



Министерство образования и науки Российской Федерации

Московский государственный геологоразведочный университет  
имени Серго Орджоникидзе

Центр дистанционного образования

Ленченко Н.Н.

**ДИНАМИКА ПОДЗЕМНЫХ ВОД**  
(Георетический курс)

Рекомендовано УМО по  
образованию в области прикладной  
геологии для студентов вузов, обучающихся  
по специальности 080300 “Поиски и  
разведка подземных вод и инженерно-  
геологические изыскания”, направление  
650100 “Прикладная геология”

Москва, 2004

Г4 Динамика подземных вод (теоретический курс). Учебное пособие  
для студентов вузов

Ленченко Н.Н., кандидат геолого-минералогических наук, специалист в области динамики подземных вод и методов гидрогеологических исследований при поисках и разведке подземных вод, опубликовал 50 научных и 10 учебно-методических работ.

Рассмотрены феноменологические основы процессов фильтрации, миграции и влагопереноса, гидрогеологические особенности потоков подземных вод, принципы и критерии схематизации гидрогеологических условий, выводы и методы решения дифференциальных уравнений фильтрации и миграции подземных вод. На современном уровне изложены гидродинамические основы режима и баланса подземных вод, прогноза изменения уровня грунтовых вод в зоне влияния различных гидротехнических сооружений, теоретические основы и практические решения для водопритока к скважинам, обоснования опытно-фильтрационных работ, исследование миграции и влагопереноса. Пособие составлено в соответствии с существующей вузовской программой для студентов гидрогеологической специальности.

*Моему учителю –  
Ирине Константиновне Гавич*

## Предисловие

Настоящее учебное пособие дает систематическое изложение основ динамики подземных вод (ДПВ) и соответствует учебной программе специальности 080300 «Поиски и разведка подземных вод и инженерно-геологические изыскания». В пособии последовательно рассматриваются гидрогеологические, физические и математические основы движения подземных вод, главным образом, для зоны активного водообмена, принципы систематизации гидрогеологических условий и основы аналитических и численных исследований геофiltрации, влагопереноса и массопереноса в гидрогеологических системах. Значительное внимание удалено проблемам изучения гидродинамики естественных потоков подземных вод, прогнозированию их режима в районе водозаборов, гидротехнических сооружений, на мелиорируемых территориях, обработке опытно-фильтрационных исследований и наблюдений, что имеет в настоящее время важное практическое значение.

Главная задача курса ДПВ заключается в том, чтобы студент усвоил основные теоретические положения, которые составляют объективную основу количественного изучения закономерностей движения подземных вод, получил необходимые знания о методах и способах количественного анализа различных форм движения воды в толщах земной коры, приобрел навыки в выполнении оценок при решении наиболее часто встречающихся практических задач.

Для лучшего усвоения теоретического материала предлагаются контрольные вопросы в конце каждой лекции, подготовка к ответам на которые способствует развитию у студентов навыков самостоятельного анализа, помогает формировать творческий подход к решению поставленных задач.

Существующие учебники по ДПВ И.К. Гавич (5), В.А. Мироненко (6) и В.М. Шестакова (7) и настоящее учебное пособие следует рассматривать как дополняющие друг друга, имея в виду, что объем учебника позволяет более детально излагать изучаемый студентами материал.

Настоящее пособие подготовлено в результате чтения автором лекций и ведения лабораторных занятий по ДПВ для студентов специальности «Поиски и разведка подземных вод и инженерно-геологические изыскания» на кафедре гидрогеологии МГТРУ (МГРИ) в течение 25 лет. Автор выражает свою признательность профессорам кафедры гидрогеологии Данилову В.В. и Крысенко А.М., руководителям ЗАО «Геолинк Консалтинг» профессорам А.А. Рощалю и И.С. Пашковскому, главному научному сотруднику ИВПАН РФ профессору В.С. Ковалевскому, научному руководителю ЗАО «ГИДЭК» профессору Л.С. Язвину за обсуждение многих разделов пособия, а также за полезные замечания, способствующие улучшению учебного пособия.

## ЧАСТЬ 1

### *Гидродинамические основы геофильтрации*

#### Лекция № 1. Основные понятия и определения. Потоки подземных вод

1.1. Динамика подземных вод (ДПВ) – теоретический раздел гидрогеологии, в котором исследуются закономерности движения подземных вод (ПВ) и разрабатывается математическая теория этого движения с целью количественной оценки условий формирования режима, баланса, ресурсов и запасов ПВ, изменяющихся под влиянием естественных и искусственных факторов, а также управления процессами этого движения.

Как самостоятельный раздел гидрогеологии ДПВ был выделен в 30-х гг. Г.Н. Каменским. Он сформулировал основные задачи, методы их решения, дал определение науки, издал учебник в 1935 г.

До 60 гг. ХХ в. ДПВ преимущественно изучала процессы фильтрации, т.е. движение жидкости в полностью насыщенной породе. В последние годы так же изучаются инфильтрация – движение ПВ при неполном насыщении, и миграция – перенос вещества и энергии вместе с фильтрующей водой.

1.2. ДПВ в своем развитии находится на стыке многих наук и активно развивается.

#### ДПВ

##### Естественные науки

1. Геология (структурная геология – условия залегания; геоморфология – условия питания и разгрузки, характер взаимосвязи поверхного и подземного стока; литология – фильтрационные и емкостные свойства пород).

2. Гидрология, метеорология – характер и вид граничных условий.

##### Физико-математические науки (теоретическая база)

1-а. Теория фильтрации, гидромеханика, гидравлика – математические формулы, описывающие движение жидкости и газов в идеальных условиях, математический аппарат, в том числе использование уравнений математической физики.

2-а. Математика – уравнения математической физики, операционное исчисление, функции комплексного переменного.

3-а. Теория тепломассопереноса для расчетов процессов миграции

В отличие от ДПВ в гидромеханике, в теории фильтрации упор делается на математический аппарат. Формулы не есть цель ДПВ, а только средство, при помощи которого решаются гидрогеологические задачи. Главное в ДПВ – установление закономерностей влияния геологических и гидрогеологических факторов на процесс движения ПВ, составление прогноза в конкретных гидрогеологических условиях для решения практических задач.

1.3. Задачи ДПВ. Основным объектом изучения ДПВ является область фильтрации. Под областью фильтрации понимают часть водоносной системы, имеющую определенные геометрические размеры во всех трех измерениях, характеризующуюся определенными физическими свойствами среды, называемыми параметрами водоносного пласта, а так же границами, с заданными на них определенными закономерностями, называемыми граничными условиями (ГУ). При неустановившемся режиме фильтрации должно быть известно начальное распределение показателей процесса фильтрации (уровней и расходов) – их называют начальные условия.

В ДПВ выделяют два направления:

1. Исследование гидродинамики водоносных систем в естественных условиях.
2. Исследование гидродинамики этих систем, формирующихся под влиянием техногенных факторов.

Имеет место два основных типа задач:

1. Обратные – ставят целью уточнить гидрогеологические условия территории. Они делятся на инверсионные задачи – определение параметров водоносных пластов и разделяющих их толщ, и граничные задачи – уточнение ГУ на границах рассматриваемой области фильтрации.

2. Прямые, прогнозные задачи управления, которые рассматривают процессы под влиянием естественных и техногенных факторов и позволяют осуществлять прогнозы работы водозаборов, дренажей, оценку водопритоков в карьеры и горные выработки, прогноз изменения уровня под селитебными территориями, промплощадками, на массивах орошаемых земель, прогноз изменения гидрогеологических условий вблизи гидротехнических сооружений (каналы, водохранилища), количественную оценку изменения региональных гидрогеологических условий. В последние годы широко изучаются проблемы в ненасыщенной зоне и изменение качества подземных вод.

1.4. Методы исследования в ДПВ подразделяются на:

1.4.1. Теоретические – базирующиеся на использовании математического аппарата применительно к гидрогеологическим объектам. Используются как точные методы: гидродинамические (уравнения математической физики, операционное исчисление), гидромеханические (теория комплексного переменного, методы конформного отображения для стационарной фильтрации), так и приближенные гидравлические – уравнение Дарси.

Рассматриваются основные дифференциальные уравнения:

$$\text{Лапласа} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0 \quad \text{стационарное движение;}$$

$$\text{Пуассона} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{W}{T} = 0 \quad \text{стационарное движение с инфильтрационным питанием;}$$

$$\text{Фурье} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial H}{\partial t} \quad \text{нестационарное движение,}$$

напорные воды;

$$\text{Буссинеска } \frac{\partial}{\partial x} \left( kh \frac{\partial H}{\partial x} \right) + W = \mu \frac{\partial H}{\partial t} \text{ нестационарное движение грунтовых}$$

вод, нелинейное уравнение с учетом инфильтрационного питания.

Возможно два случая представления природной гидрогеологической среды в математических формулах. Для простых условий можно изучить и установить функциональную связь между геометрическими, физическими, фильтрационными параметрами. В сложных условиях приходится использовать вероятностно-статистические методы. На основе теории вероятности пытаются установить основные закономерности изучаемого процесса, дать количественную оценку изменениям гидродинамических условий.

Для решения задачи в математической постановке требуется упростить природные условия. Это упрощение называется схематизацией, которая является очень важным процессом, одним из основных в ДПВ.

1.4.2. Метод математического моделирования на основе использования уравнений в конечных разностях. Строится численная математическая модель исследуемой области и на этой модели изучается процесс фильтрации. Применяется для сложных гидрогеологических условий и ответственных дорогостоящих инженерных сооружений (ИС).

1.4.3. Натурное моделирование применяется в очень сложных условиях. Процесс изучается на месте, в природе. Моделируют в меньшем объеме будущее инженерное сооружение. Например, опытная групповая откачка – модель будущего водозабора.

1.4.4. При решении любых задач в ДПВ следует использовать системный анализ. Система в ДПВ – это совокупность элементов, образующих единое целое, характеризующихся определенной внутренней структурой и находящихся во взаимодействии между собой и внешней средой. В ДПВ – это артезианские бассейны, месторождения подземных вод, водоносные комплексы и горизонты, пропластики, слои и трещины. Системы могут быть разного уровня. В одних задачах изучаемый объект рассматривается как система, в других – как элемент более крупной системы. При решении задачи рассматривают 2-3 уровня элементов, остальные или очень малы или велики и не учитываются. Так, например, если рассматривается фильтрация в водоносном комплексе или горизонте, особенности фильтрации по конкретным отдельным порам и трещинам пласта значения не имеют. Считают, что поток ПВ имеет сплошное распространение в водоносном пласте, а пласт характеризуется как некоторая идеальная среда с равномерно распределенными свойствами – параметрами. Зачем это нужно? Чтобы использовать известные из механики сплошных сред методы и приемы расчета.

### 1.5. Потоки ПВ и их гидрогеологическая характеристика

Поток – пространственно-временное выражение формы движения и баланса ПВ в пределах принятых границ. Существуют естественные и техногенные потоки. Последние обусловлены воздействием ИС.

Потоки различаются условиями формирования: типом питания и разгрузки (сосредоточенное и рассеянное, открытое и скрытое), типом водообмена (гори-

зонтальным и вертикальным), формой (структурой) движения (линейной, радиальной, плановой, плоской, пространственной). Выделяют следующие типы естественных потоков ПВ:

1.5.1. Потоки речных долин характеризуются одно - двухпластовым строением аллювия, плоско-параллельной или линейной структурой движения, скрытой и затрудненной связью с рекой, вследствие наличия суглинков в русловых отложениях, сосредоточенным и реже рассеянным питанием и разгрузкой. Здесь водообмен в основном горизонтальный, если не связан с глубинным перетеканием из нижележащих горизонтов (рис. 1.1).

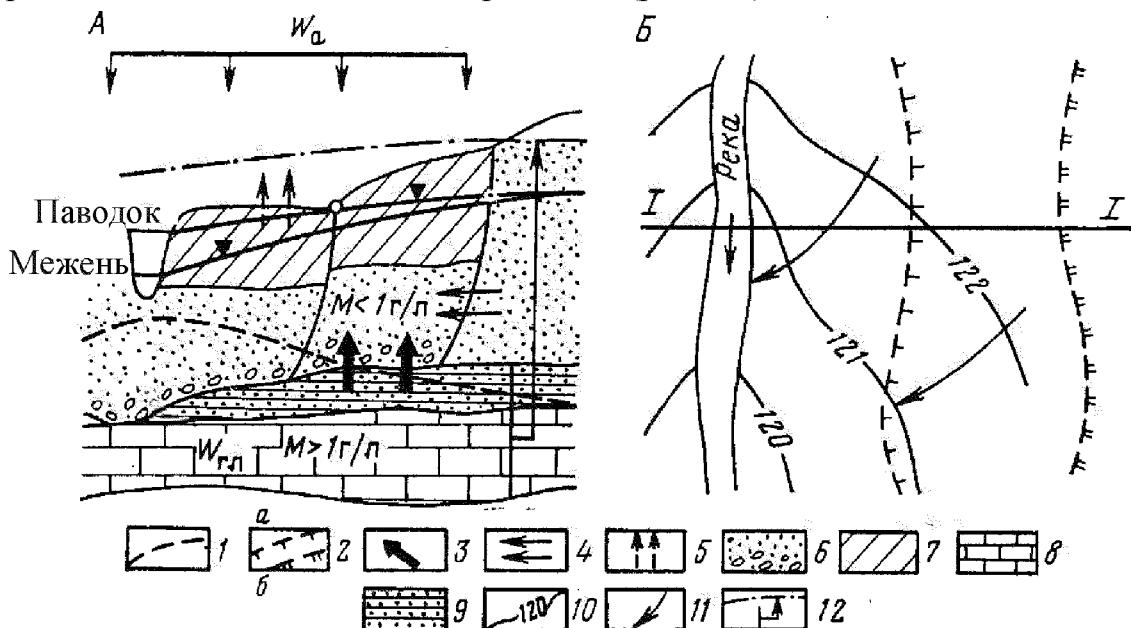


Рис. 1.1. Поток подземных вод в речной долине (А – разрез по линии I–I; Б – план)

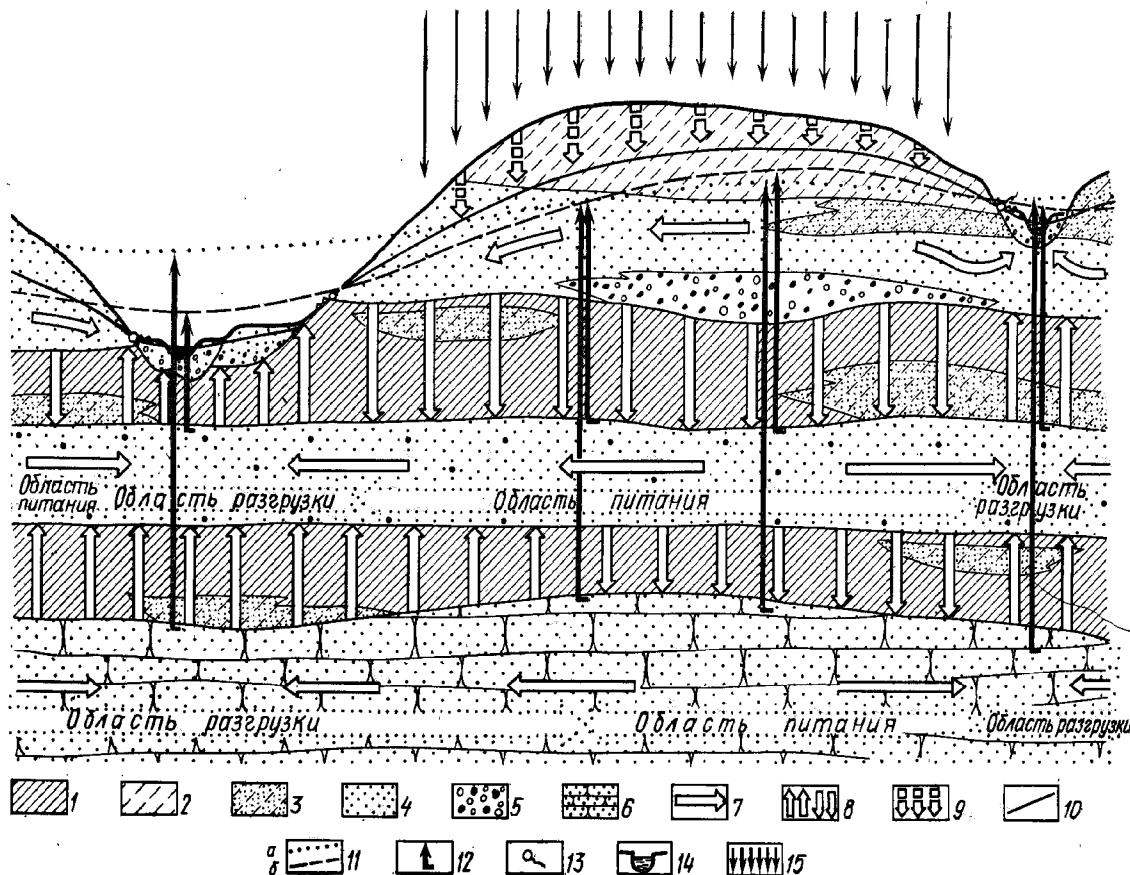
1 – граница между подземными водами различной минерализации; 2 – границы а – I<sup>ой</sup> и б – II<sup>ой</sup> надпойменных террас; 3 – вертикальное перетекание через слабопроницаемые породы; 4 и 11 – направление движения латерального потока подземных вод; 5 – испарение; 6 – песок; 7 – суглинок; 8 – известняк; 9 – слабопроницаемые породы; 10 – гидроизогипсы; 12 – напор подземных вод

1.5.2. Водораздельные потоки междуречных пространств наиболее распространены в четвертичных ледниковых отложениях и в горизонтально залегающих осадочных отложениях более древнего возраста. Характер распределения уровней в таких потоках определяется интенсивностью инфильтрационного питания, фильтрационными свойствами разделяющих слоев и глубиной эрозионного расчленения рельефа. Питание всей многопластовой системы осуществляется в центральной части междуречья путем последовательного перетекания воды сверху вниз через разделяющие слои (рис. 1.2).

Свидетельством наличия питания являются: 1) снижение напоров в пластах сверху вниз и 2) выпуклость всех пьезометрических кривых. Для водораздельных потоков характерен горизонтально-вертикальный водообмен.

1.5.3. Потоки конусов выноса содержат в головной части грунтовые воды, приуроченные к мощной (до 300 м) толще гравийно-галечниковых отложений,

и напорно-безнапорные воды в периферической части, где появляются прослои суглинков и глин, формирующих многопластовую систему. Мощность рыхлых отложений в этой части конуса значительно сокращается, здесь идет родниковая разгрузка и испарение подземных вод (рис. 1.3).

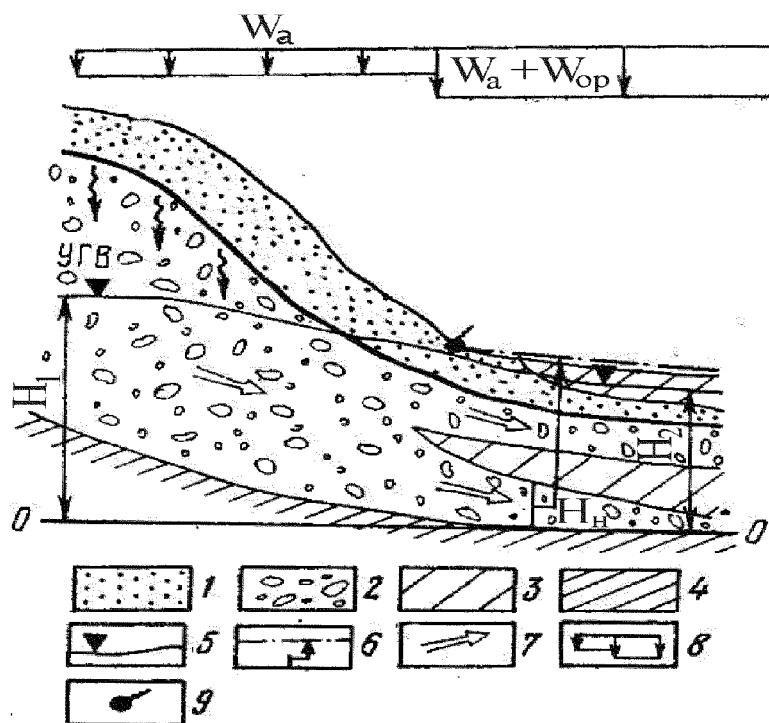


**Рис. 1.2. Поток подземных вод в междуречном массиве (по В.М. Шестакову)**

1 – суглинок; 2 – супесь; 3 – песок глинистый; 4 – песок; 5 – гравий и галька; 6 – песчаник; 7 - направление движения латерального потока подземных вод; 8 - вертикальное перетекание через слабопроницаемые породы; 9 – инфильтрация; 10 – УГВ; 11 – пьезометрические уровни а – II и б – III напорных горизонтов; 12 - напор подземных вод; 13 – родник; 14 – река; 15 – атмосферные осадки

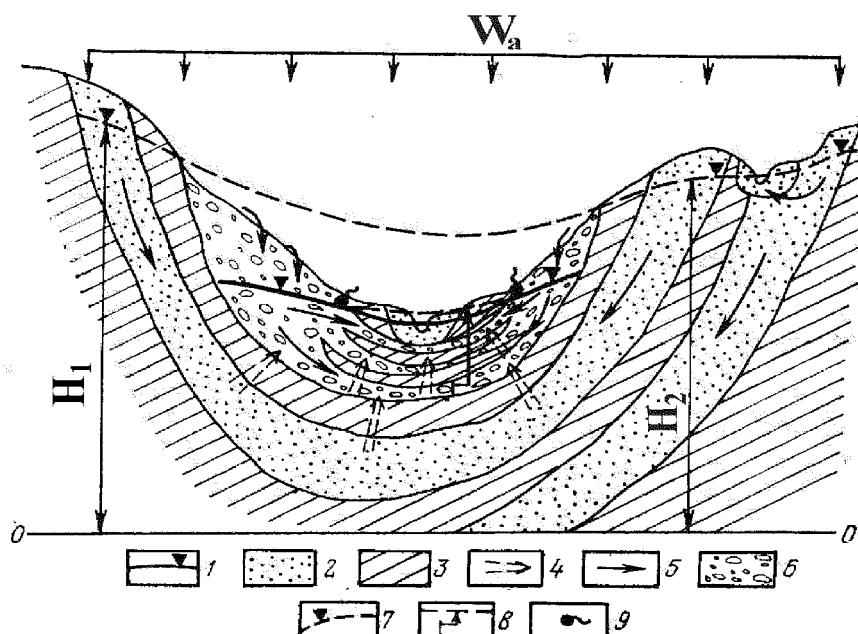
1.5.4. Потоки синклинальных структур образуют средние и крупные артезианские бассейны. Потоки имеют многопластовое строение, пространственную структуру движения, горизонтально-вертикальный водообмен. В краевых зонах артезианских бассейнов наблюдаются две разновидности потоков. Первая – артезианский склон – характеризуется возвратно-поступательным движением и наличием застойной зоны. Второй тип – артезианский бассейн (рис. 1.4).

Потоки различных типов контактируют и переходят один в другой. Потоки междуречных пространств на границах переходят в потоки речных долин, в областях выходов потоков синклинальных структур наблюдаются потоки между-речий и т.д.



**Рис. 1.3. Поток подземных вод в конусе выноса (по И.К. Гавич)**

1 – аллювиальные пески предгорного речного потока; 2-4 – поток конуса выноса (2 – галечники и пески; 3 – суглинки; 4 – глина); 5 – УГВ потока конуса выноса, 6 – уровень напорных вод конуса выноса; 7 – направление движения потока подземных вод; 8 – инфильтрационное питание за счет атмосферных осадков и орошения; 9 – родник



**Рис. 1.4. Поток подземных вод в артезианском бассейне (по И.К. Гавич)**

1 – УГВ; 2 – пески; 3 – суглинки; 4 - - вертикальное перетекание через слабопроницаемые породы; 5 – направление движения латерального потока подземных вод; 6 – гравийно-галечниковые отложения; 7 – уровень напорных вод; 8 - напор подземных вод; 9 - родник

### Вопросы к лекции №1

1. Какие основные типы задач решают в ДПВ? Каково основное содержание каждого типа задач?
2. В чем заключаются особенности основных методов исследований в ДПВ? Какова область применения каждого из этих методов?
3. По каким основным признакам проводится типизация водоносных систем фильтрационных потоков?
4. Охарактеризуйте особенности потоков ПВ в речной долине, отличающие их от потоков в артезианских бассейнах.
5. Охарактеризуйте особенности потоков ПВ в междуречье, отличающие их от потоков в конусах выноса.
6. Раскройте содержание системного подхода при решении задач в ДПВ.

### Лекция № 2. Физические основы изучения движения подземных вод

2.1. Сжимаемость воды. Согласно закону Гука увеличение давления в подземных водах с ростом глубины их залегания на  $\Delta P$  вызывает упругообразимое уменьшение исходного объема воды  $V$  на величину  $\Delta V$ :

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{E_e} \Delta P = -\beta_e \Delta P, \quad (2.1)$$

где  $E_e = \frac{1}{\beta_e}$  - объемный модуль Юнга, для пресной негазированной воды, равный 2000 МПа,  $\beta_e$  - коэффициент объемного сжатия или расширение воды, равный  $0,5 \cdot 10^{-3} \text{ MPa}^{-1}$  или  $0,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ .

Наличие растворенного газа и повышение температуры увеличивают сжимаемость воды.

2.2. Плотность. Плотность воды определяется формулой  $\rho = \frac{M}{V}$

где  $M$  - масса воды,  $V$  - объем воды.

Плотность можно выразить через удельный вес воды  $\gamma$ :

$$\rho = \gamma / g, \quad (2.2)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения.

Плотность пресной воды при  $4^\circ\text{C}$  равна  $1000 \text{ кг/m}^3$ . С увеличением температуры плотность уменьшается, с увеличением давления и минерализации – растет. Плотность морской воды – 1030, рассолов с минерализацией 300-400 г/дм $^3$  – 1200-1300 кг/м $^3$ .

2.3. Вязкость. Вязкость – сопротивление воды течению. Уменьшается с ростом температуры (см. лабораторные опыты по определению коэффициента фильтрации на КФЗ). Увеличение минерализации воды ведет к увеличению вязкости.

2.4. Гидродинамический напор. Включает потенциальную и кинетическую энергию. Согласно уравнения Бернули напор  $H$  равен

$$H = \frac{P}{\gamma} + z + \frac{u^2}{2g}, \quad (2.3)$$

где  $z$  – положение точки, в которой определен напор над горизонтальной плоскостью сравнения,

$$\frac{u^2}{2g}$$
 - скоростной напор,

$u$  – действительная скорость фильтрации.

Последняя величина в подземных водах очень мала, так как  $u$  не превышает  $1000 \text{ м/сут} = 10^{-2} \text{ м/сек}$ , и ею можно пренебречь. Тогда для подземных вод имеем

$$H = \frac{P}{\gamma} + z, \quad (2.4)$$

то есть гидродинамический напор равен гидростатическому (рис.2.1).

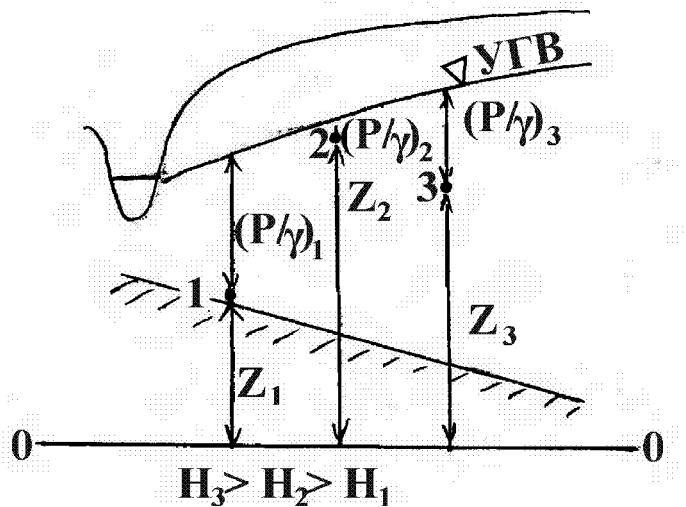


Рис. 2.1. Геометрическая интерпретация гидростатического напора

2.5. Геостатическое давление. Пластовое давление, формирующееся под влиянием веса вышележащих пород, называется геостатическим. Величина геостатического давления определяется по формуле

$$P_n = \rho_n \cdot z_n, \quad (2.5)$$

где  $\rho_n$  - среднее значение плотности горных пород,

$z_n$  - мощность горных пород над кровлей водоносного пласта.

Из формулы (2.5) следует, что изменение мощности  $z_n$  в результате накопления осадков, эрозионной деятельности рек или сооружения карьеров, наполнения водохранилищ вызывает изменение геостатического давления. Геостатическое давление в первую очередь воздействует на скелет горных пород.

Гидростатическое давление в подземных водах оказывает взвешивающее воздействие на скелет горных пород, то есть уменьшает воздействие геостатического давления. При осушении водоносных пластов гидростатическое давление уменьшается и породы уплотняются за счет увеличения результирующего воздействия от разницы геостатического и гидростатического давлений. Особенно значительно этот процесс влияет на глинистые породы.

В закрытых структурах накопление осадков на поверхности вызывает увеличение геостатического давления, отжатие поровых растворов из глин

(элизионное питание) в водоносный пласт. Этот процесс длится миллионы лет.

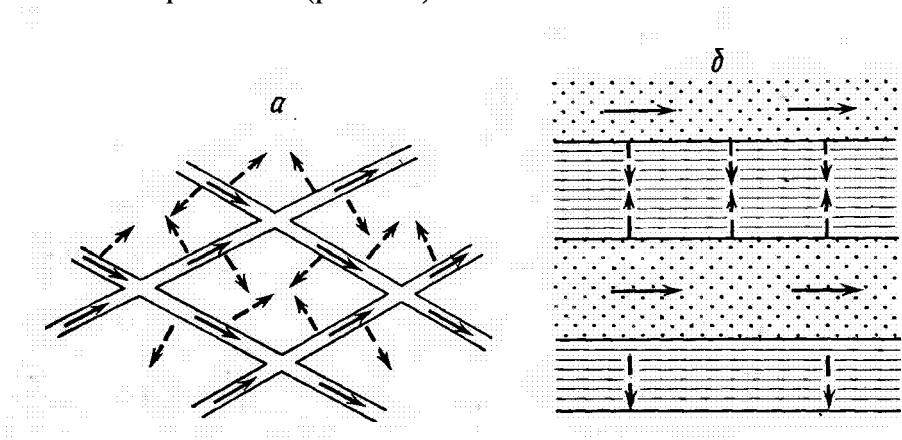
В изолированных структурах геостатическое давление является одной из причин возникновения аномально высоких пластовых давлений, которые сопровождаются аварийными выбросами газо-водо-нефтяной смеси из скважин.

**2.6. Свойства и параметры порово-трещинного пространства горных пород.**

Рыхлые осадочные породы (пески, супеси, суглинки, глины) характеризуются пористостью, полускальные и скальные – пористостью и трещиноватостью. Последняя подразделяется на трещиноватость выветривания и литогенетическую, трещиноватость тектоническую (крупные трещины) и кавернозность в известняках (карст).

По размерам поры и трещины подразделяются на некапиллярные (более 0,5 мм), капиллярные (0,5-0,0001 мм), субкапиллярные (менее 0,0001 мм). В первых содержится свободная, во вторых – свободная и физически-связанная, а в третьих – только физически-связанная вода.

Выделяют четыре типа порово-трещинного пространства: 1) однородный пористый, 2) неоднородный (переслаивание песчано-глинистых пород), 3) трещиноватый, 4) с двойной трещиноватостью. В первом и третьем случаях среда называется гомогенной. Во втором и четвертом случаях среда считается неоднородной или гетерогенной (рис. 2.2).



**Рис. 2.2. Типы гетерогенных сред**

а – гетерогенно-блочная среда; б – гетерогенно-слоистая среда

Пористость характеризует относительный объем порового пространства  $V_n$  в общем объеме  $V$  горной породы:

$$n = \frac{V_n}{V}, \quad (2.6)$$

а трещиноватость – относительный объем трещин.

Среднее значение пористости (в %): пески – 35-45, глины 45-60, песчаники, опоки, карбонатные породы 1-2, кристаллические породы – менее 1. Трещиноватость составляет не более 1-2%.

Активная пористость  $n_a$  учитывает только ту часть порово-трещинного пространства, которая занята свободной водой. Активная пористость в песках

близка к значению пористости, а в глинистых породах не превышает первых процентов. То есть  $n_{\text{песков}} < n_{\text{глин}}$ , но  $n_{\text{песков}} \gg n_{\text{влаги}}$ . С активной пористостью связано такое важнейшее свойство, как проницаемость породы.

### 2.7. Виды воды и взаимодействия воды и горной породы.

Удельная поверхность пор и трещин весьма значительна, особенно для глин, и может достигать в 1 см<sup>3</sup> породы 10 м<sup>2</sup> и более. Поэтому вода в глинах и тонко трещиноватых породах расходует дополнительную энергию на трение о стенки пор и трещин и здесь более активно происходят физико-химические взаимодействия между водой и горной породой.

В качестве критерия оценки количества связанной воды в породе используется максимально-молекулярная влагоемкость (ММВ).

В трещиноватых и крупнозернистых рыхлых породах содержится в основном свободная вода. Здесь величина ММВ равна 5-12%, что значительно меньше ПВ (полной влагоемкости).

В глинистых породах количество молекулярно-связанной воды превышает 30-35%, что существенно уменьшает сечение пор, по которым может перемещаться вода (живое сечение). В связи с этим проницаемость песчаных пластов значительно больше, чем глинистых. Последние во многих случаях считаются водонепроницаемыми или слабопроницаемыми.

2.8. Упругость горных пород. Размеры пор зависят от укладки минеральных зерен, а размеры трещин — от их раскрытия. С ростом глубины залегания пород увеличивается геостатическое давление, а пустотность пород уменьшается за счет более плотной укладки минеральных зерен и уменьшения раскрытия трещин (компрессия). При компрессионных испытаниях определяют коэффициент сжимаемости  $\alpha_c$  и показатель удельного сжатия  $\beta_c$ . Последняя величина для скальных пород измеряется 10<sup>-5</sup> МПа<sup>-1</sup>, а для полускальных 10<sup>-4</sup> МПа<sup>-1</sup>, т.е. на 1-2 порядка меньше, чем для воды  $\beta_w$  (см. п. 2.1). Для песков и особенно глин эта величина соизмерима и даже превышает  $\beta_w$ .

### 2.9. Понятие о сплошной геофильтрационной среде.

В механике сплошных сред под элементарным объемом понимают некоторый объем сплошной среды, несопримеримо (на порядок) меньший, чем рассматриваемая область исследований, но, в тоже время, несравненно больший, чем размер слагающих его частиц и расстояния между ними. В элементарном объеме сечение пор, раскрытие и длину трещин считают весьма малыми, поэтому их конкретную форму во внимание не принимают. Их распределение в элементарном объеме считается статистически равномерным. Такой элементарный объем называется представительным или репрезентативным. Все параметры среды в таком случае учитываются как обобщенные показатели. Очевидно, что в трещиноватых породах такой элементарный объем будет существенно больше, чем в пористой среде.

2.10. В качестве основных видов движения ПВ рассматривают фильтрацию и влагоперенос (инфилтрацию). Кроме того, ДПВ изучает процесс переноса растворенных веществ в ПВ — миграцию.

Фильтрация происходит в полной насыщенной среде, когда влажность

породы равна полной влагоемкости, влагоперенос осуществляется в неполностью насыщенной водой породе, в которой присутствует воздух (зона аэрации), и миграция – процесс, при котором существенным является перенос вещества, растворенного в воде. Последний процесс сопровождается как фильтрацию, так и инфильтрацию, учитывает как законы их протекания, так и, дополнительно, процессы, характеризующие диффузию, конвекцию, сорбцию растворенных в ПВ солей.

### **Вопросы к лекции №2**

1. Дайте сопоставительную характеристику коэффициентов упругого сжатия для воды и горной породы разного строения и состава.
2. Чем отличаются понятия гидродинамического и гидростатического напора? Какова связь между величиной давления и гидродинамическим напором в подземных водах?
3. Охарактеризуйте влияние осадконакопления, осушения водоносных пластов на величину геостатического давления и гидродинамического напора.
4. Какова разница в значениях гидростатического напора в кровле и подошве замкнутого пласта мощностью  $m = 50\text{м}$ , содержащего пресную воду ( $\gamma_0 = 1000\text{кг}/\text{м}^3$ ) при отсутствии фильтрации?
5. Что такое “активная пористость” и какова ее связь с водопроницаемостью породы?
6. Назовите существенные отличия во взаимодействии воды и горной породы в песках и глинах.
7. Охарактеризуйте особенности поровых и трещинных коллекторов. В чем заключается отличие гомогенной и гетерогенной типов среды?
8. Разъясните, чем отличаются пористая однородная среда, слоистая и с двойной трещиноватостью.
9. Что называют представительным или репрезентативным объемом горной породы? Как это понятие связано с представлением о сплошной геофильтрационной среде?
10. Почему для пористой и гетерогенно-блоковой сред представительный объем не может быть одинаковым?
11. Какие виды движения подземных вод изучает ДПВ? В чем особенности этих видов движения?
12. По каким показателям отличается водоносный пласт от относительно водоупорного, водоупорного?
13. Назовите основные гидрогеологические свойства и состояния пород и пластов.

### **Лекция № 3. Гидродинамические законы и параметры фильтрации**

3.1. Основной закон фильтрации связывает расход потока ПВ с потерями, характеризующими затраты энергии потока на преодоление сил внутреннего сопротивления среды. Кинетической характеристикой такого потока является скорость фильтрации  $V'$ , как отношение расхода  $Q$  потока ко всей площади его

поперечного сечения  $F$ :

$$\varphi' = \frac{Q}{F}. \quad (3.1)$$

В этом случае  $\varphi'$  не является действительной скоростью фильтрации, поскольку при ее определении учитывается вся площадь сечения потока, а не площадь порового пространства, через которую реально движется вода. Значение скорости  $\varphi'$  позволяет легко сравнить между собой различные потоки. Действительная скорость фильтрации  $u$  связана со скоростью фильтрации соотношением

$$u = \frac{Q}{F \cdot n_a} = \frac{\varphi'}{n_a}, \quad (3.2)$$

где  $n_a$  - активная пористость (трещиноватость),

которое получено из формулы для расхода

$$Q = u \cdot (F \cdot n_a), \quad (3.3)$$

путем подстановки в (3.1).

Основной закон фильтрации (Дарси) имеет вид

$$\varphi' = k \cdot I, \quad (3.4)$$

где  $k$  - коэффициент фильтрации, м/сут, численно равный скорости фильтрации при  $I = 1$ .

Из (3.4) следует

$$\frac{\varphi'}{k} = I, \quad (3.5)$$

здесь  $\frac{\varphi'}{k}$  характеризует силы вязкости или сопротивления среды, а  $I$  - разность напоров, обуславливающие фильтрацию ПВ.

Определим расход потока из (3.1), имея ввиду (3.4)

$$Q = k \cdot I \cdot F. \quad (3.6)$$

Для фильтрации по пласту

$$F = h_{\varphi} \cdot B \quad (3.7)$$

где  $h_{\varphi}$  - средняя мощность пласта;

$B$  - ширина потока,

$I$  - напорный градиент определяемый отношением разницы гидростатических напоров ( $H_2 - H_1$ ) к длине участка  $L_{1-2}$  (рис. 3.1):

$$I = \frac{H_2 - H_1}{L_{1-2}}. \quad (3.8)$$

Здесь  $H_1$  и  $H_2$  определяются согласно (2.4).

Физический смысл коэффициента фильтрации из (3.6):

$$k = \frac{Q}{I \cdot F}, \quad (3.9)$$

расход потока через единичное сечение ( $1m^2$ ) при  $I = 1$ . Значения  $k$  для песков 1-50 м/сут, супесей 0,01-1,0, суглинков - 0,0001-0,01, глин - меньше 0,0001 м/сут.

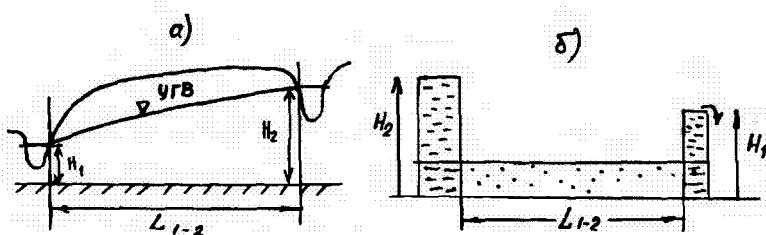


Рис. 3.1. Фильтрация под влиянием разности напоров:  
а - естественные условия, б - модель

Для перетока из одного водоносного горизонта в другой через слой слабопроницаемых суглинков, глин мощностью  $m_o$  и коэффициентом фильтрации  $k_o$  на участке территории длиной  $L$  и шириной  $B$  имеем (рис.3.2):

$$Q_z = k_o \cdot \frac{H_2 - H_1}{m_o} \cdot B \cdot L, \quad (3.10)$$

где  $H_1$  – уровень воды в пласте (1);

$H_2$  – уровень воды в пласте (2).

3.2. При изучении фильтрации воды и других жидкостей с переменной вязкостью и удельным весом используют коэффициент проницаемости  $k_n$ . Он связан с коэффициентом фильтрации соотношением

$$\frac{k}{g} = \frac{k_n}{v}, \quad (3.11)$$

где  $v$  – коэффициент кинематической вязкости жидкости,  $g$  – ускорение силы тяжести.

Размерность коэффициента проницаемости  $\text{см}^2$  или Дарси,  $1\text{D} = 10^{-8} \text{ см}^2$ .

Уравнение закона Дарси аналогично уравнению закона Гагена-Пуазейля в гидравлике. Расход через капиллярные трубы равен

$$Q = n \frac{\pi \cdot g \cdot R^4 \cdot I}{8v}, \quad (3.12)$$

а скорость движения воды по капиллярам

$$q' = n \frac{g \cdot R^2}{8v} I, \quad (3.13)$$

где  $R$  – радиус и  $n$  – число капилляров.

Выражение для коэффициента фильтрации находим из (3.4) и (3.13):

$$k = n \frac{g \cdot R^2}{8v} \quad (3.14)$$

и для коэффициента проницаемости из (3.11) и (3.14):

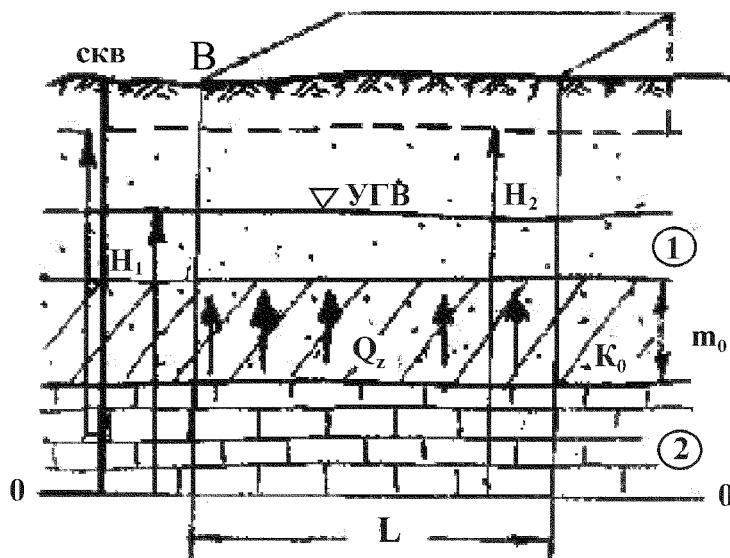
$$k_n = n \frac{R^2}{8}. \quad (3.15)$$

3.3. Проницаемость горных пород уменьшается с увеличением глубины их залегания под действием веса вышележащих пород.

Породы с упорядоченной внутренней структурой проявляют анизотро-

нию фильтрационных свойств, то есть значения коэффициента фильтрации по разным осям координат будут существенно неодинаковыми (лессы, слоистые песчано-глинистые породы, трещиноватые по определенному направлению породы). Для оценки этих свойств пользуются коэффициентом анизотропии

$$\lambda^2 = \frac{k_x}{k_y} . \quad (3.16)$$



**Рис. 3.2. Схема к расчету расхода перетока через слой слабопроницаемых пород**

3.4. Закон Дарси описывает линейную связь между  $\mathcal{V}$  и  $I$ , которая на графике (рис. 3.3) представлена прямой линией. Однако этот закон имеет верхний и нижний пределы применимости.

В первом случае нарушение закона Дарси связано с возникновением турбулентности потока ПВ в закарстованных породах или породах с крупными трещинами. Такие эффекты возникают при значениях  $k > 1000$  м/сут и значительных градиентах потока (вблизи шахтных стволов, открытых дрен, подземного контура плотин). Величина критической скорости  $\mathcal{V}_{kp} \geq 500$  м/сут. Это достаточно редкие случаи, при которых справедливо выражение

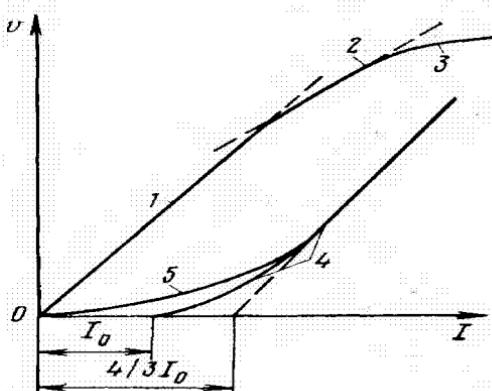
$$I = \frac{\mathcal{V}}{k} (1 + \alpha \mathcal{V}) , \quad (3.17)$$

где  $\alpha$  - коэффициент нелинейности фильтрации.

Во втором случае нарушение закона Дарси происходит в глинистых тонкодисперсных породах, где силы молекулярного взаимодействия между водой и породой вызывают дополнительные сопротивления движению жидкости. Существуют некоторые значения критического напорного градиента  $I_0$ , ниже которого движение подземных вод не происходит ( $\mathcal{V} = 0$  при  $I \leq I_0$ ). При  $I > I_0$  возникает течение ПВ, причем коэффициент фильтрации изменяется в зависимости от  $I$ . При  $I > I_0$  справедливо выражение (рис. 3.3)

$$\mathcal{V} = k \left( I - \frac{4}{3} I_0 \right) . \quad (3.18)$$

3.5. Емкостные свойства горных пород проявляются в условиях нестационарной фильтрации, то есть при изменении уровня ПВ и характеризуют способность пород поглощать или отдавать воду. Различают гравитационную и упругую емкости. В грунтовых водах главную роль играют процессы гравитационного насыщения (при подъеме уровня) или осушения пород (при снижении уровня). В напорных водах – упругого сжатия или расширения воды и пород, вызванные изменением давления в пласте.



**Рис. 3.3. Графическое изображение обобщенного закона Дарси (но И.К. Гавич)**  
1 – линейная зависимость; 2 – приближенная линейная зависимость (переходный режим фильтрации); 3-5 – обобщенные зависимости (3 – линейно-турбулентный режим фильтрации, 4 – линейно-вязкопластический режим фильтрации); 5 – с учетом молекулярных взаимодействий)

Гравитационная емкость пород показывает, какой объем свободной воды  $\Delta V_0$  может вместить или отдать единичный объем пласта при изменении уровня на  $\Delta H$  за счет насыщения или осушения пласта. В первом случае показатель называется недостатком насыщения  $\mu_n$ , во втором – водоотдачей  $\mu_e$ .

Их определяют по формулам

$$\mu_n = PV - \Theta \text{ и } \mu_e = PV - M/V. \quad (3.19)$$

На глубинах нескольких метров от поверхности земли изменения естественной влажности  $\Theta$  невелики и можно считать  $\Theta \approx M/V$ . Тогда  $\mu_n \approx \mu_e = \mu$  и

$$\mu = \frac{\Delta V_0}{\Delta H} \quad (3.20)$$

Ориентировочные значения  $\mu$ : для песков 0,1-0,3, для супесчано-суглинистых пород 0,005-0,1, для глин 0,005, для трещиноватых известняков 0,01-0,05, для трещиноватых песчаников 0,02-0,03. Измеряется в долях единицы (безразмерная).

3.6. Упругая емкость пород показывает, какой объем свободной воды

может отдать или вместить единичный объем пласта за счет изменения объема пор и упругого сжатия (расширения) воды. Действие первого фактора оценивается коэффициентом удельного сжатия скелета породы  $\beta_c$ , действие второго - аналогичным коэффициентом для воды  $\beta_e$  (лекция № 2). Освобождающееся при этом суммарное количество воды представляет собой упругие запасы. Коэффициент упругой емкости пород определяется по зависимости

$$\beta^* = n\beta_e + \beta_c. \quad (3.21)$$

Для напорного пласта мощностью  $m$  коэффициент упругой водоотдачи равен

$$\mu^* = \gamma \cdot \beta^* \cdot m. \quad (3.22)$$

Значения  $\beta^*$  изменяются в зависимости от литологического состава, мощности и глубины залегания пород. Наибольшие значения характерны для глинистых  $10^{-3} - 10^{-4}$  и песчаных  $(0,5 - 2) \cdot 10^{-5} \text{ MPa}^{-1}$  пластов, меньшие для известняков и песчаников  $(1 - 5) \cdot 10^{-6}$ . Шестаковым В.М. получены эмпирические зависимости для количественной оценки упругой емкости пласта  $\beta^*$ . С увеличением глубины залегания водоносных пород  $z$  этот параметр убывает по зависимости

$$\beta^* = \frac{A}{z} \quad (3.23)$$

где  $A$  - коэффициент, определяемый литологией водосодержащей породы. Для песков и песчаников этот коэффициент принимается равным  $10^{-3}$ , а для глинистых пород -  $(2 \div 4) \cdot 10^{-2}$ .

3.7. Движение воды в неполнотью насыщенных породах называется инфилтратией. Здесь не все поры насыщены водой, присутствует воздух, пары воды. В движении участвует как свободная, так и капиллярная вода. Движение происходит под влиянием гравитационных сил, разности напоров и капиллярных сил. Выделяют два типа инфильтрации: свободная и нормальная. Свободная - это подземный дождь, наблюдается в крупнозернистых породах. Здесь нет сплошного потока воды, движение осуществляется отдельными каплями или струями под влиянием сил гравитации. Возникает при неинтенсивном (недостаточном) источнике поступления воды. Нормальная инфильтрация - это сплошной поток воды в порах грунта, например, поток воды вниз из канала. Величина напорного градиента здесь всегда больше 1 (рис 3.4.) и равна

$$I = \frac{h_0 + H_k + l}{l} = \frac{h_0 + H_k}{l} + 1 \quad (3.24)$$

Величина расхода при инфильтрации из канала

$$q = k_e \cdot I \cdot B \cdot L, \quad (3.25)$$

где  $k_e$  - коэффициент влагопереноса,

$B$  - ширина,

$L$  - длина канала.

Значения коэффициента влагопереноса существенно зависят от соотношения количества в порово-трещинном пространстве воды и газов. Фазовая

проницаемость характеризует условия движения какой-либо одной фазы (воды или газа) в условиях одновременного движения другой. Величина фазовой проницаемости возрастает с увеличением степени насыщенности пор или трещин породы рассматриваемой фазой. Так в зоне аэрации фазовая проницаемость воды (коэффициент влагопереноса) возрастает с увеличением влажности пород по зависимости:

$$k_e = k \bar{\Theta}^n, \quad (3.26)$$

где  $\bar{\Theta}$  - относительная влажность равная  $(\Theta - MMB)/(PВ - MMB)$ .

Здесь  $\Theta$  - естественная влажность,  $PВ$  - полная и  $MMB$  - максимально-молекулярная влагоемкость,  $n$  - показатель степени, равен 3-5 и более.

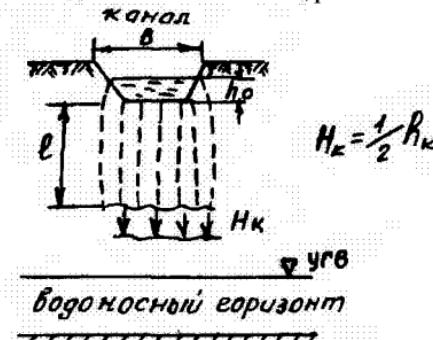


Рис. 3.4. Нормальная фильтрация из канала

3.8. Для количественной оценки процессов миграции  $PВ$  используют действительную скорость фильтрации, то есть скорость, с которой реально движутся вещества растворенные в воде. Этот процесс называется конвекцией и описывается уравнением поршневого вытеснения

$$l = u \cdot t,$$

где  $u$  определяется по зависимости (3.2).

3.9. В гетерогенных породах (рис. 2.2), характеризующихся неоднородным строением (пересланывание песчано-глинистых слоев) или двойной трещиноватостью (система мелких трещин в блоках пород разделенных крупными трещинами), крупные трещины и песчаные слои являются основными путями фильтрации. Но их объем в породе небольшой и они не определяют емкостные свойства гетерогенной породы. Слабо трещиноватые блоки и глинистые слои характеризуются невысокой проницаемостью, но формируют основные емкостные свойства таких пород. Сработка емкостных запасов здесь происходит в два этапа: на первом быстро срабатывается емкость в крупных трещинах и в песчаных слоях, а на втором более медленно срабатывается емкость в мелких трещинах и глинистых слоях. При этом общий показатель водоотдачи всего пласта изменяется во времени.

### 3.10. Водопроводимость пласта для напорных вод

$$T = k \cdot m \quad (3.27)$$

не изменяется при снижении (повышении) пьезометрического уровня воды в пласте.

Для грунтовых вод

$$T = k \cdot h \quad (3.28)$$

изменяется в зависимости от положения свободной поверхности воды в пласте. Размерность  $T$  [м<sup>2</sup>/сут].

Пьезопроводность напорных вод,

$$\alpha^* = \frac{T}{\mu^*} \quad (3.29)$$

и уровнепроводность грунтовых вод

$$\alpha = \frac{T}{\mu} \quad (3.30)$$

характеризуют скорость распространения возмущения от границы, где происходит изменение уровня  $H$  и расхода  $Q$  на остальную территорию области фильтрации. Размерность  $\alpha$  и  $\alpha^*$  [м<sup>2</sup>/сут]. Сравнивая коэффициенты  $\mu^*$  и  $\mu$  видим, что они различаются на два-три порядка ( $\mu^* = 10^{-3} - 10^{-5}$ ,  $\mu = 10^{-1} - 10^{-2}$ ), что говорит о том, что упругие запасы значительно меньше, чем гравитационные. Это позволяет в грунтовых водах пренебречь упругой емкостью пласта. Исключение составляют суглиники и глинистые пласти, для которых упругая и гравитационная емкости могут быть соизмеримы. В соответствии со значениями  $\mu^*$  и  $\mu$  различаются на несколько порядков и коэффициенты  $\alpha$  и  $\alpha^*$ . Скорость распространения возмущения уровней в напорных пластиах на порядок больше, чем в грунтовых.

### 3.11. Границы и граничные условия

Область фильтрации отделяется от остальной части водоносной системы известными границами (Лекция № 1). Выделяют естественные и искусственные, внешние и внутренние границы области фильтрации. На этих границах задаются определенные граничные условия (ГУ), которые представляются в математической форме и характеризуют принятый для расчетов закон изменения уровней и расхода. Выделяют четыре вида (рода) ГУ (рис. 6.1).

ГУ I рода представляет собой задание на внешней границе известного закона изменения уровня воды  $H = f(x, y, t)$ . (3.31)

В частном случае уровень может быть постоянным  $H = const$ . К границам такого вида относятся проницаемые (или открытые) границы — урезы рек, каналов, водохранилищ.

ГУ II рода связано с заданием известного закона изменения расхода на внешней или внутренней границе. Это может быть величина инфильтрационного питания на уровне грунтовых вод  $W = \frac{Q_z}{F}$ , где  $Q_z$  — расход воды, поступающий через зону аэрации на площади  $F$ , удельный расход на 1 м длины канала  $q = \frac{Q_k}{L_k}$ , расход воды на фильтре скважины  $Q_0$ . Расход может быть постоянным

во времени  $Q = \text{const.}$  (3.32)

В том случае, если внешняя граница области фильтрации принимается непроницаемой (водоупор), то на ней выполняется ГУ II  $Q = 0$ . (3.33)

Это закрытая граница.

ГУ III рода выражает зависимость между изменением расхода на границе  $Q_r$  и изменением уровня воды в самой области фильтрации  $H$ . В общем виде такая связь записывается как  $Q_r = f(H - H_r)$ , (3.34)

где  $H_r$  - некоторое фиксированное значение уровня, не связанное непосредственно с областью фильтрации. Примерами ГУ III рода являются: величина разгрузки грунтовых вод в виде испарения, которое зависит от глубины их залегания ( $H - H_r$ ), дебит родниковой разгрузки, зависящей от превышения уровня в области фильтрации над эрозионным врезом ( $H - H_r$ ), поступление воды из реки в водоносный горизонт через закальматированное русло и т.п.

ГУ IV рода выражает закон неразрывности потока на внутренней границе неоднородности. Математически это означает равенство расходов слева и справа относительно этой границы раздела сред, имеющих водопроводимости  $T_1$  и  $T_2$  соответственно

$$T_1 \frac{\partial H_1}{\partial l_1} = T_2 \frac{\partial H_2}{\partial l_2} \quad (3.35)$$

### Вопросы к лекции №3

1. Опишите функциональные связи между расходом, напорным градиентом в ПВ. В чем различие между скоростью фильтрации  $\Psi'$  и действительной скоростью  $u$ ?
2. Какова физическая сущность понятия “коэффициент фильтрации”? В чем заключается основное различие между коэффициентами фильтрации и проницаемости?
3. Что такое анизотропия фильтрационных свойств пород? В каких природных условиях она проявляется?
4. Какие основные зависимости трубной гидравлики используются в качестве феноменологических предпосылок закона фильтрации в горных породах?
5. Какие факторы вызывают нарушение линейного закона фильтрации при движении воды в трещиноватых и глинистых породах? Запишите обобщенные законы фильтрации; изобразите графически в координатах  $\Psi' - I$  основной и обобщенные законы фильтрации.
6. В результате каких процессов в подземных водах проявляется гравитационная водоотдача  $\mu$ ? Упругая водоотдача пласта  $\mu^*$ ? Каковы численные значения этих показателей для разных типов пород?
7. В чем отличие между упругоемкостью  $\beta^*$  и упругой водоотдачей  $\mu^*$ ? Какие основные природные факторы влияют на величину  $\beta^*$ ?
8. Что такое активная пористость породы? Как она связана с величиной гравитационной водоотдачи?

9. Почему после обильных дождей уровень воды в трещиноватых гранитах поднимается гораздо выше, чем в расположенных по соседству песчаных массивах?
- 10.Каким образом проявляется связь между емкостными свойствами пласта и скоростью распределения возмущения уровня по пласту?
- 11.Почему показатели  $T$  и  $a$  являются характеристиками пласта, а не породы?
- 12.Какое из выражений закона Дарси

$$q_x = -kh \frac{dh}{dx} \text{ и } q_z = -km \frac{dH}{dx}$$

записано для грунтовых вод?

- 13.К граничным условиям какого рода относятся следующие математические выражения:  $Q_p = \frac{k_0}{m_0} b \cdot l \cdot (H - H_p) ?$   $Q_{cse} = -2\pi Tr \frac{dS}{dr} ?$

$$T_1 \left( \frac{dH}{dx} \right)_1 = T_2 \left( \frac{dH}{dx} \right)_2 ? \Delta H^0 = v \cdot t ?$$

- 14.Какие границы потока характеризуют условия:  $\frac{\partial H}{\partial z} = 0$  и  $H = z$ ?

- 15.В чем отличие определения расходов по Дарси в горизонтальном и вертикальном направлениях?

- 16.В чем отличие определения расходов фильтрационного и инфильтрационного потоков по Дарси?

- 17.Может ли ГУ III рода в частных случаях рассматриваться как ГУ I или как ГУ II рода? Приведите примеры.

- 18.При изменении напоров в области фильтрации изменится ли: а) расход, идущий через контур с граничными условиями I рода, б) уровень на этом контуре?

- 19.При изменении напоров в области фильтрации изменится ли: а) расход, идущий через контур с граничными условиями II рода, б) уровень на этом контуре?

- 20.Может ли граница с условиями I рода быть одновременно границей с условиями II рода? Если да, то привести пример таких границ.

#### Лекция № 4. Гидродинамические основы движения ПВ

##### 4.1. Гидродинамическая сетка (ГДС)

Структуру потока удобно представлять в виде ГДС. Определенная совокупность линий тока (ЛТ) и линий равного напора (ЛН) называется ГДС (рис. 4.1).

ЛН - совокупность точек с равными значениями  $H$ , т.е.  $H = const$ ,  $\frac{dH}{dl} = 0$ . По касательной в каждой точке ЛН имеем  $v = 0$  и  $Q = 0$ . Это потенциали, гидроизогипсы, изопьезы. К ЛН относятся урезы рек, периметр попечерного сечения поверхностных водотоков. Это всегда проницаемая, открытая

граница.

ЛТ – линия, в каждой точке которой вектор скорости фильтрации и направление  $\text{grad } H$  совпадают с касательной, проходящей через эту точку. При установившемся движении ЛТ является траекторией движущейся частицы жидкости. По ЛТ выполняется условие  $\frac{dH}{dl} \rightarrow \max$ , перпендикулярно ЛТ имеем  $Q = 0$ , то есть ЛТ является непроницаемой или закрытой границей.

Совокупность ячеек вдоль пары соседних ЛТ называется трубкой или лентой тока. Расходы во всех лентах тока одной ГДС одинаковые  $Q_1 = Q_2 = Q_i = Q_n$ . Поэтому сгущение ЛТ свидетельствует об увеличении плотности фильтрационного потока (рис. 4.1).

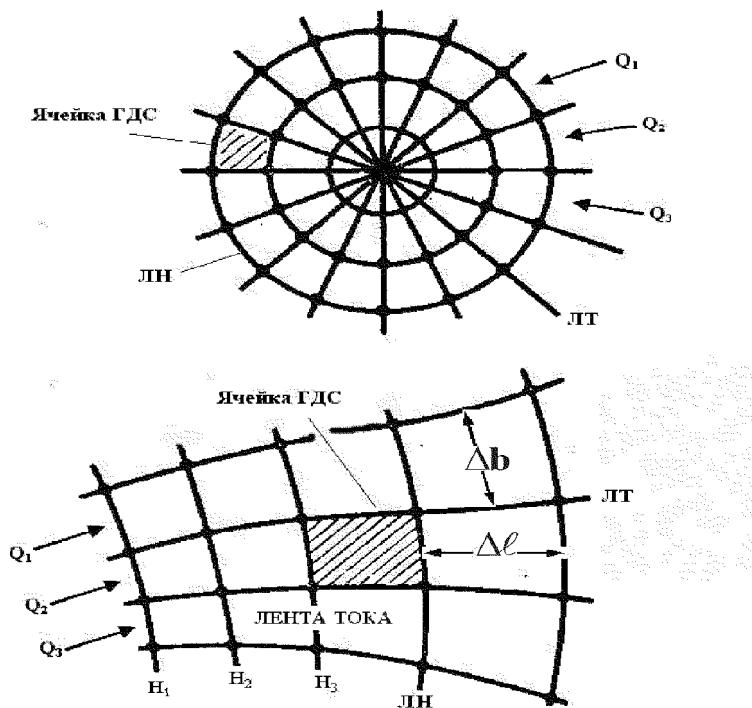


Рис. 4.1. Гидродинамические сетки для разных типов потоков подземных вод

Все проницаемые границы являются крайними ЛН, непроницаемые – крайними ЛТ. В совокупности они образуют одну ячейку ГДС, включающую всю исследуемую область фильтрации.

ЛН проводят через равные сечения, так что  $H_j - H_{j-1} = \text{const}$ . Поэтому сгущение ЛН свидетельствует об увеличении напорного градиента.

$$\text{Расход в любой ячейке ГДС } \Delta Q_{ij} = (km)_{ij} \frac{\Delta H_j}{\Delta l_j} \Delta b_i = \text{const}. \quad (4.1)$$

В однородном пласте  $km_{ij} = \text{const}$  и, учитывая, что  $\Delta Q_{ij} = \text{const}$  и  $\Delta H_j = \text{const}$ , имеем  $\frac{\Delta b_i}{\Delta l_j} = \text{const}$ , то есть все ячейки ГДС должны быть подобны. ГДС строится графически методом последовательных приближений, так чтобы соблюдалось условие (4.1).

#### 4.2. Вывод дифференциальных уравнений ЛТ и ЛН

Поместим точку  $A$  в начало координат  $XOY$  (рис.4.2). Здесь  $ds$ -элемент ЛТ,  $\vec{v}$ -вектор скорости,  $\alpha$ -угол касательной ЛТ с осью  $x$ ,  $dx$ ,  $dy$  и  $dy'$ -проекции  $ds$  и  $\vec{v}$  на соответствующие оси.

Очевидно, что

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha \quad (4.2)$$

$$\frac{dx'}{ds} = \cos \alpha, \quad \frac{dy'}{ds} = \sin \alpha$$

$$\text{или } \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{v}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{v} \quad (4.3)$$

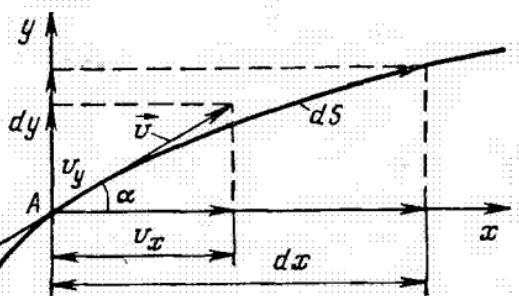
то есть получили связь проекций ЛТ с проекциями вектора скорости.

Согласно правилу пропорции имеем

$$\frac{dx}{dx'} = \frac{dy}{dy'} = \frac{ds}{ds}$$

$$\text{или } v_x dx - v_y dy = 0, \quad (4.4)$$

то есть получили дифференциальное уравнение для ЛТ.



**Рис. 4.2. Схема к выводу дифференциального уравнения линии тока**

Введем понятие функции тока  $\psi$ , которая на каждой ЛТ имеет постоянное значение, так что

$$\psi_t - \psi_{t-1} = \frac{\Delta Q_t}{m} = \text{const}, \quad (4.5)$$

где  $m$ -мощность пласта.

$\frac{\Delta Q_t}{m}$ -удельный, на 1 м мощности расход по ленте тока между двумя соседними ЛТ.

$$Q_{\text{пр}} = \sum_{t=1}^n \Delta Q_t, \text{ где } n - \text{число лент тока.}$$

Так как расход по ленте тока не меняется  $\psi = const$ , то  $d\psi = 0$ . (4.6).

$$\text{Тогда полный дифференциал } d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0. \quad (4.7)$$

Сравнивая (4.4) и (4.7) видим, что

$$\varphi_y' = \frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ и } \varphi_x' = -\frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (4.8)$$

Введем понятие функции ЛН:

$$\varphi = -kH \quad (4.9)$$

$$\text{Тогда } \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -k \frac{\partial H}{\partial x} = \varphi_x', \quad (4.10)$$

$$\text{и } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -k \frac{\partial H}{\partial y} = \varphi_y'$$

Сравнивая (4.8) и (4.10) имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4.11)$$

Это условие Коши-Риммана, подтверждающее ортогональность ЛТ и ЛН. Пары соседних ЛТ и ЛН образуют ячейку ГДС (рис. 4.1). Ячейка является криволинейным прямоугольником, в котором выделяют  $\Delta J$ -среднюю длину – расстояние между ЛН и  $\Delta b_i$ -среднюю ширину – расстояние между ЛТ.

Расчеты по ГДС.

Градиент потока  $I_j = \frac{\Delta H}{\Delta J}$ . Определяется в разных ячейках ГДС, находим участки с  $I_{min}$  и  $I_{max}$ .

Расход потока. Вначале определяется расход в одной ячейке: для плановой фильтрации в горизонтальной плоскости ( $X0Y$ )

$$q_j = k m \Delta H \frac{\Delta b_i}{\Delta J}, \quad (4.12)$$

для профильной фильтрации в вертикальной плоскости ( $X0Z$ )

$$q_i = k B \Delta H \frac{\Delta b_i}{\Delta J}, \quad (4.13)$$

где  $B$ -ширина потока в плане, м,

$m$ -мощность водоносного пласта, м.

Определение структуры потока выполняется на основе анализа конфигурации ЛТ и ЛН. Выделяют плоскопараллельную, радиальную сходящуюся и расходящуюся, планово-радиальную, сложную структуру потока.

4.3. Закон преломления фильтрационных потоков в неоднородных пластах

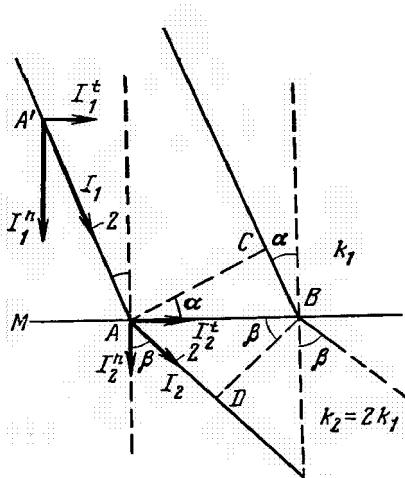
ЛТ преломляются на границе сред с разной проницаемостью (рис.4.3).

Здесь  $\alpha$ -угол падения ЛТ к нормали границы раздела,  $\beta$ -угол преломления. Рассматривается установившийся режим фильтрации, подчиняющийся

закону Дарси. Согласно ГУ-IV рода  $q_1 = q_2$  (закон неразрывности потока). Тогда

$$k_1 \cdot I_1 \cdot AC = k_2 \cdot I_2 \cdot BD, \quad (4.14)$$

$$\text{но } AC = AB \cdot \cos \alpha \text{ и } BD = AB \cdot \cos \beta. \quad (4.15)$$



**Рис. 4.3. Схема к выводу закона преломления линий токов**

Проекции напорных градиентов (нормальную к границе раздела  $I^n$  и тангенциальную  $I^t$ ) можно определить:

$$I_1^n = I_1 \cos \alpha \text{ и } I_2^n = I_2 \cos \beta, \quad (4.16)$$

$$I_1^t = I_1 \sin \alpha \text{ и } I_2^t = I_2 \sin \beta. \quad (4.17)$$

Подставив (4.15) и (4.16) в (4.14), имеем

$k_1 \cdot I_1^n = k_2 \cdot I_2^n$ , то есть  $I_1^n = I_2^n$  или

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{I_2^n}{I_1^n}. \quad (4.18)$$

Это первый закон преломления ЛТ - изменение нормальной составляющей напорного градиента  $I^n$  при переходе границы раздела сред обратно пропорционально изменению величины коэффициента фильтрации  $k$ . При этом нормальные составляющие скорости фильтрации не изменяются ( $I^n = \text{const}$ ).

Далее, подставив (4.15) и (4.17) в (4.14), получим  $\frac{k_1 I_1^t}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{k_2 I_2^t}{\operatorname{tg} \beta}$ , но из условия неразрывности функции напора  $H$  на границе раздела сред следует, что

$I_1^t = I_2^t$ , тогда

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}. \quad (4.19)$$

Это второй закон преломления ЛТ - тангенсы углов падения и преломления пропорциональны коэффициентам фильтрации. Угол преломления увеличивается с возрастанием  $k_2$ , т.е. чем больше разница  $k_1$  и  $k_2$ , тем резче проявление преломления ЛТ.

При фильтрации по двум направлениям преломления ЛТ не происходит перпендикулярно и параллельно границе раздела сред. При перпендикулярном движении  $I = I^n$ ,  $I^t = 0$ ,  $\alpha = 0$  и  $\cos \beta = \cos \alpha = 1$ .

