0.5431	0.5310	0.4808	0.3897	0.2422	0.1368	0.0731
0.1	J_1	0.2000	0.3657	0.6206	0.8003	0.9234	0.9672	0.9849
	J_2	2.3391	2.1312	1.7818	1.4910	1.2357	1.1162	1.0578
	$10 \Phi_1$	0.1274	0.2486	0.4454	0.5310	0.4257	0.2646	0.1472
	Φ_2	0.6203	0.6046	0.5407	0.4285	0.2566	0.1414	0.0744
0.25	J_1	0.1892	0.3464	0.5914	0.7706	0.9032	0.9565	0.9788
	J_2	1.9593	1.7929	1.5256	1.3175	1.1469	1.0712	1.0351
	$10 \Phi_1$	0.2601	0.5049	0.8868	1.0266	0.7749	0.4643	0.2528
	Φ_2	0.7338	0.7501	0.6556	0.4991	0.2811	0.1487	0.0764
0.5	J_1	0.1788	0.3280	0.5634	0.7419	0.8834	0.9443	0.9727
	J_2	1.6868	1.5497	1.3403	1.1906	1.0810	1.0374	1.0180
	$10 \Phi_1$	0.5043	0.9335	1.6744	1.8588	1.3382	0.7750	0.4141
	Φ_2	0.9877	0.9510	0.8090	0.5878	0.3090	0.1564	0.0785
0.75	J_1	0.1719	0.3157	0.5446	0.7225	0.8699	0.9365	0.9686
	J_2	1.5350	1.4141	1.2364	1.1187	1.0431	1.0179	1.0081
	Φ_1	0.0877	0.1686	0.2848	0.3069	0.2117	0.1194	0.0629
	Φ_2	1.2607	1.2058	0.9983	0.6922	0.3398	0.1646	0.0806
0.9	J_1	0.1686	0.3098	0.5356	0.7132	0.8634	0.9327	0.9665
	J_2	1.4689	1.3549	1.1909	1.0871	1.0263	1.0092	1.0036
	Φ_1	0.1343	0.2574	0.4297	0.4537	0.3038	0.1682	0.0877
	Φ_2	1.5728	1.4960	1.2105	0.8062	0.3721	0.1730	0.0827

Таблица 16 (окончание)

α	Функция	$2\delta=0.1$	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.95
0.95	J_1	0.1674	0.3080	0.5328	0.7104	0.8615	0.9316	0.9659
	J_2	1.4496	1.3376	1.1775	1.0778	1.0213	1.0066	1.0023
	Φ_1	0.1689	0.3232	0.5365	0.5610	0.3706	0.2035	0.1056
	Φ_2	1.7964	1.7035	1.3613	0.8864	0.3945	0.1788	0.0842
0.99	J_1	0.1669	0.3066	0.5307	0.7082	0.8599	0.9307	0.9654
	J_2	1.4349	1.3245	1.1674	1.0707	1.0176	1.0046	1.0013
	Φ_1	0.2484	0.4745	0.7816	0.8064	0.5227	0.2836	0.1461
	Φ_2	2.3026	2.1730	1.7016	1.0665	0.4444	0.1916	0.0874
0.995	J_1	0.1668	0.3065	0.5305	0.7079	0.8597	0.9306	0.9654
	J_2	1.4331	1.3228	1.1662	1.0698	1.0171	1.0044	1.0012
	Φ_1	0.2511	0.5395	0.8868	0.9116	0.5877	0.3178	0.1635
	Φ_2	2.5187	2.3735	1.8466	1.1431	0.4656	0.1971	0.0888
0.999	J_1	0.1667	0.3063	0.5303	0.7077	0.8596	0.9305	0.9653
	J_2	1.4317	1.3216	1.1652	1.0691	1.0167	1.0042	1.0011
	Φ_1	0.3618	0.6901	1.1305	1.1554	0.7385	0.3970	0.2036
	Φ_2	3.0190	2.8373	2.1824	1.3200	0.5146	0.2096	0.0919

Воспользуемся разложением в ряд Тейлора

$$\frac{1}{\sqrt{1-bt+t^2}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k t^k \quad (21.9)$$

Внося (21.9) в интеграл J_1 и выполняя интегрирование, найдем

$$J_1(1, 2\delta, \alpha) = 1 - \frac{1-2\delta}{1+2\delta} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-2\delta)\beta_k}{2k+1-2\delta} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-2\delta)\beta_k}{2k+1+2\delta} \quad (21.10)$$

Рассмотрим следующие два случая, связанные с параметром 2δ .

1. Параметр 2δ мал. Согласно (21.6), этот случай имеет место при $\Delta\rho \approx \varepsilon^0$. Представим суммы в правой части (21.10) в виде рядов по степеням 2δ . Учитывая соотношения

$$\frac{1-2\delta}{2k+1-2\delta} = \frac{1-2\delta}{2\delta} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2\delta}{2k+1}\right)^i$$

$$\frac{1-2\delta}{2k+1+2\delta} = \frac{1-2\delta}{2\delta} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \left(\frac{2\delta}{2k+1}\right)^i$$

получаем

$$J_1(1, 2\delta, \alpha) = \frac{4\delta}{1+2\delta} + 2(1-2\delta)2\delta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{(2k+2)^a} + o[(2\delta)^3] \quad (21.11)$$

Здесь $o[(2\delta)^3]$ — малая величина порядка $(2\delta)^3$, которой будем пренебрегать. Вместо ряда в (21.11) рассмотрим близкий к нему ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{(2k+1)^a - 1} = \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k+1} \right)$$

Найдем суммы рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k+1}$$

Обращаясь к соотношению (21.9) и учитывая (21.8), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k} &= \int_0^1 \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k t^k dt = \int_0^1 \left[\frac{1}{t \sqrt{1-bt+t^a}} - \frac{1}{t} \right] dt = \\ &= \ln \frac{4}{2-b+2\sqrt{2-b}} - \ln \frac{1}{\alpha+\sqrt{\alpha}} \end{aligned} \quad (21.12)$$

и аналогично

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k+1} &= \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k t^k \right) dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1-bt+t^a}} - 1 \right) dt = \\ &= \ln \frac{2-b+2\sqrt{2-b}}{2-b} - 1 = \ln \frac{\alpha+\sqrt{\alpha}}{\alpha} - 1 \end{aligned} \quad (21.13)$$

Таким образом, для интеграла $J_1(1, 2\delta, \alpha)$ получим следующее приближенное выражение:

$$J_1(1, 2\delta, \alpha) \approx \frac{4\delta}{1+2\delta} + \frac{(1-2\delta)2\delta}{2} [\ln(1+\sqrt{\alpha}) - 1] \quad (21.14)$$

Для интеграла J_2 выражение, аналогичное формуле (21.8), отличается от последней лишь тем, что в правой части все знаки положительны:

$$J_2(1, 2\delta, \alpha) = 1 + \frac{1-2\delta}{1+2\delta} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-2\delta)\beta_k}{2k+1-2\delta} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-2\delta)\beta_k}{2k+1+2\delta}$$

При малых значениях параметра 2δ имеем

$$J_2(1, 2\delta, \alpha) = \frac{2}{1+2\delta} + 2(1-2\delta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{2k+1} + o[(2\delta)^2] \quad (21.15)$$

Рассмотрим ряд в правой части (21.15), пользуясь формулой (21.9):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{2k+1} &= \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k t^{2k} \right) dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1-bt^2+t^4}} - 1 \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{d\Phi}{\cos^2 \Phi/2 \sqrt{(1+\tan^2 \Phi/2)^2 - 4(1-\alpha)\tan^2 \Phi/2}} - 1 = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{d\Phi}{\sqrt{1-(1-\alpha)\sin^2 \Phi}} - 1 = \frac{1}{2} K(\sqrt{1-\alpha}) - 1 \end{aligned}$$

$(t = \tan \Phi/2)$

Здесь $K(\sqrt{1-\alpha})$ — полный эллиптический интеграл первого рода при модуле $\sqrt{1-\alpha}$.

Внося полученное для ряда выражение в формулу (21.15) и пренебрегая в ней последним слагаемым порядка $(2\delta)^2$, получаем следующее представление для $J_2(1, 2\delta, \alpha)$:

$$J_2(1, 2\delta, \alpha) \approx (1-2\delta) K(\sqrt{1-\alpha}) + \frac{8\delta^2}{1+2\delta} \quad (21.16)$$

Далее имеем согласно (21.3)

$$J_3(1, 2\delta, \alpha) \approx (1-2\delta) K(\sqrt{1-\alpha}) + \frac{8\delta^3}{1+2\delta} \quad (21.17)$$

$$J_4(1, 2\delta, \alpha) \approx \frac{4\delta}{1+2\delta} + \frac{(1-2\delta)2\delta}{2} [1 - 2 \ln(1 + \sqrt{1-\alpha})] \quad (21.18)$$

Найдем аналогичные представления для интегралов J_5 и J_6 , определяемых равенствами (21.5). Предварительно установим приближенное соотношение

$$2\delta \arcsin(\sqrt{\alpha} \sin v) \approx \arcsin(2\delta \sqrt{\alpha} \sin v) \quad (21.19)$$

Для этого воспользуемся разложением функции арксинуса в степенной ряд, ограничиваясь в нем членами третьего порядка

относительно величины $\sqrt{\alpha} \sin v$:

$$2\delta \arcsin(\sqrt{\alpha} \sin v) \approx 2\delta \sqrt{\alpha} \sin v + \frac{2\delta (\sqrt{\alpha} \sin v)^3}{6}$$

$$\arcsin(2\delta \sqrt{\alpha} \sin v) \approx 2\delta \sqrt{\alpha} \sin v + \frac{(2\delta \sqrt{\alpha} \sin v)^3}{6}$$

Таким образом, с точностью до отброшенных членов порядка $(\sqrt{\alpha} \sin v)^6$ погрешность Δ равенства (21.19) определяется величиной

$$\Delta \approx 2\delta (1 - 4\delta^2) (\sqrt{\alpha} \sin v)^3 \quad (21.20)$$

которая является малой как при малых значениях 2δ , так и при значениях 2δ , близких к единице; последнее обстоятельство используем ниже.

Учитывая (21.19), преобразуем интеграл J_5 :

$$\begin{aligned} J_5 = \int_0^{1/2\pi} \frac{\sin [2\delta \arcsin(\sqrt{\alpha} \sin v)]}{\sqrt{1-\alpha \sin^2 v}} dv &\approx 2\delta \sqrt{\alpha} \int_0^{1/2\pi} \frac{\sin v}{\sqrt{1-\alpha \sin^2 v}} dv = \\ &= \delta \ln \frac{1+\sqrt{\alpha}}{1-\sqrt{\alpha}} = 2\delta \operatorname{ar th} \sqrt{\alpha} \end{aligned} \quad (21.21)$$

Для интеграла J_6 , используя условие малости 2δ , получим

$$\begin{aligned} J_6 &\approx \int_0^{1/2\pi} \frac{\cos [\arcsin(2\delta \sqrt{\alpha} \sin v)]}{\sqrt{1-\alpha \sin^2 v}} dv = \int_0^{1/2\pi} \frac{\sqrt{1-4\delta^2 \alpha \sin^2 v}}{\sqrt{1-\alpha \sin^2 v}} dv \approx \\ &\approx \int_0^{1/2\pi} \frac{dv}{\sqrt{1-\alpha \sin^2 v}} - 2\delta^2 \int_0^{1/2\pi} \frac{\alpha \sin^2 v}{\sqrt{1-\alpha \sin^2 v}} dv = \\ &= K(\sqrt{\alpha}) - 2\delta^2 [K(\sqrt{\alpha}) - E(\sqrt{\alpha})] \end{aligned} \quad (21.22)$$

Здесь $K(\sqrt{\alpha})$ и $E(\sqrt{\alpha})$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода при модуле $\sqrt{\alpha}$.

Заметим, что сходимость рядов для арксинуса, рассмотренных при обосновании соотношения (21.19), ухудшается с ростом α , поэтому при значениях α , близких к единице, полученными приближенными равенствами (21.21) и (21.22) следует пользоваться с осторожностью.

Перейдем теперь к рассмотрению второго предельного случая.

2. Параметр 2δ близок к единице, что согласно (21.6) имеет место при $\Delta\rho \gg \varepsilon^2$. Далее мы уточним рамки применимости формул, относящихся к рассматриваемому случаю.

Как и в случае малых значений 2δ , для интегралов J_1 — J_4 возьмем за основу выражения вида (21.10) и представим суммы в правых частях этих выражений в форме рядов по степеням параметра $\sigma = 1 - 2\delta$. Для этого воспользуемся соотношениями

$$\frac{\sigma}{2k + \sigma} = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \left(\frac{\sigma}{2k} \right)^l, \quad \frac{\sigma}{2k+2-\sigma} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2k+2} \right)^l \quad (21.23)$$

внося которые в (21.10), получим для $J_1(1, 2\delta, \alpha)$:

$$\begin{aligned} J_1(1, 2\delta, \alpha) = 1 - \frac{1 - 2\delta}{1 + 2\delta} + \frac{\sigma}{2} & \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k+1} \right) - \\ & - \frac{\sigma^2}{4} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k^3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{(k+1)^2} \right] + o(\sigma^2) \end{aligned}$$

Множитель при $\sigma/2$ вычисляется по формулам (21.12) и (21.13)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k+1} = 1 - 2 \ln(1 + \sqrt{\alpha})$$

Выражение при $\sigma^2/4$ преобразуем так:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \left[\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \right] &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \left[\frac{2}{k(k+1)} - \frac{1}{k^2(k+1)^2} \right] \approx \\ &\approx 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k(k+1)} = 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k+1} \right) = 2 [1 - 2 \ln(1 + \sqrt{\alpha})]. \end{aligned}$$

В результате имеем

$$J_1(1, 2\delta, \alpha) \approx 1 - \frac{1 - 2\delta}{1 + 2\delta} + \frac{2\delta(1 - 2\delta)}{2} [1 - 2 \ln(1 + \sqrt{\alpha})]$$

Эта формула совпадает с формулой (21.14) для малых 2δ . Обратимся к интегралу $J_2(1, 2\delta, \alpha)$, для которого имеем согласно (21.23)

$$J_2(1, 2\delta, \alpha) = 1 + \frac{1 - 2\delta}{1 + 2\delta} + \frac{\sigma}{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k+1} \right) + o(\sigma^2)$$

Пренебрегая здесь последним слагаемым $\sigma(\sigma^2)$ и вновь используя формулы (21.12) и (21.13), найдем

$$J_2(1, 2\delta, \alpha) \approx 1 + \frac{(1-2\delta)^2}{2(1+2\delta)} + \frac{1-2\delta}{2} \ln \frac{1}{\alpha}$$

Для интегралов J_3 и J_4 в соответствии с (21.3) получим

$$J_3(1, 2\delta, \alpha) \approx 1 + \frac{(1-2\delta)^2}{2(1+2\delta)} + \frac{1-2\delta}{2} \ln \frac{1}{1-\alpha}$$

$$J_4(1, 2\delta, \alpha) \approx 1 - \frac{1-2\delta}{1+2\delta} + \frac{2\delta(1-2\delta)}{2} [1 - 2 \ln(1 + \sqrt{1-\alpha})]$$

Приближенное представление интеграла J_5 при $2\delta \approx 1$ совпадает с представлением (21.21), полученным для малых значений 2δ , так как в основе преобразований, приведших к формуле (21.21), лежит соотношение (21.19), справедливое в обоих рассматриваемых случаях.

Наконец, для интеграла $J_6(1, 2\delta, \alpha)$ имеем, используя (21.19) и малость параметра $\sigma = 1 - 2\delta$:

$$\begin{aligned} J_6(2\delta, \alpha) &= \int_0^{1/2\pi} \frac{\cos[\arcsin(\sqrt{\alpha} \sin v)] \cos[(1-2\delta) \arcsin(\sqrt{\alpha} \sin v)]}{\sqrt{1-\alpha \sin^2 v}} dv + \\ &+ \int_0^{1/2\pi} \frac{\sin[\arcsin(\sqrt{\alpha} \sin v)] \sin[(1-2\delta) \arcsin(\sqrt{\alpha} \sin v)]}{\sqrt{1-\alpha \sin^2 v}} dv \approx \\ &\approx \int_0^{1/2\pi} \left[1 - \frac{(1-2\delta)^2}{2} \alpha \sin v \right] dv + (1-2\delta) \int_0^{1/2\pi} \frac{\alpha \sin^3 v}{\sqrt{1-\alpha \sin^2 v}} dv = \\ &= \frac{1}{2}\pi + (1-2\delta) [K(\sqrt{\alpha}) - E(\sqrt{\alpha})] - \frac{(1-2\delta)^2 \alpha \pi}{8} \end{aligned}$$

Приближенные формулы, полученные для интегралов $J_1(1, 2\delta, \alpha)$ — $J_6(2\delta, \alpha)$, сведены в табл. 17. Подсчитанные по этим формулам значения интегралов для нескольких комбинаций параметров 2δ и α приведены в табл. 18 в сопоставлении с соответствующими значениями, вычисленными на ЭВМ. Как видно из таблицы, точность приближенных выражений оказывается достаточно высокой, особенно для интегралов J_1 — J_4 , и ими можно пользоваться во всем интервале $(0, 1)$ значений 2δ . При этом для $J_2(1, 2\delta, \alpha)$, а следовательно и для $J_3(1, 2\delta, \alpha)$, расхождения между результатами вычислений по приближенным формулам для $2\delta \approx 0$ и $2\delta \approx 1$ во всем интервале $(0, 1)$ значений 2δ столь незначительны, что обе формулы почти в равной степени приемлемы при $0 < 2\delta < 1$. Для интеграла же $J_6(2\delta, \alpha)$ формулы, выведенные при $2\delta \approx 0$ и $2\delta \approx 1$, можно рекомендовать соответственно для $2\delta < 0.5$ и $2\delta > 0.5$. Заметим

Таблица 17

Приближенные выражения для интегралов $J_{1,2,3,4}(1, 2\delta, \alpha)$, $J_{5,6}(2\delta, \alpha)$
(формулы (21.3) и (21.5))*

$J_1(1, 2\delta, \alpha)$	$\frac{4\delta}{1+2\delta} + \frac{(1-2\delta)2\delta}{2} [1 - 2 \ln(1 + \sqrt{\alpha})]$	$(2\delta \approx 0)$
	$1 - \frac{1-2\delta}{1+2\delta} + \frac{(1-2\delta)2\delta}{2} [1 - 2 \ln(1 + \sqrt{\alpha})]$	$(2\delta \approx 1)$
$J_2(1, 2\delta, \alpha)$	$(1 - 2\delta) K(\sqrt{1-\alpha}) + \frac{8\delta^2}{1+2\delta}$	$(2\delta \approx 0)$
	$1 + \frac{1-2\delta}{2} \ln \frac{1}{\alpha} + \frac{(1-2\delta)^2}{2(1+2\delta)}$	$(2\delta \approx 1)$
$J_3(1, 2\delta, \alpha)$	$(1 - 2\delta) K(\sqrt{\alpha}) + \frac{8\delta^2}{1+2\delta}$	$(2\delta \approx 0)$
	$1 + \frac{1-2\delta}{2} \ln \frac{1}{1-\alpha} + \frac{(1-2\delta)^2}{2(1+2\delta)}$	$(2\delta \approx 1)$
$J_4(1, 2\delta, \alpha)$	$\frac{4\delta}{1+2\delta} + \frac{(1-2\delta)2\delta}{2} [1 - 2 \ln(1 + \sqrt{1-\alpha})]$	$(2\delta \approx 0)$
	$1 - \frac{1-2\delta}{1+2\delta} + \frac{(1-2\delta)2\delta}{2} [1 - 2 \ln(1 + \sqrt{1-\alpha})]$	$(2\delta \approx 1)$
$J_5(2\delta, \alpha)$	$\delta \ln \frac{1+\sqrt{\alpha}}{1-\sqrt{\alpha}} = 2\delta \operatorname{ar th} \sqrt{\alpha}$	$(2\delta \approx 0)$ $(2\delta \approx 1)$
$J_6(2\delta, \alpha)$	$K(\sqrt{\alpha}) - 2\delta^2 [K(\sqrt{\alpha}) - E(\sqrt{\alpha})]$	$(2\delta \approx 0)$
	$\frac{1}{8}\pi + (1-2\delta)[K(\sqrt{\alpha}) - E(\sqrt{\alpha})] - \frac{\alpha\pi(1-2\delta)^2}{8}$	$(2\delta \approx 1)$

*Выражения для J_5 и J_6 при $2\delta \approx 0$ и $2\delta \approx 1$ различны лишь по форме записи.

также, что погрешность выражений для J_5 и J_6 становится существенной лишь в тех случаях, когда $2\delta \approx 0.5$, а параметр α близок к единице (примерно при $\alpha > 0.9$); в действительности же, как мы увидим ниже, значения α редко выходят за пределы интервала $(0, 0.25)$.

Для выяснения вопроса о наиболее интересных (с практической точки зрения) значениях параметра 2δ обратимся к формуле (21.6), по которой 2δ выражается через параметры $\Delta\rho$ и δ° .

Таблица 18

Сопоставление значений интегралов $J_{1,2}$ ($1,2\delta, \alpha$) и $J_{5,6}$ ($2\delta, \alpha$), вычисленных на ЭВМ (первые строки), с их приближенными значениями (при наличии трех строк вторые строки — по формулам для $2\delta \approx 0$, трети — для $2\delta \approx 1$; для J_6 ($2\delta, 1$) вторые строки при $2\delta=0.2; 0.4$ — по формулам для $2\delta \approx 0$, при $2\delta \approx 0.8; 0.9$ — для $2\delta \approx 1$)

2δ	Интегралы	$\alpha=0.001$	0.1	0.5	0.9	0.999
0.2	J_1	0.4033	0.3657	0.3280	0.3098	0.3063
		0.4083	0.3709	0.3277	0.3056	0.3024
	J_2	3.9429	2.1312	1.5497	1.3549	1.3216
		3.9395	2.1291	1.5549	1.3566	1.3236
	J_5	4.0298	2.1877	1.5439	1.3288	1.2971
		0.0063	0.0662	0.1886	0.4360	1.1401
	J_6	0.0063	0.0655	0.1763	0.3637	0.8294
		1.5712	1.6108	1.8423	2.5337	4.6874
	J_6	1.5712	1.6110	1.8440	2.5516	4.7660
0.4	J_1	0.6773	0.6206	0.5634	0.5356	0.5303
		0.8839	0.6279	0.5631	0.5313	0.5251
	J_2	3.1433	1.7818	1.3403	1.1909	1.1652
		3.1333	1.7755	1.3411	1.1961	1.1713
	J_5	3.2009	1.8193	1.3355	1.1602	1.1289
		0.0127	0.1323	0.3740	0.8529	2.1955
	J_6	0.0127	0.1310	0.3525	0.7274	1.5588
		1.5711	1.6057	1.8072	2.4026	4.2382
	J_6	1.5712	1.6093	1.8340	2.5220	4.6992
0.6	J_1	0.8574	0.8003	0.7419	0.7132	0.7078
		0.8625	0.8065	0.7417	0.7099	0.7037
	J_2	2.4017	1.4910	1.1906	1.0871	1.0691
		2.3864	1.4812	1.1916	1.0950	1.0785
	J_5	2.4315	1.5105	1.1886	1.0711	1.0502
		0.0190	0.1979	0.5533	1.2327	3.0823
	J_6	0.0190	0.1965	0.5288	1.0910	2.4882
		1.5711	1.5974	1.7495	2.1910	3.5282
	J_6	1.5711	1.5978	1.7635	2.3153	4.1515
		1.5710	1.5973	1.7408	2.1050	3.0442
0.8	J_1	0.9619	0.9235	0.8834	0.8634	0.8596
		0.9639	0.9265	0.8834	0.8622	0.8580
	J_2	1.6933	1.2357	1.0810	1.0263	1.0167
		1.6793	1.2267	1.0799	1.0336	1.0253
		1.7019	1.2414	1.0804	1.0216	1.0112

Таблица 18 (окончание)

2δ	Интегралы	$\alpha=0.001$	0.1	0.5	0.9	0.999
0.9	J_5	0.0253	0.2631	0.7230	1.5590	3.5741
		0.0253	0.2620	0.7051	0.4547	3.3176
	J_6	1.5709	1.5857	1.6702	1.9093	2.6163
		1.5710	1.5856	1.6636	1.8518	2.3232
	J_1	0.9890	0.9652	0.9443	0.9327	0.9305
		0.9896	0.9686	0.9450	0.9357	0.9339
	J_2	1.3457	1.1162	1.0374	1.0092	1.0042
		1.3362	1.1099	1.0365	1.0133	1.0092
		1.3480	1.1177	1.0373	1.0079	1.0027
	J_5	0.0285	0.2954	0.8040	1.6978	3.9866
		0.0285	0.2948	0.7932	1.6365	3.7323
	J_6	1.5709	1.5787	1.6229	1.7462	2.1052
		1.5709	1.5786	1.6192	1.7150	1.9510

Минерализация грунтовых вод в засушливых зонах членится всего на составляет, по данным С. Ф. Аверьянова ([4], стр. 63), 10—50 г/л (другие исследователи приводят аналогичные цифры), что соответствует величине $\Delta\rho=0.01 \div +0.03$. В отдельных случаях, при более высокой минерализации грунтовых вод, значения $\Delta\rho$ могут достигать 0.06—0.1. Для параметра e° , характеризующего некоторую среднюю (по времени и по простираннию линзы) приведенную (отнесенную к коэффициенту фильтрации) величину интенсивности испарения со свободной поверхности линзы, наиболее вероятные значения, по-видимому, не должны превышать 0,0005—0,001, если учесть, что в основной части линзы свободная поверхность проходит на некоторой глубине (1,5—2,5 м) от поверхности земли. Из приведенных данных видно, что отношение $\Delta\rho/e^\circ$ обычно исчисляется десятками, а в некоторых случаях и сотнями. По-видимому, наиболее вероятным диапазоном значений величины $\Delta\rho/e^\circ$ является интервал (10, 100), и, таким образом, в соответствии с первой формулой (21.6) $0.8 < 2\delta < 0.93$. Это значит, что на практике чаще встречается второй из рассмотренных предельных случаев, когда параметр 2δ близок к единице; установленными для $2\delta \approx 1$ приближенными соотношениями можно пользоваться, как мы видели выше, уже при $2\delta > 0.6 \div 0.7$. Имея в виду в дальнейшем именно этот случай, исследуем характер зависимостей размеров линзы от физических параметров задачи.

Обратимся к уравнению (21.4), служащему для определения параметра α . Перепишем это уравнение, учитывая (21.5), так:

$$(1 - 2\delta) \lambda \frac{J_5(2\delta, \alpha)}{J_2(1, 2\delta, \alpha)} + (1 - 2\delta) \frac{J_6(2\delta, \alpha)}{J_2(1, 2\delta, \alpha)} = l^\circ \quad (21.24)$$

Для больших значений величины $\Delta\rho/\varepsilon^o$ можем написать согласно (21.6) и (21.7)

$$(1 - 2\delta) \approx \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{\frac{\Delta\rho - \varepsilon^o}{\varepsilon^o(1 + \Delta\rho)}} \right) \approx \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon^o(1 + \Delta\rho)}{\Delta\rho - \varepsilon^o}} \quad (21.25)$$

$$(1 - 2\delta)\lambda \approx \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon^o(1 + \Delta\rho)}{\Delta\rho - \varepsilon^o}} \sqrt{\frac{1 + \Delta\rho}{\varepsilon^o(\Delta\rho - \varepsilon^o)}} = \frac{2}{\pi} \frac{(1 + \Delta\rho)}{\Delta\rho - \varepsilon^o}$$

Далее, используя приближенные выражения для интегралов $J_2(1, 2\delta, \alpha)$, $J_5(2\delta, \alpha)$ и $J_6(2\delta, \alpha)$ при $2\delta \approx 1$ (см. табл. 17), найдем:

$$\frac{J_5(2\delta, \alpha)}{J_2(1, 2\delta, \alpha)} \approx \frac{2\delta \operatorname{arctg} \sqrt{\alpha}}{1 - 1/2(1 - 2\delta) \ln \alpha}$$

$$\frac{J_6(2\delta, \alpha)}{J_5(1, 2\delta, \alpha)} \approx \frac{\pi}{2[1 - 1/2(1 - 2\delta) \ln \alpha]}$$

Таким образом, вместо уравнения (21.24) получим для определения α следующее приближенное соотношение:

$$\frac{4\delta(1 - \Delta\rho)}{\pi(\Delta\rho - \varepsilon^o)} \operatorname{arcth} \sqrt{\alpha} + \frac{\pi}{2}(1 - 2\delta) \approx l^o \left(1 + \frac{1 - 2\delta}{2} \ln \frac{1}{\alpha} \right)$$

Представим это равенство в виде

$$\alpha \approx \operatorname{th}^2 \frac{\pi(\Delta\rho - \varepsilon^o)[l^o - 1/2(1 - 2\delta)(l^o \ln \alpha + \pi)]}{4\delta(1 - \Delta\rho)} \quad (21.26)$$

Из уравнения (21.26) параметр α можно найти методом итераций.

В случае $\alpha \approx 1$ приближенные выражения для интегралов J_5 и J_6 дают, как видно из табл. 17, преуменьшенные значения. При выводе формулы (21.26) это преуменьшение еще более усиливается отбрасыванием в формуле для J_6 второго и третьего членов, влияние которых (особенно второго члена) на величину интеграла J_6 становится ощутимым именно при значениях α , близких к единице. Следовательно, в указанном случае значения параметра α , найденные из соотношения (21.26), окажутся преувеличенными.

Если параметр α является величиной порядка $\exp(-\pi/l^o)$, то величиной $1/2(1 - 2\delta)(l^o \ln \alpha + \pi)$ в формуле (21.26) можно пренебречь; если, кроме того, $\varepsilon^o \ll \Delta\rho$ и $\Delta\rho \ll 1$, что характерно для рассматриваемого случая ($2\delta \approx 1$) и, согласно сказанному ранее, часто наблюдается на практике, то соотношение (21.26) сущ-

ственно упрощается

$$\alpha \approx \operatorname{th}^2 \frac{\pi \Delta p l^\circ}{4\delta} \quad (21.27)$$

Среди условий применимости этой простой формулы особенно важную роль играет замечание относительно самого параметра α . При малых значениях α слагаемым, содержащим $\ln 1/\alpha$, в правой части (21.26) нельзя пренебречь, однако вследствие малости всей дроби можно записать

$$\alpha \approx \left\{ \frac{\pi (\Delta p - e^\circ) [l^\circ - 1/2(1 - 2\delta)(l^\circ \ln \alpha + \pi)]}{4\delta (1 + \Delta p)} \right\}^2 \quad (21.28)$$

Пользуясь формулой (21.27), удобно сделать некоторые прикидки в отношении возможных значений параметра α . Выше указывалось, что на практике чаще всего $\Delta p < 0.03$. Отношение l° половины ширины канала l к глубине T поверхности грунтовых вод обычно представляет величину порядка нескольких единиц и лишь для очень крупных каналов и при высоком уровне грунтовых вод величина l° исчисляется десятками. Таким образом, за редкими исключениями имеем $1/2\pi\Delta p l^\circ < 1$ и согласно (21.27) $\alpha < 0.5$. Фактически же в большинстве случаев $\alpha = 0.005 \div 0.1$, и поэтому для определения α можно рекомендовать как наиболее употребительную формулу (21.28). Как видно из формул (21.26) — (21.28), значение параметра α существенно зависит от l° и Δp , в то время как влияние параметра e° на величину α оказывается незначительным. Это замечание понадобится нам ниже.

Вернемся теперь к уравнениям (21.1) и (21.2) для основных размеров линзы и проследим, как зависят эти размеры от тех физических параметров, которыми они определяются.

Постоянная D в уравнениях (21.1) и (21.2), имеющая размерность длины, определяется, как уже говорилось в § 20, заданием величины T , которую на практике можно вычислить посредством замеров.

Приняв T за единицу измерения, будем иметь дело с размерами линзы, отнесенными к T ; сохраним за ними прежние обозначения.

Из второго уравнения (21.1) найдем

$$D = \frac{1}{J_2(1, 2\delta, \alpha)}$$

и, таким образом, имеем

$$L' = \sqrt{\frac{1 + \Delta p}{e^\circ (\Delta p - e^\circ)}} \quad \frac{J_1(1, 2\delta, \alpha)}{J_2(1, 2\delta, \alpha)}$$

$$L = \sqrt{\frac{(1 + \Delta\rho)(1 + \varepsilon^o)}{\Delta\rho\varepsilon^o}} \quad \frac{J_3(1, 2\delta, \alpha)}{J_2(1, 2\delta, \alpha)} \quad (21.29)$$

$$T' = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon^o}{\Delta\rho(\Delta\rho - \varepsilon^o)}} \quad \frac{J_4(1, 2\delta, \alpha)}{J_3(1, 2\delta, \alpha)}$$

Кроме того, для максимальной глубины линзы H можем записать

$$H = T + T' = 1 + \sqrt{\frac{1 + \varepsilon^o}{\Delta\rho(\Delta\rho - \varepsilon^o)}} \quad \frac{J_4(1, 2\delta, \alpha)}{J_3(1, 2\delta, \alpha)} \quad (21.30)$$

Основной интерес представляют две геометрические характеристики: величина L , определяющая половину ширины линзы, и глубина ее H . Исследование этих величин начнем с тех случаев, когда в приближенных выражениях для интегралов $J_1(1, 2\delta, \alpha) — J_4(1, 2\delta, \alpha)$ можно пренебречь членами, содержащими $(1-2\delta)$, и принять $2\delta \approx 1$; тогда $J_{1, 2, 3, 4}(1, 2\delta, \alpha) \approx 1$. Кроме того, будем считать, что

$$\varepsilon^o \ll \Delta\rho \ll 1 \quad (21.31)$$

(первое из этих неравенств характеризует случай $2\delta \approx 1$). При указанных условиях согласно (21.29) и (21.30) имеем

$$L \approx L' \approx 1/\sqrt{\Delta\rho\varepsilon^o}, \quad H \approx T' \approx 1/\Delta\rho \quad (21.32)$$

В рамках выполнения перечисленных выше условий соотношения (21.32) определяют зависимости величин L и H от параметров ε^o и $\Delta\rho$. В более широком диапазоне изменения ε^o и $\Delta\rho$ эти зависимости нарушаются — прежде всего вследствие изменения интегралов $J_1(1, 2\delta, \alpha) — J_4(1, 2\delta, \alpha)$. Поэтому помимо соотношений (21.29) найдем для L и H выражения, представляющие следующее приближение к точным значениям этих величин.

Обращаясь к найденным для интегралов $J_1 — J_4$ приближенным выражениям (см. табл. 17) и учитывая малость величины $(1-2\delta)$, на основе формул (21.29) — (21.30) при условиях (21.31) получаем

$$L \approx \frac{1}{\sqrt{\Delta\rho\varepsilon^o}} \left(1 + \frac{1-2\delta}{2} \ln \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)$$

$$H \approx \frac{1}{\Delta\rho} \left[1 + \frac{1-2\delta}{2} \ln \frac{\alpha}{(1 + \sqrt{1-\alpha})^2} \right]$$

Исходя из первой зависимости (21.25), можем написать при выполнении условий (21.31) соотношение

$$\frac{1-2\delta}{2} \approx \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon^o}{\Delta\rho}} \quad (21.33)$$

внося которое в предыдущие равенства, представим их в виде

$$L \approx \frac{1}{V \Delta \rho \varepsilon^o} + \frac{1}{\pi \Delta \rho} \ln \frac{\alpha}{1-\alpha} \quad (21.34)$$

$$H \approx \frac{1}{\Delta \rho} + \frac{1}{\pi \Delta \rho} \sqrt{\frac{\varepsilon^o}{\Delta \rho}} \ln \frac{\alpha}{(1 - \sqrt{1-\alpha})^2} \quad (21.35)$$

С помощью этих приближенных соотношений исследуем влияние каждого из основных параметров задачи: ε^o , $\Delta \rho$ и l^o на величины L и H .

1. Зависимость от ε^o . Ранее было сделано заключение о слабой зависимости α от ε^o . Таким образом, при изменении только ε^o второй член правой части формулы (21.34) практически остается постоянным — отрицательным при $\alpha < 0.5$ и положительным при $\alpha > 0.5$. Влияние же параметра ε^o на величину L проявляется через первое слагаемое.

Из (21.35) видно, что зависимость H от ε^o , будучи обратной во всем интервале $(0,1)$ значений α , для которых $\ln[\alpha/(1 + \sqrt{1-\alpha})^2] < 0$ является весьма слабой при α , близких к единице, когда и выполняется второе соотношение (21.32), и постепенно усиливается с убыванием α , однако проявляется все же в меньшей степени, чем зависимость L от ε^o .

2. Зависимость от $\Delta \rho$. Влияние параметра $\Delta \rho$ на величины L и H проявляется как явным образом, так и в значительной степени через α . Согласно (21.26)–(21.28), с возрастанием $\Delta \rho$ параметр α также возрастает, оставаясь, как отмечалось выше, меньшим 0.5 (для тех значений $\Delta \rho$ и l^o , которые встречаются на практике); при этом $\ln[\alpha/(1-\alpha)] < 0$, возрастающая (убывая по модулю). При малых значениях $\Delta \rho$ и соответственно параметра α положительный первый член правой части (21.34) в значительной степени компенсируется отрицательным вторым членом, влияние которого ослабевает с ростом параметра $\Delta \rho$. С помощью методов дифференциального исчисления, исходя из зависимости (21.27) для α , можно показать, что второй член возрастает (в области положительных значений) и при $\alpha > 0.5$, однако ввиду того, что этот случай является редким, мы не будем останавливаться на нем.

Аналогичное влияние на величину H оказывает и второй член в формуле (21.35), который является отрицательным при $0 < \alpha < 1$ и монотонно убывает по абсолютной величине с ростом $\Delta \rho$.

3. Зависимость от l^o при фиксированных значениях параметров $\Delta \rho$ и ε^o проявляется через α . С возрастанием l^o растет согласно (21.26) и параметр α , а вместе с ним и вторые члены в правых частях формул (21.34) и (21.35), что обуславливает

возрастание ширины линзы $2L$ и, в меньшей степени, максимальной ее глубины H .

Иллюстрация и физическая интерпретация отмеченных закономерностей изменения величин L и H будут проведены в § 24.

При использовании формул (21.34) и (21.35) следует проверять выполнение условий (21.31), позволивших упростить радикалы в выражениях (21.29) и (21.30), и воспользоваться соотношением (21.33). Кроме того, необходимо следить за членами, содержащими параметр α , при малых значениях которого точность формул (21.34) и (21.35) может оказаться недостаточной. В этом случае для L и H целесообразно пользоваться выражениями, которые получаются из формул (21.29) и (21.30) и приближенных представлений для интегралов $J_2(1, 2\delta, \alpha) - J_4(1, 2\delta, \alpha)$ при малых значениях α . Если считать условия (21.31) выполненными и в связи с этим воспользоваться соотношением (21.33), то имеем

$$L \approx \frac{1}{V \Delta \rho e^\circ (1 - \pi^{-1} \sqrt{e^\circ / \Delta \rho} \ln z)} \quad (21.36)$$

$$H \approx \frac{1 - (1 - 2\delta) \ln 2}{\Delta \rho (1 + \pi^{-1} \sqrt{e^\circ / \Delta \rho} \ln \alpha)}$$

Рассмотрим отношение $2L/H$ ширины линзы к ее максимальной глубине; это отношение характеризует степень вытянутости линзы. Из уравнений (21.29) — (21.30) при условиях (21.31) найдем, пользуясь приближенными представлениями для интегралов

$$\frac{2L}{H} \approx \sqrt{\frac{\Delta \rho}{e^\circ}} \frac{1 - 1/2(1 - 2\delta) \ln(1 - \alpha)}{1 - (1 - 2\delta) \ln(1 + \sqrt{1 - \alpha})}$$

Если параметр α не слишком близок к единице, то можно записать

$$2L/H \approx \sqrt{\Delta \rho / e^\circ}$$

Таким образом, при больших значениях величины $\Delta \rho / e^\circ$ отношение $2L/H$ зависит только от отношения параметров $\Delta \rho$ и e° . Иными словами, изменение $\Delta \rho$ и e° в одинаковое число раз сопровождается равномерным увеличением — при убывании $\Delta \rho$ и e° — или уменьшением — при возрастании указанных параметров — размеров линзы.

В заключение остановимся на вопросе о форме свободной поверхности и поверхности раздела линзы. Для этих участков границы имеем следующие уравнения:

Свободная поверхность CD

$$x = L - D \sqrt{\frac{1 + \Delta p}{\varepsilon^o (\Delta p - \varepsilon^o)}} J_1(u, 2\delta, \alpha) \quad (21.37)$$

$$y = -T + DJ_2(u, 2\delta, \alpha) \\ (0 \leq u \leq 1)$$

Поверхность раздела BC

$$x = L - D \sqrt{\frac{(1 + \Delta p)(1 + \varepsilon^o)}{\Delta p \varepsilon^o}} J_3(u, 2\delta, \alpha) \quad (21.38)$$

$$y = -T - D \sqrt{\frac{1 + \varepsilon^o}{\Delta p (\Delta p - \varepsilon^o)}} J_4(u, 2\delta, \alpha) \\ (0 \leq u \leq 1)$$

Ограничивааясь в разложении (21.9) первым членом ряда и учитывая (21.3), найдем

$$J_{1,2}(u, 2\delta, \alpha) \approx u + (1 - 2\alpha) \frac{1 - 2\delta}{3 - 2\delta} u^{(3-2\delta)/(1-2\delta)} \mp \frac{1 - 2\delta}{1 + 2\delta} u^{(1+2\delta)/(1-2\delta)} \quad (21.39)$$

При $2\delta \approx 1$ отброшенные члены имеют порядок величины u^{θ} , а степенные члены в (21.39) — порядок величины u^{θ} (где $\theta = 2/(1-2\delta)$) и, таким образом, малы по сравнению с u на значительной части отрезка $0 \leq u \leq 1$; в этой части можно, следовательно, пользоваться приближенными равенствами

$$J_{1,2,3,4} \approx u \quad (21.40)$$

Соответствующие участки кривых CD и BC близки к прямым линиям, уравнения которых определяются формулами (21.37) и (21.38) с учетом (21.40). Таким образом, при построении свободной поверхности и поверхности раздела мы сразу получаем значительную часть этих кривых в виде прямолинейного участка; начиная с некоторого значения u , приходится учитывать также степенные члены в (21.39). В дальнейшем для большей точности можно привлечь члены более высокого порядка, однако в практике вполне достаточно, по-видимому, ограничиться соотношением (21.39) (а в некоторых случаях и (21.40)), досстроив «от руки» оставшуюся малую часть кривых CD и BC .

Интересно проследить за отношением ординат h^+ и h^- свободной поверхности и поверхности раздела, отсчитываемых от начального (до фильтрации из канала) положения поверхности

грунтовых вод (фиг. 41, *a*); величина h^- представляет глубину вытеснения пресными водами линзы соленых вод. В указанной «прямолинейной» части кривых CD и BC согласно (21.37), (21.38) и (21.40) при условии $\varepsilon^o \ll \Delta\rho$ имеем

$$\frac{h^+}{h^-} = \frac{y^{(1)} + T}{y^{(2)} - T} \approx \sqrt{\frac{\Delta\rho (\Delta\rho - \varepsilon^o)}{1 + \varepsilon^o}} \approx \Delta\rho \quad (21.41)$$

Последнее соотношение, характеризующее гидростатическое равновесие линзы, используется некоторыми исследователями для связи ординат свободной поверхности $y^{(1)}$ и ординат поверхности раздела $y^{(2)}$ при рассмотрении фильтрации в гидравлической постановке. Заметим, что в «прямолинейной» части линзы в соответствии с (21.41) фактически имеет место неравенство $h^+ < h^- - \Delta\rho$, что объясняется наличием в этой части вертикальных «восходящих» компонент фильтрационного потока. В зоне же канала наблюдается существенное отклонение от (21.41) в противоположную сторону, в «пользу» ординат h^+ : $h^+ > h^- - \Delta\rho$; это отклонение представляет разность напоров, которая обусловливает «нисходящую» фильтрацию в указанной части линзы. Оба отмеченных нарушения условия $h^+ = h^- - \Delta\rho$ гидростатического равновесия линзы суть результат решения задачи в гидродинамической постановке.

§ 22. Решение задачи при допущении о пропорциональности испарения длине вертикальной проекции соответствующего участка свободной поверхности

Правая половина области фильтрации изображена на фиг. 43, *a*. На участках границы выполняются те же условия, что и в предыдущей постановке (см. § 20), за исключением второго условия на свободной поверхности CD : вместо (20.1) положим [49]

$$\Psi - \varepsilon y - \frac{1}{2} Q \quad (22.1)$$

Записав (22.1) для некоторых двух точек M_1 и M_2 свободной поверхности, получим (ср. с (20.2))

$$\Psi_{M_2} - \Psi_{M_1} = \varepsilon (y_2 - y_1) \quad (22.2)$$

откуда следует, что величина испарения с участка $M_1 M_2$ свободной поверхности пропорциональна длине вертикальной проекции этого участка.

В следующем параграфе мы несколько подробнее остановимся на зависимостях (20.1) и (22.1), сейчас же рассмотрим решение задачи при законе испарения (22.1).

Выясним вначале, какой вид имеет теперь участок CD на плоскости ω . Для этого продифференцируем условия на CD по s — длине дуги свободной поверхности:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} + k \frac{\partial y}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \varepsilon \frac{\partial y}{\partial s} = 0 \quad (22.3)$$

Так как

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = u \cos \beta + v \sin \beta$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = u \sin \beta - v \cos \beta$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin \beta$$

где β — угол касательной к дуге CD в рассматриваемой точке с осью x , то уравнения (22.3) преобразуются так:

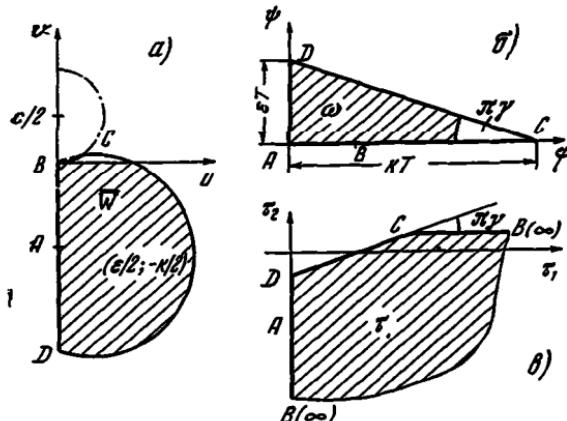
$$u \cos \beta + v \sin \beta + k \sin \beta = 0$$

$$u \sin \beta - v \cos \beta - \varepsilon \sin \beta = 0$$

Отсюда, исключая β , найдем

$$(u - \frac{1}{2} \varepsilon)^2 + (v + \frac{1}{2} k)^2 = \frac{1}{4} (\varepsilon^2 + k^2) \quad (22.4)$$

Таким образом, в области $\bar{\omega}$ участку CD отвечает дуга окружности (22.4) с центром в точке $(\varepsilon/2, -k/2)$, проходящая через начало координат. Остальные участки границы гидографа также проходят через начало координат (фиг. 43, а),



Фиг. 43

и, следовательно, задача решается путем конформного отображения двух областей с прямолинейными границами: $\omega = \varphi + i\psi$ (фиг. 43, б) и $\tau = 1/\omega$ (фиг. 43 в) на полуплоскость ζ (фиг. 41, в) при помощи формулы Кристоффеля — Шварца.

Формулы отображений имеют следующий вид:

$$\omega = M \int_0^{\zeta} \zeta^{-\gamma-1/2} (\alpha - \zeta)^{-1/2} d\zeta + ieT \quad (22.5)$$

$$\frac{1}{w} = \frac{dz}{d\omega} = N \int_0^{\zeta} \zeta^{\gamma-1/2} (1 - \zeta)^{-3/2} d\zeta - \frac{i}{k} \quad (22.6)$$

Для определения постоянных M и N запишем уравнения (22.5) и (22.6) на участке CD ($-\infty < \zeta < 0$), где $\zeta = (-\zeta) e^{i\pi}$. Имеем

$$\omega = M \exp \left[-i \left(\pi\gamma - \frac{\pi}{2} \right) \right] \int_0^{\zeta} (-\zeta)^{-\gamma-1/2} (\alpha - \zeta)^{-1/2} d\zeta + ieT \quad (22.7)$$

$$\frac{1}{w} = \frac{dz}{d\omega} = N \exp \left[i \left(\pi\gamma - \frac{\pi}{2} \right) \right] \int_0^{\zeta} (-\zeta)^{\gamma-1/2} (1 - \zeta)^{-3/2} d\zeta - \frac{i}{k} \quad (22.8)$$

Положим здесь $\zeta = \infty$ (точка C). При этом $\omega = \varphi = kT$. Для определения соответствующего значения w_c — координаты точки C в плоскости w — решим систему уравнений (22.3) и (22.4) для окружностей BC и CD

$$u^2 + v^2 - cv = 0, \quad u^2 + v^2 - \varepsilon u + kv = 0$$

откуда

$$w_c = u_c - iv_c = \frac{ce(c+k) - ice^2}{(c+k) + \varepsilon^2}$$

Второе решение системы $w=0$ определяет координату точки B .

Используя установленное соответствие точек, получим из равенств (22.7) и (22.8) следующие выражения для постоянных M и N :

$$M = \frac{kT - ieT}{ie^{-i\pi\gamma} \alpha^{-\gamma}} \left(\int_0^{\infty} (-\zeta)^{-\gamma-1/2} (\alpha - \zeta)^{-1/2} d\zeta \right)^{-1} = \\ (\alpha - \zeta = \alpha/t) \quad (22.9)$$

$$\begin{aligned}
& = -ikT\alpha^\gamma e^{i\pi\gamma} \left(1 - i \frac{\varepsilon}{k} \right) \left(\int_0^1 t^{\gamma-1} (1-t)^{-\gamma-1/2} dt \right)^{-1} = \\
& = -ikT\alpha^\gamma e^{i\pi\gamma} \frac{\cos \pi\gamma - i \sin \pi\gamma}{\cos \pi\gamma B(\gamma, 1/2 - \gamma)} = \\
& = -ikT\alpha^\gamma \frac{\Gamma(1/2)}{\cos \pi\gamma \Gamma(\gamma) \Gamma(1/2 - \gamma)} = -ikT\alpha^\gamma \frac{\Gamma(1/2 + \gamma)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\gamma)} \\
N & = \frac{i(c+k)(k-i\varepsilon)e^{-i\pi\gamma}}{ck} \left(\int_0^\infty (-\zeta)^{\gamma-1/2} (1-\zeta)^{-1/2} d\zeta \right)^{-1} = \\
& \quad (1 - \zeta = 1/t) \\
& = -i \frac{c+k}{ck \sin \pi\gamma B(1-\gamma, 1/2 + \gamma)} = -i \frac{(c+k) \Gamma(3/2)}{ck \sin \pi\gamma \Gamma(1-\gamma) \Gamma(1/2 + \gamma)} = \\
& \quad = -i \frac{c+k}{2\sqrt{\pi} ck} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1/2 + \gamma)}
\end{aligned} \tag{22.10}$$

В этих формулах использованы: обозначение B -функции (эйлерова интеграла первого рода)

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{1-p} (1-x)^{1-q} dx$$

ее выражение через Γ -функцию (эйлеров интеграл второго рода)

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad \Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx$$

а также известные (см., например, [50], гл. VII) свойства Γ -функции

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \quad \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}$$

Введя обозначение

$$\Phi(\zeta) = \int_0^\zeta \zeta^{\gamma-1/2} (1-\zeta)^{-1/2} d\zeta$$

и используя уравнение (22.5), представим (22.6) в виде

$$dz = MN\Phi(\zeta) \zeta^{-\gamma-1/2} (\alpha-\zeta)^{-1/2} d\zeta - M \frac{i}{k} \zeta^{-\gamma-1/2} (\alpha-\zeta)^{-1/2} d\zeta$$

Интегрируя, получаем¹

$$z = l + MN \int_0^{\zeta} \Phi(\zeta) \zeta^{-\gamma-1/2} (\alpha - \zeta)^{-1/2} d\zeta + M \frac{i}{k} \int_0^{\zeta} \zeta^{-\gamma-1/2} (\alpha - \zeta)^{-1/2} d\zeta \quad (22.11)$$

Запись (22.11) удобна для участка AD , где $0 \leq \zeta \leq \alpha$.

На свободной поверхности CD можно воспользоваться уравнениями (22.7) и (22.8), из которых аналогично предыдущему найдем

$$\begin{aligned} z = l - MN \int_0^{\zeta} \Psi(\zeta) (-\zeta)^{-\gamma-1/2} (\alpha - \zeta)^{-1/2} d\zeta - \\ - \frac{M}{k} e^{-i\pi\gamma} \int_0^{\zeta} (-\zeta)^{-\gamma-1/2} (\alpha - \zeta)^{-1/2} d\zeta \end{aligned} \quad (22.12)$$

$$\Psi(\zeta) = \int_0^{\zeta} (-\zeta)^{\gamma-1/2} (1-\zeta)^{-3/2} d\zeta$$

$$(-\infty < \zeta < 0)$$

Для получения уравнений поверхности раздела BC формулы отображений (22.5) и (22.6) представим иначе, используя соответствие функций для точки C :

$$\omega_c = kT, \quad \frac{1}{w_c} = \frac{c+k}{ce} + \frac{i}{c} \text{ при } \zeta = \infty$$

Тогда вместо (22.5) и (22.6) будем иметь

$$\omega = kT - iM \int_{\zeta}^{\infty} \zeta^{-\gamma-1/2} (\zeta - \alpha)^{-1/2} d\zeta$$

$$\frac{1}{w} = \frac{dz}{d\omega} = \frac{1}{w_c} + iN \int_{\zeta}^{\infty} \zeta^{\gamma-1/2} (\zeta - 1)^{-3/2} d\zeta$$

¹ Формулы (22.5) и (22.6) получены С. Мевлюдовым в его дипломной работе, выполненной им под руководством В. Эмиха в 1963 г. в Ташкентском государственном университете им. В. И. Ленина.

откуда в результате интегрирования получим

$$z = z_c + MN \int_{\zeta}^{\infty} \Omega(\zeta) \zeta^{-\gamma-1/2} (\zeta - \alpha)^{-1/2} d\zeta - i \frac{M}{w_c} \int_{\zeta}^{\infty} \zeta^{-\gamma-1/2} (\zeta - \alpha)^{-1/2} d\zeta$$

$$\Omega(\zeta) = \int_{\zeta}^{\infty} \zeta^{\gamma-1/2} (\zeta - 1)^{-3/2} d\zeta \quad (1 \leq \zeta \leq \infty) \quad (22.13)$$

Наконец, для участка AB , на котором

$$\alpha \ll \zeta \ll 1, \quad d\omega = iM \zeta^{-\gamma-1/2} (\zeta - \alpha)^{-1/2} d\zeta$$

найдем, интегрируя (22.6):

$$z = iMN \int_a^{\zeta} \Phi(\zeta) \zeta^{-\gamma-1/2} (\zeta - \alpha)^{-1/2} d\zeta + \frac{M}{k} \int_a^{\zeta} \zeta^{-\gamma-1/2} (\zeta - \alpha)^{-1/2} d\zeta \quad (22.14)$$

Уравнения (22.11)–(22.14) представляют решение задачи в квадратурах. Для получения количественных характеристик была составлена программа вычислений для ЭВМ. Как и в прежней постановке задачи, вначале из соотношения для l/T определяется параметр a , после чего путем интегрирования соответствующих уравнений вычислялись координаты свободной поверхности и поверхности раздела. Уравнения предварительно преобразовывались: для каждого участка производилась такая замена независимой переменной, при которой в новой переменной полный промежуток интегрирования становился равным $[0,1]$. Кроме того, выделялись малые промежутки вблизи концов этого основного промежутка интегрирования (ввиду особенностей подынтегральных функций на концах); в этих промежутках интегралы вычислялись приближенно.

В данном случае постоянные M и N посредством формул (22.9) и (22.10) полностью определены через параметры задачи; роль постоянной D в прежней постановке играет теперь T . Для контроля вычислений в этом случае также использовались геометрические соотношения, подобные тем, о которых говорилось в § 20

§ 23. О характере зависимостей (20.1) и (22.1) для испарения со свободной поверхности

Остановимся несколько подробнее на физической сущности законов испарения (20.1) и (22.1). Попытаемся выяснить, каков характер изменения интенсивности испарения вдоль свободной поверхности при этих зависимостях. Под интенсивностью или плотностью испарения ε_s в данной точке будем понимать предел отношения величины испарения с элемента дуги свободной поверхности, содержащего рассматриваемую точку, к длине элемента при стягивании последнего в точку; согласно этому опре-

делению, имеем

$$\varepsilon_s = \left| \frac{\partial \psi}{\partial s} \right| \quad (23.1)$$

Условимся здесь и в дальнейшем называть постановку задачи с использованием зависимостей (20.1) и (22.1) соответственно первой и второй, а сравниваемые характеристики снабжать индексами 1 и 2.

Дифференцируя равенства (20.1) и (22.1) по s и сообразуясь с выбором системы координат, получаем

$$\varepsilon_{s1} = \varepsilon_1 dx/ds \quad (23.2)$$

$$\varepsilon_{s2} = -\varepsilon_2 dy/ds \quad (23.3)$$

Поскольку параметры ε_1 и ε_2 фиксированы, интенсивность испарения в точках свободной поверхности согласно (23.2) и (23.3) пропорциональна величине dx/ds в первой постановке и величине dy/ds — во второй. Указанные величины являются косинусами углов, образуемых касательной к свободной поверхности в данной точке с осями x и y соответственно. Следовательно, в первой постановке интенсивность испарения ε_s , должна возрастать с удалением от канала по мере выполнения свободной поверхности; во второй же постановке картина является обратной. Таким образом, если поверхность земли вблизи канала горизонтальна, то в соответствии с зависимостью (20.1) интенсивность испарения возрастает с глубиной вопреки известным закономерностям, в частности, широко распространенной и проверенной на практике формуле С. Ф. Аверьянова ([51], стр. 140)

$$\varepsilon_s = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\Delta}{\Delta_{kp}} \right)^n \quad (23.4)$$

Здесь ε_0 — интенсивность испарения у поверхности земли, где она максимальна; Δ — глубина рассматриваемой точки свободной поверхности от поверхности земли; Δ_{kp} — так называемая критическая глубина, начиная с которой ε_s практически равно нулю; n — показатель, определяющий характер убывания интенсивности испарения с глубиной; как указывает С. Ф. Аверьянов, $1 < n < 3$; чаще всего $n \approx 2$.

В § 21 отмечалось, что, начиная с некоторого расстояния от канала, свободная поверхность по форме близка к прямолинейной; при этом $dx/ds \approx \text{const}$, $dy/ds \approx \text{const}$ и согласно (23.2) — (23.3) интенсивность испарения, определенная зависимостями (20.1) и (22.1), начиная с указанного расстояния становится постоянной. Если поверхность земли не горизонтальна, как

предполагалось выше, а также понижается с удалением от канала, будучи более или менее параллельной свободной поверхности линзы, так что величина Δ в формуле (23.4) изменяется незначительно, то на участке «прямолинейности» свободной поверхности обе зависимости (20.1) и (22.1) согласуются с закономерностью (23.4); однако в остальной, криволинейной части свободной поверхности расхождение между ними является существенным. Проследим за изменением величины ε_{ss} . Перепишем выражение (23.3) в виде

$$\dot{\varepsilon}_{ss} = \varepsilon_2 \frac{1}{\sqrt{1 + (dx/dy)^2}}$$

Выражение для dx/dy на свободной поверхности найдем из уравнения (22.12), разделив в нем предварительно действительную и мнимую части. С учетом формул (22.9) и (22.10) для M и N получим после некоторых выкладок зависимость для ε_{ss} , которую представим в безразмерных параметрах (20.33):

$$\dot{\varepsilon}_{ss} = \dot{\varepsilon}_s \left[1 + \left(\dot{\varepsilon}_s + \frac{(1 + \Delta\rho) \Gamma(\gamma)}{2 \sqrt{\pi} \Delta\rho \Gamma(1/2 + \gamma) \cos \pi\gamma} \Psi(\zeta) \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (23.5)$$

Функция $\Psi(\zeta) \leq 0$ определяется согласно (22.12).

Вычисление $\dot{\varepsilon}_{ss}$ в различных точках свободной поверхности предусмотрено программой для ЭВМ. Непосредственно из формулы (23.5) видно, что в точке D , для которой $\zeta = 0$, $\Psi(\zeta) = 0$, имеем

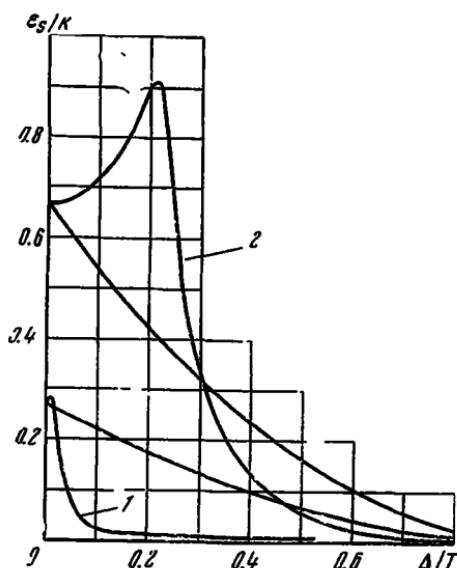
$$\dot{\varepsilon}_{ss} \Big|_{\zeta=0} = \frac{\dot{\varepsilon}_s}{\sqrt{1 + (\dot{\varepsilon}_s)^2}} < \dot{\varepsilon}_s \quad (23.6)$$

Максимального же значения, равного $\dot{\varepsilon}_s$, величина $\dot{\varepsilon}_{ss}$ достигает при некотором $\zeta < 0$, определяемом из равенства

$$\dot{\varepsilon}_s + \frac{(1 + \Delta\rho) \Gamma(\gamma)}{2 \sqrt{\pi} \Delta\rho \Gamma(1/2 + \gamma) \cos \pi\gamma} \Psi(\zeta) = 0 \quad (23.7)$$

Характер убывания величины $\dot{\varepsilon}_{ss}$ с глубиной иллюстрируется фиг. 44 для двух комбинаций параметров; вдоль оси абсцисс откладывается величина $\Delta^2 = \Delta/\Gamma$. Кривая 1 соответствует случаю $\Delta^2 = 5$, $\Delta\rho = 0.1$, $\dot{\varepsilon}_s = 0.281$; для кривой 2 $\dot{\varepsilon}_s = 0.909$, остальные параметры прежние. Выбор $\dot{\varepsilon}_s$ поясним ниже. Для более наглядного представления о поведении кривых на фиг. 44 вычерченены также графики величины ε_s , определяемой выражением (23.4) при $n = 2$, $\Delta_{kp} = T$, $\varepsilon_0 = \dot{\varepsilon}_{ss} \Big|_{\zeta=0}$ (формула (23.6)).

Как известно, при отсутствии испарения или инфильтрации свободная поверхность является линией тока, в каждой точке которой скорость фильтрации направлена по касательной к ней. При испарении к касательной составляющей скорости добавляется нормальная, а вектор результирующей скорости фильтрации направлен вовне под углом к касательной. Этим объясняется



Фиг. 44. Графики интенсивности испарения при $l^o=5$, $\varepsilon_1^o=0.1$, $\varepsilon_0^o=0.281$ (кривая 1) при $l^o=5$, $\varepsilon_1^o=0.01$, $\varepsilon_0^o=0.909$ (кривая 2), пологие кривые построены по зависимостям (22.4) при $n=2$

то обстоятельство, обнаруживающееся и при вычислении координат, что от точки D , где скорость фильтрации вертикальна, свободная поверхность «возвращается» назад и только начиная с некоторого значения параметра ζ , определяемого уравнением (23.7), «поворачивает» и начинает удаляться от канала. При указанном значении ζ касательная к свободной поверхности вертикальна, а интенсивность испарения ε_s , как отмечалось выше, достигает максимума, равного ε_s^o . Этот максимум соответствует вершинам «горбов» у кривых на фиг. 44. Отмеченное «выедание» свободной поверхности вблизи канала и относительная величина «горбов» тем значительнее, чем больше ε_s^o , что следует из (23.6).

Мы видим, что зависимость (22.1) описывает процесс изменения интенсивности испарения по глубине в искаженном виде, что отражается и на форме свободной поверхности линзы. Второй постановке присущ еще один недостаток, для выявления

которого положим в соотношении (22.1) $y = -T$, $\psi = 0$ (фиг. 43, а), имеем

$$Q_2 = 2\varepsilon_2 T \quad (23.8)$$

Величина T в каждом конкретном случае считается известной, и, таким образом, параметр ε_2 определяется величиной Q фильтрационных потерь из канала. Между тем задание последней характеристики требует специальных наблюдений, что не всегда удобно.

В первой постановке величина Q становится известной после решения задачи и вычисления длины L' горизонтальной проекции свободной поверхности, ибо согласно равенству (20.1), записанному для точки C ($x = l + L'$, $\psi = 0$), имеем

$$Q_1 = 2\varepsilon_1 L' \quad (23.9)$$

В соответствии с (23.9) параметр ε_1 можно интерпретировать как некоторую среднюю величину испарения со свободной поверхности линзы на единицу длины ее горизонтальной проекции. Что же касается интенсивности испарения ε_{s1} , определенной соотношением (23.2), то она монотонно возрастает в «криволинейной» части свободной поверхности до некоторой, практически постоянной величины — интенсивности испарения вдоль «прямолинейного» участка свободной поверхности. Указанное возрастание интенсивности испарения, равно как и постоянство ее на участке «прямолинейности», может до некоторой степени соответствовать действительной картине в тех случаях, когда от берегов каналов, вдоль которых обычно устраивают насыпи, поверхность земли понижается вначале быстрее, чем свободная поверхность линзы, а затем идет более или менее параллельно последней, на участке ее «прямолинейности». На этом участке $dx/ds \approx 1$ и согласно (23.2) $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_{s1}$, что обуславливает выбор параметра ε_1 как величины интенсивности испарения на глубине прохождения «прямолинейного» участка свободной поверхности линзы.

Проведенное здесь рассмотрение особенностей обеих постановок задачи приводит к выводу о том, что первая постановка является, по-видимому, предпочтительней. Вычисления по формулам второй постановки проводились с целью сопоставления картины потока в той и другой постановке. Параметр ε_2 задавался при расчетах таким образом, чтобы для сравниваемых вариантов первой и второй постановок имело место равенство фильтрационных расходов из канала (или, что одно и то же, суммарных расходов на испарение): $Q_1 = Q_2$. Согласно (23.8) и

(23.9), имеем

$$\varepsilon_{s2} = \frac{L'}{T} \varepsilon_1 \quad (23.10)$$

Внося это выражение в формулу (23.3), получим

$$\varepsilon_{s2} = -\varepsilon_1 \frac{L'}{T} \frac{dy}{ds} \quad (23.11)$$

При значениях параметра 2δ , близких к единице, свободная поверхность, как выяснилось в § 21, за исключением незначительной ее части, прилегающей к каналу, близка по форме к прямой (в сечении). В этом случае вдоль свободной поверхности $\frac{dy}{dx} \approx -\frac{T}{L'}$ (см. фиг. 41, a) и в соответствии с формулой (23.11) имеем

$$\varepsilon_{s2} \approx \varepsilon_1 \frac{dx}{ds} = \varepsilon_{s1}$$

Таким образом, в случае, когда форма свободной поверхности линзы в преобладающей ее части близка к прямолинейной, условие равенства суммарного испарения с поверхности в обеих постановках приводит к тому, что величины ε_{s1} и ε_{s2} , постоянные на участке «прямолинейности» свободной поверхности, оказываются к тому же почти равными, т. е. обе постановки определяют примерно одинаковый в количественном и качественном отношении характер испарения со свободной поверхности. Последнее обстоятельство, как мы увидим в § 24, обеспечивает незначительность расхождений в размерах линз для той и другой постановки при $2\delta \approx 1$.

§ 24. Анализ результатов вычислений

В табл. 19 приведены основные результаты вычислений [52, 53], выполненных на электронно-вычислительной машине М-20 по формулам задачи в первой и второй постановках. Наряду с рассмотренными выше характеристиками потока в последнем столбце таблицы фигурируют значения отношения $\eta = Q/Q_0$ фильтрационных потерь из канала Q в том или ином случае исследуемой подпрерой фильтрации к потерям для случая свободной фильтрации при тех же значениях параметров k и l . Величина Q_0 , как известно, определяется равенством

$$Q_0 = 2kl \quad (24.1)$$

Сопоставив (24.1) с (23.9), получим выражение для величины η , характеризующей роль подпора в уменьшении фильтраци-

Таблица 9

Значения основных характеристик линз в первой и второй постановках

№ варианта	$2L_1, \mu$	$\Delta\rho$	ε_1°	2δ	α	ε_2°	$2L_1, \mu$	$2L_2, \mu$	H_1, μ	H_2, μ	$\frac{2L_1}{H_1}$	$\frac{2L_2}{H_2}$	η	
1	0.1	10	0.01	0.7859	0.4750	0.281	66.05	78.71	9.46	9.56	6.98	8.23	0.056	
2			0.005	0.8497	0.4506	0.207	92.79	105.86	9.80	9.87	9.47	10.72	0.041	
3			0.002	0.9053	0.4260	0.137	146.52	159.16	10.16	10.19	14.42	15.62	0.027	
4			0.001	0.9332	0.4124	0.099	207.51	220.30	10.38	10.40	19.99	21.18	0.020	
5			0.0005	0.9527	0.4023	0.071	294.05	307.56	10.54	10.55	27.90	29.15	0.014	
6			0.0002	0.9701	0.3930	0.046	466.11	475.34	10.70	10.70	43.56	44.42	0.0091	
7			0.0001	0.9787	0.3881	0.033	660.22	663.67	10.78	10.78	61.24	61.56	0.0065	
8			0.005	0.7042	0.0063	0.260	529.70	1008.98	101.47	116.27	5.22	8.67	0.052	
9			0.01	0.7942	0.0154	0.221	452.36	683.15	64.01	68.31	7.05	10.00	0.044	
10			0.02	0.8551	0.0414	0.181	370.88	473.12	38.48	39.44	9.64	12.00	0.036	
11	(4)	0.1	0.05	0.001	0.9074	0.1630	0.130	270.26	303.40	18.49	18.63	14.61	16.29	0.026
12			0.15	0.9332	0.4124	0.099	207.51	220.30	10.38	10.40	19.99	21.18	0.020	
13			0.2	0.9442	0.6205	0.084	177.53	186.17	7.42	7.42	23.92	25.09	0.017	
14			2	0.9507	0.7613	0.075	159.33	165.52	5.88	5.88	27.00	28.14	0.015	
15	10	0.1	0.01	0.7859	0.4750	0.237	49.46	72.73	7.54	7.98	6.56	9.09	0.237	
16	(4)	0.1	20	0.001	0.9332	0.4124	0.099	66.05	78.71	9.46	9.56	6.98	8.23	0.056
17			20	0.001	0.9332	0.4124	0.099	207.51	220.30	10.38	10.40	19.99	21.18	0.020
18			20	0.001	0.9332	0.4124	0.099	186.98	212.62	9.52	9.57	19.64	22.21	0.093
19	10	0.01	0.1	—	0.0131	0.550	25.97	118.50	13.60	25.47	1.91	4.65	0.550	
20	10	0.01	0.1	—	0.2414	0.909	54.18	126.23	26.90	36.34	2.01	3.47	0.182	
	20	0.01	0.1	—	0.4183	1.072	75.72	145.45	36.36	45.12	2.08	3.22	0.107	

онных потерь из канала [51]:

$$\eta = \varepsilon_1^{\circ} \frac{L'_1}{l} \quad (24.2)$$

В пятой и шестой колонках таблицы содержатся соответственно значения величины 2δ (формула (21.6)) и параметра α , входящего в решение задачи при первой постановке.

Расчеты производились для $T=1$ м; при другом значении T все размеры линзы изменяются пропорционально.

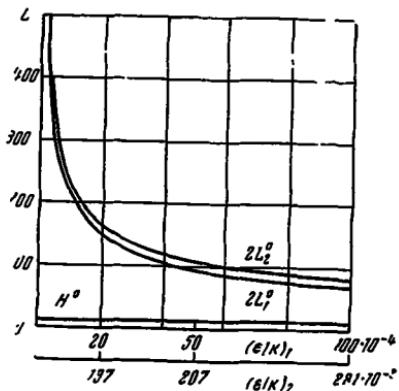
Из таблицы видно, что сходство в размерах линз, определенных при двух различных постановках, оказывается весьма значительным, если величина 2δ близка к единице. С уменьшением 2δ возрастает доля «криволинейной» части свободной поверхности (см. (21.37) и (21.39)), на которую, следовательно, приходится все большая часть суммарного испарения Q_2 . Так как $Q_1=Q_2$, то на остальном, «прямолинейном» участке, размеры которого по-прежнему остаются преобладающими, во все большей степени выполняется неравенство $\varepsilon_{s_2} < \varepsilon_{s_1}$, а вместе с тем и неравенство $L_2 > L_1$. Эта закономерность, выражаяющая рост расходления между двумя сравниваемыми решениями с уменьшением 2δ , отражена в таблице.

Проиллюстрируем сделанные ранее в § 21 заключения о влиянии физических параметров на размеры линз, пользуясь главным образом результатами решения в первой постановке.

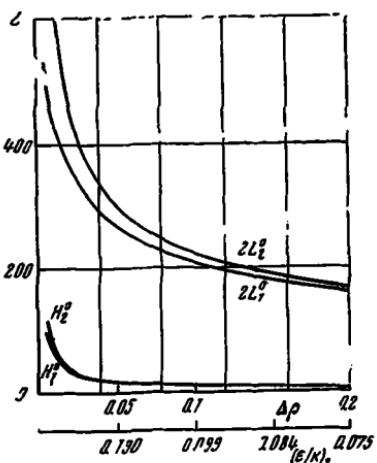
1. Зависимость от ε° . В группе вариантов, отражающих в таблице зависимость размеров линз от величины ε_1° (табл. 19, строки 1—7, фиг. 45), значения параметров таковы, что во всем диапазоне изменения ε_1° — от 0.01 до 0.0001 — параметр α близок к 0.4 и, таким образом, значения величин L и H с достаточной для практики точностью определяются соотношениями (21.32). Величина H в рассмотренном интервале значений ε_1° изменяется весьма слабо, в то время как величина L возрастает с уменьшением ε_1° пропорционально $1/\sqrt{\varepsilon_1^{\circ}}$, а коэффициент η убывает согласно (24.2) пропорционально $\sqrt{\varepsilon_1^{\circ}}$. При фиксированном k убывание ε_1° означает уменьшение интенсивности испарения. В этом случае как бы возникает дополнительный подпор «сверху» по отношению к водам, фильтрующимся из канала, что вызывает их растекание, главным образом вширь (возрастание L), и уменьшение фильтрационных потерь из канала (убывание η). Если же уменьшение ε_1° происходит за счет увеличения коэффициента фильтрации k , то растекание линзы обусловлено улучшением проницаемости грунта. Уменьшение же величины η означает теперь, что фильтрационные потери из канала возрастают медленнее

(в данном случае почти пропорционально \sqrt{k}), чем было бы при свободной фильтрации (согласно (24.1) Q_0 пропорционально k); в этом проявляется своеобразие подпертого режима фильтрации.

2. Зависимость от $\Delta\rho$ (табл. 19, строки 8—13, фиг. 46). С убыванием параметра $\Delta\rho$ происходит рост линзы; теперь в значительной степени также и вглубь. Убывание $\Delta\rho$ можно интерпретировать как ослабление подпора по отношению к фильтрующимся водам со стороны соленых грунтовых вод вследствие



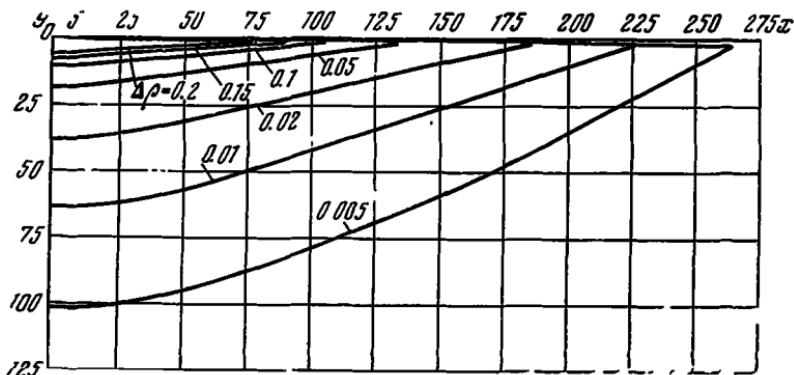
Фиг. 45. Зависимость размеров линзы от параметра ε_1^1
($I^o=5$, $\Delta\rho=0.1$)



Фиг. 46. Зависимость размеров линзы от параметра $\Delta\rho$ ($I^o=5$, $\varepsilon_1=0.001$)

уменьшения плотности последних. Учитывая сказанное в п. 1, можно заключить, что рост размеров линзы обусловлен, с одной стороны, уменьшением подпора «снизу», с другой — увеличением подпора «сверху». В связи с этим интересно вернуться к высказанному в § 21 заключению о равномерном характере изменения размеров линзы при сохранении отношения $\Delta\rho/\varepsilon_1^1$, если величина (1—а) не слишком мала, а параметр 2δ близок к единице. Справедливость этого заключения выявляется при сравнении в табл. 19 вариантов с одинаковыми значениями отношения $\Delta\rho/\varepsilon_1^1$ (строки 1 и 9, 2 и 10, 3 и 11, 5 и 13).

На фиг. 47 приведены кривые свободной поверхности и поверхности раздела, построенные на основе данных вычислений по формулам первой постановки при различных значениях параметра $\Delta\rho$. По форме и отчасти по размерам эти линзы похожи на описанные Я. К. Левиным [54].



Фиг. 47 Графики свободной поверхности и поверхности раздела при различных $\Delta\rho$ ($l^o=5$, $\varepsilon_1^o=0.001$)

3. Зависимость от l . С увеличением ширины канала $2l$ возрастает и ширина линзы, но значительно медленнее. В этом находит выражение явление, отмеченное С. Ф. Аверьяновым ([⁵¹], стр. 150): при подпертой фильтрации величина фильтрационных потерь из канала далеко не пропорциональна его ширине. Как видно из табл. 19, различие в темпах изменения этих двух характеристик проявляется тем заметнее, чем значительнее подпор. Так, при $\Delta\rho=0.1$, $\varepsilon_1^o=0.01$ (строки 14, 1 и 15) увеличение величины $2l$ в отношении 1 : 5 : 10 ($2l=2, 10, 20$ м) влечет возрастание фильтрационных потерь в отношении 1 : 1,181 : 1,218, а при $\Delta\rho=0.1$, $\varepsilon_1^o=0.001$ (строки 6,4 и 17) — лишь в отношении 1 : 1,068 : 1,081. Таким образом, широкие каналы оказываются экономичнее узких с точки зрения уменьшения удельных (на единицу ширины канала) фильтрационных потерь.

Три последние варианта, приведенные в табл. 19, соответствуют случаю $\Delta\rho < \varepsilon_1^o$ (см. § 21). При этом линзы в первой постановке имеют форму, близкую к полукругу, в то время как при второй постановке соответствующие линзы по-прежнему вытянуты в стороны.

