

С. Я. КОНЦЕБОВСКИЙ  
Е. Л. МИНКИН

**ГИДРО-  
ГЕОЛОГИЧЕСКИЕ  
РАСЧЕТЫ  
ПРИ  
ИСПОЛЬЗОВАНИИ  
ПОДЗЕМНЫХ  
ВОД  
ДЛЯ ОРОШЕНИЯ**



С. Я. КОНЦЕБОВСКИЙ  
Е. Л. МИНКИН

**ГИДРО-  
ГЕОЛОГИЧЕСКИЕ  
РАСЧЕТЫ  
ПРИ  
ИСПОЛЬЗОВАНИИ  
ПОДЗЕМНЫХ  
ВОД  
ДЛЯ ОРОШЕНИЯ**



МОСКВА "НЕДРА" 1989

ББК 26.22  
К 65  
УДК 556.3.626.81+637.67

Рецензент д-р геол.-минер. наук *Л. С. Язвин*

К  $\frac{1804080000-395}{043(01)-89}$  128—89

ISBN 5—247—00497—3

© Издательство «Недра», 1989

## ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- $A(\omega)$  — амплитудно-частотная характеристика понижения  
 $a$  — коэффициент уровнепроводности (пьезопроводности)  
 $B$  — протяженность линейного водозабора  
 $b$  — коэффициент компенсационного питания  
 $b_L$  — параметр перетекания  
 $D_S$  — дисперсия понижения  
 $d$  — расстояние между рекой и водозабором  
 $g$  — компенсационный эффект  
 $i$  — мнимая единица  
 $I(\alpha, \beta)$  — функция Хантуша  
 $I_n(z)$  — модифицированная функция Бесселя  $n$ -го порядка  
 $J_n(z)$  — функция Бесселя  $n$ -го порядка  
 $K_n(z)$  — функция Макдональда  $n$ -го порядка  
 $K_Q(\tau)$  — автокорреляционная функция водоотбора  
 $K_S(\tau)$  — автокорреляционная функция понижения  
 $K_W(\tau)$  — автокорреляционная функция редукции  
 $\ker z, \ker z$  — функция Кельвина  
 $k_b$  — коэффициент возврата (доля объема воды, поданной для орошения, возвращающаяся к эксплуатируемому водоносному горизонту)  
 $L$  — характерный линейный размер  
 $L_Q(\omega)$  — спектральная функция водоотбора  
 $L_S(\omega)$  — спектральная функция редукции  
 $L_S(\tau)$  — спектральная функция понижения  
 $p$  — параметр преобразования Лапласа  
 $P$  — надежность функционирования системы совместного использования поверхностных и подземных вод  
 $Q$  — расход отбора подземных вод  
 $Q_\Delta$  — дебит водозабора подземных вод  
 $q$  — расход линейного водозабора на единицу его протяженности  
 $q_i$  — расход в дуге линейно-узловой схемы ВХС  
 $R_0(t)$  — гидравлическое сопротивление  
 $R_0(\omega)$  — гармоническое сопротивление (амплитудно-частотная характеристика понижения)  
 $r$  — расстояние от точки до центра водозабора  
 $S$  — понижение уровня (напора) подземных вод  
 $T$  — коэффициент водопроводности  
 $t$  — время  
 $U_S(M, p)$  — передаточная функция понижения  
 $U_W(p)$  — передаточная функция редукции  
 $V(t)$  — изменение объема воды в резервуаре в результате эксплуатации подземных вод  
 $v(t)$  — функция интегральной редукции  
 $W(t)$  — изменение расхода поверхностного стока при эксплуатации подземных вод



$w_i$  — веса формулы Гаусса-Лагерра  
 $w_0(t)$  — функция редукции  
 $w(\omega)$  — амплитудно-частотная характеристика редукции  
 $x, y$  — пространственные координаты  
 $\gamma$  — предельная редукция  
 $\Delta$  — глубина залегания грунтовых вод  
 $\delta(t)$  — дельта-функция Дирака  
 $\varepsilon_I$  — модуль инфильтрации  
 $\varepsilon_L$  — модуль перетекания  
 $\varepsilon_E$  — модуль испарения  
 $\mu$  — коэффициент водоотдачи  
 $\rho_{\Delta S}$  — коэффициент корреляции между значениями отбора подземных вод и понижения  
 $\rho_{\Delta w}$  — коэффициент корреляции между значениями отбора подземных вод и изменения поверхности стока  
 $\sigma_Q^2$  — среднеквадратическое отклонение водопотребления  
 $\sigma_1^2$  — дисперсия возмущения  
 $\tau$  — период циклического изменения гидрогеологических величин (отбора подземных вод, понижения и т. д.)  
 $\tau_1$  — годовой период  
 $\tau_v$  — длительность вегетационного периода  
 $\tau_0$  — постоянная времени  
 $\Phi^*(z)$  — функция нормального распределения  
 $\chi$  — параметр компенсации  
 $\gamma$  — модуль отбора подземных вод  
 $\psi(\omega)$  — фазо-частотная характеристика редукции  
 $\Psi(\omega)$  — фазо-частотная характеристика понижения  
 $\omega$  — частота  
 $\omega_1$  — частота основных колебаний, соответствующая годовому периоду  
 $\Omega_S$  — коэффициент точности понижения  
 $\Omega_w$  — коэффициент точности редукции

В последние десятилетия в большинстве аридных регионов резко обострилась проблема водообеспечения, связанная, главным образом, с развитием орошаемого земледелия. Одним из вариантов, предлагаемых для решения этой проблемы в условиях СССР, является более широкое использование ресурсов подземных вод.

Многолетний опыт такого использования имеется во многих странах аридного пояса (Запад США, Индия, КНР и др.). Как известно, по действующему в СССР водному законодательству пресные подземные воды, вследствие лучшей, по сравнению с поверхностными водами, защищенности от загрязнения и меньшей подверженности их ресурсов и качества сезонным и многолетним колебаниям, должны прежде всего использоваться для хозяйственно-бытовых целей. Поэтому использовать подземные воды питьевого качества для целей орошения разрешается только в тех случаях, когда имеющиеся в данном районе ресурсы поверхностных вод недостаточны для обеспечения потребностей в оросительной воде, а ресурсы подземных вод превышают не только существующую, но и далекую перспективную потребность в воде для хозяйственно-питьевых целей.

При решении вопроса об использовании подземных вод для орошения земель совсем не обязательны условия дефицита поверхностного стока. Подземные воды, если их ресурсы превышают перспективную потребность в воде для хозяйственно-питьевых нужд, могут быть использованы для целей орошения и при достаточности ресурсов поверхностных вод. В ряде случаев использование подземных вод предпочтительнее поверхностных. Одной из важнейших причин является то обстоятельство, что в ряде районов с близким к дневной поверхности залеганием уровня подземных вод их интенсивная эксплуатация может существенно улучшить мелиоративное состояние орошаемых и соседних с ними земель благодаря снижению уровня и уменьшению расхода грунтовых вод на непродуктивное испарение. Это не только приведет к прекращению естественного засоления земель, характеризующихся затрудненными условиями оттока подземных вод, но и позволит также предупредить вторичное засоление, связанное с орошением. Мелиоративный эффект при этом будет особенно выражен, конечно, при эксплуатационном отборе из грунтовых вод. Однако и при эксплуатации напорных вод, подпитывающих в естественных условиях грунтовые, если это привело к уменьшению разности напоров, а тем более к смене знака этой разности, мелиоративный эффект достаточно заметен.

Второй важной причиной предпочтительности использования подземных вод для орошения по сравнению с поверхностными водами является серьезный выигрыш в площади орошаемых

земель, так как при этом существенно сокращается сеть горизонтального дренажа, отнимающего значительные площади ценных земель. Следует иметь в виду и заметный экономический эффект, связанный как с тем, что отпадает необходимость в строительстве и содержании коллекторно-дренажной сети, так и с возможностью сезонного и многолетнего регулирования водных ресурсов, т. е. повышения водообеспеченности оросительных систем без строительства весьма дорогостоящих наземных водохранилищ.

К числу аргументов в пользу предпочтительности использования подземных вод для орошения при достаточности ресурсов поверхностных вод можно отнести и связанное с интенсивной их эксплуатацией увеличение общего количества располагаемых водных ресурсов (поверхностных и подземных) вследствие сокращения и даже полного прекращения непродуктивного испарения и эвапотранспирации на больших площадях, где уровни грунтовых вод в естественных условиях залегают на небольшой глубине. Наконец, результаты выполненных разными исследователями разработок (в том числе и наших исследований) показывают, что использование для орошения подземных вод может заметно и надолго (во всяком случае, на достаточно длительное время после начала эксплуатации подземных вод) сократить загрязнение поверхностных вод, вызываемое сбросами в поверхностные водотоки минерализованных и загрязненных химикатами коллекторно-дренажных вод. А это, в свою очередь, уменьшит объемы необходимых попусков, что позволит более полно использовать располагаемые водные ресурсы данной водохозяйственной системы.

В соответствии с действующими в СССР нормативными документами при ограниченных ресурсах поверхностных вод и достаточном для целей орошения земель их количестве, суждение о возможных масштабах использования подземных вод питьевого качества на орошение может быть вынесено только после оценки эксплуатационных ресурсов подземных вод в данном районе и сравнения их с перспективной потребностью в воде для хозяйственно-питьевого водоснабжения.

Под эксплуатационными запасами (ресурсами) по общепринятому в настоящее время определению понимается количество подземных вод, которое может быть получено на месторождении с помощью рациональных в технико-экономическом отношении водозаборных сооружений при заданном режиме эксплуатации и при качестве воды, удовлетворяющем требованиям целевого использования в течение расчетного срока водопотребления с учетом природоохранных ограничений.

Приведенное определение учитывает возможные негативные последствия эксплуатации подземных вод. Например, вызванное эксплуатацией подземных вод снижение их уровня, помимо охарактеризованных выше положительных эффектов, может привести в отдельных случаях к ухудшению условий питания корневой системы культурных растений, когда пресные или слабоминерализованные грунтовые воды залегают на небольшой глубине, т. е.

при условии субиригации. Конечно, приведенный пример негативного эффекта, так сказать, «лежит на поверхности». Зачастую в реальных природных условиях снижение уровня, например, не только увеличивает мощность зоны аэрации, но и вызывает изменение водно-солевого баланса в ее пределах, в том числе в почвенном слое. Это, в свою очередь, вызывает изменение условий почвообразования, перестройку условий окружающей среды по отношению к почвенным организмам и наземным растениям. Изменения же количественного и видового состава фитоценозов влекут за собой изменения условий обитания для животных популяций, входящих в те же экосистемы, и носят как негативный, так и позитивный характер. В некоторых случаях задача состоит в том, чтобы оценить масштабы и значимость этих изменений. Методика таких оценок, к сожалению, еще недостаточно разработана.

В качестве негативных эффектов при значительном снижении уровня подземных вод в результате их эксплуатации могут стать и региональное оседание дневной поверхности, и активизация суффозионно-карстовых процессов и, что особенно важно, изменение химического состава подземных вод в результате как перетекания в эксплуатируемый горизонт из соседних по разрезу горизонтов, содержащих воды иного состава, так и подтягивания некондиционных вод по пласту от границ раздела вод разного состава или от поверхностных источников.

Как полностью негативное рассматривается обычно и влияние эксплуатации подземных вод на поверхностный сток, хотя масштабы этого влияния, как правило, существенно преувеличиваются. Внесение ясности в этот вопрос важно не только с точки зрения экологических последствий (а значит и обоснования природоохранных мероприятий), но и для суждения об имеющихся располагаемых подземных и поверхностных водных ресурсах, без чего невозможно составление перспективных водохозяйственных балансов самого различного масштаба. В настоящее время считается установленным, что при определенных условиях, когда имеет место развитое компенсационное питание\* эксплуатируемого водоносного горизонта, водность поверхностных источников в некоторых случаях не только не уменьшится, но и может даже устойчиво возрасти. Конечно, в большинстве случаев даже при наличии компенсационного эффекта, крупномасштабная эксплуатация подземных вод приводит к определенному сокращению поверхностного стока. Однако предельная его величина намного меньше величин водоотбора или безвозвратных потерь, если использованные воды возвращаются в этот же поверхностный водоток (что чаще всего и наблюдается).

По принятой в СССР практике оценки величины эксплуатационных ресурсов существует два подхода. Согласно первому из

---

\* Под *компенсационным питанием* понимается дополнительное питание эксплуатируемого горизонта за счет перетекания из соседних по разрезу водоносных горизонтов и снижения расхода подземных вод на эвапотранспирацию.

них, эксплуатационные ресурсы оцениваются применительно к конкретному водопотребителю. В этом случае задача сводится к определению величины понижения уровня, вызванного водоотбором, равным заявленной потребности, и сравнению этого понижения с предельно допустимой его величиной. Если расчетное понижение меньше допустимого, ресурсы считаются обеспеченными и принимаются равными заявленной потребности. Согласно второму подходу оценивается та производительность водозабора, при которой вызванное его работой понижение уровня на конец расчетного срока станет равным допустимому.

Таким образом, задача оценки эксплуатационных ресурсов подземных вод сводится в основном к задаче установления пространственно-временных зависимостей понижения уровня эксплуатируемого горизонта от производительности и режима работы водозабора. При этом основным фактором, лимитирующим величину эксплуатационного водоотбора при прочих равных условиях, является, как отмечено выше, величина допустимого понижения. Последнее определяется конкретными гидрогеологическими условиями и технико-экономическими соображениями. Так, при большой мощности водоносного горизонта или значительной глубине его залегания допустимое понижение уровня (если это экономически оправдано) не должно превышать разность между максимальной высотой подъема насосного оборудования и расстоянием от статического уровня до отметки верха водоприемника с сохранением такого столба воды в эксплуатируемой скважине, при котором обеспечивается нормальная работа насоса с требуемой производительностью.

Применительно к целям использования подземных вод для орошения особое значение в определении понятия *эксплуатационные ресурсы* приобретает требование о сохранении заданного режима эксплуатации. При орошении режим отбора подземных вод определяется тем, являются ли они основным или дополнительным к поверхностным водам источником орошения. В первом случае, режим их отбора характеризуется выраженной сезонной цикличностью, определяемой условиями вегетации орошаемых культур, необходимостью влагозарядковых и промывочных поливов; во втором — режим их отбора будет претерпевать случайные колебания, связанные со стохастическим характером колебаний поверхностного стока и водопотребления на орошение.

Учитывая, что как в первом, так и во втором случаях, наряду с отбором подземных вод на орошение, они, как правило, эксплуатируются и для хозяйственно-питьевых нужд, когда режим отбора практически не изменяется во времени, при оценке эксплуатационных ресурсов подземных вод в этих условиях должно предусматриваться комплексирование режимов водоотбора.

Методика оценки эксплуатационных ресурсов подземных вод для таких условий разработана еще недостаточно, и одной из важных задач, стоящих перед гидрогеологической наукой в настоящее время, является разработка теоретических основ и прак-

тических методов такой оценки. Одной из задач настоящей работы и является рассмотрение основ гидрогеологических расчетов для оценки эксплуатационных ресурсов подземных вод в разных природных условиях с учетом различных режимов их отбора.

Другой важной задачей, возникающей при решении вопросов использования подземных вод для орошения, является оценка тех изменений, которые произойдут с ресурсами поверхностных вод при отборе гидравлически связанных с ними подземных вод. При планировании развития водного хозяйства, в том числе при проектировании оросительных систем, обязательно следует предварительно составлять перспективные водохозяйственные балансы, в которых сопоставляются перспективные потребности в воде для всех отраслей народного хозяйства с суммарными водными ресурсами рассматриваемой территории (района, речного бассейна и т. д.). Последние слагаются из ресурсов поверхностного стока заданной обеспеченности (с учетом мероприятий по его регулированию, если они осуществлены или проектируются) и эксплуатационных ресурсов подземных вод (оцененных с учетом режима водоотбора, определяемого видом водопотребителя), за вычетом того сокращения поверхностного стока, которое произойдет в результате эксплуатационного отбора подземных вод.

При определении величины этого сокращения (помимо природных условий и режима отбора подземных вод) необходимо учитывать степень существующей или проектируемой зарегулированности поверхностного стока.

Действительно, если на реках нет и не проектируется создание водохранилищ ниже по течению от водозаборов подземных вод, влияние эксплуатации последних на поверхностный сток, если оно не компенсируется сокращением эвапотранспирации, выразится в виде определенного сокращения его расходов в любой заданный момент времени. Если реки зарегулированы или проектируется их зарегулирование ниже по течению водозаборов подземных вод, при составлении перспективных водохозяйственных балансов, вернее, при оценке общих водных ресурсов территории, влияние отбора подземных вод на поверхностный сток выразится в том объеме воды, который недополучит водохранилище в результате сокращения расхода поверхностного стока за тот отрезок времени, на который рассчитывается регулирование водохранилищем (сезонное, годовое, многолетнее).

В исследованиях последних лет сокращение расхода поверхностных вод, вызванное эксплуатацией подземных вод, предложено называть *редукцией поверхностного стока*; соответствующее сокращение объема воды в водохранилищах за расчетный срок — *интегральной редукцией поверхностного стока*.

Методика определения этих величин, весьма важных при оценке общих водных ресурсов, пока недостаточно разработана. Поэтому в настоящей работе большое внимание уделено рассмотрению теоретических основ и практических методов расчета редукции и интегральной редукции поверхностного стока.

При разработке теоретических основ и практических методов, как оценки эксплуатационных ресурсов подземных вод, так и определения величины редукиции поверхностного стока при их отборе использованы методы теории линейных систем, позволившие разработать единый подход к изучению геофильтрационных процессов при разных режимах отбора подземных вод и для различных природных условий. Он основан на том, что универсальной характеристикой реакции геофильтрационной системы на возмущение, вызванное водоотбором, служит передаточная функция системы, связывающая изображения по Лапласу возмущения и реакции.

При разработке методики оценки эксплуатационных ресурсов подземных вод рассматривается геофильтрационная система «водозабор — водоносный пласт», реакцией которой на возмущение водоотбором является понижение уровня подземных вод в эксплуатируемом горизонте.

Аналогично, при решении задач оценки отбора подземных вод на поверхностный сток рассматривается геофильтрационная система «водозабор — водоносный пласт — поверхностный водоток», в которой реакцией на возмущение, вызванное водоотбором, является редукиция поверхностного стока.

Как уже отмечалось выше, универсальной характеристикой реакций геофильтрационных систем служат их передаточные функции. Рассматриваются методика получения и конкретные выражения передаточных функций для различных природных условий и разных типов водозаборов. Каждая из этих передаточных функций является, в сущности, основой для разработки алгоритмов численных расчетов на ЭВМ понижений уровня, вызванных водоотбором, и редукиции поверхностного стока на любой заданный срок. При этом для значительной части расчетных схем и типов водозаборов представилась возможность перейти от изображений к оригиналам и получить достаточно простые аналитические зависимости для определения соответствующих реакций геофильтрационных систем на вызванное эксплуатационными водоотбором возмущение. Все входящие в полученные зависимости функции табулированы, и в работе приведены соответствующие таблицы и графики. Для тех случаев, в которых не представилось возможным получить соответствующие аналитические зависимости, в работе приведены программы для необходимых численных расчетов на микроЭВМ.

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ГИДРОГЕОЛОГИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

Термин *гидрогеологический расчет* может быть применен к довольно широкому кругу расчетов, относящихся к характеристикам подземных вод, их добыче и использованию. Сюда могут быть отнесены: вычисления естественных и эксплуатационных ресурсов подземных вод; оценка влияния эксплуатации подземных вод на режим поверхностной части гидросферы; прогноз качества подземных вод; всевозможные технико-экономические расчеты, связанные с бурением и оборудованием скважин и их эксплуатацией, и др.

В настоящей работе рассмотрен заведомо более узкий круг вопросов, касающихся различных оценок количества воды, которое может быть получено при эксплуатации месторождения подземных вод, а также оценок влияния эксплуатации подземных вод на поверхностный сток. Рассмотрено использование подземных вод прежде всего для орошения, хотя все приводимые результаты могут быть применены и для других случаев их использования. Поэтому следует определить, в чем состоит особенность эксплуатации подземных вод для орошения. По мнению авторов, она заключается в том, что режим водоотбора подземных вод для орошения резко непостоянен во времени: он испытывает колебания как внутри года, так и от года к году.

Внутригодовые, или сезонные, колебания количества воды, подаваемой на поля, обусловлены агротехническими условиями. Наибольшие величины расходов на орошение наблюдаются в разгар вегетационных поливов. В некоторые периоды вода бывает вовсе не нужна. Есть регионы, в которых погодные условия, особенно летом, слабо варьируют от года к году. В СССР это, например, полупустынные и пустынные районы Средней Азии. Если в таких условиях подземные воды составляют единственный источник орошения, то режим их отбора из года в год приблизительно один и тот же -- внутригодовые колебания расхода водоотбора повторяются из года в год по одному и тому же закону.

Однако орошение (в том числе и подземными водами) применяется не только в пустынных и полупустынных условиях. Если рассматривать природные условия степей, лесостепей и других зон, то окажется, что там климатические колебания от года к году выражены довольно значительно. В особенности это касается влажности воздуха, которая является определяющим показателем при расчетах оросительных норм. Поэтому в таких условиях, даже если подземные воды -- основной или единственный источник орошения, величина их отбора будет испытывать, помимо внутригодовых, еще и вариации в многолетнем разрезе. Эти вариации, в отличие от сезонных, характеризуются случайным



характером, или стохастичностью, природа которой определяется колебаниями погодных условий.

До сих пор подчеркивалось, что подземные воды служат единственным или главным источником орошения. Однако в настоящее время широко развивается совместное использование поверхностных и подземных вод, при котором подземные воды эксплуатируются в комплексе с поверхностными: они покрывают дефициты водопотребления, получают от поверхностных вод дополнительное питание в виде искусственного пополнения и т. д. В этих условиях величина отбора подземных вод в каждый момент времени становится зависимой от наличных ресурсов поверхностных вод, а эти ресурсы, как известно, подвержены значительным стохастическим колебаниям. В результате, при совместном использовании, даже в условиях зон с незначительными климатическими вариациями, характеристики отбора подземных вод могут значительно варьировать в многолетнем разрезе.

Следовательно, при использовании подземных вод для орошения основными характерными режимами являются:

а) периодический, т. е. расход водозабора в любой год эксплуатации изменяется по одному и тому же графику;

б) стохастический, т. е. величина отбора подземных вод изменяется как внутри года, так и от года к году, причем изменение носит случайный характер.

В настоящей главе рассматриваются теоретические основы расчета эксплуатационных ресурсов подземных вод, прогноза изменений их уровня в процессе эксплуатации и влияния отбора подземных вод на поверхностный сток, применительно именно к этим, характерным для орошения режимам.

## 1.1. УРАВНЕНИЯ ГЕОФИЛЬТРАЦИИ

Термин *геофильтрация* предложен В. М. Шестаковым [29] для описания процессов фильтрации в геологических средах, в отличие от фильтрации в технике и т. п. При описании процессов геофильтрации существен их пространственный характер, вследствие чего в качестве основного математического средства при этом применяются дифференциальные уравнения в частных производных. Так, для описания изменения напора в пространстве и времени в однослойном пласте под воздействием эксплуатации подземных вод может быть использовано следующее уравнение [9]:

$$\mu \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial S}{\partial y} \right) - \Delta \epsilon + \Upsilon, \quad (1.1)$$

где  $S(M, t)$  — понижение уровня подземных вод, т. е. разность  $H^{(e)}(M) - H(M, t)$  между величиной напора в точке  $M$  фильтрационного поля в естественном режиме, существовавшем до начала эксплуатации, и величиной напора  $H(M, t)$ , возникающего в момент времени  $t$  под влиянием эксплуатации;  $\mu$  — коэффициент

водоотдачи,  $T$  — коэффициент водопроводимости (в общем случае может изменяться от точки к точке фильтрационного поля)

$$\Delta\epsilon = \Delta\epsilon_L + \Delta\epsilon_I + \Delta\epsilon_E - \quad (1.2)$$

суммарный модуль изменения распределенных питания и разгрузки подземных вод, складывающейся соответственно из модулей перетекания инфильтрации и эвапотранспирации;  $\Upsilon$  — модуль эксплуатационного отбора подземных вод.

В каждом частном случае, когда гидрогеологические параметры ( $\mu$ ,  $T$ ) постоянны в пределах области фильтрации, уравнение (1.1) записывается в следующем виде:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \frac{\Delta\epsilon}{T} + \frac{\Upsilon}{T}, \quad (1.3)$$

где  $a$  — коэффициент уровнеспроводности (пьезопроводности).

Еще более простой вид уравнение фильтрации приобретает в случае так называемой плоской симметрии потока подземных вод: при этом величина  $S$  не изменяется в направлении одной из осей координат (например, оси  $y$ ); соответствующее уравнение запишется в виде

$$\frac{1}{a} \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \frac{\Delta\epsilon}{T} + \frac{\Upsilon}{T}. \quad (1.4)$$

В другом случае симметрии — радиальной симметрии потока подземных вод — величина понижения одинакова в точках находящихся на равном расстоянии  $r$  от некоторой центральной точки (например, водозаборной скважины); в этом случае более целесообразен переход к полярным координатам; при этом уравнение фильтрации примет вид

$$\frac{1}{a} \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial S}{\partial r} \right) - \frac{\Delta\epsilon}{T} + \frac{\Upsilon}{T}. \quad (1.5)$$

Рассмотрим более подробно величину  $\Delta\epsilon$  в уравнениях (1.1) — (1.5) и ее зависимость от  $S$ . Как показано в работах М. С. Хантуша, величина  $\Delta S_L$  в большинстве случаев линейно зависит от понижения:

$$\Delta\epsilon_L = b_L S, \quad (1.6)$$

где  $b_L$  — коэффициент перетекания, 1/сут.

Инфильтрационное питание грунтовых вод и в особенности эвапотранспирация зависят от глубины залегания грунтовых вод. В свою очередь, глубина залегания грунтовых вод связана с понижением, поэтому величины  $\Delta\epsilon_I$  и  $\Delta\epsilon_E$  зависят от  $S$ . В общем случае эта зависимость нелинейна, что делает соответствующие уравнения фильтрации весьма трудными для аналитического решения. Возможны два пути исследования уравнений такого рода: численное решение и линеаризация. Ниже предлагается один из вариантов линеаризации уравнения фильтрации, основанный на балансовых соотношениях.

Предположим, что величины  $\Delta \epsilon_L$  и  $\Delta \epsilon_I$  в уравнении (1.4), записанном для условий плоскопараллельного потока подземных вод в однородном пласте, ограниченном с одной стороны прямой линией в плане границей питания (рекой), равны нулю. Как показано в работе [10], зависимость изменения модуля эвапотранспирации  $\Delta \epsilon_E$  от понижения выражается в виде

$$\Delta \epsilon_E = \epsilon_E^{(e)} K_E (S/S_{кр}), \quad (1.7)$$

где  $\epsilon_E^{(e)}$  — величина модуля эвапотранспирации в естественных условиях

$$K_E(y) = \begin{cases} y, & \text{при } 0 \leq y \leq 1; \\ 1, & \text{при } y > 1; \end{cases} \quad (1.8)$$

$$S_{кр} = \Delta_{кр} - \Delta^{(e)}, \quad (1.9)$$

$\Delta_{кр}$  — критическая глубина залегания грунтовых вод по Аверьянову;  $\Delta^{(e)}$  — глубина залегания грунтовых вод до начала эксплуатации.

Линеаризовать функцию  $K_E(y)$  означает заменить ее на линейную вида  $K_E(y) = C_E y$ , где  $C_E$  — коэффициент, обеспечивающий наилучшее совпадение результатов решения нелинейного и линеаризованного уравнений. Наиболее простой способ линеаризации заключается в принятии  $C_E = 1$ , т. е. начальный участок зависимости  $K_E(y)$  продлевается до бесконечности, а тот факт, что эвапотранспирация по достижении свободной поверхностью грунтовых вод критического уровня прекращается, игнорируется полностью. Такой способ линеаризации применялся рядом авторов, однако он имеет существенные недостатки, ограничивающие область его пригодности. Так, например в задачах по оценке изменения поверхностного стока под воздействием эксплуатации подземных вод этот метод зачастую приводит к сильному искажению результатов расчета. Проверочные расчеты показали, что более приемлемые результаты дает метод линеаризации, в котором величина коэффициента  $C_E$  выбирается исходя из условия совпадения величин определяющих статей баланса подземных вод, получаемых решением нелинейной и линеаризованной задач в стационарной постановке. В работе [10] детально исследовано решение нелинейного уравнения геофильтрации и приведен вывод математических выражений коэффициента  $C_E$  для варианта, когда определяющей статьей баланса считается изменение поверхностного стока при эксплуатации подземных вод, причем рассмотрены случаи отбора подземных вод как линейными, так и площадными водозаборами. На рис. 1.1 и 1.2 приведены графики зависимости коэффициента приведения от параметров, характеризующих интенсивность водоотбора и эвапотранспирации.

При определенных соотношениях между параметрами водоотбора и эвапотранспирации уровень грунтовых вод в процессе их эксплуатации ни в одной точке не опустится ниже критического.

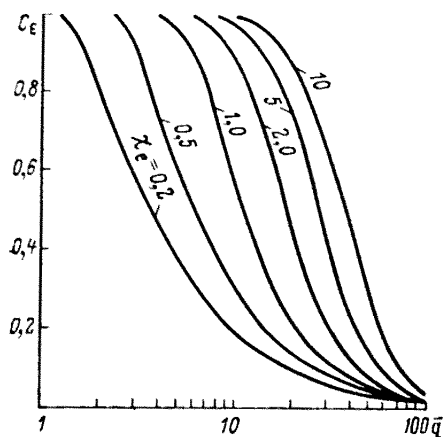


Рис. 1.1. Графики зависимостей коэффициента приведения  $C_E$  от параметров  $\bar{q}$  и  $\chi_e$

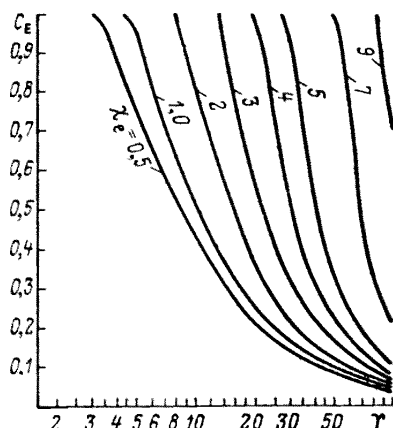


Рис. 1.2. Графики зависимостей коэффициента приведения  $C_E$  от параметров  $\bar{\gamma}$  и  $\chi_e$  при отборе подземных вод площадным водозабором

Эти условия в случае отбора подземных вод линейным водозабором вблизи границы питания выражаются неравенством

$$\bar{q} \leq \bar{q}_{кр}; \quad (1.10)$$

в случае отбора подземных вод площадной системой скважин вблизи границы питания — неравенством

$$\bar{\gamma} \leq \bar{\gamma}_{кр}, \quad (1.11)$$

где  $\bar{q}_{кр}$  и  $\bar{\gamma}_{кр}$  — соответственно критические значения дебита линейного водозабора на единицу его длины и модуля площадного водоотбора, равные

$$\bar{q}_{кр} = 2\chi_e^2 [2\chi_e e^{-\chi_e} \operatorname{sh} \chi_e - k_b (1 - e^{-\chi_e})^2]^{-1}; \quad (1.12)$$

$$\bar{\gamma}_{кр} = (1 - k_b)^{-1} \frac{\chi_e^2}{1 - e^{-\chi_e} \sqrt{2e^{\chi_e} - 1}}, \quad (1.13)$$

где  $\chi_e = d\sqrt{E_0/T\Delta_{кр}}$  — компенсационный эффект в естественных условиях, до начала эксплуатации;  $E_0$  — испаряемость;  $d$  — расстояние от водозабора до границы питания.

При выполнении условий (1.10), (1.11) величину коэффициента приведения  $C_E$  следует принимать равной единице; если эти условия не выполняются, величина коэффициента приведения будет меньше 1 и ее следует определять по графикам, представленным на рис. 1.1, 1.2.

Определив величину коэффициента приведения  $C_E$ , мы фактически представили зависимость модуля  $\Delta \epsilon_E$  в виде

$$\Delta \epsilon_E = b_E S; \quad (1.14)$$

$$b_E = C_E \epsilon_E^{(e)} / S_{кр}; \quad (1.15)$$

после подстановки зависимостей (1.6) и (1.14) в уравнение (1.1) оно приобретает вид:

$$\mu \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial S}{\partial y} \right) - bS + \Upsilon; \quad (1.16)$$

$$b = b_L + b_E. \quad (1.17)$$

Таким образом, в линеаризованном уравнении фильтрации эвапотранспирация и перетекание оказываются аналогичными факторами, что дает возможность рассматривать их совокупное действие и называть его *фактором компенсационного питания*, а суммарную величину  $b$  — *коэффициентом компенсационного питания*.

Уравнение (1.16) становится линейным дифференциальным уравнением, т. е. если  $S_1(x, y, t)$  решение этого уравнения при модуле водоотбора  $\Upsilon_1(x, y, t)$ , а  $S_2(x, y, t)$  — при модуле водоотбора  $\Upsilon_2(x, y, t)$ , то функция  $S(x, y, t) = S_1 + S_2$  будет решением уравнения при модуле водоотбора  $\Upsilon = \Upsilon_1 + \Upsilon_2$ , что легко проверяется непосредственной подстановкой в уравнение. Точно также, если  $S_1(x, y, t)$  — решение уравнения при модуле водоотбора  $\Upsilon_1(x, y, t)$ , то функция  $S_2(x, y, t) = k_1 S_1(x, y, t)$  будет решением этого уравнения при  $\Upsilon = \Upsilon_2 = k_1 \Upsilon_1(x, y, t)$  в справедливости чего также можно убедиться подстановкой в уравнение.

Согласно терминологии технической кибернетики, системы (природные или технические), в которых соблюдаются условия, аналогичные приведенным выше, называются *линейными системами*, а сами эти условия — *принципом суперпозиции*. В гидрогеологических расчетах чаще всего встречаются системы, которые достаточно обоснованно могут считаться линейными. В настоящей работе рассмотрены два вида таких систем: а) «водозабор — водоносный пласт»; б) «водозабор — водоносный пласт — поверхностный водоток». В обоих случаях входным возмущением является водоотбор, задаваемый модулем  $\Upsilon(x, y, t)$ , дебитом на единицу протяженности (для линейных водозаборов), либо дебитом (для сосредоточенных водозаборов). Выходной реакцией в случае системы «водозабор — водоносный пласт» является распределение величин понижения в точках фильтрационного поля  $S(x, y, t)$  или его величина в какой-либо одной выделенной точке (например, в точке, где величина понижения максимальна). В случае системы «водозабор — водоносный пласт — водоток» в качестве выходной реакции рассматривается изменение расхода поверхностного стока через определенный створ реки или канала, гидравлически связанных с водоносным горизонтом.

Наиболее простым примером системы «водозабор — водоносный пласт» служит одиночный водозабор, работающий в условиях

однородного неограниченного водоносного пласта при отсутствии компенсационного питания. Эта система описывается дифференциальным уравнением вида

$$\frac{1}{a} \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial S}{\partial r} \right), \quad (1.18)$$

которое дополняется следующим условием на скважине:

$$\lim_{r \rightarrow 0} 2\pi r T \frac{\partial S}{\partial r} = -Q(t), \quad (1.19)$$

а также начальным условием

$$t=0, \quad S(r, t)=0, \quad (1.20)$$

здесь  $a$  — коэффициент пьезопроводности;  $T$  — коэффициент водопроницаемости;  $r$  — расстояние от точки водоносного пласта, в которой определяется понижение, до скважинного водозабора. Можно легко показать, что в системе, определяемой условиями (1.18) — (1.20), принцип суперпозиции выдерживается, т. е. сама система линейна.

## 1.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ОПИСАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Для рассмотрения математических средств и методов, позволяющих наиболее эффективно описывать линейные системы, полезно использование преобразования Лапласа. Этим вопросам посвящена обширная литература [25 и др.], поэтому здесь приводятся только некоторые определения и результаты.

Преобразование Лапласа определено для функций времени  $f(t)$  обладающих следующими свойствами:

1)  $f(t)=0$  при  $t<0$ ;

2) при  $t \rightarrow \infty$   $f(t)$  либо убывает, либо, если и возрастает, то не быстрее некоторой экспоненты,  $f(t) \leq e^{\alpha t}$ ,  $\alpha > 0$ . По-видимому, можно считать, что все функции, встречающиеся в гидрогеологических расчетах, этими свойствами обладают. Если  $f(t)$  — такая функция, то ее изображением по Лапласу будет функция  $\hat{f}(p)$  вводимая по формуле:

$$\hat{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt; \quad (1.21)$$

сама функция  $f(t)$  называется при этом оригиналом изображения  $\hat{f}(p)$  (здесь и далее подобным значком над соответствующими буквами обозначены изображения функций времени). Соответствие функции  $\hat{f}(p)$  оригиналу  $f(t)$  изображается также следующей записью:  $f(t) \doteq \hat{f}(p)$ .

Преобразование (1.21) линейно, т. е. справедлив принцип суперпозиции. Именно, если  $\hat{f}_1(p) \doteq f_1(t)$  и  $\hat{f}_2(p) \doteq f_2(t)$ , то  $f_1(p) +$

$+\hat{f}_2(t) \doteq f_1(t) + f_2(t)$ , а  $k\hat{f}(p) \doteq kf(t)$ , в чем легко убедиться, проделывая соответствующие выкладки на основе формулы (1.21).

Рассмотрим теперь некоторые важнейшие свойства преобразования Лапласа.

1. Изображение производной. Пусть  $\hat{f}(p)$  есть изображение функции  $f'(t) = \frac{df}{dt}$ , т. е.

$$\hat{f}_1(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{df}{dt} dt. \quad (1.22)$$

Этот интеграл возьмем по частям:

$$e^{-pt} = u;$$

$$f' dt = dv,$$

тогда

$$du = -pe^{-pt}; \quad v = f(t);$$

$$f_1(p) = e^{-pt}f(t) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt}f(t) dt;$$

иными словами,

$$\hat{f}_1(p) = p\hat{f}(p) - f(0). \quad (1.23)$$

При  $x(0) = 0$  имеем:

$$\hat{f}_1(p) = p\hat{f}(p). \quad (1.24)$$

Если  $f'(0) = 0$ , то изображение второй производной  $f''(t)$ , будет равно:

$$f''(t) \doteq p^2\hat{f}(p). \quad (1.25)$$

2. Изображение интеграла. Пусть  $\hat{f}_2(p)$  — изображение функции

$$f_2(t) = \int_0^t f(t) dt, \quad (1.26)$$

т. е.

$$\hat{f}_2(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt}\hat{f}_2(t) dt. \quad (1.27)$$

При взятии по частям этого интеграла положим:

$$e^{-pt} dt = dv; \quad f_2(t) = u.$$

$$\text{Тогда } v = -\frac{1}{p} e^{-pt};$$

$$du = \frac{df_2}{dt} dt = f(t) dt;$$

$$\bar{f}_2(p) = -\frac{1}{p} f_2(t) e^{-pt} \Big|_0^\infty + \frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt.$$

Первое слагаемое в правой части здесь равно нулю, так как по предположению  $f_2(t)$  растет не быстрее экспоненты, и при  $t \rightarrow \infty e^{-pt} f_2(t) \rightarrow 0$ . При  $t=0$   $f_2(t)=0$  по определению, в этом случае равен нулю верхний предел интегрирования в формуле (1.27 а). Поэтому

$$\bar{f}_2(p) = \frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt = \frac{1}{p} \bar{f}(p). \quad (1.28)$$

3. Предельные соотношения. Значения оригинала  $f(t)$  при  $t=0$  и  $t \rightarrow \infty$  могут быть определены с помощью изображения  $\bar{f}(p)$  следующим образом:

$$f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \bar{f}(p); \quad (1.29)$$

$$f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \bar{f}(p). \quad (1.30)$$

4. Изображения некоторых функций. Определим вначале изображение так называемой единичной функции времени  $\theta(t)$ , определяемой равенствами:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t \geq 0. \end{cases} \quad (1.31)$$

По формуле (1.21) имеем:

$$\hat{\theta}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} dt = \frac{1}{p}. \quad (1.32)$$

Изображение функции  $f(t)=t$  также определяется непосредственно по формуле (1.21) интегрированием по частям:

$$\bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} t dt = \frac{1}{p^2}. \quad (1.33)$$

Точно так же для  $f(t) = e^{-\alpha t}$  имеем:

$$\bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{p + \alpha}. \quad (1.34)$$



Таблица 1.1

Преобразования Лапласа некоторых функций, встречающихся в гидро-геологических расчетах

$f(t)$	$f(p)$
$\theta(t)$	$1/p$
$t$	$1/p^2$
$t^n$	$n!/p^{n+1}$
$e^{-\alpha t}$	$1/(p + \alpha)$
$\sin \omega t$	$\omega/(p^2 + \omega^2)$
$\cos \omega t$	$p/(p^2 + \omega^2)$
$-\text{Ei}(-\alpha^2/4t)$	$p^{-1}K_0(\alpha\sqrt{p})$
$\text{erfc}(\alpha/2\sqrt{t})$	$p^{-1}e^{-\alpha\sqrt{p}}$
$\delta(t)$	1
$\frac{\alpha}{2t\sqrt{\pi t}} e^{-\alpha^2/4t}$	$e^{-\alpha\sqrt{p}}$
$(4t)^{n/2} i^n \text{erfc}(\alpha/2\sqrt{t})$	$p^{-(1+n/2)} e^{-\alpha\sqrt{p}}$
$e^{-\alpha^2/4t}/2t$	$K_0(\alpha\sqrt{p})$
$\alpha^{-1}(1 - e^{-\alpha t})$	$p^{-1}(p + \alpha)^{-1}$

Существуют подробные таблицы прямых и обратных преобразований Лапласа для самых разных функций [25 и др.]. В табл. 1.1 приведены преобразования некоторых функций, встречающихся в гидрогеологических расчетах.

5. Теорема смещения. Пусть  $\hat{f}(p)$  есть изображение функции  $f(t)$ . Найдем изображение функции  $g(t) = f(t - \tau)$ , где  $\tau$  — константа. Имеем:

$$\hat{g}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} g(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t - \tau) dt.$$

Положим здесь  $t' = t - \tau$ , тогда

$$\hat{g}(p) = e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{\infty} e^{-pt'} f(t') dt'.$$

По определению оригинала,  $f(t') = 0$  при  $t' < 0$  и, следовательно,

$$\hat{g}(p) = e^{-p\tau} \int_0^{\infty} e^{-pt'} f(t') dt' = e^{-p\tau} \hat{f}(p). \quad (1.35)$$

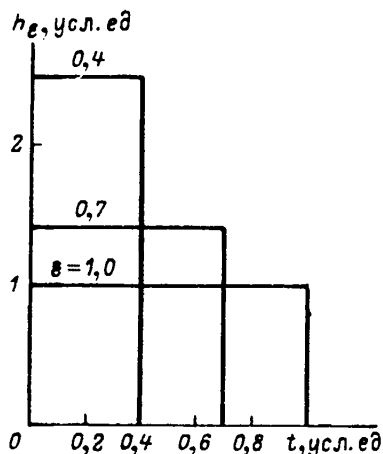


Рис. 1.3. Графики функций  $h_\epsilon(t)$  при различных значениях  $\epsilon$

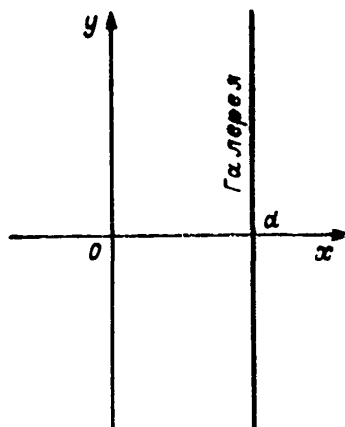


Рис. 1.4. Схема пласта-полу-плоскости, эксплуатируемого бесконечной прямолинейной галереей

Таким образом, изображение функции  $g(t)$  представляет собой изображение функции  $f(t)$  умноженное на  $e^{-pt}$ .

В частности,  $\theta(t - \tau) \doteq \frac{1}{p} e^{-p\tau}$ .

6. Изображение дельта-функции. Дельта-функция Дирака довольно часто фигурирует в задачах гидрогеологических расчетов. Это — одна из так называемых обобщенных функций, и определяется она с помощью следующих предельных соотношений. Рассмотрим функцию  $h_\epsilon(t)$ , определенную равенством:

$$h_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}, & \text{при } 0 \leq t \leq \epsilon; \\ 0, & \text{при } t > \epsilon. \end{cases} \quad (1.36)$$

График этой функции изображен на рис. 1.3.

При стремлении  $\epsilon$  к нулю функции  $h_\epsilon(t)$  сосредотачиваются во все более узком интервале вблизи  $t=0$ , а их значения возрастают. При этом выполняется одно важное условие:

$$\int_0^\infty h_\epsilon(t) dt = 1. \quad (1.37)$$

Дельта-функция  $\delta(t)$  определяется как предел:

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_\epsilon(t), \quad (1.38)$$

т. е. в точке  $t=0$  ее значение бесконечно, при  $t \neq 0$   $\delta(t) = 0$ , и следовательно,

$$\int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (1.39)$$

Дельта-функция используется, например, для описания скважинного водозабора, или галереи, когда диаметр скважины или ширину галереи можно считать практически нулевыми. Пространственную плотность модуля водоотбора в случае бесконечной прямолинейной галереи, протянутой вдоль оси  $Oy$  на расстоянии  $d$  от нее (рис. 1.4), можно записать в виде:

$$\Upsilon(x, y) = q\delta(x - d), \quad (1.40)$$

где  $q$  — дебит галереи на единицу ее длины. Для скважинного водозабора

$$\Upsilon(x, y) = Q\delta(x - x_0)\delta(y - y_0), \quad (1.41)$$

где  $Q$  — дебит скважины,  $(x_0, y_0)$  — ее координаты.

Определим теперь изображение дельта-функции по Лапласу. Для этого определим сначала изображение функции  $h_\epsilon(t)$ :

$$\hat{h}_\epsilon(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} h_\epsilon(t) dt = \int_0^{\epsilon} e^{-pt} \frac{dt}{\epsilon} = \frac{1 - e^{-p\epsilon}}{p\epsilon}.$$

Устремляя  $\epsilon$  к нулю, получим:

$$\delta(p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-p\epsilon}}{p\epsilon} = 1,$$

следовательно  $\delta(t) \doteq 1$ . Согласно теореме смещения, изображение функции  $\delta(t - \tau)$  будет равно  $e^{-p\tau}$ .

7. Решение дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа. Рассмотрим простейшее дифференциальное уравнение вида

$$\tau \frac{du}{dt} + u = f(t) \quad (1.42)$$

с заданной функцией  $f(t)$  и начальным условием  $u(0) = u_0$ . Применим к обеим частям уравнения (1.42) преобразование Лапласа, и с учетом, что по формуле (1.23), изображение производной  $du/dt$  будет равно  $p\hat{u}(p) - u_0$ :

$$\tau(p\hat{u}(p) - u_0) + \hat{u}(p) = \hat{f}(p). \quad (1.43)$$

Отсюда легко определить  $\hat{u}(p)$

$$\hat{u}(p) = \frac{\hat{f}(p) + \tau u_0}{1 + p\tau}. \quad (1.44)$$

Если найти оригинал для изображения  $\hat{f}(p)/(1+p\tau)$ , то задача решена. Например, если  $f(t)=t$ ,  $\hat{f}(p)=1/p^2$ , то изображение  $\hat{u}(p)$  будет иметь вид

$$\hat{u}(p) = \frac{1}{p^2(1+p\tau)} + \frac{\tau u_0}{1+p\tau}.$$

Это выражение нетрудно преобразовать к виду:

$$\hat{u}(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{\tau}{p} + \frac{\tau^2 + \tau u_0}{1+p\tau}.$$

С помощью данных, приведенных в табл. 1.1, находим оригинал:

$$u(t) = t - \tau + (\tau + u_0)e^{-t/\tau} \quad (1.45)$$

или

$$u(t) = t - \tau(1 - e^{-t/\tau}) + u_0 e^{-t/\tau}. \quad (1.46)$$

Аналогично решаются обыкновенные дифференциальные уравнения более высокого порядка. Применение преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений в частных производных уменьшает число независимых переменных на единицу; если исходное уравнение содержало производные по одной пространственной переменной, после применения преобразования Лапласа уравнение превратится в обыкновенное. Рассмотрим, например, уравнение одномерной фильтрации в однородном пласте у реки, изображенной границей 1-го рода (см. рис. 1.4). Это уравнение имеет вид:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{q(t)}{T} \delta(x-d), \quad (1.47)$$

где  $S=S(x, t)$  — понижение в точке  $x$ , отстоящей от реки на расстояние  $x$ , в момент времени  $t$ ;  $a$  — коэффициент уводнепроеводности;  $q(t)$  — дебит линейного водозабора на единицу его протяженности;  $T$  — коэффициент водопроводности;  $d$  — расстояние от реки до линейного водозабора;  $\delta(z)$  — дельта-функция Дирака.

Для понижения имеем следующие граничные условия:

1) на уресе реки, т. е. при  $x=0$ ,

$$S(0, t) = 0; \quad (1.48)$$

2) на бесконечном отдалении от нее

$$\lim_{x \rightarrow \infty} S(x, t) = 0. \quad (1.49)$$

Начальное условие:

$$S(x, 0) = 0. \quad (1.50)$$

Пусть  $S(x, p)$  — изображение временной зависимости понижения. Применяя к обеим частям уравнения (1.47) преобразование Лапласа с учетом формулы (1.24) для изображения производной

и нулевое начальное условие (1.50), получим для  $\hat{S}(x, p)$  дифференциальное уравнение вида

$$\frac{p}{a} \hat{S}(x, p) = \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial x^2} + \frac{\hat{q}(p)}{T} \delta(x-d), \quad (1.51)$$

где  $\hat{q}(p)$  — изображение зависимости  $q(t)$ . В уравнении (1.51)  $p$  — параметр, поэтому от частных производных по  $x$  можно перейти к обычным:

$$\frac{d^2 \hat{S}}{dx^2} - \frac{p}{a} \hat{S} = - \frac{\hat{q}(p)}{T} \delta(x-d). \quad (1.52)$$

Общее решение этого обыкновенного дифференциального уравнения имеет вид:

$$\begin{aligned} \hat{S}(x, p) = & A(p) \operatorname{sh} x \sqrt{\frac{p}{a}} + B(p) \operatorname{ch} x \sqrt{\frac{p}{a}} - \\ & - \frac{\hat{q}(p)}{T \sqrt{\frac{p}{a}}} \operatorname{sh}(x-d) \sqrt{\frac{p}{a}} \theta(x-d), \end{aligned} \quad (1.53)$$

где  $A, B$  — неизвестные константы интегрирования;  $\theta(z)$  — единичная функция, определенная равенствами (1.31). Подставив  $x=0$  в выражение (1.53), с учетом, что  $\theta(x-d)=0$  при  $x=0$ , получим значение  $\hat{S}(0, p) = B(p)$ . Однако, согласно граничному условию (1.48), должно быть  $\hat{S}(0, p) = 0$ , откуда находим, что  $B(p) = 0$ . Значение  $A(p)$  определим из условия (1.49).

При  $z \rightarrow \operatorname{ch} z \sim \frac{1}{2} e^z$ , т. е.

$$\hat{S}(x, p) \sim \frac{1}{2} A(p) e^{x \sqrt{\frac{p}{a}}} - \frac{\hat{q}(p)}{2T \sqrt{\frac{p}{a}}} e^{(x-d) \sqrt{\frac{p}{a}}}.$$

Приравняв выражение в правой части к нулю, определим, что значение константы  $A(p)$ , для того, чтобы выполнялось условие (1.49), должно быть следующим:

$$A(p) = - \frac{\hat{q}(p)}{T \sqrt{\frac{p}{a}}} e^{-d \sqrt{\frac{p}{a}}}. \quad (1.54)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \hat{S}(x, p) = & \frac{\hat{q}(p)}{T \sqrt{\frac{p}{a}}} \left[ e^{-d \sqrt{\frac{p}{a}}} \operatorname{sh} x \sqrt{\frac{p}{a}} - \right. \\ & \left. - \operatorname{sh}(x-d) \sqrt{\frac{p}{a}} \theta(x-d) \right] \end{aligned}$$

или

$$\hat{S}(x, p) = \frac{\hat{q}(p)}{2T \sqrt{\frac{p}{a}}} \left[ e^{-|x-d| \sqrt{\frac{p}{a}}} - e^{-(x+d) \sqrt{\frac{p}{a}}} \right]. \quad (1.55)$$

Таблица 1.2

Значения функций  $i^n \operatorname{erfc} z$ 

$z$	$\operatorname{erfc} z$	$i \operatorname{erfc} z$	$i^2 \operatorname{erfc} z$	$i^3 \operatorname{erfc} z$	$i^4 \operatorname{erfc} z$
0,0	1,00000	0,56419	0,25000	0,09403	0,03125
0,1	0,88754	0,49682	0,19839	0,07169	0,02462
0,2	0,77730	0,38661	0,15566	0,05406	0,01925
0,3	0,67137	0,31422	0,12071	0,04030	0,01491
0,4	0,57161	0,25213	0,09248	0,02969	0,01142
0,5	0,47950	0,19964	0,06996	0,02161	0,00865
0,6	0,39614	0,15593	0,05226	0,01554	0,00647
0,7	0,32220	0,12010	0,03852	0,01103	0,00478
0,8	0,25790	0,09117	0,02801	0,00773	0,00348
0,9	0,20309	0,06820	0,02008	0,00534	0,00250
1,0	0,15730	0,05025	0,01420	0,00364	0,00177
1,1	0,11979	0,03647	0,00989	0,00245	0,00123
1,2	0,08969	0,02605	0,00679	0,00162	0,00085
1,3	0,06599	0,01831	0,00459	0,00106	0,00057
1,4	0,04772	0,01267	0,00306	0,00068	0,00038
1,5	0,03390	0,00862	0,00201	0,00043	0,00025
1,6	0,02365	0,00577	0,00130	0,00027	0,00016
1,7	0,01621	0,00380	0,00082	0,00017	0,00010
1,8	0,01091	0,00246	0,00051	0,00010	0,00007
1,9	0,00721	0,00156	0,00032	0,00006	0,00004
2,0	0,00468	0,00098	0,00019	0,00004	0,00002

При некоторых конкретных видах зависимости  $q(t)$  можно определить оригинал изображения (1.55). Так, если  $q(t) = q_0 = \text{const}$ ,  $\hat{q}(p) = q_0/p$ , с помощью табл. 1.1 (при  $n=1$ ) находим:

$$S(x, t) = \frac{q_0}{T} \sqrt{at} \left[ \operatorname{ierfc} \frac{|x-d|}{2\sqrt{at}} - \operatorname{ierfc} \frac{x+d}{2\sqrt{at}} \right]. \quad (1.56)$$

Здесь  $\operatorname{ierfc} z$  — так называемый *повторный интеграл вероятностей*, значения которого приведены в табл. 1.2 (см. также приложение, программу 31).

8. Передаточные функции. Вернемся вновь к дифференциальному уравнению (1.42). Линейные системы, описываемые уравнением этого типа, весьма широко распространены среди природных и технических объектов, в связи с чем они получили специальное название, а именно, *инерционное звено*. Пример инерционного звена можно отыскать и в гидрогеологии.

Для этого рассмотрим задачу об изменении объема  $u$  подземных вод в артезианском бассейне с перетеканием (предполагается, что напор в питающем водоносном горизонте постоянен):  $u = V_0 - V$  (где  $V$ ,  $V_0$  — соответственно текущее и начальное, при  $t=0$ , значения объема воды, заключенного в эксплуатируемом горизонте).

Запишем уравнение водного баланса для эксплуатируемого слоя. Величина  $u$  изменилась за малое время  $\Delta t$ , т. е.  $\Delta u$  в результате отбора воды в объеме  $Q\Delta t$  (где  $Q$  — дебит водозаборов),

а также вследствие частичной компенсации запасов воды в этом слое за счет перетекания, а именно,  $Q_L \Delta t$  ( $Q_L$  — суммарный расход перетекания по бассейну). Таким образом,

$$\Delta u = (Q - Q_L) \Delta t. \quad (1.57)$$

При постоянстве напора в питающем слое величина модуля перетекания  $\varepsilon_L$  в каждой точке пропорциональна понижению в этой же точке, т. е.  $\varepsilon_L = k_0 / (m_0 S)$ , где  $k_0$ ,  $m_0$  — соответственно коэффициент фильтрации и мощность слабопроницаемого прослоя между пластами. Суммарный расход перетекания получим, проинтегрировав его модуль по всей площади бассейна  $A$ :

$$Q_L = \iint_{(A)} \frac{k_0}{m_0} S \, dA. \quad (1.58)$$

Если пренебречь деформацией площади бассейна при колебании уровня подземных вод, то изменение объема воды  $u$  будет связано с понижением очевидным соотношением:

$$u = \mu^* \iint_{(A)} S \, dA, \quad (1.59)$$

где  $\mu^*$  — упругая водоотдача. Сравнив (1.58) и (1.59), получим

$$Q_L = \frac{k_0}{\mu^* m_0} u = \frac{1}{\tau} u.$$

Подставив это соотношение в уравнение баланса (1.57), разделив его части на  $\Delta t$  и перейдя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим дифференциальное уравнение, которому будет подчиняться величина изменения объема воды в эксплуатируемом пласте:

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau} u = Q(t). \quad (1.60)$$

Если умножить обе его части на постоянную времени  $\tau$ , то получим уравнение инерционного звена в форме (1.42), где  $f(t) = \tau Q(t)$ .

Выше было установлено, что изображение  $\hat{u}(p)$  связано с изображением возмущающей функции  $\hat{f}(p)$  соотношением (1.44). В рассматриваемом случае, очевидно,  $u_0 = 0$  и

$$\hat{u}(p) = \frac{\hat{f}(p)}{1 + \tau p}. \quad (1.61)$$

Множитель  $1/(1 + \tau p)$ , связывающий изображения возмущающей функции  $f(t)$  и реакции на нее  $u(t)$ , получил в технической кибернетике название *передаточной функции*. Передаточная функция — универсальное средство математического описания и исследования линейных систем, используемое во многих теоретических и прикладных дисциплинах. Как будет показано ниже, режимы возмущения любого вида могут быть описаны в терминах, непосредственно вытекающих из передаточных функций.

Получим теперь выражение передаточной функции для более сложного примера, касающегося отбора подземных вод скважиной в условиях однородного неограниченного водоносного горизонта. Применим вначале преобразование Лапласа к уравнению (1.18), принимая во внимание правило дифференцирования производной (1.23) и нулевое начальное условие (1.20):

$$\frac{p}{a} \hat{S} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\hat{S}}{dr} \right). \quad (1.62)$$

Изображение  $\hat{S}$  в этом уравнении является, по существу, функцией одного переменного  $r$ , поэтому частные производные по  $r$  заменены на обыкновенные. Обыкновенное дифференциальное уравнение (1.62) приводится к уравнению Бесселя [25], общее решение которого имеет вид:

$$\hat{S}(r, p) = C_1 K_0 \left( r \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + C_2 I_0 \left( r \sqrt{\frac{p}{a}} \right), \quad (1.63)$$

где  $K_0(z)$  — функция Макдональда нулевого порядка;  $I_0(z)$  — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка [15]. При росте величины  $r$  функция  $I_0[r(p/a)^{1/2}]$  бесконечно растет, а функция  $K_0[r(p/a)^{1/2}]$  убывает до нуля. Поскольку из физических соображений ясно, что понижение (а также его изображение) должно стремиться к нулю при  $r \rightarrow \infty$ , в общем решении (1.63) необходимо положить  $C_2 = 0$ . Таким образом, имеем

$$\hat{S}(r) = C_1 K_0 \left( r \sqrt{\frac{p}{a}} \right). \quad (1.64)$$

Применяя преобразование Лапласа к обеим частям (1.19), получим:

$$\lim_{r \rightarrow 0} 2\pi T r \frac{d\hat{S}}{dr} = -\hat{Q}(p). \quad (1.65)$$

Производная  $d\hat{S}/dr$  равна —  $C_1 \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left( r \sqrt{\frac{p}{a}} \right)$  [25], где  $K_1(z)$  — функция Макдональда 1-го порядка; при  $z \rightarrow 0$  она совпадает с функцией  $1/z$  отсюда  $C_1 = \hat{Q}(p)/\pi T$  и

$$\hat{S}(r, p) = \frac{\hat{Q}(p)}{2\pi T} K_0 \left( r \sqrt{\frac{p}{a}} \right), \quad (1.66)$$

где  $\hat{Q}(p)$  — изображение входного возмущения;  $\hat{S}(r, p)$  — изображение реакции — понижения в точке, расстояние от которой до водозабора равно  $r$ ; по аналогии с (1.61) можно было бы заключить, что  $(2\pi T)^{-1} K_0[r(p/a)^{1/2}]$  и есть выражение передаточной функции для этого случая. Поступим, однако, иначе, так как входное возмущение и реакция имеют различные размерности, а по теоретическим соображениям удобно иметь передаточную функцию безразмерной. Поэтому, говоря о передаточной функции



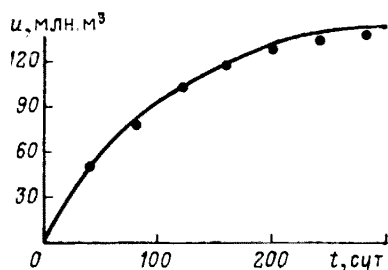


Рис. 1.5. Временная зависимость  $u(t)$  в условиях примера

понижения, мы будем в дальнейшем иметь в виду операционное равенство вида

$$\hat{S}(r, p) = \frac{\hat{Q}(p)}{T} U_S(r, p), \quad (1.67)$$

где  $T$  — характерное значение коэффициента водопроницаемости;  $U_S(r, p)$  — передаточная функция понижения. В рассматриваемом случае

$$U_S(r, p) = \frac{1}{2\pi} K_0\left(r \sqrt{\frac{p}{a}}\right). \quad (1.68)$$

Получение передаточных функций не самоцель, а инструмент исследования различных режимов в линейных системах. Наиболее простой режим развивается при постоянном во времени возмущении. Преобразование Лапласа для функции  $f(t) = f_0 = \text{const}$ , как мы уже видели, есть  $\hat{f}(p) = f_0/p$ . В случае инерционного звена, согласно формуле (1.44), при этом

$$\hat{u}(p) = \frac{f_0}{p(1 + p\tau)}.$$

В табл. 1 содержится соответствующий оригинал:

$$u(t) = f_0(1 - e^{-t/\tau}). \quad (1.69)$$

На рис. 1.5 приведен график зависимости (1.69) в физической интерпретации артезианского бассейна при  $f_0 = 10^7$  м<sup>3</sup>,  $\tau = 100$  сут.

Изображение  $K_0[r(p/a)^{1/2}]$  (см. табл. 1.1) приводит к известной формуле Тэйса [30, 39]:

$$S(r, t) = \frac{Q_0}{T} R_0(M, t), \quad (1.70)$$

где  $Q_0$  — постоянный во времени дебит, а величина  $R_0$  представляет собой гидравлическое сопротивление для точки, расположенной на расстоянии  $r$  от водозабора,

$$R_0 = -\frac{1}{4\pi} \text{Ei}\left(-\frac{r^2}{4at}\right), \quad (1.71)$$

где  $\text{Ei}(z)$  — интегральная показательная функция [25].

При достаточно больших значениях времени  $[t \geq (2, 5, \dots, 5)r^2/a]$  справедливо приближение

$$R_0 = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{2,25at}{r^2}. \quad (1.72)$$

9. Численные методы обращения преобразования Лапласа. Далеко не во всех случаях удастся перейти от изображения к оригиналу с помощью таблиц, как это было в рассмотренных выше примерах. В более сложных условиях применяются численные методы обращения преобразования Лапласа. Литература по этим вопросам весьма обширна; часть библиографии содержится в обзоре [31]. В задачах гидрогеологических расчетов хорошо зарекомендовал себя метод, предложенный Л. К. Гохбергом [6]. Для его применения прежде всего оценивается наибольшее значение времени, интересующее исследователя; это значение времени делится на 16, в результате чего определяется величина масштаба времени  $\Delta t$ . Затем значения передаточной функции вычисляются в пяти точках: при  $p_1 = 1/\Delta t$ ,  $p_2 = p/2$ ,  $p_3 = p_1/4$ ,  $p_4 = p_1/8$ , и  $p_5 = p_1/16$ . Полученные значения передаточной функции используются для вычислений по формуле

$$u(t) = \sum_{i=1}^5 U(p_i) A_i(t), \quad (1.73)$$

где  $A_i(t)$  — табулированные функции (табл. 1.3);  $U(p)$  — передаточная функция процесса (в зависимости от конкретно решаемой задачи это — передаточная функция понижения, или редукции, или какой-либо другой изменяющейся во времени величины).

Таблица 1.3

Численное обращение преобразования Лапласа (по Л. К. Гохбергу)

$t/\Delta t$	Значения функций $A_k(t)$				
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
1	—3,236	9,775	—8,077	2,952	—0,414
2	—2,014	4,244	—1,243	—0,038	0,050
3	—0,706	—0,117	3,173	—1,610	0,257
4	0,241	—2,912	5,564	—2,206	0,310
5	0,870	—4,457	6,601	—2,201	0,277
6	1,252	—5,355	6,732	—1,825	0,195
7	1,451	—5,574	6,250	—1,216	0,089
8	1,512	—5,371	5,355	—0,467	—0,028
9	1,469	—4,862	4,180	0,359	—0,146
10	1,349	—4,137	2,826	1,221	—0,259
11	1,170	—3,257	1,365	2,088	—0,363
12	0,952	—2,279	—0,153	2,937	—0,454
13	0,702	—1,234	—1,689	3,753	—0,531
14	0,432	—0,154	—3,210	4,525	—0,593
15	0,150	0,938	—4,696	5,245	—0,638
16	—0,137	2,022	—6,122	5,903	—0,665

Рассмотрим применение метода Гохберга на примере инерционного звена с передаточной функцией  $\hat{u}(p) = 1/(1+\tau p)$  при  $\tau = 100$  сут. Выберем максимальное значение времени, равное 320 сут; тогда  $\Delta t = 20$  сут. Находим:  $p_1 = 1/20 = 0,05$  сут $^{-1}$ ;  $U(p_1) = 1/(1+100 \times 0,05) = 0,1667$ ;  $p_2 = 1/40 = 0,025$  сут $^{-1}$ ;  $U(p_2) = 1/(1+100 \times 0,025) = 0,2857$ ;  $p_3 = 0,0125$  сут $^{-1}$ ;  $U(p_3) = 0,4444$ ;  $p_4 = 0,00625$  сут $^{-1}$ ;  $U(p_4) = 0,6154$ ;  $p_5 = 0,00313$  сут $^{-1}$ ;  $U(p_5) = 0,7619$ .

Рассчитаем значение  $u(t)$  при  $t = 80$  сут. Из табл. 1.3 выбираем строку для  $t/\Delta t = 80/20 = 4$ ; по формуле (1.73) получаем:  $u(t) = 0,241 \cdot 0,1667 - 2,912 \cdot 0,2857 + 5,564 \cdot 0,4444 - 2,201 \times 0,6154 + 0,277 \cdot 0,7619 = 0,537$ .

Истинное значение  $u(t) = 1 - e^{-80/100} = 0,551$ . На рис. 1.5 точками нанесены значения, полученные с помощью метода Гохберга.

Рассмотрим теперь, как приближается по методу Гохберга решение в примере с отбором подземных вод одиночным водозабором в однородном неограниченном пласте, передаточная функция которого задана формулой (1.68). Выберем максимальное значение времени, равное 10 000 сут, тогда  $\Delta t = 625$  сут. Вычислим значение гидравлического сопротивления в точке  $r = 100$  м при  $t = 10$   $\Delta t = 6250$  сут. По формуле (1.68) с помощью таблицы функции Макдональда [35] находим: при  $p_1 = 1/625 = 1,6 \cdot 10^{-3}$  сут $^{-1}$   $U_s(r, p_1) = \frac{1}{2\pi} K_0(100 \sqrt{1,6 \cdot 10^{-3}/10^4}) = \frac{1}{2} \times K_0(0,04) = 0,5123$ ; аналогично при  $p_2 = 0,8 \cdot 10^{-3}$  сут $^{-1}$   $U_s(r, p_2) = 0,5675$ ; при  $p_3 = 0,4 \cdot 10^{-3}$  сут $^{-1}$   $U_s(r, p_3) = 0,6226$ ; при  $p_4 = 0,2 \cdot 10^{-3}$  сут $^{-1}$   $U_s(r, p_4) = 0,6778$  и при  $p_5 = 0,1 \cdot 10^{-3}$  сут $^{-1}$   $U_s(r, p_5) = 0,7329$ . Выбрав в табл. 1.3 строку для  $t/\Delta t = 10$ , по формуле (1.73) определим  $R_0(M, t) = 1,349 \cdot 0,5123 - 4,137 \times 0,5675 + 2,826 \cdot 0,6226 + 1,221 \cdot 0,6778 - 0,259 \cdot 0,7329 = 0,74$ . Соответствующая величина понижения

$$S(M, t) = \frac{10\,000}{1000} 0,74 = 7,4 \text{ м.}$$

По формуле Тэйса (1.72) имеем:

$$S(M, t) = \frac{10\,000}{1000} \frac{1}{4\pi} \ln \frac{2,25 \cdot 10\,000 \cdot 6250}{100^2} = 7,6 \text{ м.}$$

Таким образом, формула Гохберга обеспечивает точность порядка 2,6 %. Накоплен значительный опыт применения метода Гохберга в гидрогеологических расчетах, согласно которому, метод практически всегда обеспечивает приближение решения с точностью несколько процентов. Расчеты по методу Гохберга могут быть автоматизированы с помощью программы 1 для микрокалькулятора (см. приложение).

### 1.3. РАСЧЕТЫ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ ВОДООТБОРЕ

Введение понятий передаточной функции и гидравлического сопротивления позволяют решить задачу по определению временных зависимостей понижения в случае постоянного во времени водоотбора. Однако, как уже отмечалось, ирригационный водоотбор подземных вод весьма непостоянен во времени. Поэтому определение реакций линейных систем на возмущение, изменяющееся во времени, является одной из наиболее важных задач гидрогеологических расчетов. В настоящем разделе рассмотрены случаи, когда величина водоотбора закономерно растет с течением времени, а также случай периодической зависимости водоотбора.

Растущая во времени величина водоотбора представляет собой довольно часто встречающийся в практике случай, поскольку при проектировании водозаборов должно учитываться то обстоятельство, что водопотребление будет со временем расти. Тенденция этого роста может прогнозироваться с помощью различного рода математических зависимостей. Здесь рассмотрен наиболее простой — линейный случай такой зависимости:

$$Q(t) = Q_0 + \lambda t, \quad (1.74)$$

где  $Q_0$  — начальное значение дебита;  $\lambda$  — скорость его роста. Преобразование Лапласа зависимости (1.74) имеет вид (см. табл. 1.1):

$$\widehat{Q}(p) = \frac{Q_0}{p} + \frac{\lambda}{p^2};$$

подставив это выражение в (1.67) и введя постоянную времени  $\tau_0 = Q_0/\lambda$ ,

найдем

$$\widehat{S}(r, p) = \frac{Q_0}{T} \frac{U_S(r, p)}{p} \left(1 + \frac{1}{p\tau_0}\right). \quad (1.76)$$

Временная зависимость гидравлического сопротивления может быть получена с помощью обратного преобразования Лапласа от изображения

$$\frac{1}{p} \left(1 + \frac{1}{p\tau_0}\right) U_S(M, p).$$

Для частного случая одиночного водозабора в неограниченном однородном водоносном пласте это изображение имеет вид

$$\frac{1}{2\pi p} \left(1 + \frac{1}{p\tau_0}\right) K_0\left(r \sqrt{\frac{p}{a}}\right) \quad (1.77)$$

и с помощью несложных преобразований приводится к табличному виду; для гидравлического сопротивления при линейно изменяющемся водоотборе получена зависимость:

$$R_0(r, t) = R_0^{(0)}(r, t) + \frac{t}{\tau_0} \Delta R_\lambda(r, t), \quad (1.78)$$

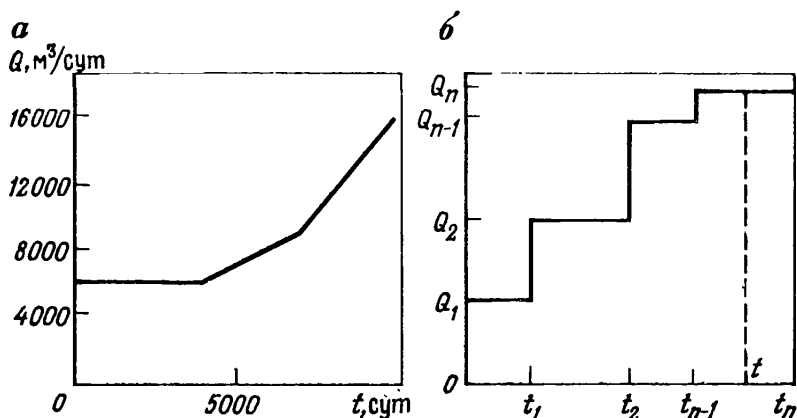


Рис. 1.6. Кусочно-линейная (а) и ступенчатая (б) временная зависимость водоотбора

где  $R_0^{(0)}(r, t)$  — сопротивление для условий отсутствия линейного роста, задаваемое формулой (1.71);

$$\Delta R_\lambda(r, t) = \frac{1}{4\pi} \left[ -\left(1 + \frac{r^2}{4at}\right) \text{Ei}\left(-\frac{r^2}{4at}\right) - e^{-r^2/4at} \right]. \quad (1.79)$$

При достаточно больших значениях времени, например, при  $t \geq (2,5 \div 5) r^2/a$  справедливо более простое выражение:

$$\Delta R_\lambda(r, t) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{0,83at}{r^2}. \quad (1.80)$$

Выражение, аналогичное (1.80), было получено Ф. М. Бочевым.

Если тенденция к изменению дебита имеет более сложный характер, не всегда удастся получить соответствующую аналитическую зависимость для понижения. Однако в таких случаях график изменения дебита можно представить в виде комбинации прямолинейных участков, а затем применить принцип суперпозиции в следующей формулировке: эффект отбора подземных вод по такому графику будет равен сумме частных эффектов, получаемых от каждого из прямолинейных участков в отдельности. Рассмотрим на примере, как можно рассчитать величину понижения в случае сложного характера изменения дебита с помощью принципа суперпозиции. На рис. 1.6, а изображен график водоотбора, состоящий из трех прямолинейных участков. Рассчитаем величину понижения в точке с  $r=100$  м на срок  $t=8000$  сут. К моменту времени  $t=t_1$  успели проявиться первый участок графика ( $0 \leq t \leq 4000$  сут), второй участок ( $4000 \text{ сут} \leq t \leq 7000$  сут) и часть третьего ( $7000 \text{ сут} \leq t \leq 8000$  сут). Чтобы оценить влияние первого участка, рассчитаем величину понижения, которая сложилась бы, если бы водозабор работал с постоянным дебитом, равным  $6000 \text{ м}^3/\text{сут}$  в течение  $4000$  сут, а затем выключился бы.

Выключение водозабора, ранее работавшего с дебитом  $Q$ , равнозначно, в данном случае, появлению в момент времени  $t = 4000$  сут нагнетания с тем же расходом ( $Q = 6000 \text{ м}^3/\text{сут}$ ). По формуле Тэйса, понижение, создаваемое водозабором с постоянным расходом за 8000 сут, равно

$$S = \frac{6000}{1000} \frac{1}{4\pi} \ln \frac{2,25 \cdot 10\,000 \cdot 8000}{10^4} = 4,68 \text{ м.}$$

Повышение уровня, создаваемое нагнетанием, проработавшим к моменту времени  $t_1$  в течение  $8000 - 4000 = 4000$  сут, составит 4,35 м; таким образом, влияние первого участка графика выразится понижением в размере  $4,68 - 4,35 = 0,33 \text{ м}$ .

Влияние второго участка графика можно представить себе следующим образом: в момент времени  $t = 4000$  сут включается водозабор с дебитом, изменяющимся по линейному закону с  $Q_0 = 6000 \text{ м}^3/\text{сут}$  и  $\lambda = 1 \text{ м}^3/\text{сут}^2$ , при этом по формуле (1.75),  $\tau_0 = 6000$  сут. В момент времени  $t = 7000$  сут включается нагнетание, работающее с линейно убывающим во времени расходом:  $Q = 9000 - \lambda t$  ( $\text{м}^3/\text{сут}$ ). К моменту времени  $t_1 = 8000$  сут линейно возрастающий отбор создаст понижение, которое оценим по формуле (1.80). При этом первое слагаемое этой формулы определяем по формуле Тэйса (1.72): при  $t = 4000$  сут ее величина составит  $R_0^{(0)} = 0,725$ . Значение  $\Delta R_\lambda$  по формуле (1.80) равно

$$\Delta R_\lambda = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{0,83 \cdot 10\,000 \cdot 4000}{10^4} = 0,645;$$

полная величина сопротивления, по формуле (1.78), составит

$$R_0 = 0,725 + \frac{4000}{6000} 0,645 = 1,155,$$

а величина понижения, соответствующая этому сопротивлению, —  $6000/1000 \cdot 1,155 = 6,93 \text{ м}$ .

Аналогично находим величину повышения уровня благодаря линейно убывающему нагнетанию, с той только разницей, что в этом случае берем  $Q_0 = 9000 \text{ м}^3/\text{сут}$  и  $t = 1000$  сут (так как к сроку оно успело проработать именно такое время):  $R_0^{(0)} = 0,614$ ;  $\Delta R_\lambda = 0,534$ ;  $\tau_0 = 9000$  сут;  $R_0 = 0,673$ . Соответствующая величина повышения уровня составит  $9000/1000 \cdot 0,673 = 6,06 \text{ м}$ . Таким образом, эффект от второго участка графика равен  $6,93 - 6,06 = 0,87 \text{ м}$ .

Наконец, оценим эффект от третьего участка. Здесь дебит также изменяется по линейному закону; при этом  $Q_0 = 9000 \text{ м}^3/\text{сут}$ ,  $\lambda = 2,5 \text{ м}^3/\text{сут}^2$  ( $\tau_0 = 3600$  сут). Поступая так же, как это делалось для второго участка, определим, что  $R_0^{(0)} = 0,614$ ;  $\Delta R_\lambda = 0,534$ ;  $R_0 = 0,614 + 1000/3600 \cdot 0,534 = 0,762$ . Соответствующая величина понижения  $S = 9000/1000 \cdot 0,762 = 6,86 \text{ м}$ . Теперь сложим понижения, обусловленные эффектом каждого из участков в отдельности;

в результате получим, что суммарное понижение при  $t=8000$  сут будет равно  $0,33+0,87+6,86=8,06$  м.

В практике гидрогеологических расчетов гораздо чаще графиков, подобных изображенному на рис. 1.6 а, встречаются случаи, когда водоотбор изменяется по ступеням. В таких случаях поясненный на примере принцип суперпозиции может быть представлен в виде компактного математического выражения (см. рис. 1.6, б). Задача ставится следующим образом: график водоотбора разбит на ступени; каждая  $n$ -я ступень характеризуется значением времени ее конца  $t_n$  и величиной дебита  $Q_n$ . Время начала  $n$ -й ступени совпадает с концом  $(n-1)$ -й и равно  $t_{n-1}$  (для первой ступени время ее начала равно нулю). Необходимо определить понижение в момент времени  $t$ , находящийся в пределах  $k$ -й ступени.

Включившись в момент времени  $t_{n-1}$  и проработав до  $t_n$  в течение  $t-t_{n-1}$ ,  $n$ -я ступень создает понижение в размере  $Q_n/T \times \times R_0(t-t_{n-1})$ . В момент времени  $t_n$   $n$ -я ступень выключается; это равносильно включению в это время нагнетания, которое выразится в повышении уровня на  $(Q_n/T)R_0(t-t_n)$ . Таким образом, итоговое понижение, обусловленное эффектом действия  $n$ -й ступени водоотбора, равно

$$S_n = \frac{Q_n}{T} [R_0(t-t_{n-1}) - R_0(t-t_n)]. \quad (1.81)$$

Сложив эти эффекты для всех  $n$  от 1 до  $k=1$ , найдем величину понижения, обусловленную суммарным влиянием всех ступеней вплоть до начала последней,  $k$ -й ступени водоотбора. Ее влияние выразится понижением, величина которого равна  $(Q_k/T) \times \times R_0(t-t_{k-1})$ .

Таким образом, получим формулу общего вида:

$$S(t) = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{Q_n}{T} [R_0(t-t_{n-1}) - R_0(t-t_n)] + \frac{Q_k}{T} R_0(t-t_{k-1}). \quad (1.82)$$

Эта формула может использоваться для расчетов в любых случаях изменения дебита, когда ступенчатое представление графика можно считать достаточно точно изображающим его реальный вид. Многолетний опыт применения этого способа свидетельствует о том, что такое упрощение графика водоотбора в абсолютном большинстве случаев оправдано, и результаты, получаемые при этом, мало отличаются от результатов, получаемых при более точном приближении временной зависимости водоотбора (например, с помощью кусочно-линейной аппроксимации, см. рис. 1.6, а).

Одной из традиционных областей применения формулы (1.82) был расчет понижения при периодическом характере водоотбора, который, как говорилось выше, весьма характерен для использования подземных вод в ирригации. Для расчетов периодических режимов были получены некоторые упрощения формулы (1.82).

Например, было показано [16, 19, 29], что нет необходимости учета колебаний водоотбора в течение всех предшествовавших расчетному моменту лет (которых, может быть, достаточно много, и внутри каждого из них — несколько ступеней). Вместо этого принимается, что играют роль внутригодовые колебания дебита только за два-три последних года (а то и за один год); для учета влияния всех предшествовавших лет принимается, что в течение всего этого времени имела место одна продолжительная ступень с постоянным расходом, равным среднегодовому. Очевидно, это может значительно сократить объем необходимых вычислений.

Существует еще один способ расчета периодических режимов в линейных системах, который применим и в задачах гидрогеологии. Он основан на представлении периодической зависимости в виде комбинации тригонометрических функций — синусов и косинусов, известный в математике под названием рядов Фурье. Однако, прежде чем обратиться к последовательному изложению метода, вернемся вновь к примеру одной из простых линейных систем — инерционному звену, описываемому уравнением (1.42). Представим себе, что возмущение  $f(t) = \tau Q(t)$  представляет собой функцию времени вида

$$f(t) = 5 \cdot 10^7 (1 - \cos \omega t). \quad (1.83)$$

Таким образом, максимальное значение  $f$  равно 1000 млн. м<sup>3</sup>, минимальное — нулю. Функция  $f(t)$  состоит из двух слагаемых: первое из них — постоянная (равная 50 млн. м<sup>3</sup>); вторая — представляет собой косинусоидальную зависимость от времени. Реакция системы на возмущение вида (1.83) определяется методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений [15] и имеет вид:

$$u(t) = 5 \cdot 10^7 (1 - e^{-t/\tau}) - \frac{5 \cdot 10^7}{1 + \omega^2 \tau^2} \cos \omega t - \frac{5 \cdot 10^7 \cdot \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \sin \omega t + \\ + \frac{5 \cdot 10^7}{1 + \omega^2 \tau^2} e^{-t/\tau}. \quad (1.84)$$

Преобразуем тригонометрическое выражение в равенстве (1.84):

$$u(t) = 5 \cdot 10^7 (1 - e^{-t/\tau}) - \frac{5 \cdot 10^7}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cos(\omega t - \arctg \omega \tau) + \\ + \frac{5 \cdot 10^7}{1 + \omega^2 \tau^2} e^{-t/\tau}. \quad (1.84a)$$

Сравнив (1.84 a) с (1.84), видим, что первое из слагаемых представляет собой реакцию на постоянную компоненту входного возмущения, равную  $5 \cdot 10^7$  м<sup>3</sup>. Второе из слагаемых формулы (1.84 a), содержащее тригонометрическую функцию, есть зависимость от времени вынужденных колебаний, обусловленных периодическим изменением входного возмущения. Наконец, третье слагаемое представляет собой так называемую переходную компоненту реакции. Она обусловлена первоначальным выведением



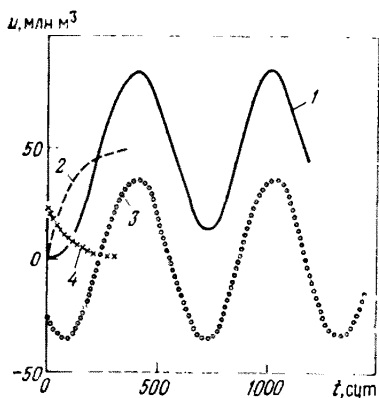


Рис. 1.7. Временная зависимость  $u(t)$  при периодическом возмущении (1) и ее компоненты: апериодическая (2), периодическая (3) и переходная (4)

системы из состояния покоя и, как легко видеть, затухает с ростом времени. На рис. 1.7 изображен график всех трех компонент, а также результирующая временная зависимость  $u(t)$ .

Итак, переходная компонента быстро затухает, и к моменту достижения первого экстремума она уже практически равна нулю; при оценке реакции в более или менее отдаленные от начала процесса моменты времени можно ее не учитывать. Однако в начальный период переходная составляющая вполне сравнима по величине с другими в особенности, при  $t=0$ , когда благодаря ей выполняется физическое требование, чтобы  $u(0)$  было равно нулю. Учет переходной компоненты процесса необходим весьма

редко, для практических целей обычно следует знать величину максимального напряжения и время его наступления. Что касается формы кривой, она, как правило, мало интересует практика.

