М. Маскет

Течение однородных жидкостей в пористой среде

Перевод М. А. Геймана



Москва ♦ Ижевск

2004

УДК 622

The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media

BY M. MUSKAT, PH. D.
Chief of Physics Division, Gulf Research and Development Company

WITH AN INTRODUCTORY CHAPTER BY
R. D. WYCKOFF. B. S. in E. E.
Formerly Chief of Physics Division, now Staff Geophysicist (Houston, Texas), Gulf Research and Development Company

FIRST EDITION

Second Printing

I. W. EDWARDS, INC. ANN ARBOR, MICHIGAN
1946

Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. — Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 628 стр.

В книге рассматривается теория фильтрации и ее приложения к технологии гидротехники, гидрогеологии, мелиорации и ирригации почв, а также добычи нефти, газа и эксплуатации источников водоснабжения.

Книга рассчитана на широкий круг читателей — гидротехников, мелиораторов, специалистов в области инженерной гидрогеологии, гидрогеологов, гидродинамиков, физиков и инженеровнефтяников.

Репринтное издание (оригинальное издание: М.Л.: Гостоптехиздат, 1949 г.).

© Институт компьютерных исследований, 2004

http://rcd.ru

ПРЕДИСЛОВИЕ

От переводчика

В 1937 г. в США была издана книга американского физика Морриса Маскета „Течение однородных жидкостей в пористой среде". В 1946 г. эта книга вышла вторым стереотипным изданием.

В работе Маскета, перевод которой ныне предлагается советскому читателю, при широком использовании математического аппарата подвергнуты были глубокому анализу следующие вопросы: гидромеханическое обоснование основных законов фильтрации, методы определения физических констант горных пород (проницаемость, пористость); вывод диференциальных уравнений движения однородных жидкостей: воды, нефти и газа; радиальное и нерадиальное плоское движение жидкостей к стокам (скважинам); фильтрация под плотинами, трехразмерный поток жидкости в пористой среде, теория совершенных и несовершенных скважин, движение жидкости в условиях гравитационного потока (с учетом „свободной поверхности"), теория движения жидкости в среде с неоднородной проницаемостью, теория одновременного движения в пласте двух жидкостей, анализ движения водонефтяного контакта и явления конусообразования, теория интерференции скважин, теория водной репрессии (флюдинга) при различной сетке размещения инжекционных и эксплоатационных скважин, неустановившееся движение жидкости в пористой среде, движение сжимаемой жидкости или проблема упругого режима, движение газа в пористой среде — двухразмерное, трехразмерное, установившееся и неустановившееся, теория газонефтяного фактора и т. д.

Многие разделы книги Маскета представляют собой компиляцию и критику работ европейских ученых, работавших в области теории фильтрации, но из большой плеяды советских ученых, посвятивших свои работы указанной области, Маскет ссылается только на Ведернико-ва и Б. Девисона. Между тем, начиная с работ Н. Е. Жуковского в 1889 г. по „Теоретическому исследованию о движении подпочвенных вод" и Н. Н. Павловского по электродинамическим аналогиям и продолжая классическими работами акад. Л. С. Лейбензона и акад. С. А. Христиановича, русская наука создала очень много ценного в области подземной гидрогазодинамики. Исследования акад. Л. С. Лейбензона послужили основой для ряда работ советских ученых: Д. С. Вилькера, П. Я. Кочиной, Б. Б. Лапука, М. Д. Миллионщикова, И. П. Москалькова, И. А. Чарного, В. Н. Щелкачева и др. В результате этих работ, явившихся ценнейшим вкладом в советскую и мировую науку, был создан новый раздел технической гидромеханики, посвященный теории движения газа и газированной жидкости в пористой среде, какими являются нефтяные и газовые коллекторы.

Особенно большие работы по фильтрации были проведены русскими гидротехниками и гидрогеологами: Саваренским, Замариным, Каменским, Нельсон-Скорняковым и т. д.

В связи с этим в книге помещена статья проф. В. Н. Щелкачева „Краткая история развития подземной гидравлики в СССР", а в конце книги список русских работ, проведенных в той же области, что и работа Маскета, для того, чтобы советский читатель мог найти по трактуемым вопросам отечественную литературу, базирующуюся на эксперименте и анализе, созданном в нашей стране, и мог лучше познать отечественную науку и ее лучших представителей.

С рядом положений Маскета нельзя согласиться.

Так, Маскет принимает, что поскольку скорость потока пропорциональна градиенту давления и справедлив закон Дарси, проницаемость пористой среды является свойством последней, не зависящей от характеристики жидкости, которая была применена для определения проницаемости горной породы. Работами ИГИ АН СССР (М. А. Гейман), ныне Института нефти АН СССР, было показано, что это положение справедливо только для высокопроницаемых пород с простой структурой (по Авдусину). Для пород же со сложной структурой и обладающих низкой проницаемостью величина последней при определении газопроницаемости зависит также от природы газов и газокинетического диаметра молекул, а при определении проницаемости жидкостями — от адсорбционных и электрокинетических явлений. Маскет в разделе, посвященном фильтрации под плотинами, поддерживает старую теорию Бляя. Эта теория базируется на изучении существующих гидротехнических сооружений и в настоящее время на основании работ Павловского отвергнута. Г. Н. Каменский по поводу теории Бляя пишет, что „представление о фильтрационном потоке под сооружением, принятое Бляем за основу, является слишком упрощенным и слишком далеким от действительности, и отказ Бляя от рассмотрения всего фильтрационного потока в толще грунта под сооружением естественно не мог содействовать развитию более правильного понимания явлений фильтрации под гидротехническими сооружениями и уточнению приемов расчета сооружений".

Рассматривая выпирание плотины вследствие общего движения грунтовой массы под влиянием гидродинамического давления фильтрующей воды, Маскет совершенно не касается выноса мелких частиц и внутреннего размыва, т. е. явления, известного под общим названием суффозии, понятие о которой впервые ввел покойный акад. А. П. Павлов.

В разделе о системах гравитационного потока Маскет приходит к заключению, что в подавляющем большинстве случаев, имеющих значение для практики, аналитические решения краевых задач по движению грунтовых вод со свободной поверхностью довести до числовых результатов пока еще не представляется возможным, почему приходится прибегать к электродинамическому моделированию.

Советский ученый Нельсон-Скорняков показал, что большинство весьма трудных и важных для практики задач по фильтрации, которые не поддавались до сего времени решению, оказалось возможным решить в замкнутом случае, применив метод исследования предельных случаев.

Этот метод исследования предельных случаев, разработанный Нельсон-Скорняковым, оказался весьма эффективным и позволил получить новые качественные результаты.

В разделе, посвященном генезису и перемещению грунтовых и вместе с ними и погребенных вод, Маскет придерживается позиций Фольгера, Цункера и Верслюи. Работы последних, как показал покойный А. Ф. Лебедев, „являются чисто умозрительными и недостаточными, а нередко дают и неверные результаты". Акад. В. И. Вернадский пишет о работах А. Ф. Лебедева, который установил впервые понятие о проницаемости горных пород еще в 1914 г. „Они (т. е. работы) дают возможность выявить структуру всех подземных, глубинных вод. В сущности он (А. Ф. Лебедев) выявил основное динамическое равновесие: природная вода — твердое тело и связанную с этим структуру природных подземных вод".

Рассматривая теорию водоупругого режима вообще и применительно к месторождению Восточный Техсас, Маскет пришел к следующему выводу. „Если в какой-либо точке пласта изменяется пластовое давление, то возмущенное состояние, вызванное изменением давления, быстро распространяется по пласту через насыщающую его жидкость. Скорость распространения этих упругих волн достигает порядка 1 *км/сек*, т. е. порядка скорости звука в соответствующей жидкости".

Проф. В. Н. Щелкачев, более полно и тщательно исследовавший проблему водоупругого режима, который был впервые выдвинут для объяснения явлений, имеющих место в подземных резервуарах, проф. Московского нефтяного института И. Н. Стрижовым, пишет по этому вопросу: „Порядок приведенных величин... показывает, что скорость распространения упругих волн давления через жидкость, насыщающую пласт, несравнима со скоростью распространения упругих волн через жидкость вне пористой среды (в свободном резервуаре)"... Наряду с этим явление упругости горных пород, что также влияет на поведение гидравлической системы (нефтяной пласт), не было учтено в работе Маскета.

При всех своих достоинствах, делающих книгу Маскета интересной для изучения и познания с физико-математической стороны явлений, имеющих место при движении однородной жидкости в пористой среде, в частности, нефти, воды и газа в нефтяных коллекторах, им совершенно не учитываются вопросы морфологии нефтяного коллектора, а также капиллярные и поверхностно-молекулярные явления, имеющие место в капиллярах и субкапиллярах последнего.

Между тем проведенные за последние 10—15 лет в СССР в лаборатории физики нефтяного пласта ИГИ АН СССР, под руководством чл.-корр. АН СССР М. А. Капелюшникова, работы П. П. Авдусина по структуре порового пространства нефтяных коллекторов, М. М. Кусакова по поверхностным явлениям в нефтяном пласте, С. Л. Закса по термодинамической характеристике последнего сильно увеличили наши знания в области изучения механизма нефтеотдачи из нефтяных коллекторов.