В заключение заметим, что в Кулундинской степи, где испарение играет важную роль в динамике подземных вод, особенно в летнее время, а грунтовые воды минерализованы, в случае устройства оросительных каналов, транспортирующих относительно пресную воду, без проведения противофильтрационных мероприятий следует ожидать образования вдоль каналов линз пресных вод, ширина которых может исчисляться десятками, а возможно, и сотнями метров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Каменский, Н. А. Корчебоков, К. И. Разин. Движение подземных вод в неоднородных пластах ОНТИ, 1935.
2. П. Я. Полубаринова-Кочина. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, 1952.
3. А. Н. Мятлев. Действие колодца в напорном бассейне подземных вод.— Изв. Туркм. фил. АН СССР, 1946, № 3.
4. А. Н. Мятлев. Напорный комплекс подземных вод и колодцы.— Изв. АН СССР, ОНТ, 1947, № 9.
5. А. Н. Мятлев. Задача о колодцах в горизонте грунтовых вод.— Изв. АН СССР, ОНТ, 1948, № 3.
6. Н. К. Гришинский. Некоторые вопросы динамики подземных вод.— Гидрогеол. и инж. геол., 1947, № 9.
7. Н. К. Гришинский. Расчет притока воды в подземные выработки в условиях взаимодействия подземных вод пяти, семи водоносных пластов — В кн.: Методы исследований и расчетов при инженерно-геологических и гидрогеологических работах Госгеолиздат, 1951.
8. W F J M. Kruit, F. A. Liefrinck. Recent groundwater investigations in the Netherlands N. Y., Amsterdam, 1946.
9. С. Н. Нумеров, Р. М. Барсютия. Об оценке основных допущений методики расчета фильтрации жидкости в горизонтальных гидравлически связанных пластах.— Изв. Всесоюз. н-ч. ин-та геологии, 1965, 78.
10. П. Я. Полубаринова-Кочина. К гидравлической теории колодцев в многослойной среде — ПММ, 1947, 11, вып. 3.
11. В. Н. Эмих. Скважины в произвольном числе взаимосвязанных напорных горизонтов.— ПМТФ, 1962, № 5
12. И. В. Гармонов, А. В. Иванов, В. М. Сугробов. Области питания и разгрузки подземных вод юго-восточной части Западно-Сибирской низменности.— В кн.: Проблемы гидрогеологии. Госгеотехиздат, 1960.
13. И. В. Гармонов, А. В. Иванов, Е. И. Недедова, Г. Н. Смирнова, В. М. Сугробов. Подземные воды юга Западно-Сибирской низменности и условия их формирования. Изд-во АН СССР, 1961.
14. П. Я. Полубаринова-Кочина. О распределении напоров в слоистых грунтах.— Изв. АН СССР, Мех. и маш., 1963, № 3
15. С. К. Абрамов, В. П. Недрига, А. В. Романов, Е. М. Селюк. Защита территорий от затопления и подтопления. Госстройиздат, 1961.
16. В. А. Ионат. Расчет горизонтального дренажа в неоднородных грунтах. Таллин, Ин-т землед. и мелиорации, 1962
17. В. Н. Эмих. О горизонтальных дrenaх в слоистых грунтах.— ПМТФ, 1962, № 4.
18. Н. И. Гамаюнов, Б. С. Шерхуков. О снижении пьезометрических напоров в подстилающих дреинируемые грунты водоносных горизонтах — ПМТФ, 1962, № 1.
19. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. III, ч. 2. Гостехиздат, 1956.
20. С. Т. Рыбакова, В. Н. Эмих. К задаче о горизонтальном совершенном дренаже при слабопроницаемом водоупоре.— Изв. АН СССР, Мех. жидкости и газа, 1966, № 3.
21. Ю. А. Клоков. Одна предельная краевая задача для уравнения $x + xf(x, \dot{x}) + \phi(x) = 0$.— Изв. высш. учеб. завед., математика, 1959, № 6.
22. П. Я. Полубаринова-Кочина. О дебите скважины в безнапорном движении со слабопроницаемым водоупором.— Изв. АН СССР, Мех. и маш., 1960, № 3.
23. В. Г. Меламед. К расчету дебита скважины в безнапорном движении со слабопроницаемым водоупором.— Изв. АН СССР, Мех. и маш., 1963, № 5

24. С Т Рыбакова К задаче о дебите скважины в безнапорном движении со слабопроницаемым водоупором.— ПМТФ, 1962, № 3.
- 25 И М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехтеориздат, 1948.
- 26 В П Эмих. О взаимодействии скважин в слоистых пластах.— ПМТФ, 1961, № 6.
27. П. Я Полубаринова-Кочина, В. А Постнов, В. Н. Эмих Установившаяся фильтрация к несовершенной галерес в безнапорном пласте — Изв АН СССР, Мех. жидкости и газа, 1967, № 4.
28. В Г Пряжинская Движение грунтовых вод в прямоугольной перемычке с непроплачиваемой вертикальной стеккой.— Изв. АН СССР, Мех. и маш., 1964, № 2.
29. В Г Пряжинская Исследование задачи о фильтрации в перемычке с экраном с помощью щелевого лотка.— Труды коорд. совещ. по гидротехнике, 1965, вып. 21.
- 30 В. Н. Николаевский О точном и приближенном решении одной плоской фильтрации при смешанных граничных условиях.— Изв АН СССР, ОТН, 1957, № 10.
31. П Я Полубаринова-Кочина К вопросу о дебите трубчатых колодцев.— Изв АН СССР, Мех. и маш., 1963, № 2.
- 32 М Маскет Течение однородных жидкостей в пористой среде. Перев. с англ Гостехиздат, 1949.
- 33 Ф. М. Бочевер, Н. Н. Веригин Методическое пособие по расчетам эксплуатационных запасов подземных вод для водоснабжения Госстройиздат, 1961.
- 34 В А. Васильев, Д. Ф Шульгин. О работе фильтра буровой скважины.— Изв. АН СССР, Мех. и маш., 1961, № 1.
35. J S Petersen, C Rockwelt, M L Albertson. Effect of well screens on flow into wells — Proc Amer. Soc Civil Engrs, 1953, 79, N 365.
36. В С. Толмачев. К вопросу о неравномерной перфорации продуктивных пластов в газовых скважинах — Изв. высш. учеб. завед., Нефть и газ, 1960, № 8.
37. Д Ф Шульгин. К вопросу о неравномерной перфорации фильтров скважин — Изв. высш. учеб. завед., Нефть и газ, 1962, № 9.
38. С К. Абрамон, Н Н Биндерман, М. П. Семенов. Водозaborы подземных вод. Госстройиздат, 1947.
39. В Н Кунин Местные воды пустыни и вопросы их использования. Изд-во АН СССР, 1959.
- 40 В Н. Кунин. Линзы пресных вод пустыни. Изд-во АН СССР, 1963.
- 41 С. Ф Аверьянов. Расслоение фильтрации из каналов.— В сб Влияние орошения на режим грунтовых вод, № 2. Изд-во АИ СОСР, 1969.
- 42 П Я Полубаринова-Кочина. О линзе пресных вод над соленой водой — ПММ, 1956, 20, вып. 3.
43. В А. Васильев, И С Теплицкий. Фильтрация пресной воды из канала с малой глубиной на соленые воды — Труды Ташкент. ун-та, Матем. науки, 1961, вып. 189, кн 21.
44. В Н Эмих. Фильтрация с полосы при наличии соленных подпорных вод — ПМТФ, 1962, № 2
- 45 В И Аравин, С. Н. Нуиров. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. Гостехиздат, 1953.
- 46 В. Г. Голубев в Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1950.
47. Б. К. Ризенкампф. Гидравлика грунтовых вод, ч. 3.— Уч. зап. Сарат. гос ун-та, 1940, 15, вып. 6

48. K. Gauß Allgemeine Untersuchungen über die unendliche Reihe $1 + \frac{a\beta}{1-y} x + \dots$ Berlin, 1888.
49. В. Н. Эмих. К задаче о линзе пресных вод при фильтрации из канала — Научн. труды Ташкент. ун-та, 1964, вып. 265.
50. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного перемененного. Физматгиз, 1958.
51. А. Н. Костяков, Н. Н. Фаворин, С. Ф. Аверьянов. Влияние оросительных систем на режим грунтовых вод Изд-во АН СССР, 1956.
52. В. Н. Эмих. О форме линзы пресных вод при фильтрации из канала — Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, 1966, № 2.
53. В. Н. Эмих. О форме линзы пресных вод при фильтрации из канала.— Труды коорд. совещ. по гидротехнике, вып. 35 Л., «Энергия», 1967.
54. Я. К. Левин. Использование фильтрационных вод в зоне оросительных каналов для водоснабжения.— Гидротехника и мелиорация, 1962, № 1.

Часть вторая

НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Эта часть посвящена некоторым задачам о неустановившихся движениях подземных вод, представляющих интерес при рассмотрении различных вопросов, возникающих в связи с орошением.

В главе первой рассматриваются одномерные по вертикали движения. Если движение происходит на большой площади, например залит водой большой участок, то вдали от границ этого участка можно считать движение происходящим по вертикали. В приближенной постановке, для ориентировочных расчетов, можно принять, что при откачке из большого числа скважин происходит общее одинаковое по всей площади снижение уровня воды.

Вопрос о возможности возникновения верховодки при орошении некоторых частей Кулундинской степи заставил нас привлечь к рассмотрению имеющиеся исследования в этом направлении.

Глава вторая посвящена выводу дифференциальных уравнений неустановившихся движений при слабоизменяющейся свободной поверхности и движений в напорных пластах. Это уравнения параболического типа и их системы. Для иллюстрации здесь рассмотрены простейшие случаи точных решений неллипсовых уравнений: фильтрация из канала и растекание бугров воды па непроницаемом водоупоре.

В третьей главе рассмотрены задачи об откачке воды из одной скважины при различных условиях, без перетоков и с ними.

Глава четвертая связана с движениями грунтовых вод, возникающими при поливах. В ней рассматриваются движения в неполностью насыщенных группах, а также вопросы образования и растекания бугров грунтовых вод.

В главе пятой рассматриваются движения двух жидкостей в водоносных пластах — имеются в виду пресная и соленая вода. Это попытка одного из возможных подходов к вопросам засоления.

Шестая глава посвящена вопросам бокового питания подземных вод, в частности при наличии сильно удаленной области питания, а также при транзитном потоке, когда движение происходит по наклонному водоупору.

В седьмой главе рассматриваются некоторые приближенные методы интегрирования уравнений движения грунтовых вод.

Г л а в а I

ОДНОМЕРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ПО ВЕРТИКАЛИ

§ 1. Об инфильтрационном питании подземных вод при орошении

Предположим, что на площади, подлежащей орошению, распределено более или менее равномерно большое количество скважин. Тогда каждая скважина будет иметь свою область влияния и будет в основном отсасывать воду из цилиндра, окружающего скважину. Если область действия скважины достаточно велика, то неправильный (в плане) контур, ограничивающий соответствующую площадь Σ , можно заменить окружностью и, таким образом, рассматривать движение в круговом цилиндре,— вода как бы откачивается из бочки. Пусть радиус этой «бочки» будет R , тогда площадь $\Sigma = \pi R^2$.

Будем предполагать, что никакого бокового питания в данной области не имеется. Перетоки из других пластов не учитываются. Будем считать, что откачка производится из верхнего, беззапорного пласта.

1. Пусть Q $m^3/\text{час}$ — дебит рассматриваемой скважины. Тогда удельный дебит, рассчитанный на единицу площади, равен

$$Q/\Sigma = q \text{ } m/\text{час}$$

Каждый квадратный метр площади получает q кубометров воды в час, иначе q есть интенсивность орошения, выраженная в $m/\text{час}$. (В дальнейшем мы будем выражать q в $мм/\text{год}$.)

Считают, что в среднем $\frac{2}{3}q$ подаваемой на орошение воды, т. е. $\frac{2}{3}q$, идет на эвапотранспирацию — на транспирацию растений и испарение с поверхности почвы. Таким образом, в землю, на свободную поверхность грунтового потока, попадает около $\frac{1}{3}q$.

Положим, что количество воды на эвапотранспирацию составляет aq , где $0 < a < 1$. Тогда в нашей «бочке» в среднем будет происходить снижение уровня на величину aq/σ в единицу

времени, а за промежуток Δt получим понижение

$$\Delta h = \frac{\alpha q}{\sigma} \Delta t$$

где σ — эффективная пористость грунта.

В действительности изменение ординаты свободной поверхности происходит более сложным образом: при откачке образуется воронка депрессии, которая расширяется со временем. После некоторого промежутка времени воронка примет стационарную форму, которая затем будет равномерно снижаться, — об этом говорится в гл. III, § 13.

Обозначим через e среднюю величину инфильтрации от осадков, т. е. количество воды, попадающей на единицу поверхности грунтового потока в единицу времени. При наличии инфильтрации снижение будет идти медленнее, со скоростью $(\alpha q - e)/\sigma$, и, следовательно, понижение Δh будет

$$\Delta h = \frac{\alpha q - e}{\sigma} \Delta t$$

Отсюда видно, что при $\alpha q - e = 0$, т. с. при $q = e/\alpha$, снижения горизонта грунтовой воды происходить не будет.

Так, если $\alpha = 2/3$, то $q = 3/2 e$, т. е. если на полив подавать воду, откачиваемую из скважины, с интенсивностью, равной полуторной интенсивности инфильтрации, то поверхность грунтового потока будет оставаться неизменной.

Если орошение производится таким образом, что потери на фильтрацию полностью отсутствуют, т. е. вся откачиваемая вода идет на эвапотраnspiration, то $\alpha = 1$ и $q = e$, — откачивать можно только то, что дает инфильтрация.

2. Предположим теперь, что интенсивность откачки q больше, чем e/α . Тогда будет происходить снижение уровня грунтовых вод.

Приведем пример, чтобы оценить, насколько быстро может происходить это снижение. Пусть скважина дает дебит $100 \text{ м}^3/\text{час}$, орошается этой скважиной площадь $100 \text{ га} = 10^6 \text{ м}^2$. Тогда при непрерывной работе круглые сутки получим $q = 2,4 \text{ мм}/\text{сут}$. Полагая $\alpha = 2/3$, $\sigma = 0,2$ и пренебрегая величиной e , получаем

$$\Delta h / \Delta t = 8 \text{ мм}/\text{сут}$$

За 100 дней в году откачки и поливов в общей сложности будем иметь понижение в $800 \text{ мм} = 0,8 \text{ м}$ в год

Если принять $\sigma = 0,15$ и $0,1$, то получим соответственно понижения за год $1,1$ и $1,6 \text{ м}$.

Таким образом, в выбранных примерах понижение за год получается порядка 1 м — как раз такие понижения имеют место в областях интенсивного орошения подземными водами (см. введение, п. 2).

При этом в нашем случае, когда $q = 2,4 \text{ м}^3/\text{сут}$, будет извлечено из скважины за 100 дней количество воды $2,4 \times 100 \text{ м}^3 = 0,24 \text{ м}$ вод. ст. или $2400 \text{ м}^3/\text{га}$. Из них, при нашем предположении, $a = \frac{2}{3}$, 1600 м^3 пойдет на полив, а 800 м^3 составят потери на фильтрацию.

3. Как же определить, какова средняя интенсивность питания грунтового потока за счет инфильтрации? По отношению к Кулундинской степи разные авторы, делая подсчеты разными методами, пришли к различным результатам.

Д. И. Абрамович [1] берет в качестве первого приближения, исходя из оценки доли листних и зимних осадков в инфильтрационном питании, среднюю величину в равной 25 мм в год — это общий годовой приход грунтовых вод. В естественных условиях он тратится на испарение. Если же его использовать для орошения, то получим $250 \text{ м}^3/\text{га}$ за сезон. Примем оросительную норму в $2500 \text{ м}^3/\text{га}$, тогда возможности орошения грунтовыми водами, если не допускать снижения уровня грунтовых вод, ограничиваются 10% всей площади степи.

В книге [2] приведена схема водного баланса бассейнов основных рек Кулундинской степи и дана оценка суммарной инфильтрации.

В среднем за год по четырем бассейнам инфильтрация составляет 45 мм, что дает 16,5% от годового количества осадков. От зимне-весенних осадков инфильтрация составляет 45%.

Бассейны перечисленных в табл. 20 рек не охватывают всей площади Кулундинской степи, юго-западная часть которой рек не имеет. Поэтому приведенные в этой таблице данные нельзя

Таблица 20
Схема водного баланса речных бассейнов Кулунды

Бассейн рек	Максимальное снегозадержание и весовые осадки, мм	Испарение, мм	Сток половодья, мм	Инфильтрация, мм	Годовое количество осадков, мм	Инфильтрация в % от годовых осадков
Бурла с. Хабары	107	37	18	52	247	21.0
Кулунда с. Шимолипо	99	34	21	44	270	16.3
Кучук с. Нижний Кучук	97	37	17	43	313	13.8
Касмала с. Рогозиха	115	40	35	40	268	14.9

распространить на всю степь, это дало бы завышенные результаты.

В. А. Мичков [3] подошел к вопросу о естественных ресурсах Кулундинской степи исходя из рассмотрения баланса озер Кулундинского, Кучукского, Б. Ярового и Маралды (см. введение, фиг. 1). Разность между испарением с поверхности озер и притоком к ним, состоящим из осадков, поверхностного стока и притока по рекам, по его подсчету, составляет 61 млн. m^3 в год. Этот дефицит водного баланса В. А. Мичков считает покрывающимся расходом подземных вод, что дает расход 2 $m^3/\text{сек}$. При этом он считает, что соответствующая площадь грунтового потока составляет 15 млн. га, следовательно, на 1 га приходится 4 m^3 , что равносильно 0.4 mm вод. ст.

Если принять вместе с В. А. Мичковым, что все динамические ресурсы степи совпадают с теми ресурсами, которые тратятся на питание озер, то подсчитанные 61 млн. m^3 могут пойти на орошение лишь 20—30 тыс. га, смотря по тому, что принять за оросительную норму — 3 или 2 тыс. m^3 в год.

Иные результаты можно было бы получить, если использовать расчеты для Кулундинского озера, проведенные В. И. Нсхайчиком [4]. У него получается подземное питание озера равным 204 mm в год, что при площади озера 728 km^2 дает общий годовой объем подземного питания 148 млн. m^3 . Это в два с половиной раза больше того, что получил В. А. Мичков по всем четырем озерам (правда, Кулундинское из них самое большое).

4. Определения инфильтрационного питания представляют большие трудности. Помимо известного метода, основанного на применении конечных разностей к уравнению Буссинеска (о нем мы говорим в гл. VII, § 26), представляется интересной методика определения инфильтрации по подсчету испарения с поверхности грунтовых вод, предложенная сотрудником Ленгипроводхоза, главным инженером Е. М. Никифоровым¹. Она позволяет произвести ориентировочные подсчеты величины естественного пополнения запасов грунтовых вод территории, учитывая испарение с поверхности грунтовых вод этой территории [5].

Глубина залегания грунтовых вод центральной части Кулундинской степи, которая представляет особый интерес для орошения, рассматриваемая за ряд лет, отличается сравнительным постоянством. Поэтому можно допустить, что величина испарения с поверхности грунтовых вод примерно равна ежегодно пополняемой части запасов подземных вод, т. е. их динамическим запасам.

¹ Авторам известно, что в последнее время Е. М. Никифоров вносит ряд добавлений и уточнений в свою методику.

Глубина стояния грунтовых вод, при которой начинается их интенсивный расход из испарение, близка к так называемой «критической глубине», с которой начинается засоление почвы, вызванное испарением с поверхности грунтовых вод. Для Центральной Кулунды, почвы которой характеризуются легкосуглинистым и супесчаным составом, критическую глубину можно принять равной 3 м [8].

Засоленные в различной степени почвы развиты на территории Центральной Кулунды, совпадая в своем распространении с районами, характеризующимися глубиной залегания грунтовых вод, меньшей 3 м. Площади развития засоленных земель и участков с глубиной грунтовых вод, меньшей 3 м, занимают обычно пониженные области рельефа и являются своего рода дренами — испаряющими участками, к которым притекают грунтовые воды с прилегающих территорий.

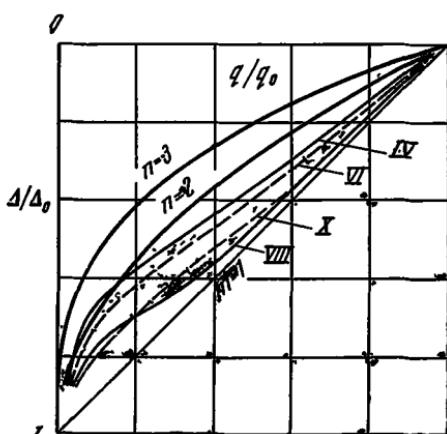
С. Ф. Аверьяновым предложена [7] эмпирическая формула зависимости интенсивности q испарения грунтовых вод от глубины Δ их стояния, критической глубины Δ_0 и интенсивности испарения с поверхности почвы q_0 :

$$q = q_0 \left(1 - \frac{\Delta}{\Delta_0}\right)^n \quad (\Delta \leq \Delta_0) \quad (1 \leq n \leq 3); \quad q = 0 \quad (\Delta \geq \Delta_0)$$

Показатель степени n определяется каждый раз для конкретных условий. На фиг. 48 представлен ряд кривых с различными значениями n . Наряду с ними построены обобщенные в книге [8] результаты полевых наблюдений в Голодной степи М. М. Крылова [9]. Кривые относятся к различным месяцам года. Они показывают, что если срезать узкие участки, дающие малые значения q , в нижней части чертежа, то оставшиеся части линий близки к прямым. Если такую срезку не производить, то можно к ним в какой-то мере приблизиться кривыми С. Ф. Аверьянова.

Для расчетов испарения в пределах центральной части Кулундинской степи было принято $n=2$:

$$q = q_0 \left(1 - \frac{\Delta}{\Delta_0}\right)^2$$



Фиг. 48

Величина q_0 приближенно может быть принята равной испарению с водной поверхности.

Так как испарение происходит не со всей площади территории F , а только с отдельных испаряющих участков, площади которых мы обозначим через f_i , при соответствующих им значениях q_{0i} , Δ_{0i} и Δ_i , то расчетную формулу величины суммарного испарения можно записать в виде (n — число участков)

$$q = \frac{1}{F} \sum_{i=1}^n q_{0i} f_i \left(1 - \frac{\Delta_i}{\Delta_{0i}}\right)^2$$

В области F величина Δ_{0i} была принята равной 3 м, а величина Δ_i равной 2 м (по данным Степной экспедиции ЗСГУ), тогда у нас

$$\left(1 - \frac{\Delta_i}{\Delta_{0i}}\right)^2 = \frac{1}{9}, \quad q = \frac{1}{9F} \sum_{i=1}^n q_{0i} f_i$$

Е. В. Щербань были проведены подсчеты по последней формуле в пределах центральной части Кулундинской степи, а также восточной части правобережья Иртыша и Павлодарской области Казахстана и построена карта изолиний $q = \text{const}$ (фиг. 49).

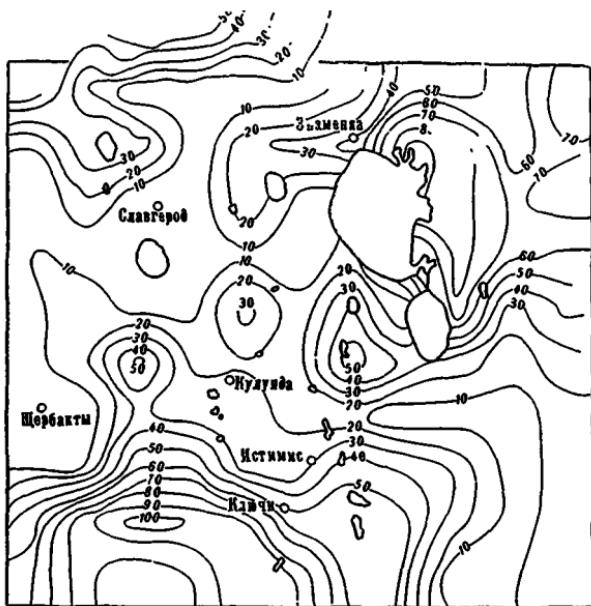
Общая площадь F составляет 21,4 тыс. км², из них испаряющими оказались 31% всей площади. Величина испарения с водной поверхности, по данным ГГИ [10] и В. С. Мезенцева [11], не менее 700 мм в год для этих территорий.

Полагая $q_{0i}=700$ мм, по последней формуле найдем $q=24$ мм в год.

Таким образом, можно оценить динамические запасы или инфильтрационное питание грунтовых вод верхнего, иниченетвертичного водоносного горизонта в пределах Центральной Кулунды в 24 мм в год, что составляет 530 млн. м³ на площади 21,4 тыс. км².

Величина 24 мм совпадает с прикидкой Д. И. Абрамовича, по которой получено, как сказано выше, в пределах несколько иной части Центральной Кулунды, 25 мм вод. ст. в год.

Возможно, что величина 700 мм в год несколько завышена, так как с поверхности соленой воды испарение меньше, чем с пресной [12]. Впрочем, для испарения в юго-западной части Кулунды даются и значения 800 и даже 1000 мм в год. С другой стороны, величина $\frac{1}{9}$ для множителя $(1 - \Delta/\Delta_0)^2$ не представляется завышенной. Дело в том, что это выражение меняется сильно



Фиг. 49. Линии одинаковой интенсивности испарения q (в мм).

при изменении Δ (см. фиг. 48). Среднее его значение равно $1/3$ (при любом Δ_0), что значительно больше $1/9$:

$$\frac{1}{\Delta_0} \int_0^{\Delta_0} \left(1 - \frac{\Delta}{\Delta_0}\right)^2 d\Delta = \frac{1}{3}$$

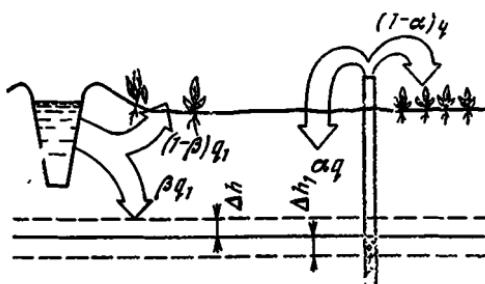
§ 2. О комбинированном орошении речными и подземными водами

В статье «Комбинированная система орошения и дренажа для устойчивого оптимального использования водных и земельных ресурсов речного бассейна» Хари Лал Салли [18] говорит о недостатках проектирования оросительных систем в Индии как при старой форме правления, так и после 1947 г. Так, в Восточном Пенджабе засоление и заболачивание орошаемых земель, при интенсивной эксплуатации их в последнее время уже распространились на 2,8 млн. га и урожай на этой площади понизился наполовину.

Являясь ярым противником горизонтального дренажа, Х. Л. Салли рекомендует проектировать ирригационную систему таким образом, чтобы поддерживать в стабильном состоянии

уровень грунтовых вод, производя откачки из трубчатых колодцев и употребляя откачиваемую воду на орошение. При этом отношение общего расхода трубчатых колодцев к расходу головного сооружения канала будет различным в разных районах и зависит 1) от геологии грунтов, 2) от протяженности ирригационных каналов в районе, 3) от интенсивности ирригации, обеспечиваемой каналом, и 4) от основных поливных норм на гектар.

- Для условий Пенджаба, по подсчетам Х. Л. Салли, требуется, чтобы на каждые 100 м^3 воды, проходящей через головное сооружение канала, подавалось 65 м^3 подземной воды.



Фиг. 50

Для получения в первом приближении соотношения между количествами речных и подземных вод при орошении можно рассуждать таким образом.

Пусть в голове ирригационного сооружения подается количество воды (фиг. 50), при котором каждая единица орошаемой площади получает $q_1 \text{ м}^3/\text{м}^2$ воды, или иначе $q_1 \text{ м}$ вод. ст. Пусть при этом $\beta q_1 (0 < \beta < 1)$ идет на потери (из каналов и при орошении). Это будет вызывать подъем Δh_1 уровня грунтовых вод, причем за промежуток Δt будем иметь

$$\sigma \Delta h_1 = \beta q_1 \Delta t$$

Здесь σ — недостаток насыщения, который для простоты примем равным коэффициенту водоотдачи при откачке из пласта. Мы видели, что при откачке происходит понижение уровня на Δh , причем (см. § 1)

$$\sigma \Delta h = \alpha q \Delta t$$

Здесь α — часть дебита q скважины, идущая на питание растений.

Приравнивая Δh и Δh_1 , получаем, что для сохранения постоянного уровня грунтовых вод необходимо равенство

$$q = \frac{\beta}{\alpha} q_1 \quad (2.1)$$

Примем потери на фильтрацию из оросительных каналов плюс потери при поливах составляющими 50% подаваемой воды, т. е. положим $\beta=0.5$. Примем также, вместе с индийским ученым, что потери при орошении подземными водами вдвое меньше, т. е. что $1-\alpha=0.25$. Тогда $\alpha=0.75$ и для q получаем

$$q - \frac{2}{3} q_1 = 0.67 q_1$$

Другими словами, на каждые 100 м^3 речной воды нужно подавать 67 м^3 подземной. Х. Л. Салли учитывает некоторые специфичные для условий Пенджаба условия и получает отношение $65:100$.

Формула (2.1) показывает, что чем меньше потери, т. е. чем меньше величины β и $1-\alpha$, тем меньше q по сравнению с q_1 , т. е. тем меньше требуется подземных вод.

Предположим теперь, что имеется инфильтрация на поверхность грунтового потока интенсивностью ε . Тогда снижение подземных вод будет происходить по формуле

$$\sigma \Delta h = \alpha q \Delta t$$

а подъем их согласно соотношению

$$\sigma \Delta h_1 = (\beta q_1 + \varepsilon) \Delta t$$

При $\Delta h=\Delta h_1$, приравнивая правые части, получаем

$$q = \frac{\beta}{\alpha} q_1 + \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

Заметим, что при наших предположениях растения получат за сезон на полив от подземных вод $\alpha q \text{ м}^3$ на 1 м^2 и от речных вод $(1-\beta) q_1 \text{ м}^3$ на 1 м^2 , всего (при $\varepsilon=0$)

$$\alpha q + (1-\beta) q_1 = \beta q_1 + (1-\beta) q_1 = q_1$$

т. е. оросительная норма составит полное количество подаваемой речной воды. Это и естественно, так как мы исходили из того, что подземные воды должны восполнять потери речных вод.

Приведем значения q/q_1 для четырех комбинаций значений (α, β) при $\varepsilon=0$:

$\alpha=0.75$	0.67	0.83	0.9
$1-\alpha=0.25$	0.33	0.16	0.1
$\beta=0.50$	0.30	0.33	0.2
$q/q_1=0.67$	0.50	0.40	0.22

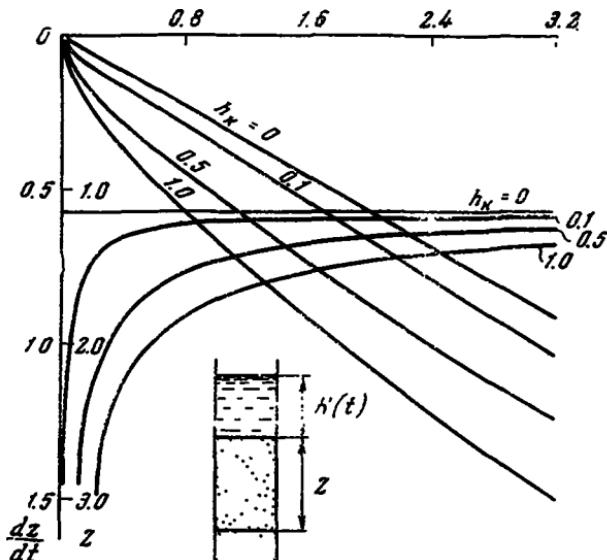
§ 3. Вертикальные течения при орошении и промывках засоленных грунтов

В статье Н. Н. Веригина и Г. П. Шапинской [14] рассматривается процесс бездрениажных промывок при достаточно глубоком залегании грунтовых вод. Пользуясь методикой книги [15], можно несколько обобщить и уточнить формулы указанных авторов.

1. Первая стадия полива состоит в том, что на поле подается вода. Допустим, что скорость подачи q постоянна, так что количество воды, подаваемой на единицу площади, равно

$$Q(t) = qt \quad (3.1)$$

Грунт считается однородным, движение — происходящим при полном насыщении. Недостаток насыщения обозначим через σ .



Фиг. 51

Тогда объем $Q(t)$ будет расходоваться на поддержание уровня $H(t)$ над поверхностью земли и на смачивание грунта на глубину z (фиг. 51):

$$Q(t) = H(t) + \sigma z$$

откуда

$$H(t) = qt - \sigma z \quad (3.2)$$

Принимая закон Дарси, получаем дифференциальное уравнение для z

$$\sigma \frac{dz}{dt} = k \frac{H(t) + z + h_k}{z} = k \frac{qt + h_k + (1 - \sigma)z}{z} \quad (3.3)$$

Здесь h_k — высота капиллярного поднятия грунта. При $h_k = 0$ уравнение (3.3) имеет частное решение вида $z = ct$. Подставляя это выражение в (3.3), получаем квадратное уравнение для c . Найдя его положительный корень, будем иметь

$$z = ct, \quad c = \frac{k(1 - \sigma)}{2\sigma} + \sqrt{\frac{k^2(1 - \sigma)^2}{4\sigma^2} + \frac{kq}{\sigma}} \quad (3.4)$$

Формула (3.2) показывает, что при этом будет

$$H(t) = (q - \sigma c)t \quad (3.5)$$

Видим, что $H(t) > 0$ при $q - \sigma c > 0$, что равносильно неравенству $q > k$.

Интеграл $z = ct$ удовлетворяет условию $z = 0$ при $t = 0$. Для других начальных условий и для $h_k \neq 0$ подстановка

$$\tau = \frac{qt + h_k}{1 - \sigma} \quad (3.6)$$

приведет уравнение (3.3) к однородному, а замена переменной $z = u\tau$ позволит найти общий интеграл в виде

$$\left[\left(B - \frac{A}{2} \right) \tau + z \right]^{1/\alpha + \alpha} \left[\left(B + \frac{A}{2} \right) \tau - z \right]^{1/\alpha - \alpha} = C \quad (3.7)$$

где

$$A = \frac{k(1 - \sigma)^2}{\sigma q}, \quad B = \sqrt{\frac{A^2}{4} + A}, \quad \alpha = \frac{A}{4B} \quad (3.8)$$

$$C = \left[\left(B - \frac{A}{2} \right) \tau_0 + z_0 \right]^{1/\alpha + \alpha} \left[\left(B + \frac{A}{2} \right) \tau_0 - z_0 \right]^{1/\alpha - \alpha}$$

Здесь z_0 — значение z при $\tau = \tau_0$. Отметим, что при $C = 0$ получается частное решение

$$z = \left(B + \frac{A}{2} \right) \tau$$

что совпадает с (3.4) при $h_k = 0$.

Для вычислений удобнее представить общее решение в параметрической форме, причем для $h_k \neq 0$ ввести новые переменные

$$\zeta = z/h_k, \quad \theta = \tau/h_k \quad (3.9)$$

Получим

$$\theta = C' \left(B - \frac{A}{2} + u \right)^{-1/\sigma - \alpha} \left(B + \frac{A}{2} - u \right)^{-1/\sigma + \alpha} \quad (3.10)$$

$$\zeta = u\theta \quad \left(C' = \frac{C}{h_k} \right)$$

Если начальное условие имеет вид $z=0$ при $t=0$, то

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{h_k}{1-\sigma}, \quad z_0 = 0 \\ C' &= \frac{1}{1-\sigma} \left(B - \frac{A}{2} \right)^{1/\sigma + \alpha} \left(B + \frac{A}{2} \right)^{1/\sigma - \alpha} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Авторы статьи [4] приводят пример: $\sigma=0.2$, $k=0.1 \text{ м/сут}$, $q=0.2 \text{ м/сут}$. Капиллярность не учитывается, так что $h_k=0$. По формуле (3.4) получается $c=0.574 \text{ м/сут}$. По формуле (3.5) найдем для высоты подъема воды $H(t)=0.085t$.

В статье [4] ставится условие: подача воды прекращается, когда уровень станет равным 0.2 м, т. е. $H(t)=H_1=0.2$. Это будет при $t=t_1=2.34 \text{ сут}$, причем вода смочит грунт на глубину $z_1=ct_1=1.34 \text{ м}$. Отсюда можно найти поливную норму $Q_1=H_1+\sigma z_1=0.468 \text{ м}$, или $468 \text{ м}^3/\text{га}$. Если задаться поливной нормой, то из (3.1) можно найти t_1 .

В почвах h_k обычно мал, однако в грунте под почвой, куда проникает поливная вода, оно может быть значительным. Приведем расчет для некоторых значений h_k . Будем считать заданной не высоту H_1 , а норму полива Q_1 . Для возможности сравнения с работой [4] положим $Q_1=0.468$. Тогда полив во всех случаях (при любых h_k) нужно будет вести до момента

$$t_1 := \frac{Q_1}{q} = 2.34 \text{ сут}$$

При этом, так как

$$\theta = qt : [h_k(1-\sigma)] + (1-\sigma)^{-1}$$

имеем

$$0 = 0.25t/h_k + 1.25, \quad t = 4h_k(\theta - 1.25)$$

Далее вычисления дают

$$A = 1.6, \quad B = 1.497, \quad B - \frac{A}{2} = 0.697, \quad B + \frac{A}{2} = 2.297$$

$$\alpha = 0.267, \quad C' = 2.17$$

и уравнения (3.10) принимают вид

$$\theta = 2.17 (0.697 + u)^{-0.767} (2.297 - u)^{-0.833}, \quad \zeta = u\theta$$

На фиг. 51, б построены кривые для z и dz/dt как функции времени при $h_k=0; 0.1; 0.5; 1.0$ м. Видим, что с увеличением h_k скорость впитывания может значительно увеличиться.

2. Вторая стадия наступает при $t > t_1$, когда подача воды прекращена и происходит снижение уровня $H(t)$. При этом $Q(t)$ остается постоянным, равным Q_1 . Уравнение для z будет

$$\sigma \frac{dz}{dt} = k \frac{Q_1 + h_k + (1 - \sigma)z}{z} \quad (3.12)$$

Его решение, удовлетворяющее условию $z=z_1$ при $t=t_1$, находится путем разделения переменных

$$t - t_1 = \frac{\sigma}{k(1-\sigma)} \left(z - z_1 - M \ln \frac{z+M}{z_1+M} \right) \quad (3.13)$$

или, в безразмерных переменных,

$$\tau - \tau_1 = \zeta - \zeta_1 - \ln \frac{1+\zeta}{1+\zeta_1} \quad (3.14)$$

причем

$$\zeta = \frac{z}{M}, \quad \tau = \frac{k(1-\sigma)^2 t}{\sigma(Q_1+h_k)}, \quad M = \frac{Q_1+h_k}{1-\sigma}$$

Для достаточно малых значений разности $\zeta - \zeta_1$, разлагая $\ln[(1+\zeta)/(1+\zeta_1)]$ в ряд по степеням $\zeta - \zeta_1$, получаем приближенную формулу

$$\tau - \tau_1 \approx \frac{\zeta_1}{1+\zeta_1} (\zeta - \zeta_1) + \frac{1}{2} \left(\frac{\zeta - \zeta_1}{1+\zeta_1} \right)^2 \quad (3.15)$$

Если $\zeta_1=0$, то находим такую зависимость:

$$\zeta \approx \sqrt{2(\tau - \tau_1)} \quad (3.16)$$

Отметим, что уравнение (3.12) и его решение (3.13) или (3.14) справедливы и для случая, когда расход Q_1 быстро выливается на поверхность земли, так что начальное условие $z=0$ при $t=0$ может иметь место.

Авторы статьи [14], найдя решение (3.13), ищут также решение уравнения (3.12) в виде (при $h_k=0$)

$$z=at$$

Однако для малых t оно неверно, как показывают достаточны простые приближенные формы (3.15) и (3.16). Для больших же t решение не представляет интереса, так как оно имеет смысл лишь до момента $t=t_2$, в который вся вылитая вода впитывается в землю, т. е. когда уровень воды $H(t)$ над поверхностью земли станет равным нулю. Так как $Q_1=H(t)+\sigma z$, то

$$z_2 = \frac{Q_1}{\sigma} = 2.34 \text{ м}$$

Это максимальная глубина промачивания при заданной норме полива. Нетрудно найти скорость промачивания в момент t_2 . Для этого нужно подставить выражение z_2 в правую часть уравнения (3.12). Получим

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=t_2} = \frac{k}{\sigma} \left(1 + \frac{\sigma h_k}{Q_1} \right)$$

а при $h_k=0$ будем иметь

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=t_2} = \frac{k}{\sigma} \quad (3.17)$$

В третьей стадии полива, в рамках рассматриваемой теории, которая не учитывает неравномерности распределения влаги в почве и грунте, должно происходить перемещение вниз всей смоченной полосы шириной z_2 со скоростью k/σ .

Для рассматриваемого примера в момент t_3 скорость dz/dt равна 0.5 м/сут, как это следует из (3.17). Само значение t_3 найдем из (3.13), подставляя $z_2=2.34$. При $h_k=0$ получим $t_3-t_1=1.89$ сут, $t_3=4.23$ сут. В статье [14] получено $t_3-t_1=1.39$ сут, $z_2=2.09$ м. Скорость dz/dt при $t=t_3$ получилась равной 0.52, что близко к точному значению, но значение t_3 далеко от точного.

Авторам для дальнейших расчетов рассоления нужна именно величина скорости, причем желательно, чтобы она была постоянной. Для этого проще взять среднюю скорость за промежуток (t_1, t_3) .

Что касается $h_k \neq 0$, то формула (3.13) дает для $z_2=2.34$ при $h_k=0.1$; 0.5; 1 соответственно $t_3-t_1=1.80$; 1.50; 1.24.

§ 4. Сравнение теории с опытом

В статье В. П. Панфилова [6] дано исследование водно-физических свойств темно-каштановой почвы в условиях Ключевского района Алтайского края. В частности, в ней дается описание опыта по наливу воды в почву, причем слой воды над почвой поддерживался почти постоянно на высоте 5 см. Данные опыта приводятся в табл. 21, где t — время от начала опыта в мин,



Внимание!
страница
временно отсутствует.
Приносим извинения.

приводит к уравнению

$$\bar{v} = \frac{d\zeta}{d\tau} = \frac{1+\zeta}{\zeta} \quad (4.3)$$

Интеграл этого уравнения, соответствующий условию $\zeta=0$ при $\tau=0$, имеет вид

$$\tau = \zeta - \ln(1+\zeta) \quad (4.4)$$

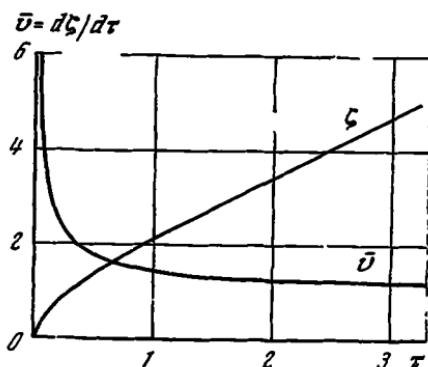
Из (4.1) видно, что скорость фильтрации при $t \rightarrow \infty$, т. е. при $z \rightarrow \infty$, стремится к величине k — коэффициенту фильтрации. В нашем случае получаем $k = 1.6 \text{ мм/мин} = 2.3 \text{ м/сут}$.

В табл. 22 приводятся результаты вычислений по уравнениям (4.3) и (4.4).

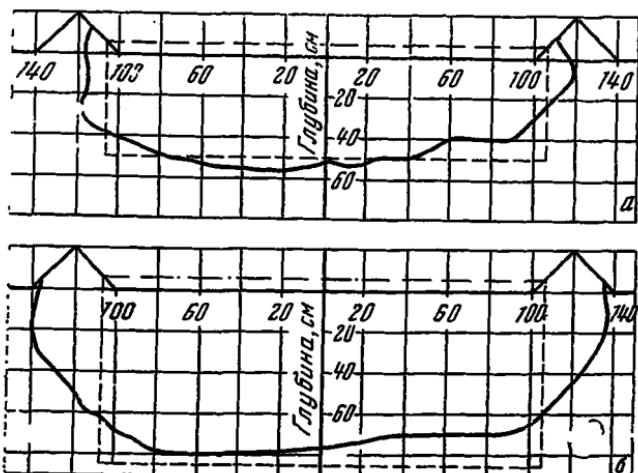
Таблица 22

ζ	τ	\bar{v}	$\ln(1+\zeta)$	ζ	τ	\bar{v}	$\ln(1+\zeta)$
0.2	0.017	6.0	0.183	1.36	0.500	1.73	0.858
0.4	0.064	3.5	0.336	2	0.901	1.50	1.099
0.6	0.130	2.67	0.470	5	3.208	1.2	1.792
0.8	0.212	2.25	0.588	10	7.602	1.1	2.392
1.0	0.307	2.0	0.693	15	12.23	1.07	2.773

Сравнение графиков фиг. 52 и 53 для \bar{v} показывает их большое сходство. Однако точное вычисление значений v в начале опыта затруднено из-за быстроты просачивания, поэтому расчеты при сравнительно большом интервале времени — 5 мин не будут полностью совпадать с теорией. Для установления связи



Фиг. 53



Фиг. 54

между t и τ можно, например, найти значения $v=2$ на графиках фиг. 52 и 53. Им соответствуют $\tau=0.31$ и $t=27.5$ мин.

Для среднего значения высоты капиллярного поднятия В. П. Панфилов предлагает величину $h_k=130$ см. Так как между t и τ имеет место соотношение (4.2), то, подставив значения входящих в него постоянных, получим для активной пористости (или недостатка насыщения) $\sigma=0.10$.

Эта величина меньше, чем приведенные В. П. Панфиловым значения величин активной влаги (в процентах от объема): 13.8% в верхнем слое 0—20 см и 11.6% для слоя 70—100 см. Возможно, что во время опыта в грунте оставалась часть защемленного воздуха.

Интересен другой опыт В. П. Панфилова, проведенный на том же участке. На обвалованную площадку выливается один раз количество воды, образовавшее слой воды в 5 см в начальный момент времени, другой раз (на другую площадку) — 10 см, что отвечает поливной норме соответственно в 500 и 1000 м³/га. Через сутки был определен контур промачивания (фиг. 54).

Видим, что имело место некоторое растекание воды в стороны. Если бы поданное количество жидкости протекало внутри вертикальной трубы, то просачивание было бы несколько глубже (у нас предполагаемая область промачивания показана пунктиром). Соответствующие глубины промачивания составят тогда 50 и 85 см. Это дает для активной пористости σ соответственно

$$\sigma_a = 5/50 = 0.10, \quad \sigma_b = 10/85 = 0.12$$

Если бы была известна продолжительность просачивания, то можно было бы вычислить один из параметров k, h_k . Можно, наоборот, подсчитать, сколько минут будет длиться просачивание, т. е. через сколько минут вся вода впитывается в почву. Для этого вычислим τ по формуле (3.14). Для случая a имеем ($Q=5 \text{ см}$)

$$\zeta = \frac{1-\sigma}{Q+h_k} \tau = 0.333$$

Этому значению ζ соответствует по графику фиг. 50 $\tau=0.045$. Так как

$$\tau = \frac{k(1-\sigma)^4}{\sigma(Q+h_k)} t = 0.0096t$$

то для t находим $t=4.7 \text{ мин.}$

Для случая b аналогично получим $\zeta=0.531$,

$$\tau = 0.0077t, \quad t = 13.6 \text{ мин}$$

Хотя рассматриваемая теория не учитывает неравномерности распределения влажности грунта (об этом см. гл. IV) и условия опыта не совсем ей соответствуют (кроме пересмещения влаги по вертикали имеется еще ее боковое растекание), все же она может дать средние значения параметров грунта, близкие к действительным.

§ 5. О возможности образования верховодки на участке орошения

Для опытного орошеного участка в Ключевском совхозе, о проекте которого говорилось в п. 5 введения, характерно следующее строение верхних слоев грунта, схематично изображенное на фиг. 55 (см. также введение, фиг. 5). Верхний слой мощностью около 1 м состоит из суглинков и супесей (слой a на фиг. 55); слой 1 — песчаный, мощность его в среднем также около 1 м; слой 2 — глинистый, мощность его колеблется от 3 до 5 м. Ниже залегает водоносный горизонт 3, еще ниже, после глинистых прослоек 4, водонос 5. Откачка по проекту будет производиться из слоя 5, сильно связанного со слоем 3.

Опасно, если вода будет застаиваться в прослойке 1 и отчасти — в верхнем слое a .

Задачу о просачивании из слоя типа нашего слоя a рассматривал В. С. Усенко [17], из слоя 1 — Н. Н. Биндерман [18].

Пусть коэффициент фильтрации верхнего, средне- или слабопроницаемого слоя равен k , коэффициент водоотдачи обозначим

через σ . Производится полив интенсивностью ε (ε может означать и интенсивность инфильтрации атмосферных вод).

При таких условиях возможно образование двух обособленных уровней грунтовых вод отдельно в верхнем и нижнем слоях [18]. При этом отрыв и опускание уровня грунтовых вод в нижнем слое приводят к образованию отрицательного давления (вакуума) по подошве верхнего слоя, величину которого обозначим через h_v .

Тогда для движения грунтовых вод в верхнем пласте действительно уравнение

$$\sigma \frac{dh}{dt} = -k \frac{h + h_v}{h} + \varepsilon = -\frac{(k - \varepsilon)h + kh_v}{h} \quad (5.1)$$

где h — высота стояния уровня грунтовых вод в верхнем пласте. Начальный уровень воды обозначим через h_0 .

Если переписать это уравнение таким образом:

$$\frac{k - \varepsilon}{\sigma} dt = -\frac{h dh}{h + kh_v/(k - \varepsilon)}$$

или после введения безразмерных переменных

$$\tau = \frac{k - \varepsilon}{\sigma} t, \quad \zeta = \frac{k - \varepsilon}{kh_v} h$$

$$\zeta_0 = \frac{k - \varepsilon}{kh_v} h_0$$

в следующем виде:

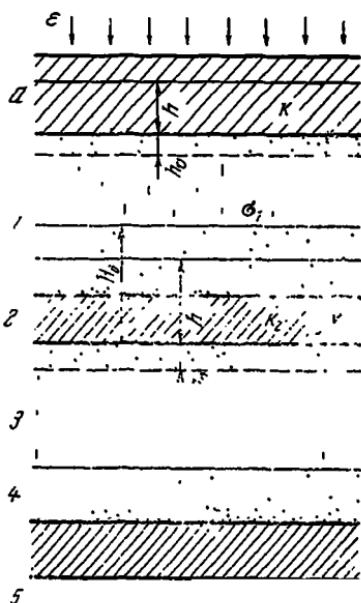
$$d\tau = -\frac{\zeta d\zeta}{\zeta + 1}$$

то получаем его решение в виде

$$\tau = \zeta_0 - \zeta + \ln \frac{1 + \zeta}{1 + \zeta_0}$$

Возвращаясь к прежним переменным, находим

$$t = \frac{\sigma}{k - \varepsilon} \left[h_0 - h + \frac{kh_v}{k - \varepsilon} \ln \frac{kh_v + h(k - \varepsilon)}{kh_v + h_0(k - \varepsilon)} \right] \quad (5.2)$$



Фиг. 55

Время полной сработки получается при $h=0$, оно равно

$$t_0 = \frac{\sigma h_0}{k - e} \left[1 - \frac{kh_0}{h_0(k-e)} \ln \left(1 + \frac{h_0(k-e)}{kh_0} \right) \right]$$

Отметим, что сработка уровня происходит только при значениях $e < k(1+h_0/h)$, когда производная dh/dt отрицательна, в противном случае имеем подъем воды в верхнем слое грунта. Уравнение (5.2) у нас записано для случая $e < k$.

В. С. Усенко отмечает, что неучт величины «подсоса» нижнего пласта h_0 может привести к необоснованно завышенным величинам времени осушения пласта.

При $h_0=0$ получаем для h

$$\frac{dh}{dt} = \frac{e-k}{\sigma}, \quad \text{или} \quad h = h_0 - \frac{k-e}{\sigma} t$$

Следовательно, опускание слоя воды происходит равномерно.

Если полив прекратился, т. е. $e=0$, и происходит вытекание воды из верхнего слоя в нижний, то при этом

$$h = h_0 - \frac{k}{\sigma} t$$

Время полного вытекания воды из верхнего слоя a будет

$$T = \frac{\sigma h_0}{k}$$

Возьмем несколько завышенные для опытного участка Ключевского совхоза значения: $h_0=2$ м, $\sigma=0,2$ и заниженное значение $k=1$ м/сутки, тогда получим

$$T = 0.4 \text{ сут} = 10 \text{ час}$$

При учете h_0 эта величина может быть уменьшена. Словом, оснований к тому, что вода будет задерживаться в верхнем слое грунта, не имеется.

Хуже обстоит дело с прослойкой 1, где просочившаяся из верхнего слоя вода может задерживаться из-за слабой пропускной способности глин прослойки 2.

В настоящее время водопроницаемый слой 3 местами является напорным, местами безнапорным. В результате откачек для орошения он превратится в безнапорный. Поэтому рассмотрим такую задачу.

В слое 1 образовалась верховодка с уровнем воды H . Как будет происходить снижение этого уровня при просачивании воды через слабопроницаемый слой грунта 2 мощностью M ?

Предположим, что за счет просачивания из верхнего слоя 1 на поверхность воды в слое 1 попадает инфильтрация интенсивностью ε_1 . Пусть активная порозность слоя 1 есть σ_1 , коэффициент фильтрации слоя 1 равен k_1 , слоя 2 — k_2 . Тогда дифференциальное уравнение для уровня h воды в слое 1, отсчитываемого от подошвы слабопроницаемого пласта, будет

$$v_1 = \sigma_1 \frac{dh}{dt} = -k_1 \frac{h - Z}{h - M} + \varepsilon_1$$

Здесь Z — напор на границе между слоями 1 и 2, отсчитываемый от подошвы пласта 2 (см. фиг. 55).

Скорость v_2 просачивания в слое 2 равна, с одной стороны, скорости v_1 , с другой стороны, она имеет вид

$$v_2 = -k_2 \frac{Z : h_c}{M} - v_1.$$

Исключив из двух уравнений для v_1 неизвестную величину Z , получим уравнение

$$\sigma_1 \frac{dh}{dt} = \frac{\varepsilon_1 (h - M) - k_1 (h + h_v)}{h + (c - 1)M}$$

$$c = \frac{k_1}{k_2} > 1$$

При $h \geq M$ будем иметь

$$\frac{dh}{dt} > 0, \quad \text{если} \quad \varepsilon_1 > k_1 \frac{h + h_v}{h - M}$$

$$\frac{dh}{dt} < 0, \quad \text{если} \quad \varepsilon_1 < k_1 \frac{h + h_v}{h - M}$$

В первом случае вода будет накапливаться в слое 1. В частности, после выключения полива, когда $\varepsilon_1 = 0$, будет, конечно, выполняться второе условие. Для определенности будем считать $\varepsilon_1 < k_1$. Тогда интегрированием получаем

$$t = \frac{\sigma_1}{k_1 - \varepsilon_1} \left(H - h + A \ln \frac{H + b}{h + b} \right)$$

$$A = \frac{(c - 1)M(k_1 - \varepsilon_1) - M\varepsilon_1 - k_1 h_v}{k_1 - \varepsilon_1}, \quad b = \frac{\varepsilon_1 M + k_1 h_v}{k_1 - \varepsilon_1}$$

В момент $t=T$ вода дойдет до кровли пласта 2, так что $h=M$, и будем иметь

$$T = \frac{\sigma_1}{k_1 - \varepsilon_1} \left[H - M + A \ln \frac{H+b}{M+b} \right]$$

При ε_1 , близком к k_1 , и для больших значений $c=k_1/k_2$ промежуток времени T может быть сколь угодно большим. Так, если положить $h_0=0$, $\varepsilon_1=0$, $h_0=6$ м, $M=3$ м, $k_1=10$ м/сут, $k_2=10^{-4}$ м/сут, $\sigma_1=0,2$, то получим $T=138$ сут.

Таким образом, если бы имелась сплошная слабопроницаемая прослойка 2, то угроза образования верховодки в слое 1 была бы вполне реальной. Однако эта прослойка прерывается окнами, через которые вода может перетекать в слой 3.

Был поставлен специальный эксперимент с заливом площадки и наблюдениями над просачиванием воды (см. гл. IV). Он обнаружил довольно быстрое рассасывание. Однако все же внесено предложение в проект орошаемого участка — заложить поглощающую скважину в северном (более низком) углу площади, отводимой под орошение.

Г л а в а II

ОСНОВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 6. Обобщенное уравнение Буссинеска

Пусть имеется неустановившееся движение грунтовых вод со слабоизменяющейся свободной поверхностью. Уравнение поверхности водоупора, также слабоизменяющейся, пусть будет

$$z = h_0(x, y)$$

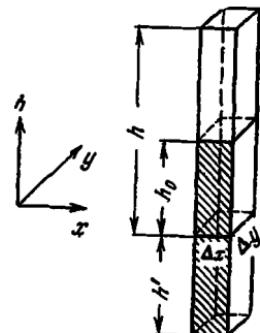
Рассмотрим призму с основанием $\Delta x \Delta y$ на плоскости xy (фиг. 56). Ордината свободной поверхности, отсчитываемая от этой плоскости, есть $h = h(x, y, t)$. Объем воды, заключенный в этой призме в момент времени t , равен

$$v = \sigma [h(x, y, t) - h_0(x, y)] \Delta x \Delta y$$

где σ — водоотдача или недостаток пасынчения грунта.

Если за промежуток Δt произойдет изменение уровня на $\Delta h = (\partial h / \partial t) \Delta t$, то изменение объема воды в призме будет

$$\frac{\partial v}{\partial t} \Delta t = \frac{\partial \sigma h}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta t \quad (6.1)$$



Фиг. 56

Это изменение объема может произойти из-за изменения расхода жидкости, втекающей и вытекающей через стенки призмы. Так, расход через левую стенку, перпендикулярную оси x (фиг. 56), за промежуток времени Δt равен

$$(h - h_0) v_x \Delta y \Delta t = -k(h - h_0) \frac{\partial h}{\partial x} \Delta y \Delta t$$

(k — коэффициент фильтрации), а его изменение вдоль оси x

будет

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[k(h - h_0) \frac{\partial h}{\partial x} \right] \Delta x \Delta y \Delta t$$

Точно так же изменение расхода вдоль оси y запишется таким образом:

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left[k(h - h_0) \frac{\partial h}{\partial y} \right] \Delta x \Delta y \Delta t$$

Всего для боковой приточности (или отточности) будем иметь

$$-\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[k(h - h_0) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k(h - h_0) \frac{\partial h}{\partial y} \right] \right\} \Delta x \Delta y \Delta t \quad (6.2)$$

Кроме того, возможно питание призмы сверху за счет просачивания или испарения (отрицательное питание) и снизу за счет перетоков через слабопроницаемый водоупор. Величину инфильтрации (или разность между инфильтрацией и испарением) на единицу площади в единицу времени обозначим через $w(x, y, t)$, тогда через верхнюю часть призмы будет просачиваться количество жидкости (за промежуток времени Δt)

$$-w \Delta x \Delta y \Delta t \quad (6.3)$$

Знак минус мы ставим для того, чтобы инфильтрации соответствовало $w > 0$, а испарению $w < 0$.

Предположим, что водоупор имеет мощность (толщину) $h_0 + h' = M_0(x, y)$ (фиг. 56), что напор в нижележащем водоносном пласте равен H и что коэффициент фильтрации слабопроницаемого водоупора k_0 значительно меньше k . Тогда можно принять скорость просачивания через водоупор равной

$$w_0 = \frac{k_0}{M_0} (H - h)$$

и просачивание через основание призмы за промежуток времени Δt будет

$$\frac{k_0}{M_0} (H - h) \Delta x \Delta y \Delta t \quad (6.4)$$

Приравнивая выражение (6.1), взятое со знаком минус, сумме членов (6.2) — (6.4) и сокращая на $-\Delta x \Delta y \Delta t$, получаем обобщенное уравнение Буссинеска

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k(h - h_0) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k(h - h_0) \frac{\partial h}{\partial y} \right] - \frac{k_0}{M_0} (h - H) + w \quad (6.5)$$

Если h_0 и M_0 постоянны, т. е. водоупор горизонтален, то, принимая $h_0=0$, получаем при постоянных σ и k уравнение

$$\sigma \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{2} \left(\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0}{M_0} (h - H) + w \quad (6.6)$$

Первый способ линеаризации. Уравнение (6.5) является нелинейным. Его линеаризуют разными способами, из которых простейший состоит в том, что множитель $h-h_0$, представляющий собой мощность водоносной части пласта, заменяется постоянной — некоторым средним значением M . Для постоянных k и M_0 , вводя обозначения

$$(h - h_0)_{cp} = M, \quad kM/\sigma = a, \quad k_0/M_0\sigma = b, \quad w/\sigma = e$$

получим линеаризованное уравнение

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) - b(h - H) + e \quad (6.7)$$

Величина kM называется *проводимостью*, а kM/σ — *коэффициентом уровнепроводности*.

Второй способ линеаризации. Ввиду того что второй способ линеаризации является более сложным, чем первый, остановимся на нем подробнее. Будем рассматривать уравнение (6.6).

Мы уже видели (см. § 9 части первой), что разность $h-H$ в уравнении, аналогичном уравнению (6.6), можно заменить дробью

$$h - H \approx \frac{h^2 - H^2}{2H_{cp}}$$

где H_{cp} — некоторое среднее значение h (проще всего — величина начального уровня H).

Что касается производной $\partial h/\partial t$ в левой части уравнения (6.6), то она может быть заменена приближенно производной от квадрата h , $\partial h^2/\partial t$, следующим образом. Положим

$$u = h^2$$

и составим производную

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2h \frac{\partial h}{\partial t} \approx 2h_{cp} \frac{\partial h}{\partial t}$$

Отсюда

$$\frac{\partial h}{\partial t} \approx \frac{1}{2h_{cp}} \frac{\partial h^2}{\partial t}$$

(считаем h не обращающимся в нуль).

Теперь уравнение (6.6) перепишем в виде

$$\frac{\sigma}{2h_{\text{cp}}} \frac{\partial h^2}{\partial t} = \frac{k}{2} \left(\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0}{2M_0 H_{\text{cp}}} (h^2 - H^2) + w$$

Умножая на $2h_{\text{cp}}$ и считая $h_{\text{cp}} \approx H_{\text{cp}}$, окончательно напишем

$$\begin{aligned} \sigma \frac{\partial h^2}{\partial t} &= kh_{\text{cp}} \left(\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0}{M_0} (h^2 - H^2) + w_1 \\ (w_1 &= 2wh_{\text{cp}}) \end{aligned}$$

Для $u = h^2$ уравнение имеет тот же вид, что и уравнение (6.7), только в нем e заменяется на e_1 и H на $u_1 = H^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - b(u - u_1) + e_1 \\ a &= \frac{kh_{\text{cp}}}{\sigma}, \quad b = \frac{k_0}{M_0 \sigma}, \quad e_1 = \frac{2wh_{\text{cp}}}{\sigma} \end{aligned} \quad (6.8)$$

§ 7. Уравнение неустановившегося движения в напорном пласте

Будем исходить из уравнения неразрывности сжимаемой жидкости в пористой среде

$$\frac{\partial \rho \sigma}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \bar{v} = 0 \quad (7.1)$$

причем

$$\bar{v} = -k \operatorname{grad} h, \quad h = \frac{p}{\rho g} + z$$

Сжимаемость воды и пласта являются малыми величинами, поэтому принимают φ и σ зависящими линейно от давления

$$\rho = \rho_0 [1 + \beta_{\text{ж}} (p - p_0)], \quad \sigma = \sigma_0 + \beta_{\text{пл}} (p - p_0) \quad (7.2)$$

где ρ_0 и σ_0 — плотность и пористость при давлении, равном p_0 . Величины $\beta_{\text{ж}}$ и $\beta_{\text{пл}}$ называются соответственно коэффициентами объемной упругости жидкости и пласта [10]. Они заключаются в таких пределах для воды и грунта

$$\beta_{\text{воды}} = (2,7 \div 5) 10^{-5} \text{ ат}^{-1}, \quad \beta_{\text{пл}} = (0,3 \div 2) 10^{-5} \text{ ат}^{-1} \quad (7.3)$$

Перемножая ρ и σ и отбрасывая члены второго порядка малости, получаем

$$\rho\sigma = \rho_0\sigma_0 + \rho_0\beta(p - p_0), \quad \beta = \beta_{ж} + \beta_{пл} \quad (7.4)$$

и тогда изменение массы по времени будет

$$\frac{\partial \sigma \rho}{\partial t} = \rho_0 \beta \frac{\partial p}{\partial t} = \rho_0 \beta \rho g \frac{\partial h}{\partial t} \approx \rho^2 \beta g \frac{\partial h}{\partial t}$$

Здесь, как и в выражениях для $\partial(\rho v_x)/\partial x$, можно ρ_0 заменить на ρ ввиду малости β . Тогда получим, сокращая на $\rho \beta$

$$\rho \beta \frac{\partial h}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) \quad (7.5)$$

Это уравнение годится для трехмерного пространства. Если движение происходит параллельно оси z , то остается

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a^* \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}, \quad a^* = \frac{k}{\rho^3} \quad (7.6)$$

Это уравнение ввел Хантуш [20] для слабопроницаемой пролонгации между водоносными пластами.

В напорном пласте мощность его M мала по сравнению с горизонтальными размерами. Проинтегрируем (7.5) по z в пределах $(0, M)$. Полагая

$$\int_0^M h(x, y, z) dz = M \bar{h}$$

получаем

$$\rho \beta M \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = k M \left(\frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial y^2} \right) + k \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial z} \right)_{z=M} - k \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial z} \right)_{z=0} \quad (7.7)$$

Если рассматриваемый водопроницаемый пласт мощностью M ограничен слабопроницаемыми пластами мощностью M_0 и M_{00} с коэффициентами фильтрации k_0 , k_{00} и напорами h_1 и h_2 (фиг. 57), то по закону непрерывности потока будем иметь

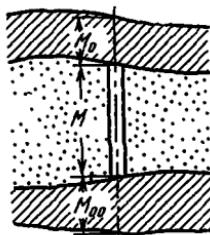
$$k \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial z} \right)_M = k_0 \left(\frac{\partial h_1}{\partial z} \right)_M, \quad k \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial z} \right)_0 = k_{00} \left(\frac{\partial h_2}{\partial z} \right)_0$$

Отбрасывая черту y , перепишем (7.7) в виде

$$\rho \beta M \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = k M \left(\frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial y^2} \right) + k_0 \left(\frac{\partial h_1}{\partial z} \right)_M - k_{00} \left(\frac{\partial h_2}{\partial z} \right)_0 \quad (7.8)$$

Для $h_1(z)$ и $h_2(z)$ должны удовлетворяться уравнения вида (7.6).

Если не учитывать сжимаемости при перетоках через прослойки, то вместо $(\partial h_1/\partial z)_M$ можно написать $(h_1 - h)/M_0$, вместо $(\partial h_2/\partial z)_0$ — выражение $(h - h_2)/M_{00}$, причем считать, что h_1 и



Фиг. 57

h_2 — соответственно напоры в водоносных пластах, примыкающих к слабопроницаемым прослойкам. Тогда будем иметь обычно рассматриваемое уравнение

$$\rho \beta M \frac{\partial h}{\partial t} = kM \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0}{M_0} (h - h_1) - \frac{k_{00}}{M_{00}} (h - h_2) \quad (7.9)$$

Вводя обозначения

$$a_* = \frac{k}{\rho \beta}, \quad b_1 = \frac{k_0}{MM_0 \rho \beta}, \quad b_2 = \frac{k_{00}}{MM_{00} \rho \beta}$$

перепишем его так:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a_* \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) - b_1 (h - h_1) - b_2 (h - h_2) \quad (7.10)$$

Если жидкость и пласт считаются несжимаемыми, то в уравнении (7.9) полагаем $\beta=0$. Получаем такое же уравнение, как в установившемся движении. Зависимость от времени может войти в его решение лишь через граничные условия.

§ 8. Точные решения некоторых нелинейных уравнений

1. Вытекание из канала. Простейший случай уравнения (6.6) получим, полагая $k_0=0$, $w=0$ и считая, что движение происходит в вертикальной плоскости xh . Будем иметь

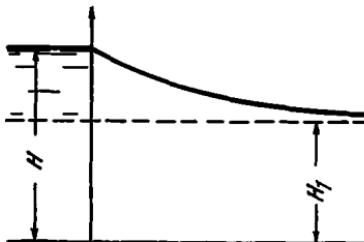
$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{2\sigma} \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} \quad (8.1)$$

Введем переменные u , η :

$$h = Hu, \quad \eta = \frac{x\sqrt{\sigma}}{2\sqrt{kHt}} \quad (8.2)$$

где H — уровень воды в канале (фиг. 58). Тогда получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$uu'' + u'^2 + 2\eta u' = 0 \quad (8.3)$$



Фиг. 58

которое можно интегрировать численно. Если для $h(x, t)$ поставить условия

$$h(0, t) = H, \quad h(x, 0) = H_1$$

то для $u(\eta)$ получаются граничные условия

$$u(0) = 1, \quad u(\infty) = H_1/H$$

Серия кривых, отвечающих различным значениям H_1/H , представлена на фиг. 59. Здесь ясно выделяется крайний случай — вытекание при начальном уровне грунтовых вод, равном нулю: это линия ABC . Для нелинейного уравнения, в отличие от линейного уравнения теплопроводности, получается язык грунтовых вод конечной длины. Рассмотрим точку $\eta = b$, в которой u обращается в нуль. Из уравнения (8.3) вытекает, что тогда будет $u'^2 + 2\eta u' = 0$. Так как u' в точке $\eta = b$ отлична от нуля (иначе скорость в этой точке была бы равна нулю), то имеем $u' + 2\eta = 0$ и, следовательно, при $\eta = b$

$$u = 0, \quad u' = -2b \quad (8.4)$$

Разлагая u в ряд по степеням $\eta - b$, при условиях (8.4) получаем

$$u = -2b(\eta - b) - \frac{1}{2}(\eta - b)^2 - \frac{(\eta - b)^3}{368b} + \frac{(\eta - b)^4}{288b^2} - \dots$$

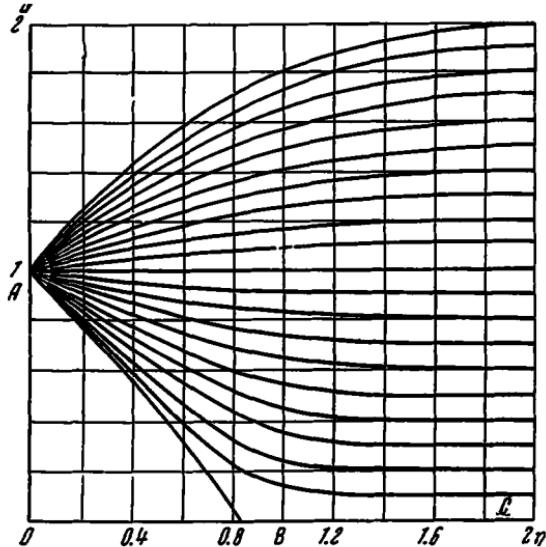
Положив здесь $\eta=0$, $u=1$, найдем

$$b = 0.811 \dots$$

Из уравнения (8.2) видим, что абсцисса x_0 точки B языка перемещается по закону

$$x_0 = 2b \sqrt{kHt/\sigma} = 1.62 \dots \sqrt{kHt/\sigma}$$

На фиг. 59 линия ABC не является обычным решением дифференциального уравнения, так как для нее производная терпит



Фиг. 59

разрыв непрерывности в точке $\eta=b$. Решение, состоящее из линий

$$\begin{aligned} u &= u(\eta) \quad \text{для } 0 \leq \eta \leq b, \\ u &= 0, \quad \text{для } \eta > b \end{aligned}$$

относится к числу так называемых обобщенных решений [21].

Рассмотрим другой крайний случай.

Вытекание воды из грунта в пустой канал (верхняя линия фиг. 60). Здесь решение найдено в такой форме [15]

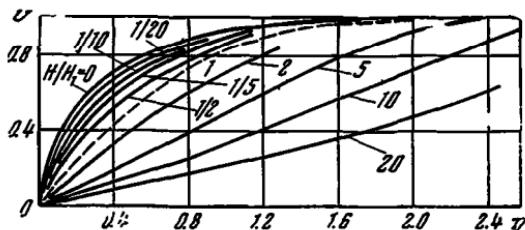
$$u = \frac{h(x, t)}{H_1} = B \left(y - 2y^4 + 3y^7 - \frac{4}{11}y^{10} - 4.77y^{13} + \dots \right)$$

где

$$B = 2.3652, \quad y = 0.4873 \sqrt{\eta}, \quad \eta = \frac{x \sqrt{\sigma}}{2 \sqrt{kH_1 t}}$$

Можно сравнить полученные точные решения для отмеченных крайних случаев с приближенными, соответствующими линеаризованным уравнениям. Полагая

$$a = kh_{\text{ср}}/\sigma$$



Фиг. 60

будем иметь линеаризованные уравнения: по h и h^2

$$(1) \quad \frac{\partial h}{\partial t} = a \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \quad (2) \quad \frac{\partial h^2}{\partial t} = a \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2}$$

При начальном и граничном условиях $h(x, 0) = H_1$, $h(0, t) = -H$ решения этих уравнений будут соответственно

$$(1) \quad h(x, t) = H - (H - H_1) \operatorname{erf} \eta, \quad (2) \quad h^2(x, t) = H^2 - (H^2 - H_1^2) \operatorname{erf} \eta$$

где $\operatorname{erf} \eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-y^2} dy$, $\eta = \frac{x}{2 \sqrt{at}}$, $a = \frac{kh_{\text{ср}}}{\sigma}$

Для первой нашей задачи, вытекания в грунт с нулевым уровнем воды, имеем $H_1 = 0$, поэтому

$$(1) \quad u = \frac{h(x, t)}{H} = 1 - \operatorname{erf} \eta, \quad (2) \quad u = \frac{h(x, t)}{H} = \sqrt{1 - \operatorname{erf} \eta}$$

Если принять $h_{\text{ср}} = H$, то η будет совпадать с η формулы (8.2).

Оказывается, что первый способ линеаризации дает значительно лучший результат, чем второй [15].

Теперь рассмотрим вытекание в пустой бассейн. Здесь $H=0$. Примем $h_{ср}=H_1$ и выпишем решения линеаризованных уравнений

$$(1) \quad u = \frac{h(x, t)}{H_1} = \operatorname{erf} \eta, \quad (2) \quad u = \frac{h(x, t)}{H_1} = \sqrt{\operatorname{erf} \eta}$$

где

$$\eta = \frac{x \sqrt{\sigma}}{2 \sqrt{k H_1 t}}$$

Здесь $u = \sqrt{\operatorname{erf} \eta}$ значительно ближе к точному решению, чем линия $u = \operatorname{erf} \eta$ (последняя на фиг. 60 показана пунктиром), и, следовательно, здесь второй способ линеаризации гораздо лучше первого.

На фиг. 60 построено семейство решений нелинейного уравнения по Дженкинсу и Ароновскому [22]. А именно представлена зависимость величины $v = [h(x, t) - H] : (H_1 - H)$ от η , причем H и H_1 соответствуют фиг. 58.

Положив $h = H_1 u$, получим для $u(\eta)$ дифференциальное уравнение (8.3). Приняв во внимание, что $v = (u - a) / (1 - a)$, где $a = H/H_1$, получим для v дифференциальное уравнение

$$[\alpha + (1 - \alpha)v]v'' + (1 - \alpha)v'^2 + 2\eta v' = 0 \quad (8.5)$$

При $a = 1$ или $H = H_1$, т. е. когда движение отсутствует, $u = 1$, однако уравнение (8.5) имеет решение $v = \operatorname{erf} \eta$, т. е.

$$h = H - (H - H_1) \operatorname{erf} \eta$$

Это есть решение линеаризованного уравнения. Представленное на фиг. 60 пунктирной линией, оно разделяет линии, для которых $H/H_1 < 1$, от линий с $H/H_1 > 1$. Интегральная линия для $H_1 = 0$ остается невыявленной, так как для нее $\eta \rightarrow \infty$.

2. Вытекание из канала при равномерном подъеме в нем воды. Интересно, что в случае, когда уровень воды в канале поднимается по линейному закону $H(t) = at$, для нелинейного уравнения получается очень простое решение — проще, чем для линеаризованного [22]:

$$h(x, t) = at - x \sqrt{\alpha \sigma / k} \quad \text{при } 0 \leq x \leq t \sqrt{k \alpha / \sigma}$$

$$h(x, t) = 0 \quad \text{при } x \geq t \sqrt{k \alpha / \sigma}$$

Опыты в щелевом лотке очень хорошо подтвердили прямолинейный характер перемещающейся свободной поверхности. Вообще результаты нелинейной теории позволяют проверить

точность показаний некоторых приборов, например интегратора В. С. Лукьянова [24, 25].

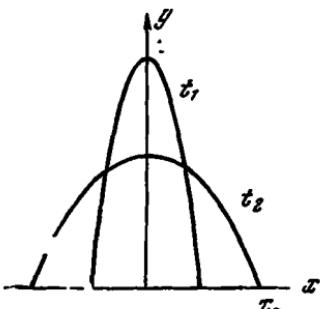
3. Растекание плоского и осесимметричного бугров грунтовых вод. Для движения симметричного относительно вертикальной оси y получено решение уравнения (8.1) типа источника, а именно [23]:

$$h(x, t) = \frac{\sigma}{6kt} (x_0^2 - x^2), \quad x_0 = \left(\frac{9kSt}{2\sigma} \right)^{1/4}$$

Его можно рассматривать как схему растекания бугра по поверхности непроницаемого водоупора. Через S обозначена площадь поперечного сечения бугра, имеющего вид цилиндрической поверхности с образующими перпендикулярными плоскостями xh (фиг. 61). Величина площади S остается неизменной во время движения.

В случае осевой симметрии простейшее нелинейное уравнение — уравнение (6.6) — при $k_0=0$, $w=0$ принимает вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{\sigma r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rh \frac{\partial h}{\partial r} \right)$$



Фиг. 61

Для него также найдено [23] простое точное решение типа мгновенного источника. Оно имеет вид

$$h(r, t) = \frac{\sigma}{8kt} (r_0^3 - r^3)$$

и представляет схему растекания осесимметричного бугра грунтовых вод по поверхности водоупора при сосредоточенном поливе, когда мгновенно выливается в грунт объем воды V . В начальный момент поверхность представляет собой цилиндр бесконечной высоты с бесконечно малым основанием. В последующие моменты поверхность бугра является параболоидом вращения объемом V .

Радиус-вектор основания перемещается по закону

$$r_0 = \left(\frac{16kVt}{\pi\sigma} \right)^{1/4}$$

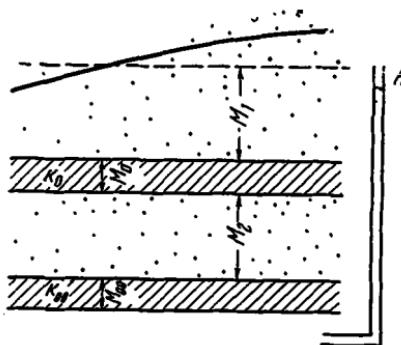
Ордината вершины бугра убывает согласно формуле

$$h(0, t) = \sqrt[1/2]{\sigma V / \pi k t}$$

Любое положение свободной поверхности (как и в предыдущем случае плоского бугра) может быть принято за начальное.

§ 9. Системы дифференциальных уравнений в случае слоистых грунтов

Система дифференциальных уравнений для напоров h_i в водоносных пластах, перемежающихся со слабопроницаемыми, отличается от соответствующей системы для случая установив-



Фиг. 62

шихся движений (см. § 2 части первой) лишь тем, что в каждом из уравнений добавляется член вида $\sigma_i \partial h_i / \partial t$ в левой части. Напишем систему уравнений лишь для двух проницаемых пластов, разделенных и ограниченных слабопроницаемыми (фиг. 62):

$$\begin{aligned} \sigma_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} &= k_1 M_1 \nabla^2 h_1 - \frac{k_0}{M_0} (h_1 - h_2) + w \\ \sigma_2 \frac{\partial h_2}{\partial t} &= k_2 M_2 \nabla^2 h_2 - \frac{k_0}{M_0} (h_2 - h_1) - \frac{k_{00}}{M_{00}} (h_2 - H) \end{aligned} \quad (9.1)$$

Здесь σ_1 — активная порозность или недостаток насыщения, если первый водоносный горизонт безнапорный, если же он напорный, то σ_1 и σ_2 имеют вид

$$\sigma_i = M_i \rho_0 g \beta_i, \quad \beta_i = \sigma_i \beta_{жi} + \beta_{плi} \quad (i = 1, 2) \quad (9.2)$$

При этом $w=0$. Если сжимаемостью жидкости и пласта можно пренебречь, то $\beta_i=0$ и $\sigma_i=0$.