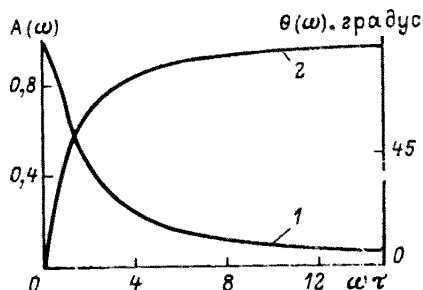
Аналогично выглядит исследование реакций систем геофильтрационной природы: например, для оценки эксплуатационных ресурсов подземных вод при циклическом их отборе на орошение наибольший интерес представляют величина максимального понижения и время года, в которое она будет наблюдаться. Для таких оценок можно отказаться от рассмотрения переходных компонент и свести задачу к оценке изменения понижения при возмущении, представляющем собой реакцию на постоянный во времени (среднегодовой) водоотбор, и реакцию на колебания величины водоотбора вокруг среднегодового значения. Первая из названных компонент временной зависимости понижения будет при этом апериодической компонентой, вторая — периодической ее составляющей.

Как показано в предыдущем разделе, апериодическая компонента понижения может быть получена обратным преобразованием Лапласа от соответствующей передаточной функции, деленной на  $p$ ; так, для инерционного звена эта компонента представляет собой временную зависимость (1.69). Оказывается, что выражение и для периодической компоненты можно получить с помощью передаточной функции. Для этого необходимо проделать следующее:

- 1) подставить  $p=i\omega$  в выражение для передаточной функции;
- 2) выделить модуль  $A$  и обратный аргумент  $\theta$  полученного комплексного выражения;

Рис. 1.8. Частотные характеристики инерционного звена:

1 — амплитудная; 2 — фазовая



3) если временная зависимость возмущения задавалась функцией  $k \cos(\omega t - \varphi)$  выражение для периодической компоненты реакции будет равно  $kA \cos(\omega t - \varphi - \theta)$ .

Рассмотрим, как применяются эти правила на примере инерционного звена, передаточная функция которого определена выражением (1.61). Подставим в него  $p = i\omega$ :  $U(i\omega) = 1/(1 + i\omega\tau)$ ; умножим числитель и знаменатель на комплексно-сопряженную величину  $1 - i\omega\tau$ ; тогда  $U(i\omega) = (1 - i\omega\tau)/(1 + \omega^2\tau^2)$ . Его модуль равен  $A = 1/(1 + \omega^2\tau^2)^{1/2}$ ; аргумент — величине  $\text{arctg}(-\omega\tau)$ , обратный аргумент составит  $\text{arctg} \omega\tau$ . Рассмотрев второе слагаемое в формуле (1.84, а), видим полное соответствие с только что полученным.

В технической кибернетике, электротехнике и других дисциплинах зависимости  $A$  и  $\theta$  от частоты  $\omega$ , носят специальные названия, а именно  $A(\omega)$  называется *амплитудно-частотной характеристикой*,  $\theta(\omega)$  — *фазо-частотной характеристикой* системы. Таким образом, частотные характеристики инерционного звена имеют вид:

$$A(\omega) = 1/\sqrt{1 + \omega^2\tau^2};$$

$$\theta(\omega) = \text{arctg} \omega\tau. \quad (1.85)$$

На рис. 1.8 изображены графики частотных характеристик. При постоянном значении  $\tau$  рост частоты  $\omega$  приводит к уменьшению амплитуды периодической составляющей реакции и к росту аргумента тригонометрической функции в ее выражении. Физически это означает, что система не успевает, в силу присущей ей инерционности, полностью отреагировать на колебания входного возмущения (этим свойством системы и объясняется ее название).

Пример с инерционным звеном был рассмотрен столь подробно, поскольку выражение его передаточной функции весьма простое и позволяет получить частотные характеристики в виде элементарных функций. Уже в случае примера с передаточными функциями понижения в виде (1.68) частотная характеристика выражается через специальные функции. Подставив  $p = i\omega$  в выражение (1.68), получим

$$U_S(r, i\omega) = \frac{1}{2\pi} K_0 \left( r \sqrt{\frac{i\omega}{a}} \right).$$

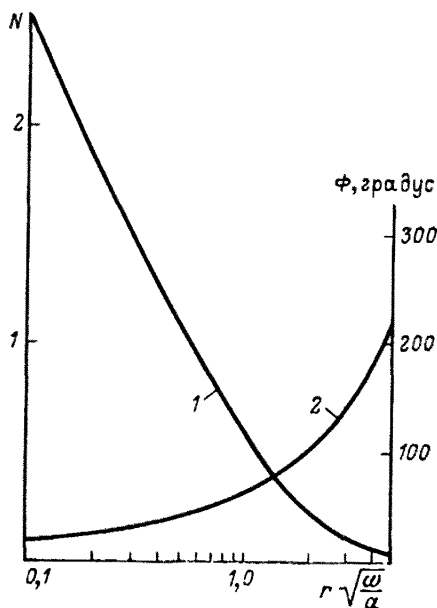


Рис. 1.9. Частотные характеристики одиночного водозабора:

1 — амплитудная; 2 — фазовая

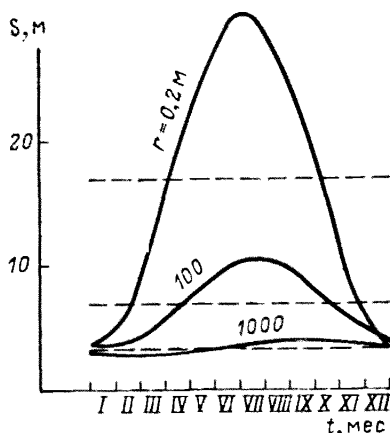


Рис. 1.10. Суммарные временные зависимости понижения и их аperiodические компоненты (пунктирные линии) для различных значений расстояния между точкой и центром одиночного водозабора

Дальнейшие преобразования приводят к выражению вида:

$$A(r, \omega) = \frac{1}{2\pi} N \left( r \sqrt{\frac{\omega}{a}} \right);$$

$$\theta(r, \omega) = \Phi \left( r \sqrt{\frac{\omega}{a}} \right). \quad (1.86)$$

$$\text{При } z < 0,1 \left( z = r \sqrt{\frac{\omega}{a}} \right)$$

$$N(z) = \sqrt{0,62 + \ln^2 0,9z};$$

$$\Phi(z) = -45^\circ / \ln 0,9z, \quad (1.87)$$

где  $N(z)$ ,  $\Phi(z)$  — соответственно модуль и обратный аргумент комплекса функции Кельвина [25]. На рис. 1.9 приводятся графики этих зависимостей.

Попытаемся с помощью техники частотных характеристик определить режим периодических эксплуатационных колебаний при отборе подземных вод одиночным водозабором в неограниченном однородном пласте, если график водоотбора задан выражением  $Q(t) = 10\,000 (1 - \cos \omega_1 t)$  м<sup>3</sup>/сут, причем частота колебаний водоотбора соответствует годовому периоду, т. е.  $\omega_1 = 2\pi/365 = 0,0174$  сут<sup>-1</sup>. Рассмотрим для определенности десятый год эксплуатации ( $3285 < t \leq 3650$  сут) и три точки:  $r$  равные

0,2; 100 и 1000 м. Сначала оценим реакцию на постоянный во времени водоотбор с дебитом, равным  $10\,000\text{ м}^3/\text{сут}$ . С помощью формулы Тэйса (1.72) убеждаемся, что во всех трех случаях соответствующие компоненты понижения в течение 10-го года изменяются весьма слабо; можно принять, что аperiодические компоненты понижений постоянны и равны соответственно 17,0, 7,1 и 3,45 м.

Для точки с  $r=0,2\text{ м}$  определим значения частотных характеристик:  $z=r(\omega/a)^{1/2}=2,62\cdot 10^{-4}$ ; по формуле (1.87)  $N(z)=8,39$ ;  $\Phi(z)=5^\circ,4$ , откуда по формуле (1.86)  $A(r, \omega_1)=1,335$ . Реакция на периодическую составляющую возмущения будет, таким образом, равна

$$S_p(t) = \frac{10\,000}{1000} 1,335 \cos(\omega_1 t - 5^\circ,4) = 13,35 \cos(\omega_1 t - 5^\circ,4).$$

Эта зависимость вместе с постоянной компонентой, равной в данном случае 17 м, изображена на рис. 1.10.

Для точки с  $r=100\text{ м}$  величина  $z$  равна

$$100 \sqrt{0,0172/10^4} = 0,13.$$

По графикам на рис. 1.9 находим:  $N=2,2$ ;  $\Phi=20^\circ$ ;  $A=0,35$ .

Периодическая составляющая понижения в этой точке равна

$$S_p(t) = \frac{10\,000}{1000} 0,35 \cos(\omega_1 t - 20^\circ) = 3,5 \cos(\omega_1 t - 20^\circ).$$

Результирующая зависимость  $S(t)$  для этой точки изображена на рис. 1.10.

Наконец, для точки с  $r=1000\text{ м}$  получаем  $A=0,028$ ;  $\Phi=79^\circ$ ;  $S_p(t)=0,28 \cos(\omega_1 t - 79^\circ)$ . Соответствующий график суммарной зависимости  $S(t)$  для этой точки также приведен на рис. 1.10.

Рассмотрим три графика, приведенных на рис. 1.10. Режим понижения на стенке скважины ( $r=0,2\text{ м}$ ) весьма ярко выражен в сезонном разрезе; максимум понижения наступает в начале седьмого месяца, т. е. практически совпадает с максимумом водоотбора; при  $r=100\text{ м}$  режим понижения выражен слабее, а его максимум сдвинут к концу седьмого месяца; наконец, при  $r=1000\text{ м}$  сезонные колебания понижения весьма слабо заметны и характеризуются максимумом в начале девятого месяца, т. е. очень запаздывает за максимумом водоотбора.

Сформулируем теперь правило определения периодической компоненты понижения при входном возмущении вида

$$Q(t) = Q_1 \cos(\omega t - \varphi_1). \quad (1.88)$$

В рассмотренном только что примере сначала определяли значения частотных характеристик  $A(r, \omega)$  и  $\theta(r, \omega)$ , а затем умножали амплитуду колебаний дебита на величину амплитудно-частотной характеристики и делили на коэффициент водопроводимости; из

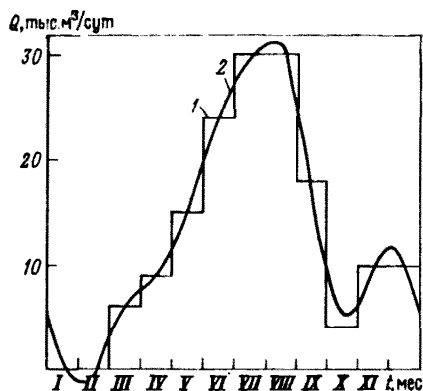


Рис. 1.11. Ступенчатый график внутрigoдового хода водоотбора на орошение (1) и его приближение суммой четырех гармоник Фурье (2)

аргумента тригонометрической функции вычитали значение фазочастотной характеристики:

$$S_p = \frac{Q_1}{T} A(r, \omega) \cos(\omega t - \varphi_1 - \theta). \quad (1.89)$$

График водоотбора вида (1.88), содержащий тригонометрическую функцию времени, весьма идеализирован. Реальные графики намного сложнее; например, на рис. 1.11 изображен совмещенный график среднемесячных норм поливов (вегетационных и влагозарядковых) и промывок для участка площадью 1000 га. Расчет эксплуатационных колебаний понижения при задании временной зависимости водоотбора ступенчатым графиком типа изображенного на рис. 1.11 можно осуществить с помощью формулы (1.82), как это часто и делается на практике. Однако существует метод, позволяющий определить периодическую компоненту понижения аналогично только что описанному случаю. Усложнения при этом сводятся к тому, что представление графика водоотбора будет содержать не одну, а несколько тригонометрических функций времени:

$$Q(t) = Q_0 + \sum_{n=1}^N Q_n \cos(n\omega_1 t - \varphi_n). \quad (1.90)$$

Представление периодической функции в таком виде называется отрезком ряда Фурье [10]. Несколько упростить вид выражения (1.90) можно, если условиться выражать фазовые углы  $\varphi_n$  в этой формуле (и ей подобных) не в радианах, а в градусах. При этом, поскольку число дней в году (365) почти равно числу градусов в полном угле (360), при значении времени  $t$  выраженном в сутках, а фазового угла  $\varphi_n$  — в градусах, соответствующий аргумент косинуса также можно считать выраженным в градусах. При этом выражение для зависимости дебита от времени примет вид:

$$Q(t) = Q_0 + \sum_{n=1}^N Q_n \cos(nt - \varphi_n). \quad (1.91)$$

Способ определения параметров  $Q_n$ ,  $\varphi_n$  в формуле (1.91) приведен в гл. 3. График на рис. 1.11 при этом описывается следующим выражением:  $Q(t) \approx 13 + 12,8 \cos(\omega_1 t - 202^\circ) + 3,97 \cos \times (2\omega_1 t - 20^\circ) + 3,71 \cos(3t\omega_1 - 283^\circ) + 1,89 \cos(4t\omega_1 - 251^\circ)$ , где частота  $\omega_1$  соответствует годовому периоду колебаний. Для удобства расчетов можно пренебрегать разностью между числами 365 (число дней в году) и 360 (число градусов в полном угле), т. е. отождествить дни и градусы. Тогда выражение для  $Q(t)$  примет следующий вид:

$$Q(t) \approx 13 + 12,8 \cos(t - 202^\circ) + 3,97 \cos(2t - 20^\circ) + 3,71 \cos(3t - 283^\circ) + 1,89 \cos(4t - 251^\circ). \quad (1.92)$$

Согласно принципу суперпозиции реакция на каждую из компонент, составляющих в сумме предоставление функции  $Q(t)$  может определяться по отдельности. Сложив все определенные таким образом частные реакции, получим искомую периодическую компоненту понижения. Исходя из формулы (1.89), можно записать:

$$S_p(t) = \sum_{n=1}^N \frac{Q_n}{T} A(r, n\omega_1) \cos(nt - \varphi_n - \psi_n), \quad (1.93)$$

где углы  $\psi_n$  представляют собой фазо-частотные характеристики для значения частоты  $n\omega_1$ . Используя разложение (1.92), получим с его помощью периодическую компоненту для случая отбора подземных вод в неограниченном однородном пласте для точки с  $r=0,2$  м.

При частоте  $\omega_1=0,0174$  сут<sup>-1</sup> нами уже определены значения  $A(r, \omega_1)=1,335$ ;  $\psi_1=5^\circ,4$ . При частоте  $\omega=2\omega_1=0,0348$  находим  $z=0,2\sqrt{0,0348/10^4}=3,7 \cdot 10^{-4}$ ; по формуле (1.86), (1.87)  $A(r, 2\omega_1)=1,280$ ,  $\psi_2=5^\circ,6$ . Аналогично,  $A(r, 3\omega_1)=1,248$ ,  $\psi_3=5^\circ,8$ ;  $A(r, 4\omega_1)=1,225$ ;  $\psi_4=5^\circ,9$ . В соответствии с формулой (1.93), периодическая компонента понижения изобразится в виде:

$$S_p(t) = 17,0 \cos(t - 207^\circ,4) + 5,1 \cos(2t - 25^\circ,6) + 4,63 \cos(3t - 288^\circ,8) + 2,31 \cos(4t - 256^\circ,9).$$

При среднегодовом дебите в размере 13 тыс. м<sup>3</sup>/сут величина аперидической компоненты понижения (по формуле Тэйса) равна:

$$S_a = \frac{13\,000}{1000} \frac{1}{4\pi} \ln \frac{2,25 \cdot 10^4 \cdot 3650}{0,04} = 22,2 \text{ м.}$$

График временной зависимости понижения, полученный сложением периодической и аперидической компонент, изображен на рис. 1.12. График колебаний понижения почти в точности повторяет все изменения дебита.

Конечно, график, подобный изображенному на рис. 1.12, можно, применяя формулу (1.82), получить также традиционным методом ступенчатого гидрографа, если частотные характеристики

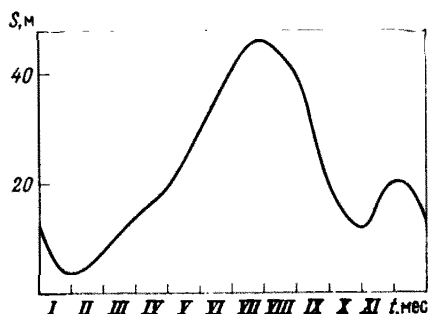


Рис. 1.12. Внутригодовой ход изменения понижения на стенке скважины (по условиям примера)

определены в удобной форме (несложные формулы, таблицы, графики); вычисления на основе представления временной зависимости понижения в форме отрезка разложения Фурье становятся более простыми, нежели суммирование реакций от последовательных ступеней. В наибольшей степени это сокращение работы проявляется, если необходимо оценивать только экстремальные значения понижения и сроки их наступления (именно эти данные в первую очередь нужны при оценке эксплуатационных ресурсов подземных вод), поскольку выражение периодической компоненты понижения в форме (1.93) позволяет оценивать эти величины, минуя построение графика (подробнее см. гл. 3). Помимо этого, использование тригонометрических разложений облегчает теоретический анализ; при этом происходит сглаживание графиков водоотбора, что приводит к устранению их малозначительных локальных особенностей.

#### 1.4. РАСЧЕТЫ ПРИ СТОХАСТИЧЕСКОМ ХАРАКТЕРЕ ИЗМЕНЕНИЯ ВОДООТБОРА

Стохастический характер водоотбора может проявляться как в случае, когда подземные воды являются доминирующим источником орошения, так и в случае, когда они выступают в качестве вспомогательного источника оросительной воды, по отношению к поверхностным водам. В первом случае вероятностные характеристики водоотбора будут диктоваться исключительно агроклиматическими факторами; во втором — кроме того и соотношением между потребностью орошения в воде и величиной наличных ресурсов поверхностного стока в данный момент.

Рассмотрим вначале случай, когда подземные воды служат основным (в пределе — единственным) источником оросительной воды. Величина водопотребления претерпевает изменения как в сезонном разрезе, так и от года к году, иными словами, функция времени представляет собой случайный процесс. Анализируя реальные или реконструированные графики водопотребления за достаточно длинный ряд лет можно получить так называемый среднелетний график  $\bar{Q}(t)$ : его ординаты представляют со-

бой просто средние значения от наблюдавшихся величин водопотребления на данную дату за весь период наблюдений. Периодическая функция времени  $\bar{Q}(t)$ , которая в течение каждого из последующих лет совпадает со среднесуточным графиком водоотбора, называется также *математическим ожиданием водоотбора* подземных вод. Вся стохастичность водоотбора заключена в разности

$$Q^0(t) = Q(t) - \bar{Q}(t), \quad (1.94)$$

называемой *центрированной компонентой случайного водоотбора*. Расчет реакции на водоотбор периодического характера  $\bar{Q}(t)$  выполняется на основании результатов, приведенных в предыдущем разделе, поэтому для оценки поведения понижения при стохастическом характере водоотбора необходимо определить реакцию на центрированную компоненту  $Q^0(t)$ . Для этого необходимо прежде всего установить, каким образом следует характеризовать центрированную составляющую. Для наших целей вполне достаточно двух таких характеристик: автокорреляционной функции и закона распределения.

*Автокорреляционной функцией* центрированного случайного процесса называется детерминированная (т.е. не случайная) функция  $K_Q(t_1, t_2)$ , определяемая как математическое ожидание произведения  $Q^0(t_1)Q^0(t_2)$  [23]. Среди всех центрированных случайных функций выделяются так называемые *стационарные* (в широком смысле), для которых автокорреляционные функции зависят только от разности аргументов  $\tau = t_2 - t_1$ :  $K_Q(t_1, t_2) = K_Q(\tau)$ . Для исследования поведения геофильтрационных систем при стохастическом характере водоотбора достаточно предположить, что центрированная компонента случайной функции времени  $Q^0(t)$  представляет собой стационарный в этом смысле случайный процесс.

В каждый момент времени значение  $Q^0(t)$  представляет собой случайную величину. Важно установить, каким законом распределения характеризуется эта случайная величина. Распределение водопотребления (водоотбора) характеризуется природой случайных колебаний факторов (метеорологических и др.), определяющих дефицит воды. Весьма часто, когда вариации факторов относительно невелики, полагают, что они удовлетворительно описываются нормальным законом. Как известно [23], если на входе линейной системы — случайный процесс с нормальным законом распределения (называемый также *гауссовым процессом*), то и выходная реакция также характеризуется нормальным законом распределения.

Если же на входе системы — процесс с законом распределения, отличным от нормального, то и на выходе процесс не будет нормальным. Вместе с тем, если система достаточно инерционна, будет проявляться так называемая нормализация реакции, т.е. закон распределения реакции линейной системы (например, понижения в определенной точке пласта в заданный момент времени) будет ближе к нормальному, чем закон распределения входного



возмущения. В особенности мало различаются, как правило, значения вероятностей в «хвосте» функций распределения, представляющих наибольший интерес с практической точки зрения. Поэтому часто можно считать, что закон распределения реакции достаточно близок к нормальному.

Принимая, что центрированный случайный процесс  $Q^0(t)$  стационарен и гауссов, можно получить некоторые оценки вероятностных характеристик понижения. Прежде всего, заметим, что, согласно принципу суперпозиции, реакция на случайный процесс водоотбора будет складываться из двух составляющих: 1) реакции на детерминированную компоненту водоотбора  $\bar{Q}(t)$  (которую обозначим через  $\bar{S}(t)$ ; эту функцию времени, какой бы ни была периодическая зависимость  $\bar{Q}(t)$ , можно определить, пользуясь результатами, приведенными в предыдущем разделе), и 2) центрированную компоненту, обозначаемую через  $S^0(t)$ .

Характеристики  $S^0(t)$  те же, что и для случайной функции  $Q^0(t)$ , т. е. автокорреляционная функция и закон распределения, который будем считать нормальным. Для перехода от автокорреляционной функции водоотбора к автокорреляционной функции понижения используются уже знакомые нам частотные характеристики системы. Для того чтобы определить автокорреляционную функцию понижения, необходимо сначала по автокорреляционной функции водоотбора  $K_Q(\tau)$  определить ее спектральную функцию  $L_Q(\omega)$ :

$$L_Q(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_Q(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (1.95)$$

Спектральная функция понижения  $L_S(\tau)$  связана со спектральной функцией водоотбора соотношением вида

$$L_S(\omega) = \frac{1}{T^2} A^2(\omega) L_Q(\omega), \quad (1.96)$$

где  $T$  — коэффициент водопроницаемости;  $A(\omega)$  — амплитудно-частотная характеристика понижения. По известной спектральной функции понижения ее автокорреляционная функция строится с помощью интеграла, обратного интегралу типа (1.95):

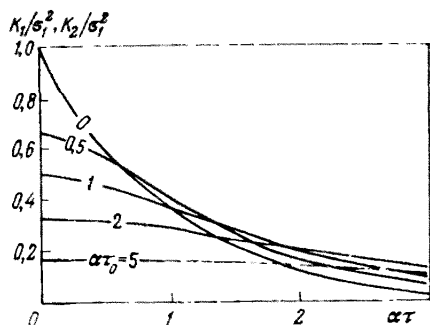
$$K_S(\tau) = 2 \int_0^{\infty} L_S(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (1.97)$$

Зная функцию  $K_S(\tau)$ , можно определить значение наиболее важной характеристики центрированной составляющей понижения, а именно, его среднеквадратичное отклонение

$$\sigma_S = \sqrt{K_S(0)}. \quad (1.98)$$

Обратимся вновь к примеру с инерционным звеном, описывающим изменение объема воды в артезианском бассейне с перетеканием. Представим себе, что на вход инерционного звена посту-

Рис. 1.13. Автокорреляционные функции инерционного звена



пает центрированный случайный процесс с автокорреляционной функцией вида

$$K_1(\tau) = \sigma_1^2 e^{-\alpha\tau}, \quad (1.99)$$

где  $\sigma_1^2$  — дисперсия возмущения. Такие условия могут реализоваться, например, в случаях переменного по знаку суммарного питания подземных вод, изменяющегося во времени случайно, в соответствии с вариациями метеорологических и других условий в областях питания. При этом, согласно формуле (1.99),  $\sigma_1^2$  — дисперсия величины  $f(t) = \tau Q(t)$ , где  $Q(t)$  — расход инфильтрационного питания, а  $\tau$  — постоянная времени системы. Если  $\sigma_Q^2$  — дисперсия расхода, то  $\sigma_1^2 = \tau_0^2 \sigma_Q^2$ . Этой автокорреляционной функции соответствует спектральная функция

$$L_1(\omega) = \frac{\sigma_1^2}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}. \quad (1.100)$$

Амплитудно-частотная характеристика этой системы дана в формуле (1.85); умножив ее квадрат на  $L_1(\omega)$ , найдем выражение для спектральной функции изменения объема  $u$ :

$$L_2(\omega) = \frac{\sigma_1^2}{\pi} \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \omega^2)(1 + \omega^2 \tau_0^2)}. \quad (1.101)$$

Интеграл (1.101) приводится к табличному виду; в результате выражение автокорреляционной функции примет вид:

$$K_2(\tau) = \frac{\alpha \sigma_1^2}{\alpha^2 \tau_0^2 - 1} \left( \tau_0 e^{-\tau/\tau_0} - \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha\tau} \right). \quad (1.102)$$

На рис. 1.13 изображен график автокорреляционных функций  $K_1(\tau)/\sigma_1^2$  и  $K_2(\tau)/\sigma_1^2$  при разных значениях параметра  $\alpha\tau_0$ , характеризующего соотношение скоростей убывания автокорреляционной функции (1.99) и реакции в системе. Чем больше  $\tau_0$  при постоянном  $\alpha$ , т. е. чем инерционнее система, тем медленнее убывает автокорреляционная функция  $K_2(\tau)$ . В то же время и ее

значения при этом уменьшаются. Физический смысл этих зависимостей ясен из определения автокорреляционной функции центрированного случайного процесса: она пропорциональна коэффициенту корреляции между значениями случайной функции в моменты времени  $t$  и  $t+\tau$ . При возрастании инерционности системы увеличивается корреляция между отдаленными моментами времени; при этом и значения  $K_2(\tau)$  вблизи  $\tau=0$  будут уменьшаться.

Из выражения (1.102) при  $\tau \rightarrow 0$  получим формулу для определения дисперсии величины  $u$ :

$$D_2 = K_2(0) = \frac{\sigma_1^2}{1 + \alpha\tau_0}. \quad (1.103)$$

Зададимся следующими числовыми значениями:  $\tau_0 = 100$  сут,  $\alpha = 0,01$  сут $^{-1}$ ,  $\sigma_1 = 20 \cdot 10^6$  м $^3$ , тогда  $D_2 = 2 \cdot 10^{14}$  м $^6$ ; среднее квадратичное отклонение составит  $14,1 \cdot 10^6$  м $^3$ . Если распределение выходной реакции считать нормальным, можно оценить вероятность того, что изменение объема не превысит некоторой определенной величины, например 20 млн. м $^3$ . По известной формуле [3] эта вероятность

$$P = \Phi^* \left( \frac{20 - 0}{14,1} \right) = \Phi^*(1,41) = 0,92.$$

Таким образом, с вероятностью 92 % значение  $u/Q\tau_0$  не превысит единицы, и только с вероятностью 8 % оно выходит за эту границу.

Теперь представим себе, что, кроме центрированного случайного процесса, на вход инерционного звена подается единичное постоянное возмущение  $f = 150$  млн. м $^3$ . Реакцию на эту компоненту возмущения можно определить по формуле (1.50): для  $t = 200$  сут  $\bar{u} = 150 \cdot 10^6 (1 - e^{-2}) = 130 \cdot 10^6$  м $^3$ . В таких условиях можно считать также, что выходная реакция системы распределена по нормальному закону с математическим ожиданием  $130 \cdot 10^6$  м $^3$  и среднее квадратичное отклонением  $14,1 \cdot 10^6$  м $^3$ . Вероятность того, что величина  $u$  не превысит, например  $150 \cdot 10^6$  м $^3$ , будет

$$P = \Phi^* \left( \frac{150 - 130}{14,1} \right) = \Phi^*(1,41) = 0,92.$$

Таким образом, с вероятностью 92 % значение изменения объема при  $t = 200$  сут будет больше  $150$  млн. м $^3$ .

Мы рассмотрели снова пример с инерционным звеном, так как простое выражение передаточной функции дает возможность проводить все преобразования в аналитической форме. При рассмотрении геофильтрационных систем и условий водоотбора, более или менее близких к реальным, такие преобразования становятся, как правило, невозможными.

Рассмотрим прежде всего достаточно далекий от реальных условий пример, когда значения водоотбора в течение всего года постоянны, а от года к году изменяются скачкообразно, иными

словами, график зависимости водоотбора от времени будет представлять собой ступенчатую функцию времени. Предположим, что высоты ступеней независимы друг от друга, тогда автокорреляционная функция такого процесса

$$K_Q(\tau) = \begin{cases} \sigma_Q^2 \left(1 - \frac{\tau}{\tau_1}\right) & \text{при } \tau \leq \tau_1 \\ 0 & \text{при } \tau > \tau_1, \end{cases} \quad (1.104)$$

где  $\sigma_Q$  — среднее квадратичное отклонение водопотребления;  $\tau_1$  — годовой период (365 сут). Соответствующая спектральная функция

$$L_Q(\omega) = \frac{2\sigma_Q^2\tau_1}{\pi} \left( \frac{\sin \omega\tau_1/2}{\omega\tau_1} \right)^2. \quad (1.105)$$

Однако в условиях отбора подземных вод для орошения величина дебита будет претерпевать изменения и в сезонном разрезе. Более или менее детальный учет внутригодового изменения водоотбора представляет достаточно сложную задачу, в настоящее время еще не нашедшую полного решения. Для учета внутригодового хода водоотбора поэтому применяются те или иные упрощенные модели. Одной из них служит модель, в которой предполагается, что величина водоотбора постоянна в течение вегетационного периода, причем как сама величина водоотбора, так и сроки начала и конца вегетационного периода, представляют собой случайные величины. Рассмотрение вопроса о вероятностной связи между величиной среднего за вегетацию водоотбора и сроками начала и конца вегетационного периода показало, что такая связь имеется, и соответствующий коэффициент корреляции иногда может достигать значимых величин (до 0,6) [4]. Для рассматриваемой приближенной модели этими величинами можно, однако, пренебрегать; в работе [10] выражение для автокорреляционной функции  $K_Q(\tau)$  получено для этих условий при допущении о равномерности распределения продолжительности вегетационного периода в виде

$$K_Q(\tau) = \begin{cases} \sigma_Q^2 \left[ 1 - \frac{\tau}{t'' - t'} \ln \frac{t''}{t'} \right] & \text{при } 0 < \tau < t', \\ \sigma_Q^2 \left[ \frac{t'' - \tau (1 + \ln t''/\tau)}{t'' - t'} \right] & \text{при } t' \leq \tau < t'', \\ 0 & \text{при } \tau \geq t''. \end{cases} \quad (1.106)$$

где  $t'$ ,  $t''$  — соответственно наименьшее и наибольшее значения вегетационного периода. Выражения для спектральной функции  $L_Q(\omega)$  имеют вид

$$L_Q(\omega) = \frac{\sigma_Q^2}{\pi^2 \omega^2 (t'' - t')} \left[ \ln \frac{t''}{t'} + \text{Ci}(\omega t') - \text{Ci}(\omega t'') \right], \quad (1.107)$$

где  $\text{Ci}(z)$  — интегральный косинус [25]. На рис. 1.14, 1.15 изображены графики соответственно автокорреляционной и спектральной

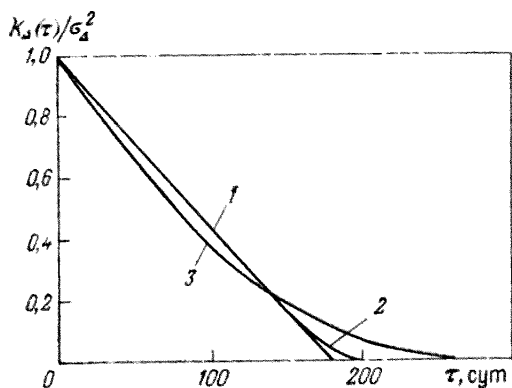


Рис. 1.14. Автокорреляционные функции отбора подземных вод:

1 — при фиксированном значении времени дефицита ( $t_{\Delta} = 180$  сут); 2 — при равномерном распределении продолжительности водоотбора ( $t'_{\Delta} = 160$  сут,  $t''_{\Delta} = 200$  сут); 3 — то же, при  $t'_{\Delta} = 80$  сут,  $t''_{\Delta} = 280$  сут

функций водоотбора. На этих же графиках изображены зависимости (1.104) и (1.105), справедливые для случая, когда сроки начала и конца вегетационного периода постоянны (в этом случае в формулах (1.104), (1.105) вместо  $\tau_2$  должна фигурировать величина  $\tau_v$  — длительность вегетационного периода). Сравнение графиков показывает, что различия между ними, даже при больших амплитудах колебаний сроков, невелики, особенно для спектральных функций. Поэтому для большинства практически интересных случаев можно принимать в качестве автокорреляционной и спектральной функций соответственно зависимости (1.104) и (1.105), где  $\tau_1$  имеет смысл среднемноголетней величины продолжительности вегетационного периода.

Итак, спектральная функция отбора подземных вод одиночным водозабором в неограниченном однородном пласте задана выражением (1.105), амплитудно-частотная характеристика понижения — формулой (1.106). Интеграл (1.97) в этом случае может быть определен только численными методами, например методом

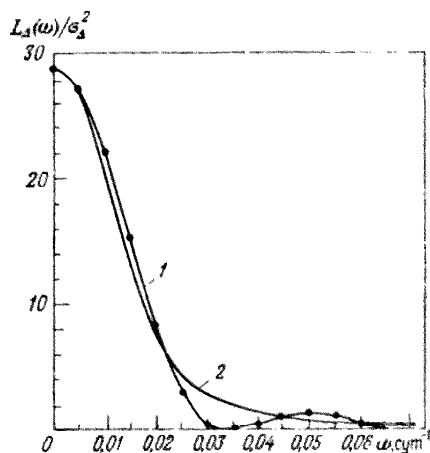


Рис. 1.15. Графики спектральных плотностей отбора подземных вод:

1 — при фиксированном времени дефицита ( $t_{\Delta} = 180$  сут); 2 — при равномерном распределении продолжительности водоотбора ( $t'_{\Delta} = 80$  сут,  $t''_{\Delta} = 280$  сут). Точки соответствуют равномерному распределению времени водоотбора при  $t'_{\Delta} = 160$  сут,  $t''_{\Delta} = 200$  сут

Гаусса — Лагерра [25]. Поставим задачу определения дисперсии понижения на стенке скважины ( $r=0,2$  м) при  $T=1000$  м<sup>2</sup>/сут,  $a=10^4$  м<sup>2</sup>/сут,  $\tau_1=180$  сут,  $\sigma_Q=5000$  м<sup>3</sup>/сут. В соответствии с формулой (1.100)

$$D_S = K_S(0) = \frac{2}{T^2} - \frac{2\sigma_Q^2 \tau_1}{4\pi^3} \int_0^\infty \left( \frac{\sin \omega \tau_1 / 2}{\omega \tau_1} \right)^2 N^2 \left( r \sqrt{\frac{\omega}{a}} \right) d\omega, \quad (1.108)$$

где функция  $N(z)$  определена формулой (1.87).

Для дальнейших вычислений удобно преобразовать (1.108) к виду

$$D_S = \frac{\sigma_Q^2}{T^2 \pi^3} \int_0^\infty \left( \frac{\sin x / 2}{x} \right)^2 N^2 \left( r \sqrt{\frac{x}{a \tau_1}} \right) dx. \quad (1.109)$$

Выберем формулу Гаусса — Лагерра при  $N=6$  [25] и определим значения подынтегральной функции при  $x=x_i$ , соответствующих узлам формулы (табл. 1.4).

Оценку величины интеграла находим как сумму

$$\sum_{i=1}^6 f(x_i) w_i e^{x_i},$$

где  $f(x) = \left( \frac{\sin x / 2}{x} \right)^2 N^2 \left( r \sqrt{\frac{x}{a \tau_1}} \right)$  — подынтегральная функция в (1.109);  $w_i$  — веса формулы Гаусса — Лагерра. В результате оценка интеграла в (1.109) при принятых числовых данных составляет 60,123. Величина дисперсии понижения

$$D_S = \frac{25 \cdot 10^6}{10^6 \pi^3} 60,123 = 48,5 \text{ м}^2.$$

Соответствующая оценка среднеквадратичного отклонения составляет 6,96 м.

Пусть детерминированная компонента водоотбора на входе системы постоянна и равна 18 000 м<sup>3</sup>/сут; с помощью формулы Тэйса определим, что на конец 25-го года эксплуатации соответствующая компонента понижения составит  $\bar{S}=32,03$  м. Пусть

Таблица 1.4

$i$	$x_i$	$\left( \frac{\sin x_i / 2}{x_i} \right)^2 N^2 \left( r \sqrt{\frac{x_i}{a \tau_1}} \right)$	$e^{x_i} w_i$
1	0,223	23,421	0,573
2	1,189	17,439	1,369
3	2,993	7,844	2,260
4	5,775	0,124	3,350
5	9,837	0,604	4,886
6	15,982	0,220	7,849

также величина допустимого понижения равна 45 м; оценим вероятность того, что понижение не превысит этой величины:

$$P = \Phi^* \left( \frac{45 - 32,03}{6,96} \right) = \Phi^*(1,86) = 0,97.$$

Таким образом, при вероятности 97 % система функционирует достаточно надежно. Заметим, что если бы допустимое понижение было бы равно, например, 40 м, соответствующая оценка надежного функционирования системы была бы равной

$$\Phi^* \left( \frac{40 - 32,03}{6,96} \right) = \Phi^*(1,15) = 0,875.$$

Мы рассмотрели на примере, как выполняются простейшие расчеты по оценке вероятностных характеристик геофильтрационных систем; более сложные результаты приведены в гл. 4. На основании выражений (1.96), (1.97) может быть получена следующая формула для среднеквадратичного отклонения понижения:

$$\sigma_S = \frac{\sigma_Q}{T} \sqrt{\Omega_S}, \quad (1.110)$$

где величина  $\Omega_S$  называется *коэффициентом точности понижения*:

$$\Omega_S = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \left( \frac{\sin z/2}{z} \right)^2 A^2 \left( \frac{z}{\tau_1} \right) dz. \quad (1.111)$$

Интеграл (1.111) удобнее вычислять с помощью формул Гаусса — Лагерра:

$$\Omega_S \approx \sum_{i=1}^N c_i A^2 \left( \frac{z_i}{\tau_1} \right), \quad (1.112)$$

где значения узлов  $z_i$  и весов  $c_i$  следующие:

1) при  $N=4$

$i$ . . . . .	1	2	3	4
$z_i$ . . . . .	0,3225	1,7458	4,5366	9,3951
$c_i$ . . . . .	0,2628	0,5023	0,1320	0,0936

2) при  $N=6$

$i$ . . . . .	1	2	3	4	5	6
$z_i$ . . . . .	0,2228	1,1889	2,9927	5,7751	9,8375	15,9829
$c_i$ . . . . .	0,1818	0,3869	0,3196	0,0081	0,0616	0,0384

В некоторых случаях необходимо вычислять коэффициент корреляции между величинами водоотбора и понижения; эта величина определяется интегралом, аналогичным (1.97). Соответствующее выражение можно преобразовать к виду:

$$\rho_{QS} = \frac{4}{\pi \sqrt{\Omega_S}} \int_0^\infty \left( \frac{\sin z/2}{z} \right)^2 A \left( \frac{z}{\tau_1} \right) \cos \Psi \left( \frac{z}{\tau_1} \right) dz, \quad (1.113)$$

где  $\psi(\omega)$  — фазо-частотная функция понижения. С помощью формулы Гаусса — Лагерра коэффициент корреляции определяется как

$$\rho_{QS} \approx -\frac{1}{\sqrt{\Omega_S}} \sum_{i=1}^N c_i A \left( \frac{z_i}{\tau_i} \right) \cos \Psi \left( \frac{z_i}{\tau_i} \right). \quad (1.114)$$

### 1.5. РАСЧЕТЫ ИЗМЕНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНОГО СТОКА ПРИ ЭКСПЛУАТАЦИИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

При рассмотрении изменения понижения во времени, фактически имелась в виду реакция системы «водозабор — водоносный пласт» на входные возмущения того или иного вида. Точно так же можно представить себе линейную систему «водозабор — водоносный пласт — водоток», входным возмущением которой будет опять-таки отбор подземных вод, а выходной реакцией — изменение расхода в некотором створе реки или канала. Точно так же, как и в случае понижения, реакцию системы можно описать с помощью ее передаточной функции  $U_W(p)$ : если  $W(t)$  — изменение расхода поверхностного водотока, то соответствующее операционное равенство записывается в виде

$$\widehat{W}(p) = \widehat{Q}(p) U_W(p). \quad (1.115)$$

Наиболее прост случай отбора подземных вод одиночным водозабором или линейным рядом скважин параллельным реке, при однородности фильтрационных свойств пласта и неограниченном простирании водотока; при этом

$$U_W(p) = e^{-d \sqrt{p/a}}, \quad (1.116)$$

где  $d$  — расстояние от реки до водозабора. При постоянном во времени отборе подземных вод,  $Q = Q_0 = \text{const}$  величина измерения поверхностного стока может быть определена с помощью так называемой функции редукции  $w_0(t)$ :

$$W(t) = Q_0 w_0(t). \quad (1.117)$$

Так, для наиболее простой схемы функция редукции, соответствующая передаточной функции (1.116) имеет вид [18]:

$$w_0(t) = \text{erfc} \frac{d}{2 \sqrt{at}}, \quad (1.118)$$

где  $\text{erfc} z$  — дополнительный интеграл вероятностей [25] (см. табл. 1.2 и приложение программу 30).

При более сложных непериодических зависимостях  $Q(t)$ , а также при более сложных передаточных функциях для получения функции редукции  $w_0(t)$  могут применяться методы численного обращения преобразования Лапласа, в том числе упомянутый выше метод Гохберга.



При периодических изменениях величины отбора подземных вод могут использоваться как методы, основанные на идее ступенчатого графика, так и методы, связанные с разложениями Фурье. В первом случае формула для определения величины  $W(t)$  будет, по аналогии с формулой (1.82) для понижения, иметь вид

$$W(t) = \sum_{k=1}^{n-1} Q_k [w_0(t - t_{k-1}) - w_0(t - t_k)] + Q_n w_0(t - t_{n-1}). \quad (1.119)$$

Во втором случае, если временная зависимость дебита представлена разложением вида (1.91), реакция системы будет, с точностью до быстро затухающей переходной компоненты, состоять из двух слагаемых; аperiodической  $W_a(t)$ , определяемой по формуле (1.117), и периодической  $W_p(t)$ , находимой с помощью выражения

$$W_p(t) = \sum_{n=1}^N Q_n w_n \cos(nt - \varphi_n - \psi_n), \quad (1.120)$$

где величины  $w_n$  и  $\psi_n$  представляют собой значения частотных характеристик изменения поверхностного стока (редукции) соответственно на частотах  $n\omega_1$ , т. е.

$$w_n e^{-i\psi_n} = U_W(ni\omega_1). \quad (1.121)$$

Таким образом, для того чтобы вычислить значения  $w_n$  и  $\psi_n$ , следует подставить  $p = i\omega$  в выражение для  $U_W(p)$ , выделить в полученном комплексе модуль и обратный аргумент, а затем положить в полученных частотных характеристиках  $\omega = n\omega_1$ .

Наконец, при стохастическом возмущении на входе системы реакция представляется в виде суммы реакций на периодическую функцию  $\bar{Q}(t)$  — математическое ожидание водоотбора, и на центрированную составляющую. Так же, как и для случая понижения, автокорреляционная функция редукции определится с помощью интеграла вида

$$K_W(\tau) = \int_0^\infty L_Q(\omega) w^2(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad (1.122)$$

где  $w(\omega)$  — амплитудно-частотная характеристика редукции. В частности, наиболее важная характеристика — среднеквадратичное отклонение редукции  $\sigma_W$  — может быть определена как

$$\sigma_W = \sigma_Q \sqrt{\Omega_W}, \quad (1.123)$$

где коэффициент точности редукции  $\Omega_W$  оценивается с помощью интеграла

$$\Omega_W = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \left( \frac{\sin z/2}{z} \right)^2 w^2 \left( \frac{z}{\tau_1} \right) dz, \quad (1.124)$$

или, приближенно, с помощью формулы Гаусса—Лагерра:

$$\Omega_W \approx \sum_{i=1}^N c_i \omega^2 \left( \frac{z_i}{\tau_1} \right). \quad (1.125)$$

В качестве примера расчета периодического режима рассмотрим изменения расхода реки в 10-й год эксплуатации подземных вод, если отбор осуществляется одиночным водозабором при  $a=10^4$  м<sup>2</sup>/сут,  $d=1000$  м, а график водотока определен выражением (1.92).

Прежде всего, оценим реакцию на постоянную компоненту отбора. По формуле (1.118), например, на начало 10-го года эксплуатации ( $t=3285$  сут)

$$\omega_0 = \operatorname{erfc} \frac{1000}{2 \sqrt{10\,000 \cdot 3285}} = \operatorname{erfc} 0,087 = 0,902;$$

на конец 10-го года ( $t=3650$  сут)  $\omega_0=0,907$ . Соответственно, значения изменения поверхностного стока равны на эти сроки 11,7 тыс. и 11,8 тыс. м<sup>3</sup>/сут.

Определим теперь реакцию на периодическую компоненту. Подставив  $p=i\omega$  в выражение (1.116), получим

$$\begin{aligned} U_W(i\omega) = e^{-d \sqrt{\frac{i\omega}{a}}} &= e^{-d \sqrt{\frac{\omega}{2a}} (1+i)} = e^{-d \sqrt{\frac{\omega}{2a}}} \times \\ &\times \left( \cos d \sqrt{\frac{\omega}{2a}} - i \sin d \sqrt{\frac{\omega}{2a}} \right). \end{aligned}$$

Выделив модуль и обратный аргумент, найдем частотные характеристики редукации:

$$\omega(\omega) = e^{-d \sqrt{\frac{\omega}{2a}}}; \quad \psi(\omega) = d \sqrt{\frac{\omega}{2a}}. \quad (1.126)$$

На частоте  $\omega_1=0,0174$  сут<sup>-1</sup>, соответствующей годовому периоду, значения частотных характеристик таковы:

$$\omega(\omega_1) = e^{-1000 \sqrt{\frac{0,0174}{2 \cdot 10\,000}}} = 0,393;$$

$$\psi(\omega_1) = 1000 \sqrt{\frac{0,0174}{2 \cdot 10^4}} = 0,932 \text{ рад.} = 53^\circ, 4.$$

Аналогично, на частоте  $\omega=2\omega_1$ :

$$\omega(\omega_2) = e^{-1000 \sqrt{\frac{2 \cdot 0,0174}{2 \cdot 10\,000}}} = 0,267;$$

$$\psi(\omega_2) = 1000 \sqrt{\frac{2 \cdot 0,0174}{2 \cdot 10\,000}} = 75^\circ, 6$$

и далее  $\omega(3\omega_1)=0,199$ ,  $\psi(3\omega_1)=92^\circ, 6$ ,  $\omega(4\omega_1)=0,155$ ,  $\psi(4\omega_1)=106^\circ, 9$ .

В соответствии с формулой (1.120), периодическая компонента

$$\begin{aligned} W_p(t) = 5,03 \cos(t - 255^\circ) + 1,06 \cos(2t - 96^\circ) + 0,74 \cos(3t - 16^\circ) + \\ + 0,29 \cos(4t - 358^\circ) \text{ тыс. м}^3/\text{сут.} \end{aligned}$$

На рис. 1.16 изображены графики суммарной зависимости  $W(t)$ . По сравнению с кривой на рис. 1.12, временная зависимость изменения поверхностного стока более сглажена, а ее максимум

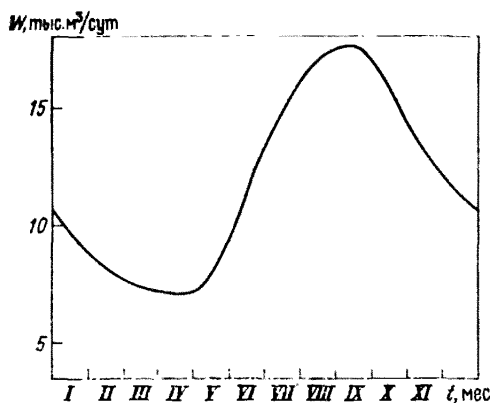


Рис. 1.16. График внутренней годовой зависимости изменения поверхностного стока при периодическом отборе подземных вод (по условиям примера)

значительно сдвинут по сравнению с максимумом кривой водоотбора.

Теперь для тех же условий определим коэффициент точности. По формуле (1.125) при  $\tau_1 = 180$  сут  $\Omega_w = 0,288$ ; при среднеквадратичном отклонении водоотбора в размере  $\sigma_Q = 5000$  м³/сут среднеквадратичное отклонение изменения поверхностного стока  $\sigma_w$  будет равно  $\sqrt{0,288 \cdot 5000} = 2680$  м³/сут. Используя эти данные, можно оценить, например, вероятность изменения расхода реки в конце августа ( $t = 240$  сут, см. рис. 1.16) не более чем на 20 тыс. м³/сут:  $P = \Phi^*[(20 - 17,45)/2,68] = \Phi^*(0,95) = 0,83 \%$ .

## Глава 2

### ОЦЕНКА ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ ПОДЗЕМНЫХ ВОД И ИЗМЕНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНОГО СТОКА ПРИ ПОСТОЯННОМ ВО ВРЕМЕНИ ВОДООТБОРЕ

Вопросы методики гидрогеологических расчетов по оценке эксплуатационных ресурсов подземных вод разбрасываются уже в течение полувесны — первые работы С. Тэйса по этому поводу относятся к началу 30-х годов. К настоящему времени эта отрасль гидрогеологической науки представляет собой достаточно сформировавшуюся научно-техническую дисциплину, характеризующуюся комплексом сложившихся взглядов на предмет исследований — движение подземных вод в условиях их эксплуатации, а также принципов решения соответствующих гидродинамических задач. Наиболее полное представление о современном состоянии методики оценки эксплуатационных ресурсов подземных вод дают получившие широкую известность монографии и учебники Ф. М. Бочверова, Н. Н. Биндемана и Л. С. Язвина, В. М. Шестакова [29],

М. С. Хантуша, В. С. Уолтона [39] и др. Обзор современного состояния аналитических методов оценки эксплуатационных ресурсов подземных вод содержится в статье В. С. Уолтона [40].

Оценка эксплуатационных ресурсов подземных вод производится в двух вариантах. В первом из них требуется выяснить, будет ли возможна эксплуатация подземных вод в течение определенного времени с заданными дебитом и режимом отбора. Иными словами, необходимо проверить, не превысит ли понижение в течение заданного срока своего предельно допустимого значения. Второй вариант связан с обратной задачей: по величине допустимого понижения оценивается та величина водоотбора, при которой понижение на конец расчетного срока достигает своего допустимого значения.

В этой главе описывается способ решения подобных задач в условиях, когда водоотбор либо постоянен во времени, либо когда он линейно растет во времени. Задачи по оценке временных зависимостей понижения уровня подземных вод могут решаться как аналитическими, так и численными методами. Здесь рассмотрены главным образом аналитические методы, учитывая их большую роль в гидрогеологических расчетах.

В гл. 1 было установлено, что при постоянном во времени водоотборе  $Q(t) = Q_0 = \text{const}$  временная зависимость понижения может быть описана с помощью гидравлического сопротивления  $R_0(t)$  (формула (1.70)). Если  $S_{\text{доп}}$  — величина допустимого понижения, величина эксплуатационных ресурсов подземных вод определится равенством:

$$Q_0 = \frac{TS_{\text{доп}}}{R_0(t)}. \quad (2.1)$$

Для оценки величины  $Q_0$  необходимо, таким образом, уметь для различных условий определять значения  $R_0(t)$ . В гл. 1 указывалось, что зависимость  $R_0(t)$  представляет собой обратное преобразование Лапласа от изображения  $1/p U_s(M, p)$ , где  $U_s(M, p)$  — передаточная функция понижения.

Поэтому в настоящей главе уделяется внимание получению не только временных зависимостей  $R_0(M, t)$  для различных условий, но и, прежде всего, передаточных функций понижения, на основании которых, по возможности, будут определяться гидравлические сопротивления. Кроме того, знание передаточных функций необходимо для нахождения частотных характеристик, которые будут использованы в гл. 3 при оценке эксплуатационных ресурсов в циклическом режиме эксплуатации.

На временную зависимость  $R_0(t)$  оказывают влияние разнообразные природные и технические факторы, в том числе:

- а) условия залегания подземных вод;
- б) геометрия водоносного пласта в плане и условия на его границах;
- в) распределение геофильтрационных параметров в плане;

г) размещение водозабора (одиночного, линейного, площадного) в водоносном пласте.

В настоящей главе приведены некоторые результаты аналитического моделирования временных зависимостей понижения с учетом перечисленных факторов. В настоящее время накоплен достаточно большой опыт схематизации перечисленных природных условий для аналитического моделирования. Этот опыт подтверждается сравнениями результатов аналитических расчетов с данными численного моделирования.

В отличие от методики оценки эксплуатационных ресурсов подземных вод, разработка методов оценки изменения (редукции) поверхностного стока при такой эксплуатации, началась сравнительно поздно. Хронологически первой публикацией, посвященной вопросам изменения поверхностного стока под влиянием отбора подземных вод, была статья С. Тэйса (1941), в которой был рассмотрен случай работы одиночной скважины с постоянным дебитом вблизи совершенной реки в предположении однородности пласта и бесконечного его простираения в направлении от прямолинейной реки. Обзор наиболее важных в методическом плане работ по оценке изменения поверхностного стока при эксплуатации поверхностных вод приведен в работах [10, 16, 21]. В этой главе рассмотрены также некоторые аналитические решения для оценки изменения поверхностного стока с учетом тех же факторов, что и в случае оценки эксплуатационных ресурсов.

## **2.1. ТИПИЗАЦИЯ ГИДРОГЕОЛОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ И РАСЧЕТНЫЕ СХЕМЫ ВОДОНОСНЫХ ПЛАСТОВ**

Как отмечалось выше, использование пресных подземных вод в широких масштабах для целей орошения допускается только в том случае, если их ресурсы в рассматриваемом районе намного превышают перспективную потребность населения в воде для хозяйственно-питьевых нужд.

Следовательно, перспективны для целей орошения водоносные горизонты с достаточно значительными ресурсами подземных вод кондиционного качества. Практика гидрогеологических исследований, в том числе разведка многочисленных месторождений подземных вод показала, что наиболее значительные ресурсы пресных подземных вод, которые могут быть использованы для целей орошения, приурочены:

а) к толщам пролювиальных и аллювиальных песчано-гравийно-галечниковых отложений конусов выноса предгорных равнин и межгорных впадин;

б) аллювиальным песчано-гравийно-галечниковым отложением речных долин;

в) осадочным породам различного литологического состава в артезианских бассейнах платформ и горноскладчатых областей.

Конусы выноса формируются в местах выхода горных потоков на предгорную равнину или в межгорную впадину. Если эти потоки выходят в долину на небольшом расстоянии один от другого, образованные ими конусы выноса сливаются в предгорный шлейф. Мощность хорошо проницаемых пролювиальных отложений достигает 300—400 м, а иногда и более. Для всех конусов выноса характерна закономерная смена литологического состава в направлении от их верхней головной части. Грубообломочные фракции постепенно заменяются менее крупными фракциями — песками, суглинками и глинами. Появление в направлении к периферии в разрезе пролювиальных песчано-гравийно-галечниковых отложений суглинистых и глинистых прослоев определяет появление здесь этажно-расположенных водоносных горизонтов, содержащих напорные воды. Основную роль в питании подземных вод головной галечниковой толщи конусов выноса играет поглощение поверхностного стока, идущее, как правило, в режиме «дождевания». Уменьшение водопроницаемости водосодержащих пород от головной части к периферии конуса выноса создает подпор потока подземных вод, и так как водопроницаемость в нижней периферической зоне меньше величины питания в головной зоне, на периферии конуса выноса часть подземного потока выклинивается в виде родников и карасу, а также расходуется на эвапотранспирацию. Ширина полосы разгрузки достигает нескольких километров.

В долинах крупных рек распространены мощные водоносные песчаные и гравийно-галечниковые накопления, слагающие пойменную и надпойменные террасы. Ширина таких долин составляет несколько километров, а в некоторых случаях, особенно в районах впадения крупных притоков, и десятки километров. Мощность аллювиальных водоносных горизонтов в таких долинах может составлять 50—60 м, а в долинах некоторых среднеазиатских рек — 100 м и более. Как правило, эти горизонты гидравлически связаны с водами реки, которая является их естественной границей. Второй естественной границей аллювиального водоносного пласта служит линия его приращения к коренным породам в бортах долины. При этом возможны три варианта соотношения: а) водопроницаемость коренных отложений мало отличается от водопроницаемости аллювиального водоносного горизонта; б) коренные отложения характеризуются низкой водопроницаемостью и в) коренные отложения обладают значительно большей водопроницаемостью.

Артезианские бассейны платформ и горно-складчатых систем представляют собой гидродинамические системы водоносных горизонтов и комплексов, выдержанных на большой площади. В вертикальном разрезе выделяется чаще всего несколько водоносных толщ, в той или иной мере изолированных друг от друга. Среди них выделяются основные комплексы, характеризующиеся высокими значениями водопроницаемости. Мощность этих комплексов (или горизонтов) может достигать 100 м и более.

Обоснованность результатов, полученных при гидрогеологических расчетах,— будь то оценка эксплуатационных ресурсов подземных вод или влияния их отбора на поверхностный сток, прогнозы качества отбираемой воды или оценка надежности функционирования систем совместного использования подземных и поверхностных вод — самым непосредственным образом зависит от того, насколько полно отражены в этих расчетах природные гидрогеологические условия и как точно они представлены в соответствующих расчетных схемах. Последние должны строиться таким образом, чтобы водоносный пласт и в естественных условиях, и при эксплуатационном водоотборе был представлен в виде единой физической области, определяемой начальными и граничными условиями. Этими условиями характеризуется вся совокупность гидрогеологических, гидрологических и других природных особенностей района эксплуатации, в том числе закономерности распределения напоров в водоносном пласте, скоростей и расходов подземных вод в нем. Они включают: литологический состав, условия залегания и водопроницаемость водоносных пластов и граничащих с ними пород, геометрические характеристики этих пластов (площадь распространения, мощность, уклон, форма и характер внешних границ в плане и в разрезе), а также питание водоносных пластов путем инфильтрации атмосферных осадков, перетекания из соседних водоносных горизонтов и фильтрации из поверхностных водоемностей, расходование содержащихся в них вод на испарение и выклинивание на дренирование поверхностными водотоками и водоемами. Наиболее важными граничными условиями являются условия питания и расходования подземных вод в кровле и подошве пласта, а также характер боковых границ пласта. К последним относятся границы с поверхностными водоемностями, поверхности контакта с менее и более проницаемыми породами, места выхода (выклинивания) водоносного пласта на дневную поверхность.

Учитывая весьма большое разнообразие природных условий, при гидрогеологических расчетах, независимо от того, выполняются ли они с помощью моделирования или аналитическими методами, необходима определенная схематизация этих условий, учитывающая расположение водозаборных сооружений относительно боковых границ водоносного пласта, что определяет степень влияния последних на фильтрационное поле в районе водоотбора. При этом могут быть выделены шесть типовых расчетных схем.

1. Неограниченный водоносный пласт (пласт весьма больших размеров, где водозаборные сооружения так удалены от границ пласта, что влиянием этих границ можно пренебречь). Чаще всего как неограниченные пласты схематизируются водоносные комплексы и горизонты артезианских бассейнов и горноскладчатых областей. Эти горизонты и комплексы могут рассматриваться и с учетом перетекания из соседних водоносных пластов, и как изолированные сверху и снизу, и как принимающие инфильтра-

ционное питание сверху или расходующиеся на эвапотранспирацию.

Зачастую в качестве неограниченного пласта могут рассматриваться и крупные конуса выноса, и предгорные шлейфы, если водозаборы размещаются на достаточном удалении от границ питания или выклинивания эксплуатируемых горизонтов.

2. Полуограниченный водоносный пласт (случай, когда на фильтрационное поле в районе водозаборных сооружений оказывает влияние только одна какая-либо граница пласта, а другие границы находятся на большом удалении от водозабора, и их влияние может не учитываться). При этом на границе задается, если это поверхностный водоисточник, условия совершенного (постоянный напор) или несовершенного питания; если это поверхность контакта с менее проницаемыми породами, то задается условие постоянного расхода и в частности при весьма слабопроницаемых породах — условие нулевого расхода. Как полуограниченный водоносный пласт с границей совершенного или несовершенного питания чаще всего схематизируются широкие речные долины при размещении водозабора на относительно небольшом, по сравнению с шириной долины, расстоянии от реки, примерно в отношении 1 : 3 (речь идет о ширине той части долины, на которой расположен водозабор). При этом, конечно, должно выдерживаться условие определенной однородности фильтрационных свойств аллювиальных отложений в пределах этой части долины. Следует отметить, что и при небольшой ширине речной долины, если она приключается к коренным отложениям, фильтрационные параметры которых сравнимы с параметрами аллювия, пласт может рассматриваться как полуограниченный.

В качестве полуограниченного пласта могут рассматриваться и водоносные горизонты и комплексы артезианских бассейнов при размещении водозаборов вблизи границ их распространения, если они контактируют со слабопроницаемыми или водоупорными отложениями, а также если они подрезаются рекой.

Крупные конуса выноса и предгорные шлейфы также часто могут рассматриваться как полуограниченные пласты, где границей постоянного расхода может явиться полоса мощного выклинивания в виде родников и карасу.

3. Пласт-полоса (случай, когда на фильтрационное поле оказывают влияние две границы пласта, примерно параллельные одна другой). Границы эти могут быть как однородными (обе границы питания, совершенная и несовершенная, или обе границы с постоянным расходом, в том числе непроницаемые), так и разнородными (т. е. одна граница питания, а другая — со слабопроницаемыми породами). Наиболее часто в виде пластов-полос с разнородными границами схематизируются речные долины и равнинных, и горных рек. В виде пластов-полос с однородными границами схематизируются, как правило, междуречья или те отрезки речных долин, заключенные между основной рекой и ее притоком или протокой, где они примерно параллельны.



В качестве пласта-полосы с однородными слабопроницаемыми границами могут схематизироваться, например многие вытянутые межадырные впадины.

4. Клинообразный водоносный пласт, ограниченный однородными или разнородными границами. В первом случае таким образом чаще всего схематизируется водоносный пласт, ограниченный рекой и ее притоком, если он характеризуется фильтрационной однородностью. Как клинообразный пласт с разнородными границами обычно схематизируется водоносный пласт, ограниченный рекой и линией приращения ее долины к слабопроницаемым скальным породам, пересекаемым руслом реки.

5. Пласт-полуполоса. Эта сравнительно редкая схема отличается от пласта-полосы тем, что здесь появляется третья граница, которая может быть как границей питания, так и границей со слабопроницаемыми породами. В первом случае таким образом схематизируется водоносный пласт, заключенный или между двумя параллельными притоками, впадающими в реку или между рекой и впадающим в нее притоком, если при этом пересекается линия контакта со слабопроницаемыми скальными отложениями, примерно параллельная реке или ее притоку.

Схема, соответствующая еще более редкому второму случаю, может быть применена к условиям, когда водоносный пласт заключен или между двумя реками (это может быть река и примерно параллельный ей приток), или между рекой и границей приращения ее долины к коренным отложениям, пересекающими линию контакта со слабопроницаемыми скальными породами, которые прорезаются непосредственно лишь руслом водотоков.

6. Пласт, ограниченный со всех сторон. При этом возможны самые различные соотношения по характеру границ. Это может быть контур, сложный по очертаниям, но характеризующийся тем, что является или только контуром питания (условия «острова»), или только границей со слабопроницаемыми породами (условия «бочки»). Это может быть и прямоугольник, каждая из сторон которого является или границей питания или контактом с водоупорными породами.

Помимо выделенных шести схем определенный практический интерес представляют схемы пластов с полосовой фильтрационной неоднородностью — неограниченного и полуограниченного потоков (с границей питания).

Особенно интересна вторая из этих схем, так как на практике весьма часто приходится сталкиваться с условиями речных долин, характеризующимися полосовой фильтрационной неоднородностью, когда границы этих полос примерно параллельны урезу реки.

В настоящей главе для каждой из рассмотренных выше расчетных схем приведены методы гидрогеологических расчетов с целью оценки эксплуатационных ресурсов подземных вод и влияния их отбора на поверхностные водоисточники.

## 2.2. СХЕМЫ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ВОДОНОСНЫХ ПЛАСТОВ

Схема неограниченного однородного по фильтрационным параметрам водоносного пласта наиболее проста для изучения. Случай одиночного водозабора в неограниченном однородном пласте без перетекания уже рассматривался в гл. 1 (см. формулы (1.68), (1.71) и (1.72)).

Учет перетекания из смежных водоносных горизонтов приводит к более сложным расчетным схемам. Прежде всего, следует принимать во внимание два варианта развития процесса. В одном из них пласт, смежный с эксплуатируемым (питающий пласт) можно считать настолько водообильным, что перетекание практически не приводит к изменению уровня в питающем пласте. Во втором варианте падением уровня в питающем пласте пренебрегать нельзя. Рассмотрим сначала более простой пример, когда можно считать напор питающего пласта неизменным. Для случая отбора подземных вод одиночным водозабором соответствующее уравнение фильтрации может быть записано в виде:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial S}{\partial r} \right) - g^2 S, \quad (2.2)$$

$$\text{где } g = (\sqrt{b/T})^{1/2}; \quad (2.3)$$

$b$  — параметр перетекания. Сравнивая уравнение (2.2) с уравнением (1.1), видим, что в уравнении (2.2) появляется один новый параметр, —  $g^2 S$ , называемый компенсационным эффектом и учитывающий дополнительное питание за счет перетекания. Чем больше величина  $S$ , тем сильнее отрицательная добавка к временной производной понижения и тем сильнее тормозится рост понижения во времени. Таким образом, перетекание частично компенсирует сработку емкостных запасов; это объясняет и название параметра  $g$ .

Компенсирующее влияние оказывает не только перетекание. К факторам компенсации относятся также уменьшение расхода грунтовых вод на испарение, выклинивание и на дренирование грунтовых вод достаточно густой сетью горизонтального дренажа [10, 11]. Расчеты эксплуатационных ресурсов подземных вод с учетом этих факторов могут быть выполнены точно так же, как и в случае перетекания. Определение величин коэффициентов, аналогичных по смыслу коэффициенту перетекания  $b$ , подробно изложено в работах [10, 11].

Решение уравнения (2.2) с крайними условиями (1.19), (1.20) проводится теми же методами, какими было решено в гл. 1 уравнение (1.18). В результате передаточная функция понижения будет иметь вид:

$$U_S(M, p) = \frac{1}{2\pi} K_0 \left( r \sqrt{\frac{p}{a} + g^2} \right). \quad (2.4)$$

Соответствующее выражение гидравлического сопротивления представляет собой интеграл

$$R_0(M, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^t \exp\left(-\frac{r^2}{4at} - ag^2t\right) \frac{dt}{t}, \quad (2.5)$$

который приводится к так называемой функции Хантуша  $I(\alpha, \beta)$ :

$$R_0(M, t) = \frac{1}{4\pi} I\left(\frac{r^2}{4at}, gr\right); \quad (2.6)$$

$$I(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\infty} \exp\left(-z - \frac{\beta^2}{4z^2}\right) \frac{dz}{z} \quad (2.7)$$

табулированная функция [39]. Значения  $I(\alpha, \beta)$  приведены в табл. 2.1 (см. приложение, программы 26, 27).

При больших значениях времени,  $t > (10 \div 20)/ag^2$ , значения гидравлического сопротивления стабилизируются и становятся равными

$$R_0(M, \infty) = \frac{1}{2\pi} K_0(gr). \quad (2.8)$$

Такая стабилизация является следствием принятого допущения о постоянстве уровня в питающем слое.

Таблица 2.1

Значения функции Хантуша  $I(z, \alpha)$

$z$	$\alpha$								
	0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,5	2,0
0,000	$\infty$	4,854	3,505	2,229	1,555	1,131	0,842	0,428	0,228
0,001	6,332	4,829	3,505	2,229	1,555	1,131	0,842	0,428	0,228
0,002	5,639	4,708	3,504	2,229	1,555	1,131	0,842	0,428	0,228
0,004	4,948	4,423	3,481	2,229	1,555	1,131	0,842	0,428	0,228
0,006	4,545	4,181	3,427	2,229	1,555	1,131	0,842	0,428	0,228
0,008	4,259	3,982	3,360	2,228	1,555	1,131	0,842	0,428	0,228
0,01	4,038	3,815	3,288	2,225	1,555	1,131	0,842	0,428	0,228
0,02	3,355	3,244	2,952	2,181	1,553	1,131	0,842	0,428	0,228
0,04	2,681	2,629	2,482	2,016	1,521	1,127	0,842	0,428	0,228
0,06	2,295	2,262	2,167	1,845	1,459	1,112	0,834	0,428	0,228
0,08	2,027	2,003	1,935	1,695	1,386	1,085	0,832	0,427	0,228
0,1	1,823	1,805	1,753	1,564	1,312	1,050	0,819	0,427	0,228
0,2	1,223	1,216	1,194	1,115	0,996	0,858	0,715	0,414	0,227
0,4	0,702	0,700	0,693	0,665	0,621	0,565	0,502	0,341	0,210
0,6	0,454	0,453	0,450	0,436	0,415	0,387	0,354	0,263	0,177
0,8	0,311	0,310	0,308	0,301	0,289	0,273	0,254	0,199	0,144
1,0	0,219	0,219	0,218	0,214	0,207	0,197	0,186	0,151	0,114
2,0	0,049	0,049	0,049	0,048	0,047	0,046	0,044	0,039	0,034
4,0	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,003	0,003

Отбор подземных вод неограниченного пласта линейным водо-забором. Передаточная функция понижения для этих условий имеет вид [10]:

$$U_s(M, p) = \frac{e^{-x \sqrt{\frac{p}{a} + g^2}}}{2B \sqrt{\frac{p}{a} + g^2}}, \quad (2.9)$$

где  $x$  — расстояние от точки до линейного ряда;  $B$  — протяженность ряда. Соответствующее выражение для гидравлического сопротивления имеет вид:

$$R_0(M, t) = \frac{1}{2gB} D^* \left( \frac{x}{2\sqrt{at}}, gx \right), \quad (2.10)$$

$$D^*(z, \chi) = \frac{1}{2} \left[ e^{-\chi} \operatorname{erfc} \left( z - \frac{\chi}{2z} \right) - e^{\chi} \operatorname{erfc} \left( z + \frac{\chi}{2z} \right) \right]. \quad (2.11)$$

Значения функции  $D^*(z, \alpha)$  приведены в табл. 2.2, а в приложении — программе 33, ее вычисления на микроалькуляторе. В точке на линии водозабора выражение для гидравлического сопротивления имеет более простой вид:

$$R_0(M, t) = \frac{1}{2gB} \operatorname{erf} g \sqrt{at}. \quad (2.12)$$

В условиях отсутствия перетекания выражение (2.10) упрощается до вида:

$$R_0(M, t) = \frac{\sqrt{at}}{B \sqrt{\pi}}. \quad (2.13)$$

Таблица 2.2

Значения функции  $D^*(z, \alpha)$

$z$	$\alpha$						
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,5	2,0
0,0	0,819	0,670	0,549	0,449	0,368	0,223	0,135
0,1	0,662	0,665	0,549	0,449	0,368	0,223	0,135
0,2	0,347	0,517	0,516	0,445	0,368	0,223	0,135
0,3	0,199	0,340	0,400	0,394	0,351	0,223	0,135
0,4	0,122	0,221	0,284	0,307	0,299	0,216	0,135
0,5	0,076	0,145	0,199	0,225	0,234	0,195	0,132
0,6	0,051	0,097	0,135	0,160	0,173	0,163	0,122
0,7	0,034	0,065	0,092	0,112	0,125	0,129	0,105
0,8	0,023	0,044	0,062	0,077	0,088	0,097	0,086
0,9	0,015	0,029	0,042	0,053	0,061	0,071	0,067
1,0	0,010	0,020	0,028	0,036	0,042	0,051	0,050
1,5	0,001	0,002	0,003	0,005	0,005	0,007	0,008
2,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001

передаточная функция понижения

$$U_S(M, p) = \frac{1}{2B\sqrt{p/a}} e^{-x\sqrt{p/a}}, \quad (2.14)$$

а соответствующее гидравлическое сопротивление

$$R_0(M, t) = \frac{\sqrt{at}}{B} \operatorname{ierfc} \frac{x}{2\sqrt{at}}. \quad (2.15)$$

В частности, на линии водозабора,

$$R_0(M, t) = \frac{\sqrt{at}}{B\sqrt{\pi}}. \quad (2.16)$$

Отбор подземных вод площадными водозаборами. При отборе подземных вод площадными водозаборами полосообразной формы передаточная функция понижения (для точки в центре водозабора) имеет вид:

$$U_S(M, p) = \frac{1 - e^{-d\sqrt{\frac{p}{a} + g^2}}}{2Bd\left(\frac{p}{a} + g^2\right)}; \quad (2.17)$$

а соответствующее гидравлическое сопротивление

$$R_0(M, t) = \frac{d}{B} F\left(\frac{d}{2\sqrt{at}}, gd\right); \quad (2.18)$$

$$F(z, \alpha) = \frac{1}{2\alpha^2} (1 - e^{-\alpha^2/4z^2} \operatorname{erfc} z - D(z, \alpha)). \quad (2.19)$$

Для вычисления значений функции  $F(z, \alpha)$  может быть использована программа 2, (см. приложение).

В случае отсутствия перетекания ( $g=0$ ) выражение для гидравлического сопротивления упрощается:

$$R_0(M, t) = \frac{at}{2Bd} \left(1 - 4i^2 \operatorname{erfc} \frac{d}{2\sqrt{at}}\right), \quad (2.20)$$

где  $i^2 \operatorname{erfc} z$  — второй повторный интеграл вероятностей, значения которого могут быть определены либо по табл. 1.2, либо с помощью программы 32 для микрокалькулятора (см. приложение).

При отборе подземных вод площадными водозаборами в форме круга передаточная функция понижения для точки в центре водозабора имеет вид

$$U_S(M, p) = \frac{1}{\pi r^2 \left(\frac{p}{a} + g^2\right)} - \frac{1}{\pi r \sqrt{\frac{p}{a} + g^2}} = K_1\left(r\sqrt{\frac{p}{a} + g^2}\right), \quad (2.21)$$

гидравлическое сопротивление при этом

$$R_0(M, t) = \frac{1 - e^{-ag^2t}}{\pi r^2 g^2} - I\left(\frac{r^2}{4at}, gr\right), \quad (2.22)$$

где  $I(\alpha, \beta)$  — функция Хантуша.

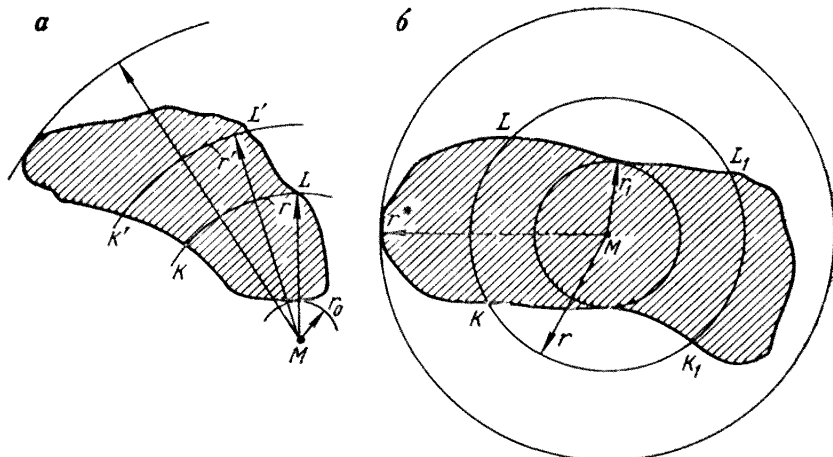


Рис. 2.1. Схемы к выводу формул (2.24) и (2.25):

*a* — в случае, когда точка *M* находится вне области водоотбора, при радиусе дуги  $r = MK$  угол  $\theta(r)$  равен  $\angle KML$ ; при радиусе дуги  $r = K'M$  угол  $\theta(r)$  равен  $\angle K'ML'$ ; *б* — в случае, когда точка *M* находится внутри области водоотбора (угол, под которым видна часть дуги радиуса  $r$ , лежащая внутри области водоотбора, равна сумме углов  $KML$  и  $K_1ML_1$ )

В условиях отсутствия перетекания ( $g=0$ ) гидравлическое сопротивление выражается более простой зависимостью:

$$R_0(M, t) = \frac{at}{\pi r^2} \left[ 1 - e^{-r^2/4at} - \frac{r^2}{4at} \text{Ei}\left(-\frac{r^2}{4at}\right) \right]. \quad (2.23)$$

При значениях времени  $t > (0,5-1,0) r^2/a$  можно использовать зависимость

$$R_0(M, t) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{6,12at}{r^2}.$$

**Расчет понижения уровня подземных вод при их отборе площадными водозаборами сложной формы.** Приведенное здесь решение задачи приближенное, однако оно универсально в том смысле, что пригодно для конфигурации водозабора любого вида, и может быть доведено до необходимой степени точности.

Решение задачи определения понижения уровня подземных вод при их отборе водозаборами сложной формы (вывод формул для передаточных функций понижения и гидравлических сопротивлений) подробно рассмотрено в книге [10]. Для точки вне области (рис. 2.1, *a*) водозабора передаточная функция понижения имеет вид

$$U_S(M, p) = \frac{1}{2\pi A} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} K_0(\beta r) \theta(r) r dr, \quad (2.24)$$

где  $A$  — площадь области водоотбора;  $r_{\min}$  и  $r_{\max}$  — значения радиусов, при которых величина угла  $\theta(r)$  обращается соответственно в  $2\pi$  и нуль.

Для точки внутри области водоотбора (см. рис. 2.3, б)

$$U_S(M, p) = \frac{A_0}{A} \hat{U}_S(M, p) + \frac{1}{2\pi A} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} K_0(\beta r) \theta(r) r dr, \quad (2.25)$$

где  $U_S(M, p)$  — передаточная функция понижения для точки в центре водоотбора круглой формы, определяемая формулой (2.21);  $A_0$  — площадь круга радиусом  $r_{\min}$ .

Гидравлические сопротивления для нахождения понижений определяются по формулам, вытекающим из (2.24) и (2.25):

$$R_0(M, t) = \frac{1}{4\pi A} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} I\left(\frac{r^2}{4at}, gr\right) \theta(r) r dr \quad (2.26)$$

для точек вне области водоотбора и

$$R_0(M, t) = \frac{A_0}{A} R_0^0(M, t) + \frac{1}{4\pi A} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} I\left(\frac{r^2}{4at}, gr\right) \theta(r) r dr \quad (2.27)$$

для точек внутри этой области, причем  $R_0^0(M, t)$  — понижение в центральной точке кругового водозабора радиусом  $r_{\min}$ , определяемое по формуле (2.22).

При  $g=0$ , что соответствует условиям отсутствия компенсационного питания, все формулы упрощаются. Так, для определения величины гидравлического сопротивления, относящегося к точке  $M$  вне области водоотбора, служит формула

$$R_0(M, t) = \frac{1}{4\pi A} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} -\text{Ei}\left(-\frac{r^2}{4at}\right) r \theta(r) dr; \quad (2.28)$$

для точки  $M$  внутри этой области — формула

$$R_0(M, t) = \frac{A_0}{A} R_0^0(M, t) + \frac{1}{4\pi A} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} -\text{Ei}\left(-\frac{r^2}{4at}\right) \theta(r) r dr, \quad (2.29)$$

где величина  $R_0^0(M, t)$  определяется по (2.23).

Для приближенной оценки сопротивлений интегралы в формулах (2.24) — (2.26), (2.28), (2.29) можно вычислить по квадратурной формуле Гаусса [25]:

$$U_S(M, p) \approx \frac{r_{\max} - r_{\min}}{4\pi A} \sum_{k=1}^N w_k K_0(\beta r_k) \theta(r_k) r_k; \quad (2.30)$$

$$r_k = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} + \frac{r_{\max} - r_{\min}}{2} x_k, \quad (2.31)$$

где  $x_k$  — узлы;  $w_k$  — веса квадратурной формулы Гаусса  $N$ -го порядка, некоторые значения которых приведены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Значения узлов  $x_k$  и весов  $w_k$  квадратурной формулы Гаусса при некоторых значениях  $N$

$k$	$x_k$	$w_k$	$k$	$x_k$	$w_k$
$N = 4$			3	-0,5255	0,3137
1	-0,8611	0,3479	4	-0,1834	0,3627
2	-0,3400	0,6521	5	0,1834	0,3627
3	0,3400	0,6521	6	0,5255	0,3137
4	0,8611	0,3479	7	0,7967	0,2224
			8	0,9603	0,1012
$N = 6$			$N = 10$		
1	-0,9325	0,1713	1	-0,9739	0,0667
2	-0,6612	0,3608	2	-0,8651	0,1495
3	-0,2386	0,4679	3	-0,6794	0,2191
4	0,2386	0,4679	4	-0,4334	0,2693
5	0,6612	0,3608	5	-0,1489	0,2955
6	0,9325	0,1713	6	0,1489	0,2955
$N = 8$			7	0,4334	0,2693
1	-0,9603	0,1012	8	0,6794	0,2191
2	-0,7967	0,2224	9	0,8651	0,1495
			10	0,9739	0,0667

Формула (2.30) имеет простую трактовку: влияние водозабора сложной формы на понижение в точке  $M$  считается эквивалентным суммарному влиянию  $N$  одиночных водозаборов, каждый из которых отстоит от точки  $M$  на расстояние  $r_k$  и имеет дебит в раз-  
мере

$$Q_k = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{2A} r_k \theta(r_k) w_k Q, \quad (2.32)$$

где  $Q$  — суммарный дебит площадного водозабора.

Для расчета понижения в точке внутри области водоотбора при этом следует полагать, что оно формируется как суперпозиция частичных понижений, обусловленных эксплуатацией одиночных водозаборов, определенных выше, и площадного водозабора круглой формы, центр которого совпадает с точкой  $M$ , а дебит

$$Q_{кр} = \frac{A_0}{A} Q. \quad (2.33)$$

*Пример расчета.* На рис. 2.2 изображена конфигурация площадного водозабора сложной формы в неограниченном однородном пласте; требуется определить временные зависимости понижения в точках  $M_1$  и  $M_2$ . Точка  $M_1$  находится внутри водозабора; величина радиуса  $r_{\min}$  окружности, касающейся ближайшей к точке  $M_1$  границы области водоотбора, составляет 1400 м, а расстояние  $r_{\max}$  от точки  $M_1$  до наиболее удаленной от нее границы области водоотбора — 4000 м. Гидрологические параметры: коэффициент водопроницаемости  $T = 1000$  м<sup>2</sup>/сут, коэффициент уводнепроводности  $a = 10^4$  м<sup>2</sup>/сут, допустимое



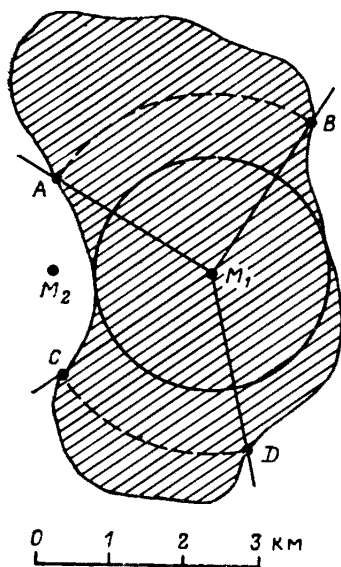


Рис. 2.2. Конфигурация области водозабора в условиях примера

$\theta(r_3)=0,75$  рад;  $\theta(r_4)=0,19$  рад.

$$Q_1 = \frac{4000 - 1400}{2 \cdot 17,64 \cdot 10^6} 1580 \cdot 5,39 \cdot 0,3479 \cdot 141\,120 = 30\,813 \text{ м}^3/\text{сут}$$

и, аналогично,  $Q_2=41\,499 \text{ м}^3/\text{сут}$ ,  $Q_3=15\,981 \text{ м}^3/\text{сут}$ ,  $Q_4=2625 \text{ м}^3/\text{сут}$ . Дебит площадного водозабора  $Q_{\text{кр}}$ , согласно формуле (2.33), составил  $50\,202 \text{ м}^3/\text{сут}$ . Теперь остается только сложить понижения, обусловленные влиянием площадного водозабора, рассчитываемого по формуле (2.23) с понижениями от каждого из одиночных водозаборов, рассчитываемых по зависимости (2.6). На рис. 2.3 изображен график зависимости понижения в точке  $M_1$ , построенный описанным способом. Для расчета понижения в точке  $M_2$  определяем:  $r_{\text{min}}=500 \text{ м}$ ,  $r_{\text{max}}=4000 \text{ м}$ ; согласно формуле (2.31) значения расстояний равны:  $r_1=743 \text{ м}$ ,  $r_2=1655 \text{ м}$ ,  $r_3=2845 \text{ м}$ ,  $r_4=3757 \text{ м}$ ; соответствующие значения углов, определенные по плану области, составили  $\theta(r_1)=2,83$  рад,  $\theta(r_2)=4,01$  рад,

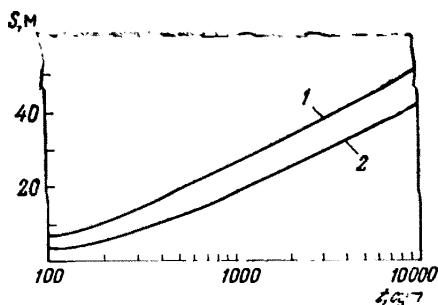


Рис. 2.3. Результаты расчетов понижения с помощью различных методов (в условиях примера) для точек  $M_1$  (1) и  $M_2$  (2)

$\theta(r_3) = 2,06$  рад,  $\theta(r_4) = 0,37$  рад; величины нагрузок на первый из одиночных водозаборов, по формуле (2.32)

$$Q_1 = \frac{4000 - 500}{2 \cdot 17,64 \cdot 10^6} - 743 \cdot 2,83 \cdot 0,3479 \cdot 141\,120 = 10\,241 \text{ м}^3/\text{сут}$$

и аналогично:  $Q_2 = 60\,588 \text{ м}^3/\text{сут}$ ,  $Q_3 = 53\,505 \text{ м}^3/\text{сут}$ ,  $Q_4 = 6771 \text{ м}^3/\text{сут}$ . На рис. 2.3 изображен график зависимости  $S(M_2, t)$ , полученной как результат суперпозиции четырех скважин.