Несмотря на ряд указанных недостатков, книга Маскета представляет собой ценность не только для каждого исследователя-нефтяника, но и для любого другого ученого, работающего в области фильтрации жидкостей через пористую среду.

М. А. Гейман

В. Н. Щелкачев

КРАТКАЯ ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ПОДЗЕМНОЙ ГИДРАВЛИКИ В СССР

В конце второго десятилетия нынешнего века начал свои исследования в области теории фильтрации акад. Н. Н. Павловский. В опубликованной в 1922 г. замечательной монографии (докторской диссертации) акад. Н. Н. Павловский разработал ясную гидромеханическую модель явления фильтрации, позволившую выполнить строгий вывод диференциальных уравнений движения жидкости в пористой среде. Впервые многие задачи фильтрации жидкости под плотинами были сформулированы Павловским как краевые задачи математической физики; решение этих задач в таком аспекте открыло новую эпоху в гидротехнике. Впервые в мировой литературе Павловский предложил использовать параметр Рейнольдса как критерий существования закона фильтрации Дарси. До акад. Павловского Крёбер (в 1884 г.) и Мазони (в 1895 г.) провели ряд исследований, имевших целью установить пределы применимости закона фильтрации Дарси, но их выводы были принципиально неверны, ибо Крёбер связывал предел применимости основного закона фильтрации только с величиной диаметра зерна грунта, Мазони — только с пьезометрическим уклоном; другие исследователи пытались установить критическую скорость фильтрации, при которой якобы (при всех условиях) закон Дарси нарушается. Акад. Павловский не только ввел в подземную гидравлику параметр Рейнольдса и подсчитал, базируясь на правильно обработанных прежних экспериментальных данных, критическое значение параметра Рейнольдса, но и избежал тех ошибок, которые допустили позднейшие американские авторы, не знавшие его работы. Именно в позднейших работах американских авторов параметр Рейнольдса был чисто механически перенесен из трубной гидравлики в подземную без всякого к тому обоснования. Наоборот, Павловский, основываясь на теории Слихтера, дал вывод формулы, определяющей параметр Рейнольдса.

Заинтересовавшись работой акад. Н. Н. Павловского, проф. Н. Е. Жуковский вторично, незадолго до своей кончины, вернулся к исследованиям в области теории фильтрации.

Жуковский разработал иной метод (чем у Павловского) решения задачи о фильтрации воды под плотинами при наличии напорной поверхности и о фильтрации воды со свободной поверхностью.

Эти идеи Павловского и Жуковского были в последующем развиты в трудах обширной советской школы исследователей Аравина, Биндемана,

Замарина, Ведерникова, Веригина, Галина, Гиринского, Девисона, Козлова, Мелещенко, Нельсон-Скорнякова, Ненько, Нумерова, Полубариновой-Кочиной, Ризенкампфа, Угинчуса, Фальковича и др. Содержание работ этой школы исследователей мы здесь описывать не будем [1], ибо большинство из них связано только с проблемами фильтрации воды под плотинами, через тело земляных плотин, с проблемами притока воды к ирригационным и дренажным сооружениям и т. д.

С 1921 г. в Баку начались теоретические и экспериментальные исследования акад. Л. С. Лейбензона — основателя советской школы ученых, работающих в области подземной гидравлики именно в связи с проблемами добычи нефти и газа. Лейбензоном впервые выведены диференциальные уравнения движения газа и газированной жидкости в пористой среде, выяснены особенности работы газовых скважин, подвергнуты математическому исследованию кривые производительности и режимы работы нефтяных скважин и пластов, методы подсчета запасов нефти и газа в пластах, проблема вытеснения нефти и газа водой и т. д.

В 1927—1928 гг. Лейбензон организовал проведение крупных исследований по подземной гидравлике в Государственном исследовательском нефтяном институте (ГИНИ) и в Московском государственном университете (ценные экспериментальные исследования в ГИНИ и МГУ были выполнены Д. С. Вилькером и И. П. Москальковым); в 1934 г. была опубликована капитальная монография акад. Л. С. Лейбензона — „Подземная гидравлика воды, нефти и газа“. В этой монографии впервые в мировой литературе систематично изложены основы общей теории фильтрации, а также все важнейшие исследования в области собственно подземной нефтяной гидравлики. Подчеркнем, что и в теоретическом и экспериментальном решении новых проблем и в опубликовании сводной монографии Лейбензон опередил зарубежную научную мысль — аналогичная сводная монография была опубликована Маскетом в США на 3 года позже, т. е. только в 1937 г.

Следующей сводной монографией, изданной в СССР в 1935 г. и посвященной теории движения подземных вод в водоносных пластах, была книга проф. Г. Н. Каменского „Основы динамики подземных вод“. Работы Каменского и его школы имели большое значение для популяризации основных идей подземной гидравлики среди гидрогеологов и позволили нефтяникам перенять опыт гидрогеологов в области исследования скважин и многих других вопросов.

Для понимания последующей истории развития подземной гидромеханики необходимо отметить те новые идеи, которые были заложены в трудах главным образом грозненских нефтяников, опубликованных в двадцатых — начале тридцатых годов нынешнего века: Н. Т. Линдтропа, М. М. Чарыгина, С. Н. Шаньгина, М. Г. Танасевича, В. М. Николаева, Н. М. Карпенко и др. В связи с изучением поведения некоторых нефтеносных пластов Старо-Грозненского и Ново-

---

[1] Работы этой школы исследователей прореферированы в обзорно-исторической статье П. Я. Полубариновой-Кочиной и С. В. Фальковича „Теория фильтрации жидкостей в пористых средах“. Прикладная математика и механика, т. XI, вып. 6, 1947 г.

Грозненского месторождений упомянутые геологи (главой этой школы был Н. Т. Линдтроп) пришли к весьма важному и по тому времени совершенно новому выводу о том, что главной силой, двигавшей нефть к забоям скважин в наиболее продуктивных пластах упомянутых месторождений, была сила напора краевых вод; в пластовых условиях газ был полностью растворен в нефти и никакой активной роли в продвижении нефти по пласту играть не мог.

Этим существенно изменялось общепринятое в то время мнение — господствовавшая с 1865 г. американская теория Бриггса; следуя Бриггсу, считали, что единственной силой, продвигавшей нефть в пласте к забоям скважин, могла быть сила упругости газа. Кроме того, тогда считали, что влияние работы каждой скважины может распространяться в пласте не далее строго определенного расстояния; например, во всех гидромеханических расчетах Слихтера принималось, что радиус влияния скважин равнялся 183 *м* (600 футам). Если скважины оказывались удаленными друг от друга на расстояние двойного радиуса влияния, то они якобы совершенно не должны были влиять друг на друга.

Н. Т. Линдтроп и другие перечисленные геологи привели факты взаимодействия скважин на очень больших расстояниях друг от друга, факты влияния разработки нефтяного месторождения на пластовые давления в удаленных законтурных водяных скважинах и даже на дебиты естественных минеральных источников, выходы которых были расположены на расстоянии почти 20 *км* от эксплоатировавшихся нефтяных скважин; далее те же геологи открыли зависимость изменения пластового давления в нефтяной залежи от повышения зеркала краевых вод (водонефтяного контакта), зависимость пластовых давлений в скважинах от гипсометрии их забоев и положения забоев по отношению к зеркалу подошвенных или краевых вод и т. п. Таким образом, еще до появления работы Герольда, которого принято было считать первым автором теории режимов нефтеносных месторождений, грозненские геологи разработали теорию водонапорного режима [1].

На основании этой теории развились представления о балансе пластовых водонапорных систем и о необходимости учитывать гидравлическую связь области разработки пласта с областью напора и областью питания. Вполне понятно, что именно эти, в то время передовые, идеи геологов следовало положить в основу гидромеханического анализа особенностей работы нефтяных скважин и нефте-водо-газоносных пластов.

Поэтому в начатых с 1935 г. в ГрозНИИ исследовательских работах упомянутые идеи грозненских геологов были обобщены, была разработана гидравлическая теория пластовых водонапорных систем, были подвергнуты критике прежние теории взаимодействия скважин Слихтера-Форхгеймера, связанные с дефектным представлением о существовании постоянного, ограниченного радиуса влияния скважин, были исследованы особенности работы скважин при различных формах и

---

[1] Очень жаль, что долгое время оставались незамеченными и не подвергались гидродинамической обработке высказанные в то время передовые идеи проф. И. Н. Стрижова по поводу „Упруго-грузового режима“ нефтяных месторождений.

размерах контура области питания. В ГрозНИИ была разработана новая теория взаимодействия скважин, изучены свойства различных систем расстановки скважин; итоги этих исследований были опубликованы в 1936—1939 гг.