Для безнапорного горизонта иногда рассматривают еще один член, зависящий линейно от h_1 . А именно, в некотором приближении испарение со свободной поверхности грунтового потока можно считать линейной функцией от глубины залегания грунтовых вод (см. § 1)

$$w = w_0 \left(1 - \frac{\Delta}{\Delta_0} \right) = -\alpha \left(1 - \frac{h_{\text{пов}} - h_1}{h_{\text{пов}} - h_{\text{кр}}} \right) \quad \text{для } h_1 \geq h_{\text{кр}}$$

$$w = 0 \quad \text{для } h \leq h_{\text{кр}}$$

где $h_{\text{пов}}$ — уровень поверхности земли; $h_{\text{кр}}$ — критический уровень грунтовых вод, т. е. такой, выше которого происходит испарение со свободной поверхности; α — интенсивность испарения с поверхности земли ($\alpha > 0$). Последнее выражение можно переписать еще так:

$$w = -\gamma (h_1 - h_{\text{кр}}) \quad \text{для } h_1 \geq h_{\text{кр}}, \quad w = 0 \quad \text{для } h_1 \leq h_{\text{кр}} \quad (9.3)$$

где

$$\gamma = \frac{\alpha}{h_{\text{пов}} - h_{\text{кр}}} = \frac{\alpha}{\Delta_0}$$

Г л а в а III

СКВАЖИНЫ В УСЛОВИЯХ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ

§ 10. Скважина в пласте с непроницаемым водоупором

Рассмотрим осесимметричное безнапорное движение, для которого уравнение Буссинеска (см. гл. II, § 6) запишется так:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r h \frac{\partial h}{\partial r} \right)$$

Линеаризуем его двумя способами:

1) заменив его линейным уравнением относительно h :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right)$$

2) заменив его линейным уравнением относительно h^2 :

$$\frac{\partial h^2}{\partial t} = \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h^2}{\partial r} \right)$$

В обоих случаях a имеет значение

$$a = k \tilde{h} / \sigma$$

где \tilde{h} — некоторое среднее значение величины $h(r, t)$.

Коэффициент a называется коэффициентом уровнепроводности.

Для напорного пласта соответствующее уравнение является линейным

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right) \quad (10.1)$$

где a называется теперь коэффициентом пьезопроводности и имеет вид

$$a = \frac{k}{\gamma (\sigma \beta_{ж} + \beta_{пл})}$$

($\beta_{ж}$ — коэффициент сжимаемости жидкости, $\beta_{пл}$ — то же для пласта).

Будем искать автомодельное решение, зависящее от комбинации независимых переменных r и t :

$$\xi = r^2/4at$$

Для определенности здесь мы будем рассматривать уравнение (10.1) напорного пласта. Уравнение (10.1) приводится при этом к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\xi \frac{d^2 h}{d\xi^2} + (1 + \xi) \frac{dh}{d\xi} = 0$$

имеющему частные решения: постоянную и интеграл вида

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi$$

Искомое решение для h будет

$$h(r, t) = C_1 + C_2 \int_R^{\infty} \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi \quad \left(R = \frac{r^2}{4at} \right)$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 выбираются из условий: при $t=0$, т. е. $\xi=\infty$, напор $h(r, 0)$ имеет постоянное значение h_0 , и из условия, что дебит скважины бесконечно малого радиуса, ось которой расположена вдоль оси ординат, есть постоянная величина Q . Тогда $h(r, t)$ запишется в виде [26]

$$h = h_0 + \frac{Q}{4\pi M k} Ei \left(-\frac{r^2}{4at} \right) \quad (10.2)$$

где M — мощность пласта, Ei — интегральная экспоненциальная функция:

$$Ei(-x) = - \int_x^{\infty} \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi \quad (10.3)$$

Действительно, очевидно, что $h=h_0$ при $t=0$. Для проверки второго условия составим выражение расхода через цилиндрическую поверхность радиусом r_0 (радиус скважины), высотой M — это мощность напорного пласта, в котором находится скважина; последняя считается совершенной. Получим для дебита Q_0 :

$$Q_0 = 2\pi r_0 M k \frac{\partial h}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = Q \exp \frac{-r_0^2}{4at}$$

Видим, что для скважины конечного радиуса дебит меняется со временем, возрастаю от нуля при $t=0$ до Q при $t=\infty$. Однако при обычных значениях r_0 (порядка 0.1 м) и обычных значениях a приближение Q_0 к Q происходит настолько быстро, что можно считать Q_0 постоянным, равным Q . Таким образом, полученное решение можно рассматривать как соответствующее притоку к скважине с постоянным дебитом. При $r_0 \rightarrow 0$ $Q_0 \rightarrow Q$.

Напор на поверхности скважины является переменным. Он равен

$$h_{\text{скв}} = h_0 + \frac{Q}{4\pi M k} \operatorname{Ei} \left(-\frac{r_0^2}{4at} \right) \quad (10.4)$$

Для достаточно малых значений аргумента экспоненциального интеграла имеем приближенную формулу

$$\operatorname{Ei}(-x) = \ln x + C$$

где $C = \ln \gamma = 0.577$ — эйлерова постоянная ($\gamma = 1.78$). Существует такая оценка этой формулы: для $0 < x < 1/\gamma$ ее ошибка

$$\delta < \frac{x}{|\ln \gamma x|}$$

Теперь для достаточно больших значений времени можем написать приближенное выражение

$$h(r, t) = h_0 - \frac{Q}{4\pi k M} \left(\ln \frac{4at}{r^2} - \ln \gamma \right) \quad (10.5)$$

Оно тем более годится для $r=r_0$, где r_0 — радиус скважины. Введем обозначение понижения на скважине

$$S = h_0 - h_{\text{скв}}$$

и перепишем последнее уравнение, полагая в нем $r=r_0$. Получим

$$S = \frac{Q}{4\pi k M} \ln \frac{2.25at}{r_0^2} \quad (10.6)$$

или, полагая

$$A = \frac{Q}{4\pi kM} \ln \frac{2.25a}{r_0^2}, \quad B = \frac{Q}{4\pi kM} \quad (10.7)$$

напишем зависимость между S и $\ln t$ в виде

$$S = A + B \ln t \quad (10.8)$$

Следовательно, если построить график зависимости S от $\ln t$, то угловой коэффициент получающейся при этом прямой будет равен B , а начальная ордината (при $t=1$) будет равна A . Отсюда, если известны M , Q и r_0 , можно найти k и a , если известно a , то можно найти r_0 — однако вообще это не будет действительный радиус скважины. Его обозначают через r_0' и называют приведенным радиусом скважины: это радиус такой скважины, которая давала бы тот же дебит Q при тех же параметрах пласта, но не имела бы сопротивлений (фильтра, труб и т. д.) действительной скважины. По величине отношения $r_0 : r_0'$ можно судить о сопротивлениях фильтра и трубы.

Наблюдения за остановленной скважиной дают другой способ определения одного из параметров пласта.

Предположим, что происходила откачка из скважины в течение промежутка времени T , а затем откачка была прекращена. Тогда восстановление напора в точке r пласта будет происходить согласно формуле

$$h = h_0 + \frac{Q}{4\pi Mk} \left[\operatorname{Ei} \left(-\frac{r^2}{4a(t+T)} \right) - \operatorname{Ei} \left(-\frac{r^2}{4at} \right) \right] \quad (10.9)$$

Действительно, очевидно, что (10.9) является решением уравнения (10.1), удовлетворяющим условию: при $t=0$ (момент остановки)

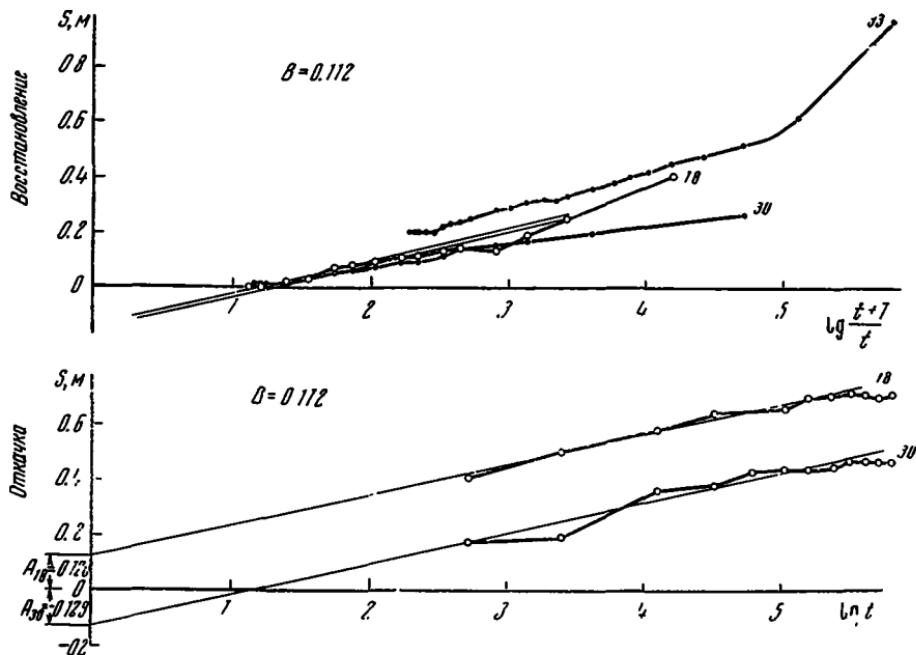
$$h = h_0 + \frac{Q}{4\pi kM} \operatorname{Ei} \left(-\frac{r^2}{4aT} \right)$$

и обращающимся в h_0 при $r=\infty$.

Выражению (10.9) дают такую интерпретацию. Предположим, что откачка с дебитом Q продолжается и после истечения промежутка времени T , а затем начинает действовать нагнетательная скважина с тем же дебитом Q . В результате получится шулеровский дебит, а возле скважины будет происходить восстановление уровня.

Для достаточно больших значений t , пользуясь формулой (10.6), найдем

$$S = h_0 - h = \frac{Q}{4\pi kM} \ln \frac{t+T}{t} \quad (10.10)$$



Фиг. 63

Откладывая по оси абсцисс значения $\ln[t+T]/t$, а по оси ординат значения S , получаем уравнение прямой с угловым коэффициентом $B = Q/4\pi M$.

Изложенная теория пользуется в настоящее время большой известностью и широко применяется при определении параметров пластов как для нефтяных, так и для водяных скважин. Формула (10.2) была получена почти одновременно Тейсом [26] и Маскетом (см. [32] части первой).

Пример расчета. Для определения коэффициентов пьезопроводности и фильтрации водоносного горизонта песков нижнечетвертичных отложений, содержащих напорные воды, в Ключевском совхозе Кулундинской гидро-геологической станцией ЗСГУ из скважины № 33 была проведена откачка при постоянном дебите, равном $291 \text{ м}^3/\text{сут}$. Обсадные трубы скважины 33 во время откачки служили водоподъемными, и поэтому понижение в этой скважине замерено не было. Замеры понижений производились по наблюдательным скважинам 30 и 18, расположенным соответственно на расстоянии 28 и 10 м от скважины 33.

Если результаты откачек представить в виде полулогарифмических графиков (фиг. 63), то для достаточно больших значений t угловые коэффициенты прямых, полученных для различных скважин, должны быть равными, так как коэффициент B , входящий в уравнения прямых, один и тот же для всех

скважин. Расстояния r от работающей скважины до наблюдательных невеличины, поэтому приближенные формулы применимы, и в формуле (10.7) для A можно вместо r_0 рассматривать $r > r_0$.

Величины A и B можно определить, взяв две точки на прямолинейном участке: $(s_1, \ln t_1)$ и $(s_2, \ln t_2)$. Тогда

$$A = \frac{s_2 - s_1}{\ln t_2 - \ln t_1}, \quad B = \frac{s_1 \ln t_2 - s_2 \ln t_1}{\ln t_2 - \ln t_1} \quad (10.11)$$

Зная величины A и B , можно определить k и a :

$$k = Q/4\pi MB, \quad a = 0.445r^4/B \quad (10.12)$$

Были взяты значения s , t , указанные в табл. 23.

Таблица 23

Расчет параметра a по данным откачки из скважины 33

Скважина	s_1 м	s_2 м	t_1 мин	t_2 мин	A	B	r^2 м^2	a $\text{м}^2/\text{мин}$
18	0.50	0.70	30	180	0.120	0.112	100	130
30	0.30	0.43	47	151	-0.129	0.112	784	110

Среднее из двух значений a равно $120 \text{ м}^2/\text{мин}$, или $a = 1.73 \cdot 10^5 \text{ м}^2/\text{сут}$. Для $Q = 291 \text{ м}^3/\text{сут}$ получаем $kM = 211 \text{ м}^2/\text{сут}$. Если отнести мощность пласта к средней мощности второго водоносного горизонта, которая равна 10.3 м , то для коэффициента фильтрации получаем $k = 21 \text{ м}/\text{сут}$, если взять $M = 15.5 \text{ м}$ — мощность у скважины 33, то $k = 13.6 \text{ м}/\text{сут}$.

Зная k , можем оценить величину $\beta = \beta_{\text{пл}} + \sigma\beta_{\text{ж}}$. Она получается равной $1.2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$.

Данные о восстановлении уровня воды в скважинах после откачки не дали удовлетворительных результатов из-за кратковременности наблюдений и разброса точек на графике зависимости уровней от времени.

Приведенные выше расчеты сделаны Е. В. Шербань.

Эталонная кривая. При определении параметров нефтяных пластов используют многочисленные варианты изложенных методик. К их числу относится графический метод, предложенный Ю. П. Борисовым и В. П. Яковлевым (см., например, [27]).

Положим $h_0 - h = \Delta h$ и перепишем уравнение (10.2) в виде

$$\Delta h = \frac{Q}{4\pi Mk} f\left(\frac{r^2}{4at}\right)$$

Возьмем логарифм от обеих его частей и введем обозначение

$$\log f\left(\frac{r^2}{4at}\right) = F\left(\log 4t - \log \frac{r^2}{a}\right)$$

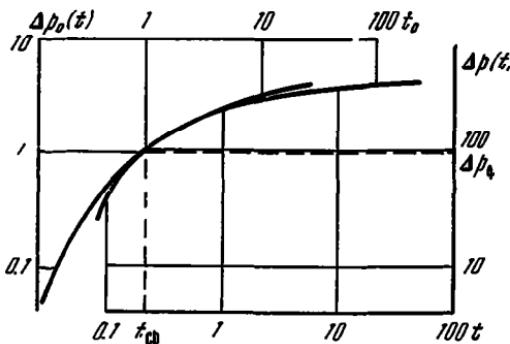
Тогда можем написать

$$\log \Delta h = \log \frac{Q}{4\pi kM} + F \left(\log 4t - \log \frac{r^2}{a} \right)$$

При $Q/4\pi kM = 1$, $r^2/a = 1$ получаем эталонную кривую (фиг. 64)

$$\Delta h = f \left(\frac{1}{4t} \right) = -Ei \left(-\frac{1}{4t} \right)$$

Другие кривые получаются из эталонной кривой сдвигом на отрезки $\log(Q/4\pi kM)$ и $\log(r^2/a)$ вдоль осей $\log \Delta h$ и $\log t$. На этом свойстве основан способ определения kM и a по отрезкам, проведенным из точки $t=1$, $\Delta h=1$ к осям координат.



Фиг. 64

По идею способ очень прост для применения, однако он требует большой точности замеров уровней воды в скважинах.

Рекомендуется эталонную кривую построить на кальке, а результаты замеров уровней в скважинах нанести на логарифмическую сетку. При этом масштаб фактической кривой должен быть одинаковым с масштабом эталонной. Фактический график совмещают с эталонным и определяют точки t_{ϕ} и Δh_{ϕ} , которые совпадали с точками $t=1$, $\Delta h=1$ эталонной кривой. Тогда

$$kM = Q/4\pi \Delta h_{\phi}, \quad a = r^2/t_{\phi}$$

Е. В. Щербаний провела ряд вычислений с помощью эталонной кривой. Лучший из этих случаев представлен на фиг. 64, он относится к скважине 42, по ней получены $kM = 538 \text{ м}^2/\text{сут}$, $a = 2,5 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{сут}$. Средние значения по результатам ряда скважин для второго горизонта оказались порядка $k_{cp} \approx 30 \text{ м}/\text{сут}$, $a_{cp} \approx 2 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{сут}$.

§ 11. Об определении параметров пласта при наличии перетока через слабопроницаемые прослойки¹

В работе [28] дан интегральный метод определения параметров с учетом притока жидкости в скважину после прекращения откачки. Мы здесь рассматриваем тот же метод в применении к слоистым грунтам, когда хорошо проницаемый пласт граничит со слабопроницаемыми.

Будем исходить из уравнения (6.6) гл. II, считая $\epsilon=0$, т. е. из уравнения осесимметричного движения

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} \right) - b(h - H) \quad (11.1)$$

Пусть откачка велась настолько долго, что движение установилось. Тогда для цапора $h(r)$ или ординаты свободной поверхности $h(r)$, как известно, имеет место следующее уравнение (см. § 8 части первой):

$$h(r) = H - \frac{Q}{2\pi kM} K_0(\omega r)$$

где H — уровень грунтовых вод до начала откачки, Q — постоянный дебит скважины нулевого радиуса,

$$\omega^2 = b/a, \quad b = k_1/\sigma M_1, \quad a = kM/\sigma$$

Здесь k, k_1 — коэффициенты фильтрации хорошо- и слабопроницаемых пластов, M — некоторое среднее значение глубины потока, σ — коэффициент водоотдачи, M_1 — мощность слабопроницаемого слоя.

Если остановить скважину, то будет происходить восстановление уровня.

Предположим, что вместо прекращения откачки началась закачка воды с дебитом — Q в той же скважине. Тогда по методу наложения течений для ординаты свободной поверхности $h(r, t)$ после прекращения откачки будем иметь

$$h(r, t) = h(r) + h^*(r, t)$$

Здесь $h^*(r, t)$ — ордината свободной поверхности, соответствующая закачке с дебитом — Q . При этом $h^*(r, t)$ есть решение уравнения

$$\frac{\partial h^*}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 h^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h^*}{\partial r} \right) - bh^*$$

¹ Исследования этого параграфа принадлежат А. Б. Бегматову.

при следующих начальном и граничных условиях:

$$h^*(r, 0) = 0, \quad h^*(\infty, t) = 0, \quad 2\pi kM \left(r \frac{\partial h^*}{\partial r} \right)_{r \rightarrow 0} = -Q \quad (Q > 0)$$

Применяя преобразование Лапласа, имеем

$$U(r, p) = \frac{Q}{2\pi kMp} K_0 \left(r \sqrt{\frac{p+b}{a}} \right), \quad U(r, p) = \int_0^\infty h^*(r, t) e^{-pt} dt$$

На скважине

$$U(r_0, p) = \frac{Q}{2\pi kMp} K_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p+b}{a}} \right)$$

Полагая

$$p = \frac{1}{t_0}, \quad \psi(t_0) = t_0 \int_0^\infty h^*(r_0, t) \exp \frac{-t}{t_0} dt$$

$$\psi(t_0) = \frac{Q}{2\pi kM} K_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{1/t_0 + b}{a}} \right) \approx -\frac{Q}{2\pi kM} \ln \left(\frac{r_0}{2} \sqrt{\frac{1/t_0 + b}{a}} \right)$$

или

$$\psi(t_0) = -\frac{Q}{2\pi kM} \ln \frac{r_0}{2\sqrt{a}} - \frac{Q}{4\pi kM} \ln \left(b + \frac{1}{t_0} \right)$$

где t_0 — некоторый параметр размерности времени, удовлетворяющий условию (см. [28])

$$\left(\frac{b+1/t_0}{a} \right)^{1/2} t_0 < 0.01 \quad (\gamma = 1.78 \dots)$$

С другой стороны, t_0 выбирается таким, чтобы при вычислении несобственного интеграла, входящего в $\psi(t_0)$, можно было обходиться конечным промежутком интегрирования, т. е. интервал времени, в котором были произведены измерения восстановления уровня в колодце, не должен быть очень малым.

Значение b можно найти подбором из соотношения

$$\frac{\psi(t_{03}) - \psi(t_{02})}{\psi(t_{02}) - \psi(t_{01})} = \frac{\ln(b+1/t_{02}) - \ln(b+1/t_{03})}{\ln(b+1/t_{01}) - \ln(b+1/t_{02})}$$

Здесь $\psi(t_{01})$, $\psi(t_{02})$, $\psi(t_{03})$ — значения $\psi(t_0)$, соответствующие значениям параметра $t_0 = t_{01}$, t_{02} , t_{03} . При этом $\psi(t_0)$ вычисляется численным интегрированием.

Теперь можно построить линию $\psi(t_0)$ и определить параметры пласта kM и $r_0 a^{-1/2}$.

Отметим, что если пласт напорный, то M означает его мощность, а $h^*(r, t)$ — пьезометрический напор, отсчитываемый от значений пьезометрического напора перед остановкой скважины.

Был рассчитан пример по данным восстановления уровня в скважине № 18 Ключевского района Алтайского края. Численное интегрирование $\psi(t_0)$ произведено методом Симпсона. При этом получено $kM = 128 \text{ м}^2/\text{сут}$. Напомним, что в § 10 части второй было найдено значение kM для этой скважины, равное $211 \text{ м}^2/\text{сут}$.

Однако в силу того, что значения t_0 были малыми, оказалось невозможным определить b . В наших расчетах были использованы значения $t_0 = 0.4, 0.6, 0.8, 1.0 \text{ часа}$. Поэтому соответствующие значения для $1/t_0$ таковы: $60, 40, 30, 24 \text{ сут}^{-1}$.

В нефтяных скважинах t_0 может принимать большие значения. Например, в статье [29] t_0 изменяется от 1.9 до 6.3 часа.

Если имеются хорошие данные откачки (понижений в скважине) при достаточно большой продолжительности работы скважины, то $1/t_0$ становится сравнимым с b . Рекомендуемое в статье [29] неравенство $1/t_0 \leq 3.5/T_0$, где T_0 — продолжительность работы скважины, может тогда быть достаточно малой величиной.

Из выражения для $\psi(t_0)$:

$$\psi(t_0) = \frac{Q}{2\pi kM} K_0 \left(\frac{r_0}{Va} \sqrt{1/t_0 + b} \right)$$

видно, что b оказывает влияние на $U(r, p)$ лишь при достаточно малоих значениях p , т. е. при достаточно больших значениях t_0 . Поэтому при восстановлении уровня затруднительно учитывать перетекание, — продолжительность восстановления обычно мала. Лучшие результаты должны получиться при рассмотрении материалов откачки до остановки скважины.

§ 12. Скважина при слабопроницаемом водоупоре

Безнапорное движение. Будем рассматривать линейное уравнение для h^2 :

$$\frac{\partial h^2}{\partial t} = a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h^2}{\partial r} \right) - b (h^2 - H^2) \quad \left(a = \frac{k \tilde{h}}{\sigma}, \quad b = \frac{k_1}{M_1 \sigma} \right) \quad (12.1)$$

где $h(r, t)$ — функция от r и t , представляющая собой напор в безнапорном движении; \tilde{h} — некоторое среднее значение этой

функции; k — коэффициент фильтрации водоносного слоя; k_1 — коэффициент фильтрации слабопроницаемого водоупора; M_1 — мощность этого водоупора; σ — эффективная пористость водоносного грунта; H — постоянный напор в водоносном пласте, лежащем ниже водоупора.

Для уравнения (12.1) существует решение, полученное Хантушем и Джекобом [30], а позднее, независимо от них, Т. И. Матвеенко [31]. Это решение может быть получено преобразованием Лапласа функции $h^2(r, t)$. Аналогично тому, как мы это делали в § 2, полагаем

$$U(r, p) = \int_0^\infty h^2(r, t) e^{-pt} dt$$

Для условий

$$h^2(r, 0) = H^2, \quad 2\pi k \left(hr \frac{\partial h}{\partial r} \right)_{r \rightarrow 0} = -Q$$

найдем

$$U(r, p) = \frac{Q}{2\pi kp} K_0 \left(r \sqrt{\frac{p+b}{a}} \right)$$

Однако здесь мы не ограничимся преобразованием Лапласа, но вернемся к оригиналу. Функция $K_0(\sqrt{ap})$ соответствует оригиналу

$$\frac{1}{2} t^{-1} e^{-1/a/t}.$$

По теореме смещения преобразованию $F(p+m)$ соответствует оригинал $e^{-mt} f(t)$. В рассматриваемом случае

$$K_0 \left(\frac{r}{\sqrt{a}} \sqrt{p+b} \right) : \frac{e^{-bt}}{2t} e^{-1/a^2 t^2 / at}$$

Наконец, множитель $1/p$ в выражении для изображения функции даст интеграл

$$\frac{1}{p} K_0 \left(\frac{r}{\sqrt{a}} \sqrt{p+b} \right) : \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{t} \exp \left(-bt - \frac{r^2}{4at} \right) dt$$

Замена переменной $r^2/4at = u$ приводит к интегралу

$$\int_0^t \exp \left(-bt - \frac{r^2}{4at} \right) \frac{dt}{t} = \int_R^\infty \exp \left(-u - \frac{r^2 b}{4au} \right) \frac{du}{u} \quad \left(R = \frac{r^2}{4at} \right)$$

и для $h^2(r, t)$ получаем

$$h^2(r, t) = H^2 - \frac{Q}{2\pi k} \int_R^\infty \exp\left(-u - \frac{br^2}{4au}\right) \frac{du}{u} \quad (12.2)$$

Введем величину

$$B = \sqrt{a/b} = \sqrt{kMM_1/k_1} \quad (12.3)$$

и функцию

$$W\left(u, \frac{r}{B}\right) = \int_u^\infty \exp\left(-y - \frac{r^2}{4B^2y}\right) \frac{dy}{y} \quad (12.4)$$

Величину B называют коэффициентом связи [32]. Функция (12.4) протабулирована в статье [32]. С ее помощью можно переписать (12.2) в виде

$$h^2(r, t) = H^2 - \frac{Q}{2\pi k} W\left(\frac{r^2}{4at}, \frac{r}{B}\right) \quad (12.5)$$

В книге [33] приведены графики функции W .

Заметим, что интеграл

$$J(\alpha, \beta) = \int_\beta^\infty \frac{1}{u} \exp\left(-u - \frac{\alpha}{u}\right) du$$

подстановкой $\alpha/u = y$ приводится к виду

$$\begin{aligned} J(\alpha, \beta) = & - \int_{\alpha/\beta}^0 \exp\left(-y - \frac{\alpha}{y}\right) \frac{dy}{y} - - \int_{\alpha/\beta}^\infty \exp\left(-y - \frac{\alpha}{y}\right) \frac{dy}{y} + \\ & + \int_0^\infty \exp\left(-y - \frac{\alpha}{y}\right) \frac{dy}{y} \end{aligned}$$

Последний интеграл представляет цилиндрическую функцию $2K_0(2\sqrt{\alpha})$, так как для цилиндрической функции второго рода мнимого аргумента имеет место формула

$$K_0(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp\left(-y - \frac{x^2}{4y}\right) \frac{dy}{y} \quad (12.6)$$

Таким образом, можем написать

$$J(\alpha, \beta) = 2K_0(2\sqrt{\alpha}) - J\left(\alpha, \frac{\alpha}{\beta}\right) \quad (12.7)$$

Применим (12.7) к интегралу, входящему в выражение (12.2), полагая

$$\alpha = \frac{r^2}{4B^2}, \quad \beta = \frac{r^2}{4at}, \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{at}{B^2}$$

Получим

$$\begin{aligned} h^2(r, t) &= H^2 - \frac{Q}{2\pi k} \int_R^\infty \exp\left(-u - \frac{r^2}{4B^2 u}\right) \frac{du}{u} = \\ &= H^2 - \frac{Q}{\pi k} K_0\left(\frac{r}{B}\right) + \frac{Q}{2\pi k} \int_{at/B^2}^\infty \exp\left(-u - \frac{r^2}{4B^2 u}\right) \frac{du}{u} \quad (12.8) \\ &\quad \left(R = \frac{r^2}{4at} \right) \end{aligned}$$

Чтобы найти выражение расхода $Q(r, t)$ через цилиндрическую поверхность радиусом r , воспользуемся вторым видом равенства (12.8); получим

$$Q(r, t) = 2\pi k r h \frac{\partial h}{\partial r} = Q \left[\frac{r}{B} K_1\left(\frac{r}{B}\right) - \frac{r^2}{4B^2} \int_{at/B^2}^\infty \exp\left(-u - \frac{r^2}{4B^2 u}\right) \frac{du}{u^3} \right] \quad (12.9)$$

Здесь использовано соотношение $K'_0(x) = -K_1(x)$.

При $r \rightarrow 0$ имеем

$$K_1\left(\frac{r}{B}\right) \approx \frac{B}{r}, \quad \frac{r}{B} K_1\left(\frac{r}{B}\right)_{r \rightarrow 0} \rightarrow 1$$

При $t > 0$ интеграл в правой части (12.9) остается ограниченным и его произведение на r^2 стремится к нулю при $r \rightarrow 0$. Поэтому

$$\lim_{r \rightarrow 0} Q(r, t) = Q$$

Следовательно, скважина бесконечно тонкого радиуса имеет постоянный расход Q . Для скважины конечного радиуса r_0 имеет место формула (12.9), если положить в ней $r = r_0$.

Введем обозначения

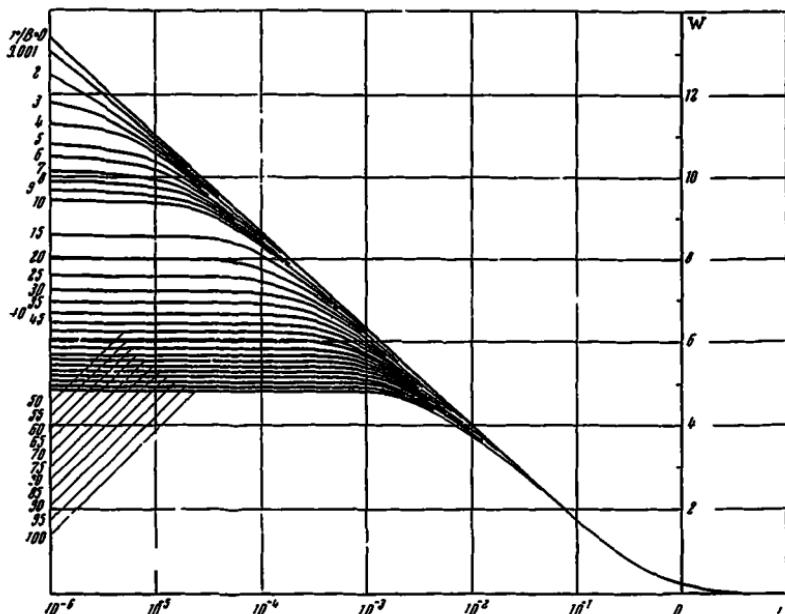
$$W_1\left(\tau, \frac{r}{B}\right) = 2K_0\left(\frac{r}{B}\right) - \int_\tau^\infty \exp\left(-u - \frac{r^2}{4B^2 u}\right) \frac{du}{u}$$

$$W'\left(\tau, \frac{r}{B}\right) = \frac{r}{B} K_1\left(\frac{r}{B}\right) - \frac{r^2}{4B^2} \int_\tau^\infty \exp\left(-u - \frac{r^2}{4B^2 u}\right) \frac{du}{u^2}$$

Тогда формулы (12.8) и (12.9) можно переписать в виде

$$h^2(r, t) = H^2 - \frac{Q}{2\pi k} W_1 \left(\frac{at}{B^2}, \frac{r}{B} \right), \quad Q(r, t) = QW' \left(\frac{at}{B^2}, \frac{r}{B} \right)$$

На фиг. 65 даны построенные В. А. Постновым графики зависимости $W(u, r/B)$ от u и r/B по таблицам статьи [32].



Фиг. 65

Соотношение между дебитом скважины и «дебитом питания». Чтобы вывести это соотношение, мы воспользуемся линеаризованным уравнением (6.7) (считая $\varepsilon=0$), причем перепишем его, полагая $s=H-h$, s является понижением в точке пласта (r, t) . Будем иметь

$$\sigma \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{kM}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial s}{\partial r} \right) - \frac{k_1}{M_1} s \quad (12.10)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(2\pi kMr \frac{\partial s}{\partial r} \right) = Q, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} s = 0, \quad s(r, 0) = 0$$

имеет вид

$$s = \frac{Q}{4\pi k M} \int_0^t \exp \left(-\frac{r^2}{4a\tau} - b\tau \right) \frac{d\tau}{\tau} \quad (b = k_1/M_1\sigma)$$

Используя методику статьи [34], умножим уравнение (12.10) почленно на $2\pi r$ и проинтегрируем по r в пределах (r_0, R) . Получим, переставляя порядок дифференцирования и интегрирования:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\sigma \int_{r_0}^R 2\pi r s dr \right] = 2\pi k M \left(r \frac{\partial s}{\partial r} \right) \Big|_{r_0}^R - \frac{k_1}{M_1} \int_{r_0}^R 2\pi r s dr \quad (12.11)$$

Первое слагаемое правой части представляет разность расходов $Q(r_0, t)$ и $Q(R, t)$ через цилиндрические поверхности радиусов r_0 и R . Интеграл

$$\int_{r_0}^R 2\pi r s dr = V(t)$$

представляет объем воронки депрессии. Поэтому соотношение (12.11) можно переписать так:

$$Q(r_0, t) - Q(R, t) = \sigma \frac{dv}{dt} - q(R, t) + q(r_0, t) \quad (12.12)$$

где $q(r, t)$ — дебит питания через кровлю слабопроницаемого пласта, с которым граничит водоносный горизонт:

$$q(r, t) = \frac{k_1}{M_1} \int_0^r 2\pi r s dr$$

Положим $q(\infty, t) = q(t)$. Как нетрудно подсчитать, для $q(t)$ получается простое выражение (считаем $r_0=0, R=\infty$)

$$q(t) = Q(1 - e^{-bt}) \quad (12.13)$$

При $t \rightarrow \infty$ имеем $q(t) \rightarrow Q$, и весь дебит при установившемся движении образуется за счет перетоков.

Заметим, что для движения в *напорном пласте* выведенные результаты справедливы с соответствующими изменениями.

§ 13. Скважина в круговой области (систематический вертикальный дренаж)

До сих пор мы рассматривали скважины в безграничном пласте. Предположим теперь, что имеем систему достаточно большого числа скважин, так что каждая скважина имеет свою, круговую, область действия (см. § 1) и откачка происходит как бы из бочки. Такие скважины могут служить дренами при осушении или быть использованными для орошения.

Рассмотрим довольно общий случай такого рода осесимметричного движения, удовлетворяющего уравнению

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} \right) + e(t) \quad \left(a = \frac{kM}{\sigma}, \quad e = \frac{w(t)}{\sigma} \right) \quad (13.1)$$

(M — средний уровень грунтовых вод)

Пусть скважина радиусом r_0 работает при постоянном уровне в ней воды H_1 , начальный уровень грунтовых вод $h(r, 0) = H_0$, на границе области действия скважины $r=R$, как на твердой стенке «бочки», имеем $dh/dr=0$. Кроме того, на поверхность грунтового потока выпадает инфильтрация интенсивностью $w(t)$, кусочно постоянная во времени, что соответствует поливам в промежутки времени (t_{2i}, t_{2i+1}) с интенсивностями w_{2i+1} и их выключению в промежутки (t_{2i-1}, t_{2i}) ; $i=0, 1, \dots; t_{-1}=0$.

Можно использовать решения, приведенное в книге М. Маскета [82] части первой), уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) \quad (13.2)$$

при условиях

$$U(r, 0) = g(r), \quad U(r_0, t) = f_1(t), \quad \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right)_{r=R} = f_2(t)$$

Оно имеет вид

$$U(r, t) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \frac{J_0(\lambda_n r_0) V(\lambda_n r)}{J_0^2(\lambda_n r_0) - J_1^2(\lambda_n R)} e^{-a\lambda_n^2 t} \left[\frac{\pi}{2} J_0(\lambda_n r_0) \int_{r_0}^R r g(r) V(\lambda_n r) dr - \right. \\ \left. - a J_1(\lambda_n R) \int_0^t f_1(t) e^{a\lambda_n^2 t} dt - \frac{a J_0(\lambda_n r_0)}{\lambda_n R} \int_0^t f_2(t) e^{a\lambda_n^2 t} dt \right] \quad (13.3)$$

где λ_n — корни уравнения $V(\lambda_n r_0) = 0$, причем

$$V(\lambda_n r) = J_0(\lambda_n r) Y_1(\lambda_n R) - J_1(\lambda_n R) Y_0(\lambda_n r) \quad (13.4)$$

Подстановка

$$U = h(r, t) - H_1 - \int_0^t \varepsilon(t) dt \quad (13.5)$$

приводит уравнение (13.1) к уравнению (13.2). При этом

$$g(r) = H_0 - H_1, \quad f_1(t) = - \int_0^t \varepsilon(t) dt, \quad f_2(t) = 0$$

Выражение для $\varepsilon(t)$ в развернутом виде можно записать так:

$$\varepsilon(t) = \sum_{l=1}^m \varepsilon_{2l-1} [\delta(t - t_{2l-1}) - \delta(t - t_{2l})]$$

$$\delta(t - t_v) = \begin{cases} 0, & t < t_v \\ 1, & t > t_v \end{cases}$$

Здесь

$$\varepsilon(t) = w(t)/\sigma, \quad \varepsilon_{2l-1} = w_{2l-1}/\sigma = \text{const}$$

Приведем окончательный результат в безразмерных величинах. Для этого прежде всего обозначим через τ величину, которая названа С. Ф. Аверьяновым [7] «временем стабилизации»:

$$\tau = \sigma R^3/kM$$

Далее примем

$$\bar{r} = r/R, \quad \bar{r}_0 = r_0/R, \quad \bar{t} = t/\tau, \quad \alpha_n = \lambda_n R \quad (a = kM/\sigma)$$

Тогда получим, принимая $U(\alpha_n \bar{r}) = J_0(\alpha_n \bar{r}) Y_1(\alpha_n) - J_1(\alpha_n \bar{r}) Y_0(\alpha_n)$

при $\bar{t}_{2m-1} < \bar{t} < \bar{t}_{2m}$

$$h(\bar{r}, \bar{t}) = H_1 - \pi(H_0 - H_1) W -$$

$$- \frac{\pi R^2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\alpha_n^2} \sum_{l=1}^{m-1} \varepsilon_{2l-1} \{ \exp[-\alpha_n^2 (\bar{t} - \bar{t}_{2l})] - \exp[-\alpha_n^2 (\bar{t} - \bar{t}_{2l-1})] \} -$$

$$- \frac{\pi R^2}{a} \varepsilon_{2m-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\alpha_n^2} \{ 1 - \exp[-\alpha_n^2 (\bar{t} - \bar{t}_{2m})] \}$$

при $\bar{t}_{2m} < \bar{t}$

$$h(\bar{r}, \bar{t}) = H_1 - \pi(H_0 - H_1)W -$$

$$-\frac{\pi R^2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\alpha_n^2} \sum_{l=1}^m e_{2l-1} \{ \exp[-\alpha_n^2(\bar{t} - \bar{t}_{2l})] - \exp[-\alpha_n^2(\bar{t} - \bar{t}_{2l-1})] \}$$

Здесь

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\alpha_n^2 t}, \quad A_n = \frac{\pi}{2} \frac{J_0(\alpha_n \bar{r}_0) J_1(\alpha_n) U(\alpha_n, \bar{r})}{J_0^2(\alpha_n \bar{r}_0) - J_1^2(\alpha_n)}$$

Если $e_1 = e_3 = \dots = e_{2m-3} = 0$, а $e_{2m-1} = e$, то нужно положить $t_{2m-1} = 0$, $t_{2m} = \infty$ и тогда будет получено решение В. С. Усенко [17] и С. Ф. Аверьянова [36] с непрерывным поливом или инфильтрацией e

$$h = H_1 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(H_0 - H_1 - \frac{R^2 e}{\alpha_n^2 a} \right) \frac{J_0(\alpha_n \bar{r}_0) J_1(\alpha_n)}{J_0^2(\alpha_n \bar{r}_0) - J_1^2(\alpha_n)} U(\alpha_n, \bar{r})(1 - e^{-\alpha_n^2 \bar{r}})$$

Указанными авторами оно было подвергнуто значительному упрощению путем использования некоторых точных и приближенных формул.

Прежде всего можно применить формулу

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n \bar{r}_0) J_1(\alpha_n) U(\alpha_n, \bar{r})}{\alpha_n^2 [J_0^2(\alpha_n \bar{r}_0) - J_1^2(\alpha_n)]} = {}_{1/2} \left[\frac{\bar{r}^2 - \bar{r}_0^2}{2} - \ln \frac{\bar{r}}{\bar{r}_0} \right]$$

которая получается при $t = \infty$ из решения уравнения (13.1) для установившегося движения. В частности, на границе области движения при $\bar{r} = 1$ имеем, согласно теории функций Бесселя

$$U(\alpha_n, 1) = Y_1(\alpha_n) J_0(\alpha_n) - Y_0(\alpha_n) J_1(\alpha_n) = -\frac{2}{\pi \alpha_n}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_0(\alpha_n \bar{r}_0) J_1(\alpha_n)}{\alpha_n^2 [J_0^2(\alpha_n \bar{r}_0) - J_1^2(\alpha_n)]} = {}_{1/2} \left[\ln \frac{1}{\bar{r}_0} - {}_{1/2} (1 - \bar{r}_0^2) \right]$$

При $\bar{t} > 0.2$ можно ограничиться одним членом ряда в выражении $h(1, \bar{t})$ для напора на стенке «бочкой»:

$$h(1, \bar{t}) = H_1 - \frac{\pi R^2}{2a} \left(\frac{1 - \bar{r}_0^2}{2} - \ln \frac{1}{\bar{r}_0} \right) +$$

$$+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[(H_0 - H_1) - \frac{R^2 e}{a \alpha_n^2} \right] \frac{J_0(\alpha_n \bar{r}_0) J_1(\alpha_n) e^{-\alpha_n^2 \bar{t}}}{\alpha_n [J_0^2(\alpha_n \bar{r}_0) - J_1^2(\alpha_n)]}$$

Кроме того, при $\bar{r}_0 \leqslant 0.001$ имеем

$$\frac{2J_0(\alpha_1 \bar{r}_0) J_1(\alpha_1)}{\alpha_1 [J_0^2(\alpha_1 \bar{r}_0) - J_1^2(\alpha_1)]} \approx 1$$

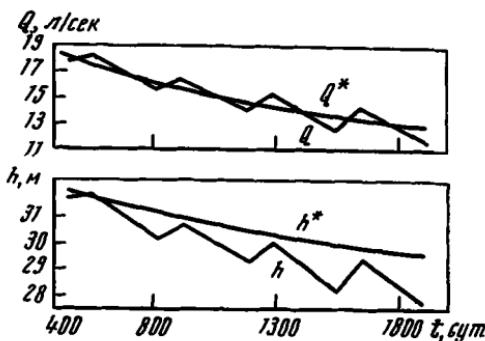
и упрощенная формула принимает вид

$$h(1, \bar{t}) = H_1 - \frac{8R^2}{2a} \left(\frac{1 - \bar{r}_0^2}{2} - \ln \frac{1}{\bar{r}_0} \right) + \left[(H_0 - H_1) - \frac{R^2 e}{a \alpha_1^2} \right] e^{-\alpha_1^2 \bar{t}}$$

причем

$$\alpha_1^2 \approx 2 : \ln \frac{1}{2\bar{r}_0}$$

А. В. Бегматов применил формулы (13.3) — (13.5) к выяснению вопроса о законности замены действительного неравномерного процесса распределенным равномерно во времени на таком примере [35].



Фиг. 66

Пусть ведется откачка из скважины (или группы скважин) двумя способами: 1) непрерывно в течение всего года при наличии инфильтрации постоянной интенсивности и 2) таким образом, что в течение промежутка $t_2 - t_1 = 100$ сут ведется откачка, $t_3 - t_2 = 265$ сут скважина не работает. Общее количество извлеченной за год воды равно $Q_1 = 9000 \text{ м}^3/\text{га}$, радиус действия скважины $R = 564 \text{ м}$, площадь $S = 100 \text{ га}$, $K = 5 \text{ м}/\text{сут}$, $\sigma = 0.2$, $r_0 = 0.2 \text{ м}$, $H = 34 \text{ м}$, $H_1 = 20 \text{ м}$.

Считается, что потери на фильтрацию составляют $1/3$ извлекаемой из скважины воды. Тогда интенсивность распределенной инфильтрации (естественная инфильтрация не учитывалась) будет

$$e = w/\sigma = 0.015 \text{ м}/\text{сут.}$$

Результаты расчетов для дебита скважины $Q(t)$ и уровня воды $h(r_0, t)$ в скважине представлены на фиг. 66.

Видим, что для дебита получился хороший результат, так как обе линии пересекаются в ряде точек, для h же «осредненная» линия оказалась выше

действительной, что неплохо, если рассчитывается осушительный дренаж, но даст завышенные уровни воды в скважинах, из которых ведется откачка для орошения.

Частный случай бесконечно тонкой скважины. Для случая бесконечно тонкой скважины [37], без учета инфильтрации, при условии, что дебит скважины остается постоянным, а на границе $r=R$ пласт питания не получает, т. е. $dh/dr=0$, можно написать сразу выражение для $h(\bar{r}, \bar{t})$, если $h(\bar{r}, 0)=H_0$:

$$h(\bar{r}, \bar{t}) = H_0 - \frac{Q}{2\pi kM} \left[-\frac{3}{4} - \ln \bar{r} + \frac{1}{2} \bar{r}^2 + 2\bar{t} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_n \bar{r}) \exp(-\beta_n^2 \bar{t})}{\beta_n^2 J_0^2(\beta_n)} \right]$$

$$(\bar{t} = at/R^2, \bar{r} = r/R, a = kM/\sigma),$$

где β_n — корни уравнения $J_1(\beta_n) = 0$. Остальные обозначения те же, что в предыдущем параграфе.

Нетрудно проверить выполнение граничного условия, дифференцируя по r выражение для h и учитывая, что

$$\frac{\partial J_0(\beta_n \bar{r})}{\partial \bar{r}} = -\beta_n J_1(\beta_n \bar{r}) \Big|_{\bar{r}=1} = 0$$

Начальное условие удовлетворяется, так как имеет место соотношение

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_n \bar{r})}{\beta_n^2 J_0^2(\beta_n)} = \frac{1}{2} \bar{r}^3 - \ln \bar{r} - \frac{3}{4}$$

При достаточно больших значениях t бесконечным рядом в выражении для $h(\bar{r}, \bar{t})$ можно пренебречь, и тогда $h(\bar{r}, \bar{t})$ будет линией функцией времени. На скважине будем иметь [37]

$$h(\bar{r}_0, \bar{t}) \approx H_0 - \frac{Q}{2\pi kM} \left[-\frac{3}{4} - \ln \bar{r}_0 + \frac{1}{2} \bar{r}_0^2 + \frac{2kM}{\sigma R^2} \bar{t} \right]$$

Множитель при t , т. е. угловой коэффициент прямой, равен

$$\frac{Q}{2\pi kM} \frac{2kM}{\sigma R^2} = \frac{QM}{\sigma \pi M R^2} = \frac{QM}{V}$$

где V — объем жидкости, заключенный в объеме «бочки». Эта величина представляет особый интерес для изучения нефтяных гластов. Зная две из трех величин σ, M, R , по объему V можем определить третью.

Видим, что воронка депрессии, начиная с некоторого достаточно большого момента времени, снижается равномерно, со скоростью $Q/\pi\sigma R^2$. Задавшись допустимым понижением S за промежуток времени t , можно найти дебит, при котором такое понижение не будет превзойдено.

$$Q \leq \frac{\pi\sigma R^2 S}{t} \quad (13.6)$$

Так, если $t = n$ лет = 365 n дней, $\sigma = 0.1$, $\pi R^2 = 100$ га , то

$$Q \leq \frac{10^6 S}{365 \cdot 10n} = \frac{274S}{n} \frac{\text{м}^3}{\text{сум}}$$

Если выберем, как это иногда делают, в качестве допустимого понижение, равное половине средней мощности слоя воды: $S = \frac{1}{2}M$, а продолжительность эксплуатации водоносного горизонта составляющей 50 лет, то получим для допустимого дебита

$$Q = \frac{\pi\sigma R^2 M}{365 \cdot 50 \cdot 2} \frac{\text{м}^3}{\text{сум}}$$

В нашем примере, при $M = 20$ м, этот дебит очень мал:

$$Q = \frac{274M}{100} = 2.74M = 55 \frac{\text{м}^3}{\text{сум}}$$

Выпишем еще формулу, характеризующую степень заглубления воронки напора при достаточно больших значениях t :

$$\begin{aligned} S = h(1, t) - h(\bar{r}_0, t) &= \frac{Q}{4\pi k M} \left(\frac{1}{2} + \ln \frac{1}{\bar{r}_0} - \frac{1}{2} \frac{\bar{r}_0^2}{r_0^2} \right) \approx \\ &\approx \frac{Q}{4\pi k M} \left(\frac{1}{2} + \ln \frac{1}{\bar{r}_0} \right) \end{aligned}$$

§ 14. Фильтрация к совершенной скважине в слоистом грунте с учетом упругих свойств слабопроницаемых слоев

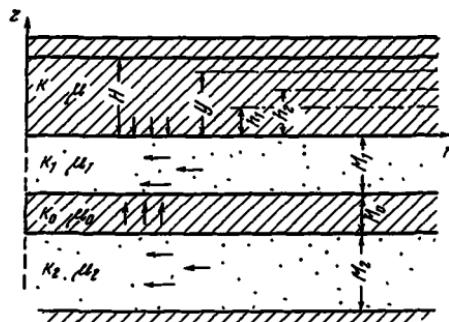
До недавнего времени при исследовании роли слабопроницаемых слоев, разделяющих водоносные горизонты, во взаимосвязи последних раздельные слои рассматривались как абсолютно «жесткие». Между тем наличие упругого режима фильтрации в таких прослойках может существенно повлиять на характер изменения напоров в водоносных горизонтах под влиянием внешних факторов (инфилтрация, откачка из скважин, изменение напора на контуре питания и т. п.).

С учетом этого обстоятельства М. Хантушем [38] рассматривалась задача об изменении напора при работе скважины с постоянным дебитом в водоносном пласте, ограниченном сверху и снизу слабопроницаемыми слоями. Исследованы случаи, когда кровля верхнего и подошва нижнего слабопроницающего слоев либо являются непроницаемыми, либо суть плоскости с заданными на них постграницами напорами. При решении используется интегральное преобразование Лапласа. Переход от изображений к оригиналам осуществляется Хантушем для случаев, когда время откачки мало либо велико: при этом в выражениях для изображений можно сделать упрощения, облегчающие переход к оригиналам. Последние содержат интегралы, затаубулированные Хантушем.

В несколько иной постановке влияние упругого режима в слабопроницаемой прослойке исследовалось В. М. Шестаковым [39, 40]. Им рассмотрен случай откачки из совершенной скважины в горизонте с непроницаемым основанием; сверху горизонт сообщается через слабопроницаемую прослойку с напорным слоем, имеющим непроницаемую кровлю. Задача решалась на сеточном электронинтеграторе; кроме того, Шестаковым дано приближение аналитическое решение для напоров во взаимодействующих горизонтах.

Некоторое видоизменение задачи В. М. Шестакова сделано В. А. Васильевым [41].

В рассматриваемой В. А. Васильевым схеме верхний водоносный горизонт перекрыт толщей пород с меньшим коэффициентом фильтрации, причем в этой толще имеются грунтовые



Фиг. 67

воды со свободной поверхностью. Принимая для данного слоистого комплекса гидравлическую постановку, автор составляет следующую систему дифференциальных уравнений относительно понижений в слоях (фиг. 67):

$$\mu \frac{ds}{dt} = k \frac{s_1 - s}{y^o} \quad (14.1)$$

$$\mu_1 \frac{ds_1}{dt} = k_1 M_1 \Delta s_1 - k_0 \left. \frac{\partial s_0}{\partial z} \right|_{z=-M_1} + k \frac{s - s_1}{y^o}$$

$$\mu_0 \frac{\partial s_0}{\partial t} = k_0 M_0 \frac{\partial^2 s_0}{\partial z^2}$$

$$\mu_2 \frac{\partial s_2}{\partial t} = k_2 M_2 \Delta s_2 + k_0 \left. \frac{\partial s_0}{\partial z} \right|_{z=-M_1-M_0}$$

В этих уравнениях индексы 1, 0, 2 внизу использованы для обозначения величин понижений $s_i = H - h_i$ в верхнем водоносном горизонте, прослойке и нижнем горизонте соответственно; буквой k_i обозначены коэффициенты фильтрации в слоях; M_i — их мощность, μ — коэффициент водоотдачи покровной толщи, μ_0 , μ_1 , μ_2 — коэффициенты упругой водоотдачи нижележащих слоев, M — средняя мощность потока в покровном слое, z — вертикальная координата, y° — средняя глубина потока; Δ — оператор Лапласа, который в данном случае имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

Система (14.1) рассматривается при следующих начальных и граничных условиях:

$$s(r, 0) = 0, \quad s_i(r, 0) = 0 \quad (i=0, 1, 2) \quad (14.2)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} s_i(r, t) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi k_i M_i r \left. \frac{\partial s_i}{\partial r} \right|_{r=0} = \delta_i Q_i \quad (i=1, 2) \quad (14.3)$$

причем $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 0$ при эксплуатации скважиной верхнего горизонта и $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 1$ — при откачке из нижнего. В результате преобразования Лапласа

$$F(p) = \int_0^\infty s(t) e^{-pt} dt \quad (14.4)$$

система уравнений (14.1) переходит в систему для изображений $F(p)$:

$$F = F_1 \frac{\alpha}{p\mu + \alpha}, \quad T_1 \Delta F_1 - \omega_1^2 F_1 + F_2 \frac{\alpha_0 \sigma}{\sinh \sigma} = 0 \quad (14.5)$$

$$F_0 = \frac{1}{\sinh \sigma} \{ F_1 \sinh [\sigma (1 + M_1^0 + z^\circ)] - F_2 \sinh [\sigma (M_1^0 + z^\circ)] \}$$

$$T_2 \Delta F_2 - \omega_2^2 F_2 + F_1 \frac{\alpha_0 \sigma}{\sinh \sigma} = 0$$

Здесь используются следующие обозначения:

$$\alpha_0 = \frac{k_0}{M_0}, \quad \alpha = \frac{k}{y^\circ}, \quad M_1^0 = \frac{M_1}{M_0}, \quad z^\circ = \frac{z}{M_0}, \quad T_i = k_i M_i, \quad \sigma = \sqrt{\frac{p\mu_0}{\alpha}}$$

$$\omega_1^2 = p\mu_1 + \alpha \frac{p\mu}{p\mu + \alpha} + \alpha_0 \sigma \operatorname{cth} \sigma, \quad \omega_2^2 = p\mu_2 + \alpha_0 \sigma \operatorname{cth} \sigma$$

Второе и четвертое уравнения системы (14.5) дают подсистему двух уравнений относительно функций F_1 и F_2 , через которые посредством первого и третьего уравнений системы (14.5) выражаются функции F и F_0 . Так как интегрирование системы (14.5) и последующий переход к оригиналам в общем случае затруднительны, дальнейшее решение задачи проводится в работе [4] для случаев больших и малых значений времени.

Для случаев, когда значение t превосходит большее из чисел $10\mu_0/a_0$ и $10\mu/a$, значение параметра p меньше меньшего из чисел $0.1a_0/\mu$ и $0.1a/\mu$. В силу малости p справедливы приближенные соотношения

$$\sigma \operatorname{cth} \sigma \approx 1 + \frac{\sigma}{3}, \quad \frac{\sigma}{\sinh \sigma} \approx 1, \quad \frac{p\mu}{p\mu + \alpha} \approx p \frac{\mu}{\alpha}, \quad \frac{\alpha}{p\mu + \alpha} \approx 1$$

С учетом этих зависимостей система (14.5) упрощается

$$F = F_1, \quad F_0 = \frac{F_1}{1 + M_1^0 + z_0} - \frac{F_2}{M_1^0 + z^0}$$

$$T_1 \Delta F_1 - \omega_1^2 F_1 + \alpha_0 F_2 = 0, \quad T_2 \Delta F_2 - \omega_2^2 F_2 + \alpha_0 F_1 = 0$$

причем

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= p\mu_1^* + \alpha_0, & \mu_1^* &= \mu + \mu_1 + 1/3\mu_0 \\ \omega_2^2 &= p\mu_2^* + \alpha_0, & \mu_2^* &= \mu_2 + 1/3\mu_0 \end{aligned}$$

Из второго и четвертого уравнений с учетом условий (14.2) — (14.3) определяются функции F_1 и F_2 :

при откачке из верхнего горизонта

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{Q}{2\pi T_1 p (A - B)} [AK_0(\beta_1 r) - BK_0(\beta_2 r)] \\ F_2 &= \frac{Q}{2\pi T_2 p (A - B)} [K_0(\beta_1 r) - K_0(\beta_2 r)] \end{aligned} \tag{14.6}$$

при откачке из нижнего горизонта

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{Q}{2\pi T_2 p (A - B)} [K_0(\beta_1 r) - K_0(\beta_2 r)] \\ F_2 &= \frac{Q}{2\pi T_1 p (A - B)} [AK_0(\beta_1 r) - BK_0(\beta_2 r)] \end{aligned} \tag{14.7}$$

Здесь

$$\begin{aligned} A &= 1 + \frac{p\mu_2^* - T_2 \beta_2^2}{\alpha_0}, \quad B = \left[1 + \frac{p\mu_1^* - T_1 \beta_1^2}{\alpha_0} \right]^{-1} \\ \beta_{1,2}^2 &= \frac{1}{2T_1} \left[p \left(\mu_1^* + \mu_2^* \frac{T_1}{T_2} \right) + \alpha_0 \left(1 + \frac{T_1}{T_2} \right) \pm \sqrt{D} \right] \\ D &= \left[p \left(\mu_1^* - \mu_2^* \frac{T_1}{T_2} \right) + \alpha_0 \left(1 - \frac{T_1}{T_2} \right) \right]^2 + 4\alpha_0^2 \frac{T_1}{T_2} \end{aligned}$$

В случае $T_1 = T_2 = T$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, а также в предположении о малости μ предыдущие выражения принимают вид

$$A = -1, \quad B = 1, \quad \beta_1^2 = \frac{p\mu^* + 2\alpha_0}{T}, \quad \beta_2^2 = \frac{p\mu^*}{T}, \quad \mu^* = \mu_1 + \frac{\mu_0}{3}$$

Если внести эти параметры в выражения (14.6) и (14.7) и перейти затем к оригиналам, используя соотношения

$$\frac{K_0(\beta_1 r)}{p} \doteq \frac{1}{2} \int_u^\infty \exp\left(-\xi - \frac{r^2}{4\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{2} W(u, \bar{r}) \quad (\bar{r} = r \sqrt{\frac{2\alpha_0}{T}})$$

$$\frac{K_0(\beta_2 r)}{p} \doteq \frac{1}{2} \int_u^\infty \exp(-\xi) \frac{d\xi}{\xi} = -\frac{1}{2} \text{Ei}(-u) \quad (u = \frac{r^2 \mu_1}{4Tt})$$

то в результате получаются следующие выражения для понижений в слоях:

$$s_1 = s = -\frac{Q}{8\pi k M} [-\text{Ei}(-u) \pm W(u, \bar{r})] \quad (14.8)$$

$$s_2 = -\frac{Q}{8\pi k M} [-\text{Ei}(-u) \mp W(u, \bar{r})]$$

Верхние индексы соответствуют случаю откачки из верхнего горизонта, нижние — из нижнего. Для функций $W(u, r)$, встречающихся ранее, М. Хантушем составлены таблицы (см. § 12).

Влияние упругости слабопроницаемого слоя, показателем которой служит параметр μ_0 , проявляется аналитически в решении (14.8) через величину u — нижний предел интегралов, входящих в (14.8). При $\mu_0 \neq 0$ и прочих равных условиях понижения s_1 и s_2 оказываются меньшими, чем в случае $\mu_0 = 0$. Упругие запасы прослойки до некоторой степени «амортизируют» уменьшение напора вследствие откачки как в эксплуатируемом водоносном пласте, так и в соседнем, и, таким образом, процесс понижения напоров в горизонтах происходит с некоторым запаздыванием по сравнению с тем, как это было бы в случае абсолютно «жесткой» прослойки. Это обстоятельство отмечено В. М. Шестаковым [39, 40], предложившим следующую зависимость для приближенной оценки времени запаздывания в передаче понижения напора из горизонта в горизонт через прослойку:

$$t_0 = (0.1 \div 0.15) \frac{M_0 \mu_0}{k_0} \quad (14.9)$$

В решении (14.8) выражен также тот факт, что при больших значениях времени статические запасы грунтовых вод в покровной толще срабатываются, в результате чего уровень грунтовых вод и напор в верхнем горизонте почти сравниваются.

Выражения (14.8) совпадают с формулами, полученными В. М. Шестаковым [40] для случая непроницаемой кровли верхнего водоносного горизонта. При непрекращающейся откачке понижение s_1 и s_2 неограниченно возрастают, равно как и понижение уровня грунтовых вод в верхнем горизонте. По этой причине полученные решения можно рассматривать только до некоторого момента t^* , начиная с которого кривая свободной поверхности в окрестности скважины спускается в напорный горизонт. Последний с этого момента становится напорно-безнапорным горизонтом, в безнапорной зоне выпадает из рассмотрения покровный слой, и, таким образом, система (14.1) оказывается недействительной. Указанное значение времени t^* определяется как гидрогеологическими характеристиками рассматриваемых слоев, так и интенсивностью откачки, выраженной дебитом скважины.

Для значений времени, не превосходящих наименьшее из чисел $0.1\mu_0 M_0/k_0$ и $0.1\mu y^0/k$, полученные выражения для понижений имеют вид:

при откачке из верхнего горизонта

$$s = s_2 = 0, \quad s_1 = \frac{Q}{4\pi k_1 M_1} H(u_1, \beta_1) \quad (14.10)$$

при откачке из нижнего горизонта

$$s = s_1 = 0, \quad s_2 = \frac{Q}{4\pi k_2 M_2} H(u_2, \beta_2) \quad (14.11)$$

В этих формулах использованы обозначения

$$H(u_i, \beta_i) = \frac{1}{2} \int_{u_i}^{\infty} \frac{e^{-\xi}}{\xi} \operatorname{erfc} \left[\frac{\beta_i \sqrt{u_i}}{\sqrt{\xi(\xi - u_i)}} \right] d\xi$$

$$u_i = \frac{r^2 \mu_i}{4k_i M_i t}, \quad \beta_i = \frac{r}{4} \left(\frac{k_0}{k_i M_i M_0} \frac{\mu_0}{\mu_i} \right)^{1/2} \quad (i=1, 2)$$

Физический смысл решений (14.10) и (14.11) состоит в том, что в первый период после начала откачки понижение напора распространяется только в пределах эксплуатируемого горизонта. «Амортизирующее» влияние упругих запасов прослойки проявляется через множитель — функцию erfc в подынтегральном выражении: $\operatorname{erfc} < 1$ при $\mu_0 \neq 0$.

Зависимости для понижения напоров в водоносном горизонте, аналогичные выражениям (14.10), (14.11), получены М. Хантушем [38], для функции $H(u, \beta)$ им составлены таблицы.

§ 15. Радиус влияния скважины. Зона влияния

При откачке воды вблизи скважины свободная поверхность грунтового потока деформируется и можно, с той или иной степенью точности, выделить область возмущенного потока из первоначальной области. Если грунт однороден и транзитный поток отсутствует, при горизонтальном водоупоре воронка депрессии будет осесимметричной и можно говорить о «радиусе влияния» или «радиусе действия» скважины, т. е. таком расстоянии от оси скважины, на котором воронка депрессии «кончается»: это кратчайшее расстояние от оси скважины, на котором уровень воды становится равным первоначальному. При таком определении величина радиуса влияния зависит от точности замеров уровня. Но для практики большая точность обычно и не требуется; так, при определении дебита по формуле Дюпюи радиус влияния входит под знаком логарифма.

При наличии слабопроницаемого водоупора и для неустановившихся движений существует такой способ определения радиуса влияния: если формулу для дебита скважины можно представить в виде формулы Дюпюи

$$Q = \frac{k(H^2 - H_1^2)}{\ln[r_0/R(t)]}$$

где $R(t)$ — некоторая функция времени, то $R(t)$ можно принять за радиус влияния. Для непроницаемого водоупора получают формулу вида

$$R = \alpha \sqrt{kt},$$

где α — некоторая постоянная, зависящая от параметров пласта.

Удобным способом для определения радиуса влияния (или зоны влияния) является способ последовательной смены стационарных состояний или его обобщения [42]: ведь в нем как раз предполагается, что область движения разделяется на две — возмущенную и невозмущенную.

Рассмотрим «галерею» в неустановившемся потоке со слабопроницаемым водоупором [43]. Возьмем нелинейное уравнение (6.6), положив в нем $w=0$, $dh/dy=0$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) - b(h - H) \quad \left(a = \frac{k}{\sigma}, \quad b = \frac{k_0}{M_0 \sigma} \right) \quad (15.1)$$

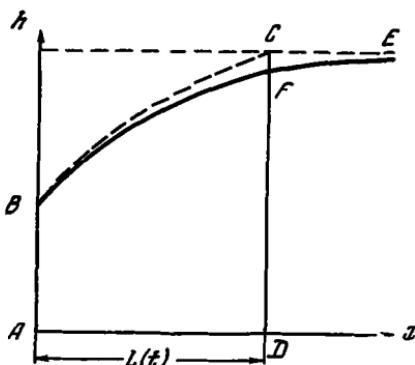
Ищем решение этого уравнения при условиях

$$h(x, 0) = H, \quad H(0, t) = H_1, \quad h(\infty, t) = H$$

полагая приближенно [43], при $AD \ll L(t)$ (фиг. 68)

$$h^2 = H^2 - \frac{H^2 - H_0^2}{L} (L - x)^2 \quad \text{для } x \leq L(t) \quad (15.2)$$

$$h = H \quad \text{для } x > L(t)$$



Фиг. 68

Проинтегрируем (15.1) по x в пределах от 0 до $L(t)$. Обозначив через S интеграл

$$S = \int_0^L h dx$$

и сделав подстановки в (15.1), получим соотношение

$$\frac{dS}{dt} = -a \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right)_{x=0} - b(S - HL)$$

где

$$S = (H - A)L, \quad A = \frac{H_0}{2} + \frac{H^2}{2\sqrt{H^2 - H_0^2}} \arcsin \frac{\sqrt{H^2 - H_0^2}}{H}$$

Отсюда найдем уравнение для $L(t)$

$$\sigma(H - A)L \frac{dL}{dt} = k(H^2 - H_0^2) - \frac{k_0}{M_0}(H - A)L^2$$

Интегрирование его дает при $L(0) = 0$

$$L^2 = \frac{kM_0(H^2 - H_0^2)}{(H - A)k_0} (1 - e^{-\mu t}) \quad \left(\mu = \frac{2k_0}{\mu_0 \sigma} \right)$$

Предел $L(t)$ при $t = \infty$ равен

$$L_\infty = \sqrt{\frac{kM_0}{k_0} B}$$

причем

$$B = \frac{H^2 - H_0^2}{H - A} = H \frac{1 - \gamma^2}{1 - 1/2\gamma - (1 - \gamma^2)^{-1/2} \arcsin(1 - \gamma^2)^{1/2}}, \quad \gamma = \frac{H_0}{H}$$

При изменении γ от 1 до 0 B изменяется в узких пределах от $H/(1 - 1/4\pi)$ до $4H$, а \sqrt{B} — от $2.16\sqrt{H}$ до $2\sqrt{H}$. Можно принять $\sqrt{B} \approx 2.08\sqrt{H}$, тогда

$$L_\infty = 2.08 \sqrt{kM_0 H / k_0}$$

При другом выборе функции $h(x, L)$ мы получили бы другой множитель, но он не должен сильно отличаться от 2.

Коэффициент μ при t представляет очень малую величину (иначе мы не могли бы применять гидравлическую теорию). Разлагая $e^{-\mu t}$ в ряд по степеням t , получаем приближенно

$$L(t) = L_\infty \sqrt{\mu t} \left(1 - \frac{1}{2} \mu t + \dots \right) = 2.08 \sqrt{\frac{2kH}{\sigma} t} \left(1 - \frac{k_0 t}{2M_0 \sigma} + \dots \right)$$

Отсюда видно, что для малых значений времени влияние слабопроницаемого водоупора не сказывается, и лишь в дальнейшем начнет оказывать свое влияние второй член ряда. Стремление $L(t)$ к пределу происходит медленно.

Величина $L(t)$ представляет ширину полосы, занятой движущейся жидкостью,— ее можно назвать зоной влияния галереи.

В случае осесимметричного движения можно провести такие же рассуждения, но выкладки будут значительно сложнее. Для предельного значения радиуса влияния получается формула вида [43]

$$R_\infty = \beta \sqrt{kM_0 H / k_0}$$

где β зависит от H , H_0 и r_0 (r_0 — радиус скважины). Для простейшего выбора h^2 :

$$h^2 = H_0^2 + (H^2 - H_0^2) \frac{\ln(r/r_0)}{\ln(R/r_0)}$$

приближенное значение β получается равным 2.82.

Г л а в а IV

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ, СВЯЗАННЫЕ С ПОЛИВАМИ

§ 16. Фильтрация в почве при неполном насыщении

В совершенно сухой почве все поры были бы заняты воздухом. На самом деле почва всегда содержит то или иное количество влаги и, следовательно, представляет собой трехфазную систему — твердые частицы, вода и воздух с парами воды. При изменении температуры происходит испарение воды или, наоборот, конденсация пара. Насыщенность почвы влагой является переменной.

Естественно провести аналогию между рассматриваемыми явлениями и движениями газо- и водонефтяных смесей и использовать имеющиеся результаты. Однако в этом направлении сделано еще мало, и мы ограничиваемся простейшей постановкой задачи, которая принята в теории движения почвенной влаги при неполном насыщении, когда считают, что давление и коэффициент водопроницаемости — заданные функции насыщенности, причем движением воздуха пренебрегают.

Отметим еще одно обстоятельство, не учитываемое в настоящее время. Уже 100 лет тому назад было сделано наблюдение (см. [44]), что почвенные агрегаты содержат два вида пор — «капиллярные» и «некапиллярные», как они были названы. Другими словами, имеются поры двух порядков крупности, что ясно видно на ряде сделанных фотографий. Капиллярные поры обусловливают водоудерживающую способность почв (при медленном насыщении), некапиллярные поры содержат воздух и обуславливают быстрое просачивание воды в почву.

Считается, что для идеальной почвы суммарные объемы каждой из систем пор должны быть примерно одинаковыми. Такая почва имеет достаточную аэрацию, хорошие проницаемость и водоудерживающую способность.

В нефтяной гидравлике в последнее время исследуется фильтрация в пластах, содержащих систему трещин и капиллярных пор [45]. В случае неустановившихся течений могут оказаться

существенными перетоки жидкости из одной системы пор в другую. Такие исследования можно перенести на движения воды в почве.

1. Уравнение для насыщенности грунта влагой. При выводе уравнения насыщенности исходят из уравнения неразрывности, которое выражает тот факт, что изменение массы жидкости, вытекающей в единицу времени из элементарного объема, компенсируется изменением насыщенности влагой w внутри этого объема:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = - \frac{\partial w}{\partial t} \quad (16.1)$$

где v_x , v_y , v_z — компоненты скорости фильтрации.

При неполной насыщенности грунта считают, что имеет место закон Дарси в форме

$$v_x = -k(w) \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v_y = -k(w) \frac{\partial h}{\partial y}, \quad v_z = -k(w) \frac{\partial h}{\partial z} \quad (16.2)$$

$$h = -\frac{p}{\rho g} + z$$

Здесь h — напор (ось z направлена вверх по вертикали), p — давление, ρ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести, $k(w)$ — коэффициент водопроницаемости при влажности w .

С. Ф. Аверьяновым [46] получена теоретически зависимость $k(w)$, приближенно выражаемая формулой

$$k(w) = k_1 \left(\frac{w - w_0}{\sigma - w_0} \right)^n \quad (16.3)$$

где σ — пористость; w_0 — количество связанный воды в единице объема грунта; k_1 — коэффициент фильтрации при полном насыщении, когда $w = \sigma$. При $n = 3.56$ формула (16.3) ближе всего подходит к точной формуле С. Ф. Аверьянова, полученной им при схематизации движения в пористой среде как движения вязкой жидкости в капиллярной трубке, средняя часть которой заполнена неподвижным воздухом. Для удобства вычислений он предлагает брать $n = 3.5$.

На границе фаз вода — воздух действуют капиллярные силы, обусловливающие разность давлений

$$p - p_1 = p_k(w)$$

причем обычно $p_k(w)$ определяется с помощью полуэмпирических формул. Давление воздуха p_1 мы будем считать постоянным (или зависящим только от времени) и можем принять его равным нулю. Чем меньше w , тем больше $p_k(w)$: при очень ма-

лой насыщенности пор водой она адсорбируется на поверхности твердых частиц — образуется «прочно связанная» вода, которую трудно отделить даже при очень больших скоростях центрифугирования. При увеличении ω появляются слои «рыхло связанной» влаги, при еще большей насыщенности она делается, наконец, способной двигаться под влиянием силы тяжести. Зависимость p_k от ω при малых значениях ω носит гиперболообразный характер. Примем по С. Ф. Аверьянову

$$p_k(\omega) = - \frac{p_0 w_0}{\omega} \frac{1 - (\omega/w_1)^2}{1 - (w_0/w_1)^2} \quad (16.4)$$

Здесь p_0 — давление при $\omega = w_0$ — влажности связанной воды, т. е. влажности, отвечающей началу движения воды; w_1 — полная влагоемкость, т. е. влагоемкость, соответствующая атмосферному давлению $p=0$.

Уравнение (16.1) при учете (16.2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k(\omega)}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{k(\omega)}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial y} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k(\omega)}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial z} \right] + \frac{\partial k(\omega)}{\partial z} \end{aligned}$$

Здесь $\gamma = \rho g$ — удельный вес жидкости.

2. Приближенное решение простейшей задачи. Остановимся на случае движения влаги по вертикали, для которого И. И. Кулабухова предложила приближенное решение [48].

Пусть $\omega(z, t)$ удовлетворяет начальному и граничному условиям

$$\omega(z, 0) = \omega'', \quad \omega(0, t) = \omega'$$

Допустим, что в момент времени t область, смоченная просачивающейся влагой, распространилась на глубину $l(t)$. Требуется найти зависимость l от t и распределение ω с высотой в зависимости от t .

И. И. Кулабухова задается такой зависимостью между координатой z какой-нибудь точки жидкости и насыщенностью в ней ω :

$$z = l(t) \frac{1 - (\omega/\omega')^2}{1 - (\omega''/\omega')^2} \quad (16.5)$$

Это соотношение удовлетворяет условиям

$$\omega = \omega' \quad \text{при } z = 0, \quad \omega = \omega'' \quad \text{при } z = l(t)$$

В области движения выделяется столб грунта высотой $l(t)$ с площадью основания, равной единице, и записывается уравнение баланса

$$\int_0^t V_z(0, t) dt = \int_0^{l(t)} [w(z, t) - w''] dz$$

выражающее то обстоятельство, что количество влаги, поступившей в указанный объем за промежуток t , равно количеству жидкости, смачивающей этот объем. Дифференцируя это соотношение по времени, получаем

$$V_z(0, t) = \frac{d}{dt} \int_0^{l(t)} [w(z, t) - w''] dz$$

Вычислим предварительно интеграл, принимая во внимание (16.5):

$$\begin{aligned} \int_0^{l(t)} [w(z, t) - w''] dz &= \int_{w'}^{w''} (w - w'') \frac{dz}{dw} dw = Al(t) \\ A &= \frac{1}{3} \frac{(w' - w'') (2w' + w'')} {w' + w''} \end{aligned} \quad (16.6)$$

С другой стороны,

$$V_z(z, t) = -k(w) \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z} + 1 \right)$$

и, учитывая (16.4), получаем

$$\begin{aligned} V_z(0, t) &= -k(w') \left[1 - \frac{B}{l(t)} \right] \\ B &= \frac{\rho_0 w_0}{2\gamma w^3} \frac{(w_1^3 + 2w'^3)(w'^3 - w''^3)}{w_1^3 - w_0^3} \end{aligned} \quad (16.7)$$

Приравнивая производную по t от (16.6) и (16.5), будем иметь

$$Al(t) = -k(w') \frac{l(t) - B}{l(t)}$$

Разделение переменных и интегрирование приводят к уравнению

$$\frac{k(w')}{A} t = -B \ln \left(1 - \frac{l}{B} \right) - l \quad (16.8)$$

Будем считать $w' > w''$, тогда $B > 0$. Рассмотрим два случая.

1. Положим $l(t) > 0$, т. е. происходит капиллярное поднятие жидкости вверх. На фиг. 69 приведены кривые, вычисленные по формулам (16.5) с учетом (16.8) при следующих значениях параметров:

$$w_1 = \sigma = w' = 0.4, \quad w'' = 0.2, \quad w_0 = 0.04$$

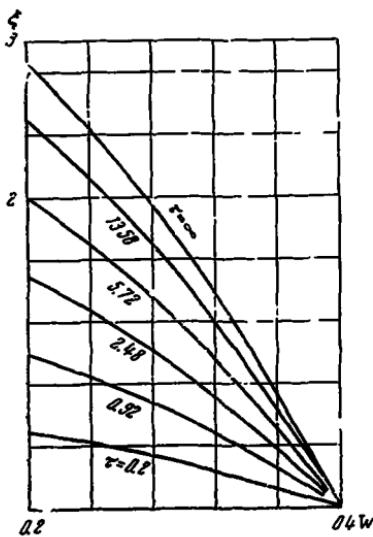
Безразмерные координаты ξ и τ определяются соотношениями

$$\xi = \frac{\gamma [1 - (w_0/w_1)^3]}{p_0 w_0} z$$

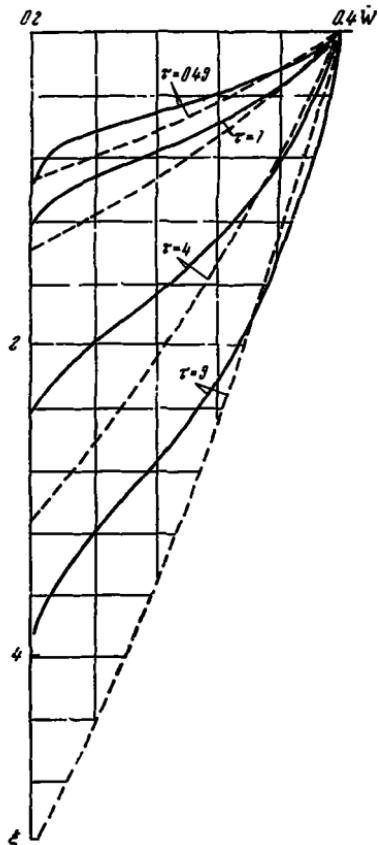
$$\tau = \frac{p_0 w_0 (\sigma - w_0)^{3.5}}{\gamma [1 - (w_0/w_1)^3] k_1} t$$

При малых значениях l можно написать вместо логарифма в формуле (16.8) первые члены ряда

$$\ln \left(1 - \frac{l}{B} \right) = -\frac{l}{B} - \frac{l^2}{2B^2} + \dots$$



Фиг. 69



Фиг. 70

и тогда

$$\frac{k(w')}{A} t \approx \frac{l^2}{2B}$$

откуда

$$l \approx \sqrt{\frac{2Bk(w')}{A} t}$$

При $l \rightarrow B$ имеем $t \rightarrow \infty$, т. е. высота подъёма жидкости ограничена величиной B — высотой капиллярного поднятия. Если эта высота известна, то формула для B позволит вычислить p_0 — давление при $w = w_0$.