В гидрогеологической практике площадные водозаборы часто рассматриваются с помощью замены их истинной конфигурации равновеликой окружностью, центр которой расположен в центре тяжести водозабора. Такая замена не всегда оправдана, особенно для внутренних точек области отбора. В работе [10] рассматриваются условия такой замены, анализируются критерии ее допустимости и соответствующие погрешности.

**Расчеты при линейном изменении дебита во времени.** Пусть величина водоотбора изменяется по закону

$$Q(t) = Q_0 + \lambda t. \quad (2.34)$$

Временная зависимость дебита при этом

$$\hat{Q}(p) = \frac{Q_0}{p} + \frac{\lambda}{p^2}. \quad (2.35)$$

Путем несложных преобразований можно показать, что временная зависимость понижения

$$R(M, t) = R_{00}(M, t) + \frac{t}{\tau} \Delta R(M, t), \quad (2.36)$$

где  $R_{00}(M, t)$  — соответствующая зависимость гидравлического сопротивления для постоянного во времени отбора:

$$\tau = Q_0/\lambda, \quad (2.37)$$

где  $\Delta R(M, t)$  представляет собой оригинал Лапласа от изображения  $p^{-2}U_S(M, p)$ . Так, для схемы неограниченного однородного пласта, эксплуатируемого одиночным водозабором в условиях отсутствия перетекания, зависимость  $\Delta R(M, t)$  имеет вид

$$\Delta R(M, t) = \frac{1}{4\pi} \left[ -\left(1 + \frac{r^2}{4at}\right) \text{Ei}\left(-\frac{r^2}{4at}\right) - e^{-r^2/4at} \right]. \quad (2.38)$$

Это решение получено Ф. М. Бочвером. При  $t > (2,5, \dots, 5)r^2/a$

$$\Delta R(M, t) \approx \ln \frac{0,83at}{r^2}. \quad (2.39)$$

При отборе подземных вод линейным водозабором протяженности  $B$  в тех же условиях

$$\Delta R(M, t) = \frac{4\sqrt{at}}{B} i^3 \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}}. \quad (2.40)$$

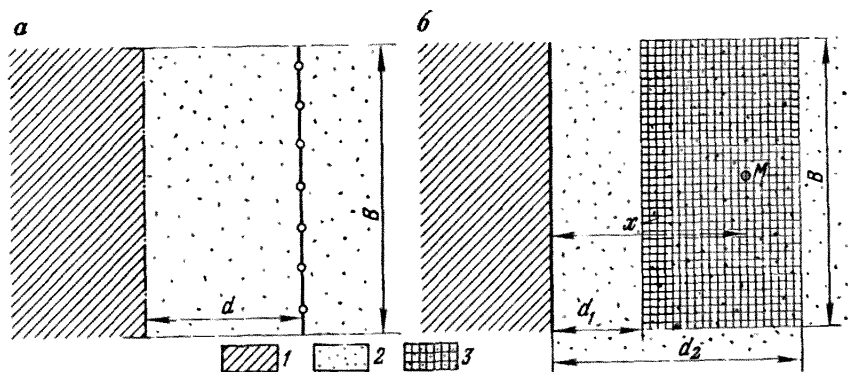


Рис. 2.4. Схемы плановой фильтрационной неоднородности в неограниченном пласте с линейным (а) и площадным (б) водозаборами:

1—2 — области неоднородности; 3 — площадной водозабор

При отборе подземных вод полосовым площадным водозабором шириной  $2d$

$$\Delta R(M, t) = \frac{at}{4Bd} \left( 1 - 32i^4 \operatorname{erfc} \frac{d}{2\sqrt{at}} \right). \quad (2.41)$$

Функции  $i^3 \operatorname{erfc} z$  и  $i^4 \operatorname{erfc} z$  представляют собой соответственно третий и четвертый повторные интегралы вероятностей (см. табл. 1.2 и приложение, программу 32).

**Неограниченный водоносный горизонт с границей неоднородности в плане.** Рассмотрим схему фильтрационной неоднородности (рис. 2.4, а) в условиях отсутствия перетекания. Передаточная функция понижения для точки на линии водозабора определяется выражением

$$U_s(M, p) = \frac{1}{2B \sqrt{\frac{p}{a_2}}} (1 + \varepsilon e^{-2d \sqrt{p/a_2}}), \quad (2.42)$$

$$\text{где } \varepsilon = \frac{1 - \eta}{1 + \eta}; \quad (2.43)$$

$$\eta = \frac{T_1}{T_2} \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}. \quad (2.44)$$

Гидравлическое сопротивление

$$R_0(M, t) = \frac{\sqrt{a_2 t}}{B} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \varepsilon i \operatorname{erfc} \frac{d}{\sqrt{a_2 t}} \right); \quad (2.45)$$

при этом за характерное значение коэффициента водопроницаемости принимается величина  $T_2$ .

При отборе подземных вод в тех же условиях полосообразным площадным водозабором передаточная функция понижения

для точки с абсциссой  $x$  внутри полосы отбора (см. рис. 2.4, б) имеет вид:

$$U_S(M, p) = \frac{1}{2B(d_2 - d_1) \frac{p}{a_2}} \left[ 2 - e^{-(x-d_1) \sqrt{\frac{p}{a_2}}} + \right. \\ \left. + \varepsilon e^{-(x+d_1) \sqrt{\frac{p}{a_2}}} - e^{-(d_1-x) \sqrt{\frac{p}{a_2}}} - \varepsilon e^{-(d_1+x) \sqrt{\frac{p}{a_2}}} \right], \quad (2.46)$$

гидравлическое сопротивление

$$R_0(M, t) = \frac{2a_2 t}{B(d_2 - d_1)} \left[ \frac{1}{2} - i^2 \operatorname{erfc} \frac{x-d_1}{2\sqrt{a_2 t}} + \varepsilon i^2 \operatorname{erfc} \frac{x+d_1}{2\sqrt{a_2 t}} - \right. \\ \left. - i^2 \operatorname{erfc} \frac{d_2-x}{2\sqrt{a_2 t}} - \varepsilon i^2 \operatorname{erfc} \frac{x+d_2}{2\sqrt{a_2 t}} \right]. \quad (2.47)$$

Для оценки эксплуатационных ресурсов подземных вод в качестве  $x$  следует принимать абсциссу точки, в которой понижение максимально. Положение этой точки изменяется с течением времени; при больших значениях времени величина  $x$  стремится к своему предельному значению:

$$x = \frac{d_1 + d_2}{2} - \varepsilon \frac{d_2 - d_1}{2}. \quad (2.48)$$

Рассмотрим теперь те же условия, но при дебите водозабора, линейно изменяющемся во времени. Величина гидравлического сопротивления определяется формулой (2.36), причем для линейного водозабора временная зависимость  $\Delta R$  определяется выражением

$$\Delta R = \frac{4\sqrt{a_2 t}}{B} \left( \frac{1}{6\sqrt{\pi}} - \varepsilon i^3 \operatorname{erfc} \frac{d}{\sqrt{a_2 t}} \right); \quad (2.49)$$

а для площадного

$$\Delta R = \frac{a_2 t}{2B(d_2 - d_1)} \left( 1 - 16 i^4 \operatorname{erfc} \frac{x-d_1}{2\sqrt{a_2 t}} + \varepsilon 16 i^4 \operatorname{erfc} \frac{x+d_1}{2\sqrt{a_2 t}} - \right. \\ \left. - 16 i^4 \operatorname{erfc} \frac{d_2-x}{2\sqrt{a_2 t}} - \varepsilon 16 i^4 \operatorname{erfc} \frac{d_2+x}{2\sqrt{a_2 t}} \right). \quad (2.50)$$

**Расчеты при перетекании с учетом переменного напора в питающем горизонте.** Условия, когда понижение уровня подземных вод в питающем пласте равно нулю, в действительности встречаются довольно редко.

Рассмотрим также реальную модель слоистой системы, в которой учитывается, что при изменении уровня подземных вод

Таблица 2.4

Значения функции  $D(z, \alpha)$ 

$z$	$\alpha$						
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,5	2,0
0,0	0,819	0,670	0,549	0,449	0,368	0,223	0,134
0,1	0,809	0,670	0,549	0,449	0,368	0,223	0,134
0,2	0,741	0,651	0,546	0,449	0,368	0,223	0,134
0,3	0,651	0,596	0,521	0,440	0,365	0,223	0,134
0,4	0,559	0,524	0,473	0,413	0,352	0,221	0,134
0,5	0,472	0,449	0,417	0,372	0,326	0,216	0,134
0,6	0,391	0,376	0,353	0,323	0,290	0,203	0,131
0,7	0,319	0,309	0,293	0,273	0,249	0,184	0,125
0,8	0,256	0,249	0,238	0,224	0,208	0,160	0,114
0,9	0,202	0,197	0,190	0,180	0,169	0,135	0,100
1,0	0,156	0,153	0,149	0,142	0,134	0,111	0,085
1,5	0,034	0,033	0,033	0,032	0,031	0,028	0,024
2,0	0,005	0,005	0,005	0,005	0,004	0,004	0,004

в эксплуатируемом горизонте меняется и уровень в смежном пласте. Уравнения фильтрации при этом имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} \frac{\partial S_1}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial S_1}{\partial r} \right) - g_1^2 S_1 + g_1^2 S_2; \\ \frac{1}{a_2} \frac{\partial S_2}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial S_2}{\partial r} \right) + g_2^2 S_1 - g_2^2 S_2, \end{aligned} \quad (2.51)$$

где  $S_1$ ,  $S_2$  — понижения соответственно в питающем и эксплуатируемом горизонтах;

$$g_i = \sqrt{\frac{k_0}{m_0 T_i}}, \quad i = 1, 2, \quad (2.52)$$

$k_0$ ,  $m_0$  — соответственно коэффициент фильтрации и мощность разделяющего слоя.

Решение уравнений (2.51) может быть получено в виде изображений по Лапласу для общего случая соотношения между параметрами слоев. Это решение, приведенное в работе [10], может быть выражено в виде следующих передаточных функций понижения:

1) для эксплуатируемого горизонта

$$U_{S_2} = \frac{A}{2\pi} [v_1 K_0(r \sqrt{\lambda_1}) - v_2 K_0(r \sqrt{\lambda_2})], \quad (2.53)$$

2) для питающего слоя

$$U_{S_1} = \frac{A v_2}{2\pi} [K_0(r \sqrt{\lambda_2}) - K_0(r \sqrt{\lambda_1})],$$

$$\text{где } \lambda_1, \lambda_2 - \text{корни квадратного уравнения} \\ \lambda^2 - b_1\lambda + b_0 = 0; \quad (2.54)$$

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= p \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) + g_1^2 + g_2^2; \\ b_0 &= \frac{p^2}{a_1 a_2} + p \left( \frac{g_1^2}{a_2} + \frac{g_2^2}{a_1} \right); \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

$$v_i = \frac{1}{g_1^2} \left( \lambda_i - \frac{p}{a_1} - g_1^2 \right), \quad i = \overline{1, 2}; \quad (2.56)$$

$$A = \frac{g_1^2}{\sqrt{\delta_1^2 - 4b_0}}. \quad (2.57)$$

С помощью передаточных функций (2.53) и выражений (2.54)–(2.57), используя численное обращение преобразования Лапласа, можно, в принципе, получать необходимые временные зависимости понижения в пластах. При более или менее продолжительном времени эксплуатации решение значительно упрощается:

$$\begin{aligned} U_{S_2} &= \frac{1}{2\pi(1+\nu)} \left[ K_0 \left( r \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \nu K_0(rg) \right]; \\ U_{S_1} &= \frac{1}{2\pi(1+\nu)} \left[ K_0 \left( r \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - K_0(rg) \right], \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\text{где } \nu = T_1/T_2; \quad a = \frac{T_1 + T_2}{\mu_1 + \mu_2}; \quad g = \sqrt{g_1^2 + g_2^2}.$$

Указанное приближение справедливо для значений времени

$$t > (10 \div 20) \frac{m_0}{k_0} (\mu_1 + \mu_2). \quad (2.59)$$

При обычных значениях параметров эти величины составляют обычно несколько десятков или первые сотни суток, что дает возможность пользоваться выражениями для оценки эксплуатационных ресурсов подземных вод.

Передаточной функции (2.53) соответствуют гидравлические сопротивления

$$\begin{aligned} R_{02} &= \frac{1}{4\pi(1+\nu)} \left[ -\text{Ei} \left( -\frac{r^2}{4at} \right) + \nu K_0(rg) \right]; \\ R_{01} &= \frac{1}{4\pi(1+\nu)} \left[ -\text{Ei} \left( -\frac{r^2}{4at} \right) - K_0(rg) \right]. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Для определения понижения в скважине можно использовать более простые выражения.

$$\begin{aligned} R_{02} &= \frac{1}{4\pi(1+\nu)} \left( \ln \frac{2,25at}{r^2} - \nu \ln gr \right), \\ R_{01} &= \frac{1}{4\pi(1+\nu)} \ln \frac{2,25gat}{r}; \end{aligned} \quad (2.61)$$

**Линейный водозабор в пласте с перетеканием с учетом изменения уровня в питающем слое.** Передаточные функции понижения в пластах при эксплуатации одного из них протяженным линейным рядом имеют вид:

1) в эксплуатируемом пласте

$$U_{S2} = \frac{A}{B} \left( \frac{v_1}{\sqrt{\lambda_1}} e^{-x \sqrt{\lambda_1}} - \frac{v_2}{\sqrt{\lambda_2}} e^{-x \sqrt{\lambda_2}} \right); \quad (2.62)$$

2) в питающем пласте

$$U_{S1} = \frac{A}{B} \left( \frac{e^{-x \sqrt{\lambda_1}}}{\sqrt{\lambda_1}} - \frac{e^{-x \sqrt{\lambda_2}}}{\sqrt{\lambda_2}} \right),$$

где  $\lambda_i$  определяется по уравнению (2.54), величины  $v_i$  — по формуле (2.56).

При выполнении условия (2.59) значения сопротивления могут определяться по формулам

$$\begin{aligned} R_{02} = \frac{1}{B(1+v)} \left[ v \sqrt{at} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \operatorname{ierfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{g} D^* \left( \frac{x}{2\sqrt{at}}, gx \right) \right]; \\ R_{01} = \frac{1}{B(1+v)} \left[ \sqrt{at} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \operatorname{ierfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} \right) - \frac{1}{g} D^* \left( \frac{x}{2\sqrt{at}}, gx \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.63)$$

В частности, для определения понижения на линии водозабора могут быть использованы формулы:

$$\begin{aligned} R_{02} = \frac{1}{B(1+v)} \left( v \sqrt{\frac{at}{\pi}} + \frac{1}{g} \operatorname{erf} g \sqrt{at} \right); \\ R_{01} = \frac{1}{B(1+v)} \left( \sqrt{\frac{at}{\pi}} - \frac{1}{g} \operatorname{erf} g \sqrt{at} \right). \end{aligned} \quad (2.64)$$

### 2.3. СХЕМЫ ОДНОРОДНЫХ ПЛАСТОВ С ГРАНИЦЕЙ ПИТАНИЯ В ПЛАНЕ

Выражения для передаточных функций понижения для схем однородного пласта с границей питания прямолинейной формы могут быть получены с помощью принципа отражения, согласно которому влияние водоотбора на понижение уровня подземных вод в условиях наличия границы эквивалентно совместному влиянию истинного водозабора и его зеркального отражения относительно границы в условиях схемы неограниченного пласта.

В соответствии с этим принципом передаточная функция понижения при условии отбора подземных вод одиночным водозабором

$$U_S(M, p) = \frac{1}{2\pi} [K_0(r\beta) - K_0(\rho\beta)], \quad (2.65)$$

где  $r$  — расстояние от точки  $M$  до центра водозабора;  $\rho = \sqrt{(x-d)^2 + y^2}$  — расстояние от точки  $M$  до его отражения относительно границы,  $\beta = [(p/a) + g^2]^{1/2}$ .

Соответствующее передаточной функции (2.65) гидравлическое сопротивление

$$R_0(M, t) = \frac{1}{4\pi} \left[ I\left(\frac{r^2}{4at}, gr\right) - I\left(\frac{\rho^2}{4at}, g\rho\right) \right]. \quad (2.66)$$

В условиях отсутствия компенсационного питания

$$R_0(M, t) = \frac{1}{4\pi} \left[ -\text{Ei}\left(-\frac{r^2}{4at}\right) + \text{Ei}\left(-\frac{\rho^2}{4at}\right) \right]. \quad (2.67)$$

При  $t \rightarrow \infty$  значения гидравлического сопротивления стабилизируются:

$$R_0(M, \infty) = \frac{1}{2\pi} [K_0(gr) - K_0(g\rho)]; \quad (2.68)$$

при  $g=0$

$$R_0(M, \infty) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\rho}{r}. \quad (2.69)$$

Для условий отбора подземных вод линейным рядом скважин передаточная функция понижения имеет вид:

$$U_S(M, p) = \frac{1}{2B\beta} (e^{-\beta r} - e^{-\beta \rho}), \quad (2.70)$$

что соответствует выражению для гидравлического сопротивления вида

$$R_0(M, t) = \frac{1}{2Bg} \left[ D^*\left(\frac{r}{2\sqrt{at}}, gr\right) - D^*\left(\frac{\rho}{2\sqrt{at}}, g\rho\right) \right]. \quad (2.71)$$

В условиях отсутствия компенсационного питания

$$R_0(M, t) = \frac{\sqrt{at}}{B} \left( i \operatorname{erfc} \frac{r}{2\sqrt{at}} - i \operatorname{erfc} \frac{\rho}{2\sqrt{at}} \right). \quad (2.72)$$

При  $t \rightarrow \infty$  предельные значения гидравлических сопротивлений равны

$$R_0(M, \infty) = \frac{1}{2Bg} (e^{-gr} - e^{-g\rho}); \quad (2.73)$$



а в условиях отсутствия компенсационного питания —

$$R_0(M, \infty) = \frac{\rho - r}{B}. \quad (2.74)$$

При отборе подземных вод площадным водозабором полосообразной формы передаточная функция понижения для точки  $M$ , водозабора имеет вид:

$$U_S(M, p) = \frac{e^{-\beta d_1} - e^{-\beta d_2}}{2Bd\beta^2} \operatorname{sh} \beta x + \frac{\operatorname{ch} \beta (x - d_1) - 1}{2Bd\beta^2}, \quad (2.75)$$

где  $x$  — расстояние от точки  $M$  до границы питания. Выражение для сопротивления, соответствующее передаточной функции (2.75), довольно громоздко, поэтому для расчетов понижения в общем случае расположения полосы водозабора рекомендуется использовать численное обращение преобразования Лапласа.

Расчетные формулы для сопротивлений становятся проще в частном случае, когда  $d_1 = 0$ ,  $d_2 = 2d$ , тогда передаточная функция понижения для точки  $M$  внутри водозабора принимает вид

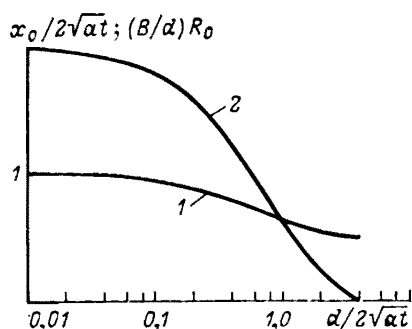
$$U_S(M, p) = \frac{1 - e^{-\beta x} - e^{-2\beta d} \operatorname{sh} \beta x}{2Bd\beta^2}. \quad (2.76)$$

Для определения эксплуатационных ресурсов подземных вод необходимо вычислять понижение уровня в наиболее глубокой точке депрессионной воронки; в отличие от условий отбора подземных вод скважинным или линейным водозабором положение этой точки при работе площадной системы скважин будет изменяться со временем: при малых значениях времени ее положение близко к середине полосы отбора, а затем точка максимального понижения перемещается в направлении от границы питания. При отсутствии компенсационного питания это перемещение происходит достаточно долго. Поскольку выражение для гидравлического сопротивления в условиях схемы 2.7 при  $d_1 = 0$ ,  $d_2 = 2d$  имеет вид

$$R_0(M, t) = \frac{at}{2Bd} \left\{ 1 - 4i^2 \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} - 2i^2 \operatorname{erfc} \frac{2d - x}{2\sqrt{at}} + \right. \\ \left. + 2i^2 \operatorname{erfc} \frac{2d + x}{2\sqrt{at}} \right\}. \quad (2.77)$$

Для определения временной зависимости положения точки наибольшей глубины депрессионной воронки следует продифференцировать выражение (2.77) по  $x$ , приравнять полученное выражение к нулю и, решив полученное, таким образом, уравнение относительно  $x$ , определить искомую зависимость. Результат этих действий — график зависимости величины  $x_0/2\sqrt{at}$  от параметра  $d/2\sqrt{at}$  (где  $x_0$  — абсцисса наиболее глубокой точки воронки) изображен на рис. 2.5. На этом же рисунке изображена зависи-

Рис. 2.5. Зависимости относительного значения абсциссы точки максимального понижения (кривая 1) и соответствующего значения гидравлического сопротивления (кривая 2) от времени в условиях отбора подземных вод площадным водозабором в виде полосы в схеме однородного пласта



мость величины гидравлического сопротивления  $B/dR_0(M_0, t)$  в этой точке от того же параметра.

*Пример расчета эксплуатационных ресурсов подземных вод с учетом перемещения точки наибольшего понижения в процессе водоотбора.*

Гидрогеологические условия определяются параметрами:  $T=10^3$  м<sup>2</sup>/сут,  $a=10^4$  м<sup>2</sup>/сут, полуширина полосы отбора  $d=5000$  м; следует определить величину эксплуатационных ресурсов подземных вод на срок  $t=10^4$  сут, если протяженность полосы отбора  $B=20\,000$  м, допустимое понижение составляет 50 м.

1. Вначале вычисляем значение  $d/\sqrt{at}=5000/\sqrt{10^4 \cdot 10^4}=0,50$ ; по (табл. 2.4) находим, что величина  $x_0/2d$  равна 0,763 откуда  $x_0=0,736 \cdot 10\,000=7360$  м; величина гидравлического сопротивления, соответствующая этой точке, равна  $(d/B) \times 1,0964 = (5000/20\,000) \times 81,096=0,274$ ; расход водоотбора, который может быть осуществлен в этих условиях,

$$Q = \frac{10^3 \cdot 50}{0,274} = 182\,415 \text{ м}^3/\text{сут} = 2,11 \text{ м}^3/\text{с}.$$

2. Если считать, что положение наиболее глубокой точки депрессионной воронки локализуется в точке  $M_1$  близ середины полосы отбора, т. е. при  $x=5000$  м, согласно формуле (2.77), получим

$$R_0(M_0, t) = \frac{10^4 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^4 \cdot 5000} \left\{ 1 - 4i^2 \operatorname{erfc} \frac{5000}{2 \sqrt{10^4 \cdot 10^4}} - \right. \\ \left. - 2i^2 \operatorname{erfc} \frac{2 \cdot 5000 - 5000}{2 \sqrt{10^4 \cdot 10^4}} + 2i^2 \operatorname{erfc} \frac{(2 \cdot 5000) + 5000}{2 \sqrt{10^4 \cdot 10^4}} \right\} = 0,2442,$$

что соответствует расходу  $Q$  водоотбора в размере 2,37 м<sup>3</sup>/с.

3. Если принять, что наибольшее понижение соответствует точке с абсциссой  $x=2d=10\,000$  м, по формуле (2.77) получаем, что величина сопротивления составит:  $R_0(M_2, t)=0,220$ , что соответствует расходу водоотбора в размере 2,63 м<sup>3</sup>/с.

Таким образом, приведенный пример показывает, что перенос положения точки наибольшего понижения к центру водозабора или к его периферии от точки  $x_0$  приводит к завышению величины эксплуатационных ресурсов подземных вод (в условиях примера соответственно на 12 и 25 %).

Оценка изменения поверхностного стока при эксплуатации подземных вод в условиях однородного пласта-полуплоскости. Передаточная функция редукции для условий отбора подземных вод

линейным рядом скважин параллельным реке или одиночным водозабором впервые получена М. Хантушем и имеет вид:

$$U_w(p) = e^{-d \sqrt{\frac{p}{a} + g^2}}, \quad (2.78)$$

где  $d$  — расстояние между водозабором и рекой;  $g$  — компенсационный эффект, а соответствующее ей выражение для функции редукции [10]:

$$w_0(t) = D\left(\frac{d}{2\sqrt{at}}, gd\right); \quad (2.79)$$

$$D(z, \alpha) = \frac{1}{2} \left[ e^{-\alpha} \operatorname{erfc}\left(z - \frac{\alpha}{z}\right) + e^{\alpha} \operatorname{erfc}\left(z + \frac{\alpha}{2z}\right) \right]. \quad (2.80)$$

Значения функции  $D(z, \alpha)$  приведены в табл. 2.4 (см. также приложение, программу 33).

При  $t \rightarrow \infty$  устанавливается предельное значение функции редукции  $\gamma$ , равное

$$\gamma = e^{-gd}. \quad (2.81)$$

Таким образом, в условиях компенсационного питания величина редукции в принципе не может сравниться с величиной водоотбора.

Характер зависимости предельной относительной редукции от значения  $g$  довольно резкий, и даже при относительно небольшой погрешности в оценке значения  $g$  соответствующее изменение коэффициента  $\gamma$  может оказаться заметным. Таким образом, для надежной оценки редукции поверхностного стока важно иметь и достаточно обоснованное значение  $g$ , причем, очевидно, в определении  $g$  предпочтительна оценка с погрешностью в сторону занижения.

При отсутствии компенсационного питания, т. е. при  $g=0$ , формула (2.97) упрощается [28]:

$$w_0(t) = \operatorname{erfc} \frac{d}{2\sqrt{at}}. \quad (2.82)$$

Функция интегральной относительной редукции в рассматриваемых условиях определена М. Хантушем и выражается формулой

$$v(t) = \Lambda\left(\frac{d}{2\sqrt{at}}, gd\right); \quad (2.83)$$

$$\Lambda(z, \alpha) = D(z, \alpha) - \frac{2z^2}{\alpha} D^*(z, \alpha). \quad (2.84)$$

Функция  $D(z, \alpha)$  определена выражением (2.80), а функция  $D^*(z, \alpha)$  — выражением (2.11). Вычисление значений функции  $\Lambda(z, \alpha)$  на микрокалькуляторе можно выполнять по программе 3

(см. приложение). При отсутствии компенсационного питания формула (2.83) переходит в известную формулу:

$$v(t) = 4i^2 \operatorname{erfc} \frac{d}{2\sqrt{at}}. \quad (2.85)$$

**Полосообразный водозабор.** При отборе подземных вод площадным водозабором полосообразной формы в условиях пласта-полуплоскости передаточная функция редукции может быть определена, исходя из выражения (2.78), если проинтегрировать его по переменной  $d$  в пределах от  $d_1$  до  $d_2$  и затем разделить на  $(d_2 - d_1)$ .

$$U_w(p) = \frac{e^{-\beta d_1} - e^{-\beta d_2}}{\beta (d_2 - d_1)}. \quad (2.86)$$

Передаточной функции (2.86) соответствует функция редукции следующего вида:

$$w_0(t) = \frac{1}{\chi_2 - \chi_1} \left[ D^* \left( \frac{d_1}{2\sqrt{at}}, \chi_1 \right) - D^* \left( \frac{d_2}{2\sqrt{at}}, \chi_2 \right) \right], \quad (2.87)$$

где положено  $\chi_j = g d_j$ ,  $j=1,2$ . Предельное значение этой функции

$$\gamma = \frac{e^{-\chi_1} - e^{-\chi_2}}{\chi_2 - \chi_1}. \quad (2.88)$$

В условиях отсутствия компенсационного питания формула (2.87) упрощается

$$w_0(t) = \frac{2\sqrt{at}}{d_2 - d_1} \left( \operatorname{ierfc} \frac{d_1}{2\sqrt{at}} - \operatorname{ierfc} \frac{d_2}{2\sqrt{at}} \right). \quad (2.89)$$

Функция интегральной редукции определится выражением

$$v(t) = \frac{8\sqrt{at}}{d_2 - d_1} \left( i^3 \operatorname{erfc} \frac{d_1}{2\sqrt{at}} - i^3 \operatorname{erfc} \frac{d_2}{2\sqrt{at}} \right). \quad (2.90)$$

Для условий компенсационного питания функция интегральной редукции имеет более сложное выражение:

$$v(t) = \frac{1}{\chi_2 - \chi_1} \left[ \Lambda^* \left( \frac{d_1}{2\sqrt{at}}, \chi_1 \right) - \Lambda^* \left( \frac{d_2}{2\sqrt{at}}, \chi_2 \right) \right], \quad (2.91)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda^*(z, \alpha) = & \left( 1 - \frac{2z^2}{\alpha^2} \right) D^*(z, \alpha) - \frac{2z^2}{\alpha} D(z, \alpha) + \\ & + \frac{2z}{\alpha} \exp(-z^2 - \alpha^2/4z^2). \end{aligned} \quad (2.92)$$

Расчет значений функции  $\Lambda^*(z, \alpha)$  на микрокалькуляторе выполняется по программе 4 (см. приложение).

Если полоса водозабора начинается непосредственно у уреза реки, т. е. при  $x_1=0$ ,  $x_2=d$ , формулы (2.87), (2.89) — (2.92)

приводят к неопределенности. В результате предельного перехода получаем, что при таком расположении водозабора функция редукции в условиях компенсационного питания имеет вид

$$w_0(t) = \frac{1}{\chi} \left[ \operatorname{erf} g \sqrt{at} - D^* \left( \frac{d}{2\sqrt{at}}, \chi \right) \right],$$

$$\chi = dg; \quad (2.93)$$

а в условиях его отсутствия —

$$w_0(t) = \frac{2\sqrt{at}}{d} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} - i \operatorname{erfc} \frac{d}{2\sqrt{at}} \right). \quad (2.94)$$

Функция интегральной редукции в условиях компенсационного питания

$$v(t) = \frac{1}{\chi} \left[ \operatorname{erf} g \sqrt{at} - \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} g \sqrt{at} - g \sqrt{at} e^{-ag^2t}}{ag^2t} - \Lambda^* \left( \frac{d}{2\sqrt{at}}, \chi \right) \right]; \quad (2.95)$$

а в условиях отсутствия компенсационного питания

$$v(t) = \frac{8\sqrt{at}}{d} \left( \frac{1}{6\sqrt{\pi}} - i^3 \operatorname{erfc} \frac{d}{2\sqrt{at}} \right). \quad (2.96)$$

*Пример 1.* Предполагается эксплуатация подземных вод в долине реки значительной ширины; фильтрационные параметры аллювиального водоносного горизонта следующие:  $T=1000$  м<sup>2</sup>/сут,  $a=10\,000$  м<sup>2</sup>/сут, компенсационное питание отсутствует. Требуется определить редукцию поверхностного стока (расхода и объема поступления воды в расположенное в нижнем створе водохранилище), если предполагаемый расход водоотбора составляет  $Q=5$  м<sup>3</sup>/с, а размещение водозабора в долине реки предполагается в одном из следующих трех вариантов: а) в виде протяженного линейного ряда скважин на расстоянии  $d=4000$  м от реки; б) в виде полосообразного площадного водозабора, координаты абсцисс которого  $x_1=3000$  м и  $x_2=5000$  м; в) в виде полосообразного площадного водозабора, один край которого примыкает к реке, а другой удален от нее на расстояние  $d=5000$  м. Оценки требуется провести для расчетных сроков 5, 10 и 15 лет.

**Решение 1.** Сначала оценим требующиеся характеристики редукции для варианта линейного водозабора. Выбрав значение  $t=5$  лет=1825 сут, по формуле (2.82) определим:

$$w_0(t) = \operatorname{erfc} \frac{4000}{2\sqrt{10\,000 \cdot 1825}} = \operatorname{erfc} 0,4682 = 0,508.$$

Умножив это значение на величину водоотбора, найдем, что расход реки уменьшится к указанному сроку на  $5 \cdot 0,508 = 2,54$  м<sup>3</sup>/с.

По формуле (2.85) находим значение интегральной относительной редукции:  $v(t) = 4i^3 \operatorname{erfc} 0,4682 = 4 \cdot 0,0766 = 0,3063$ . Для того, чтобы определить уменьшение объема стока в водохранилище в результате отбора подземных вод, умножаем полученное значение  $v(t)$  на расход (в м<sup>3</sup>/сут) водоотбора и на выраженное в сутках время; в результате получим:  $V = 0,3063 \cdot 432\,000 \cdot 1825 = 2,41 \cdot 10^8$  м<sup>3</sup> = 0,25 км<sup>3</sup>.

Аналогично поступаем при определении характеристик редукции для двух других значений времени; при этом получаются следующие результаты: через 10 лет эксплуатации расход реки уменьшится на 3,2 м³/с, водохранилище недополучит в результате отбора подземных вод 0,7 км³ воды; через 15 лет расход реки сократится на 3,51 м³/с, сток в водохранилище — на 1,23 км³.

Рассмотрим вариант размещения водозабора в виде полосы. Расчет для времени  $t=5$  лет=1825 сут ведем по формуле (2.89):

$$w_0(t) = \frac{2\sqrt{10\,000 \cdot 1825}}{5000 - 3000} \left( i \operatorname{erfc} \frac{3000}{2\sqrt{10\,000 \cdot 1825}} - \right. \\ \left. - i \operatorname{erfc} \frac{5000}{2\sqrt{10\,000 \cdot 1825}} \right) = 4,272 (i \operatorname{erfc} 0,3511 - i \operatorname{erfc} 0,5852) = \\ = 4,272 (0,2812 - 0,1619) = 0,5097.$$

Умножив на величину расхода водоотбора, получим, что расход реки уменьшится к концу 5-го года на  $5 \cdot 0,5097 = 2,55$  м³/с, т. е. практически на ту же величину, что и при отборе подземных вод линейным рядом.

Величину интегральной относительной редукции рассчитываем по формуле (2.90):

$$v(t) = \frac{8\sqrt{10\,000 \cdot 1825}}{5000 - 3000} \left( i^3 \operatorname{erfc} \frac{3000}{2\sqrt{10\,000 \cdot 1825}} - \right. \\ \left. - i^3 \operatorname{erfc} \frac{5000}{2\sqrt{10\,000 \cdot 1825}} \right) = 17,088 (i^3 \operatorname{erfc} 0,3511 - i^3 \operatorname{erfc} 0,5852) = \\ = 17,088 (0,0345 - 0,0163) = 0,3108.$$

Это соответствует величине объема стока, недополученного водохранилищем, в размере 0,245 км³. Аналогично рассчитанные характеристики редукции для двух других значений времени составляют: при  $t=10$  лет  $w=3,20$  м³/с;  $V=0,71$  км³; при  $t=15$  лет  $w=3,51$  м³/с;  $V=1,24$  км³. Все расчетные оценки практически совпадают с полученными ранее для случая линейного водозабора.

3. Рассмотрим третий вариант размещения водозабора. Пользуясь формулой (2.93), рассчитаем значения функции относительной редукции на три срока. Например, для  $t=5$  лет=1825 сут имеем:

$$w_0(t) = \frac{2\sqrt{10\,000 \cdot 1825}}{5000} \left( 0,5642 - i \operatorname{erfc} \frac{5000}{2\sqrt{10\,000 \cdot 1825}} \right) = \\ = 1,7088 (0,5642 - i \operatorname{erfc} 0,5852) = 1,7088 (0,5642 - 0,1619) = 0,6875.$$

Умножив эту величину на 5 м³/с, находим, что к концу 5-го года расход реки сократится на 3,43 м³/с. Аналогично определяем, что к концу 10-го года величина редукции расхода реки составит 3,87 м³/с, к концу 15-го — 4,07 м³/с.

Для вычисления значения функции относительной интегральной редукции на конец 5-го года воспользуемся формулой (2.96):

$$v(t) = \frac{8\sqrt{10\,000 \cdot 1825}}{5000} \left( 0,0940 - i^3 \operatorname{erfc} \frac{5000}{2\sqrt{10\,000 \cdot 1825}} \right) = \\ = 6,835 (0,0940 - i^3 \operatorname{erfc} 0,5852) = 6,835 (0,0940 - 0,0163) = 0,5313.$$

Умножив на выраженное в сутках время и на расход водоотбора, получим редукцию объема стока, равную 0,42 км³. Аналогично для  $t=10$  лет  $V=1,00$  км³; для  $t=15$  лет  $V=1,63$  км³.

**Пример 2.** Отбор подземных вод полуограниченного в плане пласта ведется полосообразной площадной системой скважин, ближайший к реке край которой удален от нее на расстояние  $x_1=1600$  м, а наиболее далекий — на расстояние

$x_2 = 4000$  м. Требуется определить редукцию расхода реки и объем ее стока, если коэффициент уводнепроводности составляет  $a = 2500$  м<sup>2</sup>/сут, компенсационный эффект  $g = 0,5 \cdot 10^{-3}$  м<sup>-1</sup>; следует оценить редукцию для  $t = 10\,000$  сут; расход водоотбора составляет  $6$  м<sup>3</sup>/с =  $518\,400$  м<sup>3</sup>/сут.

Решение. 1. Сначала определим относительную редукцию расхода, пользуясь формулой (2.87). Определим

$$\frac{x_1}{2\sqrt{at}} = \frac{1600}{2\sqrt{2500 \cdot 10\,000}} = 0,16; \quad \frac{x_2}{2\sqrt{at}} = \frac{4000}{2\sqrt{2500 \cdot 10\,000}} = 0,4;$$

$\chi_1 = 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 1600 = 0,8; \quad \chi_2 = 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 4000 = 2,0,$  найдем, что

$$w_0(t) = \frac{1}{2,0 - 0,8} [D^*(0,166; 0,8) - D^*(0,4; 2,0)] = \\ = (1/1,2) \cdot (0,4489 - 0,1350) = 0,262.$$

Умножив полученное значение на расход водоотбора, найдем редукцию расхода реки:  $w = 0,262 \cdot 6,00 = 1,57$  м<sup>3</sup>/с.

2. Оценим значение функции интегральной относительной редукции, используя формулу (2.91). Для этого вычислим значения входящих в нее функций  $\Lambda^*$  от найденных выше аргументов:

$$\Lambda^*(0,16; 0,8) = (1 - 2 \cdot 0,16^2/0,8^2) D^*(0,16; 0,8) - 2 \cdot 0,16^2/0,8 D^*(0,16; 0,8) + \\ + 2 \cdot 0,16/0,8 \exp[-(0,16^2 + 0,8^2/4 \cdot 0,16^2)] = 0,3850;$$

аналогично определим  $\Lambda^*(0,4; 2,0) = 0,1032$ ; по формуле (2.92) находим, что  $v(t) = (1/1,2) \cdot (0,3850 - 0,1032) = 0,2348$ . Умножив на расход (в м<sup>3</sup>/сут) водоотбора и на число суток, в течение которых происходит водоотбор, найдем, что сокращение объема стока в нижний створ в результате эксплуатации подземных вод составляет  $0,2348 \cdot 518\,400 \cdot 10\,000 = 1,22$  км<sup>3</sup>.

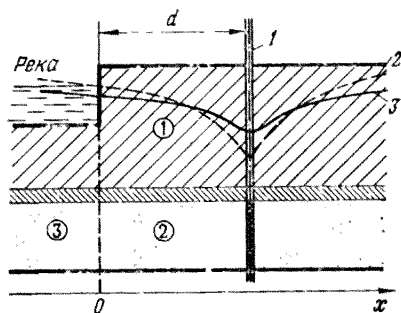
## 2.4. ОЦЕНКА ИЗМЕНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНОГО СТОКА ПРИ ЭКСПЛУАТАЦИИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД В УСЛОВИЯХ ДВУХСЛОЙНОГО ПЛАСТА

Наиболее подробно изучены гидрогеологические схемы, соответствующие условиям вертикальной однородности водовмещающих горизонтов и их совершенной гидравлической связи с руслами наземных водотоков. Вместе с тем, схематизация такого рода справедлива, как правило, лишь при расчетах изменения поверхностного стока крупных рек, характеризующихся глубоким врезом русла и развитием мощной толщи аллювия. Наибольшую опасность при эксплуатации подземных вод представляет собой, однако, сокращение стока средних и малых рек, русла которых проходят в покровных отложениях, во много раз менее проницаемых, чем основные эксплуатируемые горизонты. Вопросам охраны малых рек приходится в настоящее время большое значение, в связи с чем рассматриваемые гидрогеологические задачи приобретают актуальность в практическом отношении.

В настоящей работе рассматривается схема двухслойного водоносного пласта (рис. 2.6). Водозаборные скважины, образующие параллельный реке линейный ряд, вскрывают нижний водоносный горизонт. Русло реки врезано в верхний слой, причем степень несовершенства гидравлической связи характеризуется обобщенным параметром  $\Delta L$  [15]. Система дифференциальных

Рис. 2.6. Схема двухслойного (со слабопроницаемым прослоем) водоносного комплекса с несовершенной рекой:

1 — водозабор; 2 — уровень грунтовых вод в верхнем слое; 3 — уровень (напор) подземных вод в нижнем слое. Цифры в кружках — номера областей, на которые разбивается область фильтрации



уравнений, описывающих плоскопараллельный поток подземных вод к водозабору, имеет вид [29]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{a_1} \frac{\partial S_1}{\partial t} &= \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} - \frac{b_L}{T_1} S_1 + \frac{b_L}{T_1} S_2; \\ \frac{1}{a_2} \frac{\partial S_2}{\partial t} &= \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} + \frac{b_L}{T_2} S_1 - \frac{b_L}{T_2} S_2 + \frac{q}{T_2} \delta(x-d); \\ \frac{1}{a_2} \frac{\partial S_3}{\partial t} &= \frac{\partial^2 S_3}{\partial x^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.97)$$

где  $S_j(x, t)$  — понижение уровня (напора) в  $j$ -й области схемы (в соответствии с индексацией, приведенной на рис. 2.9);  $a_j$  — коэффициенты уровнепроводности;  $T_j$  — коэффициенты водопроницаемости областей;  $b_L$  — коэффициент перетекания, характеризующий интенсивность водообмена между слоями (его размерность обратна размерности времени);  $q$  — величина отбора подземных вод на единицу протяженности водозабора;  $\delta$  — дельта-функция Дирака.

Граничное условие 3-го рода на урезе реки

$$\left. \frac{\partial S_1}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{1}{\Delta L} S_1(0, t); \quad (2.98)$$

при  $x \rightarrow \pm \infty$  решения уравнений (2.97) должны удовлетворять условиям ограниченности:

$$S_1(\infty, t) = S_2(\infty, t) = S_3(-\infty, t) = 0. \quad (2.99)$$

На границе областей 2 и 3 необходимо выполнение условий постоянства напора и расхода:

$$S_3(0, t) = S_2(0, t); \quad S'_{3x}(0, t) = S'_{2x}(0, t). \quad (2.100)$$

Решение поставленной краевой задачи при очевидных нулевых начальных условиях проводится с помощью преобразования Лапласа по временной переменной. Полагая, что  $\hat{S}_j(x, p)$  есть изображение функции понижения  $S_j(x, t)$ , получим решение



третьего из уравнений системы (2.97), удовлетворяющее условие ограниченности при  $x \rightarrow -\infty$ , в виде

$$\hat{S}_3(x, p) = A_3 e^{x \sqrt{p/a_3}}, \quad (2.101)$$

где  $A_3$  — константа интегрирования. Решение двух первых уравнений системы выполняется с привлечением собственных чисел и векторов матрицы

$$G^2(p) = \begin{pmatrix} \frac{b_L}{T_1} + \frac{p}{a_1} & -\frac{b_L}{T_1} \\ -\frac{b_L}{T_2} & \frac{b_L}{T_2} + \frac{p}{a_2} \end{pmatrix}. \quad (2.102)$$

Если  $\lambda_j^2$  — собственные числа матрицы  $G^2(p)$  ( $j=1,2$ ), а  $V_1 = (1, n_1)'$  и  $V_2 = (1, n_2)'$  — соответствующие им собственные векторы, решение двух первых уравнений системы (2.97) представляется в виде:

$$\hat{S}_1(x, p) = \varphi_1(x, p) + \varphi_2(x, p);$$

$$\hat{S}_2(x, p) = n_1 \varphi_1(x, p) + n_2 \varphi_2(x, p);$$

$$\varphi_j(x, p) = A_j \operatorname{ch} \lambda_j x + B_j \operatorname{sh} \lambda_j x \pm \frac{\hat{q}(p)}{T_2 \lambda_j (n_2 - n_1)} \times \\ \times \operatorname{sh} \lambda_j (x - d) \theta(x - d) \quad (2.103)$$

(знак «плюс» соответствует  $j=1$ , знак «минус» —  $j=2$ );  $A_j, B_j$  — константы интегрирования;  $\hat{q}(p)$  — изображение по Лапласу временной зависимости  $q(t)$ ;  $\theta(z)$  — единичная функция.

Константы  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2$  определяются исходя из граничных условий (2.98) — (2.100), преобразованных по Лапласу. Величина сокращения расхода реки под влиянием эксплуатационного отбора подземных вод на единицу протяженности ее русла определяется выражением:

$$W(t) = T_1 \left. \frac{\partial S_1}{\partial x} \right|_{x=0}. \quad (2.104)$$

Согласно принципу суперпозиции, изображение по Лапласу  $\hat{W}(p)$  временной зависимости изменения расхода реки  $W(t)$  определится выражением

$$\hat{W}(p) = U_W(p) \hat{Q}(p), \quad (2.105)$$

где  $\hat{Q}(p)$  — изображение временной зависимости водоотбора;

$$U_W(p) = T_1 S'_{1x}(0, p) - \quad (2.106)$$

передаточная функция изменения поверхностного стока. Выражение для  $U_W(p)$  в рассматриваемых условиях может быть полу-

чено на основании равенства (2.103), (2.104) после определения из граничных условий констант интегрирования  $A_j$ ,  $B_j$ :

$$U_W(p) = v \frac{\left(\lambda_1 + \sqrt{\frac{p}{a_2}}\right) e^{-\lambda_2 d} - \left(\lambda_2 + \sqrt{\frac{p}{-a_2}}\right) e^{-\lambda_1 d}}{n_2 \left(\lambda_2 + \sqrt{\frac{p}{a_2}}\right) (1 + \lambda_1 \Delta L) - n_1 \left(\lambda_1 + \sqrt{\frac{p}{a_2}}\right) (1 + \lambda_2 \Delta L)}, \quad (2.107)$$

где  $v = T_1/T_2$ .

Собственные числа  $\lambda_j^2$  матрицы  $G^2(p)$  определяются с помощью уравнения

$$\lambda^4 - \left(\frac{p}{a_*} + \frac{b_L}{T_*}\right) \lambda^2 + \frac{p}{a_1 a_2} \left(p + \frac{b_L}{\mu_*}\right) = 0, \quad (2.108)$$

где  $a_*$ ,  $T_*$ ,  $\mu_*$  — среднегармонические значения параметров:

$$a_* = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}; \quad T_* = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}; \quad \mu_* = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}; \quad (2.109)$$

значения компонент собственных векторов

$$n_j = 1 + \frac{T_1}{b_L} \left(\frac{p}{a_1} - \lambda_j^2\right), \quad j = 1, 2. \quad (2.110)$$

Выражения (2.109) и (2.110) могут быть использованы для определения временной зависимости сокращения расхода реки  $W(t)$  с использованием приближенных способов обращения преобразования Лапласа; в случае  $Q(t) = Q_0 = \text{const}$  зависимость  $W(t)$  выразится в виде:

$$W(t) = Q_0 w_0(t), \quad (2.111)$$

где функция редукции представляет собой оригинал Лапласа — Карсона от изображения (2.107), получаемая с помощью численного обратного преобразования Лапласа, например, по методу Гохберга.

В широком классе типичных гидрогеологических условий выражение для передаточной функции (2.107) может быть существенно упрощено. Анализ этих условий наиболее просто и наглядно проводится на основе выражения (2.107). При больших значениях времени эксплуатации  $t$ , которым соответствуют малые значения параметра  $p$ , собственные элементы матрицы  $G^2(p)$  могут быть приближенно представлены в виде:

$$\lambda_1 \approx \sqrt{b_L/T_*}; \quad \lambda_2 \approx \sqrt{p/a}; \quad n_1 \approx -v; \quad n_2 \approx 1, \quad (2.112)$$

где  $a$  — «эквивалентное» значение коэффициента уровняпродности двухслойной системы равное  $(T_1 + T_2)/(\mu_1 + \mu_2)$ . Указанные приближения справедливы, если время эксплуатации превышает  $(20 \div 40) \mu_1/b_L$ , если эксплуатируются подземные воды слабонапорного водоносного горизонта конуса выноса или предгорного шлейфа; в случае эксплуатации артезианского водоносного

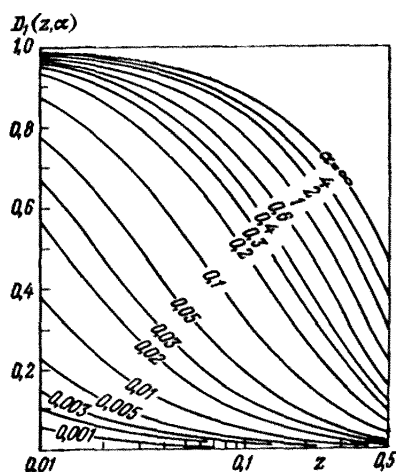


Рис. 2.7. Графики функции  $D_1(z, \alpha)$

может приближенно считаться постоянным и равным своему значению при  $p=0$ . С учетом всех сделанных замечаний о порядках величин выражение приводится к виду

$$U_w(p) = \frac{e^{-d\sqrt{p/a}}}{1 + \alpha^{-1}d\sqrt{\frac{p}{a}}}; \quad (2.113)$$

$$\alpha = \frac{v}{1 + \sqrt{a/a_2}} \frac{d}{B_* + \Delta L}; \quad (2.114)$$

параметр  $B_*$  равный  $(T_*/b_L)^{1/2}$  имеет физический смысл фактора перетекания [39], приведенного к среднегармонической величине коэффициента водопроводимости  $T_*$ . Выражение (2.113) представляет собой табличное изображение Лапласа—Карсона; соответствующий оригинал — функция редукции

$$w_0(t) = D_1\left(\frac{d}{2\sqrt{at}}; \alpha\right); \quad (2.115)$$

$$D_1(z; \alpha) = \operatorname{erfc} z - e^{\alpha + \alpha^2/4z^2} \operatorname{erfc}\left(z + \frac{\alpha}{2z}\right). \quad (2.116)$$

Графики функции  $D_1(z, \alpha)$  приведены на рис. 2.7. Выражение для временных зависимостей сокращения поверхностного стока при отборе подземных вод, сходные по виду с формулами (2.115) и (2.116), были получены М. С. Хантушем и Е. Л. Минкиным в задачах по оценке редукции поверхностного стока под влиянием отбора подземных вод однородных в разрезе пластов с учетом несовершенства их гидравлической связи с рекой. Формулы (2.115), (2.116) представляют собой обобщение полученных этими авторами результатов на случай двуслойного строения водонос-

горизонта эта оценка времени уменьшается вдвое. В характерных гидрогеологических условиях эта оценка измеряется одним-пятью годами, что обычно значительно меньше расчетного срока эксплуатации водозабора. Величина  $(p/a)^{1/2}$  в выражении (2.117) оказывается при этом значительно меньше величины  $\lambda_1$  и сравнимой с величиной  $\lambda_2$ . Кроме того, произведение часто оказывается значительно превышающим единицу, в силу чего второй член числителя выражения (2.117) пренебрежимо мал в сравнении с первым. В знаменателе первый член убывает при  $p \rightarrow 0$  пропорционально  $p^{1/2}$ ; второй член мо-

ного горизонта и могут быть использованы для расчетов сокращения поверхностного стока при эксплуатации подземных вод в различных гидрогеологических условиях, допускающих принятую схематизацию. Наиболее характерны среди них условия месторождений слабонапорных подземных вод конусов выноса и предгорных областей, характеризующиеся наличием слабопроницаемого слоя покровных отложений, а также условия артезианских бассейнов платформенного типа, напорные воды которых разгружаются в поверхностную гидрографическую сеть через слой четвертичных покровных отложений.

В условиях конусов выноса и предгорных шлейфов величина коэффициента водопроницаемости мелкоземистых покровных отложений значительно меньше величины коэффициента водопроницаемости эксплуатируемого пласта, в то время как величина коэффициента водоотдачи мелкоземов, как правило, существенно превышает величину коэффициента упругой водоотдачи нижнего пласта. В связи с этим величины  $T_*$  и  $a_*$  практически совпадают со значениями  $T_1$  и  $a_1$  верхнего слоя. Параметр  $\nu$  характеризуется порядком  $0,001 \div 0,01$ , а величина эквивалентного коэффициента уровня непроницаемости, согласно выражению (2.111), определяется значением коэффициента водопроницаемости нижнего слоя  $T_2$  и коэффициента водоотдачи покровных отложений  $\mu_1$ , как предлагалось В. М. Шестаковым [29]. Поскольку  $\mu_1 \gg \mu_2$ , значение  $a/a_2$  при этом значительно меньше единицы. Величина  $B_*$  в этих условиях значительно меньше величины  $\Delta L$ , и значение параметра  $\alpha$  определяется величиной  $\nu d / \Delta L$ . Для того, чтобы величина второго члена выражения (2.116) была несущественна, необходимо, чтобы выполнялось условие  $\alpha > 4 \div 6$ , т. е.

$$d > (4 \div 6) \Delta L / \nu.$$

Поскольку величина  $\Delta L$  в случаях двухслойных систем может достигать сотен метров, а величина  $\nu$  имеет порядок тысячной или сотой доли, записанное условие означает, что порядок величины  $d$  должен составлять 10 км. Однако при этом влияние отбора подземных вод на сток реки к концу расчетного срока эксплуатации (25--50 лет) будет проявляться в незначительной степени, отчего наиболее частыми в рассматриваемых условиях следует считать случаи, когда величина  $\alpha$  имеет порядок 0,1 и менее. При этом величина функции редукции чувствительна к изменению параметра  $\alpha$  (см. рис. 2.7), что свидетельствует о необходимости использования возможно более достоверных геофильтрационных параметров для надежной оценки величины редукции поверхностного стока. Кроме того, из этого следует, что метод виртуального смещения уреза реки на расстояние  $\Delta L$ , часто используемый в практике гидрогеологических расчетов, в рассматриваемых условиях может привести к значительному искажению результатов.

В условиях артезианских бассейнов платформенного типа величины коэффициентов водопроницаемости верхнего и нижнего слоев могут быть одного порядка, однако величина коэффициента

пьезопроводности нижнего горизонта  $a_2$ , вследствие упругой водоотдачи значительно превосходит величину коэффициента уровнепроводности верхнего слоя. Величина  $\nu$  оказывается порядка единицы; если принять  $T_1 = T_2$ , то эквивалентное значение коэффициента уровнепроводности  $a$ , по формуле (2.112), составит  $2T_1/\mu_2$ , а значение  $T_*$ , согласно формуле (2.109) — половину величины  $T_1$ . В этих условиях относительная величина второго члена в выражении (2.116) определяется величиной  $d/(B_* + \Delta L)$ . С учетом известной формулы

$$\Delta L = (T_2/b_L)^{1/2}$$

получаем, что в условиях двухслойной системы [29]:

$$\alpha \approx \frac{d}{\Delta L} \left/ \left( 1 + \sqrt{2} \right) \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right. \approx 0,24 \frac{d}{\Delta L}.$$

Поскольку графики функции  $D_1(z, \alpha)$  начиная с  $d > 4 \div 6$ , практически совпадают с графиком для  $\alpha = \infty$  (соответствующим условиям однослойного пласта и совершенства гидравлической связи с рекой), можно оценить условие пренебрежимой малости второго члена функции редукции:

$$d > (15 \div 25) \Delta L.$$

Если оно выполнено, значения функции редукции могут быть определены по формуле (2.82), где коэффициент уровнепроводности  $a$  определяется формулой (2.109).

*Пример расчета.* Предполагается вести эксплуатацию подземных вод слабо-напорного водоносного горизонта в аллювиально-пролювиальных отложениях предгорного шлейфа, имеющего следующие фильтрационные параметры:  $T_2 = 1000 \text{ м}^2/\text{сут}$ ,  $\mu_2 = 10^{-3}$ ,  $a_2 = 10^6 \text{ м}^2/\text{сут}$ . В залегающих выше кровли этого горизонта покровных суглинках проходит русло реки. Фильтрационные свойства покровного горизонта характеризуют параметры: коэффициент фильтрации  $k_1 = 0,1 \text{ м/сут}$ ; средняя мощность  $m_1 = 20 \text{ м}$ ; коэффициент водоотдачи  $\mu_1 = 0,05$ , коэффициент уровнепроводности  $a_1 = 40 \text{ м}^2/\text{сут}$ . Коэффициент перетекания составляет  $b_L = 5 \cdot 10^{-3} \text{ сут}^{-1}$ . Несовершенство гидравлической связи характеризуется параметром  $\Delta L = 500 \text{ м}$ . Требуется определить временные зависимости относительной редукции расходов реки при различных значениях расстояния от уреза до параллельного ему линейного ряда скважин  $d$ , а также сравнить результаты, получающиеся при использовании численного обращения преобразования Лапласа и приближенной формулы (2.115).

Решение 1. По формулам определяем среднегармонические значения фильтрационных параметров, а именно,  $a_* \approx 40 \text{ м}^2/\text{сут}$ ,  $T_* \approx 2 \text{ м}^2/\text{сут}$ ,  $\mu_* = 9,8 \cdot 10^{-4}$ . Отношение коэффициентов водопроницаемости слоев  $\nu$  составляет 0,002.

Для численного обращения преобразования Лапласа по методу Гохберга расчетный срок эксплуатации водозабора  $t$  разбивается на 16 временных интервалов продолжительностью  $\Delta t = t/16$  каждый, а затем вычисляются значения передаточной функции при значениях параметра  $p = p_k = (1/\Delta t)/2^{k-1}$ , где  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ . Задаваясь 50-летним расчетным сроком, определяем, что  $\Delta t = 3,125 \text{ года} = 1140,625 \text{ сут}$ ; при этом первое значение  $p$  составляет  $p_1 = 8,767 \cdot 10^{-4} \text{ (сут}^{-1}\text{)}$ . Подставив его в уравнение (2.108) и решив последнее, находим собственные числа  $\lambda_1 = 5,0268 \cdot 10^{-2} \text{ (м}^{-1}\text{)}$  и  $\lambda_2 = 2,1048 \cdot 10^{-4} \text{ (м}^{-1}\text{)}$ ; используя эти величины, находим затем по формуле (2.110) значения коэффициентов  $n_j$ :  $n_1 = -1,9826 \cdot 10^{-8}$ ;  $n_2 = 1,0087$ . Поступая аналогично при других значениях  $p$ , определяем соответствующие значения собственных элементов матрицы (табл. 2.5).

Таблица 2.5

Значения собственных элементов матрицы  $G^2(p)$ 

$p, 10^{-3} \text{ сут}^{-1}$	$\lambda_1 \cdot 10^2 \text{ м}^{-1}$	$\lambda_2 \cdot 10^4 \text{ м}^{-1}$	$n_1 \cdot 10^3$	$n_2$
8,767	5,0268	2,1048	-1,9826	1,0087
4,384	5,0159	1,4933	-1,9912	1,0043
2,192	5,0105	1,0583	-1,9955	1,0022
1,096	5,0077	0,7483	-1,9978	1,0011
0,548	5,0063	0,5385	-1,9988	1,0005

2. Зададимся каким-либо значением  $d$ , например, 2000 м. Используя значения  $\lambda_j$  и  $n_j$  из табл. 2.3 по формуле (2.107) определяем, что при  $p=p_1=8,767 \times 10^{-4} \text{ сут}^{-1}$  значение  $U_w(p_1)$  составляет 0,01025. Аналогично,  $U_w(p_2)=0,01630$ ;  $U_w(p_3)=0,02492$ ;  $U_w(p_4)=0,03706$ ;  $U_w(p_5)=0,05295$ . Результаты аналогичных расчетов при других значениях  $d$  приведены в табл. 2.6. Для определения значений функции редукции  $w_0(t)$  по методу Гохберга величины  $U_w(p_k)$  умножают на соответствующие весовые коэффициенты (см. табл. 1.3) и складывают.

На рис. 2.8 приведена серия графиков зависимостей  $w_0(t)$ , рассчитанных как по формулам (2.115), (2.116), так и по методу Гохберга, причем значение  $\alpha$  определяли по формуле (2.114). Графики свидетельствуют о хорошем совпадении результатов, полученных двумя методами.

Графики на рис. 2.8 демонстрируют еще и малую чувствительность результатов расчета по отношению к изменению расстояния между рекой и водозабором. Физически это объясняется тем, что при столь резкой разнице в коэффициентах пьезопроводности (уровнепроводности) пластов, как это имеет место в условиях примера, возмущение, вызываемое водоотбором, весьма долго распространяется только по нижнему горизонту, не затрагивая покровного слоя. Активное вовлечение грунтовых вод верхнего слоя, а вместе с ними — и речных вод, начнется гораздо позже — через время, измеряемое столетиями. Поэтому и степень влияния

Таблица 2.6

Значения передаточной функции  $U_w(p)$  при различных  $d$  в условиях примера

$p, 10^3 \text{ сут}$	$d, \text{ м}$			
	0	1000	2000	4000
8,767	0,0155	0,0127	0,0103	0,0067
4,384	0,0219	0,0189	0,0163	0,0121
2,192	0,0307	0,0277	0,0249	0,0202
1,096	0,0430	0,0399	0,0371	0,0319
0,548	0,0589	0,0559	0,0530	0,0475

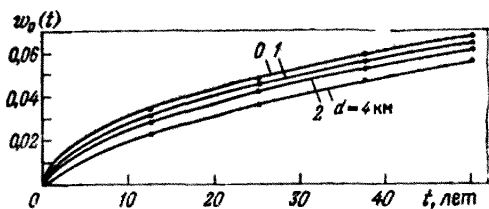


Рис. 2.8. Графики функций  $w_0(t)$  в условиях примера при разных значениях расстояния  $d$  между рекой и водозабором

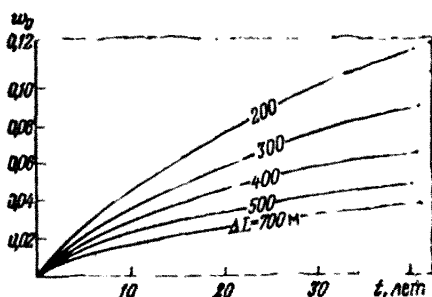


Рис. 2.9. Графики зависимостей  $w_0(t)$  (в условиях примера) при разных значениях параметра несовершенства гидравлической связи  $\Delta L$ . Расстояние между рекой и водозабором равно 2 км.

водоотбора на поверхностный сток лишь в незначительной мере определяется расстоянием от реки до водозабора.

Гораздо большее значение для проявлений этого влияния имеют факторы, связанные с характеристиками перетекания и несовершенства гидравлической связи, масштаб совместного эффекта которых определяется в выражениях (2.115) — (2.116) суммой  $B_* + \Delta L$ . Поскольку в условиях примера величина параметра  $\Delta L$  значительно превышает величину  $B_*$ , составляющую только 20 м, именно величина параметра несовершенства влияет в наибольшей степени на значения функции редукции  $w_0(t)$ . Это влияние иллюстрируется серией графиков на рис. 2.9, из которых следует, что уменьшение  $\Delta L$  с 500 до 400 м, т. е. на 20 %, приводит почти к полторакратному увеличению значений редукции. Увеличение  $\Delta L$  с 500 до 600 м сказывается в меньшей мере. Высокая чувствительность расчетных значений редукции поверхностного стока к вариациям величины должна учитываться при расчетах конкретных объектов, в которых следует стремиться использовать наиболее достоверные значения гидрогеологических параметров. С целью повышения запаса надежности расчета можно допускать некоторое занижение принимаемой величины  $\Delta L$ , однако при этом необходимо иметь в виду, что завышение расчетных значений редукции поверхностного стока может оказаться при этом неоправданно большим. Последнее положение можно проиллюстрировать сравнением графика  $w_0(t)$ , соответствующего  $\Delta L = 500$  м, с графиками, соответствующими  $\Delta L$  300 и 200 м.

## 2.5. СХЕМЫ ПЛАСТОВ-ПОЛОС

Схемы пластов-полос с двумя и разнородными границами рассматривались рядом исследователей [15, 28, 29]. При отборе подземных вод одиночной скважиной в условиях пласта-полосы с двумя границами питания передаточная функция понижения в точке  $M$  с координатами  $x, y$  может быть получена в виде

$$U_S(M, p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n \bar{x}_0 \sin \pi n \bar{x}}{\sqrt{\pi^2 n^2 + \chi^2 + \bar{p}}} e^{-|\bar{y}| \sqrt{\pi^2 n^2 + \chi^2 + \bar{p}}}, \quad (2.117)$$

где  $\bar{x} = x/L$ ,  $\bar{y} = y/L$ ,  $\bar{p} = pL^2/a$ ,  $\chi = gL$ . Из выражения (2.117) могут быть получены стандартным образом зависимости для гидравлического сопротивления и его предельного значения. Последнее, в случае отсутствия компенсационного питания, выражается в довольно простом виде:

$$R_0(M, \infty) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\operatorname{ch} \pi \bar{y} - \cos \pi (\bar{x} + \bar{x}_0)}{\operatorname{ch} \pi \bar{y} - \cos \pi (\bar{x} - \bar{x}_0)}. \quad (2.118)$$

Для расчета понижений на скважине можно пользоваться зависимостью

$$R_0(M, \infty) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{2 \sin \pi \bar{x}_0}{\pi \bar{r}_0}. \quad (2.119)$$

В случае схемы с разнородными границами может быть получено выражение для передаточной функции понижения, аналогичное (2.119).

В условиях отсутствия компенсационного питания ( $g=0$ ) выражение для предельного значения гидравлического сопротивления имеет вид:

$$R_0(M, \infty) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1,27 \operatorname{tg} \frac{\pi \bar{x}_0}{2}}{\bar{r}_0}. \quad (2.120)$$

Для условий отбора подземных вод линейными водозаборами параллельными границе, выражения для передаточной функции понижения и гидравлического сопротивления определены в работе [10]:

1) для схемы с двумя границами питания

$$U_S(M, p) = 2 \frac{L}{B} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n \bar{x}_0 \sin \pi n \bar{x}}{\pi^2 n^2 + \chi^2 + \bar{p}}; \quad (2.121)$$

$$R_0(M, t) = 2 \frac{L}{B} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n \bar{x}_0 \sin \pi n \bar{x}}{\pi^2 n^2 + \chi^2} [1 - e^{-(\pi^2 n^2 + \chi^2) \bar{t}}]; \quad (2.122)$$



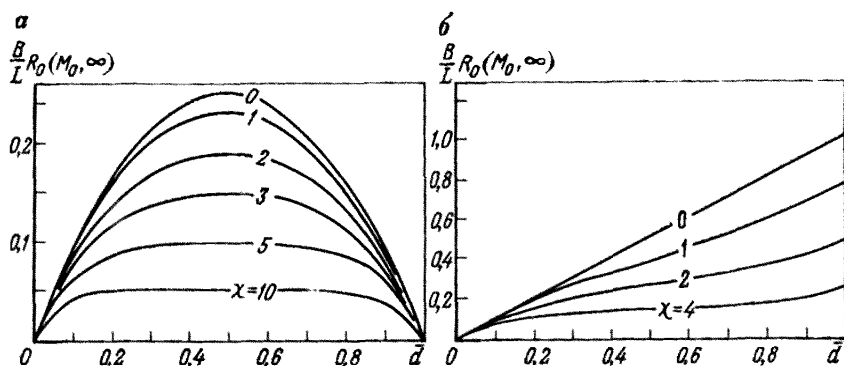


Рис. 2.10. Зависимости предельного значения гидравлического сопротивления на линии водозабора от относительного расстояния до левой границы при отборе подземных вод линейным рядом скважин в пласте-полосе с однородными (а) и разнородными (б) границами

2) для схемы с разнородными границами

$$U_s(M, p) = 2 \frac{L}{B} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi \left( n - \frac{1}{2} \right) \bar{x}_0 \sin \pi \left( n - \frac{1}{2} \right) \bar{x}}{\pi^2 \left( n - \frac{1}{2} \right)^2 + \chi^2 + \bar{p}}, \quad (2.123)$$

$$R_0(M, t) = 2 \frac{L}{B} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi \left( n - \frac{1}{2} \right) \bar{x}_0 \sin \pi \left( n - \frac{1}{2} \right) \bar{x}}{\pi^2 \left( n - \frac{1}{2} \right)^2 + \chi^2} \times \\ \times \left[ 1 - e^{-\left( \pi^2 \left( n - \frac{1}{2} \right)^2 + \chi^2 \right) t} \right]. \quad (2.124)$$

При  $t \rightarrow \infty$  гидравлические сопротивления стабилизируются, стремясь к соответствующим стационарным значениям. Для точки  $M$  на линии водозабора

$$R_0(M, \infty) = \frac{L}{B} \frac{\operatorname{sh} \chi \bar{d} \operatorname{sh} \chi (1 - \bar{d})}{\chi \operatorname{sh} \chi} \quad (2.125)$$

в случае схемы с двумя однородными границами питания (рис. 2.10, а) и

$$R_0(M, \infty) = \frac{L}{B} \frac{\operatorname{sh} \chi \bar{d} \operatorname{ch} (1 - \bar{d}) \chi}{\chi \operatorname{ch} \chi} \quad (2.126)$$

в случае схемы с разнородными границами (рис. 2.10, б).

Ряды в формулах (2.122), (2.124) характеризуются хорошей сходимостью; для практических расчетов достаточно нескольких первых их членов. В табл. 2.7 и 2.8 приведены величины гидравлических сопротивлений, соответствующих точке  $M$  на линии водозабора, для обеих схем и условий отсутствия компенсационного питания. При наличии компенсационного питания удобнее пользо-

Таблица 2.7

Значения функции

$$f(\bar{x}_0, \bar{t}) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi n \bar{x}_0}{n^2} (1 - e^{-\pi^2 n^2 \bar{t}})$$

для вычисления гидравлического сопротивления на линии водозабора  
в схеме пласта-полосы с двумя границами питания

$\bar{t}$	$\bar{x}_0$				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,001	0,0180	0,0180	0,0180	0,0180	0,0180
0,002	0,0254	0,0254	0,0254	0,0254	0,0254
0,004	0,0352	0,0352	0,0352	0,0352	0,0352
0,006	0,0422	0,0438	0,0438	0,0438	0,0438
0,008	0,0474	0,0504	0,0504	0,0504	0,0504
0,01	0,0514	0,0564	0,0564	0,0564	0,0564
0,02	0,0632	0,0780	0,0798	0,0798	0,0798
0,04	0,0730	0,1028	0,1112	0,1126	0,1128
0,06	0,0776	0,1168	0,1324	0,1370	0,1378
0,08	0,0804	0,1262	0,1480	0,1560	0,1580
0,1	0,0824	0,1330	0,1596	0,1714	0,1744
0,2	0,0874	0,1502	0,1916	0,2146	0,2218
0,4	0,0896	0,1586	0,2074	0,2364	0,2460
0,6	0,0900	0,1598	0,2096	0,2395	0,2494
$\infty$	0,0900	0,1600	0,2100	0,2400	0,2500

ваться программами 5 и 6 для микрокалькулятора (см. приложение).

Для выражения передаточной функции редукции и ее временной зависимости рекомендуется следующая форма представления, обоснованная в работе [10]:

$$U_{\Psi}(p) = \gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n \lambda_n \bar{p}}{\bar{p} + \lambda_n}; \quad (2.127)$$

$$w_0(t) = \gamma - \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n \bar{t}}, \quad (2.128)$$

где  $\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} C_n$  — предельное значение функции редукции;  $\lambda_n$  — так называемые собственные значения;  $C_n$  — коэффициенты разложения передаточной функции;  $\bar{p} = pL^2/a$ ,  $\bar{t} = at/L^2$ .

Для схемы пласта-полосы с двумя границами питания соответствующие выражения имеют вид (по отношению к левой границе):

$$\gamma = \text{sh}(\chi - \chi_1) / \text{sh} \chi; \quad (2.129)$$

$$C_n = \frac{2\pi n \sin \pi n \bar{d}}{\pi^2 n^2 + \chi^2}, \quad (2.130)$$

$$\lambda_n = \pi^2 n^2 + \chi^2, \quad (2.131)$$

Таблица 2.8

Значения функции

$$f(\bar{x}_0, \bar{i}) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi \left(n - \frac{1}{2}\right) \bar{x}_0}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2} (1 - e^{-\pi^2 (n-1/2)^2 \bar{i}})$$

для вычисления гидравлического сопротивления на линии водозабора в схеме пласта-полосы с разнородными границами

$\bar{i}$	$\bar{x}_0$				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,01	0,0563	0,0564	0,0564	0,0565	0,1129
0,02	0,0781	0,0798	0,0798	0,0815	0,1596
0,04	0,1028	0,1126	0,1130	0,1229	0,2257
0,06	0,1169	0,1370	0,1394	0,1595	0,2764
0,08	0,1263	0,1563	0,1628	0,1929	0,3192
0,1	0,1331	0,1724	0,1845	0,2238	0,3568
0,2	0,1521	0,2281	0,2760	0,3600	0,5041
0,4	0,1711	0,2956	0,4023	0,5267	0,6979
0,6	0,1824	0,3363	0,4793	0,6332	0,8116
0,8	0,1892	0,3611	0,5263	0,6982	0,8874
1,0	0,1934	0,3763	0,5550	0,7378	0,9313
1,5	0,1981	0,3931	0,5869	0,7819	0,9800
2,0	0,1994	0,3980	0,5962	0,7947	0,9942
$\infty$	0,2000	0,4000	0,6000	0,8000	1,0000

где  $\chi = gL$ ,  $\chi_1 = gd$ . Чтобы получить аналогичные выражения для оценки редукиции по отношению к водотoku, изображаемому правой границей питания, в формулах следует всюду заменить  $\bar{d}$  на  $1 - \bar{d}$  и  $\chi_1$  на  $\chi - \chi_1$ .

Для схемы пласта-полосы с разнородными границами

$$\gamma = \frac{\operatorname{ch}(\chi - \chi_1)}{\operatorname{ch} \chi}; \quad (2.132)$$

$$C_n = (2n - 1) \pi \frac{\sin \pi \left(n - \frac{1}{2}\right) \bar{d}}{\pi^2 \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \chi^2}; \quad (2.133)$$

$$\lambda_n = \pi^2 \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \chi^2. \quad (2.134)$$

С помощью программ 7 и 8 для микрокалькулятора (см. приложение) можно определять значения функций редукиции для обеих схем применительно к условиям компенсационного питания.

При отсутствии такого питания, можно использовать расчетные таблицы (табл. 2.9 и 2.10).

Таблица 2.9

Значения функции редукции для условий отбора подземных вод пласта-полосы с двумя границами питания линейным водозабором

$\bar{t}$	$\bar{d}$			
	0,2	0,4	0,6	0,8
0,10	0,6547	0,3707	0,1779	0,0663
0,15	0,7140	0,4617	0,2627	0,1157
0,20	0,7479	0,5158	0,3160	0,1481
0,30	0,7806	0,5687	0,3687	0,1806
0,40	0,7928	0,5883	0,3883	0,1928
0,50	0,7973	0,5956	0,3956	0,1973
$\infty$	0,8000	0,6000	0,4000	0,2000

Примечание. При  $\bar{t} < 0,10$   $w_0 \approx \operatorname{erfc} \frac{\bar{d}}{2\sqrt{\bar{t}}}$ .

Для оценки интегральной редукции поверхностного стока в условиях пластов-полос в работе [10] предложено выражение

$$v(t) = \gamma - \frac{1}{\bar{t}} \left( v_0 - \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* e^{-\lambda_n \bar{t}} \right), \quad (2.135)$$

Таблица 2.10

Значения функции редукции для условий пласта-полосы с разнородными границами

$\bar{t}$	$\bar{d}$				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,10	0,6547	0,3714	0,1816	0,0810	0,0508
0,15	0,7160	0,4687	0,2839	0,1725	0,1357
0,20	0,7557	0,5383	0,3696	0,2637	0,2277
0,25	0,7863	0,5946	0,4437	0,3476	0,3146
0,30	0,8119	0,6425	0,5085	0,4227	0,3932
0,40	0,8532	0,7210	0,6161	0,5487	0,5255
0,50	0,8854	0,7821	0,7001	0,6474	0,6292
0,60	0,9105	0,8297	0,7656	0,7245	0,7103
0,70	0,9300	0,8669	0,8169	0,7847	0,7736
0,80	0,9453	0,8960	0,8569	0,8318	0,8232
0,90	0,9573	0,9188	0,8882	0,8686	0,8619
1,0	0,9666	0,9365	0,9127	0,8973	0,8920
1,5	0,9902	0,9815	0,9746	0,9700	0,9686
2,0	0,9972	0,9946	0,9926	0,9913	0,9908

Примечание. При  $\bar{t} < 0,10$  значение  $w_0$  может быть приближенно определено по формуле  $w_0 \approx \operatorname{erfc} \frac{\bar{d}}{2\sqrt{\bar{t}}}$ .

где  $C_n^* = C_n/\lambda_n$ ;  $v_0$  — так называемый асимптотический коэффициент (так как при достаточно большом  $\bar{t}$ ,  $v(t) \approx \gamma - v_0/\bar{t}$ ).

В условиях схемы пласта-полосы с двумя границами питания выражение для  $v_0$  имеет вид:

$$v_0 = \frac{\bar{d} \operatorname{sh} \chi \operatorname{ch} (\chi - \chi_1) - \operatorname{sh} \chi_1}{2\chi \operatorname{sh}^2 \chi}; \quad (2.136)$$

при  $g=0$

$$v_0 = \frac{\bar{d}}{6} (1 - \bar{d})(2 - \bar{d}). \quad (2.137)$$

Для пласта-полосы с разнородными границами

$$v_0 = \frac{\operatorname{sh} \chi_1 + \bar{d} \operatorname{sh} (\chi - \chi_1) \operatorname{ch} \chi}{2\chi \operatorname{ch}^2 \chi}, \quad (2.138)$$

а при  $g=0$

$$v_0 = \frac{\bar{d}}{2} (2 - \bar{d}). \quad (2.139)$$

При условии отсутствия компенсационного питания значения функций  $v(t)$  для обеих схем приведены в табл. 2.11 и 2.12.

Если отбор подземных вод ведется площадным водозабором, имеющим форму полосы с границами, параллельными границам пласта, то в случае пласта-полосы с двумя границами питания функция относительной редукции может быть представлена в виде

Таблица 2.11

Значения функции интегральной редукции для условий пласта-полосы с двумя границами питания

$\bar{t}$	$\bar{d}$			
	0,2	0,4	0,6	0,8
0,10	0,4627	0,1894	0,0676	0,0198
0,15	0,5374	0,2663	0,1197	0,0441
0,20	0,5863	0,3226	0,1626	0,0663
0,25	0,6209	0,3648	0,1968	0,0849
0,30	0,6465	0,3972	0,2239	0,0999
0,35	0,6663	0,4227	0,2434	0,1120
0,40	0,6818	0,4430	0,2630	0,1218
0,45	0,6943	0,4594	0,2772	0,1299
0,50	0,7045	0,4729	0,2889	0,1365
$\infty$	0,8000	0,6000	0,4000	0,2000

Примечание. При  $\bar{t} \leq 0,10$   $v(t) \approx 4i^2 \operatorname{erfc} \frac{d}{2\sqrt{\bar{t}}}$ ;

при  $t > 0,50$   $v(t) \approx 1 - d - \frac{d}{6\bar{t}} (1 - d)(2 - d)$ .

Таблица 2.12

Значения функции интегральной редукции для условия пласта-полосы с разнородными границами

$\bar{t}$	$d$				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,10	0,4631	0,1894	0,0675	0,0225	0,0109
0,15	0,5379	0,2676	0,1236	0,0570	0,0381
0,20	0,5869	0,3269	0,1745	0,0975	0,0740
0,30	0,6536	0,4157	0,2637	0,1804	0,1537
0,40	0,6986	0,4826	0,3389	0,2573	0,2308
0,50	0,7329	0,5336	0,4031	0,3258	0,3005
0,60	0,7605	0,5817	0,4583	0,3861	0,3523
0,80	0,8027	0,6527	0,5475	0,4852	0,4646
1,0	0,8335	0,7057	0,6154	0,5616	0,5438
1,5	0,8826	0,7916	0,7268	0,6880	0,6751
2,0	0,9106	0,8411	0,7915	0,7618	0,7519

Примечание. При  $\bar{t} \leq 0,1$   $v(\bar{t}) \approx 41^2 \operatorname{erfc} \frac{d}{2\sqrt{\bar{t}}}$ ;

при  $\bar{t} > 2,0$   $v(\bar{t}) \approx 1 - \frac{d}{2\bar{t}} (2 - d)$ .

(2.128), где (по отношению к левой границе) предельное значение функции редукции

$$\gamma = \frac{2 \operatorname{sh} \chi \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{2} \operatorname{sh} \chi \left(1 - \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{2}\right)}{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \chi \operatorname{sh} \chi}, \quad (2.140)$$

а коэффициенты разложения

$$C_n = \frac{2}{\pi^2 n^2 + \chi^2} \frac{\cos \pi n \bar{x}_1 - \cos \pi n \bar{x}_2}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}. \quad (2.141)$$

В частном случае, когда компенсационное питание отсутствует, предельное значение функции редукции по отношению к левой границе

$$\gamma = 1 - \frac{\bar{x}_2 + \bar{x}_1}{2}. \quad (2.142)$$

Если полоса водоотбора занимает всю область фильтрации,  $x_1=0$ ,  $x_2=1$  и  $\gamma=0,5$ . Графики функции относительной редукции и интегральной функции редукции для этого случая приведены на рис. 2.11.

Аналогично рассматриваются условия площадного отбора в условиях пласта-полосы с разнородными границами. При этом легко убедиться, что предельное значение функции редукции

$$\gamma = \frac{\operatorname{sh} 2\chi (1 - \bar{x}_1) - \operatorname{sh} 2\chi (1 - \bar{x}_2)}{2(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \chi \operatorname{ch} \chi}, \quad (2.143)$$

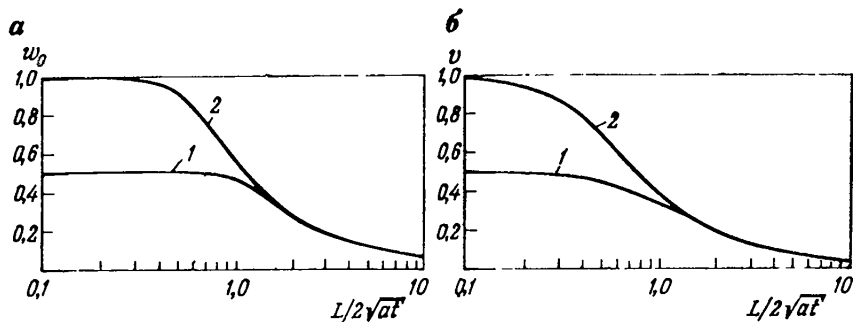


Рис. 2.11. Графики временных зависимостей функции редукции  $w_0$  (а) и интегральной функции редукции  $v$  (б) в условиях площадного водозабора, занимающего всю площадь члуста-полосы:

1—2 — границы питания (1 — две однородные, 2 — разнородные)

а при отсутствии компенсационного питания  $\gamma=1$ . На рис. 2.11 приведен график временной зависимости функций редукции и интегральной редукции для условий, когда компенсационное питание отсутствует, а область водоотбора занимает всю область фильтрации.

## 2.6. СХЕМЫ С ПЛАНОВОЙ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ И ГРАНИЦЕЙ ПИТАНИЯ

Рассмотрим схему, довольно часто возникающую при решении практических задач: река, схематизированная в виде прямой линии, параллельной границе неоднородности (соответствующей, например, фациальной границе между речным аллювием и коренными отложениями долины) или в виде смены пролювиальных отложений мелкозернистыми на конусах выноса.

При этом возможны два варианта размещения водозабора: в ближней к реке области неоднородности и удаленной от нее области. Рассмотрим сначала решение задачи для условий размещения водозабора во второй области. Задачи, связанные с оценкой эксплуатационных ресурсов подземных вод в таких условиях рассматривались рядом авторов [13 и др.]. Поэтому уделим внимание лишь практически наиболее важным случаям, когда подземные воды отбираются линейными и площадными системами скважин.