В начале тридцатых годов В. П. Яковлев провел обширные исследования нефтяных скважин, на базе которых сделал ряд ценных предложений по поводу методики исследования скважин и пластов и выяснил особенности движения уровня жидкости в скважинах непосредственно после их пуска или остановки при различных простейших законах фильтрации жидкости в пласте. Яковлев указывал на необходимость учитывать сжимаемость жидкости в пластовых условиях. Работы Яковлева особенно ценны тем, что способствовали пробуждению внимания инженерно-технических работников нефтяной промышленности не только к исследованию скважин, но и к изучению законов фильтрации жидкости в нефтеносных пластах.

В те же годы в ГрозНИИ инженеры А. А. Болтышев и Т. Л. Михайлов сконструировали „опытный пласт“ — цилиндрический резервуар, заполнявшийся песком. На этом пласте были изучены законы одноразмерного движения мертвой и газированной жидкости, были установлены интересные зависимости дебитов газированной жидкости от перепадов давления и газовых факторов и т. д.

В середине тридцатых годов В. М. Барышев сконструировал в АзНИИ опытный куполовидный „пласт“, на который было проведено 108 скважин; на „опытном пласте“ и на специальных „дренажных элементах“ В. М. Барышев и А. Н. Снарский провели интересные эксперименты по взаимодействию скважин при различных системах их расстановки, по анализу свойств коэфициентов продуктивности скважин, по движению газированной жидкости в пористой среде, по образованию „газовой шапки“ в пласте и ее влиянию на дебит скважин и т. д. Результаты экспериментов Барышева оказались в очень хорошем согласии с упомянутыми выше гидродинамическими исследованиями ГрозНИИ.

Ценные экспериментальные исследования по движению газированной жидкости в пористой среде были проведены в 1940 г. в АзНИИ А. М. Пирвердяном и М. К. Мамедовым. Авторы сопоставили дебиты газированной и „мертвой“ жидкости при всех прочих одинаковых условиях их движения, исследовали зависимость между газовым фактором и перепадом давления и, кроме того, основываясь на теории обтекания и законах подобия, исследовали явления отклонения закона фильтрации от закона Дарси.

В Азербайджанском филиале Академии наук СССР Л. А. Сергеев, пользуясь методом электро-гидродинамических аналогий, провел на электромоделях нефтяных пластов ряд исследований, имевших целью установить рациональные схемы расстановки скважин, распределения давления вокруг них и т. д.

С 1938—1939 гг. были начаты в ГрозНИИ и продолжены в Днепропетровском университете дальнейшие исследования проблемы расстановки скважин; было подвергнуто критике и существенно уточнено решение проблемы вытеснения нефти водой, данное ранее Маскетом. Был подробно разработан метод исследования законов движения вдоль

различных линий тока и стягивания контура нефтеносности к одной и к различным группам скважин, были сопоставлены дебиты батарей скважин с дебитами „галерей", были установлены простейшие гидродинамически рациональные варианты расстановки скважин в условиях купольной, брахиантиклинальной и моноклинальной структур, к которым приурочены залежи нефти. Эти вопросы были освещены в докторской диссертации В. Н. Щелкачева в 1941 г. В те же годы Г. Б. Пыхачевым были решены некоторые задачи о взаимодействии скважин и о работе отдельных скважин в условиях неоднородно проницаемых пластов.

В 1940 г. акад. Л. С. Лейбензон возглавил организованную проф. Б. Б Лапуком группу, в которую входили ученые и инженеры различных специальностей. Эта группа поставила своей целью выработку научно обоснованной методики проектирования рациональной системы разработки нефтяных месторождений.

При выборе рациональной системы разработки месторождений считалось необходимым: 1) учесть геологические особенности каждого месторождения; 2) установить гидродинамически рациональные варианты расстановки скважин применительно к выясненным геологическим особенностям; 3) провести подсчеты, связанные с выбором методов эксплоатации скважин; 4) провести заключительную экономическую оценку. Как видно, совершенно правильно предполагалось, что решить проблему рациональной разработки нефтяных месторождений можно лишь на базе комплексного геологического — гидродинамического — технического — экономического анализа.

После начала войны группа была реорганизована в Проектно-исследовательское бюро (ПИБ) при Московском нефтяном институте. Бюро возглавил доцент А. П. Крылов, осуществивший не только общее руководство, но и проведший ряд исследований, облегчивших применение новейших результатов подземной гидравлики к технологии нефтедобычи. В бюро были проведены большие работы по проектированию разработки многих нефтяных и газовых месторождений; попутно решались новые проблемы подземной гидравлики. В итоге этих работ коллектив из пяти авторов — А. П. Крылов, М. М. Глоговский, М. Ф. Мирчинк, Н. М. Николаевский и И. А. Чарный — подготовил к изданию капитальную монографию: „Научные основы разработки нефтяных месторождений". И эта работа намного опережает последние достижения зарубежной науки.

Следует отметить, что очень существенную помощь в работе Проектно-исследовательского бюро оказывает сконструированный проф. Л. И. Гутенмахером электроинтегратор. Использование этого прибора основано на существовании электро-гидродинамической аналогии. В том случае, когда геологические условия разрабатываемого месторождения сложны, — пласт неоднороден по проницаемости, пористости, мощности, имеет контуры нефтеносности и контуры области питания неправильной геометрической формы — решать задачу подземной гидравлики строгими математическими методами было бы трудно и нецелесообразно; наоборот, на электроинтеграторе сравнительно легко учесть всю сложность известных геологических условий нефтегазоносного пласта и довести решение задачи до получения необходимых числовых результатов. Мето-

дику решения задач подземной гидравлики на электроинтеграторе значительно усовершенствовал и углубил научный сотрудник Проектно-исследовательского бюро кандидат технических наук П. М. Белаш; пользуясь методикой Белаш, на электроинтеграторе были изучены многие особенности установившегося и неустановившегося притока жидкости и газа к скважинам.

К описанию других работ, выполненных в Проектно-исследовательском бюро, вернемся несколько позже.

В 1940—1941 гг. акад. С. А. Христианович провел весьма интересные исследования сложной проблемы движения грунтовых вод, не следующих закону Дарси, а также развил теорию движения газированной жидкости, базирующуюся на экспериментах Викова—Ботсета. Новые ценные выводы, вытекающие из исследований Христиановича по вопросам движения газированной жидкости, были в 1941 г. получены проф. Б. Б. Лапуком.

Во время войны были опубликованы новые работы акад. Л. С. Лейбензона, в которых была значительно усовершенствована прежняя теория автора о движении газированной жидкости и были исследованы вопросы турбулентной фильтрации газов.

Член-корр. Акад. наук СССР П. Я. Полубаринова-Кочина в 1942—1945 гг. решила ряд сложных задач подземной нефтяной гидравлики: о притоке жидкости к скважинам в неоднородной среде, об определении размеров пластовой водонапорной системы и проницаемости пласта на основании известных дебитов скважин (решение так называемых обратных задач подземной гидравлики), о перемещении контура нефтеносности.

Последняя проблема была также подвергнута глубокому математическому исследованию М. Н. Тиховым в ГрозНИИ.

В те же годы проф. И. А. Чарный улучшил методику решения задач о притоке нефти к скважинам в месторождениях различных форм, решил очень важный вопрос о наивыгоднейшей расстановке ряда скважин в пластах с водонапорным режимом. В 1946 г. Чарный предложил весьма остроумный приближенный метод решения задачи о взаимодействии гидродинамически несовершенных скважин. Точное математическое решение этой проблемы вызвало большие математические трудности. Сравнение найденного Б. И. Сегалом точного решения с приближенным решением Чарного показало прекрасное их согласие, и потому простой метод Чарного может быть с успехом использован при практических расчетах.

В 1941—1944 гг. ГрозНИИ удалось провести на промыслах Грознефти весьма тщательные исследования скважин и поведения пластов после массовой остановки и пуска скважин[1].

Это дало возможность уточнить гидродинамический анализ различных методов исследования скважин, улучшить методику их исследования, выяснить особенности неустановившихся процессов перераспределения

---

[1] Начатые В. Н. Щелкачевым в Октябрьском (бывшем Ново-Грозненском) районе исследования скважин продолжил в 1944—1948 гг. инж. К. М. Донцов, который систематизировал богатейший материал по исследованиям скважин и интерпретировал его с точки зрения новейших идей подземной гидравлики.

пластового давления, дало твердые доказательства большого влияния объемной упругости жидкостей и горной породы на поведение скважин и режим пласта.

В те же годы в ГрозНИИ был заново исследован вопрос о критерии существования закона фильтрации Дарси, была преобразована формула акад. Павловского для параметра Рейнольдса — в нее вместо эффективного диаметра введен коэфициент проницаемости пласта. Затем было установлено, что закон фильтрации Дарси не может одновременно нарушаться во всем пласте, было введено понятие об области кризиса закона Дарси и о движении жидкости к скважине при одновременном существовании двух режимов фильтрации в пласте. Несколько позже были выведены диференциальные уравнения движения упругой жидкости в упругом пласте и продолжено гидродинамическое исследование теории упругого режима.

В докторской диссертации М. Д. Миллионщикова впервые (в 1945 г.) доказано, что и в подземной гидравлике для движения жидкости в пористой среде можно построить диаграмму, аналогичную диаграмме Никурадзе в трубной гидравлике. Проф. М. Д. Миллионщиков выполнил гидродинамическое исследование проблемы образования конуса обводнения и метода бесконусной эксплоатации скважин при наличии подошвенной воды в призабойной зоне и выяснил многие особенности эксплоатации скважин в пластах с подгазовой нефтью.