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{k_1}{k_2} \quad (4.20)$$

$$\text{и } V'_1 = V'_2 \quad (4.21)$$

При параллельном движении  $\alpha = 90^\circ$ ,  $I^n = 0$ ,  $I^t = I \equiv \text{const}$ . (4.22)

$$\frac{V'_1}{V'_2} = \frac{k_1}{k_2} \quad (4.23)$$

$$q_{ee} = q_1 + q_2. \quad (4.24)$$

#### 4.4. Следствие закона преломления ЛТ.

1. При соотношении  $\frac{k_{\max}}{k_{\min}} > 100$  разница в углах падения и преломления

приближается к  $90^\circ$ . Считают, что в среде с  $k_{\max}$  движение параллельно, а в среде с  $k_{\min}$  -перпендикулярно к границе раздела сред.

Для слоистых толщ при соотношении коэффициентов фильтрации больше 100 в хорошо проницаемых пластах фильтрация будет только горизонтальной, а в слабо проницаемых пластах - только вертикальной. Это предпосылка Митиева-Гиринского.

2. В неоднородных в плане пластах при  $\frac{k_{\max}}{k_{\min}} > 100$  считают (рис. 4.4):

при расположении инженерного сооружения (ИС) в пласте с  $k_{\max}$  граница раздела есть закрытая граница ( $Q = 0$ );

при расположении ИС в пласте с  $k_{\min}$  граница раздела есть открытая граница ( $H = \text{const}$ ).

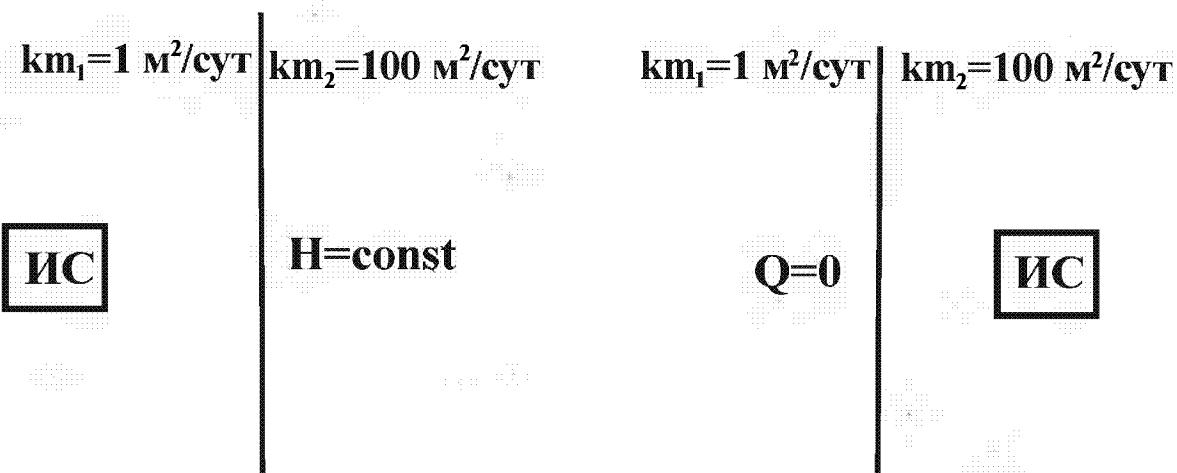
3. При соотношении  $k_1$  и  $k_2$  меньше 10 ÷ 20 возможно считать пласт условно-однородным. Среднее значение коэффициента фильтрации определяется, исходя из конкретных условий строения среды и направления движения подземных вод. При фильтрации параллельно разделу сред из формулы (4.24) Г.Н. Каменский получил выражение

$$k_\varphi = \frac{\sum k m_i}{\sum m_i} \quad (4.25)$$

где  $m_i$  - геометрические размеры элементов неоднородности.

При фильтрации перпендикулярно разделу сред из (4.20) Г.Н. Каменский получил

$$k_{\varphi} = \frac{\sum m_i}{\sum \frac{m_i}{k_i}} \quad . \quad (4.26)$$



**Рис. 4.4. Схематизация плановой границы неоднородности при  $\frac{km_{\max}}{km_{\min}} \geq 100$**

4. При соотношении  $100 > \frac{k_{\max}}{k_{\min}} > 20$  схематизация является не всегда корректной. В этом случае необходимо учитывать сложную структуру потока и при необходимости использовать метод моделирования.

#### Вопросы к лекции №4

1. Какое условие выполняется вдоль ЛН? вдоль ЛТ?
2. Как положение ЛТ и ЛН относится с закрытой границей пласта (водоупором)?
3. Какое условие выполняется вдоль трубы (ленты) тока ГДС?
4. Каков физический смысл функций  $\varphi$  и  $\psi$  и как они связаны со значениями  $H$  и  $q$ ?
5. Как лучше всего графически представить гидродинамическую структуру потока?
6. Какие основные требования должны выполняться при построении ячеек ГДС в однородном пласте?
7. Какие гидродинамические характеристики потока можно определить по ГДС? Каким образом это сделать?
8. Каково содержание основных следствий закона преломления ЛТ?
9. Каким образом упрощается структура потока при использовании предпосылки Мятиева-Гиринского?
10. В чем принципиальное отличие формул для определения среднего значения коэффициента фильтрации при движении подземных вод параллельно границам неоднородности и перпендикулярно к ним?

## Лекция № 5. Принципы типизации и схематизации гидрогеологических условий

### 5.1. Общие положения

Это - одна из основных тем ДПВ. Типизация гидрогеологических условий (ГГУ) – есть гидродинамическое (ГД) районирование исследуемой сложно построенной территории с выделением однотипных по ГД особенностям строения и по воздействию внешних факторов участков и периодов времени под конкретную решаемую задачу. Вначале выделяются главные, ведущие факторы, определяющие гидродинамику, а затем по степени их взаимодействия – типовые участки. То есть вся область фильтрации делится на более мелкие области – фрагменты, а прогнозный период на временные фрагменты с однотипным влиянием внешних границ и режимом фильтрации. В пределах каждого фрагмента ГД условия фильтрации более простые, чем в целом по всей области и на весь период прогноза. Если условия изначально простые, то типизации может и не быть. Схематизация определяет выбор и уравнения для расчетов. Схематизация – это упрощение природной обстановки и действующих факторов в пределах всей области фильтрации или каждого района. Схематизация выполняется на свой определенный период времени прогноза применительно к конкретной задаче и выбранному методу расчета. При этом проводится:

- Выявление главных и второстепенных гидрогеологических факторов по степени их воздействия на ГД условия потоков.
- Упрощение природной обстановки путем исключения (или замены) второстепенных факторов – построение расчетной схемы – упрощенное представление области фильтрации для ГД расчетов.
- Оценка ошибок, возникающих при упрощении гидрогеологических условий, так называемые исследования схематизации. Оценка надежности расчетной схемы для составления прогноза с точки зрения его точности и инженерного запаса “прочности”.

К главным факторам почти всегда относятся:

- Строение пласта – однородное, неоднородное, условно однородное.
- Положение границ и задаваемые на них ГУ.

Прочие факторы обычно зависят и проявляют себя в зависимости от двух вышеперечисленных.

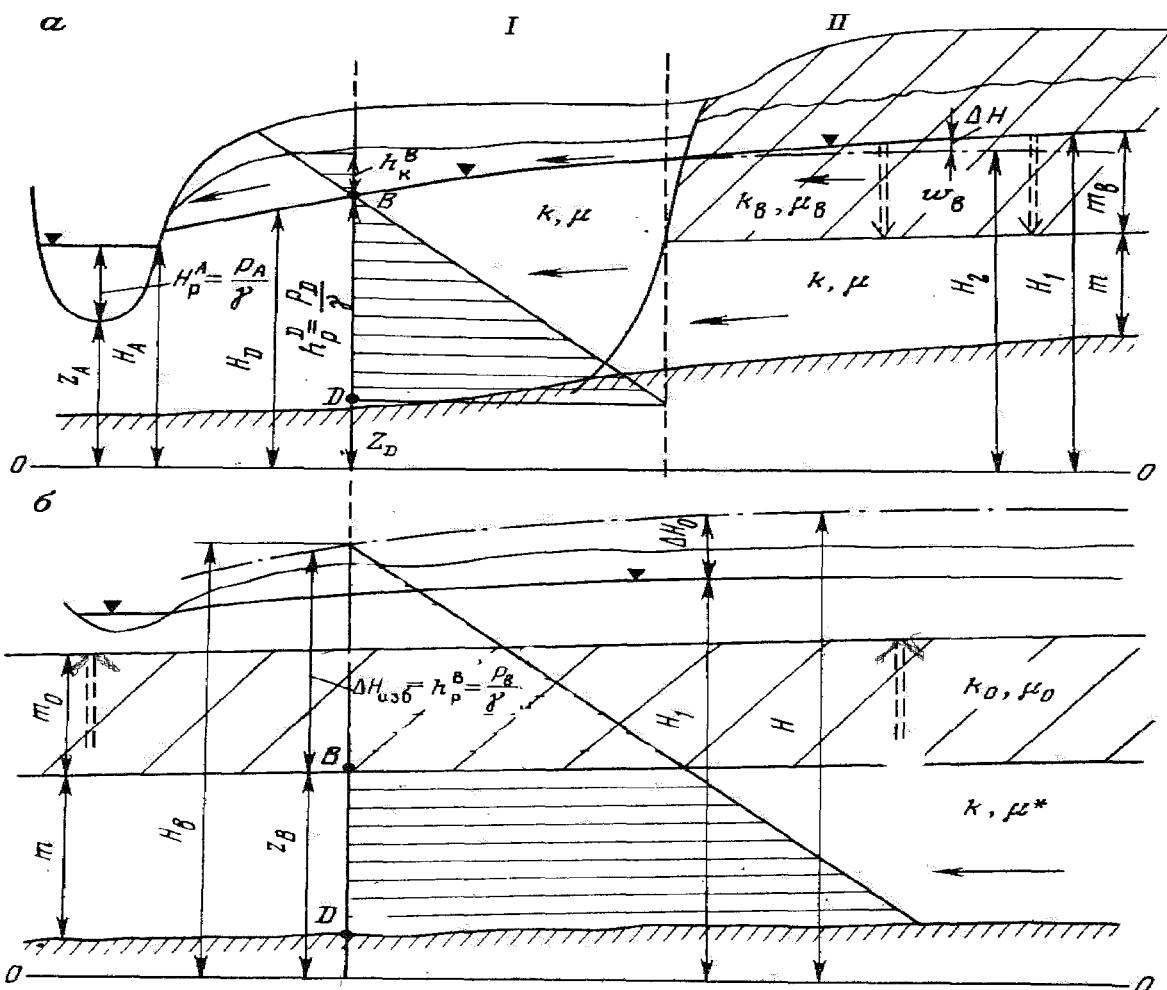
Основной принцип схематизации - от сложного к простому. Поэтому самым важным вопросом схематизации является определение допустимой степени упрощения. В зависимости от целевой задачи прогноза, типа ИС и требований к детальности и достоверности прогноза одни и те же реальные природные условия могут быть схематизированы различным образом.

### 5.2. ГД особенности потоков ПВ

Характеристика потоков ПВ лежит в основе геофильтрационной схематизации, выделения фрагментов в области фильтрации. Различают типы потоков по следующим признакам.

#### 5.2.1. По гидравлическому состоянию пласта:

- грунтовые (безнапорные), характеризуются свободной поверхностью уровня ПВ, при  $h = z$   $P = 0$ , эпюра давления (рис. 5.1), происходит изменение мощности пласта  $h$  при колебании уровня  $H$ ,
- напорные, пьезометрическая поверхность уровня, положение которой можно определить только вскрыв водоносный пласт, наличие  $H_{usб}$ , упругой емкости  $\mu^* \ll \mu$ ;
- напорно-безнапорные;
- субнапорные, обычно грунтовые воды, имеющие небольшой избыточный напор, вследствие наличия суглинков в кровле проницаемого водоносного пласта (рис. 5.1).



**Рис. 5.1. Гидродинамические особенности и виды потоков подземных вод по условиям залегания и гидравлическому состоянию пласта  
(по И.К. Гавич)**

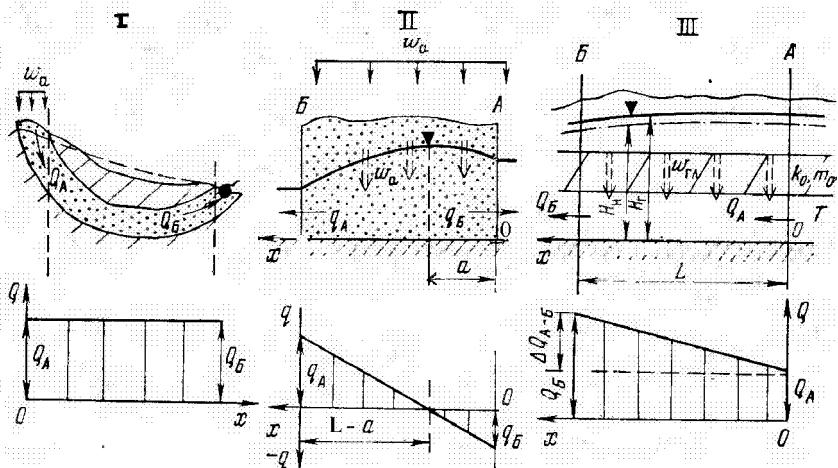
аI – грунтовые; аII – субнапорные; б – напорные (заштрихованы – эпюры распределения гидростатического давления)

#### 5.2.2. По характеру и виду питания и разгрузки:

- сосредоточенное питание (рис. 5.2). Все питание и разгрузка осуществляется по латеральным (боковым) границам потока (на  $x = 0$  и  $x = L$ ). Существует только горизонтальный водообмен, причем при стационарном

режиме фильтрации  $Q(x) = \text{const}$ . Наиболее характерно при отсутствии инфильтрационного питания  $W_a = 0$ , так и глубинного перетекания  $W_\infty = 0$ . Здесь монотонное изменение  $H(x)$ ,

- рассеянное питание осуществляется по всей площади распространения потока  $W_a \neq 0$  или (и)  $W_\infty \neq 0$ . Изменение  $H(x)$  в области фильтрации не монотонное, здесь могут быть водоразделы ( $\frac{dH}{dx} = 0$ ). Существует горизонтальный  $Q_s$  и вертикальный  $Q_e$  водообмен. Их соотношение определяет коэффициент водообмена  $K_{\phi\phi} = Q_e/Q_s$ .



**Рис. 5.2. Гидродинамические особенности и виды потоков подземных вод по типу питания и разгрузки**

I – напорный с горизонтальным водообменом, питание – сосредоточенное; II – грунтовый с горизонтально-вертикальным инфильтрационным водообменом, питание – рассеянное, разгрузка – сосредоточенная; III – напорный с горизонтально-вертикальным глубинным водообменом

5.2.3. По изменчивости свойств фильтрационной среды (неоднородность пласта) в зависимости от решаемых задач выделяют однородные, условно-однородные и неоднородные пласти. Показатель неоднородности характеризуется изменением  $k$  и  $T$ . Обычно, если соотношение  $\frac{k_{\max}}{k_{\min}} \leq 2$ , то пласт принимается однородным со среднеарифметическим значением  $k_p$ .

Существует два основных природных фактора изменения фильтрационных свойств:

- геолого-структурный и
- литолого-фациальный.

Более однородными всегда являются рыхлые, пористые породы, менее

однородными – трещиноватые.

Изменчивость свойств пород связана с факторами разного масштаба воздействия:

1. Региональные – монотонно направленные и долговременно воздействующие факторы. В результате их воздействия формируются геологические структуры синклинального или антиклинального типа, крупные геоморфологические элементы – речные долины и т.п.

2. Случайные (кратковременные и разнонаправлено действующие) факторы, в результате которых формируется микротрещиноватость, карст, трещиноватость выветривания и т.п.

Реально проявляется совместное действие как региональных, так и локальных факторов (рис. 5.3).

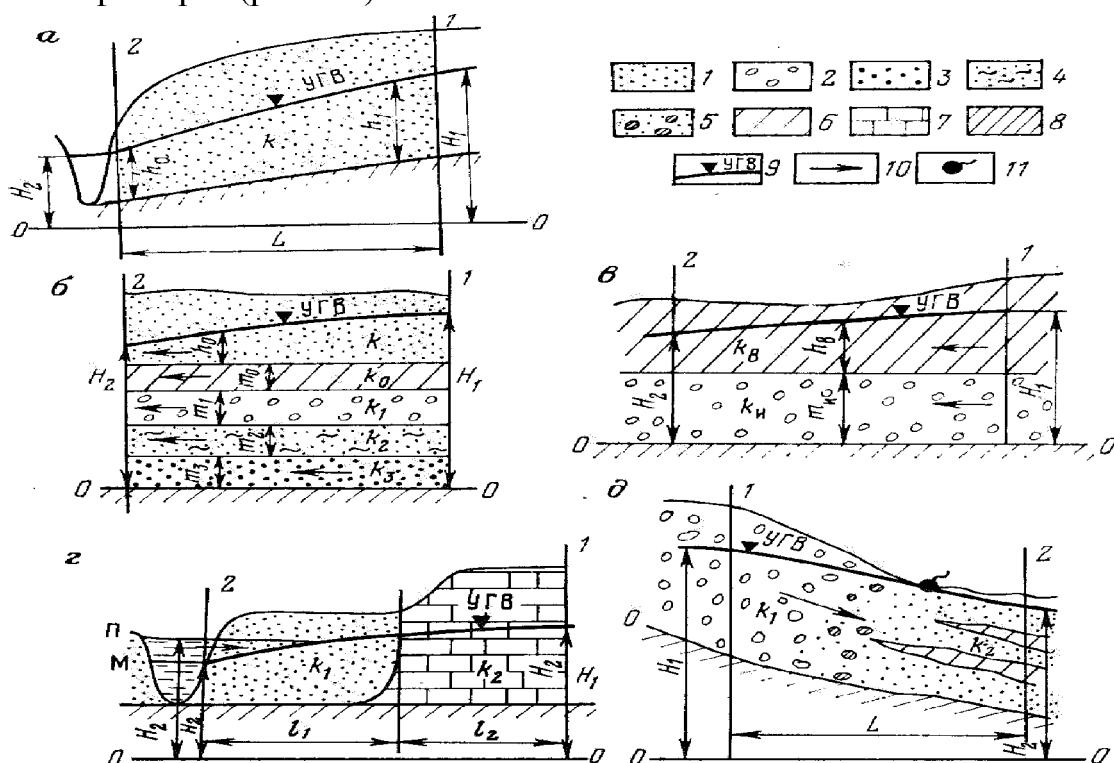


Рис. 5.3. Типы неоднородного строения геологической среды  
(по Г.Н. Каменскому)

а – однородное; б – многослойное; в – двухслойное;

г – кусочно-однородное; д – постепенно изменяющееся.

1-4 – песок (1 – крупнозернистый, 2 – среднезернистый, 3 – мелкозернистый, 4 – глинистый); 5 – галечник; 6 – суглинки; 7 – известняки; 8 – глины; 9 – УГВ; 10 – направление движения воды; 11 – родник

Выделяют 4 типа элементов неоднородности разного порядка характеризующихся своими размерами  $R_H$ .

1. Меганеоднородность -  $R_H > 10^2 - 10^3$  м.
2. Макронеоднородность -  $R_H = 10^2 - 10^1$  м.
3. Мезонеоднородность -  $R_H = 10^1 - 10^{-1}$  м.
4. Микронеоднородность -  $R_H \leq 10^{-1}$  м.

Меганеоднородность формируется в основном под действием региональных факторов, геолого-структурных, реже литолого-фациальных.

Макронеоднородность формируется под действием как региональных, так и случайных факторов, в большей степени литолого-фациальных и условий, обуславливающих генезис трещиноватости.

Мезо- и макронеоднородность обусловлены в основном случайными факторами.

Таким образом, неоднородность пласта определяется как закономерными - известными, так и случайными - неизученными факторами и математически может быть выражена в виде  $U(x, y) = I(x, y) + \varepsilon(x, y)$ , (5.1)

где  $I(x, y)$  характеризует закономерную составляющую, выражаемую в виде тренда или карты в изолиниях параметра пласта,

$\varepsilon(x, y)$  - это случайная составляющая, определяется по результатам статистической обработки. В разных условиях может преобладать первое или второе слагаемое в (5.1).

#### 5.2.4. По мерности и структуре потока

Структура потока определяется пространственным взаимным расположением линий тока (ЛТ). Если все ЛТ параллельны друг другу – структура линейная или плоско-параллельная (рис. 5.4). Если через все ЛТ можно провести плоскость, то структура - плоская: в вертикальной плоскости – профильная, в горизонтальной плоскости – плановая. Если ЛТ направлены по радиусам, а линии напоров (ЛН) имеют форму окружностей – радиальная структура. Если в плане имеются элементы радиальной (вблизи скважины) и плоско-параллельной (вблизи реки), то структура называется планово-радиальной. Если нельзя найти плоскость, в которой могли бы расположиться ЛТ – структура пространственная. Фильтрация в пространстве к точке (короткий фильтр в пласте большой мощности) характеризуется сферической структурой. Для анализа структуры потока следует использовать гидродинамические сетки.

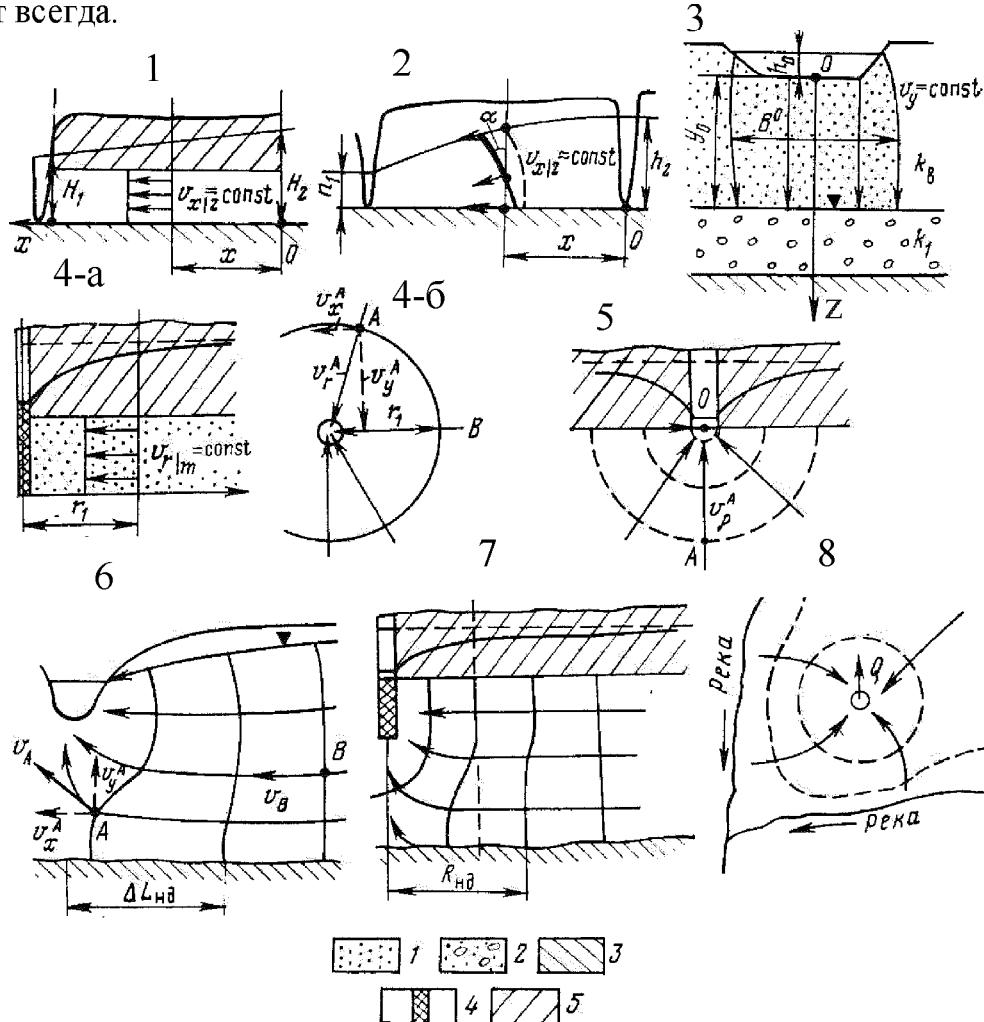
Мерность потока определяется наличием не нулевых проекций скорости на оси координат. В системе  $XOY$  линейные – одно, плоские – двух и пространственные – трех - мерные потоки. В полярной, цилиндрической и сферической системах координат удается уменьшить мерность радиальных потоков, т.к. скорость фильтрации по дуге  $\varphi$  равна 0.

Структура и мерность определяется главным образом формой границ потока в плане и в разрезе. В плоскопараллельных границах (междуречный массив) имеем линейную одномерную фильтрацию ( $r' \neq 0$ ). В грунтовых водах применяется предпосылка Дюпони  $\Psi_z/z = const$ .

При несовершенном врезе реки имеем профильную фильтрацию. Приток к системе взаимодействующих скважин – планово-радиальная фильтрация. Приток к несовершенной скважине в слоистой толще – пространственная фильтрация.

5.2.5. По воздействию на гидродинамику потока внешних границ и граничных условий (в основном для нестационарного режима фильтрации при воздействии ИС). При стационарном режиме фильтрации граничные условия

влияют всегда.

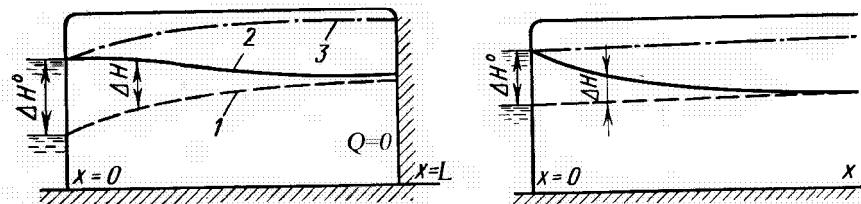


**Рис. 5.4. Виды потоков, выделенные по структуре, мерности и форме границ в плане и разрезе (по И.К. Гавич)**

1-3 – одномерные плоскопараллельные потоки (1 – напорный, 2 – грунтовый к реке с совершенным врезом русла, 3 – инфильтрационный в ЗА); 4, 8 двухмерные радиальные потоки (4 – (а – разрез, б – план), 8 – планово-радиальный); 5 – 7 трехмерные пространственные потоки (5 – напорный к несовершенной скважине, дном вскрывающей пласт; 6 – грунтовый к реке с несовершенным врезом русла; 7 - напорный к несовершенной скважине)

Выделяют: неограниченные, полубесконечные и ограниченные пласти. От этого фактора зависит степень воздействия внешнего возмущения на пласт и длительность периода нестационарной фильтрации. Выделяют открытые пласти с граничными условиями  $H = \text{const}$  и закрытые пласти с граничными условиями  $Q = 0$  (рис. 5.5).

В пластах неограниченных и закрытых стационарная фильтрация при отсутствии вертикального водообмена не наступит никогда, изменения уровня – максимальные. В открытых и полуоткрытых – время наступления стационарного режима и величина воздействия возмущения на пласт зависят от удаленности до открытой границы. Переток из соседнего пласта или дополнительное  $W$  так же могут стабилизировать нестационарное движение.



**Рис. 5.5. Схемы внешних границ пласта и граничных условий  
(по В.М. Шестакову)**

1, 2, 3 – начальное, текущее и предельное положение УГВ, соответственно

### 5.2.6. По типу режима фильтрации

Определяется характером изменения уровня  $H$  и его производной  $\frac{\partial H}{\partial x}$

(или расхода потока  $Q$ ) во времени. Выделяют следующие режимы фильтрации.

1. Стационарный – соблюдается баланс воды в любом сечении пласта,  $Q(t) = \text{const}$  и  $H(t) = \text{const}$ .
2. Нестационарный – расход и уровень воды в любом сечении пласта изменяется во времени.
3. Квазистационарный или упорядоченный режим характеризуется  $H = f(t)$ , но  $Q(t) \rightarrow \text{const}$ , или  $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \rightarrow 0$ , или  $r \frac{\partial H}{\partial r} \rightarrow 0$ . Область пласта, охваченная этим видом режима фильтрации, расширяется во времени от границ с условием  $Q(t) = \text{const}$  (эксплуатационной скважины). Приращение расхода  $Q(r)$  в этой области составляет менее 10% от общего расхода ( $Q_{\text{св}}$ ). Все уровни в пласте во времени изменяются, но эти изменения происходят при практически одинаковом напорном градиенте  $I(t) = \text{const}$ . То есть, все кривые уровня воды в пласте на разные моменты времени остаются параллельными.

### Вопросы к лекции №5

1. В чем различие типизации и схематизации гидрогеологических условий? Каковы основные задачи схематизации?
2. Что такое расчетная схема и каковы ее основные элементы?
3. Какую структуру и мерность имеет грунтовый поток, дренируемый рекой, не полностью врезанной в водоносный пласт? Как изменяется структура и мерность потока, если река прорезает водоносный горизонт до водоупора?
4. Какими гидродинамическими особенностями различаются грунтовые и напорные потоки, что такое субнапорные потоки?
5. Если на рис. 5.2.И  $W_a = 0$ , то какой вид примет эпюра расходов?
6. Что называется гидродинамической структурой потока?

7. Какие существуют основные типы гидродинамической структуры потока?
8. Какую структуру и мерность в декартовой и радиальной системах координат имеет поток воды к совершенной скважине?
9. В чем заключаются основные принципы схематизации? Какова ее последовательность?
10. Приведите пример потоков ПВ со сосредоточенным и с рассеянным питанием и разгрузкой.
11. С какими факторами связана изменчивость фильтрационных свойств горных пород? Как это проявляется на размерах элементов неоднородности?
12. В чем отличие полубесконечных и ограниченных потоков ПВ?

### Лекция № 6. Схематизация гидрогеологических условий и построение расчетных схем

6.1. Схематизация – это упрощение природных условий применительно к решаемой задаче. Осуществляется на основе определенных критерииев, позволяющих проводить эти упрощения с оценкой ошибок схематизации. В результате, в простых гидрогеологических условиях получаем типовую расчетную схему, имеющую аналитическое решение. В сложных условиях используется схематизация для построения математической модели.

#### 6.2. Последовательность схематизации

1. По типу режима выделяются:

стационарная, нестационарная, квазистационарная.

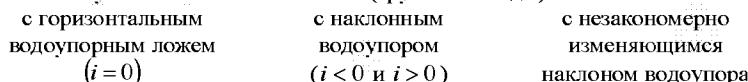
2. По структуре и мерности потока:



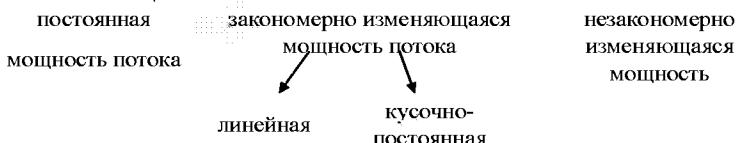
3. По гидравлическому состоянию пласта:

грунтовые (безнапорные), напорные, напорно-безнапорные.

4. По условиям залегания пласта (грунтовые воды):



5. По мощности потока:



6. По строению фильтрационной среды (коэффициент фильтрации, водопроводимость):

однородное	закономерно изменяющееся	статистически
------------	--------------------------	---------------

строение	строение	неоднородное
	слоистое, двухслойное, кусочно-однородное, линейное изменение	

7. По интенсивности вертикального и горизонтального водообмена:
- |                                 |   |                               |
|---------------------------------|---|-------------------------------|
| с горизонтальным<br>водообменом | с горизонтально-<br>вертикальным<br>водообменом | с вертикальным<br>водообменом |
|---------------------------------|---|-------------------------------|
8. По глубине и сложности геолого-гидрогеологического разреза:  
однопластовая, двухпластовая, многопластовая система.
9. По виду границ пласта:  
пласт-круг, пласт-прямоугольник, пласт-полоса, полуограниченный пласт, пласт-квадрант, пласт-угол.

10. По типу граничных условий (ГУ):

ГУ-I рода, ГУ-II рода, ГУ-III рода, ГУ-IV рода (рис. 6.1).

11. По влиянию границ:



### 6.3. Основные критерии схематизации

#### 6.3.1. Упрощение режима фильтрации

Оценим возможность сведения нестационарной фильтрации к стационарной или квазистационарной.

Стационарная фильтрация наступает при подпоре в пласте, ограниченном двумя параллельными открытыми границами (междуречный массив длиной  $L$ ), через период (рис. 5.5):

$$t_c \geq \frac{0,5L^2}{a}. \quad (6.1)$$

При подпоре в полуограниченном пласте (вторая река располагается на значительном расстоянии и не влияет на процесс подпора)

$$t_c \geq \frac{100x^2}{a} \quad (6.2)$$

где  $x$  расстояние от границы, где произошел подпор до расчетного сечения.

Для водозаборной скважины вблизи открытой границы (реки)

$$t_c \geq \frac{10d^2}{a} \quad (6.3)$$

где  $d$  - расстояние от скважины до реки.

Для радиальной фильтрации к скважине в двухпластовой системе с постоянным уровнем в питающем пласте (рис. 6.2)

$$t_c \geq \frac{3B^2}{a} \quad (6.4)$$

$$\text{где } B = \sqrt{\frac{k \cdot m \cdot m_0}{k_0}} \text{ - фактор перетекания.} \quad (6.5)$$

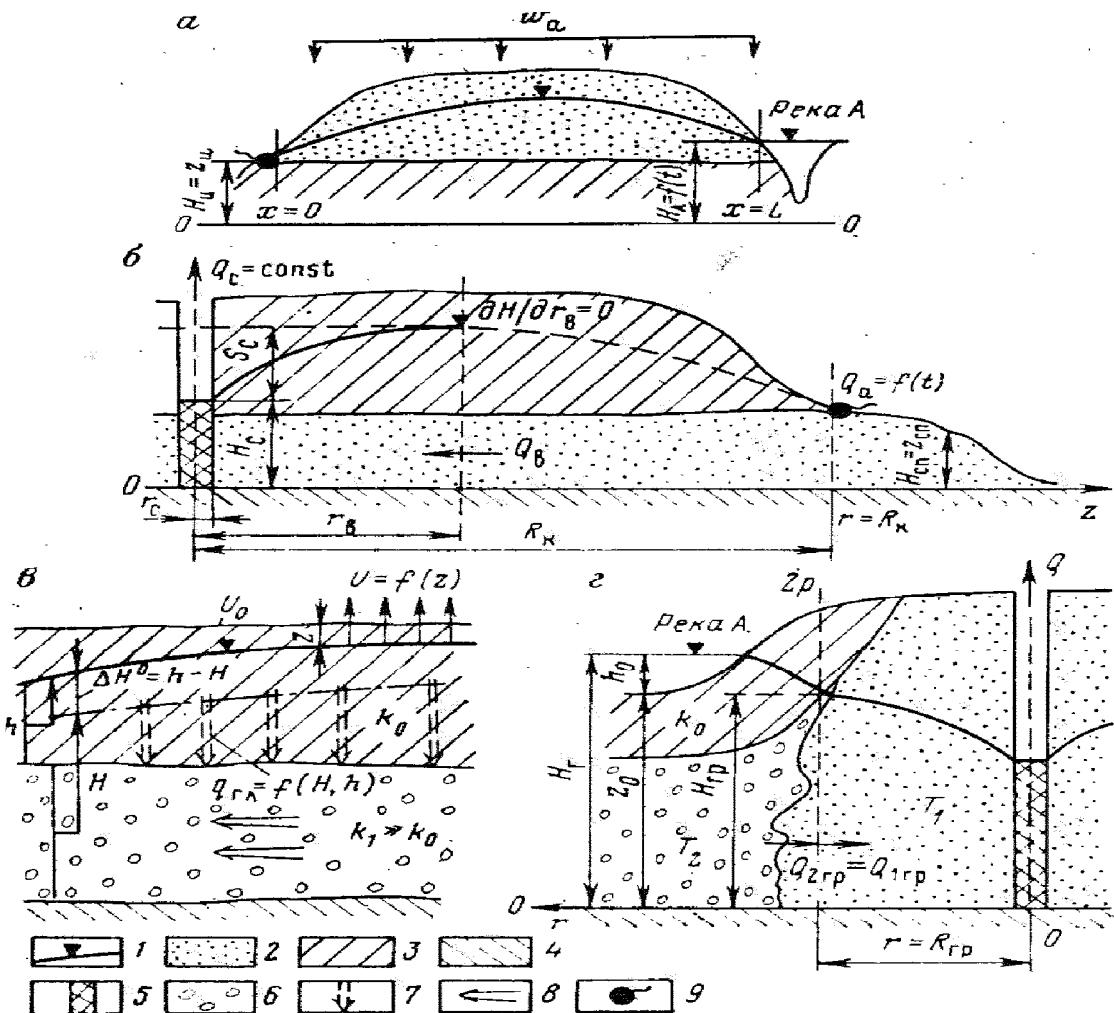


Рис. 6.1. Границные условия: а – грунтовый поток с ГУ – I, б – напорный поток с ГУ – II, в – перетекание через границу раздела ГУ – III, г – граница раздела сред с разной водопроводимостью ГУ – IV

1 – уровень подземных вод; 2 – пески; 3 – суглиники; 4 – водоупор; 5 – фильтр скважины; 6 – гравий и галька; 7, 8 – направление движения подземных вод; 9 – родник

Для радиальной фильтрации к скважине, эксплуатирующейся с постоянным расходом в неограниченном пласте, квазистационарная фильтрация наступает при реализации критерия  $\frac{r^2}{4at} \leq 0,1$ , (6.6)

где  $r$  – расстояние от водозаборной скважины до точки, в которой определяется понижение уровня.

### 6.3.2. Уменьшение мерности и упрощение структуры потока

Осуществляется на основе анализа гидродинамической сетки потока и заключается в сведении пространственной фильтрации к плановой или профильной, профильной к плоско-параллельной, фрагментированию потока, уменьшению мерности потока за счет перехода в полярную, радиальную или сферическую систему координат.

Использование метода фрагментирования потока в слоистых толщах при

$\frac{k_{\max}}{k_{\min}} > 100$  позволяет на основе предпосылки Мятиева-Гиринского (лекция № 4)

рассматривать отдельно фильтрацию в хорошо проницаемых слоях только как латеральную, а в плохо проницаемых пластиах – только как вертикальную. В этом случае пространственная фильтрация сводится к планово-пространственной модели.

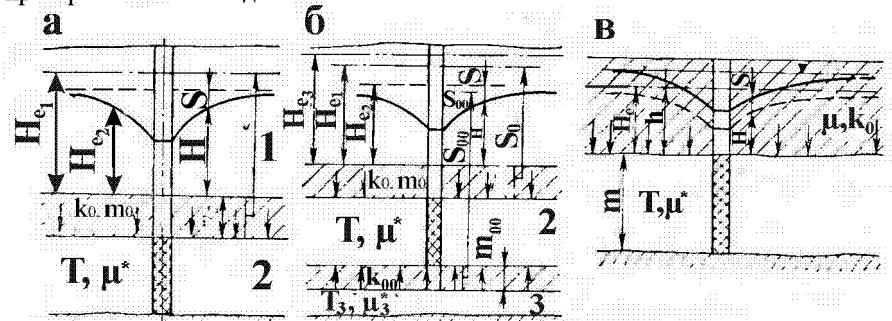


Рис. 6.2. Схема двухпластовой системы с перетеканием (по И.К. Гавич) (а – два основных водоносных горизонта и разделяющий слой; б – три основных водоносных горизонта и два разделяющих слоя; в – двухслойная толща)

При рассмотрении областей фильтрации, характеризующихся большими размерами в плане по сравнению с мощностью пласта ( $\frac{B, L}{m} \gg 1$ ), обычно принимают  $\psi_z = 0$  или  $\psi_x \Big|_{z=0} = x \text{const}$ . Это предпосылка Дюпюи. Здесь реализуются условия плановой фильтрации. Этому условию не соответствуют участки вблизи несовершенных по степени вскрытия границ пласта. Размеры этих участков соизмеримы с мощностью пласта. Поэтому зона влияния несовершенных границ пласта реализуется как отдельный фрагмент с учетом особенностей структуры потока. При этом используются следующие методы.

В фильтрационную схему вводится показатель гидродинамического несовершенства вреза реки  $\Delta L_{qs}$ , который эквивалентно учитывает дополнительные потери напора  $\Delta H_{qs}$ , возникающие за счет искривлений линий тока, ухудшения фильтрационных свойств пласта в русле реки. Величина  $\Delta L_{qs}$  определяется из соотношения равенства расходов (градиентов) потока во внутренней его области и вблизи границы, так что (рис. 6.3)

$$\Delta L_{qs} = \frac{km \Delta H_{qs}}{q}, \quad (6.7)$$

где  $q$  – расход определяемый во внутренней области потока (между скв. 1 и 2),

$$\text{или } \Delta L_{qs} = \frac{H_1 - H_p}{H_2 - H_1} (x_2 - x_1) - x_1 \quad (6.8)$$

Для учета несовершенства скважин поступают аналогичным образом,

уменьшая радиус скважин по сравнению с его реальными размерами  $r_0$ . При этом вводится понятие приведенного радиуса скважины  $r_{\text{пр}}$ , так что  $r_{\text{пр}} = \alpha r_0$ , где  $\alpha$  - коэффициент несовершенства (по В.М. Шестакову).

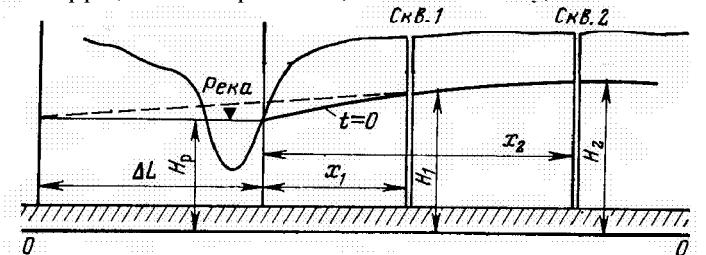


Рис. 6.3. Схема расположения скважин для определения параметра  $\Delta L_{n_0}$  (по В.М. Шестакову)

Второй метод основан на использовании метода фильтрационных сопротивлений. Используется аналогия между законами Дарси и Ома. Обозначив фильтрационное сопротивление через

$$\Phi = \frac{\Delta U}{k m B}, \quad (6.9)$$

получим выражение закона Дарси в виде

$$Q = \frac{\Delta H}{\Phi}, \quad (6.10)$$

аналогичное уравнению закона Ома  $I = \frac{\Delta U}{R}$ . Так же как в электрических цепях при последовательном соединении фильтрационные сопротивления суммируются.

Потери напора в последовательно расположенных фрагментах области фильтрации определим по зависимости

$$\Delta H_{1-2} = Q(\Phi_1 + \Phi_2), \quad (6.11)$$

где  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  - сопротивления для плоско-параллельного потока и несовершенной реки, зависящие только от гидродинамических параметров пласта и геометрических размеров потока.

$$\Phi_1 = \frac{L_{1-2}}{k m B} \quad \text{и} \quad \Phi_2 = \frac{\Delta L_{n_0}}{k m B}, \quad (6.12)$$

Для условий радиальной фильтрации к ряду несовершенных скважин, расположенных параллельно урезу реки (рис. 6.4), полная величина понижения уровня в каждой скважине равна:

$$S_0 = Q_0(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4) \quad (6.13)$$

$$\text{где } \Phi_1 = \frac{1}{2\pi k m} \xi_{n_0}, \quad \Phi_2 = \frac{1}{2\pi k m} \ln \frac{\sigma}{\pi r_0}, \quad \Phi_3 = \frac{L}{k m 2\sigma}, \quad \Phi_4 = \frac{\Delta L_{n_0}}{k m 2\sigma}. \quad (6.14)$$

где  $2\sigma$  - расстояние между скважинами.

Здесь  $\Phi_1$  - сопротивление, учитывающее несовершенство скважины;  $\Phi_2$  и

$\Phi_3$  - фильтрационное сопротивление радиального и плоско-параллельного потоков к скважине, соответственно;  $\Phi_4$  - учитывает несовершенства вреза реки.

Упрощение структуры и уменьшение мерности потока достигается сведением конфигурации границ области фильтрации к правильным геометрическим формам – прямым линиям, окружностям. В этом случае получаем линейные или радиальные одномерные потоки.

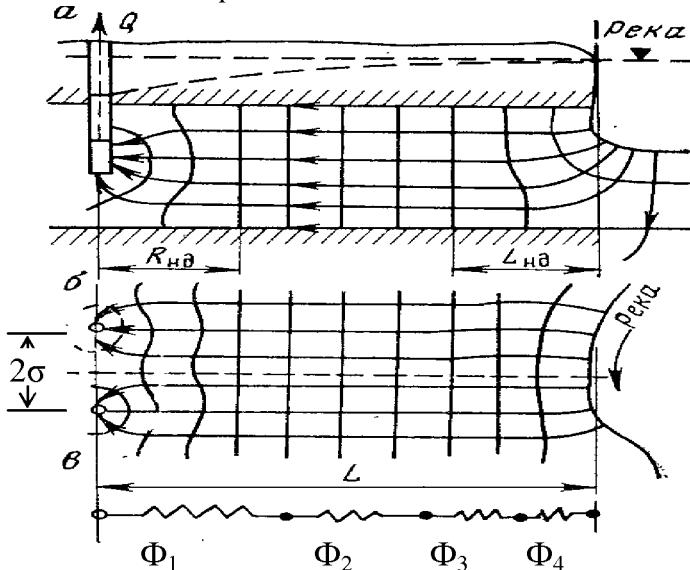


Рис. 6.4. Схема, иллюстрирующая метод фильтрационных сопротивлений  
(а – разрез; б – план; в – модельная схема)

### 6.3.3. Гидравлическое состояние пласта

Важно для нестационарной фильтрации, ибо гидравлическое состояние пласта обуславливает различие в гравитационной  $\mu$  или упругой  $\mu^*$  емкости, различающихся на 3 порядка, и в характере изменения мощности во времени  $h = f(H)$ .

Схематизация в основном связана с напорно-безнапорными потоками, которые приводятся либо к напорным, либо к безнапорным.

1. В напорных водах при небольших величинах избыточных напоров  $H_{\text{изб}}$  под влиянием водоотбора вблизи скважин образуется зона, в которой  $H_{\text{изб}}$  полностью сработаны и уровень воды опускается ниже кровли водоносного пласта. В этой зоне радиусом  $r^*$  резко увеличиваются емкостные свойства, т.к.  $\mu \gg \mu^*$ , но уменьшается водопроводимость  $T$ , т.к.  $h < m$  (рис. 6.5). Учитывая, что изменения параметров водопроводимости и емкости в этой безнапорной зоне оказывают противоположное влияние на дальнейшее изменение уровня, полагают, что весь пласт остается напорным. Такое возможно, если  $r^* \leq 0,1R_k$  или  $R_{\text{ак}}(t)$ .

2. В субнапорных бассейнах закрытых структур (мульды), в субнапорных пластах, где мала величина  $H_{\text{изб}}$ , внешние латеральные границы – непроницаемые и расход естественного потока весьма невелик, при расчетах водозаборов

из подземных вод определяют величину объема воды, заключенного в пласте. Этот объем называют статическими запасами, они связаны с упругой и гравитационной водоотдачей (рис. 6.6):

$$V_{up} = \mu^* H_{izb} F_{mulyodi}, \quad V_{ep} = \mu \cdot m \cdot F_{mulyodi}, \quad (6.15)$$

где  $F_{mulyodi}$  - площадь закрытой структуры,

$m$  - мощность водоносного пласта.

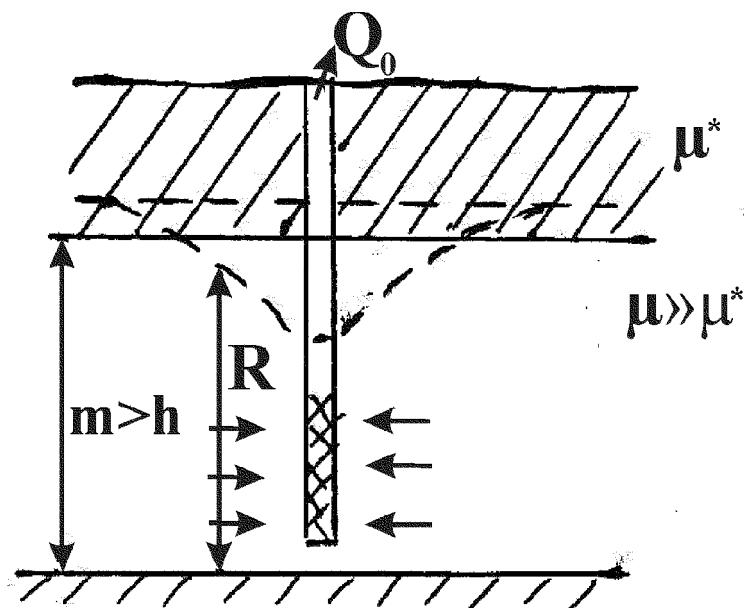


Рис 6.5. Напорно-безнапорная фильтрация в окрестностях водозаборной скважины

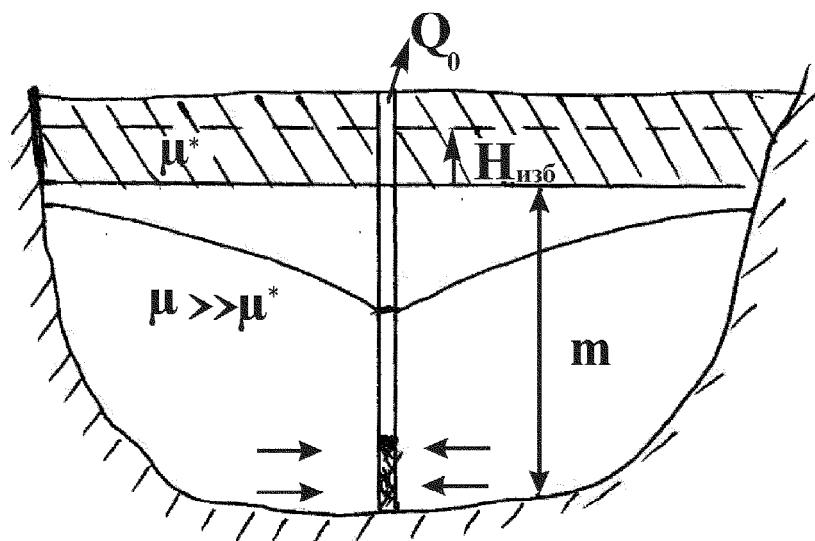
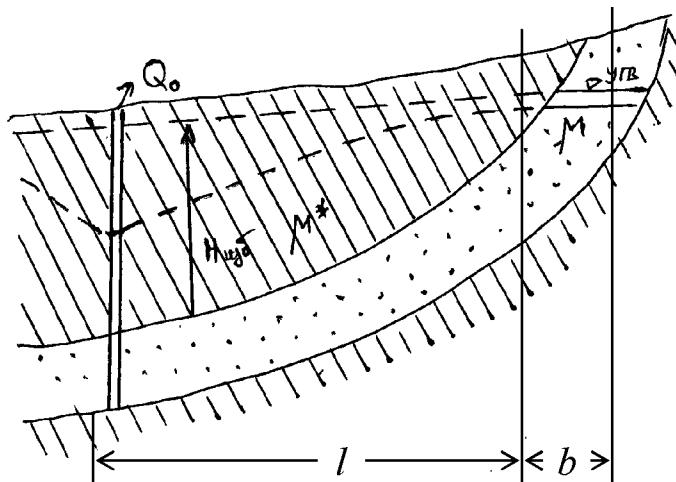


Рис. 6.6. Эксплуатация субнапорных вод в закрытой структуре

Если  $V_{up} \leq 0,05V_{ep}$ , и  $V_{up} \leq 0,1Q_{cwb}t_{ek}$ , то упругими запасами можно пренебречь. В этом случае полагают, что  $H_{izb} = 0$  и начальный статический уровень воды соответствует кровле водоносного пласта.

3. В краевой части артезианского бассейна безнапорные воды распространены в виде узкой полосы на выходах водоносных пород на поверхность земли (рис. 6.7).



**Рис. 6.7. Влияние осушения пласта на эксплуатацию водозабора в краевой части артезианского бассейна**

Область погружения, где развиты напорные воды, по своей площади в тысячи раз превосходит площадь областей выхода. Однако, при работе водозабора в области погружения, гравитационная емкость воды срабатывает в узкой полосе грунтовых вод оказывается соизмеримой с величиной упругой емкости на всей области распространения депрессионной воронки за счет того, что  $\mu \gg \mu^*$ . Для таких условий можно полагать в области развития грунтовых вод ГУ I рода ( $H = const$ ) в течение времени

$$t \leq 10 \frac{l^2}{a}, \quad (6.16)$$

где  $l$  - расстояние водозабора до границ выходов пласта и ГУ II рода ( $Q = 0$ ) после времени  $t \geq 5 \frac{(\mu \cdot b)^2}{km \cdot \mu^*}$ , (6.17)

где  $\mu$  и  $\mu^*$  - гравитационная и упругая водоотдача,  $b$  - ширина выходов отложений пласта, где распространены грунтовые воды.

6.3.4. Упрощение условий залегания водоупорного ложа (только для грунтовых вод)

Экспериментально доказано, что при небольших уклонах ( $i \leq 0,001$ ) можно полагать положение водоупорного ложа горизонтальным ( $i = 0$ ) и определять средние значения  $z_{cp} = \frac{z_1 + z_2}{2}$ . Плоскость сравнения следует поместить на водоупор и новые значения уровней определить как  $h_1 = H_1 - z_{cp}$  и  $h_2 = H_2 - z_{cp}$ .

#### 6.3.5. Изменение мощности водоносного пласта

В грунтовых водах мощность потока  $h$  изменяется в зависимости от положения уровня воды  $H$ , то есть  $h = f(H)$ , но при  $\Delta H \leq 25\% h_{cp}$  можно считать

$$h_q = \text{const.}$$

В напорных водах при  $\frac{m_{\max}}{m_{\min}} \leq 2$  возможно определить  $m_q = \frac{m_{\max} + m_{\min}}{2} = \text{const.}$

При закономерно постоянном изменении  $m_x = m_1 - \frac{m_1 - m_2}{L} x$ , величина

$$m_q = \frac{m_1 - m_2}{\ln m_1 - \ln m_2}.$$

### 6.3.6. По характеру строения фильтрационной среды ( $k$ или $T$ )

Это наиболее сложный вид схематизации.

Определение типа строения фильтрационной среды зависит от соотношения радиуса влияния инженерного сооружения (ИС) на окружающую среду  $R_s$  и радиуса неоднородности среды (см. лекцию № 5) -  $R_n$ . Величина  $R_s$  зависит от размеров инженерного сооружения и длительности его воздействия на окружающую среду. Крупные водозаборы из артезианских вод, водохранилища, крупные карьеры на МПИ, массивы орошения распространяют свое влияние на десятки км, радиус влияния водозаборов и других ИС, расположенных вблизи контуров питания, длительных групповых и кустовых откачек достигает сотен и первых тысяч метров, влияние от пробных откачек от небольших ИС ограничен десятками и сотнями метров, лабораторные опыты, наливы в шурф распространяют свое влияние на первые метры и их доли.

В связи с этим разные типы неоднородности среды, различающиеся величиной  $R_s$ , будут проявлять себя не одинаково в зависимости от размеров радиуса влияния ИС на пласт. Наиболее наглядно это проявляется при анализе неоднородности в зависимости от отношения  $\frac{R_s}{R_n}$ . В зависимости от соотношения

ния  $\frac{R_s}{R_n}$  выделяют (рис. 6.8):

1. Неоднородная среда  $10^2 \geq \frac{R_s}{R_n} \geq 10^{-1}$ . Элементы неоднородности

проявляются как низшая или эффективная неоднородность и показываются на расчетной схеме дифференцировано со своими значениями параметров в виде карты - кусочно-переменная среда, тренд (функциональная зависимость).

2. Однородная среда  $\frac{R_s}{R_n} \geq 10^2$ . Элементы неоднородности проявляются как неоднородность высшего порядка. Распределение частных значений водопроводимости обычно отвечает логнормальному закону, т.е. это – случайные изменения. Карту и тренд построить невозможно. Находят средние или среднелогарифмические значения.

3. Однородная среда  $\frac{R_s}{R_n} \leq 10^{-1}$ . Размеры элементов меганеоднородно-

сти превышают радиус влияния инженерного сооружения, причем это сооружение не расположено вблизи границ неоднородности. Внутри каждого крупного элемента неоднородности пласт может рассматриваться как однородный, если характеризуется  $\frac{R_s}{R_n} > 10^2$  и неоднородный, если  $\frac{R_s}{R_n} \leq 10^2$ .



Рис 6.8. Определение типов строения фильтрационной среды при схематизации фильтрационной неоднородности пласта (по И.К. Гавичу)

Таким образом, неоднородность – есть понятие относительное. На одной и той же территории в зависимости от целевого назначения задачи (обработка откачки, прогноз работы водозабора, оценка региональных условий) могут строиться разные расчетные схемы, отличающиеся упрощением строения среды.

Последовательность схематизации неоднородного строения:

- Изучается характер пространственной изменчивости гидродинамических параметров среды. Используется геологогенетический, структурный анализ для выявления условий формирования отложений, главных факторов, определяющих условия изменчивости. Выделяются элементы неоднородности разных

уровней, устанавливаются геометрические размеры этих элементов.

2. Выделение кусочно-однородных зон осуществляется на основе общности литолого-фацальных состава, геоморфологических, геолого-генетических условий и одинаковых величин  $k$ ,  $T$ . При этом геолого-генетический анализ позволяет обосновать границы зон  $k$ ,  $T$ .

3. Определяется размер зоны возмущения от проектного инженерного сооружения и путем сопоставления  $R_s$  с  $R_c$  оценивается вид неоднородности и намечаются пути схематизации. Может быть выбран один из трех типов расчетных схем: статистическая, трендовая, комплексная.

4. Собственно упрощение неоднородной среды:

- a) при малом  $n$  - количестве определений параметра, незакономерном распределении и соотношении  $\frac{k_{\max}}{k_{\min}} \leq 5 \div 20$  считают среду условно-однородной;
- б) при большой выборке частных значений строят графики распределения. Обычным является логнормальный или нормальный закон распределения, что свидетельствует о случайному характере неоднородности. В этом случае принимается среднегеометрическое значение параметра;
- в) значительное нарушение логнормального закона распределения может быть следствием наличия не выявленных зон неоднородности низкого порядка. Их надо выявить;
- г) характеристика неоднородности высшего порядка дается по величине стационарного отклонения логарифма  $k$ ,  $T$  (таблица 6.1):

$$\sigma(\lg k) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\lg k_i - \lg k_{\varphi})^2}{n}} ; \quad (6.18)$$

Таблица 6.1

Характеристики степени неоднородности пласта

$\sigma \lg k(T)$	степень однородности пласта
0,1 – 0,2 и менее	однородный
0,3 – 0,4	неоднородный
более 0,4	весьма неоднородный

- д) определение средних значений параметров кусочно-однородных зон при плановой фильтрации обычно выполняется как средневзвешенное по площадям  $k_{\varphi} = \frac{\sum k_i F_i}{\sum F_i}$

При линейной фильтрации: при неоднородности перпендикулярной

$$\text{фильтрации } k_{\varphi} = \frac{L}{\frac{l_1}{k_1} + \frac{l_2}{k_2} + \dots}, \quad (6.19)$$

$$\text{при параллельной фильтрации (слоистая толща) } k_{\varphi} = \frac{\sum k_i m_i}{\sum m_i}, \quad (6.20)$$

Карта водопроводимости водоносного горизонта строится интерполяцией частных значений  $k_m$ , определенных по данным откачек. При составлении карты выделяемые зоны разных  $k_m$  следует увязывать с литолого-фациальными и структурно-тектоническими факторами, то есть учитывать генетическую природу формирования фильтрационных свойств пород.

Для рыхлых однородных пород величина водопроводимости обычно пропорциональна мощности водоносного пласта, для неоднородных следует строить вспомогательные графики зависимости коэффициента фильтрации от гранулометрического состава.

Величина коэффициента фильтрации пористых пород зависит от глубины их залегания и нагрузки на кровлю пласта. Она заметно возрастает в долинах рек и уменьшается при погружении пласта.

В трещино-карстовых породах коэффициент водопроводимости связан с интенсивностью трещиноватости и уменьшается в направлении от долин рек к водоразделам, по мере увеличения глубин залегания пласта. Интенсивность трещиноватости возрастает на периклиналях и круtyх крыльях поднятый по сравнению с синклиналями и мульдами. Доломитизация и увеличение глинистости (мергели) всегда связано с уменьшением водопроводимости. В перекрытых хорошо проницаемыми породами известняках закарстованность выше по сравнению с залегающими под глинистыми осадками. При построении карт водопроводимости следует использовать данные геофизических работ, так как очень часто удается получить устойчивые корреляционные связи между геофизическими и фильтрационными параметрами пород.

При характеристике фильтрационных свойств слабопроницаемых пластов следует иметь ввиду следующее. Определяющим фактором в формировании проницаемости глин является их трещиноватость, фильтрация в глинах в природных условиях происходит по схеме гетерогенной среды (лекция № 2). Коэффициент фильтрации в натурных условиях оказывается на два порядка ( $10^{-4} \text{ м/сум}$ ) выше, чем полученный в лаборатории ( $10^{-6} \text{ м/сум}$ ).

Наибольшая проницаемость глин наблюдается в речных долинах, где раскрытие трещин возрастает под влиянием эрозионной разгрузки пластов.

6.3.7. По соотношению вертикального и горизонтального водообмена (основных источников формирования водного баланса потока)

Цель – уменьшить число источников формирования водообмена, выделив главные и пренебречь второстепенными. Рассматривается горизонтальная составляющая потока, определяемая по Дарси  $q_e = T \frac{\Delta H}{L}$ , и вертикальная состав-

ляющая, обусловленная либо перетеканием  $q_e = k_0 \frac{\Delta H_0}{m_0} L$ , либо инфильтрацией

$q_e = W \cdot L$ . Их соотношение характеризуется коэффициентом водообмена

$$k_{eo} = \frac{q_e}{q_s} = \frac{L^2}{B_0^2} \frac{\Delta H_0}{\Delta H} \quad (6.21)$$

где  $B_0 = \sqrt{\frac{T m_0}{k_0}}$  или

$$k_{eo} = \frac{q_e}{q_s} = \frac{1}{\Delta H} \frac{L^2}{B_w^2} \quad (6.22)$$

$$\text{при } B_w = \sqrt{\frac{T}{W}} \quad (6.23)$$

При  $k_{eo} \leq 0,1$  можно пренебречь вертикальной составляющей и считать пласт изолированным, без инфильтрации.

При  $k_{eo} > 10$  - главным фактором является перетекание или инфильтрация – боковые границы играют второстепенную роль и могут в расчетных схемах не учитываться.

Таким образом имеем:

$k_{eo} \leq 0,1$  изолированный пласт,

$0,1 \leq k_{eo} \leq 10$  с горизонтально-вертикальным водообменом,

$k_{eo} > 10$  с активным вертикальным водообменом.

### 6.3.8. По глубине и сложности геолого-гидрогеологического разреза

В расчетной схеме всегда должны быть учтены водоносные пласти, которые испытывают непосредственное воздействие от ИС. Такие пласти называют целевыми водоносными горизонтами. При решении задач прогноза работы водозабора – это будут горизонты, на которые оборудованы фильтры скважин, при решении гидротехнических или мелиоративных задач – это первый от поверхности горизонт грунтовых вод.

Далее, необходимо оценить влияние ИС по глубине гидрогеологического разреза, в каких водоносных пластах, кроме целевого, будет происходить изменение естественных гидродинамических условий (уровней, расходов воды) под воздействием эксплуатации ИС. Такое влияние обычно определяется как масштабом воздействия ИС (величиной водоотбора из скважин, подпором уровня в водохранилище и т.п.), так и водопроницаемостью разреза по вертикали (значениями коэффициента фильтрации  $k_0$  и мощности  $m_0$  водоупорных толщ).

Ориентировочная оценка влияния ИС по глубине разреза может быть получена путем сопоставления естественных латеральных расходов по каждому водоносному горизонту  $q_e$  с величиной вертикального дополнительного перетока  $\Delta q$ , возникающего под воздействием ИС. Соотношение этих величин аналогично коэффициенту вертикального водообмена (6.21):

$$k_{eo} = \frac{\Delta q}{q_e} = \frac{L \cdot \Delta H_z}{B^2 \cdot I_e}, \quad (6.24)$$

где  $\Delta H_z$  - изменение уровня в вышележащем водоносном горизонте под влиянием ИС,

$I_e$  - градиент естественного потока в нижележащем горизонте, для которого выполняется оценка,

$B$  - фактор перетекания между этими горизонтами,

$L$  - размер водоносного пласта в плане ( $L \sim R_{eo}$ ).

Очевидно, что если  $k_{eo} \leq 0,1$ , то влиянием ИС на оцениваемый водоносный горизонт можно пренебречь.

В пределах зоны влияния ИС необходимость выделения в многослойном геологическом разрезе отдельных водоносных горизонтов и водоупоров определяется так же величиной коэффициента вертикального водообмена  $k_{eo}$  в этой толще. Для этого случая  $k_{eo}$  имеет вид

$$k_{eo} = \frac{L \cdot \Delta H_0}{B^2 \cdot I_L}, \quad (6.25)$$

где  $\Delta H_0$  - разница в уровнях на кровле и подошве оцениваемого водоупора,

$I_L$  - латеральный напорный градиент фильтрации.

В том случае, если  $k_{eo} \geq 10$ , возможна схематизация двух- или многопластовой системы в единый водоносный пласт.

### 6.3.9. По расположению границ пласта

Упрощается конфигурация границ области фильтрации, границы приводятся к правильным геометрическим формам – прямым линиям, окружностям. При этом должны соблюдаться:

а) эквивалентность длин контуров открытых границ и б) эквивалентность площадей в закрытых пластиах в естественных условиях и на расчетной схеме.

В зависимости от расположения инженерного сооружения относительно естественных границ пласта схематизация может быть разной и определяется конфигурацией ЛН и ЛТ гидродинамической сетки потока.

Основными схемами являются:

1. Полуограниченный пласт – ограничен одной линейной границей бесконечной длины (рис. 6.9а).
2. Пласт-квадрант – две линейные границы под прямым углом друг к другу (рис. 6.9б).
3. Пласт-угол – две линейные границы под произвольным углом (рис. 6.9в).
4. Пласт-полоса – две линейные бесконечные параллельные границы (рис. 6.9г).
5. Пласт-прямоугольник, если отношение длины  $L$  и ширины  $B$  области фильтрации находятся в пределах  $3 \leq \frac{L}{B} \leq 10$  (рис. 6.9д). (6.26)

6. Пласт-круг, если отношение  $\frac{L}{B} < 3$  (рис. 6.9e) . (6.27)

Радиус пласта-круга с закрытыми границами определяется как  $R_n = \sqrt{\frac{F}{\pi}}$ ,

где  $F$  - площадь области фильтрации внутри закрытых границ. Радиус пласта-круга с открытыми границами определяется как  $R_k = \frac{P}{2\pi}$ , где  $P$  - периметр открытых границ пласта. (6.28)

6.3.10. По типу граничных условий ( $\Gamma\text{У}$ ) (рис. 6.1)

Наиболее простые условия:  $H = \text{const}$ ,  $Q = \text{const}$ ,  $Q = 0$ .

При  $\frac{k_1}{k_2} < 100$  для латерального потока можно считать  $Q = 0$ .

Всегда существуют колебания  $H$  в реке за счет естественного режима, но если исследуемая  $\Delta H^0 \gg \Delta H_{\text{есн}}$ , то естественным режимом можно пренебречь.

При эксплуатации скважин обычно  $Q \neq \text{const}$ , но если изменения  $Q$  не более 10%, то ими пренебрегают и считают  $Q = \text{const}$ .

Если существуют сложные изменения  $\Gamma\text{У}$ , то упрощения связаны, с приведением к математической зависимости  $H$  или  $Q$  от времени:

$$\Delta H = \text{const},$$

$$\Delta H = v \cdot t - \text{линейная},$$

$$\Delta H = \Delta H_0 \cdot e^{\omega t} - \text{экспонента}.$$

Ступенчатый график  $\Delta H$  используют при незакономерном изменении уровня. Аналогичная схематизация используется для расхода воды.

$\Gamma\text{У}$  III рода  $Q = f(H)$ . Упрощается введением  $\Delta L_{\text{есн}}$ ,  $\Gamma\text{У}$  III заменяют на  $\Gamma\text{У}$  I рода. При достижении критических значений уровня  $H$  на границе  $\Gamma\text{У}$  III может переходить на условия  $Q = \text{const}$  ( $\Gamma\text{У}$  II рода).

$$Q = f(z - H) \quad \Gamma\text{У} \text{ III рода (рис. 6.1 а, б).}$$

При  $\Delta H^0 = 0$  и  $Q = 0$  нет перетока (рис. 6.1 в).

6.3.11. По влиянию внешних границ пласта на процесс фильтрации (нестационарная фильтрация)

Внешние границы значимо для расчетов влияют на процесс перераспределения уровня в пласте не сразу, а только после распространения ощущимого влияния от ИС до границы пласта, расположенной на расстоянии  $L$  от него.

Величина радиуса такого влияния определяется:

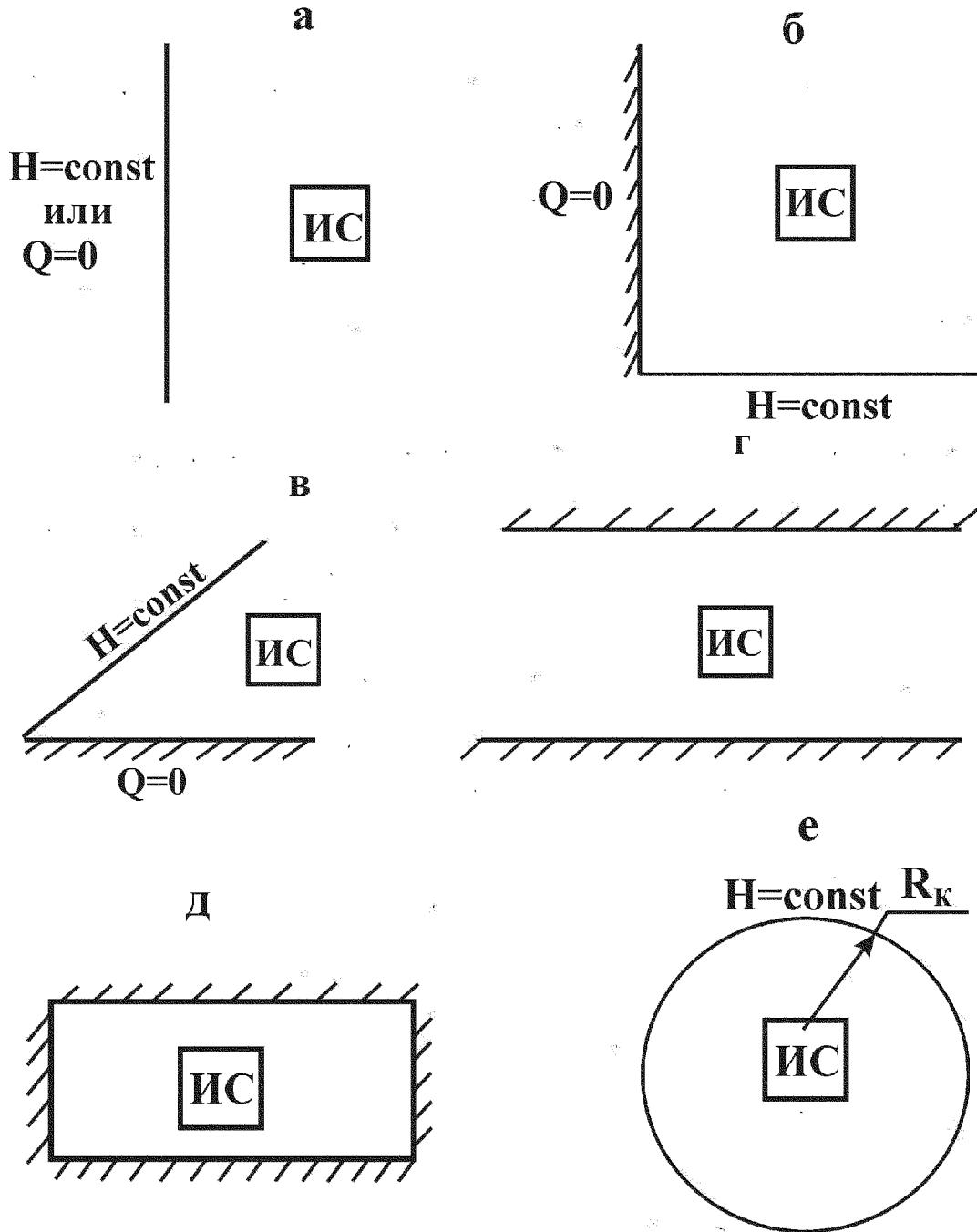
для линейной фильтрации  $R_{\text{есн}} = 4\sqrt{at}$  (подпор) и  $R_{\text{есн}} = 2 \div 3\sqrt{at}$  (орошение), (6.29)

для радиальной фильтрации  $R_{\text{есн}} = 1,5\sqrt{at}$  (6.30)

Если  $L > R_{\text{есн}}$ , то граница не влияет на процесс фильтрации и ее можно исключить из расчетной схемы.