В рассматриваемых условиях, при линейном водозаборе, поток плоскопараллелен, соответствующие уравнения фильтрации — одномерны, а именно,

$$\frac{1}{a_1} \frac{\partial S_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} - g_1^2 S_1;$$

$$\frac{1}{a_2} \frac{\partial S_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} - g_2^2 S_2 - \frac{q}{T_2} \delta(x-d), \quad (2.144)$$

где  $S_j(x, t)$  — понижение уровня (напора) подземных вод в точке  $M$  области  $j$ , причем абсцисса этой точки отсчитывается от уреза реки,  $a_j$  — коэффициент уровнепроводности  $j$ -й области;  $T_j$  — коэффициент водопроводности этой же области;  $g_j$  — компенсационный эффект  $j$ -й области;  $q$  — величина дебита водозабора на единицу его длины. На урезе реки ставится граничное условие совершенного питания:

$$S_1(0, t) = 0; \quad (2.145)$$

при  $x \rightarrow \infty$  должно выполняться условие ограниченности решения:

$$S_2(x, t) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.146)$$

Наконец, на линии  $x = x_1$  (граница неоднородности) должны выполняться условия 4-го рода, выражающие непрерывность напора и расхода:

$$S_1(x_1, t) = S_2(x_1, t); \quad (2.147)$$

$$S'_1(x_1, t) = \nu S'_2(x_1, t), \quad (2.148)$$

где штрих означает дифференцирование по координате, а

$$\nu = T_2/T_1. \quad (2.149)$$

Преобразованные по Лапласу во временной области уравнения (2.144) приобретают вид:

$$\hat{S}_1'' - \beta_1^2 \hat{S}_1 = 0;$$

$$\hat{S}_2'' - \beta_2^2 \hat{S}_2 = -\frac{\hat{q}}{T_2} \delta(x - d), \quad (2.150)$$

где  $\hat{q}(p)$  — изображение временной зависимости расхода водоотбора на единицу длины линейного ряда

$$\beta_j = \left( \frac{p}{a_j} + g_j^2 \right)^{1/2}.$$

Уравнения (2.150) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций  $\hat{S}_1(x)$ ,  $\hat{S}_2(x)$ ; решив ее стандартным образом и определив значение производной  $\hat{S}'_1(x)$  при  $x=0$ , получим следующее выражение для передаточной функции понижения:

$$U_S(M, p) = \frac{1}{B\beta_2} \frac{\beta_1 \operatorname{ch} \beta_1 x_1 \operatorname{sh} \beta_2 (d - x_1) + \nu \beta_2 \operatorname{sh} \beta_1 x_1 \operatorname{ch} \beta_2 (d - x_1)}{\beta_1 \operatorname{ch} \beta_1 x_1 + \nu \beta_2 \operatorname{sh} \beta_1 x_1} \quad (2.151)$$

(при этом характерным значением коэффициента водопроводности считается величина  $T_2$ ).

Изображение вида (2.151) не может быть использовано для прямого нахождения оригинала даже в простейшем случае отсутствия компенсационного питания. Поэтому для оценки эксплуата-



ционных ресурсов в таких случаях целесообразно воспользоваться, например, методом Гохберга для численного обращения преобразований Лапласа.

Выражение для передаточной функции редукции для тех же условий имеет вид:

$$U_w = \frac{e^{-\beta_1(d-x_1)}}{\operatorname{ch} \beta_1 x_1 + (\nu \beta_2 / \beta_1) \operatorname{sh} \beta_1 x_1}. \quad (2.152)$$

Определение оригинала от изображения (2.152) также представляет собой сложную задачу. Поэтому и для определения временных зависимостей редукции при наличии компенсационного питания можно рекомендовать способ Гохберга.

В условиях отсутствия компенсационного питания функции редукции и интегральной редукции могут быть получены в явном виде

$$w_0(t) = \Phi_2^* \left( -\frac{x_1}{2\sqrt{a_1 t}}; \varepsilon; \rho \right); \quad (2.153)$$

$$\rho = \sqrt{\frac{a_1}{a_2} \left( \frac{d}{x_1} - 1 \right)}; \quad (2.154)$$

$$\varepsilon = \frac{1-\eta}{1+\eta}; \quad \eta = \nu \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}; \quad (2.155)$$

$$\Phi_2^*(z; \varepsilon; \rho) = \operatorname{erfc}(1+\rho)z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \varepsilon^n [\operatorname{erfc}(2n+\rho-1)z - \operatorname{erfc}(2n+\rho+1)z]. \quad (2.156)$$

Выражение для функции интегральной редукции вытекает из выражений (2.153) и (2.156):

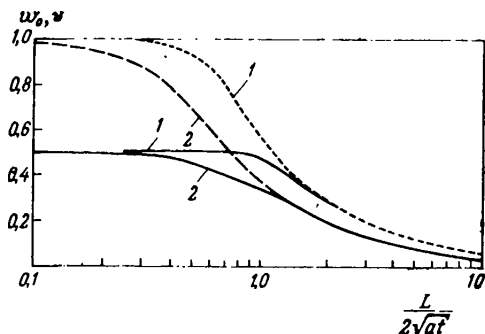
$$v(t) = \Phi_2^{**} \left( \frac{x_1}{2\sqrt{a_1 t}}; \varepsilon; \rho \right), \quad (2.157)$$

$$\Phi_2^{**}(z; \varepsilon; \rho) = 4i^2 \operatorname{erfc}(1+\rho)z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \varepsilon^n \times \\ \times [4i^2 \operatorname{erfc}(2n+\rho-1)z - 4i^2 \operatorname{erfc}(2n+\rho+1)z]. \quad (2.158)$$

Более подробный вывод выражений (2.153) и (2.157), а также краткая таблица значений функции  $\Phi_2^*$  приведены в работе [10], а графики этой функции — в работе [25]. Однако, поскольку функции  $\Phi_2^*$  и  $\Phi_2^{**}$  зависят от трех аргументов, пользование как таблицами, так и графиками достаточно неудобно. В связи с этим предлагаются программы 11 и 12 для расчета значений этих функций на микрокалькуляторе типа «Электроника БЗ-34» (см. приложение), а также пример расчета с их помощью.

*Пример 1.* Параметры водоносных пластов:  $T_1=200$  м<sup>2</sup>/сут,  $T_2=5000$  м<sup>2</sup>/сут;  $a_1=2000$  м<sup>2</sup>/сут;  $a_2=50\,000$  м<sup>2</sup>/сут; компенсационное питание отсутствует. Линей-

Рис. 2.12. Графики зависимостей  $w_0(t)$  (1) и  $v(t)$  (2) в условиях примеров при размещении линейного водозабора в первой (сплошные линии) и во второй (пунктирные линии) областях неоднородности



ный ряд скважин размещен на расстоянии  $d=4000$  м от реки, согласно схеме, приведенной на рис. 2.17, б,  $x_1=2500$  м. Требуется определить временные зависимости  $w_0(t)$  и  $v(t)$ .

Решение 1. Определяем по формуле (2.149)  $\gamma=5000/200=25$ ; по формулам (2.155)  $\eta=25(2000/50\,000)^{1/2}=5$ ;  $\varepsilon=(1-5)/(1+5)=-0,6666$ . По формуле (2.154)  $\rho=\left(\frac{2000}{50000}-\right)^{1/2}\left(\frac{4}{2,5}-1\right)=0,12$ .

2. Для расчета временной зависимости  $w_0(t)$  согласно выражению (2.156) вводим в память микрокалькулятора программу вычисления функции  $\Phi_2^*$ , а также соответствующие константы, точность вычислений (0,001) и параметры:  $\rho=0,12$ ;  $\varepsilon=-0,6666$ . Задаввшись каким-либо значением времени, например,  $t=20$  лет  $=7300$  сут, вычисляем значение  $z=x_1/2(a_1 t)^{1/2}=0,3271$ ; заносим это число на регистр калькулятора; выполняем операции В/О, С/П и, приблизительно через 1,5 мин, получаем результат:  $\Phi_2^*=0,2373$ . Поступив аналогично для других значений  $t$ , получим соответствующие значения  $\Phi_2^*$  (рис. 2.12) (кривая 1).

3. Для расчета временной зависимости  $v(t)$  согласно выражению (2.157), вводим в память микрокалькулятора программу расчета функции  $\Phi_2^{**}$  и, если необходимо, заносим в соответствующие регистры константы программы, точность расчета и параметры. Задавая значением времени, например, принимая  $t=20$  лет  $=7300$  сут, определяем  $z=0,3271$ ; заносим это число на операционный регистр калькулятора, выполняем В/О, С/П и, примерно через 2,5 мин, считываем ответ  $\Phi_2^{**}=0,1473$ . Поступив аналогично для других значений  $t$ , строим кривую зависимости  $v(t)$  (рис. 2.12, кривая 2).

Таким же образом решаются задачи по определению гидравлических сопротивлений и характеристик редукции в случае размещения линейного водозабора в первой области неоднородности (см. рис. 2.4, а). Действуя в той же последовательности, что и в рассмотренном выше случае, получим выражение для передаточной функции понижения на линии водозабора

$$U_S(M, \rho) = \frac{\text{sh } \beta_1 d}{\beta_1 B} \frac{\beta_1 \text{ch } \beta_1 (x_1 - d) + \sqrt{\beta_2} \text{sh } \beta_1 (x_1 - d)}{\beta_1 \text{sh } \beta_1 x_1 + \sqrt{\beta_2} \text{ch } \beta_1 x_1}. \quad (2.159)$$

В качестве характерного значения коэффициента водопроводности здесь выступает величина  $T_1$ .

Выражение для передаточной функции редукции в этих условиях получается в виде:

$$U_W(\rho) = \frac{(\sqrt{\beta_2}/\beta_1) \text{sh } \beta_1 (x_1 - d) + \text{ch } \beta_1 (x_1 - d)}{(\sqrt{\beta_2}/\beta_1) \text{sh } \beta_1 x_1 + \text{ch } \beta_1 x_1}. \quad (2.160)$$

В условиях отсутствия компенсационного питания выражения для функции редукции и функции интегральной редукции соответственно равны:

$$w_0(t) = \Phi_1^* \left( \frac{x_1}{2\sqrt{a_1 t}}; \varepsilon; \frac{d}{x_1} \right); \quad (2.161)$$

$$v(t) = \Phi_1^{**} \left( \frac{x_1}{2\sqrt{a_1 t}}; \varepsilon; \frac{d}{x_1} \right), \quad (2.162)$$

$$\text{где } \Phi_1^*(z; \varepsilon; \alpha) = \operatorname{erfc} \alpha z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \varepsilon^n [\operatorname{erfc} (2n - \alpha) z - \operatorname{erfc} (2n + \alpha) z]; \quad (2.163)$$

$$\Phi_1^{**}(z; \varepsilon; \alpha) = 4i^2 \operatorname{erfc} \alpha z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \varepsilon^n [4i^2 \operatorname{erfc} (2n - \alpha) z - 4i^2 \operatorname{erfc} (2n + \alpha) z]. \quad (2.164)$$

Как и в случае функций  $\Phi_2^*$ ,  $\Phi_2^{**}$ , для вычисления функций  $\Phi_1^*$ ,  $\Phi_1^{**}$  целесообразно использовать программируемый калькулятор (см. приложение, программы 13 и 14). Ниже приведен пример расчета с помощью этих программ.

**Пример 1.** Гидрогеологические параметры на схеме, приведенной на рис. 2.19, а таковы:  $T_1 = 200 \text{ м}^2/\text{сут}$ ,  $T_2 = 5000 \text{ м}^2/\text{сут}$ ;  $a_1 = 2000 \text{ м}^2/\text{сут}$ ,  $a_2 = 50\,000 \text{ м}^2/\text{сут}$ ;  $x_1 = 2500 \text{ м}$ . Линейный водозабор проведен на расстоянии  $d = 1250 \text{ м}$  от уреза реки. Требуется рассчитать временные зависимости  $w_0(t)$  и  $v(t)$ .

Решение 1. Определяем значение  $\alpha = d/x_1 = 1250/2500 = 0,5$ ; по формуле (2.149) находим  $\gamma = 5000/200 = 25$ ; по формулам (2.155) — значения  $\eta = 25(2000/50\,000)^{1/2} = 5$  и  $\varepsilon = (1 - 5)/(1 + 5) = -0,6666$ .

2. Вводим в программу расчета значений функции  $\Phi_1^*$ , константы  $a_1 - a_6$ , параметры  $\varepsilon$  и  $\alpha$ , а также точность расчета (0,001). Зададимся каким-либо значением времени, например  $t = 10 \text{ лет} = 3650 \text{ сут}$ . Вычислим значение  $z = 2500/2(2000 \cdot 3650)^{1/2} = 0,4626$ . Занеся это число на операционный регистр калькулятора, выполним В/О, С/П. Через 2,5 мин получим ответ:  $\Phi_1^* = 0,5855$ . Аналогично поступаем при других значениях времени. Результатом вычислений является график зависимости  $w_0(t)$ , представленный на рис. 2.12 (кривая 3).

3. Вводим в память калькулятора программу расчета функции  $\Phi_1^{**}$  и заносим параметр  $\varepsilon = -0,6666$  в регистр 8. Согласно инструкции к программе, засылаем нули в регистры А и Д;  $-1$  — в регистр В. В регистр 7 засылаем значение  $\alpha = 0,5$ . Задаваясь значением времени  $t = 10 \text{ лет} = 3650 \text{ сут}$ , определяем, что  $z = d/2(a_1 t)^{1/2} = 0,4626$ . Заносим это число в регистр 9. Выполняем В/О, С/П и, приблизительно через 2 мин, считываем ответ:  $\Phi_1^{**} = 0,4905$ . Действуя аналогично при других значениях времени, получаем соответствующие значения  $t$  и строим кривую  $v(t)$  (см. рис. 2.12, кривая 4).

**Площадные водозаборы.** При отборе подземных вод площадными системами скважин передаточные функции редукции вида (2.160) или (2.152) необходимо проинтегрировать относительно переменной  $d$  по области водоотбора и разделить на ее площадь. Так, при отборе подземных вод площадным водозабором, имею-

щим вид полосы и целиком расположенным в пределах первой области неоднородности, передаточная функция редукции

$$U_{\Psi}(p) = \frac{\operatorname{sh} \beta_1 (x_1 - \xi_1) + \eta \operatorname{ch} \beta_1 (x_1 - \xi_1) - [\operatorname{sh} \beta_1 (x_1 - \xi_1) + \eta \operatorname{ch} \beta_2 (x_1 - \xi_2)]}{(\xi_2 - \xi_1) \beta_1 [\eta \operatorname{sh} \beta_1 x_1 + \operatorname{ch} \beta_1 x_1]}. \quad (2.165)$$

Соответствующая функция редукции

$$w_0(t) = \frac{2\sqrt{a_1 t}}{\xi_2 - \xi_1} \left[ C_1 \left( \frac{x_1}{2\sqrt{a_1 t}}; \varepsilon; \frac{\xi_1}{x_1} \right) - C_1 \left( \frac{x_1}{2\sqrt{a_1 t}}; \varepsilon; \frac{\xi_2}{x_1} \right) \right]. \quad (2.166)$$

$$C_1(z, \varepsilon; \alpha) = i \operatorname{erfc} \alpha z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \varepsilon^n [i \operatorname{erfc} (2n - \alpha) z + i \operatorname{erfc} (2n + \alpha) z]. \quad (2.167)$$

а соответствующая функция интегральной редукции имеет вид:

$$v(t) = \frac{8\sqrt{a_1 t}}{\xi_2 - \xi_1} \left[ C_1^* \left( \frac{x_1}{2\sqrt{a_1 t}}; \varepsilon; \frac{\xi_1}{x_1} \right) - C_1^* \left( \frac{x_1}{2\sqrt{a_1 t}}; \varepsilon; \frac{\xi_2}{x_1} \right) \right]; \quad (2.168)$$

$$C_1^*(z, \varepsilon, \alpha) = i^3 \operatorname{erfc} \alpha z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \varepsilon^n [i^3 \operatorname{erfc} (2n - \alpha) z + i^3 \operatorname{erfc} (2n + \alpha) z]. \quad (2.169)$$

Программы 15 и 16 (см. приложение) предназначены для вычисления значений функций  $C_1$  и  $C_1^*$ .

Ниже рассмотрен пример расчета с помощью этих программ.

Пример 1. В условиях предыдущего примера требуется рассчитать временные зависимости  $w_0(t)$ ,  $v(t)$ , если отбор подземных вод осуществляется площадным водозабором, имеющим вид полосы при  $\xi_1 = 500$  м,  $\xi_2 = 2500$  м.

Решение 1. Параметры неоднородности  $\varepsilon = -0,6666$  уже определен в предыдущем примере; определяем значения  $\alpha_1 = \xi_1/x_1 = 500/2500 = 0,2$  и  $\alpha_2 = \xi_2/x_1 = 2000/2500 = 0,8$ .

2. Вводим в память калькулятора программу вычисления функции  $C_1$ , константы  $a_1 - a_6$ , точность расчета (0,001); в регистр 7 отправляем значение  $\alpha_1 = 0,2$ . Задаваясь каким-либо значением времени, например,  $t = 10$  лет = 3650 сут, найдем значение  $z = 2500/2(2000 \cdot 3650)^{1/2} = 0,4626$  и занесём его на операционный регистр калькулятора. Выполняя В/О, С/П, пускаем калькулятор на счет и через 2 мин получаем ответ:  $C_1(0,4626; -0,6666; 0,2) = 0,5654$ .

Заносим теперь в регистр 7 значение  $\alpha_2 = 0,8$  и снова набирая число 0,4626 на операционном регистре, выполняем В/О, С/П и находим значение  $C_1(0,4626; -0,6666; 0,8) = 0,4027$ . По формуле (2.166) находим значение функции редукции:

$$w_0 = \frac{2\sqrt{2000 \cdot 3650}}{200 - 500} (0,5654 - 0,4027) = 0,5858.$$

Поступая аналогично для других значений времени, получим в результате кривую  $w_0(t)$ , которая приведена на рис. 2.13 (кривая I).

3. Введем в память калькулятора программу вычисления функции  $C_1$ , константы  $a_1 - a_6$ ; в регистр 7 отправим значение  $\alpha_1 = 0,2$ ; в регистр 8 — значение  $\varepsilon = -0,6666$ . При выбранном нами значении времени  $t = 10$  лет величина пара-

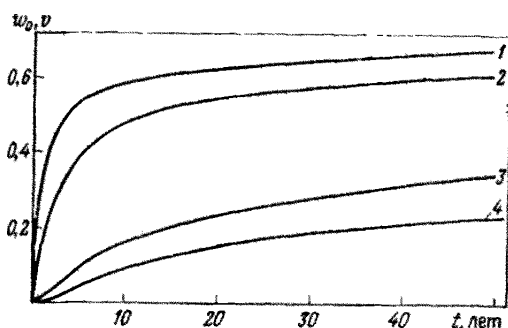


Рис. 2.13. Графики зависимостей  $w_0(t)$  и  $v(t)$  в условиях примеров:

1—2 — соответственно  $w_0$  и  $v$  при размещении водозабора в первой области неоднородности; 3—4 — то же при размещении водозабора во второй области неоднородности

метра  $z$  равна 0,4626. Засылаем это число в регистр 9. Согласно инструкции к программе, засылаем также нули в регистры А и Д; единицу — в регистр В; выполняем В/О, С/П и через 2 мин получаем результат:  $12C_1^*(0,4626; -0,6666; 0,2) = 0,9612$ . Затем заносим значение  $\alpha_2 = 0,8$  в регистр 7; снова засылаем нули в регистры А и Д, единицу — в регистр В, выполняем В/О, С/П и получаем в результате  $12C_1^*(0,4626; -0,6666; 0,8) = 0,5465$ . Согласно формуле (2.168), находим

$$v(t) = \frac{8\sqrt{2000 \cdot 3650}}{2000 - 500} \frac{1}{12} (0,9612 - 0,5465) = 0,4980.$$

Поступая аналогично при других значениях  $t$ , получаем соответствующие значения  $v(t)$  и определяем таким образом кривую  $v(t)$ , которая представлена на рис. 2.23 (кривая 2).

При расположении подосы отбора за границей фильтрационной неоднородности, во второй области выражение для передаточной функции редукции получается в виде:

$$U_W(p) = \frac{e^{-\beta_2(\xi_1 - x_1)} - e^{-\beta_2(\xi_2 - x_1)}}{\beta_2(\xi_2 - \xi_1)(\eta \operatorname{sh} \beta_1 x_1 + \operatorname{ch} \beta_1 x_1)}. \quad (2.170)$$

При этом функция редукции

$$w_0(t) = \frac{2\sqrt{a_2 t}}{\xi_2 - \xi_1} \left[ C_2\left(\frac{x_1}{2\sqrt{a_1 t}}; \varepsilon; \rho_1\right) - C_2\left(\frac{x_1}{2\sqrt{a_1 t}}; \varepsilon; \rho_2\right) \right], \quad (2.171)$$

$$\rho_j = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \left( \frac{\xi_j}{x_1} - 1 \right), \quad j = 1, 2; \quad (2.172)$$

$$C_2(z; \varepsilon; \rho) = i \operatorname{erfc}(1 + \rho)z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \varepsilon^n \times \\ \times [i \operatorname{erfc}(2n + \rho - 1)z - i \operatorname{erfc}(2n + \rho + 1)z]. \quad (2.173)$$

Функция интегральной редукции для этих же условий может быть записана в виде:

$$v(t) = \frac{8\sqrt{a_2 t}}{\xi_2 - \xi_1} \left[ C_2^*\left(\frac{x_1}{2\sqrt{a_1 t}}; \varepsilon; \rho_1\right) - C_2^*\left(\frac{x_1}{2\sqrt{a_1 t}}; \varepsilon; \rho_2\right) \right]; \quad (2.174)$$

$$C_2^*(z, \varepsilon, \rho) = i^3 \operatorname{erfc}(1 + \rho)z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \varepsilon^n \times \\ \times [i^3 \operatorname{erfc}(2n + \rho - 1)z - i^3 \operatorname{erfc}(2n + \rho + 1)z]. \quad (2.175)$$

Программы 17 и 18 для расчета значений функций  $C_2$  и  $C_2^*$  приведены в приложении. Ниже рассмотрен пример их использования.

*Пример.* В условиях предыдущего примера определить временные зависимости  $w_0(t)$  и  $v(t)$  при эксплуатации подземных вод площадным водозабором, размещенным в полосе между абсциссами  $\xi_1=3000$  м и  $\xi_2=5000$  м, в соответствии со схемой, приведенной на рис. 2,19, б.

**Решение.** 1. Временная зависимость  $w_0(t)$  определяется формулой (2.171). Определим значения  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , входящие в эту формулу

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{2000}{50\,000}} \cdot \left( \frac{3000}{2500} - 1 \right) = 0,04; \quad \rho_2 = \sqrt{\frac{2000}{50\,000}} \cdot \left( \frac{5000}{2500} - 1 \right) = 0,2.$$

2. Вводим в память калькулятора программу для расчета функции  $C_2$ , а также константы  $a_1-a_6$ , точность расчета (0,001), а также значения  $\epsilon = -0,6666$  (в регистр 8) и  $\rho_1=0,04$  (в регистр 7). Задавая значение времени  $t=10$  лет  $=3650$  сут, определяем значение  $z=2500/2(2000 \cdot 3650)^{1/2}=0,4626$ . Заносим его на операционный регистр калькулятора и выполняем В/О, С/П. Результат этого расчета — значение  $C_2(0,4626; -0,6666; 0,04)=0,0724$  — получаем спустя примерно 1,5 мин. После этого вводим значение  $\rho_2=0,2$  в регистр 7; снова набираем значение 0,4626 и выполняем операции В/О, С/П. Результат этого расчета — значение  $C_2(0,4626; -0,6666; 0,2)=0,0603$ . Теперь функция редукции определится по формуле (2.171):

$$w_0(t) = \frac{2\sqrt{50\,000 \cdot 3650}}{5000 - 3000} (0,0724 - 0,0603) = 0,1635.$$

Аналогично проводятся расчеты и при других значениях времени. Зависимость  $w_0(t)$  для условий примера представлена на рис. 2.13 (кривая 3).

3. Вводим в память калькулятора программу для расчета функции  $C_2^*$ , константы, значение точности (0,001) и параметры задачи:  $\epsilon = -0,6666$  (в регистр 8),  $\rho_1=0,04$  (в регистр 7). Для значения времени  $t=10$  лет величина параметра  $z$  равна 0,4626; заносим это число на операционный регистр калькулятора, выполняем: В/О, С/П, и через 1,5 мин получаем ответ:  $12C_2^*(0,4626; -0,6666; 0,04)=0,1531$ . Аналогично, засылая  $\rho_2=0,2$  в регистр 7 и пуская программу, получаем, что  $12C_2^*(0,4626; -0,6666; 0,2)=0,1299$ . По формуле (2.175) определяем, что искомое значение  $v(t)$  будет равно

$$v(t) = \frac{8\sqrt{50\,000 \cdot 3650}}{5000 - 3000} - \frac{1}{12} (0,1531 - 0,1299) = 0,1475.$$

График зависимости  $v(t)$  приведен на рис. 2.13 (кривая 4).

Если область водоотбора захватывает обе области неоднородности, согласно принципу суперпозиции, следует разбить ее на две части, лежащие соответственно в каждой из областей неоднородности, и сложить частичные величины редукции, обуславливаемые работой каждой из частей водозабора.

При оценке характеристик редукции в условиях компенсационного питания полезны оценки значений предельных величин функций относительной редукции. Часто оказывается, что соответствующие предельные значения настолько незначительны, что расчет временных зависимостей изменения поверхностного стока в таких условиях не представляет никакого интереса. Для условий отбора подземных вод линейным рядом скважин в пределах первой области неоднородности

$$\gamma = \frac{(vg_2/g_1) \operatorname{sh} g_1(x_1 - d) + \operatorname{ch} g_1(x_1 - d)}{(vg_2/g_1) \operatorname{sh} g_1 x_1 + \operatorname{ch} g_1 x_1}. \quad (2.176)$$

Для условий отбора подземных вод линейным или одиночным водозабором в пределах второй области неоднородности

$$\gamma = \frac{e^{-g_2(d-x_1)}}{\operatorname{ch} g_1 x_1 + (v g_2 / g_1) \operatorname{sh} g_1 x_1}. \quad (2.177)$$

При отборе подземных вод площадным водозабором, имеющим вид полосы, и целиком расположенным в первой области неоднородности

$$\gamma = \frac{\operatorname{sh} g_1 (x_1 - \xi_1) + \frac{v g_2}{g_1} \operatorname{ch} g_1 (x_1 - \xi_1) - \left[ \operatorname{sh} g_1 (x_1 - \xi_1) + \frac{v g_2}{g_1} \operatorname{ch} g_1 (x_2 - \xi_2) \right]}{(\xi_2 - \xi_1) g_1 \left( \frac{v g_2}{g_1} \operatorname{sh} g_1 x_1 + \operatorname{ch} g_1 x_1 \right)}, \quad (2.178)$$

а при условиях схемы с водозабором во второй области неоднородности

$$\gamma = \frac{e^{-g_2(\xi_1 - x_1)} - e^{-g_2(\xi_2 - x_1)}}{g_2(\xi_2 - \xi_1) \left( \frac{v g_2}{g_1} \operatorname{sh} g_1 x_1 + \operatorname{ch} g_1 x_1 \right)}. \quad (2.179)$$

*Пример.* Предполагается эксплуатировать подземные воды напорного известнякового горизонта, коэффициент водопроводимости которого  $T_2 = 1000$  м<sup>2</sup>/сут, коэффициент пьезопроводности  $a_2 = 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/сут, причем при понижении напора в эксплуатируемом горизонте в него будет происходить перетекание из нижележащих пластов. Величина коэффициента перетекания  $b_L$  составляет  $10^{-4}$  сут<sup>-1</sup>. Известняковый горизонт гидравлически связан с аллювиальными отложениями реки, порезающими его на глубину, сравнимую с глубиной залегания относительного водоупора. Фильтрационные параметры аллювия:  $T_1 = 400$  м<sup>2</sup>/сут,  $a_1 = 4000$  м<sup>2</sup>/сут. Ширина области распространения аллювия  $x_1 = 1600$  м. Эксплуатация подземных вод проектируется двумя линейными водозаборами, соответственно на расстояниях  $d_1 = 2000$  м и  $d_2 = 12000$  м от реки. Требуется оценить редукцию стока реки к сроку  $t = 50$  лет = 18 250 сут, если оба водозабора имеют равный (по 2 м<sup>3</sup>/с) дебит, меженный расход реки характеризуется величиной 1,6 м<sup>3</sup>/с.

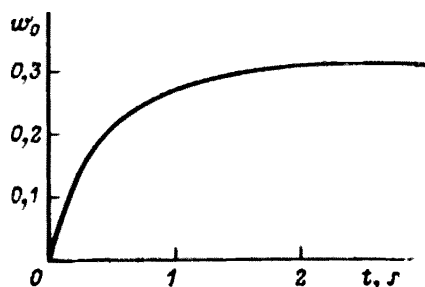
*Решение.* 1. Оценим величины предельных относительных редукций при работе каждого из водозаборов. Воспользуемся для этого формулой (2.177). Вычислим входящие в нее значения компенсационных эффектов:  $g = (10^{-4} / 400)^{1/2} = 0,5 \cdot 10^{-3}$  м<sup>-1</sup>;  $g_2 = (10^{-4} / 1000)^{1/2} = 0,316 \cdot 10^{-3}$  м<sup>-1</sup>. Значение коэффициента  $v$  составляет, по формуле (2.149),  $1000/400 = 2,5$ . Значение  $g_1 x_1 = 0,5 \cdot 10^{-3} \times 1600 = 0,8$ ; согласно формуле (2.177),

$$\gamma = \frac{e^{-0,316 \cdot 10^{-3} (2000 - 1600)}}{\operatorname{ch} 0,8 + (2,5 \cdot 0,316 \cdot 10^{-3} / 0,5 \cdot 10^{-3}) \operatorname{sh} 0,8} = 0,3214.$$

При аналогичном расчете для второго водозабора получаем значение 0,0136. Поэтому изменения расхода реки при эксплуатации подземных вод не превысят соответственно  $2 \cdot 0,3214 = 0,64$  м<sup>3</sup>/с для первого водозабора и  $2 \cdot 0,0136 = 0,03$  м<sup>3</sup>/с — для второго. Первая из определенных таким образом величин редукции составляет 40 % от меженного расхода, вторая — менее 2 %. Поэтому целесообразно пренебречь временной зависимостью редукции от работы второго водозабора и рассчитать только соответствующую характеристику для первого.

2. Рассчитаем значения передаточной функции редукции в нескольких узлах  $p_k$  с целью воспользоваться методом Гохберга численного обращения преобразования Карсона. Поскольку  $t = 18 250$  сут, величина временного масштаба со-

Рис. 2.14. График зависимости  $w_0(t)$  в условиях примера



ставит  $18\,250/16=1140,625$  сут, и первое из значений  $p$  будет равно:  $p_1=1/1140,625=0,8767 \cdot 10^{-3}$  сут $^{-1}$ . Подставив это значение в формулу (2.179), находим  $U_w(p_1)=0,2756$ . Аналогично, для  $p_2=p_1/2$   $U_w(p_2)=0,2972$ ;  $U_w(p_3)=0,3089$ ;  $U_w(p_4)=0,3151$ ;  $U_w(p_5)=0,3182$ . Умножая вычисленные значения передаточной функции на значения функций  $A_k(t)$ , соответствующих  $t/\Delta t=16$ , находим величину относительного сокращения расхода реки к концу 50-го года; равную 0,3205, т. е. редукция практически достигнет своего предельного значения. График функции относительной редукции, построенный по условиям примера, (см. рис. 2.14) показывает, что эта функция достигает своего предельного значения уже к концу второго года эксплуатации.

## 2.7. КЛИНООБРАЗНЫЕ ПЛАСТЫ

Рассмотрим схемы клинообразных пластов с двумя однородными границами питания и с разнородными границами. Такие схемы рассматривались М. Гылыбовым, получившим решения для определения сопротивлений на основе метода отражений, если величина  $\pi/\alpha$ , где  $\alpha$  — угол раствора клина, — целое число.

Так, если  $\alpha=\pi/2$  и водозабор — скважинный, для схемы с двумя границами питания передаточная функция понижения:

$$U_S(M, p) = \frac{1}{2\pi} [K_0(\beta r_1) - K_0(\beta r_2) + K_0(\beta r_3) - K_0(\beta r_4)], \quad (2.180)$$

где  $r_1$  — расстояние от точки  $M$  до водозабора ( $r_1$ ) и каждого из его отображений относительно координатных осей. Гидравлическое сопротивление, соответствующее выражению (2.180):

$$R_0(M, t) = \frac{1}{4\pi} \left[ I\left(\frac{r_1^2}{4at}, gr_1\right) - I\left(\frac{r_2^2}{4at}, gr_2\right) + I\left(\frac{r_3^2}{4at}, gr_3\right) - I\left(\frac{r_4^2}{4at}, gr_4\right) \right]. \quad (2.181)$$

При отсутствии компенсационного питания

$$R_0(M, t) = \frac{1}{4\pi} \left[ -\text{Ei}\left(-\frac{r_1^2}{4at}\right) + \text{Ei}\left(-\frac{r_2^2}{4at}\right) - \text{Ei}\left(-\frac{r_3^2}{4at}\right) + \text{Ei}\left(-\frac{r_4^2}{4at}\right) \right]. \quad (2.182)$$



В пределе, при  $t \rightarrow \infty$ , устанавливается предельное значение гидравлического сопротивления

$$R_0(M, \infty) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_2 r_4}{r_1 r_3}. \quad (2.183)$$

Для схемы с разнородными границами при  $\alpha = 90^\circ$  выражение для передаточной функции понижения имеет вид:

$$U_S(M, p) = \frac{1}{2\pi} [K_0(\beta r_1) + K_0(\beta r_2) - K_0(\beta r_3) - K_0(\beta r_4)], \quad (2.184)$$

для гидравлического сопротивления —

$$R_0(M, t) = \frac{1}{4\pi} \left[ I\left(\frac{r_1^2}{4at}, gr_1\right) + I\left(\frac{r_2^2}{4at}, gr_2\right) - \right. \\ \left. - I\left(\frac{r_3^2}{4at}, gr_3\right) - I\left(\frac{r_4^2}{4at}, gr_4\right) \right], \quad (2.185)$$

а в условиях отсутствия компенсационного питания —

$$R_0(M, t) = \frac{1}{4\pi} \left[ -\text{Ei}\left(-\frac{r_1^2}{4at}\right) - \text{Ei}\left(-\frac{r_2^2}{4at}\right) + \right. \\ \left. + \text{Ei}\left(-\frac{r_3^2}{4at}\right) + \text{Ei}\left(-\frac{r_4^2}{4at}\right) \right]. \quad (2.186)$$

В пределе, при  $t \rightarrow \infty$  устанавливается стационарное значение сопротивления, равное

$$R_0(M, \infty) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_3 r_4}{r_1 r_2}. \quad (2.187)$$

Задача по определению изменения поверхностного стока в результате эксплуатации подземных вод одиночным водозабором в условиях пласта-квадранта ( $\alpha = 90^\circ$ ) при отсутствии компенсационного питания решена М. Хантушем. Функция редукции в его решении

$$w_0(t) = M^* \left( \text{tg } \theta_0, \frac{x_0^2}{4at} \right); \quad (2.188)$$

$$M^*(\alpha, \beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\alpha e^{-\beta(1+u^2)} \frac{du}{1+u^2}. \quad (2.189)$$

Вычисление значений функции  $(\alpha, \beta)$ , может быть осуществлено с помощью программы 19 (см. приложение).

Зависимость (2.188) дает выражение для временной характеристики изменения поверхностного стока реки 1 (горизонтальный луч); для того, чтобы получить соответствующие выражения для реки 2, следует заменить в (2.188) величину  $\theta_0$  на  $(\pi/2) - \theta_0$ , а величину  $x_0$  — на величину  $y_0$ .

В пределе, при  $t \rightarrow \infty$ , величина предельной редукции расхода реки 1 равна

$$\gamma_1 = 1 - \frac{2\theta_0}{\pi}; \quad (2.190)$$

соответственно реки 2 —

$$\gamma_2 = \frac{2\theta_0}{\pi}. \quad (2.191)$$

Суммарное изменение расхода обеих рек описывается функцией редукции вида

$$w_0(t) = 1 - \operatorname{erfc} \frac{x_0}{2\sqrt{at}} \operatorname{erfc} \frac{y_0}{2\sqrt{at}}. \quad (2.192)$$

Функция интегральной редукции по М. Хантушу, для реки 1

$$v(t) = \left(1 + \frac{x_0^2}{2at}\right) M^* \left(\operatorname{tg} \theta_0, \frac{x_0^2}{4at}\right) + \frac{2}{\pi} \operatorname{tg} \theta_0 \frac{x_0^2}{4at} \operatorname{Ei} \left(-\frac{r_0^2}{4at}\right) - \\ - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{x_0}{2\sqrt{at}} e^{-x_0^2/4at} \operatorname{erf} \frac{y_0}{2\sqrt{at}}. \quad (2.193)$$

Суммарная функция интегральной редукции определена выражением

$$v(t) = 1 - S^* \left( \frac{x_0}{2\sqrt{at}}, \frac{y_0}{2\sqrt{at}} \right), \quad (2.194)$$

$$S^*(\alpha, \beta) = \int_0^1 \operatorname{erf} \frac{\alpha}{\sqrt{\tau}} \operatorname{erf} \frac{\beta}{\sqrt{\tau}} d\tau. \quad (2.195)$$

## 2.8. СХЕМЫ ПЛАСТОВ-ПОЛУПОЛОС

Возможны пять вариантов пласта-полуполосы, имеющей по крайней мере одну границу питания (рис. 2.15), характеризующихся различным взаимным расположением рек и границ постоянного расхода

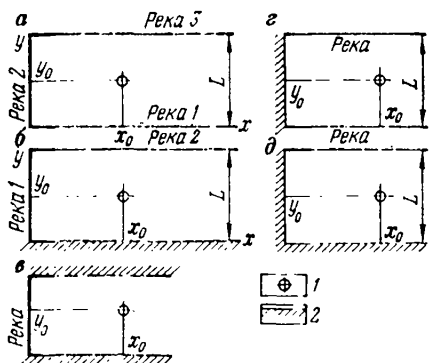


Рис. 2.15. Схемы пластов-полуполос:

1 — скважина; 2 — граница постоянного расхода

янного расхода. Схемы пластов-полуполос рассматривались М. Хантушем, получившим для них зависимости понижения от координат и времени.

Рассмотрим схему, изображенную на рис. 2.15, а, содержащую три водотока. Передаточная функция понижения для точки в центре водозабора в таких условиях имеет вид:

$$U_s = \frac{2}{BL} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\pi n y_0}{L}}{\frac{p}{a} + g^2 + \frac{\pi^2 n^2}{L^2}} \left[ 1 - e^{-x \sqrt{\frac{p}{a} + g^2 + \frac{\pi^2 n^2}{L^2}}} \right]. \quad (2.196)$$

В пределе, при  $t \rightarrow \infty$ , устанавливается стационарное распределение сопротивлений; при  $g=0$  оно описывается выражением

$$R_0(\infty) = \frac{2L}{B} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi n y_0 / L}{\pi^2 n^2} (1 - e^{-\pi n x / L}). \quad (2.197)$$

При значениях  $x > (0,5 - 1,0)L$  значение сопротивления перестает зависеть от  $x$  и достигает наибольшей величины, равной

$$\frac{L}{B} \pi^2 \frac{y_0}{L} \left( 1 - \frac{y_0}{L} \right).$$

При отборе подземных вод одиночным водозабором передаточная функция редукции по отношению к реке 1 выражается формулой

$$U_{\Psi}^{(1)} = \frac{\operatorname{sh}(L - y_0) \sqrt{\frac{p}{a} + g^2}}{\operatorname{sh} L \sqrt{\frac{p}{a} + g^2}} - 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin \pi n y_0 / L}{\pi^2 n^2 + L^2 \left( \frac{p}{a} + g^2 \right)} \times \\ \times e^{-\frac{x_0}{L} \sqrt{\pi^2 n^2 + L^2 \left( \frac{p}{a} + g^2 \right)}} \quad (2.198)$$

По отношению к реке 2

$$U_{\Psi}^{(2)} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi y_0 / L}{2n-1} e^{-\frac{x_0}{L} \sqrt{(2n-1)^2 \pi^2 + L^2 \left( \frac{p}{a} + g^2 \right)}}. \quad (2.199)$$

Передаточная функция редукции по отношению к реке 3 находится из выражения (2.198), если заменить в нем  $y_0$  на  $L - y_0$ .

Ряды (2.198), (2.199) при характерных значениях параметров сходятся достаточно быстро и легко вычисляются. Для определения функции редукции по отношению к реке 1 ее удобно представить в виде

$$w_0^{(1)}(t) = w_{0n}^{(1)}(t) - \Delta w_0^{(1)}(t), \quad (2.200)$$

где  $w_{0n}^{(1)}(t)$  — функция редукции для схемы пласта-полосы с двумя границами питания, определяемая формулой (2.125), в которой

предельное значение функции редукции определяется выражением (2.127), а значения  $\lambda_k$  и  $C_k$  — соответственно по формулам (2.129) и (2.130); функция

$$\Delta w_0^{(1)}(t) = 2\pi \left(\frac{x_0}{L}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin \pi n y_0/L}{\pi^2 n^2 \left(\frac{x_0}{L}\right)^2 + g^2 L^2} \times \\ \times D_0\left(\frac{x_0}{2\sqrt{at}}, \sqrt{\pi^2 n^2 \frac{x_0^2}{L^2} + g^2 L^2}\right), \quad (2.201)$$

где функция  $D_0(z, \alpha)$  задается выражением

$$D_0(z, \alpha) = D(z, \alpha) - \exp(-\alpha^2/4z^2) \operatorname{erfc} z. \quad (2.202)$$

Функция редукции по отношению к реке 2 получается на основании преобразования Карсона от изображения (2.199) с учетом формулы (2.79), однако более простое выражение получается, если применить метод отражений относительно реки 2:

$$w_0^{(2)}(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi y_0/L}{2n-1} D\left(\frac{x_0}{2\sqrt{at}}; gL + (2n-1)\pi x_0/L\right). \quad (2.203)$$

Соответствующие функции интегральной редукции по отношению к реке 1 имеют вид:

$$v_1(t) = v_{1n}(t) - \Delta v_1(t), \quad (2.204)$$

где  $v_{1n}$  — функция интегральной редукции для схемы пласта-полосы с двумя границами питания (2.127), параметры которой определяются выражениями (2.129) — (2.131), (2.136):

$$\Delta v_1(t) = 2\pi \left(\frac{x_0}{L}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin \pi n y_0/L}{\pi^2 n^2 \left(\frac{x_0}{L}\right)^2 + (gL)^2} \times \\ \times D_1\left(\frac{x_0}{2\sqrt{at}}; \sqrt{\pi^2 n^2 \left(\frac{x_0}{L}\right)^2 + g^2 L^2}\right), \quad (2.205)$$

$$D_1(z, \alpha) = \Lambda(z, \alpha) - \frac{4z^2}{\alpha^2} D_0(z, \alpha), \quad (2.206)$$

функция  $\Lambda(z, \alpha)$  определена выражением (2.84). Несмотря на сложную структуру, ряд (2.205) сходится быстро, и в большинстве реально встречающихся случаев учитывается не более трех его первых членов.

Функция интегральной редукции по отношению к реке 2

$$v_2(t) = w_0^{(2)}(t) - \frac{x_0^2}{at} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi y_0/L}{(2n-1)[gL + (2n-1)\pi x_0/L]} \times \\ \times D^*\left(\frac{x_0}{2\sqrt{at}}; gL + (2n-1)\pi x_0/L\right). \quad (2.207)$$

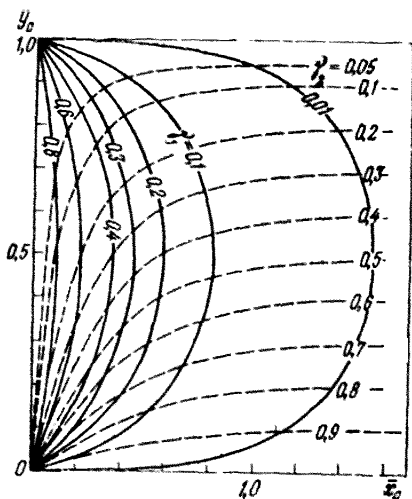


Рис. 2.16. Изолинии величин  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  в условиях пласта-полуполосы с тремя границами питания

В условиях отсутствия компенсационного питания ( $g=0$ ) предельные значения функций редукции выражаются в явном виде:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= 1 - \frac{y_0}{L} - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\exp\left(-\frac{\pi x_0}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y_0}{L}\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi y_0}{L}\right) \exp\left(-\frac{\pi x_0}{L}\right)}; \\ \gamma_2 &= \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2 \exp\left(-\pi x_0/L\right) \sin\left(\frac{\pi y_0}{L}\right)}{1 - \exp\left(-2\pi x_0/L\right)}; \\ \gamma_3 &= \frac{y_0}{L} - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\exp\left(-\pi x_0/L\right) \sin\left(\frac{\pi y_0}{L}\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi y_0}{L}\right) \exp\left(-\frac{\pi x_0}{L}\right)}.\end{aligned}\quad (2.208)$$

На рис. 2.16 построены изолинии величин  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  в координатах  $x_0/L$ ,  $y_0/L$ . Величина  $\gamma_3$  по этому чертежу может быть найдена из очевидного соотношения

$$\gamma_3 = 1 - \gamma_1 - \gamma_2.$$

Например, для точки с координатами  $x_0=0,4$ ;  $y_0=0,175$  имеем  $\gamma_1=0,7$ ;  $\gamma_2=0,2$ ; откуда  $\gamma_3=0,1$ .

Анализ полученных решений и диаграмм изолиний предельных величин функции редукции позволяет выделить условия, при которых возможно пренебрежение влиянием реки 2. Это можно сделать, оценив значение  $\gamma_2$ . Практически, если одиночный водозабор расположен вблизи реки 2 (точнее, если  $\bar{x}_0 \leq 0,03$ ), пренебрежение влиянием этой реки возможно лишь при  $gL \geq 3$ . Если скважина удалена от реки 2 (а именно, при  $\bar{x}_0 > 0,8$ ) можно пренебрегать влиянием реки 2 даже при компенсационном эффекте, равном нулю. В промежуточной области ( $0,03 \leq \bar{x}_0 \leq 0,8$ ) на-

блюдается переход от преимущественного влияния реки 2 до его исчезновения. При значениях  $\bar{x}_0 \geq 0,22$  ограничение на величину  $g$ , при которых возможно пренебрежение влиянием реки 2, выражается неравенством

$$gL + \pi x_0/L \geq 3. \quad (2.209)$$

В случае схемы пласта-полосы с разнородными границами (рис. 2.15, б) передаточные функции редукции по отношению к рекам 1 и 2 соответственно равны:

$$U_W^{(1)} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos(2n+1) \frac{\pi \bar{y}_0}{2} e^{-\bar{x}_0 \sqrt{(\beta L)^2 + \pi^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}}; \quad (2.210)$$

$$U_W^{(2)} = \frac{\operatorname{ch} \beta y_0}{\operatorname{ch} \beta L} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1) \cos(2n-1) \frac{\pi \bar{y}_0}{2}}{\pi^2 (2n-1)^2 + 4(\beta L)^2} \times \\ \times \exp(-\bar{x}_0 \sqrt{\pi^2 (2n-1)^2 + 4(\beta L)^2}). \quad (2.211)$$

Соответствующие функции редукции:

$$w_0^{(1)} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos(2n+1) \frac{\pi \bar{y}_0}{2} \times \\ \times D\left(\frac{x_0}{2\sqrt{at}}; \sqrt{\pi^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + g^2 L^2}\right); \quad (2.212)$$

$$w_0^{(2)}(t) = w_{0n}^{(2)}(t) - \Delta w_0^{(2)}(t), \quad (2.213)$$

где  $w_{0n}^{(2)}$  — функция редукции для схемы пласта-полосы с разнородными границами, определяемая формулой (2.129) при параметрах  $\gamma$ ,  $C_k$  и  $\lambda_k$ , определяемых соответственно выражениями (2.132—2.134), причем в качестве  $d$  берется значение  $L - y_0$ ;

$$\Delta w_0^{(2)} = 4\pi \bar{x}_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n-1) \cos(2n-1) \frac{\pi \bar{y}_0}{2}}{4(gL)^2 + (2n-1)^2 \pi^2 \bar{x}_0^2} \times \\ \times D_0\left(\frac{x_0}{2\sqrt{at}}; \sqrt{\pi^2 (2n-1)^2 \bar{x}_0^2 + 4g^2 L^2}\right). \quad (2.214)$$

Соответствующие функции интегральной редукции

$$v_1(t) = w_0^{(1)} - \frac{x_0^2}{at} \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(2n+1) \frac{\pi \bar{y}_0}{2}}{(2n+1) \sqrt{\pi^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \bar{x}_0^2 + g^2 L^2}} \times \\ \times D\left(\frac{x_0}{2\sqrt{at}}; \sqrt{\pi^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \bar{x}_0^2 + g^2 L^2}\right); \quad (2.215)$$

$$v_2(t) = v_{2n}(t) - \Delta v_2(t), \quad (2.216)$$

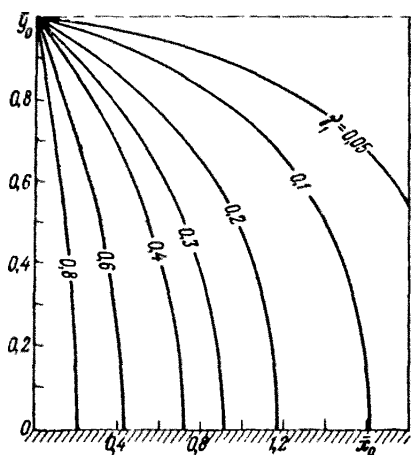


Рис. 2.17. Изолинии величины  $\gamma_1$  в условиях пласта-полуполосы типа «б»

где  $v_{2n}(t)$  — функция интегральной редукции в схеме пласта-полосы с разнородными границами;

$$\Delta v_2(t) = 4\pi \left(\frac{x_0}{L}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n-1) \cos \frac{(2n-1) \pi \bar{y}_0}{2}}{4g^2 L^2 + (2n-1)^2 \pi^2 \bar{x}_0^2} \times \\ \times D_1 \left( \frac{x_0}{2\sqrt{at}}; \sqrt{\pi^2 \bar{x}_0^2 (2n-1)^2 + \chi^2} \right). \quad (2.217)$$

В случае отсутствия компенсационного питания предельные значения функции редукции равны:

$$\gamma_1 = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left[ (1 - e^{-\pi \bar{x}_0})^{-1} 2e^{-\pi \bar{x}_0/2} \cos \frac{\pi \bar{y}_0}{2} \right]. \quad (2.218)$$

Изолинии величины  $\gamma_1$  приведены на рис. 2.17. Влияние реки 1 на распределение значений редукции между реками может быть, так же как и в случае первой схемы, оценено с помощью значений  $\gamma_1$ . Так, при  $\bar{x}_0 \leq 0,08$  находится зона преимущественного влияния реки 1, при  $\bar{x}_0 \geq 2$  ее влияние практически отсутствует. В промежуточной области, если  $\bar{x}_0 \geq 0,62$ , и одновременно

$$\chi + \pi \bar{x}_0/2 \geq 4, \quad (2.219)$$

влиянием реки 1 также можно пренебрегать.

В случае схемы, приведенной на рис. 2.15, в передаточная функция редукции совпадает с выражением (2.79) для полуограниченного пласта (это следует из принципа отражений), поэтому все определения изменения расхода и стока в этой схеме могут проводиться по соответствующим расчетным зависимостям. На основании принципа отражений аналогично заключаем, что схема, приведенная на рис. 2.15, в в отношении изменения поверхностного стока эквивалентна схеме пласта-полосы с двумя границами питания, а схема на рис. 2.15, д — схеме пласта-полосы с разнородными границами.

## 2.9. СХЕМЫ ОГРАНИЧЕННЫХ ПЛАСТОВ

В работе [10] показано, что передаточные функции понижения и редукиции, а также остальные связанные с ними выражения могут быть получены в виде одностепенных разложений:

$$U_S(M, p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n}{\bar{p} + \lambda_n} e_n(M); \quad (2.220)$$

$$R_0(M, \bar{t}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n}{\lambda_n} (1 - e^{-\lambda_n \bar{t}}) e_n(M); \quad (2.221)$$

$$U_W(p) = \gamma - \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\lambda_n}{\bar{p} + \lambda_n}; \quad (2.222)$$

$$w_0(t) = \gamma - \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n \bar{t}}, \quad (2.223)$$

где  $\lambda_n$  и  $l_n(M)$  — соответственно собственные значения и собственные функции задачи в относительных координатах (размеры области приведены к характерному масштабу  $L$ );  $\bar{p} = pL^2/a$ ,  $\bar{t} = at/L^2$ ,

$$\chi_n = \iint_{(D)} e_n(M) \frac{f(M)}{\mu} dx dy. \quad (2.224)$$

Функция  $f(M)$  характеризует распределение модуля водоотбора по области  $(D)$  — при равномерном отборе  $f(M) = 1$ ; в случае линейного ряда  $f(M) = \delta(y - \varphi(x))$ , где  $y = \varphi(x)$  — уравнение кривой в области  $(D)$ , изображающей линейный ряд; в случае одиночного точечного водозабора  $f(M) = \delta(x - x_0)$ ,  $\delta(y - y_0)$ , где  $x_0$ ,  $y_0$  — координаты водозабора.

В формулах (2.222—2.223)  $\gamma$  — предельное значение функции редукиции,

$$C_n = \frac{\chi_n}{\lambda_n} \int_{(\Gamma)} \bar{T} \frac{\partial e_n}{\partial n} d\Gamma, \quad (2.225)$$

$\bar{T} = T(M)/T_*$  — относительное значение коэффициента водопроводимости ( $T_*$  — его характерная величина, принимаемая в качестве базисной при выводе расчетных формул),  $(\Gamma)$  — граница питания области  $(D)$ ;  $n$  — внешняя нормаль к ней. Ниже приводятся некоторые выражения собственных чисел и функций, а также других параметров, входящих в формулы (2.220—2.223) для ряда наиболее простых схем.

**Пласты-прямоугольники.** Рассмотрим группу схем пластов-прямоугольников (рис. 2.18). Если масштабом длины выбран размер прямоугольника  $L_1$  — его длина вдоль оси  $x$ , собственные числа  $\lambda_{nk}$  в случае схемы «а» определяются равенством

$$\lambda_{nk} = \pi^2 k^2 + \pi^2 n^2 / v^2 + \chi^2, \quad (2.226)$$



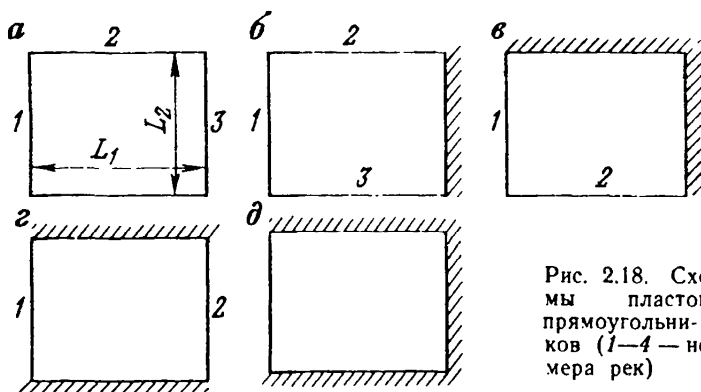


Рис. 2.18. Схемы пластов прямоугольников (1—4 — номера рек)

где  $v = L_2/L_1$ ,  $\chi = gL$  (суммирование в этом случае удобно вести по двум индексам, при этом, например, сумма (2.220) принимает вид:

$$U_S(M, p) = \sum_{n, k=1}^{\infty} \frac{\chi_{nk}}{\bar{p} + \lambda_{nk}} e_{nk}(M), \quad (2.227)$$

а смысл всех элементов, входящих в выражения (2.220—223), остается прежним).

Собственные функции в условиях схемы «а» имеют вид

$$e_{nk}(M) = \frac{2}{\sqrt{v}} \sin k\pi \bar{x} \sin n\pi \frac{\bar{y}}{v}. \quad (2.228)$$

Для определения изменения расхода реки 1 коэффициенты разложения  $C_{nk}^{(1)}$  определяются равенствами

$$C_{nk}^{(1)} = \frac{8k}{2n-1} \frac{\sin k\pi \bar{x}_0 \sin (2n-1)\pi \bar{y}_0/v}{\pi^2 k^2 + \pi^2 \frac{(2n-1)^2}{v^2} + \chi^2}; \quad (2.229)$$

по отношению к реке 2

$$C_{nk}^{(2)} = \frac{8n}{v^2 (2k-1)} \frac{\sin (2k-1)\pi \bar{x}_0 \sin \pi n \bar{y}_0/v}{\pi^2 (2k-1)^2 + \pi^2 n^2/v^2 + \chi^2}. \quad (2.230)$$

Чтобы получить аналогичные выражения для реки 3 следует заменить в формулах  $\bar{x}_0$  на  $1 - \bar{x}_0$ ; для реки 4 — заменить  $\bar{y}_0$  на  $v - \bar{y}_0$ .

В случае схемы «б» собственные значения определяются равенством

$$\lambda_{nk} = \pi^2 k^2 + \frac{\pi^2 \left(n - \frac{1}{2}\right)^2}{v^2} + \chi^2, \quad (2.231)$$

собственные функции — равенством

$$e_{nk}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{2}{\sqrt{v}} \sin k\pi \bar{x} \sin \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi \frac{\bar{y}}{v}, \quad (2.232)$$

коэффициенты разложения для оценки редукиции по отношению к реке 1

$$C_{nk}^{(1)} = \frac{8k}{2n-1} \frac{\sin k\pi\bar{x}_0 \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) \pi\bar{y}_0/v}{\pi^2 k^2 + \pi^2 \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 / v^2 + \chi^2}; \quad (2.233)$$

по отношению к реке 2 —

$$C_{nk}^{(2)} = \frac{4}{v^2} \frac{2n-1}{2k-1} \frac{\sin(2k-1)\pi\bar{x}_0 \sin(2n-1)\frac{\pi\bar{y}_0}{2v}}{\pi^2(2k-1)^2 + \pi^2\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 / v^2 + \chi^2}. \quad (2.234)$$

Для получения коэффициентов разложения соответствующих реке 3, следует в формулах (2.233), (2.234) заменить  $\bar{x}_0$  на  $1 - \bar{x}_0$ .

В условиях схемы «в» собственные значения равны

$$\lambda_{nk} = \pi^2 \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{v^2} \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \chi^2, \quad (2.235)$$

собственные функции —

$$e_{nk}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{2}{\sqrt{v}} \sin\left(k - \frac{1}{2}\right) \pi \bar{x} \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) \pi \frac{\bar{y}}{v}; \quad (2.236)$$

коэффициенты разложения  $C_{nk}^{(1)}$  для оценки изменения расхода реки 1 равны:

$$C_{nk}^{(1)} = 4 \frac{2k-1}{2n-1} \frac{\sin(2k-1)\frac{\pi\bar{x}_0}{2} \sin(2n-1)\frac{\pi\bar{y}_0}{2v}}{\pi^2 \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{v^2} \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \chi^2}; \quad (2.237)$$

по отношению к реке 2

$$C_{nk}^{(2)} = \frac{4}{v^2} \frac{2n-1}{2k-1} \frac{\sin(2k-1)\frac{\pi\bar{x}_0}{2} \sin(2n-1)\frac{\pi\bar{y}_0}{2v}}{\pi^2 \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \pi^2 \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 / v^2 + \chi^2}. \quad (2.238)$$

В случае схемы «г» собственные значения определяются равенством

$$\lambda_{nk} = \pi^2 k^2 + \pi^2 \frac{n^2}{v^2} + \chi^2; \quad (2.239)$$

собственные функции —

$$e_{nk}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{2}{\sqrt{v}} \sin k\pi\bar{x} \cos \frac{n\pi\bar{y}}{v}, \quad n \geq 1,$$

$$e_{0,k}(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\frac{2}{v}} \sin k\pi\bar{x}. \quad (2.240)$$

Для оценки изменения поверхностного стока можно выписать коэффициенты разложения, аналогичные предыдущим схемам.

Однако в этом случае величину редукции удобнее оценивать по формулам для пласта-полосы с двумя границами питания (это вытекает из принципа отражений).

Наконец, в случае схемы «д» собственные значения определяются равенством

$$\lambda_{nk} = \pi^2 \left( k - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{\pi^2 n^2}{v^2} + \chi^2; \quad (2.241)$$

собственные функции — выражениями

$$e_{nk}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{2}{\sqrt{v}} \sin \pi \left( k - \frac{1}{2} \right) \bar{x} \cos \pi n \bar{y} / v, \quad n \geq 1;$$

$$e_{0,k}(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\frac{2}{v}} \sin \pi \left( k - \frac{1}{2} \right) \bar{x}. \quad (2.242)$$

Изменения поверхностного стока и в этом случае удобнее оценивать на основе формул для пласта-полосы с разнородными границами.

**Схема пласта-круга с границей питания.** Рассмотрим теперь другой простой случай конфигурации ограниченного водоносного пласта, а именно, пласт, имеющий форму круга с границей питания, эксплуатируемой одиночным водозабором (его полярные координаты  $\eta_0, \theta_0$ ). Собственные числа для этого случая равны

$$\lambda_{nk} = j_{kn}^2 + \chi^2, \quad n = 1, 2, \dots; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.243)$$

где  $j_{kn}$  —  $n$ -й положительный корень бесселевой функции  $J_k(z)$ ;  $\chi = Rg$ . Собственные функции определяются выражением

$$e_{nk}(\bar{r}, \theta) = \frac{J_k(j_{kn}\bar{r})}{\sqrt{\pi} |J'_k(j_{kn})|} \begin{cases} \cos k\theta \\ \sin k\theta \end{cases} \quad (2.244)$$

(каждому индексу  $k$  соответствуют две собственные функции).

Ниже приведены некоторые значения величин  $j_{kn}$  и  $|J'_k(j_{kn})|$

$k$ . . . . .	1	2	3	4	5	6
$j_{kn}$ . . . . .	2,4048	5,5201	8,6537	11,792	14,931	18,071
$ J'_0(j_{kn}) $ . . . . .	0,5192	0,3403	0,2715	0,2325	0,2067	0,1877

Коэффициенты разложения  $C_{nk}$  в формуле (2.229) равны нулю при  $k \geq 1$ ; при  $k=0$

$$C_{n,0} = 2 \frac{J_0(j_{0,n} \bar{r}_0) J_{0,n}}{J_1(j_{0,n}) (j_{0,n}^2 + \chi^2)}. \quad (2.245)$$

Ряд в формуле (2.229) при коэффициентах  $C_{n,0}$ , определенных по формуле (2.245), может быть просуммирован и выражен в замкнутой форме:

$$U_{\Psi}(p) = \frac{I_0(\bar{r}_0 \sqrt{p + \chi^2})}{I_0(\sqrt{p + \chi^2})}, \quad (2.246)$$

где  $I_0(z)$  — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. Для определения временной зависимости в этом случае целесообразно использовать численные методы обращения преобразования Лапласа. Предельное значение функции редукции может быть получено на основании выражения (2.246), если положить в нем  $p = 0$ :

$$\gamma = I_0(\chi \bar{r}_0) / I_0(\chi). \quad (2.247)$$

## 2.10. ОЦЕНКА ИЗМЕНЕНИЯ ДРЕНАЖНОГО СТОКА ПРИ ЭКСПЛУАТАЦИИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Если отбор подземных вод осуществляется в староорошаемых регионах, изрезанных достаточно густой сетью горизонтального дренажа, коллекторно-дренажный сток под влиянием эксплуатации подземных вод будет претерпевать изменения. В работе [11] приведено решение задачи об оценке временной зависимости изменения коллекторно-дренажного стока в условиях плотной сети горизонтального дренажа; при этом передаточная функция редукции выражается формулой:

$$U_{др}(p) \approx \frac{\varepsilon_{др.0}}{T \cdot \Delta_d} \frac{1}{\frac{p}{a} + g^2}, \quad (2.248)$$

где  $\varepsilon_{др.0}$  — модуль дренажного стока при наиболее высоком стоянии уровня грунтовых вод;  $\Delta_d$  — глубина заложения дна дрен;

$$g^2 = \frac{1}{T} \left( \frac{\varepsilon_0}{\Delta_{кр}} + \frac{\varepsilon_{др.0}}{\Delta_d} \right), \quad (2.249)$$

$\varepsilon_0$  — испаряемость;  $\Delta_{кр}$  — критическая глубина залегания грунтовых вод по Аверьянову. Параметр  $\varepsilon_{др.0}$  может оцениваться по зависимости

$$\varepsilon_{др.0} \approx 12\Pi_d^2 T_0 \Delta_d, \quad (2.250)$$

где  $\Pi_d$  — плотность дренажа,  $m^{-1}$ ,  $T_0$  — коэффициент водопроницаемости покровных отложений. Соответствующая функция редукции имеет вид:

$$\omega_{др}(t) = C(1 - e^{-t/\tau}); \quad (2.251)$$

$$C = \left( 1 + \frac{\varepsilon_0}{12T_0 \Delta_{кр} \Pi_d^2} \right)^{-1}, \quad (2.252)$$

$$\tau = 1/ag^2. \quad (2.253)$$

# ОЦЕНКА ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ ПОДЗЕМНЫХ ВОД И ИЗМЕНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНОГО СТОКА ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ ВОДООТБОРА

Периодический режим отбора подземных вод характерен для условий их использования в орошении. Как отмечалось в гл. 1, при гидрогеологических расчетах водозаборов подземных вод в этом случае традиционно использовались способы, связанные с представлением расчетного графика водоотбора в виде ступенчатой функции времени [16, 19], причем реакция геофильтрационной системы на возмущение такого вида находится с помощью применения принципа суперпозиции, сложением реакций от влияния каждой отдельно взятой ступени графика.

Ступенчатый график водоотбора, конечно, идеализирован и служит исключительно для удобства проведения расчетов с использованием разработанного методического аппарата, основанного на гидравлических сопротивлениях. Известны модификации, упрощающие применение указанного способа. Можно представить себе, что в каждом отдельно взятом году форма графика водоотбора действительно приближается к ступенчатой, однако от года к году как величины, так и сроки начала и конца каждой ступени в любых природно-хозяйственных условиях подвержены случайным колебаниям, обусловленным многочисленными естественными и эксплуатационными факторами. Поэтому, в отличие от существующей практики расчетов производительности водозаборов на основе детерминированного графика дебита, соответствующего характерному режиму отбора подземных вод в многолетнем разрезе, раздельный учет усредненного гидрографа их отбора и его случайных колебаний в отдельные годы служит основой более обоснованной оценки эксплуатационных ресурсов подземных вод.

Усредненный график отбора подземных вод, понимаемый как средний по ряду конкретных лет, т. е., как математическое ожидание, имеет при этом сглаженный характер (из-за случайных вариаций начал и концов каждой ступени). Эффективным средством описания гладких временных периодических зависимостей служат разложения в тригонометрические ряды Фурье [10]. Методы такого анализа периодических природных и технических процессов широко применяются во многих теоретических и прикладных отраслях науки. Использование рядов Фурье, по сравнению с методом ступенчатых гидрографов, дает ряд преимуществ: 1) сокращается объем необходимых вычислений, особенно если требуется расчет только характерных (обычно экстремальных) величин реакций геофильтрационных систем на периодическое возмущение; 2) облегчается теоретический анализ получаемых зависимостей от отдельных факторов и параметров; 3) малозначимые локальные особенности и случайные шумы, содержащиеся в получаемых на

практике гидрографах водоотбора, в существенной степени локализуются в обертонах разложения и при отбрасывании последних исключаются.

Разложение периодической временной зависимости водоотбора было приведено в гл. 1 в виде (1.90). Сходимость этого ряда, т. е. характер убывания величин коэффициентов  $Q_n$  при возрастании номера гармоники  $n$ , связана с характеристиками гладкости функции  $Q(t)$  [10]. Вследствие того, что реальные среднегодовые графики водоотбора характеризуются достаточной гладкостью, основную информацию об изменении их величины во времени несут первые две-четыре гармоники разложения (1.90). Роль гармоник высших порядков (при  $n \geq 3 - 4$ ) в формировании значений функции  $Q(t)$  невелика, поэтому они, как правило, могут быть исключены из рассмотрения.

Поскольку число дней в году, являющееся периодом колебаний ( $\tau = 1 \text{ год} = 365 \text{ сут}$ ) в выражении (1.90), практически совпадает с количеством градусов в периоде тригонометрических функций ( $2\pi = 360^\circ$ ), представляется удобной градусная мера углов, так как при этом в выражении (1.90) частота  $\omega = 2\pi/\tau$  может быть принята равной 1 градус/сут. С учетом этого замечания расчетная зависимость величины отбора подземных вод от времени (1.90) может быть несколько упрощена

$$Q(t) = Q_0 + \sum_{n=1}^N Q_n \cos(nt - \varphi_n), \quad (3.1)$$

где  $N$  — число учитываемых гармоник, время измеряется в сутках, а фазовые углы  $\varphi_n$  — в градусах, при этом с учетом сделанного выше замечания, аргументы тригонометрических функций измеряются в градусной мере. Например, если  $n=2$ ,  $t=150 \text{ сут}$ , а  $\varphi_2 = 50^\circ$ , аргумент косинуса будет равен  $2 \cdot 150 - 50 = 250^\circ$ .

При оценке эксплуатационных ресурсов подземных вод в условиях периодического режима водоотбора встречаются задачи двух типов: 1) известен график водоотбора, требуется установить, будет ли максимальное значение понижения уровня (напора) подземных вод превышать предельное допустимое в последнем расчетном году; 2) задана форма графика водоотбора, т. е. фактически, график отношения его значений к среднегодовому, требуется определить величину среднегодового дебита, при котором максимальное понижение в последнем из расчетного срока году будет равно предельно допустимому.

В гл. 1 было обосновано представление временной зависимости понижения в виде суммы аperiodической  $S_a(t)$  и периодической  $S_p(t)$  компонент. Рассмотрим периодическую компоненту понижения, определяемую формулой (1.93). Так как  $S_p(M, t)$  — периодическая функция времени, существует такое значение  $t = t_m$  ( $0 \leq t_m \leq \tau = 365 \text{ сут}$ ), при котором компонента  $S_p(M, t)$  достигнет своего наибольшего значения  $S_{pm}$ . Аperiodическая составляющая по сравнению с периодической изменяется медленно, поэтому

можно считать, что наибольшее значение понижения каждый год приходится приблизительно на одну и ту же дату, а именно, соответствующую значению  $t_m$ . При этом сумма

$$S_m^{(v)} = S_0^{(v)} + S_{pm} \quad (3.2)$$

представляет собой оценку наибольшего понижения в  $v$ -й год эксплуатации;  $S_0^{(v)} = S_0((v-1)\tau + t_m)$  — значение аperiodической составляющей понижения в  $v$ -й год на дату, соответствующую времени  $t_m$ . Таким образом для решения первой из поставленных задач, необходимо сравнить величины  $S_m^{(v)}$  и  $S_{доп}$  — предельно допустимое понижение уровня (напора) подземных вод.

Для решения второй задачи представим величину  $S_{pm}$  в виде

$$S_{pm} = \frac{Q_0}{T} R_{pm}, \quad (3.3)$$

где  $R_{pm}$  — максимальное значение величины  $S_p(t)/Q_0$  равное

$$R_{pm} = \sum_{n=1}^N R_n \bar{Q}_n \cos(nt_m - \varphi_n - \Psi_n), \quad (3.4)$$

где  $\bar{Q}_n = Q_n/Q_0$ . Суммарная величина максимального понижения в  $v$ -й год может быть теперь представлена в виде

$$S_m^{(v)} = \frac{Q_0}{T} R_m^{(v)}, \quad (3.5)$$

$$\text{где } R_m^{(v)} = R_0((v-1)\tau + t_m) + R_{pm}. \quad (3.6)$$

Для решения второй из сформулированных задач, получаем формулу

$$Q_0 = \frac{TS_{доп}}{R_m^{(v)}}. \quad (3.7)$$

Формулы (3.2) и (3.7) представляют собой методическую основу для решения соответственно, первой и второй задач оценки эксплуатационных ресурсов подземных вод. Для практического применения этой методики необходимо, однако, указать приемы вычисления параметров для представления графиков водоотбора в виде (3.1) (т. е.  $Q_n$  и  $\varphi_n$ ), а также способы вычисления гармонических сопротивлений  $R_n$  и фазовых углов  $\varphi_n$ , входящих в формулу (3.4). В настоящей главе, помимо рассмотрения способов вычисления названных параметров и величин, предлагается аналогичная методика для оценки сезонного изменения поверхностного стока при циклическом отборе подземных вод. Однако прежде чем подойти непосредственно к техническим подробностям метода тригонометрических представлений циклического водоотбора, сделаем еще одно замечание. Оно связано с тем обстоятельством, что, несмотря на приведенные выше преимущества этого метода по сравнению с традиционной методикой, основанной на ступенчатых гра-

фиках, для применения предлагаемого метода необходимо проделать ряд математических операций, непривычных для практики гидрогеологических расчетов. Главная из этих операций — нахождение частотных характеристик понижения. Может возникнуть закономерный вопрос: нельзя ли все-таки, оставив в стороне частотные характеристики, пользоваться более простыми по структуре ступенчатыми графиками? Разумеется, можно: результаты расчета и в том, и в другом случае будут очень близкими. Есть, однако, случаи, когда применение частотных характеристик обязательно, например, когда возникает необходимость в расчете вероятностных характеристик понижения и редукции, что детально рассмотрено в гл. 4.

### 3.1. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ГИДРОГРАФА ВОДООТБОРА

Вычисление характеристик разложения (3.1) — величин  $Q_n$  и  $\varphi_n$  для конкретных графиков водоотбора может основываться на многочисленных методах практического гармонического анализа. В большинстве случаев задание среднемесячных значений величины водоотбора представляет собой достаточно детальную характеристику режима водопотребления, поэтому здесь предлагается способ определения величин  $Q_n$  и  $\varphi_n$ , аналогичный известным схемам К. Рунге и получивший название «схемы среднемесячных значений». При расчетах по этой схеме значения среднемесячных величин водоотбора  $Q_n^*$  ( $1 \leq n \leq 12$ ) выписываются в порядке, показанном на табл. 3.1. После этого над образовавшимися парами значений производят сложения и вычитания, результаты которых — соответственно величины  $u_j$  и  $v_j$  — выписываются в последующие графы расчетной таблицы. После выполнения над ними последовательных сложений и вычитаний находят величины  $\Sigma_j$ ,  $\Delta_j$ ,  $\sigma_j$ ,  $\delta_j$  на основании которых вычисляются коэффициенты разложения (3.1) Фурье  $Q_0$ ,  $Q'_n$ ,  $Q''_n$ :

$$\left. \begin{aligned} Q_0 &= \frac{1}{12} (\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3), \\ Q'_1 &= 0,1592 \Delta_1 + 0,1165 \Delta_2 + 0,0427 \Delta_3; \\ Q'_2 &= 0,1378 (\Sigma_1 - \Sigma_3); \\ Q'_3 &= 0,1031 (\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3); \\ Q'_4 &= 0,0689 (\Sigma_1 - 2\Sigma_2 + \Sigma_3); \\ Q''_1 &= 0,0427 \sigma_1 + 0,1165 \sigma_2 + 0,1592 \sigma_3; \\ Q''_2 &= 0,0796 (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3); \\ Q''_3 &= 0,1061 (\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3); \\ Q''_4 &= 0,1194 (\delta_1 - \delta_3). \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$



Таблица 3.1

Схема среднемесячных значений для определения коэффициентов Фурье

1. Определение первичных сумм ( $u_j$ ) и разностей ( $v_j$ )

$Q_1^*$	$Q_2^*$	$Q_3^*$	$Q_4^*$	$Q_5^*$	$Q_6^*$
$Q_{12}^*$	$Q_{11}^*$	$Q_{10}^*$	$Q_9^*$	$Q_8^*$	$Q_7^*$
$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$
$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$

2. Определение вторичных сумм ( $\Sigma_j$ ,  $\Delta_j$ ) и разностей ( $\sigma_j$ ,  $\delta_j$ )

$u_1$	$u_2$	$u_3$	$v_1$	$v_2$	$v_3$
$u_6$	$u_5$	$u_4$	$v_6$	$v_5$	$v_4$
$\Sigma_1$	$\Sigma_2$	$\Sigma_3$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$
$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$

Амплитуды и фазовые углы разложения (3.1) определяются как модули и аргументы комплексов  $Q_n + iQ_n''$  ( $i$  — мнимая единица):

$$Q_n = \sqrt{Q_n'^2 + Q_n''^2};$$

$$\varphi_n = \begin{cases} \arctg Q_n''/Q_n', & \text{если } Q_n' \geq 0; \\ 180^\circ + \arctg Q_n''/Q_n', & \text{если } Q_n' < 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

*Пример.* Определение параметров разложения (3.1) по схеме среднемесячных значений. Величины  $Q_n^*$  в условиях примера следующие:

Месяц . . . . .	1	2	3	4	5	6
Расход, м <sup>3</sup> /с . . . . .	1,20	0,00	1,11	4,81	8,11	9,52
Месяц . . . . .	7	8	9	10	11	12
Расход, м <sup>3</sup> /с . . . . .	9,69	9,14	8,15	6,66	5,23	3,29

Расчеты по схеме среднемесячных величин приведены в табл. 3.2. Значения коэффициентов Фурье, найденные с помощью формул (3.8), при этом таковы:

$n$ . . . . .	0	1	2	3	4
$Q_n'$ , м <sup>3</sup> /с . . . . .	—	—4,64	0,38	0,24	0,002
$Q_n''$ , м <sup>3</sup> /с . . . . .	—	—2,28	—1,02	0,01	0,006
$Q_n$ , м <sup>3</sup> /с . . . . .	5,59	5,17	1,08	0,24	0,007
$\varphi_n$ . . . . .	—	206	290	1	71

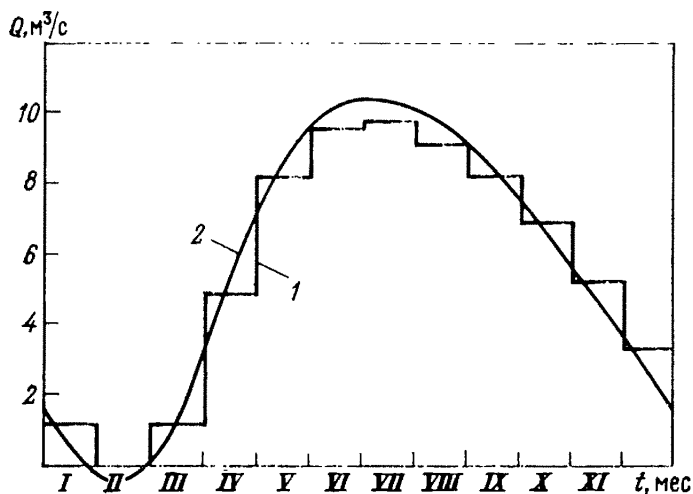


Рис. 3.1. Графики среднемесячных значений величины водоотбора по данным примера 1 (1) и его приближение разложением (3.1) с учетом трех первых гармоник (2)

На рис. 3.1 приведены графики среднемесячных значений водоотбора и его приближения разложением (3.1), в котором принято  $N=3$ . Степень приближе-

Таблица 3.2

Схема среднемесячных значений для условий примера

1. Первичные суммы ( $u_j$ ) и разности ( $v_j$ )

	1,20	0,00	1,11	4,81	8,11	9,52
	3,29	5,23	6,88	8,15	9,14	9,69
$u_j$	4,49	5,23	7,99	12,96	17,25	19,21
$v_j$	-2,09	-5,23	-5,77	-3,34	-1,03	-0,17

2. Вторичные суммы ( $\Sigma_j$ ,  $\Delta_j$ ) и разности ( $\sigma_j$ ,  $\delta_j$ )

	4,49	5,23	7,99		-2,09	-5,23	-5,77
	19,21	17,25	12,96		-0,17	-1,03	-3,37
$\Sigma_j$	23,70	22,48	20,95	$\Delta_j$	-2,26	-6,26	-9,11
$\sigma_j$	-14,72	-12,02	-4,97	$\delta_j$	-1,92	-4,20	-2,43

ния исходного ступенчатого графика достаточная; увеличение расчетных значений водоотбора по второму графику отразится в небольшом увеличении расчетных значений понижения, что улучшает надежность расчета. Небольшие отрицательные значения расчетной величины водоотбора в феврале, которых, конечно, не может быть в реальных условиях, связаны с погрешностью метода и, как будет показано в последующих примерах с использованием этого графика, практически не влияют на расчетные значения понижения.

### 3.2. РАСЧЕТ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ПОНИЖЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОГРАНИЧЕННОГО ОДНОРОДНОГО ПЛАСТА

Как было показано в гл. I, реакция геофильтрационной системы «водозабор — водоносный пласт» может быть представлена в виде

$$S(M, t) = S_a(M, t) + S_p(M, t) + S_{tr}(M, t), \quad (3.10)$$

где расчет аperiodической составляющей  $S_a(M, t)$  выполняется, например, по зависимостям, приведенным в гл. 2. Переходная компонента, как показывает анализ, весьма быстро затухает (не позже, чем в первые один-три года эксплуатации). Таким образом, для расчета эксплуатационных ресурсов подземных вод при периодическом режиме водоотбора остается определить периодическую компоненту понижения. Согласно выражению (1.93), эта задача сводится к определению гармонических сопротивлений  $R_n$  и фазовых сдвигов  $\Psi_n$ . Для этого, в свою очередь, необходимо определить частотные характеристики геофильтрационной системы. Общее выражение для частотной характеристики понижения дает формула

$$R(M, \omega) e^{-i\Psi(M, \omega)} = U_S(M, i\omega). \quad (3.11)$$

В наиболее простом случае эксплуатации подземных вод неограниченного однородного водоносного пласта одиночным водозабором при отсутствии компенсационного питания частотные характеристики понижения определены в гл. 1, а именно:

$$R(M, \omega) = \frac{1}{2\pi} N \left( r \sqrt{\frac{\omega}{a}} \right);$$

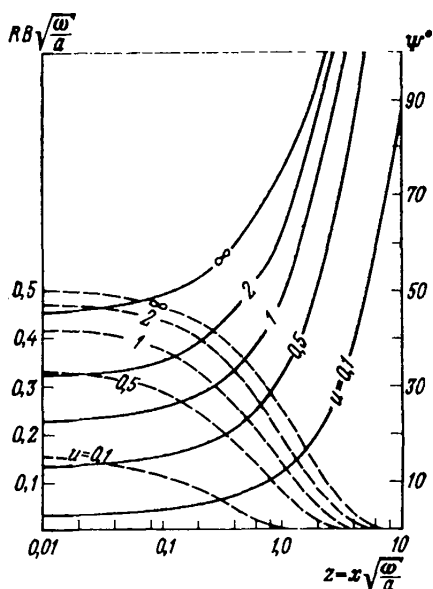
$$\Psi = \Phi \left( r \sqrt{\frac{\omega}{a}} \right). \quad (3.12)$$

где  $N(z) = (\ker^2 z + \text{kei}^2 z)^{1/2}$ ;  $\text{tg } \Phi(z) = -\text{kei } z / \ker z$ ;  $\ker z$  и  $\text{kei } z$  — функции Кельвина [25]. Графики зависимостей  $N(z)$  и  $\Phi(z)$  приведены в гл. 1 (см. рис. 1.6).

Крупный отбор подземных вод для целей орошения осуществляется, как правило, не одиночными водозаборами, а линейными или площадными системами скважин.

Рассмотрим случай отбора подземных вод однородного пласта линейной системой скважин неограниченной протяженности. При выводе расчетных соотношений учтем возможное влияние фактора компенсационного питания эксплуатируемого горизонта.

Рис. 3.2. Графики частотных характеристик понижения для условий отбора подземных вод линейным рядом скважин в неограниченном однородном водоносном пласте (пунктирные линии — амплитудные; сплошные линии — фазовые)



Выражение передаточной функции понижения для этих условий имеет вид (2.9), а соответствующее гидравлическое сопротивление выражается формулой (2.10). Подставив  $p = i\omega$  в формулу (2.9) и произведя алгебраические преобразования, находим частотные характеристики понижения в точке  $M$ , удаленной от линии водоотбора на расстояние  $x$ :

$$R = \frac{e^{-gx} c \cos \sigma/2}{2cBg}; \quad (3.13)$$

$$\Psi = \frac{\sigma}{2} + gxc \sin \frac{\sigma}{2}, \quad (3.14)$$

$$\text{где } c = \sqrt[4]{1 + (\omega/ag^2)^2}; \quad (3.15)$$

$$\sigma = \arctg \omega/ag^2. \quad (3.16)$$

В частности, на самой линии водоотбора, т. е. при  $x=0$ , имеем:

$$R = 1/2 cBg; \quad (3.17)$$

$$\Psi = \sigma/2. \quad (3.18)$$

На рис. 3.2 изображены серии графиков зависимостей частотных характеристик рассматриваемой схемы от параметра  $x(\omega/a)^{1/2}$ , характеризующего расстояние от точки  $M$  до линии водоотбора и частоту, и от параметра  $u = \omega/ag^2$ , характеризующего величину компенсационного эффекта. Графики амплитудно-частотных характеристик показывают, что при фиксированном значении компенсационного эффекта увеличение частоты первоначально влечет

лишь незначительное уменьшение амплитудно-частотной характеристики и, таким образом, в этих условиях амплитуды первых гармоник не будут претерпевать уменьшения. В то же время фазы этих гармоник, как показывает анализ фазо-частотных характеристик, значительно увеличиваются при росте частоты. Так, в характерных условиях, когда  $g=2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$  и  $a=2 \cdot 10^4 \text{ м}^2/\text{сут}$ , на основной частоте  $\omega=0,0175 \text{ сут}^{-1}$ , для точки  $M$ , расположенной на расстоянии  $x=500 \text{ м}$  от водозабора, значение амплитудно-частотной характеристики, вычисленное по формуле (3.13), равно при этом 0,0045 (принято, что  $B=20 \text{ км}$ ). Значение фазовой характеристики составляет при этом  $\Psi=12^\circ,4$ ; на частоте второй гармоники значения частотных характеристик для этой же точки равны:  $R=0,0043$  и  $\Psi=24^\circ$ . На частоте третьей гармоники, соответственно,  $R=0,0040$  и  $\Psi=34^\circ,5$ . Таким образом, величина амплитуды второй гармоники уменьшится в 1,05 раза, третьей — в 1,12 раза по сравнению с амплитудой первой гармоники. Для точки, расположенной в 0,5 км от водозабора, при условии отсутствия компенсационного питания получим: на частоте первой гармоники  $R=0,0192$  и  $\Psi=63^\circ,9$ ; второй —  $R=0,0119$  и  $\Psi=71^\circ,8$ .