2. $l(t) < 0$, т. е. имеем просачивание влаги вниз (фиг. 70, пунктирные линии). Вычисления проводились при тех же значениях параметров, что в случае капиллярного подъема. Сплошными линиями на фиг. 70 показаны профили влажности, полученные методом Филипа (см. § 18 этой главы). Положим $l(t) = -L(t)$, тогда $L(t) > 0$ и уравнение для $L(t)$ будет

$$AL(t) = k(w) \frac{L(t) + B}{L(t)}$$

Разделение переменных и интегрирование дадут

$$\frac{k(w')}{A} t = L - B \ln \frac{L + B}{B}$$

Для малых t опять получаем

$$L \approx \sqrt{\frac{2k(w') B}{A} t}$$

но с увеличением t теперь $L(t)$ беспредельно увеличивается. Влажность в каждый момент времени, согласно принятому допущению, изменяется с глубиной по параболе, уменьшаясь от w' при $z=0$ до w'' при $z=l(t)=-L(t)$. По линеаризованной теории форма кривых получается совсем иной: они в верхней части выпуклы, в нижней — вогнуты [47].

Для случая, который мы рассмотрели в § 5 гл I этой части, можно принять, согласно работе [8], следующие значения влажностей и пористости:

$$w_0 = 0.19, \quad w_1 = 0.43, \quad \sigma = 0.45, \quad w' = w_1, \quad w'' = w_0$$

$$B = \frac{p_0 w_0}{2\gamma w_1^3} \frac{3w_1^3 (w_1^3 - w_0^3)}{w_1^3 - w_0^3} = 0.6 p_0 / \gamma$$

Тогда будем иметь

$$h_k = B = 0.6 p_0 / \gamma$$

Так как $h_k = 130$ см, то $p_0 = 217$ г/см = 0,217 атм. Это соответствует наименьшей влагоемкости [49].

§ 17. Статистические методы для определения коэффициента фильтрации и диффузии

В дифференциальное уравнение для влажности входит не само давление, а его производная по w . В частности, одномерное уравнение для фильтрации в вертикальной плоскости может быть записано так:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D(w) \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial k(w)}{\partial z} \quad \left(D(w) = \frac{k(w)}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial w} \right)$$

Здесь $D(w)$ можно назвать коэффициентом диффузии.

В работе [50] построены кривые зависимости капиллярного давления и проницаемости от насыщения исходя из понятия эффективного гидравлического радиуса и принимая логарифмически нормальный закон распределения пор по их радиусам.

В. И. Пеньковский [51] строит иначе модель почвогрунта. Он рассматривает образец грунта с единичным поперечным сечением, один конец которого погружен в воду, а другой простирается до бесконечности. Считается, что образец грунта представляет собой систему параллельных капилляров с радиусами, распределенными по логарифмически нормальному закону с плотностью

$$\Phi(r) = n \exp \left(- \frac{\ln^2(r/r_0)}{2\sigma^2} \right)$$

Тогда математическое ожидание N пор в поперечном сечении образца будет

$$N = \int_0^\infty \Phi(r) dr = \sqrt{2\pi} n r_0 \sigma \exp \frac{\sigma^2}{2}$$

Площадь всех пор выразится интегралом

$$\pi \int_0^\infty r^2 \Phi(r) dr = \pi N r_0^2 \exp(4\sigma^2) = m$$

где m — порозность грунта.

По формуле Гатена—Пуазейля для расхода q через капилляр радиусом r имеем

$$q = -\frac{\pi}{8} \frac{r^4}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

а для расхода Q сквозь поперечное сечение образца

$$Q = -\frac{\pi}{8\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \int_0^\infty r^4 \Phi(r) dr = -\frac{\pi N}{8\mu} \frac{\partial p}{\partial x} r_0^4 \exp(12\sigma^2)$$

Так как по закону Дарси

$$Q = -\frac{k_1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

где k_1 — проницаемость, μ — вязкость жидкости, то получаем

$$k_1 = \frac{\pi N}{8} r_0^4 \exp(12\sigma^2)$$

Полученные выражения для порозности и проницаемости могут быть использованы для выбора параметров r_0 , n , σ , входящих в функцию плотности распределения $\Phi(r)$. Недостающее соотношение может быть получено из формулы для всасывающей силы почвы при некотором значении влажности w .

Далее рассматривается равновесное состояние влаги в вертикально расположеннном образце. Отсчет высоты капиллярного поднятия $h(r)$ ведется от зеркала грунтовых вод. По формуле Лапласа

$$h(r) = C/r \quad (17.1)$$

где C — постоянная, зависящая от гидрофильтрости капилляра. Так как на уровне $h > h(r)$ заполнены поры с радиусом, меньшим, чем r (поры с большими радиусами пусты), то насыщенность $s = w/m$ в элементе на расстоянии $h(r)$ и относительная проницаемость $f(r) = k(r)/k_1$ определяются по формулам

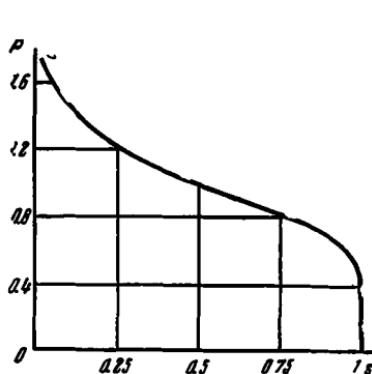
$$s = \frac{\pi}{m} \int_0^r r^2 \Phi(r) dr = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left[\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \ln \frac{r}{r_0} - \frac{3\sigma}{\sqrt{2}} \right] \right\} \quad (17.2)$$

$$f(r) = \frac{\pi}{8k_1} \int_0^r r^4 \Phi(r) dr = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left[\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \ln \frac{r}{r_0} - \frac{5\sigma}{\sqrt{2}} \right] \right\}$$

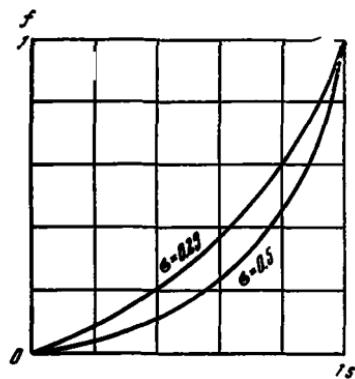
Исключая из выражений (17.1) и (17.2) параметр r , автор получает формулы для определения относительной фазовой проницаемости $f(s)$ и капиллярного давления $p(s)$

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{1}{2} \{1 + \operatorname{erf}[\operatorname{inverf}(2s-1) - \sqrt{2}\sigma]\} \\ p(s) &= -\frac{Ca^{4/5}}{r_0} \exp\{-\sqrt{2}\sigma \operatorname{inverf}(2s-1)\} \\ a &= \frac{mr_0^2}{8k}, \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \end{aligned} \quad (17.3)$$

Здесь inv — оператор взятия обратной функции. Графики зависимостей $f(s)$ и $p(s)$ приведены на фиг. 71 и 72.



Фиг. 71



Фиг. 72

Аналогично для всасывающей силы $\psi(s)$ единичного сечения образца, равной суммарному капиллярному давлению, развиваемому менисками в незаполненных капиллярах, получается формула

$$\psi(s) = Cn\sigma \sqrt{\pi/2} \{1 - \operatorname{erf}[\operatorname{inverf}(2s-1) + 3\sigma/\sqrt{2}]\}$$

В частности, максимальную всасывающую силу ψ^* будет развивать сухая почва ($s=0$).

$$\psi^* = \sqrt{2\pi} Cn\sigma$$

Пользуясь формулами (17.3), можно определить коэффициент диффузии влаги

$$\begin{aligned} D(s) &= \frac{k_1}{m} f(s) \frac{dp}{ds} = \\ &= \frac{k_1}{m} \sqrt{\frac{\pi Cn\sigma^{4/5}}{2 r_0}} \{1 + \operatorname{erf}[\operatorname{inverf}(2s-1) - \sqrt{2}\sigma]\} \exp[\operatorname{inverf}(2s-1) - \sigma/\sqrt{2}]^2 \end{aligned}$$

§ 18. Метод Филипа

За последние пять лет отмечается появление большого числа работ, посвященных проблеме движения влаги при неполной насыщенности почвы. (Некоторый обзор новейших исследований за рубежом содержится в [52].) Мы уже видели, что задачу о движении влаги в почве сводят к интегрированию нелинейного уравнения параболического типа.

Здесь рассматривается одномерное движение, которое мы перепишем с измененными обозначениями: влажность обозначается через θ , капиллярное давление (или потенциал) через ψ . ось z направляется вертикально вниз. Тогда

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - \frac{\partial k(\theta)}{\partial z} \quad \left(D = D(0) = k \frac{d\psi}{d\theta} \right) \quad (18.1)$$

Таким образом, распространение влаги трактуется как некоторый диффузионный процесс с коэффициентом диффузии, зависящим от концентрации диффундирующего вещества. Зависимости $D(\theta)$ и $k(\theta)$ от влажности до сих пор представляют собой тему исследования теоретических и экспериментальных работ. Почвы, для которых $D(\theta) = a e^{\beta \theta}$, где a и β — параметры, характеризующие почву, называют почвами типа Гарднера. Для таких почв автомодельное решение искалось в виде степенного ряда, при этом красная задача на полуправой сводилась к задаче Коши. Такой прием был применен ранее П. Я. Полубариновой-Кочиной для подобного уравнения другой задачи. Авторами работы [53] найдено 24 члена ряда и отмечено, что полученный ряд имеет конечный радиус сходимости.

Так как зависимость $D(0)$ фактически тораздо сложнее и дается зачастую экспериментальными кривыми, то приходится уравнение (18.1) решать численно.

Некоторые приближенные решения рассматриваемой проблемы дает метод линеаризации с помощью малого параметра, предложенный в работе [47]. Сущность метода сводится к тому, что кривые $D(\theta)$ и $k(\theta)$ заменяются отрезками касательных, проведенных в левой точке (назовем это линеаризацией в левой точке). С таким же успехом можно было бы проводить линеаризацию в правой точке. По-видимому, лучшее приближение получим, беря среднес между двумя линеаризованными решениями или проводя линеаризацию в некоторой средней точке (что не одно и то же). Очевидно, линеаризация будет тем лучше, чем меньше область изменения θ .

В настоящем параграфе делается попытка выяснить степень этого приближения на уравнении (18.1) при условиях

$$\theta = \theta_n, \quad t = 0, \quad z > 0; \quad \theta = \theta_0, \quad z = 0, \quad t > 0 \quad (18.2)$$

где θ_0 и θ_n — заданные постоянные, а $D(\theta)$ и $k(\theta)$ заимствованы у С. Ф. Аверьянова [46] и имеют вид в наших новых обозначениях

$$k(\theta) = k_1 \left(\frac{\theta - \theta^*}{\sigma - \theta^*} \right)^{3.6}, \quad D(\theta) = k(\theta) \frac{p'(\theta)}{\gamma} \quad (18.3)$$

где

$$\frac{p(\theta)}{\gamma} = - \frac{p_0 \theta^*}{\gamma \theta} \frac{1 - (\theta/\theta_1)^3}{1 - (\theta^*/\theta_1)^3} \quad (18.4)$$

Здесь θ^* — связанный влаги, σ — пористость, θ_1 — полная влагоемкость, p_0 — давление при $\theta = \theta^*$, k_1 — коэффициент фильтрации при полном насыщении.

Записывая $D(\theta)$ и $k(\theta)$ в виде

$$k(\theta) = M f_1(\theta), \quad D(\theta) = MN f_1(\theta) f_2'(\theta)$$

где

$$M = k_1 (\sigma - \theta^*)^{-3.6}, \quad f_1(\theta) = (\theta - \theta^*)^{3.5}$$

$$N = \frac{p_0 \theta^*}{\gamma [1 - (\theta^*/\theta_1)^3]}, \quad f_{21}(\theta) = - \frac{1}{\theta} \left[1 - \left(\frac{\theta}{\theta_1} \right)^3 \right]$$

и вводя безразмерные время и длину по формулам $\xi = z/N$, $\tau = -Mt/N$, придем к задаче

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[f_1(\theta) f_2'(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right] - f_2'(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \quad (18.5)$$

$$\theta = \theta_n, \quad \tau = 0, \quad \xi > 0; \quad \theta = \theta_0, \quad \xi = 0, \quad \tau > 0$$

Решение задачи (18.5) осуществлялось численным методом Филипа [54] с помощью арифмометра. Ввиду простоты этого метода, сделав небольшие изменения в вычислении $(d\theta/d\tau)_{n-1/2}$, приведем основные этапы метода.

С помощью известного тождества

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \right)_\gamma \left(\frac{\partial \beta}{\partial \gamma} \right)_\alpha \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \right)_\beta = -1$$

уравнение (18.1) приводится к виду

$$-\left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_0 = \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(D \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - \frac{\partial k}{\partial \theta} \right]_t \quad (18.6)$$

где $d\theta/dz$ записано вместо $(dz/d\theta)^{-1}$. Теперь решение представляется в виде ряда

$$z = \Phi(\theta) t^{1/2} + \chi(\theta) t + \psi(\theta) t^{3/2} + \omega(\theta) t^2 + \dots + f_m t^{m/2} + \dots \quad (18.7)$$

который, вероятно, будет сходиться по крайней мере для малых t . Подставляя (18.7) в (18.6) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t , получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для вычисления функций

$$\Phi(\theta), \chi(\theta), \dots, f_m(\theta)$$

Эта система имеет вид

$$-\frac{\Phi}{2} = \frac{d}{d\theta} \left[D(0) \frac{d\theta}{d\varphi} \right]$$

$$\chi = \frac{d}{d\theta} \left[D \frac{d\chi}{d\varphi} \frac{d\theta}{d\varphi} \right] + \frac{dk}{d\theta}$$

• • • • • • • •

$$\frac{m}{2} f_m = \frac{d}{d\theta} \left(P \frac{df_m}{d\theta} \right) - \frac{dR_m}{d\theta} \quad \left(P = D \left(\frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2 \right)$$

Здесь $R_m(\theta)$ — известная функция, если решены предыдущие $m-1$ уравнений. Дифференциальные уравнения заменяются более удобными для численных методов интегральными уравнениями

$$\int_{\theta_n}^0 \varphi d\theta = -2D \frac{d\theta}{d\varphi}, \quad \varphi=0 \quad \text{при } \theta=\theta_0 \quad (18.8)$$

$$\int_{\theta_n}^{\theta} f(\theta) d\theta = \alpha \frac{df}{d\theta} - \beta, \quad f=0 \quad \text{при } \theta = \theta_0 \quad (18.9)$$

Здесь f означает любую из функций $\chi, \psi, \omega, \dots, f_m, \dots$. Вводя аппроксимации

$$\int_{\theta_r}^{\theta_r + \frac{1}{2}} \varphi d\theta = -\varphi_r \frac{\delta\theta}{2} = \int_{\theta_r - \frac{1}{2}}^{\theta_r} \varphi d\theta$$

Филип получает для решения (18.8) формулы

$$I_{r+1/2} = I_{r-1/2} - \varphi_r, \quad \varphi_{r+1} = \varphi_r + \frac{2\bar{D}_{r+1/2}}{I_{r+1/2}} \quad (18.10)$$

где

$$I_{r+1/2} = \frac{1}{\delta\theta} \int_{\theta_n}^{\theta_r} \Phi d\theta - \frac{\Phi_r}{2}, \quad \bar{D}_{r+1/2} = \frac{1}{\delta\theta} \int_{\theta_{r+1}}^{\theta_r} D(\theta) d\theta \quad (18.11)$$

$$\theta_r = \theta_0 - r d\theta, \quad \Phi_r = \Phi(\theta_r) \quad (\delta\theta = \text{шаг})$$

В окрестности точки $\theta = \theta_n$ точное решение уравнения (18.8) или (18.10) будет близко к

$$\varphi = 2(\bar{D}_{n-1/2})^{1/2} \operatorname{inv} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{\theta - \theta_n}{80} \operatorname{erfc} \left[\frac{\varphi_{n-1}}{2(\bar{D}_{n-1/2})^{1/2}} \right] \right\}$$

Здесь символ $\operatorname{inv} \operatorname{erfc}$ — функция, обратная функции erfc .

Таким образом

$$I_{n-1/2}^+ = \frac{\varphi_{n-1}}{2} + 2(\bar{D}_{n-1/2})^{1/2} \frac{i \operatorname{erfc} [\varphi_{n-1}/2(\bar{D}_{n-1/2})^{1/2}]}{\operatorname{erfc} [\varphi_{n-1}/2(\bar{D}_{n-1/2})^{1/2}]} \left(i \operatorname{erfc} x - \int_x^\infty \operatorname{erfc} \xi d\xi \right)$$

или

$$I_{n-1/2}^+ = \frac{\varphi_{n-1}}{2} + \frac{2\bar{D}_{n-1/2}}{\varphi_{n-1}} A \left[\frac{\varphi_{n-1}}{2(\bar{D}_{n-1/2})^{1/2}} \right] \quad (18.12)$$

$$\left(A(x) = \frac{2x \exp(-x^2)}{\pi^{1/2} \operatorname{erfc} x} - 2x^2 \right)$$

Для $A(x)$ приводится^[64] асимптотическое выражение для больших x и таблица для $x = 0 (0.2) 1 (0.5) 4 (1.0) 10^1$. Вычисления φ_r производятся итерациями, связанными с заданием некоторого значения $I_{1/2}$, использованием поочередно (18.10), вычислим $I_{n-1/2}$ и сравнением его с $I_{n-1/2}^+$.

Поправки к $I_{1/2}$ вводят до тех пор, пока $\Delta = I_{n-1/2} - I_{n-1/2}^+$ не будет мало. При этом

$$I_{1/2} \text{ посл} = I_{1/2} \text{ предпосл} - \frac{\Delta}{2}$$

Аналогично, вводя аппроксимацию

$$\int_{\theta_r}^{\theta_{r+1/2}} f d\theta = -1/4 (f_{r+1} + 3f_r) \frac{\delta\theta}{2}$$

получим формулы

$$I_{r+1/2} = I_{r-1/2} - f_r \quad (18.13)$$

$$f_{r+1} = f_r - \frac{(\beta_{r+1/2}/\delta\theta) + I_{r+1/2}}{(\alpha_{r+1/2}/(\delta\theta)^2) - 1/6} \quad (18.14)$$

¹ Числа в скобках означают шаги Δx , которые выбираются разными для разных интервалов значений x .

где

$$I_{r+1/2} = \frac{1}{\delta\theta} \int_{\theta_n}^{\theta_r} f d\theta - \frac{1}{2} f_r, \quad \bar{x}_{r+1/2} = \frac{1}{\delta\theta} \int_{\theta_r+1}^{\theta_r} \alpha d\theta$$

Вычислительные процедуры проводятся методом проб: задаемся $f_0 = 0$, $I'_{1/2} = 0$ и, используя поочередно формулы (13.13) и (18.14), вычисляем f'_r и I'_n , где

$$I_n = I_{n-1/2} - \frac{1}{2} f_n \quad (18.15)$$

Затем полагая

$$I''_{1/2} = -1, \quad f_0 = 0, \quad \beta_{r+1/2} = 0 \quad (r = 0, 1, \dots, n)$$

вычисляем \bar{f}'_r и I''_n .

Вычисляемые f_r и I_n — линейные функции $I_{1/2}$:

$$I'_n = C + D I'_{1/2}, \quad I''_n = D I''_{1/2}$$

Так как $I'_{1/2} = 0$, $I''_{1/2} = -1$, то $C = I'_n$, $D = -I''_n$. Тогда искомое $I_n = I'_n - I''_n I_{1/2}$. Требуем $I_n = 0$, что эквивалентно требованию равенства среднего по площади от f в промежутке (θ_n, θ_{n-1}) среднему арифметическому от значений f на концах промежутка, т. е.

$$\frac{1}{\delta\theta} \int_{\theta_n}^{\theta_{n-1}} f d\theta = \frac{1}{2} (f_n - f_{n-1})$$

Отсюда $I_{1/2} = I'_n / I''_n$, и для f_r получаем

$$f_r = f'_r - I_{1/2} f_r$$

Как показывают вычисления, существенным элементом в получении f_r является табулирование функции $\alpha(0)$, куда в качестве множителя входит $d\theta/d\varphi$.

Трудности возникают в точке $0 = \theta_{n-1/2}$. Вместо предлагаемого Филиппом пути можно воспользоваться следующим. Из (18.8) имеем

$$\left(\frac{d\theta}{d\varphi} \right)_{n-1/2} = - \frac{1}{2D_{n-1/2}} \int_{\theta_n}^{\theta_{n-1/2}} \varphi d\theta$$

Кроме того,

$$I_{n-1/2}^+ = \frac{1}{\delta\theta} \int_{\theta_n}^{\theta_{n-1}} \varphi d\theta - \frac{\varphi_{n-1}}{2}$$

Но

$$\begin{aligned} \int_{\theta_n}^{\theta_{n-1}} \varphi d\theta &= \delta\theta I_{n-1/2}^+ + \varphi_{n-1} \frac{\delta\theta}{2} = \int_{\theta_n}^{\theta_{n-1/2}} \varphi d\theta + \int_{\theta_{n-1/2}}^{\theta_{n-1}} \varphi d\theta = \\ &= \int_{\theta_n}^{\theta_{n-1/2}} \varphi d\theta + \varphi_{n-1} \frac{\delta\theta}{2} \end{aligned}$$

Откуда

$$\int_{\theta_n}^{\theta_{n-1/2}} \varphi d\theta = \delta\theta I_{n-1/2}^+, \quad \left(\frac{d\theta}{d\varphi} \right)_{n-1/2} = -\frac{\delta\theta I_{n-1/2}^+}{2D_{n-1/2}}$$

Описанным методом проводилось численное решение задачи (18.5) при $\theta_1 = 0.2$, $\theta_0 = \sigma = 0.4$, $\theta^* = 0.04$.

Выбор θ_n был сделан из тех соображений, что для малых значений θ , как отмечается в [52], перестает быть справедливым обобщенный закон Дарси и в уравнении (18.1) будет

$$D = D\left(\theta, \frac{\partial\theta}{\partial x}\right)$$

Кроме того, принимая больший диапазон изменения θ , нужно ожидать еще больших расхождений решения нелинейного уравнения с линеаризованным.

В работе [60] приняты: шаг $\delta\theta = 0.02$, $n = 10$. Вычислены φ_r , χ_r , ψ_r , ω_r (табл. 24, фиг. 73). Получена быстрая сходимость функций к нулю. Из (18.7), меняя обозначения, напишем

$$\xi = \varphi(\theta) \tau^{1/2} + \chi(0) \tau + \psi(\theta) \tau^{3/2} + \omega(0) \tau^3$$

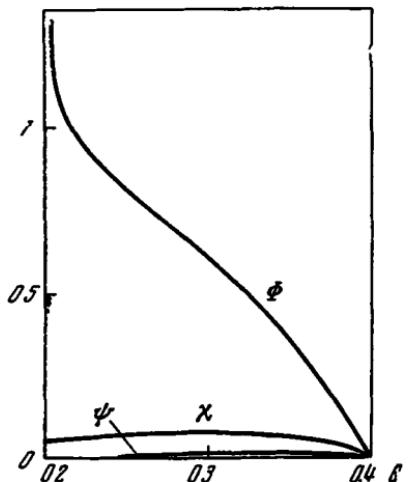
Построены графики $\xi(\theta)$ для $\tau = 0.49, 1.00, 4.00, 9.00$. Проведены вычисления решения линеаризованного в левой и правой точках уравнения для $\tau = 1$ и $\tau = 9$.

Результаты представлены на фиг. 74, где сплошные линии изображают решение методом Филила, пунктирные — среднее арифметическое линеаризаций в левой и правой точках, а штрих-пунктирные — линеаризация в правой точке.

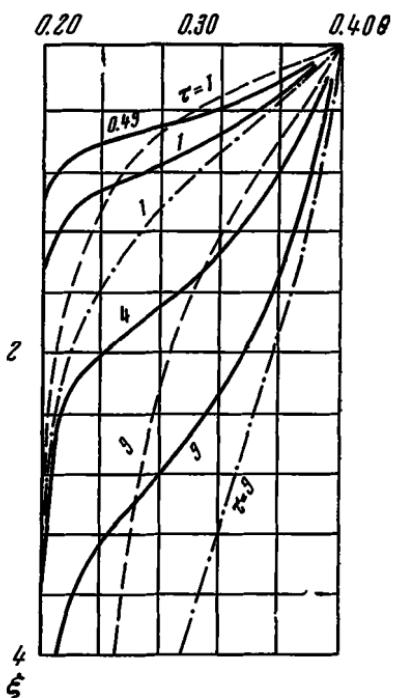
Таблица 24

r	Φ_r	$\chi_r \cdot 10^1$	$\psi_r \cdot 10^2$	$\omega_r \cdot 10^1$
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.1619	0.3305	0.4335	+0.3492
2	0.2983	0.5251	0.5176	+0.1905
3	0.4153	0.6310	0.4825	-0.0474
4	0.5178	0.6858	0.4173	-0.0271
5	0.6095	0.7088	0.3547	-0.0527
6	0.6940	0.7116	0.3047	-0.0498
7	0.7754	0.7007	0.2710	-0.0384
8	0.8597	0.6791	0.2255	-0.0125
9	0.9609	0.6448	0.1863	+0.0112
10		0.5740	0.1338	+0.0356

Сопоставление начертанных кривых говорит о том, что удержание первых двух членов ряда, получаемого при линеаризации уравнения движения влаги в грунте методом малого параметра, дает довольно грубое приближение, для улучшения которого необходимо привлекать следующие члены разложения. При этом вопрос о сходимости упомянутого ряда остается открытым.



Фиг. 73



Фиг. 74

§ 19. О поливах и растеканиях бугров грунтовых вод

Возьмем частный вид линеаризованного уравнения (6.7), когда $b=0$:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t) \quad \left(a = \frac{k\tilde{h}}{\sigma}, f(x, y, t) = \frac{w(x, y, t)}{\sigma} \right) \quad (19.1)$$

Здесь $w(x, y, t)$ — разность между инфильтрацией и испарением.

Будем рассматривать безграничную область плоскости xy , над некоторой частью которой производится полив и в то же время происходит растекание ранее образовавшихся бугров.

Если начальная форма поверхности грунтового потока есть $h(x, y, 0) = h_0(x, y)$, то решение уравнения (19.1) имеет вид

$$h(x, y, t) = \frac{1}{4\pi at} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{r^2}{4at} \right) h_0(x_1, y_1) dx_1 dy_1 + \\ + \frac{1}{4\pi a} \int_0^t \frac{dt_1}{t-t_1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{r^2}{4a(t-t_1)} \right] f(x_1, y_1, t_1) dx_1 dy_1 \quad (19.2)$$

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$

Для плоскопараллельного движения на плоскости xOy вместо (19.1) будем иметь уравнение

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (19.3)$$

а его решение для $h(x, 0) = h_0(x)$ принимает вид

$$h(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(x-x_1)^2}{4at} \right] h_0(x_1) dx_1 + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \int_0^t \frac{dt_1}{\sqrt{t-t_1}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(x-x_1)_2^2}{4at} \right] f(x_1, t_1) dx_1 \quad (19.4)$$

Растекание бугров. При поливе или дожде происходит просачивание воды слабыми струйками вниз, до достижения поверхности грунтовых вод. Иногда просачивание может идти сплошной каймой, вплоть до смыкания ее с поверхностью грунтового потока.

После выключения полива или прекращения дождя будет происходить растекание образовавшегося бугра или столба воды.

Если не учитывается инфильтрация или испарение, то форма бугров, изменяющаяся со временем, определяется первыми слагаемыми формул (19.2) и (19.4).

Простейшим случаем будет растекание бугра, в начальный момент представлявшего столб в виде прямоугольного параллелепипеда:

$$h_0(x, y) = H_0 = \text{const}$$

— над прямоугольником,

$$-R \leq x \leq R, \quad -R_1 \leq y \leq R_1$$

$$h_0(x, y) = H_1 = \text{const}$$

— вне прямоугольника. По формуле (19.2) имеем

$$h(x, y, t) = H_1 + \frac{H_0 - H_1}{4\pi at} \int_{-R}^R dx_1 \int_{-R_1}^{R_1} \exp \left[-\frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}{4at} \right] dy_1$$

Подстановка

$$x_1 - x = 2\sqrt{at}u, \quad y_1 - y = 2\sqrt{at}v$$

приводит к равенству

$$h(x, y, t) = H_1 + \frac{H_0 - H_1}{\pi} \int_{-\xi}^{\xi} e^{-u^2} du \int_{-\eta}^{\eta} e^{-v^2} dv \quad \left(\xi = \frac{R-x}{2\sqrt{at}}, \eta = \frac{R-y}{2\sqrt{at}} \right)$$

Каждый из сомножителей правой части представляет разность значений функции ошибок

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

С учетом нечетности этой функции имеем

$$h(x, y, t) = H_1 + \frac{H_0 - H_1}{4} \left(\operatorname{erf} \frac{R-x}{2\sqrt{at}} + \operatorname{erf} \frac{R+x}{2\sqrt{at}} \right) \times \\ \times \left(\operatorname{erf} \frac{R_1-y}{2\sqrt{at}} + \operatorname{erf} \frac{R_1+y}{2\sqrt{at}} \right) \quad (19.5)$$

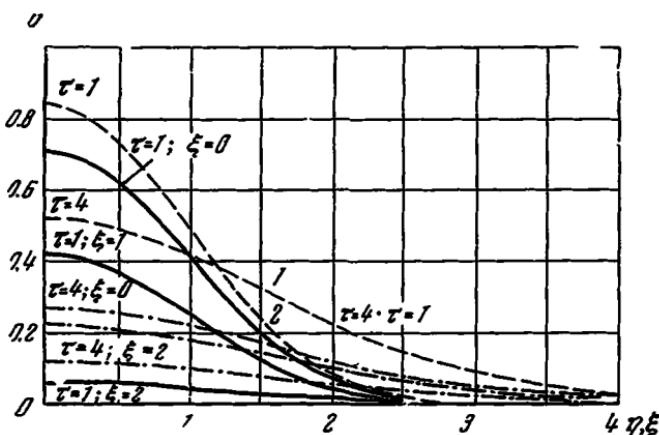
На фиг. 75 представлено несколько форм поперечных сечений бугров для $\xi = R_1/R$ и $\tau = 4at/R^2$, построенных С. Муминовым.

При $R_1 = \infty$ получаем случай плоского течения в плоскости xh , другими словами, случай растекания полосы $-R \leq x \leq R$:

$$h(x, t) = H_1 + \frac{H_0 - H_1}{2} \left(\operatorname{erf} \frac{R-x}{2\sqrt{at}} + \operatorname{erf} \frac{R+x}{2\sqrt{at}} \right) \quad (19.6)$$

В центре прямоугольника, при $x=0$, формула (19.5) дает

$$h(0, 0, t) = H_1 + (H_0 - H_1) \operatorname{erf} \frac{R}{2\sqrt{at}} \operatorname{erf} \frac{R_1}{2\sqrt{at}} \quad (19.7)$$



Фиг. 75

Введем безразмерные величины

$$\tau = \frac{4at}{R^2}, \quad u(\tau) = \frac{h(0, 0, t) - H_1}{H_0 - H_1}, \quad n = \frac{R_1}{R}$$

Тогда получим

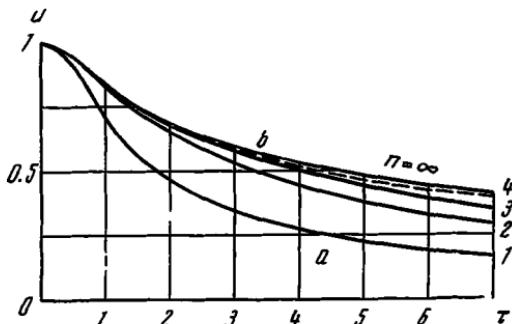
$$u(\tau) = \operatorname{erf} 1/\sqrt{\tau} \operatorname{erf} n/\sqrt{\tau} \quad (19.8)$$

Для больших значений τ имеем

$$u(\tau) \approx 4n/\pi\tau$$

При $n=1$ имеем квадрат, при $n=\infty$ — полосу, на фиг. 75 ей соответствуют штриховые линии 1 и 2. На фигуре представлены графики растекания максимума бугра для $n=1, 2, \infty$. Видим, что кривые зависимости максимальной ординаты от времени сначала круто спадают, затем растекание становится все более медленным.

При этом вначале для прямоугольника даже с небольшим удлинением ($n=2$) кривая ближе к кривой для бесконечно длинной полосы; заметим, что при $n=7 \div 8$ линия $n=2$ будет лежать посередине между линиями $n=1$ и $n=\infty$ и лишь затем она начинает приближаться к линии, соответствующей квадрату.



Фиг. 76

Возьмем для примера $R=100$ м, $a=2000$ м²/сут, тогда будем иметь $t=1.25\tau$. Определим, сколько времени потребуется, чтобы максимум бугра снизился в 10 раз, т. е. чтобы стало $u=0.1$. На фиг. 76 видно, что для квадрата $\tau=11.1$ вычисление дает для полосы $\tau=123$. Поэтому время опускания до 0,1 начальной высоты равно 14 сут для квадрата и 150 сут для полосы. Для достижения 0,01 начального уровня потребуется 150 сут в случае квадрата и 1250 сут в случае полосы. На больших площадях орошения бугры от поливов могут не успевать рассасываться не только от полива к поливу, но и от одного года к другому.

Заметим, что в формулах (19.5) и (19.6) любой момент времени $t=t_1$ может быть принят за начальный, тогда начальная форма бугра будет некоторой плавной поверхностью.

На фиг. 77 представлены графики, по которым можно определять вид свободной поверхности грунтового потока для полосы. Они рассчитаны по уравнению

$$u(\xi, \tau) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \frac{1-\xi}{\sqrt{\tau}} + \operatorname{erf} \frac{1+\xi}{\sqrt{\tau}} \right) \quad (19.9)$$

в котором принято

$$\xi = \frac{x}{R}, \quad \tau = \frac{4at}{R^2}, \quad u(\xi, \tau) = \frac{h(x, t) - H_1}{H_0 - H_1}$$

Отметим еще один случай, когда решение уравнения (19.1) получается в конечном виде; при

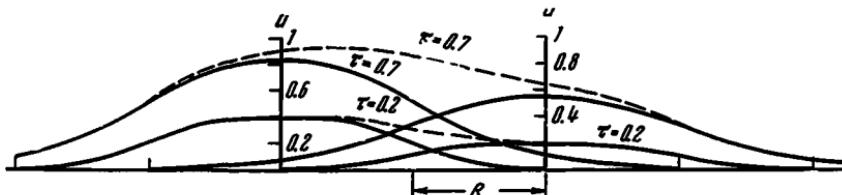
$$h_0(x, y) = A \exp(-\alpha^2 x^2 - \beta^2 y^2)$$

имеем

$$h(x, y, t) = \frac{A}{\sqrt{(1+4\alpha^2 at)(1+4\beta^2 at)}} \exp\left(-\frac{\alpha^2 x^2}{1+4\alpha^2 at} - \frac{\beta^2 y^2}{1+4\beta^2 at}\right)$$

Простой результат получается для периодической функции $h_0(x) = A \cos ax$:

$$h(x, t) = A \cos ax \exp(-\alpha^2 at)$$



Фиг. 77

Если $h_0(x, y)$ представляется в виде суммы нескольких слагаемых, то и $h(x, y, t)$ будет суммой соответствующих слагаемых. При растекании бугра наибольшие ординаты его снижаются, другие несколько приподнимаются, так что общий объем, в силу несжимаемости жидкости, все время остается постоянным. Поэтому один бугор действует на другой всегда таким образом, что в каждый момент в той или иной мере повышает его ординаты и замедляет растекание.

Некоторые случаи поливов. Будем считать, что полив производится с постоянной по времени интенсивностью, т. е. что в формуле (19.2) $f(x, y, t)$ не зависит от t . Тогда под знаком интеграла сделать замену переменной: $t-t_1=t'$. Получим (считая $h_0(x, y)=0$)

$$h(x, y, t) = \frac{1}{4\pi\alpha} \int_0^t \frac{dt'}{t'} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4at'}\right] f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (19.10)$$

Предположим, что полив производится по поверхности прямоугольника $-R \leq x \leq R$, $-R_1 \leq y \leq R_1$, над которым $w=\varepsilon=\text{const}$, причем вне прямоугольника $w=0$. Тогда по формуле (19.10) будем иметь (при $h_0(x, y)=H_0$)

$$h(x, y, t) = \frac{\varepsilon}{4\pi\alpha} \int_0^t \frac{dt'}{t'} \int_{-R}^R \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at'}\right] d\xi \int_{-R_1}^{R_1} \exp\left[-\frac{(y-\eta)^2}{4at'}\right] d\eta + H_0$$

Применяя те же подстановки, что и в задаче о растекании, найдем

$$h(x, y, t) = H_0 + \frac{e}{4\sigma} \int_0^t \left(\operatorname{erf} \frac{R-x}{2\sqrt{at}} + \operatorname{erf} \frac{R+x}{2\sqrt{at}} \right) \times \\ \times \left(\operatorname{erf} \frac{R_1-y}{2\sqrt{at}} + \operatorname{erf} \frac{R_1+y}{2\sqrt{at}} \right) dt \quad (19.11)$$

Случай полива бесконечной полосы — $R \leq x \leq R$ может быть рассмотрен при помощи формулы (19.4) или получен из (19.11) при $R_1 = \infty$

$$h(x, t) = H_0 + \frac{e}{2\sigma} \int_0^t \left(\operatorname{erf} \frac{R-x}{2\sqrt{at}} + \operatorname{erf} \frac{R+x}{2\sqrt{at}} \right) dt \quad (19.12)$$

Здесь интегрирование по частям приводит к такому выражению для

$$u(\xi, \tau) = \frac{\sigma a}{\varepsilon R^2} [h(x, t) - H_0] \quad \left(\xi = \frac{x}{R}, \quad \tau = \frac{at}{R^2} \right)$$

а именно [55]

$$u(\xi, \tau) = F(\xi, \tau) + F(-\xi, \tau) + \delta(\xi - 1)^2 \\ (\delta = 0, \xi < 1; \delta = 1, \xi > 1)$$

$$F(\xi, \tau) = \frac{1}{2} \left\{ \tau \operatorname{erf} \frac{1+\xi}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} (1+\xi) \exp \left[-\frac{(1+\xi)^2}{4\tau} \right] - \right. \\ \left. - \frac{(1+\xi)^3}{2} \operatorname{erfc} \frac{1+\xi}{2\sqrt{\tau}} \right\}$$

Возвращаясь к формуле (19.11), рассмотрим подъем в центре прямоугольной площади при $x=y=0$

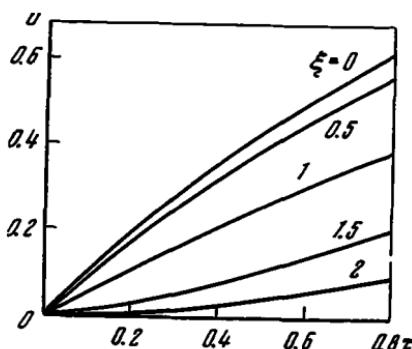
$$h(0, 0, t) = H_0 + \frac{e}{\sigma} \int_0^t \operatorname{erf} \frac{R}{2\sqrt{at}} \operatorname{erf} \frac{R_1}{2\sqrt{at}} dt$$

Для малых значений t аргументы сомножителей под знаком интеграла велики, сами сомножители близки к единице, и их можно представить в виде

$$\operatorname{erf} x = 1 - \operatorname{erfc} x, \quad \operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

Применим асимптотическую формулу

$$\operatorname{erfc} x = \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \dots \right)$$



Фиг. 78

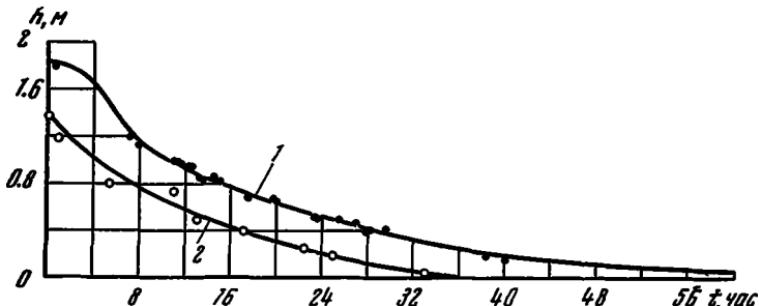
ошибки которой не превосходит первого из отбрасываемых членов ряда. Мы отбросим $1/2x^2$. Тогда будем иметь

$$h(0, 0, t) - H_0 \approx \frac{\varepsilon}{\sigma} t - \sqrt{\frac{t}{\pi}} [f(\alpha) + f(\alpha_1)] - 2tf_1(\beta)$$

$$f(\alpha) = \frac{e^{-\alpha^2}}{3\alpha^3} + \frac{2e^{-\alpha^2}}{3} + \frac{2\sqrt{\pi}\alpha}{3} \operatorname{erfc} \alpha, \quad f_1(\beta) = \frac{e^{-\beta^2}}{\beta} + e^{-\beta^2} - \beta \operatorname{Ei}(\beta)$$

$$\alpha = \frac{R}{2\sqrt{at}}, \quad \alpha_1 = \frac{R_1}{2\sqrt{at}}, \quad \beta = \frac{R^2 + R_1^2}{4at}$$

Это показывает, что для достаточно малых значений t подъем центра бугра происходит равномерно со скоростью ε/σ . Продолжительность стадии равномерного подъема зависит от размеров поливного участка. При заданном R она наибольшая для $R_1 = \infty$, т. е. для полосы. В этом случае точное равенство имеет простой



Фиг. 79

вид

$$u(0, \tau) = \tau - \left[(\tau + \frac{1}{2}) \operatorname{erfc} \frac{1}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \exp \frac{-1}{4\tau} \right] \quad \left(\tau = \frac{at}{R^2} \right)$$

При $\tau > 0.1$ линия $u(0, \tau)$ отклоняется от прямой. На фиг. 78 даны графики зависимости $u(\xi, \tau)$ от τ для ряда значений ξ [55].

Формулы (19.2) и (19.4) позволяют решать задачи о сериях поливов, когда в разные промежутки времени происходят поливы разной интенсивности [7, 55].

На фиг. 79 представлены результаты двух опытов наблюдений и вычислений (кривые 1 и 2) зависимости от времени ординаты h центра прямоугольного участка, на котором был произведен налив площадки с размерами 21×22 м. Ввиду близости прямоугольника к квадрату вычисления проводились по формуле для квадрата. Для величины k получено значение 15 м/с.

Г л а в а V

ВОПРОСЫ БОКОВОГО ПИТАНИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД

Для определения оросительных возможностей некоторого пласта подземных вод необходимо определить их динамические запасы. Под динамическими запасами, или ресурсами, данного водоносного пласта (или некоторой его части) можно понимать величину суммарных поступлений за данный промежуток времени на этот участок: инфильтрационных вод сверху, поступлений из внешней области питания (боковой приток) и перетоков воды из смежных пластов.

Если производится откачка воды из данного пласта, то естественно поставить условие, чтобы суммарный дебит, извлеченный за данный промежуток времени, не превышал величины динамических запасов за этот промежуток или составлял их некоторую долю. Эта заданная к использованию часть динамических запасов может быть назначена эксплуатационным дебитом. Иногда можно на время допустить превышение эксплуатационных дебитов над динамическими запасами: это повлечет уменьшение напоров в пласте, которые впоследствии, при изыскании других способов получения воды (например, вследствие переброски речных вод в безводные зоны), будут постепенно восстанавливаться.

При извлечении воды из подземных пластов возникают неустановившиеся движения и происходят местные изменения напоров в окрестности скважин. После прекращения откачки напоры начинают восстанавливаться сначала очень быстро, затем все более медленно.

Очень важным является вопрос: через сколько времени может восстановиться первоначальный уровень или заданная часть уровня, если мы считаем допустимым общее снижение его. Собственно это именно и определяет возможности пласта. Ввиду того что скважины работают не непрерывно, возможно в каждый данный промежуток времени извлекать из них воды больше, чем ее поступает за тот же промежуток времени, лишь бы нарушенный уровень успел восстановиться к началу следующих откачек.

§ 20. Некоторые случаи движения грунтовых вод при наличии притока из удаленной области

Рассмотрим некоторые из простейших задач такого рода в условиях безнапорного движения, изученных М. А. Саттаровым [56].

1. Дифференциальные уравнения для дебита. Возьмем уравнение грунтового потока с перегородками, линеаризованное вторым

способом (см. гл. II, § 6):

$$\frac{\partial h^2}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2} \right) - b (h^2 - H^2) \quad (20.1)$$

$$a = k \tilde{h}/m, \quad b = k_1 \tilde{h}/M m \tilde{H} \quad (20.2)$$

Для двух случаев — одномерного (параллельного оси x) и осесимметричного движений — напишем выражения расхода. В первом случае — через сечение потока единичной толщины:

$$q(x, t) = kh \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{k}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x} \quad (20.3)$$

во втором — через цилиндрическую поверхность радиусом r :

$$q(r, t) = 2\pi krh \frac{\partial h}{\partial r} = \pi kr \frac{\partial h^2}{\partial r} \quad (20.4)$$

Отметим, что мы берем правые части (20.3) и (20.4) со знаком плюс, так как принимаем дебит $q(x, t)$ положительным, если движение происходит в отрицательном направлении оси x , и дебит $q(r, t)$ положительным, если жидкость движется к началу координат.

Дифференциальные уравнения для h^2 будут:
для одномерного движения

$$\frac{\partial h^2}{\partial t} = a \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} - b (h^2 - H^2) \quad (20.5)$$

для осесимметричного

$$\frac{\partial h^2}{\partial t} = a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right) - b (h^2 - H^2) \quad (20.6)$$

Если (20.5), умноженное на $k/2$, продифференцировать почленно по x , а (20.6) после умножения на πkr — по r , то, приняв во внимание (20.3) и соответственно (20.4), получим

$$\frac{\partial q}{\partial t} = a \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - b \frac{\partial q}{\partial x} \quad (q = q(x, t)) \quad (20.7)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = ar \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial r} \right) - b \frac{\partial q}{\partial r} \quad (q = q(r, t)) \quad (20.8)$$

Предположим теперь, что нам получено некоторое решение $q(x, t)$ уравнения (20.7) или $q(r, t)$ уравнения (20.8). Спраши-

вается, как тогда найти соответствующие решения уравнений (20.5) и (20.6).

Интегрируя (20.3) и (20.4), получаем

$$h^2(x, t) = 2/k \int_{x_0}^x q(x, t) dx + h_0^2(t) \quad (20.9)$$

$$h^2(r, t) = \frac{1}{\pi k} \int_{r_0}^r \frac{q(r, t)}{r} dr + h_0^2(t) \quad (20.10)$$

Произвольную пока функцию $h_0^2(t)$ можно трактовать как значение квадрата ординаты свободной поверхности соответственно при $x=x_0$ или $r=r_0$.

Условия, что $h^2(x, t)$ и $h^2(r, t)$ удовлетворяют соответственно дифференциальным уравнениям (20.5) и (20.6), приводят к таким формулам для $h_0(t)$:

в одномерном случае

$$h_0^2(t) = H^2 - e^{-bt} \left[H^2 - h_{00}^2 - \frac{2a}{k} \int_0^t e^{b\tau} \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)_{x=x_0} d\tau \right] \quad (20.11)$$

в случае осевой симметрии

$$h_0^2(t) = H^2 - e^{-bt} \left[H^2 - h_{00}^2 - \frac{a}{k\pi r_0} \int_0^t e^{b\tau} \left(\frac{\partial q}{\partial r} \right)_{r=r_0} d\tau \right] \quad (20.12)$$

В последних формулах h_{00} — значение $h_0(t)$ при $t=0$.

2. Приток к галерее (одномерные задачи). При рассмотрении задач о притоке жидкости (воды, нефти) к ряду скважин, расположенных на одной прямой, во многих случаях заменяют «батарею» скважин «галереей», эквивалентной по дебиту «батарее».

Допустим, что имеем бесконечный ряд скважин, расположенных на расстоянии L одна от другой, причем дебит каждой скважины равен Q . У эквивалентной галереи дебит на единицу длины, поступающий с одной стороны от галереи, пусть будет q , тогда на длину L будет поступать дебит qL . Примем его равным $\frac{1}{2}Q$, т. е. притоку к одной скважине с одной стороны. Тогда

$$q = Q/2L$$

В этом пункте мы рассматриваем несколько случаев одностороннего притока воды к галерее при наличии области питания на конечном и бесконечном расстояниях от галерен для непроницаемого и слабопроницаемого водоупоров.

Конечный пласт на непроницаемом водоупоре. Пусть имеем водоносный пласт, ограниченный снизу горизонтальной плоскостью (ось x — сечение этой плоскости). Предположим, что сначала имело место установившееся движение в полосе длиной l с дебитом на единицу ширины пласта

$$q_l = \frac{k(h_l^2 - h_{00}^2)}{2l} \quad (20.13)$$

Здесь k — коэффициент фильтрации, h_{00} — ордината свободной поверхности при $x=0$, h_l — при $x=l$. При этом уравнение свободной поверхности имеет вид

$$h^2 = \frac{2q_l}{k}x + h_{00}^2 \quad (20.14)$$

так что

$$h_l^2 = \frac{2q_l}{k}l + h_{00}^2 \quad (20.15)$$

Величина q_l определяет питание пласта, поступающее из области питания.

Далее, с момента $t=0$ начинают производить откачуку из скважин, расположенных вдоль оси $x=0$, с постоянным дебитом q_0 , причем через сечение $x=l$ продолжает поступать дебит q_l . В начальный момент будем считать, что

$$q(x, 0) = q_l \quad (20.16)$$

Границные условия запишем в виде

$$q(0, t) = q_0, \quad q(l, t) = q_l \quad (20.17)$$

Уравнения (20.7) и (20.5) принимают вид

$$\frac{\partial q}{\partial t} = a \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \quad (20.18)$$

$$\frac{\partial h^2}{\partial t} = a \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} \quad (20.19)$$

Решение уравнения (20.18) при условиях (20.16) и (20.17) имеет вид

$$q(x, t) = q_l + \frac{q_0 - q_l}{l}(l - x) - \\ - \frac{2(q_0 - q_l)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 a t}{l^2}\right) \frac{\sin n \pi x / l}{n}$$

Отсюда, интегрируя, найдем

$$\begin{aligned} h^3(x, t) &= 2/k \int_0^x q(x, t) dx + h_0^3(t) = \\ &= 2/k \left\{ q_l x + \frac{q_0 - q_l}{l} \left(l x - \frac{x^2}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(q_0 - q_l)}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \exp \left(- \frac{n^2 \pi^2 a t}{l^2} \right) \right] \frac{1 - \cos \frac{n \pi x}{l}}{n^3} \right\} + h_0^3(t) \quad (20.20) \end{aligned}$$

Выражение для $h_0(t)$ определим из уравнения, в которое переходит (20.11) при $b=0$:

$$h_0^3(t) = h_{00}^3 + \frac{2a}{k} \int_0^t \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)_{x=x_0} d\tau \quad (20.21)$$

Как нетрудно видеть, получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)_{x=0} &= - \frac{q_0 - q_l}{l} - \frac{2(q_0 - q_l)}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left(- \frac{n^2 \pi^2 a t}{l^2} \right) \\ h_0^3(t) &= h_{00}^3 - \frac{2(q_0 - q_l)l}{k} \left[\frac{at}{l^2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \exp \left(- \frac{n^2 \pi^2 a t}{l^2} \right)}{n^2} \right] \quad (20.22) \end{aligned}$$

Введем безразмерные величины

$$\frac{at}{l^2} = \tau, \quad \frac{h_0(t)}{h_{00}} = \tilde{h}(\tau), \quad \frac{2(q_0 - q_l)l}{kh_{00}^2} = A \quad (20.23)$$

Тогда можем написать

$$\tilde{h}^3(\tau) = 1 - Af(\tau) \quad (20.24)$$

где

$$f(\tau) = \tau + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \exp(-n^2 \pi^2 \tau)}{n^2} \quad (20.25)$$

Предположим теперь, что дебит при $x=0$ не остается постоянным, но меняется ступенчатым образом, так что

$$q(0, t) = q_l \quad \text{при } t_l < t < t_{l+1}$$

где q_i — постоянные. Это можно записать в виде

$$q(0, t) = q_0 + \sigma_1(t - t_1)(q_1 - q_0) + \dots + \sigma_1(t - t_N)(q_N - q_{N-1})$$

$$\sigma(t - t_k) = \begin{cases} 0, & t < t_k \\ 1, & t \geq t_k \end{cases} \quad (20.26)$$

Тогда, как нетрудно видеть, при тех же условиях, что и раньше, будем иметь

$$h_0^2(t) = h_{00}^2 [1 - A_0 f(\tau) - A_1 \sigma(\tau - \tau_1) f(\tau - \tau_1) - \dots - A_N \sigma(\tau - \tau_N) f(\tau - \tau_N)] \quad (20.27)$$

Здесь $f(\tau)$ определяется равенством (20.25), причем

$$A_0 = \frac{2(q_0 - q_l)l}{kh_{00}^2}, \quad A_l = \frac{2(q_l - q_{l-1})l}{kh_{00}^2}, \quad \tau = \frac{at}{l^2}, \quad \tau_l = \frac{al_l}{l^2} \quad (20.28)$$

Найдем еще значение h при $x = l$ (для $q_1 = q_2 = \dots = q_N = 0$)

$$h^2(l, t) = \frac{q_0 + q_l}{k} - \frac{2(q_0 - q_l)l}{kl^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \exp \frac{-(2k+1)^2 \pi^2 at}{l^2} + h_0^2(t) \quad (20.29)$$

Если $q_0 > q_l$, то $h(l, t)$ уменьшается со временем.

Полубесконечный пласт на слабопроницаемом водоупоре. Решение уравнения

$$\frac{\partial q}{\partial t} = a \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - bq \quad (20.30)$$

при условиях

$$q(x, 0) = q_0, \quad q(\infty, t) = q_\infty$$

$$q(0, t) = q_0 + \sum_{l=1}^N (q_l - q_{l-1}) \sigma_1(t - t_l) \quad (20.31)$$

имеет вид

$$q(x, t) = q_\infty + \frac{q_0 - q_\infty}{2} \left\{ \exp \left(x \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + \sqrt{bt} \right) + \right.$$

$$+ \exp \left(-x \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} - \sqrt{bt} \right) \left. \right\} + \sum_{l=1}^N \frac{q_l - q_{l-1}}{2} \sigma(t - t_l) \times$$

$$\times \exp \left(x \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{a(t-t_l)}} + \sqrt{b(t-t_l)} \right] +$$

$$+ \exp \left(-x \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{a(t-t_l)}} - \sqrt{b(t-t_l)} \right] \quad (20.32)$$

Отсюда при помоши (20.9) получаем

$$\begin{aligned} h^2(x, t) = & h_0^2(t) - \frac{2q_0 - q_\infty}{k} x - \frac{q_0 - q_\infty}{k} \sqrt{\frac{a}{b}} \left\{ \exp \left(x \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \operatorname{erfc} \times \right. \\ & \times \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + \sqrt{bt} \right) - \exp \left(-x \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} - \sqrt{bt} \right) + \\ & + 2 \operatorname{erf} \sqrt{bt} \Big] + \sum_{i=1}^N \frac{q_i - q_{i-1}}{k} \sqrt{\frac{a}{b}} \left\{ \exp \left(x \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \operatorname{erfc} \times \right. \\ & \times \left[\frac{x}{2\sqrt{a(t-t_i)}} + \sqrt{b(t-t_i)} \right] - \exp \left(-x \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \operatorname{erfc} \times \\ & \times \left[\frac{x}{2\sqrt{a(t-t_i)}} - \sqrt{b(t-t_i)} \right] + 2 \operatorname{erf} \sqrt{b(t-t_i)} \Big\} \quad (20.33) \end{aligned}$$

Так как имеем

$$\left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)_{x=0} = -(q_0 - q_\infty) \left[\sqrt{\frac{b}{a}} \operatorname{erf} \sqrt{bt} + \frac{e^{-bt}}{\sqrt{\pi at}} \right]$$

то по формуле (20.11) получаем

$$\begin{aligned} h_0^2(t) = & H^2 - (H^2 - h_{00}^2) e^{-bt} - \\ & - \frac{2a}{k} (q_0 - q_\infty) e^{-bt} \int_0^t \left[\sqrt{\frac{b}{a}} e^{bt} \operatorname{erf} \sqrt{bt} + \frac{1}{\sqrt{\pi at}} \right] dt \quad (20.34) \end{aligned}$$

Что дает после интегрирования

$$h_0^2(t) = H^2 - (H^2 - h_{00}^2) e^{-bt} - \frac{2(q_0 - q_\infty)}{k} \sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{erf} \sqrt{bt} \quad (20.35)$$

Для ступенчатого дебита при $x=0$ (последняя из формул (20.31)) формула для $h_0^2(t)$ принимает вид

$$\begin{aligned} h_0^2(t) = & H^2 - (H^2 - h_{00}^2) e^{-bt} - \frac{2}{k} \sqrt{\frac{a}{b}} \left\{ (q_0 - q_\infty) \operatorname{erf} \sqrt{bt} + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^N (q_i - q_{i-1}) \operatorname{erf} \sqrt{b(t-t_i)} \right\} \quad (20.36) \end{aligned}$$

Случай непроницаемого водоупора. Если водоупор непроницаем, т. е. $b=0$, то можно перейти к пределу при $b \rightarrow 0$ и получить

вместо формулы (20.35) такую

$$h_0^2(t) = h_{00}^2 - \frac{4(q_0 - q_\infty)}{k\sqrt{\pi}} \sqrt{t} \quad (20.37)$$

Введя безразмерные величины

$$\tau = \frac{at}{h_{00}^2}, \quad A_0 = \frac{4q_0}{kh_{00}\sqrt{\pi}}, \quad A_\infty = \frac{4q_\infty}{kh_{00}\sqrt{\pi}}, \quad \tilde{h}(\tau) = \frac{h_0(t)}{h_{00}}$$

перепишем (20.37) в виде

$$\tilde{h}^2(\tau) = 1 - (A_0 - A_\infty) \sqrt{\tau} \quad (20.38)$$

По этой формуле нетрудно определить момент времени $\tau = \tau^{(1)}$, при котором $h_0(t)$ достигает заданного значения ah_{00} , $0 < a \leq 1$:

$$\tau^{(1)} = \frac{1 - a^2}{(A_0 - A_\infty)^2} \quad (20.39)$$

Предположим теперь, что откачка ведется по ступенчатому графику для дебита (см. формулу (20.31)). Тогда получим

$$\tilde{h}^2(\tau) = 1 - (A_0 - A_\infty) \sqrt{\tau} + \sum_{i=1}^N (A_i - A_{i-1}) \sigma(\tau - \tau_i) \sqrt{\tau - \tau_i} \quad (20.40)$$

где

$$A_i = \frac{4q_i}{kh_{00}\sqrt{\pi}}, \quad \tau_i = \frac{at_i}{h_{00}^2}$$

$$\sigma(\tau - \tau_i) = \begin{cases} 0, & \tau < \tau_i \\ 1, & \tau \geq \tau_i \end{cases}$$

В частности, предположим, что для $\tau_1 < \tau < \tau_2$ откачка выключена, т. е. $A_1 = 0$. Тогда для этого промежутка будет

$$\tilde{h}^2(\tau) = 1 - (A_0 - A_\infty) \sqrt{\tau} + A_0 \sqrt{\tau - \tau_1}$$

а для момента $\tau = \tau_2$

$$\tilde{h}^2(\tau_2) = 1 - (A_0 - A_\infty) \sqrt{\tau_2} + A_0 \sqrt{\tau_2 - \tau_1}$$

Можно поставить вопрос: для какого значения τ_2 уровень воды в скважинах поднимется до первоначальной величины h_{00} ?

В этот момент $\tilde{h}(\tau_2) = 1$, поэтому будем иметь

$$\tau_2 = \frac{A_0^2 \tau_1}{A_\infty (2A_0 - A_\infty)} = \frac{q_0^2 \tau_1}{q_\infty (2q_0 - q_\infty)}$$

Видим, что при $q_\infty = 0$ этот момент времени равен бесконечности, т. е. при отсутствии внешнего питания полное восстановление уровня может произойти лишь через бесконечно большой промежуток времени.

Продолжительность восстановления уровня после прекращения откачки обозначим через τ_{12} ; она выражается так:

$$\tau_{12} = \tau_2 - \tau_1 = \frac{(q_0 - q_\infty)^2 \tau_1}{q_\infty (2q_0 - q_\infty)}$$

Величина τ_{12} может быть как большей, так и меньшей τ_1 в зависимости от отношения $\beta = q_\infty/q_0$. При $\beta = 0.293$ имеем $\tau_{12} = \tau_1$, при $\beta > 0.293$ будет $\tau_{12} < \tau_1$, при $\beta < 0.293$ τ_{12}/τ_1 быстро возрастает.

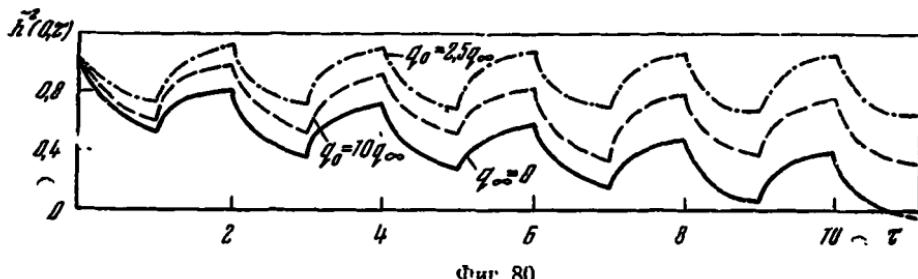
Если в момент τ_2 восстанавливается откачка с дебитом q_0 , то для $\tau \geq \tau_2$ будем иметь

$$\tilde{h}^2(\tau) = 1 - (A_0 - A_\infty) \sqrt{\tau} + A_0 \sqrt{\tau - \tau_1} - A_0 \sqrt{\tau - \tau_2}$$

и можно производить дальнейшие вычисления, например момента τ_3 , при котором $\tilde{h}(\tau_3) = \tilde{h}(\tau_1)$, и далее найти $\tau = \tau_4$, когда уровень $\tilde{h}(\tau_4) = 1$.

На поливных участках, когда моменты τ_1, τ_2, \dots выбираются по условиям орошения, полное восстановление уровня обычно не успевает происходить.

В качестве простейшего примера примем $\tau_n = n\tau_1$, т. е. будем считать продолжительности периодов откачек и восстановления одинаковыми и равными τ_1 (например, 12 час идет откачка, 12 час скважина не работает). На фиг. 80 представлен ряд кривых для $\tilde{h}(\tau)$ при различных значениях A_0 и A_∞ . Видим, что при отсутствии питания линия максимального значения уровня иеуклонно



Фиг. 80

понижается. При $A_{\infty} \neq 0$ на графике, отвечающем случаю $A_{\infty} = 0$, нужно наложить кривую $y = A_{\infty} \sqrt{\tau}$.

Считая, что q_{∞} задано, можно распорядиться величиной q_0 так, чтобы какая-нибудь из ординат пришла заданное значение, но только одна. Далее можно распорядиться величиной дебита q_1 так, чтобы выполнялось еще какое-нибудь условие и т. д.

В работе [56] рассмотрена задача о выборе такого значения q_0 при заданном q_{∞} , чтобы восстановление первоначального уровня произошло через $2n$ шагов равной продолжительности τ_1 . Как уже было указано, после первой откачки этому условию удовлетворяет отношение $q_{\infty}/q_0 = 0.293$.

М. А. Саттаров показал, что, как в случае плоскопараллельного течения, так и в случае осесимметричного движения, если откачка ведется в течение промежутка времени τ , а восстановление уровня происходит в течение промежутка $n\tau$, то соотношение расходов $q_0 = (1+n) q_{\infty}$ обеспечивает полное восстановление уровней в скважинах при сколь угодно длительной периодической эксплуатации пласта. К сожалению, в засушливых районах обычно величина $(1+n) q_{\infty}$ мала.

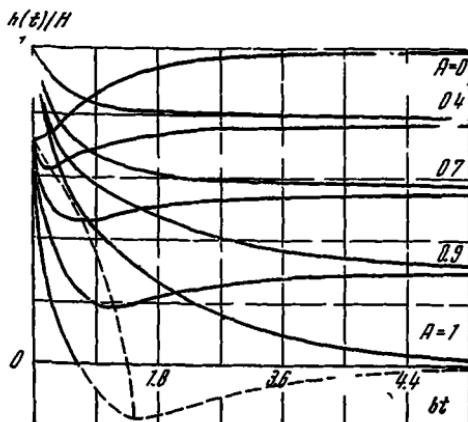
Исследование случая слабопроницаемого водоупора. Вернемся к более сложному случаю формулы (20.35). Полагая

$$\frac{h_0(t)}{H} = \bar{h}(\tau), \quad \tau = bt, \quad \frac{h_{00}}{H} = \alpha, \quad \frac{2(q_0 - q_{\infty})}{kH^4} \sqrt{\frac{a}{b}} = A$$

перепишем ее в безразмерном виде

$$\bar{h}(\tau) = 1 - (1 - \alpha^2) e^{-\tau} - A \operatorname{erf} \sqrt{\tau}$$

При $A > 1$ линия $\bar{h}(\tau)$ пересекает ось абсцисс, как и в случае непроницаемого водоупора, следовательно, откачу можно вести лишь ограниченное время. При $A < 1$ понижение у галереи ограничено и при $\tau \rightarrow \infty$ стремится к определенному пределу $\bar{h}^2 = 1 - A$. При $A = 0$, т. е. $q_0 = q_{\infty}$, за счет перетоков снизу (при



Фиг. 81

таком предположении рассматривается данная задача) происходит полное восстановление уровня в скважине при $\tau \rightarrow \infty$, так как тогда $\bar{h} \rightarrow 1$. Для $0 < A < 1$ кривая имеет минимум при $\tau = A^2/\pi(1 - a^2)^2$ (фиг. 81).

3. Приток к скважине (осесимметричная задача). Случай непроницаемого водоупора. В этом случае в уравнениях (20.6) и (20.8) нужно положить $b = 0$. Получим

$$\frac{\partial h^3}{\partial t} = \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h^3}{\partial r} \right) \quad (20.41)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = ar \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial r} \right) \quad (20.42)$$

Уравнение (20.42) имеет автомодельное решение

$$q(r, t) = \exp \left(-\frac{r^2}{4at} \right)$$

и, следовательно, функция

$$q(r, t) = q_\infty + (q_0 - q_\infty) \exp \left(-\frac{r^2}{4at} \right) \quad (20.43)$$

является решением уравнения (20.42), удовлетворяющим условиям

$$q(r, 0) = q_\infty, \quad q(\infty, t) = q_\infty \quad (20.44)$$

Используя (20.43), зависимость (20.10) для $h(r, t)$ представим в виде

$$h^3(r, t) = h_0^3(t) + \frac{q_\infty}{k\pi} \ln \frac{r}{r_0} + \frac{q_0 - q_\infty}{k\pi} \left[\text{Ei} \left(-\frac{r_0^2}{4at} \right) - \text{Ei} \left(-\frac{r^2}{4at} \right) \right] \quad (20.45)$$

где

$$\text{Ei}(-x) = - \int_x^\infty \frac{e^{-v}}{v} dv$$

По формуле (20.12) в безразмерных величинах

$$\tilde{h}(\tau) = \frac{h_0(t)}{h_{00}}, \quad \frac{q_0 - q_\infty}{4\pi k h_{00}^3} = A, \quad \tau = \frac{4at}{r_0^2}$$

найдем

$$\tilde{h}^3(\tau) = 1 + A \text{Ei}(-1/\tau) \quad (20.46)$$

Предположим теперь, что заданы такие граничные условия:

$$\begin{aligned} q(r_0, t) &= q_\infty + (q_0 - q_\infty) \exp\left(-\frac{r_0^2}{4at}\right) + \\ &+ \sum_{i=1}^N (q_i - q_{i-1}) \exp\left[-\frac{r_0^2}{4a(t-t_i)}\right] \sigma_1(t-t_i) \\ (q(\infty, t)) &= q_\infty \end{aligned}$$

Вместо них можно было бы задать условия на скважине бесконечно малого радиуса

$$q(0, t) = q_0 + \sum_{i=1}^N (q_i - q_{i-1}) \sigma_1(t-t_i)$$

Тогда для $q(r, t)$ получим

$$\begin{aligned} q(r, t) &= q_\infty + (q_0 - q_\infty) \exp\left(-\frac{r^2}{4at}\right) + \\ &+ \sum_{i=1}^N (q_i - q_{i-1}) \exp\left(-\frac{r^2}{4a(t-t_i)}\right) \sigma_1(t-t_i) \quad (20.47) \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\tau_i = \frac{4at_i}{r_0^2}, \quad A_\infty = \frac{q_\infty}{4\pi k h_{00}^2}, \quad A_i = \frac{q_i}{4\pi k h_{00}^2} \quad (i = 0, 1, \dots, N)$$

Тогда для уровня воды в скважине будем иметь

$$\begin{aligned} \tilde{h}^2(\tau) &= 1 + (A_0 - A_\infty) \operatorname{Ei}\left(-\frac{1}{\tau}\right) + \\ &+ \sum_{i=1}^N (A_i - A_{i-1}) \sigma_1(\tau - \tau_i) \operatorname{Ei}\left(-\frac{1}{\tau - \tau_i}\right) \quad (20.48) \end{aligned}$$

§ 21. Приток к скважинам при наклонном водоупоре

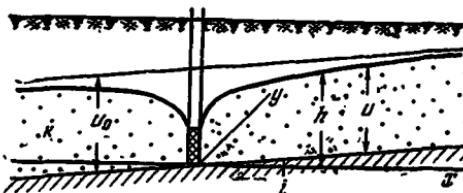
Если водоносный пласт подстилается наклонным водоупорным пластом, то имеют место боковая приточность и, следовательно, боковое питание скважин. Некоторые исследователи обратили внимание на то, что не всегда близкое к дневной поверхности залегание грунтовых вод влечет засоление: если горизонтальные скорости грунтового потока велики, то может происходить вынос солей, содержащихся в почве. В долине одной и той же реки могут быть различные области в смысле засоленности почвы, так как различны уклоны грунтового потока. Поэтому представляет интерес рассмотрение рабо-

ты скважины при наклонном водоупоре и особенностей возникающих при этом движений.

При горизонтальном водоупоре и отсутствии каких-либо внешних воздействий (откачек, неравномерной инфильтрации и т. д.) установившимся состоянием будет покой, при наклонном водоупоре — движение с постоянной скоростью. Если из таких двух пластов производить откачуку с помощью вертикальной скважины, то предельное состояние при $t = \infty$ свободной поверхности будет в первом случае горизонтальная плоскость, во втором случае — некоторая воронка депрессии, т. е. во втором случае предельный дебит отличен от нуля. Излагаемое здесь исследование притока к скважинам при наклонном водоупоре принадлежит А. Б. Бегматову.

Рассмотрим бесконечный в плане пласт с наклонным водоупором (фиг. 82). Пусть угол наклона α настолько мал, что уклон

$$i = \operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$$



Фиг. 82

Уравнение баланса расхода имеет вид (см. (6.5), где $h_0 = ix$, $k_0 = 0$, $w = 0$)

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[(h - ix) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(h - ix) \frac{\partial h}{\partial y} \right] \right\} \quad (21.1)$$

Здесь $h(x, y, t)$ — ордината свободной поверхности, k , σ — коэффициенты фильтрации и водоотдачи грунта соответственно, t — время.

Вводя функцию

$$u(x, y, t) = h(x, y, t) - ix$$

и произведя линеаризацию, вместо уравнения (21.1) будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + b \frac{\partial u}{\partial x} \left(a = \frac{k\tilde{u}}{\sigma}, b = \frac{ki}{\sigma} \right) \quad (21.2)$$

Здесь $u(x, y, t)$ — ордината свободной поверхности, отсчитываемая от водоупора; \tilde{u} — некоторое среднее значение глубины потока.

Полагая далее

$$u - u_0 = v(x, y, t) \exp(\alpha x + \beta t) \quad (21.3)$$

получаем уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a \Delta v \quad \left(\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (21.4)$$

где

$$u_0 = u(x, y, 0), \quad \alpha = -b/2a, \quad \beta = -b^2/4a$$

Для $v(x, y, t)$ будем искать решение с осевой симметрией относительно начала координат, где мы помещаем скважину. Тогда

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}$$

Умножая [57] на e^{-pt} и интегрируя от нуля до бесконечности по времени, получаем для изображения — преобразования Лапласа

$$U(r, p) = \int_0^\infty v(r, t) e^{-pt} dt \quad (21.5)$$

следующее уравнение:

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} - \frac{p}{a} U = 0 \quad (21.6)$$

Общее решение его, как известно (см. [57]), имеет вид

$$U(r, p) = C_1 K_0(r \sqrt{p/a}) + C_2 I_0(r \sqrt{p/a}) \quad (21.7)$$

где K_0 , I_0 — модифицированные функции Бесселя, $C_1 = \text{const}$, $C_2 = \text{const}$.

Рассмотрим два случая.

1°. Пусть скважина нулевого радиуса работает с постоянным дебитом Q , тогда граничными и начальными условиями будут $u(r, 0) = u_0$, $v(r, 0) = 0$:

$$2\pi k \tilde{u} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=0} = 2\pi k \tilde{u} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right)_{r=0} e^{\beta t} = Q$$

$$u(r, t) = u_0, \quad v(r, t) = 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad (21.8)$$

Здесь учтено, что

$$\left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=0} = \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right)_{r=0} e^{\beta t} + [r\alpha \cos \theta v(r, t) e^{\alpha x + \beta t}]_{r=0} = \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right)_{r=0} e^{\beta t}$$

$\Leftrightarrow (r \cos \theta = x)$

В (21.7) $C_2 = 0$, ибо $v \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Из второго условия (21.8) находим

$$C_1 = - \frac{Q}{2\pi k \tilde{u} (\rho + \beta)}$$

Подставляя значение постоянных C_1 и C_2 в (21.7), получаем

$$U(r, p) = - \frac{Q}{2\pi k \tilde{u} (\rho + \beta)} K_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right)$$

Как следует из таблиц перехода от изображений к оригиналам [57],

$$K_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \doteq \frac{1}{2t} \exp \left(-\frac{r^2}{4at} \right)$$

Согласно теореме умножения [57],

$$\frac{1}{\rho + \beta} K_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \doteq \frac{1}{2} e^{-\beta t} \int_0^t \exp \left(\beta \lambda - \frac{r^2}{4a\lambda} \right) \frac{d\lambda}{\lambda}$$

Поэтому

$$v(r, t) = - \frac{Q}{4\pi k \tilde{u}} e^{-\beta t} \int_0^t \exp \left(\beta \lambda - \frac{r^2}{4a\lambda} \right) \frac{d\lambda}{\lambda}$$

или, полагая $\lambda_1 = r^2/4a\lambda$, получаем

$$u = u_0 - \frac{Q}{4\pi k \tilde{u}} e^{\alpha x} \int_{r^2/4at}^{\infty} \exp \left(-\lambda + \frac{\beta r^2}{4a\lambda} \right) \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (21.9)$$

где для удобства λ_1 обозначено через λ .

Отсюда при $\alpha = \beta = 0$ следует решение известной задачи при горизонтальном водоупоре (см. гл. III, § 10)

$$u = u_0 + \frac{Q}{4\pi k \tilde{u}} \operatorname{Ei} \left(-\frac{r^2}{4at} \right)$$

Пользуясь интегральным представлением функции $K_0(z)$, можем написать (см. гл. III, § 12)

$$\begin{aligned} {}_{1/2} \int_0^t \exp\left(-\frac{r^2}{4a\lambda} + \beta\lambda\right) \frac{d\lambda}{\lambda} = \\ = K_0\left(r \sqrt{\frac{-\beta}{a}}\right) - {}_{1/2} \int_{-\beta t}^{\infty} \exp\left(-\lambda + \frac{\beta r^2}{4a\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\lambda} \end{aligned}$$

Значит,

$$u = u_0 - \frac{Q}{4\pi k u} e^{ax} \left[K_0\left(r \sqrt{\frac{-\beta}{a}}\right) - {}_{1/2} \int_{-\beta t}^{\infty} \exp\left(-\lambda + \frac{\beta r^2}{4a\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\lambda} \right] \quad (21.10)$$

$(\beta = -b^2/4a)$

Полагая

$$r \sqrt{-\beta/a} = \rho, \quad -\beta t = \tau$$

и принимая во внимание, что понижение

$$S(x, y, t) = h(x, y, 0) - h(x, y, t) = u_0 - u(x, y, t)$$

вместо (21.9) и (21.10) будем иметь соответственно

$$S = \frac{Q}{4\pi k u} e^{ax} \int_{\rho^2/4\tau}^{\infty} \exp\left(-\lambda - \frac{\rho^2}{4\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (21.11)$$

или

$$S = \frac{Q}{4\pi k u} e^{ax} \left[K_0(\rho) - {}_{1/2} \int_{\tau}^{\infty} \exp\left(-\lambda - \frac{\rho^2}{4\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\lambda} \right] \quad (21.12)$$

Из (21.12) при $t \rightarrow \infty$ получим предельное понижение, соответствующее установившемуся движению:

$$S = \frac{Q}{2\pi k u} e^{ax} K_0(\rho) \quad (21.13)$$

Интеграл

$$\int_{\tau}^{\infty} \exp\left(-\lambda - \frac{\rho^2}{4\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (21.14)$$

табулирован М. Хантушем (см. [30] и фиг. 65).

Понижения можно вычислять по любой из формул (21.11) и (21.12).

При откачке из N скважин решение получается методом суперпозиции решений вида (21.11) и (21.12):

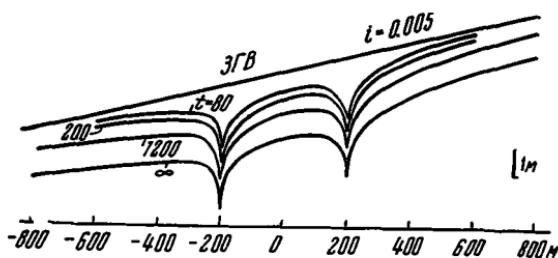
$$S = \frac{1}{4\pi k\bar{u}} \sum_{j=1}^N Q_j \exp[\alpha(x - x_j)] \int_{\rho_j^2/4\tau}^{\infty} \exp\left(-\lambda - \frac{\rho_j^2}{4\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (21.15)$$

$$S = \frac{1}{4\pi k\bar{u}} \sum_{j=1}^N Q_j \exp[\alpha(x - x_j)] \left[K_0(\rho_j) - \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\infty} \exp\left(-\lambda - \frac{\rho_j^2}{4\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\lambda} \right] \quad (21.16)$$

где x_j , y_j — координаты центра скважин,

$$\bullet \quad \rho_j = \sqrt{-(\beta/a)[(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2]}$$

Произведены вычисления понижений по формулам (21.11) и (21.12) при откачке из одиночной скважины и по формулам (21.15) и (21.16) при откачке из двух и трех скважин, расположенных на оси абсцисс (фиг. 83 и 84). При этом приняты следующие значения постоянных: $k=20$ м/сут, $Q=20$ л/сек, $\bar{u}=25$ м, $\sigma=0.2$, $i=0.005$, $r_0=0.2$ м. Расстояние между скважинами 200 м.