Если все граничины далеки  $L_i > R_{\text{есн}}$ , то рассматривается неограниченный пласт, если одна граница влияет – то полуограниченный, если все – то ограни-

ченный.



**Рис 6.9. Основные расчетные схемы по расположению границ пласта**

Со временем, в процессе прогноза, гидродинамическая характеристика границы может изменяться, на первый период прогноза – не влияет и не учитывается – неограниченный пласт, на последующий период – влияет – пласт полуограниченный или ограниченный.

Упрощенная по рассмотренным выше гидрогеологическим факторам область фильтрации называется расчетной схемой. Возникает вопрос о достоверности прогнозов, составляемых по такой расчетной схеме. Выполнение рассматриваемых критериев, как правило, предполагает ошибку схематизации не более 10%. Но на все случаи гидрогеологической практики нельзя заранее пре-

дусмотреть типовые схемы. Поэтому гидрогеолог часто сам проводит исследования схематизации. Эти исследования заключаются в решении тестовых задач, имеющих целью выявление влияния каждого из схематизированных факторов на точность решения задачи. Такие задачи решают на упрощенных схемах или фрагментах схем, обязательен учет в этих схемах главных факторов. В результате оценивается ошибка схематизации. Такая оценка может быть учтена при выполнении прогнозного решения.

### Вопросы к лекции №6

1. Что такое предпосылка Дюпюи?
2. Что такое коэффициент водообмена и какие виды расчетных схем на его основе можно выделить? Какими гидродинамическими особенностями они различаются?
3. Какое толкование имеет термин “неоднородность”? Что такое порядок неоднородности? В чем заключается относительность понятия “неоднородность среды”?
4. Назовите основные виды упорядоченной неоднородности.
5. Каким образом можно определить размеры области взаимодействия ИС сооружения с окружающей средой? От каких параметров зависят эти размеры?
6. Выполнение какого критерия позволит слоистую толщу схематизировать в виде условно однородного пласта?
7. Какой критерий позволяет выполнить схематизацию по глубине и сложности гидрогеодинамического разреза?
8. Какие основные расчетные схемы закрытых пластов вы знаете?
9. С помощью каких приемов можно упростить структуру и мерность потока?
- 10.Какую роль играет величина отношения  $R_s/R_h$  при схематизации строения пласта?
- 11.Какой статистический показатель характеризует степень неоднородности пласта?
- 12.Какие типовые расчетные схемы аппроксимируют различные периоды эксплуатации водозабора в краевой части артезианского бассейна?
- 13.Что понимают под гидрогеологической достоверностью расчетной схемы? Как ее можно оценить количественно?
- 14.Какие факторы анализируются при схематизации потока по типу водообмена, по влиянию внешних границ пласта?
- 15.Объясните физический смысл фильтрационного сопротивления. Продемонстрируйте формальное подобие законов Дарси и Ома.
- 16.Покажите на конкретном примере, как изменяются критерии схематизации одного и того же фильтрационного потока в зависимости от изменения масштаба влияния ИС и длительности расчетного периода, а так же в зависимости от изменения характера решаемой задачи.
- 17.На одной из границ напорного пласта уровень быстро опускается до кровли пласта (осушение при проходке горной выработки). Качественно

опишите изменения гидравлического состояния пласта во времени после такого осущения на границе.

## Лекция № 7. Выводы основных дифференциальных уравнений (ДУ) фильтрации ПВ

7.1. Основные предпосылки при выводе ДУ

7.1.1. Рассматриваемый элементарный объем напорного пласта считается постоянным  $dV = dx^* dy^* dz = const$ . В пределах выделенного объема  $dV$  параметры пласта не меняются. Трецины и поры малы и равномерно распределены по этому объему  $dV$ . Объем  $dV$  бесконечно мал по сравнению с рассматриваемой областью фильтрации, но является представительным (не случайным).

7.1.2. Справедлив закон Дарси, инерционными и молекулярными силами пренебрегаем. Плоскость сравнения – горизонтальная. Справедлива предпосылка Дюпюи  $\Psi_x = const$ . То есть горизонтальные скорости в вертикальном сечении пласта – постоянны.

7.1.3. Поток ПВ принимается неразрывным, в каждой точке области фильтрации существует производная напора по координатам пространства и времени  $\left( \frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial z}, \frac{\partial H}{\partial t} \right)$ .

7.1.4. Движение воды в породе не зависит от физико-химических взаимодействий с этой породой, то есть происходит под действием только разности напоров и сил вязкости.

7.1.5. Действует закон сохранения массы вещества.

7.2. Используют два подхода при выводе ДУ.

7.2.1. Балансовый (физический) – основан на физическом рассмотрении водного баланса элемента потока. Это впервые сделал Буссинеск в начале XX в.

7.2.2. Аналитический (математический) – ДУ выводятся из совместного рассмотрения трех частных уравнений: движения (Дарси), состояния среды и неразрывности потока. В сумме получается ДУ фильтрации. Рассмотрено впервые Тейсоном в 30-х гг. XX века, только для упругих сил и В.Н. Щелкачевым в 40-х гг. XX века в более общей постановке.

7.3. Вывод ДУ нестационарной фильтрации грунтовых вод (по Буссинеску).

Рассмотрим водный баланс одномерного однородного по фильтрационным свойствам потока элементарной длиной  $dx$ , шириной в плане  $b = 1m$  и высотой  $h$ , равной мощности водоносного горизонта, с наличием инфильтрационного питания  $W_e$  (рис. 7.1). В течение времени  $dt$  в элемент потока поступает горизонтальный расход  $q_x$  по оси  $x$ , за счет инфильтрации  $W_e dx$  и уходит из него расход  $q_x + dq$ . Эта алгебраическая сумма определяет изменение объема

воды в элементе потока за единицу времени, равное  $\mu \frac{\partial H}{\partial t} dx$ , что отвечает за штрихованной площади на рис. 7.1.

В результате балансовое уравнение принимает вид:

$$q_x - \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) + W_a dx = \mu \frac{\partial H}{\partial t} dx \quad (7.1)$$

За период времени  $dt$  из (7.1) получим:

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dt + W_a dx dt = \mu \frac{\partial H}{\partial t} dx dt \quad (7.2)$$

Полагая справедливой предпосылку Диопои и определяя расход по формуле

$$q_x = -kh \frac{\partial H}{\partial x} \quad (7.3)$$

после подстановки (7.3) в (7.2) и необходимых сокращений получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( kh \frac{\partial H}{\partial x} \right) + W_a = \mu \frac{\partial H}{\partial t} \quad (7.4)$$

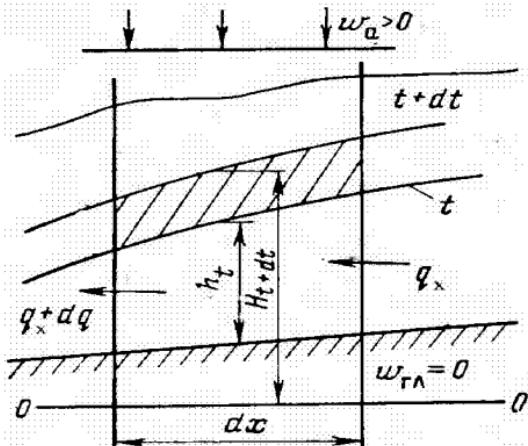


Рис. 7.1. Схема к выводу уравнения Буссинеска

При отсутствии вертикального водообмена ( $W_a = 0$ ) уравнение упрощается

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( kh \frac{\partial H}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial H}{\partial t} \quad (7.5)$$

7.4. Уравнения (7.4) и (7.5) нелинейные,  $h = f(H)$ . В таком виде его решение затруднено. Для практического использования уравнение линеаризуется двумя способами. Первый, предложенный Буссинеском, состоит в усреднении мощности потока  $h$ , которая принимается постоянной, равной среднеарифметической из минимального и максимального значений. Тогда  $h_\varphi$  можно вынести из под знака производной. Если считать пласт однородным, то  $k = const$  и, полагая

$$\frac{kh_\varphi}{\mu} = a \quad , \quad (7.6)$$

имеем уравнение Фурье:

$$a \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (7.7)$$

Это известное в математической физике уравнение теплопроводности, имеющее разработанный математический аппарат решения. Линеаризация по Буссинеску справедлива, если начальная мощность пласта  $h$  значительна, а ее изменение  $\Delta h$  во времени и по координате не превышает  $0,25h$ . Такая линеаризация приводит к значительным погрешностям при  $\Delta h > 0,25h_\varphi$ . Так, приравнивая правую часть уравнения (7.7) к нулю и дважды проинтегрировав, получим  $H = Ax + C$  (где  $A$  и  $C$  - постоянные интегрирования), то есть пьезометрическая поверхность вместо параболоида представляет собой плоскость.

Другой способ линеаризации (по Багрову-Веригину) предполагает использование преобразования  $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{2h} \frac{\partial(h^2)}{\partial t}$  и понятия напорной функции  $u = 0,5h^2$ . С их помощью уравнение для грунтовых вод с горизонтальным водоупором, однородным строением и отсутствием вертикального водообмена (7.5) преобразуем, путем умножения обеих частей на  $h$  и вводя их под знак производной, к виду:

$$kh \frac{\partial^2 \left( \frac{h^2}{2} \right)}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial \left( \frac{h^2}{2} \right)}{\partial t} \quad (7.8)$$

а затем, полагая (7.6) имеем уравнение типа Фурье:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (7.9)$$

Для пласта в полубесконечном потоке:

$$h_\varphi = \frac{2 \cdot h_{\max} + h_{\min}}{3} \quad (7.10)$$

7.5. Вывод ДУ стационарной и нестационарной фильтрации в напорных водах.

#### 7.5.1. Основные уравнения движения:

$$q_x' = -k \frac{\partial H}{\partial x}, q_y' = -k \frac{\partial H}{\partial y} \quad (7.11)$$

Знак “минус” показывает, что движение направлено в сторону, противоположную увеличению напора  $H$ .

$$\text{В радиальной системе координат } q_r' = -K \frac{\partial H}{\partial r} \quad (7.11a)$$

#### 7.5.2. Уравнения состояния:

$$n = \text{const}, \text{ недеформируемая среда и} \\ \rho = \text{const}, \text{ несжимаемая жидкость.} \quad (7.12)$$

Для упруго-деформируемой среды и жидкости:

$$dn = \beta_c dP \text{ и } \frac{d\rho}{\rho} = \beta_c dP, P \leq 10 \text{ МПа} \quad (7.13)$$

### 7.5.3. Вывод уравнения неразрывности.

Выделим в водоносном пласте элемент с объемом  $dV = mdxdydz = const$ , где  $m$  - мощность пласта и рассмотрим его баланс масс за бесконечно малое время  $dt$ .

В отличие от грунтовых вод здесь объем пласта при изменении  $H$  остается неизменным, так как  $m = const$  и необходимо рассматривать баланс масс воды, а не баланс объемов.

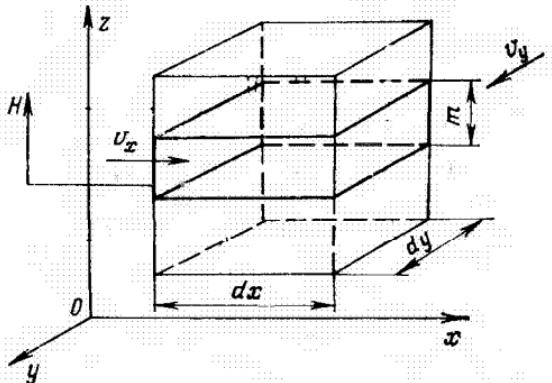


Рис. 7.2. Схема к выводу уравнения неразрывности потока (по И.К. Гавич)

Расход массы потока, поступающий по оси  $x$  за время  $dt$ , равен (рис. 7.2):

$$M_x = \rho Q_x dt = \rho V_x mdydt \quad (7.14)$$

На выходе из элемента  $dx$  расход массы потока получает приращение  $dM_x + dM_{x+}$ , где

$$dM_x = \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} mdydxdt. \quad (7.15)$$

$$\text{Аналогично по оси } y \quad dM_y = \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} mdxdydt. \quad (7.16)$$

Эти изменения приводят к тому, что масса воды, содержащаяся в элементе объемом  $dV$  и равная  $M_i = \rho dV_{\text{нек}} = \rho ndV$ , за время  $dt$  получает приращение

$$dM_i = \frac{\partial M_i}{\partial t} dt = \frac{\partial(n\rho)}{\partial t} mdxdydt, \quad (7.17)$$

имея виду, что  $dV = const$ .

Суммарное алгебраическое приращение массы воды при прохождении потока по разным направлениям через рассматриваемый элемент должно компенсироваться изменением количества воды в нем

$$M_x - (M_x + dM_x) + M_y - (M_y + dM_y) = dM \quad (7.18)$$

Подставив в (7.18) формулы (7.15), (7.16), (7.17) и проведя сокращения, получим уравнение неразрывности планового потока в виде

$$\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} = -\frac{\partial(n\rho)}{\partial t} \quad (7.19)$$

7.5.4. Для несжимаемой среды при  $n = const$  и  $\rho = const$  (жесткий режим фильтрации) имеем

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad (7.20)$$

или, подставив уравнения движения (7.11), получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -K_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -K_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) = 0 \quad (7.21)$$

При  $k = const$  - в однородной и изотропной толще пород имеем

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0 \quad - \text{уравнение Лапласа.} \quad (7.22)$$

В однородно-анизотропном пласте значения  $K_x$  и  $K_y$  по осям различны, но постоянны по данному направлению, поэтому уравнение (7.21) принимает вид

$$K_x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0 \quad (7.23)$$

Это уравнение может быть приведено к уравнению Лапласа путем линейного преобразования координат. Полагая коэффициент анизотропии

$$\lambda_x^2 = \frac{K_x}{K_y}, \quad (7.24)$$

введем новые координаты  $x_0 = \lambda_x x$  и  $y_0 = y$ .

$$\text{Тогда } \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{1}{\lambda_x^2} \frac{\partial^2 H}{\partial x_0^2} \text{ и } \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial y_0^2} \quad (7.25)$$

и получим из (7.23):

$$\frac{K_x}{K_y} \lambda_x^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y_0^2} = 0 \text{ или } \frac{\partial^2 H}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y_0^2} = 0, \quad (7.26)$$

то есть уравнение Лапласа.

7.5.5. Уравнение упругого режима фильтрации получаем, полагая справедливым уравнение состояния (7.13).

В уравнение (7.19) правый член перепишем в следующем виде

$$\frac{\partial(n\rho)}{\partial t} = n \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial n}{\partial t} \quad (7.27)$$

Имея ввиду (7.13)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \beta_e \frac{\partial P}{\partial t} \text{ и } \frac{\partial n}{\partial t} = \beta_e \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (7.28)$$

получим

$$\frac{\partial(n\rho)}{\partial t} = \rho(n\beta_e + \beta_e) \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (7.29)$$

где  $\beta^* = n\beta_e + \beta_e$  - упругоемкость пласта. (7.30)

$$\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} = -\rho \beta^* \frac{\partial P}{\partial t} \quad (7.31)$$

Так как изменения  $\rho$  невелики, можно  $\rho$  вынести из-под знака производной и она сократится. По уравнению Бернули

$$P = \gamma H - \gamma z \text{ и } \frac{\partial P}{\partial t} = \gamma \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (7.32)$$

следовательно из (7.31) имеем

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\beta^* \gamma \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (7.33)$$

Имея ввиду уравнения движения (7.11) и полагая пласт однородным получим:

$$K \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) = \beta^* \gamma \frac{\partial H}{\partial t} \quad (7.34)$$

$$\text{обозначив } \mu^* = \beta^* \gamma T \text{ и } a^* = \frac{km}{\mu^*}, \quad (7.35)$$

окончательно имеем

$$a^* \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial H}{\partial t} - \text{ уравнение Фурье.} \quad (7.36)$$

Для грунтовых вод с  $h_\varphi$  и напорных вод уравнения одинаковы, но коэффициенты существенно разные.

7.6. В радиальной системе координат аналогичное уравнение получается следующим образом.

Расход потока по оси  $r$  по Дарси при выполнении предпосылки Дюпони (рис. 7.3):

$$Q_r = 2\pi r T \frac{\partial H}{\partial r} \quad (7.37)$$

$$\text{его изменение } \frac{\partial Q_r}{\partial r} = 2\pi T \left( \frac{\partial H}{\partial r} + r \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} \right) \quad (7.38)$$

Изменение упругих запасов в элементе потока  $dV_t = 2\pi r dr dt$  за время  $dt$  будет равно

$$dV_t = 2\pi \mu^* dr \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (7.39)$$

Имея ввиду, что  $dV_t = \frac{\partial Q_r}{\partial r} dr dt$  и  $a^* = \frac{T}{\mu^*}$ , получим

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a \cdot \left( \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right) . \quad (7.40)$$

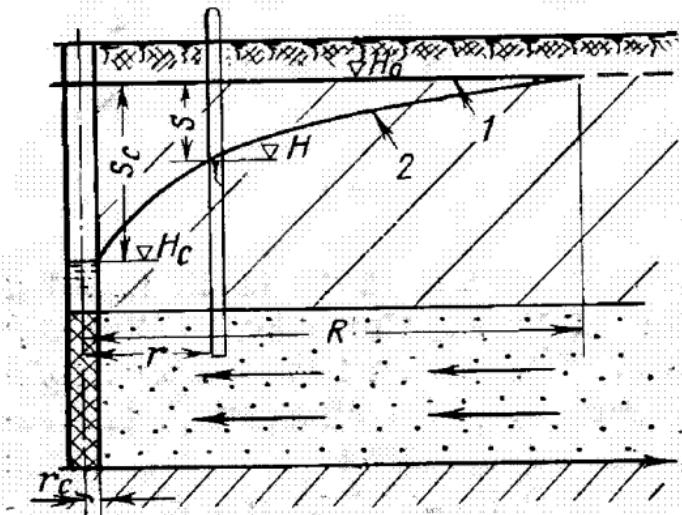


Рис. 7.3. Радиальный поток к скважине

#### Вопросы к лекции №7

- Что общего и в чем основные отличия в подходах, которыми пользуются при выводе уравнений Буссинеска (7.5) и Фурье (7.36)?
- Почему уравнение (7.8) и (7.7) считают линеаризованными? В чем суть линеаризации каждого из них?
- Какие уравнения состояния среды и жидкости формально отвечают стационарному режиму фильтрации в напорных водах?
- Назовите допущения, которые приняты при выводе уравнения (7.40).
- Перепишите уравнения (7.34) и (7.36) для изучения плосковертикальной фильтрации и приведите практический пример такого потока.
- Почему уравнение (7.4) и (7.5) считаются нелинейными?
- Какие погрешности в описании пьезометрической поверхности вносят линеаризация по Буссинеску? Какой критерий оценивает возможность ее применения?
- Объясните с физических позиций, почему в уравнениях стационарной фильтрации никак не отражены емкостные свойства пород?
- Каким образом при выводе дифференциального уравнения учитывается однородно-анизотропное строение пласта?
- Какой из анализируемых в вопросе 1 подходов использован при выводе уравнения (7.40)?

## Лекция №8. Основные методы решения дифференциальных уравнений

8.1. Дифференциальные уравнения (ДУ) описывают целый класс одинаковых процессов фильтрации. Для выделения из этого класса конкретной решаемой задачи следует дополнительного задать условия однозначности, которые обеспечивают получение единственного решения ДУ. К этим условиям относятся: 1) геометрические размеры области фильтрации для конкретной задачи, 2) значения физических параметров фильтрационной среды, 3) граничные условия и 4) начальные условия при решении задач нестационарной фильтрации. Совокупность ДУ и условий однозначности образуют замкнутую систему уравнений и обеспечивают необходимые и достаточные условия для получения единственного решения задачи.

### 8.2. Свойства ДУ.

8.2.1. Универсальность ДУ устанавливает математическое сходство гидрогеологических процессов с процессами иного физического содержания, например движения электрического тока. Оба эти процессы описываются уравнением Лапласа, а закон Дарси аналогичен закону Ома ( $Q = \frac{\Delta H}{\Phi}$  и  $I = \frac{\Delta U}{R}$ ), где  $\Phi$  - фильтрационное сопротивление.

Универсальность ДУ определяется возможностью приведения их к безразмерному виду и получения основных критериев, характеризующих процесс фильтрации. В ДУ плановой фильтрации

$$a \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) + \frac{W_a}{\mu} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (8.1)$$

вводим безразмерные характеристики

$$\bar{H} = \frac{H}{H_0}; \bar{x} = \frac{x}{L}; \bar{y} = \frac{y}{L}; \bar{t} = \frac{t}{\tau}, \bar{W}_a = \frac{W_a}{W_0} \quad (8.2)$$

Здесь  $H_0$  - изменение уровня на границе потока,

$L$  - длина исследуемого потока,  $\tau$  - условное время стабилизации нестационарного процесса изменения уровня в области фильтрации, равное

$$\tau = \frac{L^2}{a} \text{ или } \bar{t} = \frac{at}{L^2} = F_0 - \text{критерий нестационарного процесса Фурье; } \quad (8.3)$$

$$W_0 = \frac{\mu H_0}{\tau} = \frac{H_0 T}{L^2} \quad (8.4)$$

Тогда уравнение (8.1) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial \bar{y}^2} + \bar{W}_a = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{t}} \quad (8.5)$$

Величину  $\bar{W}_a$  с учетом условия (8.4) можно записать в виде

$$\bar{W}_a = \frac{W_a L^2}{H_0 T}, \quad (8.6)$$

то есть она численно равна коэффициенту вертикального водообмена  $K_{eo}$ ,

где

$$K_{eo} = \frac{q_e}{q_r} = \frac{W_a L}{H_0 T} \quad (8.7)$$

Для напорного пласта с перетеканием величина инфильтрации  $W_a$  заменяется на глубинное питание  $W_{ea}$ . Тогда

$$\overline{W}_{ea} = \frac{L^2}{B^2} = \frac{L^2 k_0}{T m_0}, \quad (8.8)$$

где  $B$  – параметр перетекания (6.22),

$k_0, m_0$  – коэффициент фильтрации и мощность раздельного относительно водоупорного слоя.

8.2.2. Для линейных или линеаризованных ДУ, в которых физические параметры среды ( $k, \mu$ ) и мощность пласта не изменяются от изменения положения уровня и на границах отсутствуют ГУ III рода, можно использовать метод суперпозиций или сложения полей.

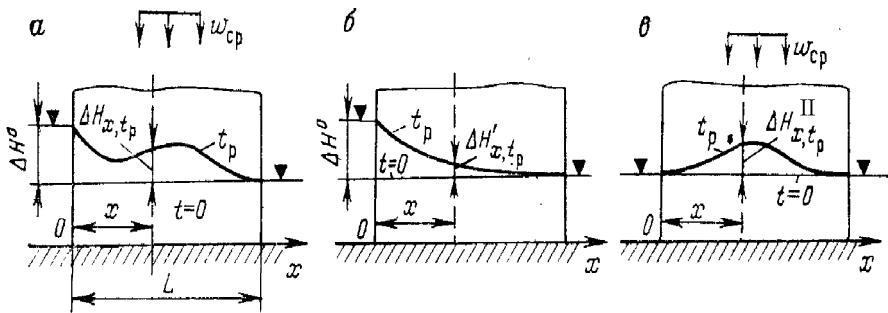


Рис. 8.1. Схема к пояснению метода суперпозиции (по И.К. Гавич)  
(а – общее решение; б – подпор УГВ от подъема уровня на границе; в – подъем УГВ от орошения)

Суть этого метода заключается в том, что сложный процесс фильтрации формирующийся под действием нескольких факторов возмущения, рассматривают как сумму частных фильтрационных процессов (полей), вызванных действием каждого возмущения в отдельности в течение своего расчетного времени (рис. 8.1):

$$\Delta H(x, t_p) = \Delta H'(x, t_p) + \Delta H''(x, t_p) + \dots \quad (8.9)$$

Это свойство ДУ позволяет вместо определения всей величины напора  $H$  изучать только изменение этого напора,

$$\text{то есть } H(x, t) = H(x, 0) + \Delta H(x, t), \quad (8.10)$$

где  $H(x, 0)$  – начальные условия, распределение уровня в естественных условиях, которое нам известно и характеризует стационарную фильтрацию,

$\Delta H(x, t)$  – нестационарное изменение уровня в области фильтрации под влиянием, например подпора уровня в водохранилище, орошения, откачки из скважин. В последнем случае пользуются понятием понижения уровня  $S(r, t)$ . Задача определения  $\Delta H(x, t)$  или  $S(r, t)$  упрощается, так как на границах задается только прогнозное изменение уровня или расхода воды,

т.е.  $H_0(x, t)$ ,  $Q_{\text{св}}$ . На остальных границах, где изменений нет, задаются более простые ГУ типа  $\Delta H = 0$ ,  $S = 0$ ,  $Q = 0$ . Начальные условия в этом случае всегда имеют вид  $\Delta H(x, 0) = 0$  или  $S(r, 0) = 0$ .

Сложную фильтрационную задачу можно разделить на более простые частные задачи. При этом общее решение – есть сумма частных решений. Например, взаимодействие скважин с расходами  $Q_{\text{сум}} = Q_1 + Q_2$  можно рассматривать как две задачи, в первой – задается  $Q_1 + 0$  и получаем  $S_1(r, t)$ , во второй – задается  $0 + Q_2$  и получаем  $S_2(r, t)$ . Общее решение  $S(r, t) = S_1(r, t) + S_2(r, t)$ . Аналогично при подпоре за счет повышения уровня на обоих границах междуречного массива задается  $\Delta H_1^0 + 0$  и  $0 + \Delta H_2^0$ . Затем полученные частные решения суммируются  $\Delta H(x, t) = \Delta H_1(x, t) + \Delta H_2(x, t)$ .

В сумме частные решения должны учитывать все граничные и начальные условия, которые заданы для полной задачи. Например, при подпоре от орошения и подъеме уровня в водохранилище (рис. 8.1 б, в) отдельно учитывается орошение, отдельно подъем уровня в реке, отдельно начальные условия. Общее решение есть сумма частных решений.

### 8.3. Основные методы решения ДУ

Существуют три группы методов: строгие, приближенные, моделирование.

#### 8.3.1. К строгим относят аналитические и гидромеханические.

Непосредственное интегрирование уравнения Лапласа

Например  $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0$ ,  $\frac{\partial H}{\partial x} = A$ ,  $H_x = Ax + c$ . При  $x = 0 \rightarrow c = H_1$ , при  $x = L \rightarrow A = \frac{H_2 - H_1}{L}$ , то есть  $H_x = H_1 - \frac{H_1 - H_2}{L}x$ .

При плоско-вертикальной фильтрации под плотинами используется метод комфоргных преобразований из теории аналитических функций. ДУ нестационарной фильтрации решают методами математической физики (операционное исчисление, разложение в ряды Фурье и др.).

ДУ радиальной и планово-радиальной фильтрации, характеризующие приток воды к скважинам, решаются с использованием теории линейных и точечных стоков на плоскости или в пространстве. Скважины с коротким фильтром – точечный, длинным – линейный сток.

#### 8.3.2. К приближенным относят гидравлические, графические методы и фрагментирование потока.

Гидравлический метод связан с непосредственным интегрированием уравнения Дарси применительно к стационарной фильтрации. Принимается предпосылка, определяющая строение фильтрационного потока: например постоянство скорости фильтрации в сечении  $V_z / z = const$ , предпосылка Диопни.

Графические методы основаны на использовании гидродинамических сечек. Здесь используют метод недеформируемых лент или трубок тока.

Метод фрагментов предполагает выделение в сложном фильтрационном потоке более простых по своей структуре и строению фрагментов. Задачи решаются для каждого фрагмента отдельно. Затем фрагменты объединяются на

основе условий неразрывности потока (ГУ IV рода).

8.3.3. Моделирование может быть аналоговым или численным. Аналоговые модели использовали свойство универсальности ДУ. Сложный процесс фильтрации воспроизводился на электрических моделях, которые можно было легко собрать и исследовать в лаборатории. Численное моделирование использует метод конечных разностей, то есть переход от бесконечно малых к конечным приращениям  $dx \rightarrow \Delta x$ ,  $dH \rightarrow \Delta H$  и  $dt \rightarrow \Delta t$  и т.д. Уравнение Фурье – это балансовое уравнение.

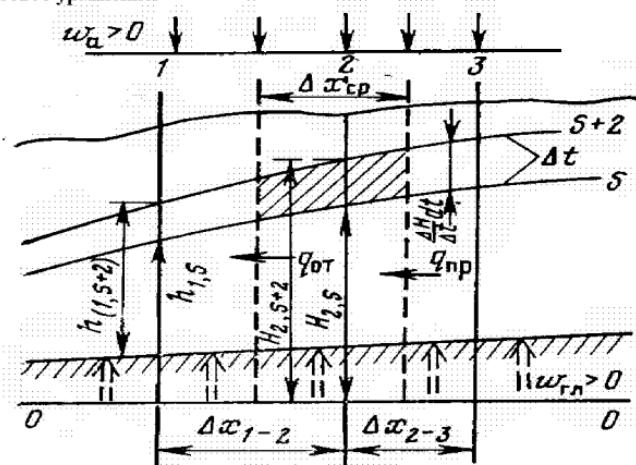


Рис. 8.2. Схема к уравнению в конечных разностях (по Г.Н. Каменскому)

Для конечных разностей имеем реальный баланс притока-оттока и накопления-расходования воды в расчетном элементе потока (рис. 8.2).

$$\mu \frac{\Delta H}{\Delta x} = q_{\text{в}} - q_{\text{вн}} \pm W \Delta x \quad (8.11)$$

Моделирование – трудоемкий процесс, используется в сложных гидро-геологических условиях, требует значительно лучшего изучения этих условий.

#### 8.4. Прямые и обратные задачи фильтрации.

В прямых задачах определяются показатели, характеризующие процесс фильтрации в будущем с изменением расходов и уровней воды в области фильтрации. При этом должны быть известны и заданы все условия однозначности (размеры области фильтрации, ее строение, параметры среды, граничные и начальные условия). Это задачи прогноза работы инженерного сооружения.

Целью решения обратных задач является изучение и уточнение гидрогеологических условий области фильтрации. При решении такой задачи неизвестными являются некоторые элементы условий однозначности (строение пласта, гидродинамические параметры, величина инфильтрационного питания и др.). Для их определения должна быть известна реакция области фильтрации на за-

даваемое возмущение (подпор, откачка, опыт эксплуатации инженерного сооружения). То есть, показатели, характеризующие процесс фильтрации, известны. Это задачи эпигноза. К ним относится обработка данных опытных откачек, воспроизведение существующих условий эксплуатации инженерных сооружений.

В сложных гидрогеологических условиях решение обратных задач реализуется методами подбора. При этом полученное решение требует обоснования достоверности. При недостаточном объеме информации (данных наблюдений за режимом подземных вод, изученности гидрогеологических условий) результаты решения обратных задач могут быть неоднозначными.

### **Вопросы к лекции №8**

1. В чем заключается универсальность дифференциальных уравнений?
2. В чем суть метода сложения фильтрационных полей? Какие упрощения он позволяет сделать в математической постановке задач фильтрации?
3. Запишите критерии Фурье, инфильтрационного и глубинного водообмена, разъясните их роль при гидродинамических расчетах.
4. Почему метод сложения течений неприменим для нелинейных задач? В чем заключается понятие нелинейности системы дифференциальных уравнений, описывающих процесс фильтрации?
5. Каким образом учитывается естественное инфильтрационное питание в расчете прогнозного изменения уровня при использовании метода сложения течений? Почему для широкого круга прогнозных задач нет необходимости в знании величины естественного инфильтрационного питания?
6. Что такое прямые и обратные задачи фильтрации? Приведите примеры.
7. Каким образом трансформируется дифференциальное уравнение при использовании метода конечных разностей?
8. Запишите уравнение (8.11) для условий стационарного режима фильтрации.
9. Запишите выражение для  $q_{np}$  и  $q_{sw}$  в уравнении (8.11), воспользовавшись обозначениями на рис. 8.2.
10. Возможно ли использование метода суперпозиции в субнапорном пласте для расчета изменения уровня от эксплуатации скважины с постоянным водоотбором и одновременного повышения уровня в реке?

## ЧАСТЬ 2

### Радиальная геофильтрация

#### Лекция № 9. Основы теории водонприотока к совершенным скважинам

##### 9.1. Особенности радиальной и планово-радиальной фильтрации

Рассмотрим фильтрацию к скважине с точки зрения структуры и мерности потока.

Радиальная фильтрация возникает в том случае, если одиночная скважина работает в неограниченном в плане бассейне подземных вод с расходом  $Q_0$ . Линии тока-радиусы, по ним  $\operatorname{grad} H \rightarrow \max$ . По линиям напора – окружностям – выполняются  $\operatorname{grad} H = 0$ ,  $\psi_r = 0$  (рис. 9.1). В декартовой системе имеем двухмерную, в полярной системе – одномерную фильтрацию. Выполняется предпосылка Диопюи  $\psi_r|_z = \text{const}$ . Начало координат задается в центре скважины.

Планово-радиальная фильтрация возникает под влиянием двух факторов: а) наличие границ пласта и б) наличие взаимодействующих скважин. Это уже не одномерная фильтрация даже в полярной системе координат, но, используя метод фрагментов и суперпозицию, оказывается можно эту фильтрацию свести к одномерной.

##### 9.2. Особенности формирования фильтрационного потока к скважине

Используя метод суперпозиции будем рассматривать не само положение уровня в пространстве и во времени, а только его изменение, называемое понижением, так что

$$S = H_{\text{ст}} - H_{\text{дин}}, \quad (9.1)$$

где  $H_{\text{ст}}$  – статический или естественный уровень воды до начала откачки,

$H_{\text{дин}}$  – динамический или измененный откачкой уровень воды.

Для одиночной скважины при наступлении стационарного режима фильтрации можно отметить следующее:

① Величина понижения уровня по координате  $r$  изменяется нелинейно, т.е.  $\frac{dS}{dr} = \text{var}$ . Так как поток сходящийся, площадь поперечного сечения  $F$  уменьшается, а расход  $Q = k \cdot I \cdot F$  неизменный, то  $I = \frac{dS}{dr}$  по пути к скважине должна возрастать (рис. 9.1).

② В процессе откачки воды из скважины в неограниченном пласте ее воздействие на пласт последовательно расширяется. Изменение уровня охватывает все новые области пласта. Назовем расстояние, на котором находится самая удаленная, значимая для расчетов, возмущенная точка пласта – радиусом влияния  $R_{\text{вн}}(t)$ . Теоретически эта величина последовательно возрастает, причем на  $R > R_{\text{вн}}(t) \rightarrow H = H_{\text{ст}}$  и  $S = 0$ .

③ Площадь, которая охвачена изменением уровня, равна  $\pi R_{\text{вн}}^2$ . В пределах этой площади идет либо осушение пласта (грунтовые воды), либо сработка уп-

ругих запасов пласта (напорные воды). Очевидно, чем больше площадь, на которой формируются запасы, тем меньше темп снижения уровня во времени,  $\Delta S/\Delta t$  ибо

$$Q_0 = \frac{\mu \cdot \pi \cdot R_{\text{so}}^2 \cdot (t) \Delta S_{\text{cp}}}{\Delta t} \quad (9.2.)$$

Таким образом, рост величины понижения  $S$  во времени будет уменьшаться.

④ Может ли быть, чтобы рост величины понижения  $S$  прекратился во времени совсем. То есть при постоянном  $Q_0$  наступила стационарная фильтрация?

Может – если в процессе откачки ее влияние вызовет дополнительное поступление воды в пласт. И как только это дополнительное поступление воды в пласт сравняется с дебитом скважины, наступит стационарная фильтрация. В этом случае величина  $R_{\text{so}}(t) = \text{const}(t)$  – стабилизируется – и может быть обозначена  $R_k$  (рис. 9.1).

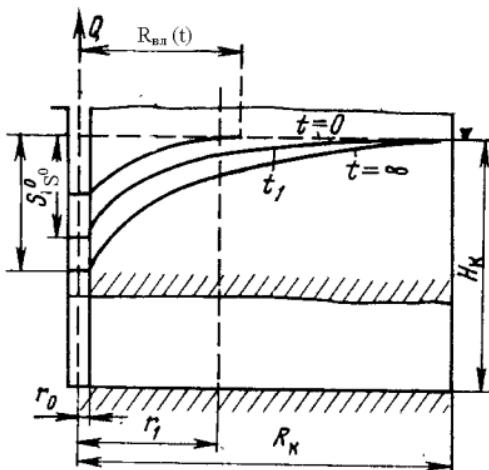


Рис. 9.1. Формирование депрессионной воронки в зоне действия скважины в пласте с ГУ - I

Факторы, которые могут привести к стационарной фильтрации: а) наличие контура постоянного напора, открытой границы – реки, каналы, водохранилища; б) наличие зоны разгрузки подземных вод в виде родников или подземного испарения (ГУ III рода), если  $Q_{\text{разг}} \geq Q_0$ . Произойдет инверсия разгрузки; в) наличие перетока через слабопроницаемые пластины в слоистой толще. При этом переток либо увеличивается, если откачка осуществляется в пласте с изначально меньшим напором, либо уменьшается переток из эксплуатируемого пласта (сокращается его разгрузка); г) искусственные факторы – орошение, ка-

нал, построенный после начала работы скважины, инфильтрационный бассейн. Инфильтрация, существующая до начала откачки, не приводит к стабилизации динамического уровня. В естественных условиях она формирует статический уровень  $H_{cm}$ .

(5) При условии постоянного водоотбора  $Q_0 = const$  и отсутствии искусственных факторов (см. выше) величина понижения  $S$  постепенно увеличивается. Стабилизация величины  $S$  возможна, если в процессе откачки в пласт будет поступать дополнительное питание из реки, за счет перетекания, уменьшения разгрузки подземных вод или дополнительного инфильтрационного питания.

Стационарная фильтрация, если она наступила, в нестационарную может перейти только в случае, если изменились ГУ. Стационарная – частный случай нестационарной фильтрации.

(6) Мы рассмотрели изменения понижения уровня во времени в самой скважине. Теперь рассмотрим как меняется  $S$  в любой точке пласта на расстоянии  $r$  от скважины. Пока  $R_{as}(t)$  не достиг этой точки, очевидно, что  $S(r)=0$ , то есть изменений уровня нет. Далее закономерность изменения уровня аналогична уровню в скважине, однако, величина  $S(r) < S_0$  всегда. Т.о. понижение в пласте запаздывает тем больше, чем дальше рассматривается точка, и само понижение уровня с расстоянием уменьшается (рис. 9.1).

(7) При постоянном водоотборе вокруг скважины формируется область, в пределах которой расход практически не меняется, то есть на границах этой области он почти такой же, что и скважине (отличие менее 10%). В этой области возникает квазистационарный режим фильтрации. Область все время расширяется. В этой области  $Q_{rs} = const$ . Следовательно во времени  $V_t = const$ ,  $I_t = const$  и уровень ПВ снижается параллельно себе без изменения углов наклона. Это значит, что кривые  $S-t$  на разные моменты времени параллельны друг другу.

(8) Сравнивая откачуку из скважин в грунтовых и напорных водах следует отметить, что:

а) величина понижения уровня при одинаковом водоотборе и равных значениях водопроводимости всегда больше в напорных водах, так как в формуле (9.2.)  $\mu^* < \mu$ .

б) скорость распространения влияния откачки в напорных водах всегда больше.

(9) Если в процессе откачки в скважине поддерживать постоянным уровень ( $S = const$ ), то величина расхода  $Q_0$  поступающего к скважине будет уменьшаться, так как будет уменьшаться  $I = \frac{dS}{dr}$  за счет расширения зоны влияния.

В заключение отметим, что фильтрация в ограниченных пластах в начальный период времени идет как в бесконечных, до тех пор, пока  $R_{as}(t) \leq L$  - расстояние скважины до границы.

9.3. Основные факторы, определяющие типовые расчетные схемы фильтрации воды к скважине:

1. По гидравлическому состоянию пласта (напорные, безнапорные).
2. По режиму фильтрации (нестационарная, квазистационарная, стационарная).
3. По влиянию внешних границ пласта (неограниченные, полуограниченные, ограниченные) и задаваемых на них ГУ ( $Q = 0, S = 0$ ).
4. По строению среды (изолированная однопластовая, с перетеканием слоистая и многопластовая, неоднородная в плане, гетерогенная).
5. По количеству взаимодействующих скважин.
6. По режиму водоотбора из скважин ( $Q_0 = \text{const}$ ,  $Q_0 = \text{var}$ ,  $S_0 = \text{const}$ ).
7. По характеру взаимодействия скважин с водоносным горизонтом (совершенные и несовершенные).

#### 9.4. Формулировка задачи радиальной фильтрации

Запишем дифференциальные уравнения в полярных координатах:

для стационарной фильтрации (Лапласа):

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dH}{dr} \right) = 0 \quad (9.3)$$

для нестационарной фильтрации (Фурье):

$$a \left( \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right) = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (9.4)$$

Здесь в левой части (9.4) записано то же, что и в (9.3), но проведено дифференцирование по частям и деление на  $r$ .

Для понижения уровня дифференциальные уравнения имеют вид

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dS}{dr} \right) = 0 \quad (9.5)$$

$$\text{и } a \left( \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial r} \right) = \frac{\partial S}{\partial t} \quad (9.6)$$

$$\text{а ГУ на фильтре скважины } Q_0 = -2\pi Tr \frac{\partial S}{\partial r} \Big|_{r=0} = \text{const} \quad (9.7)$$

Условия однозначности:

для стационарной фильтрации  $r_0 \leq r \leq R_s$ ,

геометрические размеры пласта

для нестационарной фильтрации  $r_0 \leq r < \infty$ ,

$T = \text{const}$ ,  $a = \text{const}$  физические параметры, однородная среда.

Для решения задачи в понижениях уровня используется метод суперпозиции

$$H(r, t) = H(r, 0) - S(r, t). \quad (9.8)$$

общее начальные понижение

решение условия уровня

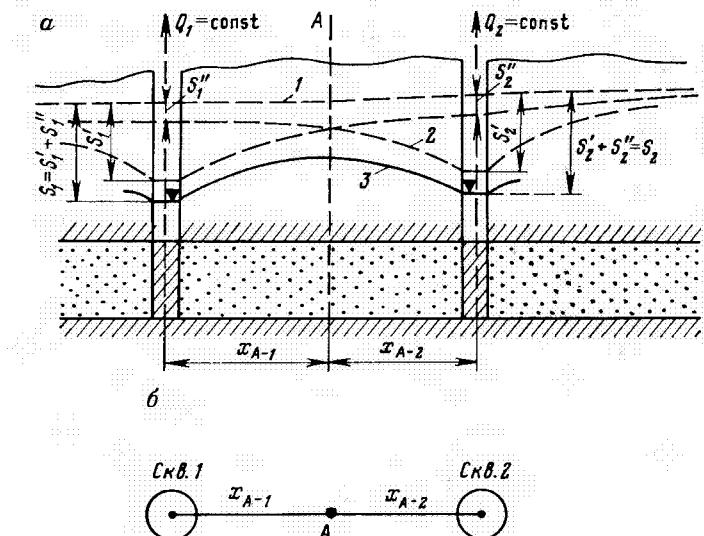
Преимущество такой постановки в том, что исключаются из рассмотрения начальные условия, которые нам известны и могут быть учтены после решения задачи. Поэтому начальные условия  $S(r, 0) = 0$ . Решаем задачу для бассейна подземных вод, без учета бытового (естественного) уклона  $I_e = 0$ . Плос-

кость сравнения соответствует положению уровня подземных вод.

### 9.5. Постановка задачи для планово-радиальной фильтрации

Последовательно рассмотрим две постановки:

#### 9.5.1. Система взаимодействующих скважин (рис. 9.2)



**Рис. 9.2. Взаимодействующие скважины (а – разрез; б – план)**

Положение уровня подземных вод: 1 – начальное; 2 – при работе каждой скважины как одиночной; 3 – при совместной работе скважин

Рассмотрим последовательно воздействие каждой скважины на пласт в предположении, что она работает как одиночная. Тогда под влиянием работы скв.1 – с расходом  $Q_1 \rightarrow$  имеем понижения уровня  $S_{11}(r_0)$  и  $S_{12}(r_{1-2})$ , а для скв.2 –  $Q_2 \rightarrow S_{21}(r_{1-2})$  и  $S_{22}(r_0)$ .

Сложение полей двух скважин, работающих совместно с  $Q_1$  и  $Q_2$ , позволяет получить  $S_1 = S_{11} + S_{21}$  и  $S_2 = S_{12} + S_{22}$ .

В общем случае для  $n$  скважин имеем

$$S_i = \sum_{j=1}^n S_{ij}(r_i), \quad (9.9)$$

где  $n$  – общее число скважин в пласте;

$S_{ij}$  – срезка формируемая в  $i$ -ой скважине от работы  $j$ -ой скважины;

$r_i$  – расстояние между  $i$  и  $j$  скважинами, при  $i = j \rightarrow r_i = r_0$ ;

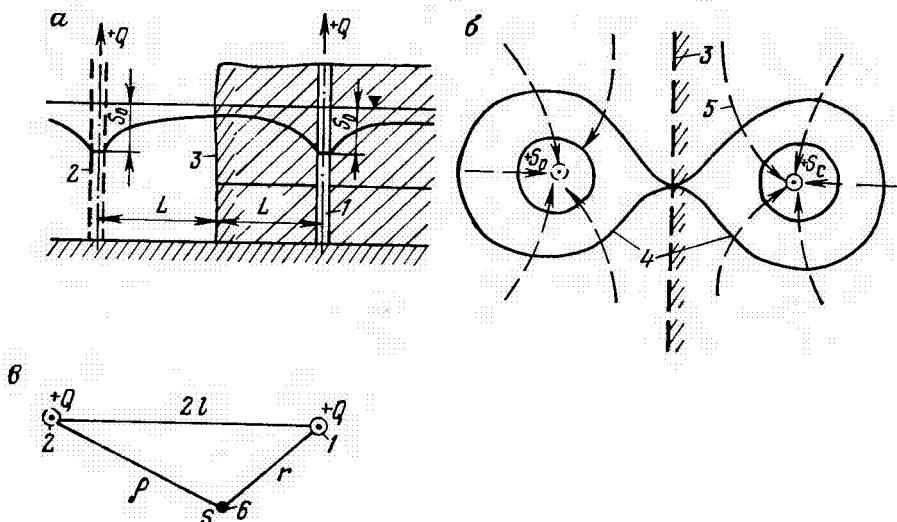
$S_i$  – общее понижение в  $i$ -ой скважине.

Таким образом, разделение задачи на фрагменты, в которых рассматривается только одна скважина ( $1, 2, 3 \dots i, n$ ), позволяет планово-радиальную фильтрацию свести к  $n$  радиальных задач. Общее решение – есть сумма частных решений. Главное условие использования метода суперпозиций – диффе-

ренциальные уравнения должны быть линейными.

### 9.5.2. Скважина вблизи границы

Оказывается и в этом случае можно использовать метод суперпозиции и свести задачу к радиальной. Из анализа гидродинамических сеток видно, что ЛТ и ЛН к скважине вблизи границы располагаются аналогично двум взаимодействующим скважинам, причем граница есть водораздельная линия (рис. 9.3).



**Рис. 9.3. Схема – скважины у линейного непроницаемого контура  
(по И.К. Гавич)**

**(а – разрез; б – план; в – расчетная схема)**

1,2 – реальная и отображенная скважины, соответственно; 3 – непроницаемая граница; 4 – линия напора; 5 – линия тока; 6 – расчетная точка

Используется метод отображения реальной скважины от границы (как в зеркале). На расчетной схеме появляется воображаемая скважина, которая эквивалентно заменяет границу пласта. Таким образом, на расчетной схеме полуограниченный пласт заменяется на неограниченный с дополнительной воображаемой скважиной. Используя (9.9), проводят расчет понижения уровня в скважине.

### 9.6. Решение задачи радиальной стационарной фильтрации (задачи Дюпюи)

Рассматривается напорный водоносный пласт, имеющий круговой контур постоянного уровня ( $S_k = 0$ ) на расстоянии  $R_k$  от скважины, из которой ведется откачка. Для произвольного сечения на расстоянии  $r$  от оси скважины запишем

$$Q = k \cdot I \cdot F = -k \frac{dS}{dr} 2\pi r. \quad (9.10)$$

Разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$\frac{Q}{2\pi k m} \int \frac{dr}{r} = - \int dS. \quad (9.11)$$

В качестве пределов интегрирования берем расстояние до кругового контура  $R_k$  и произвольное сечение  $r$ . Понижение уровня здесь, соответственно, 0 и  $S_r$  (рис. 9.4).

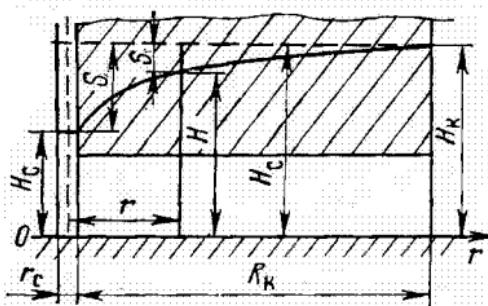


Рис. 9.4. Расчетная схема стационарной фильтрации в напорном пласте

Имеем

$$S_r = \frac{Q}{2\pi k m} \ln \frac{R_k}{r}, \quad (9.12)$$

где  $S_r$  - величина понижения в точке пласта, располагающейся на расстоянии  $r$  от скважины, из которой ведется откачка.

Получена формула Дюпюи для радиальной фильтрации. Эта формула используется для построения кривой депрессии.

Для двух произвольно взятых точек на расстояниях  $r_A$  и  $r_E$  получим

$$S_A - S_E = \frac{Q}{2\pi k m} \ln \frac{r_E}{r_A} \quad (9.13)$$

Если необходимо знать понижение уровня в самой скважине  $r \rightarrow r_0$ , тогда из (9.12) имеем

$$S_0 = \frac{Q}{2\pi k m} \ln \frac{R_k}{r_0} \text{ или} \quad (9.14)$$

$$Q = \frac{2\pi k m S_0}{\ln \frac{R_k}{r_0}} \quad (9.15)$$

Для грунтовых вод вводим напорную функцию

$$u = m \Delta H = \frac{\Delta h^2}{2} \text{ или } ms = \frac{s(h_{cm} + h_{as})}{2} = \frac{s(2h - s)}{2} \quad (9.16)$$

Формула справедлива только для горизонтального водоупора.

Если задано  $S_0$ , то можно определить расход скважины  $Q_0$ .

Отклонение от формулы Дюпюи.

В начале 30-х гг. Козени, исследуя приток воды к скважине на фильтре-

ской модели (в грунтовом потоке), обнаружил, что кривая депрессии в грунтовых водах не примыкает к уровню воды в фильтре скважины, а находится выше, то есть на стенке фильтра скважины существует гидравлический скачок уровня ( $\Delta h_0$ ) (рис. 9.5).

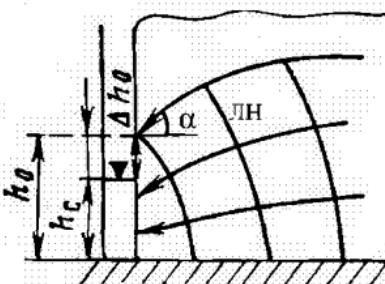


Рис. 9.5. Схема возникновения гидравлического скачка в фильтре скважины

Г.Н. Каменский, рассматривая этот вопрос, обратил внимание, что вблизи скважины нарушается предпосылка Дюпюи. Линии напора (ЛН) вблизи фильтра — кривые второго порядка, в расчетной же схеме они принимаются в виде образующей боковой поверхности цилиндра. Ошибки тем больше, чем больше напорный градиент, т.к. увеличивается угол  $\alpha$ .

Существуют эмпирические формулы для учета  $\Delta h_0$ . Для водозаборных скважин  $\Delta h_0$  обычно не велик и не всегда учитывается. Для определения  $\Delta h_0$  на практике бурятся затрубные скважины.

Исследуем изменение расхода от величины понижения уровня в скважине. Для этого введем понятие удельный дебит

$$q = \frac{Q_0}{S_0} \left[ \frac{\text{м}^3}{\text{сум} \cdot \text{м}} \right]. \quad (9.17)$$

Для напорных вод имеем

$$Q_0 = \frac{2\pi TS_0}{\ln \frac{R_k}{r_0}} \quad \text{и} \quad q = \frac{2\pi T}{\ln \frac{R_k}{r_0}}, \quad (9.18)$$

то есть линейная зависимость  $Q_0$  от  $S_0$  (рис. 9.6а).

Для безнапорных вод имеем:

$$Q_0 = \frac{\pi k (2h_{cm} - S_0) S_0}{\ln \frac{R_k}{r_0}}, \quad q = \pi k \frac{(2h_{cm} - S_0)}{\ln \frac{R_k}{r_0}} \quad (9.19)$$

получим параболическую зависимость  $Q_0$  от  $S_0$  (рис. 9.6б).

В последнем случае при росте  $S_0$  величина  $q$  уменьшается. Теоретически  $Q_0$  — max при  $S_0 \rightarrow h_{cm}$ , но существует скачок  $\Delta h_0$ , поэтому  $Q_{max}$  достигает при

существенно меньших понижениях уровня.

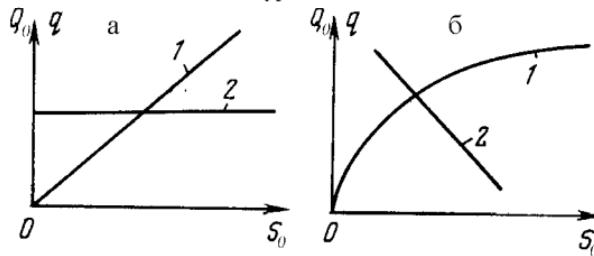


Рис. 9.6. Кривые зависимостей  $Q_0 = f(S)$  и  $q = f(S)$  для напорных (а) и групповых (б) вод

### 9.7. Вывод основных уравнений для планово-радиальной стационарной фильтрации

Рассмотрим систему из  $n$  взаимодействующих скважин, располагающихся в пласте, получающем дополнительное питание. Будем считать, расстояние между скважинами существенно меньше радиуса питания  $R_k$ , т.е. скважины взаимодействуют друг с другом. Дополнительное питание больше суммарного расхода скважин. Понижение в любой точке  $M$  может быть определено методом суперпозиции (рис. 9.7)

$$S_u = \sum_i^n S_i . \quad (9.20)$$

В стационарном режиме решение для каждой скважины

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{Q_1}{2\pi T} \ln \frac{R_{k1}}{r_1} \\ S_2 &= \frac{Q_2}{2\pi T} \ln \frac{R_{k2}}{r_2} \\ &\cdots \cdots \cdots \\ S_n &= \frac{Q_n}{2\pi T} \ln \frac{R_{kn}}{r_n} \end{aligned} \quad (9.21)$$

В системе (9.21) при суммировании расходов получим

$$Q_{\text{сум}} = \sum_{i=1}^n Q_i . \quad (9.22)$$

Введем показатель расхода  $i$ -ой скважины

$$\alpha_i = \frac{Q_i}{Q_{\text{сум}}} . \quad (9.23)$$

Величина  $R_{ki}$  с величиной  $R_k$  всей системы скважин может быть связана по разному. Если рассматриваем дополнительное питание из реки или переток из питающего пласта, то  $R_k = R_{ki}$ . Если это инверсия естественной разгрузки, то

$$R_k = \sqrt{\sum_{i=1}^n R_{ki}^2} \quad (9.24)$$

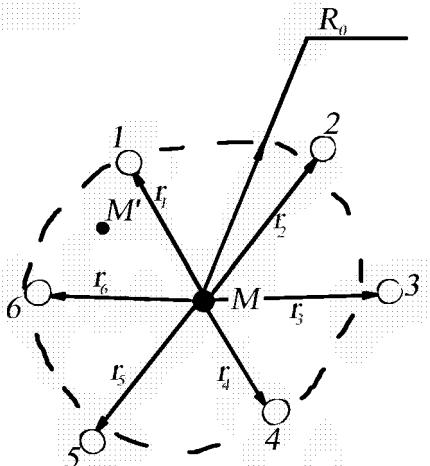


Рис. 9.7. Расчетная схема к формулам 9.25 и 9.30

Подставляя в (9.20) уравнение (9.21) с учетом (9.22), (9.23), (9.24), получим

$$S_u = \frac{Q_{sym}}{2\pi T} \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln \frac{R_k}{r_i} \quad (9.25)$$

Это уравнение Форхгеймера для системы взаимодействующих скважин.

Здесь  $r_i$  - расстояние от точки  $M$  до каждой скважины, м.

Для расчета водозаборов обычно принимают  $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n$  (9.26).

Тогда  $\alpha = \frac{1}{n}$ , так как  $Q_{sym} = nQ$ . С учетом этого уравнение имеет вид

$$S_u = \frac{Q_{sym}}{2\pi T} \left( \ln R_k - \frac{1}{n} \ln r_1 r_2 \dots r_n \right) \quad (9.27)$$

Если ввести обозначения

$$\rho_s = \sqrt{r_1 r_2 \dots r_n}, \quad (9.27)$$

где  $\rho_s$  - приведенный радиус водозабора, то уравнение (9.27) примет вид уравнения Диопюи:

$$S_u = \frac{Q_{sym}}{2\pi T} \ln \frac{R_k}{\rho_s} \quad (9.29)$$

Если скважины расположены по кругу, то (9.29) перепишем в виде

$$S_u = \frac{Q_{sym}}{2\pi T} \ln \frac{R_k}{R_0} \quad , \quad (9.30)$$

где  $R_0$  - радиус большого колодца (рис. 9.7)

Это формула “большого колодца”. Для всех точек  $M'$ , расположенных в пределах круга радиуса  $R_0$ , понижения уровня принимаются одинаковыми, т.е.  $S_{M'} = S_M$ . Таким образом, формула “большого колодца” предполагает равенство всех понижений уровня внутри контура скважин. В действительности имеются различия в понижениях, но они не очень существенные именно для круговой системы. Иногда формулу “большого колодца” используют и для произвольной системы скважин, например в (9.30)  $\rho_s \approx R_0$  для точки  $M$  в центре системы.

Здесь ошибки могут быть более значимыми. Часто определяют  $R_0 = \frac{P}{2\pi}$ , где  $P$  - периметр системы скважин.

### Вопросы к лекции №9

1. В каких условиях водоприток к скважине отвечает схеме планово-радиальной фильтрации? Покажите на примере сущность метода сложения течений (суперпозиции).
2. Каким образом изменяется площадь поперечного сечения потока и градиент при радиальной стационарной фильтрации к скважине?
3. Почему в процессе откачки уменьшается темп роста понижения уровня  $\Delta h/\Delta t$ ?
4. При каких нарушениях условий проведения откачки может наблюдаться уменьшение понижения во времени?
5. Какова последовательность вовлечения в процесс откачки из скважины отдельных зон водоносного пласта?
6. Перечислите основные факторы, определяющие типовые условия фильтрации воды к скважине.
7. Почему в напорных водах, в процессе откачки, при условии одинаковых расходов и водопроводимости пласта, величина понижения уровня и радиус влияния больше, чем в грунтовых?
8. На основании анализа формул (9.18) и (9.19) покажите формальную аналогию между решениями идентичных задач стационарной фильтрации для напорных и безнапорных вод. Используйте для этого соотношение (9.16).
9. Объясните с физических позиций возникновение промежутка высачивания  $\Delta h_0$  на границе безнапорного потока. Как изменится величина  $\Delta h_0$  с а) увеличением расхода, б) коэффициента фильтрации пород, в) мощности потока вблизи границы, при прочих равных условиях?
10. С чем связано различие в характере изменения расхода и удельного дебита скважин для грунтовых и напорных вод?
11. Возможно ли использование метода суперпозиции для расчета взаимодействия двух скважин эксплуатирующихся с условием постоянного уровня в каждой из них? Почему?

## Лекция № 10. Основные уравнения нестационарной фильтрации к скважинам

### 10.1. Постановка задачи

Рассматривается приток воды к совершенной скважине с постоянным расходом ( $Q_0 = const$ ) в однородном, неограниченном в плане, изолированном, напорном пласте. Тогда на стенке фильтра скважины  $r = r_0$  имеем (9.7)

$$Q_0 = -2\pi k m r \frac{\partial S}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = const. \quad (10.1)$$

Дифференциальное уравнение имеет вид, аналогично (9.6)

$$a \left( \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial r} \right) = \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (10.2)$$

### 10.2. Нестационарный режим фильтрации

Фундаментальное решение этого уравнения для линейного источника

$$S(r, t) = \frac{Q_0}{4\pi k m} \int_a^\infty \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} d\alpha, \quad (10.3)$$

$$\text{где } \alpha = \frac{r^2}{4at}, \quad , \quad (10.4)$$

$r$  - расстояние до точки, в которой определяется понижение уровня от водозаборной скважины, для самой скважины  $r = r_0$ ;

$t$  - время от начала водоотбора до момента определения понижения  $S$ .

Интегрально-экспоненциальная функция

$$-E_i \left( -\frac{r^2}{4at} \right) = \int_a^\infty \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} d\alpha \quad (10.5)$$

табулирована в широком диапазоне значений  $\alpha$ . Ее называют "well-function"-функция колодца и обозначают  $W(\alpha) = -E_i(-\alpha)$ . Формула (10.3) предложена Ч. Тейсом в 30-х гг. и обычно записывается в виде

$$S(r, t) = \frac{Q_0}{4\pi k m} \left[ -E_i \left( -\frac{r^2}{4at} \right) \right] \quad (10.6)$$

Частные производные от этого решения по времени  $t$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{Q_0}{4\pi k m t} e^{\frac{r^2}{4at}} \quad (10.7)$$

и по расстоянию  $r$

$$\frac{\partial S}{\partial r} = -\frac{Q_0}{2\pi k m r} e^{\frac{r^2}{4at}} \quad (10.8)$$

### Анализ полученных решений

#### 10.3. Квазистационарный режим фильтрации

Функция  $E_i$  может быть разложена в бесконечный ряд:

$$[-E_i(-\alpha)] = \ln \frac{1}{\alpha} - 0,5772 + \alpha - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^3}{18} \dots \quad (10.9)$$

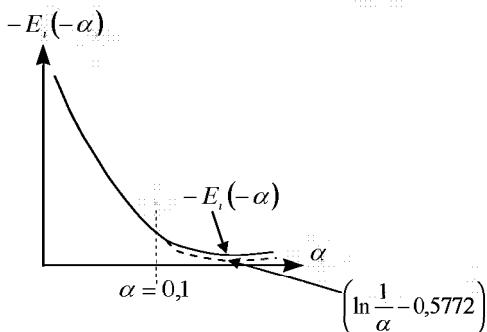


Рис. 10.1. Зависимости  $-E_i(\alpha)$  и  $\ln \frac{1}{\alpha} - 0,5772$

Здесь 0,5772 – постоянная Эйлера.

Ряд знакопеременный, следовательно, можно для оценки его суммы учесть конечное число членов. Ошибка не будет превышать первого из отброшенных членов ряда. Тогда имеем

$$\left[ -E_i\left(-\frac{r^2}{4at}\right) \right] = \ln \frac{4at}{r^2} - 0,5772 = \ln \frac{2,25at}{r^2}$$

или

$$S = \frac{Q_0}{4\pi km} \ln \frac{2,25at}{r^2}, \quad (10.10)$$

с точностью не хуже 10% при  $\frac{r^2}{4at} \leq 0,1$ . (10.11)

Кривая в (10.6)-экспоненциальная, а в (10.10) – логарифмическая (рис. 10.1). Частные производные по  $t$  и  $r$  в уравнении (10.10) имеют вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{Q_0}{4\pi kmt} \quad (10.12)$$

и

$$\frac{\partial S}{\partial r} = -\frac{Q_0}{2\pi kmr}, \quad (10.13)$$

то есть отличаются от точных решений в (10.7) и (10.8) на  $e^{-\frac{r^2}{4at}}$ . При

выполнении условия (10.11)  $e^{-\frac{r^2}{4at}} \geq 0,9$  и ошибка в определении частных производных так же не превышает 10%. Зависимости (10.12) и (10.13) подтверждают сделанный в предыдущей лекции вывод об уменьшении темпа роста по-

нижения во времени и возрастании градиента напора при приближении к скважине.

Таким образом, в пределах области, где справедливо условие (10.11), не происходит изменения напорного градиента во времени (10.13), в сравнении (10.8), кривые депрессии на разные моменты времени параллельны друг другу. В этой области изменение расхода не превышает 10%, то есть 90% расхода формируется вне пределов этой области, согласно (10.8) и (10.13).

Окончательный вывод – в пределах области, где справедливо (10.11), имеем упорядоченный, квазистационарный режим фильтрации. Эта область расширяется в процессе откачки воды из скважины (рис. 10.2).

Определим разность в понижениях уровня в разных точках пласта, в пределах области квазистационарного режима фильтрации:

$$\Delta S_{AB} = S_A - S_B = \frac{Q_0}{4\pi k m} \ln \frac{2,25at}{r_A^2} - \frac{Q}{4\pi k m} \ln \frac{2,25at}{r_B^2} = \frac{Q_0}{2\pi k m} \ln \frac{r_E}{r_A}. \quad (10.14)$$

Получили уравнение Дюпюи для радиальной стационарной фильтрации (9.13), которое справедливо в области наступившего квазистационарного режима.

Если обозначить через  $R_n(t) = 2,25at$ , то (10.10) превратится в

$$S(r, t) = \frac{Q_0}{2\pi k m} \ln \frac{R_n(t)}{r}, \quad (10.15)$$

где  $R_n(t) = 1,5\sqrt{at}$  – приведенный радиус влияния. (10.16)

Уравнение Дюпюи  $S(r) = \frac{Q_0}{2\pi k m} \ln \frac{R_k}{r}$  (9.12) отличается от (10.15) только

тем, что  $R_k = \text{const}(t)$ , а  $R_n(t)$  увеличивается во времени.

Величина  $R_n(t)$  меньше расстояния, на которое распространяется влияние скважины на пласт. В пределах области, ограниченной  $R_n(t)$ , формируется менее 50% расхода скважин. Основной расход формируется в пределах  $R_{es}(t) = 3\sqrt{at}$ . На контуре  $R_{es}(t)$  величина понижения уровня в тысячи раз меньше, чем в скважине.

Вторая производная по времени от выражения для понижения уровня при нестационарной фильтрации (9.6) позволяет найти точку перегиба графика  $S = f(r)$ . При  $\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0$  или  $\frac{\partial S}{\partial t} \rightarrow \text{max}$  имеем  $\frac{r^2}{4at} = 1$ , то есть  $r = 2\sqrt{at}$ . (10.16)

Тем не менее для практических расчетов в качестве радиуса влияния часто используют выражение  $R_n = 1,5\sqrt{at}$  по следующим причинам:

1. Величина понижения уровня на контуре  $R_n(t)$  составляет обычно не более 1% от понижения уровня в скважине при продолжительности водоотбора более 1000 суток.
2. Если на расстоянии  $R_n = 1,5\sqrt{at}$  существует граница пласта, то воздействие ее на работу скважины определяется равенством расстоя-

ния до зеркального отраженной скважины (двойное расстояние до границы) и  $R_{\text{en}} = 3\sqrt{at}$ .

10.4. Особенности формирования кривых депрессий уровня в неограниченном пласте

Для анализа формы кривых удобно использовать малый параметр Фурье или "безразмерное" время  $f_0 = \frac{at}{r^2}$ , (10.17)

$$\text{а так же } \bar{S} = \frac{4\pi k m S}{Q_0} = W(\alpha) \approx \ln \frac{2,25at}{r^2}, \quad (10.18)$$

$$\text{имея ввиду } \alpha = \frac{1}{4f_0}. \quad (10.19)$$

Кривые отвечающие уравнению (10.18) показаны на рис. 10.2.

Из уравнения (10.10) видно, что величина понижения уровня линейно зависит от логарифма времени и логарифма расстояния  $r$ . Эти обстоятельства используют при анализе решений, получаемых для области квазистационарного режима фильтрации (рис. 10.3).

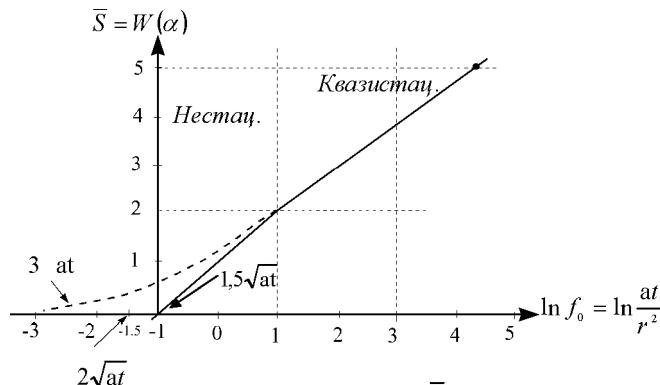


Рис. 10.2. Зависимость  $\bar{S} = W(\alpha)$  от  $\ln f_0$

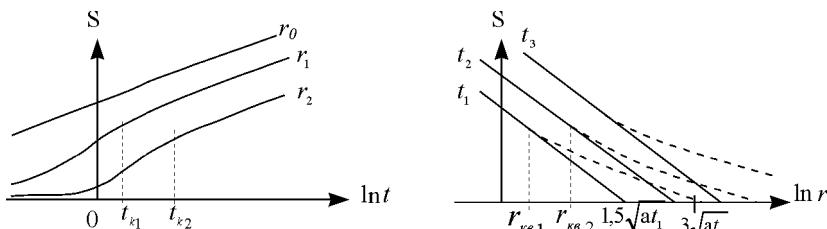


Рис. 10.3. Временное и площадное прослеживание положения уровня при нестационарном и квазистационарном режимах фильтрации

### 10.5. Вывод основных уравнений планово-радиальной нестационарной фильтрации

Для системы взаимодействующих скважин, включенных в работу одновременно (рис. 10.4), уравнение аналогично тому, которое записано (Лекция №

$$8) \text{ для стационарной фильтрации } S_n = \sum_{i=1}^n S_{n_i} \quad (10.20)$$

$$\text{то есть } S_n = \frac{Q_{\text{сн}}}{4\pi k m} \sum_{i=1}^n \alpha_i \left[ -E_i \left( -\frac{r_i^2}{4at} \right) \right] \quad (10.21)$$

причем  $\alpha_i$  определяется по (9.23)

$$\text{Если соблюдается условие } \frac{r_{\text{max}}^2}{4at} \leq 0,1 \quad (10.22)$$

то (10.21) переходит в следующее уравнение

$$S_n = \frac{Q_{\text{сн}}}{4\pi k m} \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln \frac{2,25at}{r_i^2} \quad (10.23)$$

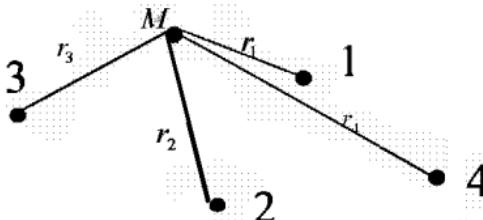


Рис. 10.4. План расположения взаимодействующих скважин

При равенстве расходов скважин и их кольцевом расположении (большой колодец)

$$S = \frac{Q_{\text{сн}}}{4\pi k m} \ln \frac{2,25at}{R_0^2} \quad (10.24)$$

где  $R_0$  — радиус большого колодца, аналогично (9.30).