Другая важная особенность частотных характеристик рассматриваемой схемы, устанавливаемая с помощью анализа рис. 3.2 и формул (3.14) и (3.18) — наличие ненулевого фазового сдвига между водоотбором и понижением непосредственно в точках на линии водозабора. Формула (3.14) указывает на уменьшение величины этого сдвига при увеличении компенсационного эффекта; в условиях отсутствия компенсационного питания эта величина максимально и составляет  $45^\circ$ , что соответствует полуторамесечному сдвигу по времени.

Рассмотрим теперь условия отбора подземных вод неограниченного однородного водоносного горизонта площадной системой скважин, равномерно распределенной в полосе шириной  $2d$  и протяженностью  $B$ . Выражение для передаточной функции понижения в центре водозабора дается для этих условий формулой (2.17). Если подставить в нее  $p=i\omega$ , получим выражения для частотных характеристик понижения в этой точке. В случае отсутствия компенсационного питания подстановка  $p=i\omega$  и выполнение алгебраических преобразований приводят при этом к следующим соотношениям:

$$R = \frac{1}{2B \sqrt{\frac{\omega}{a}}} A \left( d \sqrt{\frac{\omega}{2a}} \right); \quad (3.19)$$

$$\Psi = 45^\circ \left[ 2 - F \left( d \sqrt{\frac{\omega}{2a}} \right) \right], \quad (3.20)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{где } A(z) &= \frac{1}{z} \sqrt{\frac{1}{2} (1 - 2e^{-z} \cos z + e^{-2z})}; \\ F(z) &= \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sin z}{e^z - \cos z}. \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Таблица 3.3

Значения функций  $A(z)$  и  $F(z)$ 

$z$	$A(z)$	$F(z)$	$z$	$A(z)$	$F(z)$
0,1	0,9512	0,9374	2,1	0,3593	0,1263
0,2	0,9048	0,8769	2,2	0,3436	0,1068
0,3	0,8607	0,8186	2,3	0,3288	0,0891
0,4	0,8188	0,7623	2,4	0,3149	0,0730
0,5	0,7789	0,7082	2,5	0,3018	0,0586
0,6	0,7410	0,6562	2,6	0,2895	0,0458
0,7	0,7049	0,6064	2,7	0,2772	0,0345
0,8	0,6707	0,5586	2,8	0,2671	0,0245
0,9	0,6382	0,5130	2,9	0,2569	0,0159
1,0	0,6074	0,4694	3,0	0,2473	0,0085
1,1	0,5781	0,4280	3,2	0,2300	0,0029
1,2	0,5504	0,3887	3,4	0,2147	0,0105
1,3	0,5241	0,3514	3,6	0,2012	0,0150
1,4	0,4992	0,3163	3,8	0,1894	0,0171
1,5	0,4757	0,2832	4,0	0,1789	0,0174
1,6	0,4534	0,2521	4,2	0,1696	0,0165
1,7	0,4324	0,2230	4,4	0,1613	0,0148
1,8	0,4125	0,1960	4,6	0,1539	0,0127
1,9	0,3937	0,1709	4,8	0,1472	0,0104
2,0	0,3760	0,1477	5,0	0,1412	0,0082

Значения функций  $A(z)$ ,  $F(z)$  приведены в табл. 3.3. При  $z < 0,1$  с точностью до третьего знака справедливы приближения

$$A(z) = \sqrt{1-z}, \quad F(z) = 1 - \frac{2z}{\pi}; \quad (3.22)$$

при  $z > 5$

$$A(z) = 1/z \sqrt{2}; \quad F(z) = 0. \quad (3.23)$$

Графики зависимостей  $A(z)$ ,  $F(z)$  представлены на рис. 3.3. Фазовая характеристика площадного водозабора, начинающаяся при малых  $z$  (от значения  $45^\circ$ ), при росте этого параметра увеличивается до  $90^\circ$ , что соответствует (на частоте основных колебаний) трехмесячному отставанию пиковых значений понижения от максимума расхода водоотбора.

В случае наличия компенсационного питания соответствующие формулы становятся весьма громоздкими. Поэтому вместо них приводится программа для микрокалькулятора, позволяющая определять значения  $R$  и  $\psi$  для точки в центре водозабора (см. приложение, программу 20).

*Пример.* Рассчитать внутригодовой ход понижения уровня подземных вод в центральной точке полосообразного площадного водозабора, в 10-м году эксплуатации неограниченного однородного пласта, с параметрами  $T=1800 \text{ м}^2/\text{сут}$ ,  $a=15000 \text{ м}^2/\text{сут}$ ;  $g=0,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$ . Продольная протяженности полосы отбора

$A(z), F(z)$

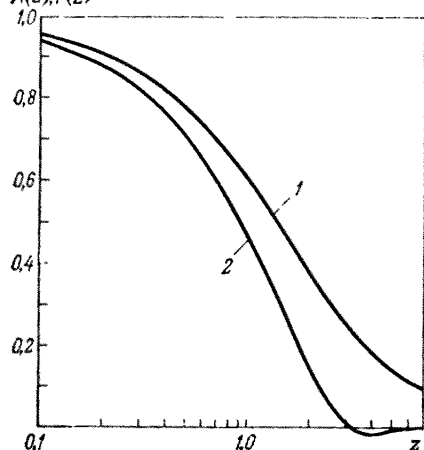


Рис. 3.3. Графики функций  $A(z)$  (кривая 1) и  $F(z)$  (кривая 2)

$B=23\,000$  м, а ее полуширина  $d=4300$  м. Временная зависимость водоотбора определена выражением

$$Q(t) = 5,59 + 5,17 \cos(t - 206^\circ) + 1,08 \cos(2t - 290^\circ) + \\ + 0,24 \cos(3t - 1^\circ), \text{ м}^3/\text{с},$$

ее график изображен на рис. 3.1.

Решение 1. Прежде всего определим величину аperiodической компоненты понижения на конец 10-го года эксплуатации. Обращаясь к формуле (2.10) гл. 2, в которой  $d/2(at)^{1/2} = 4300/2 \cdot (15\,000 \cdot 9 \cdot 365)^{1/2} = 0,306$ ,  $gd = 0,4 \cdot 10^{-3} \times$

$\times 4300 = 1,72$ , получим  $F(0,306; 1,72) = 0,1387$ ;  $R_0 = \frac{4300}{23000} \cdot 0,1387 = 0,0259$ . Соответствующее значение понижения составит

$$S_a = \frac{5,59 \cdot 86\,400}{1800} \cdot 0,0259 = 6,96 \text{ м.}$$

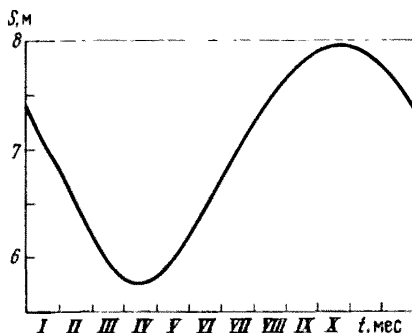
## 2. Оценим периодическую компоненту понижения.

Для этого воспользуемся приведенной программой для микрокалькулятора (см. приложение программу 20): введем ее в память микроЭВМ, затем введем значения  $a, B, g, d$  и  $\omega_1 = 0,0175 \text{ сут}^{-1}$ . Выполним, согласно инструкции, операции В/О. С/П, получим  $R_1 = 0,0044$ ;  $\psi_1 = 82^\circ$ . Аналогично на частотах второй и третьей гармоник имеем:  $R_2 = 0,0022$ ,  $\psi_2 = 86^\circ$ ,  $R_3 = 0,0014$ ,  $\psi_3 = 87^\circ$ .

Временная зависимость периодической компоненты понижения будет иметь вид:

$$S_p(t) = \frac{5,17 \cdot 86\,400 \cdot 0,0044}{1800} \cos(t - 206^\circ - 82^\circ) + \\ + \frac{1,08 \cdot 86\,400 \cdot 0,0022}{1800} \cos(2t - 290^\circ - 86^\circ) + \\ + \frac{0,24 \cdot 86\,400 \cdot 0,0014}{1800} \cos(3t - 1^\circ - 87^\circ) = 1,09 \cos(t - 288^\circ) + \\ + 0,11 \cos(2t - 16^\circ) + 0,02 \cos(3t - 88^\circ), \text{ м.}$$

Рис. 3.4. График временной зависимости понижения в условиях примера



При вычислении аргумента косинуса во второй гармонике мы учли период этой функции, равный  $360^\circ$ , и вместо  $2t - 376^\circ$  записали  $2t - 16^\circ$ . На рис. 3.4 изображен график временной зависимости  $S(t) = S_a + S_p(t)$ . Ее максимум равен 7,95 и достигается в конце октября. По сравнению с графиком водоотбора (рис. 3.1) максимум понижения сдвинут на три месяца. Вычисление значений периодической компоненты понижения удобно производить с помощью программы 21 для микрокалькулятора типа Электроника БЗ-34 (см. приложение).

Если не требуется определять всю картину годового хода периодической компоненты понижения, а нужно лишь оценить ее максимальное значение, можно использовать программу 22 (см. приложение) определения максимума периодической функции, заданной тремя гармониками разложения Фурье. Расчет по этой программе для условий примера дает значение  $t_{\max} = 290,74$  сут (что соответствует третьей декаде октября) и значение  $S_{p \max} = 0,99$  (что в сумме с вычисленным ранее значением  $S_a = 6,96$ , дает максимальное значение понижения в размере 7,95 м).

**Условия плановой фильтрационной неоднородности.** Для схемы с плановой фильтрационной неоднородностью (см. рис. 2.6, а) в условиях отсутствия перетекания передаточная функция понижения имеет вид (2.42). Подставив  $p = i\omega$  и проводя необходимые комплексные преобразования, получим частотные характеристики понижения

$$R = \frac{\sqrt{1 + 2\epsilon e^{-z} \cos z + \epsilon^2 e^{-2z}}}{2B \sqrt{\frac{\omega}{a_2}}}; \quad (3.24)$$

$$\Psi = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} \frac{\epsilon e^{-z} \sin z}{1 + \epsilon e^{-z} \cos z}, \quad (3.25)$$

$$\text{где } z = d \sqrt{2\omega/a_2}. \quad (3.26)$$

Программа 23 (см. приложение) для микрокалькулятора позволяет рассчитывать частотные характеристики.



*Пример.* Определить временную зависимость понижения в 25-й год работы линейного водозабора, работающего в условиях схемы с фильтрационной неоднородностью, при параметрах:  $d=1200$  м,  $T_1=100$  м<sup>2</sup>/сут,  $a_1=1000$  м<sup>2</sup>/сут,  $T_2=1000$  м<sup>2</sup>/сут,  $a_2=10\,000$  м<sup>2</sup>/сут,  $B=10\,000$  м.

Временная зависимость понижения определяется выражением

$$Q(t) = 13,0 + 12,8 \cos(t - 202^\circ) + 4,0 \cos(2t - 20^\circ) + \\ + 3,7 \cos(3t - 283^\circ), \text{ тыс. м}^3/\text{сут.}$$

Решение. 1. Определим вначале параметр  $\varepsilon$ , входящий в расчетные формулы. По формуле (2.44) имеем:  $\eta 100/1000(10\,000/1000)^{1/2} = 0,316$ ; по формуле (2.43)  $\varepsilon = (1 - 0,316)/(1 + 0,316) = 0,52$ .

2. Рассчитаем величину аperiодической составляющей понижения на конец 24-го года работы водозабора. По формуле (2.45) (при  $t = 24 \cdot 365 = 8760$  сут) имеем:

$$R_0 = \frac{10\,000 \cdot 8760}{10\,000} \left( 0,5641 + 0,52t \operatorname{erfc} \frac{1200}{10\,000 \cdot 8760} \right) = 0,744.$$

Понижение на линии водоотбора составит:  $S_a = \frac{(13 \cdot 10^3)}{10^3} \cdot 0,744 = 9,67$  м.

3. Рассчитаем частотные характеристики понижения на частотах  $\omega = \omega_1 = 0,01745$  сут<sup>-1</sup>;  $\omega = 2\omega_1$  и  $\omega = 3\omega_1$ . Для этого вводим в память микрокалькулятора программу расчета, заносим параметры  $a_2$ ,  $d$ ,  $\varepsilon$  и  $B$ , а также  $\omega = \omega_1$ , выполним В/О, С/П и получаем:  $R_1 = 0,0365$ ;  $\psi_1 = 48^\circ$ . Подставив в качестве  $\omega$  значение  $2\omega_1$ , получим:  $R_2 = 0,0262$ ;  $\psi = 45^\circ$  и наконец, при  $\omega = 3\omega_1$ ;  $R_3 = 0,0217$ ;  $\psi_3 = 45^\circ$ .

4. Определим периодическую компоненту понижения

$$S_p(t) = \frac{12,8 \cdot 1000}{1000} 0,0365 \cos(t - 202^\circ - 48^\circ) + \\ + \frac{4,0 \cdot 1000}{1000} 0,0262 \cos(2t - 20^\circ - 45^\circ) + \\ + \frac{3,7 \cdot 1000}{1000} 0,0217 \cos(3t - 283^\circ - 45^\circ) = 0,47 \cos(t - 250^\circ) + \\ + 0,10 \cos(2t - 65^\circ) + 0,08 \cos(3t - 328^\circ), \text{ м}$$

Максимальное значение периодической составляющей равно 0,6, что на порядок меньше аperiодической составляющей. Суммарное понижение  $S = S_a + S_{p\text{м}} = 9,67 + 0,6 = 10,27$  м.

### 3.3. СХЕМА ПОЛУОГРАНИЧЕННОГО ПЛАСТА С КОНТУРОМ ПИТАНИЯ

Для того, чтобы получить частотные характеристики схемы полуограниченного водоносного пласта при различных условиях водоотбора (одиночного, линейного, площадного), воспользуемся выражениями передаточных функций понижения (см. рис. 2.7, а, б, в), а именно, формулами (2.65), (2.70), (2.75). Подставив в них  $p = i\omega$  и осуществив алгебраические преобразования, найдем ча-

стотные характеристики понижения при отборе подземных вод одиночным водозабором в виде:

$$R(M, \omega) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\ker z - \ker \frac{z}{\alpha}\right)^2 + \left(\operatorname{kei} z - \operatorname{kei} \frac{z}{\alpha}\right)^2}; \quad (3.27)$$

$$\Psi(M, \omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{kei} \frac{z}{\alpha} - \operatorname{kei} z}{\ker \frac{z}{\alpha} - \ker z}, \quad (3.28)$$

где  $\ker z$ ,  $\operatorname{kei} z$  — функция Кельвина [25];  $\alpha = r/\rho$ ;  $z = r(\omega/a)^{1/2}$ ;  $r$  — расстояние от точки  $M$  до центра водозабора;  $\rho$  — расстояние от точки  $M$  до его зеркального отражения относительно реки. При определении частотных характеристик понижения на самом водозаборе, члены формул (3.27), (3.28), содержащие аргумент  $z$  и аргумент  $z/\alpha$ , как правило, неравноправны: значения функций Кельвина от  $(z/\alpha)$  в этом случае будут значительно меньшими по абсолютной величине, чем значения этих функций от аргумента  $z$ . Физически это означает, что на частоте основных колебаний (с годовым периодом) влияние границы питания чувствуется толчками в окрестности водозабора только если он весьма близок к границе питания, что случается сравнительно редко. Поэтому для определения частотных характеристик на самом водозаборе в большинстве случаев можно пользоваться формулами (3.12), относящимися к условиям неограниченного пласта.

Для условий отбора подземных вод линейным водозабором, параллельным границе и отстоящим от нее на расстоянии  $d$ , частотные характеристики понижения в точке  $M$  на водозаборе определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} R(M, \omega) &= \frac{d}{2B} - A\left(d \sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right); \\ \Psi(M, \omega) &= 45^\circ \left[1 - F\left(d \sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right)\right], \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

где функции  $A(z)$ ,  $F(z)$  определены равенствами (3.21).

Для условий отбора подземных вод в полуограниченном пласте площадным водозабором, представляющим собой полосу, одна из сторон которой совпадает с границей питания, а другая параллельна ей и отстоит от нее на расстоянии  $2d$ , передаточная функция понижения в точке  $M$  полосы определена выражением (2.76). Как отмечалось в гл. 2, точка максимального понижения при отборе подземных вод площадным водозабором в процессе эксплуатации перемещается от середины полосы отбора к дальнему от границы питания краю. Поскольку период основных колебаний равен одному году (в большинстве случаев он может считаться малым по сравнению с общим сроком эксплуатации), можно допустить, что использование в расчетах эксплуатационных ресурсов подземных вод значений частотных характеристик, соответствующи-

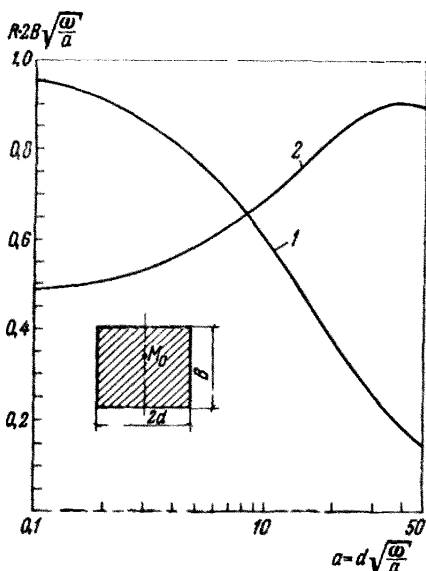


Рис. 3.5. Частотные характеристики понижения при эксплуатации подземных вод однородного неограниченного пласта полосовым площадным водозабором (для точки в центре водозабора):

1 — амплитудная, 2 — фазовая

щих точке в середине полосы отбора, приведет к некоторому занижению расчетной величины эксплуатационных ресурсов, т. е. послужит созданию запаса надежности расчета. Поэтому здесь даны сведения только о частотных характеристиках понижения в середине полосы водозабора, а именно:

$$R(M_0, \omega) = \frac{d}{4B} A^2 \left( 2d \sqrt{\frac{\omega}{2a}} \right); \quad (3.30)$$

$$\Psi(M_0, \omega) = 90^\circ \left[ 1 - F \left( 2d \sqrt{\frac{\omega}{2a}} \right) \right]. \quad (3.31)$$

Графики частотных характеристик понижения в середине полосы отбора приведены на рис. 3.5.

#### 3.4. ОСОБЕННОСТИ РЕЖИМА ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ УРОВНЯ ПОДЗЕМНЫХ ВОД ПРИ ИХ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ОТБОРЕ

С точки зрения практических гидрогеологических расчетов при периодическом водоотборе помимо определения общего понижения уровня представляют интерес оценка выраженности внутригодового хода понижения в районе водозаборов и временной сдвиг между пиковыми значениями возмущения на выходе геофильтрационной системы периодического водоотбора — и ее реакций — понижением.

На выраженность внутригодового хода понижения влияют практически все природные и хозяйственные факторы, определяю-

щие движение подземных вод. Одни из них усиливают выраженность колебаний понижения, другие — сглаживают их.

Рассмотрим, в частности, влияние таких факторов, как наличие границы постоянного напора и компенсационного питания.

Влияние границы постоянного напора на режим эксплуатационных колебаний уровня подземных вод можно проиллюстрировать следующим примером.

*Пример.* Однородный аллювиальный водоносный горизонт в долине реки эксплуатируется для целей орошения линейным водозабором протяженностью  $B=40\,000$  м; компенсационное питание отсутствует ( $g=0$ ), фильтрационные параметры горизонта следующие:  $T=500$  м<sup>2</sup>/сут,  $a=4000$  м<sup>2</sup>/сут. График водотока соответствует условиям, рассмотренным выше. Требуется определить, в какой мере проявляется влияние границы постоянного упора (урез реки) на внутригодовой ход эксплуатационных колебаний понижения на линии водотока в 50-й год его работы, и возможна ли его эксплуатация, если величина допустимого понижения  $S_{\text{доп}}=35$  м.

Зададимся каким-либо значением расстояния  $d$  между рекой и водозабором, например равным 1000 м. По формуле (2.72) определяем величину гидравлического сопротивления при  $t=50$  лет:  $18\,250$  сут:

$$R_0(M_0, t) = \frac{\sqrt{4000 \cdot 18\,250}}{40\,000} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} - i \operatorname{erfc} \frac{1000}{\sqrt{4000 \cdot 18\,250}} \right) = 0,02335.$$

Апериодическая составляющая понижения в 50-й год эксплуатации

$$S_0(M_0, t) = \frac{5,59 \cdot 86\,400}{500} 0,02335 = 22,55, \text{ м.}$$

Задаваясь основной частотой колебаний  $\omega_1=2\pi/360=0,01751$  сут<sup>-1</sup>, вычисляем значение параметра  $z=d(\omega/2a)^{1/2}$ :  $z=1000(0,01751/2 \cdot 4000)^{1/2}=1,4667$ , и по формулам (3.29) с помощью табл. 3.3 находим значения частотных характеристик:

$$R(M_0, \omega_1) = R_1(M_0) = \frac{1000}{2 \cdot 40\,000} A(1,4667) = 0,00604;$$

$$\psi(M_0, \omega_1) = \psi_1(M_0) = 45^\circ [1 - F(1,4667)] = 32^\circ.$$

Согласно выражению (3.3), амплитуда первой гармоники понижения будет равна  $(5,17 \cdot 86\,400/500) \cdot 0,00604 = 5,40$  (м), а фазовый угол составит  $206^\circ + 32^\circ = 238^\circ$ . С помощью аналогичных расчетов на частотах последующих гармоник определяем соответствующие величины гармонических сопротивлений и фазовых сдвигов. Их значения приведены в табл. 3.4. Определенное на основании формулы (1.93) выражение временной зависимости периодической составляющей понижения имеет вид (четвертая гармоника с амплитудой менее 1 см исключена)

$$S_p(M_0, t) = 5,40 \cos(t - 238^\circ) + 0,85 \cos(2t - 329^\circ) + 0,15 \cos(3t - 44^\circ), \text{ м.}$$

Таблица 3.4

Значения гидравлического сопротивления, гармонических сопротивлений и фазовых сдвигов понижения (по условиям примера)

$d, \text{ м}$	$R_0$	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$\psi_1^\circ$	$\psi_2^\circ$	$\psi_3^\circ$	$\psi_4^\circ$
500	0,0121	0,0043	0,0037	0,0033	0,0030	18	25	29	32
1000	0,0233	0,0060	0,0045	0,0037	0,0032	32	39	43	44
1500	0,0338	0,0064	0,0044	0,0035	0,0030	40	45	46	46
2000	0,0435	0,0064	0,0043	0,0035	0,0030	44	46	45	45

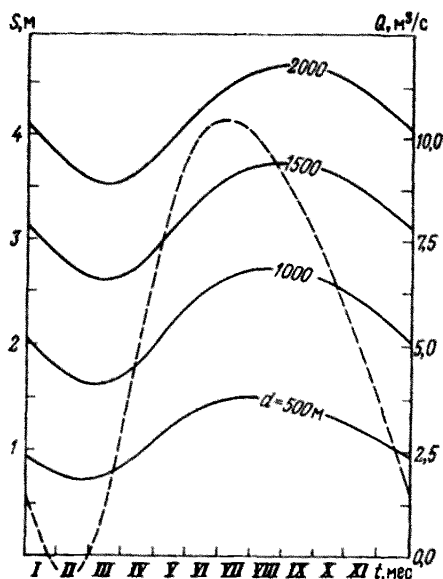


Рис. 3.6. Временные зависимости понижения на линии водозабора в условиях влияния границы постоянного уровня при различных значениях расстояния между водозабором и урезом рекн. Пунктирная линия — зависимость величины водоотбора от времени

На рис. 3.6 изображен график этой временной зависимости, а также нескольких аналогичных зависимостей, соответствующих другим значениям  $d$ . Если характеризовать степень выраженности проявления внутригодовых эксплуатационных колебаний понижения уровня подземных вод величиной отношения максимального значения понижения к его среднегодовому значению  $S_m/S_0$ , то при  $d=500$  м эта величина составит  $15,2/11,7=1,3$ ; при  $d=2000$  м —  $47,1/42,0=1,12$ , т. е. при отдалении линейного водозабора от контура совершенного питания степень выраженности внутригодовых колебаний понижения несколько снижается. Рис. 3.6 дает также ответ на вопрос о возможности эксплуатации водозабора: такая возможность есть только при  $d$  равном 500 и 1000 м.

Следующий пример иллюстрирует влияние компенсационного питания на степень выраженности внутригодового хода понижения.

*Пример.* Неограниченный однородный водоносный горизонт подвергается эксплуатации для целей орошения линейным водозабором протяженностью  $B=40\,000$  м; фильтрационные параметры и график водоотбора те же, что и в предыдущем примере. Требуется проследить влияние компенсационного питания (характеризуемого величиной компенсационного эффекта  $g$ ) на проявления режима эксплуатационных колебаний понижения на линии водозабора в 50-й год работы.

Зададимся значением компенсационного эффекта:  $g=10^{-3}$  м $^{-1}$ . По первой из формул (2.12) определяем величину гидравлического сопротивления при  $t=50$  лет = 18 250 сут:

$$R_0(M_0, t) = \frac{1}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 40\,000} \operatorname{erf}(10^{-3} \sqrt{4000 \cdot 18\,250}) = 0,0124.$$

Значение аperiodической составляющей понижения в 50-й год эксплуатации таким образом составит

$$S_a(M_0, t) = \frac{5,59 \cdot 86\,400}{500} 0,0125 = 12,07 \text{ м.}$$

На основной частоте колебаний  $\omega = \omega_1$  значение параметра  $\sigma = \omega/ag^2$  в формулах (3.14), (3.15) равно  $\sigma = 0,01721/4000 \cdot (10^{-3})^2 = 4,3025$ ; величина гармонического сопротивления на этой частоте

$$R(M_0, \omega_1) = R_1 = \frac{1}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 40\,000 \sqrt[4]{1 + 4,3025^2}} = 0,00595,$$

а величина фазового сдвига —

$$\psi(M_0, \omega_1) = \psi_1 = \frac{1}{2} \arctg 4,3025 = 38^\circ.$$

Амплитуда первой гармоники понижения, таким образом равна  $(5,17 \cdot 86\,400/500) \cdot 0,00595 = 5,32$  (м), фазовый угол —  $206^\circ + 38^\circ = 244^\circ$ .

Проведя аналогичные расчеты на частотах высших гармоник, определим величины гармонических сопротивлений и фазовых сдвигов. Их значения приведены в табл. 3.5. Временные характеристики понижения в точке на линии водозабора в 50-й год эксплуатации, построенные по числовым параметрам, приведенным в табл. 3.5 изображены в виде графиков на рис. 3.7. Их анализ показывает, что с ростом величины компенсационного эффекта степень выраженности колебаний понижения возрастает. Так, если при  $g = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$  величина  $S_m/S_0$  составляет  $29,0/24,1 = 1,2$ , то при  $g = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$  она равна уже  $10,2/6,0 = 1,69$ , т. е. компенсационное питание заметно влияет на выраженность внутригодовых колебаний понижения уровня подземных вод.

Влияние стабилизирующих факторов (границы постоянного уровня, компенсационного питания) на колебания понижения уровня подземных вод, как видно из примеров, выражается в увеличении степени проявления колебаний при усилении стабилизирующего фактора. Стабилизация означает, фактически, ослабление инерционных свойств системы: если, например, величина возмущения постоянна во времени, реакция геофильтрационной системы, подверженной воздействию стабилизирующих факторов, спустя некоторое время также становится практически постоянной. Эта величина времени (которую уместно называть сроком стабилиза-

Таблица 3.5

Значения гидравлического сопротивления, гармонических сопротивлений и фазовых сдвигов понижения в условиях примера

$g, \text{ км}^{-1}$	$R_0$	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$\psi_1^\circ$	$\psi_2^\circ$	$\psi_3^\circ$	$\psi_4^\circ$
0,5	0,0250	0,0060	0,0043	0,0035	0,0030	43	44	44	45
1,0	0,0125	0,0060	0,0043	0,0035	0,0030	38	42	43	43
2,0	0,0063	0,0052	0,0041	0,0034	0,0030	24	33	36	38
3,0	0,0042	0,0040	0,0035	0,0032	0,0028	13	22	28	31
4,0	0,0032	0,0031	0,0029	0,0028	0,0026	8	14	19	24
5,0	0,0025	0,0025	0,0024	0,0024	0,0023	5	9	14	17
10,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	1	2	4	5

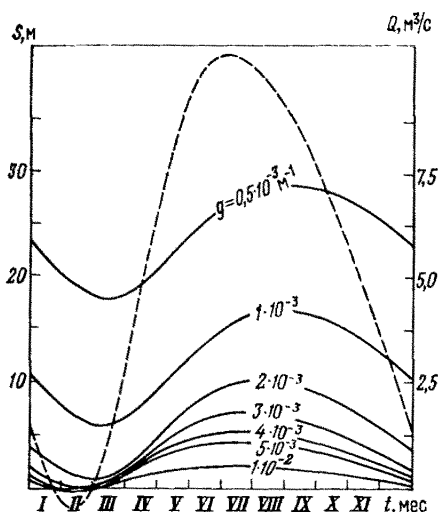


Рис. 3.7. Временные зависимости понижения на линии водозабора при различных значениях компенсационного эффекта  $g$ . Пунктирная линия — зависимость  $Q(t)$

ции), тем меньше, чем сильнее проявляются стабилизирующие факторы. Величина гармонического сопротивления на частоте первой гармоники определяется поведением системы при значениях времени порядка основного периода колебаний, поэтому в тех случаях, когда этот период оказывается сравнимым по величине со сроком стабилизации, значение гармонического сопротивления на основной частоте  $\omega_1$  приближается к значению гидравлического сопротивления  $R_0$  (соответствующего расчетному сроку эксплуатации, обычно значительно превосходящему годовой период). Амплитуда первой гармоники понижения в этом случае сравнима с величиной аperiodической составляющей понижения  $S_a$ , что приводит к усилению выраженности внутригодовых эксплуатационных колебаний уровня подземных вод.

Инерционность геофильтрационных систем обуславливает еще одну важную особенность режима эксплуатационных колебаний уровня подземных вод — временной сдвиг между экстремальными значениями величины водоотбора и понижения в районе водозабора. Анализируя графики на рис. 3.6 и 3.7, можно заметить, что запаздывание максимума понижения по отношению к пиковому значению водоотбора может достигать существенных величин. Так, в условиях схемы с границей постоянного уровня при  $d=2000$  м (см. рис. 3.7) максимальное значение понижения достигается в первой декаде сентября, в то время как максимум дебита водозабора имеет место в начале июля. Временной сдвиг составляет, таким образом, более двух месяцев. Уменьшение инерционности при усилении стабилизирующих воздействий ведет, кроме того, к снижению величины временного сдвига. Так, при расстоянии  $d=500$  м в условиях схемы с границей постоянного уровня она составляет уже не более месяца. Изменение величины компенсационного эффекта от  $0,5 \cdot 10^{-3}$  до  $3 \cdot 10^{-3}$  м $^{-1}$  также приводит

к уменьшению величины временного сдвига с двух месяцев до двух декад (см. рис. 3.6).

В случаях подавляющего преобладания первой гармоники в разложении (3.1) величина временного сдвига будет полностью определяться значением фазо-частотной характеристики понижения на основной частоте. Согласно выражению (3.18), при  $g=0$ , максимальное значение угла  $\psi(M_0, \omega)$  для точки  $M_0$ , расположенной на линии водозабора, составляет  $45^\circ$  и не зависит от частоты. Это значение фазового сдвига, соответствующее полутрехмесячному запаздыванию максимума понижения за пиком водоотбора, достигается в случаях отсутствия стабилизирующих воздействий в системе ( $d \rightarrow \infty, g=0$ ). Явление временного сдвига при отборе подземных вод линейными водозаборами объясняется особенностями взаимодействия скважин водозабора в периодическом режиме работы. Понижение в отдельно взятой скважине линейного ряда в каждый момент времени складывается из двух слагаемых: первое обусловлено отбором подземных вод непосредственно из рассматриваемой скважины, второе — влиянием соседних и, в меньшей мере, удаленных скважин линейного ряда. Обращаясь к графику на рис. 1.9, дающему величину фазового сдвига в зависимости от расстояния до центра скважины, можно установить, что при значениях  $r$  порядка радиуса скважины (и характерных значениях  $a \approx 10^4$  м<sup>2</sup>/сут) величина фазового сдвига пренебрежимо мала — понижение в скважине повторяет ход дебита практически без запаздывания. Что касается влияния соседних скважин, расположенных от рассматриваемой на расстояниях порядка десятков — сотен метров, то, как это следует из графика, приведенного на рис. 1.9, величина фазового сдвига для них окажется заметной. Так, при  $r = 100$  м,  $a = 10^4$  м<sup>2</sup>/сут и  $\omega = 0,01721$  сут<sup>-1</sup> величина  $r(\omega/a)^{1/2}$  равна 0,131 и, согласно графику, величина фазового сдвига составляет около  $20^\circ$ , благодаря чему влияние соседних скважин сказывается с двудекадным запаздыванием. Влияние более удаленных скважин ряда будет характеризоваться еще большими значениями времени запаздывания. Представим себе теперь, что расстояние между соседними скважинами линейного ряда уменьшается. Каждая отдельно взятая скважина ряда будет при этом «чувствовать» влияние соседних скважин более сильно, так как с уменьшением расстояния между скважинами их взаимодействие растет. Однако, как видно из графиков, приведенных на рис. 1.9, с уменьшением расстояния  $r$  величина фазового сдвига, обусловленного влиянием соседней скважины, также уменьшается. Таким образом, с одной стороны, влияние соседних скважин растет, с другой, — падает величина обусловленного ими фазового сдвига; в результате этого противоречивого процесса при уменьшении расстояния между скважинами величина фазового сдвига все же растет, однако не до бесконечности, а лишь до некоторого предела, равного в данном случае  $45^\circ$ .

Реальные графики водоотбора, как правило, характеризуются



значительностью второй, а иногда и третьей гармоники разложения (3.1). Величина временного сдвига между пиковыми значениями водоотбора и понижения в таких условиях может существенно отличаться от 1,5 мес. Рассмотрим влияние второй гармоники на величину временного сдвига в случае, когда гидрогеологические условия схематизированы в виде неограниченного однородного пласта, эксплуатируемого бесконечной галереей (компенсационное питание отсутствует). Величина фазового сдвига в этих условиях, как уже отмечалось, на всех частотах составляет  $45^\circ$ ; гармоническое сопротивление  $R_2$  на частоте второй гармоники в 1,41 раза меньше величины  $R_1$  (следствие из формулы (3.17) при  $g=0$ ). Поскольку график водоотбора описывается выражением

$$Q(t) = Q_0 + Q_1 \cos(t - \varphi_1) + Q_2 \cos(2t - \varphi_2), \quad (3.32)$$

зависимость периодической составляющей понижения от времени будет иметь вид

$$S_p(M_0, t) = \frac{Q_1}{T} R_1 \cos(t - \varphi_1 - 45^\circ) + \frac{Q_2}{T \sqrt{2}} R_1 \cos(2t - \varphi_2 - 45^\circ). \quad (3.33)$$

Введем в рассмотрение функцию  $M(\zeta, \Xi)$ , определенную условием: зависимость  $f(z) = \cos z + \zeta \cos(2z + \Xi)$  достигает наибольшего значения при  $z = -M(\zeta, \Xi)$ . Значения функции  $M(\zeta, \Xi)$  при *некоторых значениях аргументов* приведено в табл. 3.6. При  $\Xi > 180^\circ$  следует использовать свойство антисимметричности функции  $M(\zeta, \Xi)$ :

$$M(\zeta, 180^\circ + \Xi) = -M(\zeta, 180^\circ - \Xi). \quad (3.34)$$

Полагая в выражении (3.32)  $t - \varphi_1 = z$ , получим, что максимальное значение водоотбора достигается при

$$t_{Q \max} = \varphi_1 - M(\zeta, \Xi), \quad (3.35)$$

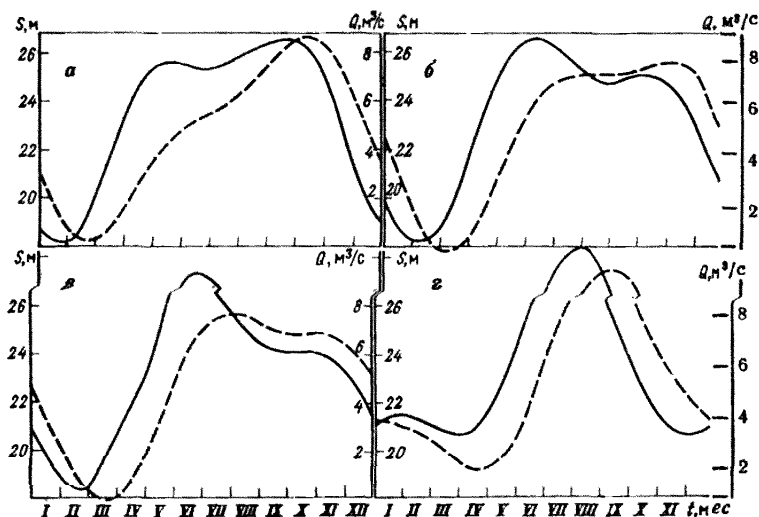
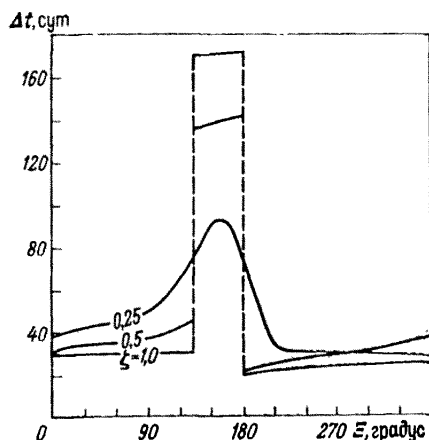
Таблица 3.6

Значения функции  $M(\Xi, \zeta)$ , градус

В, градус	$\zeta$				
	0	0,25	0,50	0,75	1,0
0	0	0	0	0	0
30	0	7,5	10,0	11,3	12,0
60	0	14,7	20,0	22,6	24,1
90	0	21,5	30,0	34,0	36,4
120	0	27,1	40,0	45,7	48,9
150	0	30,0	50,0	57,8	61,9
180	0	0	60,0	70,5	75,5

Рис. 3.8. Зависимость величины временного сдвига между пиковыми значениями понижения на линии водозабора и величины водоотбора от угла  $\Xi$ , равного  $2\varphi_1 - \varphi_2$ , и от  $\zeta$ , равного  $Q_2/Q_1$

Рис. 3.9. Временные зависимости водоотбора (сплошные линии) и понижения на линии водозабора (пунктирные линии) при различных значениях угла  $\Xi$ , градус ( $T=500 \text{ м}^2/\text{сут}$ ,  $a=4000 \text{ м}^2/\text{сут}$ ,  $g=0,5 \times 10^{-3} \text{ м}^{-1}$ )



где  $\zeta = Q_2/Q_1$ ;  $\Xi = 2\varphi_1 - \varphi_2$ . Точно так же, рассмотрев выражение (3.33), приходим к выводу о том, что максимум периодической составляющей понижения имеет место при

$$t_{S \max} = \varphi_1 + 45^\circ - M\left(\frac{\zeta}{\sqrt{2}}, \Xi + 45^\circ\right). \quad (3.36)$$

Временной сдвиг составляет, таким образом, величину

$$\Delta t = t_{S \max} - t_{Q \max} = 45^\circ + M\left(\frac{\zeta}{\sqrt{2}}, \Xi\right) - M\left(\frac{\zeta}{\sqrt{2}}, \Xi + 45^\circ\right). \quad (3.37)$$

На рис. 3.8 изображены графики зависимости величины  $\Delta t$  от параметров  $\Xi$  и  $\zeta$ . При  $\zeta \leq 0,25$  эта зависимость непрерывна; при

$\xi > 0,25$  она имеет два разрыва: при  $\Xi = 135^\circ$  и при  $\Xi = 180^\circ$ . Графики на рис. 3.7 свидетельствуют о том, что величина временного сдвига, под влиянием второй гармоники разложения графика водоотбора, может достигать весьма больших значений. Даже при сравнительно малом весе второй гармоники, при  $\xi = 0,25$ , достигается более чем трехмесячный сдвиг во времени, если только значение угла  $\Xi$  составляет  $150-170^\circ$ . При увеличении веса второй гармоники величина временного сдвига может возрасти почти до полугода (случай  $\xi = 1$ ). На рис. 3.9 приведены совмещенные графики временных зависимостей водоотбора и понижения при отборе подземных вод неограниченного однородного пласта с коэффициентом водопроводимости  $T = 500 \text{ м}^2/\text{сут}$  и коэффициентом уровнепроводности  $\alpha = 4000 \text{ м}^2/\text{сут}$  в условиях компенсационного питания, характеризуемого величиной  $g = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$ . Величины сопротивлений и фазовых сдвигов для этих условий приведены в табл. 29. Отношение гармонических сопротивлений  $R_1/R_2$  близко к  $\sqrt{2}$ , а фазовые углы — к  $45^\circ$ , поэтому все выводы, сделанные для условий отсутствия компенсационного питания, остаются справедливыми и в условиях примера. В то же время, как отмечалось выше, наличие компенсационного питания подчеркивает внутригодовые колебания понижения. При построении графиков на рис. 3.9 было принято, что  $B = 40\,000 \text{ м}$ , а график водоотбора задан в виде  $Q(t) = 5,25 + 3,50 \cos(t - 210^\circ) + 1,75 \cos(2t - \varphi_2)$ ,  $\text{м}^3/\text{с}$ , где величина  $\varphi_2$  назначалась исходя из соотношения  $\varphi_2 = 2 \cdot 210^\circ - \Xi = 420^\circ - \Xi$ . При анализе графиков на рис. 3.9 обнаруживается что величина временного сдвига зависит от соотношения величин максимумов графика водоотбора и продолжительности интервала времени между ними. В случае «а» второй максимум водоотбора выражен слабо, и максимальное значение понижения определяется главным пиком водоотбора. График водоотбора в случае «б» на первый взгляд отличается от графика «а» незначительно. Однако наличие второго пика, следующего после первого, приводит к перестройке характера кривой понижения: ее максимум следует уже за вторым пиком водоотбора. Если второстепенный пик водоотбора предшествует главному, как это имеет место в случаях «в» и «г», максимум понижения следует за главным пиком водоотбора, а величина временного сдвига при этом невелика. Таким образом, мы обнаружили условия, при которых влияние второй гармоники графика водоотбора приводит к резкому увеличению временного сдвига между пиками водоотбора и понижения. Эти условия в случае эксплуатации подземных вод линейным водозабором определяются неравенством  $135^\circ \leq \Xi \leq 180^\circ$ . В качественном отношении такие графики характеризуются наличием дополнительного максимума, следующего за основным.

Зависимости  $Q(t)$  такого вида могут встречаться в реальных условиях. Значения ординат графика в период с апреля по сентябрь соответствуют при этом вегетационным поливам, в осенне-

зимний период — промывкам земель, если этого требуют мелиоративные условия; в феврале и марте — предпосевным влагозарядковым поливам.

Временные сдвиги между пиковыми значениями водоотбора и понижения, достигающие в определенных условиях нескольких месяцев, могут оказать существенное влияние и на оценку эксплуатационных ресурсов подземных вод для целей орошения. Величина допустимого понижения, назначаемая исходя из мощности водоносного горизонта, не является точной константой, а варьирует в определенных пределах [29]. Так, для безнапорных пластов она назначается в пределах от 50 до 70 % от мощности пласта. При выборе того или иного конкретного значения руководствуются соображениями, главным образом, технико-экономического характера, причем всегда существует некоторый запас напора. Если смещение пиковых значений понижения по отношению к максимуму водоотбора велико, то при оценке эксплуатационных ресурсов подземных вод можно и даже целесообразно завышать расчетное значение допустимого понижения до ее теоретического верхнего предела, а в некоторых случаях — почти до мощности пласта. Это представляется возможным, поскольку кратковременное превышение, допустимого значения понижения произойдет в период, когда величина водоотбора существенно меньше пиковой и риск отключения части скважин не сопряжен с существенным осложнением водохозяйственной обстановки (т. е. не совпадает, например, с периодом вегетационных поливов).

Рассмотренные на примере простых гидрогеологических схем характеристики циклических эксплуатационных колебаний уровня подземных вод в их взаимосвязи с некоторыми факторами питания и разгрузки сохраняют свое значение и в более сложных гидрогеологических и водохозяйственных условиях, а также при усложненной конфигурации водозаборов.

### 3.5. СХЕМЫ ПЛАСТОВ-ПОЛОС

В настоящем разделе рассматриваются частотные характеристики понижения в условиях однородных пластов-полос — с двумя однородными границами питания и с разнородными границами. Передаточные функции понижения для этих схем были получены в гл. 2.

Как в условиях пласта-полосы с двумя однородными границами питания, так и пласта с разнородными границами, частотные характеристики понижения, соответствующие случаю отбора подземных вод одиночным водозабором, выражаются в виде трудно суммируемых комплексных рядов. Однако, поскольку значения частотных характеристик при  $\omega = \omega_1$ , и тем более при  $\omega > \omega_1$ , соответствуют значениям гидравлического сопротивления при значениях времени порядка нескольких месяцев, в большинстве случаев (когда водозабор не слишком близок к границам) для практиче-

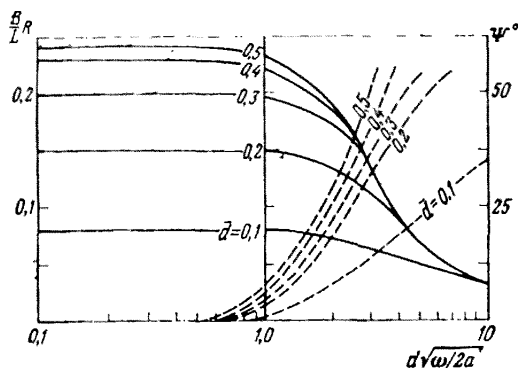


Рис. 3.10. Графики частотных характеристик для условий пласта-полосы с двумя границами питания (сплошные линии — амплитудные, пунктирные — фазовые);  $\bar{d}$  — относительное расстояние между линейным водозабором и рекой (левой)

ских расчетов можно вместо истинных частотных характеристик использовать соответствующие зависимости для одиночного водозабора в условиях неограниченного однородного пласта.

При отборе подземных вод однородного пласта-полосы линейным рядом скважин при условии равенства нулю компенсационного эффекта, передаточные функции понижения в точке на линии водозабора имеют вид: (2.121), (2.123); подстановка  $p=i\omega$  в эти выражения позволяет определить соответствующие зависимости для частотных характеристик, которые, однако, имеют довольно громоздкие выражения. На рис. 3.10 и 3.11 приведены их графики для рассматриваемых условий, причем для случая пласта-полосы с границами питания приведены только графики при  $\bar{d} \leq 0,5$ , так

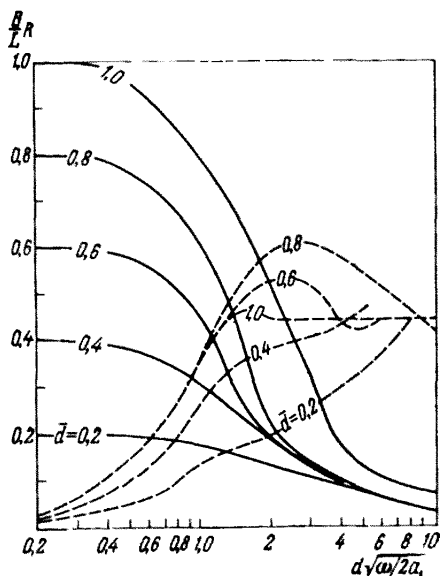


Рис. 3.11. Графики частотных характеристик для условий схемы пласта-полосы с разнородными границами (сплошные линии — амплитудные характеристики, пунктирные — фазовые);  $\bar{d}$  — относительное расстояние между линейным водозабором и границей питания

как значения частотных характеристик не меняются от замены в соответствующих выражениях на  $1 - \bar{d}$ .

В условиях пласта-полосы с двумя границами питания амплитудно-частотные характеристики претерпевают при увеличении частоты закономерное уменьшение своих значений; фазо-частотные характеристики увеличиваются от значений, близких к нулю, до половины прямого угла и могут несколько (на  $2-3^\circ$ ) превосходить это значение, причем при  $\omega \rightarrow \infty$  значения фазо-частотных характеристик стремятся к  $45^\circ$  независимо от величины  $\bar{d}$ . Амплитудно-частотные характеристики понижения в случае пласта-полосы с разнородными границами также испытывают закономерное уменьшение при возрастании частоты; что касается фазо-частотных характеристик, они испытывают большее влияние со стороны границы постоянного расхода, выражающееся в появлении значительных пиков фаз под предельным значением, равным  $45^\circ$ . Увеличение фазы достигает  $15^\circ$  и даже более, так что суммарные значения фазовых сдвигов составляют  $60^\circ$  при значениях  $\bar{d}$  порядка  $0,7-0,9$ ; при  $\bar{d}=1,0$ , как видно из графика (см. рис. 3.11), превышение значения фазы над предельным значением снова не превосходит  $3^\circ$ . Это явление можно объяснить, воспользовавшись принципом отражения относительно границы постоянного расхода. При сравнительно близком расположении линейного ряда у границы постоянного расхода режим понижения в точке на линии отбора формируется, главным образом, под влиянием водоотбора из скважин линейного ряда и его отражения (со своим знаком) относительно границы. Влиянием остальных фиктивных водозаборов, возникающих при отражениях относительно границы питания и кратких отражений, можно пренебречь, так как в силу сравнительно отдаленности их влияние сказывается в значительно меньшей степени. В условиях существенности влияния фиктивного водозабора, расположенного за границей постоянного расхода, его действие будет проявляться двояко: при увеличении значения  $\bar{d}$  оно будет выражаться сначала в увеличении фазового сдвига, что связано с усилением влияния более далеко расположенного отражения; при дальнейшем увеличении величины  $\bar{d}$ , в области, близкой к  $\bar{d}=1$ , сдвиг, вызываемый отражением, становится незначительным, и суммарная величина фазовой характеристики становится меньшей; в пределе, при  $\bar{d}=1$  (фиктивный водозабор) — отражение пропадает совсем, исчезает и дополнительный фазовый сдвиг, а фазо-частотная характеристика приобретает вид, показанный на рис. 3.11. Сложный характер фазо-частотных характеристик рассмотренной схемы может выразиться в значительном искажении графика понижения уровня подземных вод на линии водозабора, и в конечном итоге, на величине эксплуатационных ресурсов. В то же время, сдвиг максимума понижения на две недели в рассмотренных условиях может оказаться желательным при обосновании крупного отбора подземных вод для орошения.

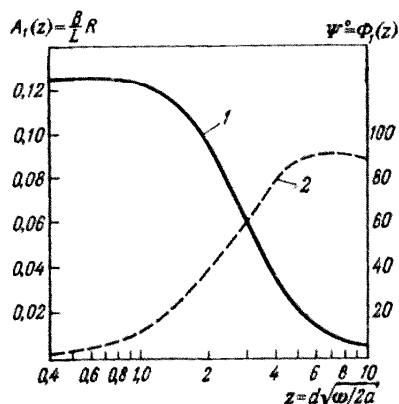


Рис. 3.12. Графики функций  $A_1(z)$  (кривая 1) и  $\Phi_1(z)$  (кривая 2)

На рис. 3.12 приведены графики частотных характеристик площадного водозабора, равномерно распределенного по полосе с двумя границами питания, причем

$$R(M_1, \omega) = \frac{L}{B} A_1(z), \quad (3.38)$$

$$\Psi(M_1, \omega) = F_1(z), \quad (3.39)$$

где  $z = L(\omega/2a)^{1/2}$ . Частотные характеристики в случае равномерно распределенного площадного отбора в условиях пласта-полосы с разнородными границами (в точке на границе постоянного расхода) также могут быть выражены через функции  $A_1(z)$ ,  $F_1(z)$ :

$$R(M_2, \omega) = \frac{L}{B} 4A_1(2z); \quad (3.40)$$

$$\Psi(M_2, \omega) = F_1(2z), \quad (3.41)$$

где  $z = L\sqrt{\omega/2a}$ .

### 3.6. ОЦЕНКА РЕДУКЦИИ ПОВЕРХНОСТНОГО СТОКА ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ ОТБОРА ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Периодический режим водоотбора при определенных условиях может вызвать внутригодовые изменения редукции поверхностного стока. Это обстоятельство не всегда играет решающую роль, но часто, особенно в условиях бассейнов небольших рек, вносит существенные коррективы в режим и величины отбора подземных вод. Для оценки влияния периодического отбора подземных вод на режим поверхностного стока необходимо сравнивать гидрографы последнего с графиком внутри годового хода редукции. В зависимости от расположения водозаборов подземных вод относительно водотоков, фильтрационных условий и других гидрогеологических факторов, а также от режима водоотбора сезонный максимум ре-

дукции может совпасть с фазой половодья, межени или промежуточной фазой. Очевидно, наиболее серьезными будут последствия редукиции поверхностного стока в случае совпадения ее сезонного максимума с меженью на реках, особенно если характерная величина меженного расхода рек сравнима с максимальной величиной редукиции. В меньшей степени редукиция поверхностного стока проявится при совмещении ее максимума с половодьем.

Поскольку внутригодовой режим поверхностного стока имеет стохастическую природу, так же как и редукиция поверхностного стока (из-за вероятностного характера отбора подземных вод), то наиболее последовательным будет сравнение вероятностных характеристик гидрографов поверхностного стока и редукиции. Вместе с тем, как теория случайных внутригодовых колебаний поверхностного стока, так и оценка редукиции при случайности водоотбора в настоящее время разработаны недостаточно, поэтому для практических расчетов проще ограничиться сравнением характерных гидрографов (например, гидрографа стока заданной обеспеченности с графиком редукиции, рассчитанном по среднегодовому гидрографу водоотбора).

Теоретическое исследование внутригодового хода редукиции поверхностного стока при отборе подземных вод необходимо также и при обосновании мероприятий по увеличению водности рек в меженный период путем закачки подземных вод в водоносные горизонты, гидравлически связанные с этими реками.

Рассмотрим расчет периодической компоненты редукиции для нескольких наиболее простых и в то же время распространенных в практике гидрогеологических схем.

**Однородный водоносный пласт с прямолинейной границей питания в плане.** Передаточная функция редукиции для условий отбора подземных вод одиночным или параллельным водотоку линейным рядом скважин имеет вид (2.78). Подставив в это выражение  $p = i\omega$ , получим, что в условиях компенсационного питания частотные характеристики редукиции имеют вид

$$\omega(\omega) = e^{-\chi\rho \cos \theta}, \quad \psi(\omega) = \chi\rho \sin \theta, \quad (3.42)$$

где  $\rho = \sqrt{1 + \sigma^2}$ ;  $\theta = \frac{1}{2} \arctg \sigma$ ,  $\sigma = \omega/ag^2$ .

Рассмотрим несколько примеров.

*Пример.* Изменение поверхностного стока при отборе подземных вод линейными водозаборами с учетом периодического характера водоотбора.

Аллювиальный водоносный горизонт с коэффициентом уровнянепроводности  $a = 12\,000$  м<sup>2</sup>/сут, намечается в эксплуатации в целях орошения. Величина компенсационного эффекта  $g$ , оцененная на основании данных опытно-фильтрационных работ, составляет  $0,48 \cdot 10^{-3}$  м<sup>-1</sup>. Временная зависимость (кривая  $I$  на рис. 3.13) водоотбора определена выражением

$$Q(t) = 10,8 + 15,4 \cos(t - 192^\circ) + 7,45 \cos(2t - 23^\circ) + \\ + 0,85 \cos(3t - 205^\circ), \text{ м}^3/\text{с}.$$

Требуется определить временные зависимости изменения расхода реки для ряда значений расстояния между рекой и водозабором в десятый год эксплуатации.



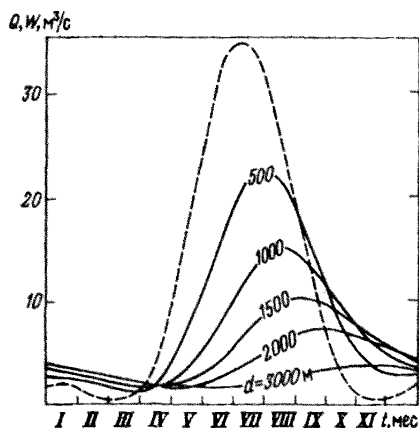


Рис. 3.13. Временные зависимости величины отбора подземных вод и сокращения расхода реки в условиях примера 1 ( $d$  — расстояние между линейным водозабором и рекой). Пунктирная линия — зависимость  $Q(t)$

Возьмем какое-либо значение  $d$ , например, 1000 м. Для расчетного значения времени  $t = 10$  лет  $= 3650$  сут определяем величину параметра  $(d/2)(at)^{1/2} = (1000/2)(12\,000 \cdot 3650)^{1/2} = 0,0755$ ; значение параметра  $\chi$  составляет  $1000 \cdot 0,48 \times 10^{-3} = 0,48$ ; значение функции  $w_0(t)$ , согласно формуле (2.79)  $w_0(t) = D(0,0755; 0,48) = 0,6187$ . Величина апериодической составляющей изменения расхода будет, таким образом, равна  $0,6187 \cdot 10,8 = 6,68$  ( $\text{м}^3/\text{с}$ ).

Задавая значением основной частоты колебаний  $\omega = \omega_1 = 2\pi/365 = 0,01721$  ( $\text{сут}^{-1}$ ), определяем соответствующие ей значения частотных характеристик. Для этого находим  $\sigma = 0,01721/12\,000 \cdot (0,48 \cdot 10^{-3})^2 = 6,226$ , по формулам (3.42) вычисляем

$$\rho = \sqrt[4]{1 + 6,226^2} = 2,511; \quad \theta = 0,7058, \text{ рад};$$

$$\omega_1 = \omega(\omega_1) = e^{-0,43 \cdot 2,511 \cos 0,7058} = 0,3996;$$

$$\psi_1 = \psi(\omega_1) = 0,48 \cdot 2,511 \sin 0,7058 = 0,7818 \approx 45^\circ.$$

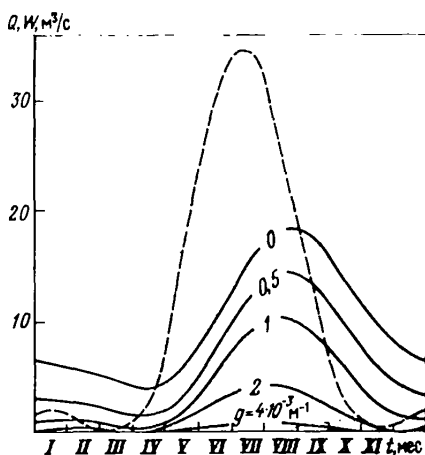
Амплитуда первой гармоник колебаний изменения расхода реки будет равна  $15,4 \cdot 0,3996 = 6,15$   $\text{м}^3/\text{с}$ ; соответствующий фазовый угол составит  $192^\circ + 45^\circ = 237^\circ$ . Действуя аналогично, определяем значения коэффициентов влияния и фазовых сдвигов на частотах  $\omega_2 = 2\omega_1$  и  $\omega_3 = 3\omega_1$ , приведенных в табл. 3.7. Временная зависимость

$$W(t) = 6,68 + 6,15 \cos(t - 237^\circ) + 2,14 \cos(2t - 89^\circ) + 0,19 \cos(3t - 287^\circ), \text{ м}^3/\text{с}.$$

График этой зависимости приведен на рис. 3.13 (кривая 4). На этом же рисунке изображены временные зависимости  $W(t)$ , соответствующие другим значениям расстояния  $d$ , при увеличении которого степень выраженности внутри годового хода изменений расхода реки уменьшается.

**Пример 2.** Изменение характера временной зависимости сокращения расхода реки под влиянием отбора подземных вод при изменении величины компенсационного эффекта иллюстрируется серией графиков (рис. 3.14). При их построении было принято, что расстояние между урезом реки и водозабором равно 1000 м, фильтрационные параметры и график водоотбора — те же, что и в примере 1, а величина компенсационного эффекта принималась изменяющейся в пределах от нуля до  $4 \cdot 10^{-3}$   $\text{м}^{-1}$ . Графики показывают существенность влияния компенсационного питания на степень проявления внутригодового рас-

Рис. 3.14. Временные зависимости отбора подземных вод и сокращения расхода реки при отборе их линейным водозабором, отстоящим от уреза реки на расстояние 1000 м при различных значениях компенсационного эффекта  $g$ . Пунктирная линия — зависимость  $Q(t)$  (из примера 1)



пределения изменения расхода реки. Так, при  $g=0$  величина  $w_{\max}/w_0$  составляет  $19,8/9,88 = 2,00$ ; при  $g = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$  —  $10,7/3,97 = 2,69$ ; при  $g = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$  —  $4,50/1,46 = 3,08$ .

Таким образом, усиление компенсационного питания приводит к более резкому проявлению внутригодового хода изменения расхода поверхностного стока. В то же время, при этом существенно уменьшается и само максимальное значение зависимости  $W(t)$ .

В случае отбора подземных вод площадной системой скважин, равномерно распределенных в полосе  $d_1 \leq x \leq d_2$ , параллельной реке, передаточная функция редукии имеет вид (2.86). Подставив в нее  $p = i\omega$ , найдем выражения для частотных характеристик репродукции в виде

$$\left. \begin{aligned} w(\omega) &= \frac{1}{\chi\rho} \sqrt{1 - 2e^{-\chi\rho \cos \theta} \cos(\chi\rho \sin \theta) + e^{-2\chi\rho \cos \theta}}; \\ \psi(\omega) &= \arctg \frac{e^{\chi\rho \cos \theta} \sin \theta - \sin(\theta + \chi\rho \sin \theta)}{e^{\chi\rho \cos \theta} \cos \theta - \cos(\theta + \chi\rho \sin \theta)}, \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

где  $\chi = gd$ , а величины  $\rho$  и  $\theta$  определены в формулах (3.42).

Таблица 3.7

Значения коэффициентов влияния и фазовых сдвигов в разложении периодической составляющей изменения расхода реки (по условиям примера 1)

$d, \text{ м}$	$w_0$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$\psi_1^\circ$	$\psi_2^\circ$	$\psi_3^\circ$
500	0,787	0,632	0,536	0,471	22	33	41
1000	0,619	0,400	0,287	0,222	45	66	82
1500	0,487	0,253	0,151	0,104	67	99	123
2000	0,383	0,160	0,083	0,049	90	132	164
3000	0,235	0,064	0,024	0,011	134	198	245

Вследствие более близкого расположения скважин водозабора к урезу реки, чем в случае отбора подземных вод линейным рядом, отстоящим от реки на расстоянии  $d$ , площадной отбор при прочих равных условиях оказывает существенное более выраженное влияние на внутригодовой режим изменения поверхностного стока, что показано в приведенном ниже примере.

*Пример 3.* Изменение поверхностного стока при площадном водоотборе подземных вод с учетом сезонных колебаний водоотбора.

Геофилтрационные условия и график водоотбора те же, что и в примере 1. Задаваясь значением расстояния  $d=1000$  м, определяем при  $t=3650$  сут, значение функции  $w_0(t)$ , используя данные примера 1:

$$w_0(t) = \frac{1}{0,48 \cdot 10^{-3} \cdot 1000} [\operatorname{erf}(0,48 \cdot 10^{-3} \sqrt{12\,000 \cdot 3650}) - \\ - D^*(0,0755; 0,48)] = 0,7944;$$

величина аperiодической составляющей равна  $10,8 \cdot 0,7944 = 8,58$  м<sup>3</sup>/с.

На основной частоте колебаний  $\omega = \omega_1 = 0,01721$  сут<sup>-1</sup> величины  $\sigma$ ,  $\rho$  и  $\theta$  вычислены в примере 1. По формулам (3.43) находим  $w(\omega_1) = 0,6386$ ;  $\psi(\omega_1) = 19^\circ$ . Амплитуда первой гармоники разложения изменения поверхностного стока при этом равна  $0,6386 \cdot 15,4 = 9,84$  м<sup>3</sup>/с; фазовый угол  $-192^\circ + 19^\circ = 211^\circ$ . Значения коэффициентов влияния и фазовых сдвигов на других частотах, а также при других значениях  $d$ , приведены в табл. 3.8, а графики временных зависимостей изменения поверхностного стока под влиянием подземных вод площадными водозаборами — на рис. 3.15. Сравнение этих графиков с соответствующими графиками на рис. 3.14, обнаруживает следующее: во-первых, влияние площадного отбора на расход реки проявляется более существенно; во-вторых, максимальные значения изменения расхода реки наступают при площадном отборе с гораздо меньшим запаздыванием во времени, чем в случае линейного ряда. Например, при  $d=2000$  м пиковое значение сокращения расхода реки при отборе подземных вод линейным рядом наступает в конце сентября, в случае площадного отбора — в начале августа. Степень выраженности проявления сезонных колебаний изменения поверхностного стока в случае площадного отбора также большая, чем при прочих равных условиях в случае отбора подземных вод линейным рядом. Так, при  $d=2000$  м величина  $w_{\max}/w_0$  в случае линейного водозабора составила  $6,90/4,13 = 1,67$ ; в случае площадного —  $15,8/6,94 = 2,28$ .

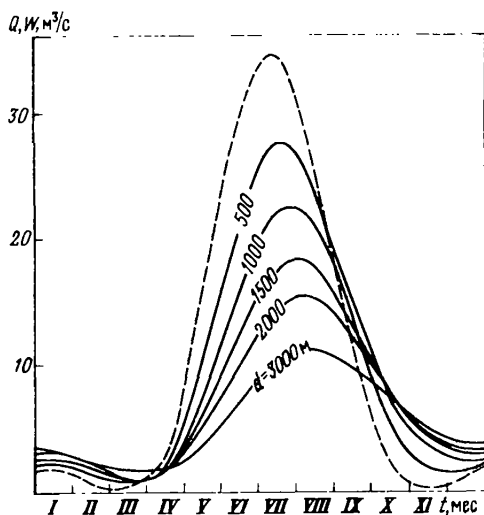
Еще один важный фактор, оказывающий влияние на внутригодовые колебания величины изменения поверхностного стока при отборе подземных вод — обратная инфильтрация оросительных

Таблица 3.8

Значения коэффициентов влияния и фазовых сдвигов в разложении периодической составляющей изменения расхода реки (по условиям примера 2)

$d$ , м	$w_0$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$\psi_1^\circ$	$\psi_2^\circ$	$\psi_3^\circ$
500	0,889	0,797	0,734	0,688	10	15	18
1000	0,794	0,639	0,543	0,478	19	26	31
1500	0,713	0,515	0,407	0,341	26	34	39
2000	0,643	0,420	0,311	0,252	31	39	43
3000	0,530	0,289	0,201	0,161	39	43	44

Рис. 3.15. Временные зависимости величины отбора подземных вод и сокращения расхода реки (в условиях примера 2) при различных значениях ширины  $d$  полосы водоотбора. Пунктирная линия — зависимость  $Q(t)$



вод на полях. Если обозначить через  $k_b$  (коэффициент возврата) долю отобранных водозабором подземных вод, которая возвращается к эксплуатируемому горизонту, согласно принципу суперпозиции, передаточная функция изменения поверхностного стока будет иметь вид

$$U_W(p) = U_W^{(n)}(p) - k_b U_W^n(p), \quad (3.44)$$

где  $U_W^{(n)}(p)$  — передаточная функция редукции для случая линейного водозабора без учета обратной инфильтрации  $U_W^{(n)}(p)$  — передаточная функция редукции для случая отбора подземных вод площадным водозабором, размещенным на орошаемых массивах. Если отбор подземных вод ведется площадными водозаборами, размещенными непосредственно на орошаемых площадях, для учета возвратной инфильтрации, очевидно, достаточно умножить значения водоотбора на величину  $(1 - k_b)$ , при этом характер сезонных колебаний изменения поверхностного стока под влиянием отбора подземных вод не будет отличаться от случая площадного отбора. В условиях, когда размещение водозаборов не совпадает с размещением орошаемых площадей, характер внутригодовых колебаний изменения поверхностного стока может оказаться сильно искаженным. Это рассмотрено на примере условий отбора подземных вод однородного водоносного горизонта, ограниченного с одной стороны прямолинейной рекой, линейным водозабором, причем отбор подземных вод сопровождается инфильтрацией оросительных вод в полосу между водозабором и рекой. Передаточная функция  $U_W^{(0)}(p)$  в этом случае определяется выражением (2.78), передаточная функция  $U_W^{(n)}(p)$  — выражением (2.86). На рис. 3.16 изображены графики временных зависимостей  $W(t)$ , построенных по

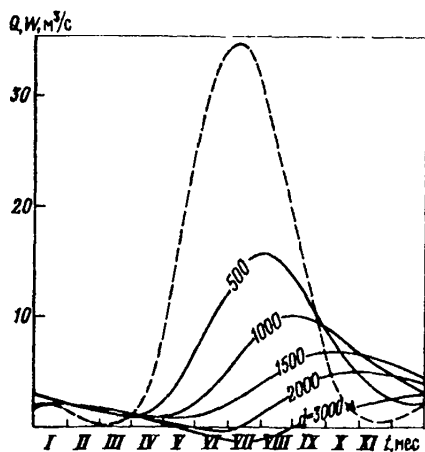


Рис. 3.16. Временные характеристики величины отбора подземных вод и изменения расхода реки при их отборе линейным водозабором и обратной инфильтрации оросительных вод в полосе между рекой и водозабором ( $d$  — ширина полосы, м). Пунктирная линия — зависимость  $Q(t)$

условиям примеров 1 и 2, причем принято, что  $k_b = 0,25$  (из ординат графиков на рис. 3.13 вычитались умноженные на 0,25 значения ординат соответствующих графиков на рис. 3.15). Интенсивная инфильтрация оросительных вод в период максимального отбора, как показывают графики на рис. 3.15 оказывает влияние на расходы реки лишь с незначительным запаздыванием во времени, что вызывает соответствующее уменьшение величины изменения расхода реки в это время. Этим объясняется тот факт, что пиковые значения зависимостей  $W(t)$  на рис. 3.16 существенно смещены вправо по сравнению с графиками на рис. 3.15. Возвратная инфильтрация в ряде случаев может обусловить достаточно сложный характер водообмена между эксплуатируемым водоносным горизонтом и рекой, когда вследствие отбора подземных вод в течение части года водность реки увеличивается, а в остальное время — уменьшается. Такие условия иллюстрируются, например, кривой 6 на рис. 3.16.

**Схемы пластов-полос.** Передаточные функции редукции для условий схем пластов-полос могут быть представлены с помощью разложений вида (2.127), где параметры определяются формулами (2.129—2.131) для пласта-полосы с двумя однородными границами питания и формулами (2.132—2.134) для пласта-полосы с разнородными границами. Ряды, изображающие соответствующие передаточные функции, при этом суммируются в замкнутом виде, а именно:

$$U_W(p) = \frac{\text{sh } \beta L (1 - \bar{d})}{\text{sh } \beta L} \quad (3.45)$$

для пласта-полосы с двумя однородными границами питания и

$$U_W(p) = \frac{\text{ch } \beta L (1 - \bar{d})}{\text{ch } \beta L} \quad (3.46)$$

для пласта-полосы с разнородными границами, где  $\beta = (p/a + g^2)^{1/2}$ . Для определения частотных характеристик следует принять

$$\left. \begin{aligned} \beta L &= \sqrt{\chi^2 + i\omega}; \\ \chi &= gL; \quad \bar{\omega} = \omega L^2/a; \quad \bar{d} = d/L. \end{aligned} \right\} \quad (3.47)$$

В соответствии с формулами (3.45), (3.46) были составлены программы для микрокалькулятора, позволяющие определять частотные характеристики редукиции для схем пластов-полос (см. приложение, программы 24 и 25).

*Пример.* Оценка годового хода редукиции в условиях пласта-полосы с двумя однородными границами питания. Параметры:  $L=4000$  м;  $d=1100$  м;  $a=25\,000$  м<sup>2</sup>/сут;  $g=0,26 \cdot 10^{-3}$  м<sup>-1</sup>. Требуется определить изменение редукиции поверхностного стока и в течение 25-го года эксплуатации водозабора, если график водоотбора задан разложением

$$Q(t) = 6,20 + 7,45 \cos(t - 210) + 5,62 \cos(2t - 46) + \\ + 1,80 \cos(3t - 270), \text{ м}^3/\text{с}.$$

График этой зависимости приведен на рис. 3.17, кривая 1.

Решение. 1. Вначале оценим аperiodическую компоненту редукиции. Пределаем это с помощью выражения (2.127), в котором значения  $\gamma$ ,  $\lambda_n$ ,  $C_n$  определены по формулам (2.129, 2.131),  $t=25\,000 \cdot 24 \cdot 365/4000^2=13,69$ ;  $\chi=0,26 \times 10^{-3} \cdot 4000=1,04$ ; при таком значении  $\bar{t}$  и при  $\lambda_1=\pi^2+1,04^2=10,95$ , согласно формуле (2.127), уже наблюдается установившийся режим редукиции, причем  $\omega_0=\gamma=0,668$ , а соответствующая величина  $\omega_0=0,668 \cdot 6,2=4,14$  м<sup>3</sup>/с.

2. Определим значения частотных характеристик при  $\omega=\omega_1$ ,  $2\omega_1$  и  $3\omega_1$ . Для этого заносим программу 25 расчета в память калькулятора и вводим, согласно инструкции к ней, значения  $\chi^2=1,0816$  — в регистр 1;  $\bar{\omega}=0,0175 \cdot 4000^2/25\,000=11,2$  — в регистр 2;  $\bar{d}=1100/4000=0,275$  — в регистр 3. Запуская микрокалькулятор, через 60 с получаем следующие значения частотных характеристик на основной частоте:  $\omega_1=0,518$ ;  $\psi_1=0,617$  рад (что эквивалентно 35°). Аналогично, на частоте  $\omega_2=2\omega_1$  имеем  $\omega_2=0,39$ ;  $\psi_2=52^\circ$ ; на утроенной основной частоте  $\omega_3=0,317$ ;  $\psi_3=64^\circ$ .

Выражение для периодической компоненты редукиции будет, таким образом, иметь вид:

$$W_p = 7,45 \cdot 0,518 \cos(t - 210 - 35) + 5,62 \cdot 0,390 \cos(2t - 46 - 52^\circ) + \\ + 1,80 \cdot 0,317 \cos(3t - 270 - 64) = 3,86 \cos(t - 245) + \\ + 2,19 \cos(2t - 98^\circ) + 0,57 \cos(3t - 334^\circ), \text{ м}^3/\text{с}.$$

Для того, чтобы получить полное значение изменения поверхностного стока в какой-либо момент времени, необходимо к значению  $W_p$ , определяемому этим выражением, прибавить величину  $\omega_0=4,14$  м<sup>3</sup>/с. График суммарной зависимости  $W(t)$  приведен на рис. 3.17 (кривая 2).

В условиях отсутствия компенсационного питания влияние границ пластов-полос сказывается главным образом на амплитудно-частотных характеристиках: для схемы пласта-полосы с двумя однородными границами питания они проходят в целом ниже таких же характеристик пласта с одной границей питания в плане и, тем более; ниже характеристик пласта-полосы с разнородными границами. Различия в значениях фазо-частотных характеристик пласта-полосы с границами питания и полуограниченного пласта относительно невелики: не более 30°; что же касается

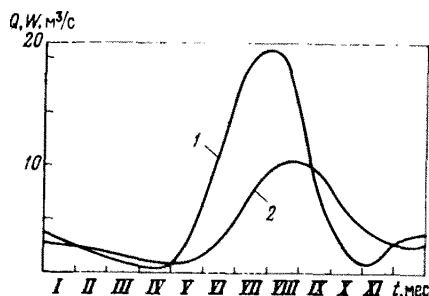


Рис. 3.17. Графики временных зависимостей отбора подземных вод (1) и изменения расхода поверхностного водотока (2) в условиях примера

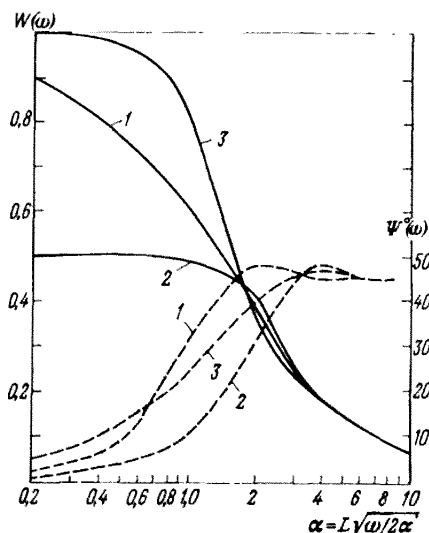


Рис. 3.18. Частотные характеристики редукции в условиях пласта-полуплоскости (1), пласта-полосы с двумя однородными границами питания (2) и с разнородными границами (3) при отборе подземных вод площадным водозабором в форме полосы шириной  $d$  (сплошные линии — амплитудные характеристики, пунктирные — фазовые)

фазо-частотных характеристик редукции для пласта-полосы с разнородными границами, то их различия со схемой полуограниченного пласта не превосходят  $10^\circ$ .

В случае отбора подземных вод пласта-полосы равномерно распределенным площадным водозабором по всему пространству между границами выражение для передаточной функции редукции представляется в виде разложения вида (2.127), где значения предельных относительных редукций  $\gamma$  составят соответственно 0,5 для условий пласта-полосы с двумя однородными границами питания и 1,0 для пласта-полосы с разнородными границами. Коэффициенты разложения  $C_k$  будут соответственно, иметь вид (2.141) и (2.142). Результаты расчетов частотных характеристик редукции при отсутствии компенсационного питания и отборе подземных вод площадным водозабором оформлены в виде графиков и приведены на рис. 3.18. Анализ этого рисунка приводит к следующим выводам: во-первых, амплитудно-частотные характеристики имеют выраженное плато, находящееся в условиях пласта-полосы с двумя однородными границами питания в области значений  $L(\omega/2a)^{1/2}$ , не превосходящих единицы; для пласта-полосы с разнородными границами плато амплитудной характеристики обрывается, начиная со значения  $L(\omega/2a)^{1/2}$ , равного при-

мерно 0,5. При значениях  $L(\omega/2a)^{1/2}$ , превосходящих  $1,6 \div 2,0$ , амплитудно-частотные характеристики редукции всех трех систем практически одинаковы. Фазо-частотные характеристики всех трех систем имеют пределом значение  $45^\circ$ , однако в случае пласта-полосы с разнородными границами это значение достигается при  $L(\omega/2a)^{1/2} = 1,6$ , в то время как в случаях пласта-полосы с границами питания и полуограниченного пласта — при  $L(\omega/2a)^{1/2} = 0,3$ .

## **Глава 4**

### **ГИДРОГЕОЛОГИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ СИСТЕМ СОВМЕСТНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПОДЗЕМНЫХ И ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОД**

Использование подземных вод для орошения развивается не одинаково в различных регионах мира. Наибольшими масштабами использования подземных вод для орошения характеризуются США и Индия. В СССР развитие ирригации на базе подземных вод развито пока недостаточно. Отбор подземных вод для орошения в СССР на порядок меньше, чем в США. При этом прогнозные эксплуатационные ресурсы подземных вод превосходят их существующий отбор более чем в 40 раз [26].

Такая диспропорция между значительными ресурсами подземных вод и относительно слабым их использованием (особенно в аридных районах) сложилась традиционно. Считалось, что эксплуатация подземных вод нерациональна в технико-экономическом отношении (по сравнению с вариантами, предполагавшими расширение использования поверхностных вод); предполагалось также, что любой крупномасштабный отбор подземных вод нанесет необратимый ущерб окружающей среде.

Одной из причин сложившегося положения была относительно слабая разработанность теоретических и методических положений, связанных с оценками эксплуатационных ресурсов подземных вод при их комплексном использовании в водохозяйственных системах, с учетом влияния их отбора на поверхностный сток. Если рассматривать проблему шире, окажется, что для оценок целесообразности тех или иных форм эксплуатации ресурсов подземных вод необходим анализ проблемы как комплексной, иными словами, системный подход, т. е. всесторонний анализ изучаемых процессов и явлений и развитие синтезирующей теории, позволяющей объяснять факторы, наметить перспективы эволюции того или иного процесса, его связей с другими процессами и явлениями [5, 20].

#### **4.1. СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ ШИРОКОМАСШТАБНОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД**

Основная цель при широкомасштабном вовлечении ресурсов подземных вод — максимизация развития производительных сил



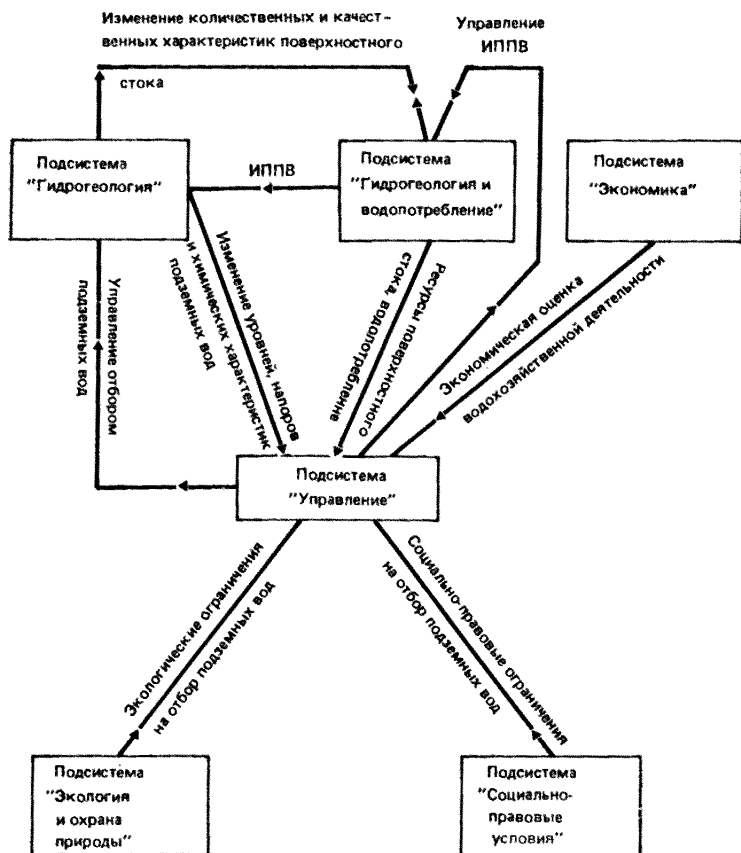


Рис. 4.1. Структура взаимосвязей в системе комплексной проблемы «Широкомасштабное использование подземных вод»

за счет увеличения располагаемых водных ресурсов. Эта цель достигается повышением количества отбираемых подземных вод и применением таких правил управления ими, которые удовлетворяют основной цели с учетом возникающих ограничений физического, экономического, социального, экологического характера. Таким образом, процесс решения основной задачи зависит от совместного решения целого комплекса более или менее связанных между собой частных проблем. При этом изучаемая система распадается на несколько взаимосвязанных подсистем. Структура взаимосвязей показана на рис. 4.1. В рассматриваемой постановке выделено шесть подсистем, представляющих собою (в функциональном отношении) более или менее автономные блоки, соответствующие процессам и явлениям, протекающим в природной, хозяйственной и социальной сферах. Центральное место в иерархии отведено подсистеме «Управление», где, на основе оценок тех или

инных параметров или характеристик, вырабатываемых в других подсистемах, определяются оперативные решения по эксплуатации подземных вод, а именно, текущие значения величин водоотбора и расхода, искусственного пополнения подземных вод (если оно осуществляется) по всем месторождениям подземных вод (МПВ), входящим в водохозяйственную систему. В центральной подсистеме локализуется алгоритм выбора текущих значений расходов водоотбора и искусственного пополнения подземных вод (ИППВ), а также оценка эффективности управления на той или иной количественной основе. Физические соотношения, описывающие эволюцию отдельных частей системы, ограничения, накладываемые на изменение отдельных параметров, распределены между пятью периферийными подсистемами.

В подсистеме «Гидрология и водопотребление» рассматриваются задачи оценки и анализа данных по ресурсам поверхностных вод, водопотреблению и его дефицитах, складывающихся после распределения поверхностных водных ресурсов, с учетом многолетней и внутригодовой изменчивости этих характеристик и регулирования поверхностного стока. Принимаются во внимание различные виды вероятностных распределений, корреляционная зависимость стока за смежные годы, группировок маловодных и многоводных лет в серии. На основе анализа естественных рядов стока могут быть смоделированы искусственно продолженные ряды, имеющие те же вероятностные характеристики [14]; этот прием широко используется в водохозяйственных расчетах.

При оценках величин водопотребления в орошении встают те же методические вопросы, что и при оценках ресурсов поверхностного стока: учет их сезонной и многолетней изменчивости. Методы, применяемые для этого, в целом совпадают с методами оценки вероятностных характеристик поверхностного стока [4, 57]. Наконец, наиболее важная величина, получаемая на выходе этой подсистемы — дефицит водопотребления, оставшийся неудовлетворенным после распределения ресурсов поверхностных вод. Дефицит водопотребления представляет собой разность между величинами водопотребления и расхода поверхностного стока; если эта разность отрицательна, величина дефицита принимается равной нулю.