Доц. Г. Б. Пыхачев, основываясь на гидродинамических исследованиях акад. Христиановича — проф. Лапука и на экспериментах по движению газированной нефти, установил (в 1947 г.), что в пластах с режимом „растворенного газа“ производительность скважин существенно зависит не только от перепада давления, но и от абсолютной величины пластового давления. В 1948 г. Пыхачевым дано упрощенное решение задачи о вытеснении из пласта нефти газом, нагнетаемым в пласт через нагнетательные скважины. В. Ф. Дудиным исследовано вытеснение нефти водой из пласта в том случае, когда движение жидкости не подчиняется закону фильтрации Дарси.

В 1947 г. была опубликована статья А. Н. Мятиева, в которой автор значительно обобщил обычную постановку задач подземной гидравлики, учтя при эксплоатации скважин приток воды в напорный пласт через его кровлю и ложе; в целом ряде конкретных случаев А. Н. Мятиев продемонстрировал очень хорошее согласие теоретических расчетов с фактическими данными.

В заключение необходимо вновь вернуться к описанию тех исследований по подземной гидравлике, которые за последние годы проводились в Проектно-исследовательском бюро Московского нефтяного института, помимо решения основной задачи о рациональной разработке нефтяных месторождений. Кроме уже упомянутых выше работ Полубариновой-Кочиной и Чарного, выполненных в Бюро, следует упомянуть еще о дальнейших исследованиях Чарного по теории упругого режима, в которых выяснено значение факта сжимаемости законтурной воды и сделана попытка определения параметров пласта на основании результатов специальных исследований скважин.

Канд. техн. наук М. М. Глоговским подвергнуты критике решения Форхгеймера, Козени, Маскета проблемы работы гидродинамически не-

совершенных скважин и предложено собственное, более строгое решение этой проблемы. С помощью построенных Глоговским графиков легко судить о влиянии глубины вскрытия пласта на производительность скважин. Канд. техн. наук Б. Э. Казарновской выполнены ценные исследования движения жидкости к скважинам в негоризонтальных пластах, решены задачи об особенностях перемещения водонефтяного контакта, стягивающегося в слабо наклоненном пласте к прямолинейной батарее скважин, выяснены целесообразные пределы эксплоатации обводнившейся батареи скважин. Теоретические и экспериментальные исследования канд. техн. наук В. И. Щурова значительно продвинули решение вопроса о влиянии размеров и числа круглых перфорационных отверстий на производительность скважин.

В работах канд. матем. наук М. Д. Розенберга осуществлено дальнейшее развитие идей Чарного о наивыгоднейшей расстановке рядов скважин в нефтяных пластах с водонапорным режимом.

Кандидаты техн. наук К. А. Царевич и В. А. Архангельский получили ряд новых ценных результатов по вопросам движения газированной жидкости в пористой среде, причем Царевич дал теоретическое объяснение многим явлениям, наблюдавшимся в процессе разработки пластов с режимом растворенного газа; свои дальнейшие исследования авторы проводят во ВНИИ.

Проф. Б. Б. Лапук доказал, что в условиях установившегося и неустановившегося радиального движения газа к скважинам средневзвешенное по объему пластовое давление может быть с высокой степенью точности приравнено контурному давлению. Тот же факт им был доказан и для некоторых иных случаев притока к скважинам газированной нефти, капельно-сжимаемой жидкости (в условиях упругого режима), притока жидкости со свободной поверхностью в условиях гравитационного режима. Основанный на этом факте приближенный метод позволил Лапуку весьма просто и с высокой степенью точности решить как многие из тех задач, которые раньше решались сложно и с большими математическими трудностями, так и ряд совершенно новых задач. Именно Лапуком решены некоторые проблемы работы скважин в условиях гравитационного режима, режима растворенного газа и упругого режима, но особенно широко упомянутый прием использован Лапуком для исследования проблемы разработки газовых месторождений. В зарубежной литературе до сих пор не было сколько-нибудь теоретически обоснованных решений проблемы расстановки газовых скважин. Мы же теперь имеем развивающуюся, гидродинамически обоснованную теорию разработки газовых месторождений; на базе этой теории уже сделаны многие важные для практики выводы.

В последних работах Проектно-исследовательского бюро, посвященных гидродинамической теории упругого режима, были объяснены закономерности в изменении пластового давления и удельной добычи жидкости из пласта в процессе его разработки, выяснены особенности неустановившегося эффекта взаимодействия скважин и законы изменения радиусов влияния скважин.

В нашем обзоре мы не упоминали о ценных работах П. П. Авдусина, М. А. Геймана, А. И. Губанова, Б. В. Дерягина, С. Л. Закса, Ф. И. Котяхова, М. М. Кусакова, П. А. Ребиндера, Ф. А. Требина

и др., которые в большей степени связаны с физикой и физико-химией пласта, чем с подземной гидравликой.

В заключение заметим, что все большее и большее число инженеров и геологов используют сведения из области подземной гидравлики для решения важнейших конкретных проблем технологии нефтедобычи и промысловой геологии. Достаточно, например, указать на опубликованные работы профессоров Г. Н. Газиева, М. А. Жданова, Н. Т. Линдтропа, М. Ф. Мирчинка, доц. И. И. Муравьева, инженеров и геологов И. И. Карганова, М. И. Максимова, Г. К. Максимовича, В. М. Николаева, И. Т. Пронякова, Э. Б. Чекалюка и многих других; в этих работах сведения из области подземной гидравлики используются для анализа режима пластов и поведения скважин, для анализа эффекта солянокислотной обработки скважин, вторичных методов эксплоатации и т. д.

Однако современное внедрение новейших достижений подземной гидравлики в нефтепромысловую практику все же нельзя признать достаточно широким. Происходит это вовсе не из-за того, что интересующие практиков вопросы якобы не подверглись теоретическому исследованию; наоборот, как следует из приведенного выше исторического обзора, охваченный теоретическими исследованиями круг вопросов весьма велик.

Мы считаем, что имеются иные причины, тормозящие использование достижений подземной гидравлики в нефтепромысловой практике. Именно, во-первых, необходимо отметить новизну вопросов и слабую популяризацию новейших достижений подземной гидравлики. В самом деле, обязательный курс подземной гидравлики начал читаться в нефтяных институтах лишь с 1941 г., так что лишь 4—5 последних выпусков инженеров-нефтяников и геологов с ним знакомы; до сих пор не было издано ни одного широко доступного, достаточно полного и систематического курса подземной гидравлики.

Во-вторых, провести гидромеханические расчеты и использовать формулы подземной гидравлики можно лишь тогда, когда известны основные параметры пласта. Необходимые для этого тщательные исследования скважин и пластов начали проводится у нас лишь за последние годы в связи с освоением регистрирующих глубинных манометров, глубинных пробоотборников и прочей аппаратуры. Никакое знание законов подземной гидравлики не может помочь технологу нефтедобычи, если разрабатываемый пласт не подвергается должным наблюдениям и исследованиям.

Наконец, третья причина, тормозящая развитие самой подземной гидравлики и ее внедрение в нефтепромысловую практику, состоит в отставании экспериментальных работ от теоретических исследований. Необходимо как можно скорее и шире развернуть эксперименты по движению газированной нефти в пористой среде и по вопросам физики пласта, тесно связанным с задачами подземной гидравлики.

Проведенный исторический обзор показывает, что с тех пор, как начало решению перечисленных проблем было положено в трудах акад. Лейбензона, отечественная школа подземной гидравлики занимает в этой области науки ведущее место в мире.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
ОСНОВЫ

Глава первая
ВВЕДЕНИЕ

1. Предмет изучения. Предмет настоящего исследования — движение однородных жидкостей в пористой среде ограничен нами с качественной стороны понятиями „однородная жидкость“ и „пористая среда“. Он захватывает весьма большую область знаний и находит себе применение во многих прикладных науках. Приложение рассматриваемой нами дисциплины к таким отраслям, как гидрология грунтовых вод, сохранение, обеспечение и поддержание водоснабжения, ирригация и проблема осушения, нефтепромысловая механика, включающая проблемы извлечения нефти и газа из подземных резервуаров имеет большую теоретическую и промышленную значимость. В равной степени важно приложение этой дисциплины к специфическим проблемам гражданских сооружений, агротехники и других областей. Так, диффузия и движение жидкостей через керамические изделия, например, кирпич и глиняную посуду, издавна являлись проблемой керамической промышленности, а движение газов через формовочный песок — проблемой литейной промышленности.