#### 10.6. Скважина у контура питания ( $H_k = \text{const}$ или $S_k = 0$ )

Для определения понижения в произвольной точке  $M$  (рис. 10.5) используем метод зеркального отражения реальной скважины от границы и метод суммирования  $S_M = S_{M_1} + S_{M_2}$

Понижение от реальной скважины:

$$S_{M_1} = \frac{Q_0}{4\pi k m} W(\alpha_1), \quad \alpha_1 = \frac{r^2}{4at}. \quad (10.26)$$

Понижение от отраженной скважины, работающей как нагнетательная с расходом  $(-Q_0)$ :

$$S_{M_2} = -\frac{Q_0}{4\pi k m} W(\alpha_2), \quad \alpha_2 = \frac{r^2}{4at}. \quad (10.27)$$

Общее понижение в точке  $M$

$$S_M = \frac{Q_0}{4\pi km} [W(\alpha_1) - W(\alpha_2)] \quad (10.28)$$

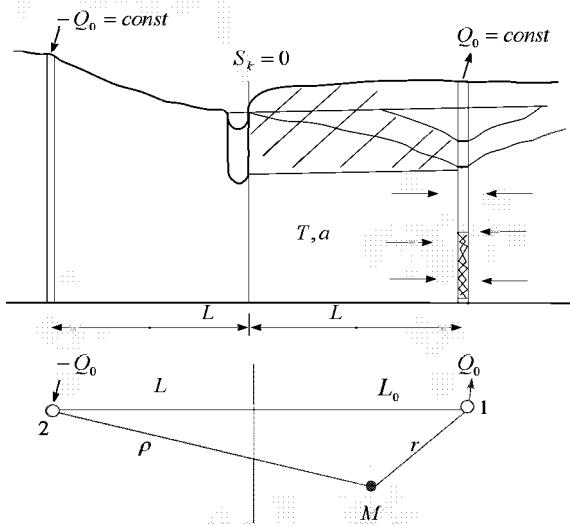


Рис. 10.5. Скважины у контура питания

$$\text{При } \frac{\rho^2}{4at} \leq 0,1 \quad (10.29)$$

$$\text{имеем: } S_M = \frac{Q_0}{4\pi km} \left[ \ln \frac{2,25at}{r^2} - \ln \frac{2,25at}{\rho^2} \right] = \frac{Q_0}{2\pi km} \ln \frac{\rho}{r}. \quad (10.30)$$

Наступает стационарная фильтрация, то есть понижение  $S(r)$  от  $t$  не зависит. Для скважины при  $r=r_0$  и  $\rho=2L$ :

$$S_0 = \frac{Q_0}{2\pi km} \ln \frac{2L}{r_0} \quad \text{уравнение Форхгеймера.} \quad (10.31)$$

#### 10.7. Скважина у непроницаемого контура ( $Q=0$ )

На контуре имеем,  $Q=0$  (рис. 9.6) и  $S$  будет увеличиваться во времени.

Аналогично предыдущему имеем  $S_M = S_{M1} + S_{M2}$ . (10.32)

$$S_{M1} = \frac{Q_0}{4\pi km} W(\alpha_1), \quad (10.33)$$

$$S_{M2} = \frac{Q_0}{4\pi km} W(\alpha_2), \quad (10.34)$$

$$S_M = \frac{Q_0}{4\pi km} [W(\alpha_1) + W(\alpha_2)], \quad (10.35)$$

$$\text{при } \frac{\rho^2}{4at} \leq 0,1 \quad (10.36)$$

$$\text{имеем } S_u = \frac{Q_0}{4\pi km} \left( \ln \frac{2,25at}{r^2} + \ln \frac{2,25at}{\rho^2} \right) = \frac{Q_0}{2\pi km} \ln \frac{2,25at}{r\rho} \quad (10.37)$$

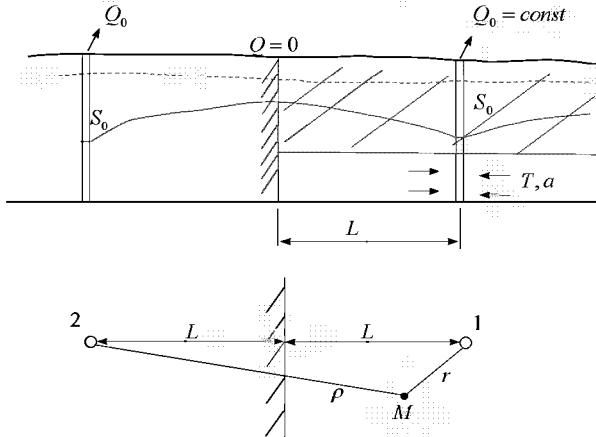


Рис 10.6. Скважины у непроницаемого контура

Здесь стационарной фильтрации не наступит. Для скважины при  $r=r_0$  и  $\rho=2L$  получим:  $S_0 = \frac{Q_0}{2\pi km} \ln \frac{1,12at}{r_0 L}$ . (10.38)

10.8. Анализ формирования депрессионных кривых в ограниченных пластах

Последовательно выделяются несколько этапов в формировании уровня в пласте (точка  $M$ ):

I этап. Период нестационарной фильтрации в неограниченном пласте

$$\text{Для } \frac{0,1r^2}{a} < t \leq \frac{2,5r^2}{a} \text{ имеем } S = \frac{Q_0}{4\pi km} W\left(\frac{r^2}{4at}\right) \quad (10.39)$$

II этап. Квазистационарная фильтрация в неограниченном пласте

$$\text{Для } \frac{2,5r^2}{a} < t \leq \frac{0,1\rho^2}{a} \text{ имеем } S = \frac{Q_0}{4\pi km} \ln\left(\frac{2,25at}{r^2}\right) \quad (10.40)$$

III этап. Нестационарная фильтрация в полуограниченном пласте

$$\text{Для } \frac{0,1\rho^2}{a} < t \leq \frac{2,5\rho^2}{a} \text{ имеем } S = \frac{Q_0}{4\pi km} \left[ \ln \frac{2,25at}{r^2} \pm W\left(\frac{\rho^2}{4at}\right) \right] \quad (10.41)$$

IV этап. Квазистационарная фильтрация в полуограниченном пласте

$$\text{Для } \frac{2,5\rho^2}{a} < t < \infty \text{ имеем } S = \frac{Q_0}{4\pi km} \left[ \ln \frac{2,25at}{r^2} \pm \ln \frac{2,25at}{\rho^2} \right] \quad (10.42)$$

$$\text{Возле закрытой границы имеем } \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{Q_0}{2\pi r m t}, \quad (10.43)$$

то есть темп роста  $S$  возле закрытой границы увеличивается в 2 раза по сравнению с неограниченным пластом (рис. 10.7).

Нестационарная фильтрация переходит в стационарную только за счет привлечения дополнительного питания подземных вод, возникающего в процессе снижения уровня при откачке. Это может произойти в следующих случаях:

- Скважина расположена на расстоянии  $L$  от реки. Тогда дополнительным источником питания является приток из реки и

$$R_k = 2L \quad (10.44)$$

- Скважина эксплуатирует грунтовые воды, разгружающиеся путем испарения или родников, рассредоточенных по площади. Тогда дополнительным источником питания является перехват (инверсия) этой разгрузки и

$$R_k = \sqrt{\frac{Q}{\pi W}} \quad (10.45)$$

где  $W$  - интенсивность разгрузки подземных вод, м/сут.

- Скважина эксплуатирует водоносный пласт, имеющий гидравлическую связь с вышележащим через слабопроницаемый водоупор. Тогда при откачке либо увеличивается приток из этого пласта, либо сократится отток в него. В любом случае эксплуатируемый пласт получает компенсацию расхода откачки и тогда

$$R_k = 1,12B \quad , \quad (10.46)$$

$$\text{где } B = \sqrt{\frac{k m \cdot m_0}{k_0}} \quad , \quad (10.47)$$

причем  $m_0$  и  $k_0$  - мощность и коэффициент фильтрации слабопроницаемого водоупора.

Во всех случаях понижение уровня в водозаборной скважине и ее окрестностях при условии  $r/R_k \leq 0,3$  определяется уравнением Дюпюи (9.12). Условия наступления стационарного режима фильтрации определяются

$$t_c = \frac{2,5 R_k^2}{a} \quad , \quad (10.48)$$

т.е. аналогично условию (10.11), где вместо  $r$  принимается  $R_k$ .

## 10.9. Принцип построения расчетных схем в сложных условиях

Рассмотрим схему: пласт-квадрант с двумя контурами питания ( $H = \text{const}$ ) (рис. 10.8).

В пласте работает скважина с расходом  $Q_0 = \text{const}$ . Проводим последовательное отражение скважины относительно границ пласта. Относительно 1-ой границы отражается реальная скважина на нагнетательную скважину. Относительно 2-ой границы отражаются две скважины - реальная и воображаемая. Всего получаем 4 скважины - 2 нагнетательные, 2 водозаборные, работающие в неограниченном пласте.

Рассмотрим схему пласта-полосы с закрытыми границами (долина реки с малым поверхностным стоком).

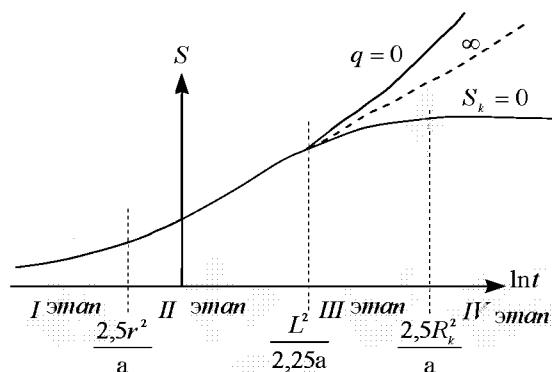


Рис. 10.7. Развитие понижения уровня в неограниченном ( $\infty$ ), полузакрытом ( $q = 0$ ) и полуоткрытом ( $S_k = 0$ ) пластах

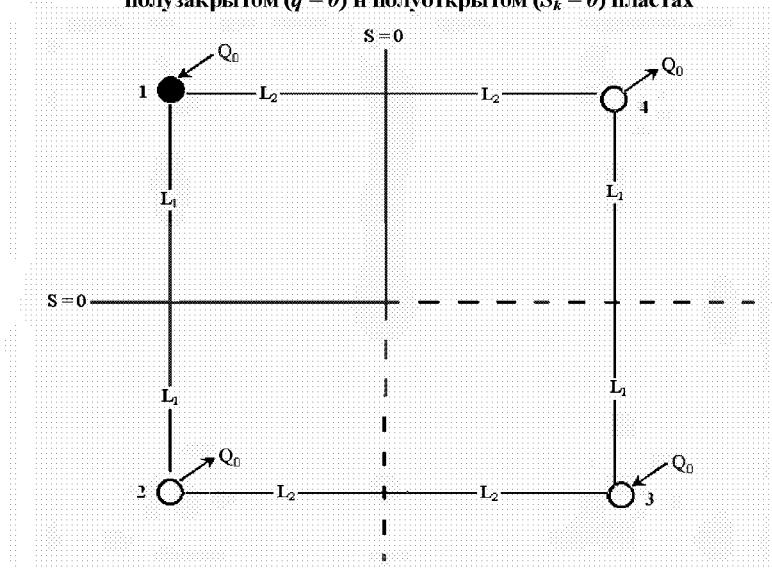


Рис. 10.8. Учет зеркально отраженных скважин в пласте-квадранте  
1 – реальная скважина; 2, 3, 4 – отраженные скважины

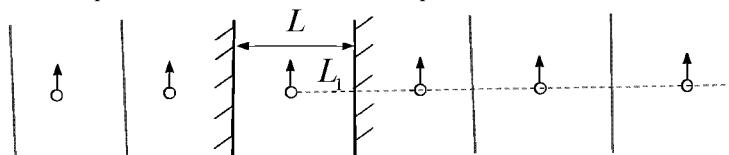


Рис. 10.9. Учет зеркально отраженных скважин в пласте-полосе

Получаем бесконечный ряд скважин в безграничном пласте. Ф.М. Бочевер [3] вывел формулу, учитывающую 6 источников в этом бесконечном ряду скважин (рис. 10.9):

$$S_0 = \frac{Q_0}{2\pi k m} \left( 3,55 \sqrt{F_0} + \ln \frac{0,16 L}{r_0 \sin \frac{\pi L_1}{L}} \right), \quad (10.49)$$

где  $F_0 = \frac{at}{L^2}$  - большой параметр Фурье или “безразмерное” время.

### 10.10. Учет изменения дебита и числа скважин в водозаборе

Рассмотрим откачку из одиночной скважины в неограниченном пласте. До момента времени  $t \leq t_1$  дебит скважины  $Q = Q_1$ , при  $t > t_1$  дебит скважины резко скачкообразно увеличивается  $Q = Q_2$ . Необходимо определить понижение уровня в точке  $M$ .

Задача решается методом суперпозиции (рис. 10.10).

Будем считать, что в точке расположения скважины работают два стока.

I-ый весь период  $t$  с расходом  $Q_1$

II-ой начиная с  $t_1$  с расходом  $\Delta Q = Q_2 - Q_1$ .

При сложении этих двух стоков получим реальный переменный водоотбор из скважины. Таким образом

$$S_M = \frac{Q_1}{4\pi k m} W\left(\frac{r^2}{4at}\right) + \frac{Q_2 - Q_1}{4\pi k m} W\left(\frac{r^2}{4a(t-t_1)}\right) \quad (10.50)$$

$Q = \text{var}$

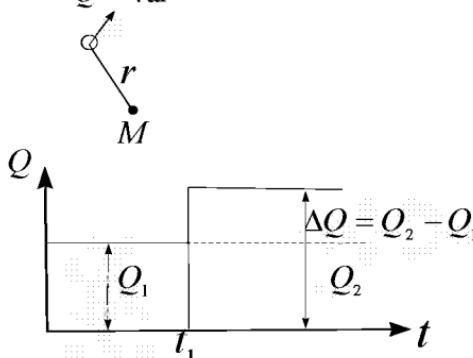


Рис. 10.10. Ступенчатое изменение величины водоотбора из скважины

Если изменение дебита многократное, то количество членов уравнения (10.50) соответственно увеличивается.

$$\text{Обозначим } \alpha_1 = \frac{\Delta Q_1}{Q_1}, \quad (10.51)$$

$$\text{тогда } S_{M,i} = \frac{Q_i}{4\pi km} \left[ W\left(\frac{r^2}{4at}\right) + \sum_{i=1}^n \alpha_i W\left(\frac{r^2}{4a(t-t_i)}\right) \right] \quad (10.52)$$

$\Delta Q_i = Q_i - Q_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  - количество изменений дебита скважины.

В том случае, если скважина остановлена с некоторого момента  $t_1$ :  $Q = 0$ .

Тогда в уравнении (10.50)  $Q_2 = 0$  и получим

$$S_{M,i} = \frac{Q_i}{4\pi km} \left[ W\left(\frac{r^2}{4at}\right) - W\left(\frac{r^2}{4a(t-t_1)}\right) \right] \quad (10.53)$$

$$\text{при } \frac{r^2}{4a(t-t_1)} \leq 0,1 \quad (10.54)$$

$$S_{M,i} = \frac{Q_i}{4\pi km} \ln \frac{t}{t-t_1} \quad (10.55)$$

Рассмотрим более общий случай, когда в пласте работают несколько скважин, включенных в разное время и работающих с разными  $Q$  (рис. 10.11).

$$\text{Величина } S_M = S_{M1} + S_{M2} \quad (10.56)$$

$$S_{M1} = \frac{Q_1}{4\pi km} W\left(\frac{r_1^2}{4a(t-t_1)}\right) \quad , \quad (10.57)$$

$$S_{M2} = \frac{Q_2}{4\pi km} W\left(\frac{r_2^2}{4a(t-t_2)}\right) \quad . \quad (10.58)$$

Окончательно имеем:

$$S = \frac{Q_1}{4\pi km} W\left(\frac{r_1^2}{4a(t-t_1)}\right) + \frac{Q_2}{4\pi km} W\left(\frac{r_2^2}{4a(t-t_2)}\right) \quad (10.59)$$

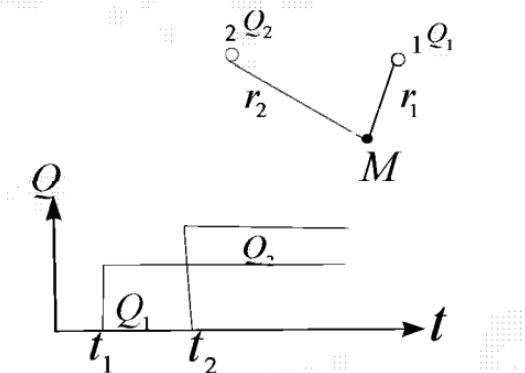


Рис. 10.11. Схема работы взаимодействующих скважин с разными режимами водоотбора

### Вопросы к лекции №10

1. В каких породах (с большей или меньшей водопроводимостью при одинаковой величине водоотдачи) понижение уровня в скважине будет больше? Зависит ли радиус влияния откачки от величины водоотбора? Доказать это путем анализа формул.
2. Можно ли формулу (9.12) использовать для расчета понижения уровня в скважине, расположенной в изолированном неограниченном пласте? Каким образом?
3. Используя уравнение (10.13) найти аналитическое выражение для оценки зависимости скорости фильтрации от расстояния до скважины. Объяснить физический смысл полученной зависимости, сравнив его с уравнением (3.1).
4. Запишите и объясните математические выражения для краевых условий следующих расчетных схем:
  - а) откачка из скважины в условиях стационарной фильтрации,
  - б) откачка из скважины в условиях нестационарной фильтрации.
5. Опишите расчетную схему, для которой получена формула Тейса. Изменяется ли в этих условиях величина водопритока в разных сечениях по направлению к скважине? В пределах какой зоны формируется 90% водопритока?
6. В чем принципиальное отличие метода отражения в расчетных схемах откачки из скважины у непроницаемой границы и у реки?
7. Почему в реальных условиях в неограниченном пласте при откачке радиус влияния скважины, достигая некоторой величины, обычно далее не увеличивается?
8. В каких условиях работы водозабора неустановившееся движение перейдет в установившееся? Как определить, когда это произойдет?
9. В чем отличие уравнения водопритока к скважине в неограниченном напорном пласте для нестационарной и квазистационарной фильтрации?
10. По какому критерию можно определить время начала квазистационарной фильтрации и зону ее развития на заданный момент времени?
11. Что такое метод “большого колодца”? По какому критерию следует оценивать время, начиная с которого для данного  $R_0$  погрешности в оценке  $S_0$  будут менее 5%?
12. Назовите особенности квазистационарной фильтрации, подтвердите их математически.
13. Каков гидродинамический смысл метода зеркальных отображений?
14. С каким начальным условием решена задача нестационарного водопритока к скважине, если искомой функцией является  $S_{r,t}$ ? Как перейти к функции  $H_{r,t}$ ?
15. Назовите диагностические признаки, которыми различаются процессы формирования понижения уровня воды в скважине и соответствующие им графики  $S - \ln t$  для схем неограниченного и полуограниченного пластов вблизи реки и вблизи закрытой границы.

16. Как оценить погрешность в расчете понижений, если для скважины, работающей в грунтовых водах, использовано уравнение, полученное для напорных вод?
17. Какие из рассмотренных расчетных схем характерны для условий работы водозаборных скважин в потоках речных долин и артезианских бассейнов (использовать рисунки, приведенные в лекции № 1)?
18. Запишите уравнения (9.29), (10.21), (10.31), (10.42), (10.44) для грунтовых вод, используя напорную функцию (9.16).
19. Укажите основные случаи использования метода суперпозиции при расчетах скважин с переменным водоотбором в ограниченных пластах.

### Лекция № 11 Водоприток к скважинам в гидравлически связанных пластах (радиально-пространственная фильтрация в многопластовых системах)

- 11.1. Рассмотрим факторы, формирующие условия водопритока и особенности фильтрации.
- пространственная радиальная структура потока;
  - скважина вскрывает не всю проницаемую толщу, а только один слой пласт;
  - воздействие откачки распространяется как по пласту, так и через слабопроницаемые прослой, вовлекая в возмущение всю многопластовую систему;
  - при наличии пластов с весьма малым  $k_0$  может быть нарушение закона Дарси (вязко-пластичное движение);
  - при наличии питающего пласта с высокими фильтрационными и емкостными свойствами, много больше, чем в эксплуатационном пласте, первый пласт может проявить себя как ГУ-1 рода.

Основные предпосылки:

- (1) Закон Дарси в разделяющих толщах не нарушается, т.е. коэффициент фильтрации не зависит от градиента напора.
- (2) Соотношение коэффициентов фильтрации проницаемых и разделяющих толщ более 100. Тогда возможно использовать предпосылку Мятнева-Гиринского: в хорошо проницаемых пластах движение горизонтальное, в слабопроницаемых – вертикальное.

11.2. Общая постановка задачи.

Рассмотрим трехслойную систему: два хорошо проницаемых пласта и один разделяющий – плохо проницаемый пласт (рис. 11.1).

Откачка осуществляется из нижнего, хорошо проницаемого пласта. Считаем, что в каждом из трех рассматриваемых слоев действуют упругие силы, то есть происходит изменение напора во времени в любой точке этой системы.

Введем обозначения для Лапласиана радиальной фильтрации

$$\nabla^2(H) = \frac{\partial^2(H)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial(H)}{\partial r} \quad (11.1)$$

Для каждого слоя можно записать

$$(1) \quad (km)_1 \nabla^2 H_1 - k_0 \frac{\partial H_0}{\partial z} = \mu_1 \frac{\partial H_1}{\partial t} \quad \left. \begin{array}{l} \text{переток в} \\ \text{нижний пласт} \end{array} \right\} \text{только горизонтальное направление скорости фильтрации} \quad (11.2)$$

$$(2) \quad (km)_2 \nabla^2 H_2 + k_0 \frac{\partial H_0}{\partial z} = \mu_2 \frac{\partial H_2}{\partial t} \quad \left. \begin{array}{l} \text{переток из верхнего пласта} \end{array} \right\} \text{только горизонтальное направление скорости фильтрации} \quad (11.3)$$

$$(1^0) \quad k_0 m_0 \frac{\partial^2 H_0}{\partial z^2} = \mu_0 \frac{\partial H_0}{\partial t} - \text{для раздельного слоя} \quad \left. \begin{array}{l} \text{вертикальное} \\ \text{направление} \\ \text{скорости} \\ \text{фильтрации} \end{array} \right\} \quad (11.4)$$

Эта система решается при известных граничных условиях на скважине

$$Q_0 = 2 \cdot \pi \cdot k \cdot m \cdot r \frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \text{const} \quad (11.5)$$

и начальных условиях в каждом из трех рассматриваемых слоев.

11.3. Рассмотрим возможные упрощения этой сложной системы.

Упругие свойства разделяющих толщ оказывают существенное влияние на перераспределение уровней только в начальный период работы скважины. Поэтому, в практических расчетах пренебрегают упругими свойствами разделяющих пластов, то есть  $\mu_0 \rightarrow 0$ . Тогда из (11.4) имеем

$$k_0 \frac{\partial^2 H_0}{\partial z^2} = 0 \quad \text{или} \quad k_0 \frac{\partial H_0}{\partial z} = W_{ex}. \quad (11.6)$$

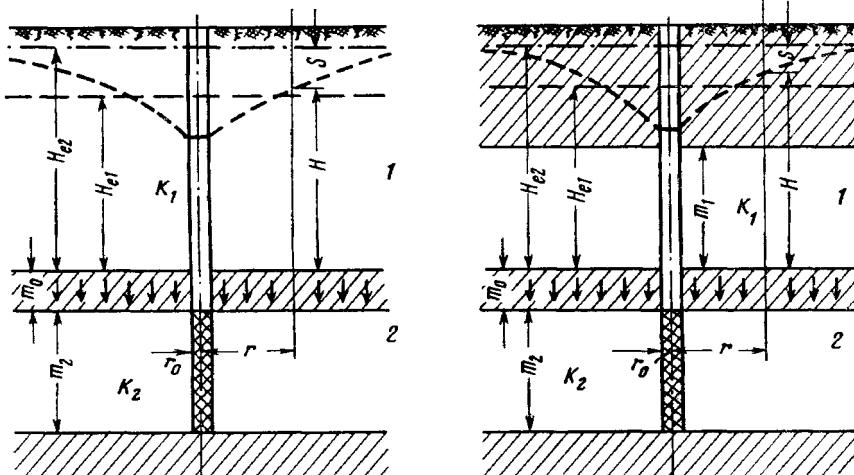


Рис. 11.1. Типовая схема двухпластовой системы с перетеканием  
Разделяя переменные и интегрируя  $H_0$  от  $H_1$  до  $H_2$  и  $z$  от  $m_0$  до 0, полу-

чим

$$W_{ex} = k_0 \frac{H_1 - H_2}{m_0} \quad . \quad (11.7)$$

Таким образом, раздельный слой работает как транзитный, уровни  $H_0$  распределены в нем по линейному закону, а градиент напора в раздельной толще не меняется и может быть определен (11.7).

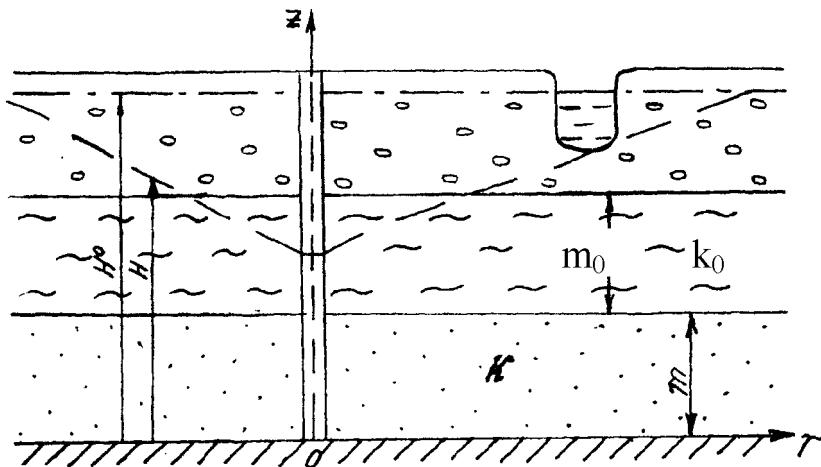
Величина  $W_{\text{ел}}$  характеризует взаимосвязь между горизонтами, причем, так как  $H_1$  и  $H_2$  изменяются во времени, величина  $W_{\text{ел}}$  так же является переменной во времени.

В рассмотренной постановке задачи решены Шестаковым, Бочевером, Чарным.

На практике часто приходиться рассматривать двухпластовую систему, в которой верхний пласт – грунтовые воды, характеризуется высокими емкостными свойствами ( $\mu \gg \mu^*$ ) по сравнению с нижним напорным пластом. Кроме того, грунтовые воды могут быть связаны с поверхностными водотоками, то есть будут характеризоваться лучшими условиями дополнительного питания по сравнению с нижележащими напорными водами. В этом случае может быть принято допущение, что в грунтовых водах

$$H_1 = \text{const} \quad . \quad (11.8)$$

Тогда уравнение (11.2) для верхнего пласта лишено смысла и остается одно уравнение (11.3), для эксплуатируемого водоносного горизонта. Получаем самую простую расчетную схему (рис. 11.2).



**Рис. 11.2. Типовая схема перетекания с  $H = \text{const}$  в питающем пласте**

Перепишем уравнение (11.3) с учетом принятых допущений

$$a\nabla^2 H + \frac{W_{\text{ел}}}{\mu} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (11.9), \text{ где } W_{\text{ел}} = k_0 \frac{H^0 - H}{m_0} \quad (11.10)$$

В понижениях уровня (11.9) и (11.10) имеют вид граничное условие III рода.

$$a\nabla^2 S - \frac{k_0}{\mu m_0} S = \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (11.11)$$

$$\text{учитывая что } W_{\text{ел}} = k_0 \frac{S^0 - S}{m_0}, \quad (11.12)$$

но  $S^0 = 0$ , т.к.  $H^0 = \text{const}$ .

$$\text{Введем обозначения } b = \frac{k_0}{\mu m_0}, \quad (11.13)$$

$$\text{тогда из (11.11) имеем } a\sqrt{2}S - bS = \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (11.14)$$

Начальные условия:  $t = 0, S(r, 0) = 0$ .

Границные условия на скважине

$$Q_0 = -2 \cdot \pi \cdot k \cdot m \cdot r \frac{\partial S}{\partial r} \Big|_{r=0} = \text{const}. \quad (11.15)$$

11.4. Для рассматриваемой постановки решение имеет вид

$$S(r, t) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot k \cdot m} W\left(\alpha, \frac{r}{B}\right), \quad (11.16)$$

где  $W\left(\alpha, \frac{r}{B}\right)$  - функция перетока,

$$B = \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{k \cdot m \cdot \mu \cdot m_0}{\mu \cdot k_0}} = \sqrt{\frac{k \cdot m \cdot m_0}{k_0}}, \text{ - параметр перетекания.} \quad (11.17)$$

$\alpha = \frac{r^2}{4at}$  - известный аргумент.

Проанализируем функцию  $W\left(\alpha, \frac{r}{B}\right)$ . При условии  $f_0 > 2,5, t_{re} \geq 2,5 \frac{r^2}{a}$  -

аналогично квазистационарному режиму фильтрации:

$$W\left(\alpha, \frac{r}{B}\right) \cong 2K_0\left(\frac{r}{B}\right) - I_0\left(\frac{r}{B}\right) \left[ -E_i\left(-\frac{at}{B^2}\right) \right] \quad (11.18)$$

Здесь  $2K_0\left(\frac{r}{B}\right)$  - не зависит от времени,

$I_0\left(\frac{r}{B}\right) \left[ -E_i\left(-\frac{at}{B^2}\right) \right]$  - зависит от времени;  $K_0$  и  $I_0$  - функции Бесселя 1-го

и 2-го рода от мнимого аргумента. Бесселевы функции табулированы.

Уравнение (11.18) свидетельствует об аналогичности  $W\left(\alpha, \frac{r}{B}\right)$  и  $\left[-E_i(-\alpha)\right]$ .

$$\text{При } t \geq \frac{3 \div 5}{b} \quad (11.19)$$

имеем  $\left[-E_i\left(-\frac{at}{B^2}\right)\right] = 0$  и весь второй член (11.18) равен 0. Тогда фильтрация становится стационарной. Уравнение (11.16) преобразуется в следующее

$$S(r, t) = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot m} K_0\left(\frac{r}{B}\right), \quad (11.20)$$

$$\text{причем, если } \frac{r}{B} < 0,3 \quad , \quad (11.21)$$

то есть рассматривается область пласта вблизи скважины, из которой идет откачка, то

$$K_0\left(\frac{r}{B}\right) \approx \ln \frac{2B}{r} e^{-0,5772} = \ln \frac{1,12B}{r} \quad , \quad (11.22)$$

т.е. функция Бесселя хорошо аппроксимируется логарифмом. Условие (11.21) всегда выполняется в самой скважине

$$S_o = \frac{Q_o}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot m} \ln \frac{1,12B}{r_0} . \quad (11.23)$$

Эта формула аналогична формуле Дюпюи при  $R_k = 1,12B$ . (11.24)

11.5. В заключении проанализируем кривые  $W\left(\alpha, \frac{r}{B}\right)$  (рис. 11.3), где

$$\alpha = \frac{1}{4F_0} .$$

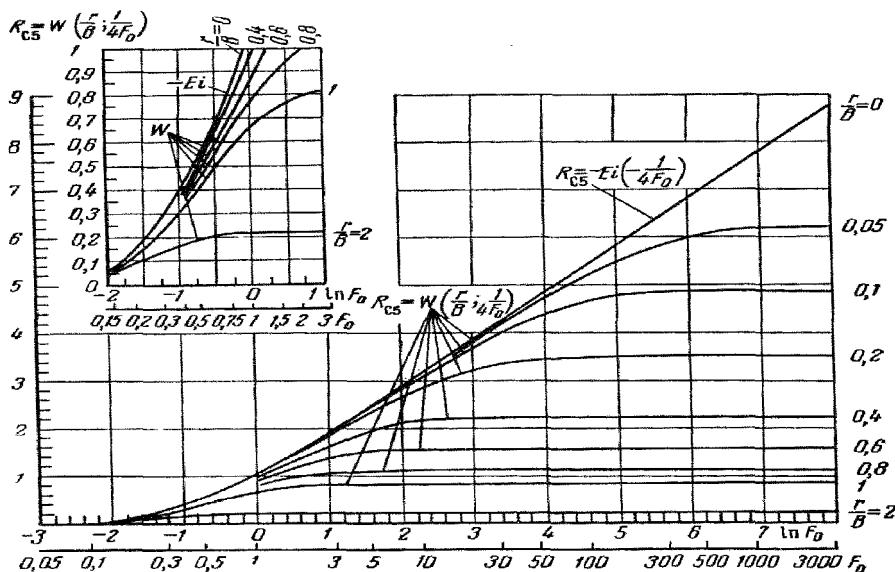


Рис. 11.3. Графики безразмерного сопротивления  $W\left(\alpha, \frac{r}{B}\right)$

Стационарная фильтрация наступает при условии

$$t \geq \frac{3 \div 5}{b} \quad \text{или} \quad t \geq \frac{4B^2}{a} \quad \text{или} \quad \frac{B^2}{4at} \leq 0,06 \quad \text{и} \quad \frac{(1,12B)^2}{4at} \leq 0,1 \quad . \quad (11.25)$$

Обращает на себя внимание сходство зависимости (11.25) с (10.11), причем здесь  $r = 1,12B = R_k$ .

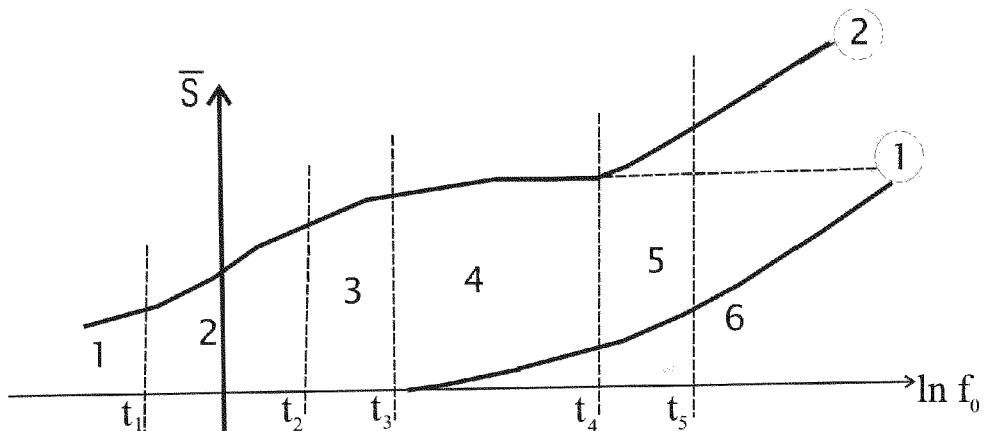
Из последнего выражения следует, что стационарная фильтрация в пласте, получающем дополнительное питание, наступит тогда, когда в пределах всего пласта произойдет практическая стабилизация расхода воды, то есть реализуется условие квазистационарной фильтрации.

Зависимость (11.25) можно переписать для оценки времени наступления стационарного режима фильтрации

$$t_c = \frac{2,5R_k^2}{a} . \quad (11.26)$$

11.6. В том случае, если в верхнем водоносном горизонте (рис. 11.1) уровень воды снижается под воздействием перетекания в нижний эксплуатируемый пласт, стационарная фильтрация не наступает. Зависимость изменения понижения уровня в верхнем питающем (1) и нижнем эксплуатируемом пластах имеет вид (рис. 11.4).

Здесь, выделяются 6 последовательных этапов формирования понижения уровня. На 1 этапе – нестационарная, на 2 этапе – квазистационарная фильтрация в изолированном пласте, на 3 этапе – нестационарная, на 4 этапе “ложно” стационарная фильтрация в пласте с перетеканием, приближенно определяемые зависимостью (11.18). На 4 этапе начинает формироваться понижение уровня в



**Рис. 11.4. Изменения уровней подземных вод в питающем (1) и эксплуатируемом (2) пластах**

питающем пласте (1). Вследствие этого на этапе 5 наступает нестационарная фильтрация, которая затем переходит в квазистационарную на 6 этапе. Снижение уровня на этапе (6) в пластах (1) и (2) происходит с одинаковым темпом, так как эти пласти эксплуатируются как единая гидродинамическая система и понижение уровня в пласте (2) отвечает уравнению Тейса

$$S = \frac{Q}{4\pi(km_{ob})} \ln \frac{2,25a_{ob}}{r^2} , \quad (11.27)$$

где  $km_{ob} = km_1 + km_2$  и

$$a_{ob} = \frac{km_{ob}}{\mu_1 + \mu_2} . \quad (11.29)$$

Временные границы выделенных этапов приближенно определяются зависимостями

$$t_1 = \frac{2,5r^2}{a_2}, \quad t_2 = \frac{0,06m_0\mu_2}{k_0}, \quad t_3 = \frac{4m_0\mu_2}{k_0}, \quad t_4 = \frac{0,06m_0(\mu_1 + \mu_2)}{k_0}, \quad t_5 = \frac{4m_0(\mu_1 + \mu_2)}{k_0}.$$
(11.30)

### Вопросы к лекции №11

- Чем принципиально по своей физической постановке расчетная схема откачки в слоистом пласте отличается от откачки из изолированного, неограниченного в плане пласта?
- Для каких условий справедлива формула (11.23) для скважины с перетеканием. Перечислите все ограничения на ее использование. Как меняется а) градиент потока, б) расход потока в зависимости от расстояния до скважины на небольшом удалении от нее ( $r/B \leq 0,3$ )?
- Нарисуйте эпюру распределения напоров по вертикали в однородном разделяющем слое при перетекании для случаев: а) жесткого режима фильтрации, б) с учетом упругой водоотдачи глин.
- Из анализа рис. 11.3 определите от каких факторов зависит различие величин понижения для схем изолированного пласта и пласта с перетеканием?
- Как изменяется величина перетекания во времени для расчетной схемы отвечающей уравнению (11.18)? Каким образом темп ее изменения зависит от параметра перетекания  $B$ ?
- Каким уравнением надо воспользоваться для определения максимального во времени понижения уровня в пласте с перетеканием на значительном удалении от скважины ( $r/B > 0,3$ )?
- При каких значениях параметра перетекания  $B$  изменения уровня в пластах скорее будут соответствовать рис. 11.4 (при прочих равных условиях)?
- В каких случаях при откачке из скважины в слоистой толще может не наступить стационарный режим фильтрации? Какое уравнение для определения понижения уровня в этом случае следует использовать?
- По какой причине концевые участки графиков 1 и 2 на рис. 11.4 параллельны друг другу?
- Из анализа графиков на рис. 11.3 определите, ориентировочно, на какое расстояние от скважины в пласте с перетеканием распространяется влияние откачки.

### Лекция № 12. Основы теории водопритока к несовершенным скважинам

#### 12.1 Факторы определяющие несовершенство скважин:

а) несовершенство по степени вскрытия пласта связано с тем, что длина фильтра скважины существенно меньше мощности водоносного горизонта. Вблизи фильтра скважины (в радиусе не больше мощности пласта) происходит искривление линий тока, возникают дополнительные фильтрационные сопро-

тивления и дополнительные потери напора. Этот вид несовершенства скважин обозначим  $\xi_1(l, r_0, m)$ ;

б) несовершенство по характеру вскрытия пласта связано с ухудшением проницаемости водоприемной части скважины (фильтра), вследствие кольматации или зарастания отверстий. Обозначим его  $\xi_2$  (скважность фильтра, его состояние);

в) гидравлические потери напора в водоподъемных трубах в скважине. Они зависят от диаметра труб, их шероховатости, расхода воды. Определяются уравнением Дарси-Вейсбаха, или по таблице Шевелева. Обозначим этот вид несовершенства  $\xi_3(d^5, Q^2, \lambda, l)$ ;

г) "скин"-эффект – эффект оболочки, проявляется изменением фильтрационных свойств в прифильтровой части скважины, то есть в пласте вблизи фильтра. Этот вид несовершенства связан либо с уплотнением породы за счет привноса из пласта мелких частиц и осаждения их вблизи фильтра, либо с разрыхлением и выносом мелких частиц в ствол скважины. В последнем случае говорят об отрицательном "скин"-эффекте, т.е. скважина более совершенная. Обозначим  $\xi_4(k_2, r_2)$ .

Общий показатель несовершенства скважин  $\xi_{ob} = \sum \xi_i$ . Величина  $\xi_1$  может быть оценена гидродинамическим методом,  $\xi_3$  гидравлическим расчетом,  $\xi_2$  и  $\xi_4$  – только экспериментально. На практике обычно определяют  $\xi_{ob}$  – экспериментально и называют его "скин"-эффект. Аналитически будем рассматривать только несовершенство по степени вскрытия пласта  $\xi_1$ .

## 12.2 Особенности фильтрации к несовершенным по степени вскрытия скважинам

Выделяются две принципиально различные схемы формирования структуры потока вблизи несовершенной скважины.

1. Несовершенная скважина с достаточно длинным фильтром  $l \gg r_0$ . Возникает пространственная структура потока вблизи концевых участков фильтра. В центральной части фильтра структура близка к плановой. В цилиндрической системе координат – двухмерная фильтрация, по осям  $\varphi_z$  и  $\varphi_r$ . Зона деформации ЛТ и ЛН локализуется вблизи скважины и распространяется по пласту на расстояние не превышающее мощности пласта ( $r_n \leq m$ ), если пласт однородный.

Искривление линий тока приводит к увеличению потерь напора. Поэтому, если сравнивать совершенную и несовершенную скважины, то  $S_c < S_{nc}$ , то есть понижение уровня в несовершенной скважине всегда больше.

2. Несовершенная скважина с коротким фильтром  $l \sim r_0$ . Фильтрация пространственная, сферическая. Если рассматривать в сферической системе координат, то фильтрация одномерная.

## 12.3 Основные расчетные схемы и методы решения

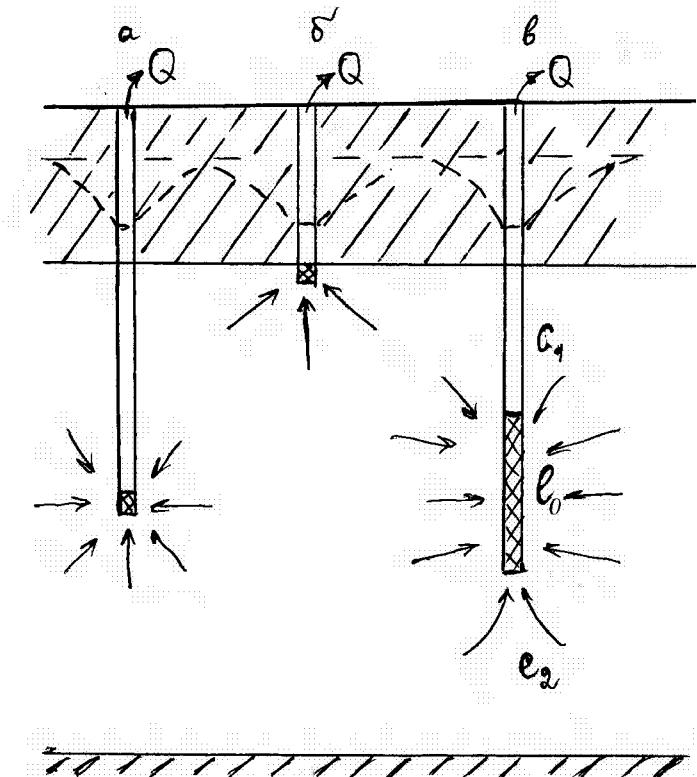
Различают следующие расчетные схемы по мощности пласта, длине фильтра и его расположению относительно кровли и подошвы пласта (рис. 12.1)

Введем обозначения:  $m$  - мощность пласта,  $l_0$  - длина фильтра,  $c_1$  - расстояние между верхним концом фильтра и кровлей пласта,  $c_2$  - тоже между нижним концом фильтра и подошвой пласта. На рисунке 12.1 имеем:

а - неограниченный по мощности пласт  $m > 3l_0, m > 3c_1, m > 3c_2$ , фильтр в центральной части пласта;

б - полуограниченный в разрезе пласт  $m > 3l_0$ , фильтр смещен к кровле ( $m < 3c_1$ ) или к подошве  $m < 3c_2$  пласта;

в - ограниченный пласт  $m < 3l_0, m < 3c_1, m < 3c_2$ .



**Рис. 12.1. Типовые схемы несовершенства скважин по степени вскрытия пласта**

12.4 Основные уравнения водопритока к несовершенной скважине при стационарной фильтрации имеют следующий вид:

1) Короткий фильтр, неограниченный по мощности пласт  $l_0 \sim r_0$ ,  $m \gg l_0$  (рис. 12.1 а).

Вывод уравнения Форхгеймера. Рассмотрим точечный сток в пространстве не имеющем границ, то есть рассматриваем часть пласта вблизи скважины (рис. 12.2). Скорость фильтрации к точечному стоку согласно закону Дарси

$$Q = \mathcal{V}_\rho \cdot F , \quad (12.1)$$

$$F_{\text{сферы}} = 4\pi\rho^2 \quad (12.2)$$

$$\text{или } Q = 4\pi\rho^2 q_p \quad (12.3)$$

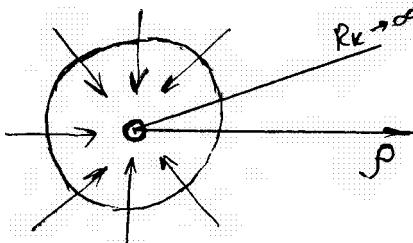


Рис. 12.2. Расчетная схема точечного стока в пространстве

$$\text{Можно выразить скорость через градиент напора } v_p = -k \frac{ds}{dp} \quad (12.4)$$

Приравнивая (12.3) и (12.4) и разделяя переменные, имеем

$$\frac{Q}{4\pi k} \int_{R_k}^{\rho} \frac{dp}{\rho^2} = - \int_0^s ds. \quad (12.5)$$

$$\text{Тогда } S = \frac{Q}{4\pi k} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{R_k} \right) \quad (12.6)$$

$$\text{т.к. } R_k \rightarrow \infty \text{ то } \frac{1}{R_k} \rightarrow 0. \text{ Имеем окончательно } S = \frac{Q}{4\pi k \rho} \quad (12.7)$$

Понижение уровня в любой точке пласта при  $\rho \ll m$ , в том числе и для скважины  $\rho = r_0$ .

2) Короткий фильтр, примыкающий к водоупору в неограниченном по мощности пласте (рис. 12.1 б). Заменяем верхний водоупор отраженным коротким фильтром в неограниченном пласте. Расход воды из двух фильтров в 2 раза больше.

$$\text{Тогда } S = \frac{Q}{2\pi k \rho} \quad (12.8)$$

3) Короткий фильтр, расположенный на некотором расстоянии  $c$  от верхнего водоупора (рис. 12.3).

Используя методы отражения и суперпозиции можно получить формулу для понижения уровня и в этом случае  $S = S_1 + S_2$  или

$$S = \frac{Q}{4\pi k} \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) = \frac{Q(\rho_1 + \rho_2)}{4\pi k \rho_1 \cdot \rho_2} \quad (12.10)$$

$$\text{при } c > 5\rho_1 \text{ имеем } S = \frac{Q}{4\pi k \rho_1}, \quad (12.11)$$

то есть решение для неограниченного по мощности пласта без учета влияния кровли.

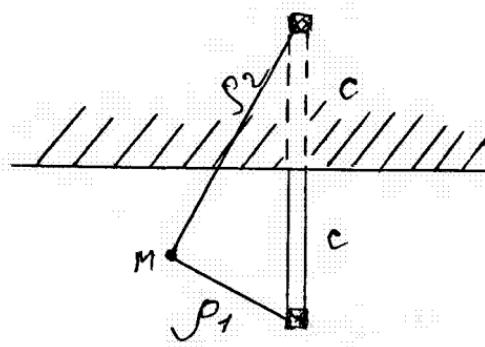


Рис. 12.3. Расчетная схема короткого фильтра в ограниченном по мощности пласте

12.5 Вывод основных уравнений водопритока к несовершенной скважине с длинным фильтром ( $l \gg r_n$ ) в условиях стационарной фильтрации

12.5.1. Рассмотрим пласт неограниченной мощности.

Скважину с длинным фильтром заменим линейным стоком ( $r_0 \rightarrow 0$ ,  $l_0 = 2l$ ) такой же длины, что и реальный фильтр (рис. 12.4).

Фильтрация двухмерная в цилиндрической системе координат  $\xi$  и  $r$ .

$$\text{Расход в линейном стоке } q = \frac{Q}{2l} \quad (12.12)$$

Задача решена С.К. Абрамовым, В.Д. Бабушкиным. В точной постановке Н.Н. Веригиным. Выделим на расстоянии  $\eta$  от центра фильтра участок  $d\eta$ . Этот участок можно представить как точечный сток, который формирует в точке  $M$  понижение  $dS$ . Используем за основу уравнение для точечного стока

$$dS = \frac{dQ}{4\pi k\rho}, \quad (12.13)$$

где  $dQ$  - расход точечного стока  $d\eta$ .

$$dQ = q \cdot d\eta = \frac{Q}{2l} d\eta \quad (12.14)$$

$$\text{Величина } \rho = \sqrt{r^2 + (\xi - \eta)^2} \quad (12.15)$$

Подставим (12.14) и (12.15) в (12.13). Имеем

$$dS = \frac{Q d\eta}{8\pi k l \sqrt{r^2 + (\xi - \eta)^2}}, \text{ интегрируем } \int_0^\xi dS = \frac{Q}{8\pi k l} \int_{-l}^l \frac{d\eta}{\sqrt{r^2 + (\xi - \eta)^2}} \quad (12.16)$$

$$S_u = \frac{Q}{8\pi k l} \left( Arsh \frac{\xi + l}{r} - Arsh \frac{\xi - l}{r} \right) \quad (12.17)$$

*Arsh* - гиперболический синус (ареосинус) – табулирован.

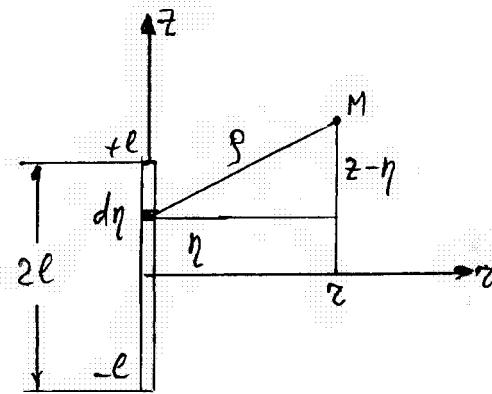


Рис. 12.4. Расчетная схема притока к несовершенному фильтру

При гидродинамических расчетах обычно точка  $M$  берется в интервале расположения фильтра на оси  $r$ , то есть  $z = 0$ . Учитывая, что  $\text{Arsh}(-x) = -\text{Arsh}x$ , то есть функция нечетная, в этом случае из (12.17) получим:

$$S_M = \frac{Q}{4\pi k l} \text{Arsh} \frac{l}{r} \quad (12.18)$$

$$\text{Приближенно } \text{Arsh}x = \ln 2x \quad (12.19)$$

Тогда из (12.18) получим

$$S_M = \frac{Q}{4\pi k l} \ln \frac{2l}{r} \quad \begin{array}{l} \text{длина фильтра} \\ r - \text{расстояние до точки } M \end{array} \quad (12.20)$$

$$\text{или } S_M = \frac{Q}{2\pi k l_0} \ln \frac{l_0}{r} \quad (12.21)$$

При определении величины понижения уровня в самой скважине необходимо учитывать несоответствие площади поперечного сечения потока к линейному источнику (эллипсоид вращения) и к реальной скважине – цилиндрическая поверхность. Это несоответствие вызывает ошибку, которая учитывается коэффициентом  $\alpha = 0,66 - 0,8$ . Тогда

$$S_0 = \frac{Q}{2\pi k l_0} \ln \frac{0,7l_0}{r_0} \quad (12.22)$$

12.5.2. Рассмотрим условия работы скважины, фильтр которой примыкает к кровле неограниченного по мощности пласта. Используем метод отражения и суперпозиции

$$S_M = \frac{Q}{2\pi k l_0} \ln \frac{1,4l_0}{r_0} \quad (12.23)$$

12.6 Учет несовершенства скважин методами фрагментации потока и фильтрационных сопротивлений

Используем метод сложения течений:

$$\left. \begin{array}{l} S_{oc} = S_{cce} + \Delta S_{nc} \\ f_{oc} = f_{cce} + \Delta f_{nc} \end{array} \right\} \quad (12.24)$$

$$S_{oc} = \frac{Q}{2\pi km} f_{cce} + \frac{Q}{2\pi km} f_{nc} \text{ или } S = \frac{Q}{2\pi km} (f_{cce} + f_{nc}) \quad , \quad (12.25)$$

$$\text{где } f_{cce} = \ln \frac{R_k}{r_0} \quad (12.26)$$

Величина  $f_{nc}$  определяется по разному, но всегда зависит  $f_{nc} = f\left(\frac{l}{m}, \frac{m}{r}, C\right)$

$C$  - положение фильтра относительно кровли и подошвы пласта.

По Веригину Н.Н.  $f_{nc} = \xi_{nc}$ , где  $\xi_{nc} = f\left(\frac{l}{m}, \frac{m}{r}, C\right)$  определяется по табли-

це. Шестаков В.М. ввел  $r_{eq} = \alpha \cdot r_0$  - приведенный радиус скважины (12.27).

В этом случае на расчетной схеме реальный радиус фильтра скважины заменяется фиктивным, приведенным. Величина искажения радиуса зависит от параметра несовершенства. Уменьшение радиуса фильтра эквивалентно учитывает дополнительные потери возникающие за счет несовершенства скважин, то есть

$$f_{nc} = \ln \frac{r_0}{r_{eq}} = \ln \frac{r_0}{\alpha \cdot r_0} = -\ln \alpha, \text{ тогда } \alpha = e^{-f_{nc}} \quad (12.28)$$

Формула (12.25) позволяет рассчитать несовершенную скважину так же как совершенную, вводя в расчет либо  $f_{nc}$ , либо  $\alpha$ .

Учет несовершенства осуществляется для центральной скважины, из которой осуществляется водоотбор, а также при расчетах понижений в наблюдательных скважинах в пределах зоны деформированных линий тока. Размеры этой зоны не превышают ( $r_{nc} \leq m$ ) мощности пласта. Величина  $f_{nc}$  для этой зоны определяется аналогичным образом по таблицам. При очень больших  $m$  размер области деформаций линий тока равен  $r_{nc} \leq (3 \div 8)l_0$ .

### Вопросы к лекции №12

1. Какие основные факторы определяющие несовершенство скважины, вы знаете?
2. В чем заключаются особенности гидродинамической структуры потока вблизи несовершенной по степени вскрытия пласта скважины по сравнению с совершенной скважиной?
3. Какими расчетными схемами представляется водоприток к несовершенным скважинам?
4. Для каких расчетных схем несовершенной скважин целесообразно использовать метод отображений?
5. В чем принципиальная разница учета несовершенства скважин методами Н.Н. Веригина и В.М. Шестакова?

6. Как изменяется величина дополнительных потерь напора за счет несовершенства водозаборной скважины при удалении от нее?
7. Запишите уравнение водопритока к несовершенной скважине, работающей в пласте, имеющим гидравлическую связь с вышележащим пластом и получающим питание из него, используя метод фильтрационных сопротивлений.

### Лекция № 13. Теоретические основы определения гидродинамических параметров по данным откачек

13.1. Опытно-фильтрационные работы (ОФР) – один из основных методов определения гидродинамических параметров пласта. Эта задача относится к категории обратных. Для ее решения должны быть известны основные показатели процесса фильтрации: расход скважины и положение уровня в разных точках пласта в разные моменты времени. Это задача эпигноза, то есть рассматривается прошлый опыт воздействия на пласт. В качестве ОФР могут быть организованы опытные откачки или использован существующий опыт эксплуатации действующего водозабора.

Опытные откачки могут быть одиночными или кустовыми. В последнем случае рядом с центральной скважиной, из которой ведется откачка, бурят дополнительные скважины для наблюдения за изменением уровня. Эти скважины следует располагать по лучу и отбор воды из них не проводится (рис. 13.1).

Рассмотрим самую простую и наиболее распространенную схему откачки: однородный, изолированный, неограниченный, напорный пласт, из которого ведется откачка с постоянным расходом ( $Q_0 = \text{const}$ ). Обработка возможна графоаналитическими и аналитическими методами. Первые являются более распространенными.

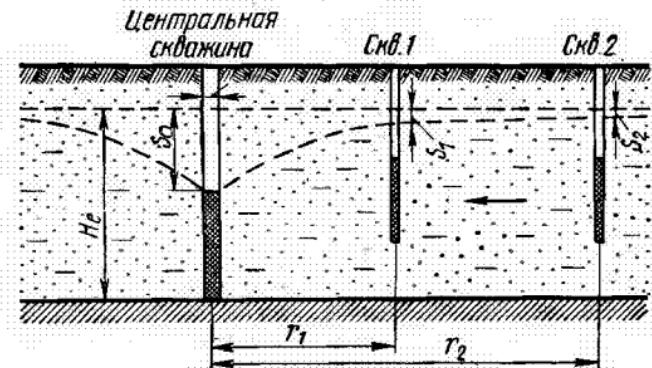


Рис. 13.1. Схема размещения наблюдательных скважин в пласте при опытной откачке

Рассмотрим случай, когда наступила квазистационарная фильтрация, т.е.

$$\frac{r^2}{4at} \leq 0,1, \text{ или, что то же самое } t \geq \frac{2,5r^2}{a}, \text{ или } r \leq 0,6\sqrt{at} \quad (13.1)$$

Последовательно выполним преобразования формулы Тейса

$$S = \frac{Q_0}{4\pi km} \ln \frac{2,25a}{r^2} \quad (13.2)$$

таким образом, чтобы результат откачки можно было бы отобразить в виде прямых линий, используя координаты  $S - \ln t$  (временное),  $S - \ln r$  (площадное) и  $S - \ln t/r^2$  (комбинированное) прослеживание понижения уровня.

### 13.2. Временное прослеживание уровня.

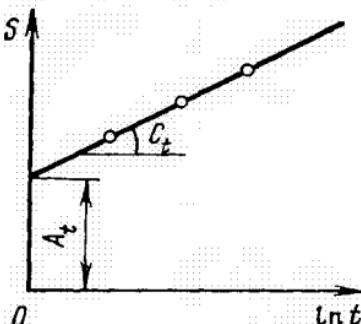


Рис.13.2. Типовой график временного прослеживания понижения уровня

Разложим (13.2):

$$S = \frac{Q_0}{4\pi km} \ln \frac{2,25a}{r^2} + \frac{Q_0}{4\pi km} \ln t \quad (13.3)$$

$$\text{Обозначим } A_t = \frac{Q_0}{4\pi km} \ln \frac{2,25a}{r^2}, C_t = \frac{Q_0}{4\pi km} \quad (13.4)$$

$$\text{тогда } S = A_t + C_t \cdot \ln t - \text{прямая линия} \quad (13.5)$$

в полулогарифмических координатах, отсекающая на оси ординат отрезок  $A_t$ . Значение  $C_t$  определяется из соотношения (рис. 13.2)

$$C_t = \frac{S_2 - S_1}{\ln t_2 - \ln t_1} \quad (13.6)$$

где  $S_2$  и  $S_1$  - два любых понижения на соответствующие моменты времени  $t_2$  и  $t_1$ .

Параметры водоносного пласта находим по уравнениям

$$km = \frac{Q_0}{4\pi C_t}, \ln a = \frac{A_t}{C_t} - 0,82 + 2\ln r \quad (13.7)$$

где  $r$  - расстояние от наблюдательной скважины до центральной.

Графики для разных наблюдательных скважин должны быть параллельны друг другу, если пласт однородный.

Для центральной скважины определяем показатель несовершенства

$$\alpha = \frac{r_p}{r_0} \quad (13.8)$$

$$\text{причем } \ln r_p = \frac{1}{2} \left( \ln a + 0,82 - \frac{A_i^0}{C_i^0} \right) \quad (13.9)$$

где  $\ln a$  - определяется по данным измерений уровня в наблюдательных скважинах,

$A_i^0$  и  $C_i^0$  - коэффициенты уравнения (13.5) для центральной скважины,

$r_0$  - радиус центральной скважины.

### 13.3. Площадное прослеживание уровня.

Разложим (13.2) в виде:

$$S = \frac{\varrho_0}{2\pi k m} \ln 1,5\sqrt{at} - \frac{\varrho_0}{2\pi k m} \ln r \quad (13.10)$$

$$\text{Обозначим } A_r = \frac{\varrho_0}{2\pi k m} \ln 1,5\sqrt{at}, C_r = \frac{\varrho_0}{2\pi k m} \quad (13.11)$$

тогда  $S = A_r + C_r \ln r$  (13.12) - прямая линия в полулогарифмических координатах, отсекающая на оси ординат отрезок  $A_r$ . Эта прямая пересекается с осью абсцисс ( $S = 0$ ) в точке  $\ln R_s(t) = \ln(1,5\sqrt{at})$  (13.13)

причем  $R_s$  - приведенный радиус влияния (10.16).

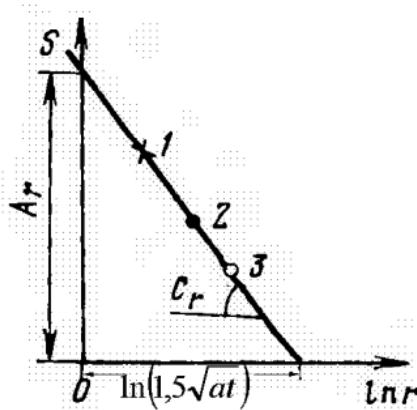


Рис.13.3. Типовой график площадного прослеживания понижения уровня

График площадного прослеживания строится с использованием данных только по наблюдательным скважинам.

Значение  $C_r$  определяется из соотношения (рис. 13.3):

$$C_r = \frac{A_r}{\ln R_n(t)} \quad (13.14)$$

Параметры водоносного горизонта находим по уравнениям

$$km = \frac{Q_0}{2\pi C_r}, \quad a = \frac{R_n^2(t)}{2,25t} \quad , \quad (13.15)$$

где  $t$  соответствует времени измерений понижения уровня, используемых для построения графика  $S - \ln r$ .

Для правильного выбора времени предварительно следует проанализировать графики в координатах  $S - \ln t$  и выбрать период, в пределах которого все фактические точки ложатся на прямые параллельные друг другу. Это является подтверждением наступления квазистационарного режима фильтрации и отсутствия влияния внешних границ.

Показатель несовершенства центральной скважины определяется путем совмещения значения понижения  $S_0$  на выбранный момент времени  $t$  с продолжением прямой графика  $S - \ln r$ . Из точки их пересечения опускается перпендикуляр на ось абсцисс и определяется  $\ln r_{tp}$ , а затем  $r_{tp}$ .

Графики площадного прослеживания уровня на разные моменты времени должны быть параллельны, если пласт однородный и нет влияния внешних границ.

13.4. Комбинированное прослеживание уровня. Разложим (13.2):

$$S = \frac{Q_0}{4\pi km} \ln 2,25a + \frac{Q_0}{4\pi km} \ln(t/r^2) \quad (13.16)$$

$$\text{Обозначим } A_k = \frac{Q_0}{4\pi km} \ln 2,25a, \quad C_k = \frac{Q_0}{4\pi km} \quad , \quad (13.17)$$

тогда  $S = A_k + C_k \ln(t/r^2)$  (13.18) – прямая линия в осях  $S - \ln(t/r^2)$ , отсекающая на оси ординат отрезок  $A_k$ . Теоретически все точки наблюдения должны располагаться на одной прямой.

Значение  $C_k$  определяется из соотношения (рис. 13.4):

$$C_k = \frac{S_2 - S_1}{\ln(t/r^2)_2 - \ln(t/r^2)_1} \quad , \quad (13.19)$$

где  $S_2$  и  $S_1$  два любых понижения на прямой линии, соответствующие абсциссам  $\ln(t/r^2)_1$  и  $\ln(t/r^2)_2$ .

Параметры водоносного пласта находим по уравнениям

$$km = \frac{Q_0}{4\pi C_k}, \quad \ln a = \frac{A_k}{C_k} - 0,82 \quad (13.20)$$

Если центральная скважина характеризуется несовершенством водоприемной части, то точки, соответствующие этой скважине на графике комбинированного прослеживания, располагаются в виде прямой, параллельной основному графику  $S - \ln t/r^2$ , причем график по центральной скважине отсекает на

оси ординат отрезок  $A_k^0$ . Определение показателя несовершенства центральной скважины осуществляется аналогично методике, описанной для временного прослеживания уровня.

$$\ln \alpha = \frac{A_k - A_k^0}{2C_k} \quad (13.21)$$

где  $\alpha$  соответствует (13.8).

### 13.5. Восстановление уровня после откачки

Величина понижения уровня после завершения откачки определяется уравнением

$$S_e = \frac{Q_0}{4\pi k m} \ln \frac{2.25a(t_0 + t_e)}{r^2} + \frac{-Q_0}{4\pi k m} \ln \frac{2.25at_e}{r^2} \quad (13.22)$$

где  $t_0$  - продолжительность откачки,

$t_e$  - продолжительность восстановления уровня.

Здесь первый член уравнения определяет рост понижения за счет постоянного  $(t_0 + t_e)$  водоотбора из скважины с расходом  $Q_0$ , а второй член - восстановление уровня за счет нагнетания  $(-Q_0)$  воды в течение периода  $t_e$  (рис. 13.5).

После сокращения в (13.22) получим

$$S_e = \frac{Q_0}{4\pi k m} \ln \frac{t_0 + t_e}{t_e} \quad (13.23)$$

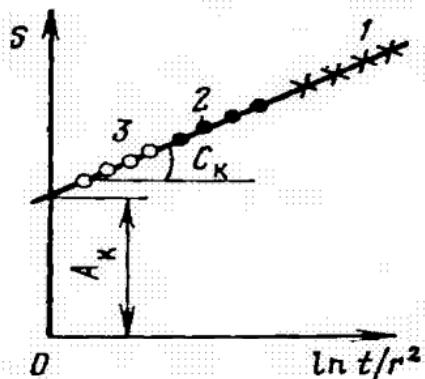


Рис.13.4. Типовой график комбинированного прослеживания понижения уровня

В координатах  $S_e \div \ln \frac{t_0 + t_e}{t_e}$  получим прямую линию, теоретически проходящую через начало координат. В начале координат имеем  $S \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  и  $\ln \frac{t_0 + t_e}{t_e} \rightarrow 0$ . Реальный график через начало координат обычно не проходит

вследствие колебаний статического положения уровня в течение откачки и восстановления. При этом оказывается, что  $S_e$  может существенно отличаться от нуля.

По графику определяем угловой коэффициент

$$C_e = \frac{S_1 - S_2}{\ln\left(\frac{t_0 + t_e}{t_e}\right) - \ln\left(\frac{t_0 + t_e}{t_e}\right)}, \quad (13.24)$$

и находим водопроводимость

$$km = \frac{Q_0}{4\pi C_e}. \quad (13.25)$$

Величина пьезопроводности определяется по конечному максимальному понижению уровня при откачке -  $S_0$  по следующей зависимости:

$$\ln a = \frac{S_0}{C_B} + 2 \ln r - \ln 2.25 t_0 \quad (13.26)$$

Темп снижения уровня за счет откачки ( $+Q_0$ ) в период восстановления уровня равен

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_0 = \frac{Q_0}{4\pi km(t_0 + t_e)} \quad (13.27)$$

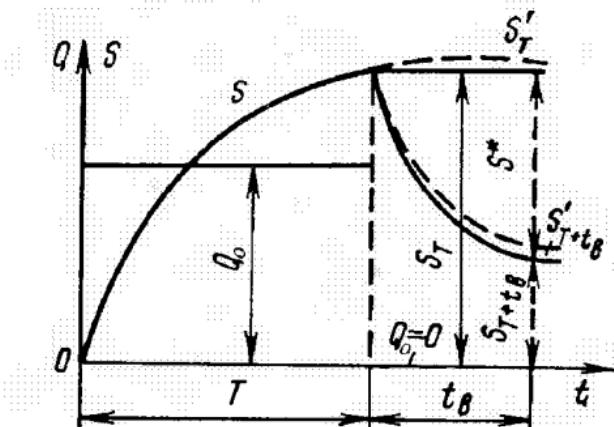


Рис.13.5. Типовой график восстановления уровня после откачки

тот же темп за счет восстановления уровня ( $-Q_0$ ) равен

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_e = \frac{-Q_0}{4\pi km t_e} \quad (13.28)$$

Очевидно, что при  $t_e \leq 0.1t_0$  выражение (13.27) составляет не более 10%.

от выражения (13.28) и можно считать  $\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_0 = 0$ , то есть

$$S_0 = \frac{Q_0}{4\pi k m} \ln \frac{2.25a(t_0 + t_e)}{r^2} = \frac{Q_0}{4\pi k m} \ln \frac{2.25at_0}{r^2} = \text{const} \quad (13.29)$$

Тогда изменение уровня при восстановлении  $\Delta S_e$  определяется по (13.22):

$$\Delta S_e = S_0 - S_e = \frac{Q_0}{4\pi k m} \ln \frac{2.25at_e}{r^2}, \quad (13.30)$$

и может быть обработано изложенным выше методом временного прослеживания уровня с определением  $km$ , а и  $r_{np}$  (13.4)-(13.9).

13.6. Одиночная скважина, то есть отсутствуют наблюдательные скважины. Обработка откачки возможна только в координатах  $S - \ln t$ . При этом определяются водопроводимость  $km$  и обобщенный параметр  $(\ln a / r_{np}^2)$ . В том случае, если для данного пласта известна величина  $a$ , определенная на близко расположенных участках, может быть определено  $r_{np}$ .

13.7. В грунтовых (безнапорных водах) при значительных величинах понижений уровня ( $S \geq 0.25h_e$ ) обработка ведется в координатах  $(2h_e - S)S - \ln t$ ,  $(2h_e - S)S - \ln r$  и  $(2h_e - S)S - \ln t/r^2$ , используя замену, согласно напорной функции  $2mS = (2h_e - S)S$ . При этом формула для определения параметров изменяется только для коэффициента фильтрации  $k = \frac{Q_0}{2\pi C_r}$  - временное прослеживание уровня. (13.31)

$$\text{Водопроводимость } T = k \cdot h_e \quad (13.32)$$

Для графика площадного прослеживания

$$k = \frac{Q_0}{\pi C_r} \quad (13.33)$$

комбинированного прослеживания

$$k = \frac{Q_0}{2\pi C_k} \quad (13.34)$$

Значение пьезопроводности  $a$  и  $r_{np}$  определяется по выше приведенным формулам (13.7), (13.9), (13.15), (13.20), (13.21).