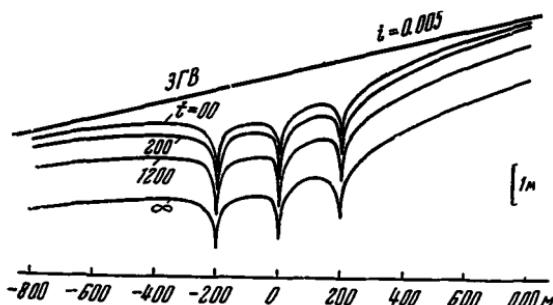


Фиг. 83

Как видно из графиков (фиг. 83 и 84), неустановившийся характер движения сохраняется очень долго. Самое большое понижение получается в центральной скважине.

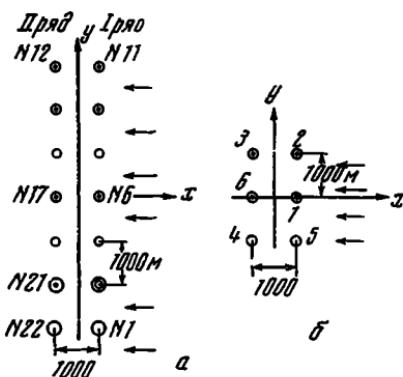
При орошении подземными водами возникает вопрос об истощении пласта. Представляет интерес задача: на скважинах задается некоторое допустимое (например, через 50 лет) понижение S_D , требуется определить дебит, при котором мы через 50 лет имели бы понижение не больше S_D . По инструкции ВСЕГИНГЕО за 50 лет допускается сработка не более половины мощности потока. В работе [58] считается, что

$$S_D = (0.5 \div 0.7) u_0$$



Фиг. 84

В формуле (21.12) значение интеграла (21.14) становится пренебрежимо малым при $t = 50 \text{ лет} = 18\,250 \text{ сут}$, ибо наибольшее значение (21.14) для этого момента времени приблизительно равно 9.1. Поэтому понижения, которые получаются через 50 лет при данных дебитах скважин, можно вычислять по формуле (21.13) для одиночной скважины и для N скважин по формуле (21.16), пренебрегая значением интеграла (21.14).



Фиг. 85

Пусть имеются два ряда скважин, расположенных перпендикулярно к потоку, общее число которых равно 22 (фиг. 85, а). Параметры пласта те же. Дебиты скважин одинаковы, т. е.

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_{22} = 20 \text{ л/сек}$$

Из (21.16) получим следующие значения понижений в скважинах (в м):

$$S_6 = 22.7, \quad S_1 = S_{11} = 18.0$$

$$S_{17} = 24.6, \quad S_{12} = S_{22} = 19.4$$

Отсюда видно, что если группа скважин работает с одинаковым дебитом, то во втором ряду (фиг. 85, а) понижения больше, чем в первом, причем они уменьшаются по мере удаления от центральных скважин.

2°. Зададим теперь одинаковые допустимые понижения во всех скважинах. Пусть в каждом ряду, перпендикулярном к потоку, имеется N скважин. Если N четное, то, в силу симметрии относительно оси абсцисс, получим систему N уравнений, а если нечетное — систему $N+1$ уравнений для определения дебита каждой из $2N$ скважин.

Рассмотрим для простоты вычислений случай шести скважин, т. е. $N=3$ (фиг. 85, б). Согласно сказанному выше, число уравнений для определения дебитов будет равно четырем:

$$Q_1 \exp [\alpha (x_1 - x_1)] K_0 (p_{11}) + Q_6 \exp [\alpha (x_1 - x_6)] K_0 (p_{16}) + \\ + 2 \sum_{j=2}^3 Q_j \exp [\alpha (x_1 - x_j)] K_0 (p_{1j}) = 2\pi k u S_D$$

$$Q_1 \exp [\alpha (x_2 - x_1)] K_0 (p_{21}) + Q_6 \exp [\alpha (x_2 - x_6)] K_0 (p_{26}) + \\ + \sum_{j=2}^5 Q_j \exp [\alpha (x_2 - x_j)] K_0 (p_{2j}) = 2\pi k u S_D$$

$$Q_1 \exp [\alpha (x_3 - x_1)] K_0 (p_{31}) + Q_6 \exp [\alpha (x_3 - x_6)] K_0 (p_{36}) + \\ + \sum_{j=2}^5 Q_j \exp [\alpha (x_3 - x_j)] K_0 (p_{3j}) = 2\pi k u S_D$$

$$Q_1 \exp [\alpha (x_6 - x_1)] K_0 (p_{61}) + Q_6 \exp [\alpha (x_6 - x_6)] K_0 (p_{66}) + \\ + 2 \sum_{j=2}^3 Q_j \exp [\alpha (x_6 - x_j)] K_0 (p_{6j}) = 2\pi k u S_D$$

где S_D — понижение, которое допустимо на скважине через 50 лет;

$$Q_2 = Q_5 = Q_3 = Q_4$$

$$p_{11} = p_{22} = \dots = p_{66} = r_0 \sqrt{-\beta/a}$$

$$p_{ij} = \sqrt{-\beta/a[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]}$$

x_i, y_i — координаты скважины, в которых определяется понижение. Пусть $S_D = 3/8 u = 16.67$ м.

Подставляя значения параметров и решая систему, получаем, что

$$Q_1 = 2371, \quad Q_2 = Q_5 = 2685, \quad Q_3 = Q_4 = 2351, \quad Q_6 = 2025 \text{ [м}^3/\text{сут]}}$$

Пусть дана бесконечная цепочка скважин, перпендикулярная к потоку. Расстояние между скважинами 1 км. Выберем начало координат в центре одной из скважин. Тогда, согласно предыдущим рассуждениям, через 50 лет имеем следующее понижение:

$$S = \frac{1}{2\pi k u} \sum_{-\infty}^{\infty} Q_j \exp [\alpha (x_i - x_j)] K_0 (\rho_j) \quad (x_i \neq x_j)$$

где j соответствует скважине, помещенной в начале координат. Положим, что $Q_j = Q_1$, для любого $j \in (-\infty, \infty)$, т. е. все скважины имеют одинаковые дебиты. В силу симметрии относительно оси абсцисс можно написать

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{\infty} \exp [\alpha (x_i - x_j)] K_0 (\rho_j) &= \\ &= \exp [\alpha (x_i - x_0)] K_0 (\rho_0) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \exp [\alpha (x_i - x_j)] K_0 (\rho_j) \end{aligned}$$

Нетрудно вычислить j (значения параметров прежние), что $\rho_j = 5$ при $j = 50$. Поэтому для $j \geq 50$

$$K_0 (\rho_j) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\rho_j}} e^{-\rho_j}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sum_{j=50}^{\infty} \exp [\alpha (x_i - x_j)] K_0 (\rho_j) &= \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=50}^{\infty} \frac{\exp [\alpha (x_i - x_j) - \rho_j]}{\sqrt{\rho_j}} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=50}^{\infty} \frac{e^{-\rho_j}}{\sqrt{\rho_j}} \end{aligned}$$

Так как $\max (x_i - x_j) = -1000$ м, $\exp [\alpha (x_i - x_j)] = \exp (-\alpha \cdot 1000) \approx 1.105$ в случае двух цепочек.

Подставляя значения ρ_j , имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=50}^{\infty} \rho_j^{-1/2} e^{-\rho_j} &= \frac{e^{-5}}{\sqrt{5}} + \frac{e^{-5.1}}{\sqrt{5.1}} + \dots + \frac{e^{-6}}{\sqrt{6}} + \frac{e^{-6.1}}{\sqrt{6.1}} + \dots \\ \dots < 10.5^{-1/2} [e^{-5} + e^{-6} + \dots] &= \frac{10 e^{-5}}{\sqrt{5} (1 - e^{-1})} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum_{j=50}^{\infty} \exp [\alpha (x_i - x_j)] K_0 (\rho_j) < \sqrt{10\pi} \frac{e^{-5}}{0.632} < 0.067$$

Значит, для значений $r_j > 5$ вместо бесконечной цепочки можно рассматривать конечное число скважин.

В нашем случае достаточно ограничиться 101 скважиной, причем при вычислениях необходимо учитывать симметричность относительно центральной скважины.

Пусть даны теперь две параллельные цепочки. Расстояние между последними и между скважинами 1 км.

Аналогичную оценку можно провести и в этом случае. Число скважин удваивается. Выберем систему координат, как на фиг. 85. Пусть каждая скважина правой цепочки имеет дебит Q_1 , а левой — Q_2 . Найдем Q_1 и Q_2 при условии, что на всех скважинах через 50 лет установится понижение $S_D = 16.67 \text{ м}$.

Решая систему двух уравнений, находим

$$Q_1 = 1008 \text{ м}^3/\text{сум}, Q_2 = 549 \text{ м}^3/\text{сум}$$

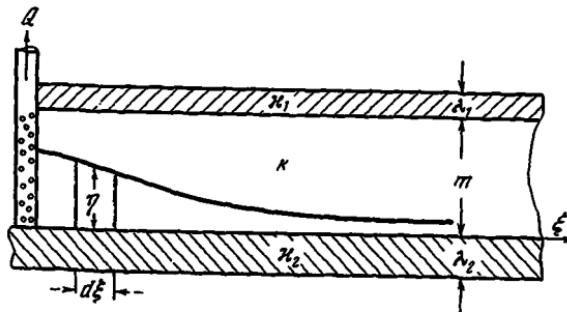
Г л а в а VI

ДВИЖЕНИЯ ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ В СЛОИСТЫХ ПЛАСТАХ

Часто бывает, что воды различных водоносных горизонтов имеют различную минерализацию. В глинистых прослойках между пластами обычно происходит скопление солей. Поэтому при откачке из одного горизонта в него могут попадать воды из двух соседних пластов или глинистых прослоек и откачиваемая вода может быть смесью вод различной концентрации. Будет ли эта смесь иметь допустимую концентрацию,— для решения этой задачи могут быть полезными исследования В. И. Пеньковского и С. Т. Рыбаковой, изложенные в последующих параграфах. Такая же методика может быть применена к задачам о закачке загрязненных вод в подземные пласти.

§ 22. Совместный приток двух жидкостей к совершенной галерее в одном напорном пласте с проницаемыми кровлями и подошвой

1°. Рассмотрим приток двух жидкостей с различными физическими свойствами к цепочке скважин в пласте со слабопроницаемыми кровлями и подошвой (фиг. 86).



Фиг. 86

Будем считать выполненными следующие предположения.

1. Величина $k \gg x_1, x_2$.
2. Существует четкая линия раздела жидкостей.

3. Напоры в выше- и нижележащих пластах постоянны

$$\begin{aligned}\bar{h}_{11}(x, y, t) &= \bar{H}_0 && \text{при } y > m + \lambda_1 \\ \bar{h}_{12}(x, y, t) &= \bar{H}_1 && \text{при } y < -\lambda_2\end{aligned}$$

4. Жидкости и пористая среда несжимаемы

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$$

5. Произведение $\rho_1 \bar{H}_0 = \rho_2 \bar{H}_1 = \text{const}$, где k , κ_1 , κ_2 — проницаемости пласта, кровли и подошвы; m , λ_1 , λ_2 — их мощности соответственно; \bar{h}_{11} , \bar{h}_{12} — напоры в пласте над поверхностью раздела жидкостей и под ней в вышестоящем и нижележащем водоносных пластах соответственно; ρ_i — плотности жидкостей; σ — пористость. Обозначая $\eta = \bar{\eta}(x, t)$ ординату линии раздела жидкостей и принимая во внимание предположения 1—5, составим уравнение баланса масс для промежутка времени от t до $t+dt$ в элементе длиной dx :

$$\begin{aligned}v_2(x, t) \bar{\eta}(x, t) dt - v_2(x+dx, t) \bar{\eta}(x+dx, t) dt + \\ + \frac{\kappa_2 \rho_2 g}{\mu_2 \lambda_2} (\bar{H}_1 - \bar{h}_{12}) dt dx = \sigma \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} dt dx \\ v_1(x, t) [m - \bar{\eta}(x, t)] dt - v_1(x+dx, t) [m - \bar{\eta}(x+dx, t)] dt + \\ + \frac{\kappa_1 \rho_1 g}{\mu_1 \lambda_1} (\bar{H}_0 - \bar{h}_{11}) dt dx = \sigma \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} (m - \eta) dt dx \\ v_1(x, t) = -\frac{k \rho_2 g}{\mu_2} \frac{\partial \bar{h}_{12}}{\partial x}, \quad v_2(x, t) = -\frac{k \rho_2 g}{\mu_2} \frac{\partial \bar{h}_{12}}{\partial x}\end{aligned}$$

Здесь μ_i — вязкости жидкостей, g — ускорение силы тяжести. Введем безразмерные величины

$$\begin{aligned}\xi = \frac{x}{m}, \quad \tau = \frac{k \rho_2 g t}{m \sigma \mu_2}, \quad \delta = \frac{\rho_2 \mu_1}{\mu_2 \rho_1}, \quad e_i = \frac{\kappa_i m}{k \lambda_i}, \quad \eta = \frac{\bar{\eta}(x, t)}{m} \\ h_{11} = \frac{\bar{h}_{11}(x, t)}{m}, \quad h_{12} = \frac{\bar{h}_{12}(x, t)}{m}, \quad H_0 = \frac{\bar{H}_0}{m}, \quad H_1 = \frac{\bar{H}_1}{m}\end{aligned}$$

Подставляя значения v_1 и v_2 и делая некоторые преобразования, получаем

$$\eta(\xi, \tau) \frac{\partial^2 h_{12}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial h_{12}}{\partial \xi} - e_2 (h_{12} - H_1) = \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \quad (22.1)$$

$$(1 - \eta) \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial h_{11}}{\partial \xi} - e_1 (h_{11} - H_0) = -\delta \frac{\partial \eta}{\partial \tau}$$

Между напорами h_{11} и h_{12} имеется соотношение

$$h_{11} = \frac{\rho_2}{\rho_1} h_{12} + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} \eta \quad (22.2)$$

Выразив во втором уравнении системы (22.1) h_{11} через (22.2) и сложив оба уравнения, после умножения первого из них на ρ_2/ρ_1 получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 h_{12}}{\partial \xi^3} - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) (h_{12} - H_1) - \varepsilon_\rho (1 - \eta) \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + \\ + \varepsilon_\mu \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_\rho \eta = \varepsilon_\mu \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (22.3)$$

$$\eta \frac{\partial^3 h_{12}}{\partial \xi^3} + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial h_{12}}{\partial \xi} - \varepsilon_2 (h_{12} - H_1) = \frac{\partial \eta}{\partial \tau}$$

Начальные и граничные условия запишем в таком виде:

$$\eta(\xi, 0) = 0$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\frac{\partial h_{12}}{\partial \xi} - \varepsilon_\mu \eta \frac{\partial h_{12}}{\partial \xi} - \varepsilon_\rho (1 - \eta) \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right] = q (1 - \varepsilon_\rho) \quad (22.4)$$

$$h_{12}(\xi, 0) = h_{12}(\infty, \tau) = H_1 = \text{const}$$

Здесь

$$\varepsilon_\rho = 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \varepsilon_\mu = 1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad q = \frac{Q \mu_1}{k m \rho_1 g}$$

Если предположить, что ε_ρ и ε_μ малы, то задачу (22.3) — (22.4) можно решать, делая разложения искомых функций в ряды по степеням этих малых параметров:

$$\eta(\xi, \tau) = \eta_0(\xi, \tau) + \varepsilon_\rho \eta_1(\xi, \tau) + \varepsilon_\mu \eta_2(\xi, \tau) + \dots$$

$$+ \varepsilon_\rho^k \eta_{2k-1}(\xi, \tau) + \varepsilon_\mu^k \eta_{2k}(\xi, \tau) + \dots$$

$$h_{12}(\xi, \tau) = h_{12}^{(0)}(\xi, \tau) + \varepsilon_\rho h_{12}^{(1)}(\xi, \tau) + \varepsilon_\mu h_{12}^{(2)}(\xi, \tau) +$$

$$+ \dots + \varepsilon_\rho^k h_{12}^{(2k-1)}(\xi, \tau) + \varepsilon_\mu^k h_{12}^{(2k)}(\xi, \tau) + \dots$$

Можно показать, что при этом для каждого члена из приведенных рядов будут получаться линейные системы с линейными условиями.

Здесь определяются решения для $\eta_0(\xi, \tau)$ и $h_{12}^{(0)}$.

Система уравнений с граничными и начальными условиями

для них будет

$$\frac{\partial^2 h_{12}^0}{\partial \xi^2} - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) (h_{12}^0 - H_1) = 0 \quad (22.5)$$

$$\eta_0 \frac{\partial^2 h_{12}^0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} \frac{\partial h_{12}^0}{\partial \xi} - \varepsilon_2 (h_{12}^0 - H_1) = \frac{\partial \eta_0}{\partial \tau}$$

$$\eta_0(\xi, 0) = 0 \quad (22.6)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial h_{12}^0}{\partial \xi} = q \quad (22.7)$$

$$h_{12}^0(\xi, 0) = h_{12}^0(\infty, \tau) = H_1 = \text{const} \quad (22.8)$$

Из первого уравнения системы (22.5) и условий (22.7) и (22.8) имеем

$$h_{12}^0(\xi, \tau) = H_1 - \frac{q}{\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} \exp(-\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \xi)$$

Уравнение для $\eta^0(\xi, \tau)$ будет

$$-\frac{1}{q} \exp(\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \xi) \frac{\partial \eta^0}{\partial \tau} - \frac{\partial \eta^0}{\partial \xi} = \sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon + \varepsilon_2} + \eta^0 \right) \quad (22.9)$$

Уравнение (22.9) легко интегрируется методом характеристик.

Имеем уравнение характеристик

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{q} \exp(\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \xi), \quad \frac{\partial \xi}{\partial s} = -1, \quad \frac{d\eta^0}{ds} = \sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - \eta^0 \right)$$

или, интегрируя, найдем

$$\xi = -s + \xi_0$$

$$\tau = \tau_0 - \frac{1}{q \sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} \exp(-\xi_0 \sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}) [\exp(-s \sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}) - 1]$$

$$\eta^0 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - \eta(0, \xi_0) \right) \exp(-s \sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2})$$

Имея в виду (22.6) и исключая параметры, окончательно получим

$$\eta^0(\xi, \tau) = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - \frac{q \tau \sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \exp(-\xi \sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2})}{1 + q \tau \sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \exp(-\xi \sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2})} \quad (22.10)$$

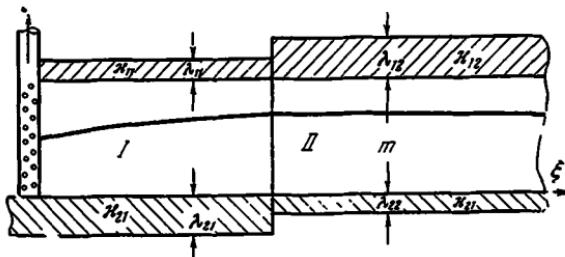
Предельным переходом при $\tau \rightarrow \infty$ из (22.10) получается стационарное движение

$$\eta^0(\xi, \infty) = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = \text{const} \quad (22.11)$$

Можно показать путем решения соответствующих стационарных уравнений, что установившееся положение линии раздела не зависит от вязкостей жидкостей и определяется исключительно геометрией пластов, т. е. что (22.11) справедливо при любом δ .

Основные моменты решения стационарных уравнений проиллюстрируем следующей задачей. Здесь будем предполагать $\rho_1 = \rho_2$.

2°. Рассмотрим напорный пласт с кровлей и подошвой в виде ступенчатой функции, как изображено на фиг. 87.



Фиг. 87

Для областей I и 2 имеем соответственно

$$\frac{d^2 h_1}{d\xi^2} - \omega_1^2 (h_1 - H) = 0, \quad \frac{d^2 h_2}{d\xi^2} - \omega_2^2 (h_2 - H) = 0 \quad (22.12)$$

$$\omega_1^2 = v_{11} + \varepsilon_{12}, \quad \omega_2^2 = \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{x_{ij} m}{k \lambda_{ij}} \quad (i, j = 1, 2)$$

h_1, h_2 — напоры в областях I и 2 соответственно. Напор в нижележащем водоносных пластах примем равным $H = \text{const}$.

Решением (22.12) будет

$$h_1 = a_1 e^{-\omega_1 \xi} + a_2 e^{\omega_1 \xi} + H, \quad h_2 = b_1 e^{-\omega_2 \xi} + b_2 e^{\omega_2 \xi} + H$$

Удовлетворяя граничным условиям при $\xi = 0$ и $\xi = l$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{dh_1}{d\xi} = q, \quad h_1(l) = h_2(l), \quad k \frac{dh_1}{d\xi} \Big|_{\xi=l} = k \frac{dh_2}{d\xi} \Big|_{\xi=l}$$

получаем

$$a_1 = -\frac{qe^{\omega_1 l}(1+\delta_2)}{2\omega_1 [\operatorname{sh}(\omega_1 l) + \delta_2 \operatorname{ch}(\omega_1 l)]} \quad \left(\delta_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)$$

$$a_2 = \frac{qe^{-\omega_1 l}(\delta_2 - 1)}{2\omega_1 [\operatorname{sh}(\omega_1 l) + \delta_2 \operatorname{ch}(\omega_1 l)]}$$

$$b_1 = -\frac{qe^{\omega_2 l}}{\omega_1 [\operatorname{sh}(\omega_1 l) + \delta_2 \operatorname{ch}(\omega_1 l)]}$$

Линии поверхностей раздела должны быть решениями уравнений

$$\eta_1 \frac{d^2 h_1}{d\xi^2} + \frac{d\eta_1}{d\xi} \frac{dh_1}{d\xi} - \varepsilon_{12} (h_1 - H) = 0 \quad (22.13)$$

$$\eta_2 \frac{d^2 h_2}{d\xi^2} + \frac{d\eta_2}{d\xi} \frac{dh_2}{d\xi} - \varepsilon_{23} (h_2 - H) = 0 \quad (22.14)$$

Умножая (22.13) и (22.14) на $d\xi$ и интегрируя в соответствующих промежутках, пользуясь условием ограниченности $\eta_2(\infty) < \infty$ и непрерывностью линии в точке $\xi = l$, будем иметь

$$\eta_2(l) = \frac{\varepsilon_{23}}{\omega_2^2} = \frac{\varepsilon_{23}}{\varepsilon_{21} + \varepsilon_{23}} = \eta_1(l) \quad (22.15)$$

$$\eta(0) = \frac{\varepsilon_{12}}{\omega_1^2} + \frac{\delta_2}{\operatorname{sh}(\omega_1 l) + \delta_2 \operatorname{ch}(\omega_1 l)} \left[\frac{\varepsilon_{23}}{\omega_2^2} - \frac{\varepsilon_{12}}{\omega_1^2} \right] \quad (22.16)$$

Формулы (22.15) и (22.16) дают начальные данные для интегрирования уравнений (22.13) и (22.14). Для простоты примем

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{23} = 0, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_0$$

Тогда

$$\delta_2 = \omega_2/\omega_1 = 1, \quad \omega_l = \omega_0, \quad a_2 = 0, \quad \eta_2 \equiv 0$$

и решением (22.13) будет

$$\eta_1(\xi) = 1 - \exp[-\omega_0(l - \xi)]$$

Заметим, что при решении стационарных задач, подобных рассматриваемой, иногда можно пользоваться более грубым приближением. А именно, приняв линейное распределение вертикальных скоростей по мощности пласта, можно иногда считать, что линией раздела жидкостей будет линия нулевых вертикальных скоростей.

Это предположение эквивалентно выбрасыванию в уравнении для $\eta(\xi)$ второго члена; после чего получим

$$\eta(\xi) = \varepsilon_{22} \frac{h - H}{d^2 h / d \xi^2} \quad (22.17)$$

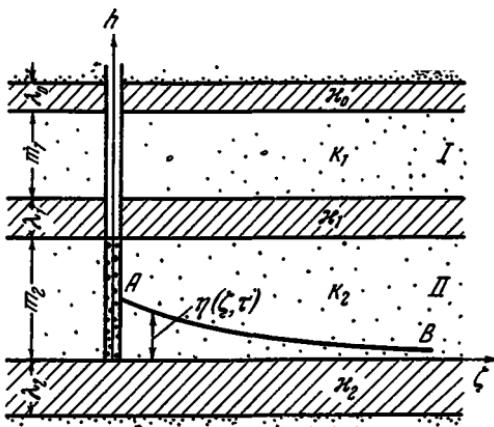
Рассмотренная задача может послужить иллюстрацией целесообразности сохранения в ряде случаев в уравнении для η упомянутого нелинейного члена, поскольку непосредственное применение формулы (22.17) дает в рассмотренном случае физически абсурдный результат:

$$\eta(\xi) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \xi \leq l \\ 0, & l < \xi < \infty \end{cases}$$

§ 23. О движении двух жидкостей в слоистых грунтах

В предыдущем параграфе рассмотрена приближенная постановка задачи о совместном притоке двух жидкостей к галерее в одном папорном пласте с плохопроницаемыми кровлей и подошвой.

Здесь дается решение осесимметрической и плоской задач для двух пластов, разделенных слабопроницаемыми прослойками (фиг. 88).



Фиг. 88

Примем следующие обозначения: $k_1, k_2, \kappa_0, \kappa_1, \kappa_2$ — проницаемости соответствующих пластов и прослоек, $m_1, m_2, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ — их мощности, σ_1, σ_2 — пористости пластов I и II, $\bar{\eta}(r, t)$ — поверхность раздела жидкостей, $\bar{h}_1, \bar{h}_{21}, \bar{h}_{22}$ — напоры в пласте I, над поверхностью раздела и под ней в пласте II соответственно, \bar{H}_0 и \bar{H}_3 — постоянные напоры в самом верхнем и самом нижнем пластах.

Предположим, что имеют место такие условия:

1) величина $k_1 \gg \kappa_1$ ($i=1, 2; j=0, 1, 2$);

2) величина $\rho_1 H_0 = \rho_2 H_3 = \text{const}$;

3) в начальный момент поверхность раздела жидкостей проходила по AB ;

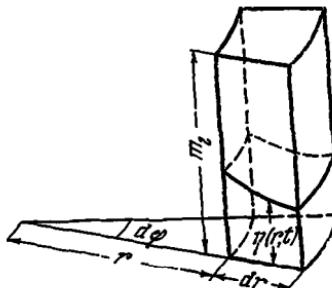
4) жидкости и пористая среда несжимаемы.

Кроме того, при выполнении условия 1 можно принять, что напоры $\bar{h}_1, \bar{h}_{21}, \bar{h}_{22}$ не изменяются по высоте, т. е. будут функциями двух переменных r, t .

Пусть далее жидкость с плотностью ρ_1 и вязкостью μ_1 находилась над линией AB , жидкость с параметрами ρ_2, μ_2 — под ней. При откачке из пласта II вследствие взаимодействия пластов начнется подъем поверхности раздела.

1. Осьсимметрическое движение.

Рассмотрим элемент пласта II (фиг. 89) и составим уравнения баланса массы обеих жидкостей за время dt . Имсем



Фиг. 89

$$\begin{aligned}
 & -\frac{k_2 \rho_2 g}{\mu_2} \frac{\partial \bar{h}_{22}(r, t)}{\partial r} \bar{\eta}(r, t) r d\varphi dt + \\
 & + \frac{k_2 \rho_2 g}{\mu_2} \frac{\partial \bar{h}_{22}(r + dr, t)}{\partial r} \bar{\eta}(r + dr, t) (r + dr) d\varphi dt + \\
 & + \frac{\kappa_2 \rho_2 g}{\mu_2 \lambda_2} [\bar{H}_3 - \bar{h}_{22}(r, t)] r d\varphi dr dt = \frac{\partial}{\partial t} (\sigma_2 \bar{\eta}) r dr d\varphi dt \\
 & - \frac{k_2 \rho_1 g}{\mu_1} [m_2 - \bar{\eta}(r, t)] \frac{\partial \bar{h}_{21}(r, t)}{\partial r} r d\varphi dt + \\
 & + \frac{k_2 \rho_1 g}{\mu_1} \frac{\partial \bar{h}_{21}(r + dr, t)}{\partial r} [m_2 - \bar{\eta}(r + dr, t)] (r + dr) d\varphi dt + \\
 & + \frac{\kappa_1 \rho_1 g}{\mu_1 \lambda_1} (\bar{h}_1 - \bar{h}_{21}) r dr d\varphi dt = \frac{\partial}{\partial t} [\sigma_2 (m_2 - \bar{\eta})] r dr d\varphi dt
 \end{aligned}$$

Учитывая сделанные предположения и пренебрегая малыми высшего порядка, обычным путем получаем

$$\sigma_2 \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} = \frac{k_2 \rho_2 g}{\mu_2} \bar{\eta} \Delta \bar{h}_{22} + \frac{k_2 \rho_2 g}{\mu_2} \frac{\partial \bar{h}_{22}}{\partial r} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial r} - \frac{\kappa_2 \rho_2 g}{\mu_2 \lambda_2} (\bar{h}_{22} - \bar{H}_3)$$

$$-\sigma_2 \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} = \frac{k_2 \rho_1 g}{\mu_1} (m_2 - \bar{\eta}) \Delta \bar{h}_{21} - \frac{k_2 \rho_1 g}{\mu_1} \frac{\partial \bar{h}_{21}}{\partial r} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial r} - \frac{\kappa_1 \rho_1 g}{\mu_1 \lambda_1} (\bar{h}_{21} - \bar{h}_1)$$

К этой системе следует присоединить еще уравнение баланса в элементе пласта I

$$0 = \frac{k_1 \rho_1 g}{\mu_1} m_1 \Delta \bar{h}_1 - \frac{\kappa_0 \rho_1 g}{\mu_1 \lambda_0} (\bar{h}_1 - \bar{H}_0) - \frac{\kappa_1 \rho_1 g}{\mu_1 \lambda_1} (\bar{h}_1 - \bar{h}_{21})$$

и соотношение между \bar{h}_{21} и \bar{h}_{22} (условие на границе раздела)

$$\bar{h}_{21} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \bar{h}_{22} + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} \bar{\eta}$$

Здесь и выше

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

Границные и начальные условия запишем так:

$$\bar{h}_1(\infty, t) = \bar{H}_0, \bar{h}_{22}(\infty, t) = \bar{H}_3$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(2\pi m_1 \frac{k_1 \rho_1 g}{\mu_1} r \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial r} \right) = 0$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[2\pi \frac{k_2 \rho_2 g}{\mu_2} r \bar{\eta}(r, t) \frac{\partial \bar{h}_{22}}{\partial r} + 2\pi \frac{k_2 \rho_1 g}{\mu_1} r (m_2 - \bar{\eta}) \frac{\partial \bar{h}_{21}}{\partial r} \right] = Q$$

Вводя безразмерные переменные

$$\xi = \frac{r}{m_2}, \quad \tau = \frac{k_2 \rho_2 g}{m_2 \sigma_2 \mu_2} t, \quad \varepsilon_i = \frac{m_2 \kappa_i}{k_2 \lambda_i}, \quad \beta = \frac{k_1 m_1}{k_2 m_2}$$

$$q = \frac{Q \mu_2}{2\pi k_2 m_2^2 \rho_2 g}, \quad \varepsilon_\rho = 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \varepsilon_\mu = 1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

$$h_1 = \frac{\bar{h}_1}{m_2}, \quad h_{21} = \frac{\bar{h}_{21}}{m_2}, \quad h_{22} = \frac{\bar{h}_{22}}{m_2}, \quad H_0 = \frac{\bar{H}_0}{m_2}, \quad H_3 = \frac{\bar{H}_3}{m_2}, \quad \eta = \frac{\bar{\eta}}{m_2}$$

и делая некоторые преобразования, рассматриваемую задачу сведем к решению системы уравнений

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \eta \Delta h_{22} + \frac{\partial h_{22}}{\partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} - \varepsilon_2 (h_{22} - H_3) \quad (23.1)$$

$$\varepsilon_\mu \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \Delta h_{22} - \varepsilon_1 (h_{22} - h_1) - \varepsilon_2 (h_{22} - H_3) -$$

$$- \varepsilon_\rho \left[(1 - \eta) \Delta \eta + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^2 + \varepsilon_1 \eta \right]$$

$$0 = (1 - \varepsilon_\rho) [\beta \Delta h_1 - \varepsilon_0 (h_1 - H_0)] - \varepsilon_1 (h_1 - h_{22} + \varepsilon_\rho \eta)$$

при условиях

$$\begin{aligned} h_1(\infty, \tau) &= H_0, \quad h_{22}(\infty, \tau) = H_3, \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} \left(\xi \frac{\partial h_1}{\partial \xi} \right) = 0 \\ \lim \left[(1 - \varepsilon_\mu) \xi \eta \frac{\partial h_{22}}{\partial \xi} + \xi (1 - \eta) \left(\frac{\partial h_{22}}{\partial \xi} - \varepsilon_\rho \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) \right] &= q (1 - \varepsilon_\mu) \\ \eta(0, \xi) &= 0 \end{aligned} \quad (23.2)$$

Если мы теперь предположим, что ε_ρ , ε_μ — малые величины то задачу (23.1) — (23.2) можно решать, делая разложение искомых функций в ряды по этим малым параметрам. Можно показать, что при этом для каждого члена упомянутых рядов будут получаться расщепляющиеся линейные системы с линейными условиями.

Примем в дальнейшем

$$\beta = 1, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon \quad (23.3)$$

Тогда первыми членами в разложениях для $h_1(\xi, \tau)$ и $h_{22}(\xi, \tau)$ будут

$$h_1 = H_3 - \frac{1}{2}q [K_0(\omega_2 \xi) - K_0(\omega_1 \xi)] \quad (\omega_1^2 = 3\varepsilon)$$

$$h_{22} = H_3 - \frac{1}{2}q [K_0(\omega_2 \xi) + K_0(\omega_1 \xi)] \quad (\omega_2^2 = \varepsilon)$$

$K_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка, и первый член в разложении для $\eta(\xi, \tau)$ определяется из уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial \tau_1} - [K_1(\zeta) + \sqrt{3} K_1(\sqrt{3} \zeta)] \frac{\partial \eta}{\partial \xi} &= \\ = - [3K_0(\sqrt{3} \zeta) + K_0(\zeta)] \eta + K_0(\zeta) + K_0(\sqrt{3} \zeta) & \end{aligned} \quad (23.4)$$

и условия

$$\eta(\zeta, 0) = 0 \quad (23.5)$$

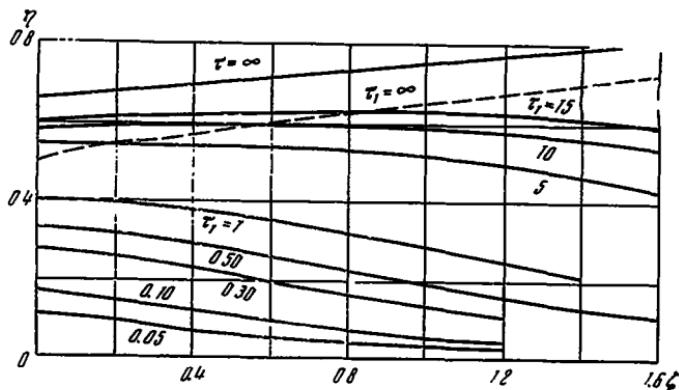
где

$$\zeta = \omega_2 \xi, \quad \tau_1 = \frac{1}{2}q \varepsilon \tau, \quad K_1(x) = -K_0'(x)$$

Решение задачи Коши (23.4) — (23.5) осуществлено численно методом характеристик на электронной вычислительной машине М-20. Результат представлен на фиг. 90 для различных τ_1 . Если принять, например, $m_2 = 20 \text{ м}$, $\sigma = 0.3$, $k_2 Q_2 g / \mu_2 = 10 \text{ м/сут}$, $\lambda = 5 \text{ м}$, $x_2 Q_2 g / \mu = 10^{-2} \text{ м/сут}$, $Q = 2500 \text{ м}^3/\text{сут}$, то значениям $\tau_1 = 0.05, 0.1, 0.3$ будут соответствовать значения $t = 150, 300, 900 \text{ сут}$.

Уравнение для установившейся поверхности раздела будет иметь вид

$$\eta \Delta h_{22} + \frac{dh_{22}}{d\xi} \frac{d\eta}{d\xi} - \varepsilon_2 (h_{22} - H_3) = 0 \quad (23.6)$$



Фиг. 90

Для получения граничного условия умножим (23.6) на ξ и проинтегрируем почленно от 0 до ∞ .

При условии ограниченности $\eta(\xi)$ при $\xi \rightarrow \infty$ будем иметь

$$\eta(0) = \varepsilon_2 \int_0^\infty \xi (H_3 - h_{23}) d\xi / \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\xi \frac{dh_{23}}{d\xi} \right) \quad (23.7)$$

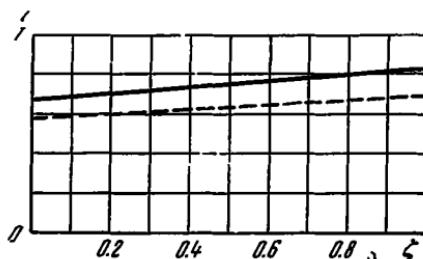
В случае (23.3) получим

$$\eta(0) = \frac{\varepsilon}{2} \int_0^\infty \xi [K_0(\omega_2 \xi) + K_0(\omega_1 \xi)] d\xi = \frac{\varepsilon}{2}$$

При этом следует воспользоваться равенством [61]

$$\int_0^\infty x K_0(x) dx = 1$$

На фиг. 90 представлена линия раздела для случая установившегося движения ($\tau_1 = \infty$), полученная с помощью численно-



Фиг. 91

го интегрирования системы (23.6) — (23.7) методом Рунге — Кутта на электронной вычислительной машине М-20.

Если принять поверхность раздела за геометрическое место точек, где вертикальная скорость равна нулю, то в (23.6) следует отбросить второй член и мы получим формулу

$$\eta(\xi) = \frac{K_0(\xi) + K_0(\sqrt{3}\xi)}{3K_0(\sqrt{3}\xi) + K_0(\xi)} \quad (23.8)$$

Кривая, построенная по уравнению (23.8), изображена на фиг. 90 пунктирной линией.

2. Плоское движение. В случае плоского установившегося движения система уравнений будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} \frac{d^3 h_{22}}{d\xi^3} - \varepsilon_1(h_{22} - h_1) - \varepsilon_2(h_{22} - H_3) &= 0 \\ (1 - \varepsilon_\rho) \left[\beta \frac{d^3 h_1}{d\xi^3} - \varepsilon_0(h_1 - h_0) \right] - \varepsilon_1(h_1 - h_{22} - \varepsilon_\rho \eta) &= 0 \quad (23.9) \\ \eta \frac{d^3 h_{22}}{d\xi^3} + \frac{dh_{22}}{d\xi} \frac{d\eta}{d\xi} - \varepsilon_2(h_{22} - H_3) &= 0 \end{aligned}$$

а система граничных условий

$$\begin{aligned} h_1(\infty) &= H_0, \quad h_{22}(\infty) = H_3, \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} \left(\frac{dh_1}{d\xi} \right) = 0 \\ \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[(1 - \varepsilon_\mu) \eta \frac{dh_{22}}{d\xi} + (1 - \eta) \left(\frac{dh_{22}}{d\xi} - \varepsilon_\rho \frac{d\eta}{d\xi} \right) \right] &= (1 - \varepsilon_\mu) q \quad (23.10) \\ \eta(0) &= \varepsilon_2 \int_0^\infty (H_3 - h_{22}) d\xi : \left[\lim_{\xi \rightarrow 0} \left(\frac{dh_{22}}{d\xi} \right) \right] \end{aligned}$$

Здесь

$$q = \frac{Q}{k_2 m_2 p_2 g}, \quad \xi = \frac{x}{m_2}$$

В случае

$$\beta_1 = 1, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon, \quad \varepsilon_\rho = 0, \quad \varepsilon_\mu = 0,$$

определяя $h_{22}(\xi)$ и $h_1(\xi)$ из (23.9) и (23.10), получаем для η следующее уравнение:

$$(1 + e^{-\alpha\xi}) \frac{\partial\eta}{\partial\xi} - (1 + \sqrt{3} e^{-\alpha\xi}) \eta = -1 - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\alpha\xi} \quad (23.11)$$

где

$$\zeta = \omega_2 \xi, \quad \alpha = \sqrt{3} - 1$$

Решение уравнения (23.11) при выполнении последнего условия (23.10) имеет вид

$$\eta(\zeta) = \frac{\exp [(\sqrt{3} - 1)\zeta] + 1/3}{\exp [(\sqrt{3} - 1)\zeta] + 1} \quad (23.12)$$

На графике фиг. 91 представлены кривая (23.12) — сплошная линия и кривая, получаемая в случае отбрасывания второго члена в третьем уравнении (23.9), — пунктирная линия.

Г л а в а VII

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ

§ 24. Истолкование отдельных членов уравнения Буссинеска

В довольно общем виде уравнение слабоизменяющегося неустановившегося движения воды в верхнем водоносном горизонте можно написать, несколько изменяя запись уравнения (6.5):

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(kM \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(kM \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{k_0}{M_0} (h - H) + w \quad (24.1)$$

Здесь в общем случае

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma(x, y), \quad k = k(x, y), \quad M = h - h_0(x, y), \quad k_0 = k_0(x, y) \\ M_0 &= M_0(x, y) \end{aligned}$$

В тех случаях, когда известно распределение функции $h(x, y, t)$, $M(x, y, t)$ является также известной функцией. Если известно среднее по времени значение $\bar{h}(x, y) = h_{cp}(x, y, t)$, считают мощность занятого водой слоя функцией $M(x, y)$ только от координат. Для напорного пласта $M(x, y)$ — известная функция. Произведение kM называют проводимостью пласта.

Введем обозначения:

$$k(x, y)M(x, y) = \alpha(x, y), \quad k_0/M_0 = \beta(x, y) \quad (24.2)$$

и перепишем уравнение (24.1)

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \beta(h - H) + w \quad (24.3)$$

Этим уравнением можно пользоваться для определения величины w , если известны значения $h(x, y, t)$ и величины $\sigma(x, y)$, $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ и H . А именно

$$w = A + B + C \quad (24.4)$$

где

$$A = \frac{\partial \sigma h}{\partial t}, \quad B = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial h}{\partial y} \right), \quad C = \beta (h - H)$$
(24.5)

Слагаемое A характеризует изменение уровня (или напора) со временем, B рассматривают как боковую приточность. Действительно, для расходов через боковые грани призмы с основанием $\Delta x = \Delta y = 1$ имеем

$$q_x = -kM \frac{\partial h}{\partial x} = -\alpha \frac{\partial h}{\partial x}, \quad q_y = -\alpha \frac{\partial h}{\partial y}$$

поэтому

$$B = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y}$$

Наконец, C определяет переток из нижележащего пласта, а в случае напорного пласта может определять и переток из двух соседних пластов.

§ 25. Уравнение установившегося движения

Для установившегося движения $A=0$. Если, кроме того, и $C=0$, то для w имеем

$$w = B = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial h}{\partial y} \right)$$
(25.1)

Там, где $w=0$, получаем для $h(x, y)$ уравнение эллиптического типа

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha(x, y) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\alpha(x, y) \frac{\partial h}{\partial y} \right] = 0$$
(25.2)

представляющее обобщение уравнения Лапласа и обладающее некоторыми свойствами, аналогичными свойствам последнего.

Так, можно найти такую функцию $\psi(x, y)$, что

$$\alpha \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \alpha \frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$
(25.3)

Линии $\psi(x, y) = \text{const}$ являются линиями тока рассматриваемого течения, функция $\psi(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

Далее, линии тока ортогональны линиям равного напора (гидроизогипсам) $h(x, y) = \text{const}$. Действительно, умножая первое из уравнений (25.3) на $\partial\psi/\partial x$, второе — на $\partial\psi/\partial y$ и складывая, найдем

$$\alpha(x, y) \left(\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0$$

Так как $\alpha(x, y)$, вообще говоря, больше нуля, то выражение в скобках равно нулю, а это есть условие ортогональности линий $h(x, y) = \text{const}$ и $\psi(x, y) = \text{const}$.

Однако, в то время как для $\alpha = \text{const}$ эта сетка может быть выбрана изотермической (квадратной), в общем случае, при $\alpha(x, y) \neq \text{const}$, она не будет квадратной: можно построить квадраты между двумя соседними изолиниями, но продолжения этих изолиний уже дадут прямоугольники (конечно, речь идет о криволинейных «прямоугольниках» и «квадратах»,— лишь бесконечно малые четырехугольники являются, с точностью до бесконечно малых высшего порядка, прямоугольниками).

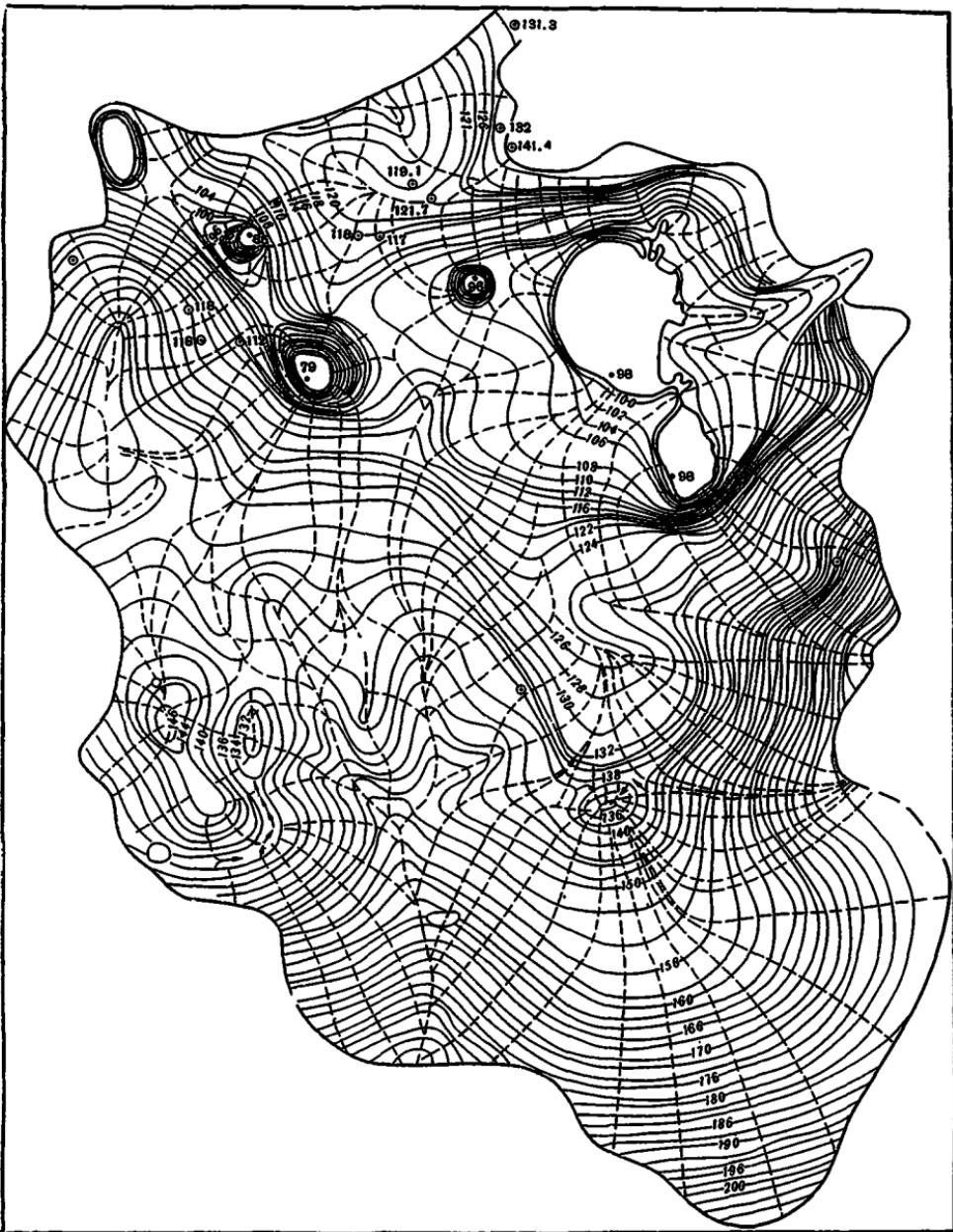
Отсюда следует, что в период установившегося движения подземных вод, при отсутствии испарения или инфильтрации, по виду гидроизогипс и ортогональных к ним линий тока можно иметь некоторое качественное суждение об однородности или неоднородности величины $\alpha(x, y)$.

Другое свойство решения уравнения Лапласа, или, иначе, гармонической функции, распространяется на решения уравнений эллиптического типа (при $\alpha(x, y)$, не обращающемся в нуль): это принцип максимума, согласно которому гармоническая функция не может принимать наименьшее и наибольшее значения внутри области своего определения, т. е. экстремальные значения ее имеют место на границе области. Поэтому если мы видим замкнутые гидроизогипсы, которые окружают точку с максимальным или минимальным значением $h(x, y)$, то должны иметься какие-то источники питания или разгрузки грунтового потока, т. е. здесь должно иметь место неоднородное уравнение (25.1). Если замкнутые гидроизогипсы окружают озера, то имеем многосвязную область, и задачу можно свести к отысканию фиктивных источников и стоков внутри замкнутых гидроизогипс.

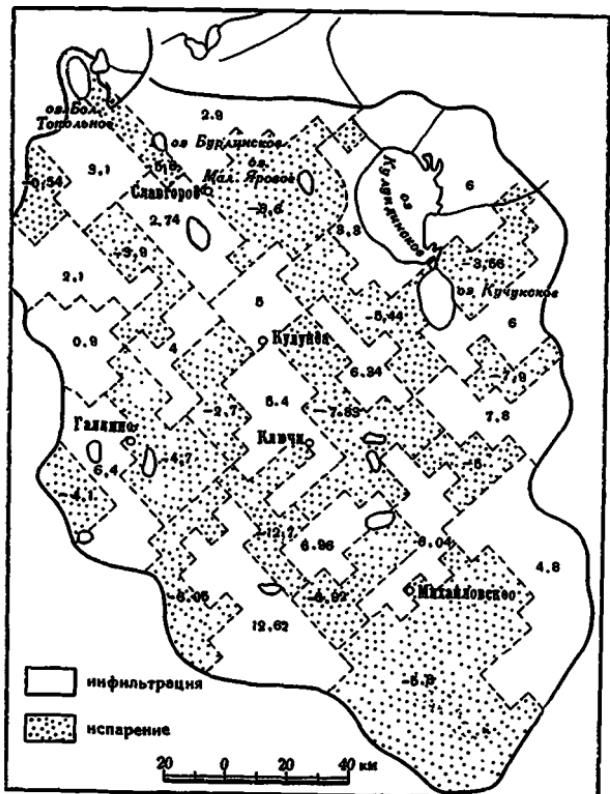
Допустим, что в некоторой области, для которой мы хотим определить w , для слабоизменяющейся проводимости kM мы нашли се среднее значение $\tilde{kM} = \tilde{\alpha}$. Тогда для w можно написать

$$w = -\tilde{kM} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) = -\tilde{\alpha} \nabla^2 h \quad (25.4)$$

Для слабоизменяющейся свободной поверхности $z = h(x, y)$ оператор Лапласа определяет среднюю кривизну, а его знак



Фиг. 92. Гидрологипсы центральной части Кулундинской степи (обработка
М. А. Саттарова карты Е. В. Михайловой)



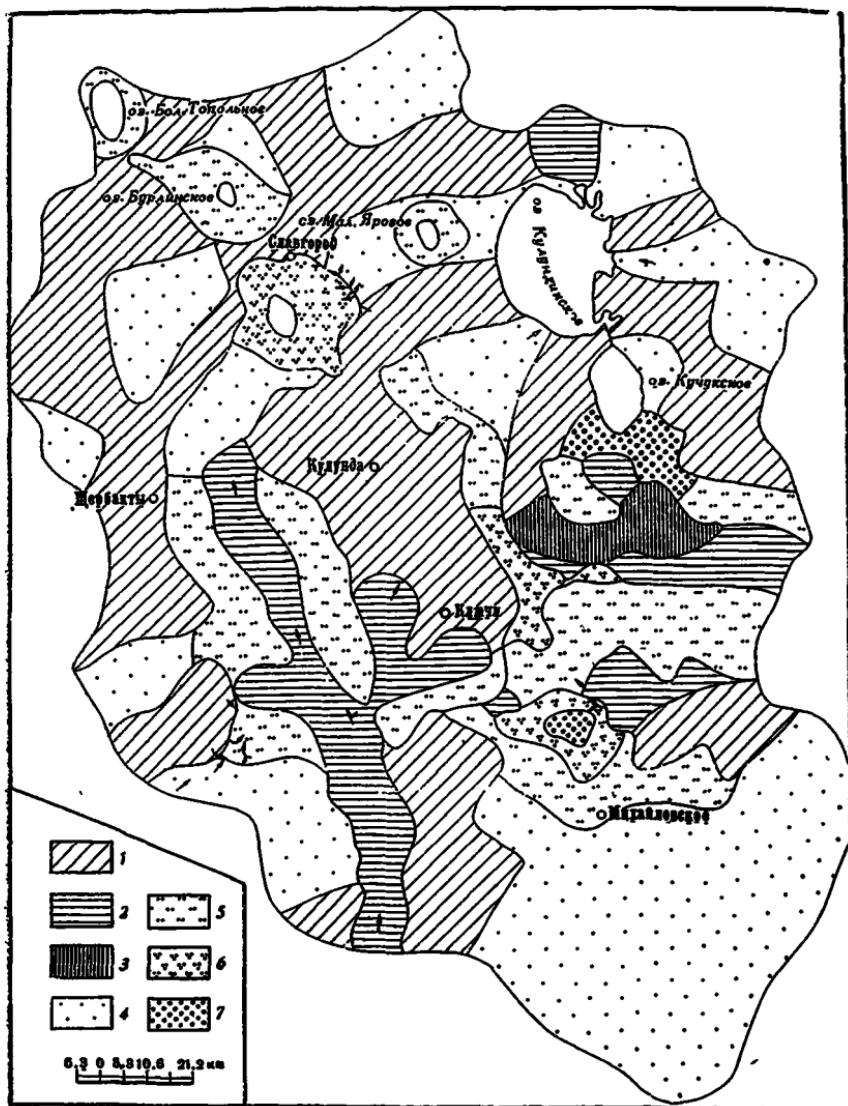
Фиг. 93. Схематическая карта распределения инфильтрации и испарения Кулундинской степи

характеризует направление выпуклости поверхности: если $\nabla^2 h > 0$, то поверхность вогнута, если $\nabla^2 h < 0$, то она выпукла. В первом случае $w < 0$, т. е. имеем испарение, во втором $w > 0$, т. е. имеем инфильтрацию. Была взята карта гидроизогипс центральной части Кулундинской степи, построенная для лета 1951 г. (фиг. 92). По ней С. Н. Муминов [62] подсчитал, заменяя производные отношениями разностей, значения величины — $kM\nabla^2 h$ для различных квадратов, на которые была разбита вся площадь. Для этого пришлось предварительно проинтерполировать значения h . Далее были выделены площади с одним знаком w и для них были вычислены средние значения w (они показаны на фиг. 93, причем условно даны в $мм/год$).

Аналогичную работу провел М. А. Саттаров [63], пользуясь другой методикой вычисления оператора Лапласа. А именно,



Внимание!
страница
временно отсутствует.
Приносим извинения.



Фиг. 95. Схематическая карта областей инфильтрации и испарения Кулундинской степи

Инфильтрация (в мм): 1 — от 0 до 5; 2 — от 5 до 10; 3 — от 10 до 15. Испарение (в мм): 4 — от 0 до 5, 5 — от 5 до 10; 6 — от 10 до 15; 7 — от 15 до 20

Результаты расчетов показаны на фиг. 95. Сопоставление карт фиг. 93 и 95 с картой глубин залегания грунтовых вод показывает, что в основном отрицательным значением w отвечают области близкого залегания последних. Это можно объяснить тем, что поверхность грунтовых вод в общем следует рельефу местности, изменяясь, однако, более плавно.

Таким образом, были вычислены не значения инфильтрации, а значения лишь одной ее составляющей B , характеризующей боковую приточность. Но так как летом изменения w по времени неизначительны, то можно считать, что полученные величины в какой-то мере характеризуют инфильтрацию. Результаты расчетов не дают ответа на то, откуда приходит инфильтрация или куда идет «испарение», — может быть, это перетоки в другие горизонты.

Интересно отметить в западной части карты убывание положительных значений w с юга на север от 12.6 и 6.4 до 2.9—3.1 и возрастание абсолютных значений отрицательных w в более узких пределах — от 5.3 до 8.6. Наличие областей $w=12.6$ гидрогеолог Е. М. Никифоров связывает с наличием областей подпитывания из Казахстана.

§ 26. Определение величины инфильтрации и испарения

1. Определение величины инфильтрации в природных условиях. Этот вопрос является сложным, так как, даже если бывает известно количество выпадающих осадков или объем воды, получаемой от таяния снега, возникают трудности в определении той части влаги, которая идет на сток и испарение.

Величину инфильтрации обычно определяют по уравнению Буссинеска, заменяя его уравнением в конечных разностях. Если известен напор h как функция координат и времени, то инфильтрация w определяется через первые и вторые производные (или разности), что представляет операцию очень неточную.

Результат должен улучшиться, если представить h в аналитической форме, например в виде суммы тригонометрических функций, полиномов и т. д.

2. Уравнение в конечных разностях. При расчетах обычно заменяют дифференциальное уравнение (6.6) уравнением в конечных разностях. Для одномерного случая, когда h зависит только от x и t , уравнение принимает вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{a}{2} \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} - b(h - h_0) + \varepsilon, \quad a = \frac{k}{\sigma}, \quad b = \frac{k_0}{M_0 \sigma}, \quad \varepsilon = \frac{w}{\sigma} \quad (26.1)$$

Если имеются наблюдения по трем скважинам, лежащим на одной прямой, то можно написать уравнение параболы, проходящей через три точки

$$(x_1, h_1), \quad (x_2, h_2), \quad (x_3, h_3)$$

пользуясь, например, формулой Лагранжа

$$h^2 = h_1^2 \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{Ll_1} - h_2^2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{l_1 l_3} + h_3^2 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{Ll_2}$$

Здесь

$$x_2 - x_1 = l_1, \quad x_3 - x_2 = l_2, \quad x_3 - x_1 = L = l_1 + l_2$$

Беря вторую производную от h по x^2 , найдем

$$\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} = 2 \left(\frac{h_1^2}{Ll_1} - \frac{h_2^2}{l_1 l_2} + \frac{h_3^2}{Ll_2} \right)$$

Если скважины равноотстоящие, т. е. $l_1 = l_2 = L/2$, то формула упрощается

$$\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} = \frac{h_1^2 - 2h_2^2 + h_3^2}{l^2} \quad (26.2)$$

Что касается производной по времени, то ее обычно заменяют просто отношением приращений

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h'' - h'}{t'' - t'}$$

Тогда можно написать формулу для инфильтрационного питания

$$w = \sigma \frac{h'' - h'}{t'' - t'} - k \left(\frac{h_1^2}{Ll_1} - \frac{h_2^2}{l_1 l_2} + \frac{h_3^2}{Ll_2} \right) + \frac{k_0}{M_0} (h_2 - h_0) \quad (26.3)$$

3. Пример расчета. В районе опытного орошаемого участка были взяты результаты наблюдений за уровнями воды в скважинах, расположенных по направлению движения общего грунтового потока, т. е. по малой оси скважин (см. введение, фиг. 4), для периода с 12/XII 1961 г. по 12/XII 1963 г. (фиг. 96). В верхнем водоносном горизонте были взяты скважины № 2, 1 и 39 (на фиг. 96 они помечены знаками $n=1, n, n+1$ соответственно), во втором горизонте — скважины № 41, 18 и 40. Расстояния между расчетными скважинами в верхнем горизонте по направлению потока составляют 1000 и 1600 м, в нижнем горизонте расстояния между скважинами равны 2000 м.

Вычисления и интерпретация результатов проведены Е. В. Щербань [6].

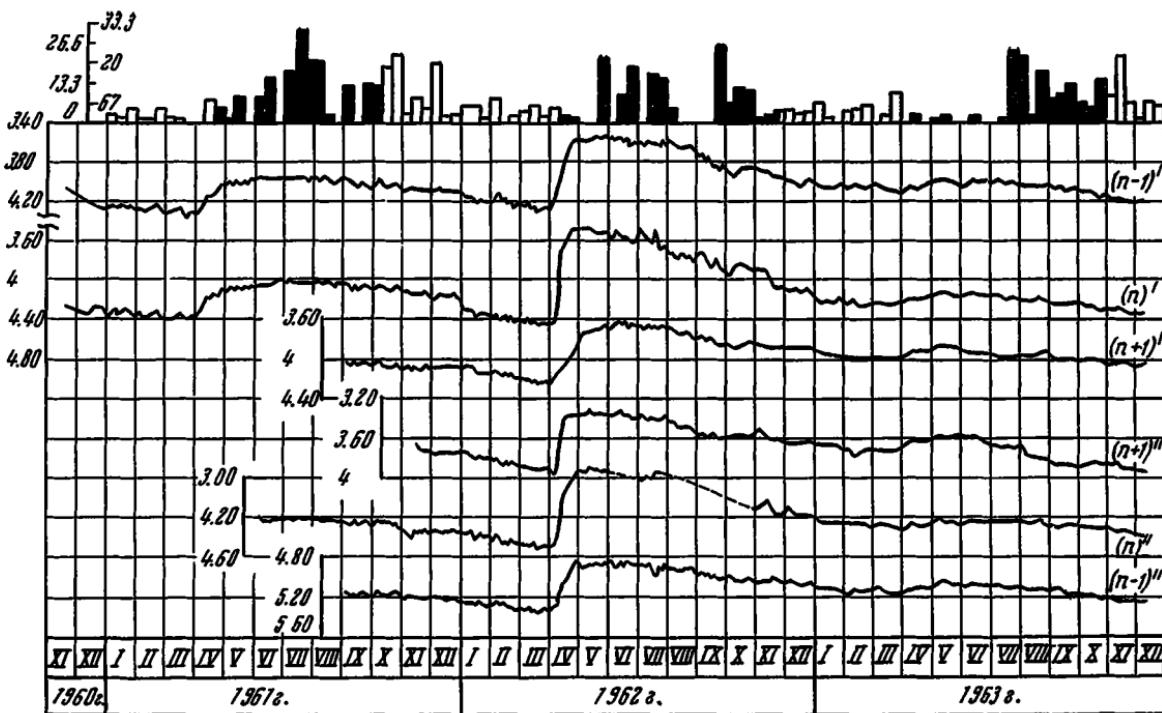
Прежде всего была сделана попытка оценить величину связи водоносных горизонтов через слабопроницаемый прослой. Для этого была использована система уравнений

$$\sigma_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} = 1/2 a_1 \frac{\partial^2 h_1^2}{\partial x^2} - b (h_1 - h_2) + w \quad (26.4)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial h_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 h_2^2}{\partial x^2} - b (h_2 - h_1) \quad (26.5)$$

где a_1 и a_2 — коэффициенты уровнев- и пьезопроводности соответственно верхнего и нижнего водоносных горизонтов; $b = k_0/M_0$ — коэффициент связи водоносных горизонтов, величина которого необходимо определить.

В течение всего времени наблюдений, за исключением периодов весеннего снеготаяния, напор нижнего водоносного горизонта превышал напор верхнего, а весной 1963 г., когда весенний подъем уровня грунтовых вод был незначительным, напор нижнего водоносного горизонта превышал напор



Фиг. 96. Уровни в шести скважинах по наблюдениям Кулундинской гидрогеологической станции

верхнего также и весной. Следовательно, происходило подпитывание верхнего водоносного горизонта водами нижнего

Расстояния между расчетными скважинами для нижнего водоносного горизонта равны 2000 м. Коэффициент фильтрации этого слоя принят, по данным откачки, 20 м/сут, средняя мощность — 9 м.

Подставляя в уравнение (26.5) ряд значений h_1 и h_2 для различных моментов времени, получили значение коэффициента связи водоносных горизонтов b в пределах от $2 \cdot 10^{-5}$ до $12,6 \cdot 10^{-5}$ 1/сут, в среднем $7 \cdot 10^{-5}$ 1/сут.

Мощность слабопроницаемого прослоя составляет 3–5 м. Значит, коэффициент фильтрации этого прослоя равен $(2 \div 3,5) \cdot 10^{-4}$ м/сутки.

Пренебрегая членом, содержащим b ($h - h_0$), получаем обычные формулы для определения ε с помощью конечных разностей.

Баланс грунтовых вод и соотношение его элементов за два года представлены в табл. 25.

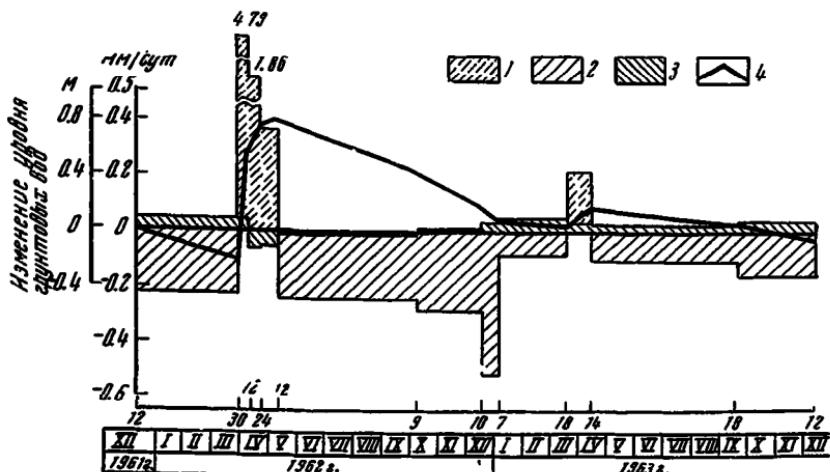
Таблица 25

Баланс грунтовых вод на Ключевском опытном орошаемом участке

Элементы баланса	За период с 12/XII 1961 г. по 18/XII 1962 г.	За период с 18/XII 1962 г. по 12/XII 1963 г.
Приходные		
Инфильтрация атмосферных осадков, мм	91.2	10.3
То же, % от суммы приходных элементов	94.3	50.2
Накопление воды за счет подземного притока, мм	5.5	10.2
То же, % от суммы приходных элементов	5.7	49.8
Расходные		
Испарение, мм	80.8	42.9
То же, % от суммы приходных элементов	83.6	209.3
Убыль воды за счет подземного оттока, мм	3.3	—
То же, % от суммы приходных элементов	2.4	—
Баланс за год, мм	+12.6	-22,4
Изменение уровня грунтовых вод Δh , м (по расчету)	+0.13	-0.22
Изменение уровня грунтовых вод Δh , м (по центральной скважине)	+0.14	-0.23

График динамики элементов баланса грунтовых вод (фиг. 97) дает наглядное представление о соотношении элементов баланса грунтовых вод и процессах, определяющих их режим [64].

Основными элементами баланса грунтовых вод являются инфильтрация и испарение. Они обусловливают колебания уровня в годовом и многолетнем разрезах. Приток и отток грунтовых вод играют незначительную роль.



Фиг. 97 Элементы баланса грунтовых вод за 1962—1963 гг.

Инфильтрация происходит в конце марта, апреле и начале мая, т. е. в период весеннего снеготаяния. Это вызывает весенний подъем уровня.

Величина питания грунтовых вод зависит от количества и, главным образом, распределения атмосферных осадков в течение года. В питании грунтовых вод участвуют в основном талые воды и осадки, выпавшие в период снеготаяния. Общая сумма осадков за год с декабря 1961 г. по декабрь 1962 г. равнялась 203,4 мм, т. е. была даже несколько ниже, чем за этот же период в 1962/63 г. (206,3 мм). Однако в 1963 г. по всем скважинам наблюдалось общее снижение уровня грунтовых вод по сравнению с 1962 г. Это объясняется тем, что распределение осадков по сезонам в эти годы было различным. В зимний и весенний периоды 1962/63 г. выпало только 48,1 мм — на 48,2 мм меньше, чем за этот же период в 1961/62 г. Летние осадки расходуются на испарение и в питании грунтовых вод не участвуют.

Таким образом, величина инфильтрации зависит в первую очередь от количества осадков, выпавших в зимний и весенний периоды (приблизительно с 1/XI по 1/VI). Но в 1962 г. величина инфильтрации почти равна количеству осадков, выпавших в зимне-весенний период. Это указывает на то, что на инфильтрацию влияют осадки, выпавшие в осенний период, когда испарение с поверхности почвы уменьшается, и осадки повышают влажность почвы. Повышенное осеннеевидное увлажнение почвы уменьшает при прочих равных условиях величину весенней инфильтрации.

Величина инфильтрации в 1962 г. равна 91.2 мм, в 1963 г.—10.3 мм, что составляет 95 и 21% от суммы зимне-весенних осадков. От годовой суммы осадков предшествующих лет это составит соответственно 28 и 5%. В среднем для двух лет величина инфильтрации составила 70% от суммы зимне-весенних осадков или 23% от годовой суммы осадков.

Испарение грунтовых вод на участке не наблюдается только в период инфильтрации (см. фиг. 97). Даже в зимние месяцы отмечается испарение, что происходит, по-видимому, за счет миграции влаги в зоне аэрации. В это время температура грунтов у уровня грунтовых вод бывает более высокой, чем у поверхности земли, и пары воды передвигаются снизу вверх.

Величина испарения в 1962 г. равна 80.8 мм, в 1963 г.—42.9 мм, что составило соответственно 23 и 25% от сумм осадков предшествующих лет или 84 и 89% от сумм зимне-весенних осадков. Как видно, величина испарения составляет более постоянную часть факторов, определяющих величину приходных элементов баланса грунтовых вод.

Величина испарения в многолетнем разрезе несколько превышает инфильтрацию, однако имеющийся в приходной части баланса подземный приток, хотя и незначительный, покрывает дефицит испарения. Равенство в многолетнем разрезе пополнения запасов грунтовых вод их расходу подтверждается и сравнительным постоянством глубин залегания грунтовых вод по многолетним наблюдениям.

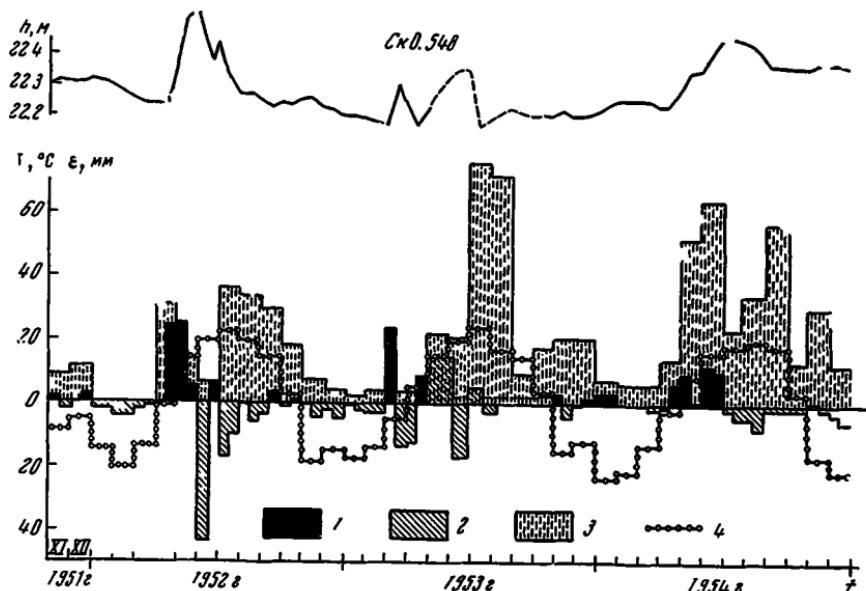
Величины разности бокового притока и оттока незначительны. Приток в большинстве случаев преобладает над оттоком. Только в марте 1962 г., в период инфильтрации, отток был больше. Это, очевидно, можно объяснить быстрым и неравномерным по площади подъемом уровня грунтовых вод, обусловившим повышенный отток из расчетной призмы.

В 1962 г. баланс грунтовых вод был положительным и равнялся 12.7 мм. При этом годовое повышение уровня грунтовых вод составило 0.14 м. В 1963 г. баланс был отрицательный и равнялся — 22.4 мм, а уровень грунтовых вод снизился на 0.23 м.

На основании изложенного можно сделать следующие выводы:

1. Основными элементами баланса грунтовых вод на Ключевском опытном орошаемом участке являются инфильтрация и испарение.

2. Величина разности бокового притока и оттока незначительна. В основном преобладает приток, но в годы, неблагоприятные для пополнения запасов грунтовых вод, доля притока в приходных элементах баланса может повышаться до 50% при полном преобладании его над оттоком.



3. Величина инфильтрации зависит от осадков, выпавших в холодный период (с ноября по май включительно), а также от осеннего увлажнения почв.

4. Расход грунтовых вод падает главным образом путем испарения, которое наблюдается в течение всего года, за исключением периода инфильтрации.

5. Колебания уровня грунтовых вод происходят как в годовом, так и многолетнем разрезах. В маловодные годы происходит сработка запасов грунтовых вод, накопленных во влажные годы. В итоге в многолетнем разрезе глубина залегания грунтовых вод отличается сравнительным постоянством, что позволяет допустить равенство приходной и расходной частей их среднемноголетнего баланса.

6. В течение всего года, за исключением периода весенней инфильтрации, если она достаточно интенсивна, происходит подпитывание верхнего водоносного горизонта нижним не только через «окна» в разделяющих слабопроницаемых слоях, но и непосредственно через их толщу. Величина подпитывания верхнего водоносного горизонта нижним через слабопроницаемый прослой имеет порядок 10^{-2} мм/сут.

4. Второй пример. М. А. Саттаровыч был более подробно исследован случай, рассмотренный ранее Д. И. Абрамовичем [1]. Были использованы наблюдения за 1952—1954 гг. по трем скважинам (№ 127, 548 и 128), заложенным в Ключевском районе Алтайского края, у села Зеленая Поляна. На фиг. 98 представлены результаты вычислений инфильтрации и испарения, а также метеорологические данные. При вычислениях было принято $k=20 \text{ м/сут}, \sigma=0.2$.

§ 27. К определению параметров пласта методом модулирующих функций

Этот метод развивается В. Б. Георгиевским [85—87]. Здесь приводится дополнение к одному из вариантов метода, рассмотренному С. Н. Муминовым.

Дано уравнение (см. § 6)

$$\sigma \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{2} \left(\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0}{M_0} (h - H) + w \quad (27.1)$$

в котором будем считать величины σ, k, k_0, M постоянными для рассматриваемой прямоугольной области, ограниченной прямыми $x=0, x=a, y=0, y=b$. Предположим, что известны значения $h(x, y, t)$ в достаточно большом числе точек этого прямоугольника на протяжении промежутка времени T .

Умножим уравнение (27.1) почленно на функции $\varphi(x), \chi(y), \psi(t)$, вид которых будет определен далее, и проинтегрируем в пределах $(0, a), (0, b), (0, T)$ соответственно. Интегрирование по частям дает

$$\int_0^T \psi(t) \frac{\partial h}{\partial t} dt = h\psi(t) \Big|_0^T - \int_0^T \psi'(t) h(x, y, t) dt$$

Для того чтобы выделенная часть обращалась в нуль, выберем $\psi(t)$ так, чтобы $\psi(0)=0$ и $\psi(T)=0$. Например, можно взять $\psi(t)=\sin(\pi t/T)$ или $t(T-t)$. Проще же всего принять $\psi(t)=1$. В результате получим коэффициент при σ равным в первом случае

$$M = - \iint_0^a \int_0^b \int_0^T \psi'(t) \varphi(x) \chi(y) h(x, y, t) dx dy dt$$

$$M = \iint_0^a \int_0^b [h(x, y, T) - h(x, y, 0)] \varphi(x) \chi(y) dx dy \quad \text{для } \psi(t) = 1$$

Выбрав $\varphi(x)$ так, чтобы сама она и ее первая производная обращались в нуль на концах промежутка $(0, a)$, получим,

интегрируя по частям:

$$\int_0^a \varphi(x) \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} dx - \int_0^a h^2(x, y, t) \varphi''(x) dx$$

Если $\chi(0) = \chi(b) = 0$ и $\chi'(0) = \chi'(b) = 0$, то имеем

$$\int_0^b \chi(y) \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2} dy = \int_0^b h^2(x, y, t) \chi''(y) dy$$

Для коэффициента N при $k/2$ получим

$$N = \int_0^a \int_0^b \int_0^T [\varphi''(x) \chi(y) + \chi''(y) \varphi(x)] h^2(x, y, t) dx dy dt$$

Вводя еще обозначения

$$P = \int_0^a \int_0^b \int_0^T \varphi(x) \chi(y) h(x, y, t) dx dy dt$$

$$Q = \int_0^a \int_0^b \int_0^T \varphi(x) \chi(y) dx dy dt$$

а также полагая

$$\frac{k}{2\sigma} = \kappa, \quad \frac{k_0}{M_0 \sigma} = \lambda, \quad \frac{w}{\sigma} = \mu$$

можем написать уравнение, связывающее параметры κ, λ, μ :

$$M = \kappa N - (P - HQ) \lambda + Q \mu$$

Выбрав $\varphi(x), \chi(y)$ тремя различными способами, можем получить систему трех уравнений для определения κ, λ, μ . Мы будем брать $\psi(t) = 1$, а в качестве $\varphi(x)$ и $\chi(y)$ полиномы вида

$$\varphi(x) = x^{m_1} (a - x)^{m_2}, \quad \chi(y) = y^{n_1} (b - y)^{n_2}$$

где m_1, m_2, n_1, n_2 — произвольные целые числа, большие единицы.