Сооружение ложа для муниципальных водоочистных фильтров, а также просачивание вод через плотины и стенки земляных резервуаров являлись весьма важными вопросами в развитии техники гражданских сооружений, вполне удовлетворительные решения которых были найдены только за последние несколько лет. В настоящее время можно рассматривать научное разрешение проблем ирригации, эрозии почв, дренажа гончарными трубами как уже твердо определившуюся область общей теории движения жидкостей через пористую среду, в то же время открытую для дальнейшей научной разработки. Дренирование артезианских бассейнов глубокими скважинами, а также питание из рек и каналов примыкающих колодцев является проблемой движения жидкостей через пористые горные породы или пески и представляет собой основной объект изучения в гидрологии почвенных вод. Само собой разумеется, что физическая сущность проблемы добычи нефти и газа из подземных резервуаров есть не что иное, как движение жидкости в пористой среде. Таковы рамки настоящей работы. Количество специфических проблем, которые можно предложить к рассмотрению и которые относятся к настоящей области, почти не ограничено. Обсуждение всех этих проблем потребовало бы многотомных трудов и ничем не оправданных повторений. Поэтому нами был произведен специальный

подбор тематики и в настоящую работу были включены только типичные проблемы, которые представляют собой практический интерес и могут служить в качестве иллюстрации к различным аналитическим методам, применяемым при математической обработке рассматриваемого вопроса. Можно выразить надежду, что эти методы дают по крайней мере приблизительное решение большинства относящихся к той области проблем, которые могут встретиться читателю на практике. Раньше, чем углубиться в рассмотрение фундаментальных основ, на которых базируются все дальнейшие рассуждения, приводимые в настоящей работе, необходимо точно установить те ограничения, которые имеют влияние на объект исследования. Как уже отмечалось выше, эти ограничения могут быть подразделены на относящиеся к характеристике жидкости, проходящей через пористую среду, и те, что относятся непосредственно к природе самой пористой среды.

2. Однородные жидкости. Под понятием „однородная жидкость" разумеется по существу однофазная жидкость. Это может быть или газ или жидкость. Смесь этих двух компонентов, дающих в результате раздел на границе двух фаз „жидкость—газ", что характеризуется диспергированием газовых пузырьков в жидкости, должна быть исключена из этого понятия. Конечно, жидкость может содержать в себе растворенный газ. Тогда предпосылки, на которых основывается тот или иной расчет, будут вполне справедливыми при условии, что давление, под которым находится жидкость, не будет падать ниже давления насыщения и освобождать газ из раствора (системы). Газированная жидкость может представлять или может содержать конденсируемые пары и в то же самое время попасть в объект исследования настоящей работы при условии, что область пористой среды, где пар находится в состоянии равновесия со сконденсировавшейся фазой при температуре системы, будет исключена из рассмотрения. Вполне очевидно, что систему жидкостей, состоящую из несмешивающихся компонентов, например, воду и нефть, нельзя рассматривать как однородную жидкость, если даже компоненты представлены диспергированной смесью. Действительно, как это станет очевидным из дальнейшего, условие однородности, принятое в этих строках, может быть создано только такой смесью жидкостей, которые полностью смешиваются друг с другом и остаются таковыми на протяжении всей системы. Хотя движение неоднородных жидкостей, в частности, газо-жидкостных смесей, имеет первостепенное значение для ясного понимания многих моментов в добыче нефти из подземных резервуаров, интерес к таким системам неоднородных жидкостей в значительной степени ограничен областью науки о разработке и эксплоатации нефтяных месторождений.

Фундаментальные основы и определенные закономерности, относящиеся к поведению неоднородных систем, являются в настоящее время эмпирически окончательно установленными[1]. Аналитические же решения для определенных случаев, исполненные на основе этих формулировок[2], графический и вычислительный труд, необходимый для осуще-

---

[1] Wyckoff R. D. and Botset H. G., Physics, 7, 325, 1936.
[2] Muskat M. and Meres M. W., Physics, 7, 346, 1936.

ствления таких решений, являются настолько длительными, что необходимо затратить очень много времени для накопления достаточного количества частных результатов, чтобы можно было дать в настоящее время практические обобщения и детальный анализ. В действительности же пока не будет накоплен более широкий комплекс выводов от количественного изучения систем неоднородных жидкостей, является весьма разумным оставить в стороне их обсуждение.

Однако из этого не следует делать заключения, что возможность приложения выводов из настоящей работы к проблеме нефтедобычи сводится, таким образом, совершенно к нулю. Наоборот, большую часть трактовок, приводимых ниже, сущность которых соответствует системам движения жидкостей того типа, который мы имеем при нефтедобыче, например, выводы, полученные в главе V, VII и X, можно при тщательной и осмотрительной интерпретации приложить с достаточной уверенностью и качественной обоснованностью к решению практических проблем нефтедобычи. Что же касается таких разделов, как глава II, в которой приведена в общих чертах экспериментальная методика определения важнейших констант пористой среды, ясно, что в то время как пористость и проницаемость для однородной жидкости не дают полной оценки песчаного коллектора как носителя неоднородной жидкости[1], определение этих констант явится по крайней мере необходимым мероприятием для установления любых иных параметров, которых может потребовать комплексное исследование неоднородных систем. Рассмотрение проблемы производительности несовершенных скважин, т. е. вскрывших частично пласт (глава V), показывает с очевидностью, что абсолютные величины дебита жидкости из песчаного коллектора, насыщенного газированной жидкостью могут значительно отличаться от приведенных в гл. V, п. 4. Изменение этих величин с глубиной вскрытия пласта забоем скважины тесно увязывается с приведенными в последнем разделе конечными выводами.

Проблемы нормального продвижения водяного контура, а также нагнетаемой воды при методе заводнения во вторичной эксплоатации, в результате тесного перемешивания воды с нефтью в пористом коллекторе, являются задачами движения неоднородных жидкостей. Первичные особенности таких систем соответственно разъясняются представленной в настоящей работе теорией.

Из того, что нам известно в настоящее время относительно поведения смесей, вполне вероятно, что правильное решение для многих систем с неоднородными жидкостями будет всегда требовать такого большого вычислительного труда, что упрощения, разработанные нами и основанные на допущении однородности жидкостей, могут обеспечить в действительности единое, практически достижимое решение этих проблем.

Следует также отметить, что многие проблемы, рассматриваемые в последующих разделах, имеют непосредственное отношение к явлениям, возникающим при добыче нефти или газа. Вместе с тем основной наш интерес сосредоточен больше на характерных особенностях потока в нефтяном или газовом коллекторе, чем на инженерно-эксплоатационной стороне вопроса.

---

[1] Wyckoff, and Botset, and Muskat and Meres, loc. cit.

В частности, мы полагаем, что рассматриваемые нами явления возникают только на обнаженном фронте забоя скважины. Влияние последней, а также ее подземного оборудования являются предметом рассмотрения в наших исследованиях постольку, поскольку они изменяют условия давления или течения на фронте забоя.

Работа нефтяной скважины в процессе фонтанирования или помпирования, а также техника перемещения жидкости при вторичных методах эксплоатации, например, при газовой или водяной репресссии, полностью освещены в большом количестве специальных инженерных трудов, к которым читателю и следует обратиться для ознакомления с чисто инженерным взглядом на движение жидкостей в пористой среде.

Соответственно этому проблемы просачивания воды через плотины или под плотинами будут строго ограничены только рассмотрением динамики движения жидкости. Напряжения и усилия в самих пористых структурах не будут рассматриваться в настоящей работе. Конечно, мы сознаем, что динамические реакции, которые испытывает пористая среда таких систем, несущая в себе жидкость, имеет во многих случаях значительно большее практическое значение, чем движение самих жидкостей.

Накопленные на сегодня данные по механике грунтов можно рассматривать как весьма важную отрасль науки. Отсюда представляется более правильным опустить в настоящей работе всякие рассуждения по этому предмету, чем давать краткую и отрывочную трактовку последнего, которая ни по объему, ни по тщательности изложения не сумеет оправдать того внимания, которого заслуживает данный предмет [1].

3. Пористая среда. Следующее ограничение, определяющее рамки применения настоящей работы, заключается в установлении содержания понятия „пористой среды“, как носителя жидкостей. Идеальную пористую среду, вполне удовлетворяющую требуемому определению, можно вполне ясно представить себе, рассматривая образец несцементированного песка. В такой среде имеется бесчисленное количество пустот различной величины и формы, образующих „поровое пространство“, или промежутки между отдельными твердыми частицами песка. Каждая такая пора соединена узким каналом с другими, образуя в целом полностью сообщающуюся между собой сквозными каналами сложную систему отверстий-ячеек. По этим ячейкам может перемещаться заключенная в среде жидкость. Идеальная „пористая среда“, принятая в настоящей работе, характеризуется многочисленными, полностью соединяющимися между собой мельчайшими отверстиями и определяет собой различие между трактуемым предметом и обычной гидродинамикой и гидравликой. Проблемы в гидравлике относятся к открытым каналам, ограниченным непроницаемыми стенками. Здесь же мы имеем дело с проводящими каналами, сложенными множеством мельчайших соединяющихся пор, ограниченных пространственно непроницаемыми перемычками или же геометрией проводящей системы. В этом и заключается фундаментальная особенность пористой проводящей среды. Следует помнить, что обычная труба или капилляр, рассматриваемый в гидравлике, являются эквива-

---

[1] Читатель, который заинтересуется этой областью науки, может найти полное исследование этого предмета в работе «Erdbaumechanik», К. Терцаги (1925).