В подсистему «Гидрогеология» входят: задачи оценки эксплуатационных ресурсов подземных вод; изменения поверхностного стока при их эксплуатации; задачи оценки изменения качества поверхностных и подземных вод при эксплуатации последних. Основой решения перечисленных задач служат гидродинамические расчеты, связанные с математическим моделированием гидрогеологических процессов. Расчеты эксплуатационных ресурсов подземных вод и изменения поверхностного стока рассмотрены в предыдущих главах.

Следует добавить лишь возможность привлечения конечно-разностных и вариационно-разностных методов решения задач геофильтрации [13, 22, 23, 32].

При эксплуатации подземных вод неизбежно происходит изменение их качественных показателей (главным образом, химического состава). Требования качества нередко становятся определяющими при оценке эксплуатационных ресурсов подземных вод, назначении мероприятий по их охране, решении природоохранных задач и задач управления ресурсами подземных вод в водохозяйственных системах. Исследование изменения качества подземных вод приводит к уравнениям переноса примеси в подземном потоке [17, 32].

Подробное рассмотрение вопросов, связанных с уравнением переноса примеси, выходит за рамки настоящей книги.

В подсистему «Экономика» включены задачи, связанные с экономическим обоснованием проектируемых водохозяйственных мероприятий и с экономическим обоснованием функционирования действующих водохозяйственных систем. Для анализа экономической эффективности приняты следующие основные характеристики: приведенные затраты (абсолютные и на единицу продукции), чистый доход, уровень рентабельности. В работе [30] рассмотрены структуры капитальных вложений и эксплуатационных издержек при обосновании экономической эффективности эксплуатации подземных вод. При этом главными статьями капитальных вложений являются: бурение и обустройство скважин; строительство, оборудование и монтаж насосных станций, отводящих и сборных водоводов вдоль водозаборов, а также стоимость разведки подземных вод. Основную часть годовой величины эксплуатационных издержек представляет собой стоимости электроэнергии, необходимой для водоподъема.

В подсистеме «Экология и охрана природы» оцениваются количественные и структурные изменения биогеоценозов, затрачиваемых эксплуатацией подземных вод: например, изменение уровня грунтовых вод, поверхностного стока, качественного состава поверхностных и подземных вод, т. е. оценки, выполняемые с помощью решения часто гидрогеологических задач. Все перечисленные оценки касаются лишь абиотических элементов экосистем. Однако, реакция биогеоценозов на вариации внешних условий носит динамический характер: время наступления различных желательных изменений может существенно запаздывать за вызвавшими их причинами. Зависимость этих причин от времени может сказаться в виде сложного изменения параметров биогеноса (количественного и видового состава популяций). В некоторых условиях редкие, но кратковременные всплески возмущающего воздействия будут слабо восприниматься экосистемой, в других случаях — в условиях взаимного усиления влияний и других экологических эффектов — даже малые и кратковременные возмущения могут вызвать значительные изменения в биогеоценозах.

Для прогнозов влияния внешних возмущений на биогеносы все чаще используются методы математического моделирования. На рис. 4.2 изображена диаграмма, иллюстрирующая направления воздействий при эксплуатации подземных вод. Прежде всего пере-

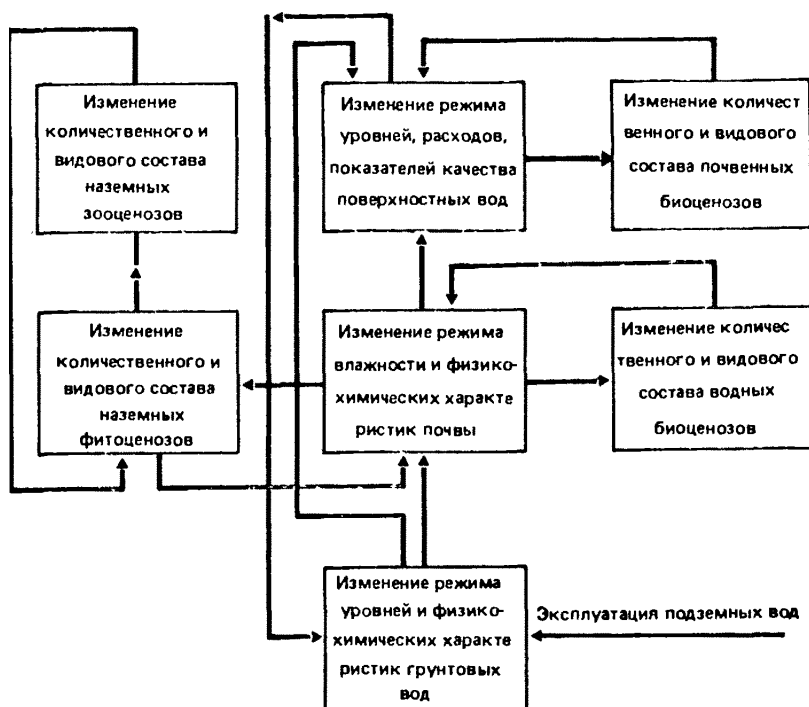


Рис. 4.2. Диаграмма направления взаимодействий в биогеоценозе при эксплуатации подземных вод

мены затрагивают подземную гидросферу: изменяется режим уровней грунтовых вод, их химического состава, температуры. Затем изменения достигают вод зоны аэрации (почвенной влаги), а также поверхностных водотоков и водоемов. Изменения водного режима почвы влечет за собой изменения условий почвообразования, перестройку условий окружающей среды для почвенных организмов, а также для наземных растений. Изменения количественного и видового состава фитоцеллюзов отразятся на условиях обитания животных популяций, входящих в те же экосистемы. Изменения гидрогеологического и гидрохимического режимов поверхностных вод выразятся в изменениях количественного и видового состава водных организмов.

Несмотря на довольно бурное развитие экологического моделирования в последние годы, авторам известно немного работ, в которых в какой-то мере давалась бы методика количественного прогноза изменения экологического состояния при эксплуатации водохозяйственных систем, тем более при совместном использовании поверхностных и подземных вод. Вместе с тем, на основании анализа ряда работ по экологическому моделированию [1, 12, 21, 24 и др.], представляется возможным сформулировать определенные требования к будущим моделям такого рода:

1. Модель должна отражать комплексное влияние эксплуатации подземных вод на окружающую среду (т. е. ее влияние как на неживые, так и на живые компоненты биогеоценозов).

2. Существующие динамические модели эволюции экосистем пригодны для этой цели лишь частично и требуют дополнения блоками, детально описывающими взаимосвязи гидрогеологических (в широком понимании) факторов с экологическими.

3. Степень детальности моделей должна соответствовать масштабам изучаемого региона, по возможности они должны базироваться на обобщенных показателях состояния биогеоценозов, а также быть реалистичными с точки зрения информационного обеспечения.

Как отмечалось выше, подсистема «Управление» занимает центральное место в структуре комплекса задач. С точки зрения этой подсистемы, информация, перерабатываемая остальными подсистемами, рассматривается как входная. Внутри самой подсистемы «Управление» главными структурными частями являются: математическая модель, внешние ограничения, цель управления (сформулированная в виде требования поддержания значений некоторого числа параметров в заданных пределах, либо оптимизации этих параметров).

Для задач управления водохозяйственными системами обычно применяется оптимизационный подход — вводится показатель эффективности управления (называемый также «критерием оптимальности», «целевой функцией» и т. п.). Иногда в задаче фигурирует сразу несколько критериев оптимальности, например, показатели экономического характера сочетаются с критериями экологической природы и т. д. Однако, в большинстве случаев, бывает определена одна целевая функция. Чаще всего в ней отражается экономическая сторона эксплуатации водохозяйственной системы — чистый доход, сумма затрат на водообеспечение, приведенные затраты и др.

Помимо критериев экономического характера, во многих работах встречаются и другие варианты целевой функции, например, суммарная величина водооборота, достигаемая путем перераспределения дебитов между МПВ во времени и пространстве. Внеэкономическим показателем можно считать и надежность функционирования водохозяйственной системы, понимаемую как вероятность ее бездефицитной работы в течение заданного времени. Как критерий эффективности, надежность имеет ряд недостатков: при ее оценке не учитываются глубины дефицитов (фиксируются лишь факты их возникновения) и группировки дефицитных периодов во времени. Вместе с тем, значение надежности позволяет оценить общий характер процессов в водохозяйственной системе одной величиной; поэтому этот критерий нередко используется в научных и прикладных разработках [38].

В настоящей работе рассмотрены также некоторые аспекты оценки надежности водохозяйственных систем, в которых совместно эксплуатируются поверхностные и подземные воды. В тео-

рии гидрогеологических расчетов оценка надежности систем совместного использования подземных и поверхностных вод представляет собой в известной мере новое направление, причем традиционное понимание термина «эксплуатационные ресурсы» приобретает в нем вероятностный смысл: выходом гидрогеологического расчета становится не число (расход водоотбора), а функция — зависимость надежности функционирования от среднестатистического значения величины водооборота. Несмотря на существование мнения о том, что подобные расчеты не имеют большого практического значения, без них вряд ли можно вынести предварительное суждение о водообеспеченности тех или иных вариантов систем совместного использования, поскольку учет фактора стохастического изменения внешних условий приобретает при этом первостепенное значение.

Под влиянием изменчивости гидрометеорологических условий величина водопотребления орошаемых культур испытывает от года к году случайные колебания. Если в условиях засушливого климата Средней Азии и Южного Казахстана величина коэффициента вариации, характеризующая случайные отклонения среднегодовых величин водопотребления сельскохозяйственных культур, составляет 0,1—0,2, то в зоне неустойчивого увлажнения эти величины значительно выше, достигая значений 0,4—0,5 вдоль границы степной и лесостепной зон [4]. В силу названных причин величина отбора подземных вод в том случае, когда они являются основным источником орошения, также будет подвержена случайным вариациям. Однако изменчивость величины подземного водоотбора проявляется в значительно большей степени, если подземные воды выступают в качестве дополнительного к поверхностному стоку источника оросительных вод, так как изменчивость гидрометеорологических условий существенно усугубляется непостоянством самого поверхностного стока. В гл. 1 были охарактеризованы основные параметры геофильтрационных систем, определяющих их реакции на стохастический водоотбор; в настоящей главе рассматриваются вероятностные характеристики водоотбора, а также динамико-стохастические параметры геофильтрационных систем в ряде конкретных случаев и выводятся основные расчетные зависимости.

## **4.2. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ГЕОФИЛЬТРАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ**

Для оценки надежности работы системы совместного использования поверхностных и подземных вод необходимо, прежде всего, задаться вероятностными характеристиками величины водоотбора подземных вод. Для этого, в свою очередь, следует указать закон управления их отбором, т. е. правило, по которому в каждый момент времени, в зависимости от сложившейся ситуации, можно определить необходимое количество подземных вод, которое подлежит откачке.

В настоящее время в СССР возможности отбора подземных вод для орошения регламентируются действующим в стране водным законодательством, в котором говорится о том, что использование подземных вод питьевого качества для нужд, не связанных с питьевым и бытовым водоснабжением, как правило, не допускается. В районах, где отсутствуют необходимые поверхностные водные источники, и имеются достаточные запасы подземных вод питьевого качества, органы по регулированию использования и охране вод могут разрешить использование этих вод для целей, не связанных с питьевым и бытовым водоснабжением. В соответствии с этим правовым ограничением на отбор подземных вод для орошения в периоды, когда потребность в воде для ирригации может быть удовлетворена с помощью ресурсов поверхностных вод, подземные воды отбирать нельзя. В то же время, очевидно, что и тогда, когда ресурсов поверхностного стока недостаточно для покрытия потребности в оросительной воде, величина отбора подземных вод не должна превышать дефицита водопотребления.

Более сложен вопрос о том, какую часть дефицита водопотребления следует покрывать за счет подземных вод. В смысле надежности функционирования непокрытые дефициты водопотребления равноправны вне зависимости от своей глубины в том смысле, что даже самый малый дефицит водопотребления, не ликвидированный с помощью суммарных ресурсов поверхностных и подземных вод, приводит к ситуации «отказа» системы, т. е. к уменьшению надежности. Поэтому с точки зрения надежности функционирования для достижения наилучшей в этом смысле ситуации следует стремиться в любом случае покрывать отбором подземных вод всю величину дефицита, оставшуюся после использования ресурсов поверхностного стока, не учитывая возможности возникновения дефицитов большей глубины в будущем.

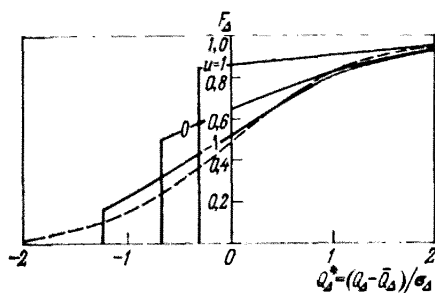
Резюмируя сказанное, заключаем, что для целей управления системой совместного использования поверхностных и подземных вод (с применением надежности в качестве показателя эффективности), закон управления дебитом водозаборов выглядит следующим образом:

$$Q_{\Delta} = \begin{cases} Q_p - Q, & \text{если } Q_p > Q; \\ Q, & \text{если } Q_p \leq Q, \end{cases} \quad (4.1)$$

где  $Q_{\Delta}$  — величина отбора подземных вод,  $Q$  — мгновенное или усредненное за определенный период времени значение расхода поверхностного стока,  $Q_p$  — выражение в единицах расхода мгновенное или аналогичным образом усредненное значение потребности в воде. В зависимости (4.1) не учитывается редукция поверхностного стока под влиянием эксплуатационного отбора подземных вод. Несколько ниже будут рассмотрены условия, учитывающие и редукцию поверхностного стока.

Следствием закона управления в форме (4.1) будет тот факт, что вероятностные характеристики величины отбора подземных

Рис. 4.3. Графики функции распределения дебита, определяемой формулой (4.2), при различных значениях параметра  $u$ . Пунктирная линия — график нормального распределения с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией



вод станут зависимыми от вероятностных же характеристик поверхностного стока и водопотребления. Если в расчет принимаются среднегодовые значения указанных величин, задача определения всех вероятностных характеристик случайной величины  $Q_\Delta$  по характеристикам величин  $Q$  и  $Q_n$  может быть решена с помощью разработанных в теории вероятностей способов [3]. В многолетнем разрезе выборка среднегодовых величин ресурсов поверхностного стока изучаемого участка может быть описана соответствующим законом распределения вероятностей. Сток большинства рек аридной зоны СССР, а также среднегодовые нормы водопотребления на орошение, характеризуются невысокими значениями коэффициента вариации среднегодовых расходов, не превышающими, как правило, 0,25—0,30. Это обстоятельство позволяет использовать нормальный закон распределения к описанию многолетней изменчивости поверхностного стока и водопотребления. Если принять нормальный закон распределения для случайной величины поверхностного стока, функция распределения дебита  $F_\Delta(Q_\Delta)$  выразится в виде:

$$F_\Delta(Q_\Delta) = \begin{cases} 1 - \Phi^*\left(\frac{u - Q_\Delta}{\sigma_Q}\right), & Q_\Delta \geq 0; \\ 0, & Q_\Delta < 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

где  $u$ , равное  $(\bar{Q}_n - \bar{Q})/\sigma_Q$  — нормированная величина потребления в системе случайных величин поверхностного стока и водопотребления;  $\Phi^*(z)$  — нормальная функция распределения;  $\bar{Q}$ ,  $\bar{Q}_n$  — математические ожидания соответственно расхода поверхностного стока и водопотребления;  $\sigma_Q$ , равное  $(\sigma^2 + \sigma_n^2)^{1/2}$  — среднеквадратическое отклонение разности между величиной поверхностного стока и водопотребления (предполагается отсутствие корреляции между этими величинами);  $\sigma$  — дисперсия расхода поверхностного стока;  $\sigma_n$  — дисперсия водопотребления.

На рис. 4.3 изображены графики функции распределения дебита при нескольких значениях параметра  $u$ , приведенные к нормированной случайной величине  $Q^*_\Delta = (Q_\Delta - \bar{Q}_\Delta)/\sigma_\Delta$  (где  $\bar{Q}_\Delta$  — математическое ожидание,  $\sigma_\Delta$  — среднеквадратическое отклонение дебита). Эти графики показывают, что, начиная примерно со



значения  $Q_{\Delta}^* = 1,0 - 1,2$  распределение дебита приближается к нормальному при всех значениях параметра  $u$ . Кроме того, чем выше величина нормированного водопотребления, тем лучше совпадение с нормальным законом наблюдается на всем интервале изменения дебита. При значениях параметра  $u$ , превышающих 0,7—0,8, распределение дебита, представляющее практический интерес только в области высоких значений  $Q_{\Delta}$ , может считаться нормальным. В рассматриваемом построении не учитываются следующие факторы: возможная коррелированность потребности орошаемых культур в воде с поверхностным стоком, искусственное восполнение за счет поверхностного стока в невегетационные периоды запасов подземных вод, оказывающие определенное влияние на потребление дебита, проявляющееся главным образом в размыве скачка этой функции при  $Q_{\Delta} = 0$ . Моменты распределения дебита выражаются с помощью формул

$$\bar{Q}_{\Delta} = \sigma_Q F_1(u), \quad (4.3)$$

$$\sigma_{\Delta} = \sigma_Q F_2(u), \quad (4.4)$$

где  $\bar{Q}_{\Delta}$  — математическое ожидание;  $\sigma_{\Delta}$  — среднеквадратическое отклонение дебита; функции  $F_1$  и  $F_2$  определены выражениями

$$\left. \begin{aligned} F_1(u) &= u + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{erfc} \frac{u}{\sqrt{2}}, \\ F_2(u) &= \sqrt{F_3(u) - F_1^2(u)}, \\ F_3(u) &= (1 + u^2) \Phi^*(u) + \frac{u}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \end{aligned} \right\}. \quad (4.5)$$

Значения функций  $F_1(u)$ ,  $F_2(u)$  приведены в табл. 4.1. Автокорреляционная функция дебита, характеризующегося ступенчатой зависимостью от времени имеет вид [10]:

$$K_{\Delta}(\xi) = \sigma_{\Delta}^2 \left( 1 - \frac{|\xi|}{\tau} \right), \quad (4.6)$$

а спектральная функция —

$$L_{\Delta}(\omega) = \frac{2\sigma_{\Delta}^2 \tau}{\pi} \left( \frac{\sin \omega \tau / 2}{\omega \tau} \right)^2. \quad (4.7)$$

При этом предполагается, что высота каждой ступеньки дебита не зависит от высоты остальных ступенек.

Поскольку распределение величины водоотбора подземных вод входного возмущения линейной системы отлично от нормального, не будут нормальными и распределения отклонений понижения и редукции поверхностного стока. Однако положение несколько облегчается явлением так называемой «нормализации реакции», при которой распределение выходной величины линейной системы ближе к нормальному, нежели распределение возмущения. С ка-

Таблица 4.1

Значения функций  $F_1(z)$ ,  $F_2(z)$ 

$z$	$F_1(z)$	$F_2(z)$	$z$	$F_1(z)$	$F_2(z)$
-2,0	0,009	0,076	0,0	0,399	0,584
-1,9	0,011	0,087	0,1	0,451	0,612
-1,8	0,014	0,100	0,2	0,507	0,651
-1,7	0,018	0,115	0,3	0,567	0,683
-1,6	0,023	0,131	0,4	0,630	0,714
-1,5	0,029	0,148	0,5	0,698	0,744
-1,4	0,037	0,168	0,6	0,789	0,772
-1,3	0,046	0,189	0,7	0,843	0,799
-1,2	0,056	0,211	0,8	0,920	0,823
-1,1	0,069	0,236	0,9	1,000	0,846
-1,0	0,083	0,262	1,0	1,083	0,867
-0,9	0,100	0,289	1,1	1,169	0,886
-0,8	0,120	0,318	1,2	1,256	0,903
-0,7	0,143	0,349	1,3	1,346	0,912
-0,6	0,169	0,380	1,4	1,437	0,931
-0,5	0,198	0,413	1,5	1,529	0,943
-0,4	0,230	0,446	1,6	1,632	0,953
-0,3	0,267	0,481	1,7	1,718	0,961
-0,2	0,307	0,515	1,8	1,814	0,969
-0,1	0,351	0,550	1,9	1,911	0,979
0,0	0,399	0,584	2,0	2,009	0,980

чественной стороны такие системы характеризуются более или менее значительной инерционностью, т. е. существенным влиянием значений входного возмущения, соответствующих предыстории момента. Степень проявления нормализации в различных конкретных условиях может определяться различными факторами, определяемыми как характером случайного процесса водоотбора, так и характеристиками геофильтрационной системы. Полное исследование этого явления достаточно сложно; однако можно указать на одно условие, без которого нормализация заведомо не может иметь места — это существование и конечная величина интеграла (1.97) при  $\tau=0$ , определяющая дисперсию процесса на выходе системы.

В случае, когда дебит принимается ступенчатой функцией времени, при спектральной функции вида (4.7), можно показать, что для этого необходимо существование интеграла в бесконечных пределах от квадрата амплитудно-частотной характеристики системы. Более детальный анализ показывает, что для этого требуется практически стабилизированность системы, т. е. ограниченность величины выходной реакции при постоянстве входного возмущения во времени. Необходимо оговориться, что теоретически возможны случаи, когда при постоянстве возмущения во времени, реакция неограниченно возрастает, но, несмотря на это, интеграл в бесконечных пределах от квадрата амплитудно-частотной

характеристики существует. Однако типичные частотные характеристики геофильтрационных систем, насколько можно судить, не приводят к подобным условиям. Что касается систем, выходом которых является редукция, то они отличаются значительной инерционностью, и, тем более, удовлетворяют требованию стабилизации, поскольку сокращение поверхностного стока при постоянном дебите отбора, во всяком случае, ограничено величиной последнего. При классификации геофильтрационных систем понижения на стабилизированные и нестабилизированные в числе последних окажутся распространённые схемы одиночных, линейных, площадных водозаборов, эксплуатирующих неограниченные водоносные пласты в условиях отсутствия компенсационного питания, а также всевозможные схемы полностью и частично ограниченных пластов, вдоль границ которых заданы условия постоянства расхода. Вероятностное описание понижения для таких схем более сложное и они здесь не рассматриваются.

Усложняется задача и в условиях, когда статистика среднегодовых значений ресурсов поверхностного стока и водопотребления слишком груба и требуется учет внутригодовых распределений указанных величин (как это чаще всего и бывает). В настоящей главе принимается, что дефицит водопотребления случайной глубины каждый год происходит в течение ограниченного периода времени, начало и конец которого от года к году варьируют случайным образом. Поскольку в действительности гидрограф дефицита водопотребления представляет собой разность гидрографов водопотребления и поверхностного стока, сроки начала и конца дефицитного периода будут зависеть от глубины дефицита: при больших ее значениях, когда водопотребление значительно превосходит ресурсы поверхностного стока, более продолжительным будет и период дефицита, который в этих условиях начнется раньше, а окончится позже, и наоборот. Таким образом, между глубиной дефицита и его продолжительностью в реальных условиях наблюдается положительная корреляция. Значения соответствующего коэффициента корреляции в реальных условиях достигают 0,6, т. е. вообще говоря, статистически значимы. Однако роль этой корреляции в формировании значений понижения и редукции слаба и в большинстве практических расчетов ею можно пренебречь.

Рассмотрим задачу об определении автокорреляционной функции водоотбора  $K_{\Delta}(\xi)$  без учета корреляции между глубиной дефицита и его продолжительностью, а также между значениями дефицитов в смежные годы. Очевидно, что при фиксированных сроках начала и конца дефицитного периода,  $t_1$  и  $t_2$  соответственно, значение  $K_{\Delta}(\xi)$  представляет собой произведение величины дисперсии водоотбора  $\sigma_{\Delta}^2$  на вероятность того, что отрезок длины  $\xi$  попадает обоими концами в промежуток  $[t_1, t_2]$ . Эта вероятность равна  $1 - \xi/(t_2 - t_1)$ , при  $0 \leq \xi \leq t_2 - t_1$  и нулю при  $\xi > t_2 - t_1$ . Если теперь допустить, что продолжительность дефи-

цитного периода  $t_{\Delta} = t_2 - t_1$  представляет собой случайную величину с функцией распределения  $f_{\Delta}(t_{\Delta})$ , значение  $K_{\Delta}(\xi)$  будет равно

$$K_{\Delta}(\xi) = \sigma_{\Delta}^2 \int_0^{\infty} f_{\Delta}(t_{\Delta}) \left(1 - \frac{\xi}{t_{\Delta}}\right) dt_{\Delta}; \quad (4.8)$$

если при этом  $F_{\Delta}(t_{\Delta})$  — интегральная функция распределения случайной величины  $t_{\Delta}$ , то

$$K_{\Delta}(\xi) = \sigma_{\Delta}^2 \left[ 1 - F_{\Delta}(\xi) - \xi \int_{\xi}^{\infty} f_{\Delta}(t_{\Delta}) \frac{dt_{\Delta}}{t_{\Delta}^2} \right]. \quad (4.9)$$

В качестве примера рассмотрим случай равномерного распределения величины  $t_{\Delta}$  в интервале  $[t'_{\Delta}, t''_{\Delta}]$ , которое может в ряде случаев довольно близко соответствовать реальным данным. При сделанном предположении величина  $K_{\Delta}(\xi)$  определяется равенствами

$$K_{\Delta}(\xi) = \begin{cases} \sigma_{\Delta}^2 \left[ 1 - \frac{\xi}{t''_{\Delta} - t'_{\Delta}} \ln \frac{t''_{\Delta}}{t'_{\Delta}} \right] & \text{при } 0 \leq \xi \leq t'_{\Delta}; \\ \sigma_{\Delta}^2 \left[ \frac{t''_{\Delta} - \xi}{t''_{\Delta} - t'_{\Delta}} - \frac{\xi}{t''_{\Delta} - t'_{\Delta}} \ln \frac{t''_{\Delta}}{\xi} \right] & \text{при } t'_{\Delta} < \xi \leq t''_{\Delta}; \\ 0, & \text{при } t''_{\Delta} < \xi. \end{cases} \quad (4.10)$$

Графики на рис. 4.4 дают представление о характере поведения функции  $K_{\Delta}(\xi)$  при равномерном распределении  $t_{\Delta}$  — расширение области возможных значений продолжительности дефицитного периода влечет за собой сглаживание формы автокорреляционной функции.

Выражение для спектральной плотности  $L_{\Delta}(\omega)$ , соответствующей автокорреляционной функции (4.8) имеет вид

$$L_{\Delta}(\omega) = \frac{2\sigma_{\Delta}^2}{\pi} \int_0^{\infty} f_{\Delta}(t_{\Delta}) \left( \frac{\sin \omega t_{\Delta}/2}{\omega t_{\Delta}} \right)^2 t_{\Delta} dt_{\Delta}. \quad (4.11)$$

Для рассмотренного выше случая равномерного распределения

$$L_{\Delta}(\omega) = \frac{\sigma_{\Delta}^2}{\pi \omega^2 (t''_{\Delta} - t'_{\Delta})} \left[ \ln \frac{t''_{\Delta}}{t'_{\Delta}} + \text{Ci}(\omega t'_{\Delta}) - \text{Ci}(\omega t''_{\Delta}) \right], \quad (4.12)$$

где  $\text{Ci}(z)$  — функция интегрального косинуса [35]. На рис. 4.5 изображены графики спектральной плотности, соответствующие различным значениям времен  $t'_{\Delta}$ ,  $t''_{\Delta}$ . Их сравнение показывает, что различия в величинах функций  $L_{\Delta}(\omega)$ , особенно в низкочастотной области, имеющей наибольшее значение, еще меньше, чем различия в величинах функций  $K_{\Delta}(\xi)$ , и для большинства реально встречающихся случаев можно принимать, что функция

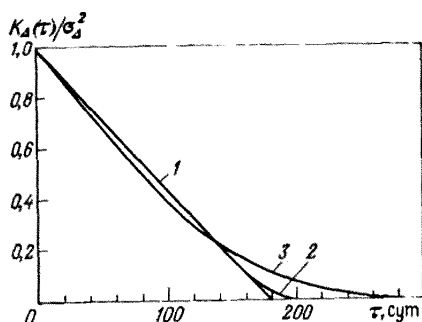


Рис. 4.4. Графики автокорреляционных функций отбора подземных вод: 1 — при фиксированном значении времени дефицита ( $t_{\Delta} = 180$  сут); 2 — при равномерном распределении продолжительности водоотбора ( $t'_{\Delta} = 160$  сут,  $t''_{\Delta} = 200$  сут); 3 — то же, при  $t'_{\Delta} = 80$  сут,  $t''_{\Delta} = 200$  сут

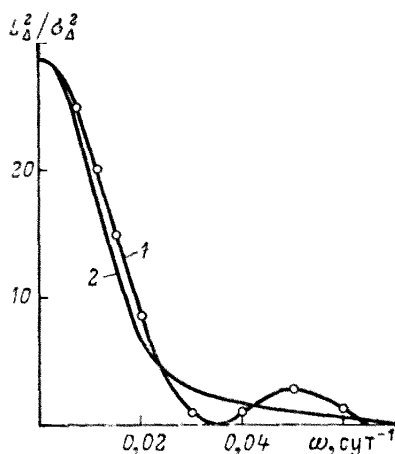


Рис. 4.5. Графики спектральных плотностей отбора подземных вод: 1 — при фиксированном времени дефицита ( $t_{\Delta} = 180$  сут); 2 — при равномерном распределении продолжительности водоотбора ( $t'_{\Delta} = 80$  сут,  $t''_{\Delta} = 280$  сут). Точки соответствуют равномерному распределению времени дефицита при  $t'_{\Delta} = 160$  сут,  $t''_{\Delta} = 200$  сут

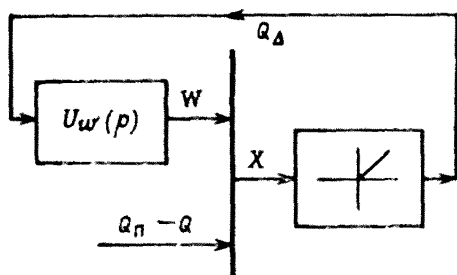


Рис. 4.6. Структурная схема системы совместного использования поверхностных и подземных вод

$L_{\Delta}(\omega)$  соответствует условиям фиксированного значения  $t_{\Delta}$ , и выражается формулой (4.7).

Формулы (4.3), (4.4), где величина параметра  $u$  выражается с помощью равенства (4.2), дают, как было сказано, выражения для вероятностных характеристик отбора подземных вод в условиях, когда редукцией поверхностного стока в пределах системы можно было пренебречь. Вместе с тем, практические потребности определяют актуальность решения этой задачи и с учетом изменения ресурсов поверхностного стока при отборе подземных вод. На рис. 4.6 приведена общая структурная схема системы совместного использования поверхностных и подземных вод. Положительная обратная связь, отображенная на схеме, выражается в усилении редукции поверхностного стока при увеличении отбора

подземных вод и, как следствие, в возрастании потребности в дальнейшем отборе подземных вод при неизменных характеристиках водопотребления. Случайная величина  $X$  равная сумме дефицита водопотребления ( $Q_{\text{п}} - Q$ ) и изменения поверхностного стока  $W$  поступает на вход нелинейного звена; выходная величина этого звена,  $Q_{\Delta}$  — представляет собой дебит водозаборов подземных вод; она поступает на вход линейного блока редукции с передаточной функцией  $U_W(p)$ . Можно показать, что математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение величины отбора подземных вод будут и в этом случае определяться формулами (4.3), (4.4), в которых параметр  $u$  имеет следующее выражение

$$u = \frac{\overline{Q_{\text{п}}} - \overline{Q} + \overline{W}}{\sigma_X}, \quad (4.13)$$

а среднеквадратичное отклонение случайной величины  $X$  — равенством

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma^2 + \sigma_{\text{п}}^2 + 2\rho_{\text{св}} \sqrt{\sigma^2 + \sigma_{\text{п}}^2 + \sigma_W^2}}. \quad (4.14)$$

В формулах (4.13), (4.14) характеристики редукции  $\overline{W}$  и  $\sigma_W$  выражаются через характеристики отбора подземных вод и величины, связанные с передаточной функцией редукции, а именно

$$\overline{W} = \overline{Q_{\Delta}} \omega_0(t), \quad (4.15)$$

$$\sigma_W = \sigma_{\Delta} \sqrt{\Omega_W}, \quad (4.16)$$

где  $\omega_0(t)$  — функция относительной редукции на конец расчетного срока,  $\Omega_W$  — коэффициент точности редукции, представляющий собой отношение дисперсии редукции к дисперсии водоотбора. Формула (4.16) вполне аналогична соответствующей формуле (1.110) для понижения. Так, при спектральной плотности частного вида (4.7), коэффициент точности  $\Omega_W$  выражается интегралом вида

$$\Omega_W = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{\sin z/2}{z} \right)^2 \omega^2 \left( \frac{z}{\tau} \right) dz, \quad (4.17)$$

где  $\omega(\omega)$  — амплитудно-частотная характеристика редукции.

Уравнения (4.3), (4.4) с учетом равенств (4.13) — (4.16) представляют собой систему двух уравнений относительно неизвестных  $Q_{\Delta}$ ,  $\sigma_{\Delta}$ . Решив эту систему каким-либо приближенным способом, можно определить вероятностные характеристики суммарного дефицита в системе.

Вообще говоря, представление величин математического ожидания и среднеквадратического отклонения редукции в виде (4.15), (4.16) не является строгим, так как оно не отражает того факта, что к интересующему нас моменту времени  $t$  редукция поверхностного стока развивалась под действием переменного во

времени математического ожидания водоотбора, что, в свою очередь, является следствием наличия в системе положительной обратной связи (см. рис. 4.6). Точный анализ процессов в таких системах достаточно сложен и рассматривается, в частности в работе [31]. Более детальное рассмотрение стохастической динамики систем совместного использования поверхностных и подземных вод с учетом их нелинейности и нестационарности рассмотрены в следующем разделе.

### 4.3. УЧЕТ НЕЛИНЕЙНОСТИ СИСТЕМЫ СОВМЕСТНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ

Обратимся снова к структурной схеме, приведенной на рис. 4.6. Величина отбора подземных вод  $Q_{\Delta}$  в каждый момент времени является функцией суммы мгновенной величины дефицита водопотребления  $D$  и изменения поверхностного стока вследствие отбора подземных вод (редукции)  $W$ . Если (как предполагалось выше) отбор подземных вод производится только в промежутки времени, когда  $X = D + W > 0$ , а в остальное время водозаборы подземных вод не работают, зависимость величины отбора подземных вод  $Q_{\Delta}$  от  $X$  аналогична зависимости (4.1), а именно:

$$Q_{\Delta} = f(X), \quad (4.18)$$

$$\text{где } f(X) = \begin{cases} X, & X > 0, \\ 0, & X < 0, \end{cases}$$

В структурной схеме возникает соответствующее нелинейное звено. Из-за наличия обратной связи характеристики отбора подземных вод будут эволюционировать во времени. В силу нелинейности системы теоретический анализ этой эволюции затруднен, поэтому используются либо приближенные методы исследования, либо статистическое моделирование. Для исследования систем, подобных изображенной на рис. 4.6, часто применяется так называемый метод статистической линеаризации [31]. При этом принимается, что случайный процесс  $X(t)$  на входе нелинейного элемента представим в виде

$$X(t) = \bar{X}(t) + X^0(t), \quad (4.19)$$

где  $\bar{X}(t)$  — детерминированная функция — математическое ожидание процесса;  $X^0(t)$  — его центрированная компонента. Тогда для случайного процесса на выходе нелинейного звена,  $Q_{\Delta}(t)$ , будем иметь

$$Q_{\Delta}(t) = \bar{Q}_{\Delta}(t) + kX^0(t), \quad (4.20)$$

где  $\bar{Q}_{\Delta}(t)$  — математическое ожидание величины отбора подземных вод. В каждый момент времени величина  $Q$  определяется по формуле математического ожидания нелинейной функции  $Q_{\Delta}(X)$ :

$$\bar{Q}_{\Delta} = F(\bar{x}, \sigma_x), \quad (4.21)$$

где  $\sigma_X$  — среднее квадратичное отклонение величины  $X$ . Для определения коэффициента статистической линеаризации  $k$  используются различные соотношения, в том числе принцип равенства дисперсий на выходе линеаризованной и нелинейной систем:

$$k = \sigma_\Delta / \sigma_X, \quad (4.22)$$

где  $\sigma_\Delta$  — среднее квадратичное отклонение величины отбора подземных вод, определенное по зависимости для функционально связанных случайных величин. Для конкретного случая нелинейного элемента, описываемого равенством (4.18) и в предположении, что распределение величины  $X(t)$  близко к нормальному, выражения для математического ожидания величины отбора подземных вод и коэффициента статистической линеаризации имеют вид:

$$\bar{Q}_\Delta = \sigma_X F_1(\bar{X}/\sigma_X), \quad (4.23)$$

$$k = F_2(\bar{X}/\sigma_X), \quad (4.24)$$

где функции  $F_1$  и  $F_2$  определены выше формулами (4.5).

Временная зависимость математического ожидания  $X(t)$  формируется как сумма

$$\bar{X}(t) = \bar{D}(t) + \bar{W}(t); \quad (4.25)$$

в свою очередь, зависимость  $\bar{W}(t)$  представляет собой выходную величину звена редукции, и в изображениях по Лапласу

$$\widehat{W}(p) = U_W(p) \widehat{Q}_\Delta(p), \quad (4.26)$$

где  $\widehat{W}(p)$ ,  $\widehat{Q}_\Delta(p)$  — изображения временных зависимостей  $W(t)$ ,  $Q_\Delta(t)$  соответственно. Центрированные компоненты случайных процессов связаны аналогичным соотношением:

$$X^0(t) = D^0(t) + W^0(t), \quad (4.27)$$

причем временная зависимость  $W^0(t)$  является выходной величиной звена редукции, и в изображениях по Лапласу

$$\widehat{W}^0(p) = U_W(p) \widehat{Q}_\Delta^0(p). \quad (4.28)$$

Поскольку, в силу уравнения (4.20), центрированная компонента величины отбора подземных вод равна  $Q_\Delta^0(t) = kX^0(t)$ , на основании равенства (4.28) получим

$$\widehat{W}^0(p) = kU_W(p) \widehat{X}^0(p). \quad (4.29)$$

Подставив это соотношение в преобразованное по Лапласу равенство (4.27), для изображения центрированной составляющей случайного процесса  $X^0(t)$  имеем

$$\widehat{X}^0(p) = \frac{\widehat{D}^0(p)}{1 - kU_W(p)}. \quad (4.30)$$



Таким образом, центрированная компонента процесса  $X(t)$  формируется как бы в результате прохождения сигнала  $D^0(t)$  через звено с передаточной функцией

$$z(p) = \frac{1}{1 - kU_{\Psi}(p)}. \quad (4.31)$$

В соответствии с результатами, изложенными в гл. I, в этом случае дисперсия случайного процесса  $X(t)$  составит

$$\sigma_X^2 = 2 \int_0^{\infty} L_D(\omega) |Z(i\omega)|^2 d\omega, \quad (4.32)$$

где  $L_D(\omega)$  — спектральная плотность процесса  $D(t)$ . В качестве автокорреляционной функции процесса изменения величины дефицита водопотребления  $D(t)$ , согласно результатам предыдущего параграфа, примем зависимость (4.6) с соответствующей ей спектральной плотностью (4.7). Интеграл (4.32) приобретает при этом вид:

$$\sigma_X^2 = \sigma_D^2 \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{\sin z/2}{z} \right)^2 \left| z \left( i \frac{z}{\tau_D} \right) \right|^2 dz. \quad (4.33)$$

Величина  $\left| z \left( i \frac{z}{\tau_D} \right) \right|^2$  является функцией коэффициента  $k$ , а он, в свою очередь, зависит, в силу соотношений (4.25), (4.28), от величины  $\bar{X}/\sigma_X$ ; поэтому равенство (4.33) можно представить в виде уравнения

$$\sigma_X^2 = \sigma_D^2 J \left( k \left( \frac{\bar{X}}{\sigma_X} \right) \right). \quad (4.34)$$

При этом неявно принимается допущение о «замороженности» величины  $k$  в равенстве (4.31), которое оправдывается соображениями о резкой разнице характерных значений периодов колебаний дебита и процесса изменения поверхностного стока [3]. В результате (4.34) становится уравнением относительно величины  $\sigma_X$ . Разделим обе части (4.34) на  $\sigma_D$ :

$$\left( \frac{\sigma_X}{\sigma_D} \right)^2 = J(k), \quad (4.35)$$

где  $k = k(\bar{X}/\sigma_X)$ .

Поскольку  $\bar{X}/\sigma_X = (\bar{X}/\sigma_D)/(\sigma_D/\sigma_X)$ , для определения зависимости величины  $\sigma_X/\sigma_D$  от  $\bar{X}/\sigma_D$  воспользуемся следующим приемом. Фиксируя значение  $k$  в правой части (4.37), будем определять соответствующее ему значение интеграла  $J(k)$ , при этом

$$\sigma_X/\sigma_D = \sqrt{J}, \quad (4.36)$$

и задача сводится к нахождению величины  $\bar{X}/\sigma_D$ , отвечающей найденному значению  $\sigma_X/\sigma_D$ . Устанавливая по кривой  $k = F_2(u)$

значение  $u$ , отвечающее коэффициенту  $k$ , запишем:  $u = (\bar{X}/\sigma_D) \times (\sigma_D/\sigma_X)$ , т. е.

$$\frac{\bar{X}}{\sigma_D} = u \frac{\sigma_X}{\sigma_D} = u \sqrt{J}. \quad (4.37)$$

Выразим полученную зависимость  $\sigma_X$  от  $\bar{X}$  в следующем виде:

$$\frac{\sigma_X}{\sigma_D} = \Phi_0(\xi); \quad (4.38)$$

$$\xi = \xi(t) = \bar{X}(t)/\sigma_D. \quad (4.39)$$

Рассмотрим в качестве примера простейший случай взаимосвязи поверхностных и подземных вод — условия, когда подземные воды отбираются одиночным или параллельным реке линейным рядом скважин, причем гидрогеологические условия схематизируются в виде однородного пласта у неограниченной прямолинейной реки. Передаточная функция редукиции для этих условий может быть записана в виде (2.78). Функцию  $|z(iz/\tau_D)|^2$ , в результате комплексных преобразований, получим в следующем виде:

$$z\left(i \frac{z}{\tau_D}\right)|^2 = \frac{1}{1 - 2ke^{-\sqrt{\alpha z}} \cos \sqrt{\alpha z} + k^2 e^{-2\sqrt{\alpha z}}}, \quad (4.40)$$

где  $\alpha = d^2/2a\tau_D$ . На рис. 4.7 изображены графики зависимости величины  $\sigma_X/\sigma_D$  от  $\xi$  при различных значениях параметра  $\alpha$ . Анализ этих графиков показывает, что при значительном удалении водозабора от реки величина  $\sigma_X$  будет практически постоянной и незначительно отличаться от  $\sigma_D$ ; при более близком расстоянии между водозабором и рекой зависимость  $\sigma_X$  от  $\bar{X}$  выражена более резко.

Вернемся к уравнению (4.25). Согласно (4.26), временная зависимость  $\bar{W}(t)$  будет выражаться интегралом вида

$$\bar{W}(t) = \int_0^t k_W(t - \tau) \bar{Q}_\Delta(\tau) d\tau, \quad (4.41)$$

где  $k_W(t)$  — весовая функция редукиции, связанная преобразованием Лапласа с передаточной функцией  $U_w(p)$ :  $k_W(t) \doteq U_w(p)$ . Временная зависимость  $\bar{Q}_\Delta(\tau)$  в (4.41) связана с функцией времени  $\bar{X}(t)$  соотношением (4.23). Представив аргумент в скобках (4.23) с учетом (4.38) в виде  $\bar{X}/\sigma_X = \bar{X}/\sigma_D \cdot (\sigma_D/\sigma_X) = \xi/\Phi_0(\xi)$  и преобразовав, получим:

$$\bar{Q}_\Delta = \sigma_D \Phi(\xi), \quad (4.42)$$

где

$$\Phi(\xi) = \Phi_0(\xi) F_1(\xi/\Phi_0(\xi)). \quad (4.43)$$

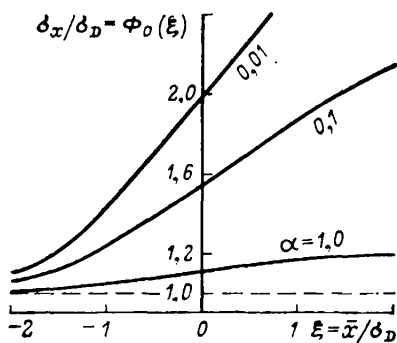


Рис. 4.7. Графики зависимости величины  $\sigma_x/\sigma_D$  от  $\xi$  при различных значениях параметра  $\alpha$

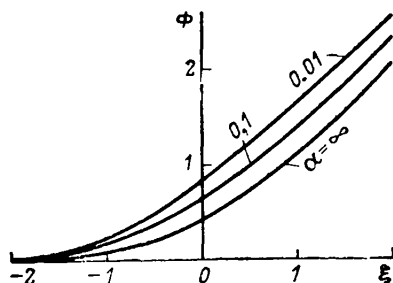


Рис. 4.8. Графики функции  $\Phi(\xi)$  при различных значениях параметра  $\alpha$  для условий схемы однородного пласта-полуплоскости с границами питания

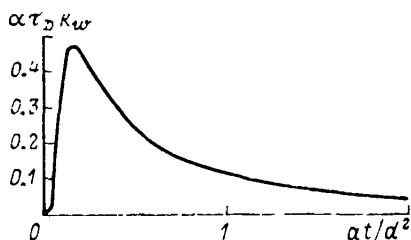


Рис. 4.9. График функции  $k_w(t)$  для условий схемы однородного пласта-полуплоскости с границей питания

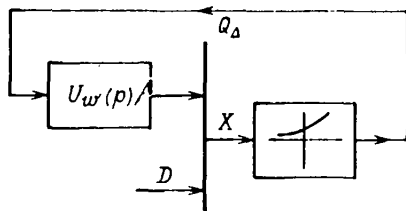


Рис. 4.10. Модифицированная структурная схема системы совместного использования, служащая для определения математического ожидания водоотбора

Подставив (4.42) в (4.41)

$$\bar{W}(t) = \int_0^t k_w(t-\tau) \sigma_D \Phi(\xi(\tau)) d\tau; \quad (4.44)$$

в сочетании с соотношением (4.25), все члены которого предварительно поделены на  $\sigma_D$ , найдем:

$$\xi(t) = \beta(t) + \int_0^t k_w(t-\tau) \Phi(\xi(\tau)) d\tau, \quad (4.45)$$

где  $\beta(t) = \bar{D}(t)/\sigma_D$ . Графики функций  $\Phi(\xi)$  для условий рассматриваемой схемы при различных значениях параметра  $\alpha$  приведены на рис. 4.8. Их анализ позволяет сделать некоторые выводы о качественной стороне поведения зависимости  $\Phi(\xi)$ . При значениях  $\alpha$ , начиная приблизительно с  $\alpha=0,5$  и выше, кривые  $\Phi(\xi)$  слабо варьируют при изменении  $\alpha$  и практически совпадают с кривой  $F_1(\xi)$ . Характерное значение расстояния имеет порядок  $d=1000$  м; величина  $\tau_D$  составляет 180—360 сут; характерное значение коэффициента уронеупроводности  $a=10^4$  м<sup>2</sup>/сут. Наиболее

низкие значения параметра  $\alpha$ , могущие встретиться в типовых условиях, составляют, таким образом, приблизительно 0,15—0,30. Величина  $\alpha$  пропорциональна квадрату расстояния  $d$ , так что значения  $\alpha$  часто будут превосходить указанные наименьшие значения. Согласно графикам на рис. 4.8 это дает основание приближенно заменять в таких случаях зависимость  $\Phi(\xi)$  на  $F_1(\xi)$ . При значениях  $\alpha$ , меньших 0,2—0,5, такая замена уже не оправдана и может привести к заметным погрешностям.

На следующем этапе основной проблемой становится анализ и решение интегрального уравнения (4.45). Согласно классификации интегральных уровней оно относится к типу нелинейных уравнений Вольтерра; точное решение этих уравнений, как правило, невозможно, да и приближенное решение сопряжено с трудностями. Ряд вариантов численного решения основан на замене интеграла в (4.45) конечной суммой с использованием той или иной квадратурной формулы [35]. При этом на первый план выступают свойства весовой функции  $k_W(\tau)$ . Так, передаточной функции вида (2.78) соответствует весовая функция

$$k_W(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \frac{d}{2\sqrt{at}} e^{-d^2/4at}. \quad (4.46)$$

График этой функции, изображенный на рис. 4.9, характеризуется наличием выраженного максимума, равного  $0,4625/\alpha t_D$ , при  $at/d^2 = 1/6$ , поэтому использование распространенных простых квадратурных формул может привести к погрешностям при вычислении интеграла. Для решения интегрального уравнения (4.45) целесообразнее подойти к задаче следующим образом. Запись (4.45) эквивалентна констатации того факта, что математические ожидания величин формируются согласно структурной схеме, приведенной на рис. 4.10, которая аналогична исходной структурной схеме (см. рис. 4.6), и отличается от нее только нелинейностью несколько иного вида.

Представим себе, что временная зависимость  $\Phi(t) = \Phi(\xi(t))$  на выходе нелинейного звена аппроксимирована кусочно-линейной функцией, принимающей значения  $\Phi_i = \Phi(t_i)$  при значениях времени  $t_i = j\Delta t$ , где  $\Delta t$  — выбранный временной шаг. Тогда, на основании результатов, приведенных в главах 1 и 2 и относящихся к расчету редукции при кусочно-линейной временной зависимости водоотбора, можно представить значение математического ожидания редукции на момент времени  $t_n = n\Delta t$  в виде:

$$\eta_n = \frac{\bar{W}(t_n)}{\sigma_D} = \sum_{j=0}^n \lambda_{nj} \Phi_j, \quad (4.47)$$

где  $\lambda_{nj}$  — весовые коэффициенты, связанные с передаточной функцией редукции, а именно,

$$\lambda_{n0} = w_n - nv_n + (n-1)v_{n-1};$$

$$\lambda_{nj} = (n-j+1)v_{n-j+1} - 2(n-j)v_{n-j} + (n-j-1)v_{n-j-1};$$

$$\lambda_{nn} = v_1,$$

$$(4.48)$$

где  $\omega_j$  и  $v_j$  — соответственно значения функции относительной редукции и функции относительной интегральной редукции рассматриваемой схемы при  $t=t_j$ ; в рассматриваемых условиях в соответствии с формулами (2.82), (2.85),  $\omega_j = \operatorname{erfc} d/2(at_j)^{1/2}$  и  $v_j = 4i^2 \operatorname{erfc} d/2(at_j)^{1/2}$ . В момент времени  $t=t_n$  значения  $\xi_j$  и  $\Phi_j = \Phi(\xi_j)$  при  $j < n$  уже определены; из структурной схемы (см. рис. 4.10) следует, что  $\xi_n = \beta_n + \eta_n$ ,

$$\text{или } \xi_n = \left( \beta_n + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{nj} \Phi_j \right) + v_1 \Phi(\xi_n).$$

Обозначив

$$A_n = \beta_n + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{nj} \Phi_j, \quad (4.49)$$

Получим

$$\xi_n = A_n + v_1 \Phi(\xi_n). \quad (4.50)$$

Это уравнение нелинейно; решив его каким-либо численным методом, находим значения  $\xi_n$ ,  $\Phi_n$  и переходим к расчету следующего временного шага. Начальное условие для этого процесса определяется, если положить  $t=0$  в уравнение (4.45):  $\xi_0 = \beta(0)$ . Величина  $\beta(t)$  в уравнении (4.45) является функцией времени, отражающей многолетние тенденции развития водопотребления

и его усредненное внутригодоевое распределение. Рассмотрим наиболее простой случай, когда  $\beta(t) = \beta_0 = \text{const}$ . Это соответствует, например, условиям, когда поверхностный сток зарегулирован в сезонном разрезе, и для его характеристик можно ограничиться рассмотрением среднегодовых расходов. В качестве примера применения изложенного метода численного решения уравнения (4.45) на рис. 4.11 изображены графики зависимостей  $\xi(t)$  для условий  $\alpha=1,0$  и двух значений  $\xi_0 = \beta_0$ .

Качественные характеристики процессов в системе, структурная схема которой изображена на рис. 4.10, удобно исследовать, опираясь на свойства функции  $\Phi(\xi)$ . Рассмотрим вначале случай  $\xi \geq 0$ . При малых значениях  $t$  величина  $\Phi(\xi)$  положительна; положительна будет и реакция звена редукции, поэтому величина

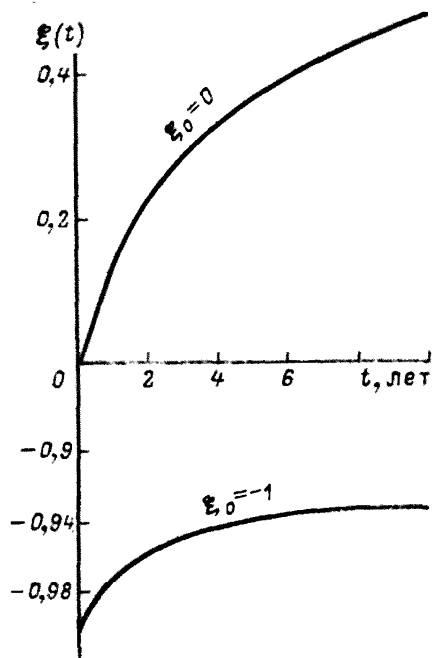


Рис. 4.11. Графики зависимостей  $\xi(t)$  при двух характерных значениях  $\xi_0$

$\xi(t)$  на выходе нелинейного звена будет расти (обратная связь положительна), и знак  $\xi(t)$  все время останется положительным.

Если заменить зависимость  $\Phi(\xi)$  на линейную вида  $\tilde{\Phi}(\xi) = \xi$  (это соответствует удалению нелинейного звена из системы), то как это следует из рис. 4.10, при возрастании  $\xi$  обе характеристики станут все больше приближаться друг к другу, причем всегда  $\tilde{\Phi}(\xi) > \Phi(\xi)$ . В каждый момент времени  $t$  величина  $\xi(t)$  в системе с удалением нелинейным звеном будет меньше, чем та же величина в исходной нелинейной системе. В то же время, изменение величины  $\xi(t)$  в системе без нелинейного звена описывается изображением по Лапласу вида

$$\hat{\xi}(p) = \frac{\xi_0}{p} \frac{1}{1 - U_W(p)}. \quad (4.51)$$

При передаточной функции редукции вида (2.78) временная зависимость  $\xi(t)$  будет при этом иметь вид

$$\xi(t) = \xi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{erfc}\left(n \frac{d}{2\sqrt{at}}\right). \quad (4.52)$$

Эта временная зависимость при  $t \rightarrow \infty$  неограниченно возрастает, а вместе с ней — и величина математического ожидания отбора подземных вод.

При  $\xi_0 < 0$  эволюция величины  $\xi(t)$  протекает качественно иначе. Для оценки значений  $\xi(t)$  характеристика  $\Phi(\xi)$  заменяется на линейную  $\tilde{\Phi}(\xi)$  вида

$$\tilde{\Phi}(\xi) = \Phi(0) - \frac{\Phi(0) - \Phi(\xi_0)}{\xi_0} \xi.$$

Подставив ее в (4.45), получим:

$$\xi(t) = \xi_0 + \Phi(0) W(t) - \frac{\Phi(0) - \Phi(\xi_0)}{\xi_0} \int_0^t k_W(t - \tau) \xi(\tau) d\tau.$$

С помощью преобразования Лапласа определяется изображение для  $\xi(t)$ , а именно:

$$\hat{\xi}(p) = \frac{1}{p} \frac{\xi_0 + \Phi(0) U_W(p)}{1 - \frac{\Phi(0) - \Phi(\xi_0)}{(\xi_0)} U_W(p)}. \quad (4.53)$$

При  $t \rightarrow \infty$  существует предельное значение  $\xi_\infty$  оригинала этого изображения, равное пределу  $\lim_{p \rightarrow 0} p \hat{\xi}(p)$ :

$$\xi_\infty = \xi_0 \left( 1 - \frac{\Phi(\xi_0)}{|\xi_0| - \Phi(0) + \Phi(\xi_0)} \right). \quad (4.54)$$

Подробный анализ выражения (4.54) позволяет прийти к следующим выводам относительно временной зависимости отбора подземных вод. Поведение функции  $\xi(t)$  — определяется ее начальным значением при  $t=0$ , т. е. величиной  $\xi_0$ . Если  $\xi_0 \leq \xi^{кр} < 0$ ,

функция  $\xi(t)$  монотонно растет до некоторого отрицательного предела. Если  $\xi_0 > \xi_0^{кр}$ , функция  $\xi(t)$  растет от  $\xi_0$  до  $+\infty$ . Оценки  $\xi_0^{кр}$  для условий, соответствующих схем полуограниченного одно-родного пласта с одиночным или линейным водозабором, передаточной функции редукции вида (2.78) и значениях параметра  $\alpha > 0,2 - 0,5$  дают значение  $\xi_0^{кр} = -\Phi(0) \approx -0,4$ .

Итак, если начальное значение математического ожидания дефицита водопотребления было отрицательным и меньшим по абсолютной величине, чем 40 % его среднеквадратичного отклонения, что соответствует предположению об относительно редком использовании для покрытия дефицитов высокой обеспеченности, при сколь угодно долгой эволюции системы она останется в среднем устойчивой, т. е. величина математического ожидания величины водоотбора будет ограниченной. Этот результат важен не только из-за недопустимости ускоренного понижения уровня подземных вод. При этом, кроме того, окажется, что по истечении некоторого времени после начала эксплуатации почти вся величина эксплуатационных ресурсов подземных вод начнет формироваться за счет редукции поверхностного стока, что нельзя считать целесообразным ни по водохозяйственным, ни по технико-экономическим соображениям.

Полученная оценка критического условия устойчивости в среднем может оказаться полезной также для оценки предельной допустимой величины водопотребления. Примем для определенности, что речь идет о водопотреблении в орошении, тогда величина математического ожидания водопотребления  $\bar{Q}_n$  пропорциональна орошаемой площади, а среднеквадратичное отклонение водопотребления  $\sigma_n$  связано с  $\bar{Q}_n$  соотношением

$$\sigma_n = C_{vn} \bar{Q}_n, \quad (4.55)$$

где  $C_{vn}$  — коэффициент вариации водопотребления (принимаемый константой для данного региона). Если поверхностный сток не связан корреляционной связью с водопотреблением, вероятностные характеристики дефицита определяются равенствами:

$$\left. \begin{aligned} \bar{D} &= \bar{Q}_n - \bar{Q}, \\ \sigma_D &= \sqrt{\sigma_n^2 + \sigma_Q^2} \end{aligned} \right\}, \quad (4.56)$$

где  $\bar{Q}$  и  $\sigma_Q$  — соответственно математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение поверхностного стока. Условие устойчивости примет вид:

$$\frac{\bar{Q}_n - \bar{Q}}{\sqrt{\sigma_n^2 + \sigma_Q^2}} < -0,4. \quad (4.57)$$

Полагая  $\bar{y} = \bar{Q}_n / \bar{Q}$ ,  $C_v = \sigma_Q / \bar{Q}$  и принимая во внимание соотношение (4.55), введем (4.57) в квадрат и получим для предельного значения  $y_{кр}$  квадратное уравнение:

$$y^2(1 - 0,16C_{vn}^2) - 2y + (1 - 0,16C_{vn}^2) = 0. \quad (4.58)$$

При относительно небольших значениях  $C_v$ ,  $C_{vp}$  (не превосходящих 0,8—1,0) значение  $y_{np}$  может быть вычислено по формуле:

$$y_{np} = \frac{1 - 0,4 \sqrt{C_v^2 + C_{vp}^2}}{1 - 0,16 C_{vp}^2}. \quad (4.59)$$

При величинах водопотребления, не превосходящих  $y_{np} \bar{Q}$ , система будет функционировать устойчиво.

Для завершения исследования следует определить временные зависимости  $\bar{Q}_\Delta(t)$  и  $\sigma_\Delta(t)$ . В соответствии с формулой (4.42) временная зависимость  $\bar{Q}_\Delta(t)$  будет иметь вид

$$\bar{Q}_\Delta(t) = \Phi(\xi(t)) \sigma_D; \quad (4.60)$$

согласно (4.22)

$$\sigma_\Delta = \sigma_D F_2(\xi(t)/\Phi_0(\xi(t))). \quad (4.61)$$

В настоящем разделе рассмотрена лишь часть вопросов, касающихся анализа эволюции совместного использования поверхностных и подземных вод методом статистической линеаризации. Этот метод, хотя и прошел длительную проверку в технической кибернетике, в фильтрационных задачах, насколько известно, не применяется. Поэтому актуальным представляется исследование систем совместного использования методом имитационного моделирования и сравнение его результатов с теоретическими. Кроме того, необходимо исследовать влияние на эволюцию системы таких важных факторов, как размещение водозаборов, геометрия пласта, граничные условия и распределение гидрогеологических параметров; компенсационное питание и инфильтрация оросительных вод на полях.

Весьма важным представляется также учет режима водоотбора, который особенно существен при ирригационном использовании подземных вод. Описание внутригодового распределения дефицита водопотребления при этом сводится к тому, что функция  $\beta(t)$  в уравнении (4.45) становится периодической. Решение и анализ нелинейного интегрального уравнения при периодическом возмущении требует применения более сложных и своеобразных методов.

#### 4.4. НАДЕЖНОСТЬ СИСТЕМ СОВМЕСТНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ И ПОДЗЕМНЫХ ВОД И МЕТОДИКА ЕЕ ОЦЕНКИ

*Надежностью* системы в технических дисциплинах принято называть вероятность того, что она выполняет свои функции в соответствии с предъявляемыми к ней требованиями в течение заданного времени. Применительно к системе совместного использования поверхностных и подземных вод под надежностью следует понимать вероятность бездефицитной работы системы в течение



расчетного срока  $t$ . Надежность, в таком ее понимании, есть вероятность выполнения одного из двух событий (или обоих одновременно), первое из которых состоит в том, что на протяжении всего расчетного срока понижение уровня подземных вод не превысит допустимого значения; второе — в том, что потребность орошаемых культур в воде обеспечивается за счет ресурсов поверхностного стока. Система функционирует без дефицита, если реализуется хотя бы одно из этих событий. По формуле суммы вероятностей [23] величина надежности равна сумме вероятностей указанных событий за вычетом вероятности их совместного осуществления.

В рамках принятого в настоящей работе нормального распределения вероятность первого из событий равна  $\Phi^*(S_{\text{доп}} - \bar{S})/\sigma_S$ ; вероятность второго представляет собой гидрологическую обеспеченность расхода поверхностного стока в размере расхода водопотребления  $Q_n$ , т. е.  $v_n = 1 - \Phi^*(u)$ . Вероятность возможности одновременного покрытия потребности в воде за счет обоих источников определяется как произведение гидрологической обеспеченности на условную вероятность бесперебойной работы водозабора подземных вод при условии, что водоотбор становится равным нулю, а именно,  $v_n Pr\{\bar{S} + S^0 < S_{\text{доп}} | Q_\Delta = 0\}$ . Последняя величина оценивается на основании совместной функции распределения дебита и отклонения понижения. В рамках принятых упрощений это распределение нормально и характеризуется, помимо моментов дебита и отклонения понижения, коэффициентом корреляции  $\rho$  между ними. В этом случае, резюмируя приведенные выше рассуждения, находим формулу для надежности системы  $P$  [10]:

$$P = \Phi^*\left(\frac{S_{\text{доп}} - \bar{S}}{\sigma_S}\right) + v_n \left[ 1 - \Phi^*\left(\frac{S_{\text{доп}} - \bar{S} + \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_\Delta} \bar{Q}_\Delta}{\sigma_S \sqrt{1 - \rho^2}}\right) \right]. \quad (4.62)$$

Поскольку при выводе формулы (4.62) были использованы лишь самые общие предположения, она справедлива в случае любой гидрогеологической схемы, когда применение нормального закона оправдано; в прочих случаях, очевидно, необходимо искать другие зависимости.

Входящие в формулу (4.62) вероятностные параметры понижения, а именно, его математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение, а также коэффициент корреляции между понижением и величиной отбора подземных вод, определяются в соответствии с методами, изложенными в гл. 1. При этом формула, дающая выражение для среднеквадратичного отклонения понижения, имеет вид (1.110), где  $\Omega_S$  — коэффициент точности понижения. При спектральной плотности вида (4.7) выражение для этого коэффициента примет вид:

$$\Omega_S = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \left( \frac{\sin z/2}{z} \right)^2 R^2\left(\frac{z}{\tau}\right) dz. \quad (4.63)$$

Выражение для коэффициента корреляции  $\rho_{\Delta S}$  между понижением и величиной водоотбора выражается в виде (1.113).

Интегралы в формулах (4.63), (1.113) имеют сложный вид. Для вычисления этих интегралов предлагается приближенная квадратурная формула, основанная на формуле интегрирования Гаусса—Лагерра [25] и выражении (4.7) для спектральной плотности случайного процесса водоотбора подземных вод. Эта формула для коэффициента точности понижения имеет вид

$$\Omega_S \cong \sum_{i=1}^N c_i R^2 \left( \frac{z_i}{\tau} \right); \quad (4.64)$$

$$c_i = \frac{4}{\pi} \frac{\sin^2 z_i/2}{z_i^2} e^{z_i} \omega_i, \quad (4.65)$$

где  $z_i$  — узлы,  $\omega_i$  — веса квадратурной формулы Гаусса—Лагерра [25]. В табл. 1.4 приводятся значения параметров  $z_i$  и  $c_i$  формулы (4.64) при некоторых значениях  $N$ .

Аналогично коэффициенту точности понижения вычисляются также коэффициенты точности редукции и корреляции

$$\Omega_W \approx \sum_{i=1}^N c_i \omega^2(z_i/\tau), \quad (4.66)$$

$$\rho_{\Delta S} \approx \frac{1}{\sqrt{\Omega_S}} \sum_{i=1}^N c_i R \left( \frac{z_i}{\tau} \right) \cos \Psi \left( \frac{z_i}{\tau} \right), \quad (4.67)$$

$$\rho_{\Delta W} \approx \frac{1}{\sqrt{\Omega_W}} \sum_{i=1}^N c_i \omega(z_i/\tau) \cos \Psi(z_i/\tau). \quad (4.68)$$

Для оценки применимости нормального распределения к описанию распределения понижения уровня подземных вод при случайных вариациях водоотбора было предпринято статистическое моделирование этого процесса. При этом использовались следующие типичные гидрогеологические условия: схема однородного пласта, ограниченного прямолинейной бесконечной границей совершенного питания и эксплуатируемого линейным водозабором на расстоянии  $d=1$  км от границы. Протяженность линейного ряда  $B=20$  км;  $T=1000$  м<sup>2</sup>/сут;  $a=10\,000$  м<sup>2</sup>/сут. Сток реки описывался нормальным распределением с параметрами:  $\bar{Q}=15$  м<sup>3</sup>/с и  $\sigma=3$  м<sup>3</sup>/с; длина генерированного ряда составила 120 лет. Математическое ожидание величины водопотребления принято равным 15,0 м<sup>3</sup>/с; среднееквадратическое отклонение  $\sigma_n=0$ . На рис. 4.12 изображена эмпирическая функция распределения величины  $S^*=(TB/\sigma_{\Delta d})S^0$ . Оценка параметров этой величины привела к значению выборочного среднего в размере — 0,184 (при теоретическом значении, равном нулю) и к значению выборочного среднееквадратического отклонения в размере 0,624 (при теорети-

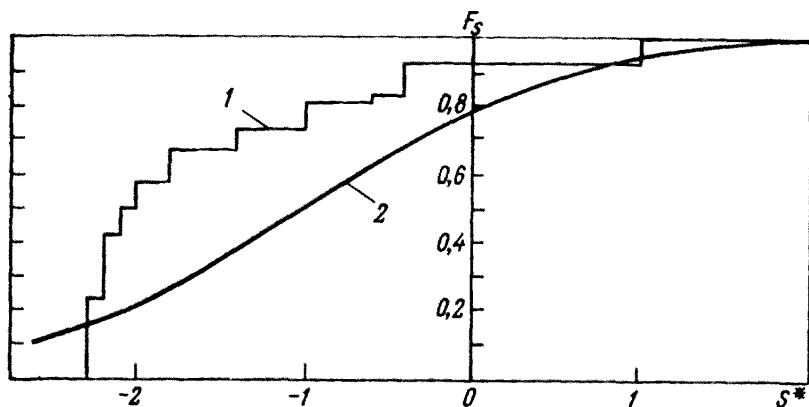


Рис. 4.12. Графики эмпирического распределения величины относительного понижения  $S^*$  (1) и функции нормального распределения с параметрами  $(0, \sigma_s)$  (2)

ческом значении 0,636). Анализ кривых на рис. 4.12 показывает, что эмпирическое распределение удовлетворительно описывается нормальным законом с параметрами  $(0, \sigma_s)$  в области значений отклонения понижения, приблизительно соответствующих условию  $S^0 > \sigma_s$ , т. е. при вероятности бесперебойной работы не ниже 0,84, именно эти условия и представляют наибольший интерес при оценке надежности.

В рассмотренном примере были использованы условия, довольно неблагоприятные в смысле нормализации распределения понижений. При большей удельной нагрузке на подземные воды, когда  $u > 0$ , а также при большем удалении водозабора от реки нормализация проявляется более рельефно. Благоприятствуют ей (в сравнении с рассмотренной схемой) и условия площадного отбора. Вопросы о свойствах распределения понижения в условиях компенсационного питания и в случаях более сложных гидрогеологических схем требуют подробных самостоятельных разработок.

На рис. 4.13 изображены графики временных зависимостей надежности работы системы совместного использования поверхностных и подземных вод в условиях рассмотренного примера. В случае малого расстояния между рекой и водозабором, как это следует из графиков, построенных для случая  $d=1$  км, надежность системы уменьшается во времени в очень медленном темпе, тогда как при удалении водозабора на 6 км от реки соответствующие кривые претерпевают быстрое изменение, за исключением случаев малой нагрузки на подземные воды (кривая для  $u=-0,4$ ). Зависимости  $P(t)$ , аналогичные представленным на рис. 4.13, дают возможность оценить такую важную характеристику системы, как время ее работы, соответствующее заданной надежности  $P$ . Конкретный выбор величины расчетной надежности в различных условиях будет определяться различными предъявляемыми к си-

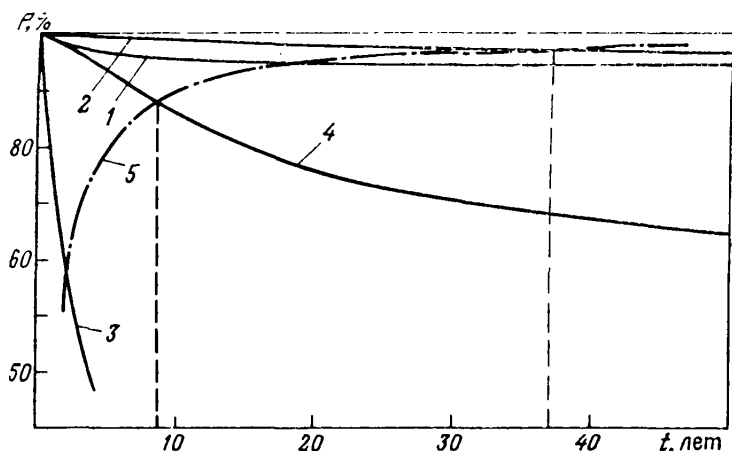


Рис. 4.13. Графики зависимостей надежности от времени эксплуатации системы совместного использования поверхностных и подземных вод в условиях полуограниченного однородного пласта:

1 — при  $u=0$ ,  $d=1$  км; 2 — при  $u=-0,4$ ,  $d=6$  км; 3 — при  $u=1,0$ ,  $d=1$  км; 4 — при  $u=0$ ,  $d=6$  км; 5 — график зависимости (4.71)

стеме требованиями. В качестве одного из вариантов можно предложить выбор величины расчетной надежности, соответствующей вероятности появления дефицита не более одного раза за расчетный срок, т. е.

$$P = 1 - 1/t, \quad (4.69)$$

где  $t$  — выраженный в годах срок эксплуатации. С помощью нанесения на график зависимости  $P(t)$  кривой, определяемой уравнением (4.27) и нахождения абсциссы точки их пересечения устанавливается время надежной работы системы, в течение которого возникновение дефицита вероятно не более одного раза. Так, в условиях рассмотренных примеров время надежной работы системы, характеризующейся параметрами  $u=1$ ,  $d=6$  км, составляет всего 2,2 года. При снижении нормированного водопотребления до значения  $u=0$  та же система надежно функционирует в течение 8,6 лет. Если же величина  $u$  составляет  $-0,4$ , то, согласно графикам, время надежной работы этой системы оценивается в 37 лет. Система с расстоянием от реки до водозабора, равным 1 км, характеризуется временем надежной работы, оцениваемым в 20 лет при  $u=1$ , и увеличивающимся до чрезвычайно больших, измеряемых столетиями, величин, при  $u=0$ .

Рассмотренные примеры демонстрируют перспективность применения систем совместного использования описанного вида. Так, в случае  $d=1$  км и  $u=0$ , когда, согласно графикам на рис. 4.13, время надежной работы системы чрезвычайно велико, ни один из источников воды, будучи использован отдельно от другого, не обеспечит бесперебойного орошения: применение одних поверхно-

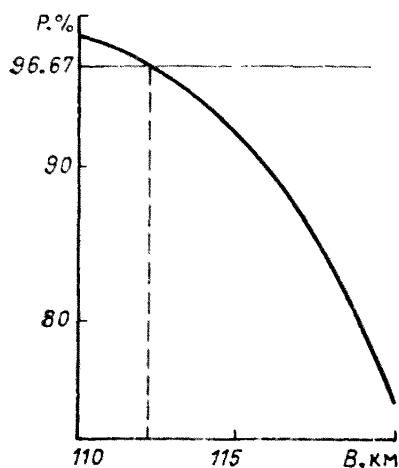


Рис. 4.14. График зависимости надежности от протяженности линейного водозабора (в условиях примера)

стных вод при равных по величине водопотреблении и среднегодовом расходе реки в размере  $15 \text{ м}^3/\text{с}$  надежно лишь на 50 %; надежность же использования одних подземных вод в этих условиях чрезвычайно быстро становится равной нулю, так как уже через 5 лет после начала эксплуатации понижение в районе водозабора достигает 56 м (при  $S_{\text{дон}} = 25 \text{ м}$ ).

С помощью формулы (4.18) решается ряд важных обратных задач, когда при заданной надежности работы системы требуется выбрать один из ее параметров. Например, при заданном расстоянии между рекой и водозабором его протяженность  $B$  определяет орошаемую системой площадь. В формуле (4.18) от протяженности водозабора зависят: математическое ожидание дебита, определяемая на его основе величина  $\bar{S}$ , а также среднеквадратичные отклонения  $\sigma_{\Delta}$ ,  $\sigma_S$  и гидрогеологическая обеспеченность  $v_n$ . Задаваясь рядом значений протяженности, можно построить график зависимости надежности от этой величины; точка его пересечения с прямой, соответствующей заданной величине  $P$ , определит искомую величину  $B$ . Найдем, например, протяженность линейного водозабора, обеспечивающего в течение 30 лет работу системы с величиной надежности  $P = 0,9667$  при орошении хлопчатника с нормой  $10\,000 \text{ м}^3/\text{га}$ , если линейный водозабор отстоит от реки на 6 км. Положим  $B = 110 \text{ км}$ ; величина потребности в воде составит при этом  $\bar{Q}_n = 20,9 \text{ м}^3/\text{с}$ ;  $u = 1,97$ ; гидравлическое сопротивление определяется по формуле (2.92) и составляет в этом случае  $R_0 = 0,0378$ . Определив с помощью табл. 2.5 значения  $\bar{Q}_{\Delta} = 510\,600 \text{ м}^3/\text{сут}$  и  $\sigma_{\Delta} = 254\,000 \text{ м}^3/\text{сут}$ , по формуле (4.63) найдем значение  $\sigma_S = 2,56 \text{ м}$ . Поскольку величина  $v_n$  при  $u = 1,97$  мала, ограничиваемся первым слагаемым в (4.18):  $P = \Phi^*((25 - 19,3)/2,56) = 0,987$ . Поступая аналогично при других значениях  $B$ , определяем исходные данные для построения графика, приведенного на рис. 4.14. Заданная величина надежности достигается

при значении  $B=112$  км; площадь, которая может орошаться системой, при этом составит 67 200 га. Аналогично могут быть решены задачи по определению расстояния водозабора от реки, выбора относительной нормы, т. е. в конечном итоге, установления возможности выращивания той или иной культуры в условиях системы совместного использования.

Как показывает график на рис. 4.14, построенный для условий примера, величина надежности резко зависит от протяженности участка. Так же обстоит дело с зависимостями надежности от других параметров: величины водоотбора, геометрических характеристик водозабора и др. Это обстоятельство, с одной стороны, позволяет повысить надежность работы системы путем незначительного изменения таких параметров, как водопотребление, орошаемая площадь и т. д., с другой — высокая чувствительность надежности по отношению к величине водопотребления эквивалента низкой чувствительности расчетных величин водопотребления, полученных в результате решения обратной задачи (при заданной величине надежности). Это открывает путь к практическому применению результатов решения обратных задач, поскольку они слабо зависят от погрешностей исходных данных.

#### **4.5. ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАГРУЗКИ МЕЖДУ МЕСТОРОЖДЕНИЯМИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД С ЦЕЛЬЮ МАКСИМИЗАЦИИ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМЫ**

В рассмотренных выше теоретических построениях принималось, что в системе совместного использования присутствует одно месторождение подземных вод, в то время как представляющие наибольший интерес с точки зрения водохозяйственных балансов системы крупных и средних размеров обычно характеризуются наличием в них нескольких гидравлически независимых друг от друга месторождений. Они связаны между собой только работой в одной водохозяйственной системе и при этом всякий раз при составлении и анализе водохозяйственного баланса будет возникать вопрос об оптимальном в том или ином смысле распределении нагрузки между такими месторождениями подземных вод. В настоящем разделе рассматривается вариант такого распределения, при котором в качестве критерия оптимальности выступает надежность работы системы в целом.

Для простоты предположим, что, как это часто бывает, величина второго члена в первой части формулы (4.62) пренебрежимо мала при значениях вероятности, близких к единице, которые в основном и представляют большой практический интерес. Тогда надежность работы  $j$ -го месторождения подземных вод будет определяться формулой

$$P_j = \Phi^* \left( \frac{S_{\text{доп } j} - \bar{S}_j}{\sigma_{S_j}} \right), \quad (4.70)$$

где  $P_j$  — надежность работы  $j$ -го водозабора;  $\Phi^*(z)$  — функция нормального распределения;  $S_{\text{доп } j}$  — допустимое понижение уровня в районе  $j$ -го месторождения;  $\bar{S}_j$  — математическое ожидание понижения в районе водозаборов  $j$ -го месторождения (максимальное за год значение) к концу расчетного срока эксплуатации;  $\sigma_{Sj}$  — среднеквадратичное отклонение понижения  $j$ -го месторождения. Величина  $\bar{S}_j$  определяется согласно выражению (1.70):

$$\bar{S}_j = \frac{\bar{Q}_{\Delta j}}{T_j} R_j, \quad (4.71)$$

где  $T_j$  — характерное значение водопроводимости по  $j$ -му месторождению;  $R_j$  — гидравлическое сопротивление, отражающее максимальное значение реакции водоносного пласта на периодический водоотбор; величина  $\sigma_{Sj}$  определяется выражением (4.63)

$$\sigma_{Sj} = \frac{\sigma_{\Delta j}}{T_j} \sqrt{\Omega_{Sj}}, \quad (4.72)$$

где  $\sigma_{\Delta j}$  — среднеквадратичное отклонение водоотбора  $j$ -го месторождения;  $\Omega_{Sj}$  — коэффициент точности понижения, определяемый в соответствии с формулой (4.63).

Оптимальное в смысле надежности распределение нагрузок по месторождениям будет, очевидно, достигнуто при выполнении условия

$$\min_{1 \leq j \leq n} P_j \Rightarrow \max, \quad (4.73)$$

поскольку  $\Phi^*(z)$  — монотонная функция; поставленная задача эквивалентна следующей:

$$\min_{1 \leq j \leq n} \frac{S_{\text{доп } j} - (\bar{Q}_{\Delta j}/T_j) R_j}{\sigma_{\Delta j} \sqrt{\Omega_{Sj}}/T_j}. \quad (4.74)$$

Выразим величину  $Q_{\Delta j}$  в виде доли от общего водоотбора, а именно, положим

$$Q_{\Delta j} = Q_{\Delta} \alpha_j \quad (4.75)$$

и определим коэффициенты  $\alpha_j$  таким образом, чтобы выполнялось условие (4.74), а также равенство

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\alpha_j} = 1. \quad (4.76)$$

Поскольку при такой постановке задачи, очевидно,  $\bar{Q}_{\Delta j} = \bar{Q}_{\Delta} \alpha_j$ ; и  $\sigma_{\Delta j} = \sigma_{\Delta} \alpha_j$ , полагая

$$A_j = T_j S_{\text{доп } j} / \sigma_{\Delta} \sqrt{\Omega_{Sj}}, \quad B_j = \frac{\bar{Q}_{\Delta} R_j}{\sigma_{\Delta} \sqrt{\Omega_{Sj}}}, \quad (4.77)$$

вместо условия (4.74) получим

$$\min_{1 \leq j \leq n} (A_j \alpha_j - B_j) \Rightarrow \max. \quad (4.78)$$

Решение задачи (4.78) при ограничении (4.76) достигается в случае, когда все значения  $A_j \alpha_j - B_j$  равны между собой; этот результат известен под названием «принципа уравнивания» [8], смысл которого состоит в том, что все месторождения должны функционировать с равной надежностью. Обозначив, в соответствии со сказанным

$$A_j \alpha_j - B_j = \lambda, \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.79)$$

где

$$\alpha_j = \frac{\lambda + B_j}{A_j}, \quad (4.80)$$

использовав условие (4.79), получим уравнение для определения величины  $\lambda$ :

$$\sum_{j=1}^n \frac{A_j}{\lambda + B_j} = 1. \quad (4.81)$$

Решив его с помощью какого-либо численного метода, на основании равенства (4.81) находим все искомые величины  $\alpha_j$ .

При составлении и увязке водохозяйственного баланса задача часто ставится следующим образом: задаются рядом характерных значений водопотребления, определяются соответствующие характеристики дефицита и на основе анализа сложившейся ситуации определяются мероприятия по покрытию дефицита. В связи с этим алгоритм определения величины надежности и нагрузок отдельных месторождений приобретает следующий вид:

1) зададимся каким-либо начальным набором коэффициентов распределения  $\alpha_j$ ;

2) на основании данного набора коэффициентов  $\alpha_j$  определим значения  $w_0$  и  $\Omega_w$ , а также коэффициента корреляции между водоотбором и редуцией поверхностного стока  $\rho_{\Delta w}$  в целом по системе по следующим формулам:

$$w_0 = \sum_{j=1}^n \frac{w_{0j}}{\alpha_j}; \quad (4.82)$$

$$\Omega_w = \sum_{j=1}^n \frac{\Omega_{wj}}{\alpha_j^2}; \quad (4.83)$$

$$\rho_{\Delta w} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_w}} \sum_{j=1}^n \frac{\rho_{\Delta wj} \sqrt{\Omega_{wj}}}{\alpha_j^2}, \quad (4.84)$$

где  $\rho_{\Delta wj}$  — частные значения коэффициентов корреляции по отдельным месторождениям;

3) решив уравнения (4.3), (4.4) с учетом формул (4.13) — (4.16), найдем вероятностные характеристики величины отбора подземных вод;



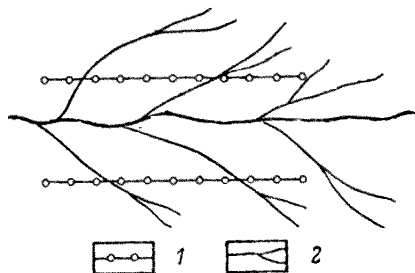


Рис. 4.15. Схема условной водохозяйственной системы в примере:

1 — линейный водозабор; 2 — поверхностные водотоки

4) вычислив величины  $A_i$ ,  $B_i$  по формулам (4.77), решим уравнение (4.81). По определенной таким образом величине  $\lambda$  находим следующее приближение нагрузочных коэффициентов  $\alpha_j$ ;

5) вычислим наибольшую среди месторождений абсолютную величину разности между величинами коэффициентов распределения, полученным на предыдущей итерации, и вновь найденными коэффициентами  $\alpha_j$ ; если заданная точность достигнута, расчет считается оконченным, если нет — возврат к пункту 2.

Описанный алгоритм в случае наличия в регионе значительного числа месторождений подземных вод, гидравлически не связанных между собой, требует солидных объемов вычислительной работы и, как правило, должен реализовываться на ЭЦВМ.

Для иллюстрации последовательности расчетов здесь использован пример, содержащий только два месторождения, что, вообще говоря, отвечает скорее условиям не крупного, а среднего масштаба водохозяйственной системы. Использование таких условий примера оправдывается исключительно стремлением к уменьшению объема расчетных выкладок.

**Пример.** Составление водохозяйственного баланса с учетом ресурсов подземных вод.

Схема водохозяйственной системы изображена на рис. 4.15. Источником поверхностных водных ресурсов служит река, сток которой характеризуется параметрами:  $\bar{Q}=30$  м<sup>3</sup>/с;  $\sigma=6$  м<sup>3</sup>/с. Для орошения сельскохозяйственных культур воды реки отводятся каналами — левобережными и правобережными. Вегетационный период, совпадающий с периодом дефицита, длится полгода (с 1 апреля до 1 октября). Для покрытия дефицита поверхностных вод предполагается соорудить вдоль каждого из берегов реки линейные ряды скважин. Гидрогеологические условия по левому берегу характеризуются параметрами:  $T_{*1}=2000$  м<sup>2</sup>/сут;  $a_{*1}=2 \cdot 10^4$  м<sup>2</sup>/сут;  $S_{дон1}=60$  м; а по правому —  $T_{*2}=1000$  м<sup>2</sup>/сут;  $a_{*2}=10^4$  м<sup>2</sup>/сут;  $S_{дон2}=40$  м. Длина обоих линейных рядов равна 25 км; расстояние до реки от левобережного водозабора  $d_1=8$  км, от правобережного  $d_2=12$  км.