13.8. При наступлении стационарной фильтрации в качестве графоаналитического используется только метод площадного прослеживания уровня в координатах  $S - \ln r$ . При этом график является единственным и пересекает ось абсцисс  $\ln r$  в точке соответствующей  $\ln R_k$ , где  $R_k$  - радиус контура питания в формуле Дюпон (9.12):

$$S = \frac{Q_0}{2\pi k m} \ln \frac{R_k}{r} \quad (13.35)$$

Для построения графика используются данные только по наблюдательным скважинам расположенным вблизи от центральной, так что  $r_i \leq 0,3R_k$ .

Для разных природных условий (расчетных схем) величина  $R_k$  определяется:

при перетекании  $R_k = 1,12B$ ,

для откачки вблизи реки  $R_k = 2(d + \Delta L)$ ,

при инверсии разгрузки родников или испарения, исходя из балансового уравнения  $Q_0 = \pi W_p \cdot R_k^2$ , получим  $R_k = \sqrt{\frac{Q_0}{\pi W_p}}$ .

Следовательно, оценка  $R_k$  по данным откачки позволяет определить:

$$\text{в условиях перетекания } B = \frac{R_k}{1,12} \text{ и } \frac{k_0}{m_0} = \frac{km}{B^2}, \quad (13.36)$$

$$\text{в условиях полуоткрытого пласта } \Delta L = \frac{R_k}{2} - d, \quad (13.37)$$

$$\text{в условиях инверсии разгрузки } W_p = \frac{Q_0}{\pi R_k^2}, \quad (13.38)$$

где  $k_0$  и  $m_0$  - коэффициент фильтрации и мощность разделяющего слоя, через который осуществляется перетекание, м/сут, м;

$\Delta L$  и  $d$  - несовершенство вреза реки и расстояние от центральной скважины до реки, м;

$W_p$  - модуль родниковой разгрузки или испарения, м/сут.

Параметры водопроводимости  $km$  и приведенный радиус скважины  $r_{eq}$  определяются аналогично п.3 настоящей лекции.

Для грунтовых вод при обработке данных надо иметь в виду п.7 настоящей лекции.

13.9. В тех случаях, когда имеются данные только по удельному дебиту, как результат откачки из одиночной скважины в условиях стационарной фильтрации, можно ориентировочно определить только величину  $km$ . Для его определения используется эмпирическая формула

$$km = A \cdot q \quad (13.39)$$

где  $q = Q_0/S_0$  - удельный дебит скважины.

Для совершенной скважины с радиусом фильтра  $r_0 = 0,1$  м, принимая радиус контура питания  $R_k = 1000$  м, из формулы (13.35)

$$\text{получаем } km = 130q, \quad (13.40)$$

где  $q$  имеет размерность л/сек,  $km$  - м<sup>2</sup>/сут.

Реальные значения  $A$  находятся в диапазоне 80-160 и зависят от степени совершенства водоприемной части скважины.

13.10. В условиях нестационарной фильтрации  $\left(\frac{r^2}{4at} > 0,1\right)$  в качестве гра-

фоаналитического используется метод эталонной кривой.

Прологарифмируем уравнение Тейса  $S = \frac{Q_0}{4\pi km} W(\alpha)$  и  $\frac{1}{\alpha} = \frac{4at}{r^2}$  так, что

$$\ln S = \ln \frac{Q_0}{4\pi km} + \ln W(\alpha) \quad (13.41)$$

$$\ln \frac{1}{\alpha} = \ln \frac{4a}{r^2} + \ln t \quad (13.42)$$

$$\text{Обозначим } \ln S^0 = \ln \frac{Q_0}{4\pi km} \text{ и } \ln t^0 = \ln \frac{r^2}{4a} \quad (13.43)$$

и перепишем (13.41) и (13.42):

$$\ln S = \ln S^0 + \ln W(\alpha) \quad (13.44)$$

$$\ln t = \ln t^0 + \ln \frac{1}{\alpha} \quad (13.45)$$

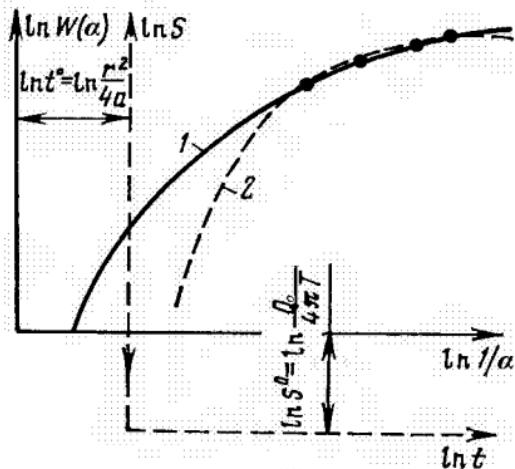


Рис. 13.6. Определение параметров пласта методом эталонной кривой

Эталонная кривая строится в координатах  $\ln W(\alpha) - \ln \frac{1}{\alpha}$  (рис. 13.6 – 1).

Данные опытной откачки представляются в виде графика в координатах  $\ln S - \ln t$  (рис. 13.6 – 2). При наложении этих кривых и параллельном перемещении осей координат добиваются их совмещения по значительному числу точек. При этом кривые окажутся сдвинутыми согласно (13.44) и (13.45) на величины  $\ln S^0$  и  $\ln t^0$  (рис.13.6).

Определив значения  $t^0$  и  $S^0$ , находим

$$km = \frac{Q_0}{4\pi S^0} \text{ и } a = \frac{r^2}{4t^0} \quad (13.46)$$

где  $r$  - расстояние от центральной скважины до наблюдательной, по которой построен график  $\ln S - \ln t$ .

13.11. В условиях нестационарной фильтрации  $\left(\frac{r^2}{4at} > 0,1\right)$  используется так же аналитический метод определения параметров (метод подбора).

Величина понижения определяется по известной формуле Тейса

$$S = \frac{Q}{4\pi km} \left[ -E\left(-\frac{r^2}{4at}\right) \right] . \quad (13.47)$$

Для определения коэффициента  $a$  возьмем отношение двух понижений  $S'$  и  $S''$ , замеренных в одной наблюдательной скважине на разные моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ .

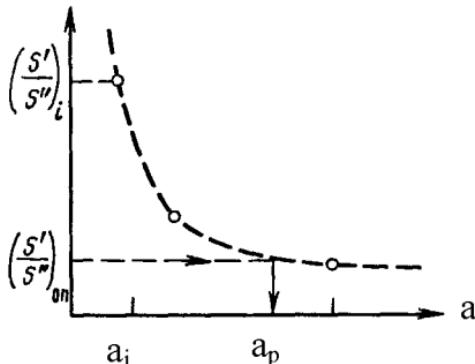


Рис.13.7. Определение параметров пласта методом подбора

После сокращения получим

$$\frac{S'}{S''} = \frac{E_i \left( -\frac{r^2}{4at_1} \right)}{E_i \left( -\frac{r^2}{4at_2} \right)} , \quad (13.48)$$

где  $r$  - расстояние от наблюдательной скважины до опытной.

Величина  $a$  определяется подбором. В правую часть выражения (13.48) подставляем некоторые значения  $a$  в диапазоне их возможного изменения в рассматриваемых гидрогеологических условиях. В результате для каждого значения  $a$ , определяется отношение  $(S'/S'')$ , и строятся графики, отражающие результаты расчетов (рис. 13.7). На этом графике находят точку, соответствующую фактическому отношению  $(S'/S'')_{on}$ , которое отвечает определенному значению  $a_p$ . Далее подставляя в формулу (13.47) найденное  $a_p$  определяют величину  $km$ .

13.12. Диагностика и интерпретация данных наблюдений понижения уровня  $S$  при откачках выполняется в индикаторных графиках, характеризующих изменение величины  $S$  для типовых расчетных схем. Основными индикаторными кривыми являются графики временного, площадного и комбинированного прослеживания.

Под интерпретацией понимают анализ опытных данных для выявления главных факторов, определяющих изменение  $S$  при откачке и установление типовых периодов формирования этого изменения, отвечающих действию конкретной расчетной схемы. Диагностика – это сопоставление вида теоретических и опытных кривых, в результате которого на индикаторных графиках выделяются расчетные участки и устанавливаются соответствующие им расчетные схемы и формулы для оценки параметров пласта. После этого границы выделенных расчетных участков подтверждаются временными критериями, определяющими период действия данной расчетной схемы. Например,  $t_{\text{ee}} = 0,45 \frac{L^2}{a}$  – влияние внешней границы на расстоянии  $L$  от скважины,

$$t_{\text{ee}} = 2,5 \frac{r^2}{a} \quad \text{наступление квазистационарного режима в наблюдательной скважине на расстоянии } r \text{ от центральной.} \quad (13.49)$$

Более информативными являются индикаторные графики по кустовым откачкам продолжительностью несколько суток. Наибольшей информативностью обладают наблюдения за режимом эксплуатации подземных вод.

К факторам, осложняющим интерпретацию и диагностику опытных индикаторных графиков, могут быть отнесены следующие:

1. Несоблюдение условий наступления квазистационарной фильтрации, что вызывает на графиках  $S - \ln t$  отклонение начальных точек от прямой линии.

2. Наличие в окрестностях опытного куста скважин открытых границ (река), перетекания из соседних водоносных пластов, зон перехода напорных вод в грунтовые или зон с повышенной водопроводимостью, а в грунтовых водах наличие инверсии родниковой разгрузки или испарения. Все это приводит к вы положению концевых участков графиков  $S - \ln t$ , при этом наблюдается перегиб и появляется более пологий второй участок или прямая параллельная оси абсцисс (стационарная фильтрация).

3. Наличие в окрестностях опытного куста скважин непроницаемых границ или зон с малой водопроводимостью, что приводит к увеличению темпа снижения уровня и на графике  $S - \ln t$  прослеживается перегиб, а уклон следующего прямолинейного участка увеличивается.

4. Изменение расхода воды из опытной скважины во времени откачки. Постоянство дебита – одно из обязательных условий достоверного расчета параметров. С целью исключения влияния незакономерных небольших и кратко-временных изменений дебита в процессе откачки графики строят в координатах  $S/Q - \ln t$ , то есть используют относительное понижение.

5. Наличие в окрестностях (зоне влияния) опытного куста скважин водозаборов с неравномерным режимом работы. Влияние этих водозаборов может приводить к самым неожиданным изменениям в понижениях уровня, вплоть до его восстановления в процессе откачки в случае остановки эксплуатационных скважин.

На графиках  $S - \ln t$  при откачках из грунтовых вод большой мощности и пластов с гетерогенно-блоковым строением выделяется ложностационарный участок (рис. 13.8) Левая крутая ветвь графика (участок I) соответствует периоду фильтрации при водоотдаче, определяемой либо упругими свойствами пласта, либо водоотдачей крупных трещин. Длительность периода, соответствующая участку I, может измеряться часами и даже сутками. Если этот период достаточно длительный, по нему можно определить параметры  $T$  и  $a^*$  для напорного пласта или среды, представленной крупными трещинами. Важно ложностационарный участок не принять ошибочно за проявление стационарного режима фильтрации.

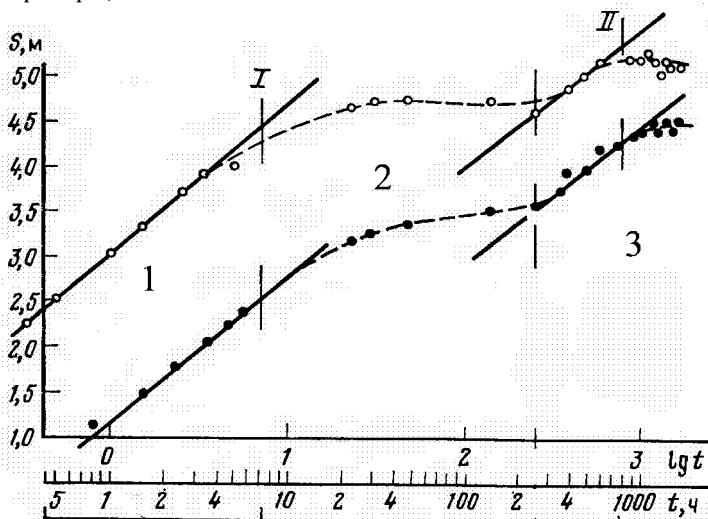


Рис. 13.8. Графики временного прослеживания для гетерогенного строения пласта

При значительной длительности откачки или эксплуатации водозабора проявляется третий прямолинейный участок. Этот участок отвечает условиям фильтрации в среде с обобщенными параметрами, то есть  $T = k m_1 + k m_2$  и  $\mu = \mu_1^* + \mu_2$ ,

$$(13.51)$$

где  $k_{m_1}$  и  $\mu_1^*$  - параметры напорного пласта или среды, отвечающей крупным трещинам,

$k_{m_2}$  и  $\mu_2$  - тоже для питающего пласта или слоя и среды, отвечающей мелкотрещиноватым блокам.

Аналогичную форму имеет вид графика откачки грунтовых вод, если фильтр скважины располагается значительно ниже уровня воды. В первый период откачки снижение уровня определяется проявлением упругих свойств пласта и формируется участок 1, затем начинает сказываться влияние процесса осушения грунтовых вод и переформирование капиллярной каймы (эффект Болтона), см. лекцию 3. В этот период скорость снижения уровня существенно уменьшается и на границе появляется ложностационарный участок 2. При достаточной длительности откачки на графике появляется участок 3, который определяется величиной полной водоотдачи пласта.

### Вопросы к лекции №13

1. Дайте отличия для понятий: гидродинамические параметры породы, гидродинамические параметры пласта и параметры скважины.
2. На какие группы можно разделить все методы определения параметров по откачкам?
3. В чем суть методов подбора и линейных графиков? Какой из них достовернее?
4. В чем суть диагностики и идентификации данных опытных откачек?
5. Запишите формулу, пользуясь которой можно определить по кустовой откачке параметр  $\Delta L_{ns}$  реки, и приведите ее к виду (13.10).
6. Почему не рекомендуется определять превозпроводность по данным центральной скважины?
7. Определите различия в уклонах начального и конечного участков графика временного прослеживания уровня для опытной скважины, расположенной вблизи непроницаемой прямолинейной границы.
8. Определите различия в уклонах начального и конечного участков графика временного прослеживания уровня при откачке в двух пластовой системе в условиях снижения уровня в питающем пласте (рис. 11.4).
9. Какие природные и технические факторы наиболее заметно искажают графики временного прослеживания уровня при откачке?
- 10.Какие изменения в графике временного, площадного и комбинированного прослеживания наблюдаются при сравнении данных откачек а) из совершенной и несовершенной скважин? б) скважина в неограниченном пласте и возле реки? в) скважина в неограниченном пласте и возле закрытой границы?
- 11.Каким параметром определяется интенсивность перетекания через относительный водоупор? Что представляют собой параметры  $\Delta L_{ns}$  и  $r_{np}$ ?
- 12.Для каких по своему расположению наблюдательных скважин следует использовать методы подбора или эталонной кривой? Почему?

13. Какие параметры пласта и скважины могут быть определены по данным кустовой откачки в условиях стационарного режима фильтрации?
14. Какие природные факторы способствуют возникновению на графиках  $S - \ln t$  участков ложностационарного режима фильтрации?
15. С чем связано ограничение  $t_e \leq 0,1t_0$  по использованию данных восстановления уровня после откачки путем обработки в ось  $\Delta S_e - \ln t_e$ ?
16. Для какой наблюдательной скважины в первую очередь следует проверять условие наступления квазистационарного режима фильтрации при построении графика площадного прослеживания  $S - \ln r$ ?
17. При построении графика  $S - \ln t$  использованы значения  $S$  и  $t$  измеренные в метрах и часах. Какая будет получена размерность расчетных коэффициентов  $km$ , а, определяемых по этому графику?
18. Какие параметры пласта могут быть определены по результатам одиночной откачки в условиях нестационарного стационарного режима фильтрации? Дайте оценку достоверности этим определениям.
19. Какие соображения позволяют использовать уравнение Тейса на период восстановления уровня в пласте после окончания откачки из скважины?

#### Лекция № 14. Обобщенные системы скважин

14.1. Метод обобщенных систем скважин используется при гидродинамических расчетах водозаборов и дренажей со значительным количеством скважин, эксплуатирующихся с одинаковыми расходами  $Q_0$  и располагающихся на равных расстояниях  $2\sigma$ . В этом случае метод дискретного учета влияния водозабора из каждой скважины связан с громоздкими расчетами, а метод "большого колодца" не обеспечивает точного решения задачи. Особенно это актуально для ограниченных пластов, расчеты в которых связаны с использованием метода "зеркальных" отображений.

Сущность этого метода заключается в том, что реальная группа скважин заменяется бесконечным множеством источников с постоянным расходом, равномерно распределенным по линии или площасти, соответствующим действительному расположению скважин. Суммарный расход этих источников принимается равным расходу реальных скважин:

$$Q_{\text{sum}} = \sum_{i=1}^n Q_i = qw \quad (14.1)$$

где  $Q_i$  - расход  $i$ -ой реальной скважины ( $n$  - общее их число);

$q$  - расход на единицу длины контура или площасти  $w$ , в пределах которого располагаются скважины.

Таким образом, большое количество скважин заменяется одним укрупненным сооружением типа горизонтальной дрены с равномерно распределенным ( $q(w) = const$ ) водоотбором по всей площасти ее распространения. В данном случае влияние скважин друг на друга оценивается суммарно не только в удаленных точках, как в методе "большого колодца", но и на самих участках расположения скважин, ибо взаимодействие бесконечного числа скважин оказывается тождественно взаимодействию реальных скважин.

Решения для обобщенных систем скважин могут быть найдены из исходных дифференциальных уравнений фильтрации (лекция № 7), если в них в качестве граничного условия принять интенсивность инфильтрации  $q$  на соответствующем участке расположения водозаборов.

Понижение уровня подземных вод, вызванное действием обобщенных систем, естественно меньше понижения уровня в самих скважинах, поскольку при этом из рассмотрения исключаются зоны наибольшей деформации депрессионной поверхности вблизи каждой скважины. Однако, пользуясь методом фильтрационных сопротивлений, величину дополнительного понижения уровня в скважинах можно определить отдельно. Тогда полное понижение выразится суммой

$$S = S_w + \Delta S_{\text{скв}} \quad (14.2)$$

где  $S_w$  - понижение уровня, обусловленное действием обобщенной системы, зависящее от суммарного водоотбора, размера и формы площади, занятой скважинами, влияния внешних границ пласта, времени эксплуатации скважин и положения точки, где определяется понижение;

$\Delta S_{\text{скв}}$  - дополнительное понижение в самой скважине, зависит от расхода одной скважины, расстояния между скважинами, радиуса фильтра и несовершенства скважины.

Решения получены для систем скважин, имеющих вид прямой линии (галереи), ограниченных и неограниченных размеров, кольца и ограниченной площадки. Полные решения для любой точки пласта приведены в монографии Ф.М. Бочевера [3].

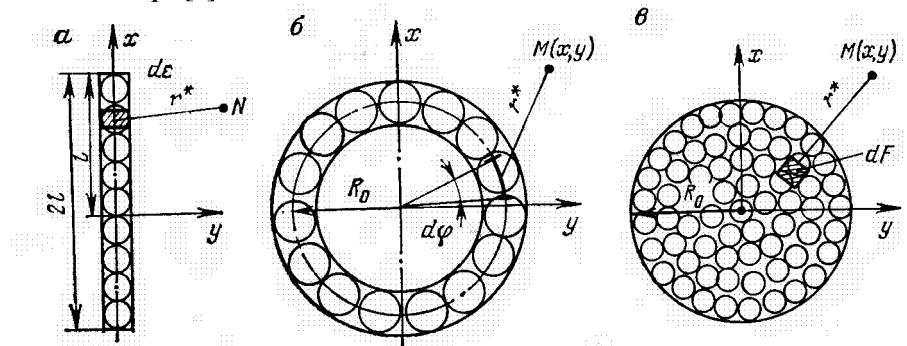


Рис. 14.1. Типовые схемы обобщенных систем скважин

14.2. В настоящем пособии рассмотрены формулы для расчетов понижения уровня в точках, расположенных в центре обобщенной системы, где величина понижения будет максимальной. Общий вид расчета понижения для обобщенной системы скважин в неограниченном пласте

$$S_w = \frac{Q_{\text{сум}}}{4\pi k m} R_w \quad , \quad (14.3)$$

где  $R_{\text{fr}}$  - безразмерное гидравлическое сопротивление при действии обобщенной системы скважин. Для центра обобщенной системы это сопротивление определяется по уравнению Дюпюи или Тейса следующим образом

$$R_{\text{fr}} = 2 \ln \frac{R_k}{r_{\text{tp}}} \text{ и } R_{\text{fr}} = \ln \frac{2.25a t}{R_0^2}, \quad (14.4)$$

где  $r_{\text{tp}}$  определяется в зависимости от расположения водозаборных скважин в системе (рис. 14.1):

а - для линейного ряда ограниченной протяженности:  $r_{\text{tp}} = 0.37l$ , (14.5)

б - для кольцевого расположения скважин:  $r_{\text{tp}} = R_0$ , (14.6)

в - для круговой площадки:  $r_{\text{tp}} = 0.61R_0$  (14.7)

где  $l$  - половина длины линейного ряда,

$R_0$  - радиус кольца или круговой площадки

$R_k$  - радиус контура питания при стационарном режиме фильтрации.

При произвольном расположении скважин по контуру

$$R_0 = \frac{P}{2\pi} \quad (14.8)$$

где  $P$  - периметр контура расположения скважин.

Для прямоугольной площадки размещения скважин с длиной  $2l$  и шириной  $2b$  следует принять

$$R_0 = 2\sqrt{\frac{bl}{\pi}} \text{ при } \frac{b}{l} \approx 1 \quad (14.9)$$

$$\text{и } R_0 = \frac{2(l+b)}{\pi} \text{ в иных случаях} \quad (14.10)$$

Для любой точки внутри линейного ряда весьма значительной (неограниченной) длины понижение уровня будет равно:

$$S_w = \frac{q\sqrt{at}}{\text{km}} \quad (14.11)$$

14.3. Основным условием применимости метода обобщенных систем является наступление квазистационарного режима фильтрации в пределах всей системы, то есть выполнение ограничений:

для линейных систем

$$\frac{l^2}{at} \leq 0,1 \text{ или } t \geq \frac{10l^2}{a}, \quad (14.12)$$

для кольцевых систем

$$\frac{R_0^2}{4at} \leq 0,1 \text{ или } t \geq \frac{2,5R_0^2}{a} \quad (14.13)$$

для условий стационарного режима

$$l \leq 0,3R_k \text{ или } R_0 \leq 0,3R_k. \quad (14.14)$$

Расчет скважин в водоносных пластах ограниченных размеров осуществляется по видоизмененной формуле (14.3):

$$S_{\text{п}} = \frac{Q}{4\pi k m} (R_r + R_{\text{обр}}) \quad , \quad (14.15)$$

где  $R_{\text{обр}}$  - безразмерное сопротивление отображенной реальной системы относительно границ пласта, причем обычно

$$R_{\text{обр}} = \sum_{i=1}^n \left[ E_i \left( -\frac{\rho_i^2}{4at} \right) \right] \quad , \quad (14.16)$$

где  $\rho_i$  - расстояние между центрами реальной и отображенной системы скважин,  $i = 1, 2, \dots, n$  число границ относительно которых осуществляется зеркальное отображение. При этом от границ постоянного напора отображение осуществляется со знаком “-”, от непроницаемых границ со знаком “+”.

Дополнительным ограничением на использование метода обобщенных систем скважин при расчетах взаимодействующих систем или зеркальных отображений является условие

$$L_r \geq l \text{ или } L_r \geq R_0 \quad (14.17)$$

$L_r$  - расстояние от границ пласта до центра обобщенной системы скважин.

Использование формулы для линейного ряда скважин неограниченной протяженности вблизи открытой границы ( $S = 0$ ) приобретает следующий вид:

$$S_r = \frac{q \cdot L}{km} \quad (14.18)$$

где  $L$  - расстояние до открытой границы с учетом ее несовершенства.

14.4. Для определения понижения уровня непосредственно в одной из скважин обобщенной системы используется формула (14.2), причем

$$\Delta S_{\text{кр}} = \frac{Q_0}{2\pi k m} \Delta R_{\text{кр}} \quad , \quad (14.19)$$

где  $Q_0$  - расход скважины,

$\Delta R_{\text{кр}}$  - дополнительное или внутреннее гидравлическое сопротивление, определяемое в зависимости от расположения скважин

$$\Delta R_{\text{кр}} = \ln \frac{r_n}{r_0} + \xi \quad (14.20)$$

где  $\xi$  - показатель несовершенства скважины.

Величина  $r_n$  определяется для контурных систем (линейных, кольцевых)

$$r_n = \frac{\sigma}{\pi} \quad (14.21)$$

для площадных систем скважин

$$r_n = 0,47 \sqrt{\frac{F}{\pi}} \quad (14.22)$$

где  $F$  - площадь круга, равная площади внутренней области влияния скважин, границы которой проводятся посередине между соседними скважинами.

С учетом (14.2, 14.18 и 14.19) понижение уровня в скважине линейного ряда вблизи открытой границы определяется как  $S = \frac{Q_0}{2\pi k m} \left( \frac{\pi \cdot L}{\sigma} + \ln \frac{\sigma}{\pi r_0} \right)$ , (14.23)

известной как формула Маскета-Лейбензона.

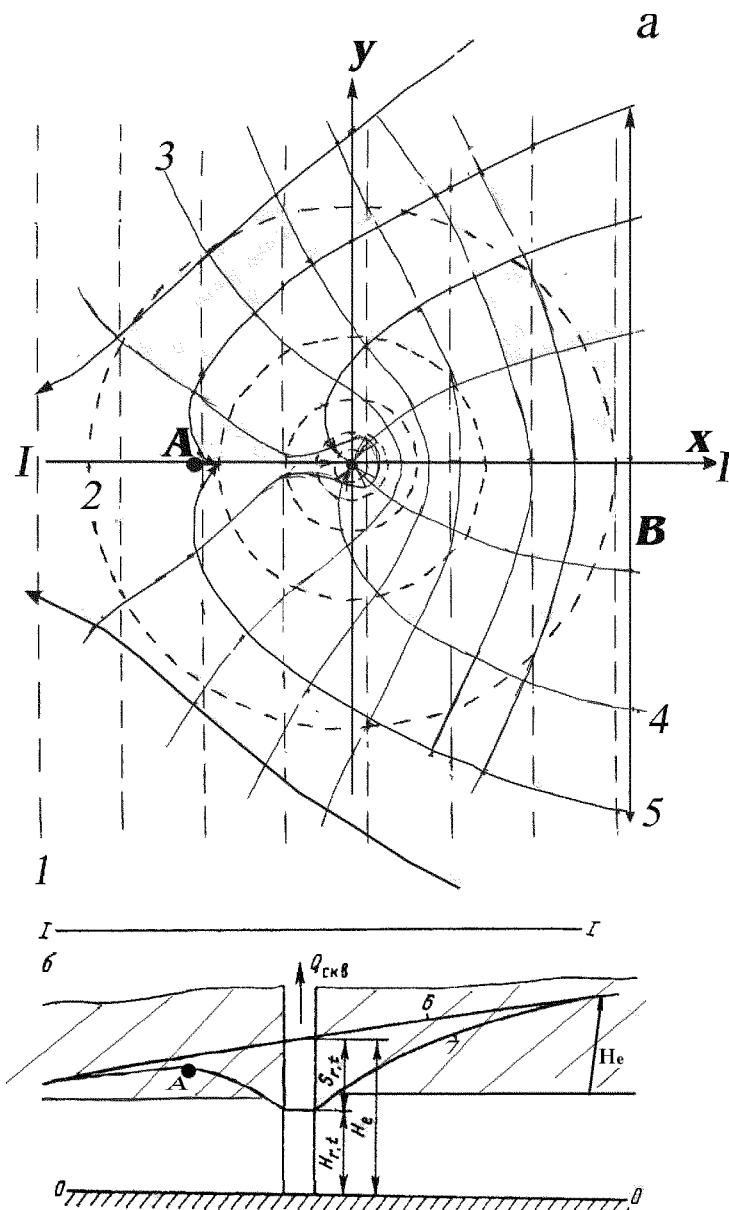
### **Вопросы к лекции №14**

- Что такое метод обобщенных систем скважин? в чем его отличие от метода “большого колодца”? Проиллюстрируйте различие примером.
- Какие факторы, влияющие на величину понижения уровня, учитываются первым членом уравнения (14.2)?
- Перечислите основные условия применимости метода обобщенных систем скважин для расчета понижения уровня, в том числе в ограниченных пластах.
- Как изменится величина  $S_w$  при удвоении количества водозаборных скважин, при сохранении величины суммарного водоотбора и размеров площади занятой скважинами?
- Сопоставьте решения для линейного ряда скважин значительной протяженности в неограниченном пласте (14.11) и вблизи открытой границы (14.18). В чем принципиальное отличие определения  $S_w$  для каждой из этих расчетных схем?
- Какой принцип учета большого количества водозаборных скважин использован в методе обобщенных систем?
- От каких факторов зависит величина  $\Delta S_{\text{окс}}$ , определяемая по формуле (14.19)?

### **Лекция № 15. Скважина в потоке подземных вод**

15.1. Полученные для оценки притока воды к скважине в условиях бассейна ( $I_e=0$ ) решения Дюпюи и Тейса не совсем точно отвечают реальной гидрогеологической обстановке. Рассмотрим это на примере рис 15.1.

Имеется плоскопараллельный поток с градиентом  $Ie > 0$ , в котором работает водозаборная скважина с расходом  $Q_0$  и понижением  $S(r,t)$ . Сопоставим две гидродинамические сетки: одна для плоско-параллельной фильтрации естественного потока, вторая – радиальной фильтрации к скважине, из которой происходит откачка. В первом случае линии тока (ЛТ) параллельны друг другу, во втором – ЛТ направлены по радиусам к скважине, а линии напора (ЛН) – есть концентрические окружности коаксиальные скважине. Сложение этих двух сеток позволяет получить структуру реального потока воды к скважине, который формирует нейтральную линию тока (НЛТ), то есть раздельную линию, определяющую конечную область питания скважины в потоке шириной  $B$  (рис. 15.1). Таким образом, принятые ранее математические схемы водопритока к скважине в потоке ПВ несколько отличаются от реальных гидрогеологических условий и это необходимо учитывать при анализе полученных результатов.



**Рис. 15.1. Гидродинамическая схема формирования депрессионной воронки при откачке в условиях естественного потока (а – план, б – разрез)**

1 – изогипсы до откачки, 2 – изолинии равных понижений уровня, 3 – изогипсы в результате откачки, 4 – линии тока в результате откачки, 5 – нейтральная линия тока, 6 – начальное положение уровня, 7 – депрессионная воронка ( А – водораздельная точка, В – ширина области захвата скважиной)

Для аналитического решения такой задачи используется функция тока  $\psi$ , которая связывается с напором условиями Коши-Римана (Лекция №4).

Для планового потока эти условия принимают вид

$$km \frac{\partial H}{\partial x} = - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad km \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad . \quad (15.1)$$

Рассмотрим условия работы водозаборной скважины с расходом  $Q_0$  в потоке с удельным расходом

$$q_e = kmI_e \quad . \quad (15.2)$$

В условиях квазистационарного режима фильтрации запишем выражение для динамического уровня  $H$

$$H = H_0 - \frac{Q_0}{4\pi km} \ln \frac{2,25at}{r^2}, \quad (15.3)$$

где  $H_0 = H_0^0 + I_e x$ , (15.4)

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad (15.5)$$

$H_0^0$  - статический уровень в месте расположения скважины.

С учетом (15.4) и (15.5), выражение (15.3) имеет вид

$$H = H_0^0 + I_e x - \frac{Q_0}{4\pi km} \ln \frac{2,25at}{x^2 + y^2}. \quad (15.6)$$

Дифференцируя по  $x$ , получим

$$\frac{\partial H}{\partial x} = I_e + \frac{Q_0}{2\pi km} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (15.7)$$

Используя первое из условий Коши-Римана (15.1), получим выражение для приведенной функции тока  $\bar{\psi} = \frac{\psi}{km}$

$$\bar{\psi} = \int \frac{\partial H}{\partial x} dy + C = I_e y + \frac{Q_0}{2\pi km} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C_0. \quad (15.8)$$

На линии тока, совпадающей с положительным направлением оси  $x$  (вверх по потоку), где  $y=0$ ,  $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0$  и  $\bar{\psi} = 0$ , получим постоянную  $C=0$ .

Рассматривая выражение для градиента напора на оси  $x$ :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{y=0} = I_e + \frac{Q_0}{2\pi km x}, \quad (15.9)$$

можно видеть, что существует водораздел при  $x=-x_0$ , где

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{y=0} = 0, \text{ причем } x_0 = \frac{-Q_0}{2\pi km I_e}. \quad (15.10)$$

Таким образом, через точку  $x_0$  проходит НЛТ, ограничивающая область захвата потока водозаборной скважиной. Поскольку между НЛТ и положительной осью  $x$  (линией  $\psi=0$ ) вследствие симметрии потока проходит расход  $0,5Q_0$ , то на нейтральной линии  $\psi = \frac{Q_0}{2km}$ . Подставляя это выражение в (15.8) при  $C=0$ , получим уравнение НЛТ

$$\frac{Q_0}{2km} = I_e \cdot y + \frac{Q_0}{2\pi km} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \quad (15.11)$$

$$\text{Для } x=0, \quad y_0 = \frac{Q_0}{4km I_e}. \quad (15.12)$$

$$\text{для } x \rightarrow \infty, \quad y_\infty = \frac{Q_0}{2km I_e}, \quad (15.13)$$

причем  $2y_\infty = B$ .

15.2. При расчете водозаборных сооружений как в напорных, так и безнапорных пластах широко используются формулы, основанные на принципе суперпозиций, предполагающем независимость величины понижения уровня от расхода, уклона и направления потока подземных вод (Лекция 9 и 10). При этом предполагается, что в условиях потока, как и бассейна, при однородном строении водоемещающей среды, изолинии понижения уровня представляют собой концентрические окружности, а наблюдаемая асимметрия депрессионной воронки является следствием сложения двух течений естественного потока и потока к скважине, формирующегося под влиянием откачки. В таких случаях в неограниченных изолированных водоносных пластиах и в пластиах с непроницаемыми границами стационарный режим фильтрации не наступает.

Однако, если для напорных вод применение принципа суперпозиции является строго обоснованным, то в грунтовых потоках возникают более или менее существенные погрешности в величинах расчетных понижений уровня, обусловленные уменьшением мощности водоносного пласта и связанном с этим перехватом скважиной части расхода подземного потока [2]. Величина понижения уровня становится существенно зависимой от направления и уклона грунтового потока. Расчеты водозаборных скважин в грунтовых водах без учета потока подземных вод приводят к завышению расчетных понижений. Особенно существенные различия возникают, например, при расчете водозаборов в безнапорных потоках в полосообразных долинах горных рек, выполненных аллювиальными отложениями, вложенными в практически непроницаемые вмещающие породы.

В простейшем случае безнапорный поток подземных вод может быть представлен в виде равномерного потока на наклонном водоупоре, так как при отсутствии инфильтрации и удаленности контуров питания и разгрузки в однородном пласте уровенная поверхность будет параллельной водоупорному основанию. При этом вместо уклона потока в расчетах можно рассматривать уклон водоупора при условии постоянной начальной мощности пласта (рис. 15.2).

В таком потоке уравнение фильтрации имеет вид

$$\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{2}{\beta} \cdot \frac{\partial h^2}{\partial x} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial h^2}{\partial t}, \quad (15.14)$$

$$\text{где } \beta = \frac{2h_e}{i}, \quad (15.15)$$

$h_e$  и  $h$  мощности грунтового потока начальная и под влиянием откачки в произвольной точке пласта,

$i$  – уклон водоупора.

Это уравнение справедливо при  $i \leq 0,2$  и  $S \leq 0,5h_e$ .

Для скважины, работающей с постоянным расходом в неограниченном в плане пласте на наклонном водоупоре, уравнение (15.14) имеет следующее решение

$$S = h_e - \sqrt{h_e^2 - \frac{Q_0}{2\pi k} \exp\left(-\frac{r}{\beta} \cos \Theta\right) \cdot W\left(\frac{r^2}{4at}; \frac{r}{\beta}\right)}, \quad (15.16)$$

где  $\Theta$  - угол между расчетным направлением и осью потока (рис. 15.2),  
 $W\left(\frac{r^2}{4at}, \frac{r}{\beta}\right)$  - функция перетекания (рис. 11.3), значения которой табулированы.

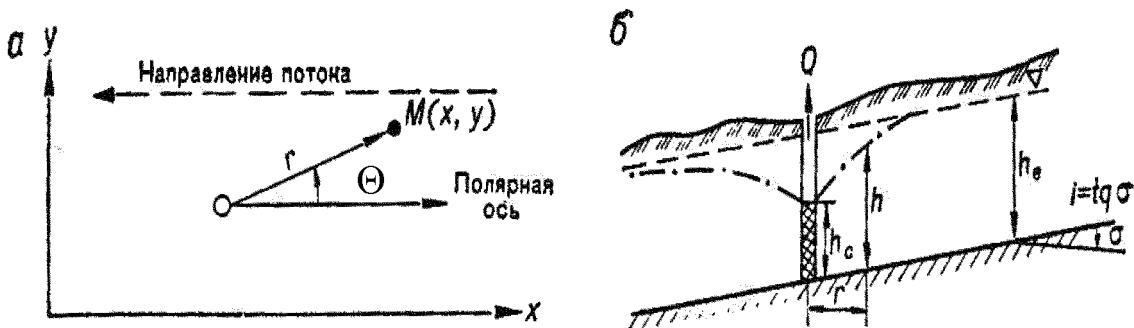


Рис. 15.2. Схема к расчету скважины в грунтовом потоке при наклонном водоупоре (а – план, б – разрез)

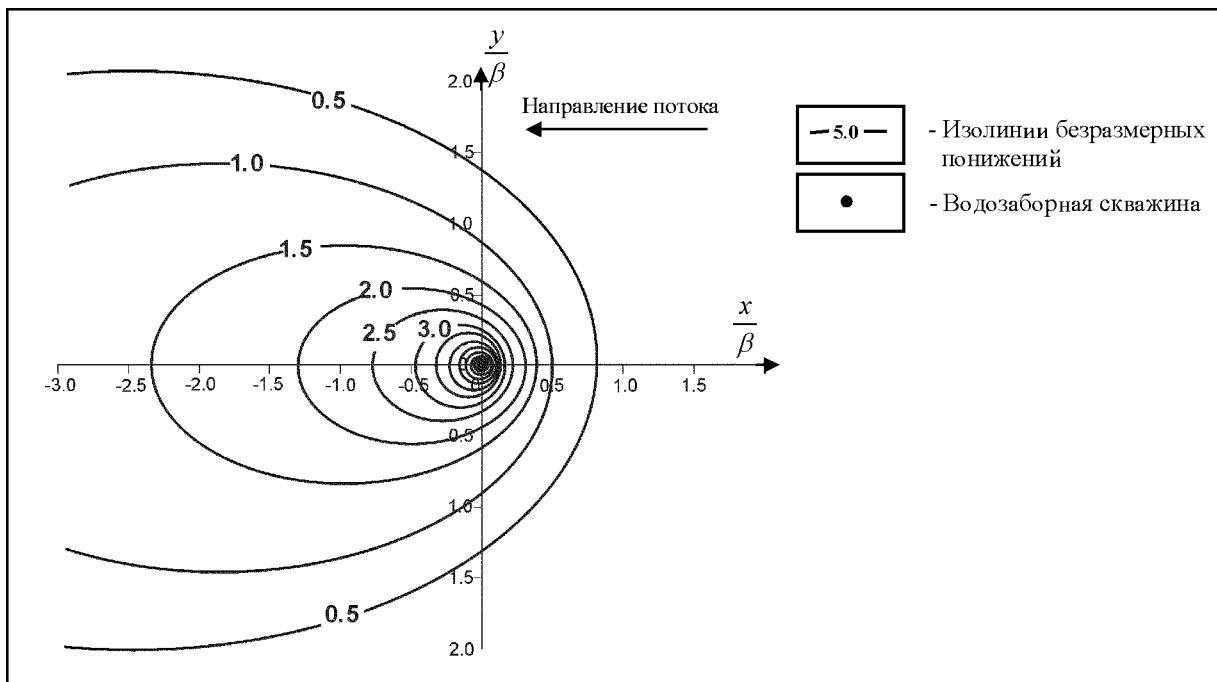


Рис.15.3. Схема воронки депрессии в грунтовом потоке на наклонном водоупоре в безразмерных координатах

Со временем понижение в безнапорном потоке на наклонном водоупоре становится в значительной степени отличающимся от понижения в условиях бассейна подземных вод и постепенно в районе центральной скважины движение практически стабилизируется. С точностью до 10% можно принять, что стационарный режим фильтрации наступает в окрестностях водозаборной скважины после достижения времени  $t_c$  при условии  $\frac{r}{\beta} \leq 0,3$ :

$$t_c \geq 2,5 \frac{\beta^2}{a} \quad (15.17)$$

При этих ограничениях уравнение притока к скважине в грунтовом потоке имеет вид

$$S = h_e - \sqrt{h_e^2 - \frac{Q_0}{\pi k} \exp(-\frac{r}{\beta} \cos \Theta) \cdot K_0(\frac{r}{\beta})}, \quad (15.18)$$

для центральной скважины

$$S_0 = h_e - \sqrt{h_e^2 - \frac{Q_0}{\pi k} \ln \frac{1.12\beta}{r_0}} \quad (15.19)$$

Воронка депрессии в потоке грунтовых вод имеет асимметричную форму и вытянута в направлении вниз по потоку (рис.15.3). На одних и тех же расстояниях от центральной скважины минимальные понижения отмечаются вверх

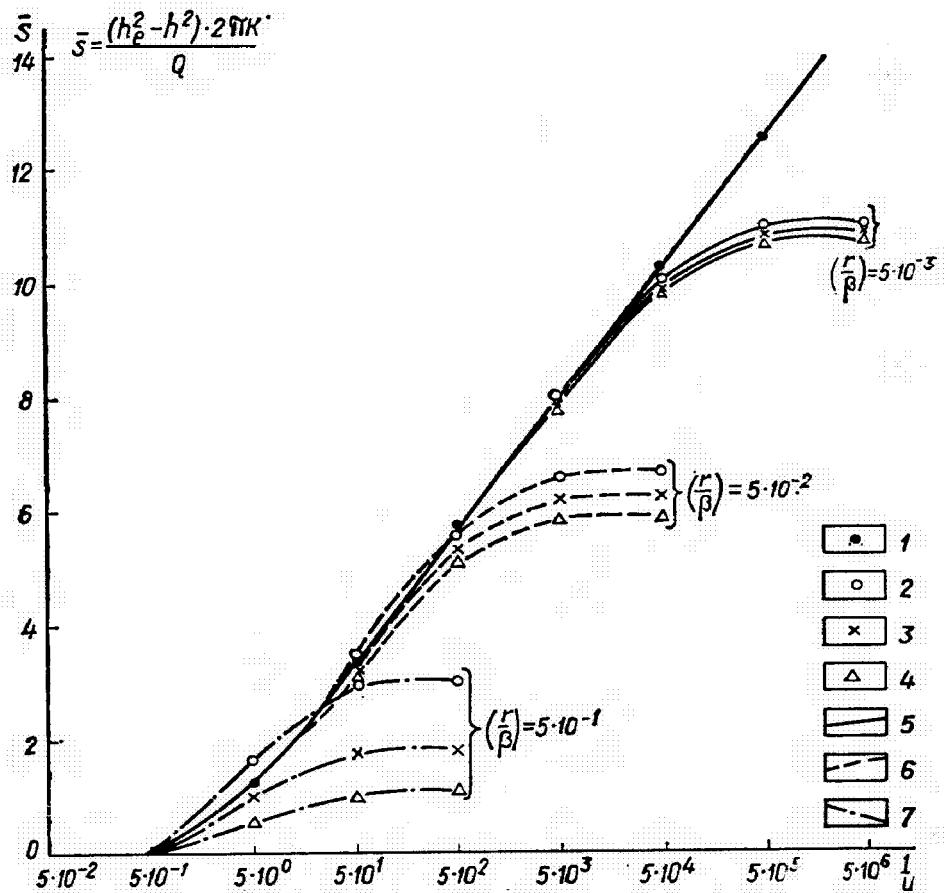


Рис. 15.4. Графики безразмерного понижения уровня в безнапорном потоке на наклонном водоупоре

1 – на горизонтальном водоупоре; 2 – вниз по потоку; 3 – вкрест потока; 4 – вверх по потоку; 5 –  $r = 10$  м; 6 –  $r = 100$  м; 7 –  $r = 1000$  м

по потоку, максимальные – вниз. В направлении нормальном потоку понижения уровня соответствуют понижениям в бассейне подземных вод в условиях перетекания.

Безразмерные понижения уровня во времени для разных значений  $\frac{r}{\beta}$  со-

поставлены с решением Тейса для условий бассейна подземных вод на рис. 15.4.

С увеличением уклона водоупора (потока) и уменьшением мощности пласта отклонения от решения Тейса возрастают в сторону уменьшения понижения.

Максимальные отклонения отмечаются вверх по потоку, минимальные – вниз. Вниз по потоку радиус депрессии максимальный.

### Вопросы к лекции №15

1. Какой гидродинамической структуре отвечает естественный поток подземных вод на рис. 15.1?
2. Какой гидродинамической структуре потока отвечает функция  $S(r, t)$ ?
3. Каким формально математическим методом получена гидродинамическая структура нарушенного откачкой потока подземных вод на рис. 15.1?
4. Какую гидродинамическую роль играет НЛТ в потоке подземных вод, нарушенном откачкой из скважины?
5. Как изменится ширина области захвата  $B$  при а) увеличение водоотбора из скважины в 2 раза, б) увеличение уклона естественного потока в 2 раза?
6. За счет какого фактора в безнапорных потоках наступает стационарный режим при откачке из скважины? Почему стационарный режим не наступает в напорном потоке?
7. Какой вид имеет депрессионная воронка в потоке грунтовых вод?
8. Какой математической модели формально аналогично решение для центральной скважины в безнапорном потоке?
9. Какие ограничения следует соблюдать при использовании формулы (15.18)?

### ЧАСТЬ 3

#### Плоскопараллельная геофильтрация

##### Лекция № 16. Одномерная плоскопараллельная стационарная фильтрация

###### 16.1. Типы расчетных схем

Плоскопараллельная фильтрация - основной тип потока в междуречном массиве. Так как ЛТ параллельны, такую фильтрацию называют линейной. Различают фильтрацию в напорных и грунтовых (безнапорных) потоках, в однородных и неоднородных по строению пластах, с горизонтальным и наклонным положением водоупора (безнапорные), постоянной или переменной мощностью и шириной потока в плане, наличием или отсутствием инфильтрационного питания. Начало координат принимается на урезе левой или правой реки. Если направление потока совпадает с осью  $x$ , то расход считаем положительным ( $q_x > 0$ ), в противном случае – отрицательным ( $q_x < 0$ ).

###### 16.2. Потоки в однородных пластах

Для потока в однородном напорном пласте с постоянной водопроводимостью ( $T=const$ ) (рис. 16.1) имеем

$$q_x = -T \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (16.1)$$

Интегрирование в пределах  $x=0, H=H_0$ ,  $x=L, H=H_L$  дает

$$q = T \frac{H_0 - H_L}{L} \quad (16.2)$$

а в пределах  $x=0, H=H_0$ ,  $x=x$ ,  $H=H_x$ :

$$q = T \frac{H_0 - H_x}{x}, \quad (16.3)$$

то есть уравнение Дарси.

Приравнивая (16.2) и (16.3) получим

$$H_x = H_0 - \frac{H_0 - H_L}{L} x \quad (16.4)$$

Уровень подземных вод имеет вид плоскости, а в разрезе – это прямая линия. Аналогичные уравнения могут быть получены путем интегрирования уравнения Лапласа

$$\frac{d^2 H}{dx^2} = 0 \quad (16.5)$$

в виде  $H = Ax + B$ .  $A$  и  $B$  определяем из граничных условий  $x=0, B=H_0$ ,  $x=L, A = \frac{H_L - H_0}{L}$ . Окончательно имеем уравнение (16.4). Подставляя (16.4) в (16.1) и дифференцируя по  $x$  получим (16.2).

Для горизонтального потока грунтовых (безнапорных) вод в однородном пласте (рис. 16.2) имеем

$$q_x = -Kh \frac{dh}{dx} \quad (16.6)$$

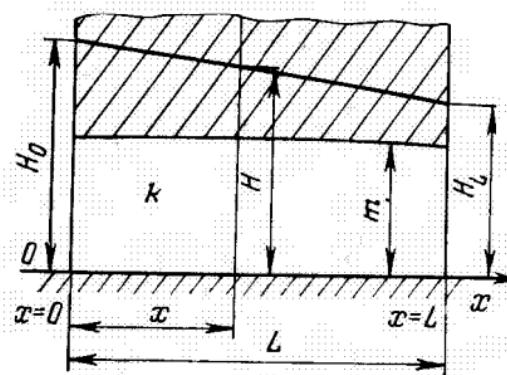


Рис. 16.1. Расчетная схема линейного потока в однородном напорном пласте

Вводя  $h$  под знак производной и используя подстановку  $\frac{h^2}{2} = u$  (Лекция № 7), получим

$$q = K \frac{h_0^2 - h_L^2}{2L} \quad (16.7)$$

$$\text{и } h_x^2 = h_0^2 - \frac{h_0^2 - h_L^2}{L} x \quad (16.8)$$

Кривая уровня подземных вод имеет вид параболы.

$$\text{Очевидно, что и здесь при } (h_0 - h_L) \leq 0,25 \frac{h_0 + h_L}{2} \quad (16.9)$$

можно полагать  $h_x = \frac{h_0 + h_L}{2}$  и использовать уравнения вида (16.2) и (16.4) для напорных вод.

### 16.3. Потоки в неоднородных пластиах

Для потока с кусочно-однородным строением используется метод фрагментов (рис. 16.3) и значение средневзвешенного коэффициента фильтрации определяется по формуле

$$K_{0-L} = \frac{I_1 + I_2 + I_3}{\frac{I_1}{K_1} + \frac{I_2}{K_2} + \frac{I_3}{K_3}} \quad (16.10)$$

Для потока с линейным изменением коэффициента фильтрации по зависимости

$$K_x = K_0 - \frac{K_0 - K_L}{L} x \quad (16.11)$$

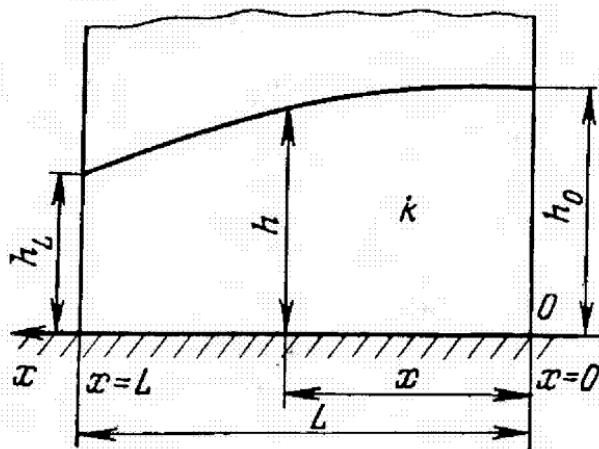


Рис. 16.2. Расчетная схема линейного потока грунтовых вод

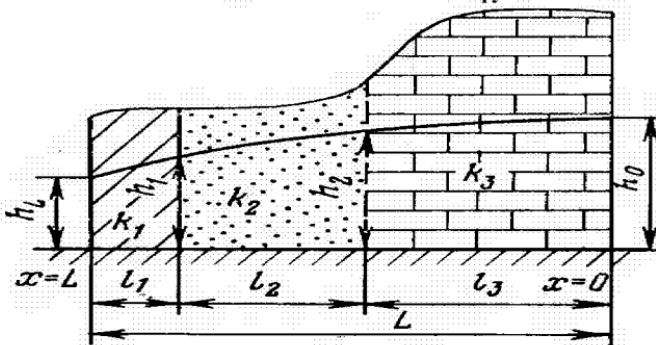


Рис. 16.3. Расчетная схема кусочно-однородного пласта

его средневзвешенное значение определяется по формуле

$$K_{0-L} = \frac{K_0 - K_L}{\ln K_0 - \ln K_L} \quad (16.12)$$

Для слоистой толщи (рис. 16.4) среднее значение коэффициента фильтрации определяется по зависимости

$$K_{0L} = \frac{\Sigma K_i h_i}{\Sigma h_i} \quad (16.13)$$

Для определения величины расхода при этом используются формулы

(16.2) и (16.7) в зависимости от выполнения условия (16.9).

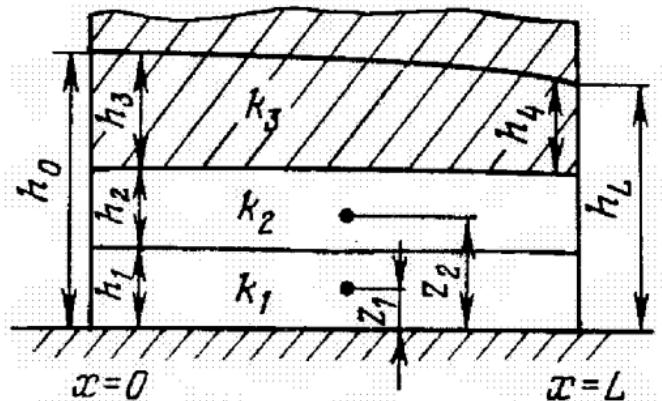


Рис. 16.4. Расчетная схема слоистой толщи

Для потоков с линейным изменением мощности  $m$  или ширины в плане  $B$  используется зависимость (16.12), где вместо  $K$  подставляется  $m$  или  $B$ .

Для определения положения уровня  $H_x$  или мощности потока  $h_x$  используется прием, основанный на приравнивании уравнений для расходов (16.2) или (16.7) записанных для двух пар сечений  $(0-L)$  и  $(0-x)$ , аналогично выводу формулы (16.4). При этом важно правильно определить средневзвешенное значение коэффициента фильтрации на участке потока  $(0-x)$ . Например, формула (16.12) примет вид

$$\frac{K_0 - K_x}{\ln K_0 - \ln K_x} = \frac{K_0 - K_s}{\ln K_0 - \ln K_s} \quad (16.14)$$

#### 16.4. Потоки с инфильтрационным питанием

Очевидно, что величина латерального расхода  $q_x$  в этом случае будет изменяться от сечения к сечению по следующей зависимости

$$q_x = q_0 + W \cdot x \quad (16.15)$$

где  $q_0$  - расход в сечении  $x=0$  (рис. 16.5).

Подставив (16.15) в (16.6) имеем

$$-Kh \frac{dh}{dx} = q_0 + W \cdot x \quad (16.16)$$

После интегрирования (16.16) в пределах от  $x=0$  до  $x=x$ , получим

$$-K \frac{h^2 - h_0^2}{2} = q_0 \cdot x + \frac{W \cdot x^2}{2}, \quad (16.17)$$

$$\text{откуда } q_0 = K \frac{h_0^2 - h^2}{2x} - \frac{Wx}{2}, \quad (16.18)$$

а полагая  $x=L$ , получим

$$q_0 = K \frac{h_0^2 - h_L^2}{2L} - \frac{WL}{2} \quad (16.19)$$

Подставляя (16.19) в (16.15) окончательно имеем

$$q_x = K \frac{h_0^2 - h_L^2}{2L} - \frac{WL}{2} + Wx \quad (16.20)$$

уравнение Г.Н. Каменского (1935).

В граничном сечении  $x=L$  расход будет равен

$$q_L = K \frac{h_0^2 - h_L^2}{2L} + \frac{WL}{2}, \quad (16.21)$$

то есть расходы  $q_0$  и  $q_L$  отличаются на величину  $WL$ .

Приравнивая формулы (16.18) и (16.19) можем определить величину  $h_x$  в любом сечении:

$$h_x = h_0^2 - \frac{h_0^2 - h_L^2}{L} \cdot x + \frac{WL}{K} (L-x) \quad (16.22)$$

Кривая уровня имеет вид эллипса.

Зная величину  $h_x$  можно определить неизвестное  $W$  по зависимости

$$W = K \left( \frac{h_0^2 - h_L^2}{L(L-x)} - \frac{h_0^2 - h_x^2}{(L-x)x} \right). \quad (16.23)$$

При наличии инфильтрационного питания на междуречье возможно возникновение водораздела подземных вод. Здесь  $q_x=0$ . Непременным условием наличия водораздела являются противоположные знаки у расходов на урезах рек  $q_0$  (16.19) и  $q_L$  (16.21).

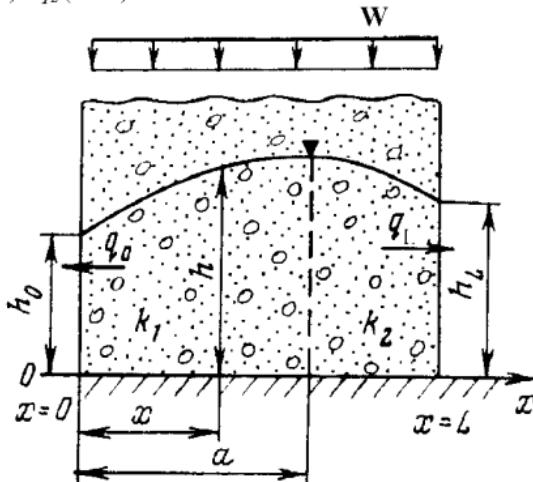


Рис. 16.5. Расчетная схема линейного потока с инфильтрацией  
Такое возможно, если

$$\frac{WL}{2} \geq \left| K \frac{h_0^2 - h_L^2}{2L} \right|, \quad (16.24)$$

т.е. вертикальная составляющая расхода больше или равна горизонтальной составляющей. В этом случае положение водораздела  $a$  определяется из зависимости (16.20), полагая  $q_x = 0$ , имеем (рис. 16.5):

$$a = \frac{L}{2} - \frac{K}{W} \frac{h_0^2 - h_L^2}{2L}. \quad (16.25)$$

Если  $a < 0$  или  $a > L$ , то водораздел отсутствует. В этом можно убедиться, проверив условие (16.24). При кусочно-неоднородном строении ( $K \neq \text{const}$ ) междууречья и (или) неравномерном (по  $x$ ) инфильтрационном питании расчетные зависимости могут быть получены методом фрагментов. Все междууречье делится на два (или более) фрагментов, так что в пределах каждого из них  $W = \text{const}$  и  $K = \text{const}$ . Пусть длина каждого фрагмента  $I_1$  и  $I_2$ , а мощность потока на границе фрагментов  $h_s$ . Тогда на границе фрагментов можем записать формулы для расходов:

$$q_1 = K_1 \frac{h_0^2 - h_s^2}{2I_1} + \frac{W_1 I_1}{2} \quad \text{и} \quad q_2 = K_2 \frac{h_s^2 - h_L^2}{2I_2} - \frac{W_2 I_2}{2} \quad (16.26)$$

Учитывая, что на границе фрагментов  $q_1 = q_2$ , приравнивая правые части этих формул, находим  $h_s$ . Затем в каждом фрагменте может определить  $h_x$  и  $q_x$  по формулам (16.22) и (16.20), используя в качестве граничных условий: для первого фрагмента  $x=0$   $h=h_0$ ,  $x=I_1$   $h=h_s$ , для второго –  $x=0$   $h=h_s$ ,  $x=I_2$   $h=h_L$ .

### Вопросы к лекции №16

1. В чем заключается различие в формулах для единичных расходов стационарной плоскопараллельной и радиальной фильтрации?
2. В каких расчетных схемах положение кривой уровня не зависит от фильтрационных свойств пласта?
3. Какие погрешности возникают, если пользоваться уравнением (16.4) вместо (16.8)?
4. Как получить уравнение для построения пьезометрической кривой, если известна формула (16.20)?
5. Как доказать, что мощность грунтового потока с инфильтрационным питанием больше, чем при его отсутствии?
6. Как, зная уравнение (16.20), получить формулу для определения положения подземного водораздела?
7. Если по зависимостям (16.19) и (16.21)  $q_0 > 0$  и  $q_L > 0$  существует или нет подземный водораздел?
8. Какие условия должны быть выполнены при оценке  $W$  по формуле (16.23)?
9. Получите уравнения для определения расхода напорного потока, если установлено, что мощность в нем изменяется по закону (16.11).

10. Существует ли водораздел и где он находится, если вертикальный водообмен равен горизонтальному (формула 16.24)?
11. Если коэффициент фильтрации песков существенно возрастает по пути движения напорных вод, какой вид имеет кривая уровня и почему?
12. Как влияет на форму кривой уровня грунтовых вод наличие испарения и почему?
13. Какой вид имеет поверхность уровня безнапорного плоскопараллельного потока подземных вод? Меняется ли градиент вдоль потока? Почему? Как качественно изменяется вид поверхности уровня при наличии инфильтрации? Меняется ли расход от сечения к сечению в каждом из этих случаев?

### Лекция № 17. Плоскопараллельная нестационарная фильтрация

#### 17.1. Математическая постановка задачи и типы расчетных схем

Задача описывается основным дифференциальным уравнением одномерной фильтрации

$$a \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{W}{\mu} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (17.1)$$

Математически задача рассматривается в приращениях уровня за счет изменения уровня на границах потока  $\Delta H^0$ , так что  $H(x,t) = H_e(x,0) + \Delta H(x,t)$ , либо за счет дополнительного инфильтрационного питания  $\Delta W^0$ , характерного только для прогнозного периода, так что  $W = W_e + \Delta W^0$ . В этом случае согласно метода суперпозиции вместо (17.1) имеем два уравнения

$$\frac{\partial^2 H_e}{\partial x^2} + \frac{W_e}{T} = 0, \quad (17.2)$$

с граничными условиями  $x=0 H_e=H_0$  и  $x=L H_e=H_L$ ,  $W=W_e$ , характеризующее начальное распределение уровней в условиях стационарной фильтрации, и

$$a \frac{\partial^2 (\Delta H)}{\partial x^2} + \frac{\Delta W^0}{\mu} = \frac{\partial (\Delta H)}{\partial t}, \quad (17.4)$$

характеризующее только приращение уровня за счет изменившихся на прогноз граничных условий  $\Delta H^0(0,t)$  или  $\Delta W^0$ . При этом рассматриваются только линейные уравнения фильтрации, то есть такие уравнения, в которых параметры пласта не зависят от изменения уровня ( $k, \mu, m = const$ ) и нет ГУ III рода, типа  $Q, W=f(H)$ .

В качестве типовых расчетных схем рассматриваются схемы полуограниченного и ограниченного пластов с ГУ I и II рода, без учета (рис. 17.1) и с учетом инфильтрационного питания, заданного на всей площади распространения потока или на полосе шириной  $B$ . На границах потока  $x=0$  и  $x=L$  задаются следующие законы изменения уровня (рис. 17.2): а) мгновенное приращение  $\Delta H^0(0,t)=const$ , б) постепенное изменение  $\Delta H^0(0,t)=v \cdot t = \Delta H^0 \cdot \frac{t}{t_f}$ , в) одна

из границ непроницаема. Во всех схемах пласт однородный по строению  $k, \mu = const$ .

17.2. Одномерный полубесконечный поток без дополнительного инфильтрационного питания ( $\Delta H^0 = 0$ ) при мгновенном подпоре. Краевые условия для случая мгновенного изменения (подпора) уровня на границе имеют вид:  $t=0 \Delta H_{x,0}=0; t>0 x=0 \Delta H^0 = const, x \rightarrow \infty \Delta H = 0$  и  $\frac{\partial(\Delta H)}{\partial x} = 0$ . Последнее условие характерно для водораздела ( $q=0$ ).

Решение имеет вид  $\Delta H(x,t) = \Delta H^0 \cdot erfc(\lambda)$ , (17.5)

а для безнапорных вод  $h^2(x,t) = [h^2(0,t) - h^2(0,0)] \cdot erfc(\lambda) + h^2(x,0)$ ,

$$\text{где } \lambda = \frac{x}{2\sqrt{at}}. \quad (17.5a)$$

Функция  $erfc(\lambda) = 1 - \Phi(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\lambda e^{-\lambda^2} d\lambda$  - табулированный интеграл вероятности.

При  $t=0 \lambda \rightarrow \infty \Phi(\infty)=1$ , а  $erfc(\infty)=0$  и  $\Delta H(x,t)=0$ , что отвечает заданным начальным условиям. При стационарном подпоре уровня, когда  $t \rightarrow \infty \lambda = 0$  и  $erfc(0)=1$ ,  $\Delta H(x,\infty)=\Delta H^0$ . (17.6)

то есть вся кривая уровней перемещается параллельно самой себе на величину  $\Delta H^0$  (рис. 17.3б). Для грунтовых вод

$$h^2(x,\infty) = h^2(0,\infty) - h^2(0,0) + h^2(x,0), \quad (17.6a)$$

причем  $h(0,\infty) = h(0,0) + \Delta H^0$ .

Зона влияния нестационарной фильтрации определяется из условия допустимой погрешности  $\varepsilon = \frac{\Delta H(x,t)}{\Delta H^0} = erfc(\lambda)$ . Для  $\varepsilon = 0,01 \lambda = 2$ , тогда из (17.5a) получим

$$R_{erf} = 4\sqrt{at}. \quad (17.7)$$

Эта зависимость используется для оценки: а) сферы влияния инженерного сооружения (ИС), если подпор создается повышением уровня воды в канале или водохранилище; б) степени влияния внешних границ ( $x=L$ ) на формирование подпора вблизи ИС и необходимости их учета в расчетной схеме. Исходя из этого время  $t_p$ , начиная с которого вместо полуограниченного пласта нужно пользоваться схемой ограниченного потока, равно

$$t_p \geq 0,06 \frac{L^2}{a}. \quad (17.8)$$

Для получения уравнения фильтрационного расхода следует в уравнение Дарси (16.1) подставить зависимость (17.5) и продифференцировать по  $x$

$$\Delta q = -kh_q \frac{\partial \Delta H(x,t)}{\partial x} = \frac{kh_q \Delta H^0}{\sqrt{\pi at}} e^{-\frac{x^2}{4at}}. \quad (17.9)$$

$$\text{Для } x=0, \text{ на урезе имеем } \Delta q_0 = \frac{kh_q \Delta H^0}{\sqrt{\pi at}}. \quad (17.10)$$

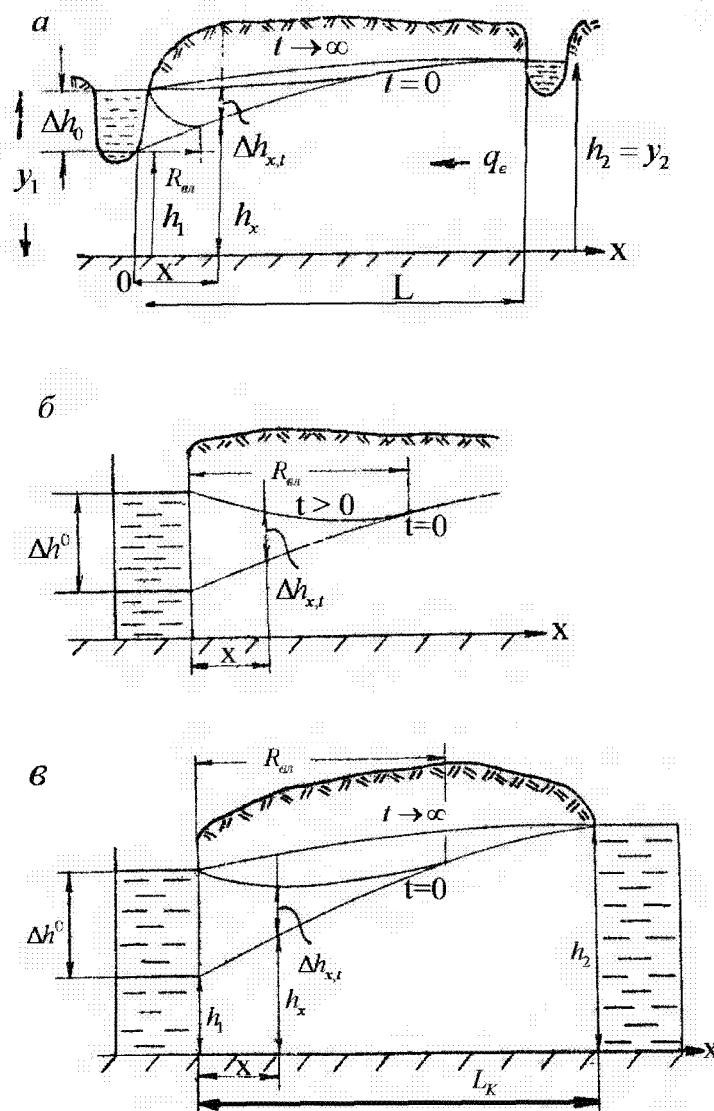


Рис. 17.1. Подпор грунтовых вод и основные расчетные схемы

(а – фильтрационная схема, б – полуограниченный пласт, в – ограниченный пласт)

При наличии естественного расхода потока  $q_e$  согласно методу сложения течений имеем (рис. 17.3):

для уровня  $H(x,t) = H(x,0) + \Delta H(x,t)$ , для расходов  $q_{\text{об}} = q_e + \Delta q$ , (17.11)

$$\text{причем } q_e = \frac{k h_{\varphi} \Delta H_{0-t}}{L}, \quad (17.12)$$

где  $\Delta H_{0-t} = H_0 - H_t$ , как это следует из (17.3).

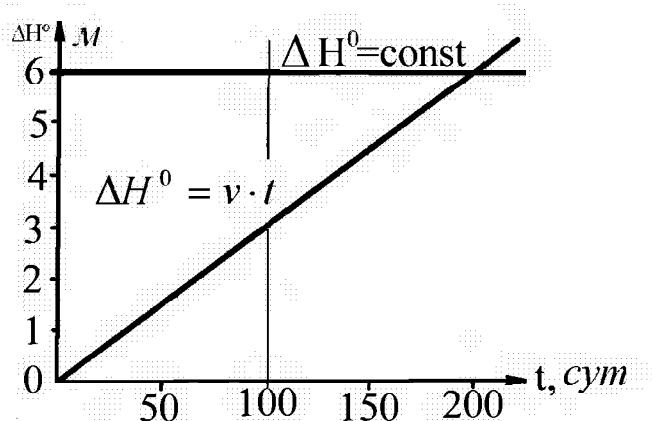


Рис. 17.2. Изменение граничных условий на урезе водохранилища

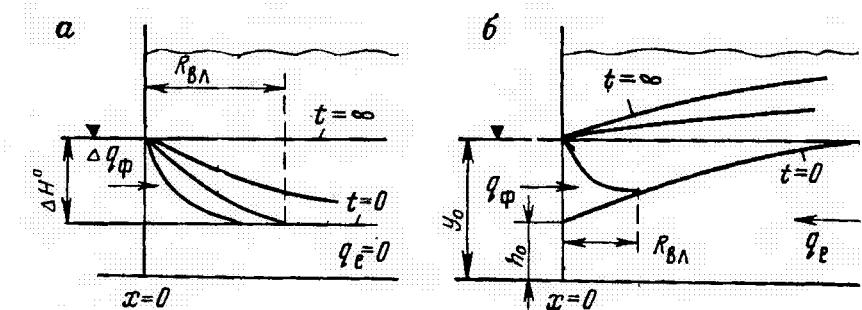


Рис. 17.3. Схема формирования кривых подпора

Если направление потоков  $q_e$  и  $\Delta q$  не совпадают (рис. 17.3б), то в процессе формирования подпора грунтовых вод наступает момент, когда фильтрация воды через сечение  $x=0$  поменяет знак при  $|q_e| = |\Delta q|$ .