Предположим, что $h(x, y, t)$ представлена полиномом относительно x и y с коэффициентами, зависящими от времени:

$$h(x, y, t) = \sum_{l,k} A_{lk}(t) x^l y^k$$

Тогда величины M, N, P, Q будут содержать множители вида

$$I_{lk} = \int_0^a x^{l+m_1} (a-x)^{m_2} dx \int_0^b y^{k+n_1} (b-y)^{n_2} dy$$

$$L_{lk} = \int_0^a \int_0^b x^l y^k [\varphi''(x) \chi(y) + \varphi(x) \chi''(y)] dx dy$$

Принимая во внимание равенство (r, s — целые)

$$\int_0^a x^r (a-x)^s dx = a^{r+s+1} \frac{r! s!}{(r+s+1)!}$$

пайдем

$$I_{lk} = a^{l+m_1+m_2+1} \frac{(l+m_1)! m_2!}{(i+m_1+m_2+1)!} b^{k+n_1+n_2+1} \frac{(k+n_1)! n_2!}{(k+n_1+n_2+1)!}$$

$$L_{lk} = i(i-1) a^{l+m_1+m_2-1} \frac{(i+m_1-2)! m_2!}{(i+m_1+m_2-1)!} b^{k+n_1+n_2+1} \frac{(k+n_1)! n_2!}{(k+n_1+n_2+1)!} + \\ + k(k-1) a^{l+m_1+m_2+1} \frac{(i+m_1)! m_2!}{(i+m_1+m_2+1)!} b^{k+n_1+n_2-1} \frac{(k+n_1-2)! n_2!}{(k+n_1+n_2-1)!}$$

В частности,

$$I_{00} = a^{m_1+m_2+1} \frac{m_1! m_2!}{(m_1+m_2+1)!} b^{n_1+n_2+1} \frac{n_1! n_2!}{(n_1+n_2+1)!}$$

Если $\sum A_{ik} x^i y^k$ — полином второй степени, то понадобятся только числа $I_{00}, I_{10}, I_{01}, I_{11}, I_{20}, I_{02}$. Их отношения к I_{00} имеют простой вид

$$j_{10} = \frac{m_1+1}{m_1+m_2+2} a, \quad j_{01} = \frac{n_1+1}{n_1+n_2+2} b$$

$$j_{11} = \frac{m_1+1}{m_1+m_2+2} \frac{n_1+1}{n_1+n_2+2} ab$$

$$j_{20} = \frac{(m_1+1)(m_1+2)}{(m_1+m_2+2)(m_1+m_2+3)} a^2, \quad j_{02} = \frac{(n_1+1)(n_1+2)}{(n_1+n_2+2)(n_1+n_2+3)} b^2$$

$$(j_{ik} = I_{ik} : I_{00})$$

Что касается величин L_{ik} , то, очевидно, что $L_{00} = L_{10} = L_{01} = L_{11} = 0$, $L_{20} = L_{02} = 2I_{00}$, так что

$$l_{20} = L_{20} : I_{00} = 2, \quad l_{02} = L_{02} : I_{00} = 2$$

Выпишем еще выражение для $l_{ik} = L_{ik} : I_{00}$:

$$l_{ik} = \frac{(m_1 + m_2 + 1)! (n_1 + n_2 + 1)!}{m_1! n_1!} a^{i-2} b^{k-2} \times \\ \times \left\{ i(i-1) \frac{(i+m_1-2)! (k+m_1)! b^2}{(i+m_1+m_2-1)! (k+n_1+n_2+1)!} + \right. \\ \left. + k(k-1) \frac{(i+m_1)! (k+n_1-2)! a^2}{(i+m_1+m_2+1)! (k+n_1+n_2-1)!} \right\}$$

В качестве первой системы коэффициентов j_{ik} выберем такие, для которых $m_1 = m_2 = n_1 = n_2 = 2$. Обозначим их j'_{ik} . Для того чтобы следующая система чисел j''_{ik} достаточно сильно отличалась от j'_{ik} , возьмем $m_1 = n_1 = 2$, $m_2 = n_2 = 8$. Для чисел j'''_{ik} примем $m_1 = n_1 = 2$, $m_2 = n_2 = -20$. Получим такую таблицу:

i, k	00	10	01	11	20	02
j'_{ik}	1	$\frac{a}{2}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{ab}{4}$	$\frac{a^2}{3}$	$\frac{b^2}{3}$
j''_{ik}	1	$\frac{a}{2}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{ab}{4}$	$\frac{2a^2}{7}$	$\frac{2b^2}{7}$
j'''_{ik}	1	$\frac{a}{4}$	$\frac{b}{4}$	$\frac{ab}{16}$	$\frac{a^2}{13}$	$\frac{b^2}{13}$
		$\frac{a}{8}$	$\frac{b}{8}$	$\frac{ab}{64}$	$\frac{a^2}{50}$	$\frac{b^2}{50}$

Если полином $\sum A_{ik}(t) x^i y^k$ подобран достаточно хорошо, то можно не заботиться о том, чтобы под знаком интеграла не оставалось вторых производных по координатам, т. е. чтобы функции $\varphi(x)$ и $\chi(y)$ и их производные обращались в нуль на границах области. Можно, например, взять $\varphi = x^m$, $\chi = y^n$, где m и n — произвольные неотрицательные числа.

Для возможности интегрирования по времени должны быть определены коэффициенты $A_{ik}(t)$. Интеграл левой части уравнения (27.1) всегда приводится к виду

$$\int_0^T \frac{\partial h}{\partial t} dt = h(x, y, T) - h(x, y, 0) = \sum_{i,k} [A_{ik}(T) - A_{ik}(0)] x^i y^k$$

Для вычисления интегралов по времени от членов, стоящих в правой части уравнения (27.1), можно выбрать $A_{ik}(t)$ в виде

тригонометрических полиномов. На участках медленного изменения уровней иногда можно подобрать линейные функции от t :

$$A_{lk}(t) = a_{lk} + b_{lk}t$$

Тогда

$$\int_0^T (a_{lk} + b_{lk}t) dt = T(a_{lk} + \frac{1}{2}Tb_{lk}) = TA_{lk}(\frac{1}{2}T) = T\bar{A}_{lk}$$

$$\int_0^T h(x, y, t) dt = Th(x, y, \frac{1}{2}T)$$

§ 28. К численному расчету изменений свободной поверхности двумерного потока грунтовых вод

Дифференциальное уравнение движения грунтовых вод с учетом перетоков из нижележащего горизонта, а также с учетом инфильтрации или испарения со свободной поверхности грунтового потока имеет вид (см. гл. II, уравнение (6.5)).

$$\sigma \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k(h - h_0) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k(h - h_0) \frac{\partial h}{\partial y} \right] - \frac{k_0}{M_0} (h - H) + w(x, y, t) \quad (28.1)$$

Здесь $w(x, y, t)$ — функция, учитывающая разность между инфильтрацией и испарением. Коэффициенты фильтрации $k(x, y)$ и $k_0(x, y)$ хорошо- и слабопроницаемых слоев, а также водоотдача $\sigma(x, y)$ и мощность слабопроницаемого слоя $M_0(x, y)$ являются функциями координат. H — напор нижнего водоносного горизонта.

Введем обозначения:

$$\frac{k_0}{M_0} = \beta(x, y), \quad H \frac{k_0}{M_0} + w(x, y, t) = f(x, y, t)$$

и заменим переменные x, y на x_1, x_2 . Получим уравнение

$$\sigma(x_1, x_2) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ k(x_1, x_2) [h - h_0(x_1, x_2)] \frac{\partial h}{\partial x_1} \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ k(x_1, x_2) [h - h_0(x_1, x_2)] \frac{\partial h}{\partial x_2} \right\} - \beta(x_1, x_2) h + f(x_1, x_2, t) \quad (28.2)$$

Будем интегрировать уравнение (28.2) при некоторых начальном и граничных условиях с помощью разностных методов [68], основанных на замене дифференциальных уравнений аппрокси-

мирующей системой разностных уравнений. Значения неизвестных вычисляются при этом на дискретном множестве точек, называемом расчетной сеткой. Вместе с системой разностных уравнений расчетная сетка образует разностную схему.

Предварительно укажем на связь между двумя основными понятиями теории сеточных методов — *устойчивостью и сходимостью разностных схем* [60].

Вопросы сходимости точных решений разностных уравнений к решениям дифференциальных тесно связаны с вопросом устойчивости разностных методов. Локально решение дифференциального уравнения равно решению аппроксимирующего разностного уравнения плюс ошибка аппроксимации. В случае неустойчивости разностного метода эта ошибка будет увеличиваться с уменьшением шагов и решение разностного уравнения не будет, вообще говоря, сходиться к решению дифференциального. В случае устойчивого разностного метода ошибки будут затухать при вычислениях, решение разностного уравнения будет близко к решению дифференциального при малых шагах и будет стремиться к нему при неограниченном измельчении сетки.

Обычно при численном решении задач математической физики дифференциальное уравнение аппроксимируется разностным, затем погрешность аппроксимации отбрасывается и разыскивается решение полученной алгебраической сеточной задачи. Проблема сходимости такой задачи заключается в нахождении условий, при которых погрешность аппроксимации стремится к нулю.

При решении сеточной задачи возникают ошибки округления, поэтому фактическое решение сеточной задачи будет отличаться от ее точного решения. Проблема устойчивости сеточного уравнения (разностной схемы) заключается в определении условий, при которых числовая погрешность при возрастании числа шагов по времени стремится к нулю равномерно для всех точек сетки пространственных переменных. Окончательная погрешность, возникающая при численном решении задачи, представляет сумму погрешностей аппроксимации и округления. Однако в устойчивых разностных схемах погрешности округления практически равны нулю.

Заметим, что разностная схема называется явной в том случае, когда в каждом из уравнений, связывающих значения искомой функции на n -м и $n+1$ -м слоях, входит лишь одна точка $n+1$ -го слоя (не считая точек, входящих в граничные условия). При этом значения искомой функции $h(x_1, x_2, t)$ в каждой точке слоя $n+1$ можно вычислять независимо от значений функций в других точках слоя. В противном случае, когда для определения значений в слое $n+1$ мы получаем систему уравнений, связывающих значения h в точках этого слоя, разностная схема называется неявной. Ясно, что явные схемы имеют преимущество в следствие своей простоты, однако они часто оказываются неудобными из-за ограничений, которые приходится накладывать на соотношения шагов расчетной сетки по различным переменным. Эти ограничения вызываются требованием устойчивости. Они влекут необходимость большого числа шагов при вычислениях.

Будем рассматривать уравнение (28.2) при заданных начальном и граничном условиях

$$h(x_1, x_2, 0) = H_0(x_1, x_2), \quad h(x_1, x_2, t)|_{\Gamma} = H_1(x_1, x_2, t) \quad (28.3)$$

В частности, H_0 и H_1 могут быть заданы как совокупность значений на дискретном множестве точек области определения x_1, x_2 . Здесь Γ — граница области G произвольного вида.

Задачу (28.2) — (28.3) будем решать неявным конечно-разностным методом, известным как *локально-одномерный метод переменных направлений* [70]. Выбираем шаги $\Delta x_1, \Delta x_2$ по пространственным координатам x_1, x_2 и строим прямоугольную сетку, покрывающую область G . Таким образом, заменяем заданную область сеточной областью со ступенчатой границей, целиком лежащей внутри G . Сетка по времени вводится разбиением отрезка $0 \leq t \leq T$ на k равных частей точками $t_j = j\tau, j=0,1,\dots,k$.

Согласно локально-одномерному методу двумерное уравнение (28.2) решается по этапам путем введения промежуточного (дробного) шага по времени $t_{j+1/2} = t_j + 0,5\tau$. В каждый из моментов времени $t_{j+1/2}, t_{j+1}$ решается одномерное дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}\sigma \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left[k(h - h_0) \frac{\partial h}{\partial x_1} \right] + \varphi_1 & t = t_{j+1/2} \\ \sigma \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left[k(h - h_0) \frac{\partial h}{\partial x_2} \right] + \varphi_2 & t = t_{j+1}\end{aligned}\quad (28.4)$$

где φ_1 и φ_2 — функции, связанные с h и f условием

$$\varphi_1 + \varphi_2 = -\beta(x_1, x_2) h - f(x_1, x_2, t)$$

Чтобы найти решение уравнения (28.4) внутри области G , в промежутке $t_j \leq t \leq t_{j+1/2}$, используем начальные данные при $t = t_j$ и в качестве граничных условий берем значения граничной функции в точках пересечения прямых, параллельных координатной оси Ox_1 с границей области Γ . Для промежутка $(t_{j+1/2}, t_{j+1})$ берем начальные данные для $t_{j+1/2}$ и граничные условия — значения граничной функции в точках пересечения прямых, параллельных оси Ox_2 , с Γ .

Обозначив решение конечно-разностного аналога уравнения (28.2) через

$$y_{i_1 i_2}^{j+1/2} = y[i_1 \Delta x_1, i_2 \Delta x_2, (j + 0,5\alpha)\tau] \quad (\alpha = 1,2)$$

напишем локально-одномерную схему второго порядка точности относительно Δx_α ($\alpha=1,2$) для системы (28.4)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau} \sigma(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) (y_{i_1 i_2}^{j+1/2} - y_{i_1 i_2}^j) &= \Lambda_1 y_{i_1 i_2}^{j+1/2} + \varphi_1 \\ \frac{1}{\tau} \sigma(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) (y_{i_1 i_2}^{j+1} - y_{i_1 i_2}^{j+1/2}) &= \Lambda_2 y_{i_1 i_2}^{j+1} + \varphi_2\end{aligned}\quad (28.5)$$

где

$$\varphi_1 = -\frac{1}{2} \left[\beta(x_1^{(l_1)}, x_2^{(l_2)}) y_{l_1 l_2}^{j+1} - f(x_1^{(l_1)}, x_2^{(l_2)}, t_{j+1/2}) \right]$$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{2} \left[\beta(x_1^{(l_1)}, x_2^{(l_2)}) y_{l_1 l_2}^{j+1} - f(x_1^{(l_1)}, x_2^{(l_2)}, t_{j+1}) \right]$$

Операторы Λ_1 и Λ_2 имеют вид

$$\begin{aligned} \Lambda_1 y_{l_1 l_2}^{j+1/2} &= \frac{k \left(x_1^{(l_1)} + \frac{\Delta x_1}{2}, x_2^{(l_2)} \right)}{(\Delta x_1)^2} (y_{l_1+1/2, l_2}^{j+1/2} - y_{l_1 l_2}^{j+1/2}) \times \\ &\quad \times \left[y_{l_1+1/2, l_2}^{j+1/2} - h_0 \left(x_1^{(l_1)} + \frac{\Delta x_1}{2}, x_2^{(l_2)} \right) \right] - \\ &- \frac{k \left(x_1^{(l_1)} - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2^{(l_2)} \right)}{(\Delta x_1)^2} (y_{l_1 l_2}^{j+1/2} - y_{l_1-1/2, l_2}^{j+1/2}) \left[y_{l_1-1/2, l_2}^{j+1/2} - h_0 \left(x_1^{(l_1)} - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2^{(l_2)} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_2 y_{l_1 l_2}^{j+1} &= \frac{k \left(x_1^{(l_1)}, x_2^{(l_2)} + \frac{\Delta x_2}{2} \right)}{(\Delta x_2)^2} (y_{l_1, l_2+1}^{j+1} - y_{l_1 l_2}^{j+1}) \times \\ &\quad \times \left[y_{l_1, l_2+1/2}^{j+1} - h_0 \left(x_1^{(l_1)}, x_2^{(l_2)} + \frac{\Delta x_2}{2} \right) \right] - \\ &- \frac{k \left(x_1^{(l_1)}, x_2^{(l_2)} - \frac{\Delta x_2}{2} \right)}{(\Delta x_2)^2} (y_{l_1, l_2}^{j+1} - y_{l_1, l_2-1}^{j+1}) \left[y_{l_1, l_2-1/2}^{j+1} - h_0 \left(x_1^{(l_1)}, x_2^{(l_2)} - \frac{\Delta x_2}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

Приведем расчетный вид схемы (23.5) после подстановки выражений Λ_1 , Λ_2 , φ_1 , φ_2 и замены стоящих в квадратных скобках величин $y_{l_1 \pm 1/2, l_2}$, $y_{l_1, l_2 \pm 1/2}$ с дробными нижними индексами соответствующими полусуммами y с целыми индексами

$$y_{l_1+1/2, l_2}^{j+1/2} \approx \frac{1}{2} (\tilde{y}_{l_1 l_2}^{j+1/2} + \tilde{y}_{l_1+1, l_2}^{j+1/2}), \dots$$

(назначение знака \sim выяснится ниже):

$$A_{l_1} y_{l_1+1/2, l_2}^{j+1/2} + B_{l_1} y_{l_1 l_2}^{j+1/2} + C_{l_1} y_{l_1-1/2, l_2}^{j+1/2} = D_{l_1} \quad (28.6)$$

$$A_{l_2} y_{l_1, l_2+1}^{j+1} + B_{l_2} y_{l_1 l_2}^{j+1} + C_{l_2} y_{l_1, l_2-1}^{j+1} = D_{l_2}$$

Коэффициенты этих уравнений имеют следующий вид:

$$A_{l_1} = \frac{k \left(x_1^{(l_1)} - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2^{(l_2)} \right)}{(\Delta x_1)^2} \left[\frac{\tilde{y}_{l_1 l_2}^{j+1/2} + \tilde{y}_{l_1+1, l_2}^{j+1/2}}{2} - h_0 \left(x_1^{(l_1)} + \frac{\Delta x_1}{2}, x_2^{(l_2)} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 C_{l_1} &= \frac{k \left(x_1^{(l_1)} - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2^{(l_2)} \right)}{(\Delta x_1)^2} \left[\frac{\tilde{y}_{l_1-1, l_2}^{j+1/2} + \tilde{y}_{l_1 l_2}^{j+1/2}}{2} - h_0 \left(x_1^{(l_1)} - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2^{(l_2)} \right) \right] \\
 B_{l_1} &= -A_{l_1} - C_{l_1} - \frac{1}{2} \beta \left(x_1^{(l_1)}, x_2^{(l_2)} \right) - \frac{\sigma(x_1^{(l_1)}, x_2^{(l_2)})}{\tau} \\
 D_{l_1} &= -\frac{\sigma(x_1^{(l_1)}, x_2^{(l_2)})}{\tau} y_{l_1 l_2}^j - \frac{1}{2} f \left(x_1^{(l_1)}, x_2^{(l_2)}, t_{j+1/2} \right)
 \end{aligned} \tag{28.7}$$

Аналогичные выражения можно написать для коэффициентов уравнения (2) системы (28.6):

$$\begin{aligned}
 A_{l_2} &= \frac{k \left(x_1^{(l_1)}, x_2^{(l_2)} + \frac{\Delta x_2}{2} \right)}{(\Delta x_2)^2} \left[\frac{\tilde{y}_{l_1 l_2}^{j+1} + \tilde{y}_{l_1, l_2+1}^{j+1}}{2} - h_0 \left(x_1^{(l_1)}, x_2^{(l_2)} + \frac{\Delta x_2}{2} \right) \right] \\
 C_{l_2} &= \frac{k \left(x_1^{(l_1)}, x_2^{(l_2)} - \frac{\Delta x_2}{2} \right)}{(\Delta x_2)^2} \left[\frac{\tilde{y}_{l_1, l_2-1}^{j+1} + \tilde{y}_{l_1 l_2}^{j+1}}{2} - h_0 \left(x_1^{(l_1)}, x_2^{(l_2)} - \frac{\Delta x_2}{2} \right) \right] \\
 B_{l_2} &= -A_{l_2} - C_{l_2} - \frac{1}{2} \beta \left(x_1^{(l_1)}, x_2^{(l_2)} \right) - \frac{\sigma(x_1^{(l_1)}, x_2^{(l_2)})}{\tau} \\
 D_{l_2} &= -\frac{\sigma(x_1^{(l_1)}, x_2^{(l_2)})}{\tau} y_{l_1 l_2}^{j+1/2} - \frac{1}{2} f \left(x_1^{(l_1)}, x_2^{(l_2)}, t_{j+1} \right)
 \end{aligned}$$

В точках границы положим

$$y_{l_1 l_2}^{j+a/2}|_{\Gamma} = \lambda_{l_1 l_2}^{j+a/2} \quad (a=1,2)$$

Начальное условие запишем в виде

$$\overset{\circ}{y}_{l_1 l_2} = \mu_{l_1 l_2}$$

Значение $y_{l_1 l_2}$ в граничном узле сетки определяется при помощи линейной интерполяции по значению граничной функции в точке пересечения прямой, параллельной координатной оси Ox_a и значению $y_{l_1 l_2}$ во внутреннем узле сетки, соседнем с этим граничным узлом.

Нелинейность уравнений расчетной схемы (28.6) возникает за счет коэффициентов, зависящих от искомой функции (они отмечены у нас знаком \sim). Можно избежать решения нелинейных уравнений, если вести расчет методом итераций, выбирая в качестве начального приближения значения $\tilde{y}_{l_1 l_2}^{j+a/2}$ значение с предыдущего слоя по времени, т. е. при $t = t_{j+(a-1)/2}$: по $y_{l_1 l_2}^{j+(a-1)/2}$ вычисляется первое приближение $y_{l_1 l_2}^{j+a/2}$, затем первое приближение засыпается в коэффициенты

и вычисляется второе приближение искомой функции и т. д. Счет ведется до тех пор, пока разность значений $y_{l_1 l_2}^{j+1/2}$ для двух последовательных приближений не станет по абсолютному значению меньше некоторого заданного положительного числа — точности счета.

При счете каждой итерации имеем одномерную задачу (в одном из пространственных направлений) для трехточечного разностного уравнения на отрезке, концы которого принадлежат границе области. В общем случае, когда прямые, параллельные координатным осям, пересекают границу области более чем в двух точках, для каждого отрезка прямой решается своя краевая задача. Вычисление итераций можно производить с помощью формул прогонки (понятие о способе прогонки приводится в книге [69]). Выпишем формулы прогонки для первого из уравнений системы (28.6).

Обозначим через N число внутренних узлов сетки, принадлежащих отрезку прямой, для которого решается краевая задача. Для $i_1=2, 3, \dots, N-1$ коэффициенты вычисляются по формулам (28.7). При $i_1=1$ имеем уравнение

$$\tilde{A}_1 y_{2, l_2}^{j+1/2} + \tilde{B}_1 y_{l_1, l_2}^{j+1/2} = \tilde{D}_1 \quad (28.7a)$$

$$\tilde{A} = A_1, \quad \tilde{B}_1 = B_1 + \frac{x_1^{(0)} - \tilde{x}_1}{x_1^{(1)} - \tilde{x}_1}, \quad \tilde{D}_1 = D_1 - \frac{x_1^{(1)} - x_1^{(0)}}{x_1^{(1)} - \tilde{x}_1} \tilde{y}_{1, p l_2}^{j+1/2}$$

Здесь A_1, B_1, D_1 вычисляются по формулам (28.7).

Значение $y_{0, l_2}^{j+1/2}$ в граничном узле сетки выражается неявно через $y_{1, l_2}^{j+1/2}$ и значение краевой функции на левом конце отрезка по формуле линейной интерполяции:

$$y_{0, l_2}^{j+1/2} = \tilde{y}_{1, p l_2}^{j+1/2} \frac{x_1^{(1)} - x_1^{(0)}}{x_1^{(1)} - \tilde{x}_1} + y_{1, l_2}^{j+1/2} \frac{\tilde{x}_1 - \tilde{x}_1}{x_1^{(1)} - \tilde{x}_1} \quad (28.8)$$

где $\tilde{y}_{1, p l_2}^{j+1/2}$ — значение граничной функции в точке \tilde{x}_1 (координаты $\tilde{x}_1, x_1^{(0)}, x_1^{(1)}$ показаны на фиг. 99, а).

Аналогично при $i_1=N$ имеем

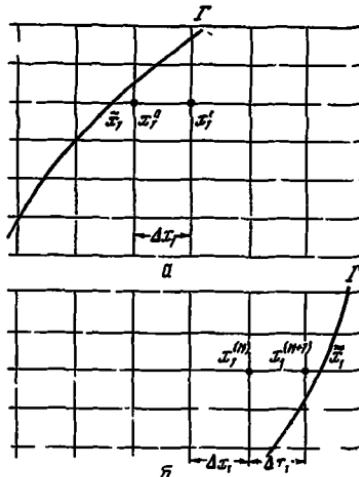
$$\tilde{B}_N y_{N, l_2}^{j+1/2} + \tilde{C}_N y_{N-1, l_2}^{j+1/2} = \tilde{D}_N$$

где

$$\tilde{B}_N = B_N + \frac{\tilde{x}_1 - x_1^{(2)}}{\tilde{x}_1 - x_1^{(1)}} A_N, \quad \tilde{C}_N = C_N, \quad \tilde{D}_N = D_N - \frac{x_1^{(2)} - x_1^{(1)}}{\tilde{x}_1 - x_1^{(1)}} \tilde{y}_{N, p l_2}^{j+1/2}$$

Величины A_N, B_N, C_N, D_N вычисляются по формулам (28.7). Для крайнего правого отрезка применяется соотношение

$$y_{N+1, i_2}^{i+1/2} = \frac{\tilde{x}_{i+1/2}^{(N+1)} - x_1^{(N)}}{\tilde{x}_1 - x_1^{(N)}} + y_{N, i_2}^{i+1/2} \frac{\tilde{x}_1 - x_1^{(N+1)}}{\tilde{x}_1 - x_1^{(N)}} \quad (28.9)$$



Фиг. 99

Расположение точек $x_1^{(N)}, x_1^{(N+1)}, \tilde{x}_1$ показано на фиг. 99, б. Формулы прогонки имеют следующий вид:

$$M_1 = -\frac{A_1}{B_1}, \quad N_1 = \frac{D_1}{B_1}$$

$$M_{i_1} = -\frac{A_{i_1}}{A_{i_1} M_{i_1-1} + B_{i_1}}, \quad N_{i_1} = \frac{D_{i_1} - N_{i_1-1} A_{i_1}}{A_{i_1} M_{i_1-1} + B_{i_1}} \quad (i_1 = 2, 3, \dots, N-1)$$

$$M_N = A_N M_{N-1} + B_N, \quad N_N = D_N - N_{N-1} A_N$$

$$y_{N, i_2}^{i+1/2} = \frac{N_N}{M_N}, \quad y_{i_1, i_2}^{i+1/2} = M_{i_1} y_{i_1+1, i_2}^{i+1/2} + N_{i_1}$$

После счета y_1, \dots, y_N для внутренних узлов вычисляются значения $y_{0, i_2}^{i+1/2}, y_{N+1, i_2}^{i+1/2}$ в граничных узлах сетки по формулам (28.8) и (28.9).

Все приведенные выше формулы верны для $N \geq 3$. Для $N=1$ расчетные формулы имеют вид

$$\begin{aligned} y_{0l_2}^{j+1/2} &= \tilde{y}_{\text{рп}l_2}^{j+1/2} \frac{x_1^{(1)} - x_1^{(*)}}{x_1^{(1)} - \tilde{x}_1} + y_{1l_2}^{j+1/2} \frac{x_1^{(*)} - \tilde{x}_1}{x_1^{(1)} - \tilde{x}_1} \\ y_{2l_2}^{j+1/2} &= \tilde{\tilde{y}}_{\text{рп}l_2}^{j+1/2} \frac{x_1^{(2)} - x_1^{(1)}}{\tilde{x}_1 - x_1^{(1)}} + y_{1l_2}^{j+1/2} \frac{\tilde{\tilde{x}}_1 - x_1^{(2)}}{\tilde{x}_1 - x_1^{(1)}} \\ y_{1l_2}^{j+1/2} &= \frac{1}{\chi} \left[D_1 - \tilde{\tilde{A}}_1 \tilde{y}_{\text{рп}l_2}^{j+1/2} \frac{x_1^{(2)} - x_1^{(1)}}{\tilde{x}_1 - x_1^{(1)}} - C_1 \tilde{y}_{\text{рп}l_2}^{j+1/2} \frac{x_1^{(1)} - x_1^{(*)}}{x_1^{(1)} - \tilde{x}_1} \right] \\ \chi &= A_1 \frac{\tilde{\tilde{x}}_1 - x_1^{(2)}}{\tilde{x}_1 - x_1^{(1)}} + B_1 + C_1 \frac{x_1^{(*)} - \tilde{x}_1}{x_1^{(1)} - \tilde{x}_1} \end{aligned}$$

Здесь A_1, B_1, C_1, D_1 вычисляются по формулам (28.7). Для $N=2$ имеем

$$\begin{aligned} y_{2l_2}^{j+1/2} &= \frac{\tilde{D}_2 \tilde{B}_1 - \tilde{C}_2 \tilde{D}_1}{\tilde{B}_2 \tilde{B}_1 - \tilde{C}_2 \tilde{A}_1}, \quad y_{1l_2}^{j+1/2} = \frac{\tilde{D}_1 - \tilde{A}_1 y_2}{\tilde{B}_1} \\ y_{0l_2}^{j+1/2} &= \tilde{y}_{\text{рп}l_2}^{j+1/2} \frac{x_1^{(1)} - x_1^{(*)}}{x_1^{(1)} - \tilde{x}_1} + y_{1l_2}^{j+1/2} \frac{x_1^{(*)} - \tilde{x}_1}{x_1^{(1)} - \tilde{x}_1} \\ y_{sl_2}^{j+1/2} &= \tilde{\tilde{y}}_{\text{рп}l_2}^{j+1/2} \frac{x_1^{(3)} - x_1^{(2)}}{\tilde{x}_1 - x_1^{(2)}} + y_{1l_2}^{j+1/2} \frac{\tilde{\tilde{x}}_1 - x_1^{(3)}}{\tilde{x}_1 - x_1^{(2)}} \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &= A_1, \quad \tilde{B}_1 = B_1 + C_1 \frac{x_1^{(0)} - \tilde{x}_1}{x_1^{(1)} - \tilde{x}_1}, \quad \tilde{D}_1 = D_1 - C_1 y_{\text{рп}l_2}^{j+1/2} \frac{x_1^{(1)} - x_1^{(*)}}{x_1^{(1)} - \tilde{x}_1} \\ \tilde{B}_2 &= B_2 + A_2 \frac{\tilde{\tilde{x}}_1 - x_1^{(3)}}{\tilde{x}_1 - x_1^{(2)}}, \quad \tilde{C}_2 = C_2, \quad \tilde{D}_2 = D_2 - A_2 \tilde{y}_{\text{рп}l_2}^{j+1/2} \frac{x_1^{(3)} - x_1^{(2)}}{\tilde{x}_1 - x_1^{(2)}} \end{aligned}$$

Коэффициенты $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ вычисляются по формулам (28.7). Формулы прогонки в такой записи удобны для программирования.

Для уравнения

$$\sigma \frac{\partial h}{\partial t} = k \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] \quad (28.10)$$

(σ и k — постоянные) составлена программа решения задачи на электронно-вычислительной машине М-20. Программа позволяет решать задачу для области с границей произвольного вида

при условии, что пересечение границы области прямыми, параллельными координатным осям, состоит из конечного числа отрезков [71]. Число узлов сеточной области ограничено лишь объемом памяти машины. При использовании только оперативной памяти число узлов равно 500.

По указанной программе была просчитана задача о прогнозе изменения уровня грунтовых вод во времени для области Кулундинской степи, ограниченной магистральными каналами при орошении из Оби, намечаемом схемой-проектом Ленгипроводхоза 1955 г. Плоскость водоупора предполагалась горизонтальной; за уравнение, которому удовлетворяет ордината свободной поверхности грунтового потока $h(x, y, t)$, принято уравнение Буссиеска (28.10), при постоянных σ и k .

Вид области решения задачи вводится в машину с помощью набора чисел 0 и 1, как показано на фиг. 100. Значения на начальном слое, при $t=0$, спичились карты гидроизогипс, составленной для данной области. Границные значения были взяты из схемы Ленгипроводхоза (фиг. 101). Границные условия приняты неизменными во времени. Прогноз изменений уровней свободной поверхности грунтовых вод производится для моментов времени: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ года, 1 год. На фиг. 101 даны значения уровней грунтовых вод для $\frac{1}{4}$ года. Для сравнения на фиг. 102 приведен случай установившегося движения, при $t=\infty$, полученный на приборе ЭГДА.

В общем случае вид области задается с помощью набора 40-разрядных двоичных чисел, количество которых равно количеству строк или столбцов сетки. Границным точкам и точкам сетки, лежащим вне области, соответствуют единицы в двоичных разрядах, внутренним точкам сеточной области — нули [71]. В процессе счета машина просматривает двоичные числа и производит соответствующие вычисления. Исходными данными для проведения расчетов на ЭВМ являются: вид области (совокупность 40-разрядных двоичных чисел), значения начальной функции во внутренних узлах сеточной области (при $t=0$), вид граничной функции или совокупность значений в граничных узлах и точность счета. При решении задачи можно выдавать значения искомой функции через наперед заданные интервалы времени.

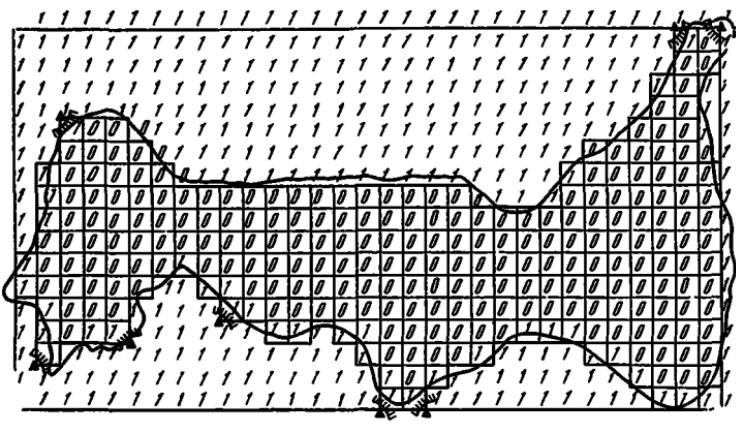
Подробно было изучено [72] поведение решения краевой задачи (28.2) — (28.3) для прямоугольной области

$$D \{0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b\}$$

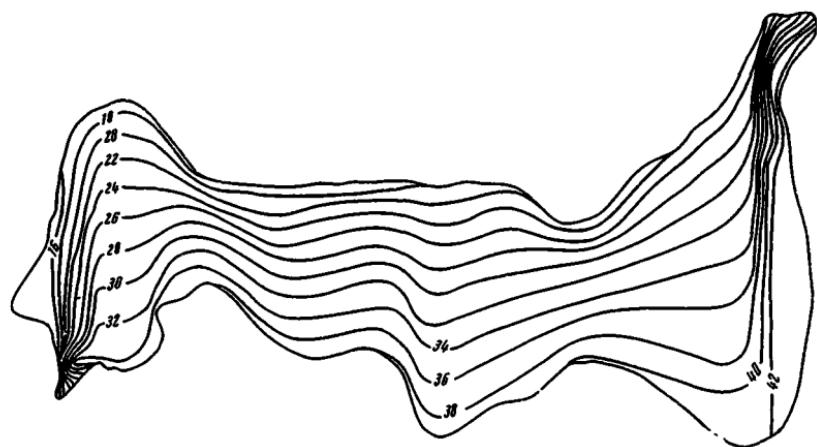
Расчеты проводились по схеме (28.5), а также по нелинейной схеме, разработанной для уравнения

$$\frac{\partial h^2}{\partial t} = \frac{k h}{\sigma} \left[\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2} \right] \quad (28.11)$$

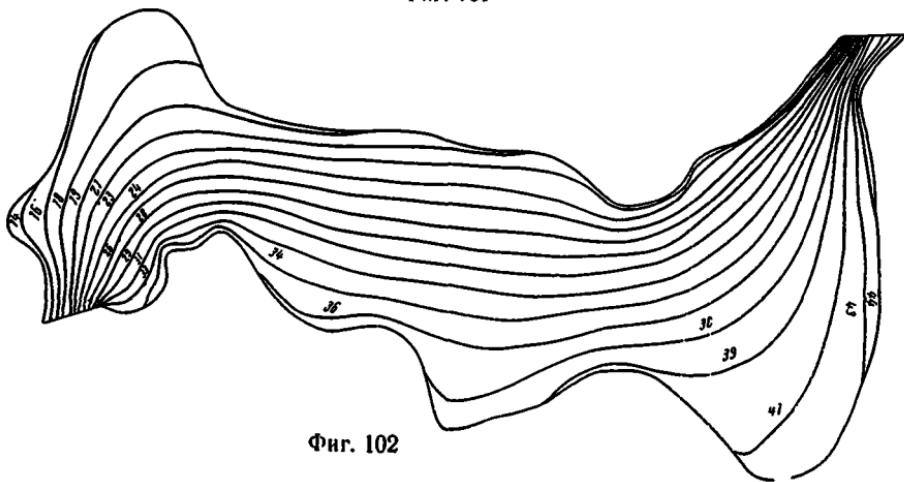
на основе метода, предложенного в [73] для уравнения теплопроводности. Уравнение (28.11) заменяется следующей системой



Фиг. 100



Фиг. 10J



Фиг. 102

конечно-разностных соотношений:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau} (Z_{l+1}^{*} - Z_l^2) &= \frac{k}{\sigma} (\Delta_x Z_l^{*} - \Delta_y Z_l^2) \\ \frac{1}{\tau} (Z_{l+1}^2 - Z_{l+1}^{*}) &= \frac{k}{\sigma} Z_l^2 (\Delta_y Z_{l+1}^2 - \Delta_y Z_l^2)\end{aligned}\quad (28.12)$$

где

$$\Delta_x Z_l^2 = \frac{1}{h_l^2} (Z_{l+1}^2 - 2Z_{l,l}^2 + Z_{l-1,l}^2)$$

и Z_{l+1}^{*} — некоторое промежуточное решение задачи, соответствующее решению на промежуточном слое $y_{l,l+1}^{j+1/2}$ в схеме (28.5).

Поведение обеих разностных схем изучалось на линеаризованном уравнении [74]

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right)$$

для которого известно точное решение такой задачи: в первом квадранте плоскости xoy начальная поверхность грунтовых вод $h(x, y, 0) = H_0$, на границах $x=0$ и $y=0$ имеем $h(x, y, t) = H_1$. Тогда

$$h(x, y, t) = H_1 - (H_1 - H_0) \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{at}} \right)$$

где $\operatorname{erf} x$ — интеграл вероятности.

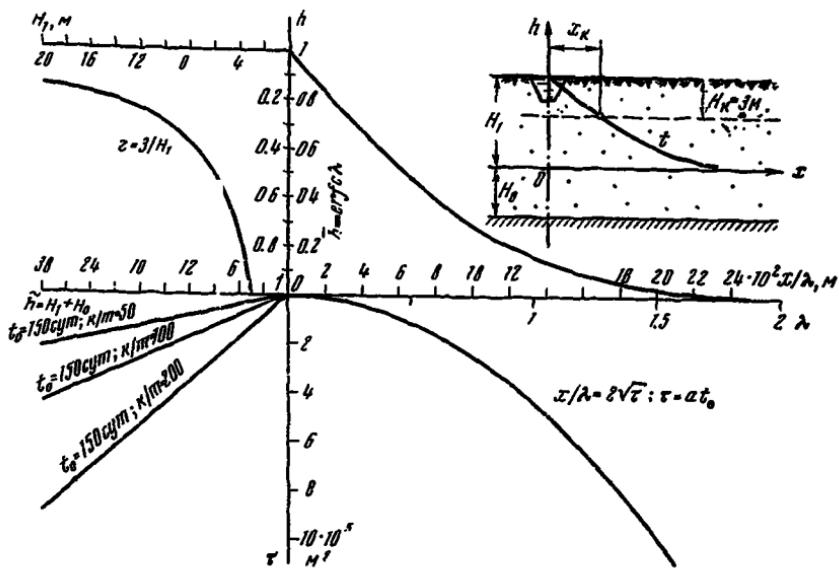
Было принято в соответствии с работой [75]

$$H_0 = 30 \text{ м}, \quad H_1 = 40 \text{ м}$$

Для численного решения нужно ограничить область движения — был взят квадрат со сторонами $x=0, y=0, x=l=10000 \text{ м}, y=l=10000 \text{ м}$ и было принято, что на границах $x=l$ и $y=l$ сохраняются начальные значения $h(l, y, t) = H_0, h(x, l, t) = H_0$.

Сравнение расчетов по двум неявным схемам — А. А. Самарского и Дугласа-Рэнфорда и по явной схеме Г. Н. Каменского — с точным решением показало, что наиболее близкое совпадение с точным решением дают расчеты по локально-одномерному методу переменных направлений (28.5). Явный метод можно было бы предпочесть в силу простоты расчетов, однако он имеет, как указано выше, существенный недостаток — необходимость сильных ограничений на сетки. В [75], например, отношение шага по времени к квадрату шага по пространственной переменной должно удовлетворять неравенству

$$\tau/h_l^2 \leqslant 10^{-4} \quad (l = 1, 2)$$



Фиг. 103

Между тем в задачах фильтрации грунтовых вод требуется рассчитывать поведение грунтового потока за длительные промежутки времени, поэтому ограничение на шаг по времени особенно стеснительно. Неявные схемы свободны от этого недостатка и удобны с точки зрения программирования. Обе указанные схемы применимы при условии положительности $h(x, y, t)$:

$$h(x, y, t) \geq C > 0$$

Устойчивость неявных схем (28.5) и (28.12) доказана только для линейного уравнения типа уравнения теплопроводности. Однако решение ряда задач для нелинейных уравнений, имеющих точные решения, показало хорошие результаты расчета по неявной схеме, вплоть до значения $h=0$.

Ориентировочные расчеты можно делать в ряде случаев, сводя двумерное движение к одномерному. Так, идя вдоль линий тока течения, если эти линии не слишком сильно искривлены, можно вести расчет, принимая их за отрезки прямых линий. Часто встречается и непосредственная надобность в расчетах одномерных движений. Проводя расчеты для случаев подтопления при появлении ирригационных каналов, В. А. Постнов составил nomogrammu (фиг. 103) для расчета перемещения той точки сво-

одной поверхности, которая отстоит от поверхности земли на расстоянии 3 м: это имеет значение при расчете опасной для за-соления зоны подтопления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. И. Абрамович. Воды Кулундинской степи. Новосибирск, СО АН СССР, 1960.
2. Гидрогеология Кулунды и прилегающих районов. Под ред. Д. И. Абрамовича и С. Г. Бейрома. Новосибирск, «Наука», 1965.
3. В. А. Мичков. Каменская ГЭС на Оби и орошение Кулунды Новосибирск, 1964.
4. В. П. Нехайчик. Влияние колебаний общей увлажненности Кулундинской степи на водный баланс Кулундинского озера.—Изв. Всесоюзч. геогр. об-ва, 1965, №7, вып. 1.
5. Е. М. Никифоров, Е. В. Щербаков. К вопросу о естественных ресурсах вод Кулундинской степи.—Труды Сев. н.-и. ин-та гидротехн. и мелиорации, 1966, вып. 26.
6. В. П. Панилов. Агромелиоративная характеристика темно-каштановых почв опытного орошаемого участка.—Труды Биол. ин-та СО АН СССР, 1959, вып. 4.
7. С. Ф. Аверьянов. Фильтрация из каналов и ее влияние на режим грунтовых вод.—В кн.: А. Н. Костяков, Н. Н. Фаворин, С. Ф. Аверьянов. Влияние оросительных систем на режим грунтовых вод. Изд-во АН СССР, 1956.
8. Ф. М. Бочевер, И. В. Гармонов, А. В. Лебедев, В. М. Шестаков. Основы гидрогеологических расчетов «Недра», 1965.
9. М. М. Крылов. Основы мелиоративной гидрогеологии Узбекистана Ташкент, Изд-во АН УзССР, 1959.
10. Ресурсы поверхностных вод районов освоения целинных и залежных земель, вып. IV. Л., Гидрометеоиздат, 1962.
11. В. С. Мезенцев. Атлас увлажнения и теплообеспеченности Западно-Сибирской равнины. Омск, 1961.
12. И. С. Рабочев. Мелиорация засоленных почв Туркменистана Ашхабад, АН ТуркменССР, 1964.
13. H. L. Sallu. An integrated system of irrigation and drainage for a stable optimum use of water and land resources of a river basin.—Univ. Roorkee Res. J., India, 1958, 1, N 1. Nov., 1958.
14. Н. Н. Вергинин, Г. П. Шапинская. Промывание засоленных почв без дренажа.—Труды коорд. совещ. по гидротехнике, вып. 35. «Энергия», 1967.
15. П. Я. Полубаринова-Кочина. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, 1952.
16. Справочник гидрогеолога. Под ред. М. Е. Альтовского. Госгеолтехиздат, 1962.
17. В. С. Усенко. Неустановившийся приток грунтовых вод к скважинам при наличии инфильтрации с поверхности земли.—Науч. зап. Моск. ин-та водн. хоз-ва, 1960, 22.
18. Н. Н. Биндеман. Прогноз режима верховодки на участках орошения.—Гидротехника и мелиорация, 1957, № 6.
19. В. Н. Щелкачев. Разработка нефтоводоносных пластов при упругом режиме. Гостоптехиздат, 1959.
20. М. С. Хатиш. Новое в теории перетекания — В сб.: Вопросы гидрогеологических расчетов. «Мир», 1964.
21. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т III. Гостехиздат, 1951.

22. J. S. Agorofsky, R. Jenkins. Unsteady flow of gas through porous media, one-dimensional case.—Proc First U. S. Nat. Congr. Appl. Mech. N. Y., 1952.
23. Г. И. Баренблatt. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде.—ПММ, 1952, 16, вып. I.
24. В. С. Лукьянов, М. Д. Головко. Расчет глубины промерзания грунтов.—Труды Всесоюзн. н.-и. ин-та транспортного строительства, 1957, вып. 23.
25. М. А. Свиорская, В. С. Лукьянов. Номограммы для расчетов развития подпора грунтовых вод в берегах водохранилищ при однослоистом строении водоносной толщи. М., ВОДГЕО, 1957.
26. C. V. Theis. The relation between the lowering of the piezometric surface and the rate and duration of discharge of a well using groundwater storage.—Trans. Amer. Geophys. Union, 1935, 16.
27. С. Н. Бузинов, И. Д. Умрихи. Исследование пластов и скважин при упругом режиме фильтрации «Недра», 1964.
28. Г. И. Баренблatt, Ю. П. Борисов, С. Г. Каменецкий, А. П. Крылов. Об определении параметров нефтеносного пласта по данным о восстановлении давления в остановленных скважинах.—Изв. АН СССР, ОГН, 1957, № 11.
29. Бан Акош. Определение параметров пласта трещиноватых пород по кривой восстановления давления с учетом притока жидкости после закрытия скважин.—Изв. АН СССР, Мех. и маш., 1960, № 6.
30. M. S. Hantush, C. E. Jacob. Non-steady radial flow in infinite leaky aquifers.—Trans. Amer. Geophys. Union, 1955, 36, N 1.
31. Т. И. Матвеенко. О неустановившейся фильтрации в одном и двух пластах.—Изв. АН СССР, 1957, № 6.
32. M. S. Hantush. Analysis of data flow pumping tests in leaky aquifers.—Trans. Amer. Geophys. Union, 1956, 37, N 6.
33. Ф. М. Бочевер, Н. Н. Веригин. Методическое пособие по расчетам эксплуатационных запасов подземных вод для водоснабжения. Госстройиздат, 1961.
34. F. Ferrangi. Théorie du puits. Application à la méthode de Porchet.—Houille blanche, 1964, N 8, p. 911—919.
35. А. Бегматов. К расчету систематического вертикального дренажа.—Изв. АН СССР, Мех. жидкости и газа, 1966, № 3.
36. С. Ф. Аверьянов, В. С. Усенко. Способ расчета систематического вертикального дренажа.—В сб.: Управление поверхностными и подземными водными ресурсами и их использование. Изд-во АН СССР, 1961.
37. P. Alberg. Méthode d'estimation des réserves. VI-èmes journées de l'hydraulique. Nancy, 1960, Question VI, rapport N 4.
38. M. S. Hantush. Modification of the theory of leaky aquifers.—J. Geophys. Res., 1960, 65, N 11.
39. В. М. Шестаков. О влиянии упругого режима фильтрации в раздельных слоях на взаимодействие водоносных горизонтов.—Изв. высш. учеб. завед., Геол. и разн., 1963, № 10.
40. В. М. Шестаков. Теоретические основы оценки подпора, водонапряжения и дренажа. Изд-во МГУ, 1965.
41. В. А. Васильев. Взаимодействие двух водоносных горизонтов, разделенных слабопроницаемой прослойкой.—ПМТФ, 1967, № 2.
42. И. А. Чарный. Подземная гидрогазодинамика. Гостоптехиздат, 1963.
43. П. Я. Полубаркова-Кочина. О радиусе влияния скважины.—Изв. СО АН СССР, 1960, № 5.
44. L. D. Vague. Soil physics. 3-ed London, 1956.
45. Г. И. Баренблatt, Ю. П. Желтов, И. П. Кочина. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах.—ПММ, 1960, 24, вып. 6.

- 46 С. Ф. Аверьянов. Зависимость водопроницаемости почвогрунтов от содержания в них воздуха.—Докл. АН СССР, 1949, 19, № 2.
- 47 И. И. Кулабухова, П. Я. Полубаринова-Кочина. О неустановившейся фильтрации при неполной насыщенности грунта—Изв. АН СССР, Мех. и маш., 1959, № 2.
- 48 И. И. Кулабухова. О фильтрации при исполнении насыщении грунта.—Докл. АН УзССР, 1967, № 8.
- 49 С. А. Веригов, Л. А. Разумова. Почвенная влага и ее значение в сельскохозяйственном производстве. Л., Гидрометеоиздат, 1963.
- 50 М. И. Вайнер. Статистический критерий подобия при фильтрации жидкости в однородной пористой среде—Изв. АН СССР, Мех. и маш., 1963, № 5.
- 51 В. И. Пеньковский. Вопросы неустановившейся фильтрации неоднородных жидкостей Канд. дисс. Новосибирск, ИГ СО АН СССР, 1967.
- 52 D. Swartzendruber. Unsaturated flow of soil moisture.—Trans. Amer. Geophys. Union, 1963, 44, N 2.
- 53 E. I. Scott, R. I. Tranks. Solution of the one-dimensional diffusion equation for exponential and linear diffusivity functions by power series applied to moisture flow in soils.—Soil Sci., 1962, 94, N 5.
- 54 J. R. Philip Numerical solution of equations of the diffusion type with diffusivity concentration-dependent. II. Austral. J Phys., 1957, 10, N 1.
- 55 С. Н. Муинов. О поливах и растеканиях бугров грунтовых вод.—ПМТФ, 1967, № 3.
- 56 М. А. Саттаров. Движение грунтовых вод при наличии удаленной области питания—Изв. АН СССР, Мех. жидкости и газа, 1966, № 3.
- 57 H. Bateman Tables of integral transforms, v. I. N. Y., Toronto, London, 1954.
- 58 Н. Н. Биндерман, Ф. М. Бочевер. Региональная оценка эксплуатационных запасов пресных подземных вод—Сов. геология, 1964, № 1.
- 59 В. И. Пеньковский О коэффициенте диффузии уравнения движения влаги в почвогрунтах.—Изв. АН СССР, Мех. и маш., 1964, № 6.
- 60 В. И. Пеньковский, С. Т. Рыбакова. К задаче о неустановившейся фильтрации при неполной насыщенности грунта.—Изв. АН СССР, Мех. жидкости и газа, 1966, № 6.
- 61 И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.
- 62 С. Н. Муинов. Определение боковой приточности на примере Кулундинской степи—Изв. СО АН СССР, серия техн. наук, 1966, № 10, вып. 3.
- 63 М. А. Саттаров Об одном способе вычисления инфильтрации и испарения и применении его для картирования грунтовых вод Кулундинской степи—Изв. СО АН СССР, серия техн. наук, 1966, № 10, вып. 3.
- 64 Е. В. Шербань. Некоторые особенности режима грунтовых вод Ключевского опытного орошаемого участка.—Изв. СО АН СССР, серия техн. наук, 1966, № 10, вып. 3.
- 65 В. Б. Георгиевский. О возможности создания единого алгоритма расчета фильтрационных характеристик грунтов при натурных наблюдениях в неустановившемся режиме.—Докл. АН УССР, 1965, № 12 (на укр. яз.).
- 66 В. Б. Георгиевский. Унифицированные алгоритмы расчета фильтрационных характеристик грунтов при натурных наблюдениях в неустановившемся режиме.—Труды коорд. совещ. по гидрогеологии, 1966, вып. 25 (Инст. кибернетики АН УССР).
- 67 В. Б. Георгиевский Опыт использования унифицированных алгоритмов расчета гидрогеологических параметров. Тезисы докладов 10-го Всесоюзного совещания по методам расчетов прогноза уровней грунтовых вод (май, 1966 г.) Л., 1966.

68. В. Г. Пряжинская, Л. М. Плещакова. Численный расчет изменений свободной поверхности двумерного потока грунтовых вод.—Изв. высш. учеб. завед. Геология и разведка, 1965, № 7.
69. И. С. Бerezin, Н. П. Жидков. Методы вычислений, т. 2. Физматгиз, 1959.
70. А. А. Самарский. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области.—Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 5.
71. В. Р. Булдей, В. Ф. Дейченко, В. Б. Шаманский. Численное решение плаиевой задачи неустановившейся фильтрации на электронных вычислительных машинах.—Труды совещ. по гидрогеологии. Днепропетровск, 1962.
72. Л. М. Плещакова, В. Г. Пряжинская. О некоторых методах численного решения одной задачи пространственной неустановившейся фильтрации.—ПМТФ, 1965, № 2.
73. J. Douglas, H. H. Rachford. Numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables.—Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 82, N 2.
74. Л. М. Плещакова, В. Г. Пряжинская. О численном решении некоторых нелинейных параболических уравнений.—Докл. Третьей Сиб. конф. по матем. и мех. Томск, 1964.
75. Г. Н. Каменский. Методика прогноза измений режима грунтовых вод и развития подтопления в зоне подпора.—Труды Лабор. гидрогеол. проблем им. Ф. П. Саваренского, 1958, 20.

Часть третья

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ПРИ ВОДОХОЗЯЙСТВЕННЫХ РАСЧЕТАХ

В первой главе настоящего раздела рассматриваются вопросы составления линейных моделей водохозяйственных проблем. Приводятся некоторые, необходимые для понимания дальнейшего изложения сведения по теории линейного программирования. Вторая глава посвящена вопросам экономического обоснования проектных вариантов строительства оросительных систем и определения наилучшего варианта использования действующей оросительной системы. Рассматриваются также некоторые задачи в нелинейной постановке.

Г л а в а I

НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ И ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

§ 1. Проблема моделирования

Вводные замечания. При решении различных задач оптимизации, связанных с орошаемым земледелием, широко могут быть использованы математические методы, применение которых возможно после введения объективной схематизации, т. е. построения модели задачи. Такого рода абстракция и упрощение некоторой типичной экономической ситуации приводят к экономико-математической модели изучаемого явления. Модель отражает взаимосвязь между основными параметрами исследуемого явления, определяющими в общих чертах его течение. Математическая модель должна обеспечить разумное приближение к реальной действительности настолько, чтобы ее можно было использовать для принятия решений или прогнозов. Важным свойством моделей, облегчающим исследование, является ограниченность количества учитываемых параметров процесса. Теоретически точность решения каждой моделируемой задачи можно повышать неограниченно, учитывая все новые и новые группы факторов. Практически попытка проанализировать одинаково тщательно влияние всех факторов, от которых зависит явление, привела бы к тому, что решить задачу в силу ее громоздкости оказалось бы невозможным.

При планировании водохозяйственных, в частности ирригационных, мероприятий необходимо учитывать многообразные связи и закономерности. Многие реальные экономические ситуации после некоторых упрощающих предположений сводятся к линейным моделям, т. е. таким, которые описываются системой линейных соотношений. Среди множества решений этой системы выбирается оптимальное решение, которое максимизирует или минимизирует определенную линейную функцию. Иллюстрации линейной модели посвящен следующий пример.

Известно, что основную часть себестоимости глубинной воды (50—60%) составляют затраты на подъем каждого ее кубомет-

ра. Рассмотрим задачу о таком распределении отборов воды из разных водоносных горизонтов, чтобы денежные затраты на откачуку были минимальны, необходимые потребности в воде удовлетворялись и откачка производилась бы таким образом, чтобы водоносные пласти не истощались чрезмерно. Такое распределение отборов будем называть оптимальным.

Известно, что при использовании подземных вод откачки можно вести одновременно из нескольких водоносных горизонтов. Так, при орошении подземными водами значительного по размерам участка земли можно расположить вокруг него несколько водозаборов и в каждом из них вести откачуку из определенного водоноса. Количество воды, допустимой для откачек из каждого горизонта и не приводящих к истощению пласта, может быть оценено сверху, исходя из местных гидрогеологических условий.

Будем предполагать, что откачка из напорного пласта допустима до уменьшения напора вдвое за 50 лет эксплуатации. Это предположение принято для упрощения вспомогательных расчетов, ибо задача выбрана лишь для иллюстрации математической схемы решения, поэтому источность при оценке запасов грунтовых вод не имеет в данном случае принципиального значения. Принимаем также, что качество воды во всех горизонтах одинаковое.

Искомые отборы воды в m^3 из каждого водоносного горизонта обозначим через x_i , $x_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Требование неотрицательности переменных вытекает из их физического смысла. Денежные затраты P_i на эксплуатацию i -го горизонта представимы в виде линейных функций относительно x_i [1]:

$$P_i = p_i P_{1i} + P_{2i} + c_i x_i, \quad c_i = \frac{\tilde{\gamma} \sigma l_i T_i}{102 \eta}$$

Здесь c_i — затраты на откачуку 1 m^3 воды; P_{1i} — капитальные затраты на строительство и оборудование скважин и наземных сооружений, i -го горизонта; p_i — доля ежегодных отчислений на восстановление и капитальный ремонт; P_{2i} — затраты по содержанию эксплуатационного штата, текущий ремонт и пр.; $\tilde{\gamma}$ — объемный вес воды; σ — стоимость 1 $кв\cdotп\cdotч$ электроэнергии; η — коэффициент полезного действия (к. п. д.); $\eta = \eta_n \eta_{дв}$, η_n — к. п. д. насоса, $\eta_{дв}$ — к. п. д. двигателя; T_i — число часов работы насоса в году; l_i — общая высота подъема воды; 102 — переводный коэффициент $кв\cdotч$ в $кГм/с\cdotк$.

Общие материальные затраты S при одновременной эксплуатации всех водоносов выражаются суммой всех P_i , т. е.

$$S = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n c_i x_i, \quad a_i = p_i P_{1i} + P_{2i}$$

Рассмотрим теперь ограничения на дебиты водозаборов. Пусть водоносные горизонты имеют мощности m_1, m_2, \dots, m_n , коэффициенты водоотдачи μ_1 и упрогоемкости μ_2, \dots, μ_n , мощности пропластков равны соответственно $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$. Предполагается, что отборы воды идут на больших площадях, поэтому боковой приток отсутствует, но идет подпитывание грунтовых вод сверху за счет выпадения осадков и полива. Пусть среднее количество влаги, попадающей на поверхность земли, равно e мм/год. Прием, что $\frac{1}{3}$ ее испаряется, $\frac{1}{3}$ идет на транспирацию растениями и $\frac{1}{3}$ просачивается в почву. Из этой последней части примерно $\frac{1}{3}$ идет на подпочвенный сток, а оставшиеся $\frac{2}{3}$ стекают на грунтовый поток. Таким образом, в соответствии с принятыми предположениями на пополнение грунтового потока идет $\frac{2}{9}e$.

Предельная величина допустимого годового отбора из верхнего беснапорного горизонта при заданных условиях определяется по формуле (13.6) части второй)

$$Q_1 = \pi r^2 \left(\frac{\mu_1 m_1}{50 \cdot 2} + \frac{2}{9} e \right)$$

Здесь m_1 — средняя мощность первого горизонта; r — средний радиус «бочки», объем которой вычисляется; $\pi = 3.14$. Для второго и следующих пластов получим

$$Q_2 = \frac{\pi r^2 \mu_2^*}{50} \frac{m_1 + \gamma_1 + m_2}{2}$$

.....

$$Q_n = \frac{\pi r^2 \mu_n^*}{50} \frac{m_1 + \gamma_1 + m_2 + \dots + \gamma_{n-1} + m_n}{2}$$

Чтобы избежать истощения пластов, искомые дебиты водозаборов должны удовлетворять неравенствам $x_i \leq Q_i (i=1,2,\dots,n)$. Пусть суммарное необходимое для орошения количество воды равно Q , т. е.

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = Q$$

В задаче будем минимизировать зависящую от x_i часть функции S , которая соответствует стоимости откачек. Слагаемые a_i , выраждающие амортизационные отчисления на восстановление, капитальный ремонт, а также эксплуатацию скважин, капитирующих i -й горизонт, должны вычисляться после определения соответствующих дебитов x_i и известному среднему дебиту одной скважины. Учет значений x_i и гидрогеологических условий участка позволит определить число скважин, а затем и затраты на их сооружение и содержание.

Учитывая сделанные предположения, можно сформулировать задачу об отборе из нескольких водоносных горизонтов как следующую экстремальную задачу: найти минимум линейной функции n переменных

$$f = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \quad (1.1)$$

при ограничениях на переменные

$$0 \leq x_i \leq Q_i, \quad x_1 + \dots + x_n = Q \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.2)$$

Таким образом, переменные величины задачи должны удовлетворять конкретным технологическим условиям и давать минимальное значение линейному функционалу.

§ 2. Общая формулировка задач линейного программирования

Формулировка наиболее общей задачи линейного программирования — так называемой основной задачи производственного планирования — принадлежит Л. В. Канторовичу [2]. Линейные задачи типа рассмотренной выше и вообще задачи, связанные с сельским хозяйством и орошением, включаются в класс стандартных задач [3–5], которые ставятся следующим образом.

Найти минимум линейной формы

$$L(x) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \quad (I)$$

при условиях

$$x_i \geq 0, \quad \sum_{l=1}^n a_{il}x_l \geq b_j \quad (j = 1, 2, \dots, m; \quad i = 1, 2, \dots, n)$$

Выписанная система неравенств при $m \neq n$ имеет, бесчисленное множество решений. Каждое такое решение называется допустимым решением задачи. Допустимое решение называется оптимальным, если оно дает минимальное значение линейной форме L , т. е. является решением задачи (I).

Выпишем матрицу коэффициентов задачи (I) и обозначим ее через A :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Векторы-столбцы матрицы обозначим a^k :

$$a^k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Введем также вектор ограничений $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ и вектор коэффициентов минимизируемой функции $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$. Вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ есть вектор — решение. Пользуясь введенными обозначениями, задачу (I) можно сформулировать также в виде: найти минимум CX при условиях

$$AX \geq b, \quad X \geq 0 \quad (2.1)$$

Задача минимизации CX при условиях $AX=b$, $X \geq 0$, называется канонической задачей линейного программирования. Задачу (I) легко привести к каноническому виду, добавляя m (по числу ограничений) исходных переменных x_j^0 ($j = 1, 2, \dots, m$) и вводя их в линейную форму с нулевыми коэффициентами.

Вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий условиям (2.1), называется планом задачи (I). План $X = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ называется опорным, если среди ограничений (2.1) задачи, которым он удовлетворяет как точным равенствам, имеется m линейно независимых. Если число отличных от нуля компонент x_i меньше m , то решение называется вырожденным. Невырожденное решение, минимизирующее линейную форму L , называется оптимальным планом. Для удобства записи ненулевыми полагаются обычно первые m компонент плана, так как решение всегда можно получить в таком виде, меняя местами столбцы матрицы A . Столбцы матрицы A : a^1, a^2, \dots, a^m , соответствующие ненулевым компонентам плана, линейно независимы и называются базисом данного плана. Любой вектор a^i ($i = 1, 2, \dots, n$) можно единственным образом разложить по базисным векторам [5], так что

$$a^i = q_{1i}a^1 + q_{2i}a^2 + \dots + q_{mi}a^m$$

где q_{ji} ($j = 1, 2, \dots, m$; $i = 1, 2, \dots, n$) — коэффициенты разложения.

Вычислительные методы линейного программирования, позволяющие проводить полное исследование задачи за конечное число однотипных шагов (итераций), поясним на примере симплекс-метода [8]. Идея симплексного метода в задаче минимизации состоит в последовательном переходе от известного опорного плана к новому, кото-

рому соответствует значение линейной формы меньшее, чем при предшествующем плане. Критерием оптимальности опорного плана $X = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ будет выполнение условий $w_i = z_i - c_i \leq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), где $z_i = \sum_{j=1}^n c_j q_{ji}$. Пусть задача линейного

программирования обладает планами, и каждый ее опорный план невырожден. Если при проверке критерия оптимальности выясняется, что имеются значения $w_i > 0$, то переход к новому опорному плану осуществляется заменой вектора a^k , для которого $w_k = \max_i \{w_i > 0\}$, вектором a^l на основании соотношения

$$\frac{x_t}{q_{tk}} = \min_t \left\{ \frac{x_t}{q_{tk}}, q_{tk} > 0 \right\}$$

Такой выбор a^k и a^l обеспечивает минимум линейной формы за конечное число шагов.

При практической реализации симплексного метода составляется симплекс-таблица (табл. 26), включающая опорный план, коэффициенты разложения всех векторов a^l по базисным, а также строки с z_i и $w_i = z_i - c_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Таблица 26

Симплекс-таблица задачи линейного программирования

c		c_1	c_2	c_3	...	c_m	...	c_i	...	c_n
	Б	x_1	x_2	x_3	...	x_m	...	x_l	...	x_n
c_1	x_1	1	0	0	...	0	...	q_{1l}	...	q_{1n}
c_2	x_2	0	1	0	...	0	...	q_{2l}	...	q_{2n}
.
.
c_m	x_m	0	0	0	...	1	...	q_{ml}	...	q_{mn}
z_l	z_0	z_1	z_2	z_3	...	z_m	...	z_l	...	z_n
	w_l	w_1	w_2	w_3	...	w_m	...	w_l	...	w_n

При переходе от одного опорного плана к другому каждый элемент q_{jl} симплекс-таблицы преобразуется по формулам

$$q'_{jl} = q_{jl} - \frac{q_{jk}}{q_{kl}} q_{ll} \quad (l \neq k), \quad q'_{lk} = \frac{q_{jk}}{q_{kl}}$$

Здесь l — номер вводимого в базис вектора; k — номер вектора, который выводится; штрихами сопровождаются элементы новой таблицы.

В случае, когда система векторов a^1, a^2, \dots, a^n содержит m единичных векторов, их можно сгруппировать в виде единичной матрицы I порядка m . При этом исходный опорный план совпадает с вектором ограничений b , а коэффициенты разложения небазисных векторов по базисным будут совпадать с величинами a_{ji} , поскольку для любой невырожденной системы уравнений с m неизвестными вида $D\mathbf{X} = b$, вектор-решение определяется произведением матрицы D^{-1} , обратной D , на вектор ограничений b , $\mathbf{X} = D^{-1} \cdot b$. В нашем случае $D = I$ и, следовательно, $\mathbf{X} = I^{-1} \cdot b = b$. Аналогично, коэффициенты разложения каждого столбца $a^i (i = m+1, \dots, n)$ по единичному базису I будут совпадать с соответствующими компонентами вектора a^i .

Пусть исходная задача заключается в отыскании минимума $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ при условиях

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \quad (x_i \geq 0; i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

и не содержит системы единичных векторов.

В таком случае для определения первого опорного плана можно применить метод искусственного базиса. При этом вместо исходной задачи рассматривается расширенная задача, связанная с определением минимума линейной формы

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + M(x_{n+1} + \dots + x_{n+m})$$

при условиях

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} &= b_2 \\ \dots &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} &= b_m \\ (x_i \geq 0; i = 1, 2, \dots, n+m) \end{aligned}$$

Величина M в задачах минимизации предполагается достаточно большим положительным числом, с тем чтобы в процессе решения соответствующие переменные $x_{n+j} (j = 1, 2, \dots, m)$ исчезли. Векторы a^{n+1}, \dots, a^{n+m} образуют базис, называемый искусственным. Применение симплексного метода к расширенной задаче приводит к построению плана, который является решением исходной задачи, если все $x_{n+j} = 0 (j = 1, 2, \dots, m)$. Если в окончательном базисе расши-

ренной задачи не все искусственные переменные исключены, то исходная задача не имеет решения.

Задача минимизации сводится к задаче определения максимума умножением компонент A , b и c на -1 . Поэтому порядок расчетов при определении максимума линейной формы не изменяется. В критерии оптимальности знак неравенства меняется на обратный ($w_i = z_i - c_i \geq 0$), в базис вводится вектор, которому соответствует наименьшее значение w_i .

Пример. Возвратимся к задаче (1.1) — (1.2). Для конкретности рассмотрим случай трех водоносных пластов. Пусть радиус влияния $r = 1500$ м, мощности пластов и пропластков $m_1 = 20$ м, $m_2 = 10$ м, $m_3 = 20$ м, $\gamma_1 = 2$ м, $\gamma_2 = 1$ м, коэффициенты водоотдачи и упругоемкости $\mu_1 = \mu_3 = 0,4$, $\mu_2 = 0,5$, величина инфильтрационного питания $e = 0,25$ м/год, первый водоносный горизонт находится на глубине 6 м от поверхности земли. При указанных данных по формулам для Q_i находим

$$Q_1 = 3,14 \cdot 2,25 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{0,4 \cdot 20}{100} + \frac{0,25 \cdot 2}{9} \right) = 132,5 \text{ м}^3/\text{час}$$

$$Q_2 = 3,14 \cdot 2,25 \cdot 10^4 \cdot 16 = 157 \text{ м}^3/\text{час}$$

$$Q_3 = 3,14 \cdot 2,25 \cdot 10^4 \cdot 0,4 \cdot \frac{53}{100} = 208 \text{ м}^3/\text{час}$$

Пусть получаемая при откачках вода расходуется на орошение участка в 1000 га. Принимая среднюю оросительную норму равной 2000 м³/га, получаем общие требуемые затраты воды на участок в количестве $Q = 2000 \cdot 1000 = 2$ млн. м³/год. Учитывая возможные потери воды на полях и наличие культур с более высокими оросительными нормами, примем $\bar{Q} = \frac{3}{2} Q$, т. е.

$$\bar{Q} = 3 \text{ млн. м}^3/\text{год} = \frac{3\,000\,000}{7\,200} \text{ м}^3/\text{час} = 416,67 \text{ м}^3/\text{час}$$

(При условии, что эксплуатация водоносных горизонтов ведется 10 месяцев в году, т. е. $T = 7200$ час.) Вычислим коэффициенты c_i функционала L :

$$c_i = \frac{\tilde{\sigma} T_i l_i}{102 \eta}$$

Если принять $\sigma = 0,007$ руб за 1 кат-ч, $\eta = 0,6$, $\tilde{\sigma} = 1000$ кг/м³, $l_1 = 26$ м, $l_2 = 38$ м, $l_3 = 59$ м, то $c_1 = 5,95$, $c_2 = 8,69$, $c_3 = 13,5$. Размерность c_i равна

$$[c_i] = \frac{\kappa \Gamma \cdot \text{руб} \cdot \text{час} \cdot \text{м}}{\text{м}^3 \cdot \text{квт-час}} = \frac{\text{час} \cdot \text{руб}}{102 \cdot 3600 \text{ м}^3}.$$

Подставляя значения Q_i и c_i в (1.1) и (1.2), получаем задачу минимизации (в рублях) функционала L :

$$L = 5,95x_1 + 8,69x_2 + 13,5x_3 \quad (2.2)$$

при условиях

$$\begin{aligned} -x_1 &\geq -132.5 \\ -x_2 &\geq -157 \\ -x_3 &\geq -208 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 416.7, \quad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Эта задача легко решается непосредственно. Действительно, так как при использовании насосов одинаковых марок плата за подъем воды из первого горизонта ниже, чем за подъем из второго, а за подъем из второго — ниже, чем за подъем из третьего, самого глубокого ($c_1 < c_2 < c_3$), то очевидно, что целесообразнее всего полностью использовать возможности первого и второго водоноса, а недостающие количества воды откачивать из третьего. Приведем решение этой задачи симплекс-методом. Перейдем к расширенной задаче, дополнив неравенства (2.3) до равенств неосновными переменными x_4, x_5, x_6 и вводя их в линейную форму с нулевыми коэффициентами. Чтобы иметь начальный единичный базис, в четвертое ограничение вводим искусственную переменную x_7 . При этом условия (2.3) принимают вид

$$\begin{aligned} -x_1 &\quad -x_4 &= -132.5 \\ -x_2 &\quad -x_5 &= -157 \\ -x_3 &\quad -x_6 &= -208 \\ +x_1 + x_2 + x_3 &\quad +x_7 &= 416.7 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Определяется минимум функции $L_1 = L + Mx_7$, где M предполагается достаточно большим числом (при $x_7 = 0$ решение рассматриваемой задачи совпадает с решением задачи (2.2) — (2.3)).

Ход расчетов приведен в табл. 27, в которой для удобства расчетов выписаны также коэффициенты линейной формы c_i .

Вектор ограничений b является исходным решением задачи. Как указано выше, искомый оптимум достигается при условии, что все $w_i \leq 0$. Решение задачи получается в столбце вектора X . Значение линейной формы на каждом шаге равно $z_0 = CX$. Составив выражения z_i, w_i для исходного базиса B , получаем, что $w_1 = M - 5.95$ имеет максимальное значение среди w_i , следовательно, вектор a^1 должен быть введен в базис. Номер выводимого из базиса вектора определяется из условия, что он дает минимум отношений компонент вектора-решения к положительным коэффициентам разложения этого вектора по базису, т. е.:

$$\min_i \frac{x_i}{q_{ji}} = \min_i \left\{ \frac{132.5}{1}, \frac{416.7}{1} \right\} = 132.5$$

Таким образом, $i = 4$ и можно переходить к базису $B_2 = \{a^1, a^5, a^6, a^7\}$.

Таблица 27

Симплексное решение задачи (2.4)

<i>C</i>			5.95	8.69	13.5	0	0	0	<i>M</i>
	<i>B</i>	$x - a^0$	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7
0	a^4	132.5	1	0	0	1	0	0	0
0	a^5	157	0	1	0	0	1	0	0
0	a^6	207	0	0	1	0	0	1	0
<i>M</i>	a^7	416.7	1	1	1	0	0	0	1
	z_i	416.7	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	0	0	0	<i>M</i>
	w_i		M —5.95	M —8.69	M —13.5	0	0	0	0
5.95	a^1	132.5	1	0	0	1	0	0	0
0	a^5	157	0	1	0	0	1	0	0
0	a^6	208	0	0	1	0	0	1	0
<i>M</i>	a^7	284.2	0	1	1	—1	0	0	1
	z_i	$284.2M + 788.4$	0	<i>M</i>	<i>M</i>	$-M$	0	0	<i>M</i>
	w_i		M —5.95	M —8.69	M —13.5	5.95 $-M$	0	0	0
5.95	a^1	132.5	1	0	0	1	0	0	0
8.69	a^2	157	0	1	0	0	1	0	0
0	a^6	208	0	0	1	0	0	1	0
<i>M</i>	a^7	126	0	0	1	—1	—1	0	1
	z_i	$126M + 2000$	5.95	8.69	<i>M</i>	5.95 $-M$	$8.69 - M$	0	<i>M</i>
	w_i		0	0	M —13.5	5.95 $-M$	$8.69 - M$	0	0
5.95	a^1	132.5	1	0	0	1	0	0	0
8.69	a^2	157	0	1	0	0	1	0	0
0	a^6	82	0	0	0	1	1	1	—1
13.5	a^3	126	0	0	1	—1	—1	0	1
	z_i	3870	5.95	8.69	13.5	-7.65	-4.81	0	13.5
	w_i		0	0	0	-7.55	-4.81	0	31.5
									$-M$

Элементы новой симплекс-таблицы вычисляются по приведенным ранее формулам.

Во второй части таблицы наибольшее значение имеет $w_2 = -M - 8.69$, и $\min x_i/q_{j1}$ достигается при $i=5$. Следовательно, вектор a^5 должен быть заменен на a^2 и $B_3 = \{a^1, a^2, a^6, a^7\}$. Анало-

тичным образом совершается следующий переход к базису $B_4 = \{a^1, a^2, a^6, a^3\}$. Вычисляя элементы симплекс-таблицы, получаем, что все w_i неположительны и $x_7=0$. Следовательно, достигнуто оптимальное значение как L_1 , так и L . В результате получены следующие значения отборов: $x_1=132.5 \text{ м}^3/\text{час}$ — из первого водоносного горизонта, $x_2=157 \text{ м}^3/\text{час}$ и $x_3=126 \text{ м}^3/\text{час}$ — из второго и третьего горизонтов соответственно. Величина $x_6=82 \text{ м}^3/\text{час}$ означает дополнительный забор из третьего пласта. Ежегодные затраты в рублях на электроэнергию по подъему воды $L=3870$ руб.

Учитывая полученные дебиты водозаборов и средний дебит отдельной скважины в конкретных условиях, рассчитываются число скважин в каждом водозаборе и ежегодные затраты на их строительство, оборудование и содержание, а затем и ежегодные амортизационные отчисления, т. е. полностью определяются затраты на снабжение водой орошаемого участка (включая затраты на строительство аккумулирующего водоема).

§ 3. Принцип двойственности в теории линейного программирования

Линейные модели, имеющие экономическое происхождение, весьма разнообразны. Отличительной чертой математической теории, используемой для анализа линейных моделей, является принцип двойственности [5].

Для каждой задачи линейного программирования можно определенным образом построить другую задачу, которую называют двойственной к первой. Часто весьма полезным оказывается совместное рассмотрение пары двойственных задач, так как оптимальные решения их тесно связаны.

Задача минимизации

$$c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i \geq b_j \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (I)$$

определяется матрицей коэффициентов $A = \{a_{ij}\}$ и векторами \mathbf{c} и \mathbf{b} . Составим транспонированную матрицу A' , получающуюся из A заменой строк столбцами:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

и рассмотрим задачу, состоящую в отыскании неотрицательных чисел y_1, y_2, \dots, y_m , которые максимизируют линейную форму

$$b_1 y_1 + \dots + b_m y_m$$

при условиях

$$a_{1i} y_1 + \dots + a_{mi} y_m \leq c_i \quad (i = 1, \dots, m) \quad (\text{II})$$

Задачи (I) и (II) составляют пару двойственных задач, причем любая из них может считаться исходной или основной, а вторая — двойственной или сопряженной первой. Центральные результаты линейного программирования относятся к соотношениям между двойственными задачами. Критерий оптимальности (первая основная теорема двойственности) состоит в том, что если существуют такие допустимые решения y_1, y_2, \dots, y_m и x_1, x_2, \dots, x_n задач (I) и (II), что

$$\sum_{j=1}^m b_j y_j = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

то эти допустимые решения будут оптимальными решениями соответствующих задач и наоборот. Если условия исходной задачи содержат единичную матрицу, а соответствующие коэффициенты линейной формы равны нулю, то значения z_i окончательной таблицы, взятые с обратным знаком, совпадают с компонентами решения двойственной задачи; если $c_i \neq 0$, то в качестве соответствующей компоненты выбирается значение $z_i - c_i$ [3]. Таким образом, применение симплексного процесса к одной из задач автоматически приводит к решению двойственной задачи.

Проверим выполнение критерия оптимальности в задаче об отборах. Составим задачу, двойственную к (2.2)–(2.3), по общим правилам: 1) компоненты вектора ограничений \mathbf{b} служат коэффициентами новой линейной формы; 2) матрица коэффициентов ограничений новой задачи получается транспонированием прежней матрицы A ; 3) минимизация линейной формы заменяется максимизацией; 4) знаки неравенств в новых ограничениях меняются на противоположные, условия неотрицательности переменных сохраняются.

Имеем $\mathbf{C} = (5.95; 8.69; 13.5)$;

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -132.5 \\ -157 \\ -208 \\ 416.7 \end{pmatrix}$$

и задача, двойственная к (2.2) — (2.3), может быть сформулирована следующим образом.

Найти максимальное значение функции

$$\tilde{L} = -132.5y_1 - 157y_2 - 208y_3 + 416.7y_4$$

при условиях

$$\begin{aligned} -y_1 &\leq 5.95 \\ -y_2 &\leq 8.69 \\ -y_3 + y_4 &\leq 13.5, \quad y_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

Вводя вспомогательные переменные y_5 , y_6 , y_7 и применяя симплекс-метод, получаем решение задачи

$$y_1 = 7.55, \quad y_2 = 4.81, \quad y_4 = 13.5 \quad \text{и} \quad \max \tilde{L} = 3870$$

Так как при решении исходной задачи было получено, что $\min L = 3870$, то критерий оптимальности удовлетворяется.

Отметим, что условия взаимосопряженных задач (I) и (II)

$$x_i \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq c_i \quad (3.1)$$

при фиксированном i и

$$y_j \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq b_j \quad (3.2)$$

при фиксированном j называются парами двойственных условий. Условие задачи (I) или (II) называется закрепленным, если на любом оптимальном плане соответствующей задачи оно удовлетворяется как точное равенство; условие называется свободным, если хотя бы для одного оптимального плана соответствующей задачи оно выполняется как строгое неравенство.

Вторая основная теорема двойственности состоит в том, что если взаимосопряженные задачи (I) и (II) разрешимы, то в каждой паре их двойственных условий одно условие свободное, а другое закрепленное.

В экономической интерпретации применительно к рассматриваемому примеру, согласно первой теореме двойственности, оптимальное решение задачи существует в том и только в том случае, когда суммарная оценка затрат на откачуку $L = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$ совпадает с суммарной оценкой имеющихся ресурсов воды $\tau = b_1 y_1 + \dots + b_m y_m$. Согласно второй теореме двойственности, при

неполном использовании некоторого фактора (выполняется неравенство для сумм в условиях (3.1) или (3.2)) соответствующая компонента решения двойственной задачи равна нулю.

Так, в рассмотренном нами примере получено: $-x_3 > -208$, $y_3 = 0$. Эта пара соотношений означает недоиспользование ресурсов третьего водоносного горизонта. Если некоторый ресурс используется полностью, ему соответствует ненулевая оценка, и величина ее характеризует ценность данного ресурса для производства. Так, значения $y_1 = 7.55$ и $y_2 = 4.81$ показывают, что увеличение возможных заборов воды из первого и второго водоносных горизонтов на каждый кубометр воды в час могло бы приносить дополнительное сбережение средств соответственно на 7.55 и 4.81 руб.