Требуется определить вероятностные характеристики величин отбора подземных вод и изменения поверхностного стока как компонент водохозяйственного баланса бассейна, составляемого на 50-летнюю перспективу. При этом необходимо учесть возможность различных уровней развития орошаемого земледелия в бассейне, каждый из которых определяется величиной математического ожидания водопотребления. Коэффициент вариации этой величины, зависящей в основном от агроклиматических условий, принимается постоянным и равным 0.2.

**Решение.** 1. Определяем гидродинамические характеристики водоносных пластов; величины гидравлических сопротивлений, коэффициентов точности, коэффициентов корреляции и функций относительной редукции. Как указыва-

лось выше (см. гл. 1 и 2) при режиме отбора подземных вод, когда они отбираются в течение полугода, понижение будет складываться из двух составляющих: аperiodической, обусловленной влиянием постоянного во времени отбора, равного среднегодовому значению (в рассматриваемых условиях оно равно половине максимальной величины), и периодической, вызванной колебаниями водоотбора около среднегодового значения. Величины гидравлических сопротивлений, определяющие реакции пластов на аperiodическую составляющую водоотбора, рассчитаны на конец 50-летнего срока по зависимости (2.72) и равны:  $R_{01}=0,2466$ ;  $R_{02}=0,2648$ . Методика определения реакции пластов на периодическую компоненту водоотбора подробно рассмотрена в гл. 3; влияние этой составляющей на величину максимального понижения может быть учтено прибавлением к значению  $R_{0j}/2$  (поскольку среднегодовая величина водоотбора равна половине значения  $Q\Delta$ ) поправки  $\Delta R_j$ . Численные значения поправок в условиях примера равны:  $\Delta R_1=0,0142$ ;  $\Delta R_2=0,0100$ ; таким образом, суммарные величины  $R_j$  составляют  $R_1=0,1376$ ;  $R_2=0,1434$ .

Значения функций относительной редукции  $w_0$  в рассматриваемых условиях определяются по формуле (2.82)

$$w_{0j} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} (d_j/2 \sqrt{a_i}),$$

где  $t=50$  лет; численные значения таковы:  $w_{01}=0,384$ ;  $w_{02}=0,265$ . Определенные с помощью численного интегрирования значения коэффициентов точности понижения составили:  $\Omega_{s1}=1,825 \cdot 10^{-3}$ ;  $\Omega_{s2}=9,656 \cdot 10^{-4}$ ; коэффициенты точности редукции:  $\Omega_{w1}=0,0115$ ;  $\Omega_{w2}=4,644 \cdot 10^{-4}$ . Коэффициенты корреляции между водоотбором и редукцией вследствие далекого расстояния водозаборов от реки оказались практически нулевыми.

2. Зададимся каким-либо значением  $\bar{Q}_n$ , например  $35,0 \text{ м}^3/\text{с}$ , тогда величина среднеквадратичного отклонения водопотребления  $\sigma_n$  составит  $0,20 \cdot 35,0 = 7,00 \text{ м}^3/\text{с}$ . Согласно вышеописанному алгоритму положим сначала  $\alpha_1=\alpha_2=2$ ; тогда, согласно формулам (4.82), (4.83) величины относительной редукции и коэффициенты точности равны:  $w_0=0,325$ ;  $w_w=0,0030$ . Решив уравнений (4.3), (4.4), приведенное методом последовательных приближений, определим параметры водоотбора:  $\bar{Q}\Delta=8,90 \text{ м}^3/\text{с}$ ;  $\sigma\Delta=7,72 \text{ м}^3/\text{с}$ . По формулам (4.78) были определены коэффициенты  $A_j$ ,  $B_j$ :  $A_1=4,214$ ;  $A_2=1,931$ ;  $B_1=3,717$ ;  $B_2=5,325$ . Решив уравнение (4.44) относительно величины  $\lambda$ , найдем ее значение:  $\lambda=2,004$ ; затем по формулам (4.40), определим величины коэффициентов распределения:  $\alpha_1=1,358$ ;  $\alpha_2=3,796$ .

Пересчитанные в соответствии с этими значениями величины функций относительной редукции и коэффициента точности составили:  $w_0=0,353$ ;  $w_w=0,0063$ ; решив заново уравнения (4.3), (4.4), определим второе приближение вероятностных параметров водоотбора:  $\bar{Q}\Delta=9,21 \text{ м}^3/\text{с}$ ;  $\sigma\Delta=7,8 \text{ м}^3/\text{с}$ . Значения коэффициентов уравнения (4.39) на второй итерации составили:  $A_1=4,167$ ;  $A_2=1,910$ ;  $B_1=3,802$ ;  $B_2=5,447$ .

Решение уравнения (4.81) приводит к значению параметра  $\lambda$  равному  $1,843$ ; соответствующие величины коэффициентов распределения нагрузок равны:  $\alpha_1=1,355$ ;  $\alpha_2=3,796$ , т. е. они незначительно отличаются от коэффициентов, полученных в ходе первой итерации. Надежность функционирования системы, равная  $\Phi^*(\lambda)$ , составляет  $96,7\%$ , т. е. вероятность возникновения дефицитной ситуации в рассматриваемых условиях равна  $3,3\%$ . Третья и последующие итерации не приводят к уточнению результатов в рамках требуемой точности, поэтому окончательные величины среднегодовых нагрузок месторождений получаем в раз-

$$\bar{Q}_{\Delta 1} = 9,21/1,355 = 6,80 \text{ м}^3/\text{с}; \quad \bar{Q}_{\Delta 2} = 9,21/3,818 = 2,41 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Величина математического ожидания изменения поверхностного стока при этом составит  $\bar{W}=9,21 \cdot 0,358=3,25 \text{ м}^3/\text{с}$  (по месторождениям:  $\bar{W}_1=2,4 \text{ м}^3/\text{с}$ ;  $\bar{W}_2=0,85 \text{ м}^3/\text{с}$ ). Таким образом, при среднегодовом дефиците стока водопотребления в размере  $5 \text{ м}^3/\text{с}$  математическое ожидание отбора подземных вод равно  $9,21 \text{ м}^3/\text{с}$ ; разность между этими величинами ( $4,21 \text{ м}^3/\text{с}$ ) превосходит вычисленную величину сокращения речного стока ( $3,25 \text{ м}^3/\text{с}$ ). Отмеченное влияние

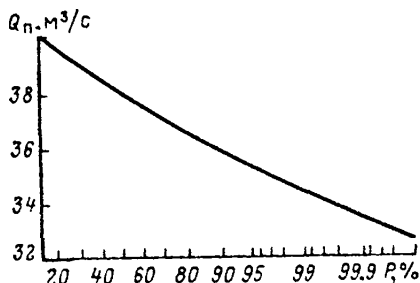
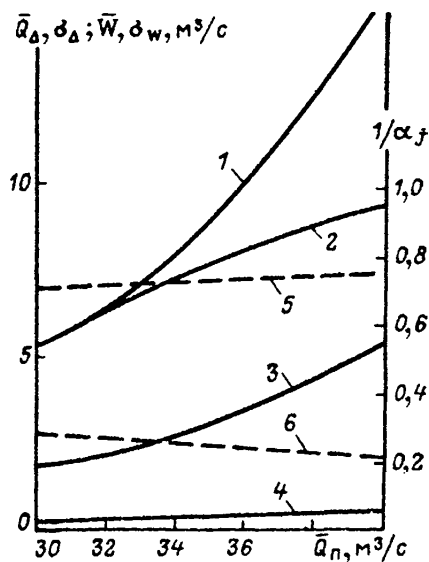


Рис. 4.16. График надежности функционирования системы (в условиях примера) в зависимости от величины  $Q_{\text{п}}$

Рис. 4.17. Графики зависимостей характеристик элементов водохозяйственного баланса (в условиях примера) от величины  $Q_{\text{п}}$ :

1 —  $\bar{Q}_{\Delta}$ ; 2 —  $\sigma_{\Delta}$ ; 3 —  $\bar{W}$ ; 4 —  $\sigma_W$ ; 5 —  $1/\alpha_1$ ; 6 —  $1/\alpha_2$



не носит характера погрешности, объясняется тем, что величина отбора подземных вод представляет собой нелинейную функцию остальных статей баланса (дефицита водопотребления и редукции), что приводит к смещению средних величин.

Рассмотрим для сравнения условия, когда характеристики водопотребления совпадают с характеристиками стока:  $\bar{Q}_{\text{п}} = 30 \text{ м}^3/\text{с}$ ;  $\sigma_{\text{п}} = 6 \text{ м}^3/\text{с}$ . Вычисленные аналогично характеристики отбора подземных вод после второй итерации  $\bar{Q}_{\Delta} = 5.45 \text{ м}^3/\text{с}$ ;  $\sigma_{\Delta} = 5.45 \text{ м}^3/\text{с}$ . Значение математического ожидания редукции поверхностного стока к концу эксплуатации составило  $1.92 \text{ м}^3/\text{с}$ , а поскольку среднемноголетняя величина дефицита водопотребления равна нулю, математическое ожидание водоотбора превышает сумму математических ожиданий дефицита и редукции на  $3.53 \text{ м}^3/\text{с}$ .

На рис. 4.16 изображен график надежности функционирования системы совместного использования поверхностных и подземных вод в зависимости от величины  $\bar{Q}_{\text{п}}$ . Пользуясь этим графиком, можно определить необходимый уровень освоения орошаемых площадей, соответствующий заданному значению надежности. Так, например, для того, чтобы появление дефицитной ситуации в системе было возможно не более одного раза за расчетный 50-летний срок, следует задаваться величиной надежности, равной 98 %. Этому значению на графике соответствует водопотребление в размере  $34.7 \text{ м}^3/\text{с}$ .

На рис. 4.17 изображены графики зависимости величин  $\bar{Q}_{\Delta}$ ,  $\sigma_{\Delta}$ ,  $\bar{W}$ ,  $\sigma_W$ , а также  $1/\alpha_1$  и  $1/\alpha_2$  от  $\bar{Q}_{\text{п}}$ . С помощью этих графиков можно определить, как будут изменяться величины элементов водохозяйственного баланса при изменении математического ожидания водопотребления. Так, отмеченному значению  $\bar{Q}_{\text{п}} = 34.7 \text{ м}^3/\text{с}$  соответствуют величины  $\bar{Q}_{\Delta} = 12 \text{ м}^3/\text{с}$  и  $\sigma_{\Delta} = 4.2 \text{ м}^3/\text{с}$ .

#### 4.6. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ СОВМЕСТНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ И ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Выше был изложен способ оценки надежности функционирования системы совместного использования, содержащей несколько месторождений подземных вод (МПВ). При этом значения функций редукции принимались постоянными, а их изменение во времени не учитывалось. Изменение редукции во времени было учтено, однако только для условий, когда в системе имеется всего одно МПВ. Совместить требование учета динамики редукции с наличием в системе более одного МПВ на аналитическом уровне пока не удастся. Эта задача решается в настоящее время моделированием развития процессов в водохозяйственной системе (ВХС) с помощью последовательного разыгрывания случайных ситуаций в соответствии с тем, как это имеет место в реальной системе. Такой способ называют также *имитационным моделированием* или методом *Монте-Карло* [5, 20].

В предлагаемом здесь варианте ВХС представляется в виде линейно-узловой схемы (графа). Узлами схемы служат характерные створы, к которым привязаны водопотребители и МПВ. Узлы связаны между собой дугами (ветвями). Обозначим множество МПВ через  $G$ , множество узлов — через  $Y$ , множество ветвей — через  $B$ . Для каждой дуги  $j$  из множества  $B$  рассматривается величина расхода в ней, обозначаемая  $q_j$ . Для каждого узла  $i$  из множества  $Y$  считаются определенными множества  $B_i^+$  и  $B_i^-$ , в которые входят соответственно ветви, входящие в узел  $i$  и выходящие из него.

Каждое МПВ  $m$  из множества  $G$  считается «подключенным» к одному из узлов; в то же время к одному узлу  $i$  может быть подключено несколько МПВ; этот факт отражается заданием для каждого  $i \in Y$  соответствующего множества  $G_i$ , состоящего из МПВ, подключенных к узлу  $i$ . При работе МПВ изменяется расход поверхностного стока. Это обстоятельство можно отразить в расчетной схеме двумя путями. Первый из них ближе к физической стороне дела и состоит в том, что для каждой ветви  $j \in B$  определяется множество  $P_j$  МПВ, влияющих на расход в этой ветви. Другой способ заключается в том, что для каждого узла выделяется множество  $V_i$  МПВ, эксплуатация которых изменяет приток к узлу. Эти способы эквивалентны, но по ряду соображений второй более удобен.

Составим уравнение баланса для каждого узла  $i \in Y$

$$\sum_{j \in B_i^+} q_j - \sum_{j \in B_i^-} q_j + \sum_{m \in G_i} Q_m - \sum_{m \in V_i} W_m + \Pi_i^+ - \Pi_i^- = 0, \quad (4.85)$$

где  $Q_m$  — расход  $m$ -го МПВ;  $W_m$  — изменение поверхностного стока, вызываемое эксплуатацией  $m$ -го МПВ по отношению к узлу  $i$ ;  $\Pi_i^+$  — сосредоточенный приток к узлу  $i$  «извне»;  $\Pi_i^-$  — сосредото-

точный отток от узла  $i$  (например, безвозвратное водопотребление в этом узле).

Уравнение (4.85) выражает вещественный баланс воды в  $i$ -м узле: сколько воды входит в узел, столько же и выходит из него (в различных формах, в том числе, в виде редукиции поверхностного стока). Однако в ряде случаев целесообразно выделять в схеме один (как правило), либо несколько так называемых *замыкающих* узлов — находящихся по отношению ко всей системе в наиболее низком месте.

Для такого узла обычно не определена величина  $\Pi_i^-$ , и уравнение (4.85) заменяется неравенством

$$\sum_{i \in B_i^+} q_i - \sum_{i \in B_i^-} q_i + \sum_{m \in G_i} Q_m - \sum_{m \in V_i} W_m + \Pi_i^+ - \Pi_i^- \geq 0, \quad (4.86)$$

которое означает, что попуск ниже такого узла не меньше заданного значения  $\Pi_i^-$ .

Как указывалось выше, при назначении правил совместной эксплуатации поверхностных и подземных вод принимается, что подземные воды следует отбирать только в случае, когда перераспределением поверхностных водных ресурсов не удастся удовлетворить потребность потребителей в воде. Таким образом, в уравнении (4.85) разность  $\Pi_i^+ - \Pi_i^-$  будет представлять собой взятую с обратным знаком величину дефицита в этом узле (положительного и отрицательного). Задачей управления эксплуатацией подземных вод в таких условиях является определение всех величин водоотбора по МПВ, т. е. значений  $Q_m$ ,  $m \in G$ .

Для достижения наиболее надежной работы системы совместного использования следует стремиться к тому, чтобы ни на одном МПВ понижение уровня (напора) не превысило допустимого значения. Точнее, следует величину разности  $S_{\text{доп } m} - S_m$  (где  $S_{\text{доп } m}$  — допустимое, а  $S_m$  — текущее значения понижения на  $m = M$  МПВ) удерживать на возможно более высоком уровне. Иначе говоря, при распределении нагрузок между МПВ используется следующий принцип:

$$\min_{m \in G} (S_{\text{доп } m} - S_m) \Rightarrow \max. \quad (4.87)$$

В этом выражении (4.87), а также в соотношениях (4.85), (4.86) опущен индекс, означающий текущий момент времени при всех переменных; этот индекс подразумевается. Следует также учитывать нестационарный характер изменения понижений и редукиций, отражающих ход водоотбора на соответствующих МПВ. Принимая, что время в модели изменяется с некоторым шагом  $\Delta t$ , на основании формулы (1.70) и аналогичной ей формулы для изменения поверхностного стока, можно выразить текущие значе-

ния понижения  $S_m$  на  $m=M$  МПВ и редукиции  $W_m$ , вызываемой его работой, к концу  $k$ -го расчетного интервала в виде:

$$S_m = \tilde{S}_m + \frac{R_m^{(1)}}{T_m} Q_m; \quad (4.88)$$

$$W = \tilde{W}_m + \tilde{W}_m^{(1)} Q_m; \quad (4.89)$$

$$\tilde{S}_m = \frac{1}{T_m} \sum_{l=1}^{k-1} Q_m^{(l)} (R_m^{(k-l+1)} - R_m^{(k-l)}), \quad (4.90)$$

$$\tilde{W}_m = \sum_{l=1}^{k-1} Q_m^{(l)} (w_m^{(k-l+1)} - w_m^{(k-l)}), \quad (4.91)$$

где  $T_m$  — значение коэффициента водопроницаемости по  $m$ -му МПВ;  $R_m^{(v)}$  и  $w_m^{(v)}$  — соответственно гидравлическое сопротивление и функция редукиции по  $m$ -му МПВ на конец  $v$ -го расчетного интервала. В формулах (4.88), (4.89) составляющие  $\tilde{S}_m$  и  $\tilde{W}_m$  представляют собой величины, не зависящие от подлежащих определению значений  $Q_m$ .

Будем считать, что графа линейно-узловой схемы не содержит ветвей, начинающихся и оканчивающихся в одном и том же узле, т. е. множества  $B_i^+$  и  $B_i^-$  не пересекаются. Тогда, с учетом соотношения (4.89) условия (4.85), (4.86) могут быть представлены соответственно в виде:

$$\sum_{m \in a} C_{im} Q_m + \sum_{j \in B} d_{ij} q_j + F_i = 0, \quad (4.92)$$

для незамыкающих узлов и

$$\sum_{m \in a} C_{im} Q_m + \sum_{j \in B} d_{ij} q_j + F_i \geq 0 \quad (4.93)$$

для замыкающих.

При этом коэффициенты  $C_{im}$ ,  $d_{ij}$  определяются следующим образом:

$$C_{im} = \begin{cases} 0, & \text{если } m \in \overline{G_i} \cup V_i, \\ 1 - w_m^{(1)}, & \text{если } m \in G_i \cap V_i, \\ 1, & \text{если } m \in G_i \setminus V_i, \\ -w_m^{(1)}, & \text{если } m \in V_i \setminus G_i. \end{cases} \quad (4.94)$$

$$d_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } j \in \overline{B_i^+} \cup B_i^-, \\ 1, & \text{если } j \in B_i^+, \\ -1, & \text{если } j \in B_i^-. \end{cases} \quad (4.95)$$

Значения  $F_i$  в (4.92), (4.93) включают в себя все величины, не зависящие от  $Q_m$  либо  $q_j$ :

$$F_i = - \sum_{m \in V_i} \tilde{W}_m + \Pi_i^+ - \Pi_i^- \quad (4.96)$$

Используя соотношение (4.90), представим критерий (4.87) в виде

$$\min_{m \in G} \left( S_{\text{допт}} - \tilde{S}_m - \frac{R_m^{(1)}}{T_m} Q_m \right) \Rightarrow \max. \quad (4.97)$$

Условие (4.97) с набором ограничений вида (4.92), (4.93) полностью определяет задачу по отысканию значений  $Q_m$  (и соответствующих  $q_j$ ). Стандартным образом эта задача сводится к задаче линейного программирования (ЛП). Для этого, дополнительно к переменным  $Q_m$  и  $q_j$ , вводится еще одна переменная, а именно,  $\Delta S_{\min}$ , и условие (4.97) записывается в виде:

$$S_{\text{допт}} - \tilde{S}_m - \frac{R_m^{(1)}}{T_m} Q_m \geq \Delta S_{\min}, \quad (4.98)$$

а целевая функция задачи приобретает вид:

$$\Delta S_{\min} \Rightarrow \max. \quad (4.99)$$

Полностью соответствующая задача ЛП записывается следующим образом: максимизировать величину  $\Delta S_{\min}$  при ограничениях

$$- \frac{R_m^{(1)}}{T_m} Q_m - \Delta S_{\min} + (S_{\text{допт}} - \tilde{S}_m) \geq 0; \quad (4.100)$$

а) для незамыкающих узлов

$$\sum_{m \in G} C_{im} Q_m + \sum_{j \in B} d_{ij} q_j + F_i = 0; \quad (4.101)$$

б) для замыкающих узлов

$$\sum_{m \in G} C_{im} Q_m + \sum_{j \in B} d_{ij} q_j + F_i \geq 0; \quad (4.102)$$

$$Q_m \geq 0, \quad q_j \geq 0, \quad \Delta S_{\min} \geq 0. \quad (4.103)$$

Решение задач подобного рода осуществляется, как правило, на ЭВМ, с помощью стандартных программ ЛП.

Если допустимая область задачи ЛП, определяемая неравенствами (4.100)–(4.103), непуста, значения  $Q_m$  и  $q_j$  могут быть однозначно определены (неограниченных областей, по физическому смыслу задачи, возникнуть не может). Однако могут встретиться ситуации, когда допустимая область окажется пустой. Это означает, что с помощью наличных возможностей МПВ дефицитная ситуация в ВХС не ликвидируется. В этом случае МПВ за-

гружаются таким образом, чтобы узел, имеющий максимальный дефицит, оказался в наиболее благоприятном положении. Иными словами, если дефицит в  $i$ -м узле,

$$D_i = - \sum_{m \in G} C_{im} Q_m - \sum_{j \in B} d_{ij} q_j - F_i, \quad (4.104)$$

требуется так распределить, чтобы

$$\min_{i \in Y} D_i \Rightarrow \max \quad (4.105)$$

при ограничениях вида

$$S_m \leq S_{\text{допм}}. \quad (4.106)$$

Приведенная к стандартному виду, соответствующая задача ЛП формулируется следующим образом: максимизировать  $D_{\min}$  при ограничениях

$$- \sum_{m \in G} C_{im} Q_m - \sum_{j \in B} d_{ij} q_j - D_{\min} - F_i \geq 0, \quad (4.107)$$

$$-\frac{R_m^{(1)}}{T_m} Q_m + (S_{\text{допм}} - \tilde{S}_m) \geq 0, \quad (4.108)$$

$$Q_m \geq 0, \quad q_j \geq 0, \quad D_{\min} \leq 0. \quad (4.109)$$

Таким образом, осуществляется распределение нагрузок между МПВ на каждом временном интервале. В алгоритме, предназначенном для оценки надежности функционирования ВХС совместного использования, распределение величин  $Q_m$  между МПВ производится для каждого из  $N$  принятых временных интервалов; при анализе очередного временного интервала сначала анализируется задача ЛП (4.100—4.103); если она оказывается несовместной, фиксируется наличие дефицита в системе и происходит переход к задаче ЛП (4.107—4.109). После того, как просчитаны все  $N$  временных интервалов, частота возникновения дефицитов

$$P_D = n_D/N, \quad (4.110)$$

вероятность ситуации отказа

$$\hat{P}_D = \frac{1}{N_r} \sum_{i=1}^{N_r} P_D^{(i)}, \quad (4.111)$$

где  $N_r$  — число реализаций случайного процесса, а оценка надежности —

$$P_r = 1 - \hat{P}_D. \quad (4.112)$$

Алгоритм подобного вида был реализован на примере двух регионов — Ферганской долины в пределах УзССР и Кировобад-Казахской равнины АзССР.



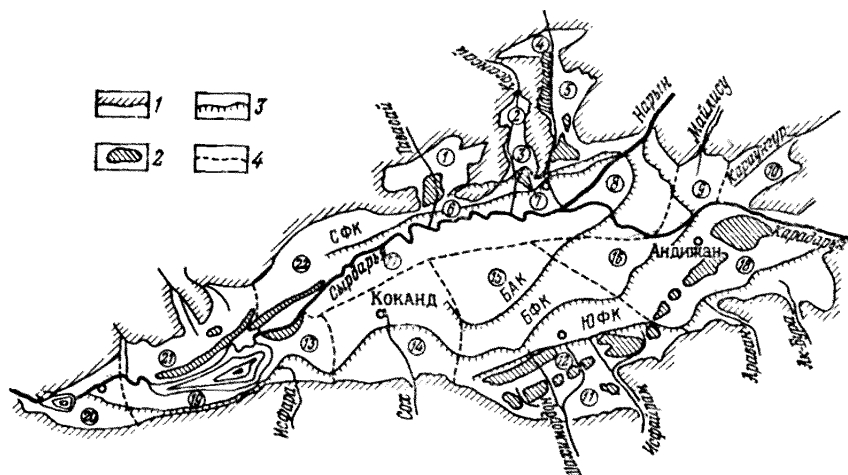


Рис. 4.18. Карта-схема Ферганской долины:

1 — границы гор; 2 — адьры; 3 — каналы; 4 — границы месторождений. Цифры в кружках — месторождения подземных вод: 1 — Алмас-Варзское; 2 — Касансайское; 3 — Кукумбайское; 4 — Нанайское; 5 — Исковат-Пишкоранское; 6 — Чуст-Папское; 7 — Наманганское; 8 — Нарынское; 9 — Майлисайское; 10 — Караунгурское; 11 — Чимин-Ауваляское; 12 — Ярмazarское; 13 — Исфаринское; 14 — Сохское; 15 — Алтыарык-Бешалышское; 16 — Андижан-Шариханское; 17 — Сырдарьинское; 18 — Ош-Араванское; 19 — Испсар-Канибадамское; 20 — Нау-Пролетарское; 21 — Самгорское; 22 — Камышкурганское

**Ферганская долина.** Ферганская межгорная впадина (рис. 4.18) представляет собой весьма интересный объект в плане перспективной крупномасштабной эксплуатации подземных вод. С одной стороны, эксплуатационные ресурсы подземных вод Ферганской долины весьма велики: по оценкам ВСЕГИНГЕО они составляют около  $300 \text{ м}^3/\text{с}$  что сравнимо со среднегодовыми величинами не только местного стока ( $211 \text{ м}^3/\text{с}$ ), но и транзитного стока рек Нарына и Карадарьи ( $506 \text{ м}^3/\text{с}$ ).

Хотя не менее половины указанной величины эксплуатационных ресурсов подземных вод формируется за счет привлечения поверхностных вод, даже остающаяся часть эксплуатационных ресурсов достаточно велика для того чтобы заметно изменить водохозяйственный баланс Сырдарьи. Это изменение оказывается еще более существенным, если учесть, что подземные воды отбираются неравномерно как в течение года, так и в многолетнем разрезе.

Ферганская долина расположена на стыке Тянь-Шаньской (в ее юго-западной части) и Алайско-Туркестанской горных систем. С севера и востока границами Ферганской долины служат хребты, относящиеся к Тянь-Шаню: Кураминский, Чаткальский, Атойнакский, Ферганский, Баубашата. К югу от Ферганской долины расположены Туркестанский и Алайский хребты, относящиеся к системе Памиро-Алая. В западной части долины имеется сравнительно узкий проход между возвышением Моголтау и предгорьями Туркестанского хребта, через который Сырдарья выходит

на равнину. Наибольшая протяженность долины между Ленинабадом и Кампырраватским гидроузлом на Карадарье — около 300 км; наибольшая ширина в створе Касан — Наманган — Фергана — Вуадиль достигает 130 км; наименьшая не превышает 5—10 км.

Хребты вытянуты преимущественно в широтном направлении. Параллельно основным хребтам, отделяясь от них межгорными впадинами, расположены гряды передовых хребтов, сменяющихся пологими возвышенностями — адырами. Адыры отделены от передовых хребтов заадырными, друг от друга — межадырными впадинами.

Поверхность центральной части долины представляет собой древние террасы Сырдарьи и периферийные части конусов выноса многочисленных горных рек и речек (саев), стекающих с окружающих гор.

Климатические характеристики испытывают лишь небольшие изменения по территории долины, связанные в основном с высотой над уровнем моря. Климат сухой, резко континентальный и отличается большой продолжительностью безморозного периода (более 200 дней в году). Среднее количество осадков в равнинной части варьирует от 109 до 226 мм/год (Андижан); в предгорьях оно выше (360 мм/год — Ош, 502 мм/год — Джалалабад). Средняя температура по всем метеостанциям долины составляет приблизительно, °С: января —3, июля +27; годовая +13; испаряемость 1200 мм/год.

Наиболее крупные реки Ферганской долины — Нарын и Карадарья — сливаясь, образуют Сырдарью, большинство притоков которой впадает в нее именно в пределах Ферганской долины. С Туркестано-Алайского, Ферганского и Чаткало-Кураминского хребтов стекают в Ферганскую долину более 30 крупных и мелких притоков Сырдарьи: Падшаата, Гавасай, Касансай (Чаткало-Кураминская система); Караунгур, Кугарт, Майлисай (Ферганский хребет); Сох, Исфара, Шахимардан, Исфайрамсай, Аравансай, Акбура (Туркестано-Алайская система). По классификации В. Л. Шульца, реки Ферганской долины относятся в основном к типам рек с ледниково-снеговым и снегово-ледниковым питанием. К первым относятся реки, стекающие с Туркестано-Алайского хребта (Акбура, Аравансай, Исфайрамский, Шахимардан, Сох, Исфара), ко вторым — реки, стекающие с Ферганского и Чаткало-Кураминского хребтов (Караунгур, Майлису, Падшаата, Касансай, Гавасай, Чадаксай), а также Нарын и Карадарья. На рис. 4.19 изображен график среднегодовых расходов  $Q$  рек Ферганской долины; ниже приведены их статистические характеристики:

Река (группа рек) . . . Нарын	Карадарья	"Север.	"Восток.	"Юг.	
$\bar{Q}$ , м³/с . . . . .	389	119	20,7	60,9	135
$C_{\sigma}$ . . . . .	0,28	0,35	0,37	0,34	0,11

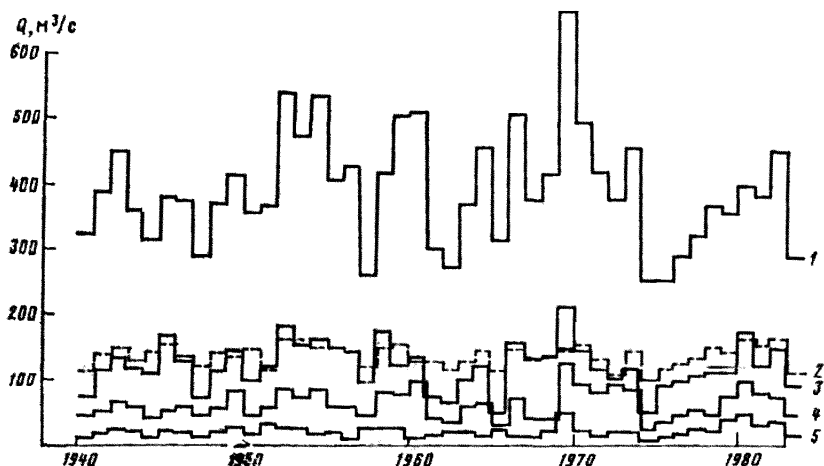


Рис. 4.19. Календарный график расходов рек Ферганской долины:

1 — Нарын; 2 — группа южных рек; 3 — Карадарья; 4 — группа восточных рек; 5 — группа северных рек

Притоки Сырдарьи сгруппированы по их расположению; при этом в группу «Север» попадают реки, стекающие с Чаткальского и Кураминского хребтов, а именно: Чадаксай, Гавасай, Касансай, Падшаата; в группу «Восток» — реки, впадающие в Нарын и Карадарью восточнее их слияния, а именно: Майлисай, Караунгур и Кугарт; в группу «Юг» попадают реки, стекающие с Туркестано-Алайской горной системы — Исфара, Сох, Шахимардан, Исфайрамсай, Аравансай и Акбура. Суммарный среднегодовое стока в Ферганскую долину составляет  $727 \text{ м}^3/\text{с}$  ( $23,2 \text{ км}^3/\text{год}$ ) при коэффициенте вариации  $C_v$  0,22.

Расходы рек, объединенных в группы, характеризуется выраженной взаимосвязанностью, представление о которой дается матрицей коэффициентов корреляции:

	Н	К	С	В	Ю
Нарын . . . . .	1	0,87	0,87	0,90	0,80
Карадарья . . . . .		1	0,85	0,88	0,77
"Север" . . . . .			1	0,92	0,63
"Восток" . . . . .				1	0,64
"Юг" . . . . .					1

Водные ресурсы Ферганской долины практически полностью используются для целей ирригации. Величины норм ирригационного водопотребления (нетто) были определены В. Б. Местечкиным исходя из метеорологических данных ряда месторождений района (Ленинабад, Фергана, Андижан, Наманган) по методике, описанной в работе [4]. Величины водопотребления (брутто) получались умножением норм нетто на размеры орошаемых площадей и делением на величину КПД оросительной системы. Величины

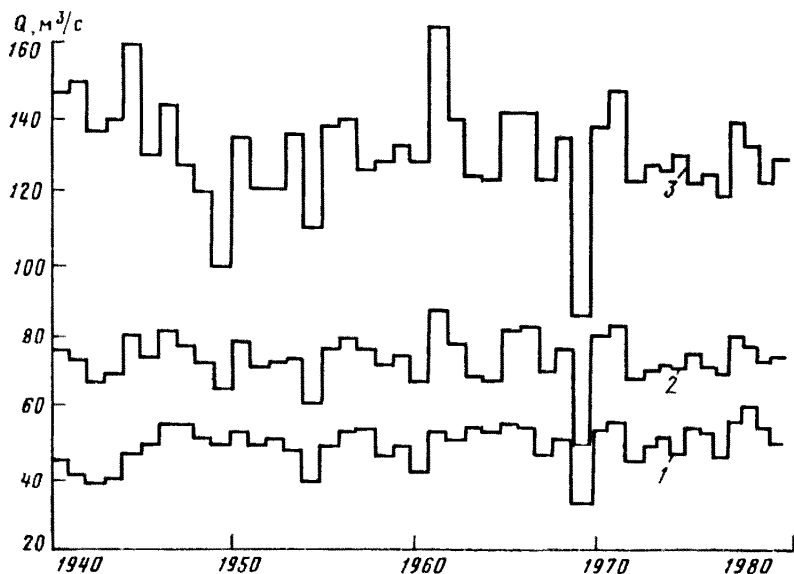


Рис. 4.20. Календарный график расходов водопотребления по линейно-узловой схеме Ферганской долины:

1 — «Север»; 2 — «Восток»; 3 — «Юг»

суммарных кпд в Ферганской долине находятся в пределах 0,6—0,7; площади орошения составляют тыс. га: по группе «Север» — 195, «Восток» — 295, «Юг» — 530. Изменения в величинах орошаемых площадей Ферганской долины за последние десять лет — незначительные. К величинам водопотребления на орошение были, кроме того, прибавлены количества воды, расходуемые на промывки земель. Результирующие временные зависимости расходов водопотребления приведены на рис. 4.20.

Исходными данными для моделирования гидрогеологических условий района послужили результаты региональной разведки эксплуатационных ресурсов подземных вод, проведенной ГИДРОИНГЕО в 70-х гг. Гидрогеологические условия Ферганской долины типичны для межгорных впадин; ее особенности — размеры и дренированность крупными водными артериями таких как Сырдарья, Нарын и Карадарья. Подземные воды в Ферганской долине имеются в отложениях всех геологических возрастов и распространены повсеместно.

Подземные воды в дочетвертичных отложениях изучены фрагментарно, в основном в связи с разведкой нефтяных залежей. Близ восточного борта Ферганской котловины обнаружены пресные и минерализованные воды в трещиноватых отложениях девона и карбона. Высоконапорные пластовые минерализованные воды обнаружены в мелководных и палеоген-неогеновых отложениях.

Наибольшее практическое значение имеют подземные воды четвертичных отложений. Приуроченные к различным генетическим, литологическим и возрастным группам, они находятся в тесной гидравлической и балансовой взаимосвязи. Питание эти воды получают за счет инфильтрации из поверхностных водотоков (рек, каналов), с массивов орошения, притока с вышерасположенных областей, а также атмосферных осадков.

Основной областью питания подземных вод и проводником сформировавшегося подземного стока от периферии бассейна к долинам рек являются конусы выноса. Двигаясь к периферийным частям конусов выноса и пролювиальных шлейфов, потоки грунтовых вод образуют в них сплошное зеркало с глубиной залегания от 5 до 100 м и более.

Благодаря уменьшению крупности обломочного материала в водосодержащих толщах и наличию над галечниками прослоев глины и конгломератов, подземные воды приобретают местный напор. Напорные воды вскрываются на глубинах 50—150 м, реже 350 м. По линиям фациальных границ грубообломочных и мелкоземистых отложений в периферийных частях конусов выноса и пролювиальных шлейфов грунтовые воды приближаются к поверхности земли или выклиниваются в виде родников и карасу, питаая поверхностные водотоки.

Близость области питания, хорошая водопроницаемость пород и обеспеченность стока в пределах конусов выноса, заадырных и межгорных впадин, гидравлически связанных между собою через пропилы в адырах, обуславливают невысокую (0,2—1,0 г/л) минерализацию грунтовых вод.

Территория между адырами, с одной стороны, и долинами Сырдарьи, Карадарьи и Нарына, — с другой, представляет собой зону транзита потоков подземных вод по средне- и верхнечетвертичным отложениям. Долины Карадарьи, Нарына и Сырдарьи — зоны окончательной разгрузки потоков подземных вод.

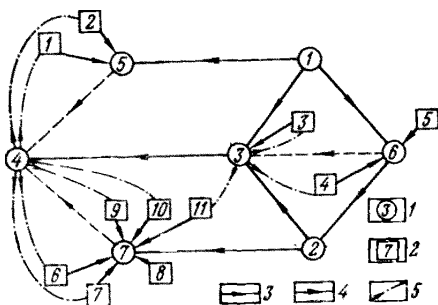
В пределах Ферганской долины выделяется не менее 23 месторождений подземных вод (МПВ) в межадырных, и заадырных впадинах, а также в отложениях конусов выноса и предгорных шлейфов. Их расположение показано на рис. 4.18. Поскольку впадины — как межгорные, так и заадырные, — имеют эксплуатационных ресурсов в целом значительно меньше, чем конусы выноса и пролювиальные шлейфы, их ресурсами при моделировании было решено пренебречь. Кроме того, в модель не вошло четыре самых западных МПВ, расположенных вне территории Таджикистана и характеризующихся худшей гидрогеологической изученностью.

В итоге для моделирования системы совместного использования поверхностных и подземных вод Ферганской долины было оставлено 11 наиболее крупных МПВ, изображенных схематически на рис. 4.21 с привязкой к узлам укрупненной линейно-узловой схемы Ферганской долины.

На рис. 4.22 изображены расчетные схемы МПВ Ферганской долины, использованные для вычисления основных зависимо-

Рис. 4.21. Линейно-узловая схема Ферганской долины:

1 — узлы схемы (1 — Учкурган, 2 — Кампырват, 3 — Каль, 4 — Кайрак-кум, 5 — «Север»; 6 — «Восток», 7 — «Юг»); 2 — месторождения подземных вод (1 — Чуст-Папское, 2 — Наманганское, 3 — Нарынское, 4 — Майлисайское, 5 — Караунгурское, 6 — Исфаринское, 7 — Сохское, 8 — Андижан-Шарханское, 9 — Алтыарык-Бешалышское, 10 — Сырдарьинское, 11 — Ош-Араванское); 3 — реки и каналы; 4 — возвратные воды; 5 — редукция поверхностного стока



стей — гидравлических сопротивлений и функций редукции. Ниже приводятся основные результаты этих расчетов.

1. Чуст-Папское МПВ (рис. 4.22, а) схематизировано в виде пласта-полосы с разнородными границами, причем границей нулевого расхода служат адыры, а границей питания — урез Сырдарьи. В пределах довольно узкой полосы оказалось допустимым пренебречь фильтрационной неоднородностью и принять постоянные по всей площади значения водопроводимости ( $830 \text{ м}^2/\text{сут}$ ) и уровнепроводности ( $5500 \text{ м}^2/\text{сут}$ ). Величина допустимого понижения принята равной 40 м. При отборе подземных вод линейным рядом скважин значительной протяженности передаточная функция понижения на линии водозабора имеет вид

$$U_s = \frac{1}{B\lambda} \operatorname{ch} \lambda (L - d) \operatorname{sh} \lambda d / \operatorname{ch} \lambda L, \quad (4.113)$$

где  $\lambda = (p/a)^{1/2}$ ,  $B = 24\,000 \text{ м}$ ,  $L = 6700 \text{ м}$ ,  $d = 3500 \text{ м}$ . Для определения значений гидравлического сопротивления с использованием выражения (4.113) был применен метод Гохберга [6]; соответствующая временная зависимость  $R_0(t)$  приведена на рис. 4.23, а. Передаточная функция редукции для условий этой схемы имеет вид

$$U_w = \operatorname{ch} \lambda (L - d) / \operatorname{ch} \lambda L; \quad (4.114)$$

для определения временной зависимости  $w_0(t)$  по выражению (4.114) также применялся метод Гохберга; эта зависимость представлена графически на рис. 4.24.

2. Наманганское МПВ (см. рис. 4.22, б) схематизировано в виде уровня по урезу Сырдарьи и нулевого расхода по адырам. Величина водопроводимости равна  $1700 \text{ м}^2/\text{сут}$ , уровнепроводности —  $11\,300 \text{ м}^2/\text{сут}$ ; допустимое понижение принято равным 80 м. Передаточные функции понижения и редукции определяются выражениями (4.113) и (4.114) при следующих параметрах:  $L = 10\,500 \text{ м}$ ,  $d = 5700 \text{ м}$ ,  $B = 55\,000 \text{ м}$ . Расчет величин гидравлических сопротивлений и функций редукции проведен методом Гохберга. Временные зависимости гидравлического сопротивления и функции приведены соответственно на рис. 4.23, а и 4.24.

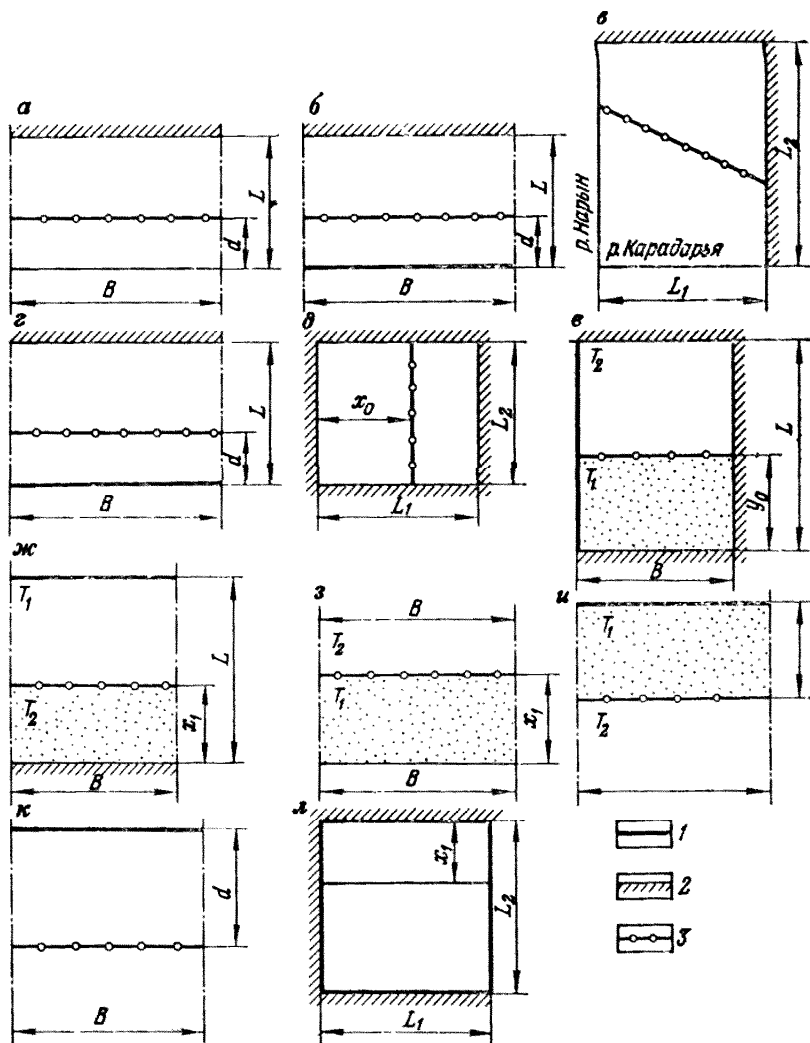


Рис. 4.22. Расчетные схемы месторождений подземных вод Ферганской долины:  
1—2 — границы (1 — постоянного напора, 2 — постоянного расхода); 3 — линейные водозаборы подземных вод

3. Нарынское МПВ (см. рис. 4.22, в) схематизировано в виде пласта-прямоугольника с разнородными границами, причем границами постоянного уровня служат урезы рек Карадарьи и Нарына, а границами нулевого расхода — склоны Ферганского хребта. Фильтрационные параметры оказалось возможным усреднить по всей площади МПВ:  $T=8900 \text{ м}^2/\text{сут}$ ,  $a=59\,000 \text{ м}^2/\text{сут}$ ,  $S_{\text{доп}}=100 \text{ м}$ . Линейный ряд скважин проведен, как показано на

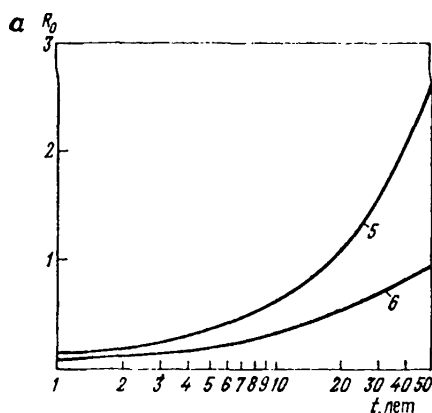


Рис. 4.23. Временные зависимости гидравлических сопротивлений по месторождениям подземных вод Ферганской долины. Номера кривых — МПВ (см. рис. 4.21):

а — для МПВ 5 и 6; б — для МПВ 1–4 и 7–11

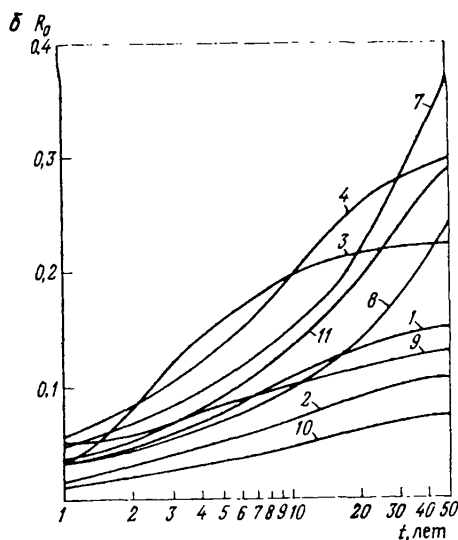


рис. 4.22, в. Если в качестве оси абсцисс принята р. Карадарья, а в качестве оси ординат — р. Нарын, причем начало координат находится в точке их слияния, уравнение, описывающее прямую линию, вдоль которой идет линейный ряд, имеет вид:  $y = \alpha x + \beta$ . где  $\alpha = -0,575$ ;  $\beta = 21,5$  км.

Передаточная функция понижения описывается разложением общего вида для ограниченных в плане областей [10]:

$$U_S(x, y, p) = \sum_{n, k=1}^{\infty} \frac{\chi_{nk}}{\bar{p} + \lambda_{nk}} e_{nk}(\bar{x}, \bar{y}), \quad (4.115)$$

где

$$\bar{p} = \frac{L_2^2}{a} p, \quad \bar{x} = x/L_2, \quad \bar{y} = y/L_2;$$

$$\lambda_{nk} = \pi^2 (n - 1/2)^2 \left( \frac{L_2}{L_1} \right)^2 + \pi^2 (k - 1/2)^2;$$

$$e_{nk} = 2 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \sin \pi (n - 1/2) \frac{L_2}{L_1} \bar{x} \sin \pi (k - 1/2) \bar{y};$$

$$\chi_{nk} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{(-1)^{n+1} \alpha (k - 1/2) \cos \gamma_k + (n - 1/2) \frac{L_2}{L_1} \sin \delta_k}{(n - 1/2)^2 \left( \frac{L_2}{L_1} \right)^2 - \alpha^2 (k - 1/2)^2};$$

$$\gamma_k = \pi \left( \alpha \frac{L_1}{L_2} + \beta \right) (k - 1/2); \quad \delta_k = \beta \pi (k - 1/2);$$



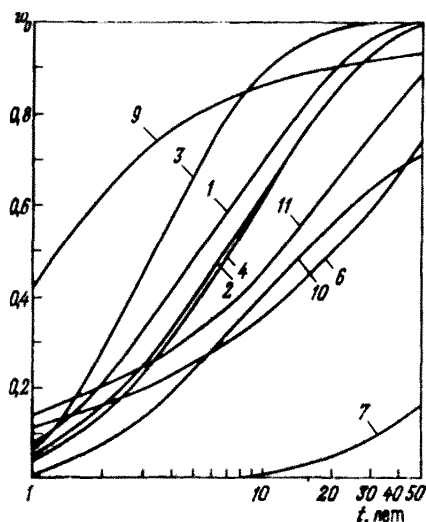


Рис. 4.24. Временные зависимости редукции по месторождениям подземных вод Ферганской долины. Номера кривых — МПВ (см. рис. 4.21); для МПВ 5 и 8  $w_0=0$

$L_1=20\,000$  м,  $L_2=26\,500$  м. Если в формуле (4.115) положить  $\bar{p}=0$ , значение передаточной функции будет равно соответствующему значению гидравлического сопротивления при  $t=\infty$ . Суммирование ряда (4.115) при  $\bar{p}=0$  и сравнение стационарных значений сопротивлений в точках линейного ряда выявило точку, в которой понижение будет наибольшим. Ей соответствуют координаты:  $x_0=15\,500$  м,  $y_0=12\,590$  м. Временные зависимости понижения были рассчитаны именно для этой точки по формуле

$$R_0(t) = \sum_{k,n=1}^{\infty} \frac{\chi_{nk}}{\lambda_{nk}} e_{nk}(\bar{x}_0 \bar{y}_0) (1 - e^{-\lambda_{nk} \bar{t}}), \quad (4.116)$$

где  $\bar{t}=at/L_2^2$ . Эта зависимость в виде графика представлена на рис. 4.23, а.

Функции редукции по отношению к Нарыну и Карадарье соответственно имеют вид

$$w_0^{(H)}(t) = 2 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \left( \frac{L_2}{L_1} \right) \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{n-1/2}{k-1/2} \frac{\chi_{nk}}{\lambda_{nk}} (1 - e^{-\lambda_{nk} \bar{t}}); \quad (4.117)$$

$$w_0^{(K)}(t) = 2 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{k-1/2}{n-1/2} \frac{\chi_{nk}}{\lambda_{nk}} (1 - e^{-\lambda_{nk} \bar{t}}). \quad (4.118)$$

Суммарная временная зависимость  $w_0(t) = w_0^{(H)} + w_0^{(K)}$  изображена на рис. 4.24.

4. Майлисаяское МПВ схематизировано в виде пласта-полуполосы с разнородными границами (см. рис. 4.22, з), причем граница постоянного уровня — урез р. Карадарья, граница нуле-

вого расхода — склон Ферганского хребта. Фильтрационные параметры осреднены по площади:  $T=3800 \text{ м}^2/\text{сут}$ ,  $a=25\,000 \text{ м}^2/\text{сут}$ ,  $S_{\text{доп}}=100 \text{ м}$ . Передаточные функции понижения и редукции соответственно выражаются формулами (4.113), (4.114) со следующими параметрами:  $L=15\,400 \text{ м}$ ,  $d=8900 \text{ м}$ ,  $B=30\,000 \text{ м}$ . Величины гидравлических сопротивлений и функции редукции определены по методу Гохберга; их графики приведены на рис. 4.23, а и 4.24.

5. Караунгурское МПВ (см. рис. 4.22, д) схематизировано в виде пласта-прямоугольника с четырьмя границами нулевого расхода (МПВ располагается в депрессии, со всех сторон ограниченной склонами отрогов Ферганского хребта и адырами; р. Караунгур выходит из нее через узкий пропил, шириной которого можно пренебречь). Передаточная функция понижения имеет вид:

$$U_S(p) = \text{ch } \lambda (L_1 - x_0) \text{ch } \lambda x_0 / \text{sh } \lambda L_1, \quad (4.119)$$

где  $\lambda = (p/a)^{1/2}$ ;  $L_1=19\,500 \text{ м}$ ,  $L_2=14\,500 \text{ м}$ ,  $x_0=9500 \text{ м}$ . Фильтрационные параметры допускают усреднение по площади МПВ:  $T=6000 \text{ м}^2/\text{сут}$ ,  $a=40\,000 \text{ м}^2/\text{сут}$ ,  $S_{\text{доп}}=100 \text{ м}$ . Расчет временной зависимости гидравлического сопротивления на основании выражения (4.119) проведен методом Гохберга, результат в виде графика приведен на рис. 4.23, б. В силу своего расположения Караунгурское МПВ не оказывает влияния на поверхностный сток.

6. Исфаринское МПВ (см. рис. 4.22, е) схематизировано в виде пласта-прямоугольника с тремя границами нулевого расхода (склон Туркестанского хребта, адыр и межконусное понижение) и границей постоянного уровня (урез Кайраккумского водохранилища). Учтена фильтрационная неоднородность отложенный конуса выноса: в его вершинной части величина водопроницаемости принята равной  $T_1=5000 \text{ м}^2/\text{сут}$ , в периферийной —  $T_2=1100 \text{ м}^2/\text{сут}$ . Соответственно  $a_1=33\,000 \text{ м}^2/\text{сут}$ ,  $a_2=7300 \text{ м}^2/\text{сут}$ ;  $S_{\text{доп}}=100 \text{ м}$ ,  $L_1=30\,000 \text{ м}$ ;  $L_2=18\,300 \text{ м}$ ;  $y_0=9500 \text{ м}$ . Характерным значением водопроницаемости, используемым для вычисления эксплуатационных ресурсов, считается  $T_1=5000 \text{ м}^2/\text{сут}$ . Для точки водозабора, наиболее удаленной от границы постоянного уровня, выражение передаточной функции понижения таково:

$$U_S = \frac{2}{\pi L_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n^{(1)} \left(n - \frac{1}{2}\right) \left[ \text{th } \lambda_n^{(1)} y_0 + v \frac{\lambda_n^{(2)}}{\lambda_n^{(1)}} \text{th } \lambda_n^{(2)} (L_2 - y_0) \right]},$$

$$\text{где} \quad (4.120)$$

$$\lambda_n^{(i)} = \sqrt{\frac{p}{a_i} + \pi^2 \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 / L_1^2}, \quad i = 1, 2; \quad v = T_2/T_1.$$

Передаточная функция редукции имеет вид:

$$U_W = 1 - \frac{1}{\pi^2} \frac{p}{a_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n - 1/2)^2 \lambda_n^{(1)} \lambda_n^{(2)}} \times \\ \times \frac{\lambda_n^{(2)} \operatorname{th} \lambda_n^{(1)} y_0 + \lambda_n^{(1)} \operatorname{th} \lambda_n^{(2)} (L_2 - y_0)}{\lambda_n^{(1)} \operatorname{th} \lambda_n^{(1)} y_0 + \lambda_n^{(2)} \operatorname{th} \lambda_n^{(2)} (L_2 - y_0)}. \quad (4.121)$$

Величины гидравлического сопротивления и функции редукции, полученные по методу Гохберга, в виде графиков приведены на рис. 4.23, б и 4.24.

7. Сохское МПВ (см. рис. 4.22, ж) схематизировано в виде пласта-полосы с разнородными границами. Границей нулевого расхода принята вершина конуса выноса, и склон Алайского хребта, границей постоянного уровня — урез р. Сырдарьи. Учтена фильтрационная неоднородность области: в ее вершинной части  $T_1 = 7600$  м<sup>2</sup>/сут, в периферийной —  $T_2 = 3300$  м<sup>2</sup>/сут; соответственно,  $a_1 = 51\,000$  м<sup>2</sup>/сут,  $a_2 = 22\,000$  м<sup>2</sup>/сут,  $S_{\text{доп}} = 100$  м. Передаточная функция на линии водозабора определяется выражением

$$U_S = \frac{1}{B\lambda_1} (\operatorname{th} \lambda_1 x_1 + \eta \operatorname{cth} \lambda_2 x_2)^{-1}, \quad (4.122)$$

где  $\lambda_i = (p/a_i)^{1/2}$ ,  $i = 1, 2$ ;  $\eta = (T_2/T_1) \sqrt{a_1/a_2}$ ;  $L = 51\,500$  м,  $B = 40\,000$  м,  $x_1 = 23\,900$  м,  $x_2 = 27\,600$  м. Передаточная функция редукции этого МПВ имеет вид

$$U_W = \eta \frac{1}{\operatorname{sh} \lambda_2 x_2 (\operatorname{th} \lambda_1 x_1 + \eta \operatorname{cth} \lambda_2 x_2)}. \quad (4.123)$$

Значения гидравлического сопротивления и функции редукции в виде графиков приведены на рис. 4.23, а и 4.24.

8. Алтыарык-Бешалышское МПВ (рис. 4.22, и) схематизировано в виде пласта-полуполосы с границей нулевого расхода по линии адыров. Учтена фильтрационная неоднородность: для вершинной части области принято  $T_1 = 2400$  м<sup>2</sup>/сут,  $a_1 = 1600$  м<sup>2</sup>/сут; для периферийной —  $T_2 = 500$  м<sup>2</sup>/сут,  $a_2 = 3300$  м<sup>2</sup>/сут,  $S_{\text{доп}} = 100$  м. Передаточная функция понижения на линии водозабора имеет вид

$$U_S = \frac{1}{B\lambda_1} \frac{1}{\eta + \operatorname{th} \lambda_1 x_1}, \quad (4.124)$$

где  $\lambda_1 = (p/a_1)^{1/2}$ ,  $\eta = (T_2/T_1) \sqrt{a_1/a_2}$ ;  $B = 60\,000$  м,  $x_1 = 17\,900$  м. Величины гидравлических сопротивлений, полученные по методу Гохберга, приведены на рис. 4.23, а в виде графиков. В силу своей значительной удаленности от Сырдарьи Алтыарык-Бешалышское МПВ практически не оказывает влияния на поверхностный сток; значения  $w_0$  для этого МПВ приняты равными нулю.

9. Андиган-Шариханское МПВ (см. рис. 4.22, к) схематизировано в виде пласта-полуплоскости с границей питания

(урез Сырдарьи). Учтена фильтрационная неоднородность, в долине Сырдарьи принято  $T_1=7200$  м<sup>2</sup>/сут,  $a_1=48\,000$  м<sup>2</sup>/сут; в области, соответствующей периферийной части пролювиального шлейфа  $T_2=2000$  м<sup>2</sup>/сут,  $a_2=13\,000$  м<sup>2</sup>/сут,  $S_{\text{доп}}=100$  м. Передаточная функция понижения на линии водозабора имеет вид:

$$U_S = \frac{1}{B\lambda_1} (\eta + \operatorname{cth} \lambda_1 d)^{-1}, \quad (4.125)$$

где  $\lambda = (p/a_1)^{1/2}$ ;  $\eta = (T_2/T_1) \sqrt{a_1/a_2}$ ;  $B=36\,000$  м,  $d=5800$  м. Передаточная функция редукции имеет вид

$$U_W = (\operatorname{ch} \lambda_1 d + \eta \operatorname{sh} \lambda_1 d)^{-1}. \quad (4.125a)$$

Расчет временных зависимостей понижения и редукции производится методом Гохберга; графики гидравлического сопротивления и функции редукции приведены на рис. 4.23, а и 4.24.

10. Сырдарьинское МПВ (см. рис. 4.22, л) схематизировано в виде пласта-полуполосы с границей питания, причем в качестве границы принят урез Сырдарьи. Временная зависимость гидравлического сопротивления для этого случая имеет вид (2.72) (при  $r=0$ ,  $\rho=2d$ ); временная зависимость функции редукции — вид (2.82) при  $B=100\,000$  м,  $d=10\,000$  м,  $T=3000$  м<sup>2</sup>/сут,  $a=20\,000$  м<sup>2</sup>/сут,  $S_{\text{доп}}=100$  м. Графики зависимостей  $R_0(t)$  и  $\omega_0(t)$  приведены на рис. 4.23, а и 4.24.

11. Ош-Араванское МПВ (см. рис. 4.22, м) схематизировано в виде пласта-прямоугольника с тремя границами нулевого расхода (склон Туркестанского хребта, адыр и межконусное понижение) и одной границей постоянного уровня (урез Карадарьи). Учтена фильтрационная неоднородность: в верхней части пролювиального шлейфа принято  $T_1=10\,500$  м<sup>2</sup>/сут,  $a_1=70\,000$  м<sup>2</sup>/сут; в периферийной части —  $T_2=3900$  м<sup>2</sup>/сут,  $a_2=26\,000$  м<sup>2</sup>/сут,  $S_{\text{доп}}=100$  м. Передаточная функция понижения на линии водозабора для точки, в которой понижение максимальное (т. е. находящейся в наибольшем удалении от реки) имеет вид:

$$U_S = \frac{1}{\pi B} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos \pi (n-1/2) x/h_1}{(n-1/2) [\lambda_n^{(1)} \operatorname{th} \lambda_n^{(1)} y_0 + \nu \lambda_n^{(2)} \operatorname{th} \lambda_n^{(2)} (L_2 - y_0)]}, \quad (4.126)$$

где  $\lambda_n^{(i)} = \sqrt{p/a_i + \pi^2 (n-1/2)^2/h_i^2}$ ,  $i=1, 2$ ;

$h_1=B=35\,000$  м,  $h_2=29\,000$  м,  $y_0=21\,000$  м.

Передаточная функция такова:

$$U_W = 1 - \frac{p}{a_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \lambda_n^{(1)} \lambda_n^{(2)}} \times \\ \times \frac{\lambda_n^{(2)} \operatorname{sh} \lambda_n^{(1)} y_0 + \nu^{-2} \lambda_n^{(1)} \operatorname{th} \lambda_n^{(2)} (L_2 - y_0) \operatorname{ch} \lambda_n^{(1)} y_0}{\lambda_n^{(1)} \operatorname{sh} \lambda_n^{(1)} y_0 + \nu \lambda_n^{(2)} \operatorname{th} \lambda_n^{(2)} (L_2 - y_0) \operatorname{ch} \lambda_n^{(1)} y_0}. \quad (4.127)$$

Расчеты с использованием выражений (4.126), (4.127) проводятся также по методу Гохберга; на рис. 4.23, а и 4.24 их результаты представлены в виде графиков.

Разработанная модель функционирования водохозяйственной системы Ферганской долины в режиме совместного использования поверхностных и подземных вод действует согласно блок-схеме, изображенной на рис. 4.25. Алгоритм был реализован на двух марках персональных компьютеров — «Синклер Спектрум» и IBM PC/XT. В последней версии программы исходные данные общего характера (массивы значений водопроницаемости, допустимых понижений по МПВ; данные по гидрогеологическим характеристикам, значения временных зависимостей гидравлических сопротивлений и функций редукции) записаны на гибком диске. В начале работы программы они считываются в оперативную память компьютера, после чего вводится число реализаций случайного процесса эволюции водохозяйственной обстановки системы. Предусмотрено три режима получения гидрогеологических и водохозяйственных ситуаций: а) генерация случайных величин расходов рек и водопотреблений в соответствии с их совместным распределением; б) последовательный, год за годом, ввод расходов рек и водопотреблений с клавиатуры компьютера; в) прогон календарного ряда наблюденных расходов рек и величины водопотребления.

Матрица задачи линейного программирования (ЛП) определяется на основании равенств (4.100) — (4.103); в случае конкретной схемы Ферганской долины (см. рис. 4.21) ее формирование может быть упрощено на следующем основании, для каждого из узлов линейно-узловой схемы составляются уравнения баланса. Они имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \text{Узел 1: } b_1 &= q_1 - d_1 - x_1 - x_3 - x_5 = 0; \\ \text{Узел 2: } b_2 &= q_2 - d_2 + x_4 - x_2 - x_6 = 0; \\ \text{Узел 3: } b_3 &= x_1 + x_2 - x_7 + Q_3 - W_3 - W_4 - W_{11} = 0; \\ \text{Узел 4: } b_4 &= x_7 - d_4 - W_1 - W_2 - W_6 - W_7 - W_9 - W_{10} \geq 0; \\ \text{Узел 5: } b_5 &= x_5 + Q_1 + Q_2 + q_5 - d_5 = 0; \\ \text{Узел 6: } b_6 &= x_3 + x_4 + q_6 - d_6 + Q_4 + Q_5 = 0; \\ \text{Узел 7: } b_7 &= x_6 + \sum_{m=6}^{11} Q_m + q_7 - d_7 = 0. \end{aligned} \right\}$$

(4.128)

В условии баланса для узла 4 стоит знак равенства, который означает, что этот узел — замыкающий и, если в системе имеется избыток воды, она может быть сброшена через этот узел. Остальные уравнения системы (4.128) образуют систему шести линейных уравнений относительно семи величин потоков в дугах  $x_1, \dots, x_7$ . Шесть из них могут быть выражены через остальную, седьмую, и

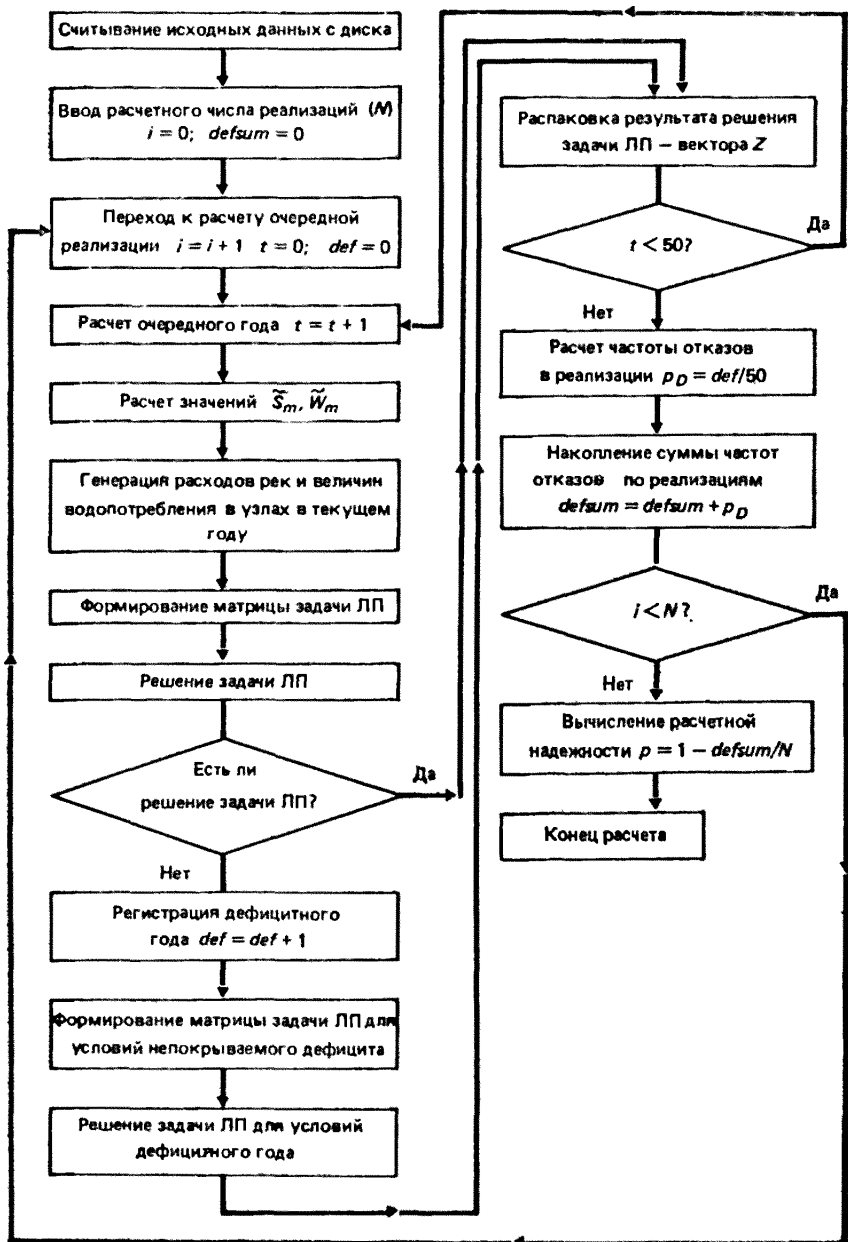


Рис. 4.25. Блок-схема моделирования процесса совместного функционирования поверхностных и подземных вод

остальные параметры: расходы водозаборов, величины редукии и узловые величины. Если проделать эти преобразования и перенести в правые части равенств (4.128) значение  $x_3$ , условия неотрицательности остальных потоков в дугах выражаются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} (x_1 \geq 0): & -Q_1 - Q_2 + x_3 + (d_1 + d_5 - q_1 - q_5) \leq 0, \\ (x_2 \geq 0): & -\sum_{m=4}^{11} Q_m - x_3 + (d_2 + d_6 + d_7 - q_2 - q_6 - q_7) \leq 0, \\ (x_4 \geq 0): & -Q_4 - Q_5 - x_3 + (d_6 - q_6) \leq 0, \\ (x_5 \geq 0): & Q_1 + Q_2 + (q_5 - d_5) \leq 0, \\ (x_6 \geq 0): & \sum_{m=6}^{11} Q_m + (q_7 - d_7) \leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.129)$$

Условие  $x_7 \geq 0$  заменяется на более сильное неравенство, вытекающее из четвертого равенства (4.130):

$$-\sum_{m=1}^{11} (1 - w_m^{(1)}) Q_m + \sum_{m=1}^{11} \tilde{W}_m + d_1 + d_2 + d_4 + d_5 + d_6 + d_7 - q_1 - q_2 - q_5 - q_6 - q_7 \leq 0. \quad (4.130)$$

При выводе последнего уравнения использовано соотношение (4.89):  $W_m = \tilde{W}_m + W_m^{(1)} Q_m$ . Условие  $\Delta S_{\min} = \min_m (S_{\text{доп } m} - S_m)$  запишется, с учетом (4.88), в виде

$$\frac{R_m^{(1)}}{T_m} Q_m + \Delta S_{\min} + (\tilde{S}_m - S_{\text{доп } m}) \leq 0, \quad (4.131)$$

$m=1, \dots, 11$ . Система неравенств (4.129)–(4.131) представляет собой систему ограничений задачи ЛП в стандартизованном виде:

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} z_j + b_i \leq 0, \quad i=1, \bar{n}, \quad (4.132)$$

где  $z_j$  — переменные задачи ЛП, в данном случае вектор  $(z_1, \dots, z_m)$  формируется следующим образом:  $z_1 = Q_1$ ,  $z_2 = Q_2$ ,  $\dots$ ,  $z_{11} = Q_{11}$ ,  $z_{12} = x_3$ ,  $z_{13} = \Delta S_{\min}$ . Таким образом, общее число переменных задачи ЛП равно  $m = 13$ . Число ограничений  $n = 17$ . В соответствии с выражениями (4.129)–(4.131) формируются и значения коэффициентов матрицы  $a_{ij}$ , а также столбца  $b_i$ . Так  $a_{1,1} = -1$ ,  $a_{1,2} = -1$ ,  $a_{1,12} = 1$ ,  $b_1 = d_1 + d_5 - q_1 - q_5$ ;  $a_{7,1} = -(1 - W_1^{(1)})$ ,  $b_7 = \sum_{m=1}^{11} \tilde{W}_m + d_1 + d_2 + d_4 + d_5 + d_6 + d_7 - q_1 - q_2 - q_5 - q_6 - q_7$ ;  $a_{8,1} = R_1^{(1)} / T_1$ ,  $a_{8,13} = 1$ ,  $b_8 = \tilde{S}_1 - S_{\text{доп } 1}$  и т. д.

Решение задачи ЛП осуществляется по стандартной методике симплекс-метода [41].

При решении задачи ЛП (4.129)—(4.131) могут реализоваться два исхода: либо задача совместна, и тогда искомые значения расходов МПВ определяются как  $Q_m = z_m$ ,  $m = 1, \dots, 11$ ;  $x_3 = z_{12}$ ,  $\Delta S_{\min} = z_{13}$ , либо задача ЛП оказывается несовместной, а именно, ее область допустимых значений пуста (по физическому смыслу задачи неограниченной она оказаться не может).

Пустота допустимой области задачи ЛП означает, что всех наличных ресурсов подземных вод не хватает для покрытия дефицита. При этом, во-первых, фиксируется, что год оказался в результате дефицитным (на единицу увеличивается содержание счетчика дефицитов); во-вторых, необходимо все же каким-то образом распределить нагрузки по МПВ так, чтобы водохозяйственная ситуация в этих условиях была по возможности более легкой. В реализованной версии программы при возникновении такой ситуации МПВ нагружаются согласно принципу наименьшего остаточного дефицита в узлах, соответствующему выражениям (4.104)—(4.109); на основе равенств (4.107) и (4.108) определяются элементы матрицы задачи ЛП для этого случая. Очевидно, эта задача всегда совместна; решается она также с помощью стандартной процедуры симплекс-метода.

В течение 50-ти расчетных лет каждой реализации определяется число дефицитных периодов. Частота отказов в данной реализации определяется выражением (4.110). Осредняя частоты отказов по реализациям, в соответствии с выражением (4.111) получаем оценку вероятности отказов, а по формуле (4.112) — оценку надежности.

Предварительные результаты, полученные с помощью модели Ферганской долины, свидетельствуют о том, что за счет ресурсов подземных вод здесь можно обеспечить добавку к водохозяйственному балансу бассейна Сырдарьи в размере 3—5 км<sup>3</sup>/год при существующих орошаемых площадях, современных значениях кпд оросительных систем и поливных норм. Ожидается также, что учет внутригодового изменения поверхностного стока и водопогребления, а также комплексирование режима отбора подземных вод во внутригодовом разрезе уточнит приведенные выше значения. Рост оценок добавки к водохозяйственному балансу предвидится также в случае учета возможности искусственного пополнения ресурсов подземных вод.

**Кировабад-Казахская равнина.** Другим объектом, для которого проводилось моделирование функционирования системы совместного использования подземных и поверхностных вод и были проделаны соответствующие расчеты, стала Кировабад-Казахская равнина Азербайджана. Особенностью условий равнины, в отличие от Ферганской долины, является то, что водохозяйственные системы на притоках р. Куры расположены в изолированных друг от друга долинах, поэтому линейно-узловая схема системы, изображенная на рис. 4.26, в известной степени условна: для оценки



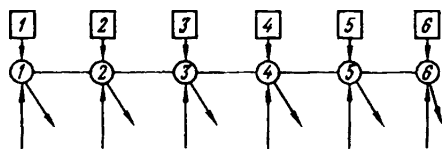


Рис. 4.26. Линейно-узловая схема Кировабад-Казахской равнины.

Цифры в кружках — номера узлов, в квадратах — МПВ: 1 — Акстафа, 2 — Дзегам, 3 — Шамхор, 4 — Гянджачай, 5 — Кюракчай, 6 — Инчаай

надежности функционирования системы следует рассматривать каждую из водохозяйственных систем по отдельности.

На рис. 4.27 изображены расчетные схемы шести МПВ Кировабад-Казахской равнины: Акстафинского, Дзегамчайского, Шамхорского, Гянджинского, Кюракчайского и Инчаайского. Числовые параметры, соответствующие обозначениям рис. 4.27 следующие:

1. Акстафинское МПВ:  $L=18\,000$  м,  $d=10\,500$  м,  $B=40\,000$  м,  $T=190$  м<sup>2</sup>/сут,  $a=2700$  м<sup>2</sup>/сут,  $S_{\text{доп}}=30$  м;

2. Дзегамчайское МПВ:  $L=13\,000$  м,  $d=5100$  м,  $B=40\,000$  м,  $T=730$  м<sup>2</sup>/сут,  $a=10\,500$  м<sup>2</sup>/сут,  $S_{\text{доп}}=70$  м;

3. Шамхорское МПВ,  $L=23\,000$  м,  $d_1=6000$  м,  $d_2=20\,000$  м,  $B_1=10\,000$  м,  $T=610$  м<sup>2</sup>/сут,  $a=8700$  м<sup>2</sup>/сут,  $S_{\text{доп}}=30$  м;

4. Гянджинское МПВ:  $L=38\,000$  м,  $d=19\,000$  м,  $B=18\,000$  м,  $T=370$  м<sup>2</sup>/сут,  $a=5300$  м<sup>2</sup>/сут,  $S_{\text{доп}}=25$  м;

5. Кюракчайское МПВ:  $L=36\,000$  м,  $d=14\,000$  м,  $B=27\,000$  м,  $T=490$  м<sup>2</sup>/сут,  $a=7000$  м<sup>2</sup>/сут,  $S_{\text{доп}}=25$  м;

6. Инчаайское МПВ:  $L=42\,000$  м,  $d_1=22\,000$  м,  $d_2=39\,000$  м,  $T=360$  м<sup>2</sup>/сут,  $a=5100$  м/сут,  $S_{\text{доп}}=25$  м.

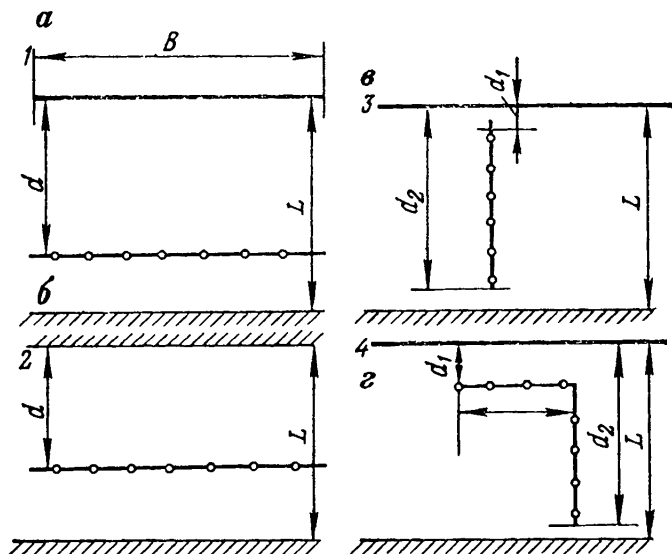


Рис. 4.27. Расчетные схемы месторождений подземных вод Кировабад-Казахской равнины (1—4 — номера схем)

Для расчета гидравлических сопротивлений и функций редукции были использованы следующие выражения, соответствующие схемам на рис. 4.27:

Схема 1

$$R_0 = \frac{L}{B} \left\{ \frac{d}{L} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi (n - 1/2) d/L}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2} e^{-\pi^2 (n - 1/2)^2 at/L^2} \right\}, \quad (4.133)$$

$$w_0 = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi (n - 1/2) d/L}{n - 1/2} e^{-\pi^2 (n - 1/2)^2 at/L^2}. \quad (4.134)$$

Схема 2

$$R_0 = \frac{L}{B} \left\{ \frac{at}{L^2} + \left( \frac{d^2}{L^2} - \frac{d}{L} + \frac{1}{3} \right) - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \pi nd/L}{n^2} e^{-\pi^2 n^2 at/L^2} \right\}, \quad (4.135)$$

$$w_0 = 0.$$

Схема 3

$$U_S = \frac{1}{d_2 - d_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n \sin \pi (n - 1/2) x/L}{\sqrt{\frac{\rho}{a} + \pi^2 (n - 1/2)^2/L^2}}, \quad (4.136)$$

где

$$\varepsilon_n = \frac{\cos \pi (n - 1/2) d_1/L - \cos \pi (n - 1/2) d_2/L}{\pi (n - 1/2)}, \quad (4.137)$$

расчет гидравлических сопротивлений осуществляется по методу Гохберга;

$$w_0 = 1 - \frac{2L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi (n - 1/2) d_1/L - \cos \pi (n - 1/2) d_2/L}{(d_2 - d_1) (n - 1/2)^2} \times \\ \times e^{-(n - 1/2)^2 \pi^2 at/L^2}. \quad (4.138)$$

Схема 4 значения  $R_0$  и  $w_0$  оцениваются как взвешенные средние значений определенных соответственно для параллельного границам участка водозабора и участка, перпендикулярного им, причем веса определяются как  $B_1/(B_1 + d_2 - d_1)$ ;  $d_2 - d_1/(B_1 + d_2 - d_1)$ .

Временные зависимости  $R_0(t)$  для шести МПВ изображены на рис. 4.28, временные зависимости  $w_0(t)$  — на рис. 4.29.

Данные наблюдений за стоком правых притоков Куры на территории Кировабад-Казахской равнины имеются начиная с 1937 г.; статистические характеристики среднегодовых расходов рек таковы:

Река . . .	Актафа	Дзегамчай	Шамкорчай	Гянджачай	Кюракчай	Инчай
$\bar{Q}$ , м <sup>3</sup> /с	10,6	4,65	8,58	4,18	2,90	1,07
$C_{\sigma}$ . . . .	0,36	0,36	0,27	0,23	0,22	0,24

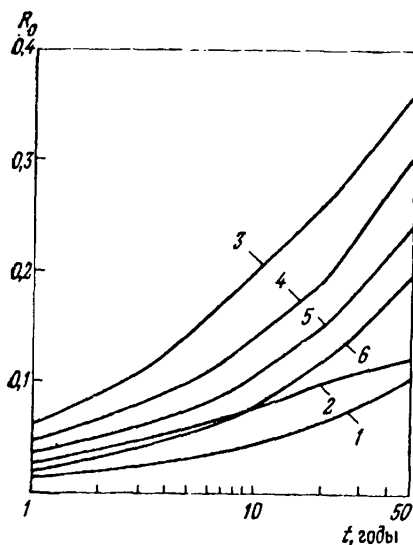


Рис. 4.28. Временные зависимости гидравлических сопротивлений месторождений подземных вод Кировабад-Казахской равнины. Номера кривых — МПВ (см. рис. 4.26)

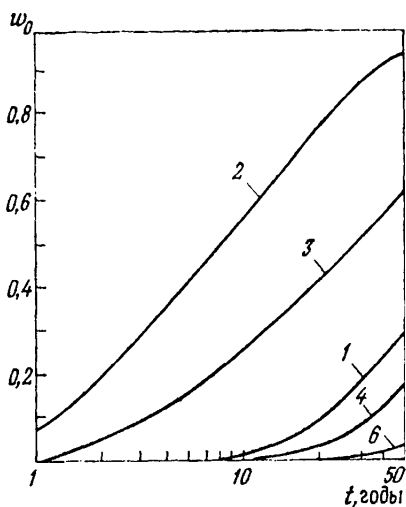


Рис. 4.29. Временные зависимости редукции месторождений подземных вод Кировабад-Казахской равнины. Номера кривых — МПВ (см. рис. 4.26)

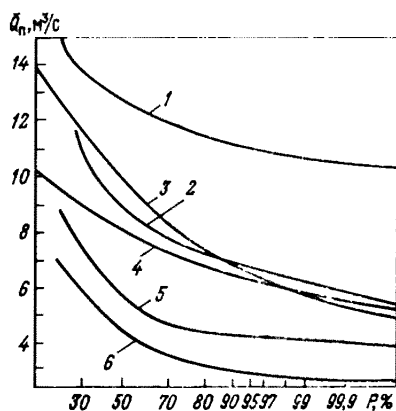
Водопотребление на орошение для водохозяйственных систем притоков р. Куры определялось на основе данных [4]; для получения кривых зависимостей надежности от математического ожидания водопотребления была необходима только оценка величины коэффициента вариации водопотребления; по рекомендациям, приведенным в работе [4], она была принята равной 0,4.

Моделирование случайного процесса функционирования системы совместного использования поверхностных и подземных вод проводилось в целом в соответствии с блок-схемой на рис. 4.25, с той лишь разницей, что в случае одного МПВ в системе отпадают блоки, связанные с формированием матрицы задачи ЛП и ее решением.

Результат расчетов по Кировабад-Казахской равнине — кривые надежности в зависимости от математических ожиданий водопотребления (рис. 4.30). Эти графики показывают, что в режиме совместного использования поверхностных и подземных вод добавка к водохозяйственным балансам оказываются подчас значительно большими, чем соответствующие величины эксплуатационных ресурсов, рассчитанные на срок в 50 лет. В табл. 4.2 приводятся соответствующие данные с учетом сокращения поверхностного стока, вызываемого отбором подземных вод.

Следует отметить, что приведенные выводы относятся к условиям изолированности водохозяйственных систем притоков р. Куры; в настоящее время, после ввода в действие Шамхорского

Рис. 4.30. Зависимости надежности функционирования систем совместного использования для Акстафинского (1), Дзегамского (2), Шамхорского (3), Гянджачайского (4), Кюракчайского (5) и Инчачайского (6) месторождений



машинного канала, по крайней мере, те из систем, что окажутся на подкомандных ему территориях, будут объединены. Поэтому для получения уточненных выводов относительно характеристик функционирования системы необходимо будет провести соответствующие расчеты с учетом изменений в конфигурации линейно-узловой схемы.