Этот момент  $t_0$  определится из равенства (17.10) и (17.12):

$$t_0 = \frac{L^2 (\Delta H^0)^2}{\pi a \Delta H_{0-L}^2} \quad (17.13)$$

При  $t \rightarrow \infty$  наступают условия стационарного подпора в полубесконечном потоке. При этом, как было указано ранее

$$\Delta H(x, t) = \Delta H^0 \quad (17.14)$$

на всем междуречном массиве и

$$q_{ob} = q_e, \quad (17.15)$$

так как при  $t \rightarrow \infty$   $\Delta q_0 \rightarrow 0$ .

Почти 95%  $\Delta H^0(x, t)$  реализуются при  $\lambda = 0,05$ , то есть с ошибкой  $\varepsilon_H = 5\%$  можно считать подпор установившимся при

$$t_{ch} \geq \frac{100x^2}{a} \quad (17.16)$$

$$\text{или } f_0 \geq 100, \quad (17.17)$$

где  $f = \frac{at}{x^2}$  - малый параметр Фурье.

Аналогичные оценки времени наступления стационарного подпора по величине расхода могут быть сделаны из соотношения  $\varepsilon_q = \frac{|\Delta q|}{|q_e|}$ . Из (17.10) и (17.12) с учетом (17.13) получим соотношение

$$t_{eq} = \frac{t_0}{\varepsilon_q^2}, \quad (17.18)$$

то есть с ошибкой  $\varepsilon \leq 0,1$  имеем

$$t_{eq} \geq 100t_0 \quad (17.19)$$

Для достаточно типичных условий  $x=500$  м,  $\Delta H^0=10$  м,  $\Delta H_{0-L}=25$  м,  $a=2 \times 10^3$  м<sup>2</sup>/сут стабилизация подпора наступит через

$$t_{ch} = 12500 \text{ сут или более 30 лет.}$$

$$t_{eq} = 6 \times 10^4 \text{ сут или более 150 лет.}$$

В действительности стабилизация наступает значительно раньше, вследствие воздействия разнообразных природных факторов, обуславливающих нарушение линейности исходных уравнений (неоднородность емкостных свойств пласта, изменение условий питания и разгрузки на междуречье при подъеме уровня воды, влияние внешних границ), которые часто не учитываются в расчетных схемах решаемых задач.

17.3. Одномерный полубесконечный поток без дополнительного инфильтрационного питания ( $\Delta H^0 = 0$ ) при линейном во времени изменении уровня на границе.

$$\text{Границочное условие при } x = 0 \text{ имеет вид } \Delta H^0 = v \cdot t = \frac{\Delta H^{\max}}{t_p} t, \quad (17.20)$$

где  $t_p$  - расчетный период времени, в течение которого уровень поднимается на величину  $\Delta H^{\max}$ , причем всегда  $t \leq t_p$ .

Решение для этого случая записывается в виде

$$\Delta H(x, t) = v \cdot t \cdot R^*(\lambda), \quad (17.21)$$

причем функция  $R^*(\lambda)$  табулирована,  $\lambda$  определяется по формуле (17.5а).

Дополнительный расход потока в сечении  $x = 0$  за счет подпора определяется формулой

$$\Delta q^* = \frac{2kh_\varphi vt}{\sqrt{\pi a t}} \quad (17.22)$$

Наличие естественных положения уровня  $H(x, 0)$ , расхода воды до подпора  $q_e$  учитывается методом сложения течений по уравнениям (17.11).

### 17.4. Ограничные потоки без дополнительного инфильтрационного питания.

Для ограниченного потока длиной  $L$  (рис. 17.1) с условием на левой границе мгновенного изменения уровня  $x=0$ ,  $\Delta H^0(0,t)=const$ , при неизменном уровне на правой границе  $x=L$ ,  $\Delta H_L^0=0$  и начальном условии  $t=0$ ,  $\Delta H(x,0)=0$  решение имеет вид

$$\Delta H(x,t) = \Delta H^0 R(\bar{x}, F_0), \quad (17.23)$$

где  $R(\bar{x}, F_0) = |1 - \bar{x} - S(\bar{x}, F_0)|$  - табулированная функция,  $\bar{x} = \frac{x}{L}$  и  $F_0 = \frac{at}{L^2}$  -

большой параметр Фурье,  $\tau = \frac{L^2}{a}$  - время стабилизации потока,  $F_0 = \frac{t}{\tau}$ .

Анализ графика  $R(\bar{x}, F_0)$  свидетельствует о наступлении стационарной фильтрации с точностью 3-4% при значениях  $F_0 \geq 0,5$ , или

$$t \geq \frac{0,5L^2}{a} \quad (17.24)$$

Изменение расхода потока на урезе определяется формулой

$$\Delta q_0 = \frac{k h_{sp} \Delta H^0}{L} [1 + S_q(F_0)], \quad (17.25)$$

где  $S_q(F_0)$  - табулированная функция. При  $F_0 \geq 0,5$  с точностью 3-4% значение  $S_q(F_0)$  равно 0, нестационарный подпор переходит в стационарный.

Для стационарного подпора положение уровня в любом сечении определяется уравнением Г.Н. Каменского для напорных вод

$$H(x, \infty) = H(x, 0) + \frac{\Delta H^0(L-x)}{L}, \quad (17.26)$$

для грунтовых вод

$$h^2(x, \infty) = h^2(x, 0) + [h^2(0, \infty) - h^2(0, 0)] \frac{L-x}{L}, \quad (17.26a)$$

а расход потока

$$q = K h_{sp} \frac{\Delta H_{0-L} + \Delta H^0}{L}, \quad (17.27)$$

причем  $h(0, \infty) = h(0, 0) + \Delta H^0$

### 17.5. Учет сложных граничных условий

Для открытого потока при изменении уровня воды на обеих границах величина  $\Delta H(x, t)$  определяется как сумма изменений уровня, подсчитанных от действия изменения на каждой границе в отдельности. Например, если на границах  $x=0$  и  $x=L$  происходят мгновенные изменения уровней на величину  $\Delta H_0^0$  и  $\Delta H_L^0$  в моменты  $t=0$  и  $t=t'$  соответственно (рис. 17.4-а), то взяв за основу решение (17.23), получим уравнение для суммарного изменения уровня  $\Delta H(x, t)$ :

$$\Delta H(x, t) = \Delta H_0^0 R_1(\bar{x}, \tau) + \Delta H_L^0 R_2(1 - \bar{x}, \tau - \tau'), \quad (17.28)$$

$$\text{где } \tau' = \frac{at'}{L^2} \quad (17.29)$$

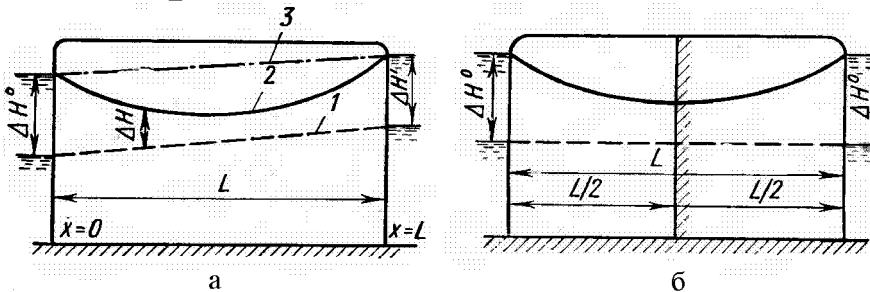


Рис. 17.4. Схема учета сложных граничных условий

Если в этой схеме положить  $\Delta H_0^0 = \Delta H_L^0$  и  $t' = 0$  (рис. 17.4-б), то в силу симметрии  $\frac{\partial \Delta H(x)}{\partial x} = 0$  при  $x = 0,5L$ . Полученное при этих условиях решение соответствует схеме ограниченного пласта длиной  $0,5L$  с разнородными границами, на одной задано  $\Delta H(0, t) = \Delta H^0 = \text{const}$ , а на второй  $Q = 0 \left( \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \right)$ .

Решение для такой схемы в пласте длиной  $L$  имеет вид [7]:

$$\Delta H(x, t) = \Delta H^0 \left[ R_1 \left( \frac{x}{2}, \frac{\tau}{4} \right) + R_2 \left( 1 - \frac{x}{2}, \frac{\tau}{4} \right) \right]. \quad (17.30)$$

Решение при ступенчатом или ломаном изменении уровня на одной из границ (рис. 17.5) может быть получено аналогично схеме работы скважины с изменяющимся водоотбором (лекция № 10).

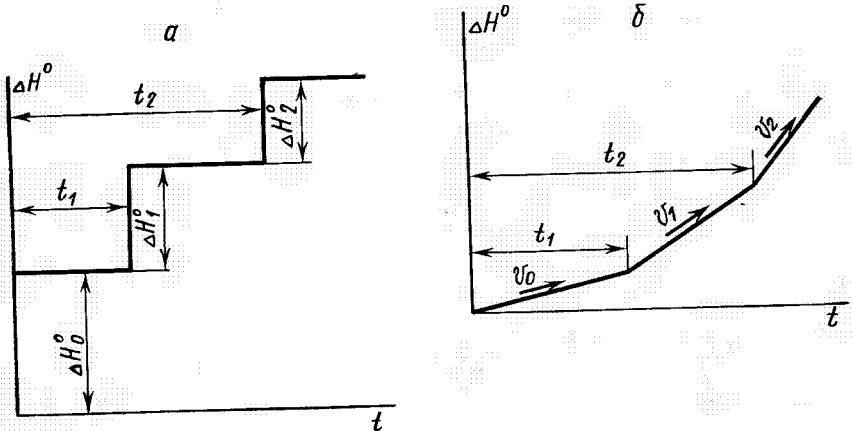


Рис. 17.5. Ступенчатый (а) и ломаный (б) графики изменения граничных условий

17.6. Неограниченный пласт с дополнительным инфильтрационным питанием  $\Delta W^0$  на всей площади пласта.

Для этой схемы, характерной для водораздельных пространств, приращения уровня  $\Delta H(x,t)$  на всей площади потока будут одинаковыми. Поэтому  $\frac{\partial^2(\Delta H)}{\partial x^2} = 0$  и уравнение (17.4) примет вид

$$\frac{\partial(\Delta H)}{\partial t} = \frac{\Delta W^0}{\mu} t \quad (17.31)$$

После интегрирования получим

$$\Delta H(x,t) = \frac{\Delta W^0 t}{\mu}, \quad (17.32)$$

что характеризует непрерывный равномерный подъем уровня на всей площади водоносного пласта.

17.7. Полуоткрытый пласт с дополнительным инфильтрационным питанием  $\Delta W^0$  (рис. 17.6а).

На границе пласта  $x=0$   $\Delta H^0(0,t)=0$ . Начальные условия  $t=0$   $\Delta H(x,0)=0$ , фильтрация описывается уравнением (17.4). Введем новую переменную

$$u(x,t) = \Delta H(x,t) - \frac{\Delta W^0 t}{\mu}. \quad (17.33)$$

Продифференцируем (17.33) последовательно по  $t$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(\Delta H)}{\partial t} - \frac{\Delta W^0}{\mu}, \quad (17.34)$$

и дважды по  $x$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(\Delta H)}{\partial x^2} \quad (17.35)$$

Подставим (17.34) и (17.35) в (17.4) и получим

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (17.36)$$

При этом преобразуются начальные и граничные условия

$$t=0 \quad u(x,0)=0, \quad t>0 \quad x=0 \quad u(0,t) = -\frac{\Delta W^0 t}{\mu} = v^r t. \quad (17.37)$$

Полученные уравнения (17.36) и (17.37) тождественны рассмотренной ранее задаче подпора уровня в полубесконечном пласте при  $\Delta W^0=0$  под влиянием равномерного изменения уровня  $\Delta H(0,t)$  со скоростью

$v^r = \frac{-\Delta W^0}{\mu}$  на границе  $x=0$ . Следовательно, решение для переменной  $u$

будет согласно уравнению (17.21) иметь вид

$$u(x,t) = v^r t R^r(\lambda) = -\frac{\Delta W^0 t}{\mu} R^r(\lambda). \quad (17.38)$$

Принимая во внимание зависимость (17.33), окончательно получим

$$\Delta H(x, t) = \frac{\Delta W^0 t}{\mu} [1 - R^W(\lambda)], \quad (17.39)$$

где  $R^W(\lambda) = R^v(\lambda)$ .

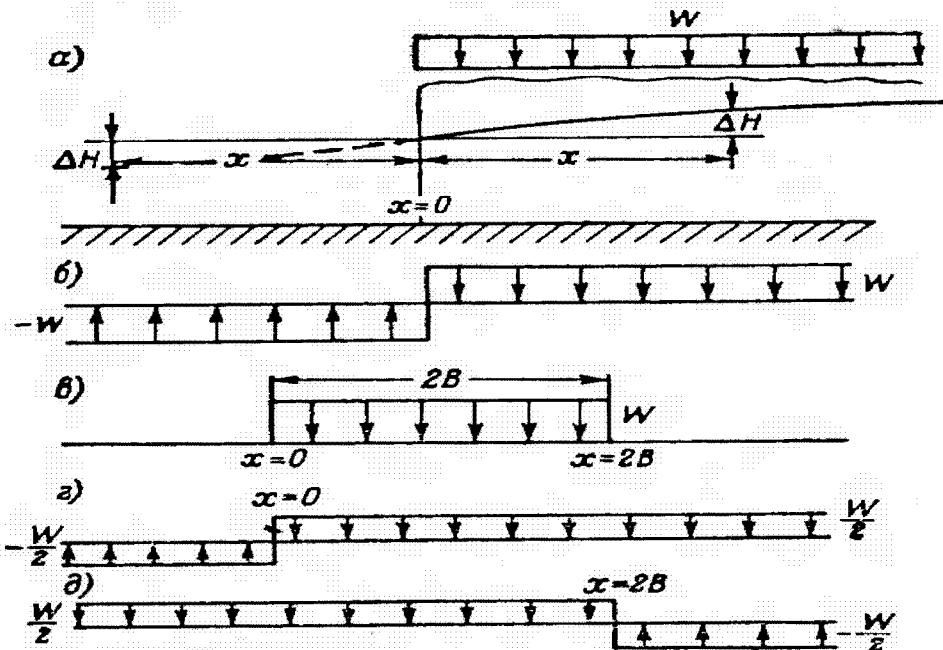


Рис. 17.6. Схемы к выводу зависимостей для полуограниченного и полосового инфильтрационных потоков

Полученная расчетная схема аналогична схеме для неограниченного пласта, в котором имеются две области: реальная и отображеная (рис. 17.6б). В реальной области задана инфильтрация  $+W$ , в отображенной  $-W$ . Из условия зеркальной симметрии на границе областей автоматически соблюдаются  $\Delta H(0, t) = 0$ , что соответствует схеме полуоткрытого пласта (рис. 17.6а).

17.8. Полосовая дополнительная инфильтрация  $\Delta W^0$  в неограниченном пласте (рис. 17.6в)

Решение для этой схемы получается, если сложить две схемы зеркально-симметричной инфильтрации, показанных на рис. 17.6г.д. Для каждой из них можно использовать решение (17.39). Так для схемы (рис. 17.6г) при  $x > 0$  подъем уровня  $\Delta H_1(x, t)$  определяется по формуле

$$\Delta H_1(x, t) = \frac{Wt}{2\mu} [1 - R^W(\lambda)] \quad (17.40)$$

При  $x < 0$  будет иметь такой же спад уровня. Для схемы, представленной на рис. 17.6д подъем уровня  $\Delta H_2(x, t)$  определяется уравнением

$$\Delta H_2(x, t) = \frac{Wt}{2\mu} [1 - R^W(\lambda')] \quad , \quad (17.41)$$

$$\text{где } \lambda' = \frac{2B - x}{2\sqrt{at}} \quad (17.42)$$

Соответственно суммарное решение  $\Delta H(x, t)$  будет равно

$$\Delta H(x,t) = \frac{Wt}{\mu} \left[ 1 - \frac{R^r(\lambda) + R^r(\lambda')}{2} \right] \quad (17.43)$$

При вычислении значений  $R^r(\lambda)$  следует иметь в виду, что функция  $1 - R^r(\lambda)$  является нечетной, т.е.

$$1 - R^r(-\lambda) = -1 + R^r(\lambda) \text{ или } R^r(-\lambda) = 2 - R^r(\lambda) \quad (17.44)$$

Проанализируем полученную зависимость (17.43) для сечений в центре полосы ( $x = B$ ) и на границе полосы ( $x = 0$ ).

В первом случае  $\lambda = \lambda' = \frac{B}{2\sqrt{at}} = \lambda_B$  и получим

$$\Delta H(B,t) = \frac{Wt}{\mu} [1 - R(\lambda_B)] \quad (17.45)$$

Во втором случае  $\lambda = 0, \lambda' = \frac{2B}{2\sqrt{at}} = 2\lambda_B$  и получим

$$\Delta H(0,t) = \frac{Wt}{2\mu} [1 - R(2\lambda_B)] \quad (17.46)$$

Расход воды на границе полосы определяется формулой

$$q(0,t) = WB[1 - erf(2\lambda_B)] \quad (17.47)$$

Полученное решение (17.45) может быть представлено в обобщенном виде с использованием безразмерных параметров. Обозначим

$$\bar{\Delta H}(B,t) = \frac{\Delta H(B,t) \cdot Km}{W \cdot B^2} \quad (17.48)$$

Тогда из (17.45) имеем

$$\bar{\Delta H}(B,t) = F_0 [1 - R(\lambda_B)], \quad (17.49)$$

где  $F_0 = \frac{at}{B^2}$  - параметр Фурье.

$$\lambda_B = \frac{B}{2\sqrt{at}} = \frac{1}{2\sqrt{F_0}} \quad (17.50)$$

Аналогично для (17.46) получим

$$\bar{\Delta H}(0,t) = 0.5F_0 [1 - R(2\lambda_B)] \quad (17.51)$$

Графики для зависимостей (17.49) и (17.51) показаны на рис. 17.7. Такие графики называются диагностическими. Они позволяют выполнять решение не только прямых, но и обратных задач по определению инфильтрационных потерь по данным наблюдений в скважинах за режимом подземных вод.

Можно сформулировать основные принципы получения расчетных зависимостей для разнообразных схем потоков с дополнительным инфильтрационным питанием. Эти схемы различаются по двум основным параметрам: типу граничного условия (ГУ) и положением границ массива орошения относительно границ пласта.

1. Наличие ГУ I рода ( $\Delta H = 0$ ) аппроксимируется зеркально-симметричным заданием инфильтрации с противоположным знаком.

2. Закрытая граница ( $\mathcal{Q} = 0$ ) всегда является линией симметрии. Размеры области фильтрации удваиваются, причем в пределах ее отображенной части задается инфильтрация с тем же знаком, что и в реальной области.
3. Полосовая область дополнительной инфильтрации аппроксимируется двумя типовыми схемами инфильтрации в полуограниченном пласте с ГУ I рода на границах полосы, так что бы внутри полосы в каждой схеме было задано  $+\Delta W/2$ , а вне полосы  $- - \Delta W/2$ .

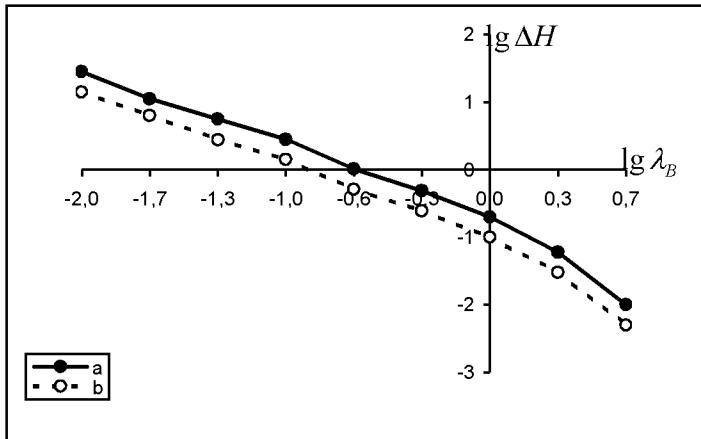


Рис. 17.7. Диагностические графики в безразмерных координатах  $\lg \Delta H(x; t) / \lg \lambda_B$  для полосовой инфильтрации в неограниченном пласте  
(а – центр, б – границы массива орошения)

При переменной во времени инфильтрации можно заменить реальный график инфильтрации ступенчатым и воспользоваться методом сложения течений.

Если подпор происходит за счет наложения инфильтрации и изменения уровня на границе, то для условий линейной задачи следует подсчитать величины подпора от действия каждого из факторов в отдельности, а затем сложить полученные значения со своими знаками.

### Вопросы к лекции №17

- Назовите особенности потока, которые позволяют свести пространственную фильтрацию к плоскапараллельной по координате  $x$ .
- В чем особенность математической постановки задачи подпора для естественного потока с наличием инфильтрационного питания?
- Запишите и объясните математические выражения для краевых условий следующих расчетных схем:
  - мгновенный подпор в полуограниченном пласте,
  - мгновенный подпор в ограниченном пласте.

4. Как определить время, начиная с которого в формировании подпора существенным является влияние удаленной границы?
5. Каким образом можно получить решение для подпора в ограниченном пласте с разнородными граничными условиями ( $H = \text{const}$  и  $Q = 0$ )?
6. К какой величине стремится изменение фильтрационного расхода после мгновенного подпора в полуограниченном пласте при  $t \rightarrow \infty$ ? Как влияет на этот процесс наличие естественного расхода потока, интенсивность инфильтрационного питания?
7. Какие природные условия определяют использование схемы полуограниченного пласта в течение всего периода прогноза? Как определить время стационарной фильтрации в этих условиях?
8. Какими природными факторами ускоряется наступление стационарного режима фильтрации при подпоре?
9. Как доказать теоретически, в каком случае радиус влияния от подпора больше, при мгновенном или постепенном повышении уровня в реке?
10. Какие практические задачи можно решать на основе уравнений плоско-параллельной стационарной и нестационарной одномерной фильтрации?
11. Для каких расчетных схем получены формулы (17.32) и (17.39)? В чем их различие?
12. Что такое диагностические графики и каково их значение в гидродинамических исследованиях фильтрации на массивах орошения?
13. Какими особенностями характеризуется режим грунтовых вод, формирующийся под влиянием полосовой инфильтрации?
14. Можно ли решения, полученные для исследования фильтрации на массивах орошения, применить для изучения условий подтопления городских и промышленных территорий?

### Лекция № 18. Фильтрация воды из водохранилищ и каналов

#### 18.1. Общие положения

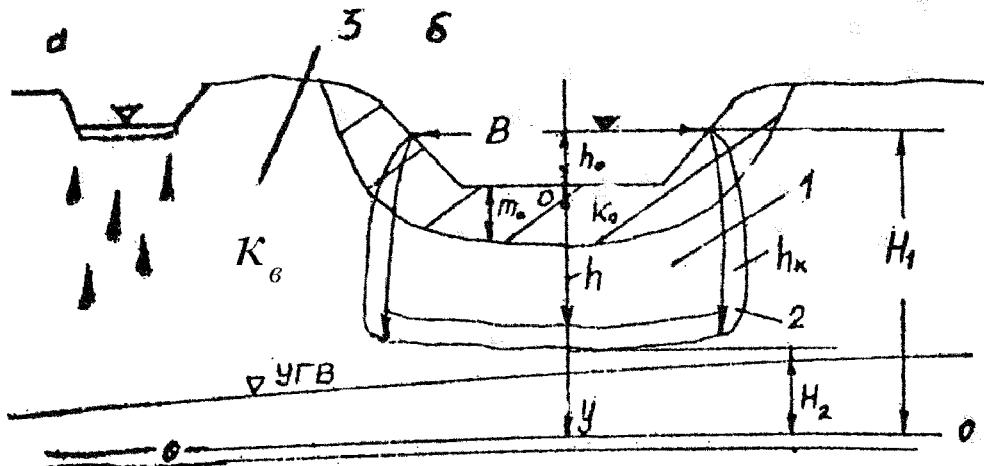
Сходство фильтраций из водохранилища и канала определяется наличием прямолинейных контуров сооружения и значительной их длиной в плане при небольшой ширине по урезу, что обуславливает формирование плоскопараллельной фильтрации. Различия в фильтрации из водохранилищ и каналов определяются следующими факторами. Значительные фильтрационные потери из водохранилища приводят к быстрому прохождению стадии свободной и наступлению стадии подпорной фильтрации.

Изучаются развитие подпора грунтовых вод от инженерного сооружения (ИС) и величина фильтрационных потерь. Граничным условием для водохранилища является постоянный уровень воды, при этом зоной деформации потока в разрезе вблизи уреза крупного водохранилища часто пренебрегают. Для оросительных каналов и мелких водохранилищ характерны периодический режим работы (по сезонам года), глубокое начальное положение уровня грунтовых вод, существование всех стадий фильтрации и необходимость учета двухмерности потока в разрезе вблизи ИС.

Расчетные схемы, рассматриваемые для каналов и водохранилищ, могут быть так же использованы для определения утечек из накопителей промстоков, сбросных каналов. Для этих ИС важной проблемой является гидродинамическая оценка интенсивности проникновения в водоносные горизонты промстоков, проектирование и осуществление противофильтрационных мероприятий.

### 18.2. Особенности фильтрации воды из каналов

В зависимости от строения зоны аэрации (ЗА) и слоя воды  $h_0$  на поверхности земли или канале инфильтрационный поток идет по схеме: свободное просачивание (рис. 18.1а) или нормальная инфильтрация (рис. 18.1б).



**Рис. 18.1. Схема инфильтрационного потока из канала**

(1 – зона полного насыщения; 2 – зона действия капиллярного всасывания  $h_k$ ; 3 – ненасыщенная зона с влажностью  $\Theta < PB$ )

Свободное просачивание наблюдается в подстилающем слое при двухслойном строении ЗА, если соблюдаются условие В.В. Веденникова:

$$\frac{k_e}{k_0} > \frac{h_0 + m_0 + h_k}{m_0}, \quad (18.1)$$

где  $k_0$ ,  $k_e$  - коэффициенты фильтрации покровного слоя (экрана) и влагопереноса подстилающего слоя;

$m_0$  - мощность покровного слоя (экрана канала);

$h_k$  - капиллярное давление, равное при влажности пород подстилающего слоя  $\Theta = MMB$  примерно половине высоты капиллярного поднятия  $H_k$ .

Коэффициент влагопереноса  $k_e$  (м/сут) зависит от начальной влажности породы и количества защемленного в порах воздуха (фазовая проницаемость). Приближенно по С.Ф. Аверьянову [1] определяется как (лекция № 3)

$$k_e = k \left( \frac{\Theta - MMB}{PB - MMB} \right)^n, \quad (3.20)$$

где  $k$  - коэффициент фильтрации, м/сут, при  $\Theta = PB$ ;  $\Theta$  - влажность, при которой начинается процесс инфильтрации воды в "сухую" породу;  $MMB < \Theta \leq PB$  ( $n$  - показатель степени, обычно равен 3-5).

Нормальная инфильтрация возникает, если

$$\frac{k_e}{k_0} \leq \frac{h_0 + m_0 + h_k}{m_0} \quad (18.2)$$

В покровном слое и при однородном строении ЗА под дном канала практически всегда наблюдается нормальная инфильтрация.

В гидравлической постановке скорость и градиент потока при нормальной инфильтрации определяются следующими выражениями:

$$I = \frac{h_0 + h_k + h}{h}, \quad (18.3)$$

$$V' = k_e \cdot I \quad (18.4)$$

где  $h$  - глубина, на которую профилtrировалась вода с поверхности земли или от дна канала, численно равная длине инфильтрационного потока,  $h = l$ .

Со временем процесс инфильтрации становится квазистационарным, т.е. почти установившимся (если не наступает его смыкание с нижележащими грунтовыми водами), а градиент потока стремится к единице. Расход такого потока определяется по формуле С.Ф. Аверьянова [1] и называется расходом "на бесконечность":

$$\bar{Q}_\phi = k_e \left( 1 + 0,5 \frac{H_k}{B} \right) (B + 2h_0) \quad (18.5)$$

При фильтрации воды из каналов последовательно прослеживаются три стадии: свободная фильтрация, капиллярно-грунтовый поток и подпертая фильтрация (рис. 18.2)

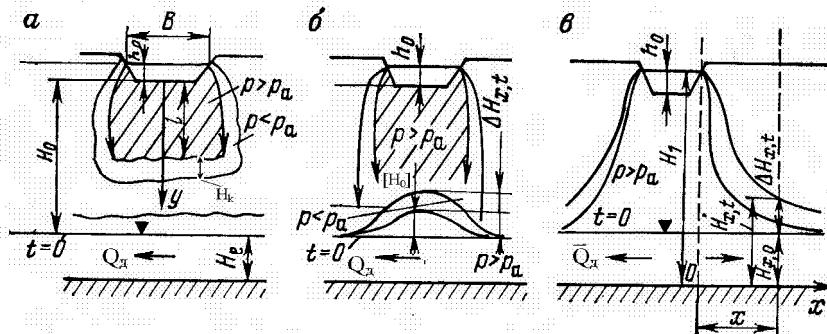


Рис. 18.2. Схема стадий фильтрации из канала при начальном глубоком положении уровня грунтовых вод (по С.Ф. Аверьянову)

(а – свободное впитывание; б – капиллярно-грунтовый поток; в – подпертый поток)

### 18.3. Свободная фильтрация

Стадия свободной фильтрации или впитывания при условии (18.2) характеризует процесс инфильтрации воды в породах зоны аэрации. Единичный (на 1 м длины канала) расход воды, идущий через дно и борта канала, определяется в гидравлической постановке формулой

$$Q_\phi = \bar{Q}_\phi \left( 1 + \frac{b}{\sqrt{t}} \right) \quad (18.6)$$

где  $\bar{Q}_\phi$  - фильтрационный расход на “бесконечность”, определяемый по уравнению (18.5);  $t$  - время от начала работы канала (принимается мгновенное его заполнение и постоянный уровень воды в нем  $h_0$ ).

Параметр впитывания  $b$  ( $\text{сум}^{\psi^2}$ ), определяется как

$$b \approx 0,6 \sqrt{\frac{\Theta \cdot H_k + 1,4 h_0}{k_e}} , \quad (18.7)$$

где  $k_e$  - коэффициент влагопереноса, м/сут, вычисляемый по формуле (3.20).

Средний градиент оценивается по зависимости (18.3), скорость движения исходящего потока по (18.4). Глубина  $h$  от дна канала, на которую опускается поток, определяется из неявного уравнения:

$$t = \frac{\mu}{k_e} \left[ h - (h_0 + H_k) \ln \frac{h_0 + H_k + h}{h} \right] , \quad (18.8)$$

где  $t$  - время, за которое формируется поток, глубиной  $h$ .

Продолжительность стадии впитывания рассчитывается как

$$t_1 \approx \frac{H_0 - H_k}{k_e} \mu \quad (18.9)$$

где  $H_0$  - мощность зоны аэрации под каналом, м;  $\mu$  - недостаток насыщения, определяемый по зависимости

$$\mu = P_B - MMB \quad (18.10)$$

#### 18.4. Капиллярно-грунтовый поток

Стадия капиллярно-грунтового потока протекает практически при отсутствии тесной гидравлической связи между грунтовыми водами и каналом. Величина изменения уровня грунтовых вод под каналом определяется зависимостью:

$$\Delta h = \frac{\bar{Q}_\phi}{\sqrt{\pi \cdot k \cdot h_\varphi \cdot \mu}} \sqrt{t} + [H_0] , \quad (18.11)$$

где  $h_\varphi$  - средняя мощность грунтовых вод под каналом, м;  $t$  - время от начала формирования бугра грунтовых вод (от начала стадии капиллярно-грунтового потока), сут;  $[H_0]$  - высота бугра грунтовых вод, мгновенно формирующегося в начале стадии капиллярно-грунтового потока (по С.Ф. Аверьянову критический подъем грунтовых вод),

$$[H_0] = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{b \cdot \bar{Q}_\phi}{\sqrt{k \cdot h_\varphi \cdot \mu}} \quad (18.12)$$

Расход воды на этой стадии приблизительно оценивается по формуле (18.6). Продолжительность стадии капиллярно-грунтового потока определяется выражением:

$$t_2 = \frac{\pi^2}{4} b^2 \left[ \frac{H_0}{[H_0]} - 1 \right]^2 . \quad (18.13)$$

Суммарные фильтрационные потери (объем воды) из канала в период первой и второй стадии фильтрации

$$V_{I+II} = \bar{Q}_\phi \left( 1 + \frac{2b}{\sqrt{t_1 + t_2}} \right) (t_1 + t_2) \quad (18.14)$$

### 18.5. Подпертая фильтрация

Стадия подпертой фильтрации идет в условиях прямой гидравлической связи вод канала с грунтовыми. Уровень воды в канале является границей 1-го рода, создает максимальное значение напора и формирует подпор грунтовых вод. Положение уровня в любом сечении определяется зависимостями лекции 17, в которых координата  $x$  при необходимости заменяется  $x + \Delta L_{ns}$ , где  $\Delta L_{ns}$  определяется по формуле (6.8). Начало координат принимается на урезе канала и приближенно считается, что здесь уровень мгновенно повышается на величину  $\Delta h^0 = H_0 + h_0$ .

Неустановившийся во времени односторонний поток воды из канала

$$\bar{Q}_\delta = \frac{k \cdot h_\varphi \cdot \Delta h^0}{\sqrt{\pi \cdot a} (t_2 + t_3)} \quad , \quad (18.15)$$

где  $t_3$  - текущее время от начала стадии подпертой фильтрации,  $\Delta h_0$  - напор на урезе канала.

Установившийся односторонний расход воды из канала для ограниченно-го потока длиной  $L$  приближенно вычисляется по уравнению Дюпюи-Дахлера [1].

$$\bar{Q}_\delta = \frac{k \cdot h_\varphi \cdot \Delta h^0}{L + \Delta L_{ns} + \frac{H_0 - B}{2}} \quad (18.16)$$

Для грунтовых потоков весьма большой длины со среднем градиентом  $I_0$

$$\bar{Q}_\delta = k \cdot I_0 (H_0 + h_\varphi) \quad (18.17)$$

Суммарные фильтрационные потери из канала определяются по формуле

$$V_{III} = 4k \cdot h_\varphi \frac{H_0 + h_0}{\sqrt{\pi a}} (\sqrt{t_2 + t_3} - \sqrt{t_2}) \quad (18.18)$$

Графики, характеризующие изменение во времени уровня грунтовых вод и инфильтрационного расхода под дном канала, показаны на рис. 18.3.

### 18.6. Критерии существования разных стадий фильтрации под каналом

При выявлении существования разных стадий фильтрации основными критериями являются соотношения глубин  $H_0$  и  $[H_0]$  и расходов  $\bar{Q}_\phi$  и  $\bar{Q}_\delta$ . Оценка ведется по С.Ф. Аверьянову [1] согласно таблице 18.1.

### 18.7. Исследование фильтрации воды из каналов

Изучение фильтрации воды из канала включает:

1. Установление существования стадий фильтрации;

2. Определение величины подъема уровня грунтовых вод, фильтрационного расхода и суммарных потерь на фильтрацию под каналом и в зоне его влияния на разных стадиях;
3. Сопоставление фильтрационных потерь из канала с расходом воды в канале, оценка КПД работы канала и вывод о необходимости проведения противофильтрационных мероприятий, выявление закономерностей в изменении основных гидродинамических характеристик потока и вывод о возможности подтопления окружающей территории, необходимости дренажных мероприятий и сроках их выполнения.

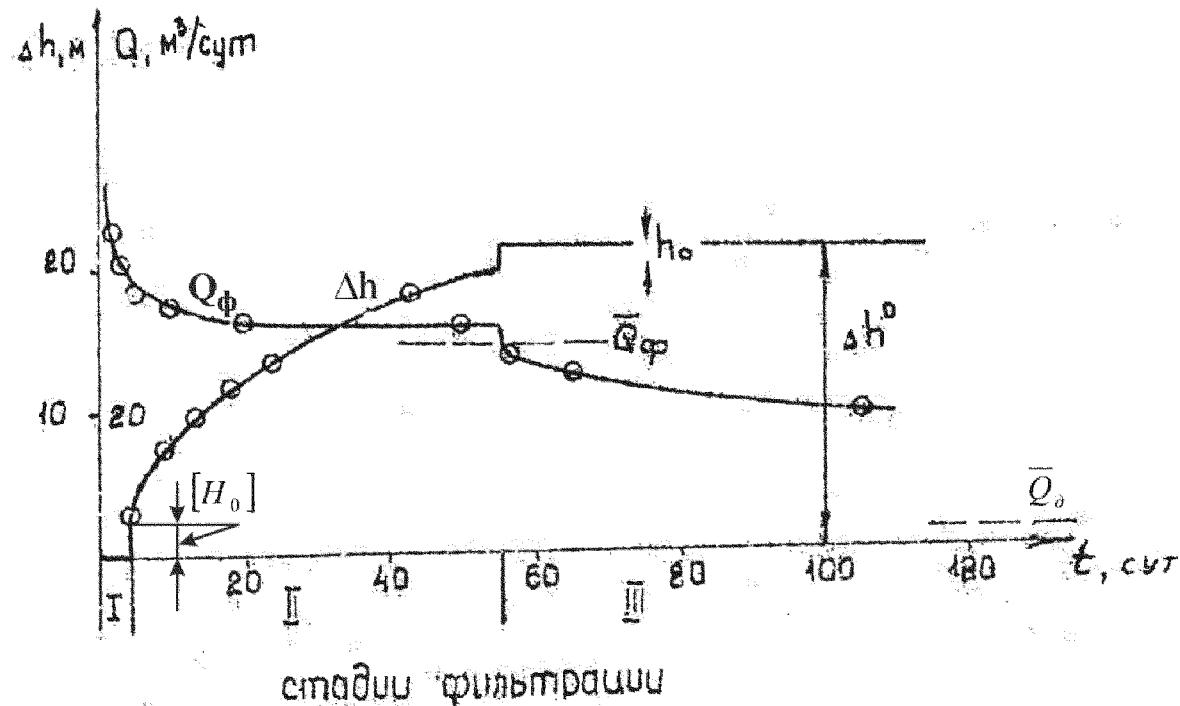


Рис. 18.3. Изменение уровня грунтовых вод и расхода воды на фильтрацию под каналом

Таблица 18.1

Критерий	$\bar{Q}_\phi > \bar{Q}_d$	$\bar{Q}_\phi < \bar{Q}_d$
$H_0 > [H_0]$	Последовательно существуют все три стадии	Существуют первая и вторая стадии, третья не наступает (18.19)
$H_0 \leq [H_0]$	Сразу наступает третья стадия фильтрации	(18.20)
$H_0 \gg [H_0]$	Существует только первая стадия фильтрации	(18.21)

### 18.8. Фильтрация воды из водохранилища

В зоне влияния водохранилища фильтрация является пространственной, но гидродинамические особенности позволяют свести ее к плановой или двухмерной в разрезе (профильной). На рис. 18.4а показаны основные зоны фильтрации в районе водохранилища, отличающиеся гидродинамическими особенностями потоков. По этому признаку выделяют три основные гидродинамические зоны. Первая характеризует фильтрацию под плотиной. В плане поток плоскопараллельный, что позволяет исследовать его в разрезе как двухмерный.

Фильтрация определяется величиной напора на плотине  $H_0$ , определяемой как разность отметок верхнего  $H_1$  и нижнего  $H_2$  бьефов, строением естественного основания плотины и конфигурацией ее подземного контура. Обычно напор  $H_0$  принимают постоянным, а фильтрацию считают стационарной. Основные типы расчетных схем представлены на рис. 18.4б, в. При однородном строении основания плотины исследования проводят на основе гидромеханических решений, дающих аналитические уравнения для линий токов и линий напоров, на основе которых строят гидродинамическую сетку движения. Эти решения даны в справочнике [9].

Гидравлическое решение получено Г.Н. Каменским для схемы, приведенной на рис. 18.4б. Представляя для однородного пласта средний путь фильтрации линий тока длиной  $L + m$ , фильтрационный расход на 1 м плотины по закону Дарси можно определить следующим образом

$$q = km \frac{H_0}{L + m} \quad (18.22)$$

где  $H_0/(L + m)$  - средний градиент фильтрации для всей области.

С гидродинамической точки зрения наиболее интересна схема двухслойного пласта (рис. 18.4в). Гидравлическое решение этой задачи было получено Г.Н. Каменским с использованием предпосылки о движении воды в хорошо проницаемом слое только в горизонтальном, а в слабопроницаемом только в вертикальном направлении при соблюдении критерия  $k_{\max}/k_{\min} \geq 100$ . Фильтрационный расход определяется по зависимости

$$q = \frac{H_0}{\frac{L}{T} + 2 \sqrt{\frac{m_0}{k_0 \cdot T}}} \quad , \quad (18.23)$$

а напорный градиент в нижнем бьефе

$$I_0 = \frac{H_0}{\frac{2m_0}{T} + L \sqrt{\frac{k_0 m_0}{T}}} \quad , \quad (18.24)$$

где  $T$  - водопроводимость хорошо проницаемого пласта,

$k_0 m_0$  - коэффициент фильтрации и мощность слабопроницаемого пласта.

### 18.9. Обходная фильтрация

Во второй зоне (обходная фильтрация) движение идет в обход примыкания плотины. Размеры этой зоны значительно больше мощности потока, и фильтрация сводится к плановой. Она определяется величиной  $H_0$ , естественным уклоном потока  $I_e$ , строением бортов долины и конфигурацией примыкания. При сравнении приведенной на рис. 18.4а схемы обходной фильтрации ( $\Pi$ ) со схемой фильтрации под плотиной (рис. 18.4б) обнаруживается принципиальное сходство в структурах планового ( $x_0y$ ) и профильного ( $x_0z$ ) потоков. Это означает, что гидромеханические решения, полученные для схемы одно-

родного основания плотины, можно использовать при исследовании обходной фильтрации, принимая форму и длину контура примыкания соответственно за форму и длину основания плотины.

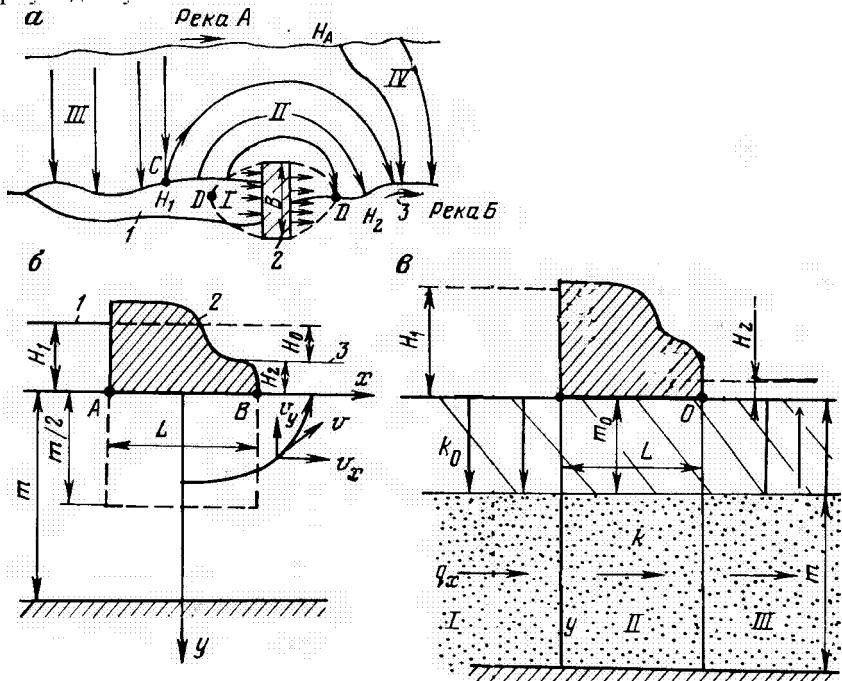


Рис. 18.4. Схема фильтрации в зоне плотины в плане (а)  
и разрезе на однородном (б) и двухслойном (в) основании

1 – водохранилище (верхний бьеф); 2 – плотина; 3 – нижний бьеф. Зоны фильтрации (а): I – под плотиной; II – в обход плечевого примыкания; III – из водохранилища; IV – деформируемого потока в нижнем бьефе. С, D – раздельные точки области фильтрации. H<sub>1</sub>, H<sub>2</sub>, H<sub>A</sub> – соответственно отметки уровня воды в верхнем и нижнем бьефах и в долине. I – III (в) – фрагменты

Для простых условий (однородный, напорный пласт, прямолинейные урезы, стационарный режим фильтрации) можно использовать гидравлический метод расчета. Схематизированный поток характеризуется радиальной фильтрацией (рис. 18.5).

При отсутствии естественного потока ( $I_e = 0$ ) линии равных напоров представляют собой радиусы, а линии токов – длины полуокружностей длиной  $l = \pi \cdot r$ . Напор в любой точке определяется как

$$H_A^r = H_0 \left( 1 - \frac{\alpha}{\pi} \right) \quad (18.25)$$

а величина напорного градиента обходной фильтрации

$$I = \frac{dH}{dl} = \frac{H_0}{l} = \frac{H_0}{\pi \cdot r} \quad (18.26)$$

т.е. остается неизменным по дуге и уменьшается с удалением от примыкания плотины.

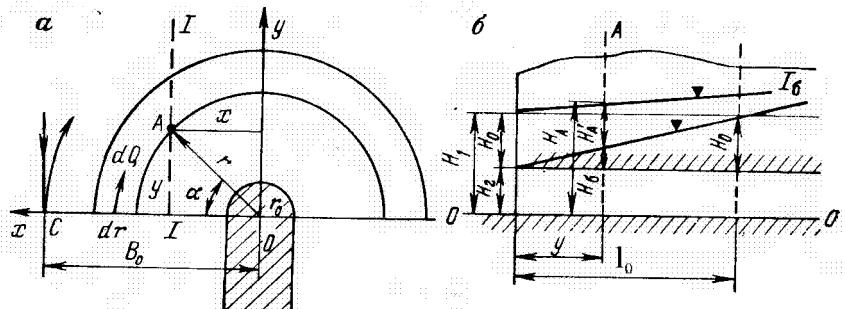


Рис. 18.5. Расчетная схема обходной фильтрации при гидравлическом методе решения  
(а – план; б – разрез)

Величину  $\alpha$  можно выразить через координаты точки  $x$  и  $y$ :

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (18.27)$$

Подставляя (18.27) в (18.25) получим

$$H_A^1 = H_0 \left( 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right) \quad (18.28)$$

Следует иметь в виду, что вблизи верхнего бьефа при  $x \geq 0$   $0 \leq \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \leq \pi/2$ , а вблизи нижнего бьефа при  $x \leq 0$   $\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \leq \pi$ .

Учтем наличие естественного потока подземных вод с водораздела с градиентом  $I_e$ . Введем понятие расстояние до точки, в которой естественный уровень  $H_e$  равен  $H_0$ , то есть

$$l_0 = \frac{H_0}{I_e} \quad (18.29)$$

$$\text{Тогда } H_A = H_A^1 + H_e = H_0 \left( 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \frac{y}{l_0} \right) \quad (18.30)$$

Ширина зоны обходной фильтрации  $B_0$  определяется из условия, что в раздельной точке  $C$  по линии верхнего бьефа (рис. 18.5) скорость фильтрации  $V_x = -k \frac{dH}{dy}$  при  $y=0$  и  $x=B_0$  равна нулю. Используя выражение (18.30), после

дифференцирования и преобразования найдем

$$B_0 = \frac{l_0}{\pi} = \frac{H_0}{\pi \cdot I_e} \quad (18.31)$$

Расход потока обходной фильтрации определяется из уравнения:

$$Q = \int_0^{r_0} \frac{\pi TH_0}{\pi r} dr = \frac{TH_0}{\pi} \ln \frac{R_0}{r_0} \quad (18.32)$$

Для сложных контуров урезов верхнего и нижнего бьефа, неоднородного строения пласта задачу решают графическим построением гидродинамической сетки.

18.10. Третья зона характеризует фильтрацию из водохранилища в борта долины. Это плоскопараллельная нестационарная фильтрация, связанная с подпором уровней, изученная ранее в лекции № 17. Исследования включают определение величины подъема уровня воды во времени, достижения ими практических стационарного состояния, а также оценку зоны влияния подпора, величину фильтрационных потерь из водохранилища, их изменение во времени. Как видно из рис. 18.6 возможны три варианта развития подпора.

Первый возникает при  $h_0 < h_L$ , и  $y_0 = (h_0 + \Delta H^0) < h_L$  и характеризуется двумя последовательными стадиями формирования подпора, различающимися генетическими составляющими водного баланса потока (рис. 18.6б). В начальный период при  $t < t_0$  подпор развивается под влиянием  $q_\phi$  и  $q_e$ , затем при  $t = t_0$ , как видно из формулы (17.13),  $|q_e| = |q_\phi|$  и при  $t > t_0$  наступает вторая стадия, в течение которой главным фактором является  $q_e$ . При условии медленного постоянного повышения уровня воды в водохранилище по зависимости  $\Delta H = \Psi \cdot t$  и значительных естественных уклонах потока  $I_e$  начальная стадия может и не наступить и в течение всего периода  $|q_e| > |q_\phi|$ . Это возможно при

$$\text{условии } I_e \geq \Psi \cdot \sqrt{\frac{t_p}{a}} \quad (18.33)$$

$$\text{где } \Psi = \frac{\Delta H_{\max}}{t_p} \quad (18.34)$$

что следует из сопоставления формул (17.12) и (17.22).

Условие (18.33) особенно важно при гидродинамических расчетах потерь из хранилищ жидких промстоков, сооружаемых в местах понижения рельефа (долинах), ибо позволяет минимизировать утечки этих стоков в борта долины.

Второй вариант наблюдается при  $h_0 < h_L$ , но  $y_0 = (h_0 + \Delta H^0) > h_L$  (рис. 18.6г) и тоже характеризуется наличием двух стадий формирования подпора, причем начальная аналогична первому варианту, но время ее существования иное и определяется из выражения (17.7), как момент, в который влияние нестационарного подпора достигло второй границы  $R_{en} = L_\tau$ . С этого времени подпор развивается только под влиянием потерь из водохранилища  $q_\phi$ .

Третий вариант отвечает соотношению  $h_0 > h_L$  и имеет одну стадию формирования подпора под влиянием  $q_\phi$  (рис. 18.6в).

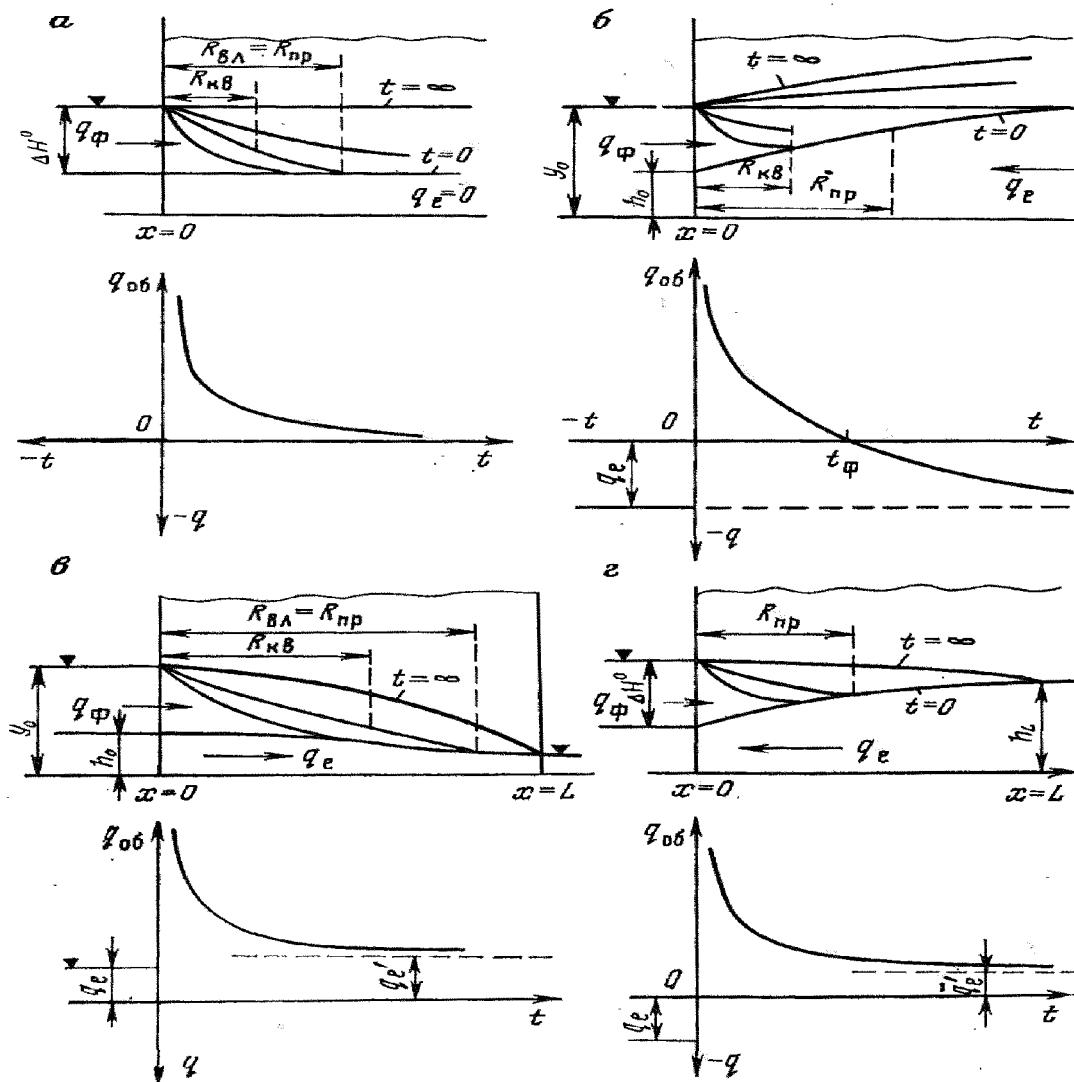


Рис. 18.6. Схемы развития кривых подпора и расхода в различных гидрогеологических условиях

Наступление стационарного подпора зависит от времени стабилизации  $\tau = L^2/a$  и определяется зависимостями (17.4), (17.19) или (17.24). При изучении стационарного подпора используют два подхода [5]. Первый предполагает получение расчетных значений уровней с инженерным запасом. В этом случае рассматривается полубесконечный поток, в котором область подпора  $x$  существенно меньше области развития пласта  $L$  ( $x \leq 0,05L$ ). В результате можно пренебречь изменением питания потока, считая, что его расходы до подпора и после него равны. Такая постановка задачи приводит к условию, что подпор формируется независимо от строения пласта и наличия или отсутствия естественного инфильтрационного питания, которое учитывается в начальном распределении уровней. Подпор в любом сечении  $\Delta H(x, \infty)$  численно равен подпору на границе  $\Delta H_0$  и кривая уровней перемещается параллельно самой себе (рис. 18.7).

Второй подход учитывает изменение условий питания, так как область подпора  $x$  соизмерима с длиной потока  $L$ , и следовательно, расходы потока до

и после подпора различны. Такая постановка задачи справедлива для ограниченного потока.

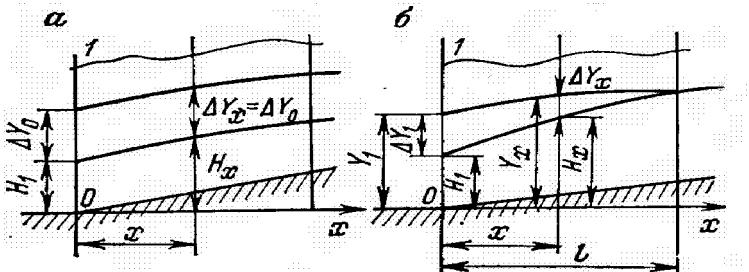


Рис. 18.7. Расчетные схемы оценки стационарного подпора в полубесконечном потоке (по И.К. Гавлич)  
(а – при  $x \ll L$ ; б – при  $x \approx L$ )

### Вопросы к лекции №18

- При каких соотношениях  $H_0$  и  $[H_\phi]$ ,  $\bar{Q}_\phi$  и  $\bar{Q}_\delta$  при сооружении канала сразу наступает стадия подпертой фильтрации? Практически будет наблюдаться только стадия свободной фильтрации?
- Из анализа влажности в формуле (3.20) покажите, в каких пределах может измениться коэффициент влагопереноса  $\kappa_e$ .
- На каких стадиях фильтрации будут максимальный и минимальный расходы воды из канала?
- По трассе канала увеличивается мощность зоны аэрации. На основе теоретических зависимостей покажите, как будут меняться  $\bar{Q}_\phi$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ .
- Объясните, как и почему изменяется фильтрационный расход из канала во времени.
- Чему равен градиент потока в формуле (18.5)?
- Если средняя скорость фильтрации выражается как  $V_\phi = H_0/\pi r$ , то какую форму имеет линия тока и поток в целом ( $H_0$  – постоянная разность напоров на концах линий токов)?
- В чем заключается различие и сходство фильтрации воды из водохранилищ и каналов?
- Какие два режима движения воды характерны для стадии свободной фильтрации, чем они различаются и какими критериями можно установить их наличие?
- Каковы особенности стадии капиллярно-грунтового потока? По каким принципам построены математические зависимости для оценки подпора и фильтрации на этой стадии?
- Подпертая фильтрация из водохранилища и канала аппроксимирована одной расчетной схемой, определены положение депрессионной кривой и

величина фильтрационного расхода на урезе при  $x = 0$  для стационарных и нестационарных условий. Будут ли одинаковы погрешности расчета?

12. Охарактеризуйте все возможные схемы развития подпора и расхода в разных гидрогеологических условиях. При каких условиях подпора  $|q_e| > |q_\phi|$  всегда?
13. В чем сходство и различие математической постановки задач фильтрации под плотиной и в обход ее примыканий?
14. Как изменится ширина зоны обходной фильтрации и фильтрационный расход в расчетных схемах:  $I_e = 0$ ,  $I_e > 0$  и  $I_e \gg 0$ ?
15. Охарактеризуйте основные зоны фильтрации в районе водохранилищ.

### Лекция № 19. Гидродинамические основы расчета дренажных мероприятий

19.1. Дренажные мероприятия направлены на предотвращение и ликвидацию избыточного увлажнения земель или подтопления территорий в целях их рационального использования. Осуществляются как в зонах избыточного увлажнения при преобладании осадков над испарением, так и в зонах недостаточного увлажнения – под влиянием орошения, фильтрационных потерь из каналов, водохранилищ, водопроводной и канализационной сетей.

Подтопление территории – это процесс, при котором уровень грунтовых вод (УГВ) вследствие избыточного увлажнения поднимается к поверхности земли, затапливает фундаменты и подвалы инженерных сооружений.

19.2. Для выбора эффективных мероприятий по борьбе с подтоплением необходимо иметь четкое представление об основных причинах (факторах), вызывающих этот процесс.

Для количественной оценки этих факторов должно быть составлено уравнение водного баланса защищаемой территории (рис. 19.1):

$$\mu \frac{\Delta H_{s,s+2}}{\Delta t} = \frac{q_{np} - q_{vn}}{\Delta x} + W_a - W_{vn} \pm W_{es} \quad (19.1)$$

Подтопление происходит при значительных (десятка см в год) величинах  $\Delta H/\Delta t$ . Исходя из этого уравнения можно выделить основные факторы избыточного увлажнения.

1. Преобладание осадков ( $I_{vnp}$ ) над испарением ( $I_{vn}$ ) и оттоком  $q_{vn}$ . Сюда относятся утечки на промплощадках и населенных пунктах, инфильтрация на массивах орошения.
2. Затрудненные условия оттока ( $q_{vn}$ ), плохая естественная дренированность территории, отсутствие оврагов, малые уклоны рельефа, отсутствие хорошо проникаемых грунтов (песков) в разрезе.
3. Преобладание притока ( $q_{np}$ ) над оттоком и испарением, например, за счет фильтрационных потерь из каналов и водохранилищ выше защищаемой территории.

19.3. Важным показателем эффективности осушения является обеспечение в пределах всей защищаемой территории определенной глубины до УГВ,

называемой нормой осушения  $h_{ee}$ . При этом главной задачей является нейтрализация основного источника избыточного увлажнения. Эта задача реализуется использованием различного типа дренажных сооружений. Дренажи – инженерные сооружения, имеющие целью отвод излишков воды с защищаемой территории для обеспечения положения УТВ не выше нормы осушения  $h_{ee}$  в пределах всей этой территории. Они различаются по следующим основным признакам.

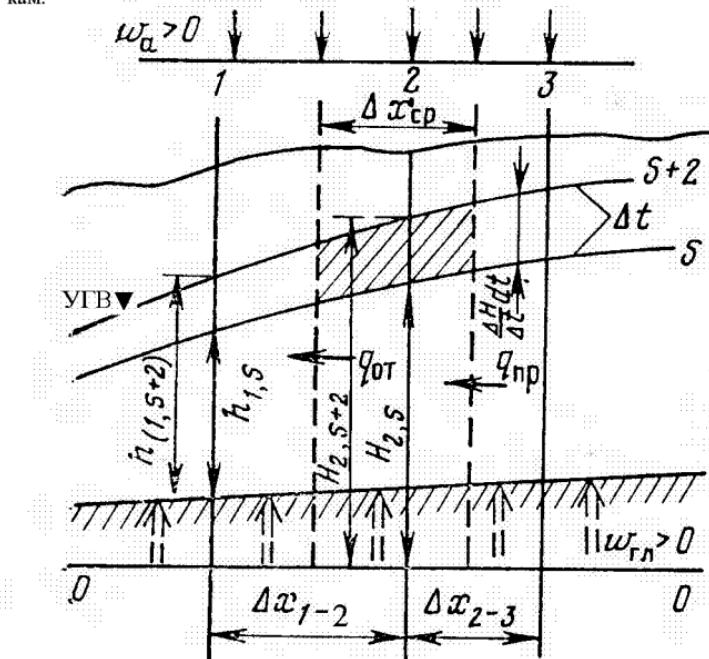


Рис. 19.1. Схема к выводу уравнения водного баланса в конечных разностях (по Г.Н. Каменскому)

19.3.1. По расположению дренажа относительно защищаемой территории и источника подтопления выделяют:

- Головной или нагорный дренаж располагается выше по потоку (и по рельефу), чем защищаемая территория. Его задача – перехват притока подземных ( $q_{pr}$ ) и поверхностных вод, поступающих на защищаемую территорию.
- Береговой дренаж, расположенный ниже по потоку, ближе к реке, имеет целью или перехват потока при повышении уровня воды в результате

- строительства водохранилища или паводка в реке, или увеличение оттока ( $q_{\text{отт}}$ ) при подтоплении поймы реки и склонов ее долины.
- Контурный дренаж – располагается по контуру защищаемого объекта и используется при сравнительно небольших размерах защищаемого объекта (до нескольких  $\text{км}^2$ ).
  - Систематический дренаж – дрены располагаются равномерно в пределах всей защищаемой территории. Используется при преобладании осадков ( $W_{\text{осн}}$ ) над испарением ( $W_{\text{исп}}$ ) и значительных размерах защищаемой территории (десятки  $\text{км}^2$ ).

19.3.2. По конструктивному типу дренажи могут быть горизонтальными или вертикальными. Горизонтальный дренаж выполняется в виде открытой траншеи глубиной до 3,5 м или закрытой перфорированной трубы, уложенной в траншее и засыпанной сверху проницаемым грунтом (песчано-гравийная смесь), при больших глубинах заложения. Вертикальный дренаж представляет собой систему взаимодействующих скважин, объединенных сбросным коллектором с принудительной откачкой воды из скважин. Выбор того или иного типа дренажа определяется технико-экономическим расчетом.

19.4. При гидродинамическом расчете дренажа важно определить:

1. Расход воды, который необходимо отвести за пределы защищаемой территории. Эта величина обычно определяется из анализа уравнения общего баланса при обеспечении равенства его левой части нулю и реализации условия положения УГВ не выше нормы осушения  $h_{\text{ос}}$  в пределах всей защищаемой территории.
2. Размещение дренажных сооружений, их протяженность, количество и расстояния между дренами или скважинами, при которых реализуется условие нормальной работы дренажа (понижение уровня в скважинах не больше допустимых ( $S_{\text{доп}}$ )), глубина горизонтальных дрен обеспечивает отвод всей воды с защищаемой территории.
3. Выбор сечений горизонтальных дрен, диаметров и длины фильтров скважин, которые обеспечат отвод всей избыточной воды за пределы защищаемой территории.

19.5. Рассмотрим последовательно решение выше перечисленных задач.

19.5.1. В отличие от расчетов водозаборов, где инженерный запас связан в ряде случаев с исключением при схематизации влияния границ питания и перетекания из соседних пластов, что обеспечивает преумышление расчетных водопритоков к скважинам, при обосновании дренажа запас в расчетах при недостаточной изученности реализуется, напротив, за счет принятия в расчетных схемах более благоприятных условий водопритока, чем это может быть имеется место в действительности.

Учитывая, что основной задачей дренажа является отведение избыточного количества воды, расчеты дренажей выполняются, как правило, для стационарного режима фильтрации. При этом априори предполагается, что весь расход дренажа обеспечивается избыточным водопритоком на защищаемую тер-

риторию, а период нестационарного режима, связанный с началом работы дренажа, является не очень продолжительным.

Определение количества воды  $Q_{\text{ср}}$ , которое необходимо отвести с защищаемой территории для поддержания  $h_{\text{oc}}$ , выполняется с использованием уравнений Диопюи для плоско-параллельной или радиальной структуры потока (лекция № 19 и 16) в зависимости от конкретных условий. Широко применяются методы обобщенных систем скважин и "большого колодца". При этом схема плоско-параллельной фильтрации используется, как правило, при расчетах защитного дренажа, а радиальной фильтрации – контурного водопонизительного дренажа. Расчеты выполняются для заданного размещения дренажа относительно защищаемой территории. Результатом этих расчетов является определение линейного дренажа модуля  $q_{\text{ср}} = \frac{Q_{\text{ср}}}{L_{\text{ср}}}$  (19.2) и длины контура дренажа

-  $L_{\text{ср}}$ . Расчеты выполняются для совершенных дрен (траншей) полностью вскрывающих водоносный пласт. Величина  $Q_{\text{ср}}$  зависит от заданного положения контура дренажа. При этом, как правило,  $Q_{\text{ср}}$  уменьшается при удалении дренажа от контуров питания ( $H = \text{const}$ ) и приближении к защищаемому объекту. Обычно выполняется несколько вариантов расчетов, различающихся положением контура дренажа. Оптимальным считается условие  $Q_{\text{ср}} \rightarrow \min$ . В качестве основного ограничения при расчетах выступает обеспечение  $h_{\text{oc}}$  в самых неблагоприятных точках защищаемой территории. В процессе расчетов должно быть получено прогнозное положение уровня на контуре совершенного дренажа  $h_{\text{ср}}$ . Оно определяется путем трансформации уравнения Диопюи относительно уровня в заданном сечении.

Для плоско-параллельной фильтрации (рис. 19.2)

$$h_{\text{ср}}^2 = h_1^2 - \frac{2 \cdot Q_{\text{ср}} \cdot L_{\text{ср}}}{k \cdot I_{\text{ср}}} \quad (19.3)$$

для радиальной фильтрации (рис. 19.3)

$$h_{\text{ср}}^2 = h_1^2 - \frac{Q_{\text{ср}}}{\pi \cdot k} \ln \frac{R_k}{r_{\text{ср}}} \quad (19.4)$$

В этих формулах

$h_1$ ,  $h_2$  - мощность водоносного пласта в заданном сечении (граница постоянного напора) или под защищаемым объектом,

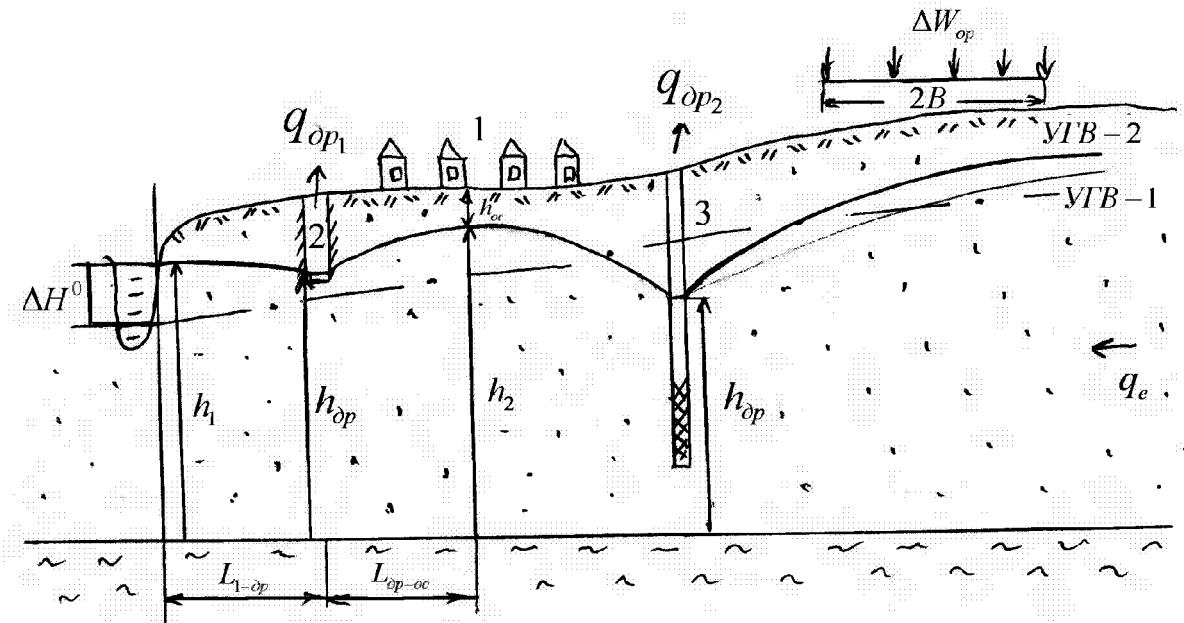
$Q$  - полный расход воды между дренажами и этим сечением,

$L_{\text{ср}}$ ,  $R_k$  - расстояние линии дренажа до этого сечения,

$r_{\text{ср}}$  - расстояние контурного дренажа до центра защищаемой территории (центра системы).

19.5.2. Определение конструктивного типа дренажа и размещение дренажных сооружений вдоль выбранного контура зависит от конкретных условий. Общие рекомендации: при хорошей проницаемости пород, залегающих с

поверхности земли, более эффективным оказывается горизонтальный дренаж, при залегании с поверхности слоя глин или тяжелых суглинков, подстилаемых хорошо проницаемыми породами, более эффективным может оказаться вертикальный дренаж.