лентом ряда соединяющихся пор. Однако канал, слагаемый пористым веществом, включает не один ряд соединяющихся пор, но очень большое количество таких элементов с многочисленными поперечными соединениями. В капиллярной трубке или трубе, в которой происходит движение жидкости при ламинарном режиме, скорость по сечению трубы не одинакова и распределяется по параболе. Максимальная скорость соответствует осевой линии канала. В линейной системе, состоящей из пористой среды, распределение скорости по отверстию единичной поры будет иметь аналогичную характеристику. Если же рассматривать макроскопическую скорость по сечению всей среды, то она будет постоянной. Таким образом течение жидкости, происходящее в линейном коллекторе указанного типа, равномерно по всему сечению, в то время как при движении жидкости по трубе скорость в центре потока имеет максимальное значение, а к стенкам трубы становится беспредельно малой. Пористые вещества, которые мы будем рассматривать в дальнейшем, представлены относительно тонкозернистыми почвами, несцементированными песками, сцементированными песками, т. е. это обычные песчаники, известняки и остальные пористые горные породы. Такая классификация может создать серьезные ограничения к применимости полученных аналитических выводов, так как дебит жидкости многих насыщенных жидкостью пород в значительной степени получается из трещин. Так как эти трещины достаточно многочисленны и распределены беспорядочно, то, рассматривая проблему в целом, можно допустить, очевидно, что бесчисленные внутренние пересечения этих трещин делают их похожими на пористую среду, характеристика которой дана выше.

4. Общие положения аналитической теории. Аналитическая работа, заключенная в настоящем исследовании, базируется, как это было уже показано, на определенных необходимых допущениях и ограничениях, относящихся к типу жидкости и природе пористой среды. Вполне очевидно, что при рассмотрении проблем, связанных с естественными осадочными образованиями или горными породами, можно встретиться с неопределенностью, возникающей от непостоянства и незнания параметров, характеризующих структуру таких пористых разностей. Поэтому первое впечатление может привести к ошибочному заключению, что принятые ограничения настолько серьезны, а допущения настолько идеальны, что могут воспрепятствовать приложению аналитических выводов к проблемам, представляющим практический интерес. Только этим обстоятельством можно объяснить то сопротивление, которое имело место до сравнительно недавнего времени со стороны гидрологов и инженеров при решении практических задач в отношении применения закона Дарси, аналитических формулировок Форгеймера или Слихтера. Неопределенность некоторых условий, имеющих место при рассмотрении практических проблем движения жидкости через пористую среду, не допускает приложения точных математических решений. Однако весьма ценно подвергнуть анализу эти проблемы как идеальные системы, так как это единственный путь, каким можно определить основные свойства пористых сред и установить их поведение при благоприятных условиях. То обстоятельство, что реальная система не является идеальной по отно-

шению к условиям, имеющимся в пористой среде, не может с полуколичественной точки зрения свести к нулю все аналитические выводы.

В качестве иллюстрации можно рассмотреть сравнительно простую проблему многоскважинных систем, о которой идет речь в главе IX. Муниципальное водоснабжение обеспечивается глубокими артезианскими скважинами. Желательно запланировать будущее расширение фронта бурения дополнительных скважин. Удвоение уплотнения последних не удвоит их производительность вследствие явления интерференции скважин. Действительный прирост производительности зависит от расстояния между последними и геометрическим размещением сложной системы. С помощью аналитических методов, приведенных в главе IX, можно с достоверностью определить это влияние интерференции. Кроме того, если даже нельзя точно предсказать дебит отдельной скважины, то статистически относительные дебиты различных скважин по сетке размещения могут быть указаны довольно точно и можно установить наиболее экономичный план развития буровых работ. Более сложный пример заключается в проблеме заводнения при вторичных методах добычи нефти, которая рассматривается с идеализированной точки зрения в гл. IX, пп. 16 и 33. В этом случае фактические промысловые условия, при которых нагнетаемая вода должна двигаться через пески, содержащие нефть и газ, резко отходят от тех допущений, которые были приняты для математического удобства. Кроме того, физические факторы, определяющие эту неустойчивость, настолько сложны, что препятствуют всякой надежде установить точный количественный эффект. Тем не менее анализ обеспечивает получение вполне надежных выводов в отношении сравнительной отдачи различными комбинациями скважин, а также эффект от благоприятного их размещения. До сего времени на эти вопросы давались ответы, основанные только на интуиции.

Наконец, следует отметить, что предмет этой книги не учитывает тех изменений в пористой среде, которые могут получить свое развитие после длительного прохождения жидкости через последнюю. В математических построениях заранее делается допущение, что в порах среды не происходит отложений вследствие изменений среды, а также от посторонних веществ, принесенных жидкостью и накапливающихся там с течением времени. Таким образом, следует заранее допустить, что явления разбухания, гидратации и даже непосредственной закупорки среды достигли своего максимального значения к моменту анализа. Поэтому следует заранее ввести соответствующие поправки в коэфициент отдачи жидкости средой. Если заранее известна причина развития отложений или закон их образования, то можно принять во внимание эффект от уменьшения пор. Однако фактическое отсутствие такой информации делает практически во всех проблемах физической значимости более разумным, в виде общего правила, их полное исключение. Все же, если можно получить необходимые данные по этому вопросу, не представляет никаких трудностей изменить соответствующим образом формулы, выведенные здесь, и учесть изменения структуры среды. Рассмотрение вопроса о применимости математического анализа к решению практических задач ставит своей целью привлечь внимание читателя к необходимости тщательного изучения и подбора теоретических выводов

раньше, чем использовать их для решения какой-либо проблемы. Необходимо помнить, что на одном этапе решения проблемы можно получить ответ с чисто качественными показателями, в то время как на другом этапе того же решения можно получить очень близкое приближение к действительным явлениям.

5. Природа пористой среды. Дадим краткое напоминание общих свойств пористой среды, с которой мы будем встречаться в дальнейшем. Важнейшими параметрами, которые будут нами детально рассмотрены ниже, являются:

1) пористость, определяющая собой величину пор и, отсюда, насыщенность среды жидкостью, и

2) проницаемость, являющаяся мерилом подачи жидкости через пористую среду под влиянием проталкивающего давления.

Эти свойства будут рассмотрены нами здесь с точки зрения структуры самой среды, оставляя прочие частности для главы II, где будет освещена техника определений этих параметров.

Ранние работы по движению жидкости в пористой среде были ограничены в значительной степени несцементированными разностями: например, песком и гравием. Трудность измерений пористости и проницаемости таких материалов в природных условиях, а также воспроизведение естественной укладки частиц при лабораторных измерениях привели естественно к изучению геометрии подобных систем. Так как метод определения размеров зерен и их относительного распределения с помощью ситового анализа является сравнительно простым, были сделаны попытки подсчитать пористость и проницаемость на основании этих данных.

Вполне очевидно, что любой расчет такого порядка должен покоиться на размерах идеальных частиц. Поэтому были подвергнуты тщательному изучению различные случаи укладки шаров постоянного радиуса. Весьма глубокое исследование было проведено Слихтером [1], за которым последовали и другие [2]. Из числа последних наиболее объемлющая работа была проделана Грэтоном и Фрезером [3].

В настоящей работе будет совершенно невозможным рассмотреть этот вопрос так детально, как это было сделано упомянутыми исследователями. Наиболее характерные особенности, представленные здесь, приводятся с единственной целью дать ясное представление о структуре такого комплекса и его роли в идеализации обломочных отложений, которые составляют большую часть рассматриваемой пористой среды.

6. Систематическая укладка шаров. Допуская в целях облегчения анализа, что твердые частицы, из которых состоит образец несцементированного песка, представлены шарами постоянного радиуса, можно

---

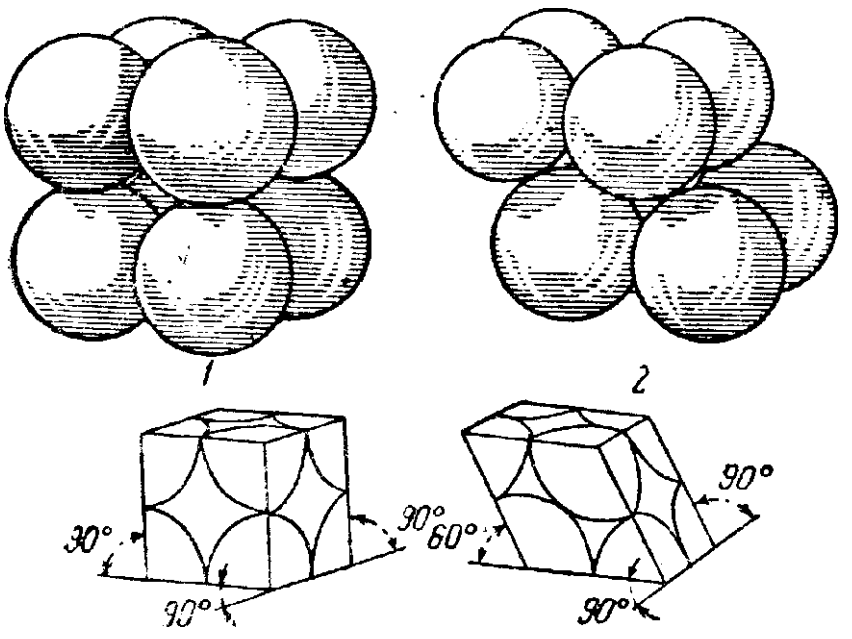
[1] Slichter C. S., Geol. U. S., Survey 19th. Ann. Report, Part. II, 295, 1897—98.