Л. В. Канторовичем в работе [2] указаны необходимые и достаточные условия оптимальности решения задачи линейного программирования и разработан метод последовательного улучшения допустимого вектора с использованием разрешающих множителей (объективно обусловленных оценок). Метод состоит в определении системы разрешающих множителей для вектора X , являющегося решением задачи (I). Доказано, что совокупность разрешающих векторов задачи (I) совпадает с множеством оптимальных планов задачи (II) и наоборот.

Сформулируем критерий оптимальности плана задачи (II). Для оптимальности плана $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ задачи (II) необходимо и достаточно существование разрешающего вектора $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, связанного с этим планом условиями

$$\sum_{l=1}^n a_{lj}\lambda_l = b_j, \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad \text{при } y_j > 0, \quad (1 \leq j \leq m_1) \quad (3.3)$$

$$\lambda_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \text{при } \sum_{j=1}^m a_{ij}y_j < c_i, \quad (1 \leq i \leq n_1)$$

Здесь n_1 — число условий вида $\sum_{l=1}^m a_{lj}\lambda_l \leq c_l$, m_1 — число

условий $y_j \geq 0$, ибо в общем случае $m - m_1$ переменных могут не иметь ограничений вида $y_j \geq 0$, а $n - n_1$ условий на суммы могут быть заданы строгими равенствами.

Решение задачи (II) с проверкой на каждом шаге условий (3.3) дает наряду с планом $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ систему объективно обусловленных (0.0) оценок основных факторов. Объективно обусловленные оценки являются удобным и сильным инструментом для проведения анализа решения задачи и установления относительной важности того или иного мероприятия.

§ 4. Устойчивость решения задач линейного программирования

Во многих задачах коэффициенты a_{ij} , b_j , c_i не всегда определены точно или могут изменяться со временем. Неопределенность исходных данных является специфической особенностью задач, связанных с сельскохозяйственным производством. Такими величинами являются уровни урожайности при перспективном планировании, возможности заборов воды из источников орошения в разные по водности годы при орошении поверхностными водами; не вполне определенными являются также нормативы затрат воды, труда, техники и пр.

Подход к решению задач с неопределенными данными может быть двояким.

1. Если заданы вероятностные характеристики параметров задачи, известны законы распределения случайных величин, то задача изучается как стохастическая.

2. Задача решается как обычная задача линейного программирования с определенными значениями параметров. Затем изучается поведение полученного решения при некоторых изменениях параметров задачи [6, 7]. Допустимыми будут такие вариации, которые оставляют окончательный базис задачи неизменным. Хотя компоненты решения могут получать при этом иенулевые приращения, общая «стратегия» реализации решения сохраняетя. Поясним это утверждение примером.

Пусть в задачу в качестве переменных величин входят площади x_{ij} под n орошаемыми культурами $i = 1, 2, \dots, n$, а орошение их осуществляется m способами $j = 1, 2, \dots, m$. Оптимальное решение обозначим \mathbf{X}_{ij} , $i = 1, \dots, n_1$, $n_1 \leq n$; $j = 1, \dots, m_1$, $m_1 \leq m$. Некоторые приращения ΔX_{ij} вектора \mathbf{X}_{ij} , вызванные вариацией исходных данных (не изменяющих, однако, окончательного базиса), приведут, вообще говоря, к изменению величин площадей $x'_{ij} = x_{ij} + \Delta x_{ij}$ под определенной культурой с фиксированным способом орошения, но не повлияют на выбор самих культур, орошение которых каким-либо способом оказывается более эффективным по сравнению с орошением других культур, не выбиравшихся при решении задачи.

Изучение допустимых пределов варьирования параметров задачи, или допустимых пределов погрешностей в задании исходных данных, или вынужденных изменений их по сравнению с исходными значениями позволяет глубже познать и оценить сущность ограничивающих условий, а также определить направление, в котором изменяется значение линейной формы в связи с рассматриваемой вариацией параметров.

Для дальнейшего примем следующие обозначения: B' — множество индексов окончательного базиса решения, Δc_i , Δb_j , Δa_{ij} —

приращения параметров задачи; допустимые предельные изменения отмечаются чертой снизу для минимальных и чертой сверху для максимальных значений.

Приведем основные оценки допустимого варьирования исходных данных стандартной задачи (II) максимизации. Считаем, что решение задачи получено симплекс-методом. При этом изучение допустимых вариаций проводится на основе исходной и окончательной таблиц, все элементы окончательной симплекс-таблицы сопровождаются штрихами.

Изменение коэффициентов линейной формы. 1. Пусть изменяется один коэффициент c_j , $j \in B'$, т. е. x_j не принадлежит базису окончательной таблицы. Тогда допустимые пределы приращений Δc_j определяются неравенствами

$$-\infty < \Delta c_j \leq w'_j, \quad j \in B'$$

при этом

$$\Delta x_j = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n+m) \quad \Delta L(x) = 0$$

так как все небазисные переменные, в частности x_j , равны нулю.

2. Изменяется один коэффициент c_j , $j \in B'$ (x_j — базисная переменная). Верхний и нижний пределы изменения Δc_j ($\overline{\Delta c_j} \geq \Delta c_j \geq \underline{\Delta c_j}$) вычисляются по формулам

$$\underline{\Delta c_j} = \max_k \left(\frac{w'_k}{q'_{jk}}, -\infty \right) \text{ при } q'_{jk} > 0, k \in B'.$$

$$\overline{\Delta c_j} = \min_k \left(\frac{w'_k}{q'_{jk}}, +\infty \right) \text{ при } q'_{jk} < 0, k \in B'.$$

Эти соотношения непосредственно следуют из условий

$$w'_j + \Delta w'_j \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n+m)$$

При этом

$$\Delta x_j = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n+m); \quad \Delta L(x) = \Delta c_j x_j$$

3. При одновременном изменении всех коэффициентов c_j [⁸] $j = 1, 2, \dots, n+m$ многогранник допустимых изменений Δc_j определяется системой уравнений

$$w_j \leq \sum_{k=1}^m \Delta c_k q'_{kj} - \Delta c_j \quad (j = m+1, \dots, n)$$

Приращение линейной формы равно

$$\Delta L(x) = \sum_{k=1}^m \Delta c_k x_k$$

Изменение компонент вектора ограничений. Пусть, далее, изменяется какая-либо из компонент вектора ограничений \mathbf{b} . Пределы $\underline{\Delta b}_l$, $\overline{\Delta b}_l$ изменения Δb не меняющего базис, определяются из соотношений

$$\underline{\Delta b}_l = \max_j (-x_j/q'_{jl}, -\infty) \quad \text{при } q'_{jl} > 0, j \in B'$$

$$\overline{\Delta b}_l = \min_j (-x_j/q'_{jl}, +\infty) \quad \text{при } q'_{jl} < 0, j \in B'$$

Приращения переменных и линейной формы вычисляются по формулам

$$\Delta x_j = \begin{cases} \Delta b_l q'_{jl} & (j \in B'), \\ 0 & (j \notin B'), \end{cases} \quad \Delta L(x) = \Delta b_l z'_l$$

При изменении всех компонент вектора ограничений \mathbf{b} приращения Δx_j , $j \in B$ являются линейными функциями приращений Δb_l , т. е.

$$\Delta x_l = \sum_{t=1}^m \Delta x_t^l$$

где Δx_t^l — приращение x_j , которое получается изменением только одного коэффициента b_t . Многогранник допустимых изменений Δb_t определяется следующей системой неравенств:

$$\sum_{t=1}^m \Delta b_t q'_{jt} \geq -x_j \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

Максимизируемая функция $L(x)$ получает приращение

$$\Delta L = \sum_{t=1}^m \Delta b_t z'_t$$

значение z'_t определялось выше.

Изменение компонент некоторого столбца матрицы A . Рассмотрим случай, когда изменяется одна или несколько компонент любого из векторов a^j ($j = 1, 2, \dots, n+m$). При изменении вектора a^s , принадлежащего системе базисных векторов (см. [?]), имеем следую-

щую систему уравнений, которая определяет допустимые изменения Δa_{js} ($j = 1, 2, \dots, m$):

$$\sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \Delta a_{js} \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m+2) \quad (4.1)$$

где

$$\alpha_{sj} = -\beta_{sj}, \quad \alpha_{lj} = \frac{x_s}{x_l} \beta_{lj} - \beta_{sj}, \quad (l = 1, 2, \dots, m, i \neq s)$$

$$\alpha_{m+1,l} = \frac{1}{\mu_{2s}} \sum_{l=1}^m c_l \beta_{lj} - \beta_{sj}, \quad \alpha_{m+2,l} = -\frac{1}{\mu_{1s}} \sum_{l=1}^m c_l \beta_{lj} - \beta_{sj} \quad (j = 1, \dots, m)$$

Здесь β_{lj} — элементы матрицы, обратной к базисной. Для небазисных векторов первоначальной симплекс-таблицы $\beta_{lj} = q_{lj}$; μ_{1s} и μ_{2s} определяются из соотношений

$$\max \left(-\frac{w_j}{q_{sj}} \right) = \begin{cases} -\mu_{1s} < 0 & \text{при } q_{sj} < 0 \\ -\infty, & \text{если нет } q_{sj} < 0 \end{cases}$$

$$\min \left(-\frac{w_j}{q_{sj}} \right) = \begin{cases} \mu_{2s} > 0 & \text{при } q_{sj} > 0 \\ +\infty, & \text{если нет } q_{sj} > 0 \end{cases}$$

В работе [7] даны два приближенных способа определения допустимых изменений Δa_{js} ($j = 1, 2, \dots, m$). В соответствии с первым способом допустимые изменения Δa_{js} определяются неравенствами

$$\lambda_j / \underline{\alpha}_j < \Delta a_{js} < \lambda_j / \bar{\alpha}_j$$

$$\underline{\alpha}_j = \min_i \alpha_{lj} \quad \text{для } \alpha_{lj} < 0, \quad \bar{\alpha}_j = \max_i \alpha_{lj} \quad \text{для } \alpha_{lj} > 0$$

где λ_j — произвольные неотрицательные числа такие, что $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$.

По второму способу

$$|\Delta a_{js}| < \left(\max_i \sum_j |\alpha_{lj}| \right)^{-1}$$

Пусть теперь изменяется небазисный вектор a^μ . Для наглядности приведем вывод предельных вариаций Δa_{μ} , не рассматривавшихся в [7]. В окончательной таблице имеются коэффициенты разложения вектора a^μ по базисным векторам в виде

$$a^\mu = \delta_{1\mu} a^1 + \delta_{2\mu} a^2 + \dots + \delta_{m\mu} a^m$$

Новый вектор $\mathbf{a}^{1\mu} = \mathbf{a}^\mu + \Delta \mathbf{a}^\mu$; разложение вектора — приращения по базисным векторам можно представить следующим образом:

$$\Delta \mathbf{a}^\mu = \gamma_{1\mu} \mathbf{a}^1 + \gamma_{2\mu} \mathbf{a}^2 + \dots + \gamma_{m\mu} \mathbf{a}^m \quad (4.2)$$

Вектор \mathbf{a}^μ в системе векторов задачи заменяется вектором $\mathbf{a}^{1\mu}$, который имеет разложение по базисным векторам вида

$$\mathbf{a}^{1\mu} = (\delta_{1\mu} + \gamma_{1\mu}) \mathbf{a}^1 + (\delta_{2\mu} + \gamma_{2\mu}) \mathbf{a}^2 + \dots + (\delta_{m\mu} + \gamma_{m\mu}) \mathbf{a}^m.$$

Если β_{ij} — элементы обратной матрицы $A^{-1} = \{\beta_{ij}\}$ и согласно (4.2)

$$\Delta a_{j\mu} = \sum_{l=1}^m \gamma_{l\mu} a_{jl} \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

то отсюда

$$\gamma_{i\mu} = \sum_{j=1}^m \beta_{ij} \Delta a_{j\mu} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

Для того чтобы окончательное решение осталось оптимальным, необходимо выполнить условия

$$w'_j = c'_j - z'_j \leq 0 \quad j \in B'$$

Следовательно, получим

$$w'_\mu = c_\mu - \sum_{j=1}^m (\delta_{j\mu} + \gamma_{j\mu}) c_j = c_\mu - \sum_{j=1}^m \delta_{j\mu} c_j - \sum_{j=1}^m \gamma_{j\mu} c_j = w_\mu - \sum_{j=1}^m \gamma_{j\mu} c_j$$

Так как

$$\gamma_{j\mu} = \sum_{l=1}^m \beta_{jl} \Delta a_{l\mu} \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

то имеем

$$\begin{aligned} w'_\mu &= w_\mu - \sum_{j=1}^m c_j \sum_{l=1}^m \beta_{jl} \Delta a_{l\mu} = w_\mu - \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^m c_j \beta_{jl} \Delta a_{l\mu} = \\ &= w_\mu - \sum_{l=1}^m z_l \cdot \Delta a_{l\mu} \leq 0 \end{aligned}$$

Но $w_\mu \leq 0$, следовательно,

$$-\sum_{l=1}^m z_l \Delta a_{l\mu} \leq -w_\mu$$

Для того чтобы это условие не нарушалось, т. е. оптимальный базис не изменился, $\Delta a_{l\mu}$ ($i=1, 2, \dots, m$) должны удовлетворять условию

$$\sum_{l=1}^m \frac{z_l}{w_\mu} \Delta a_{l\mu} \leq 1 \quad (4.3)$$

Обозначим далее

$$\min_l \frac{z_l}{w_\mu} = \begin{cases} \bar{z}_l > 0 & \text{при } z_l < 0 \\ +\infty & \text{если нет } z_l < 0 \end{cases}$$

$$\max_l \frac{z_l}{w_\mu} = \begin{cases} \underline{z}_l < 0 & \text{при } z_l > 0 \\ -\infty, & \text{если нет } z_l > 0 \end{cases}$$

и рассмотрим по аналогии с [7] неотрицательные числа λ_l , $\sum_{l=1}^m \lambda_l = 1$. Если выбирать приращения $\Delta a_{l\mu}$ в пределах

$$\underline{\lambda}_l/z_l < \Delta a_{l\mu} < \bar{\lambda}_l/\bar{z}_l$$

то условие (4.3) будет выполнено.

С другой стороны,

$$\left| \sum_{l=1}^m \frac{z_l}{w_\mu} \Delta a_{l\mu} \right| \leq \sum_{l=1}^m \left| \frac{z_l}{w_\mu} \right| |\Delta a_{l\mu}|$$

и при

$$|\Delta a_{l\mu}| < \left(\sum_{l=1}^m \left| \frac{z_l}{w_\mu} \right| \right)^{-1}$$

условие (4.3) также удовлетворяется.

Результаты варьирования коэффициентов задачи (II) на основе метода последовательного улучшения допустимого вектора полностью совпадают с приведенными выше оценками варьирования на основе симплекс-метода. Требование неотрицательности разрешающих множителей (о. о. оценок) приводит к дополнительным условиям (см. [8]), но они полностью включаются в условия, полученные за счет неравенств $x_j \geq 0, w_j \geq 0$ ($j=1, 2, \dots, n$).

§ 5. Линейные задачи со стохастическими данными

Пусть в задаче минимизации $\mathbf{C}\mathbf{X}$ при условиях $A\mathbf{X} \geq \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq 0$ (I), где $A - m \times n$ — матрица, \mathbf{C} и \mathbf{b} — векторы размерности n и m соответственно, некоторые или все элементы $A, \mathbf{b}, \mathbf{C}$ случайны, т. е. задача (I)

является стохастической. Выделяются [9] два подхода к решению линейных стохастических задач.

Один из них состоит в том, что отдельно изучаются случайные элементы задачи, а затем решается результирующая уже нестохастическая задача линейного программирования.

Наиболее употребительными методами решения при этом являются либо замена случайных величин математическими ожиданиями, либо решение задачи в так называемых «пессимистических» оценках. При втором подходе из множества допустимых $X \geq 0$, удовлетворяющих условиям $AX \geq b$ с вероятностью p , выбирается некоторое X , для которого находятся поправки к решению с учетом случайных элементов A , b и C . Остановимся на указанных методах подробнее [8-11].

1. Рассматривается задача для математических ожиданий случайных величин исходной задачи: найти $\min(EC)X$ при ограничениях

$$(EA) X \geq Eb, \quad X \geq 0 \quad (5.1)$$

где E — символ математического ожидания. Пусть \bar{X} — решение задачи (5.1). Доказано, что если значения EA и Eb принадлежат области значений A и b и \bar{X} удовлетворяет условию $P\{\bar{A}\bar{X} \geq b\} = 1$ (P — символ вероятности), то вектор \bar{X} является оптимальным решением исходной стохастической задачи. Практическая проверка оптимальности решения \bar{X} всегда связана с большими трудностями. Даже в сравнительно простом случае распределения случайных величин $\{a_{ij}, b_i\}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, в многограннике приходится решать m проверочных нестохастических задач [8].

2. При решении задачи принимаются «пессимистические» оценки, т. е. выбираются такие значения (\tilde{A}, \tilde{b}) , для которых заведомо известно, что если $\tilde{A}X \geq \tilde{b}$, то $AX \geq b$ для всех возможных (A, b) . Если один только вектор b является случайным, то можно выбрать в качестве вектора ограничений вектор b^* , i -я компонента которого есть точная верхняя граница i -х координат возможных значений вектора b . Тогда множество X , удовлетворяющих условиям $AX \geq b^*$, $X \geq 0$, будет подмножеством всех X , удовлетворяющих условиям $AX \geq b$, $X \geq 0$. Если b^* есть возможное значение b , то b^* легко определяется и можно решить стохастическую задачу. Если же b^* не является возможным значением b , тогда решение задачи с b^* даст некоторый допустимый подоптимум задачи. Этот подоптимум может служить начальным решением, которое некоторыми приемами можно улучшить. Данцигом доказано [10], что в общем случае для получения оптимального решения нельзя заменять случайные величины их математическими ожиданиями. Для частного случая, когда стохастическим является лишь вектор ограничений b , получены условия совпадения решений исходной задачи и задачи, в которой вектор b заменен на Eb .

А. Маданским [1²] изучались стохастические задачи, в которых случайными являются не только компоненты вектора ограничений, но и некоторые или все другие элементы. Им изучены условия допустимости и оптимальности решения преобразованной задачи. Это решение является приближенным для исходной задачи, в которой случайные коэффициенты заменяются математическими ожиданиями. Установлены границы для значений решений измененной задачи и условия, при которых решение измененной задачи является аппроксимирующим вектором точного решения или полностью с ним совпадает.

3. Используется двухэтапное решение задачи в условиях неопределенности. Первый этап состоит в решении исходной задачи при некоторых значениях случайных A и b (например, для EA и Eb). Затем для полученного решения \bar{X} проверяются условия $A\bar{X} \geq b$ для всех возможных значений A и b и недопустимость вектора \bar{X} компенсируется вектором $Y \geq 0$, который вводится в линейную форму с вектором коэффициентов $f \geq 0$. Так как помимо CX необходимо минимизировать ожидаемую дополнительную сумму fY , то по существу на втором этапе изучается специальный случай задачи определения $\min E \min (CX + fY)$ с ограничениями

$$AX + BY = b, \quad X \geq 0, \quad Y \geq 0$$

Здесь A — случайная $m \times n_1$ -матрица с известным распределением, B — известная $m \times n_2$ -матрица, X и Y — n_1 и n_2 -мерные векторы, b — случайный m -мерный вектор с известным распределением. Предполагается, что соотношение $AX + BY = b$ должно удовлетворяться вектором (X, Y) независимо от того, какое (A, b) выбирается из множества их значений.

Если число возможных значений (A, b) конечно и равно R , то стохастическая задача решается как обычная задача линейного программирования: найти неотрицательный вектор $X \geq 0$, который минимизирует линейную форму CX (или $(EC)X$) и удовлетворяет mR -ограничениям $A^{(r)}X \geq b^{(r)}$, $X \geq 0$, $r = 1, 2, \dots, R$. Отметим, что задачи определения эффективности орошаемого земледелия являются стохастическими задачами такого вида [1³].

Действительно, на результаты сельскохозяйственного производства весьма существенное влияние оказывают погодные условия, которые характеризуются совокупностью случайных величин y_t (t — время) — количеством эффективных осадков, солнечного тепла, температурой воздуха, почвы и т. д. Каждая величина y_t определена на некотором промежутке времени $[0, T]$ и изменяется непрерывно. Но влияние ее на урожайность, технологию производства, а следовательно, и на производственные затраты сказывается лишь через определенные интервалы значений y_t , в соответствии с которыми определяются различные наборы нормативов в матрице A и векторах b и C .

В соответствии со сказанным промежуток $[0, T]$ разбивается на ряд, например T , интервалов времени и в каждом из них рассматривается N возможных значений

$$y_t^\nu (t = 1, 2, \dots, T; \nu = 1, 2, \dots, N)$$

Следовательно, имеем

$$A(y_t) = A_{tv}, \quad C(y_t) = c_{tv}, \quad b(y_t) = b_{tv} \text{ при } y_t \in (y_t^{\nu-1}, y_t^\nu)$$

и общее число различных значений A, b, C равно NT , т. е. задача (I) является дискретной стохастической задачей.

При планировании сельскохозяйственного производства по усредненным нормативам влияние случайных факторов почти не учитывается, поэтому случайные колебания погодных условий, как правило, низводят значение конкретных сельскохозяйственных планов до роли ненадежных прогнозов.

Привлечение аппарата теории вероятностей позволяет количественно учесть влияние случайных факторов на производственный процесс в сельском хозяйстве.

Если имеется набор данных о погодных условиях, складывавшихся в данном районе за длительный ряд (40—60) лет, то закономерности их повторения, например условий естественного увлажнения, правомерно интерполировать на будущее, взяв частоту повторений в качестве вероятностей p_{tv} естественного увлажнения. Эти вероятности используются при численном решении дискретных стохастических задач. Так, задача (I) принимает вид: минимизировать $E(SX)$ при условиях

$$A_{tv} X \geq b_{tv} \quad (t = 1, 2, \dots, T; \nu = 1, 2, \dots, N) \quad X \geq 0$$

Однако стохастические задачи сельскохозяйственного планирования имеют следующую специфику. Структуры посевов и отраслей нельзя резко изменить в течение года, чтобы приспособиться к складывающимся погодным условиям. Поэтому наиболее приспособленная к природным условиям производственная структура хозяйства (района) должна быть определена заранее. Этой особенности в математической формулировке задачи соответствует обязательная постановка условий равенства площадей под определенными культурами или севооборотами при любых исходах естественного увлажнения, т. е. закрепление суммы некоторых компонент вектора-решения. Таким образом, дискретная стохастическая задача планирования орошаемого земледелия формулируется так.

Найти

$$X_{tv} \geq 0, \quad t = 1, 2, \dots, T; \quad \nu = 1, 2, \dots, N$$

при условиях

$$A_{t\nu} X_{t\nu} \geq b_{t\nu}, \quad E C_{t\nu} X_{t\nu} \rightarrow \min$$

$$\tilde{X}_{\tau\lambda} = \text{const} \quad (\tau = 1, 2, \dots, t_1; \quad t_1 < T; \quad \lambda = 1, 2, \dots, n; \quad n < N)$$

($\tilde{X}_{\tau\lambda}$ есть сумма компонент $X_{t\nu}$, соответствующих определенной культуре или севообороту).

Условия равенства площадей содержат $NT - 1$ группу равенств.

Пусть вектор b зависит, кроме того, от некоторой случайной величины z_t значения которой в интервале $[0, T]$ разбиваются на M групп с вероятностями повторения $p_{t\mu}$, $\mu = 1, 2, \dots, M$, тогда вероятность ситуации $t_{v\mu}$ -й (в предположении независимости случайных событий в рассматриваемой группе [14]) определится числом

$$p_{t\nu\mu} = p_{t\nu} p_{t\mu} \quad (t = 1, 2, \dots, T; \quad \mu = 1, 2, \dots, M; \quad \nu = 1, 2, \dots, N)$$

Соответствующая дискретная стохастическая задача линейного программирования формулируется следующим образом.

Найти

$$X_{t\nu\mu} \geq 0$$

при условиях

$$A_{t\nu\mu} X \geq b_{t\nu\mu}, \quad E C_{t\nu\mu} \tilde{X}_{t\nu\mu} \rightarrow \min, \quad \tilde{X}_{\tau\lambda\gamma} = \text{const}$$

$$(\tau = 1, 2, \dots, t_1; \quad t_1 < T; \quad \lambda = 1, 2, \dots, n; \quad n < N; \\ \gamma = 1, 2, \dots, m; \quad m < M)$$

Задача имеет блочную структуру — TNM блоков. Для решения такого типа задач разработаны специальные алгоритмы и программы (например, [15]).

Г л а в а II

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ К ВОДОХОЗЯЙСТВЕННЫМ ПРОБЛЕМАМ

Настоящая глава посвящается приложениям методов линейного программирования к решению задач, связанных с водообеспечением сельского хозяйства. Описываются способы оценки экономической эффективности внутрихозяйственного использования действующих оросительных систем и экономического обоснования вариантов строительства оросительной системы. Приводятся также некоторые нелинейные постановки близких к ним задач.

Проектирование строительства и планирование использования оросительных систем — одна из сложных задач хозяйственной практики. Экономический результат здесь зависит от большого числа факторов и условий, влияние которых должно учитываться в расчетах. При этом приходится использовать результаты научных исследований и опытов нескольких отраслей науки и техники.

Математический подход к технико-экономическим задачам (см., например, [2]), начиная с момента конструирования их моделей и кончая анализом полученных результатов расчета, дает возможность определить наилучший вариант использования производственных ресурсов и помогает глубже изучить экономические проблемы. Достаточно глубокое исследование экономики водохозяйственных мероприятий может быть проведено на линейных моделях, построенных в соответствии с принципами постановки задач линейного программирования [3]. Методы линейного программирования позволяют составлять оптимальные, т. е. наилучшие, варианты проектов и планов производства [16, 17]. Математические методы, а также электронные вычислительные машины нашли уже применение в экономических исследованиях ряда водохозяйственных задач [16–18].

Примеры оптимальных расчетов оросительных систем в комплексе с другими гидротехническими сооружениями методами линейного программирования приводятся в [18]. В § 12 мы остановимся на одной из простейших моделей.

Линейные модели при обосновании водохозяйственных мероприятий используются, например, Грузинским научно-исследовательским институтом энергетики (НИИЭ) и Институтом экономики АН Латвийской ССР [17].

В Грузинском НИИЭ разработаны математические методы для следующих вопросов, возникающих при ирригационном проектировании:

- 1) выбор оптимальных источников орошения (рек, магистральных каналов) с определением их расчетных обеспеченностей;
- 2) выбор наиболее рациональных способов полива, а также местоположения и объемов регулирующих водохранилищ;
- 3) распределение стока нескольких рек между несколькими массивами.

Все эти задачи решаются независимо одна от другой. Общая оптимальная схема орошения составляется на основе полученных результатов.

В Институте экономики Латвийской ССР методами линейного программирования, например, изучаются оптимальные варианты следующих мелиоративных мероприятий:

1) из множества сочетаний различных способов осушения с различной структурой посевов сельскохозяйственных культур выбирается вариант, который гарантирует наибольший чистый доход на единицу капитальных вложений с учетом специализации сельскохозяйственного производства и планируемого объема сельскохозяйственной продукции;

2) наиболее приемлемый уровень интенсификации сельскохозяйственного производства определяется, исходя из наличия в планируемом году материальных, трудовых и других ресурсов и учитывая потребности в этих ресурсах на мелиорированных землях;

3) организация мелиоративно-строительных работ и другие вопросы экономики мелиорации.

Ниже описывается другой подход для оценки эффективности водохозяйственных мероприятий. Существенную роль здесь играет учет стохастичности характера сельскохозяйственного производства. Основную часть второй главы занимают работы, выполненные автором совместно с В. А. Карашем [16].

§ 6. О стохастичности природных факторов

Сельскохозяйственное производство подвержено существенному влиянию случайного фактора — фактора погодных условий. Особенно ощутимым, в несколько раз изменяющим урожайность культур, является это влияние в районах неустойчивого увлажнения.

нения, где отклонения погодных условий от средненормальных в районах случаются систематически.

Устойчивость, надежность сельскохозяйственных планов на данном этапе развития науки могут быть достигнуты только при количественном учете в планировании колебаний погодных условий. Предусматривать погоду в плане можно не только тогда, когда заранее точно известен исход, но и тогда, когда прогноз гарантирован с определенной вероятностью. Необходимую количественную характеристику погодных условий можно получить путем кратко- и долгосрочного прогнозирования погоды. С этой целью необходимо изучение статистических закономерностей погодных условий каждого района. При этом, с точки зрения планирования наиболее подходящей структуры отраслей севооборотов, устанавливаемых обычно на длительный период неизменными, не так важно знать, каким именно будет следующий год, как то, сколько лет из большого ряда будут влажными, засушливыми, острозасушливыми и т. д., т. е. определить частоту повторения фиксированных условий увлажнения. Для планирования организационно-технических мероприятий важно также знать распределение осадков и температур по коротким промежуткам сезона. Различные исходы погодных условий рассматриваются поэтому в интервалах таких сочетаний температуры и увлажнения, в каждом из которых можно предположить неизменной технологию и одинаковое влияние погодных факторов на урожай самой отзывчивой на колебания температур и увлажнения культуры.

Можно разделить вегетационный период на ряд интервалов, например полумесячных, и рассматривать в каждом из них несколько исходов по увлажненности и температурам. Одному и тому же временному интервалу может соответствовать исход со среднесуточными температурами в пределах от 10 до 15° и осадками за весь период до 15 мм. В условиях Сибири в мае для зерновых этот исход считается неблагоприятным. Исход с температурами от 15 до 20° и осадками в пределах от 15 до 25 мм можно считать средним и т. д. При этом, понятиям «засушливый» исход «средний» или «влажный» придается определенный количественный смысл, так как они могут характеризоваться соответствующей величиной затрат и количеством ожидаемой продукции.

Сельскохозяйственный план должен составляться не в одном, а в нескольких вариантах, предусматривающих засушливый, средний и влажный исходы, т. е. планировать нужно по нескольким уровням нормативов. Балансовые расчеты, например, по засушливому году, должны предусматривать необходимые орга-

низационные и агротехнические мероприятия по смягчению влияния засухи на результаты производства: прикатывание посевов, страховое орошение, использование побочных, может быть, более дорогих возможностей получения кормов и т. п. Балансовые расчеты по урожайному году должны предусматривать технику и прочие ресурсы в объеме, необходимом для уборки, переработки и хранения соответствующего урожая. Сама же перспективная структура отраслей, севооборотов должна выбираться наиболее приспособленной к изученным закономерностям колебаний погодных условий, т. е. такой, при которой получается максимум математического ожидания экономического эффекта.

Обратимся к планированию орошаемого земледелия. Ценою сравнительно больших дополнительных текущих и капитальных затрат орошение позволяет получать высокие и устойчивые урожаи, но вместе с тем именно в орошающем земледелии наиболее остро оказывается влияние случайных факторов.

Средний размер дополнительного дохода за счет орошения от одной и той же культуры различен в районах с разной степенью сухости климата. С другой стороны, в каждом районе прирост урожая и увеличение затрат по сравнению с богарой будет зависеть от распределения осадков и температур за вегетационный период в разные по увлажненности годы.

При орошении основным агромелиоративным мероприятием является поливной режим, который изменяется в соответствии с условиями увлажнения. Другие агротехнические приемы, такие как внесение удобрения, обязательное рыхление почвы после полива, промывка засоленных площадей и т. д., в значительной степени определяются поливным режимом. Эффективность удобрений зависит не только от плодородия почвы и особенностей растений, но и от правильного сочетания доз удобрений с приемами обработки земли и нормами орошения [20].

Для орошения используются поверхностные воды рек, собранные в водохранилище, атмосферные осадки, а также напорно-артезианские и безнапорные грунтовые воды. Колебания водности поверхностных запасов носят случайный характер, и это необходимо учитывать при планировании. При этом водные ресурсы, получаемые за счет атмосферных осадков данного района, находятся в прямой зависимости от увлажненности и температур данной зоны, т. е. характеризуются теми же вероятностями, что и погодные условия. Количество воды, получаемое за счет стока рек, питаемых атмосферными осадками других районов либо горных рек, является случайной величиной с функцией распределения, отличной от распределения осадков и температур в данном районе и, следовательно, с другими вероятностями повторения [14].

Вероятностные параметры, характеризующие природные условия района, определяются в результате статистической обработки многолетних рядов урожайностей, осадков, температур и пр. Наиболее существенным показателем следует считать уровни урожайности u_k основных культур ($k=1, 2, 3, \dots, n$). Известно, что уже простое разбиение урожайностей за ряд лет на некоторые условные группы (см., например, табл. 28) дает определенное представление об условиях естественного увлажнения в изучаемом районе.

Таблица 28

Характеристика засушливости лет по урожайности яровой пшеницы в Ключевском районе Алтайского края (1941—1984 гг.)

Оценка лет по урожайности	Урожай, ц/га	Количество лет	Частоты повторения (вероятности)
Засушливый	0—5	14	0.58
Средний	5—8	5	0.21
Влажный	Выше 8	5	0.21
Итого		24	1

Более точные и надежные значения вероятностей p_i ($i=1, 2, 3$), $p_1+p_2+p_3=1$, годовых исходов увлажнения находятся на основе закона распределения урожайностей, определенного по статистическим данным. Таблица распределения фактически наблюденных частот ряда урожайностей яровой пшеницы и их десятичных логарифмов (см. табл. 29) дает основание высказать гипотезу о логарифмически нормальном распределении ряда.

Проверка нескольких критериев правдоподобия высказанной гипотезы (Пирсона, Романовского [14] и др.) не опровергает ее.

Вероятности засушливого p_1 , среднего p_2 и влажного p_3 исходов естественного увлажнения, вычисленные с использованием функций плотности распределения вероятностей, равны: $p_1=0.55$, $p_2=0.22$, $p_3=0.23$. Доверительные интервалы [14] значений вероятностей: $(0.42 \leqslant p_1 \leqslant 0.57)$, $(0.14 \leqslant p_2, p_3 \leqslant 0.35)$.

Аналогичным образом обрабатываются ряды урожайностей других ведущих культур. Общая характеристика i -го исхода увлажнения определяется вектором $p_i = \{p_i^{(k)}\}$ ($k=1, 2, \dots, n$). Для каждого k выполняется условие $p_1^{(k)} + p_2^{(k)} + p_3^{(k)} = 1$.

Оценки лет по засушливости используются для сравнения прироста урожаев за счет орошения. На основе многолетнего ряда по каждой из трех групп урожайностей (см. табл. 28) можно определить объективные плановые уровни (с учетом улучше-

Таблица 29

Частоты повторения урожайности яровой пшеницы
 u_k и $\lg u_k$ для Ключевского района Алтайского края

Урожайность u_k , $ц'/га$	Частоты повторения	Интервалы для $\lg u_k$	Частоты повторения
1—3.4	9	0.1—0.3	5
3.4—5.8	6	0.3—0.5	4
5.8—8.2	4	0.5—0.7	5
8.2—10.6	3	0.7—0.9	4
10.6—13	0	0.9—1.1	4
13—15.4	2	1.1—1.3	2
Итого	24		24

ния агротехники). Это позволяет составлять сельскохозяйственные планы в расчете на засушливый, средний и влажный годовые исходы увлажнения (с обязательной постановкой условия неизменяемости от исхода к исходу структуры посевных площадей).

Изучение статистических материалов, характеризующих природные условия (осадки, дефициты влажности) и относящиеся к каждой группе лет, выделенных по уровням урожайности, дает возможность определить характер распределения естественного увлажнения в период вегетации.

С другой стороны, выясняются условия потребления воды растениями в зависимости от биологических особенностей растений и климатических условий района. Исследованием этого вопроса занимаются многие ученые в СССР и за рубежом (см., например, [20]). Оказывается, что водопотребление растений одного вида и сорта за период вегетации может изменяться в несколько раз для различных географических зон.

Физически связь потребления воды с метеорологическими условиями выражает влияние притока тепла, обусловленного радиацией, и притока тепла со стороны. Для расчетов потребности растений в воде разные исследователи рекомендуют использовать суммы дефицитов воздуха или испаряемость, радиационный баланс, суммы температур либо сразу несколько метеорологических элементов.

Например, в [20] приводятся следующие расчетные формулы для расхода воды Q за весь период вегетации:

$$Q = k \Sigma d, \quad Q = K \Sigma t$$

где Σd — сумма дефицитов влажности воздуха за рассматриваемый период; k — коэффициент, равный для картофеля 0.61 и для кукурузы 0.56; Σt — сумма средних суточных температур. Коэффициент K для разных растений принимает значения: томаты — 0.14, картофель — 0.15, ячмень — 0.18, кукуруза — 0.16, лен — 0.22. Постоянные значения коэффициентов k и K взяты условно, величина их изменяется в разные фазы развития растений. Изменение, например, k в некоторые фазы вегетации достигает $\pm 40\%$ от среднего значения.

Для правильного назначения сроков полива рекомендуется использовать полученные опытным путем кривые, представляющие собой ряд коэффициентов k , изменяющихся от фазы к фазе и вычисляемые по формуле $k = Q/\Sigma d$ (здесь Q определяется по фактическим затратам воды на полях). Для построения биологических кривых следует проводить наблюдения в течение 5—6 лет.

На основе усредненных для каждого исхода кривых распределения естественных осадков и построенных на их основе биологических кривых распределения водопотребления растений при орошении можно рассчитать оросительные нормы для каждой культуры в засушливый, средний и влажный годы и определить затраты на их проведение. Это важно, так как эффективность сельскохозяйственного производства определяется не только объемом получаемой продукции, но и уровнем затрат на производство этой продукции. Доход от орошения будет тем выше, чем больше объем продукции и чем меньше издержки на поливы, каждый из которых связан с определенными затратами труда, техники и т. д. Система же поливов для каждой культуры, как изложено выше, зависит от складывающихся погодных условий. Дефицит влаги Q_{ut} в почве рассчитывается для каждой культуры по формуле

$$Q_{ut} = q_u - (w_{ut} + w_t^*)$$

Здесь q_u — потребность первой культуры в воде в t -й месяц вегетационного периода ($t=1, 2, 3, 4$); w_{ut} — количество воды от осадков при определенном исходе $t=1, 2, \dots$ естественного увлажнения в t -й месяц, с учетом потерь на фильтрацию, испарение и пр.; w_t^* — запас продуктивной влаги в почве к началу месяца.

В зависимости от величины Q_{ut} , а также водно-физических свойств почвы определяется число поливов при заданном способе орошения, а тем самым материальные и денежные затраты на проведение поливов.

Характер количественной связи этих затрат и условий естественного увлажнения показан в табл. 30. В каждом месяце веге-

тационного периода предполагаются два возможных исхода по осадкам. Первый исход выбирается так, что в принятом интервале осадков основные культуры требуют в этот период максимальное число поливов, второй исход допускает уменьшение числа поливов.

Вообще говоря, можно рассматривать и большее число исходов — с острым дефицитом влаги, умеренным увлажнением, средним и т. д. (в соответствии с этим осуществляется подача полной месячной оросительной нормы, уменьшенной и т. д. до снятия всех поливов).

Величина m в табл. 30 обозначает общее число лет в периоде, за который изучается распределение осадков по месяцам:

$$\text{• } m = m_{1t} + m_{2t}, \quad t = 1, 2, 3, 4.$$

За вероятности повторения исходов p_{tt} приняты отношения

$$p_{tt} = m_{tt}/m$$

Недостаточные и удовлетворительные запасы влаги к началу вегетационного периода имеют вероятности p_{10} и p_{20} и учитываются в общем порядке. В случае исхода с недостаточным запасом влаги w_{10} нужно проводить предпосевной полив, производя соответствующие затраты, а в случае второго исхода этот полив опускается.

При определении величин w_{tt} учитываются потери на фильтрацию, испарение из почвы и с поверхности растений и т. д. Величины q_{it} — $(w_{tt} + w_i^*)$ определяют месячную оросительную норму i -ой культуры, учитывающую степень предшествующего увлажнения. Число поливов n_{ttt} , n'_{ttt} и поливные нормы определяются в соответствии с полученными дефицитами влаги в почве и биологическими особенностями растений.

Дефицитами влаги определяются возможные затраты на поливы. Поскольку влажность почвы в большой степени определяется количеством осадков, то на дальнейшее приближенно принято, что вероятности выпадения осадков совпадают с вероятностями увлажнения почвы.

Для межвегетационного периода высказанное предположение подтверждается результатами статистической обработки соответствующих данных. Рассматривались два ряда наблюдений по ст. Ключи Алтайского края: x — осадки за межвегетационный период, y — запасы продуктивной влаги в апреле—мае в метровом слое (1936—1963 гг). Оба ряда подчиняются нормальному закону распределения и характеризуются следующими параметрами: средние значения рядов $\bar{x}=82$, $\bar{y}=75$, средние

квадратические отклонения σ_x^2 , σ_y^2

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = 21.4, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = 28,$$

$$n = 27$$

коэффициенты асимметрии k и эксцесса E

$$K_x = 0.76, K_y = 0.49, E_x - 3 = 0.55, E_y - 3 = -0.3$$

Близость связи рядов x и y характеризуется коэффициентом корреляции $r_{xy} = 0.92 \pm 0.03$, что говорит о существенной, почти линейной связи между рядами.

Для вегетационного периода учитываются не только осадки, но и гидротермический режим в целом [21].

Числа $a'_{i\tau v}, \dots$ в табл. 30 означают нормативы затрат v -го ресурса на орошение i -й культуры при j -м способе полива. Здесь $i=1, 2, \dots, m_i$; $\tau=1, 2$; $v=1, \dots, N$; $j=1, 2, \dots, n+2$; i, τ, v, j — номер культуры, исхода увлажнения, ресурса и способа орошения соответственно.

Если рассматривать β месяцев периода вегетации и α возможных исходов выпадения осадков, то можно составить α^β наборов различных исходов увлажнения за вегетационный период. Совокупность этих наборов для конкретного района определит степень засушливости года. Принимая два возможных исхода в t -м ($t=1, 2, 3, 4$) месяце, условимся один исход называть влажным (в) с вероятностью p_{1t} , другой — засушливым (з) с вероятностью p_{2t} , $p_{1t} + p_{2t} = 1$ для каждого t ; $t=0$ соответствует межвегетационному периоду. Общее число комбинаций при этом равно $2^\beta = 32$ (см. табл. 31).

Вероятности p^l ($l=1, 2, \dots, 32$) возможных годовых исходов в табл. 31 определяются как произведение соответствующих месячных вероятностей исходов, а искомые годовые вероятности повторения засушливых, средних и влажных лет — суммированием по группе сквозных исходов, отнесенной к году определенной влажности (в предположении независимости отдельных исходов [14]), например:

$$p^{(z)} = p_{20}p_{11}p_{12}p_{23}p_{14}, \quad p^{(s)} = p_{10}p_{11}p_{12}p_{23}p_{24} \quad \text{и т. д.}$$

Легко проверить, что суммарная вероятность, равная $\sum_{l=1}^{32} p^{(l)}$,

составляет единицу.

Разбиение лет по увлажненности проводится следующим образом. Год считается влажным, если в нем не менее трех месяцев периода вегетации достаточно влажные, средним — когда

Таблица 30

Принцип установления количественной связи затрат на орошение и условий естественного увлажнения

T	$\frac{w^1}{m^3}$ $\frac{ga}{ga}$	Число случаев (лст) по исходам	Вероятн. ости исходов	Водный баланс			Число поливов	Затраты n-го ресурсов по i-й культуре					
				w $\frac{m^4}{ga}$	q $\frac{m^3}{a \cdot t}$	Δw $\frac{m^3}{ga}$		Способы полива		напуском			
								дождевание		напуском			
								машина марки			напуском		
								№ 1	...	№ n	по бороздам	по полосам	
Май	w'_{10}	m_{10}	$p_{10}=m_{10}/m$	w^1_1	q_{10}	$q_{10} - w'_{10}$	—	—	1	—	—	a_{1v}^{n+1}	a_{1v}^{n+2}
	w'_{20}	m_{20}	$p_{20}=m_{20}/m$	w^2_1				—	—	—	—	—	—
	w'_{11}	m_{11}	$p_{11}=m_{11}/m$	w_{11}	q_{11}	$q_{11} - (w_{11} + w'_1)$		n_{11}	n'_{11}	a_{11v}^1	...	a_{11v}^n	a_{11v}^{n+1}
	w'_{21}	m_{21}	$p_{21}=m_{21}/m$	w_{21}	q_{12}	$q_{11} - (w_{21} + w'_1)$		n_{21}	n'_{21}	a_{12v}^1	...	a_{11v}^n	a_{12v}^{n+1}
Июнь	w'_{12}	m_{12}	$p_{12}=m_{12}/m$	w_{12}		$q_{12} - (w_{12} + w'_2)$	—	n_{12}	n'_{12}	a_{11v}^1	...	a_{12v}^n	a_{11v}^{n+1}
	w'_{22}	m_{22}	$p_{22}=m_{22}/m$	w_{22}	q_{12}	$q_{12} - (w_{22} + w'_2)$		n_{22}	n'_{22}	a_{12v}^1	...	a_{12v}^n	a_{12v}^{n+2}
Июль	w'_{13}	m_{13}	$p_{13}=m_{13}/m$	w_{13}		$q_{13} - (w_{13} + w'_3)$	—	n_{13}	n'_{13}	a_{11v}^1	...	a_{12v}^n	a_{11v}^{n+1}
	w'_{23}	m_{23}	$p_{23}=m_{23}/m$	w_{23}	q_{13}	$q_{13} - (w_{23} + w'_3)$		n_{23}	n'_{23}	a_{12v}^1	...	a_{11v}^n	a_{12v}^{n+2}
Август	w'_{14}	m_{14}	$p_{14}=m_{14}/m$	w_{14}		$q_{14} - (w_{14} + w'_4)$	—	n_{14}	n'_{14}	a_{11v}^1	...	a_{11v}^n	a_{11v}^{n+2}
	w'_{24}	m_{24}	$p_{24}=m_{24}/m$	w_{24}	q_{14}	$q_{14} - (w_{14} + w'_4)$		n_{24}	n'_{24}	a_{12v}^1	...	a_{12v}^n	a_{12v}^{n+2}

Примечания: $w_{\tau t}$ — величина осадков по данным метеостанций, $\tau=1,2$; $t=1,2,3,4$; T — межвегетационный период, w_{10}, w_{20} — запасы влаги, накопленные за межвегетационный период; w — количество осадков; q — потребность первой культуры, Δw — дефицит влаги в почве; d_{1v}^{n+1} ; d_{1v}^{n+2} — затраты на влагозарядку или предпосевной полив; m_{ti} — число случаев, благоприятных исходу t в период i , $\tau=1,2$, $t=0,1,2,3,4$.

Таблица 31

Определение вероятностей годовых исходов естественного увлажнения по месячным исходам

Рассматриваемые периоды	Вероятности исходов	Номера комбинаций												Номера комбинаций																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Межвегетационный	$\frac{p_{10}-3}{p_{20}-B}$	B	B	B	S	S	S	S	S	S	S	S	S	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	S	S	S	S	S	S		
Май	$\frac{p_{11}-3}{p_{21}-B}$	S	S	S	B	S	S	S	B	S	B	S	B	B	B	B	B	B	B	S	B	S	B	B	B	S	B	B	B	B	B		
Июнь	$\frac{p_{12}-3}{p_{22}-B}$	S	S	S	S	S	B	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	
Июль	$\frac{p_{13}-3}{p_{23}-B}$	S	B	S	S	S	S	B	S	S	S	S	B	B	B	B	B	B	B	B	B	S	B	B	B	B	B	S	B	S	B	B	
Август	$\frac{p_{14}-3}{p_{24}-B}$	S	S	B	B	B	B	B	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	
Характеристика года в целом		S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
Вероятности возможных годовых исходов	$p^{(1)}$	$p^{(2)}$...									$p^{(12)}$	$p^{(13)}$	$p^{(14)}$...									$p^{(28)}$	$p^{(24)}$	$p^{(25)}$...						$p^{(32)}$
Вероятности трех годовых исходов (S, ср., B.)			$P_1 = \sum_{l=1}^{I_1} p^{(l)}$												$P_2 = \sum_{l=I_1+1}^{I_2} p^{(l)}$												$P_3 = \sum_{l=I_2+1}^{32} p^{(l)}$						

* з — засушливый исход, в — влажный, ср. — средний.

два-три месяца влажные, остальные засушливые. Наконец, год считается засушливым, если два-три месяца засушливые. В случаях, когда формально год можно отнести сразу к среднему и влажному или среднему и засушливому, решающую роль должен играть учет увлажненности в мае и июне, а также запасы влаги к началу вегетационного периода, так эти запасы существенно влияют на урожайность культур. Каждому из годовых исходов на основе агрономического анализа и фактических данных сопоставляется определенный уровень урожайности.

Приведем пример расчета вероятностей годовых исходов увлажнения для Ключевского района согласно описанной методике. Полный набор различных исходов и разбиение всей группы на три, соответствующих годовым исходам, приведены в табл. 31.

Засушливым считается такой исход месячного увлажнения, когда суммарные осадки не превышали 20 мм. Когда осадков

выпадало больше 20 мм, исход считался благоприятным. На основании функций распределения осадков за каждый месяц вычислены следующие вероятности повторения разных исходов за 1936—1964 гг. (см. табл. 32).

Оценка исходов увлажнения за межвегетационный период была принята следующей: $p_{10}=0.9$, $p_{20}=0.1$ в силу того, что в режимах орошения для Кулундинской степи, как правило, планируется предпосевной полив. Проводя расчеты по формулам табл. 31, находим вероятности годовых исходов естественного увлажнения: для засушливого исхода $p_1=0.51$, для среднего исхода $p_2=0.24$, для влажного исхода $p_3=0.25$.

Полученные значения принадлежат соответствующим доверительным интервалам вероятностей, определенных по ряду урожайностей яровой пшеницы (см. стр. 358). В силу этого оба приведенных способа могут использоваться для определения вероятностей повторения разных исходов естественного увлажнения

При решении экономических задач орошаемого земледелия большое значение имеет установление зависимости урожайности ведущих культур от природных факторов, таких как осадки, гидротермический режим и пр. [21].

При орошении поверхностными водами вероятности возможных исходов водообеспеченности определяются на основании гидрологических данных по тем же принципам. Пусть, например, водность и

Таблица 32

Вероятности повторения разных исходов за 1936—1964 гг.

Месяц периода вегетации	Вероятность	
	засушливый исход	благоприятный исход
Май	0.44	0.56
Июнь	0.38	0.62
Июль	0.17	0.83
Август	0.21	0.79

осадки — независимые случайные величины и вероятности двух исходов естественного увлажнения (осадки π_1 и π_2 мм) некоторого временного периода равны p_1 и p_2 . Вероятности трех исходов водности реки (расходы воды Q_1 , Q_2 и Q_3 м³/сек) для того же промежутка времени равны p'_1 , p'_2 , p'_3 . Тогда в силу количественной определенности исходов естественного увлажнения для каждого из них определяются нормативы затрат a_{ij}

j -го ресурса ($j = 1, 2, \dots, n$) на орошение 1 га i -й культуры ($i = 1, 2, \dots, m$) в пределах данного промежутка времени, а также промежуточный или конечный результат производства на 1 га c_j ($j = 1, 2, \dots, n$).

Таблица нормативов a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$) составит матрицу $\{a_{ij}\} = A$, элементы c_j — вектор $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$. В рамках задачи линейного программирования [3] (определить максимум СХ при условиях $A\mathbf{X} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{X} \geq 0$) в данном случае каждому из двух исходов с увлажненностью π_1 и π_2 будут соответствовать матрицы условий A_1 и A_2 , векторы линейной функции C_1 и C_2 , искомые векторы производственной структуры \mathbf{X}_1 и \mathbf{X}_2 , где $\mathbf{X}_k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$, $k = 1, 2$.

Исходы водности реки с вероятностями повторения p'_1 , p'_2 , p'_3 связаны с определенными ресурсами воды Q_1 , Q_2 , Q_3 м³/сек на орошение, которые входят в соответствующие векторы ограничений b_1 , b_2 , b_3 . Так как водность и величина осадков — независимые события, то вероятность того, что нормативы и ресурсы реально складывающейся ситуации суть, например, A_1 , C_1 и b_1 , равна $p'_1 p_1$. Вероятность того, что будет иметь место ситуация, которой соответствуют A_2 , C_2 и b_3 , равна $p'_2 p_3$ и т. д. Возможных комбинаций в данном случае будет шесть: $p'_1 p_1$, $p'_1 p_2$, $p'_1 p_3$, $p'_2 p_1$, $p'_2 p_2$, $p'_2 p_3$; все они должны быть рассмотрены в совокупности, в одной стохастической задаче линейного программирования.

Если водность и осадки — зависимые случайные величины, то их вероятности совпадают и число возможных ситуаций значительно сократится (в рассмотренном примере — до двух).

Стохастическая задача с конечным числом возможных значений матрицы L векторов B и C решается как обычная задача линейного программирования, и в результате решения се получается план для каждой возможной комбинации исходов.

§ 7. Критерии экономической эффективности орошаемого земледелия и математическая модель проблемы

Остановимся на вопросе проектирования строительства оросительных систем [16]. На любой стадии проектирования роль экономического анализа не сводится к оценке только готовых технических вариантов. Экономический расчет должен стать органической, активной частью процесса проектирования при сравнении организационно-технических вариантов для выбора как проекта в целом, так и отдельных его элементов.

Технический вариант оросительной системы представляет совокупность связанных между собой объектов: плотин, головных сооружений, скважин, каналов, трубопроводов, водоемов, распределительных устройств и пр. При этом возможны разные варианты строительства каждого из объектов с учетом нормального функционирования системы в целом. Для оптимальных расчетов необходима подробная разработка отдельных технических объектов: расчет дебита скважин, затрат на бурение и оборудование одной скважины, затрат на 1 m^3 ёмкости водоема и др. При анализе вариантов объектов учитываются зависимости затрат от величины или мощности объекта.

Для составления линейной модели существенна следующая классификация таких зависимостей.

1. Зависимость нелинейна, но возможна замена ее линейной с некоторой допустимой погрешностью аппроксимации, и природа объекта такова, что целочисленность получаемых значений несущественна. Таким путем можно определить оптимальную ёмкость водосма в m^3 аккумулируемой воды, если затраты на каждый кубометр ёмкости не зависят от ее величины, т. е. изменяются по линейному закону. В результате решения линейной задачи можно определить также оптимальную площадь, оборудованную системой труб, при известных нормативах затрат на приобретение и укладку труб в расчете на 1 га. Подобных примеров можно указать много.

2. Если линейная аппроксимация правомерна, но целочисленность решения существенна, то оптимальные варианты объектов рассчитываются в общей системе условий либо решением одной

задачи частично целочисленного программирования, либо решением ряда задач линейного программирования, отличающихся фиксированными, заранее рассчитанными вариантами этих объектов. Например, при определении оптимального числа скважин с известными дебитами для орошения заданного участка площадью S можно решать частично целочисленную задачу, рассматривая число скважин как искомую величину, а можно просчитать несколько вариантов, задавая в каждом из них число скважин равным n_1, n_2, \dots, n_k и выбирая затем оптимальный вариант путем сопоставления капиталовложений и дохода.

3. Если нелинейная зависимость не допускает простой линейной аппроксимации, то необходимо привлечение аппарата нелинейного [22] программирования. Можно также заранее, вне модели, проанализировать функциональные зависимости и путем кусочно-линейной аппроксимации избавиться от нелинейности.

Анализ показывает, что в рамках модели линейного программирования можно решать значительный круг вопросов проектирования и эксплуатации оросительных систем при наиболее выгодном техническом варианте строительства.

Весьма существенную роль при сравнении вариантов строительства по эффективности играет фактор времени. Действительно, технические варианты могут различаться между собой также по срокам и очередности ввода в эксплуатацию орошаемых земель. Срок и очередность строительства каждого варианта оросительной системы влияют на показатель окупаемости как через чистый доход (когда, в каком размере и при каких текущих затратах получена продукция от орошения), так и через капиталовложения (когда и в каком размере реализуются капиталовложения).

Учет фактора времени для нескольких вариантов может быть проведен, исходя из самого длительного среди всех вариантов срока строительства.

Все затраты и выход по вариантам должны быть приведены к одному моменту (например, к сроку окончания строительства [28]) по заданным коэффициентам эффективности капиталовложений. Для учета фактора времени после решения задачи проводится дополнительный анализ полученных оптимальных вариантов. Дается оценка возможных сроков строительства и ввода в эксплуатацию каждого из полученных вариантов оросительной системы. Сумма затрат и получаемый доход разбиваются по периодам строительства и осуществляется приведение их к единому моменту. При этом получаем несколько временных вариантов реализации найденных решений, которые после приведения к одному моменту времени сравниваются по окупаемости.

Такая последовательность сравнения вариантов, сочетающая направленный машинный перебор при решении задачи с последующим прямым перебором, правомерна, так как на первой стадии решения отбрасываются все менее эффективные варианты эксплуатации фиксированного технического варианта.

Каждая технически осуществимая полная комбинация объектов характеризуется конечными капитальными и эксплуатационными затратами и оросительной мощностью системы, выраженной в количестве полезной воды, которую можно подать на поля в единицу времени. Как наилучшим образом распорядиться этой мощностью в территориальном и временном аспектах,— вторая сторона проблемы. Расход воды зависит от проектной площади орошения и структуры посевных площадей орошенного земледелия, что в конечном счете и определяет экономический эффект от орошения. Таким образом, оказывается необходимым одновременно с выбором вариантов строительства оросительной системы решать вопросы и ее предстоящей эксплуатации, т. е. определять орошаемые площади, отраслевую структуру хозяйств, севообороты с набором наиболее отзывчивых на орошение культур, порядок эксплуатации системы, способы поливов и прочие мероприятия, обеспечивающие получение максимума дополнительного чистого дохода (ДЧД).

Введение орошенного земледелия даже на незначительных площадях, как правило, повлечет за собой коренную перестройку всей производственной структуры хозяйства, перераспределение средств и ресурсов между отраслями. Это касается не только растениеводческих, но и животноводческих отраслей.

Эффективность производства повышается за счет того, что в хозяйствах концентрируется та отрасль, для которой здесь складываются наиболее благоприятные условия, особенно с введением орошения. Только в этом случае можно правильно, именно по конечному экономическому эффекту, оценить всевозможные варианты проектируемой оросительной системы. Наилучший вариант строительства оросительной системы выбирается из всевозможных технических и организационно осуществимых вариантов по сроку окупаемости (путем сопоставления экономической эффективности капитальных вложений при разных вариантах) с учетом фактора времени.

Приведем модель определения оптимальной внутрихозяйственной организации использования оросительной системы при фиксированных капиталовложениях (т. е. системы, уже действующей либо проектируемой, для которой расчет капиталовложений выполнен вне модели).

За критерий оптимальности использования оросительной системы принят максимум чистого дохода (ЧД), получаемого по всем хозяйствам, обслуживаемым системой, с учетом ресурсов и производственных условий каждого из них [24].

Так как максимальный ЧД должен быть получен при любых условиях естественного увлажнения, то в задаче определяется максимум математического ожидания чистого дохода при трех исходах: засушливом, среднем и относительно влажном с вероятностями повторения p_1, p_2, p_3 , т. е.

$$\max F = \max (p_1 F_1 + p_2 F_2 + p_3 F_3)$$

где F_i ($i=1, 2, 3$) — линейный функционал для каждого из исходов.

Искомыми величинами — переменными задачи — являются размеры посевных площадей x_{ij} i -й культуры при j -м способе орошения, включая способ без полива. Совокупность всех площадей, занятых этой культурой, будем обозначать через y_i , $\{y_i\} = Y$, т. е. каждая компонента y_i определяется суммой x_{ij} по всем способам орошения j

$$y_i = \sum_j x_{ij}$$

Под y_i в модель можно вводить целые севообороты, освоение и хозяйственное использование которых всегда планируется также на ряд лет. При этом индекс i обозначает номер некоторого набора способов поливов для всех культур, входящих в севооборот. Например, если 6-польный севооборот содержит по два поля кукурузы (к), сахарной свеклы (с) и зерновых (з), то i -й способ может соответствовать таким способам орошения; (к) и (з) — ДДА-100М, (с) — бороздковый либо (к) — бороздковый, (з) и (с) — ДДА-100М и т. д.

Структура отраслей, а также посевных площадей должна рассчитываться сразу на большой ряд лет, так как они носят стабильный характер и не могут быть резко изменены в сторону приспособления к погодным условиям именно данного года, — поэтому должны выполняться условия $y_i^1 = y_i^2 = y_i^3 = y_i$.

Верхние индексы здесь обозначают принадлежность y_i^k определенному исходу естественного увлажнения.

Все существенные условия организации орошающего земледелия отражаются в ограничениях. Каждому исходу естественного увлажнения в конкретном районе сопоставляется набор нормативов затрат основных производительных ресурсов.

Матричная схема модели при трех годовых исходах имеет вид:

Схема 1					
X_1	C_1	A_0	A_1	0	0
X_2	C_2		0	A_2	0
X_3	C_3		0	0	A_3
B			B_1	B_2	B_3

Здесь $X = \{X_1, X_2, X_3\}$ — вектор-решение, определяющий структуру посевных площадей; $C = \{C_1, C_2, C_3\}$ — вектор коэффициентов линейной формы F ; A_0 — матрица коэффициентов условий, связывающих все исходы увлажнения; A_l ($l=1, 2, 3$) — матрицы нормативов для засушливого, среднего и относительно влажного исходов. Математическая формулировка задачи: найти максимум линейной формы

$$F = p_1 F_1 + p_2 F_2 + p_3 F_3, \quad F_l = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{n_1} c_{ijk}^{(l)} x_{ijk}^{(l)} \quad (l = 1, 2, 3) \quad (7.1)$$

Здесь $x_{ijk}^{(l)}$ — искомые показатели плана использования орошительной системы: площадь i -й культуры либо севооборота при j -м варианте орошения; поголовье i -го вида скота при j -м варианте кормления; i -е направление капиталовложений при j -м варианте их использования в k -м хозяйстве в случае l -го исхода; m_1 — число орошаемых культур, возделываемых в хозяйстве; n_1 — число способов орошения; $c_{ijk}^{(l)}$ — чистый доход в расчете на 1 га в l -й исход в k -м хозяйстве от i -й культуры при j -м способе орошения; m — общее число культур $m_1 \leq m$, $n_1 \leq n$.

Основные ограничения задачи:

1. Площади багарных и ирригационно-подготовленных земель не превышают заданных значений S_k и S'_k (последняя величина может быть переменной):

$$\sum_{l=1}^m x_{l0k}^{(l)} \leq S_k, \quad \sum_{l=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{n_1} x_{ijk}^{(l)} \leq S'_k \quad (k = 1, 2, \dots, K; l = 1, 2, 3) \quad (7.2)$$

2. Равенство площадей ведущих культур при разных исходах естественного увлажнения:

$$\sum_{j=0}^n x_{ijk}^{(1)} = \sum_{j=0}^n x_{ijk}^{(2)} = \sum_{j=0}^n x_{ijk}^{(3)} \quad (i = 1, 2, \dots, m_1; k = 1, 2, \dots, K) \quad (7.3)$$

где $j=0$ соответствует способу без полива.

3. Водопотребление культур ограничено величиной водоотдачи $Q^{(l)}$ (ресурсы воды $Q^{(l)}$ могут быть также переменной величиной, зависящей от капиталовложений):

$$\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ijk}^{(l)} x_{ijk}^{(l)} \leq \alpha Q^{(l)} - \sum_{k=1}^K \sum_{i=m_1+1}^m \sum_{j=n_1+1}^n q_{ijk}^{(l)} x_{ijk}^{(l)} \quad (7.4)$$

Здесь α — коэффициент полезного действия системы, учитывающий потери на фильтрацию, испарение и сброс $0 < \alpha < 1$; $q_{ijk}^{(l)}$ — нормативы затрат воды на орошение и на прочие отрасли хозяйства, которым соответствуют индексы $i = m_1 + 1, \dots, m$; $j = n_1 + 1, \dots, n$.

4. Ограничения, выражающие межхозяйственные условия производства, например, общие задания по выходу продукции, общую сумму выделенных капиталовложений и др.:

$$\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^n a_{ijkv}^{(l)} x_{ijk}^{(l)} \geq B_v^{(l)} \quad (v = 1, 2, \dots, N; l = 1, 2, 3) \quad (7.5)$$

где $a_{ijkv}^{(l)}$ — нормативы затрат v -го ресурса или выхода v -й продукции (затраты труда в человеко-днях, техники — в машино-часах, выход товарной продукции — в физических или кормовых единицах, электроэнергии — в киловатт-часах и т. д.), $B_v^{(l)}$ — соответствующие ресурсы или задания по продукции.

5. Ограничения, выражающие внутрихозяйственные условия производства (ограничения по использованию труда, техники, балансовые соотношения по кормам, поголовью, по выходу продукции и др.):

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^n a_{ijk\mu}^{(l)} x_{ijk}^{(l)} \leq B_{\mu l}^{(k)} \quad (l = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots, K; \mu = 1, 2, \dots, M) \quad (7.6)$$

6. Неотрицательность показателей плана:

$$x_{ijk}^{(l)} \geq 0 \quad (7.7)$$

Матричная схема модели приведена на схеме 1. Матрица задачи (7.1) — (7.7) имеет трехблочную структуру по числу годовых исходов. Каждый из блоков разбивается еще на K подблоков, соответствующих числу хозяйств, обслуживаемых системой.

Предлагаемая модель дает возможность решать наиболее важные стратегические вопросы орошения: определение структуры отраслей и посевов, выбор оптимального соотношения боргового и орошающего земледелия в каждом хозяйстве, меро-

приятия по увеличению ресурсов воды и их распределению между хозяйствами и культурами. Для более точного учета ресурсов можно вводить в модель их ограничения отдельно по каждому месяцу периода вегетации для каждого годового исхода.

Выбор способов орошения проводится на основе предварительного анализа природных условий орошающего участка: рельефа, уклонов, водно-физических свойств. Правильное решение вопросов тактики орошения требует полного учета в модели как природных условий, так и всевозможных исходов условий естественного увлажнения почвы. Действительно, каждый из сквозных исходов (см. табл. 31) определяет некоторую кривую распределения увлажнения. Оптимальное планирование тактики орошения состоит в отыскании оптимальной кривой увлажнения для каждого последующего промежутка времени на основе учета вероятностных характеристик поведения кривой распределения увлажнения почвы в предыдущие промежутки времени. Такой расчет естественно проводить в динамической модели. Однако в дискретной линейной модели рассмотренного типа также представляется возможным получать решение не только стратегических, но и тактических вопросов орошения. Дальнейшее исследование основано на дискретной модели с тремя годовыми исходами (7.1)–(7.7), которая может использоваться для практических расчетов.

Примечание. В районах орошения, находящихся в дельтах рек либо на низких террасах, питание грунтовых вод происходит в основном за счет фильтрации из реч и каналов и поливных вод. На водораздельных пространствах дополнительным источником питания грунтовых вод являются разливы реч и скопления поверхностных вод в понижениях. При близком залегании грунтовых вод (менее 4–5 м) и отсутствии подземного стока в районе орошения происходит засоление земель. В таком случае эффективность действующей оросительной системы может быть повышена как за счет улучшения структуры отраслей и распределения воды, так и за счет повышения качества земель путем промывки и дренажа. Необходимость откаек подземных вод может быть продиктована также потребностью в дополнительных водных ресурсах на орошение. В любом случае необходимо учсть дополнительные капитальные вложения на строительство и оборудование скважин, а также ежегодные амортизационные отчисления на капитальный ремонт и пр. Приведенная постановка задачи несколько изменится.

Запишем условия (7.4) в виде

$$qX \leq \alpha Q^{(l)}, X = \{x_{ijk}^{(l)}\}, q = \{q_{ijk}^{(l)}\}$$

$$(i = 1, 2, \dots, m_1; j = 1, 2, \dots, n_1; l = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots, K)$$

Объемы воды $Q^{(l)}$ для орошения состоят из двух компонент $Q_{\text{пов}}^{(l)} + Q_{\text{гр}}^{(l)}$, где $Q_{\text{пов}}^{(l)}$ — поверхностные, а $Q_{\text{гр}}^{(l)}$ — грунтовые воды в l -й исход естественного увлажнения. Если $Q_{\text{пов}}^{(l)}$ обеспечивается за

счет водохранилищ однолетнего регулирования, то при разных исходах естественного увлажнения $Q_{\text{пov}}^{(l)}$ различны. $l = 1, 2, 3$. При условиях многолетнего регулирования величина $Q_{\text{пov}}^{(l)}$ может быть принята постоянной при любом l . Величина $Q_{\text{пov}}^{(l)}$ обычно известна — это подача воды по каналам из реки или водохранилища.

Количество необходимых для откачки подземных вод можно определить в процессе решения задачи. Действительно, так как

$$Q^{(l)} = Q_{\text{пov}}^{(l)} + Q_{\text{гр}}^{(l)}$$

то условие (7.4) принимает вид

$$\alpha X - \alpha Q_{\text{гр}}^{(l)} \leq \alpha Q_{\text{пov}}^{(l)} \quad (7.4a)$$

При этом искомая величина $Q_{\text{гр}}^{(l)}$ удовлетворяет следующему условию:

$$Q_{\text{гр}}^{(l)} \leq \beta_1 (Q_{\text{пov}}^{(l)} + Q_{\text{гр}}^{(l)}) + Q + \beta_2 e^{(l)}$$

или

$$Q_{\text{гр}}^{(l)} \leq \frac{1}{1 + \beta_1} [Q + \beta_1 Q_{\text{пov}}^{(l)} + \beta_2 e^{(l)}] \quad (7.8)$$

Выражение $\beta_1 (Q_{\text{пov}}^{(l)} + Q_{\text{гр}}^{(l)})$ обозначает инфильтрацию оросительной воды при поливах и из каналов на грунтовый поток (β_1, β_2 — коэффициенты, учитывающие объемы воды, идущие на пополнение грунтового потока, как за счет орошения (β_1), так и за счет естественных осадков (β_2)); Q — приток из прилегающих областей либо слой вековых запасов, определенный по норме понижения уровня грунтовых вод; $e^{(l)}$ — годовая норма атмосферных осадков в l -й исход).

На орошаемых массивах повышение уровня грунтовых вод бывает весьма значительным. Так, наблюдения за водным балансом (режимом грунтовых вод) на Кутулукской оросительной системе в Заволжье [25] показали, что в среднем уровень грунтовых вод за 12 лет эксплуатации системы (1941—1953 гг.) повысился на 300 см (около 30 см в год). При этом ежегодно уровень грунтовых вод поднимался примерно на 118 см, а в послеполивной период и зимой, вследствие оттока и испарения с поверхности, уровень вновь понижался на 90 см. Строительство вертикального дренажа является одним из средств предотвращения поднятия уровня грунтовых вод и возможного засоления.

Пусть известен средний дебит одной скважины $Q_{\text{скв.}}$. Тогда отношение

$$Q_{\text{гр}}^{(l)}/Q_{\text{скв.}} = n^{(l)} \quad (7.9)$$

определенное число скважин $n^{(l)}$ в l -й исход. Так как это число должно быть постоянным в любой исход, то ставится дополнитель-

оне ограниченис

$$n^{(1)} = n^{(2)} = n^{(3)} = n \quad (7.10)$$

В благоприятные исходы увлажнения часть скважин может использоваться только для поддержания заданного уровня понижений, вообще же излишки воды могут служить для орошения прилегающих участков.

Пусть далес c_1 и c_2 — стоимость строительства одной скважины и насосного оборудования для нее; η_1 и η_2 — коэффициенты, соответствующие нормам отчислений на амортизацию и текущий ремонт; $\lambda_1 c_1$ и $\lambda_2 c_2$ — суммы капиталовложений на строительство и оборудование одной скважины, которые при нормальной эффективности капитальных вложений должны окупиться чистым доходом за год. Обозначим через d величину ежегодных затрат на строительство и эксплуатацию (c_3) одной скважины:

$$d = c_1(\lambda_1 + \eta_1) + c_2(\lambda_2 + \eta_2) + c_3$$

(значения c_1 и c_2 приняты средними в расчете на одну скважину). Постановка задачи с учетом n скважин вертикального дrenaажа такова.

Вместо максимизации (7.1) определяется $\max(F - d \cdot n) = \tilde{F}_1$ при условиях (7.2)–(7.10) и с заменой ограничения (7.4) на (7.4a).

Так как орошающая территория состоит из отдельных расчененных массивов, то после определения структуры посевных площадей и числа скважин можно решить вопрос оптимального их размещения при минимуме затрат и нормы отчислений на соединительные и распределительные трубопроводы. Полученная величина затрат вычитается из \tilde{F}_1 . При заданном количестве скважин и известной стоимости 1 пог. м труб определенного диаметра снова получается линейная задача. Задачи такого рода представляют особый интерес для нефтяного хозяйства.

Перейдем к задаче выбора варианта строительства оросительной системы. Как указывалось ранее, эта задача включает расчет оптимального использования каждого варианта строительства. В результате такого расчета и выясняется экономическая эффективность отдельных вариантов капиталовложений.

В качестве обобщающего критерия эффективности при выборе варианта строительства системы принимается разность между дополнительным чистым доходом от орошения и приведенным капиталовложениями. Учитывается распределение затрат на строительство системы во времени, затрат на производство продукции, а также выход продукции при максимуме общего чистого дохода [16]. В этом случае организация орошения рас-

сматривается как один из вариантов развития земледелия, а его эффективность определяется по окупаемости дополнительных капиталовложений (по сравнению, например, с возможностью повышения агротехнического уровня и общего развития богарного земледелия).

Таким образом, если A_Φ — общий чистый доход при ф-м варианте строительства, K_Φ — капиталовложения на этот вариант, e — норма эффективности капиталовложений в народном хозяйстве, то предпочтение нужно отдавать тому варианту, для которого достигается максимум разности $A_\Phi - eK_\Phi$ по всем Φ .

Ранее уже отмечалось, что отдельные вопросы проектирования, такие как емкости водохранилищ, число скважин и др., при определенных условиях могут быть решены в линейной модели.

Модель и реализация решения упрощаются при выборе варианта строительства оросительных систем, обслуживающих орошающие участки, площадь которых не превосходит 1—2% общей площади хозяйства. Такими могут быть системы, использующие подземные воды. В этом случае можно изучать доходность участка, отвлекаясь от животноводческих отраслей и продукции с богарных земель хозяйства, но учитывая общее направление его развития, так как орошаемый участок должен способствовать выполнению основной плановой задачи хозяйства. В результате решения задачи будет установлена экономически обоснованная структура севооборотов на участке, выбраны наиболее экономичные способы полива, исходя из наличных или проектируемых ресурсов дождевальной техники, и наилучшим образом распределена поступающая для орошения вода.

§ 8. К численным расчетам на ЭВМ

Размерность изучаемых задач линейного программирования, учитывающих три исхода естественного увлажнения, определяется величинами v и μ

$$v = 3K(m_1n_1 + m_2n_2 + \dots + m_\mu n_\mu)$$

$$\mu = 2K(m_1\lambda + 3) + 3(N - K + M + 1)$$

Здесь K — число хозяйств, обслуживаемых системой; v — число переменных; μ — число ограничений задачи; m_j — число возделываемых культур или севооборотов; n_i — число способов орошения; m_j ($j=2, 3, \dots, \mu$) — виды скота, направления капиталовложений и т. д.; n_i — варианты кормления скота и использова-

ния капиталовложений; N — число общехозяйственных ограничений; M — число ограничений в каждом хозяйстве; λ — число невзаимозаменяемых способов полива.

Приведенные ниже расчеты выполнены по программе [15], реализующей метод последовательного улучшения плана с использованием разрешающих множителей. Эта программа применима к задачам размерности $\mu \leq 60$, $v \leq 4095$, т. е. число ограничений v может оказаться лимитирующим задачу. Размерность задачи может быть понижена за счет некоторых упрощений в ее постановке. Так, при расчёте крупных оросительных систем вместо отдельных хозяйств можно рассматривать усредненные условия производства по районам или зонам. Отдельные вопросы, такие как зарегулирование водного стока, объемы животноводческих отраслей, рационы кормления и т. д., могут рассчитываться вне модели.

С другой стороны, уже сейчас открываются возможности использования более емких программ и более совершенной вычислительной техники.

Число ограничений задачи можно сократить на $2K(m_1\lambda + 3)$ (условия равенства площадей вида (7.2)), применив метод, позволяющий преобразовать исходную модель путем сокращения числа условий μ за счет увеличения числа переменных v по законам комбинаторики. В приведенной модели (7.1) — (7.7) число ограничений (7.2) зависит от количества m_1 орошаемых культур (или севооборотов), числа хозяйств K и числа невзаимозаменяемых способов орошения, каждый из которых требует специального условия равенства площадей для каждой культуры при всех исходах. Однако вместо ограничений (7.2) можно задать конкретные сочетания вариантов орошения для каждого из трех исходов увлажнения и каждое сочтение принять за новую переменную. При этом нет надобности выделять векторы X и Y , достаточно рассматривать один вектор. Схема модели будет такой:

Схема 2

Решение	Коэффициент линейной формы	Нормативы									
		В среднем за год	Май		Июнь		Июль		Август		
			в	з	в	з	в	з	в	з	
X	C_1	$a_{ij/v}$			\leftarrow	$\uparrow a_{ij/vt}^{(t)}$	\rightarrow				
Z	C_2										
Ресурсы		B_v	B_v^{11}	B_v^{12}	B_v^{21}	B_v^{22}	B_v^{31}	B_v^{32}	B_v^{41}	B_v^{43}	

Компоненты вектора $Z = \{z_{ijk}^{(l)}\}$ могут обозначать искомые направления капиталовложений, например, на закупку техники, строительство водоемов, мероприятие по расселению земель, а также обозначать объем животноводческих отраслей, которые должны обеспечиваться за счет производимой продукции растениеводства.

В компоненты векторов B_v , $B_v^{t\tau}$ входят ресурсы земли S и воды Q .

Рассмотрим пример, полагая для простоты, что определяется структура орошаемых площадей для одного хозяйства и затраты дифференцируются по трем годовым исходам: засушливому (з), среднему (ср.) и относительно влажному (в). При этом коэффициенты линейной формы вычисляются как разность между денежным выражением количества продукции и общими затратами на ее производство. Матричная схема задачи принимает вид:

Схема 3

$X^{(1)}$				A_1^1	0	0
$X^{(2)}$	C_1	A_0	A'_0	0	A_2^1	0
$X^{(3)}$				0	0	A_3^1
Z	C_2	0	A''_0	A_1^3	A_2^3	A_3^3
B		0	B_0	B_1	B_2	B_3

Здесь B — вектор ограничений; A_l^τ ($l = 1, 2, 3$; $\tau = 1, 2$) — матрицы нормативов затрат по растениеводству ($\tau = 1$) и прочим отраслям ($\tau = 2$); A_0 — матрица, выражающая условия типа (7.2); A'_0 , A''_0 , B_0 — некоторые общие нормативы и ограничения; (X, Z) — решение задачи, $X = \{X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}\}$, и каждая его компонента $X^{(l)}$ ($l = 1, 2, 3$) есть вектор, определяющий структуру посевых площадей и технику орошения в l -й исход.

Рассмотрим i -ю компоненту $x_{il}^{(l)}$ вектора $X^{(l)}$. Пусть эта культура (или севооборот) может орошаться тремя способами (1, 2, 3), т. е. имеем $x_{i1}^{(l)}, x_{i2}^{(l)}, x_{i3}^{(l)}$ для каждого $i = 1, 2, \dots, m_1$; $l = 1, 2, 3$ и

$$\sum_{l=1}^3 x_{il}^{(1)} = \sum_{l=1}^3 x_{il}^{(2)} = \sum_{l=1}^3 x_{il}^{(3)} = S_l \quad (l = 1, 2, \dots, m_1) \quad (8.1)$$

$$\sum_{l=1}^{m_1} S_l \leq S$$

Матрица A_0 состоит из коэффициентов этих равенств, т. е. элементы ее равны ± 1 либо нулю.