**Рис. 19.2. Расчетная схема защитного дренажа**

(1 – защищаемая территория; 2 – береговой горизонтальный дренаж; 3 – головной вертикальный дренаж; УГВ1 – естественный уровень подземных вод; УГВ2 – тоже под влиянием дрена)

19.5.3. При расчетах горизонтального дренажа одним из основных показателей является глубина заложения дрен. Она зависит от мощности проницаемой толщи -  $h$ , прогнозного положения уровня на контуре совершенного дренажа  $h_{op}$  и дополнительных потерь напора  $\Delta h_{op}$  за счет несовершенства дрены, скачка уровня на стенке дрены  $\Delta h_0$  (рис. 19.4)

$$z_{op} = h - (h_{op} - \Delta h_{op} - \Delta h_0) \quad (19.5)$$

Дополнительные потери напора определяются по формуле

$$\Delta h_{op} = \frac{q_{op}}{k \cdot h_{op}} \Delta L_{n\delta}, \quad (19.6)$$

где  $\Delta L_{n\delta}$  – показатель несовершенства дрены, определяется по формуле

$$\Delta L_{n\delta} = 0,73 h_o \lg \frac{2m_0}{nd_o} \quad (19.7)$$

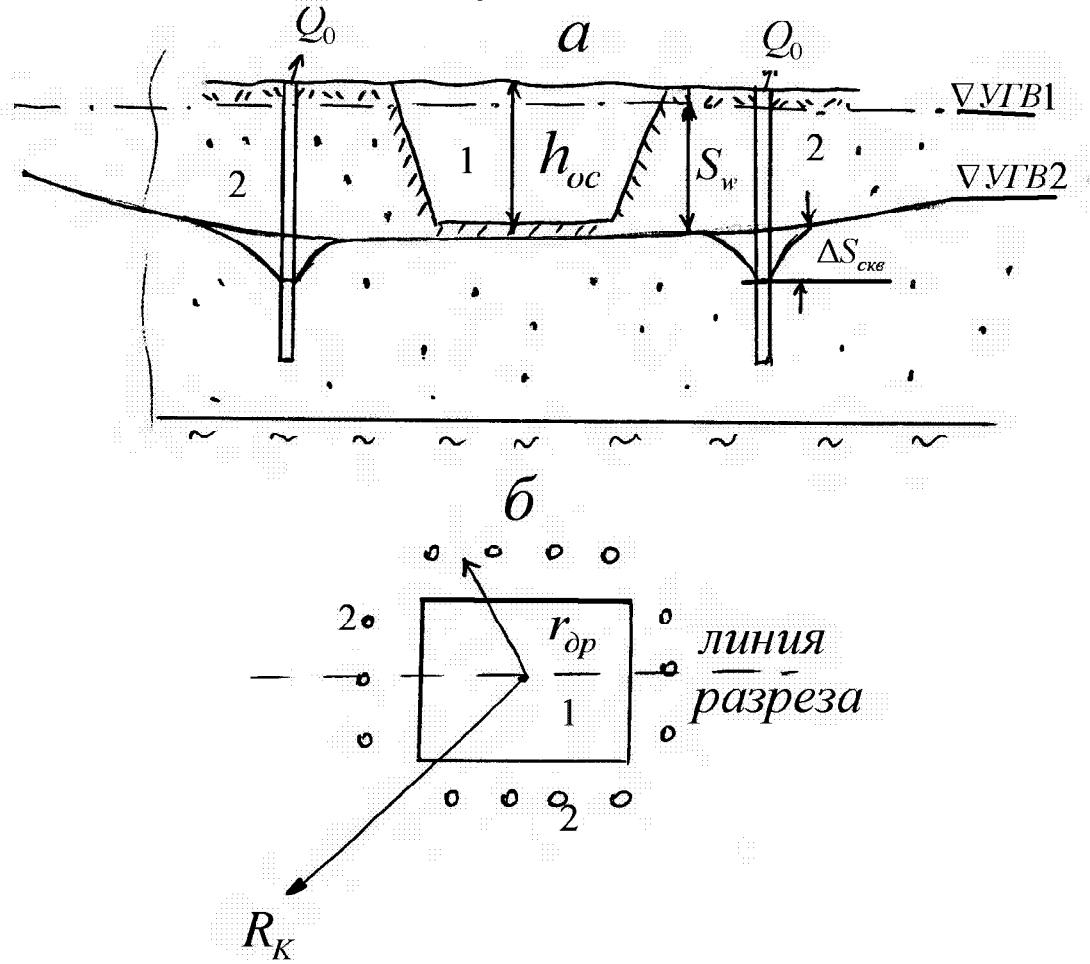
Здесь  $m_0$  – мощность потока под дреной,

$d_o$  – диаметр смоченного периметра дрены.

В качестве плоскости сравнения здесь использована подошва водоносного пласта.

19.5.4. При расчетах вертикального контурного дренажа основными определяемыми показателями являются расстояние между скважинами  $2\sigma$  и расход каждой скважины  $Q_0$ , причем

$$Q_0 = 2\sigma \cdot q_{dp} \quad (19.8)$$



**Рис. 19.3. Контурный вертикальный дренаж (а – разрез; б – план)**  
 (1 – котлован; 2 – дренажные скважины; УГВ1 – естественный уровень подземных вод; УГВ2 – тоже под влиянием дренажа)

Расчет выполняется подбором для дренажной скважины, расположенной в наиболее неблагоприятных условиях с использованием формул (19.8) и (19.9):

$$(2h_{dp} - S_0)S_0 = \frac{Q_0}{\pi \cdot k} \left( \ln \frac{\sigma}{\pi \cdot r_0} + \xi_{hc} \right), \quad (19.9)$$

где  $S_0$  – допустимое понижение уровня в дренажной скважине. Обычно  $S_0 = 0,5h_{dp}$ .

19.6. Преобладание осадков над испарением и оттоком на значительной по площади территории определяет целесообразность использования систематического дренажа. Наиболее характерными в этом отношении являются водораздельные плато с близким к поверхности земли залеганием уровня грунтовых вод. Определяющим условием обеспечения мелиоративного эффекта здесь является полное отведение избытка воды интенсивностью  $W$  с защищаемой территории. Основной результат расчета сводится к определению расстояния между дренами и величины расхода, поступающего в дрену при заданном типе и конструкции дренажа.

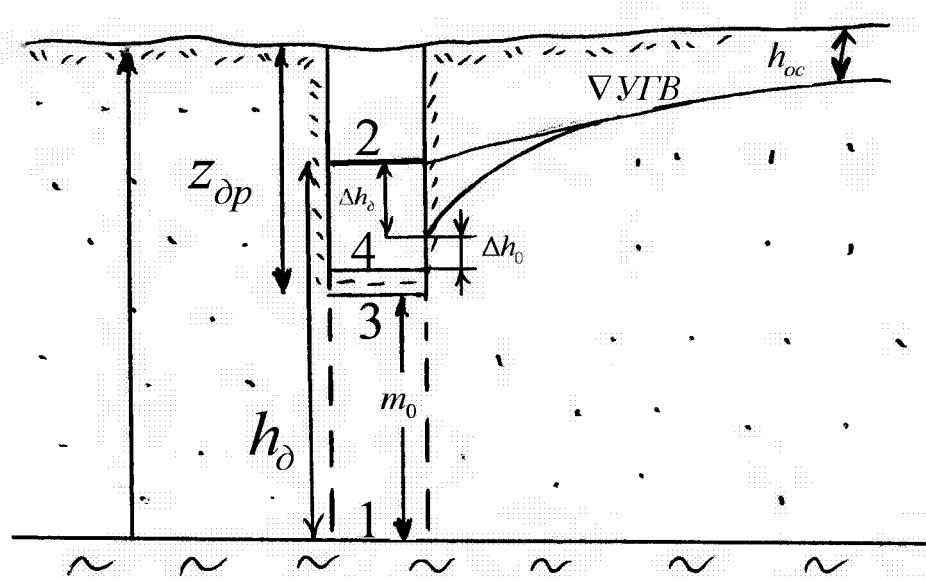


Рис. 19.4. Расчетная схема несовершенного дренажа

(1, 2 – совершенная дрена и ее уровень; 3, 4 – несовершенная дрена и ее уровень)

Для систематического дренажа определяющим является площадной дре-

нажный модуль

$$W_{op} = \frac{Q_{op}}{F}, \quad (19.10)$$

где  $F$  – площадь защищаемой территории.

Как правило,  $W_{op}$  практически равно дополнительному инфильтрационному питанию  $W$ , являющемуся главным фактором подтопления. Это условие обеспечивает сохранение стационарного режима фильтрации на защищаемой территории.

19.6.1. Для горизонтального типа дренажа решение получено Ротэ из уравнения Г.Н. Каменского для стационарного плоскопараллельного потока в однородном пласте с учетом инфильтрации  $W$  (рис. 19.5)

$$2a = 4 \left[ \sqrt{L_{no}^2 + \frac{k(h_l + h_o)}{4W}(h_l - h_o)} - L_{no} \right], \quad (19.11)$$

причем  $2a$  – расстояние между дренами,

$h_l$  и  $h_o$  – положение уровня воды между дренами и в дрене.

19.6.2. Расчет вертикального систематического дренажа сводится к решению неявного уравнения с двумя взаимосвязанными неизвестными – расстоянием между скважинами  $2\sigma$  и величиной расхода скважины  $Q_0$ , причем очевидно, что

$$Q_0 = 4\sigma^2 \cdot W \quad (19.12)$$

При этом для обеспечения эффективной работы скважин необходимо, чтобы понижение уровня, определяемое

для грунтовых вод       $S = h_e - \sqrt{h_e^2 - \frac{Q}{\pi \cdot k} \left( \ln \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi} \cdot r_0} + 0,5\xi_{hc} \right)}$       (19.13)

или для напорных вод       $S = \frac{Q}{2\pi \cdot k \cdot m} \left( \ln \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi} \cdot r_0} + \xi_{hc} \right)$       (19.14)

не превышало допустимого понижения, вычисляемого обычно как

$$S_{don} \leq 0,5m + H_{изб} \text{ или } S_{don} \leq 0,5h_e \quad . \quad (19.15)$$

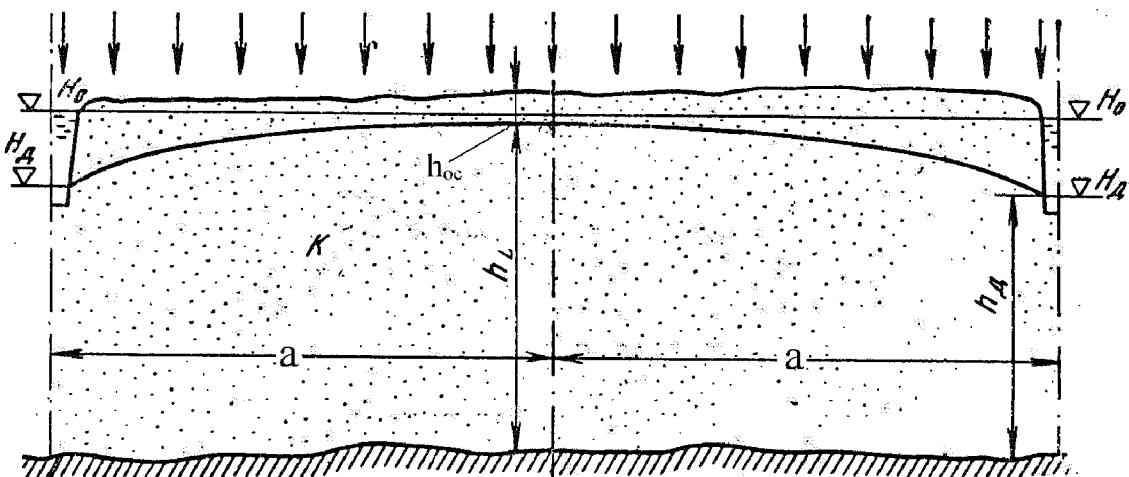


Рис. 19.5. Расчетная схема систематического дренажа

19.7. Особый случай использования дренажа – водопонижение при сооружении строительных котлованов или разработки месторождений полезных ископаемых (МПИ). В этих случаях часто используется контурный тип дренажа. Гидродинамический расчет такого дренажа выполняется аналогично расчетам взаимодействующих скважин. Отличие заключается в требовании обеспечения нормы осушения в пределах защищаемой территории котлована или МПИ. Оптимальная система дренажа обеспечивает это требование при минимальном количестве скважин и минимально возможном отборе воды из пласта этими скважинами.

19.8. При расчетах дренажа эффективно использовать метод фильтрационных сопротивлений (см. лекцию № 6). Под фильтрационным сопротивлением (аналогично электрическому сопротивлению) понимают отношение потерь напора  $\Delta H$  к расходу потока  $Q$ , то есть:

$$\Phi = \frac{\Delta H}{Q} \quad [сум/m^2] \quad . \quad (19.16)$$

Фильтрационное сопротивление представляет собой удельные потери напора, отнесенные к  $1 \text{ м}^3/\text{сут}$  расхода потока, так что общие потери могут быть определены как

$$\Delta H = Q \cdot \Phi \quad . \quad (19.17)$$

Во всяком сложном по структуре фильтрационном потоке можно выделить составляющие его участки с более или менее однородной структурой движения воды. Каждый из этих участков характеризуется своим фильтрационным

сопротивлением, не зависящим от структуры потока на сопредельных участках. Обычно выделяются следующие характерные участки и соответствующие им фильтрационные сопротивления:

- Участок потока примыкающий к областям питания или разгрузки (границам пласта) и расположенный на некотором расстоянии от скважин или дрен. Фильтрационные потери напора здесь определяются только суммарным расходом потока, забираемого этими скважинами или дренами, независимо от их взаимного расположения и от того, являются они совершенными или несовершенными. То есть, при расчете потерь напора на удаленном от дренажа участке контурный дренаж может быть заменен совершенной траншейей вне зависимости от его реальной конструкции и расположения.

Фильтрационное сопротивление для этого участка определяется для условий плоско-параллельной фильтрации

$$\Phi_w = \frac{L}{k \cdot m \cdot B} , \quad (19.18)$$

где  $L$  - расстояние до контура питания,

$B$  - ширина потока к дрене.

Для условий планово-радиальной фильтрации

$$\Phi_w = \frac{\ln R_k / R_0}{2\pi \cdot k \cdot m} , \quad (19.19)$$

где  $R_k$  - радиус влияния или радиус контура питания,

$R_0$  - радиус контурной системы скважин.

- На участке вблизи скважин структура потока принципиально меняется, он становится радиальным (рис. 19.6). Фильтрационное сопротивление здесь зависит от взаимного расположения скважин, расстояния между ними и определяется зависимостью

$$\Phi_{ns} = \frac{\ln \frac{\sigma}{\pi \cdot r_0}}{2\pi \cdot k \cdot m} , \quad (19.20)$$

где  $\sigma$  - полурасстояние между скважинами,

$r_0$  - радиус фильтра.

- Непосредственно вблизи фильтра скважины или вблизи дrenы определяющим является их конфигурация, степень совершенства по вскрытию водоносного пласта. Здесь величина фильтрационного сопротивления  $\Phi_{nc}$  зависит от диаметра скважины или дрен, расположения водоприемной части относительно кровли и подошвы пласта, конструкции фильтровой части. Фильтрационное сопротивление, связанное с несовершенством вскрытия пласта скважинами  $\Phi_{nc}$ , рассмотрено в лекции № 12.

Общее фильтрационное сопротивление определяется как сумма сопротивлений на каждом из участков.

Использование метода фильтрационных сопротивлений правомерно при расстоянии между скважинами или дренами, не превышающем радиуса влия-

ния или радиуса контура питания потока, т.е. реально не превышающем расстояние до границ пласта. При этом число взаимодействующих скважин должно быть не менее трех. В пределах контурной системы дренажа должны наступить условия стационарной или квазистационарной фильтрации.

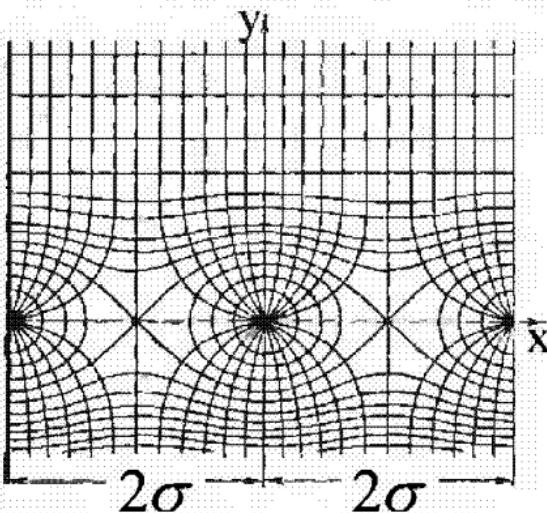


Рис. 19.6. Фильтрационное поле вблизи ряда скважин

#### Вопросы к лекции 19

1. Охарактеризуйте основные факторы подтопления территорий.
2. Какая гидродинамическая задача решается дренажными сооружениями?
3. Какие основные типы дренажей по расположению относительно защищаемой территории вы знаете?
4. В чем основное отличие гидродинамических расчетов водозаборов и дренажей?
5. Почему расчеты дренажей выполняются как правило для стационарного режима фильтрации?
6. Какой показатель обычно минимизируется и какой выступает в качестве ограничения при гидродинамическом расчете дренажа?
7. Что такое метод фильтрационных сопротивлений? Как формулируются его основные принципы?
8. Реализуйте принцип построения расчетных зависимостей методом фильтрационных сопротивлений для определения понижения в скважине для системы взаимодействующих несовершенных сква-

жин, расположенных в полуограниченном пласте с граничными условиями первого рода.

9. Какой физический смысл имеет фильтрационное сопротивление? Запишите примеры фильтрационных сопротивлений при расчете понижения в одной несовершенной скважине у несовершенной реки. Зависит ли величина фильтрационного сопротивления напорного потока от понижения уровня в пласте?
10. Каким образом видоизменяются уравнения для оценки стационарного и нестационарного подпоров, применительно к изучению фильтрации в зоне действия горизонтальных дрен?
11. В каких гидрогеологических условиях целесообразно использование вертикального систематического дренажа? Каким образом видоизменяются уравнения для гидродинамического расчета этого типа дренажа?

### Лекция № 20. Основы изучения гидродинамического режима и баланса подземных вод

20.1. Учение о режиме и балансе является самостоятельным направлением в гидрогеологии. Результаты исследований режима и баланса используются для обоснования решаемых задач при оценке запасов подземных вод, обосновании инженерных мелиораций, прогнозов обводненности месторождений полезных ископаемых, подпора уровня в районе гидротехнических сооружений.

20.2. Режим – это текущая последовательность изменения показателей процесса фильтрации (уровня, расхода) во времени. Баланс – это количественная оценка всех приходящих на исследуемый расчетный участок и уходящих с него расходов воды. Эти расходы воды называются режимообразующими факторами. Уравнение режима и баланса имеет вид (рис. 19.1)

$$\mu \frac{\Delta H^t}{\Delta t} = \frac{q_{wf} - q_{ow}}{\Delta x_{\varphi}} + W_s - W_{in} \pm W_{ev} , \quad (20.1)$$

где  $\Delta H^t = H_{2,s+2} - H_{2,s}$  - изменение уровня подземных вод за период  $\Delta t$ , м;

$q_{wf}$ ,  $q_{ow}$  - приток и отток латерального потока на расчетном участке длиной  $\Delta x_{\varphi}$ ,  $m^2/сут$ ;

$W_s$ ,  $W_{in}$ ,  $W_{ev}$  - инфильтрационное питание, испарение, глубинное перетекание в пределах расчетного участка,  $m/сут$ .

Левая часть уравнения (20.1) представляет собой показатель гидродинамического режима, правая его часть состоит из режимообразующих факторов, определяющих изменение режима. В том случае, если правая часть равна нулю, за расчетный период  $\Delta t$  изменения уровня нет ( $\Delta H^t = 0$ ) - стационарный режим, если правая часть больше нуля, то происходит подъем уровня, если меньше нуля, то снижение уровня. Г.Н. Каменский впервые связал типы режима подземных вод с количественной оценкой режимообразующих факторов.

20.3. Из (20.1) можно получить уравнение водного баланса путем умножения всех его членов на  $\Delta x \cdot \Delta t$ :

$$\mu \Delta H' \Delta x = (q_{\text{wf}} - q_{\text{sw}}) \Delta t + (W_s - W_{\text{sw}} \pm W_{\text{es}}) \Delta x \cdot \Delta t \quad (20.2)$$

Здесь  $(q_{\text{wf}} - q_{\text{sw}}) \Delta t$  отражает изменение объема воды за счет подземного стока,  $(W_s - W_{\text{sw}} \pm W_{\text{es}}) \Delta x \cdot \Delta t$  - накопление (+) или расходование (-) объема воды за счет вертикального водообмена и  $\mu \Delta H' \Delta x$  - результирующая водного баланса, характеризующая накопление (+) или убыль (-) запасов воды в выделенном расчетном участке потока  $\Delta x$  за время  $\Delta t$  (емкостное регулирование). Полную связь баланса и режима уровня можно получить, если выразить элементы баланса в уравнении (20.2) через уровни подземных вод в разных сечениях:

$$q_{\text{wf}} = k \cdot h_{\text{wf}} \frac{H_{3,s+1} - H_{2,s+1}}{\Delta x_{2-3}}, \quad q_{\text{sw}} = k \cdot h_{\text{sw}} \frac{H_{2,s+1} - H_{1,s+1}}{\Delta x_{1-2}}, \quad (20.3)$$

где  $H_{1,s+1}$ ,  $H_{2,s+1}$ ,  $H_{3,s+1}$  - уровни в расчетных сечениях на промежуточный по отношению к  $S$  и  $S+2$  момент времени. Из уравнений (20.2) и (20.1) следует, что изменение уровня подземных вод есть результат взаимодействия элементов водного баланса потока.

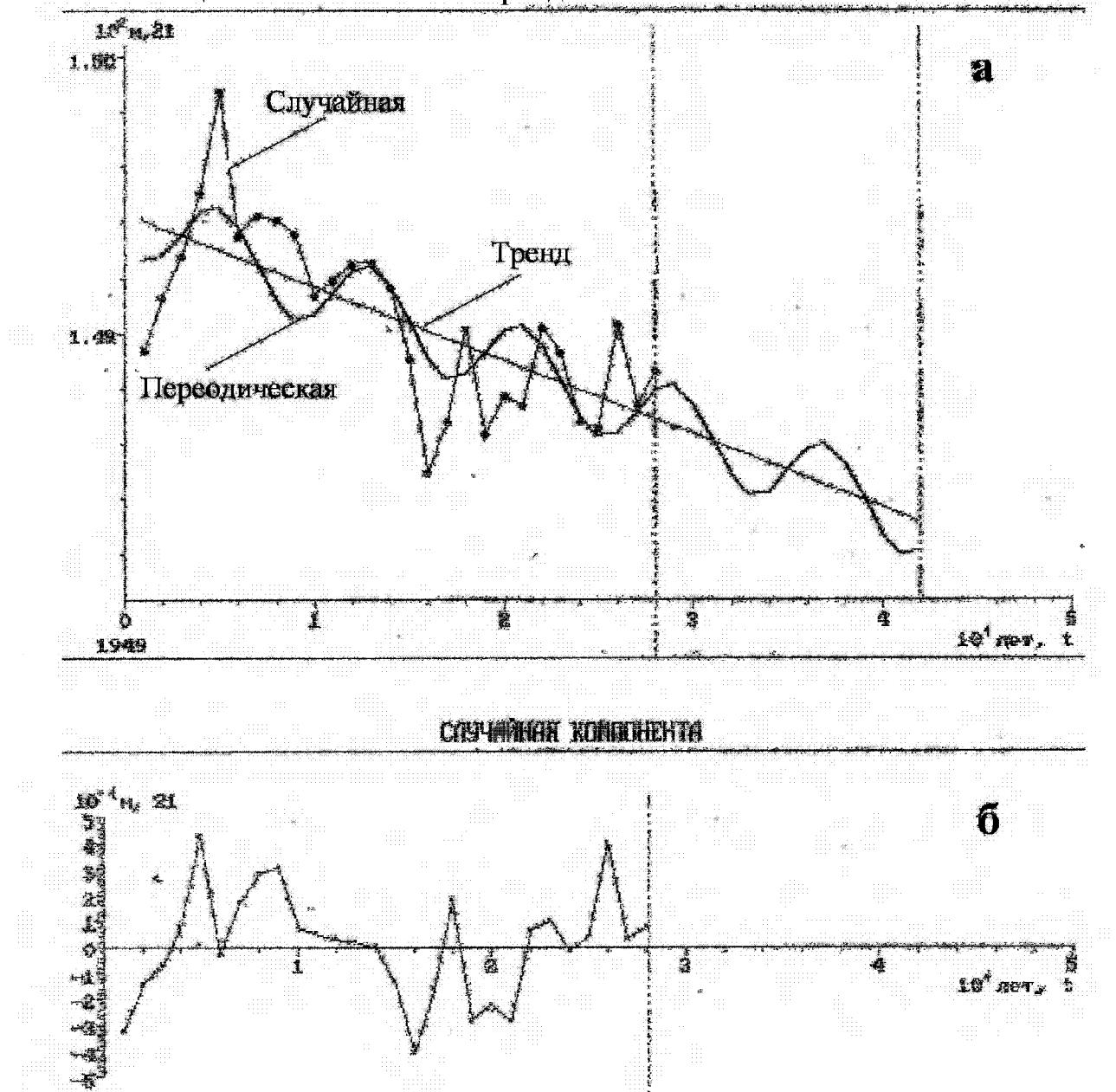
20.4. Структура режима обычно включает в себя три компонента, которые совместно проявляются в сезонном и многолетнем ходе изменения уровня: тренд, периодическая и случайная составляющие (рис. 20.1).

Трендом называется монотонное изменение уровня на протяжении значительного периода времени. Тренд формируется обычно под влиянием техногенных факторов. Возможно формирование тренда и под воздействием естественных факторов, связанных с проявлением многовековой цикличности земных процессов. Так как ограниченные периоды наблюдений за режимом подземных вод (продолжительностью 30–40 лет) оказываются существенно меньшими, чем длительность многовековых процессов, мы воспринимаем только часть этого длительного цикла, проявляющегося в виде монотонного последовательного снижения или повышения уровня.

Тренд может быть линейным и нелинейным. Существование линейного тренда, как это видно из уравнения (20.1), свидетельствует о неизменности действия режимообразующих факторов, т.е. правая часть уравнения не меняется, тогда и  $\Delta H / \Delta t = \text{const}$ . Тренд будет положительным при постоянном преобладании инфильтрации и притока и отрицательным в случае преобладания оттока и испарения, глубинного оттока.

Генетическая природа периодических колебаний уровня связана с сезонными или многолетними изменениями режимообразующих факторов так, что их алгебраическая сумма меняет свой знак. В этом случае определенные периоды времени характеризуются положительным балансом подземных вод и  $\Delta H / \Delta t > 0$ , происходит подъем уровней. В последующий период баланс подземных вод оказывается отрицательным, т.е. расходные статьи  $(q_{\text{sw}} + W_{\text{sw}} \cdot \Delta x)$  преобладают над приходными  $(q_{\text{wf}} - W_s \cdot \Delta x)$ , следовательно,  $\Delta H / \Delta t < 0$  и происходит снижение уровня воды. Обычно проявляется сезонная (по сезонам го-

да) и многолетняя периодичность. Последняя чаще всего связана с деятельностью Солнца и имеет 11-летний период колебаний.



**Рис. 20.1. Структура типового графика режима уровня подземных вод**  
(а – все составляющие изменение уровня компоненты; б – снятая отдельно случайная компонента)

Случайная составляющая изменения уровней связана с многообразием процессов, которые очень трудно изучить и практически невозможно предсказать. К числу таких процессов можно отнести выпадение катастрофически большого количества осадков, сопровождающееся увеличением инфильтрационного питания и подпором в реках, либо длительные засухи, приводящие к противоположному эффекту. Возникающие при этом изменения уровня не являются закономерными, хотя и происходят в полном соответствии с уравнением (20.1). Случайная составляющая служит мерой нашего незнания природных процессов, которые мы не можем изучить и предсказать.

Таким образом, любой длительный ряд наблюдений за уровнем подземных вод может быть представлен в виде

$$H(t) = H_{mp}(t) + H_{np}(t) + \varepsilon \quad , \quad (20.4)$$

где  $H_{mp}(t)$  - тренд,

$H_{np}(t)$  - периодическая составляющая,

$\varepsilon$  - случайная составляющая.

20.5. При изучении режима используются стохастические и детерминированные модели. Конечной задачей является составление прогноза режима на расчетный период эксплуатации проектного инженерного сооружения.

Выделяют естественный и нарушенный типы режима. Естественный режим определяется преимущественным влиянием климата и гидрологии. Эти факторы проявляются в виде периодической и случайной составляющих режима уровня, изучение которых связано с использованием стохастических моделей. В формировании нарушенного режима ведущую роль играют техногенные воздействия, имеющие в основном детерминированный характер (водоотбор, орошение и т.п.). Поэтому нарушенный режим изучают с применением аналитических уравнений или моделирования.

20.6. На первом этапе исследований для выявления типа режима применяют комплекс вероятностно-статистических методов: тренд, гармонический, регрессионный анализ, автокорреляция. В результате этого выделяют основные компоненты режима: тренд, периодическую и случайную составляющие, определяют степень связи режима подземных вод с климатическими и гидрологическими факторами, а также связь режима изменения уровня на разных участках изучаемой территории, в разных водоносных горизонтах. Эти методы позволяют выполнить районирование территории по особенностям режима, выявить степень нарушенности естественного режима техногенными воздействиями. Для естественного режима характерно преобладание периодической и случайной составляющей, для нарушенного – тренда.

На втором этапе выполняется количественная оценка режимообразующих факторов, как аналитическими методами, так и методом конечных разностей. В основе последнего лежит использование уравнения (20.2), записанного относительно  $W \cdot \Delta x \cdot \Delta t$  и уравнение (20.3). При этом определяются основные элементы баланса, входящие в уравнение (20.2) по сезонам года, за каждый год и за весь период наблюдений. Метод конечных разностей применяется при наличии данных регулярных измерений уровня, проведенных на определенной системе наблюдательных скважин. Эти скважины должны быть расположены по потоку (по линии тока) подземных вод, на участке однородного строения пласта, в пределах одного района с одинаковым типом изменения режима уровня, выявленном на первом этапе исследования. Расстояние между скважинами должны обеспечивать значимую разницу в уровнях воды (не менее 0,3 м), то есть составлять, как правило, не менее 200 м. В качестве расчетных  $\Delta t$  используются периоды монотонного изменения уровня во всех скважинах расчетного створа (рис. 20.2 а, б).

С помощью этого метода рассчитывается величина питания грунтовых вод  $W$ , отвечающая времени  $\Delta t$ . Положительное значение  $W$  отвечает инфильтрации атмосферных осадков, отрицательное – суммарному испарению и транспирации. Метод позволяет исследовать баланс подземных вод в целом по сезонам года (уравнение 20.2) и определить среднегодовые и многолетние показатели режима и отдельных статей баланса.

В последнем случае осуществляется суммирование элементов баланса в следующем виде

$$\frac{\sum_{i=1}^n \mu \cdot \Delta H_i \cdot \Delta x}{\sum_{i=1}^n \Delta t_i} = \frac{\sum_{i=1}^n (q_{op} - q_{os}) \Delta t_i}{\sum_{i=1}^n \Delta t_i} + \frac{\sum_{i=1}^n (H_s + W_{in} \pm W_{ex}) \Delta x \cdot \Delta t_i}{\sum_{i=1}^n \Delta t_i}, \quad (20.5)$$

где  $1,2,\dots,n$  – порядковый номер и общее количество интервалов  $\Delta t$  за выбранный период наблюдений (год или несколько лет).

Соотношение элементов баланса позволяет выделить главные режимообразующие факторы и установить основные закономерности формирования режима подземных вод, оценить тенденции в его изменении на прогнозный период (рис. 20.2 в).

20.7. При расчетах расходов неустановившегося потока воды по формулам установившегося движения (20.3) возникает определенная погрешность. Чтобы эта погрешность была менее  $10\%$  (по С.Ф. Аверьянову [1]), необходимо соблюдать условие

$$f_0 = \frac{a \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} \geq 0,80 \quad (20.6)$$

Из формулы (20.6) следует, что

$$\Delta x \leq 1,12 \sqrt{a \cdot \Delta t} \quad (20.7)$$

По этой формуле можно вычислить расстояние между скважинами, при котором можно описывать неустановившееся движение как последовательную смену установленшихся течений, а для расчета расхода между сечениями на расстоянии  $\Delta x$  применять формулу Дарси.

20.8. Большая изменчивость естественного режима уровней характерна для грунтовых вод. Эти воды подвержены прямому воздействию метеорологических и гидрологических факторов. Условия формирования режима уровней связаны с различной расчлененностью рельефа, глубиной эрозионного вреза рек, естественной дренированностью территории. Важным фактором, определяющим режим уровней, является так же состав пород, слагающих зону аэрации, и водоносный горизонт, глубина до уровня воды. В трещиноватых и закартированных породах колебания уровней характеризуются большими амплитудами (до 10 м).

Основными типами режима грунтовых потоков являются водораздельный и прибрежный.

Водораздельный (междуречный) тип режима характерен для территорий, удаленных от крупных поверхностных водотоков. Здесь развиты потоки, которые схематизируются как неограниченные в плане с параллельным во времени

перемещением поверхности грунтовых вод. Основными режимообразующими факторами являются инфильтрация атмосферных осадков и отток подземных вод, как латеральный по пласту, так и нисходящая фильтрация в нижезалегающие водоносные горизонты. При малых глубинах залегания воды одним из основных режимообразующих факторов становится испарение.

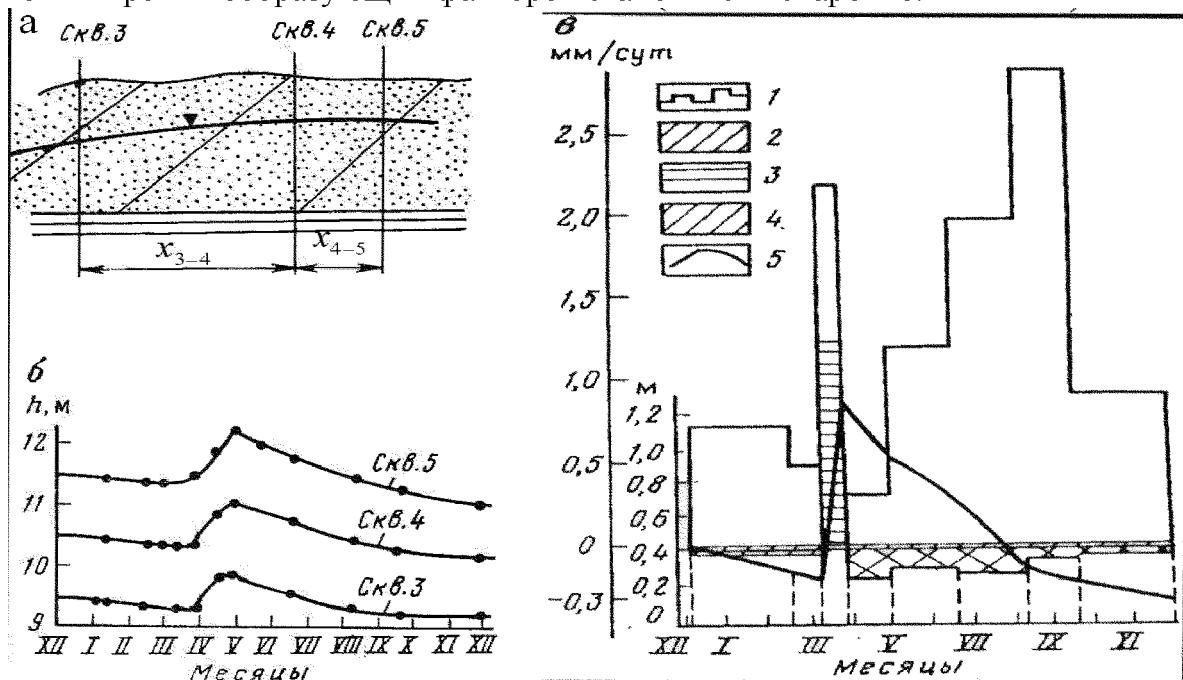


Рис. 20.2. Схематический гидрологический разрез с наблюдательными скважинами (а), графики колебания УГВ (б) и изменение элементов водного баланса (в)

(1 – осадки; 2 – подземный сток; 3 – инфильтрация; 4 – испарение; 5 – колебания УГВ в центральной скважине)

Наибольшая интенсивность инфильтрации характерна для периода весеннего снеготаяния, в летне-осенний период инфильтрационное питание практически полностью расходуется на испарение, в зимний период зона аэрации промерзает.

В долинах крупных и средних рек, имеющих хорошую гидравлическую связь с грунтовыми водами, развит прибрежный (террасовый) тип режима уровней. Эти потоки схематизируются в виде полуограниченных в плане. Основными режимообразующими факторами здесь являются приток-отток, положение уровня подземных вод преимущественно зависит от сезонных колебаний уровня в реке. Область распространения прибрежного типа режима ограничена проникновением изменения уровня, вызванного паводком на реке, вглубь берега. Величина этого проникновения зависит, главным образом, от уровнепроводности пласта и при типичных для грунтовых вод значениях  $a = 500 - 3000 \text{ м}^2/\text{сут}$  составляет  $400 - 1200 \text{ м}$ .

Напорные воды, изолированные вышележащими водоупорами, характеризуются меньшей изменчивостью положения уровней. Здесь могут практически не наблюдаться сезонные колебания, но более отчетливо фиксируются многолетние колебания и тренд.

### Вопросы к лекции № 20

1. Какие компоненты выделяют в структуре многолетнего ряда наблюдений за уровнем подземных вод?
2. Какое изменение уровня во времени называется трендом? Под влиянием каких факторов формируется тренд?
3. Под влиянием каких факторов формируется периодическая составляющая изменения уровня подземных вод? Проиллюстрируйте изменчивость этих факторов путем анализа уравнения водного баланса.
4. С какими факторами формирования режима связана случайная составляющая?
5. С какими типами режима подземных вод обычно связаны периодическая и случайная составляющая?
6. Какие элементы водного баланса определяют методом конечных разностей?
7. Какие требования предъявляются при организации режимной сети наблюдательных скважин (расположение, точность, частота и период наблюдений)?
8. Охарактеризуйте основные особенности водораздельного типа режима грунтовых вод? Какие расчетные схемы используются при анализе этого типа режима?
9. В чем основные причины ограниченного по площади распространения территории, где характерен прибрежный тип режима уровней грунтовых вод? Какие расчетные схемы используются при анализе этого типа режима?
10. Какие периоды колебаний более характерны для грунтовых, а какие - для напорных вод? С чем это связано?
11. Какие задачи ставятся перед статистической обработкой временных рядов?

### Лекция № 21 Определение параметров пласта по данным наблюдений за режимом подземных вод

21.1. Наблюдения за режимом подземных и поверхностных вод, направленные на определение параметров строения и питания (разгрузки) водоносных пластов, называются опытно-фильтрационными наблюдениями (ОФН). К параметрам строения пласта относят коэффициент фильтрации  $k$  (водопроводимости  $T$ ), гравитационную емкость  $\mu$ , параметр перетока ( $k_0/m_0$ ), параметр сопротивления ложа водотоков ( $\Delta L_{ns}$ ). К параметрам питания и разгрузки относят интенсивность инфильтрации ( $+W_a$ ) или испарения ( $-W_u$ ), глубинное питание ( $-W_{es}$ ), фильтрационные потери из каналов.

Типы определяемых параметров и типовые гидрогеологические условия показаны в таблице № 21.1.

21.2. Для расчетов в условиях стационарного режима фильтрации используется уравнение водного баланса, записанное для расчетного элемента площадью  $F$  в потоке подземных вод (рис. 21.1):

$$Q_{ap} - Q_{os} + (W_a - W_u - W_{es}) \cdot F = 0 \quad , \quad (21.1)$$

где  $Q_{ap}$ ,  $Q_{os}$  - расходы притока и оттока воды в расчетном элементе,

$W_a$ ,  $W_u$ ,  $W_{en}$  - величины инфильтрационного питания, испарения с уровня грунтовых вод и глубинного питания в нижележащие водоносные горизонты. Эти величины предполагаются неизменными по площади.

Для количественной оценки составляющих уравнения (21.1) необходимо иметь данные наблюдений не менее чем в трех сечениях (наблюдательных скважинах), расположенных по потоку подземных вод (рис. 21.1):

$$(k \cdot h)_{1-2} \frac{H_1 - H_2}{\Delta l_{1-2}} B_{1-2} - (k \cdot h)_{2-3} \frac{H_2 - H_3}{\Delta l_{2-3}} B_{2-3} + (W_a + W_u - W_{en}) \cdot B_{1-3} \cdot \frac{\Delta l_{1-3}}{2} = 0. \quad (21.2)$$

Здесь  $(k \cdot h)_{1-2}$ ,  $(k \cdot h)_{2-3}$  и  $B_{1-2}$ ,  $B_{2-3}$  - среднее значение водопроводимости и ширины между сечениями 1–2 и 2–3,

$H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ ,  $\Delta l_{1-2}$ ,  $\Delta l_{2-3}$  - уровни и расстояния между соответствующими сечениями.

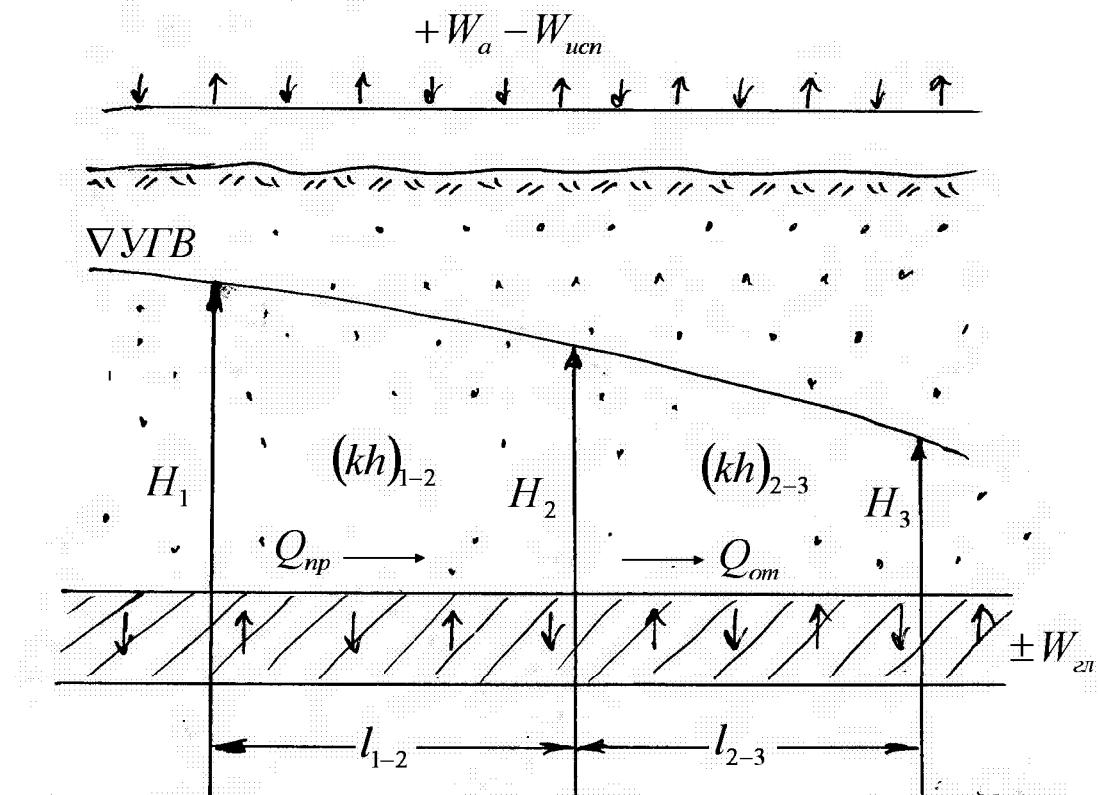


Рис. 21.1. Расчетная схема к уравнению водного баланса

В качестве расчетных значений  $H$  обычно используются среднемноголетние данные или наблюдения, выполненные в меженный период, когда уровни достигают своего минимума и некоторое время остаются неизменными.

21.2.1. При отсутствии вертикального водообмена ( $W_a = W_{en} = 0$ ), последний член в формуле (21.2) равен нулю и она приобретает вид характерный для ленты тока в гидродинамической сетке:

$$(k \cdot h)_{1-2} \frac{H_1 - H_2}{\Delta l_{1-2}} B_{1-2} - (k \cdot h)_{2-3} \frac{H_2 - H_3}{\Delta l_{2-3}} B_{2-3} = 0. \quad (21.3)$$

Таблица № 21.1

## Типовые условия определения гидродинамических параметров

<i>Гидрогеологические условия</i>	<i>Определяемые параметры</i>
Стационарный режим фильтрации	
1. Грунтовые воды на водоразделах	Интенсивность инфильтрации ( $W_s - W_u$ ) и глубинного перетока ( $W_{eo}$ )
2. Грунтовые воды в области разгрузки	Водопроводимость пласта ( $T$ ), сопротивление ложа водотока ( $\Delta L_{no}$ )
Нестационарный режим фильтрации	
3. Сезонные и многолетние изменения уровня грунтовых вод на водоразделах	Интенсивность инфильтрации ( $W$ ), гравитационная емкость ( $\mu$ ), глубинное перетекание ( $W_{se}$ )
4. Изменения уровня грунтовых вод в долине реки	Гравитационная емкость ( $\mu$ ), интенсивность инфильтрации ( $W_s - W_u$ )

По формуле (21.3) может быть определено изменение величины водопроводимости пласта вдоль потока подземных вод

$$\frac{(k \cdot h)_{2-3}}{(k \cdot h)_{1-2}} = \frac{H_1 - H_2}{H_2 - H_3} \frac{B_{1-2}}{B_{2-3}} \frac{\Delta L_{2-3}}{\Delta L_{1-2}} = \frac{I_{1-2} \cdot B_{1-2}}{I_{2-3} \cdot B_{2-3}} \quad (21.4)$$

21.2.2. В условиях хорошей изученности фильтрационных свойств основного пласта по формуле (21.2) можно оценить величину вертикального водообмена. При этом положительные величины  $W$  следует связывать с наличием инфильтрационного питания. При получении отрицательных значений  $W$  следует обратить внимание на глубину до уровня грунтовых вод. При близком его залегании к поверхности земли (до 2 м) полученное значение скорее всего характеризует испарение с поверхности грунтовых вод. При глубоком его залегании (глубже 2-3 м), получение отрицательное  $W$  характеризует глубинное питание -  $W_{en} = \frac{k_0 \cdot \Delta H_0}{m_0}$  в нижезалегающие водоносные пласти.

21.2.3. Для прибрежных участков водоносного горизонта формула (21.3) преобразуется следующим образом (рис. 21.2):

$$(k \cdot h)_{1-2} \frac{H_2 - H_1}{\Delta L_{1-2}} - (k \cdot h)_{P-1} \frac{H_1 - H_P}{\Delta L_{P-1} + \Delta L_{no}} = 0, \quad (21.5)$$

где  $\Delta L_{no}$  - показатель, характеризующий дополнительные потери напора, которые связаны с деформацией потока под влиянием несовершенства вреза реки в водоносный горизонт и закальматированность русла реки.

В случае однородного строения пласта из (21.5) величина  $\Delta L_{no}$  определяется простой формулой:

$$\Delta L_{\text{вр}} = \frac{H_1 - H_p}{H_2 - H_1} \Delta l_{p-1} - \Delta l_{p-1} \quad (21.6)$$

Необходимым условием для использования уравнения (21.6) является расположение скв. 1 на расстоянии исключающем влияние несовершенства вреза реки ( $\Delta l_{p-1} > h_{\varphi}$ ).

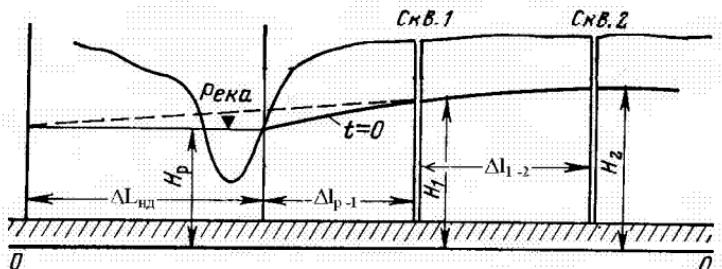


Рис. 21.2. Расчетная схема определения параметра  $\Delta L_{\text{вр}}$  (по В.М. Шестакову)

21.3. Применение аналитических решений для определения параметров в условиях нестационарного режима предполагает, что уровнепроводность и питание подземных вод остаются неизменными по площади. При этом должны соблюдаться условия (20.6) и (20.7).

В условиях нестационарного режима фильтрации используется решение дифференциального уравнения для полуоткрытого пласта с инфильтрационным питанием. В общем случае при изменении уровня воды в реке это решение имеет вид (см. лекцию № 17):

$$\Delta H(x, t) = \Delta H^0 \cdot R(\lambda) + \frac{W \cdot t}{\mu} [1 - R(\lambda)] \quad (21.7)$$

где  $\Delta H(x, t)$  - изменение уровня в сечении  $x$  за период  $\Delta t$ ,

$\Delta H^0$  - изменение уровня на урезе реки;

$$\lambda = \frac{x}{2\sqrt{at}} \quad (21.8)$$

Здесь  $x$  - расстояние от уреза реки до расчетного сечения,

$$a = \frac{kh}{\mu} \quad \text{- уровнепроводность,}$$

$\mu$  - водоотдача.

21.3.1. В период зимней межени в результате промерзания зоны аэрации можно считать  $W = 0$ . Тогда уравнение (21.7) упрощается

$$\Delta H(x, t) = \Delta H^0 \cdot R(\lambda) \quad (21.9)$$

или

$$R(\lambda) = \frac{\Delta H(x, t)}{\Delta H^0} \quad (21.10)$$

Выбрав участок следующего после стационарного положения монотонного во времени изменения уровня в реке и в расчетном сечении (наблюдательная скважина), определяют  $\Delta H^0$ ,  $\Delta H(x, t)$ , далее находят  $R(\lambda)$ , по таблице определяют  $\lambda$  и по зависимости (21.8) находят

$$a = \frac{x^2}{4\lambda^2 \Delta t} \quad (21.11)$$

Если река имеет несовершенный врез, то вместо  $x$  принимаем  $(x + \Delta L_{\text{рез}})$ .  
(21.12)

21.3.2. При наличии данных наблюдений по двум скважинам, расположенным по линии тока (обычно в створе перпендикулярном реке), сведения о гидрологическом режиме реки иметь не обязательно. В этом случае в качестве граничного условия выступает нижняя по потоку скважина, в которой принимают  $x = 0$  и  $\Delta H_1(0, t) = \Delta H^0$ , для верхней по потоку скважины за  $x$  принимается расстояние между скважинами, а изменение уровня соответствует  $\Delta H(x, t)$ . В этом случае нет необходимости учета несовершенства вреза реки.

21.3.3. При известных значениях уровнепроводимости пласта  $a$  и водоотдачи  $\mu$  может быть определена величина инфильтрационного питания  $W$  по видоизмененной формуле (21.7):

$$\frac{W}{t} = \frac{\mu (\Delta H(x, t) - \Delta H^0) \cdot R(\lambda)}{1 - R(\lambda)} \quad (21.13)$$

21.3.4. Данные наблюдений за режимом уровня в трех сечениях (скважинах) по потоку подземных вод позволяют независимо найти величину как уровнепроводности пласта  $a$ , так и величину  $W/\mu$ . Полагаем, что нижняя по потоку скважина — граничное условие. Здесь  $x = 0$  и  $\Delta H(0, t) = \Delta H^0$ . Тогда в двух других скважинах имеем (рис. 21.3):

$$\Delta H(x_1, t) = \frac{W \Delta t}{\mu} [1 - R(\lambda_1)] + \Delta H^0 \cdot R(\lambda_1) \quad (21.14)$$

и

$$\Delta H(x_2, t) = \frac{W \Delta t}{\mu} [1 - R(\lambda_2)] + \Delta H^0 \cdot R(\lambda_2) \quad (21.15)$$

$$\text{где } \lambda_{1,2} = \frac{x_{1,2}}{2\sqrt{a \cdot \Delta t}} \quad (21.16)$$

Вычтем (21.15) из (21.14):

$$\Delta H(x_1, t) - \Delta H(x_2, t) = [R(\lambda_1) - R(\lambda_2)] \cdot \left( \Delta H^0 - \frac{W \cdot \Delta t}{\mu} \right). \quad (21.17)$$

$$\text{Обозначим } \Delta R(\lambda, \bar{\lambda}) = R(\lambda_1) - R(\lambda_2) \quad (21.18)$$

$$\text{причем } \bar{\lambda} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{x_1}{x_2} \quad \text{и} \quad (21.19)$$

$$\Delta^2 H(x, t) = \Delta H(x_1, t) - \Delta H(x_2, t)$$

Из формулы (21.17) выражим:

$$\frac{W \cdot \Delta t}{\mu} = \Delta H^0 - \frac{\Delta^2 H(x, t)}{\Delta R(\lambda, \bar{\lambda})}, \quad (21.20)$$

а из формулы (21.14):

$$R(\lambda_1) = \frac{\Delta H(x_1, t) - \frac{W \cdot \Delta t}{\mu}}{\Delta H^0 - \frac{W \cdot \Delta t}{\mu}}. \quad (21.21)$$

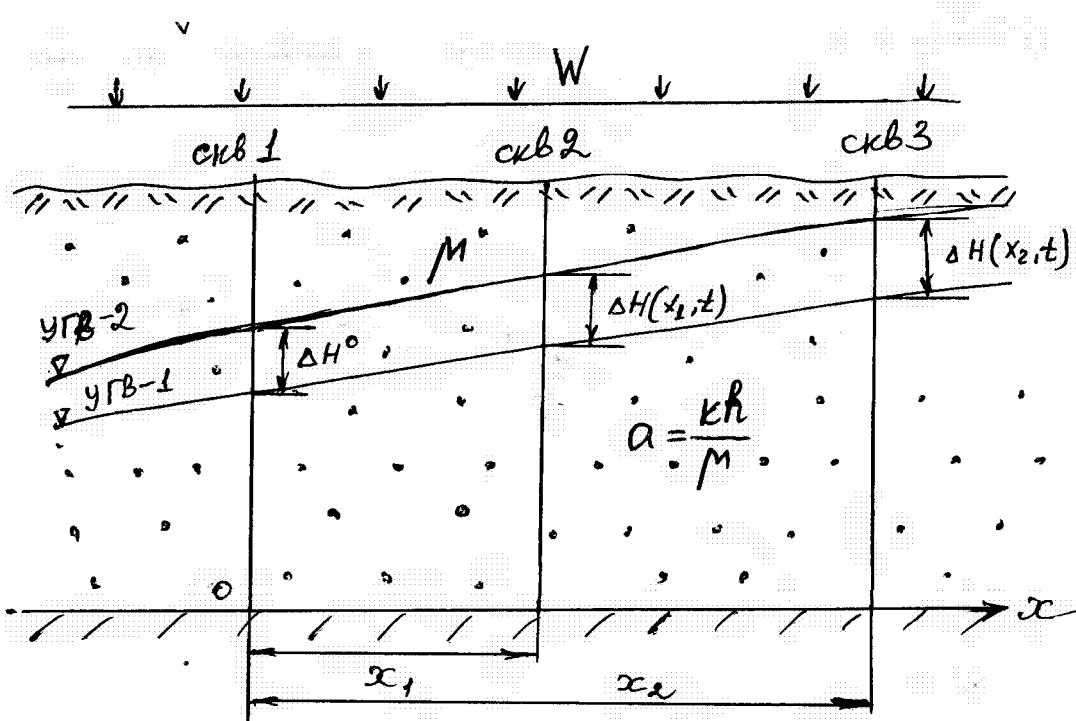


Рис. 21. 3. Расчетная схема определения параметра  $W/\mu$  и  $\alpha$  по трем сечениям в условиях нестационарного режима фильтрации

Имея ввиду (21.20), перепишем (21.21) в виде

$$R(\lambda_1) = [\Delta H(x_1, t) - \Delta H^0] \frac{\Delta R(\lambda, \bar{\lambda})}{\Delta^2 H(x, t)} + 1. \quad (21.22)$$

Задача решается методом итераций (последовательных приближений).

Задаемся из соображений наибольшего правдоподобия значением  $a = \frac{kh}{\mu}$ . На-

пример, полагая  $k = 5$  м/сут,  $h = 10$  м,  $\mu = 0,1$ , получим  $a = 500$  м<sup>2</sup>/сут. Определяем для конкретных условий  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $R(\lambda_1)$ ,  $R(\lambda_2)$  и далее по формуле (21.22) находим новое значение  $R(\lambda_1)$ , по таблице определяем  $\lambda_1$  и по формуле (21.11) вычисляем уточненное  $a_1$ . Полученное  $a_1$  используем для повторного цикла расчета и тем же порядком расчетов определяем второе уточненное значение  $a_2$ . Уточнения следует прекратить, если выполняется условие

$$\left| 1 - \frac{a_i}{a_{i+1}} \right| \leq \varepsilon, \quad (21.23)$$

где  $a_i$  и  $a_{i+1}$  предыдущее и текущее уточненное значение уровня проводимости,

$\varepsilon$  - допустимая ошибка вычисления параметра  $a$ . Обычно можно принять  $\varepsilon = 0,1$ .

После этого, используя уравнение (21.20), находим величину  $W/\mu$ .

Из анализа формулы (21.20) следует, что если в верхних по потоку скважинах изменения уровня за период  $\Delta t$  одинаковые,  $\Delta H(x_1, t) = \Delta H(x_2, t)$ , то

$$W = \frac{\Delta H^0 \cdot \mu}{\Delta t}. В этом случае оттока нет и пласт можно рассматривать как неограниченный в плане.$$

В том случае, если нет изменения уровня в нижней по потоку скважине ( $\Delta H^0 = 0$ ), имеем расчетную схему полуоткрытого пласта с  $H = \text{const}$ . Тогда из формулы (21.20) получим

$$\frac{W \cdot \Delta t}{\mu} = - \frac{\Delta^2 H(x, t)}{\Delta R(\lambda, \bar{\lambda})} \quad (21.24)$$

$$R(\lambda_i) = 1 + \frac{\Delta H(x_i, t) \cdot \Delta R(\lambda, \bar{\lambda})}{\Delta^2 H(x, t)}, \quad (21.25)$$

то есть вычисления упрощаются.

### Вопросы к лекции № 21

1. В условиях плоскопараллельной стационарной фильтрации по какому параметру гидродинамической сетки можно выявить изменения величины водопроводимости пласта?
2. Какой параметр может быть определен по среднемноголетним значениям уровня подземных вод в однородном пласте по створу вдоль потока на водоразделе?
3. Какой параметр может быть определен по значениям меженных уровней подземных вод по створу перпендикулярному урезу реки?
4. Какие допущения приняты при выводе формулы (21.6)?
5. Какие обратные задачи можно решать на основе уравнений плоскопараллельной стационарной и нестационарной фильтрации?
6. Какая исходная информация необходима для определения инфильтрационного питания по уравнению в конечных разностях?
7. На основе анализа формулы (21.13) запишите уравнение для определения величины инфильтрационного питания на водоразделах (далеко от реки)?
8. Какой период с характерным изменением уровня следует выбирать для определения величины уровня проводимости?
9. Какие факторы влияют на точность определения параметров при стационарном режиме фильтрации?
10. Какие существуют ограничения на расположение наблюдательных скважин, данные по которым используются для определения параметров, при нестационарном режиме фильтрации?

**ЧАСТЬ 4*****Основы влаго- и массопереноса в подземных водах*****Лекция № 22. Гидродинамические основы влагопереноса****22.1. Действующие силы и параметры процесса**

Влагопереносом называют процесс движения влаги, представляющий собой перенос свободной и физически связанной воды под действием гравитационных и сорбционных (молекулярных и капиллярных) сил. Влагоперенос происходит в зоне аэрации (ЗА), то есть в не полностью насыщенной водой среде.

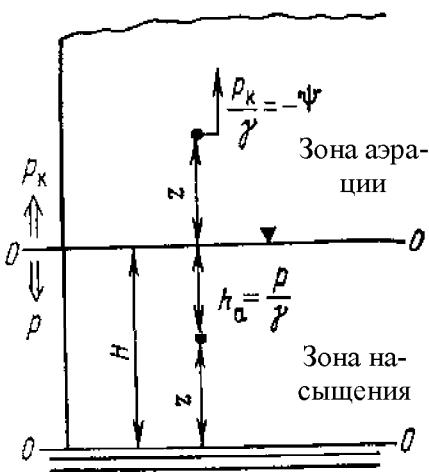


Рис. 22. 1. Расчетная схема к анализу влагопереноса

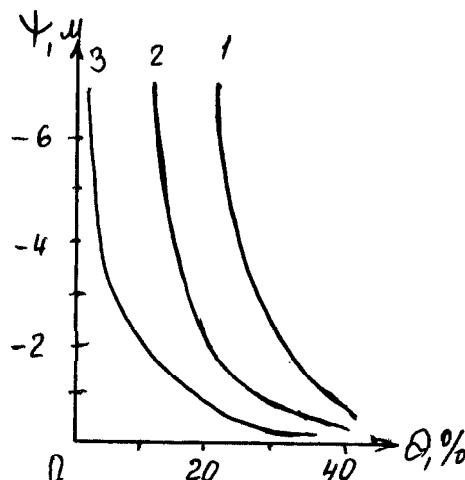


Рис. 22. 2. Типовые осесимметричные гидрофизические характеристики пород

$$\Psi = f(\Theta)$$

(для суглинка – 1, супеси – 2 и песка – 3)

Действие основных сил при влагопереносе математически можно выразить так же, как и при процессе фильтрации. Влагоперенос происходит в вертикальной плоскости по координате  $z$ . Напор  $H$  определяется по зависимости

$$H = \frac{P_k}{\gamma} + z \quad , \quad (22.1)$$

где  $P_k$  - давление всасывания,

$z$  - геометрическая высота точки над плоскостью сравнения, за которую принимают уровень грунтовых вод – УГВ (рис.22.1),

$\gamma$  - удельный вес воды.

Давление всасывания  $P_k$  по аналогии с пьезометрической высотой определяется как

$$P_k = -\psi \cdot \gamma \quad , \quad (22.2)$$

где  $\psi$  - высота всасывания, аналогична высоте капиллярного поднятия.

Тогда подставив (22.2) в (22.1) получим

$$H = -\psi + z \quad (22.3)$$

Здесь знак минус указывает, что  $\psi$  действует в направлении, обратном действию сил тяжести. Высота всасывания  $\psi$  зависит от влажности  $\Theta$  и гранулометрического состава породы. При влажности пород, равной полной влагоемкости ( $\Theta = ПВ$ ),  $\psi = 0$ . Высоту всасывания часто называют потенциалом почвенной влаги, а изолинии  $\psi$  - изолиниями потенциала влаги. Зависимость  $\psi = f(\Theta)$  называется основной гидрофизической характеристикой (ОГХ). Она зависит от гранулометрического состава и водных свойств пород и существенно различается для песков, супесей и суглинков (рис. 22.2).

Для расчетов экспериментальную кривую  $\psi = f(\Theta)$  аппроксимируют различными аналитическими зависимостями, например, для супесей принимают:

$$\psi = -h_k \ln \overline{\Theta} \quad (22.4)$$

$$\text{где } \overline{\Theta} = \frac{\Theta - MMB}{ПВ - MMB} \quad (22.5)$$

Здесь:  $MMB$  и  $ПВ$  - максимальная-молекулярная и полная влагоемкость,  $\Theta$  - влажность породы,

$h_k$  - приведенная высота капиллярного поднятия, определяется как высота прямоугольника на эпюре влажности пород (рис. 22.3), влагозапасы которого равны фактическим влагозапасам пород ЗА, т.е.

$$h_k = \frac{1}{ПВ} \int \Theta(z) dz \quad (22.6)$$

Величина  $h_k$  примерно соответствует половине мощности зоны капиллярной каймы.

Связь коэффициента влагопереноса  $k_e$  от влажности (рис. 22.4) выражается следующей зависимостью (лекция № 18):

$$k_e = k \overline{\Theta}^n \quad , \quad (22.7)$$

где  $k$  - коэффициент фильтрации насыщенных пород при  $\overline{\Theta} = 1$ ,

$n$  - показатель степени, причем  $n = 3 \div 5$ .

## 22.2. Основной закон влагопереноса

Процесс влагопереноса описывается уравнением, аналогичным уравнению Дарси, которое для скорости движения влаги  $V_z'$  имеет вид:

$$V_z' = -k_e \frac{dH}{dz} \quad (22.8)$$

и носит название уравнение Дарси-Клюта.

Знак минус показывает, что движение влаги происходит в сторону противоположному положительному направлению градиента напора  $H$ . Направление оси  $z$  - вверх от УГВ.

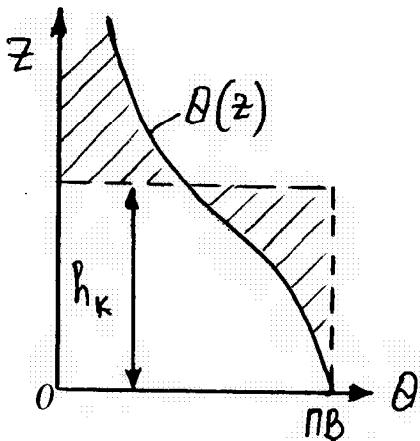


Рис. 22. 3. К определению  $h_k$   
(заштрихованы эквивалентно заменя-  
емые части эпюры влажности  $\Theta(z)$ )

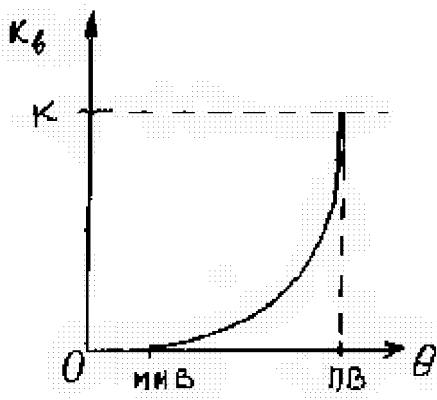


Рис. 22. 4. Типовой график зависимости коэффициента влагопереноса от влажности пород

Подставив в (22.8) выражение (22.3) получим

$$\mathcal{V}_z = k_e \frac{d\psi}{dz} - k_e \quad (22.9)$$

Здесь первый член правой части формулы характеризует действие капиллярных сил, а второй – гравитации. Аналогично из (22.4) и (22.7) можно выразить  $k_e = k \cdot e^{-\frac{\psi_n}{h_k}}$

Если влажность по разрезу постоянна ( $\Theta = const$ ), то  $\frac{d\psi}{dz} = 0$ , что свидетельствует об отсутствии действия капиллярных сил. В этом случае скорость влагопереноса равна коэффициенту влагопереноса. Вся поступающая в ЗА инфильтрационная влага идет транзитом через эту зону с постоянной скоростью при градиенте напора равном 1, до УГВ. Эта схема соответствует процессу свободного просачивания. Обычно такие условия принимают при гидравлической постановке изучения процесса влагопереноса, например, при проведении опытных работ с целью определения  $k_e$  песков наливами в шурфы.

В условиях квазистационарного влагопереноса на основе уравнения (22.9) можно оценить направленность вертикального водообмена. Запишем уравнение (22.9) в следующем виде

$$\frac{\mathcal{V}_z}{k_e} = \frac{d\psi}{dz} - 1 \quad (22.10)$$

При  $\mathcal{V}_z = 0$  – равновесное состояние влаги, влагопереноса нет, имеем  $\frac{d\psi}{dz} = 1$ , то есть  $\psi = z$ .

Таким образом, зная профиль влажности  $\Theta = f(z)$  в зоне аэрации при отсутствии влагопереноса, автоматически получаем ОГХ или  $\psi = f(\Theta)$ .

При  $\mathcal{V}_z > 0$  имеем  $\frac{d\psi}{dz} > 1$  или  $\psi > z$  - этот график  $\psi(z)$  соответствует исчезновению зоны аэрации, испарению с УГВ и показан в нижней части рис.22.5а.

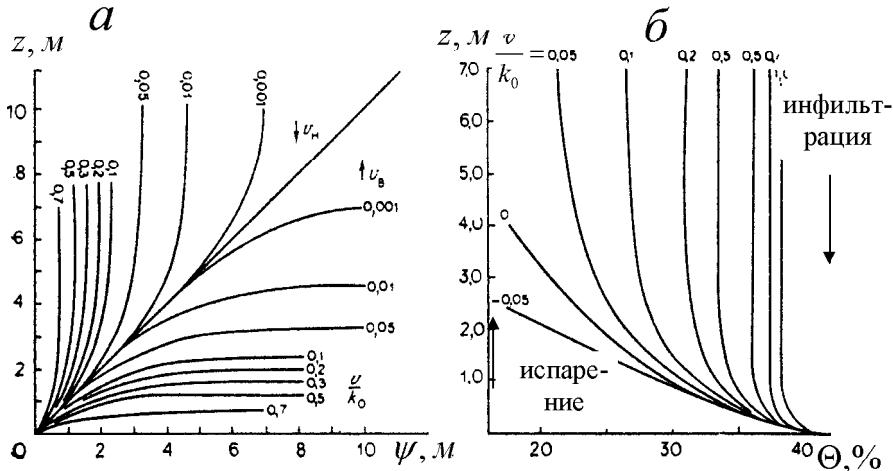


Рис. 22. 5. Исследование направленности вертикального водообмена анализом графиков распределения величины высоты всасывания (а) и влажности (б) над УГВ (по И.С. Пашковскому)

При  $\mathcal{V}_z < 0$  имеем  $\frac{d\psi}{dz} < 1$  или  $\psi < z$  - это график увлажнения зоны аэрации и инфильтрации осадков (верхняя часть кривых на рис. 22.5а),

На рис. 22.5б показаны эпюры влажности грунтов ЗА, характерные для различной направленности влагопереноса и его интенсивности. Такие эпюры, построенные для различных по своим водно-физическим свойствам пород ЗА, называются палетками. По ним, зная реальное распределение  $\Theta = f(z)$ , можно оценить направление и скорость равномерного влагопереноса. При неоднородном строении ЗА каждый слой характеризуется своими зависимостями  $\Theta = f(z)$  и  $\psi = f(\Theta)$ , и поэтому на границе слоев наблюдается скачок влажности. Однако, при этом распределение влажности  $\Theta$  в каждом слое будет определяться зависимостью  $\psi(\Theta)$ , характерной именно для этого слоя, а на границах слоев будет наблюдаваться скачки влажности, как показано на рис. 22.6. При этом значения  $\Theta$  и  $\psi$  для каждого слоя зависят от  $k_e(\psi)$  этого слоя, что следует из уравнения неразрывности потока влаги, которое согласно (22.9) имеет вид

$$\kappa_{e_1} \left( \frac{d\psi_1}{dz} - 1 \right) = \kappa_{e_2} \left( \frac{d\psi_2}{dz} - 1 \right) \text{ или } \frac{d\psi_1}{dz} = \frac{\kappa_{e_1}}{\kappa_{e_2}} \left( \frac{d\psi_2}{dz} - 1 \right) + 1 \quad (22.12)$$

### 22.3. Неустановившееся движение влаги в зоне аэрации

Рассмотрим одномерный влагоперенос интенсивностью  $\mathcal{V}_z$ . Выделим по координате  $z$  единичный элемент с площадью в плане  $1 \text{ м}^2$ , длиной  $dz$  и соста-

вим для него уравнение неразрывности поступления влаги за время  $dt$  (рис. 22.7).