[2] Smith W. O., Foote P. D., and Busang P. F., Physical Rev., 34, 1271, 1929.

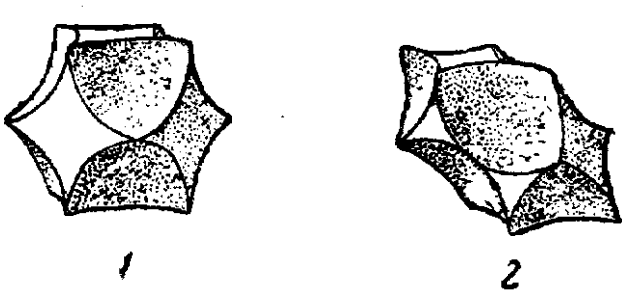
[3] Graton L. C. and Fraser H. J., Journ. Geol. 43, 785, 1935.

получить два крайних случая [1] их систематической укладки, дающих максимальный и минимальный возможный объем порового пространства. Единичный объем с такой укладкой приведен на фиг. 1. Изменения в угле наклона рядов могут дать бесконечные варианты промежуточных укладок. На фиг. 2 показана единичная пора для рядов куба и ромбоэдра. Каждая пора соответствует наиболее „свободной“ и наиболее „плотной“ набивке, возможной при систематической укладке шаров постоянного радиуса. Из геометрии обоих этих вариантов можно получить данные, приведенные в табл. 1, из которой видны пористости для предельных случаев укладки шаров.

Всякие другие укладки шаров дадут величину пористости, лежащей между этими пределами.



Фиг. 1. Единичные клетки с кубической (*1*) и ромбоэдрической набивкой (*2*) (по Грэтону и Фрезеру).



Фиг. 2. Поры единичных клеток при кубической (*1*) или ромбоэдрической набивке (*2*) (по Грэтону и Фрезеру).

Пористость есть отношение объема единичной поры к единичному объему образца. Поэтому она не зависит от радиуса R шаров, составляющих последний. Проницаемость образца зависит от фактических размеров поровых отверстий и пропорциональна R^{2*}. Таким образом, одна пористость агрегата не может дать точных указаний на его проницаемость. Отсутствие строгой пропорциональности между пористостью и проницаемостью даже в идеальном случае само по себе достаточно, чтобы устранить всякую возможность получения данных о проницаемости из замеров пористости [2].

---

[1] Грэтон и Фрезер приводят в своей классификации шесть случаев. Их первый и третий случаи соответствуют приведенным на фиг. 1. Их второй случай представляет фигуру, где четыре стороны — квадраты со сторонами $2R$ и две стороны — ромбы со сторонами $2R$ и острым углом 60° (пористость 39,54%), случай четвертый идентичен второму случаю, но только с отличной пространственной ориентировкой фигуры; пятый случай являет тетрагонально-сфеноидальную укладку; шестой случай аналогичен пятому, но тоже с отличной пространственной ориентировкой. Классификация эта была применена авторами вследствие той специальной значимости, которую они придавали вопросу устойчивости укладки шаров и ее влиянию на проницаемость.

* По Слихтеру.

[2] Довольно странно, что до последнего времени термины пористость и проницаемость являлись у многих инженеров почти синонимами. Это имело место, возможно, и потому, что пористые разности, с которыми они имели дело, показывали в общем один и тот же характер изменения пористости и проницаемости.

Таблица 1

Пористость при укладке одинаковых шаров

Укладка	Кубическая	Ромбоэдрическая
Объем единичного образца	$8{,}00R^3$	$5{,}66R^3$
Объем единичной поры	$3{,}81R^3$	$1{,}47R^3$
Пористость, %	47,64	25,95

Так как между граничными случаями систематической укладки существует бесконечное количество промежуточных типов, возникает вопрос о типе укладки зерен в естественных образцах, а отсюда и о величине их пористости. Изучение фиг. 1 ясно показывает, что наиболее устойчивая форма укладки ромбоэдрическая. При этой геометрии шары имеют достаточно точек соприкосновения, чтобы обеспечить поддержку их со всех сторон, в то время как кубическая форма укладки устойчива только по отношению к нормальным силам. Поэтому она обладает вместе со всеми промежуточными формами укладки весьма малой устойчивостью.

Следует считать, что шары, которым дана возможность занять при легком сотрясении естественное положение, могут принять наиболее устойчивую форму и пористость всего агрегата будет наименьшей. Однако при размещении большого количества шаров потребуется высокое совершенство укладки отдельных единиц, чего нельзя получить в естественных условиях. Скорее всего следует ожидать, что требуемое совершенство укладки будет ограничено определенным количеством частиц и вне этого предела начнется нарушение формы укладки. Когда это нарушение формы достигнет значительной величины, укладка станет принимать хаотический вид, и хотя бы внешние стенки систематической укладки и соответствовали близко геометрической форме образца, полного однообразия его получить невозможно. В естественных образцах, даже подвергая их сотрясению, чтобы получить более плотную набивку, следует ожидать образования групп шаров (зерен), уложенных правильными рядами и отделенных слоями, в которых размещение шаров беспорядочно и где пористость может иметь бо́льшую величину, чем при кубической укладке. Такие зоны могут существовать вследствие сводообразования отдельных групп зерен под меньшим давлением, чем раздавливающее усилие, воспринимаемое этими частицами. Опыты с единичным слоем шаров подтверждают правильность этих условий.

Экспериментальным путем было найдено, что образцы, составленные из шаров или даже зерен песка, имеют среднюю пористость около 40%, несмотря на тщательную их укладку и даже преобладающую ромбоэдрическую форму, при теоретической пористости, не превышающей 26%.

Теоретически реальный размер шаров не оказывает влияния на пористость, но в естественных образцах это положение не является справедливым. Фактические определения[1] показывают следующие значения

[1] Ellis A. J. and Lee C. H., Geology and Ground Waters of the Western part of San Diego Co, Cal, U. S. Geol. Surv. Water Supply, Pap. 446, 121—123, 1919.

пористости: крупнозернистые пески 39—41%, среднезернистые пески 41—48%, тонкозернистые пески 44—49%, тонкозернистые глинистые пески 50—54%. Для весьма малых частиц пористость может колебаться от 50% для частиц выше 0,02 *мм* до 95% при песках размерами меньше 0,002 *мм**.

7. Укладка естественных материалов. Естественные породы имеют частицы, которые могут значительно отличаться от шарообразной формы, а также иметь различные размеры. Благодаря этому мелкие частицы могут заполнять поровое пространство между крупными частицами, создавая при этом заметное уменьшение пористости.

Действительно, благодаря отсутствию сортировки ледниковые наносы хотя и содержат обломки горных пород и гальку, тем не менее обладают более низкой пористостью и проницаемостью, чем относительно тонкозернистый, но лучше отсортированный песок. С другой стороны, угловатость зерен создает благоприятные условия „сводообразования", что в свою очередь способствует беспорядочной их укладке и повышению пористости. Пористость береговых песков в естественном состоянии колеблется от 40 до 56%, хорошо согласуясь с лабораторными экспериментами[1]. У свежеотложившихся глин и глинистых илов пористость часто превосходит 85%, хотя те же материалы после сушки и уплотнения имеют пористость от 40 до 50% и даже менее. Широкий диапазон в величине пористости свежеотложившихся осадков с различными размерами зерен ведет в дальнейшем к весьма важным последствиям уже после того, как осадки будут погребены. Благодаря весу вышележащих пород осадочные образования подвергаются соответствующим давлениям, которые уменьшают их объем, создавая более тесную набивку, измельчение и деформацию зерен, а при крайне высоких давлениях — фактическую перекристаллизацию частиц. Повидимому, величина уплотнения будет зависеть от строения частиц, а также от первоначальной пористости образования.

8. Сжимаемость песка и гравия. С уменьшением размеров частиц галька и зерна песка отлагаются в состоянии, более приближающемся к устойчивому. Это видно из замеров пористости, произведенных над свежеотложившимися песками, и сравнения с глинами и глинистыми илами, а также из лабораторных экспериментов над искусственно отложившимися частицами, имеющими резкое отличие в размерах зерна. Действительно, отложение среднезернистого песка в естественных условиях создает образование, очень близкое к минимуму пористости, которое только можно получить при любой форме укладки. Дальнейшая встряска или сжатие зерен дают почти незаметное уменьшение в величине пористости, хотя бы приложенное усилие было достаточно, чтобы раздавить зерна и более или менее полностью устранить „сводообразование" и скученность зерен над отдельными пустотами. Так, пористость слегка сцементированных песков, полученных из керна, взятого с глубины 1200 *м*, оказалась выше, чем пористость аналогичных песков, но

---

* Terzaghi K., Eng. News Record, 95, 914, 1925.
[1] Fraser H. J. Journ. Geol., 43, 910, 1935.