Таблица 4.2

**Добавки к водохозяйственным балансам систем на правых притоках Куры в пределах Кировабад-Казахской равнины, в результате совместного использования подземных и поверхностных вод**

Система	$Q_3, \text{ м}^3/\text{с}$	Добавка к балансу (в $\text{м}^3/\text{с}$ ) при величине надежности $P, \%$		
		50	75	90
Акстафа	0,65	1,8	2,6	4,2
Дзегамчай	0,22	3,0	3,8	4,2
Шамхорчай	0,21	0,4	1,0	1,8
Гянджачай	0,29	1,6	1,8	2,2
Кюракчай	0,58	2,7	2,8	3,1
Инчачай	0,50	2,2	2,3	2,4

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Программа 1

#### Обратное преобразование Лапласа по методу Гохберга

00. П С	06. П Д	12. +	18. FLO
01. F 1/X	07. ПП	13. П Д	19. 07
02. П В	08. 24	14. ИП В	20. ИП Д
03. 5	09. К ИП ↑	15. 2	21. С/П
04. П 0	10. ×	16. ×	22. БП
05. 0	11. ИП Д	17. П В	23. 00

Пример подпрограммы:

24. ИП В	25. $F\sqrt{\quad}$	26. / -/	27. $F e^x$	28. В/О
----------	---------------------	----------	-------------	---------

Регистры:

1.  $a_1 = -0,137$ ;
  2.  $a_2 = 2,022$ ;
  3.  $a_3 = -6,122$ ;
  4.  $a_4 = 5,903$ ;
- С.  $t$ ;  
Д.  $F(t)$  — результат.

Инструкция:

1. Ввести текст программы (адреса 00—23).
2. Ввести текст подпрограммы вычисления передаточной функции  $U(p)$  (начиная с адреса 24), причем значение  $p$  подпрограмма должна получать из регистра В; на выходе из подпрограммы на операционном регистре должно находиться значение  $V(p)$  (см. пример подпрограммы).
3. Выполнить В/О, С/П.
4. После останова считать с операционного регистра значение функции-оригинала  $F(t)$ .
5. Для расчета с новым значением  $t$  набрать его на операционном регистре: С/П.

Примечание: Пример подпрограммы составлен для случая  $U(p) = e^{-\sqrt{p}}$ .

## Программа 2

### Вычисление значений функции

$$F(z, \alpha) = \frac{1 - e^{-\alpha^2/4z^2} \operatorname{erfc} z - D(z, \alpha)}{2\alpha^2}$$

00. П О	20. F $x^2$	40. +	60. 2	80. X
01. С/П	21. F	41. 2	61. ÷	81. ИП 3
02. П А	22. ПП	42. ÷	62. ИП А	82. +
03. F $e^x$	23. 71	43. П 7	63. F $x^2$	83. X
04. П В	24. П 8	44. ИП 0	64. ÷	84. ИП 2
05. ИП А	25. ИП 9	45. ПП	65. П 7	85. +
06. 2	26. F $X < 0$	46. 71	66. С/П	86. X
07. ÷	27. 32	47. 1	67. БП	87. ИП 1
08. ИП 0	28. 2	48. —	68. 00	88. +
09. ÷	29. ИП 8	49. П В	69.	89. X
10. П С	30. —	50. ИП С	70.	90. 1
11. ИП 0	31. П 8	51. F $x^2$	71. ↑	91. +
12. +	32. ИП 8	52. /—/	72. ↑	92. F $x^2$
13. ПП	33. ИП В	53. F $e^x$	73. ИП 6	93. F $x^2$
14. 71	34. ÷	54. ИП В	74. X	94. F $x^2$
15. П Д	35. П 8	55. X	75. ИП 5	95. F $x^2$
16. ИП 0	36. ИП В	56. 1	76. +	96. F 1/X
17. ИП С	37. ИП Д	57. +	77. X	97. В/О
18. —	38. X	58. ИП 7	78. ИП 4	
19. П 9	39. ИП 8	59. —	79. +	

### Регистры:

1.  $a_1 = 7,0523078 \cdot 10^{-2}$ ;
2.  $a_2 = 4,2282012 \cdot 10^{-2}$ ;
3.  $a_3 = 9,2705272 \cdot 10^{-3}$ ;
4.  $a_4 = 1,520143 \cdot 10^{-4}$ ;
5.  $a_5 = 2,765672 \cdot 10^{-4}$ ;
6.  $a_6 = 4,30638 \cdot 10^{-5}$ ;
0.  $z$ ;
7.  $F(z, \alpha)$  (результат);
- А.  $\alpha$ .

### Инструкция:

1. Ввести программу.
2. Ввести константы  $a_1$ — $a_6$ .
3. Выполнить В/О; занести на регистр значение  $z$ ; С/П.
4. После останова занести на регистр значение  $\alpha$ ; С/П.
5. Считать с операционного регистра результат—значение  $F(z, \alpha)$ .
6. Для продолжения расчетов вернуться к п. 3 инструкции.

# Вычисление значения функции

$$\Lambda(z, \alpha) = D(z, \alpha) - \frac{2z^2}{\alpha} D^*(z, \alpha)$$

00. П 0	20. F $x^2$	40. ИП 8	60. /—/	80. X
01. С/П	21. F $\sqrt{\quad}$	41. +	61. П Д	81. ИП 3
02. П А	22. ПП	42. 2	62. С/П	82. +
03. F $e^x$	23. 71	43. ÷	63. БП	83. X
04. П В	24. П 8	44. П 7	64. 00	84. ИП 2
05. ИП А	25. ИП 9	45. ИП 8	65.	85.
06. 2	26. F $X < 0$	46. ИП Д	66.	86. X
07. ÷	27. 32	47. —	67.	87. ИП 1
08. ИП 0	28. 2	48. 2	68.	88. +
09. ÷	29. ИП 8	49. ÷	69.	89. X
10. П С	30. —	50. П 8	70.	90. 1
11. ИП 0	31. П 8	51. ИП 0	71. ↑	91. +
12. +	32. ИП 8	52. F $x^2$	72. ↑	92. F $x^2$
13. ПП	33. ИП В	53. X	73. ИП 6	93. F $x^2$
14. 71	34. ÷	54. 2	74. X	94. F $x^2$
15. ПД	35. П 8	55. X	75. ИП 5	95. F $x^2$
16. ИП 0	36. ИП В	56. ИП А	76. +	96. F $1/X$
17. ИП С	37. ИП Д	57. ÷	77. X	97. В/О
18. —	38. X	58. ИП 7	78. ИП 4	
19. П 9	39. П Д	59. —	79. +	

## Регистры:

1.  $a_1=7,0523078 \cdot 10^{-2}$ ;
2.  $a_2=4,2282012 \cdot 10^{-2}$ ;
3.  $a_3=9,2705272 \cdot 10^{-3}$ ;
4.  $a_4=1,520143 \cdot 10^{-4}$ ;
5.  $a_5=2,765672 \cdot 10^{-4}$ ;
6.  $a_6=4,30638 \cdot 10^{-5}$ ;
0.  $z$ ;
7.  $D(z, \alpha)$ ;
8.  $D^*(z, \alpha)$ ;
- А.  $\alpha$ ;
- Д.  $\Lambda(z, \alpha)$ .

## Инструкция:

1. Ввести программу.
2. Ввести константы  $a_1$ — $a_6$ .
3. Выполнить В/О; занести на регистр значение  $z$ ; С/П.
4. После останова занести на регистр значение  $\alpha$ ; С/П.
5. Считать с операционного регистра значение  $\Lambda(z, \alpha)$ —результат. В регистрах 7 и 8 находятся соответственно значения  $D(z, \alpha)$  и  $D^*(z, \alpha)$ .
6. Для продолжения расчетов вернуться к п. 3 инструкции.

## Программа 4

### Вычисление значений функции

$$\Lambda^*(z, \alpha) = \left(1 - \frac{2z^2}{\alpha^2}\right) D^*(z, \alpha) - \frac{2z^2}{\alpha} D(z, \alpha) + \frac{2z}{\alpha \sqrt{\pi}} e^{-\left(z^2 + \frac{\alpha^2}{4z^2}\right)}$$

00. F e <sup>x</sup>	20. 71	40. F x <sup>2</sup>	60. /—/	80. X
01. ПВ	21. П 8	41. F 1/X	61. F e <sup>x</sup>	81. ИП 3
02. ИП А	22. ИП 9	42. П 9	62. ИП С	82. +
03. 2	23. F X<0	43. 2	63. ÷	83. X
04. ÷	24. 29	44. —	64. 4	84. ИП 2
05. ИП 0	25. 2	45. X	65. X	85. +
06. ÷	26. ИП 8	46. ИП 8	66. Fπ	86. X
07. П С	27. —	47. ИП Д	67. F √	87. ИП 1
08. ИП 0	28. П 8	48. +	68. ÷	88. +
09. +	29. ИП 8	49. ИП 9	69. +	89. X
10. ПП	30. ИП В	50. X	70. С/П	90. 1
11. 71	31. ÷	51. ИП А	71. ↑	91. +
12. П Д	32. П 8	52. X	72. ↑	92. F x <sup>2</sup>
13. ИП 0	33. ИП В	53. —	73. ИП 6	93. F x <sup>2</sup>
14. ИП С	34. ИП Д	54. П 7	74. X	94. F x <sup>2</sup>
15. —	35. X	55. ИП С	75. ИП 5	95. F x <sup>2</sup>
16. П9	36. П Д	56. F x <sup>2</sup>	76. +	96. F 1/X
17. F x <sup>2</sup>	37. ИП 8	57. ИП 0	77. X	97. В/О
18. F √	38. —	58. F x <sup>2</sup>	78. ИП 4	
19. ПП	39. ИП С	59. +	79. +	

#### Регистры:

1.  $a_1=7,0523078 \cdot 10^{-2}$ ;
2.  $a_2=4,2282012 \cdot 10^{-2}$ ;
3.  $a_3=9,2705272 \cdot 10^{-3}$ ;
4.  $a_4=1,520143 \cdot 10^{-4}$ ;
5.  $a_5=2,765672 \cdot 10^{-4}$ ;
6.  $a_6=4,30638 \cdot 10^{-5}$ ;
0. z;
- А. α.

#### Инструкция:

1. Ввести программу.
2. Ввести константы  $a_1$ — $a_6$ .
3. Занести значение z в регистр 0; значение α— в регистр А (на операционном регистре должно находиться значение α).
4. Выполнить: В/О, С/П.
5. Считать с операционного регистра учетверенное значение искомой функции —  $4\Lambda^*(z, \alpha)$ .
6. Для продолжения расчетов вернуться к п. 3 инструкции.



**Расчет значений гидравлического сопротивления на линии водозабора в условиях пласта-полосы с двумя границами питания**

00. П 1	16. ИП 1	32. П В	48. ИП 5	64. ИП 7
01. ПП	17. —	33. Fπ	49. ИП 2	65. ×
02. 75	18. /—/	34. ×	50. ×	66. /—/
03. ИП 1	19. ПП	35. П 5	51. F sin	67. ИП А
04. ×	20. 75	36. F x <sup>2</sup>	52. F x <sup>2</sup>	68. +
05. П А	21. ИП А	37. ИП 1	53. ИП 6	69. ИП 3
06. ИП 1	22. ×	38. F x <sup>2</sup>	54. ×	70. ×
07. ИП 2	23. П А	39. +	55. ИП 7	71. П 5
08. ×	24. С/П	40. П 6	56. +	72. С/П
09. ↑	25. П 4	41. ИП 4	57. П 7	73. БП
10. ПП	26. 0	42. ×	58. ИП 6	74. 25
11. 75	27. П В	43. /—/	59. ИП 0	75. F e <sup>x</sup>
12. ИП А	28. П 7	44. F e <sup>x</sup>	60. —	76. ↑
13. ÷	29. ИП В	45. ИП 6	61. F X < 0	77. F 1/X
14. П А	30. 1	46. ÷	62. 29	78. —
15. XV	31. +	47. П 6	63. 2	79. 2
				80. ÷
				81. В/О

**Регистры:**

0. ε (точность расчета);
1.  $\bar{x}$ ;
2.  $\bar{x}_0$ ;
3.  $\bar{L}/\bar{B}$ ;
4.  $\bar{t}$ ;
5.  $R_0(\bar{x}_0, \bar{t})$ ;
- А.  $R_0(\bar{x}_0, \infty) \bar{B}/\bar{L}$ .

**Инструкция:**

1. Ввести программу. Занести на операционный регистр значение  $\bar{x}$ ; выполнить В/О, С/П. После останова на операционном регистре — значение  $R_0(\bar{x}_0, \infty) \bar{B}/\bar{L}$ .

2. Занести на операционный регистр значение  $\bar{t}$ ; С/П. После останова на операционном регистре — значение  $R_0(\bar{x}_0, \bar{t})$ . Для расчета с новым значением  $\bar{t}$  набрать его на операционном регистре; С/П.

## Программа 6

**Расчет значений гидравлического сопротивления на линии водозабора в условиях пласта-полосы с разнородными границами**

00. П 1	18. ИП 1	36. П 5	54. $F e^x$	72. 37
01. ПП	19. —	37. ИП 5	55. ИП 8	73. 2
02. 85	20. /—/	38. 2	56. $\div$	74. ИП 7
03. ИП 1	21. $F e^x$	39. +	57. П 8	75. $\times$
04. $\times$	22. $\uparrow$	40. П 5	58. ИП 6	76. ИП А
05. П А	23. $F 1/X$	41. $F\pi$	59. ИП 2	77. —
06. 1	24. —	42. $\times$	60. $\times$	78. /—/
07. ИП 2	25. 2	43. 2	61. $F \sin$	79. ИП 3
08. —	26. $\div$	44. $\div$	62. $F x^2$	80. $\times$
09. ИП 1	27. ИП А	45. П 6	63. ИП 8	81. П 5
10. $\times$	28. $\times$	46. $F x^2$	64. $\times$	82. С/П
11. $\uparrow$	29. П А	47. ИП 1	65. ИП 7	83. БП
12. ПП	30. С/П	48. $F x^2$	66. +	84. 31
13. 85	31. П 4	49. +	67. П 7	85. $F e^x$
14. ИП А	32. 0	50. П 8	68. ИП 8	86. $\uparrow$
15. $\div$	33. П 7	51. ИП 4	69. ИП 0	87. $F 1/X$
16. П А	34. 1	52. $\times$	70. —	88. +
17. XV	35. /—/	53. /—/	71. $F X < 0$	89. В/О

### Регистры:

0.  $\epsilon$  (точность расчета);
1.  $\chi$ ;
2.  $\bar{x}_0$ ;
3.  $L/B$ ;
4.  $\bar{t}$ ;
5.  $R_0(\bar{x}_0, \bar{t})$ ;
- А.  $R_0(\bar{x}_0, \infty) B/L$ .

### Инструкция:

1. Ввести программу и параметры  $\epsilon$ ,  $\bar{x}_0$ ,  $L/B$  в соответствующие регистры. Занести  $\chi$  на операционный регистр; выполнить В/О, С/П. После останова на операционном регистре —  $R_0(\bar{x}_0, \infty) B/L$ .
2. Занести на операционный регистр значение  $\bar{t}$ ; С/П. После останова на операционном регистре — значение  $R_0(\bar{x}_0, \bar{t})$ . Для расчета с новым значением  $\bar{t}$  набрать его на операционном регистре; С/П.

## Программа 7

**Расчет значений функции редукции в схеме пласта-полосы с двумя границами питания**

00. П4	17. $\times$	34. $+$	51. 60
01. 0	18. $/- /$	35. П А	52. ИП 6
02. П А	19. $F e^x$	36. ИП 6	53. $\div$
03. П В	20. ИП 6	37. ИП 0	54. ИП А
04. ИП В	21. $\div$	38. —	55. —
05. 1	22. 2	39. $F X < 0$	56. П А
06. $+$	23. $\times$	40. 04	57. С/П
07. П В	24. ИП 5	41. ИП 1	58. БП
08. Фл	25. $\times$	42. ПП	59. 00
09. $\times$	26. П 6	43. 60	60. $F e^x$
10. П 5	27. ИП 5	44. П 6	61. $\uparrow$
11. $F x^2$	28. ИП 3	45. 1	62. $F 1/X$
12. ИП 1	29. $\times$	46. ИП 3	63. —
13. $F x^2$	30. $F \sin$	47. —	64. 2
14. $+$	31. ИП 6	48. ИП 1	65. $\div$
15. П 6	32. $\times$	49. $\times$	66. В/О
16. ИП 4	33. ИП А	50. ПП	

### Регистры:

- 0.  $\epsilon$  (точность расчета);
- 1.  $x$ ;
- 3.  $\bar{d}$ ;
- 4.  $\bar{t}$ ;
- А.  $w_0$ .

### Инструкция:

1. Ввести текст программы и параметры в регистры 0—4.
2. Занести значение  $\bar{t}$  на операционный регистр, выполнить В/О, С/П.
3. После останова считать результат — значение  $w_0$ .
4. Для выполнения расчета при другом значении  $\bar{t}$  — вернуться к п. 2 инструкции.

## Программа 8

**Вычисление значений функции редукции для условий отбора подземных вод пласта-полосы с разнородными границами линейным водозабором**

00. П 4	14. 4	28. П 2	42. —	56. ИП 2
01. 0	15. $\div$	29. F Вх	43. F X < 0	57. $\div$
02. П А	16. ИП 1	30. ИП 3	44. 06	58. ИП А
03. 1	17. F $x^2$	31. $\times$	45. ИП 1	59. —
04. /—/	18. +	32. 2	46. ПП	60. П А
05. П В	19. П 5	33. $\div$	47. 64	61. С/П
06. ИП В	20. ИП 4	34. F sin	48. П 2	62. БП
07. 2	21. $\times$	35. ИП 2	49. 1	63. 00
08. +	22. /—/	36. $\times$	50. ИП 3	64. F $e^x$
09. П В	23. F $e^x$	37. ИП А	51. $\times$	65. $\uparrow$
10. Fл	24. ИП 5	38. +	52. ИП 1	66. F 1/X
11. $\times$	25. $\div$	39. П А	53. $\times$	67. +
12. П 2	26. ИП 2	40. ИП 2	54. ПП	68. В/О
13. F $x^2$	27. $\times$	41. ИП 0	55. 64	

### Регистры:

0.  $\varepsilon$  (точность расчета);
1.  $\chi_i$ ;
3.  $\bar{d}$ ;
4.  $\bar{t}$ ;
- А.  $w_0$  (результат).

### Инструкция:

1. Ввести текст программы и параметры в регистры 0—3.
2. Занести на операционный регистр значение  $\bar{t}$ ; выполнить В/О, С/П.
3. После останова на операционном регистре — значение  $w_0$ .
4. Для продолжения расчетов при новом значении  $\bar{t}$  набрать его на операционном регистре; С/П.

## Программа 9

Вычисление значений функции интегральной редукции  
в условиях пласта-полосы с двумя границами питания

00. П 1	20. ИП А	40. С/П	60. $F e^x$	80. $F X < 0$
01. ПП	21. $\times$	41. П 4	61. XV	81. 44
02. 90	22. ИП 2	42. 0	62. $\div$	82. ИП А
03. П А	23. $\times$	43. П В	63. ИП 6	83. ИП 4
04. 1	24. П 6	44. ИП В	64. $\times$	84. $\div$
05. ИП 2	25. ИП 1	45. 1	65. 2	85. ИП 5
06. —	26. ИП 2	46. +	66. $\times$	86. +
07. ИП 1	27. $\times$	47. П В	67. П 7	87. С/П
08. $\times$	28. ПП	48. $F\pi$	68. ИП 6	88. БП
09. ПП	29. 90	49. $\times$	69. ИП 2	89. 41
10. 90	30. ИП 6	50. П 6	70. $\times$	90. $F e^x$
11. ИП А	31. —	51. $F x^2$	71. $F \sin$	91. $\uparrow$
12. $\div$	32. 2	52. ИП 1	72. ИП 7	92. $\uparrow$
13. П 5	33. $\div$	53. $F x^2$	73. $\times$	93. $F 1/X$
14. XV	34. ИП 1	54. +	74. ИП А	94. —
15. $\uparrow$	35. $\div$	55. П 7	75. +	95. 2
16. $F 1/X$	36. ИП А	56. $\uparrow$	76. П А	96. $\div$
17. +	37. $F x^2$	57. ИП 4	77. ИП 7	97. В/О
18. 2	38. $\div$	58. $\times$	78. ИП 0	
19. $\div$	39. ПА	59. /—/	79. —	

### Регистры:

0.  $\epsilon$  (точность расчета);

1.  $\chi$ ;

2.  $\bar{d}$ ;

4.  $\bar{t}$ .

### Инструкция:

1. Ввести программу и параметры в регистры 0 и 2.

2. Исполнить В/О; занести на операционный регистр значение  $\chi$ ; после останова на операционном регистре —  $v_0$ .

3. Занести на операционный регистр значение  $\bar{t}$ ; С/П; после останова на операционном регистре — значение  $v_0(\bar{t})$ .

**Вычисление значений функции интегральной редукции  
в условиях пласта-полосы с разнородными границами**

00. ИП 1	20. $\times$	40. П А	60. $\times$	80. —
01. ПП	21. ИП А	41. П 7	61. /—/	81. F X < 0
02. 89	22. $\times$	42. 1	62. F e <sup>x</sup>	82. 45
03. ПА	23. П 6	43. /—/	63. ИП 6	83. ИП 7
04. 1	24. ИП 1	44. П В	64. F x <sup>2</sup>	84. ИП 4
05. ИП 3	25. ИП 2	45. ИП В	65. ÷	85. ÷
06. —	26. —	46. 2	66. ИП 2	86. ИП 5
07. ИП 1	27. ПП	47. +	67. $\times$	87. +
08. $\times$	28. 89	48. П В	68. П 6	88. С/П
09. П 2	29. F Вх	49. Fπ	69. ИП 2	89. F e <sup>x</sup>
10. ПП	30. ИП 6	50. $\times$	70. ИП Д	90. ↑
11. 89	31. +	51. П 2	71. $\times$	91. ↑
12. F Вх	32. ИП 1	52. F x <sup>2</sup>	72. F sin	92. F 1/X
13. П 6	33. ÷	53. 4	73. ИП 6	93. —
14. $\overline{XY}$	34. 2	54. ÷	74. $\times$	94. 2
15. ИП А	35. ÷	55. ИП	75. ИП 7	95. ÷
16. ÷	36. ИП А	56. F x <sup>2</sup>	76. +	96. —
17. П 5	37. F x <sup>2</sup>	57. +	77. П 7	97. В/О
18. ИП 6	38. ÷	58. П 6	78. ИП 6	
19. ИП 3	39. /—/	59. ИП 4	79. ИП 0	

**Регистры:**

- 0. ε (точность расчета);
- 1. x;
- 3.  $\bar{d}$ ;
- 4.  $\bar{t}$ ;
- 5. γ;
- 7. —v<sub>0</sub>;
- Д. d/2.

**Инструкция:**

- 1. Ввести программу.
- 2. Занести значения параметров в регистры 0÷4 и Д.
- 3. Выполнить В/О, С/П.
- 4. После останова считать с операционного регистра значение v(t).
- 5. Для расчета при новом значении  $\bar{t}$  выполнить следующие действия: набрать на операционном регистре новое значение  $\bar{t}$ ; П4; ИПА; П7; БП; 42; С/П.

**Примечание.** Переключатель Р/Г должен находиться в положении «Р».

Вычисление значений функции  $\Phi_2^*(z; \epsilon; \rho)$

00. П 9	15. ИП Д	30. П А	45. БП	60. ИП 2
01. 0	16. 2	31. ИП 0	46. 00	61. +
02. П А	17. +	32. F $x^2$	47. $\uparrow$	62. $\times$
03. 1	18. П Д	33. F $\sqrt{\quad}$	48. $\uparrow$	63. ИП 1
04. /—/	19. ИП 7	34. ИП С	49. ИП 6	64. +
05. П Д	20. +	35. —	50. $\times$	65. $\times$
06. ИП 8	21. ИП 9	36. F $X < 0$	51. ИП 5	66. 1
07. F $1/X$	22. $\times$	37. 10	52. +	67. +
08. /—/	23. ПП	38. ИП 8	53. $\times$	68. F $x^2$
09. П В	24. 47	39. 1	54. ИП 4	69. F $x^2$
10. ИП В	25. ИП В	40. +	55. +	70. F $x^2$
11. ИП 8	26. $\times$	41. ИП А	56. $\times$	71. F $x^2$
12. $\times$	27. П 0	42. $\times$	57. ИП 3	72. F $1/X$
13. /—/	28. ИП А	43. П А	58. +	73. В/О
14. П В	29. +	44. С/П	59. $\times$	

Регистры:

1.  $a_1 = 7,0523078 \cdot 10^{-2}$ ;
2.  $a_2 = 4,2282012 \cdot 10^{-2}$ ;
3.  $a_3 = 9,2705272 \cdot 10^{-3}$ ;
4.  $a_4 = 1,520143 \cdot 10^{-4}$ ;
5.  $a_5 = 2,765672 \cdot 10^{-4}$ ;
6.  $a_6 = 4,30638 \cdot 10^{-5}$ ;

7.  $\rho$ ;

8.  $\epsilon$ ;

9.  $z$ ;

А.  $\Phi_2^*(z; \epsilon; \rho)$  — результат;

С. Точность расчета (практически достаточно принимать 0,001).

Инструкция:

1. Ввести программу.
2. Ввести константы в регистры 1—6 и значение точности в регистр С.
3. Выполнить В/О; занести на операционный регистр значение  $z$ ; С/П.
4. Считать с операционного регистра результат — значение  $\Phi_2^*$ .
5. Для повторения расчета с новым значением  $z$  набрать его на операционном регистре; С/П.

Вычисление значений функции  $\Phi_2^{**}(z; \epsilon; \rho)$

00. П9	20. +	40. +	60. ИП 2	80. ИП 0
01. 0	21. ИП 9	41. ИП А	61. +	81. X
02. П А	22. X	42. X	62. X	82. П 0
03. 1	23. ПП	43. П А	63. ИП 1	83. F,
04. /—/	24. 47	44. С/П	64. +	84. F,
05. П Д	25. ИП В	45. БП	65. X	85. F $x^2$
06. ИП 8	26. X	46. 00	66. 1	86. /—/
07. F 1/X	27. П 0	47. ↑	67. +	87. F $e^x$
08. /—/	28. ИП А	48. ↑	68. F $x^2$	88. F $\pi$
09. П В	29. +	49. ИП 6	69. F $x^2$	89. F $\sqrt{\quad}$
10. ИП В	30. П А	50. X	70. F $x^2$	90. ÷
11. ИП 8	31. ИП 0	51. ИП 5	71. F $x^2$	91. X
12. X	32. F $x^2$	52. +	72. F 1/X	92. 2
13. /—/	33. F $\sqrt{\quad}$	53. X	73. П 0	93. X
14. П В	34. ИП С	54. ИП 4	74. $\overline{XY}$	94. /—/
15. ИП Д	35. —	55. +	75. $\overline{F} x^2$	95. ИП 0
16. 2	36. F $X < 0$	56. X	76. 2	96. +
17. +	37. 10	57. ИП 3	77. X	97. В/О
18. П Д	38. ИП 8	58. +	78. 1	
19. ИП 7	39. 1	59. X	79. +	

Регистры:

1.  $a_1 = 7,0523078 \cdot 10^{-2}$ ;
2.  $a_2 = 4,2282012 \cdot 10^{-2}$ ;
3.  $a_3 = 9,2705272 \cdot 10^{-3}$ ;
4.  $a_4 = 1,520143 \cdot 10^{-4}$ ;
5.  $a_5 = 2,765672 \cdot 10^{-4}$ ;
6.  $a_6 = 4,30638 \cdot 10^{-5}$ ;
7.  $\rho$ ;
8.  $\epsilon$ ;
9.  $z$ ;
- А.  $\Phi_2^{**}$  — результат;
- С. точность расчета (практически достаточно принимать  $10^{-3}$ ).

Инструкция:

1. Ввести программу.
2. Ввести константы в регистры 1—6, 7, 8, С.
3. В/О; набрать значение  $z$  на операционном регистре; С/П.
4. Считать с операционного регистра значение  $\Phi_2^{**}$ .
5. Для расчета с новым значением  $z$  набрать его на операционном регистре; С/П.



Вычисление значений функции  $\Phi_1^*(z; \varepsilon; \alpha)$

00. П 9	17. +	34. ИП В	51. 58	68. ИП 3
01. 0	18. ИП 9	35. $\times$	52. ИП А	69. +
02. П А	19. $\times$	36. П 0	53. +	70. $\times$
03. П Д	20. ПП	37. ИП А	54. П А	71. ИП 2
04. 1	21. 58	38. +	55. С/П	72. +
05. /—/	22. П 0	39. П А	56. БП	73. $\times$
06. П В	23. F	40. ИП 0	57. 00	74. ИП 1
07. ИП В	24. ИП 7	41. F $x^2$	58. $\uparrow$	75. +
08. ИП 8	25. ИП 9	42. F $\sqrt{\quad}$	59. $\uparrow$	76. $\times$
09. $\times$	26. $\times$	43. ИП С	60. ИП 6	77. 1
10. /—/	27. 2	44. —	61. $\times$	78. +
11. П В	28. $\times$	45. Г X 0	62. ИП 5	79. F $x^2$
12. ИП Д	29. —	46. 07	63. +	80. F $x^2$
13. 2	30. ПП	47. ИП 7	64. $\times$	81. F $x^2$
14. +	31. 58	48. ИП 9	65. ИП 4	82. F $x^2$
15. П Д	32. ИП 0	49. $\times$	66. +	83. F $1/X$
16. ИП 7	33. —	50. ПП	67. $\times$	84. В/0

Регистры:

1.  $a_1=7,0523078 \cdot 10^{-2}$ ;
2.  $a_2=4,2282012 \cdot 10^{-2}$ ;
3.  $a_3=9,2705272 \cdot 10^{-3}$ ;
4.  $a_4=1,520143 \cdot 10^{-4}$ ;
5.  $a_5=2,765672 \cdot 10^{-4}$ ;
6.  $a_6=4,30638 \cdot 10^{-5}$ ;
7.  $\alpha$ ;
8.  $\varepsilon$ ;
9.  $z$ ;
- А.  $\Phi_1^*(z; \varepsilon; \alpha)$ —результат;
- С. точность расчета (практически достаточно принимать  $10^{-3}$ ).

Инструкция:

1. Ввести программу.
2. Ввести константы в регистры 1—6, параметры в регистры 7, 8 и значение точности в регистр С.
3. В/О; набрать на операционном регистре значение  $z$ ; С/П.
4. Считать значение результата —  $\Phi_1^*$  с операционного регистра.
5. Для расчета при новом значении  $z$  набрать его на операционном регистре; С/П.

Вычисление значений функции  $\Phi_1^{**}(z; \varepsilon; \alpha)$

00. ИП В	20. 2	40. —	60. $\times$	80. П С
01. ИП 8	21. $\times$	41. F X < 0	61. ИП 4	81. $\times$
02. $\times$	22. —	42. 00	62. +	82. $\overline{XY}$
03. /—/	23. ПП	43. ИП 7	63. $\times$	83. $\overline{F x^2}$
04. П В	24. 54	44. ИП 9	64. ИП 3	84. /—/
05. ИП Д	25. ИП 0	45. $\times$	65. +	85. F e <sup>c</sup>
06. 2	26. +	46. ПП	66. $\times$	86. F $\pi$
07. +	27. ИП В	47. 54	67. ИП 2	87. F $\sqrt{\quad}$
08. П Д	28. $\times$	48. ИП А	68. +	88. $\div$
09. ИП 7	29. П 0	49. +	69. $\times$	89. $\overline{XY}$
10. +	30. ИП А	50. П А	70. ИП 1	90. —
11. ИП 9	31. +	51. С/П	71. +	91. $\times$
12. $\times$	32. П А	52. БП	72. $\times$	92. 2
13. ПП	33. ИП 0	53. 00	73. 1	93. $\times$
14. 54	34. F x <sup>2</sup>	54. $\uparrow$	74. +	94. /—/
15. П 0	35. F $\sqrt{\quad}$	55. $\uparrow$	75. F x <sup>2</sup>	95. ИП С
16. F	36. 1	56. ИП 6	76. F x <sup>2</sup>	96. +
17. ИП 7	37. ВП	57. $\times$	77. F x <sup>2</sup>	97. В/0
18. ИП 9	38. 3	58. ИП 5	78. F x <sup>2</sup>	
19. $\times$	39. /—/	59. +	79. F 1/X	

Регистры:

1.  $a_1=7,0523078 \cdot 10^{-2}$ ;
2.  $a_2=4,2282012 \cdot 10^{-2}$ ;
3.  $a_3=9,2705272 \cdot 10^{-3}$ ;
4.  $a_4=1,520143 \cdot 10^{-4}$ ;
5.  $a_5=2,765672 \cdot 10^{-4}$ ;
6.  $a_6=4,30638 \cdot 10^{-5}$ ;
7.  $\alpha$ ;
8.  $\varepsilon$ ;
9.  $z$ ;
- А.  $\Phi_1^{**}$  — результат.

Инструкция:

1. Ввести программу, константы  $a_1$ — $a_6$  и параметры  $\alpha$ ,  $\varepsilon$ ,  $z$ .
2. Занести ноль в регистры А и Д; —1 в регистр В.
3. Выполнить В/О; С/П.
4. Считать результат с операционного регистра.
5. Для расчета с новым значением  $z$  вернуться к п. 2.

Примечание. Точность расчета в этой программе равна  $10^{-3}$ . Изменить значение точности можно заменяя число 3 в ячейке 38 программы на другое. Например, выполняя последовательность действий: БП 38; F ПРГ; 4; F АВТ, получим точность  $10^{-4}$ .

Вычисление значений функции  $C_1(z; \epsilon; \alpha)$

00. П 9	19. ПП	38. П А	57. ↑	76. 1
01. 0	20. 57	39. ИП 0	58. ↑	77. +
02. П А	21. П 0	40. F $x^2$	59. ИП 6	78. F $x^2$
03. П Д	22. F ,	41. F $\sqrt{\quad}$	60. X	79. F $x^2$
04. 1	23. ИП 7	42. ИП С	61. ИП 5	80. F $x^2$
05. П В	24. ИП 9	43. —	62. +	81. F $x^2$
06. ИП В	25. X	44. F $X < 0$	63. X	82. F $1/X$
07. ИП 8	26. 2	45. 06	64. ИП 4	83. X
08. X	27. X	46. ИП 7	65. +	84. $\overline{XY}$
09. /—/	28. —	47. ИП 9	66. X	85. F $x^2$
10. П В	29. ПП	48. X	67. ИП 3	86. /—/
11. ИП Д	30. 57	49. ПП	68. +	87. F $e^x$
12. 2	31. ИП 0	50. 57	69. X	88. F $\pi$
13. +	32. +	51. ИП А	70. ИП 2	89. F $\sqrt{\quad}$
14. П Д	33. ИП В	52. +	71. +	90. $\div$
15. ИП 7	34. X	53. П А	72. X	91. $\overline{XY}$
16. +	35. П 0	54. С/П	73. ИП 1	92. —
17. ИП 9	36. ИП А	55. БП	74. +	93. В/0
18. X	37. +	56. 00	75. X	

Регистры:

1.  $a_1=7,0523078 \cdot 10^{-2}$ ;
2.  $a_2=4,2282012 \cdot 10^{-2}$ ;
3.  $a_3=9,2705272 \cdot 10^{-3}$ ;
4.  $a_4=1,520143 \cdot 10^{-4}$ ;
5.  $a_5=2,765672 \cdot 10^{-4}$ ;
6.  $a_6=4,30638 \cdot 10^{-5}$ ;
7.  $\alpha$ ;
8.  $\epsilon$ ;
9.  $z$ ;
- А.  $C_1$  — результат;
- С. точность расчета.

Инструкция:

1. Ввести текст программы, константы, значение точности расчета и параметры  $\alpha$ ,  $\epsilon$ .
2. Занести на операционный регистр значение  $z$ .
3. Выполнить В/О, С/П.
4. Считать значение результата с операционного регистра.
5. Для выполнения расчета с другим значением  $z$  набрать его на операционном регистре; С/П.

Вычисление значений функции  $12C_1^*(z; \varepsilon; \alpha)$

00. ИП В	20. 2	40. —	60. $\times$	80. /—/
01. ИП 8	21. $\times$	41. $F X < 0$	61. ИП 3	81. $F e^x$
02. $\times$	22. —	42. 00	62. +	82. $F \pi$
03. /—/	23. ПП	43. ИП 7	63. $\times$	83. $F \sqrt{\phantom{x}}$
04. П В	24. 51	44. ИП 9	64. ИП 2	84. $\div$
05. ИП Д	25. ИП 0	45. $\times$	65. +	85. П С
06. 2	26. +	46. ПП	66. $\times$	86. $\overline{XY}$
07. +	27. ИП В	47. 51	67. ИП 1	87. —
08. П Д	28. $\times$	48. ИП А	68. +	88. $\overline{XY}$
09. ИП 7	29. П 0	49. +	69. $\times$	89. $\overline{F} x^2$
10. +	30. ИП А	50. С/П	70. 1	90. 2
11. ИП 9	31. +	51. $\uparrow$	71. +	91. $\times$
12. $\times$	32. П А	52. $\uparrow$	72. $F x^2$	92. 3
13. ПП	33. ИП 0	53. ИП 6	73. $F x^2$	93. +
14. 51	34. $F x^2$	54. $\times$	74. $F x^2$	94. $\times$
15. П 0	35. $F \sqrt{\phantom{x}}$	55. ИП 5	75. $F x^2$	95. ИП С
16. F	36. 1	56. +	76. $F 1/X$	96. —
17. ИП 7	37. ВП	57. $\times$	77. $\times$	97. В/0
18. ИП 9	38. 3	58. ИП 4	78. $\overline{XY}$	
19. $\times$	39. /—/	59. +	79. $\overline{F} x^2$	

Регистры:

1.  $a_1=7,0523078 \cdot 10^{-2}$ ;
2.  $a_2=4,2282012 \cdot 10^{-2}$ ;
3.  $a_3=9,2705272 \cdot 10^{-3}$ ;
4.  $a_4=1,520143 \cdot 10^{-4}$ ;
5.  $a_5=2,765672 \cdot 10^{-4}$ ;
6.  $a_6=4,30638 \cdot 10^{-5}$ ;
7.  $\alpha$ ;
8.  $\varepsilon$ ;
9.  $z$ .

Инструкция:

1. Ввести программу.
2. Ввести константы  $a_1$ — $a_6$ , параметры  $\alpha$ ,  $\varepsilon$ ,  $z$ .
3. Занести нуль в регистры А и Д; единицу в регистр В.
4. Выполнить В/О; С/П.
5. После останова считать результат с операционного регистра.
6. Для выполнения нового расчета вернуться к п. 2 настоящей инструкции.

Вычисление значений функции  $C_2(z; \epsilon; \rho)$

00. П 9	18. П Д	36. F $X < 0$	53. /—/	71. ИП 3
01. 0	19. ИП 7	37. 10	54. F $e^x$	72. +
02. П А	20. +	38. ИП 8	55. F $\pi$	73. $\times$
03. 1	21. ИП 9	39. 1	56. F $\sqrt{\quad}$	74. ИП 2
04. /—/	22. $\times$	40. +	57. $\div$	75. +
05. П Д	23. ПП	41. ИП А	58. ИП 0	76. $\times$
06. ИП 8	24. 47	42. $\times$	59. —	77. ИП 1
07. F $1/X$	25. ИП В	43. П А	60. В/0	78. +
08. /—/	26. $\times$	44. С/П	61. $\uparrow$	79. $\times$
09. П В	27. П 0	45. БП	62. $\uparrow$	80. 1
10. ИП В	28. ИП А	46. 00	63. ИП 6	81. +
11. ИП 8	29. +	47. ПП	64. $\times$	82. F $x^2$
12. $\times$	30. П А	48. 61	65. ИП 5	83. F $x^2$
13. /—/	31. ИП 0	49. $\times$	66. +	84. F $x^2$
14. П В	32. F $x^2$	50. П 0	67. $\times$	85. F $x^2$
15. ИП Д	33. F $\sqrt{\quad}$	51. $\overline{XY}$	68. ИП 4	86. F $1/X$
16. 2	34. ИП С	52. F $x^2$	69. +	87. В/0
17. +	35. —		70. $\times$	

Регистры:

1.  $a_1=7,0523078 \cdot 10^{-2}$ ;
2.  $a_2=4,2282012 \cdot 10^{-2}$ ;
3.  $a_3=9,2705272 \cdot 10^{-3}$ ;
4.  $a_4=1,520143 \cdot 10^{-4}$ ;
5.  $a_5=2,765672 \cdot 10^{-4}$ ;
6.  $a_6=4,30638 \cdot 10^{-5}$ ;
7.  $\rho$ ;
8.  $\epsilon$ ;
9.  $z$ ;

А.  $C_2$  — результат;

С. Точность расчета (практически достаточно принимать 0,0005).

Инструкция:

1. Ввести программу.
2. Ввести параметры  $\rho$ ,  $\epsilon$  в регистры 7 и 8; константы  $a_1$ — $a_6$  в регистры 1—6.
3. В/О; набрать значение  $z$  на операционном регистре; С/П.
4. После останова считать результат с операционного регистра.
5. Для повторения расчета с новым значением  $z$  набрать его на операционном регистре; С/П.

Вычисление значений функции  $12C_2^*(z; \epsilon; \rho)$

00. 1	20. ПП	40. П А	60. $\times$	79. П 0
01. /—/	21. 42	41. С/П	61. 1	80. $\overline{XY}$
02. П Д	22. ИП В	42. $\uparrow$	62. +	81. 1
03. ИП 8	23. $\times$	43. $\uparrow$	63. F $x^2$	82. —
04. F 1/X	24. П 0	44. ИП 6	64. F $x^2$	83. $\uparrow$
05. /—/	25. ИП А	45. $\times$	65. F $x^2$	84. $\uparrow$
06. П В	26. +	46. ИП 5	66. F $x^2$	85. 2
07. ИП В	27. П А	47. +	67. F 1/X	86. $\div$
08. ИП 8	28. ИП 0	48. $\times$	68. П 0	87. 1
09. $\times$	29. F $x^2$	49. ИП 4	69. $\overline{XY}$	88. —
10. /—/	30. F $\sqrt{-}$	50. +	70. F $x^2$	89. /—/
11. П В	31. ИП С	51. $\times$	71. 2	90. F $e^x$
12. ИП Д	32. —	52. ИП 3	72. $\times$	91. F $\pi$
13. 2	33. F $X < 0$	53. +	73. 3	92. F $\sqrt{-}$
14. +	34. 07	54. $\times$	74. +	93. $\div$
15. П Д	35. ИП 8	55. ИП 2	75. $\uparrow$	94. $\frac{\times}{\times}$
16. ИП 7	36. 1	56. +	76. F	95. $\overline{XY}$
17. +	37. +	57. $\times$	77. $\times$	96. —
18. ИП 9	38. ИП А	58. ИП 1	78. $\times$	97. B/0
19. $\times$	39. $\times$	59. +		

Регистры:

1.  $a_1=7,0523078 \cdot 10^{-2}$ ;
2.  $a_2=4,2282012 \cdot 10^{-2}$ ;
3.  $a_3=9,2705272 \cdot 10^{-3}$ ;
4.  $a_4=1,520143 \cdot 10^{-4}$ ;
5.  $a_5=2,765672 \cdot 10^{-4}$ ;
6.  $a_6=4,30638 \cdot 10^{-5}$ ;
7.  $\rho$ ;
8.  $\epsilon$ ;
9.  $z$ ;

А.  $12C_2^*$  — результат;

С. Точность расчета.

Инструкция:

1. Ввести текст программы.
2. Ввести константы  $a_1$ — $a_6$  в регистры 1—6; параметры  $\rho$ ,  $\epsilon$ ,  $z$  в регистры 7, 8, 9; точность в регистр С.
3. Занести нуль в регистр А.
4. Выполнить В/О, С/П.
5. После останова на операционном регистре — значение  $C_2^*$ ; для получения искомого  $C_2^*$  произвести деление на 12 вручную.
6. Для расчета с новым значением  $z$  вернуться к п. 2 инструкции.

**Вычисление значений функции  $M^*$  ( $\alpha$ ,  $\beta$ ) с помощью квадратурной формулы Гаусса**

00. ИП А	12. 44	24. +	36. $\times$	48. ИП В
01. F $x^2$	13. П 8	25. П 7	37. F $\pi$	49. $\times$
02. 4	14. 2	26. К ИП 7	38. $\div$	50. /—/
03. $\div$	15. ИП 7	27. ИП 8	39. ИП В	51. F $e^x$
04. П С	16. —	28. $\times$	40. F $e^x$	52. $\overline{XY}$
05. 0	17. ПП	29. ИП 9	41. $\div$	53. 1
06. П 9	18. 44	30. +	42. П 9	54. +
07. 3	19. ИП 8	31. П 9	43. С/П	55. $\div$
08. П 0	20. +	32. F L0	44. F $x^2$	56. В/0
09. К ИП $\uparrow$	21. П 8	33. 09	45. ИП С	
10. П 7	22. ИП 0	34. ИП 9	46. $\times$	
11. ПП	23. 3	35. ИП А	47. $\uparrow$	

**Регистры:**

1.  $6,75305 \cdot 10^{-2}$ ;
2.  $3,387907 \cdot 10^{-1}$ ;
3.  $7,613809 \cdot 10^{-1}$ ;
4.  $1,713244 \cdot 10^{-1}$ ;
5.  $3,607615 \cdot 10^{-1}$ ;
6.  $4,679139 \cdot 10^{-1}$ ;
9.  $M^*$  (результат).

А.  $\alpha$ ;

В.  $\beta$ .

**Инструкция:**

1. Ввести программу и константы в регистры 1—6.
2. Ввести параметры  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно в регистры А и В.
3. Выполнить В/О; С/П.
4. После останова считать с операционного регистра значение  $M^*(\alpha, \beta)$ .
5. Для выполнения нового расчета с другими параметрами вернуться к п. 2 инструкции.

Примечание. Время расчета — около 75 с.

**Расчет частотных характеристик понижения для площадного водозабора в неограниченном однородном пласте**

00. ИП 0	17. ИП Д	34. ИП 3	51. $F x^2$	68. П 8
01. ИП А	18. $\times$	35. $\times$	52. ИП 6	69. ИП 7
02. ИП С	19. П 3	36. ИП 1	53. $F x^2$	70. ИП 6
03. ИП С	20. ИП 2	37. $\times$	54. +	71. $\div$
04. $F x^2$	21. 2	38. П 5	55. $F \sqrt{\quad}$	72. $F \arctg$
05. $\div$	22. $\div$	39. $F \cos$	56. ИП Д	73. /—/
06. П 2	23. П 5	40. ИП 4	57. $\times$	74. ИП 2
07. $F x^2$	24. ИП 3	41. $\times$	58. 2	75. +
08. 1	25. ИП 3	42. 1	59. $\div$	76. $F \pi$
09. +	26. $\times$	43. —	60. ИП В	77. $\div$
10. $F \sqrt{\quad}$	27. ИП 1	44. /—/	61. $\div$	78. 1
11. $F \sqrt{\quad}$	28. $\times$	45. П 6	62. ИП 3	79. 8
12. П 1	29. /—/	46. ИП 5	63. $F x^2$	80. 0
13. ИП 2	30. $F e^x$	47. $F \sin$	64. $\div$	81. $\times$
14. $F \arctg$	31. П 4	48. ИП 4	65. ИП 1	82. П 9
15. П 2	32. ИП 5	49. $\times$	66. $F x^2$	83. С/П
16. ИП С	33. $F \sin$	50. П 7	67. $\div$	

**Регистры:**

- А.  $a$ , м<sup>2</sup>/сут;
- В.  $B$ , м;
- С.  $g$ , м<sup>-1</sup>;
- Д.  $d$ , м;
- 0.  $\omega$ , сут<sup>-1</sup>;
- 8.  $R$ ;
- 9.  $\Psi^\circ$ .

**Инструкция:**

1. Ввести текст программы.
2. Поставить переключатель Р/Г в положение «Р».
3. Ввести значения  $a$ ,  $B$ ,  $g$ ,  $d$ ,  $\omega$  в соответствующие регистры.
4. Выполнить В/О; С/П.
5. После останова на операционном регистре находится значение  $\Psi$  в градусах. Для вызова значения  $R$  исполнить ИП 8.
6. Для выполнения нового расчета вернуться к п. 3 инструкции.



## Программа 21

Расчет значений периодической функции, заданной разложением

$$y(t) = y_0 + \sum_{n=1}^3 y_n \cos(nt - \varphi_n).$$

00. П В	05. ИП 0	10. ИП В	15. X	20. +
01. ИП С	06. 3	11. X	16. F cos	21. П А
02. П А	07. +	12. К ИП Д	17. К ИП ↑	22. F L0
03. 3	08. П Д	13. —	18. X	23. 05
04. П 0	09. ИП 0	14. ИП 7	19. ИП А	24. ИП А
				25. С/П

Регистры:

1.  $y_1$ ;
2.  $y_2$ ;
3.  $y_3$ ;
4.  $\varphi_1^\circ$ ;
5.  $\varphi_2^\circ$ ;
6.  $\varphi_3^\circ$ ;
7. Константа 0,017453;
- С.  $y_0$ ;
- А.  $y(t)$  — результат.

Инструкция.

1. Ввести программу. Перевести переключатель Р/Г в положение «Р».
2. Ввести параметры  $y_0$ ,  $y_n$ ,  $\varphi_n$  (в градусах) в соответствующие регистры.
3. Выполнить В/О. Занести на операционный регистр значение  $t$  в сутках. Выполнить С/П.
4. После останова считать с операционного регистра значение  $y(t)$ .
5. Для выполнения расчета с другим значением  $t$  занести его на операционный регистр, выполнить С/П.

# Нахождение максимума функции

$$y(t) = \sum_{n=1}^3 y_n \cos(nt - \varphi_n).$$

00. ПВ	12. ИП 9	23. ИП 9	35. П 0	47. F cos
01. —	13. —	24. F x <sup>2</sup>	36. ИП 0	48. К ИП ↑
02. П 9	14. П В	25. F √	37. 3	49. ×
03. 9	15. ПП	26. ИП 8	38. +	50. ИП А
04. F 10*	16. 32	27. —	39. П Д	51. +
05. П С	17. ИП С	28. F X < 0	40. ИП 0	52. П А
06. ИП 9	18. $\overline{XY}$	29. 11	41. ИП В	53. F L0
07. 3	19. П С	30. ИП В	42. ×	54. 36
08. ÷	20. —	31. С/П	43. К ИП Д	55. ИП А
09. /—/	21. F X ≥ 0	32. 0	44. —	56. /—/
10. П 9	22. 06	33. П А	45. ИП 7	57. В/О
11. ИП В		34. 3	46. ×	

## Регистры:

1.  $y_1$ ;
2.  $y_2$ ;
3.  $y_3$ ;
4.  $\varphi_1^\circ$ ;
5.  $\varphi_2^\circ$ ;
6.  $\varphi_3^\circ$ ;
7. Константа 0,017453;
8. Точность вычисления времени максимума, сут;
9. Время максимума, сут;
- А. Максимальное значение функции  $y(t)$ .

## Инструкция:

1. Ввести программу. Перевести переключатель Р/Г в положение «Р».
2. Ввести параметры  $y_n$ ,  $\varphi_n$  в соответствующие регистры; константу в регистр 7 и точность в регистр 8.
3. Выполнить:  $t_2 \uparrow t_1$ ; В/О, С/П, где  $t_1$ ,  $t_2$  — значения времени (в сут), ограничивающие максимум  $y(t)$  соответственно слева и справа.
4. После останова на операционном регистре находится значение времени максимума функции  $y(t)$ . Максимальное значение самой функции — в регистре А.

**Расчет частотных характеристик понижения в условиях плановой фильтрационной неоднородности**

00. ИП 1	12. $F e^x$	24. П 0	36. П А	48. 1
01. ИП 3	13. ИП 4	25. 2	37. ИП 0	49. 8
02. $\div$	14. $\times$	26. $\times$	38. 1	50. 0
03. $F \sqrt{\quad}$	15. П 8	27. ИП 9	39. $+$	51. $\times$
04. П 6	16. $F x^2$	28. $+$	40. П 0	52. $F \pi$
05. 2	17. 1	29. $F \sqrt{\quad}$	41. ИП 7	53. $\div$
06. $F \sqrt{\quad}$	18. $+$	30. 2	42. $F \sin$	54. 4
07. $\times$	19. П 9	31. $\div$	43. ИП 8	55. 5
08. ИП 2	20. ИП 7	32. ИП 5	44. $\times$	56. $+$
09. $\times$	21. $F \cos$	33. $\div$	45. ИП 0	57. П В
10. П 7	22. ИП 8	34. ИП 6	46. $\div$	58. С/П
11. $/- /$	23. $\times$	35. $\div$	47. $F \arctg$	

**Регистры:**

1.  $\omega$ , сут<sup>-1</sup>;
2.  $\bar{d}$ , м;
3.  $a_2$ , м<sup>2</sup>/сут;
4.  $\epsilon$ ;
5.  $B$ , м;
- А.  $R$ ;
- В.  $\Psi^\circ$ .

**Инструкция:**

1. Ввести текст программы.
2. Занести параметры  $\omega$ ,  $d$ ,  $a_2$ ,  $B$ ,  $\epsilon$  в регистры 1—5.
3. Выполнить В/О, С/П.
4. После останова на операционном регистре — значение  $\Psi$  (в градусах). Значение  $R$  — в регистре А.
5. Для нового расчета вернуться к п. 2 инструкции.

**Расчет частотных характеристик редукции для пласта-полосы с двумя границами питания**

00. ИП 1	20. ИП 4	40. 51	60. ИП 7	80. $F X < 0$
01. $F x^2$	21. $\times$	41. ИП Д	61. $F \cos$	81. 88
02. ИП 2	22. П 6	42. ИП В	62. $\times$	82. ИП В
03. $F x^2$	23. ПП	43. —	63. П 8	83. $F \pi$
04. +	24. 51	44. П Д	64. ИП 7	84. +
05. $F \sqrt{-}$	25. П Д	45. ИП А	65. $F \sin$	85. П В
06. $F \sqrt{-}$	26. ИП А	46. ИП С	66. ИП 9	86. БП
07. П 4	27. П С	47. ÷	67. $\times$	87. 97
08. ИП 2	28. 1	48. $F \sqrt{-}$	68. П 9	88. ИП 9
09. ИП 1	29. ИП 3	49. П С	69. $F x^2$	89. $F X < 0$
10. ÷	30. —	50. С/П	70. ИП 8	90. 97
11. $F \arctg$	31. ↑	51. $F e^x$	71. $F x^2$	91. ИП В
12. 2	32. ↑	52. ↑	72. +	92. $F \pi$
13. ÷	33. ИП 7	53. ↑	73. П А	93. +
14. П 5	34. $\times$	54. $F 1/X$	74. ИП 9	94. $F \pi$
15. $F \sin$	35. П 7	55. +	75. ИП 8	95. +
16. $\times$	36. $\bar{X}\bar{Y}$	56. 2	76. ÷	96. П В
17. П 7	37. $\bar{Y}\bar{P}$ 6	57. ÷	77. $F \arctg$	97. В/О
18. ИП 5	38. $\times$	58. П 9	78. П В	
19. $F \cos$	39. ПП	59. —	79. ИП 8	

**Регистры:**

1.  $\chi^2$ ;
2.  $\bar{\omega} = \omega L^2/a$ ;
3.  $\bar{d} = d/L$ ;
- С.  $\omega(\omega)$ ;
- Д.  $\psi(\omega)$ .

**Инструкция:**

1. Ввести текст программы.
2. Занести значения параметров в регистры 1—3, выполнить В/О, С/П.
3. После остановка: на операционном регистре —  $\omega$ ; в регистре С —  $\omega$ ; в регистре Д —  $\psi$ .

**Расчет частотной характеристики редукции  
для пласта-полосы с разнородными границами**

00. ИП 1	20. ИП 4	40. 51	60. ИП 7	80. $F X < 0$
01. $F x^2$	21. $\times$	41. ИП Д	61. $F \sin$	81. 88
02. ИП 2	22. П 6	42. ИП В	62. $\times$	82. ИП В
03. $F x^2$	23. ИП	43. —	63. П 9	83. $F \pi$
04. +	24. 51	44. П Д	64. ИП 7	84. +
05. $F \sqrt{\quad}$	25. П Д	45. ИП А	65. $F \cos$	85. П В
06. $F \sqrt{\quad}$	26. ИП А	46. ИП С	66. ИП 8	86. БП
07. П 4	27. П С	47. ÷	67. $\times$	87. 97
08. ИП 2	28. 1	48. $F \sqrt{\quad}$	68. П 8	88. ИП 9
09. ИП 1	29. ИП 3	49. П С	69. $F x^2$	89. $F X < 0$
10. ÷	30. —	50. С/П	70. ИП 9	90. 97
11. $F \arctg$	31. ↑	51. $F e^x$	71. $F x^2$	91. ИП В
12. 2	32. ↑	52. ↑	72. +	92. $F \pi$
13. ÷	33. ИП 7	53. ↑	73. П А	93. +
14. П 5	34. $\times$	54. $F 1/X$	74. ИП 9	94. $F \pi$
15. $F \sin$	35. П 7	55. +	75. ИП 8	95. +
16. $\times$	36. $\overline{XY}$	56. 2	76. ÷	96. П В
17. П 7	37. $\overline{ИП}$ 6	57. ÷	77. $F \arctg$	97. В/О
18. ИП 5	38. $\times$	58. П 8	78. П В	
19. $F \cos$	39. ПП	59. —	79. ИП 8	

**Регистры:**

1.  $x^2$ ;
2.  $\overline{\omega} = \omega L^2/a$ ;
3.  $\overline{d} = d/L$ ;
- С.  $\omega(\omega)$ ;
- Д.  $\psi(\omega)$ .

**Инструкция:**

1. Ввести текст программы.
2. Занести значения параметров в регистры 1—3, выполнить В/О, С/П.
3. После останова: на операционном регистре —  $\omega$ ; в регистре С —  $\omega$ ; в регистре Д —  $\psi$ .

Вычисление функции  $I(z, \alpha)$  по методу Гаусса

00. ИП А	12. К ИП ↑	24. ÷	36. ×	48. $\overline{XY}$
01. F $x^2$	13. 1	25. ПП	37. П 7	49. ИП В
02. 4	14. +	26. 43	38. +	50. ×
03. ÷	15. 2	27. ИП 8	39. П 9	51. +
04. П В	16. ÷	28. +	40. F L0	52. /—/
05. ИП С	17. ПП	29. П 8	41. 12	53. F $e^x$
06. F $1/X$	18. 43	30. ИП 0	42. С/П	54. $\overline{XY}$
07. П Д	19. П 8	31. 3	43. ↑	55. ÷
08. 0	20. 1	32. +	44. ИП Д	56. В/О
09. П 9	21. К ИП ↑	33. П 7	45. ×	
10. 3	22. —	34. К ИП 7	46. ↑	
11. П 0	23. 2	35. ИП 8	47. F $1/X$	

Регистры:

1.  $9,324695 \cdot 10^{-1}$ ;
2.  $6,612093 \cdot 10^{-1}$ ;
3.  $2,386192 \cdot 10^{-1}$ ;
4.  $8,56622 \cdot 10^{-2}$ ;
5.  $1,8038075 \cdot 10^{-1}$ ;
6.  $2,3395695 \cdot 10^{-1}$ ;
- А.  $\alpha$ ;
- С.  $z$ ;
9.  $I(z, \alpha)$  — результат.

Инструкция:

1. Ввести программу.
2. Ввести константы в регистры 1—6; параметры  $\alpha$  и  $z$  в регистры А и С соответственно.
3. Выполнить: В/О, С/П.
4. Через 1,5 мин на операционном регистре — результат —  $I(z, \alpha)$ .
5. Для повторения расчета с новыми значениями  $z$  или  $\alpha$  ввести их в соответствующие регистры; вернуться к п. 3 инструкции.

Вычисление значений функции  $I(z, \alpha)$  разложением в ряд

$$I(z, \alpha) = E_1(z) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\alpha^2}{4z} \right)^n E_{n+1}(z),$$

где  $E_{n+1}(z) = (e^{-z} - zE_n(z))/n$ ,  $E_1(z) = -Ei(-z)$ .

00. П 0	19. ИП 3	38. $\times$	57. 0	76. ИП 2
01. /—/	20. 1	39. $\uparrow$	58. П 3	77. +
02. F $e^x$	21. +	40. ИП 5	59. ИП 3	78. П2
03. П Д	22. П 3	41. +	60. 1	79. ИП 9
04. ПП	23. ИП 8	42. П 5	61. +	80. F $x^2$
05. 51	24. ИП 7	43. $\overline{XY}$	62. П 3	81. ИП 4
06. П 5	25. $\times$	44. F $x^2$	63. $\uparrow$	82. —
07. П 6	26. /—/	45. ИП 4	64. ИП 9	83. F $X < 0$
08. ИП А	27. П 8	46. —	65. $\times$	84. 59
09. F $x^2$	28. ИП 0	47. F $X < 0$	66. $\overline{XY}$	85. $\overline{XY}$
10. 4	29. ИП 6	48. 19	67. 1	86. ИП 0
11. $\div$	30. $\times$	49. ИП 5	68. +	87. F ln
12. ИП 0	31. ИП Д	50. С/П	69. F $x^2$	88. +
13. $\div$	32. —	51. ИП 0	70. F 1/X	89. /—/
14. П 7	33. ИП 3	52. /—/	71. $\times$	90. В/О
15. 1	34. $\div$	53. П 9	72. ИП 0	
16. П 8	35. /—/	54. ИП 1	73. $\times$	
17. 0	36. П 6	55. +	74. /—/	
18. П 3	37. ИП 8	56. П 2	75. П 9	

Регистры:

0. z;
1. Константа  $5,7721566 \cdot 10^{-1}$ ;
4.  $\epsilon^2$  — квадрат точности расчета;
5.  $I(z, \alpha)$  — результат;
- А.  $\alpha$ .

Инструкция:

1. Ввести программу.
2. Ввести константу Эйлера в регистр 1, квадрат точности расчета в регистр 4, значение  $\alpha$  — в регистр А.
3. Выполнить В/О.
4. Занести на операционный регистр значение z, выполнить С/П.

5. После останова на операционном регистре — результат,  $I(z, \alpha)$ .

6. Для расчета с новым значением  $z$  набрать его на операционном регистре, вернуться к п. 3 инструкции.

Примечание. В основу программы положен сходящийся ряд, поэтому теоретически результат может быть получен для любых значений  $z$  и  $\alpha$  и с любой необходимой точностью. Необходимо, однако, иметь в виду, что время расчета оценивается по следующей прикидочной зависимости:  $t \approx 30z + 130 \exp(\alpha^2/4z) - 100$  (с), так что при слишком больших значениях  $z$  или  $\alpha^2/4z$  расчет может занять недопустимо много времени.



## Программа 28

### Вычисление значений функции $I_0(z)$

00. П С	07. 1	14. F $x^2$	21. ИП Д	28. 10
01. F $x^2$	08. П А	15. F $1/X$	22. +	29. ИП Д
02. 4	09. П Д	16. ИП А	23. П Д	30. С/П
03. ÷	10. ИП 8	17. X	24. ИП А	31. БП
04. П В	11. 1	18. ИП В	25. ИП 9	32. 00
05. 0	12. +	19. X	26. —	
06. П 8	13. П 8	20. П А	27. F $X < 0$	

### Регистры:

- 9.  $\varepsilon$  — точность расчета;
- С.  $z$ ;
- Д.  $I_0(z)$  — результат.

### Инструкция:

1. Ввести программу.
2. На операционном регистре выбрать значение  $z$ .
3. Выполнить В/О; С/П.
4. После останова на операционном регистре — значение  $I_0(z)$ .
5. Для выполнения расчета с новым значением  $z$  набрать его на операционном регистре; вернуться к п. 3 инструкции.

Примечание. Время расчета оценивается по прикидочной формуле  $t \approx 30 \sqrt{z} + 10$  с (при  $\varepsilon = 10^{-4}$ ).

Вычисление значений модифицированной функции Бесселя  $I_0(z)$  и функции Макдональда  $K_0(z)$  по их разложениям в ряды

00. П С	11. П Д	22. $\times$	33. $\uparrow$	44. F ln
01. F $x^2$	12. ИП 8	23. П А	34. ИП 1	45. ИП 2
02. 4	13. 1	24. ИП Д	35. +	46. +
03. $\div$	14. +	25. +	36. П 1	47. ИП Д
04. П В	15. П 8	26. П Д	37. $\overline{XY}$	48. $\times$
05. 0	16. F $1/X$	27. $\overline{XY}$	38. ИП 9	49. /—/
06. П 8	17. $\uparrow$	28. ИП 4	39. $FX < 0$	50. ИП 1
07. П 4	18. F $x^2$	29. +	40. 12	51. +
08. П 1	19. ИП А	30. П 4	41. ИП С	52. П 1
09. 1	20. $\times$	31. ИП А	42. 2	53. С/П
10. П А	21. ИП В	32. $\times$	43. $\div$	54. БП
				55. 00

Регистры:

1.  $K_0(z)$  — результат;
2.  $C=0,57721566$  — константа Эйлера;
9.  $\epsilon$  — точность расчетов;
- Д.  $I_0(z)$  — результат.

Инструкция:

1. Ввести программу, точность расчетов в регистр 9 и константу Эйлера в регистр 2.
2. Занести на операционный регистр значение  $z$ ; выполнить В/О, С/П.
3. После останова считать с операционного регистра значение  $K_0(z)$ ; значение  $I_0(z)$  находится в регистре Д.
4. Для расчета с новым значением  $z$  набрать его на операционном регистре; С/П.

Примечание. Прикидочное значение времени расчета можно определить по формуле:  $t \approx 50\sqrt{z} + 20$  с (при  $\epsilon = 10^{-4}$ ).

Вычисление значений функции  $\operatorname{erfc} z$

00. ↑	10. ИП 3	20. +
01. ↑	11. +	21. F $x^2$
02. ИП 6	12. ×	22. F $x^2$
03. ×	13. ИП 2	23. F $x^2$
04. ИП 5	14. +	24. F $x^2$
05. +	15. ×	25. F $1/X$
06. ×	16. ИП 1	26. С/П
07. ИП 4	17. +	27. БП
08. +	18. ×	28. 00
09. ×	19. 1	

Регистры:

1.  $a_1 = 7,0523078 \cdot 10^{-2}$ ;
2.  $a_2 = 4,2282012 \cdot 10^{-2}$ ;
3.  $a_3 = 9,2705272 \cdot 10^{-3}$ ;
4.  $a_4 = 1,520143 \cdot 10^{-4}$ ;
5.  $a_5 = 2,765672 \cdot 10^{-4}$ ;
6.  $a_6 = 4,30638 \cdot 10^{-5}$ .

Инструкция:

1. Ввести программу.
2. Ввести константы  $a_1 — a_6$  в соответствующие регистры.
3. Набрать значение  $z$  на операционном регистре; В/О, С/П
4. Считать значение  $\operatorname{erfc} z$  с операционного регистра.

Вычисление значений функции  $\text{ierfc } z$

00. $\uparrow$	10. ИП 3	20. $+$	30. $/\text{---}/$
01. $\uparrow$	11. $+$	21. $F \ x^2$	31. $F \ e^x$
02. ИП 6	12. $\times$	22. $F \ x^2$	32. $F \ \pi$
03. $\times$	13. ИП 2	23. $F \ x^2$	33. $F \ \sqrt{\quad}$
04. ИП 5	14. $+$	24. $F \ x^2$	34. $\div$
05. $-$	15. $\times$	25. $F \ 1/X$	35. ИП 0
06. $\times$	16. ИП 1	26. $\times$	36. $-$
07. ИП 4	17. $+$	27. $\Pi \ 0$	37. $C/\Pi$
08. $+$	18. $\times$	28. $\overline{XY}$	38. БП
09. $\times$	19. 1	29. $F \ x^2$	39. 00

Регистры:

1.  $a_1 = 7,0523078 \cdot 10^{-2}$ ;
2.  $a_2 = 4,2282012 \cdot 10^{-2}$ ;
3.  $a_3 = 9,2705272 \cdot 10^{-3}$ ;
4.  $a_4 = 1,520143 \cdot 10^{-4}$ ;
5.  $a_5 = 2,765672 \cdot 10^{-4}$ ;
6.  $a_6 = 4,30638 \cdot 10^{-5}$ .

Инструкция:

1. Ввести программу.
2. Ввести константы  $a_1$ — $a_6$  в соответствующие регистры.
3. Набрать значение  $z$  на операционном регистре; В/О, С/П.
4. Считать значение  $\text{ierfc } z$  с операционного регистра.

Вычисление функций  $i^n \operatorname{erfc} z$  для  $n=0, \dots, 4$

00. П 9	20. 1	40. ИП 9	60. 2
01. ↑	21. +	41. ×	61. ×
02. ↑	22. F $x^2$	42. 2	62. ИП 9
03. ИП 6	23. F $x^2$	43. ×	63. ×
04. ×	24. F $x^2$	44. ИП 0	64. ИП В
05. ИП 5	25. F $x^2$	45. —	65. —
06. +	26. F $1/X$	46. /—/	66. /—/
07. ×	27. П 0	47. 4	67. 8
08. ИП 4	28. ×	48. ÷	68. ÷
09. +	29. П А	49. П В	69. П Д
10. ×	30. $\overline{XY}$	50. 2	70. С/П
11. ИП 3	31. F $x^2$	51. ×	71. БП
12. +	32. /—/	52. ИП 9	72. 00
13. ×	33. F $e^x$	53. ×	
14. ИП 2	34. F $\pi$	54. ИП А	
15. +	35. F $\sqrt{\quad}$	55. —	
16. ×	36. ÷	56. /—/	
17. ИП 1	37. ИП А	57. 6	
18. +	38. —	58. ÷	
19. ×	39. П А	59. П С	

Регистры:

1.  $a_1=7,0523078 \cdot 10^{-2}$ ;
2.  $a_2=4,2282012 \cdot 10^{-2}$ ;
3.  $a_3=9,2705272 \cdot 10^{-3}$ ;
4.  $a_4=1,520143 \cdot 10^{-4}$ ;
5.  $a_5=2,765672 \cdot 10^{-4}$ ;
6.  $a_6=4,30638 \cdot 10^{-5}$ .

Инструкция:

1. Ввести программу.
2. Ввести константы  $a_1$ — $a_6$  в соответствующие регистры.
3. Набрать на операционном регистре значение  $z$ ;
4. Выполнить В/О, С/П.
5. По остановке — в регистре 0 — значение  $\operatorname{erfc} z$ ; в регистре А — значение  $i \operatorname{erfc} z$ ; в регистре В —  $i^2 \operatorname{erfc} z$ ; в регистре С —  $i^3 \operatorname{erfc} z$ ; в регистре Д —  $i^4 \operatorname{erfc} z$ . На операционном регистре — значение  $i^4 \operatorname{erfc} z$ .

**Вычисление значений функций  $D(z, \alpha)$  и  $D^*(z, \alpha)$**

00. П 0	16. ИП 0	32. ИП 8	48. 2	64. +
01. С/П	17. ИП С	33. ИП В	49. $\div$	65. $\times$
02. П А	18. —	34. $\div$	50. П 8	66. ИП 2
03. F $e^x$	19. П 9	35. П 8	51. БП	67. +
04. П В	20. F $x^2$	36. ИП В	52. 00	68. $\times$
05. ИП А	21. F $\sqrt{\quad}$	37. ИП Д	53. $\uparrow$	69. ИП 1
06. 2	22. ПП	38. $\times$	54. $\uparrow$	70. +
07. $\div$	23. 53	39. П Д	55. ИП 6	71. $\times$
08. ИП 0	24. П 8	40. ИП 8	56. $\times$	72. 1
09. $\div$	25. ИП 9	41. +	57. ИП 5	73. +
10. П С	26. F $X < 0$	42. 2	58. +	74. F $x^2$
11. ИП 0	27. 32	43. $\div$	59. $\times$	75. F $x^x$
12. +	28. 2	44. П 7	60. ИП 4	76. F $x^2$
13. ПП	29. ИП 8	45. ИП 8	61. +	77. F $x^2$
14. 53	30. —	46. ИП Д	62. $\times$	78. F $1/X$
15. П Д	31. П 8	47. —	63. ИП 3	79. В/О

**Регистры:**

1.  $a_1=7,0523078 \cdot 10^{-2}$ ;
2.  $a_2=4,2282012 \cdot 10^{-2}$ ;
3.  $a_3=9,2705272 \cdot 10^{-3}$ ;
4.  $a_4=1,520143 \cdot 10^{-4}$ ;
5.  $a_5=2,765672 \cdot 10^{-4}$ ;
6.  $a_6=4,30638 \cdot 10^{-5}$ ;
0.  $z$ ;
- A.  $\alpha$ ;
7.  $D(z, \alpha)$ ;
8.  $D^*(z, \alpha)$ .

**Инструкция:**

1. Ввести программу.
2. Ввести константы  $a_1$ — $a_6$ ; занести на операционный регистр значение  $z$ ; С/П.
3. После останова занести на операционный регистр значение  $\alpha$ ; С/П.
4. После останова на операционном регистре результат — значение  $D^*(z, \alpha)$ ; значение  $D(z, \alpha)$  — в регистре 7.

Вычисление значений функций  $F_1(u)$ ,  $F_2(u)$ ,  $F_3(u)$

00. П 0	18. $\times$	36. F $x^2$	54. +	72. F $x^2$
01. F $x^2$	19. ИП 7	37. —	55. $\times$	73. F $x^2$
02. 2	20. +	38. F $\sqrt{\quad}$	56. ИП 4	74. F $1/X$
03. $\div$	21. П А	39. П В	57. +	75. 2
04. /—/	22. ИП 0	40. ИП А	58. $\times$	76. $\div$
05. F $e^x$	23. F $x^2$	41. С/П	59. ИП 3	77. ИП 0
06. $\uparrow$	24. 1	42. ИП В	60. +	78. F $X \geq 0$
07. F $\pi$	25. +	43. С/П	61. $\times$	79. 86
08. 2	26. ИП 8	44. БП	62. ИП 2	80. $\overline{XY}$
09. $\times$	27. $\times$	45. 00	63. +	81. 1
10. F $\sqrt{\quad}$	28. П С	46. ИП 0	64. $\times$	82. —
11. $\div$	29. ИП 0	47. F $x^2$	65. ИП 1	83. /—/
12. П 7	30. ИП 7	48. F $\sqrt{\quad}$	66. +	84. БП
13. ИП 0	31. $\times$	49. $\uparrow$	67. $\times$	85. 87
14. ПП	32. ИП С	50. $\uparrow$	68. 1	86. $\overline{XY}$
15. 46	33. +	51. ИП 6	69. +	87. В/О
16. П 8	34. П С	52. $\times$	70. F $x^2$	
17. ИП 0	35. ИП А	53. ИП 5	71. F $x^2$	

Регистры:

1.  $a_1=4,9867348 \cdot 10^{-2}$ ;
2.  $a_2=2,1141006 \cdot 10^{-2}$ ;
3.  $a_3=3,2776264 \cdot 10^{-3}$ ;
4.  $a_4=3,8003575 \cdot 10^{-5}$ ;
5.  $a_5=4,8890637 \cdot 10^{-5}$ ;
6.  $a_6=5,382975 \cdot 10^{-6}$ ;
0.  $u$ ;
4.  $F_1(u)$ ;
- В.  $F_2(u)$ ;
- С.  $F_3(u)$ .

Инструкция:

1. Ввести программу и константы в регистры 1—6.
2. Набрать на операционном регистре значение  $u$ ; выполнить В/О.
3. После останова через 25 с на операционном регистре — значение  $F_1(u)$ ; после С/П — на операционном регистре  $F_2(u)$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антоновский М. Я., Корзухин М. Д., Литвин В. А. Динамическая модель начальной стадии поверхностного заболачивания.— Проблемы биосферы, 1981, вып. 2, с. 54—59.
2. Бусалаев И. В. Сложные водохозяйственные системы.— Алма-Ата: Наука, 1980.
3. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Прикладные задачи теории вероятностей. М., Радио и связь, 1983.
4. Воропаев Г. В., Местечкин В. Б. Физико-географические основы формирования водохозяйственных балансов. М., Наука, 1981.
5. Воропаев Г. В., Исмаилов Г. Х., Федоров В. М. Моделирование водохозяйственных систем аридной зоны СССР. М.: Наука, 1984.
6. Гохберг Л. К. Применение интегральных преобразований в гидрогеологических расчетах. М.: ВИЭМС, 1982.
7. Голубаш Т. Ю., Исмаилов Г. Х. Определение дефицита водного баланса методом композиции его составляющих.— Комплексное использование водных ресурсов, 1979, вып. 7, с. 32—38.
8. Давыдов Э. Г. Игры, графы, ресурсы. М.: Радио и связь, 1981.
9. Концевовский С. Я. Оценка эксплуатационных ресурсов подземных вод и сокращения стока поверхностных водотоков при совместном использовании водных ресурсов для орошения.— Экспресс-информация, 1981, вып. 7, сер. 4, с. 4—14.
10. Концевовский С. Я., Минкин Е. Л. Ресурсы подземных вод в водохозяйственных балансах орошаемых территорий. М.: Наука, 1986.
11. Концевовский С. Я., Минкин Е. Л. Оценка подземной составляющей возвратного стока с орошаемых территорий.— Рациональное использование водных ресурсов, 1986, вып. 5, с. 17—26.
12. Корявов П. П. Проблемы замыкания гидрологических моделей речного бассейна.— В кн.: Математическое моделирование. Процессы в сложных экономических и экологических системах. М.: Наука, 1986, с. 220—240.
13. Красс М. С., Лившиц В. М. Численные методы решения задач геофильтрации на ЭВМ.— В кн.: Гидрогеология и инженерная геология. М.: ВИЭМС, 1979.
14. Крицкий С. Н., Менкель Д. Ф. Гидрогеологические основы управления речным стоком.— М.: Наука, 1981.
15. Лукнер Л., Шестаков В. М. Моделирование геофильтрации. М.: Недра, 1976.
16. Манукьян Д. А., Шестаков В. М. Методика расчета производительности водозаборных скважин с периодически меняющимся водоотбором.— Разведка и охрана недр, 1970, № 6, с. 43—47.
17. Методы прогноза селевого режима грунтов и грунтовых вод/Н. Н. Веригин, С. В. Васильев, Н. П. Куранов и др. М.: Колос, 1979.
18. Минкин Е. Л., Концевовский С. Я. Влияние эксплуатации подземных вод на речной сток.— Тр. Междунар. ассоц. гидрогеологических наук, 1979, т. 15, с. 22—30.
19. Мирзаев С. Ш. Формирование и размещение запасов подземных вод Узбекистана, вопросы их изучения и проблемы возможного использования. Ташкент: Фан, 1974.
20. Моисеев Н. Н. Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981.
21. Москаленко А. И., Черкашин А. К. Моделирование системы «лес—река» с точки зрения задач управления.— В кн.: Динамика эколого-экономических систем. Новосибирск: Наука, 1981, с. 92—107.
22. Прогнозирование влияния эксплуатации подземных вод на гидрогеологические условия/В. А. Злотник, М. Ю. Калинин, В. С. Усенко, М. М. Черепанский. Минск: Наука и техника, 1985.



23. Пугачев В. С. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1979.
24. Семевский Ф. А., Семенов С. М. Математическое моделирование экологических процессов. М.: Гидрометеониздат, 1981.
25. Справочник по специальным функциям с формулами, таблицами и графиками/М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979.
26. Усенко В. С. Ресурсы подземных вод и их использование.— В кн.: Каптаж и использование подземных вод. М.: 1983, с. 5—15.
27. Цветков А. Н., Еланечников В. А. Прикладные программы для микро-ЭВМ «Электроника БЗ-34», «Электроника МК-56», «Электроника МК-54», М.: Финансы и статистика, 1984.
28. Цыганова К. Н. Исследование влияния отбора подземных вод на поверхностный сток. М.: ВИЭМС, 1986.
29. Шестаков В. М. Динамика подземных вод. М.: Изд-во МГУ, 1979.
30. Экономика использования подземных вод/У. М. Ахмедсафин, М. Х. Джабасов, Т. К. Карамурзиев, М. Ш. Батабергенова. Алма-Ата: Наука, 1978.
31. Davies B., Martin B. Numerical inversion of the Laplace transforms. Survey and comparison of methods.— J. Comput. Phys., 1979, v. 33, N 1, p. 1—32.
32. Faust C. R., Mercer J. W. Ground-water modeling: recent developments.— Ground Water, 1980, v. 18, N 6, p. 569—577.
33. Hantush M. S. Pompage d'essai dans un puits a proximite d'une riviere colmate.— Bull. B. R. G. M., Sect. III, N 3/4, 1976, p. 139—149.
34. Latinopoulos P. Periodic recharge to finite aquifers from rectangular areas.— Adv. Water Res., 1984, v. 7, p. 137—140.
35. Latinopoulos P. Analytical solutions for periodic well recharge in rectangular aquifer with third-kind boundary conditions.— J. Hydrology, 1985, v. 77, N 1—4, p. 293—306.
36. Rao N. H., Sarma P. B. S. Groundwater recharge from rectangular areas.— Ground Water, 1981, v. 19, N 3, p. 271.
37. Rao N. H., Sarma P. B. S. Recharge from rectangular areas to finite aquifers. J. Hydrology, 1981, v. 53, p. 269.
38. Shamir U., Howard C. D. I. Water supply reliability theory.— J. Amer. Water Works Assoc., 1981, v. 73, N 7, p. 379—384.
39. Walton W. C. Groundwater resources evaluation. New York: McGraw Hill, 1970.
40. Walton W. C. Progress in analytical groundwater modeling.— J. Hydrology, 1979, v. 43, p. 149—159.
41. Wolfe P. M., Koelling C. P. BASIC-Programme aus Naturwissenschaft und Technik für die IBM-Personal Computer. München: Alex Schläffer Verlag, 1984.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	5
Глава 1. Теоретические основы гидрогеологических расчетов . . . . .	11
1.1. Уравнения геофильтрации . . . . .	12
1.2. Математический аппарат описания линейных систем . . . . .	17
1.3. Расчеты при переменном водоотборе . . . . .	31
1.4. Расчеты при стохастическом характере изменения водоотбора . . . . .	42
1.5. Расчеты изменения поверхностного стока при эксплуатации подземных вод . . . . .	51
Глава 2. Оценка эксплуатационных ресурсов подземных вод и изменения поверхностного стока при постоянном во времени водоотборе . . . . .	54
2.1. Типизация гидрогеологических условий и расчетные схемы водоносных пластов . . . . .	56
2.2. Схемы неограниченных водоносных пластов . . . . .	61
2.3. Схемы однородных пластов с границей питания в плане . . . . .	74
2.4. Оценка изменения поверхностного стока при эксплуатации подземных вод в условиях двухслойного пласта . . . . .	82
2.5. Схемы пластов-полос . . . . .	91
2.6. Схемы с плановой фильтрационной неоднородностью и границей питания . . . . .	98
2.7. Клинообразные пласты . . . . .	107
2.8. Схемы пластов-полуполос . . . . .	109
2.9. Схемы ограниченных пластов . . . . .	115
2.10. Оценка изменения дренажного стока при эксплуатации подземных вод . . . . .	119
Глава 3. Оценка эксплуатационных ресурсов подземных вод и изменения поверхностного стока при периодическом режиме водоотбора . . . . .	120
3.1. Гармонический анализ гидрографа водоотбора . . . . .	123
3.2. Расчет периодической составляющей понижения в условиях неограниченного однородного пласта . . . . .	126
3.3. Схема полуограниченного пласта с контуром питания . . . . .	132
3.4. Особенности режима эксплуатационных колебаний уровня подземных вод при их периодическом отборе . . . . .	134
3.5. Схемы пластов-полос . . . . .	143
3.6. Оценка редукции поверхностного стока при периодическом режиме отбора подземных вод . . . . .	146
Глава 4. Гидрогеологические расчеты систем совместного использования подземных и поверхностных вод . . . . .	155
4.1. Системный подход к проблеме широкомасштабной эксплуатации подземных вод . . . . .	155
4.2. Вероятностные характеристики случайных процессов в геофильтрационных системах . . . . .	161
4.3. Учет нелинейности системы совместного использования . . . . .	170
4.4. Надежность систем совместного использования поверхностных и подземных вод и методика ее оценки . . . . .	179
4.5. Оптимальное распределение нагрузки между месторождениями подземных вод с целью максимизации надежности системы . . . . .	185
4.6. Моделирование систем совместного использования поверхностных и подземных вод . . . . .	191
Приложение . . . . .	216
Список литературы . . . . .	251
	253

**Концебовский С. Я., Минкин Е. Л.**

**К 65** Гидрогеологические расчеты при использовании подземных вод для орошения.— М.: Недра, 1989.— 253 с.: ил.

**ISBN 5—247—00497—3**

Рассмотрен комплекс актуальных гидрогеологических, водохозяйственных и природоохранных проблем — оценка эксплуатационных ресурсов подземных вод для орошения, определение их места в общих водных ресурсах, оценка изменений режима поверхностного стока при эксплуатации подземных вод в ирригационных целях. Приведены постоянный, периодический и стохастический режимы водоотбора. Даны расчет и анализ реакций геофильтрационных систем, возникающих при применении этих режимов.

Для гидрологов, мелиораторов и специалистов в области водного хозяйства.

**К** 1804080000—395 128—89  
043(01)—89

**ББК 26.22**

ПРОИЗВОДСТВЕННОЕ (ПРАКТИЧЕСКОЕ) ИЗДАНИЕ

Концевовский Станислав Яковлевич  
Миникин Ефим Львович

## ГИДРОГЕОЛОГИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД ДЛЯ ОРОШЕНИЯ

Заведующий редакцией Л. Н. Аважанская  
Редактор издательства С. Г. Бароянц  
Переплет художника В. И. Казаковой  
Художественный редактор В. В. Шутько  
Технический редактор С. Г. Веселкина  
Корректор Л. В. Зайцева  
ИБ № 6941

---

Сдано в набор 27.06.89. Подписано в печать 04.12.89. Т-18413. Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага кн.-журнальная. Гарнитура Литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 16,0. Усл. кр.-отг. 16,0. Уч.-изд. л. 17,4. Тираж 2000 экз. Заказ 188/1635—4. Цена 1 р. 20 к.

---

Ордена «Знак Почета» издательство «Недра»,  
125047, Москва, пл. Белорусского вокзала, 3

Ленинградская типография № 4 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгения Соколовой Государственного комитета СССР по печати. 190000, Ленинград, Прачечный пер., 6.