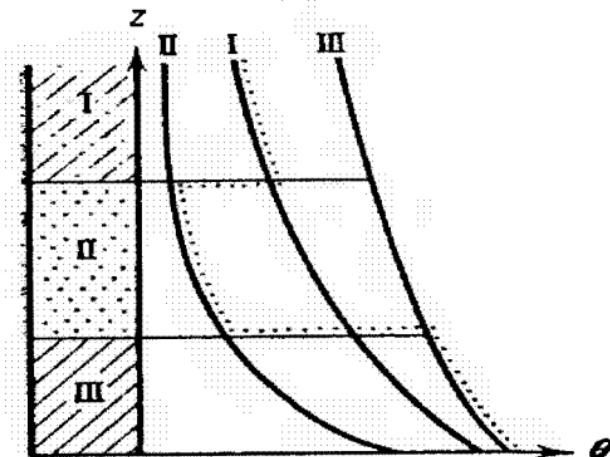


Рис. 22. 6. Равновесное распределение влажности в слонистой системе  
(цифры у кривых определяют принадлежность зависимости к слою,  
а точки — равновесное распределение влаги)

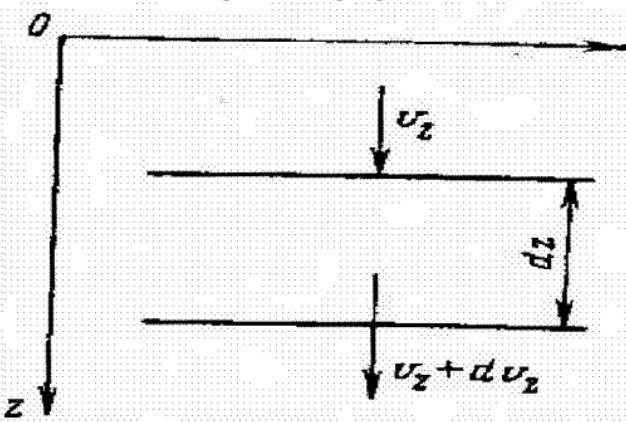


Рис. 22. 7. Схема к выводу уравнения неразрывности процесса влагопереноса  
Сверху в элемент  $dz$  поступает влага  $v_z dt$  и оттекает через нижнюю границу  
 $\left(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz\right) dt$ . Это изменение объема влаги компенсируется изменением

влажности в выделенном элементе, равное  $\frac{\partial \Theta}{\partial t} dt dz$ . После приравнивания и сокращения получаем уравнение неразрывности потока влаги:

$$-\frac{\partial \psi'}{\partial z} = \frac{\partial \Theta}{\partial t} \quad (22.13)$$

Подставив в это уравнение выражение (22.8), получим

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa_e \frac{\partial H}{\partial z} \right) = \frac{\partial \Theta}{\partial t} \quad (22.14)$$

Введем понятие коэффициента удельной емкости пород ЗА, по физическому смыслу аналогичное параметру емкости  $\mu_0$ . Этот коэффициент определяется

$$c = -\frac{\partial \Theta}{\partial \psi} \quad (22.15)$$

Из уравнения (22.3) имеем

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \psi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \Theta} \text{ или } \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial \Theta}{\partial t} \quad (22.16)$$

Тогда из уравнения (22.14) получим однородное относительно напора  $H$ , которое впервые было получено Клютом:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa_e \frac{\partial H}{\partial z} \right) = c \frac{\partial H}{\partial t} \quad (22.17)$$

Подставив в (22.13) зависимость (22.9), получим

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa_e \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial \kappa_e}{\partial z} = -\frac{\partial \Theta}{\partial t} \quad (22.18)$$

Введем понятие коэффициента диффузивности или влагопроводности

$$D = \frac{\kappa_e}{c} = -\kappa_e \frac{\partial \psi}{\partial \Theta} \quad (22.19)$$

Тогда уравнение (22.18) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( D \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial \kappa_e}{\partial z} = \frac{\partial \Theta}{\partial t} \quad (22.20)$$

то есть однородное относительно влажности  $\Theta$ .

Полагая упрощено в (22.7)  $n=1$  и, подставив (22.4) и (22.7) в (22.19), получим

$$D_0 = h_* \frac{d \ln \bar{\Theta}}{d \Theta} \cdot \kappa \cdot \bar{\Theta}, \text{ но из (22.5)} d \bar{\Theta} = \frac{d \Theta}{\Pi B - MMB} \text{ и } d \ln \bar{\Theta} = \frac{d \bar{\Theta}}{\bar{\Theta}}.$$

Тогда имеем

$$D_0 = \frac{\kappa h_*}{\Pi B - MMB} = \frac{\kappa h_*}{\mu_0} \quad (22.21)$$

то есть аналогично коэффициенту уровнепроводности. В этом случае уравнение (22.20) преобразуется в упрощенное линейное уравнение

$$D_0 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} + \frac{\kappa}{\mu_0} \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{\partial \Theta}{\partial t} \quad (22.22)$$

Решение этого уравнения для стационарного влагопереноса в капиллярной кайме имеет вид

$$\bar{\Theta} = \exp(-\alpha z) \quad , \quad (22.23)$$

$$\text{где } \alpha = \frac{\kappa}{D_0} \quad (22.24)$$

Уравнения (22.17), (22.20) и (22.22), как и дифференциальные уравнения движения грунтовых вод, могут содержать свободный член, характеризующий интенсивность истока  $W_0$  в виде отбора влаги корнями растений. Величина  $W_0$  зависит от глубины и времени, так как корневая система развивается со временем. При промерзании почвы влагоперенос не прекращается, льдообразование сопровождается накапливанием влагозапасов в почве до  $\Theta \leq MMB$ .

Границами ЗА являются поверхность земли и свободная поверхность подземных вод. Опыты показывают, что при дождевании разрушается структура грунта, что приводит к образованию тонкой пленки на поверхности, проницаемость которой существенно ниже проницаемости пород ЗА. В результате при инфильтрации под этим менее проницаемым слоем формируется режим влагопереноса определяемый  $\varPsi_z' = const$ . На этой поверхности может быть задано ГУ II рода:

$$\varPsi_z' = - \left( D \frac{\partial \Theta}{\partial z} + k_e \right) \quad (22.25)$$

В сухие периоды года происходит испарение воды из ЗА. При этом склонность испарения находится в зависимости от влажности. При влажности  $\Theta > \Theta_\kappa$ ,

где  $\Theta_\kappa$  влажность разрыва капилляров, испарение практически соответствует испаряемости с водной поверхности. Когда  $\Theta < \Theta_\kappa$ , испарение уменьшается по линейному закону до некоторого значения влажности близкого к  $MMB$ , после чего практически прекращается.

$$\text{Для условия } \Theta < \Theta_\kappa \quad (22.26)$$

можно использовать зависимость

$$\varPsi_z' = \delta(\Theta - MMB) \quad (22.27)$$

где  $\delta$  - константа, определяемая опытным путем так же, как  $\Theta_\kappa$  и  $MMB$ . Для условий сухого климата  $\delta = 0,04 - 0,08$  м/сут. Из соотношения (22.25) ГУ на поверхности земли в период испарения соответствует условию III рода

$$-(D \frac{\partial \Theta}{\partial z} + k_e) = \delta(\Theta - MMB) \quad (22.28)$$

Свободная поверхность УГВ является другой границей ЗА, отделяющей ее от зоны полного насыщения. На этой границе  $\psi = 0$ ,  $\Theta = PB$ . При квазистационарном режиме влагопереноса форма эпюры влажности в нижней части ЗА

может быть принята постоянной во времени, а скорость изменения уровня подземных вод определяется соотношением

$$\frac{\Delta H}{\Delta t} = \frac{W}{\Pi B - \Theta}, \quad (22.29)$$

где

$$\Theta = \mu_0 \sqrt{\frac{W}{K_0} + MMB}, \quad (22.30)$$

$W$  – величина инфильтрационного питания на УГВ.

Дифференциальные уравнения (22.17) и (22.20) являются нелинейными, их коэффициенты зависят от влажности пород. Решение уравнений весьма трудоемко и реализуется, главным образом, на основе использования метода конечных разностей на ЭВМ. При этом параллельно на численной модели воспроизводятся климатические изменения по сезонам года, характерные для рассматриваемого района, которые позволяют задавать ГУ на верхней границе ЗА. При решении нелинейных уравнений параметры влагопереноса усредняются, вычисления выполняются методом итерационных приближений с шаговым уточнением получаемых результатов.

#### 22.4. Основные схемы влагопереноса

При ЗА большой мощности выделяют три зоны с различными условиями влагопереноса (рис.22.8).

I зона – сезонного увлажнения мощностью от 3 до 10 м. Здесь влажность изменяется как по разрезу, так и во времени в зависимости от преобладания питания (осадки) или испарения и транспирации с поверхности почвы. II зона – транзита, характеризуется постоянной влажностью. Через эту зону в виде свободного просачивания (подземный дождь) избыток влаги из зоны I поступает в зону II и, наконец, III зона – капиллярной каймы над УГВ, характеризуется переменной влажностью. Здесь изменение влажности определяется колебаниями УГВ во времени. Питание грунтовых вод здесь зависит, главным образом, от водного баланса зоны I и в меньшей степени от физических свойств грунтов.

При неглубоком залегании УГВ (до 3 м) величина инфильтрационного питания  $W$  определяется разностью между скоростью водообмена на поверхности земли  $\vartheta'_0$  и изменением влагозапасов в зоне аэрации  $\frac{dV_{\text{з}}}{dt}$ , так что

$$W = \vartheta'_0 \pm \frac{dV_{\text{з}}}{dt} \quad (22.31)$$

Уравнение (22.31) записано как и прежде для единичного элемента с площадью в плане 1 м<sup>2</sup>. При этом изменение влагозапасов в ЗА можно выразить в виде

$$\frac{dV_{\text{з}}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{z_a} \Theta dz \quad (22.32)$$

где  $z_a$  – мощность зоны аэрации.

Насыщение водой после осадков и последующее иссушение в результате испарения проходит несколько условных этапов, показанных на рис. 22.9.

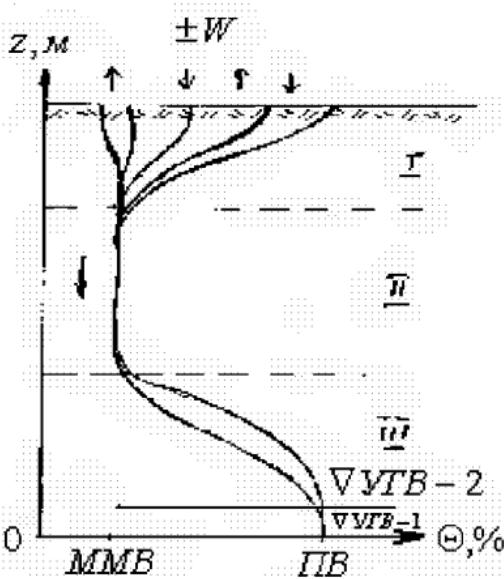


Рис. 22. 8. Схема влагопереноса при большой мощности ЗА (по И.С. Пашковскому)

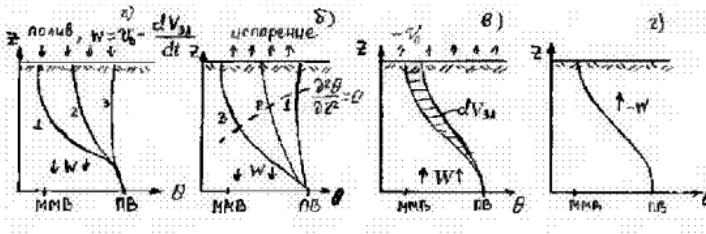


Рис. 22. 9. Последовательные этапы насыщения и иссушения пород ЗА при неглубоком залегании УТВ (по И.С. Пашковскому)

На I этапе в результате поступления воды на поверхность почвы влажность  $\Theta$  в ЗА возрастает и избыток влаги поступает на УТВ в виде

$$W = V_0 \frac{dV_M}{dt} \quad (22.33)$$

На II этапе происходит перераспределение влаги в ЗА, при этом в верхней части зоны преобладает испарение, тогда как в нижней ее части идет нисходящее движение на УТВ. На границе раздела этих процессов выполняется усло-

вие  $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = 0$ , что видно на рис. 22.9б. Величина  $W$  может быть определена балансовым расчетом по данным режима влажности  $\Theta$  в ЗА. На III этапе в пределах всей мощности ЗА идет процесс иссушения, сопровождаемый испарением с УГВ. Интенсивность этого испарения ( $-W$ ) определяется разностью между поступлением влаги в атмосферу и потерями влагозапасов в ЗА:

$$-W = -(\varphi_0 - \frac{d\varphi_{3A}}{dt}) \quad (22.34)$$

Для IV этапа характерен стационарный восходящий влагоперенос через ЗА, интенсивность которого может быть определена с помощью уравнения Дарси-Клюта (рис. 22.9г).

### 22.5. Понятие о гравитационной емкости пласта

Водоотдача  $\mu$  при влагопереносе как разница между полной влагоемкостью ПВ и влажностью пород  $\Theta$  не является постоянной величиной. Постоянным параметром следует считать емкость  $\mu_0$ , определяемую как  $\mu_0 = PVB - MMB$ .

При снижении уровня ПВ в зоне аэрации остается часть влаги, при этом капиллярная кайма как бы увеличивается в размерах, не успевая переформироваться. При повышении уровня происходит обратная картина, капиллярная кайма как бы сжимается (рис. 22.10).

В обоих случаях величина водоотдачи  $\mu$  изменяется во времени по зависимости:

$$\mu = \mu_0 \left[ 1 - \exp \left( -\frac{k_e \cdot t}{h_k \cdot \mu_0} \right) \right] \quad (22.36)$$

Величина  $\mu$  уменьшается, если уровень ПВ изменяется вблизи поверхности земли (маленькая мощность ЗА) или вблизи верхнего водоупора (межпластовые воды). При условии

$$z_{3A} \leq 3h_k \quad (22.37)$$

где  $z_{3A}$  — мощность ненасыщенной зоны над уровнем ПВ, происходит разрушение верхней части ЗКК.

Рассмотрим повышение уровня за счет длительной инфильтрации, например при орошении, в условиях равномерного установившегося потока влаги через ЗА, так что  $W = -\varphi'_z = const$  и следовательно  $\frac{dy}{dz} = 0$ . Тогда из уравнения

(22.8)  $\varphi'_z = -k_e$ , то есть поток направлен вниз, против оси  $z$ . Имея ввиду (22.7),

(22.5) и (22.35) можем записать  $W = k \left( \frac{\Theta - MMB}{\mu_0} \right)^n$ . Так как  $\Theta - MMB = \mu_0 - \mu$ ,

окончательно получим

$$\mu = \mu_0 \left( 1 - \sqrt[n]{\frac{W}{k}} \right) \quad (22.38)$$

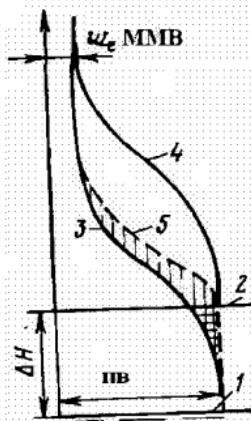


Рис. 22. 10. Характеристика динамики гравитационной водоотдачи (по В.М. Шестакову)

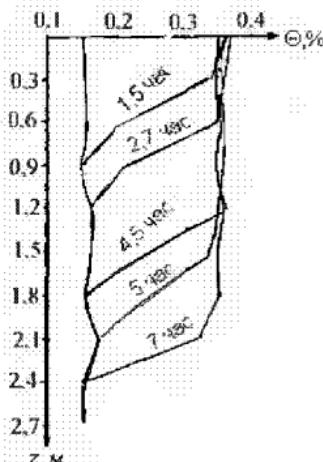


Рис. 22. 11. Распределение влажности в различные моменты времени при наливе (по И.С. Пашковскому)

Например, при  $W = 6 \cdot 10^{-4}$  м/сут,  $k = 0,01$  м/сут (суглинок),  $n = 4$  имеем  $\frac{W}{k} = 0,06$  и  $\mu = 0,5\mu_0$ , то есть разница между  $\mu$  и  $\mu_0$  весьма существенная.

## 22.6. Некоторые задачи влагопереноса

### 22.6.1. Определение коэффициента влагопереноса и фильтрации

При определении коэффициента фильтрации ЗА применяются наливы воды в шурфы, где поддерживается постоянный уровень и фиксируется расход  $Q$  инфильтрующейся воды в кольце площадью  $\omega$ . Результаты такого опыта в супесчаных грунтах показаны на рис. 22.11.

Через 0.5 часа после начала опыта расход воды стабилизировался и скорость фильтрации  $W = \frac{Q}{\omega} = 1.9$  м/сут в дальнейшем не менялась. Влажность на различных глубинах определялась нейтронным влагометром (ННВ-1). Как видно, инфильтрация в течении всего опыта происходила при постоянной влажности  $\Theta = 0,36$ , при этом породы были не полностью насыщены ( $\Pi = 0,42$ ). Последнее может быть связано с колматацией приповерхностного слоя пород ЗА.

Можно заметить, что профили влажности сохраняют форму и перемещаются вниз с постоянной скоростью  $u_z = 8,7$  м/сут. Движение здесь происходит

за счет свободного стекания при напорном градиенте, равном 1, так как  $\frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0$ .

Действительная скорость перемещения влаги  $u_z$  равна

$$u_z = \frac{k_e}{\Theta - MMB} \quad (22.39)$$

Поскольку в данном случае  $k_e = W$ , используя формулы (22.5), (22.7) и (22.35) получим

$$\Theta - MMB = \mu_0 \left( \frac{W}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \quad , \quad (22.40)$$

после чего выражение (22.39) примет вид

$$u_z = \frac{W}{\mu_0 \left( \frac{W}{k} \right)^{\frac{1}{n}}} \quad (22.41)$$

Принимая  $n = 3$ , получим решение для свободного просачивания

$$u_z = \frac{1}{\mu_0} \sqrt[3]{W^2 \cdot k} \quad , \quad (22.42)$$

которое удобно для практических целей представить в виде

$$\lg k = 3 \lg(u_z \cdot \mu_0) - 2 \lg W \quad (22.43)$$

Домашнее задание. Определить скорость  $u_z$  по формуле (22.39), коэффициент фильтрации по формулам (22.7) и (22.43). Сравнить полученные результаты с данными опыта.

#### 22.6.2. Определение испарения в стационарном режиме влагопереноса

При стационарном влагопереносе исходит из уравнения (22.8). Распределение высоты всасывания  $\psi$  от высоты над УГВ определяется соотношением

$$z = \int \frac{d\psi}{1 + \frac{\psi}{k_e}} \quad (22.44)$$

причем можно считать  $k_e = k \cdot e^{-\beta \psi}$ ,

$$\text{где } \beta = \frac{n}{h_k} .$$

В этом случае

$$z = \psi - \frac{1}{\beta} \ln \frac{1 + \frac{\psi}{k}}{1 + \frac{\psi}{k_e}} \quad (22.46)$$

Для оценки интенсивности влагопереноса используется метод палеток, который основывается на построении кривых зависимостей  $\Theta(z)$  или  $\psi(z)$  для различных значений  $\psi$  на основе (22.46). Совмещение палетки с графиком реального распределения влажности по высоте, построенного в том же масштабе, позволяет определить скорость и направление влагопереноса  $q'$ . Серия таких кривых для супеси с  $k = 1$  м/сут показана на рис. 22.5.

Связав скорость влагопереноса, определяемую по формуле, аналогичной (22.27)

$$\Psi = \delta(\Pi\Psi - MMB) e^{-\psi} \quad , \quad (22.47)$$

с зависимостью (22.46), можно получить график интенсивности испарения от глубины залегания УГВ для супесей при  $k = 1 \text{ м/сут}$ ,  $\beta = 4,1 \text{ м}^{-1}$ ,  $\alpha = 1 \text{ м}^{-1}$ ,  $\delta = 0,05 \text{ м/сут}$  (рис. 22.12).

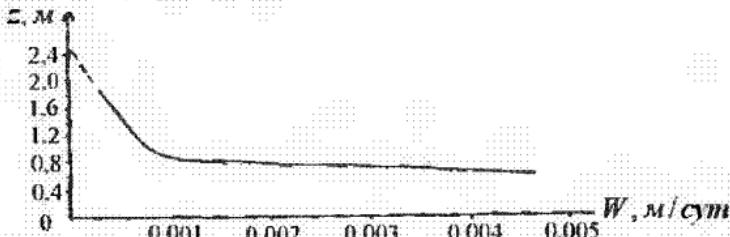


Рис. 22.12. Зависимость испарения от глубины залегания УГВ

#### 22.6.3. Определение параметров влагопереноса

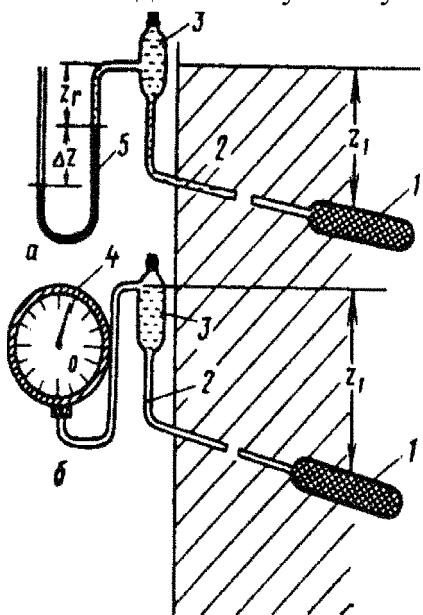
Важнейшими зависимостями, определяющими влагоперенос, являются  $\psi = f(\Theta)$  и  $k_e = f(\Theta)$ . Наиболее простая зависимость  $\psi = f(\Theta)$  может быть получена из данных натурных наблюдений распределения влажности в ЗА без испарения и инфильтрации. В этом случае  $\Psi_s = 0$ , так что, согласно (22.8), имеем  $\frac{d\psi}{dz} = 1$ , то есть  $\psi = z$  - высота над УГВ. Зная распределение влажности в ЗА, то есть  $\Theta = f(z)$ , автоматически получаем связь  $\psi = f(\Theta)$ .

В естественных условиях отсутствие испарения или инфильтрации представляет собой исключительный случай, поэтому необходимы непосредственные измерения высоты всасывания  $\psi$ . Наиболее распространенным является тензиометрический метод определения  $\psi$ . В ненасыщенный грунт вводится полый пористый зонд, соединенный с манометром – тензиометр. Стенки зонда свободно пропускают воду и непроницаемы для частиц грунта и газа (рис. 22.13).

Давление в тензиометре будет стремиться прийти в равновесное с давлением в ненасыщенном грунте. Помещая зонд в породу с различной влажностью  $\Theta$  и измеряя высоту всасывания  $\psi$  можно построить график  $\psi = f(\Theta)$  для данного типа породы в полевых условиях при значениях  $\psi \leq 8 \text{ м}$ .

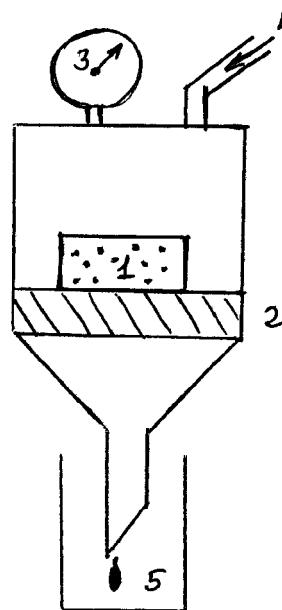
Для определения зависимости  $K_e = f(\Theta)$  в лабораторных условиях используют мембранный пресс Ричардса (рис. 22.14). При повышении общего давления над образцом из него через мембрану начинает вытекать вода, расход которой измеряется. Этот процесс будет происходить до тех пор, пока разность давлений над образцом и под пористой крышкой не будет соответствовать всасывающему давлению. Влажность образца определяется с учетом вытекающего из него объема воды. Наблюдение за динамикой расхода воды позволяет опре-

делить коэффициент влагопереноса, соответствующий среднему значению влажности на данной ступени увеличения давления.



**Рис. 22. 13. Схема измерения высоты всасывания тензиометром (а – с ртутным манометром; б – с вакуумным):**

1 – керамический фильтр; 2 – соединительная трубка; 3 – воздухоулавливатель; 4 – вакуумметр; 5 – ртутный манометр



**Рис. 22. 14. Пресс Ричардса.**

(1 – образец; 2 – мембрана; 3 – манометр; 4 – воздушный насос; 5 – мерный стакан)

### Вопросы к лекции № 22

1. При каком режиме влагопереноса можно получить кривую ОГХ путем определения значений влажности  $\Theta$  по глубине зоны аэрации  $z$ ? Чему в этом случае равно  $\frac{\Delta\psi}{\Delta z}$ ? Покажите эту кривую на рис. 22.5б.
2. Возрастают или убывают с увеличением влажности  $\Theta$  значения коэффициента влагопереноса  $\kappa_e$ , потенциала почвенной влаги  $\psi$ ?
3. Каким значениям  $\frac{\Delta\psi}{\Delta z}$  соответствует нисходящий поток влаги в зоне аэрации? Как это доказать?
4. При каких соотношениях  $\frac{\Delta\psi}{\Delta z}$  в зоне аэрации наблюдается процесс свободного просачивания? Чему в этом случае равно  $h_k$ ?
5. Для каких грунтов (суглинки, пески) кривые ОГХ имеют большие углы наклона? Объясните, почему?
6. В чем отличие между величиной водоотдачи  $\mu$  и гравитационной емкостью  $\mu_0$ ? Какая из этих величин численно больше и почему?

7. Все кривые (стационарного влагопереноса) для разных  $\Psi \neq 0$  на рис. 22.5а характеризуются изменением угла наклона при изменении  $\psi$ . Объясните, с чем это связано?
8. Нарисуйте типовую эпюру давления  $p/\gamma$  для грунтовых вод, включая зону аэрации. Выделите интервал действия потенциала почвенной влаги  $\psi$  и охарактеризуйте его изменения по глубине (оси  $z$ ).
9. Какие условия следует задавать на нижней и верхней границах зоны аэрации для расчетных схем нестационарного влагопереноса?
10. При каком распределении влажности пород в зоне аэрации  $\Psi_e = -\kappa_e$ ?
11. Какие исходные данные надо иметь для нахождения границы, разделяющей на профиле влажность нисходящий и восходящий потоки?
12. В чем проявляется нелинейность дифференциальных уравнений влагопереноса?
13. Два однотипных образца – один песчаный, второй – глинистый, характеризующиеся близкими значениями пористости (примерно 0,45) и степени водонасыщения ( $0,7 \div 0,8$ ), приводятся в соприкосновение друг с другом, причем поверхность контакта – вертикальная плоскость. Изменится ли после этого распределение влаги, и если да, то почему?
14. В каком случае при наливе в шурф боковое растекания выражается сильнее – в сухой грунт или в увлажненный? Объясните, почему (условия проведения опыта остаются одинаковыми)?
15. Перечислите основные параметры и показатели, определяющие интенсивность условия влагопереноса; какие между ними существуют количественные соотношения? Выразите эти соотношения графически.

### Лекция № 23. Основы теории массопереноса в подземных водах

#### 23.1. Основные механизмы массопереноса

Массопереносом или гидрогеохимической миграцией называют перемещение и изменение концентрации растворенных компонентов в подземных водах (ПВ) в результате различных процессов, приводящих к изменению минерализации, состава и свойств ПВ. Гидрогеохимические процессы могут быть разделены на две основные группы: физического (гидродинамического) переноса вещества и физико-химический перенос, связанный с межфазовыми взаимодействиями и химическими процессами.

К главным гидродинамическим формам переноса и рассеяния компонентов в ПВ относят: конвекцию под влиянием либо гидравлического, либо плотностного градиента, гидродисперсию-продольную и поперечную и молекулярную диффузию (кондукцию). Физико-химические процессы проявляются в виде обменных процессов на контакте вода-порода в виде сорбции и десорбции, ионного обмена, гидратации и дегидратации минералов, растворения, осаждения компонентов из ПВ. В изучении гидрогеохимической миграции выделяют два аспекта: 1) геохимический, предусматривающий исследование на количественной физико-химической основе геологических условий процессов поступления в ПВ, осаждения на породе или сохранения в растворе различных эле-

ментов; 2) гидрогеодинамический, включающий выяснение механизмов и закономерностей переноса вещества в ПВ на основе математических моделей геомиграционных процессов. Именно второму аспекту и посвящена настоящая лекция.

Рассмотрим основные механизмы массопереноса.

*Конвективный перенос* – это наиболее распространенный вид миграции в зоне активного водообмена. Он представляет собой перенос вещества движущимся потоком ПВ под влиянием гидравлического градиента (вынужденная конвекция). При этом считается, что все частицы жидкости перемещаются с одинаковой скоростью, равной действительной скорости  $u$ , так что (рис. 23.1):

$$u = \frac{k}{n_a} I = \frac{\rho'}{n_a}, \quad (23.1a)$$

где  $n_a$  - активная пористость,  $k$  - коэффициент фильтрации,  $I$  - напорный градиент.

Теоретически граница между водами разного состава представляет собой поверхность, называемую поршневым фронтом, а сама схема переноса называется поршневым вытеснением. На границе фронта наблюдается скачок концентрации мигрирующего компонента. Расстояние, на которое распространилось загрязнение, определяется следующей формулой

$$x_0 = u \cdot t \quad (\text{рис. 23.1б}) \quad (23.1b)$$

Из уравнения (23.1a) видно, что для расчетов конвективного переноса надо знать поле скоростей фильтрации, то есть предварительно решить гидродинамическую задачу.

*Гравитационная (плотностная) конвекция* (рис. 23.2) обусловлена существованием на границе раздела более минерализованных (плотностью  $\rho$ ) и пресных (плотностью  $\rho_0$ ) растворов дополнительной вертикальной составляющей скорости фильтрации, которая определяется величиной “плотностного” градиента

$$\Delta \bar{\rho} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \quad (23.2)$$

Наиболее характерным примером такой конвекции является вторжение в подземные воды побережья соленных морских вод.

*Диффузионный или кондуктивный перенос* совершается на молекулярном уровне под действием градиента концентрации  $C$  вещества и описывается законом Фика

$$\Psi'_c = -D_M \frac{dC}{dl}, \quad (23.3)$$

который характеризует плотность диффузионного потока  $\Psi'_c$ , то есть количество вещества, прошедшее через единичное сечение потока в единицу времени в направлении  $l$ .

Коэффициент молекулярной диффузии  $D_M$  зависит от типа пород, структуры порового пространства, влажности и других факторов. Для песчаных насыщенных пород

$$D_m = \chi n_a D_m^0 , \quad (23.4)$$

где  $\chi$  - параметр, характеризующий извилистость пор (для рыхлых песков  $\chi=0,5-0,7$ , для сцементированных  $\chi=0,25-0,5$ ),  $D_m^0$  - коэффициент молекулярной диффузии в свободной жидкости (равен  $n \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/сут). В глинистых породах диффузия тормозится вследствие уменьшения подвижности ионов у стенок пор, поэтому коэффициент  $D_m = 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/сут и менее.

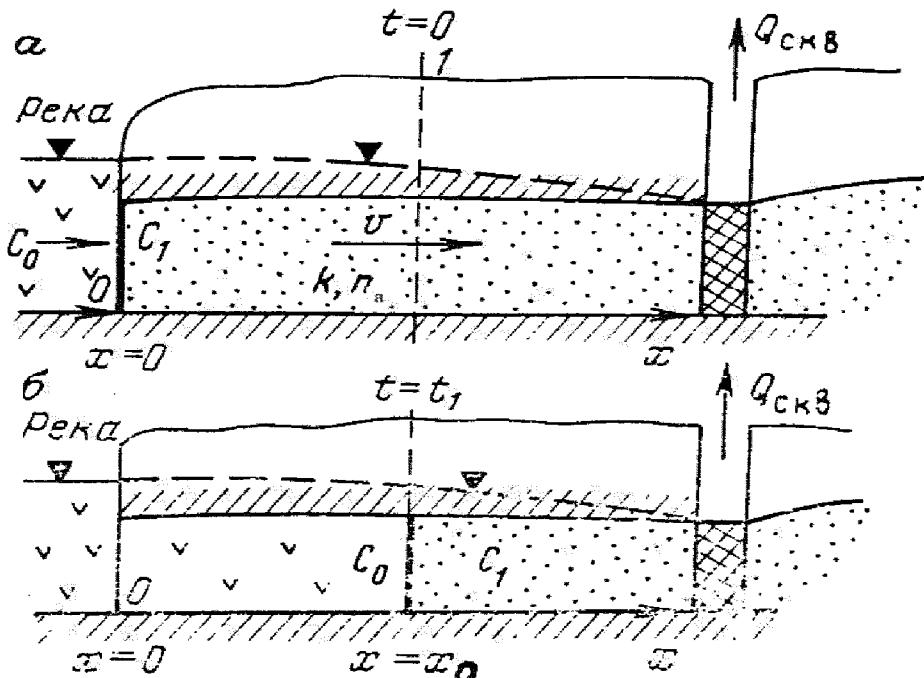


Рис. 23. 1. Конвективный перенос по схеме поршневого вытеснения

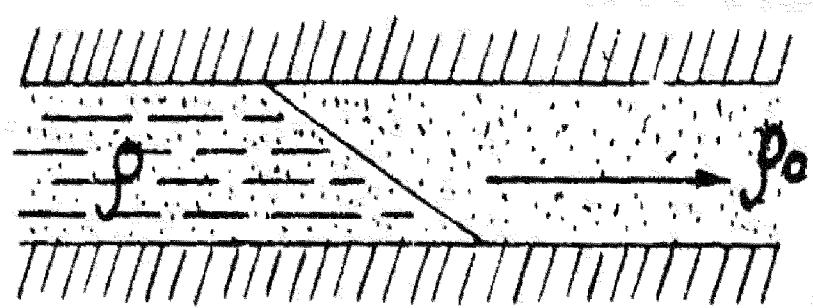


Рис. 23. 2. Схема гравитационной конвекции в пласте

Диффузионный перенос следует учитывать только при малых скоростях фильтрации, то есть в глинистых породах, где практически отсутствуют процессы конвективного переноса. В проницаемых породах диффузия проявляется как фактор рассеяния вещества, действующий на границе жидкостей с разными концентрациями и осложняющий процесс поршневого вытеснения.

*Гидравлическая дисперсия* – это процесс рассеивания вещества на границе жидкостей с разными концентрациями. Сочетает в себе два трудноразделимых процесса рассеивания: молекулярную диффузию и фильтрационную диффузию (механическую дисперсию). Последний процесс обусловлен неоднородностью поля действительных скоростей в связи с извилистостью поровых канала-

лов в породе (рис.23.3) и разной площадью их реального сечения, которое не учитывается в принятой нами модели сплошной геофильтрационной среды (лекция № 2).

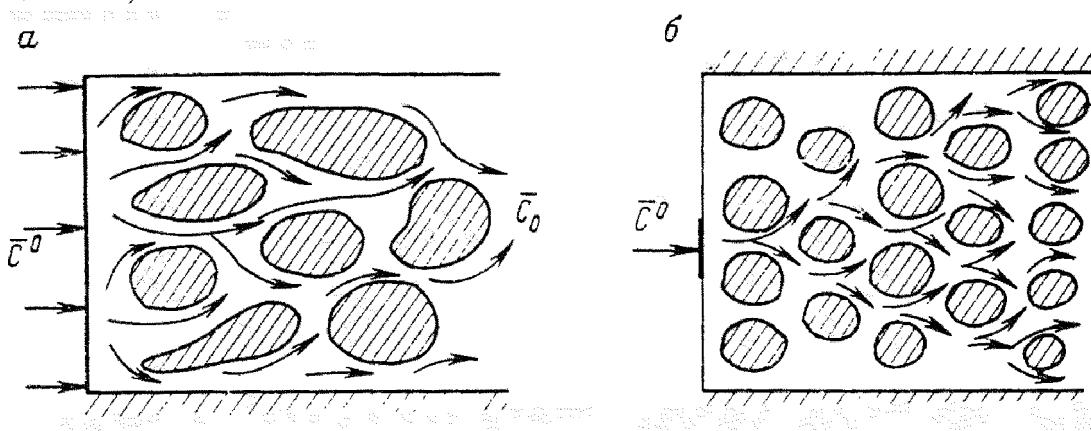


Рис. 23.3. Схема проявления гидравлической дисперсии при совершенном (а) и несовершенном (б) врезе источника поступления вещества в пласт

Фильтрационная диффузия также подчиняется закону Фика, однако при замене коэффициента молекулярной диффузии  $D_m$  на коэффициент механической дисперсии  $D_d$ .

Различают микродисперсию в однородных гомогенных породах и макродисперсию в неоднородных гетерогенных породах (лекция № 2).

При микродисперсии в однородных грунтах величина  $D_d$  пропорциональна скорости фильтрации  $V$ :

$$D_d = \delta_1 V \quad , \quad (23.5)$$

где константа  $\delta_1$  называется геометрическим параметром механической дисперсии, имеет размерность длины. Ее величина коррелирует с размером элементарных составляющих однородной породы ( $10^{-2} - 10^{-3}$  м для песчаных и метры для трещиноватых пород).

Коэффициент гидравлической дисперсии равен

$$D = D_m + D_d \quad . \quad (23.6)$$

В потоке ПВ формируется продольная и поперечная дисперсия. Продольная микродисперсия развивается в направлении скорости движения ПВ. Скорость движения отдельных струек воды в порах породы отличается от средней скорости всей массы воды, поэтому вблизи фронта поршневого вытеснения формируется переходная зона или зона микродисперсии, где концентрация растворенного вещества плавно (не резко) изменяется.

Продольная микродисперсия развивается в направлении средней скорости движения и наиболее четко прослеживается при одномерном потоке, ограниченном непроницаемыми границами, при поступлении воды с концентрацией  $\bar{C}^0 = 1$  на всем поперечном сечении (рис. 23.3а). Поперечная микродисперсия (рис.23.3-б) развивается в том случае, когда вещество с концентрацией  $\bar{C}^0$  поступает не по всему сечению потока (несовершенный врез источника поступле-

ния вещества в водоносный горизонт). Коэффициент поперечной дисперсии обычно на порядок ниже коэффициента продольной  $\delta_1$ .

В породах с гетерогенно-блочной структурой, а так же при макроиноднородности размером 1 м и более, проявляется макродисперсия вещества в подземных водах. При упорядоченной неоднородности, например в слоистых пластах, ускоренное продвижение вод с повышенной концентрацией по хорошо проницаемым пластам приводит к появлению "соленных языков", намного опережающих фронт поршневого вытеснения. В хорошо проницаемых пластах миграция осуществляется по схеме продольной гидродисперсии, а в слабопроницаемых разделяющихся пластах – преимущественно путем поперечной дисперсии и диффузии (рис. 23.4). Массоперенос в такой сложной толще характеризуется обобщенным коэффициентом дисперсии  $D$ , который определяется выражением

$$D = \delta_2 V^2 \quad , \quad (23.7)$$

где  $\delta_2$  - параметр, обобщенно характеризующий всю среду, в которой протекает процесс макродисперсии, и зависящий от соотношения мощностей хорошо и плохо проницаемых слоев или размеров блоков трещиноватых пород и их активной пористости. Эксперименты показывают, что  $\delta_2$  численно на два-три порядка превышает значение  $\delta_1$  и составляет сутки и десятки суток. Меньшее различие характерно для коэффициентов дисперсии, определяемых по формулам (23.5) и (23.7). Учитывая, что обычно скорости фильтрации  $V$  составляют сотые и десятые доли м/сут, отношение  $D/D_{\delta} = \delta_2 \cdot V / \delta_1 > 10$ .

**Сорбция** является основным проявлением физико-химических процессов взаимодействия в системе "вода-порода". Основными формами сорбции являются физическая, химическая и ионный обмен. Теоретические модели сорбции в системе "вода-порода" разработаны применительно к однокомпонентному раствору, когда считается возможным рассматривать сорбцию каждого компонента изолированно от всех остальных. Тогда содержание рассматриваемого компонента в воде характеризуется его концентрацией  $C$ , а в породе – сорбционной емкостью  $N$ , представляющей собой содержание сорбированного компонента в единице объема породы. При не очень больших концентрациях компонента справедливо уравнение

$$\frac{dN}{dt} = \alpha(C - \beta N) \quad , \quad (23.8)$$

где  $\alpha$  - коэффициент скорости (кинетики) сорбции,

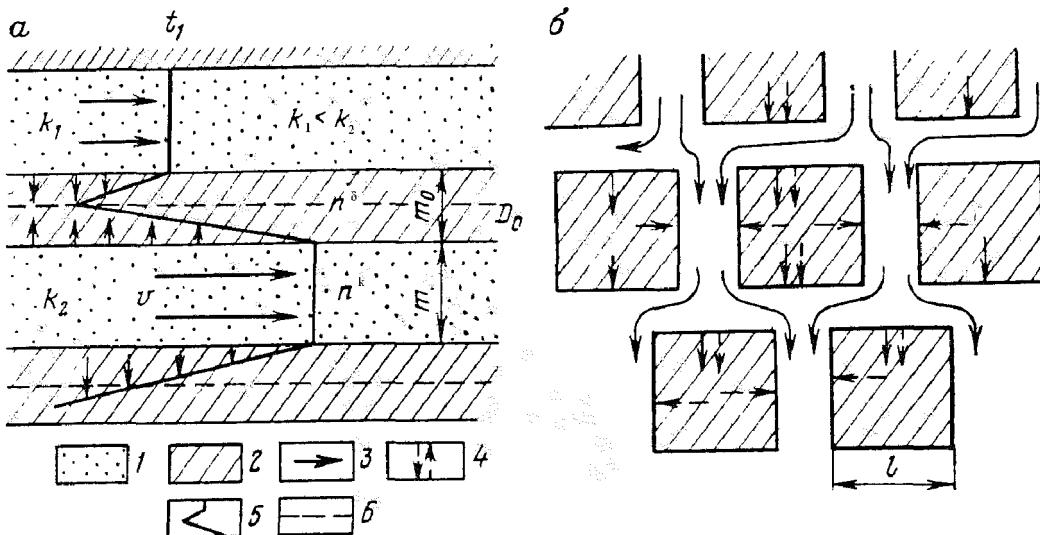
$\beta$  - коэффициент распределения вещества в равновесных условиях,

причем

$$\beta = \frac{C_0}{N_0} \quad , \quad (23.9)$$

где  $C_0$  и  $N_0$  - соответствующие предельные равновесные концентрации.

Параметры  $\alpha$  и  $\beta$  определяются опытным путем.



**Рис. 23.4. Схема формирования макродисперсии в многопластовой (слоистой) системе (а) и при гетерогенно-блоковой структуре пласта (б)**

(слои: 1 – хорошо и 2 – слабопроницаемый; направление потоков: 3 – конвективного, 4 – диффузионного; 5 – линия положения концентрационного фронта на момент  $t_1$ ; 6 – граница расчетного элемента)

При стабилизации процесса ( $\frac{dN}{dt} = 0$ ) уравнение (23.8) дает равновесное

соотношение (23.9). Параметр  $\alpha$  достаточно стабилен и равен  $100\text{-}200 \text{ сут}^{-1}$  [7]. При таких значениях  $\alpha$  влияние кинетики сорбции существенно только в лабораторных опытах, в натурных потоках его влияние пренебрежимо мало и можно пользоваться уравнением (23.9).

При небольшой концентрации мигрирующего вещества величина  $\beta$  практически не изменяется. В этих условиях справедливо соотношение

$$K_r = \frac{1}{\beta}, \quad (23.10)$$

где  $K_r$  – константа Генри.

Учет процесса сорбции при массопереносе осуществляется путем введения понятия эффективной пористости  $n_s$ , так что

$$n_s = n_a + K_r, \quad (23.11)$$

которое используется в уравнениях вместо  $n_a$ . Для инертных в отношении сорбции компонентов, например иона  $Cl^-$  константа  $K_r = 0$  и  $n_s = n_a$ , для хорошо сорбируемых  $n_s > n_a$  и может достигать величин значительно превышающих 1.

Токсические и радиоактивные компоненты в подземных водах подвержены деструкции (распаду), скорость которого описывается уравнением

$$\frac{dC}{dt} = -\lambda C, \quad (23.12)$$

где  $\lambda$  – константа скорости деструкции.

Интегрирование (23.12) дает выражение

$$C = C_0 e^{-\lambda x} \quad , \quad (23.13)$$

где  $C_0$  - первоначальное количество компонента.

Величина времени полураспада радиоактивных элементов  $t_{1/2}$  с константой деструкции связана соотношением

$$t_{1/2} = \lambda^{-1} \ln 2 \quad . \quad (23.14)$$

Скорость деструкции пестицидов характеризуется значениями  $10^{-2} - 10^{-3}$  сут $^{-1}$ , причем наиболее интенсивно их распад происходит за счет микробиологического воздействия, которое в глубоких водах замедляется.

### 23.2. Теоретические модели массопереноса

#### 23.2.1. Гомогенная проницаемая среда

В гомогенной однородной среде модель миграции включает в себя конвективный перенос, микродисперсию и сорбцию. Рассмотрим вывод дифференциального уравнения массопереноса в одномерном фильтрационном потоке. Массовая скорость переноса компонента определяется как

$$\mathcal{V}_c = C\mathcal{V} - D \frac{\partial C}{\partial x} \quad . \quad (23.15)$$

Здесь первый член правой части уравнения отражает перенос компонента концентрации  $C$  со скоростью  $\mathcal{V}$ , а второй член учитывает процесс гидравлической дисперсии. На бесконечно малом расстоянии  $dx$  приращение компонента за время  $dt$  будет равно (рис. 23.5):

$$dV_c = \frac{-\partial V_c}{\partial x} dx dt \quad , \quad (23.16)$$

которое вызовет изменение концентрации компонента в элементе  $dx$  за время  $dt$  равное

$$dV_c = n_a \frac{\partial C}{\partial t} dx dt \quad . \quad (23.17)$$

Приравнивая (23.16) и (23.17), после сокращения получим

$$\frac{\partial V_c}{\partial x} + n_a \frac{\partial C}{\partial t} = 0 \quad . \quad (23.18)$$

Подставим в (23.18) выражение (23.15) и получим

$$n_a \frac{\partial C}{\partial t} + \mathcal{V} \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad . \quad (23.19)$$

При наличии сорбционных процессов в уравнении (23.19) и его решениях активную пористость  $n_a$  следует заменить на эффективную пористость  $n_s$ .

Решение уравнения (23.19) для относительной концентрации имеет вид

$$\bar{C} = \frac{C - C_0}{C^0 - C_0} \approx 0,5 \operatorname{erfc} \xi \quad , \quad (23.20)$$

$$\text{где } \xi = \frac{x - \mathcal{V} t / n_a}{2 \sqrt{D t / n_a}} \quad , \quad (23.21)$$

$C$ ,  $C_0$ ,  $C^0$  - текущая, начальная и поступающая на границе пласта ( $x = 0$ ) концентрация изучаемого компонента.

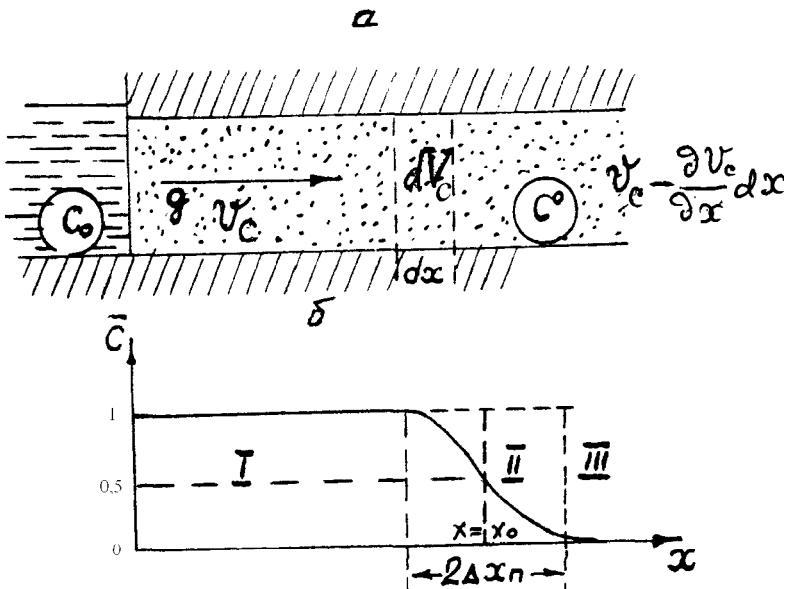


Рис. 23.5. Модель миграции в одиородном пласте (а) и характеристикий график изменения концентрации (б)

Расчеты по (23.20) можно выполнять через некоторое время, оцениваемое по зависимости

$$\frac{V \cdot x}{D} \geq 30 \quad (23.22)$$

При этом в водоносном пласте формируются три основные миграционные зоны (рис. 23.5-б): вытесняющего раствора с концентрацией  $C^0 (\bar{C} = 1)$ , переходная ( $\bar{C} > 0$ ) и вытесняемого раствора с концентрацией  $C_0 (\bar{C} = 0)$ .

Из выражения (23.21) так же следует, что на фронте поршневого вытеснения, где  $x = x_0 = V \cdot t / n_a$ , получаем  $\xi = 0$ ,  $erfc \xi = 1$ , и  $\bar{C} = 0,5$ , т.е. положение фронта поршневого вытеснения соответствует середине переходной зоны.

Размер переходной зоны, возникающей за счет влияния дисперсии, характеризуется величиной  $\Delta x_n$ , на которую передняя граница переходной зоны обгоняет фронт поршневого вытеснения. Считая, что передняя граница соответствует относительной концентрации  $\bar{C} = 0,001$  при  $erfc \xi = 0,002$  найдем  $\xi = 2,2$ , а следовательно из (23.21)

$$\Delta x_n = x - \frac{V \cdot t}{n_a} = 4,4 \sqrt{\frac{Dt}{n_a}} \quad (23.23)$$

Учитывая, что в хорошо проницаемых породах в уравнении (23.6)  $D_s \gg D_x$ , можно, подставив (23.5) в (23.23), получить

$$\Delta x_n = 4,4 \sqrt{\delta_1 x_0} \quad (23.24)$$

Для  $\delta_1 = 10^{-2}$  м в лабораторных условиях при  $x_0 = 1$  м, получим  $\Delta x_n = 0,44$  м, а для натурных условий при  $x_0 = 100$  м,  $\Delta x_n = 4,4$  м, то есть значительно меньше  $x_0$ . В последнем случае дисперсия в однородных породах допустимо пренебречь.

### 23.2.2. Гетерогенно-блоковая среда

Гетерогенно-блоковая среда или среда с двойной емкостью представляет собой квазиоднородную среду слабопроницаемых блоков, равномерно прорезанных проводящими каналами (рис. 23.4-б). В карбонатных породах такие каналы представлены наиболее крупными трещинами (объем содержания менее 1%), а блоки – слабопроницаемым карбонатным материалом с пористостью 2-5%. В глинистых породах проводящие каналы – это песчаные прослои или повышенная трещиноватость.

В модели гетерогенно-блоковой среды перенос в каналах осуществляется конвективным путем, а в блоках – конвективным и диффузионным. Рассматривая перенос в блоке, следует выделить начальный период, когда на условия переноса не влияет размер блока. В этом случае поток переноса можно считать неограниченным (схема неограниченной емкости блока), в котором предполагается, что конвективно-диффузионный перенос развивается только в периферической части блоков, не успевая распространяться на весь их объем.

Для слоистых пластов с включением слабопроницаемых слоев мощностью  $m_0$  такая схема применима при условии

$$t_H < \frac{n^e \cdot m_0^2}{16D^0} \quad (23.25)$$

где  $D^0$  и  $n^e$  – коэффициент дисперсии и пористость блоков.

Считая для глинистых разделяющих слоев  $D^0 = 3 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/сут,  $n^e = 0,4$ , получим ориентировочный критерий  $t_H < 10^4 m_0^2$ .

При мощности глинистых слоев  $m_0$  более 1 м схема неограниченной емкости блока может применяться для расчетов процессов миграции в течение нескольких десятков лет.

Для такой расчетной схемы решение задачи о конвективном переносе компонента в проводящем канале мощностью  $m$  при скачкообразном изменении концентрации компонента от начального значения  $C_0$  до предельного  $C^0$  на границе потока ( $t = 0$ ) и не учитывая дисперсии в проводящем канале имеет вид

$$\bar{C}(x, t) = \frac{C - C_0}{C^0 - C_0} = erfc \xi^0; \quad \xi^0 = \frac{x}{2m\varphi'} \sqrt{\frac{n_a^e D^0}{t - t_0}} \quad (23.26)$$

где  $\varphi'$  – скорость потока в канале или слое,

$n_a^e$  и  $n_c^k$  – активная или эффективная пористость пород в блоках и канале.

Это уравнение применимо при  $t > t_0 = n_a^k \cdot x / \varphi'$ ,

при  $t < t_0$  остается  $\bar{C}(x) = 0$ .

Размеры переходной зоны определяются оттоком вещества в слабопроницаемый слой и могут быть сопоставимы с общей длиной переноса, что существенно отличает этот процесс от микродисперсии в гомогенной среде.

Для больших периодов времени справедлива схема квазистационарного переноса компонента в пределах блока. В этой схеме вся емкость блока условно сосредотачивается в его центре (схема сосредоточенной емкости блока). Здесь так же предполагается, что продольный перенос в проводящих каналах осуществляется только конвективным путем, а обмен между каналами и блоками диффузионным и конвективным путем.

Дифференциальное уравнение макродисперсии отличается от зависимости (23.19), описывающей процесс микродисперсии, заменой

$$n_a \frac{\partial C}{\partial t} = n_a^e \frac{\partial C}{\partial t} + n_a^k \frac{\partial C}{\partial t} \quad (23.28)$$

Уравнение баланса для мигрирующего компонента в блоке имеет вид

$$n_a^e \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{V_e} (Q_d + Q_k) \quad (23.29)$$

где  $V_e$  - объем блока,

$$Q_d = D_M^e \omega^e (C^k - C^e) / l^e \quad (23.30)$$

поток солей в блоке за счет диффузии по закону Фика и

$$Q_k = v^e \omega^e (C^k - C^e) \quad (23.31)$$

поток солей в блоке за счет конвективного переноса.

Здесь  $\omega^e$  и  $l^e$  - площадь поперечного сечения и длина блока,

$C^e$  и  $C^k$  - концентрация компонента в центре слабопроницаемого блока и в проводящем канале,

$v^e$  - скорость фильтрации в блоке.

Для описания макродисперсии при времени  $t > \frac{8m_0(m_0 \cdot n^e + m^k)}{D^e}$  и  $x \leq \frac{q_e t}{n}$

(23.32) широко используется модель, предельного конвективно-диффузионного переноса с некоторым расчетным коэффициентом дисперсии  $D$ . Этот коэффициент определяется по формуле (23.7), причем  $\delta_2$  находится экспериментально

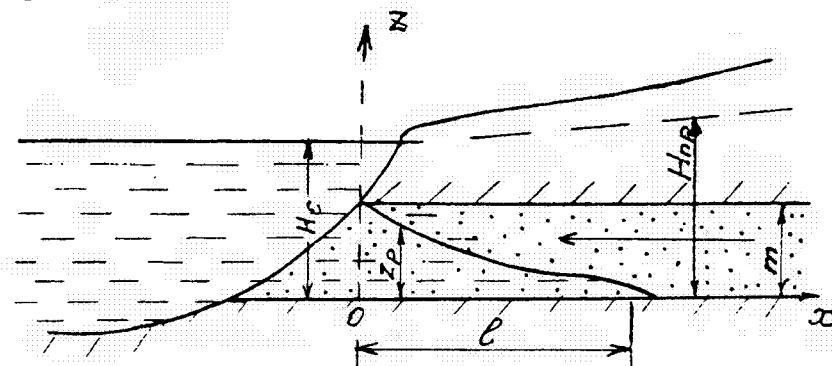
или по формуле  $\delta_2 = \frac{m \cdot m_0}{2D^e [1 + m^k / (m_0 n^e)]^2} \quad (23.33)$

При малых скоростях фильтрации в блоках ( $Q_d \gg Q_k$ ) величина  $\delta_2$  может достигать  $n \cdot 10^3$  суток, в более проницаемых блоках ( $Q_k \gg Q_d$ ) величина  $\delta_2$  измеряется первыми сутками. Здесь размеры переходной зоны  $\Delta x_n$  так же оказываются соизмеримыми с расстояниями переноса компонента  $x_0$ .

Реально величина  $D$  при макродисперсии должна приниматься как функция времени, то есть процесс переноса оказывается существенно нелинейным и его воспроизведение на модели возможно только путем итерационных расчетов на основе метода конечных разностей.

### 23.2.3. Интрузия морских вод на побережье

Рассмотрим вторжение в подземные воды побережья соленых морских вод (рис.23.6).



**Рис. 23. 6. Схема интрузии соленных вод в напорный горизонт подземных вод (по В.А. Мироненко)**

Примем стационарное предельное положение “языка” соленых вод. Дальнейшему его продвижению препятствует стационарный фильтрационный поток пресных подземных вод в море. Движение соленых вод отсутствует. Решение для определения положения линии раздела получено из анализа величин гидростатических давлений пресных и соленых вод на границе раздела и имеет вид

$$z_p = m - \sqrt{2 \cdot I_0 \cdot m \cdot x / \bar{\rho}}, \quad (23.34)$$

где  $I_0$  и  $m$  — градиент и мощность потока пресных вод, определяемые за пределами “языка”,

$\bar{\rho}$  — определяется по формуле (23.2).

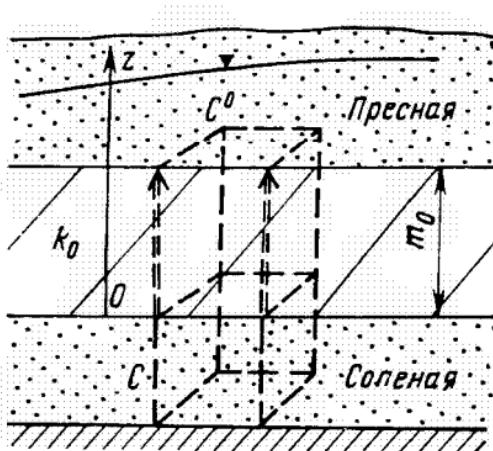
Из формулы (23.34) при  $z_p = 0$  получим длину “языка” соленых вод

$$l = \frac{\bar{\rho} m}{2 I_0}. \quad (23.35)$$

Эти формулы дают хороший результат при  $\bar{\rho} \gg I_0$ . (23.36)

#### 23.2.4. Диффузионный вынос солей через разделяющие слои

Рассмотрим вынос соли из водоносного горизонта (зоны затрудненного водообмена), перекрытого слабопроницаемым разделяющим слоем (рис.23.7), над которым находятся пресные воды зоны активного водообмена. Примем, что вынос солей из глубоко залегающего горизонта, уменьшающий со временем концентрацию его воды, происходит через разделяющий слой  $m_0$  диффузионным переносом при  $V \rightarrow 0$ . Пополнения солей за счет растворения или привноса в горизонте не происходит. Процесс считаем квазистационарным. Тогда, поток солей через разделяющий слой определяется уравнением (23.3) при  $dC/dl = (C^0 - C)/m_0$ , где  $C$  — текущая концентрация раствора в глубоком горизонте;  $C^0$  — концентрация этого раствора в зоне активного водообмена (считается постоянной во времени).



**Рис. 23. 7. Схема к расчету диффузионного рассоления горизонта соленых вод зоны затрудненного водообмена (по В.М. Шестакову)**

Поскольку диффузионный поток связан с уменьшением содержания солей в глубоком горизонте, балансовое уравнение в элементе этого горизонта для единичной площасти горизонтального сечения будет

$$D_M \frac{C^0 - C}{m_0} - n_0 m \frac{dC}{dt} = 0 \quad (23.37)$$

Разделив в выражении (23.37) переменные и имея в виду, что  $C > C^0$ , после интегрирования получим

$$-\ln(C - C^0) = \frac{D_M}{n_0 m m_0} t + A$$

Постоянную  $A$  для глубокого горизонта найдем из начального условия  $t=0, C=C_0$ . Тогда  $A=-\ln(C_0 - C^0)$ , откуда окончательно имеем:

$$\ln \frac{C_0 - C^0}{C - C^0} = \frac{D_M}{n_0 m m_0} t \quad (23.38)$$

или

$$\bar{C} = \frac{C - C^0}{C_0 - C^0} = e^{-\alpha}$$

где  $\alpha = D_M / (n_0 m m_0)$ .

Домашнее задание. Используйте выражение (23.38) для определения времени практического полного опреснения глубокого горизонта, когда относительная концентрация  $\bar{C} \leq 0,02$ . Принять  $D_M = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{сут}$ ;  $n_0 = 0,2$ ;  $m = 100 \text{ м}$  и  $m_0 = 500 \text{ м}$ .

### 23.3. Определение геомиграционных параметров пород

К миграционным параметрам относят показатели, которые входят как коэффициенты в дифференциальные уравнения массопереноса: активная и эффективная пористость (трещиноватость), коэффициент молекулярной диффузии, макро- и микродисперсии, параметры сорбции, геометрические характеристики гетерогенно-блоковой структуры среды. Обычно миграционные параметры, используемые для практических расчетов, являются обобщенными, то есть включают в себя наше недостаточное знание сути гидрогоехимических взаимодействий и процессов, сопровождающих массоперенос. При этом всегда необходима оценка области применения полученных в результате опытных работ миграционных параметров, как с точки зрения длительности периода прогноза, так и размеров потоков подземных вод.

В качестве индикатора для нахождения активной пористости  $n_a$  чаще всего используют ион хлора, как практически несорбируемый компонент. Для изучения пористых пород опыты можно проводить и в лабораториях, при этом для песков основным процессом массопереноса является конвекция, а для глинистых пород – диффузия.

Рассмотрим определение параметров для конвективно-дисперсионной модели, отвечающей решению (23.20), согласно которому на вход фильтрационной колонки (рис.23.8) непрерывно подается индикатор с постоянной концентрацией  $\bar{C}_0 = 1$ . В колонке устанавливается постоянная скорость фильтрации  $v'$  и после этого на определенные моменты времени  $t$  от начала опыта на выходе из колонки отбираются пробы раствора, определяется содержание компонента и строится кривая  $\bar{C} = f(t)$ . Миграционные параметры  $n_a$  и  $D$  определяются из выражения (23.21). Эту зависимость можно представить в виде прямой линии в координатах  $\xi\sqrt{t} \div t$  (рис.23.8), где

$$\frac{\xi\sqrt{t}}{2\sqrt{D/n_a}} = \frac{l_k}{2n_a\sqrt{D/n_a}} - \frac{v'}{2n_a\sqrt{D/n_a}}t \quad (23.39)$$

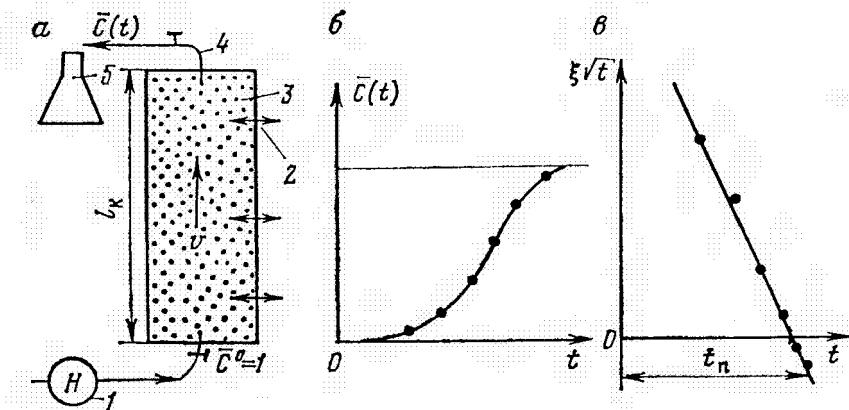


Рис. 23. 8. Определение миграционных параметров по данным лабораторных работ (по П.К. Гавнич)

Анализ выражения (23.39) показывает, что по отрезку  $t_n$ , отсекаемому графиком на оси  $t$ , определяется значение

$$n_a = \Psi' \cdot t_n / l_k \quad , \quad (23.40)$$

где  $l_k$  - длина фильтрационной колонки при лабораторных опытах или расстояние от пусковой скважины до наблюдательной при полевых экспериментах.

По углу наклона графика к оси  $t$  с учетом (23.39) находят коэффициент  $D$ . Значение  $\xi$ , находят по данным выходной кривой  $\bar{C} = (t)$ , которую строят в процессе опыта. Каждому моменту  $t$ , соответствует  $\bar{C} = (t)$ , по которому можно определить  $\operatorname{erfc}\xi$ , а по таблице функций найти аргумент  $\xi$ . Прямолинейность графика является важным диагностическим показателем того, что опытные данные отвечают принятой модели массопереноса. В лабораторных условиях, с целью соблюдения условия (23.22), длина колонки  $l_k$  выбирается так, что бы число Пекле

$$P_e = \Psi' \cdot l_k / D > 50 \quad (23.41)$$

### 23.4. Особенности решения задач миграции в сложных природных условиях

Проблема достоверности количественного изучения массопереноса значительно сложнее, чем аналогичная проблема в геофильтрации, так как требует обоснования как минимум двух совместно используемых моделей - гидрогеодинамической и гидрохимической. При этом достоверность расчетов, главным образом, связана со схематизацией при создании последней модели.

В процессах массопереноса роль различных природных факторов изменяется со временем. Это означает смену во времени различных моделей, учитывающих реальный процесс. При этом часто оказывается, что схематизация, принятая для исследования процесса фильтрации, оказывается неприемлемой при изучении процессов массопереноса. В миграционной модели важна не только количественная оценка фильтрационного расхода потока, но и особенности структуры этого потока, зависящие от конкретного распределения фильтрационных параметров как водоносного пласта, так и слабопроницаемых водоупоров, и различий в условиях массопереноса, определяемых неоднородностью миграционных параметров. В связи с этим, обобщенные параметры пласта, о которых говорилось выше, могут использоваться только либо в относительно простых природных условиях, либо при тщательном их обосновании (оценке ошибок от принимаемых допущений и определении периодов прогноза, для которых такие обобщенные параметры применимы).

Отсутствие аналитических расчетных схем, удовлетворительно аппроксимирующих сложные условия массопереноса, предопределяет, в большинстве случаев, необходимость использования методов математического моделирования. При этом последовательно решаются две задачи. Первой из них является гидродинамическая, в результате решения которой получают в пределах всей исследуемой области по регулярной сетке значения прогнозных уровней, градиентов и скоростей фильтрации. Режим фильтрации при этом, как правило, принимается стационарным. Полученные данные позволяют в процессе реше-

ния второй задачи, используя один или несколько описанных выше механизмов нестационарного массопереноса, количественно оценить изменения концентраций растворенных в подземных водах компонентов в пределах этой области на разные моменты времени.

### Вопросы к лекции № 23

1. В чем различия гидрохимического и гидродинамического аспектов миграции в подземных водах?
2. Что такое поршневое вытеснение? Почему фронт вытеснения (рис. 23.1) представляется вертикальной границей? Какие допущения приняты в схеме поршневого вытеснения?
3. В каких породах перенос вещества осуществляется преимущественно в виде: а) поршневого вытеснения, б) диффузии? Запишите основные уравнения, описывающие каждый из этих процессов.
4. В каких природных условиях перенос вещества связан с гравитационной конвекцией? Что является движущей силой такого механизма переноса вещества?
5. В чем принципиальное отличие схемы поршневого вытеснения от схемы гидравлической дисперсии? В каких природных условиях применима каждая из этих схем?
6. В лабораториях или в полевых условиях следует изучать процессы: а) макродисперсии, б) микродисперсии? Объясните, почему.
7. Каковы способы учета процесса равновесной сорбции при массопереносе небольших концентраций мигрирующего вещества? Как изменяется скорость переноса при учете сорбции?
8. Дайте понятия общей, активной, эффективной пористости горной породы. Какие между ними существуют количественные соотношения? Каков порядок значений этих параметров для пористых и трещиноватых пород?
9. В пористых или трещиноватых породах роль гидродисперсии в процессе миграции более значима? Объясните, почему.
- 10.Какие параметры характеризуют конвективный, диффузионный и гидродисперсионный массоперенос?
- 11.Требуется определить, за какое время фронт вытеснения переместится на расстояние  $\Delta l$ . Укажите, какая исходная информация требуется для решения задачи?
- 12.При миграции хлоридов или нитратов в подземных водах какая величина эффективной пористости будет больше?
- 13.Докажите, что при гидродисперсии на фронте поршневого вытеснения (рис. 23.5)  $\bar{C} = 0.5$ .
- 14.Что такое критерий Пекле? При каких оценках он используется? Поясните, почему при определении длины опытной колонки  $P_e \approx 50$ .
- 15.Запишите формулу, используемую при определении ширины переходной зоны  $\Delta x_n$  для предельной схемы макродисперсии. Что такое поперечная дисперсия? В каких расчетных схемах массопереноса ее следует учитывать?

16. Почему при вторжении морских вод в пласт на побережье, содержащий пресную воду, они тяготеют к его подошвенной зоне (рис. 23.6)?
17. По каким причинам длина «языка» соленых вод на побережье (рис. 23.6) может существенно изменяться в зависимости от сезонов года?
18. Почему брошенный в стакан кристалл марганцевокислого калия постепенно вызывает окрашивание всей массы воды в стакане?
19. В каких породах при обосновании величины коэффициента микродисперсии D допустимо пренебрегать процессами молекулярной диффузии, а в каких породах — процессами механической дисперсии?
20. Использованием лабораторных или полевых работ следует определять параметры дисперсии в однородных песках, трещиноватых известняках? Объясните, почему.
21. Для каких периодов конвективно-диффузионного переноса характерна схема: а) неограниченной емкости блока, б) квазистационарного переноса компонента в пределах блока? Для какого типа проницаемой среды характерны эти схемы?
22. Перечислите основные предпосылки упрощающие схему диффузионного выноса солей из глубоко залегающего водоносного горизонта.
23. Какие основные схемы гетерогенно-неоднородной среды Вам известны? В каких частях этих систем происходит в основном конвективный, а в каких конвективно-диффузионный перенос? При каких условиях миграцию в гетерогенных комплексах допустимо рассматривать с формальными позиций, аналогичных случаю гомогенных комплексов?
24. При каких предпосылках о режиме фильтрации решаются основные задачи миграции?

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Заканчивая курс, автор надеется, что у студента, проработавшего это пособие, сложилось достаточно полное представление о главных принципах, лежащих в основе ДПВ, и о методах решения конкретных задач. В заключение хотелось бы отметить следующее.

Прежде всего, для увеличения эффективности наших оценок главные усилия следует направить на значительное улучшение исходной гидрогеологической информации – основе решения любой инженерной задачи. Другой важной стороной нашей работы являются гидрогеологические прогнозы, где наименее изученными остаются вопросы оценки условий питания и разгрузки подземных вод. При этом очень важно добиваться тесной взаимной увязки гидрогеологических прогнозов с оптимизацией гидрогеологических изысканий и наблюдений на основе принципов адаптации. Это направление связано с гидро-геодинамическим мониторингом, представляющим собой режимные наблюдения в зоне влияния действующих инженерных сооружений, направленные на решение задач прогноза и управления подземными водами применительно к создаваемой обстановке.

Широкие перспективы открывает внедрение принципов и методов ДПВ в другие направления гидрогеологии: теории миграции подземных вод в гидро-геохимию, количественной оценки режима и баланса подземных вод в региональную гидрогеологию, современных методов обработки информации в методику гидрогеологических исследований.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Аверьянов С.Ф. Фильтрация из каналов и ее влияние на режим грунтовых вод. М., Колос, 1982.
2. Боревский Б.В., Дробноход Н.И., Язвин Л.С. Оценка запасов подземных вод. Киев, Выща школа, 1989.
3. Бочевер Ф.М. Теория и практические методы расчетов эксплуатационных запасов подземных вод. М., Недра, 1968.
4. Бочевер Ф.М. и др. Основы гидрогеологических расчетов, М., Недра, 1969.
5. Гавич И.К. Гидрогеодинамика. М., Недра, 1988.
6. Мироненко В.А. Динамика подземных вод, М., МГТУ, 1996.
7. Шестаков В.М. Гидрогеодинамика. М., МГУ, 1995.
8. Шестаков В.М. Теоретические основы оценки подпора, водопонижения и дренажа. М., МГУ, 1986.
9. Справочное руководство гидрогеолога. Л., Недра, 1979.
10. Практикум по динамике подземных вод. М., МГРИ, 1984.
11. Методические указания к курсовой работе по «Динамике подземных вод». М., МГРИ, 1983.