Как указано выше, число столбцов матрицы A_0 при принятых предположениях определяется величиной $\gamma = 2K(m_1\lambda + 3)$. Чтобы освободиться от этих ограничений, мы можем составить всевозможные сочетания способов орошения при различных исходах и определить в результате решения этой задачи технику орошения для каждого исхода. При этом вектор $\tilde{X} = (X_1, \dots, X_n)$ будет состоять в рассматриваемом примере из компонент вида

$$X_1 = (x_{i1}^{(1)}, x_{i2}^{(2)}, x_{i3}^{(3)}), X_2 = (x_{i1}^{(1)}, x_{i2}^{(2)}, x_{i1}^{(3)}) \text{ и т. д.}$$

Таким образом, для i -й культуры во все исходы (i обязательно принимает все три значения) пересматриваются всевозможные сочетания способов орошения. Выписанные компоненты x_1 и x_2 соответствуют сочетаниям способов полива 1, 2, 3 и 1, 2, 1.

Матричная схема задачи несколько изменится, хотя ограничения задачи, кроме условий равенства площадей (которые автоматически выполняются в силу принятого предположения), останутся в силе. Линейная форма несколько видоизменяется. Получаем матричную схему задачи в виде:

Схема 4

\tilde{X}	$E(\tilde{C}_1)$	A'_0	\tilde{A}_1^1	\tilde{A}_2^1	\tilde{A}_3^1
Z	C_2	A''_0	A_1^2	A_2^2	A_3^2
B		B_0	B_1	B_2	B_3

Таким образом, матрица A_0 , имеющая γ столбцов, в схему не входит, т. е. количество ограничений уменьшилось на γ . Число компонент вектора \tilde{X} равно $N = m_1 3^3 + m - m_1$.

Отметим основное различие между исходной и преобразованной задачами. Элементы матриц \tilde{A}_l^1 ($l = 1, 2, 3$) совпадают с элементами матриц A_l^1 , которые в \tilde{A}_l^1 повторяются столько раз, сколько соот-

ветствующий способ орошения при l -м исходе входит в число переменных X_{μ} в совокупности с другими способами полива для остальных значений l при фиксированном i . Например, для двух способов полива (1, 2) получаем восемь возможных наборов

$$\begin{aligned} & (x_{i1}^{(1)}, x_{i1}^{(2)}, x_{i1}^{(3)}), (x_{i1}^{(1)}, x_{i1}^{(2)}, x_{i2}^{(3)}), (x_{i3}^{(1)}, x_{i1}^{(2)}, x_{i1}^{(3)}), (x_{i1}^{(1)}, x_{i2}^{(2)}, x_{i1}^{(3)}) \\ & (x_{i2}^{(1)}, x_{i2}^{(2)}, x_{i2}^{(3)}), (x_{i1}^{(1)}, x_{i2}^{(2)}, x_{i2}^{(3)}), (x_{i2}^{(1)}, x_{i1}^{(2)}, x_{i2}^{(3)}), (x_{i2}^{(1)}, x_{i2}^{(2)}, x_{i2}^{(3)}) \end{aligned}$$

Следовательно, в матрице \tilde{A}_1^1 4 раза повторяются элементы матрицы A_1^1 , соответствующие затратам на i -ю культуру при первом способе орошения и 4 раза элементы \tilde{A}_1^1 , соответствующие затратам на эту культуру при втором способе орошения. Аналогично составляются матрицы \tilde{A}_2^1 и \tilde{A}_3^1 . Обратимся к линейным формам исходной и преобразованной задач.

В исходной постановке определяется

$$F = \max \sum_{l=1}^3 p_l F_l = \max \sum_{l,i,j} p_l c_{ij}^{(l)} x_{ij}^{(l)} = \max E(CX)$$

В преобразованной задаче $X_{\mu} = (x_{i\mu_1}^{(1)}, x_{i\mu_2}^{(2)}, x_{i\mu_3}^{(3)})$, т. е. вводятся дополнительные условия $x_{i\mu_1}^{(1)} = x_{i\mu_2}^{(2)} = x_{i\mu_3}^{(3)}$ ($\mu = 1, 2, \dots, M$)

В силу этого предположения справедливо условие

$$\sum_{\mu=1}^{M_l} X_{\mu} = S_l \quad (l = 1, 2, \dots, m_1) \quad \left(\sum_{l=1}^{m_1} M_l = M \right)$$

где M_l — число всевозможных способов использования i -й культуры. Линейная форма этой задачи имеет вид.

$$\tilde{F} = \sum_{\mu=1}^M (p_1 c_{\mu_1}^{(1)} + p_2 c_{\mu_2}^{(2)} + p_3 c_{\mu_3}^{(3)}) X_{\mu} = (EC) \tilde{X}$$

Следовательно, предполагаемый прием приводит к задаче максимизации, в которой увеличено число ограничений по сравнению с исходной задачей. Очевидно, что в результате такого преобразования максимальное значение линейной формы F может принимать значения, меньшие либо равные \tilde{F} . Таким образом, описанный прием можно рекомендовать лишь в случае необходимости, так как полученное решение будет являться подоптимумом исходной задачи ($\tilde{F} \leq F$).

§ 9. О подготовке исходных данных и обработке материалов

Применение математических методов и вычислительных машин требует как можно более точных и проверенных исходных материалов. Использование при расчетах неверной информации, такой как завышенные урожайности, заниженная или завышенная производительность дождевальной машины или установки, наугад взятый коэффициент использования системы и т. п., могут привести к заведомо неверным результатам.

Для получения необходимой при расчетах информации должна быть проведена следующая работа.

1. Проанализировано современное состояние орошаемого земледелия в изучаемой зоне с тем, чтобы учесть земли, которые либо систематически орошаются, либо могут быть орошены при соответствующих капитальных затратах, а также установить, сколько земель в каждом хозяйстве (районе) не используется по каким-либо причинам. Иногда в хозяйствах на данный момент неполностью используются под орошение участки земли, уже снабженные оросительной сетью. Однако все ирригационно подготовленные земли при постановке задачи должны входить в категорию орошаемых земель. Если по причинам недостатка какого-либо ресурса и в оптимальном плане орошаемые земли будут использованы неполностью, то особым заданием ограничений по земле можно предусмотреть их доиспользование как богарных.

Это достигается следующим образом. В качестве ресурса земли задается суммарная площадь S богарных и орошаемых земель, а площадь орошаемых земель X принимается одной из искомых величин задачи, $0 \leq X \leq S_1$, где S_1 — площадь ирригационно подготовленных земель. Для изучения экономической эффективности мероприятий по рассолению земель необходимо подразделение их по степени засоленности.

Устанавливаются ресурсы труда в человеко-днях или человеко-часах по каждому хозяйству (району) и по каждому периоду времени. Число периодов времени может соответствовать либо годовому числу поливов наиболее влаголюбивой культуры, либо числу месяцев вегетационного периода. Продолжительность его в первом случае определяется агротехнически допустимой длительностью поливного цикла культуры. Ресурсы труда берутся с учетом продолжительности периода полевых работ и с подразделением на труд в растениеводстве и животноводстве. Важно выделение труда механизаторов и специалистов-поливальщиков. Необходимо учитывать все возможности привле-

чения дополнительной рабочей силы в напряженный период полевых работ.

Определяются ресурсы энергии по каждому хозяйству и по периодам. Выясняются возможности увеличения этих ресурсов: в каких размерах, при каких затратах и какова выгодность использования увеличения поступления воды, уменьшения затрат ручного труда и т. д.

Ресурсы техники учитываются в машино-часах работы за вычетом простоя на ремонт и в меж都有自己ive periods. Помимо планируемого использования наличной дождевальной техники, предусматривается также возможная закупка ее, в том числе и машин новых марок (исходя из выделенных для этого денежных средств).

Если животноводство может рассматриваться как фиксированная по объему отрасль хозяйства с заданными рационаами кормления, то ставятся ограничения по удовлетворению потребностей в кормах (по каждому виду кормов) и учитываются все их ресурсы, поступающие с естественных угодий. Если же отрасли животноводства рассматриваются переменными по объему, то вместе ограничений по фиксированному поголовью вводятся ограничения по возможности размещения скота, темпам воспроизводства поголовья или другие реальные ограничения. Одновременно можно предусмотреть выбор наиболее эффективных рационов, что достигается либо заданием нескольких вариантов кормления, из которых производится выбор, либо заданием верхних и нижних границ по каждому виду кормов.

Расчет ресурсов воды для действующей оросительной системы проводится на основе конкретных материалов о расходах воды в каналах; изучается направление использования воды, учитываются потери на испарение, фильтрацию и сброс. Для действующих и строящихся систем, рассчитываемых на использование речного стока (с зарегулированием или без него), изучаются гидрологические данные по изменению режима стока рек в зависимости от времени года и водности года. При расчетах используются показатели расходов реки Q_t^μ , дифференцированные, например, по месяцам ($t=1, 2, 3, 4$) и по исходам ($\mu=1, 2, 3$) следующим образом:

Схема 5

Водность года	Периоды времени			
	1	2	3	4
Максимальная	$Q_1^{(1)}$	$Q_2^{(1)}$	$Q_3^{(1)}$	$Q_4^{(1)}$
Средняя	$Q_1^{(2)}$	$Q_2^{(2)}$	$Q_3^{(2)}$	$Q_4^{(2)}$
Минимальная	$Q_1^{(3)}$	$Q_2^{(3)}$	$Q_3^{(3)}$	$Q_4^{(3)}$

Для систем, рассчитываемых на использование подземных вод, производится определение запасов их в данном районе.

Выясняются ресурсы удобрений в каждом хозяйстве и затраты на возможное их пополнение в планируемый период, проводится анализ применяемых и возможных для использования в условиях хозяйств способов орошения: варианты поливов, сроки и очередность их проведения: графики работ поливного цикла; затраты ручного труда, воды; производительность машин, затраты энергоресурсов, дозы вносимых удобрений,— с подразделением по видам работ поливного цикла для каждой культуры. Определяются общие годовые затраты в рублях на 1 га посева.

Полученные показатели затрат на 1 га в латуре и деньгах либо непосредственно вводятся в модель, либо, если они не поддаются дифференциации по периодам, способам, культурам или недостаточно надежны, используются для сравнения и ориентировки при разработке соответствующих нормативов.

Устанавливаются средние уровни урожайности различных культур по хозяйствам на богаре в засушливые, средние и влажные годы, а также урожайности на поливных землях в соответствующие годы и прочих подобных условиях. Здесь можно использовать разработанные в хозяйствах плановые показатели. Большой интерес представляют также материалы государственных сортопротивительных участков.

Из фактических материалов об уровнях урожайности по каждой культуре можно получить количественные оценки эффективности естественного увлажнения в разные по засушливости годы. Оценки эти для разных культур могут быть выражены, например, в процентах от уровня урожайности в средний год: $C_1 = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ — для влажного и $C_2 = (c_1^2, c_2^2, \dots, c_n^2)$ — для засушливого года, n — число культур.

Плановые показатели в хозяйствах устанавливаются обычно в расчете на средний год. Имея эти урожайности и систему оценок в процентах C_1, C_2 , рассчитываются дифференцированные плановые урожайности.

Уровни урожайности культур при орошении учитываются на основании фактических данных и берутся одинаковыми в разные по засушливости годы. Предполагается, что для каждой культуры при соответствующем уровне затрат на орошение можно достичь выравнивания урожайностей в разных погодных условиях.

2. Другим важным источником расчетных данных является агротехника возделывания культур на поливных землях с учетом конкретных условий зоны, хозяйства и возможностей улучшения технологии поливов, внедрения прогрессивных приемов и методов агротехники и новой высокопроизводительной техники.

Эти материалы составляют основную часть информации для задачи.

Нормативы затрат основных ресурсов: труда, техники, удобрений, машиносмен, воды и общие денежные затраты при различных вариантах поливов, а также уровень урожая в данных условиях — определяются в расчете на 1 га посева каждой культуры. Агротехника может быть типовой, тогда для каждого хозяйства (района) берутся одни и те же показатели и достаточно просто вписать их в матричную схему модели, повторяя их запись в каждом из блоков матрицы задачи. Агротехника может быть разработана более детально для каждого хозяйства (района) с учетом конкретных условий почв, уровня механизации и т. д. Тогда для каждого блока матрицы, соответствующего данному хозяйству (району), определяются свои нормативы. Предпочтительнее использовать технологические карты для каждой культуры, построенные с указанием календарных сроков проведения работ.

Оросительные нормы рассчитываются в зависимости от способа полива каждой культуры, числа поливов и поливных норм, т. е. в зависимости от исходов естественного увлажнения.

Нормативы общих прямых денежных затрат, а также затраты труда и техники при орошении, как и затраты воды, зависят от числа поливов. Расчет их проводится по формулам

$$a_1 + \sum_{\mu=1}^{k_1^{(l)}} a_{\mu 1} = d_{11}^{(l)}$$

· · · · ·

$$a_n + \sum_{\mu=1}^{k_n^{(l)}} a_{\mu n} d_{n,n} = d_{n,n}^{(l)}$$

Здесь a_l — затраты без орошения, $k_i^{(l)}$ — число поливов в i -й исход, $a_{\mu i}$ — затраты на один полив, μ — номер полива, γ — номер способа орошения, $d_{11}^{(l)}, \dots, d_{n,n}^{(l)}$ — общие затраты на 1 га орошающей площади i -й культуры.

Поскольку число поливов в разные исходы различно, то затраты дифференцируются в зависимости от исхода. При расчете общих денежных затрат к $d_{\gamma i}^{(l)}$ ($\gamma = 1, 2, \dots, n_1$) прибавляются затраты на амортизацию и текущий ремонт внутрихозяйственной оросительной сети.

Таким образом, каждой культуре с фиксированным способом полива будет соответствовать набор нормативов затрат воды, труда, техники и результат производства — чистый доход, вы-

числяемый как разность между оценкой продукции с 1 га и общими денежными затратами на 1 га. При этом технико-экономические характеристики должны получить как уже освоенные, так и вновь предлагаемые способы орошения.

3. Разработка материалов по отдельным элементам различных технических вариантов строительства оросительной системы.

Технико-экономические нормативы затрат как в натуральных единицах различных материалов, труда, энергии, а также денежные затраты на единицу объема строительства определенных объектов оросительной системы используются для расчета оптимальных вариантов тех ее объектов, для которых затраты линейно зависят от объемов строительства. Эти объемы могут вводиться в модель в качестве составляющих вектора Z и определяться в процессе решения задачи. Таким образом, можно выбрать оптимальный вариант мероприятия по рассолению земель, сопоставляя каждому способу рассоления нормативы затрат, необходимых для доведения 1 га засоленных земель до заданного качественного уровня.

Варианты объектов, затраты на которые являются нелинейными функциями объемов строительства, рассчитываются вне модели. Основные затраты на строительство и результат его вводятся в задачу как ограничения по варианту в целом, и задача решается для каждого варианта отдельно. При этом объекты строительства с линейной функцией затрат входят в каждый расчет в качестве переменных.

4. Учитываются фильтрационные свойства почвы, глубины залегания грунтовых вод, солевой режим почв и другие водно-физические свойства.

5. Обрабатываются данные о влиянии погодных условий на затраты и результат сельскохозяйственного производства.

Таким образом, для расчетов необходимы фактические, нормативные и статистические показатели. Иные из них непосредственно могут использоваться, другие нужно обрабатывать и получать расчетные показатели.

Два следующих параграфа посвящены анализу решения двух задач. Расчеты носят экспериментальный характер ввиду ненадежности некоторых исходных данных, использованных при решении. Однако некоторые из полученных выводов представляются нам практически полезными.

§ 10. Расчет оптимальной организации производства орошаемого участка

Наряду с регулярным орошением больших земельных массивов ближайшей и более доступной перспективой орошения является строительство в хозяйствах оросительных участков за счет подземных вод и местного стока. По мнению многих специалистов, важное значение может иметь строительство таких участков, в частности в хозяйствах Кулундинской степи. Во многих районах, се, особенно юго-западных, местный сток почти отсутствует, однако подсчитанные минимальные эксплуатационные запасы подземных вод представляют ценные резервы для использования их в народном хозяйстве.

Вопрос об организации орошаемых участков должен решаться на основе анализа природных факторов и экономики конкретного хозяйства и района. Структура посевных площадей на участке должна быть выбрана с учетом плановой специализации хозяйства и содействовать интенсификации ведущей его отрасли.

Рассмотрим конкретную задачу о выборе варианта организации орошаемого участка. Расчеты выполнены по материалам СибгипроСельхозстроя, который разработал проект опытного орошаемого участка в Ключевском совхозе Алтайского края.

Технический вариант строительства рассчитан на использование подземных вод с закладкой девяти скважин (глубина откачки 30—35 м, средний дебит скважины 60 м³/час) и трех водоемов с общей полезной емкостью 115 тыс. м³. Коэффициент полезного использования оросительной сети и водоемов принят при расчетах равным 0,765. Ввиду небольшого удельного веса участка в общей системе хозяйства общехозяйственные балансы в модели не учитываются и принято условие, что дефицита рабочей силы на участке не будет. Однако это предположение не обязательно и при наличии сведений от хозяйства о ресурсах рабочей силы, выделенной специально для обслуживания участка, в задачу вводится ограничение по использованию труда.

В качестве критерия оптимальности принят максимум математического ожидания дополнительного чистого дохода (ДЧД) от орошения. Стохастический характер сельскохозяйственного производства учитывается через вероятности повторения разных условий естественного увлажнения. Так как максимум ДЧД определяется величинами урожаев, то естественно характеризовать исходы увлажнения уровнями урожайности основных культур. Поэтому вероятности разных исходов увлажнения вычислялись по функциям распределения $f_i(t)$, $i=1, 2, \dots, n$, рядов уро-

жайностей n ведущих культур. Была высказана гипотеза о логарифмически нормальном распределении урожайностей, т. е.

$$f(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2} \right].$$

Здесь m — среднее арифметическое, σ — среднее квадратичное отклонение ряда значений t_1, t_2, \dots, t_N , t_j — логарифмы урожайностей. В качестве m и σ приняты несмещенные оценки их m^* и σ^*

$$m^* = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N t_j, \quad \sigma^{*2} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (t_j - m)^2$$

Проверка критерия Пирсона и некоторых других критериев нормальности не опровергла принятой гипотезы. Вероятности каждого исхода вычислялись по формулам

$$p_l = \Phi^* \left(\frac{t_l - m}{\sigma} \right) - \Phi^* \left(\frac{t_{l-1} - m}{\sigma} \right)$$

$$t_0 = -\infty, \quad t_3 = +\infty$$

$$\left(\Phi^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-u^2/2} du \right)$$

где t_l, t_{l-1} — границы l -го исхода; $l=1, 2, 3$ — номера исходов засушливого, среднего и влажного.

Например, для ряда урожайностей зерновых в Ключевском районе (см. табл. 28 и 29) распределение лет по засушливости было принято следующим: засушливый исход — при урожайности, не превосходящей 5 ц/га; средний исход — при урожайности от 5 до 8 ц/га; влажный — при урожайности выше 8 ц/га. Вычисленные по приведенной методике вероятности повторения засушливых, средних и влажных лет соответственно равны $p_1=0.55$, $p_2=0.22$, $p_3=0.23$.

Ряды урожайностей других культур в Ключевском совхозе имели по 10—12 членов, что совершение недостаточно для построения функции распределения. Однако изучение тесноты связи их с рядом зерновых показало следующее: коэффициенты корреляции зерновых с картофелем $r_1=0.69$, с многолетними травами $r_2=0.95$, с однолетними травами $r_3=0.90$. Так как связи оказались довольно тесными и близкими к линейным, вероятности повторения разных исходов увлажнения приняты одинаковыми и равными $p_1=0.55$, $p_2=0.22$, $p_3=0.23$.

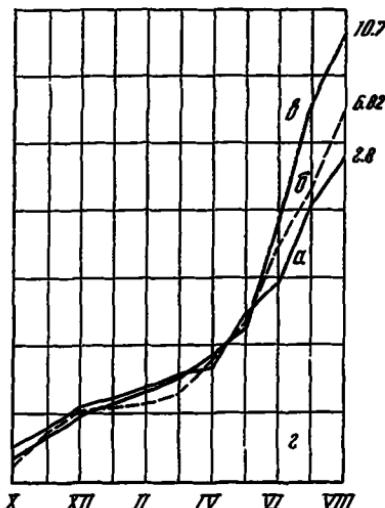
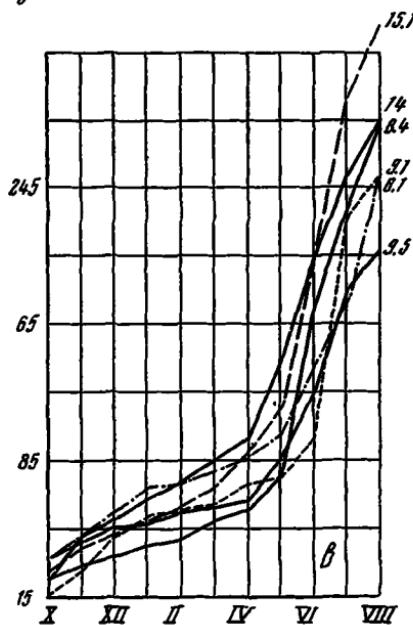
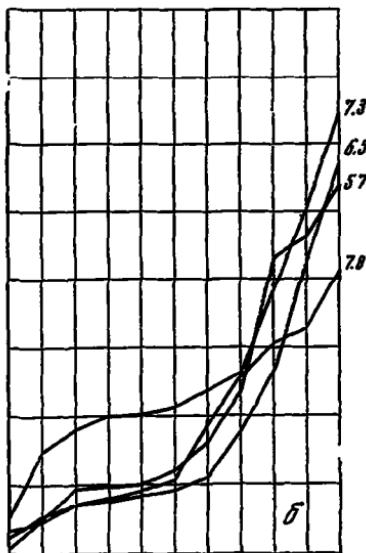
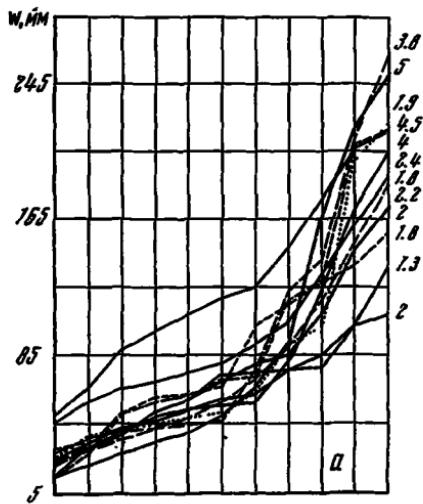
Расход воды, труда и техники на поливы в разные исходы увлажнения меняется. Режим орошения основных культур в засушливый исход был разработан специалистами Омска и Новосибирска ранее и приведен в проекте СибгипроСельхозстроя. Изменение потребности в поливах в средние и влажные годы устанавливалось на основе кривых распределения годовых осадков. При этом ряд осадков разбивался на три группы по годам, соответствующим принятым ранее границам лет по уровням урожайности. В каждой группе лет были построены кривые распределения суммарных годовых осадков по месяцам (фиг. 104—107, а—в). При этом ряды осадков за межвегетационный период и каждый месяц периода вегетации (по данным Ключевской метеостанции за 1936—1965 гг.) были статистически обработаны и установлено нормальное распределение каждого из них. Это позволяет оперировать с усредненными кривыми распределения осадков (фиг. 104—107, г), так как в таком случае средние также подчиняются нормальному закону распределения.

Усредненные кривые распределения осадков позволили приблизенно оценить величину оросительных норм и сроки полива для каждой культуры в средние и влажные годы.

При фиксированном техническом варианте строительства основным вопросом является организация производства на орошаемом участке, т. е. структура севооборота и способы орошения. В нашем примере как структура севооборота, так и площадь участка выбирались в процессе решения задачи на максимум математического ожидания ДЧД от орошения при определенном уровне производства кормов для животноводства и заданных ограничениях на воду и дождевальную технику. Свойства почвы и рельефа участка допускают любые способы полива. Решение задачи выполнено в предположении, что и оросительная сеть на участке построена соответствующим образом. Стоимость строительства оросительной сети при этом возрастает, зато становится возможной более совершенная организация орошения.

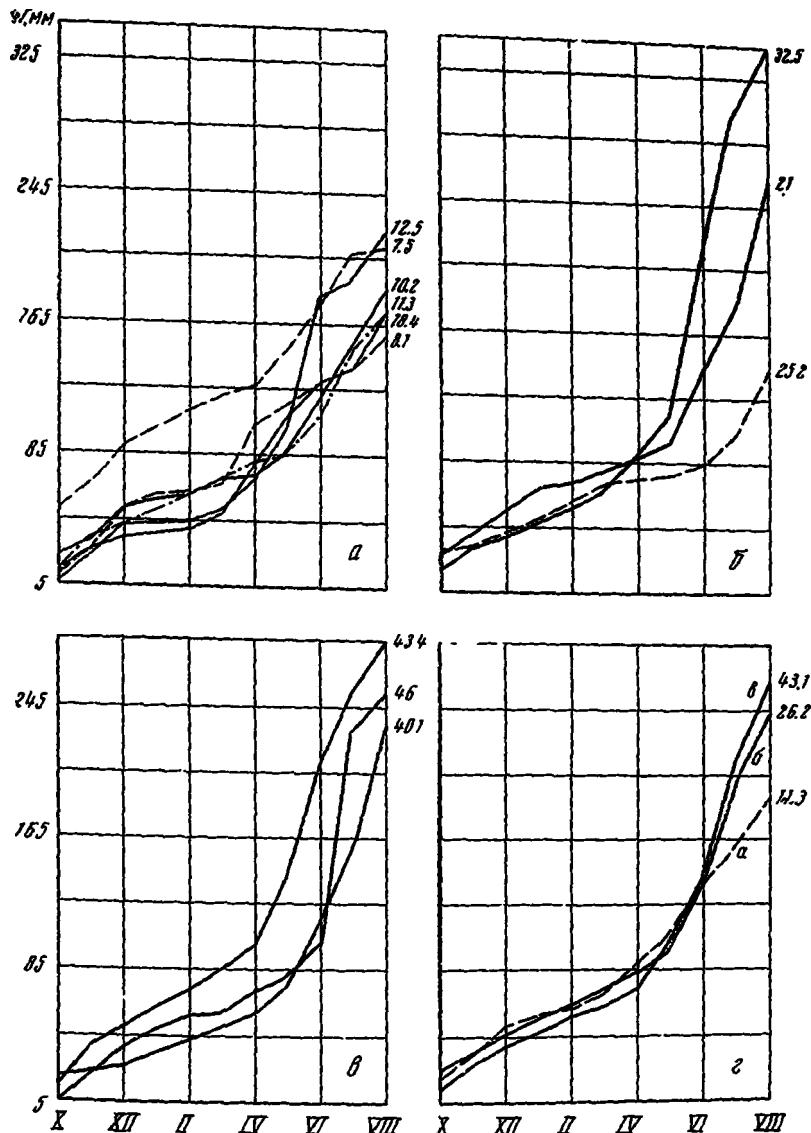
Рассматриваемое хозяйство специализируется на зерновых и крупном рогатом скоте молочно-мясного направления. Производство овощей и картофеля ограничивается внутренними потребностями хозяйства и зафиксировано поливными участками по 42 га. Затраты воды и дождевальной техники на эти культуры в каждый исход естественного увлажнения вычислялись отдельно и вычитались из соответствующих ресурсов. Процентное соотношение культур в севообороте выбиралось из неравенства

$$\underline{\alpha}_{\beta} \leq \sum_l x_{l\beta}^{(t)} \leq \bar{\alpha}_{\beta}, \quad t = 1, 2, \dots, n_1, \quad \sum_l \sum_l x_{l\beta}^{(t)} = z, \quad l \text{ — фиксировано.}$$



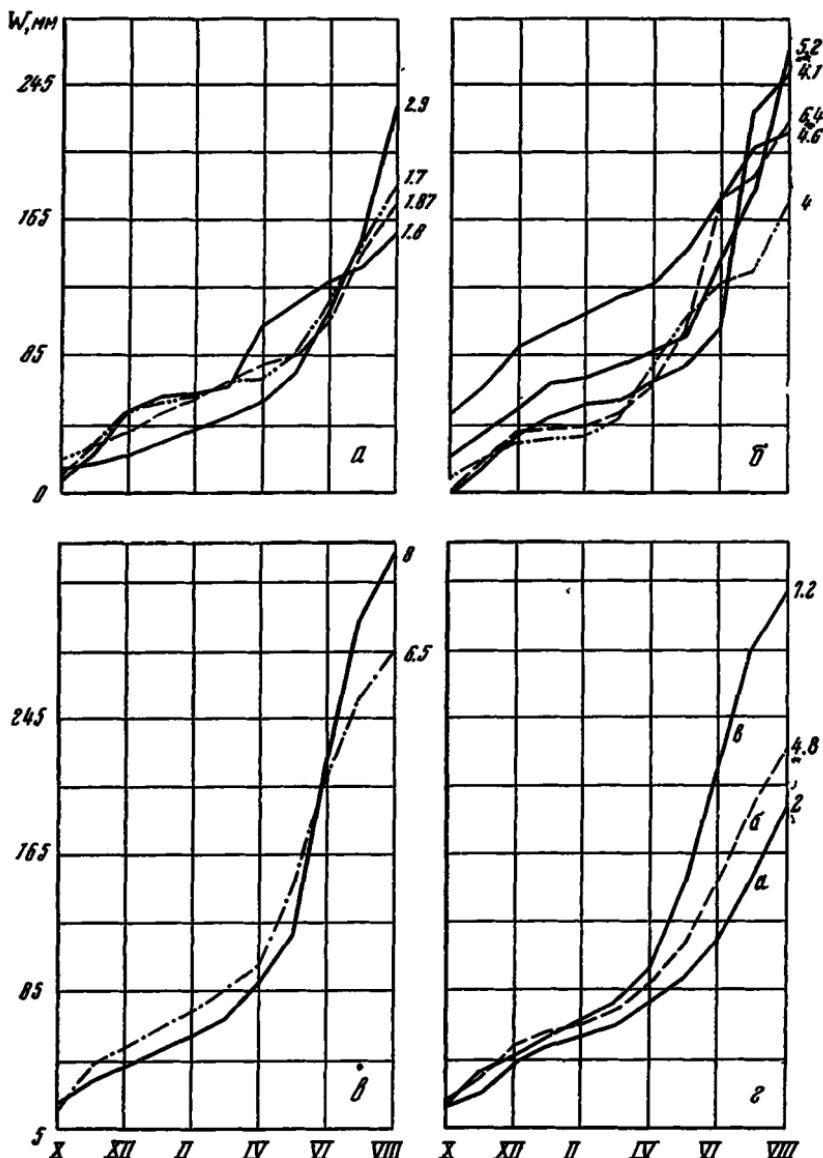
Фиг. 104. Распределение осадков W для зерновых в разные исходы увлажнения

a — засушливый; *b* — средний; *c* — влажный; *d* — усредненные кривые



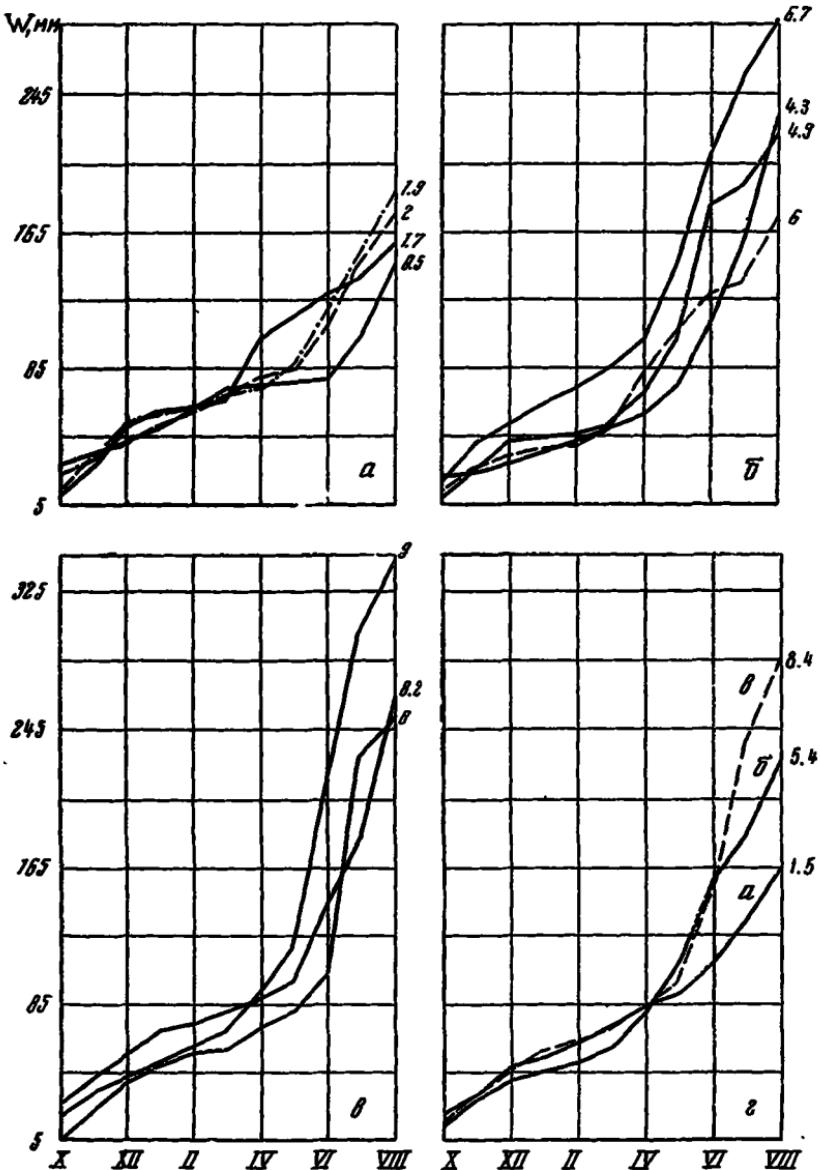
Фиг. 105. Распределение осадков W для картофеля
в разные исходы увлажнения

а — сасушливый; б — средний; в — влажный, г — усредненные кривые



Фиг. 106. Распределение осадков W для многолетних трав
в разные исходы увлажнения

a — засушливый; *б* — средний; *в* — влажный; *г* — усредненные кривые



Фиг. 107. Распределение осадков *W* для однолетних трав
в разные исходы увлажнения

a — засушливый; *б* — средний; *в* — влажный; *г* — усредненные кривые

Здесь $x_{ij}^{(l)}$ — площадь i -й культуры при j -м способе полива в l -й исход увлажнения, z — площадь орошаемого участка, n_1 — число культур в орошающем севообороте, a_i и \bar{a}_i — соответственно нижняя и верхняя доля i -й культуры в севообороте. Для зерновых, например, было принято $a_1=0.1$, $\bar{a}_1=0.35$, для кукурузы на зеленый корм $a_2=0.1$, $\bar{a}_2=0.2$ и т. д. Естественно, что эти границы должны устанавливаться специалистами сельского хозяйства с учетом всех условий и возможностей соответствующего колхоза или совхоза.

Пусть рассматривается хозяйство, расположенное в зоне неустойчивого увлажнения. Это означает, что потребность в поливах меняется от года к году. Поэтому если в засушливый исход дождевальные машины и ресурсы воды используются на орошающем участке, то в более благоприятные годы, когда часть поливов на орошающем участке снимается либо дается неполными нормами, высвободившиеся ресурсы воды и дождевальной техники могут использоваться для орошения площадей, примыкающих непосредственно к участку. Для организации подвижного орошения к дождевальной установке приобретается специальное оборудование, выпускаемое промышленностью. В состав оборудования входят передвижная насосная станция и быстро сборный трубопровод [26].

Математическая формулировка задачи: найти максимум

$$\sum_{l=1}^3 \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^m p_{lj} c_{ij}^{(l)} x_{ij}^{(l)} \quad (10.1)$$

при условиях

$$\underline{a}_{il} \leq x_{ij}^{(l)} \leq \bar{a}_{il} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} (l = 1, 2, \dots, n_1) \quad (l \text{ — фиксировано}) \quad (10.2)$$

$$\sum_l \sum_j x_{ij}^{(l)} = z \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} (l = 1, 2, \dots, n_1) \quad (10.3)$$

$$\sum_l x_{ij}^{(1)} = \sum_l x_{ij}^{(2)} = \sum_l x_{ij}^{(3)} \quad (l = 1, 2, \dots, n_1) \quad (10.4)$$

$$\sum_l \sum_j a_{ij}^{(l)} x_{ij}^{(l)} \leq A - a^{(l)} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad (10.5)$$

$$\sum_l \sum_j q_{ij}^{(l)} x_{ij}^{(l)} \leq Q - q^{(l)} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} (l = 1, 2, 3) \quad (10.6)$$

$$\sum_l \sum_j b_{ij}^{(l)} x_{ij}^{(l)} \geq B \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad (10.7)$$

$$x_{ij}^{(l)} \leq S_l \quad (i = 1, 2, \dots, n_1; l = 1, 2, 3) \quad (10.8)$$

$$x_{ij}^{(l)} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n_1; j = 1, 2, \dots, m; l = 1, 2, 3) \quad (10.9)$$

Здесь $c_{ij}^{(l)}$ — дополнительный чистый доход с 1 га i -й культуры при j -м способе полива и l -м исходе увлажнения. Для культур, рассчитанных на подвижное орошение в средний и влажный исходы увлажнения, величина ДЧД в засушливый исход $c_{ij}^{(1)} = 0$. Условия (10.2) и (10.3) на выбор севооборота пояснялись выше. Система (10.4) выражает требование постоянства площади каждой культуры в любой исход увлажнения, суммирование здесь выполняется по способам полива. Условиями (10.5) и (10.6) учитывается расходование машино-часов дождевальной техники. (Предполагается, что хозяйство располагает четырьмя дождевальными машинами марки ДДА-100 М, т. е. $A = 4 \cdot 800 = 3200$ машино-часов). Ресурсы воды $Q = 1234 \text{ м}^3$, $a_{ij}^{(l)}$, $l = 1, 2, 3$ — затраты машинной техники, $q_{ij}^{(l)}$ — затраты воды на поливы овощей и картофеля, $a_{ij}^{(l)}$, $q_{ij}^{(l)}$ — соответствующие нормативы затрат на 1 га каждой культуры. Ограничениями (10.7) задается минимальный объем производства кормов на орошаемом участке ($B = 1000 \text{ ц}$ кормовых единиц); $b_{ij}^{(l)}$ — нормативы выхода кормовых единиц с 1 га. Неравенства (10.8) выражают требование ограниченности площадей подвижного орошения. На подвижном орошении в качестве возможных культур рассматривались зерновые, картофель, кормовая свекла и однолетние травы при $S_i = 100 \text{ га}$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

Ниже приведем анализ решения задачи (10.1) — (10.9) по программе [15].

Решение выполнено как в предположении возможности подвижного орошения, так и при отсутствии его. В табл. 33 (без учета овощей и картофеля) приведены возможные пределы в процентах культур в севообороте, а также процентный состав их, выбранный в результате решения задачи на электронной вычислительной машине М-20.

Размерность задачи (10.1) — (10.9) при планировании подвижного орошения была равна 111×54 , без подвижного орошения из условий задачи выпадают ограничения вида (10.8). При $n - n_1 = 4$ размерность задачи в этом случае оказалась равной 103×46 . В варианте с подвижным орошением оказалось возможным поливать дождеванием дополнительно 100 га картофеля и 6 га кормовой свеклы в средние по влажности годы, а также 84 га однолетних трав и по 100 га зерновых, картофеля и кормовой свеклы во влажные годы. Дополнительный чистый доход от участка в целом и площадей подвижного орошения (с учетом овощей и картофеля) составляет в среднем 161 тыс. руб. в год. Выход кормовых единиц от орошаемых кормовых культур составил примерно 1700 ц.

В варианте, не предусматривающем возможности подвижного орошения, структура севооборота выбрана несколько иной по

Таблица 33

Культуры	Пределы культуры в севообороте, %	Процентный состав, выбранный в результате решения (без учета овощей и картофеля)	
		при планировании подвижного орошения	без подвижного орошения
Зерновые товарные	10—35	10	10
Свекла кормовая	5—20	5	5
Многолетние травы	30—50	30	30
Бахчи (продовольственные и кормовые)	5—20	20	5
Бобы кормовые	5—20	10	10
Кукуруза на силос и зеленый корм	10—20	10	10
Сахарная свекла продовольственная	10—20	5	20
Однолетние травы	10—30	10	10
Итого:		100	100

сравнению с предыдущим вариантом (см. табл. 33). Выбиралось более высокое содержание (20%) дорогостоящей сахарной свеклы (напомним, что критерий оптимальности задачи — максимум математического ожидания ДЧД). Это приводит уже к некоторому изменению специализации хозяйства — под поля сахарной свеклы должно быть отведено около 73 га. Выход кормовых единиц с участка составляет 1350 ц, размер ДЧД — 135 тыс. руб.

* За счет большого содержания в севообороте на орошающем участке сахарной свеклы превышение ДЧД в варианте с подвижным орошением составляет 26 тыс. руб. в год по сравнению с вариантом без подвижного орошения. Однако в последнем варианте оказывается, что в средний по влажности год используются лишь две из четырех дождевальных машин, а во влажный год будут простаивать три машины и остаются недоиспользованными 320 тыс. м³ воды.

* Расчет трудовых затрат показывает, что на обслуживание участка площадью 450 га (вариант без подвижного орошения) требуется в среднем 55 человек, для участка в 480 га (вариант с подвижным орошением) — 60 человек, а на организацию подвижного орошения в средний год — 12 человек, во влажный год — 23 человека дополнительно.

Следовательно, вопрос об организации подвижного орошения в хозяйстве, имеющем небольшую, постоянно орошающую площадь (порядка 450—500 га), должен решаться исходя из

конкретных условий: наличие рабочей силы, дождевальной техники, потребности развития тех или иных отраслей.

Сравнение вариантов по эффективности строительства, которая может быть определена как разность между ДЧД и приведенными капиталовложениями при нормальном коэффициенте эффективности, равном 0,25, дает следующее. Принимая размер капиталовложений на 1 га орошаемой площади участка в размере 1000 руб., а дополнительные затраты на подвижное орошение в размере 20 тыс. руб., — для варианта с подвижным орошением получаем $161.1 - 0.25 \cdot (477 + 20) = 36.7$ тыс. руб., во втором варианте $135 - 0.25 \cdot 448 = 23$ тыс. руб., т. е. в этом отношении вариант с подвижным орошением более эффективен.

Мы провели сравнение двух возможных вариантов эксплуатации орошаемого участка: с использованием остающихся в благоприятные годы ресурсов на подвижное орошение и без него. Естественно, что требование полного использования ресурсов воды, труда, техники рассчитано на высокую организацию производства и нуждается в экспериментальной проверке, особенно на крупных массивах регулярного орошения.

§ 11. Расчет оптимальной эффективности Алейской оросительной системы (АОС)

Очень кратко приведем результаты расчетов.

Алейская оросительная система, введенная в строй в 1934—1938 гг., является одной из лучших инженерных оросительных систем Западной Сибири. Орошаемый массив АОС площадью около 10 тыс. га расположен на юго-востоке Кулундинской степи. Узкой полосой в 3—7 км он тянется более чем на 40 км по левобережью реки Алей. Средний водозабор из реки Алей достигает 40 млн. м³ в год.

Алейская оросительная система обслуживает три хозяйства: Рубцовский свеклосовхоз, колхозы «Путь к коммунизму» и имени Ленина. По своей производственной структуре все три хозяйства являются по существу многоотраслевыми.

Задача заключалась в определении математического ожидания чистого дохода от системы в целом и решении следующих вопросов: 1) определение специализации каждого из трех хозяйств, обслуживаемых АОС; 2) установление структуры посевых площадей на орошаемых и богарных землях хозяйств; 3) выбор наиболее экономичных способов поливов: поверхностный по бороздам или дождевание машинами марок ДДА-100М, ДДП-30С, ДДН-45; 4) установление потребности в дополнительной закупке дождевальной техники по маркам машин с учетом запланированных в каждом хозяйстве средств на закуп-

ку; 5) определение рационального варианта кормления скота.

Задача решалась на электронной вычислительной машине М-20 по приведенной выше модели с рядом упрощений, вызванных, с одной стороны, отсутствием исходной информации по некоторым вопросам, с другой стороны, отсутствием программы для решения задач достаточно больших размерностей. Поэтому разыскивалось решение для среднего по засушливости математически ожидаемого года.

В задаче ставилось условие обязательного выполнения плана государственных закупок. Ограничение по воде учитывалось в наиболее напряженный период водопользования — июль месяц с учетом потерь на испарение, фильтрацию, сброс, а также потребностей водопользователей помимо хозяйств АОС. По каждому хозяйству ставились ограничения по количеству богарных и орошаемых земель, по размерам сенокосов и пастищ; учитывались условия обеспечения кормами планируемого поголовья скота в каждом хозяйстве, а также ограничения по рабочей силе и дождевальной технике (по маркам машин). Размерность задачи равна 158×47 .

В результате анализа решения получены следующие основные выводы:

1. Наиболее выгодной в условиях хозяйств АОС оказывается специализация на производстве товарного зерна и фабричной сахарной свеклы. Выгодно также некоторое перераспределение плана государственных закупок растениеводческой продукции между хозяйствами системы в целях лучшего использования производственных условий каждого из них.

2. Орошать в условиях Алтайского края выгодно свеклу, овощи, кукурузу. Особенно эффективным оказывается орошение сахарной свеклы.

3. Наиболее экономичным способом полива является дождевание машинами марки ДДА-100М. В силу этого все средства хозяйства, выделенные на закупку техники, должны быть использованы на приобретение ДДА-100М. Наличие засоленных почв и высокое залегание грунтовых вод также говорят в пользу орошения дождеванием.

Поверхностный способ полива по полосам является эффективным на кукурузе, картофеле. Однако при жестких лимитах воды орошение дождеванием может и на пропашных культурах оказаться более выгодным.

4. Типы кормления скота выбираются в зависимости от степени распашки земель и наличия хороших естественных угодий, которые дают дешевый корм и позволяют использовать пашню и другие ресурсы для производства товарной растениеводческой продукции.

5. Сопоставление оценки экономической эффективности оптимального плана с соответствующими показателями, запланированными хозяйствами на 1965 г. при одинаковых нормативах затрат и результатов (выход продукции), показывает следующее. Структура посевов на боярке и орошаемых землях по планам хозяйств отличается от оптимальной как по специализации, так и по размещению культур на орошаемых и боярских землях. Хозяйствами каждая культура планируется частью на боярских, частью на орошаемых землях, в то время как по оптимальному плану поливаются лишь культуры, наиболее отзывчивые на орошение. Обнаруживается также большая разница и в планируемых способах поливов. Приведем сравнительные показатели экономической эффективности АОС в целом (табл. 34).

Таблица 34

Показатели экономической эффективности АОС

Показатели эффективности	Суммарный чистый доход, млн руб.	ДЧД от орошения, млн руб
По планам, составленным в хозяйствах	3.6	0.635
По оптимальному плану	4.4	1.074
В % к плану, составленному в хозяйствах	121.1	168.9

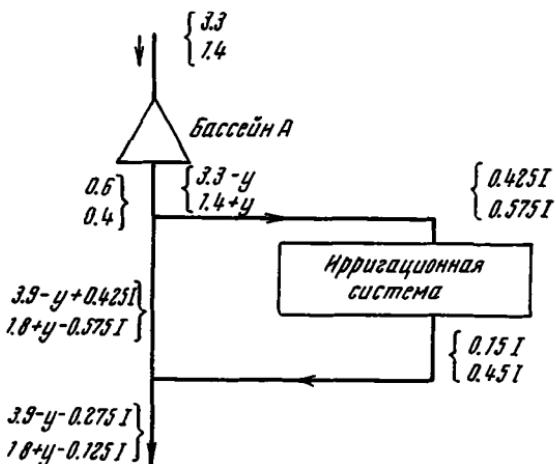
§ 12. Простейший пример нелинейной задачи

Введение в функционал нелинейных зависимостей затрат на строительство водоемов от их емкостей, а также затрат на строительство ирригационной системы приводит к задаче с нелинейной максимизируемой функцией. Проиллюстрируем это на примере, используя модель [18] зарегулирования речного стока водоемом емкости y .

Пусть известно, что сельскохозяйственная структура орошаемой площади требует отведения в ирригационную систему количества воды I с известным коэффициентом α использования воды на орошение. В качестве ограничений задачи рассматриваются условия неотрицательности потоков в реке ниже водоема и после сброса в реку остатков ирригационных вод. Ставится задача максимизации прибыли от системы, т. е. функционала

$$L = B(I) - k_1(y) - k_2(I)$$

где $B(I)$ — максимальный доход от снабжения водой орошаемого участка, $k_1(y)$ — денежные затраты на строительство бассейна, $k_2(y)$ — капитальные вложения на строительство ирригационной системы. Переменные y и I неотрицательны: $y \geq 0, I \geq 0$, и задача рассматривается для двух предсказанных гидрологией сезонов в году — маловодного и многоводного. Схема распределения воды в оба сезона такова:



Верхние цифры указывают поток в течение влажного сезона, нижние — в течение засушливого; числа 0.6 и 0.4 обозначают сток в рассматриваемые сезоны. Ставится требование неотрицательности потоков во всех частях системы, что эквивалентно следующим независимым ограничениям:

$$3.3 - y \geq 0$$

$$3.9 - y - 0.425I \geq 0$$

$$1.8 + y - 0.575I \geq 0$$

Выпишем выражения отдельных составляющих максимизируемой функции.

Согласно [18], капиталовложения на строительство водоема $k_1(y) = 43y/(1+0.2y)$; в функции затрат на строительство ирригационной системы $k_2(I)$ учитывается необходимость строительства насосной станции для подкачки воды, для чего вводятся две переменных I_1 и I_2 , где I_1 — ненакачиваемая часть ирригационной воды, I_2 — накачиваемая часть ее, $k_2(I)$ является

линейной функцией от I_1, I_2, I_1^*, I_2^* , где

$$I_i^* = \begin{cases} 1, & I_i > 0 \\ 0, & I_i = 0, \quad (i = 1, 2) \end{cases}$$

k_2 имеет вид

$$k_2(I) = 44I_1 + 64I_2 + 4.5I_1^* + 0.5I_2^*, \quad I_1 + I_2 = I$$

Коэффициенты вычислены с учетом стоимости строительства насосных станций и работ по отведению ирригационных вод.

Подсчет выражения чистой прибыли от ирригации $B(I)$ усложнен в силу нескольких причин: а) подача воды, вызываемая подкачкой, прерывна; б) предельные количества ирригационной воды не могут рассматриваться как постоянные значения. Считая, что предельное значение дохода равно

$$2.1 + \frac{3.2}{1 + 0.2I}$$

и интегрируя его по I в пределах от нуля до I , получим функцию дохода в виде

$$2.1I + 36.8 \log(1 + 0.2I)$$

Принято, что ежегодная стоимость эксплуатации, обслуживания и амортизации равна $0.5I_1 + 1.56I_2$.

Следовательно, ежегодная чистая прибыль с учетом так называемого коэффициента надежности

$$B(I) = 45.4I_1 + 15.39I_2 + 1045 \log(1 + 0.2I)$$

Максимизируемая функция имеет вид

$$L' = 1.4I_1 + 48.7I_2 + 1045 \log(1 + 0.2I) - 4.5I_1^* - 0.5I_2^* - k_1(y)$$

$$k_1(y) = \frac{43y}{1 + 0.2y}$$

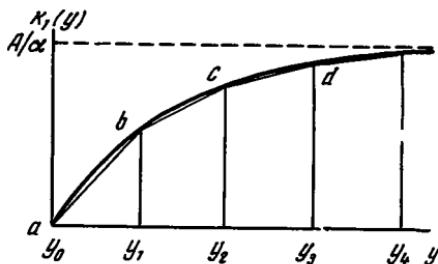
Для сведения рассматриваемой задачи к задаче линейного программирования функция L заменяется приближенно линейной функцией новых, специально для этой цели введенных переменных. Для наглядности рассмотрим выражение $k_1(y)$. Функции вида $k_1(y)$ представлены на фиг. 108. Выбираем некоторые значения y , подсчитаем соответствующие им значения k_1 . Отложим эти точки на графике, последовательно соединим их хордами и получим ломаную линию, аппроксимирующую кривую $k_1(y)$. Пусть $y = \{0, 1, \dots, n\}$. Любое значение величины y в пределах от 0 до n может быть выражено в виде весовой суммы

чисел $0, 1, 2, \dots, n$ с неотрицательными весами $\beta_0, \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = 1$, т. е.

$$y = \beta_0 y_0 + \beta_1 y_1 + \dots + \beta_n y_n.$$

Определенным хордам рисунка удовлетворяют те схемы, в которых положительны лишь два соседних веса. Например, если $n=3$ и $y_i=i$, т. е.

$$y = 0\beta_0 + 1\beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3$$



Фиг. 108

то значению $y=1.5$ соответствуют ненулевые значения $\beta_1=0.5$, $\beta_2=0.5$, а $\beta_3=0$ и вообще каждому значению y соответствует определенная пара весов и наоборот. При такой схеме значение функции на аппроксимирующую хорде равно среднему взвешенному значению на ее концах, следовательно, приближение значение $k_1(y)$ выразится в виде суммы

$$k_1(y) = \beta_0 k(y_0) + \beta_1 k(y_1) + \dots + \beta_n k(y_n)$$

т. е. функция линеаризуется.

Следовательно, в задаче будет определяться система чисел β_i , которые должны быть введены в условие задачи вместо y . Функция $B(I) - k_2(I)$ также может быть заменена линейным приближением по тому же принципу с помощью неотрицательных весов ν_i . Таким образом, экстремальная функция получается линейной относительно весов, причем приближение полиномов к функциям $k_1(y)$, $B(I)$ можно сделать как угодно точным, выбирая достаточно малые хорды. Задача приведена к стандартной задаче линейного программирования. Особенностью этой задачи являются дополнительные условия на веса: в весовом ряду лишь две соседние переменные положительны, а остальные равны нулю.

Решение задачи можно считать приемлемым, когда значения линеаризованных функций удовлетворяют заданной аппрокси-

мации, т. е. попадают на хорды выбранной аппроксимирующей ломаной линии $abcd$ (см. фиг. 108). Линеаризованная задача решается в несколько этапов. Сначала проводится предварительный анализ системы ограничений, позволяющий иногда определить значения некоторых весов. Затем решается обычная задача линейного программирования, после чего проверяется, удовлетворяют ли полученные значения весов β_1, ν_1 условиям: $\beta_1 + \dots + \beta_n = 1$, $\nu_1 + \dots + \nu_n = 1$ и лишь два соседних значения β_i и ν_n положительны. Если решение оказывается неприемлемым, то соответствующие веса полагаются равными нулю и задача решается снова с оставшимися β_i, ν_i . Например, если в результате первого шага окажется, что все веса, кроме соответствующих крайним правым точкам кривых, равны нулю, то это означает, что линеаризация соответствующей функции осуществляется по хорде, соединяющей начальное и конечное значения функции. Такое приближение слишком грубо, поэтому полагают $\beta_n = \nu_m = 0$ и решают задачу снова. Такой процесс продолжается до получения приемлемого решения, которое и является оптимальным.

§ 13. Применение математических методов при моделировании системы скважин

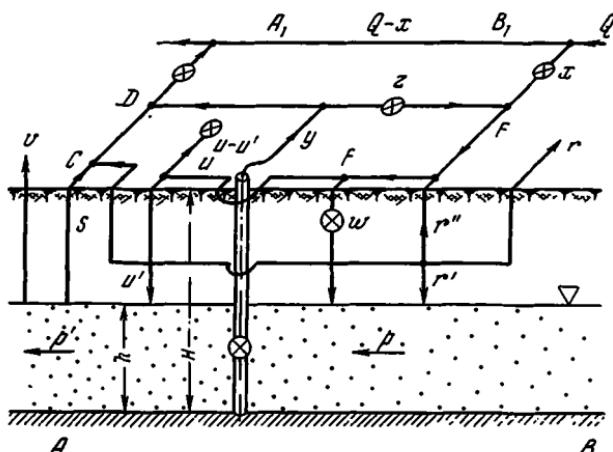
Приведем еще одну математическую модель, разработанную в Гарвардском университете [27]. Исследования проводились в двух направлениях: 1) борьба с заболачиванием и засолением земель равнины реки Инда, 2) увеличение сельскохозяйственной продукции.

Изучались следующие задачи: 1) выбрать конструкцию скважин при различных комбинациях расположения трубчатых колодцев, поверхностных дренажей, подземных дренажей и канала, облицованного уплотненной эмульсией; 2) определить оптимальное количество, размеры и глубину скважин для ирригации проектных площадей и установить оптимальный режим откачки в течение года, чтобы максимизировать сельскохозяйственную продукцию и контролировать засоленность ирригационной воды; 3) изучить механизм солевого баланса, включающий: а) выщелачивание из корневых зон; б) движение солей в грунтовой воде; в) взаимодействие между соседними областями; происходящее от стока соленой воды по водным путям; г) прогноз величины накопления солей в водоносном слое в течение следующих пяти—десяти лет.

Математическая модель состоит из двух отдельных частей, которые объединяются при конечном определении оптимальных характеристик по всему гидро-агрономическому процессу. Пер-

вая часть модели аппроксимирует гидрологические условия притока и оттока вод реки или канала, фильтрацию из канала, движение грунтовых вод, испарение, транспирацию и дренаж. Эта часть учитывает такие технологические возможности, как различные сочетания насосов, различное расположение сооружений вертикального и горизонтального дренажа и применение спределенной облицовки каналов.

Вторая часть состоит из стоимостных и прибыльных функций, которые необходимы для оценки различных проектов. В этой части учитываются цены урожая, затраты строительных



Фиг. 109

материалов, труда, бюджетные ограничения и другие экономические факторы.

Объемная модель задачи в окрестности одной скважины представлена на фиг. 109, где даны: вертикальный разрез грунта AB — водоупор; ∇ — уровень грунтовых вод и примыкающий план поверхности земли A_1B_1 — канал, CD — горизонтальная дrena, FF — ирригационная сеть, при этом введены обозначения: r — боковой приток грунтовых вод; r' — боковой отток грунтовых вод; H — эффективная глубина скважины; h — высота поверхности грунтовых вод; S — приток грунтовых вод в горизонтальную дрену; v — испарение с поверхности грунтовых вод; Q — поток воды в канале; x — количество воды, подаваемой в оросительную систему; $Q-x$ — сброс; y — вся вода, откачиваемая из скважины; z — количество воды, подаваемой из скважины в ирригационную сеть; $y-z$ — сброс в дрену; w — утечка воды из канала на грунтовые воды; u — ирригационная

вода, поступающая из сети; u' — часть ирригационной воды, стекающая на грунтовые воды; $u - u'$ — вода, идущая на трапицию растениями; r — общее количество осадков; r' — инфильтрация; r'' — ливневые осадки в оросительной сети, $r - r' - r'' = r'''$.

Стрелки указывают направление движения воды, знаком \otimes отмечены элементы, влияющие на стоимость. Например $\otimes\omega$ означает, что для того чтобы утечка воды из канала уменьшилась или прекратилась вовсе, необходимо вложить средства на проведение противофильтрационных мероприятий. В задаче определяется максимальное значение дохода в зависимости от пяти факторов: $x, y, w, S, u - u'$.

При этом основными условиями задачи являются:

1) уравнение неразрывности (водный баланс в водоносном горизонте)

$$\Delta h / \Delta t = p - p + r' + w - y + u' - S - v$$

2) уравнение баланса воды в ирригационной системе

$$u = x + z - w$$

3) если скважина работает на максимальный дебит d_c до достижения заданной глубины понижения грунтовых вод, то

$$y = y_{\max} \quad \text{до } 0 < d < d_c$$

при этом количество воды z , которое желательно подавать на поля, удовлетворяет соотношению

$$z = u - x + w$$

если $u_m = \text{const} = k$, то в засушливые годы x мало и z увеличивается:

4) скорость движения молекул солей через водоносный горизонт и закономерности их накопления определяются в результате решения уравнения Лапласа. Размер матрицы, с которой работала машина, равен 140×140 . Изучалась одновременная работа скважины и каналов и находилось соотношение количеств воды, сбрасываемых в море (16%) и в дрену (84%). Глубина скважин, расстояние между скважинами и первичная концентрация солей считались заданными величинами.

Математическая модель построена для четырех сезонов года. Важной особенностью машинной программы является ее способность использовать синтезированные данные по количеству выпадающих осадков и дебитах рек и каналов за прошедшие 50 лет. Синтезированные данные получаются в результате схематического процесса с использованием статистических параметров. Эти параметры полностью соответствуют данным

стандартных статистических испытаний. Полученные таким образом данные обеспечивают возможность объективной оценки проекта данной системы скважин.

Программа составлена для вычислительной машины IBM-7090 с использованием языка автоматического программирования ФОРТРАН. Она обеспечивает гибкое, подробное и относительно полное моделирование изменения уровня подземных вод для районов с первоначальной земной поверхностью и неоднородными почвенными характеристиками.

Программа счета разделяется на три части.

1. Исполнительная подпрограмма предусматривает проведение вычислений, считывание исходных данных и выполнение логических операций, что позволяет осуществить выбор между несколькими вариантами.

2. Управляющая подпрограмма рассчитана на выполнение основной части логических и арифметических вычислений, необходимых для обобщения гидрологических исходных данных и для моделирования функционирования системы. Частью этого упорядочивания являются запись и обобщение результатов.

3. «Обратная связь» учитывает изменение таких величин, как расход воды, испарение в зависимости от времени года и глубины залегания поверхности грунтовых вод.

Стochasticеская природа гидрологического режима воспроизводится введением соответствующих случайных компонент в моделируемый процесс. В программе используются два типа случайных компонент, которые заданы с нормальным (гауссовым) или логарифмически нормальным распределением вероятностей.

Модель была откалибрована и усовершенствована в несколько этапов. На каждой стадии моделирования действительных условий, существовавших до и после проведения ирригации в долине реки Инда, полученные данные сравнивались с долгосрочными значениями полевых исследований. В результате сравнения проводилось необходимое согласование параметров.

На основании результатов вычислений получены следующие выводы.

1. Системы трубчатых колодцев могут эффективно использоваться для ограничения и ликвидации заболачивания и заселения на больших площадях Западного Пакистана.

2. Системы скважин могут явиться важным дополнительным источником орошения для увеличения сельскохозяйственной продукции в долине реки Инда.

3. В образовавшейся области Пенджаб минимальный размер проектных площадей должен быть около 1 млн. акров (400 тыс. га), чтобы боковая инфильтрация подземных вод с

прилегающих участков не была слишком большой и не затрудняла осушения проектной площади. Оптимальное расстояние между скважинами на этой проектной площади равно 1,5—5 км в зависимости от характеристики почвы и засоления подземной воды, эффективная глубина колодцев — 60—100 м.

4. Поверхностный дренаж при отводе соленых грунтовых вод из трубчатых колодцев на площадях с засоленной грунтовой водой должен составлять приблизительно 10% от общего объема откачки во всей области. При этом увеличение засоления в водоносном пласте может бытьдержано внутри допустимых пределов в течение последующих 50 лет.

5. Облицовка распределительной системы асфальтовой уплотненной эмульсией или подобным составом для ограничения утечки оправдывается, если только стоимость покрытия и содержание их меньше, чем 2 цента на 1 кв. фут. При существующей технике облицовки каналов нельзя рекомендовать ее как средство предотвращения фильтрации воды.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. В. Минаев. Экономичное размещение скважин вертикального дренаажа — Гидротехника и мелиорация, 1958, № 10.
2. Л. В. Капиторинч. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. Изд-во АН СССР, 1960.
3. С Гасс. Линейное программирование. Физматгиз, 1961.
4. Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. Задачи и методы линейного программирования. «Советское радио», 1964.
5. Д. Гейл. Теория линейных экономических моделей. ИЛ, 1963.
6. С. М. Shetty. Sensitivity analysis in linear programming — J. Industr. Engng., 1959, 10, N 5.
7. S. Vagnat. Stability of the solution to a linear programming problem. — Operat. Res. Quart., 1962, 13, N 3.
8. Л. И. Несторенко, В. Г. Пряжинская. Сравнительный анализ устойчивости решения задачи линейного программирования. — В сб.: Оптимальное планирование, вып. 3. Новосибирск, 1966.
9. A. Madansky. Methods of solutions of the linear programming problems under uncertainty. — Operat. Res. Quart., 1962, 10, N 4.
10. G. B. Dantzig. Linear programming under uncertainty — Management Sci., 1955, 1.
11. A. Madansky. Inequalities for stochastic linear program problems. — Management Sci., 1960, 6.
12. A. Madansky. Use of the «expected value solution» in linear programming under uncertainty — Actes 2 Congr. internat. research operational, Aix-en-Provences, 1960.
13. В. А. Кардаш, В. Г. Пряжинская. О стохастике задачи планирования орошаемого земледелия — В сб.: Оптимальное планирование, вып. 3, Новосибирск, 1966.
14. Е. С. Вейцель. Теория вероятностей. «Наука», 1964.
15. Р. А. Звягина. Программа реализации на М-20 модифицированного симплекс-метода для решения общей задачи линейного программирования. — В сб.: Оптимальное планирование, вып. 1. Новосибирск, 1964.

16. В. Г. Пряжинская, В. А. Кардаш. Отчет об оптимальных планово-экономических расчетах по орошаемому земледелию на ЭВМ, Новосибирск, СО АН СССР, 1965.
17. О. Г. Соломония. Применение методов линейного программирования при гидромелиоративном проектировании.— Труды Ин-та энергетики АН ГрузССР, 1962, 16.
18. A. M a a s, M. H u f s c h m i d t a. of Design of water resource systems — Cambridge, Harvard Univ. Press, 1962
19. Орошаемое земледелие. М., Россельхозиздат, 1965
20. А. М. Аллатьев. Водопотребление культурных растений и климат. Режим орошения сельскохозяйственных культур. «Колос», 1965.
21. А. П. Сладнев. Засухи на юго-востоке Западной Сибири, их признаки и повторяемость.— В кн: География Западной Сибири. Новосибирск, 1965
22. К. Дж. Эрроу, Л. Гурвиц, Х. Узазава. Исследования по линейному и нелинейному программированию. ИЛ, 1962.
23. Указания по методике определения экономической эффективности капитальных вложений и новой техники в мелиорации. М., Всесоюз. ин-т гидротехн. и мелиорации, 1964.
24. В. А. Кардаш, В. Г. Пряжинская. Линейная модель оптимальной внутрехозяйственной организации использования оросительных систем.— Экон. и матем. методы, 1966, 2, вып. 3.
25. И. А. Кузник. Режим групповых вод на оросительных системах Заволжья.— Труды Омского с.-х. ин-та, 1965, 57.
26. Материалы к комплектам поливного оборудования для орошения участков площадью 25—150 га. Росгипроводхоз, 1965.
27. Влияние орошения на вторичное засоление, химический состав и режим подземных вод.— Труды Ташкент. междунар. гидрогеол. симпозиума. «Наука», 1964

ПРИЛОЖЕНИЕ К ЧАСТИ ПЕРВОЙ § 7

Фильтрация с учетом начальных градиентов пласта и слабопроницаемого водоупора

Фильтрация в тонкодисперсных средах (глины, суглинки и т. п.), благодаря аномальным свойствам связанный воды, отличается от фильтрации в средах с более крупным размером пор (пески) наличием начальных градиентов напора, ниже которых тонкодисперсная среда практически непроницаема. Для плотных глин, например, начальные градиенты могут достигать значений 15—30.

В. И. Пеньковским и С. Т. Рыбаковой показано, что наличие даже сравнительно небольших начальных градиентов фильтрации в глинистых пропластках значительно меняет картину движения в основном водоносном горизонте.

Начальные градиенты дренируемого и слабопроницаемого пластов обозначим соответственно через J_0 и J_1 .

В гидравлической постановке Мятиева — Гиринского принимается, что фильтрация в верхнем пласте происходит в горизонтальном направлении со скоростью фильтрации

$$v = -k \left(J_0 + \frac{dh}{dx} \right)$$

а в слабопроницаемом — в вертикальном со скоростью

$$w = \kappa [(H - h)/\lambda - J_1]$$

Здесь k и κ — коэффициенты фильтрации хорошо и слабопроницаемого пластов соответственно; λ — мощность слабопроницаемого пласта; H — напор в нижележащем горизонте.

Дифференциальное уравнение для напора $h(x)$ в случае безнапорного одномерного движения примет вид

$$k \frac{d}{dx} \left[h \left(\frac{dh}{dx} + J_0 \right) \right] + \kappa \left(\frac{H - h}{\lambda} - J_1 \right) + \varepsilon = 0 \quad (\text{A.1})$$

Здесь ε — скорость равномерной инфильтрации.

Для напорного пласта дифференциальное уравнение можно записать так:

$$\frac{d^2h}{dx^2} - \omega^2(h - h_*) = 0 \quad \left(\omega^2 = \frac{\kappa}{kM\lambda}, \quad h_* = H - J_1\lambda \right) \quad (\text{A.2})$$

(M — мощность напорного водоносного пласта).

Остановимся на задаче о расчете горизонтального дренажа (Рыбакова С. Т.). Предположим, что горизонтальные дрены расположены на расстоянии $2l$ одна от другой.

Решение уравнения (A.1) будем искать при условиях

$$h = h_0, \quad \frac{dh}{dx} = -J_0 \text{ при } x = 0 \quad (\text{A.3})$$

Второе из условий (A.3) есть результат того, что скорость в точке $x=0$ равна пулю.

Таким образом, предполагается, что переток через слабопроницаемый водоупор происходит по всей длине междренового пространства, т. е. для всех $0 \leq x \leq l$ выполняется неравенство

$$(H - h)/\lambda > J_1$$

и, кроме того, при $0 < x < l$ справедливо другое неравенство

$$-\frac{dh}{dx} > J_0$$

т. е. в исследуемой области нет застойных зон.

В противном случае, область фильтрации разбивается на отдельные части и определение ординаты свободной поверхности $h(x)$ сводится к решению системы уравнений, каждое из которых справедливо в определенных пределах изменения координаты

Введем безразмерные переменные

$$y = \frac{h}{H_1}, \quad y_0 = \frac{h_0}{H_1}, \quad \xi = \omega x, \quad J_0^* = \frac{J_0}{H_1 \omega} \quad (\text{A.4})$$

Здесь

$$H_1 = H + \frac{\varepsilon \lambda}{\kappa} - \lambda J_1, \quad \omega^2 = \kappa / k \lambda H_1$$

Принимая во внимание (A.4), перепишем задачу (A.1), (A.4) следующим образом:

$$\frac{d}{d\xi} \left[y \left(\frac{dy}{d\xi} + J_0^* \right) \right] - (y - 1) = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$y = y_0, \quad \frac{dy}{d\xi} = -J_0^* \text{ при } \xi = 0 \quad (\text{A.6})$$

Решение этой задачи найдено численными методами с использованием ЭЦВМ и приближенными, которые состоят в линеаризации уравнения (A.5).

По первому способу линеаризации в уравнении (A.5) множитель y при производной $dy/d\xi$ заменяется некоторой средней величиной y^* (она принята равной y_0). Тогда будем иметь

$$y^* \frac{d^2y}{d\xi^2} + J_0^* \frac{dy}{d\xi} - (y - 1) = 0 \quad (\text{A.7})$$

Решение уравнения (A.7) при условиях (A.6) имеет вид:

$$y = 1 - \left| \frac{(1 - y_0) p_2 - J_0^*}{p_1 - p_2} e^{p_1 \xi} - \frac{(1 - y_0) p_1 - J_0^*}{p_1 - p_2} e^{p_2 \xi} \right| \quad (\text{A.8})$$

где

$$p_{1,2} = -\frac{J_0^*}{2y_0} \pm \sqrt{\left(\frac{J_0^*}{2y_0}\right)^2 - \frac{1}{y_0}} \quad (\text{A.9})$$

При втором способе линеаризации уравнение (A.5) заменяется следующим:

$$\frac{d^2y^2}{d\xi^2} + \frac{J_0^*}{y_0} \frac{dy^2}{d\xi} - \frac{y^2 - 1}{y^4} = 0 \quad (\text{A.10})$$

где

$$y^0 = (1 + y_0)/2$$

Его решение при условиях (A.6) имеет вид

$$y^2 = 1 + \left| \frac{(1 - y_0^2) s_2 - 2y_0 J_0^*}{s_1 - s_2} e^{s_1 \xi} - \frac{(1 - y_0^2) s_1 - 2y_0 J_0^*}{s_1 - s_2} e^{s_2 \xi} \right| \quad (\text{A.11})$$

Здесь

$$s_{1,2} = -\frac{J_0^*}{2y_0} \pm \sqrt{\left(\frac{J_0^*}{2y_0}\right)^2 + \frac{1}{y^0}} \quad (\text{A.12})$$

Сравнение решений (A.8) и (A.11) с точным решением показывает, что линеаризация по y^2 дает несколько лучший результат.

Заметим следующее. В части 1, § 7 рассматриваемая задача решена для случая, когда $J_0 = J_1 = 0$, т. е. действие начальных градиентов не учитывается. Эта задача в безразмерных переменных имеет вид (A.5) — (A.6), если положить $J_0^* = 0$. Как видно из записи задачи (A.5) — (A.6), величина J_1 не входит туда явно. Таким образом, полученные результаты можно использовать и

для случая, если учитывается только начальный градиент слабопроницаемого водоупора, т. е. J_1 .

Только при переходе к размерным переменным нужно брать H_1 по формуле (A.4) настоящего параграфа. Наличие J_1 улучшает работу дренажа, так как в этом случае уменьшается подпитывание дренируемого пласта через слабопроницаемый водоупор напорными водами нижележащего горизонта.

Анализ полученного решения показывает, что пренебрежение величиной J_0 ведет к сильному завышению уровней в дренах при заданной ординате свободной поверхности в середине междренья и расстоянии между дренами, и это завышение тем больше, чем больше величина начального градиента J_0 . Рассмотрим, например, случай $y_0 = 0.8$, $J_0^* = 0.22$. Если безразмерное расстояние $\xi_l := l\omega$ равно 0.7, то уровень в дрене $y_l = h_l/H_1$ получается равным 0.544 и 0.732 при значениях начального градиента $J_0^* = 0.22$ и 0 соответственно. Естественно, что с уменьшением расстояния между дренами при заданных y_0 и J_0^* эта разница уменьшается, с увеличением — возрастает.

С другой стороны, задаваясь значениями y_0 и y_l , можно определить расстояние между дренами с учетом действия J_0 и без него. Пусть $y_0 = 0.8$, $y_l = 0.5$, $J_0^* = 0.22$. Для этого случая ξ_l получается равным 0.765 и 1,285 соответственно для $J_0^* = 0.22$ и $J_0 = 0$. Таким образом, если наличие J_0 не принимать во внимание, то расстояние между дренами получается завышенным почти в 1.7 раза.

Поэтому при расчете работы дренажа важно, кроме таких параметров, как коэффициенты фильтрации, знать также значения начальных градиентов.

В. И. Пеньковским и С. Т. Рыбаковой (1968) рассмотрены также задачи об установившемся движении в пласте конечной протяженности и неуставновившемся движении в полубесконечном пласте.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие	3
Введение	5
 Ч а с т ь п е р в а я	
Некоторые задачи установившейся фильтрации	
Г л а в а I. Гидравлическая теория движений в слоистых грунтах	21
§ 1. Основные допущения	21
§ 2. Дифференциальные уравнения для напоров в случае нескольких водоносных горизонтов	24
§ 3. Случай, когда имеется безнапорный пласт	26
§ 4. Исследование частного («статического») решения системы (2.2)	28
Г л а в а II. Некоторые одномерные задачи	30
§ 5. Случай переменной инфильтрации	30
§ 6. Горизонтальные совершенные дрены в слоистых грунтах. Нелинейное уравнение	34
§ 7. Линеаризованные уравнения и их решения	41
Г л а в а III. Скважина в слоистых грунтах	49
§ 8. Скважина в одном напорном пласте	49
§ 9. Скважина в безнапорном движении со слабопроницаемым водоупором	51
§ 10. Осесимметричный приток к скважине, проходящей через n водоносных горизонтов	58
§ 11. Изолированная система водоносных горизонтов	60
§ 12. Скважина в двух напорных водоносных горизонтах	64
Г л а в а IV. Группы скважин в слоистых грунтах	72
§ 13. m совершенных скважин в n водоносных горизонтах	72
§ 14. Скважины в одном горизонте	73
§ 15. Две скважины в двух напорных горизонтах	81
Г л а в а V. Некоторые вопросы притока к несовершенным дренам и скважинам	93
§ 16. Приток к несовершенной галерее в напорном пласте	93
§ 17. Приток к несовершенной галерее в безнапорном пласте	98
§ 18. О дебите несовершенной скважины	108
§ 19. Внутренняя задача для скважины	115

Г л а в а VI. Задача о линзе преонных вод при фильтрации из канала	122
§ 20. Решение задачи при допущении о пропорциональности испарения длине горизонтальной проекции соответствующего участка свободной поверхности	122
§ 21. О расчете размеров линзы и некоторых приближенных зависимостях для случая $\Delta p > e^\circ$	136
§ 22. Решение задачи при допущении о пропорциональности испарения длине вертикальной проекции соответствующего участка свободной поверхности	154
§ 23. О характере зависимостей (20.1) и (22.1) для испарения со свободной поверхности	159
§ 24. Анализ результатов вычислений	164

Ч а с т ь в т о р а я

Неустановившиеся движения подземных вод

Г л а в а I. Одномерные движения по вертикали	173
§ 1. Об инфильтрационном питании подземных вод при орошении	173
§ 2. О комбинированном орошении речными и подземными водами	179
§ 3. Вертикальные течения при орошении и прорывках засоленных грунтов	182
§ 4. Сравнение теории с опытом	186
§ 5. О возможности образования верховодки на участке орошения	190
Г л а в а II. Основные дифференциальные уравнения	195
§ 6. Обобщенное уравнение Буссинеска	195
§ 7. Уравнение неустановившегося движения в напорном пласте	198
§ 8. Точные решения некоторых нелинейных уравнений	200
§ 9. Системы дифференциальных уравнений в случае слоистых групп	206
Г л а в а III. Скважины в условиях неустановившегося движения	208
§ 10. Скважина в пласте с непроницаемым водоупором	208
§ 11. Об определении параметров пласта при наличии перетока через слабопроницаемые прослойки	215
§ 12. Скважина при слабопроницаемом водоупоре	217
§ 13. Скважина в круговой области (систематический вертикальный дренаж)	223
§ 14. Фильтрация к совершенной скважине в слоистом грунте с учетом упругих свойств слабопроницаемых слоев	228
§ 15. Радиус влияния скважины. Зона влияния	234
Г л а в а IV. Некоторые вопросы, связанные с поливами	237
§ 16. Фильтрация в почве при испарении	237
§ 17. Статистические методы определения коэффициента фильтрации и диффузии	243
§ 18. Метод Филипа	246
§ 19. О поливах и растеканиях бугров грунтовых вод	253



Внимание!
страница
временно отсутствует.
Приносим извинения.

*Полубаринова-Кочина П. Я.,
Пряжинская В. Г., Эмих В. Н.*

Математические методы в вопросах орошения

*Утверждено к печати
Институтом гидродинамики СО АН СССР
Редактор О. Н. Смирнова*

Технический редактор И. А. Жмуркина

*Сдано в набор 1/X-1968 г. Подписано к печати 13/III 1969 г.
Формат 60×90¹/₁₆. Усл. печ. л. 26. Уч.-изд. л. 21,7. Тираж 2800 экз.
Т-04917. Бумага тип. № 1. Тип. зал. 5382*

Цена 1 руб. 71 коп.

*Издательство «Наука»
Москва, К-62, Подсосенский пер., 21*

*2 я типография издательства «Наука»
Москва, Г-99, Шубкинский пер., 10*