взятых с меньших глубин. Эксперименты[1] подтверждают также весьма малое влияние сжатия песков на пористость после их отложения. В большинстве случаев уменьшение пористости в период после отложения таких материалов следует отнести за счет цементации последних каким-либо минеральным веществом.

9. Сжимаемость глин. Ненормально высокая пористость, которая получается в свежеотложившихся глинах и илах, указывает на крайнюю восприимчивость таких материалов к уплотнению. Поэтому не удивительно, что фактические определения пористости мергеля на одних и тех же глубинах в любом из рассматриваемых месторождений дают почти близкие показания. Отсюда величина пористости может служить мерилом уплотнения, которому подверглась глина. Эзи[2] нашел, что изменения пористости глинистого сланца по отношению к толще налегающих пород определяются следующей формулой:

$$f = f_0 e^{-bz},$$

где f — пористость; f_0 — средняя пористость поверхностных глин; b — константа; z — глубина залегания пласта.

Тот же самый автор установил, что в то время как средняя пористость поверхностных глин (не из свежих отложений) составляет 45—50%, на глубине 1800 *м* эта же пористость составляет приблизительно 5%. Отсюда видно, что уплотнение глин более чем на 20% произошло, когда породы подверглись сжатию от поверх залегающей толщи мощностью 300 *м*, на 35% при толще в 600 *м* и на 40% при толще в 900 *м*. Весьма затруднительно установить, зависит ли это уменьшение пористости от физического перераспределения зерен материала или же от фактической перекристаллизации. Если глины были подвергнуты достаточно сильному уплотнению, то большое разнообразие в размере частичек глин или илов, размер зерен которых достигает коллоидных величин, дает ненормально низкую пористость. Нетрудно заметить, что подобные материалы, подвергнутые высоким давлениям, вследствие неоднородности формы, размеров отдельных частиц и их распределению имеют тенденцию к очень сильному уплотнению. С другой стороны, возможно, заслуживает также внимания перекристаллизация некоторой части материала. Таким образом, в противоположность песчаникам и аналогичным им породам уплотнение глин весьма значительно и возрастает с давлением до пределов, еще окончательно не установленных. Превращение мергелей в глинистые сланцы или филит является, очевидно, процессом вторичной кристаллизации, где пористость практически уже отсутствует. Эта высокая восприимчивость глин и получающихся из них сланцев к уплотняющим силам и то обстоятельство, что при достаточно высоких давлениях пористость может практически исчезнуть, является, как это будет вкратце освещено при дальнейшем изложении, фактором важной геологической значимости.

---

[1] Botset H. G. and Reed D. W., Amer. Assoc. Petrol. Geol. Bull., 19, 1053, 1935.

[2] Athy L. F., Amer. Assoc. Petrol. Geolog. Bull. 14, 8, 1930.

10. Влияние уплотнения и деформации отложений на проницаемость. Мы подчеркнули тот факт, что не существует и не следует ожидать общей закономерности между пористостью и проницаемостью. Отсюда вполне очевидно, что любая деформация данного материала, которая создает уменьшение пористости, влечет за собой в результате и уменьшение проницаемости. Уменьшение пористости данного вещества заключается в уменьшении размеров пор, а отсюда в значительно большей степени уменьшается и проницаемость. Поэтому любая деформация, имеющая место для обломочных материалов, в последующий за отложением период, будет ли это уплотнение или цементация, даст в результате значительное снижение величины проницаемости. Так как уплотнение песков практически невелико, то большие изменения в их пористости следует отнести за счет цементации, а соответственные изменения в проницаемости следует отнести за счет того же процесса. С другой стороны, глины и сланцы, которые на ранних этапах отложения можно рассматривать как практически непроницаемые породы, после уплотнения становятся совершенно непроницаемыми. Эта характеристика глин и сланцев, так же как и остальных непроницаемых пород, имеет важное геологическое значение при установлении распределения и накопления подземных жидкостей.

11. Классификация пород и их свойства по накоплению жидкостей. Рассмотрение пористой среды до сих пор было ограничено важнейшими обломочными типами, причем пористость определялась геометрией распределения частиц с кратким упоминанием об изменениях, которые могут иметь место после процесса первоначального их отложения. Рассмотрим вкратце происхождение и форму залегания этих пород, а также некоторых других, которые могут встретиться при исследовании подземных условий. Породы, слагающие земную кору, подразделяются в зависимости от их происхождения на:

1) изверженные породы, которые образовались вследствие охлаждения и затвердения расплавленной магмы;

2) осадочные породы, которые образовались вследствие отложения материалов от эрозии любых первозданных пород, из остатков растительной или животной жизни, или выделились из водных растворов;

3) метаморфические породы, которые образовались вследствие длительной деформации предыдущих пород, в основном под влиянием температуры и высоких давлений.

Породы, которые вскрывает бурением глубокая скважина в районе с нормальным геологическим разрезом, чередуются в следующей последовательности:

а) несцементированные отложения, состоящие попеременно из глин, песков и гравия,

б) сцементированные отложения, как мергели, песчаники, известняки и конгломераты, и

в) метаморфические и изверженные породы.

Изверженные породы в зависимости от своего состава и происхождения широко различаются между собой как по типу, так и по строе-

нию. Расплавленные минералы, которые оставались в больших массах глубоко погребенными, затвердевали весьма медленно, образуя кристаллическое строение, типичное для интрузивных гранитов. Расплавленные породы, выдавленные на дневную поверхность или в небольшие интрузии, быстро застывают, образуя стекловидное строение. В случае потоков лавы последние могут быть пористыми благодаря выделению газов и пересекаться большой сетью трещин, образовавшихся вследствие усадки от быстрого охлаждения. В целом интрузивные изверженные породы, за исключением трещиноватых или подвергшихся тяжелой эрозии, настолько непроницаемы и малопористы, что представляют собой небольшой интерес для рассматриваемого нами исследования. Однако экструзивные изверженные породы (потоки лавы) могут иметь высокую проницаемость, например, базальты, которые покрывают значительную часть северо-запада США и почти всю площадь Гавайских островов и которые являются весьма важными подземными водными резервуарами.

Представляет интерес отметить здесь состав изверженных пород, так как они являются основным источником всех неорганических осадочных образований. Основные минералы, которые можно встретить в изверженных породах: кварц (кристаллический кремний), полевой шпат (силикаты алюминия с калием, натрием, кальцием и барием), слюда (силикаты алюминия и щелочноземельные металлы или железо), роговая обманка (силикаты кальция, магния, алюминия и т. д. с изменяющимся составом), пироксены (в основном силикат кальция или магния) и олифин (силикат магния и железа). Благодаря своей твердости и химической стабильности кварц поддается с трудом разрушению или износу и не распадается, когда остальная часть горной породы подвергается эрозии. Кроме того, кварц нелегко растворяется или выщелачивается циркулирующими в земной коре водами. Таким образом, когда остальные минералы, входящие в состав гранита, подверглись разрушению и образовали глины или другие тонкозернистые породы, зерна кварца остались целыми. В основном эти частицы слагают залежи песков и песчаников. Если слюду подвергнуть тщательному разрушению, можно получить остаточную глину. Но слюда в природе распадается очень медленно, и вследствие этого неразрушенные остатки ее можно встретить во многих отложениях глин и песков. Настоящая глина представляет собой силикат алюминия, образовавшийся при распаде более сложных силикатов, которые можно встретить в изверженных или метаморфических породах. Она состоит из частиц настолько малых размеров, что ее можно рассматривать как коллоидное вещество. Большинство залежей глин представляет собой механические смеси с более грубозернистым составом, где пористость составляет 50—60%, но проницаемость их в целом чрезвычайно низка. Метаморфические породы представлены такими обычными разностями, как кварцит, кристаллический сланец, мрамор, шифер и гнейс. Так как они широко распространены и их можно встретить в областях с осадочными образованиями, опишем вкратце образование и характеристику наиболее часто встречающихся типов этих горных пород. Кварцит обычно является результатом полной цементации кварцитовых песчаников проникшим в поры последних кремнием. Он является самым твердым

и износоустойчивым из всех обычных горных пород. Обычно кварцит имеет трещины или нарушения, но в остальном он непроницаем.

Глинистые сланцы образовались из мергелей и тому подобных глинистых материалов под высоким давлением и температурой. Глинистый сланец тверже мергеля и меньше подвергается эрозии, но благодаря характерному явлению и склонности к трещинообразованию может быть проницаем для жидкостей и газа.

Мрамор образовался из известняков в процессе длительного затвердевания и кристаллизации. Это плотная черная порода, которая, подобно известняку, может медленно раствориться в циркулирующей через трещины и другие нарушения воде.

Кристаллический сланец или шифер образовался под интенсивным давлением вследствие глубокой деформации мергелей, глинистых сланцев или иных горных пород. Он имеет неправильную листоватую структуру, которая в основном обязана развитию чешуек слюды параллельно плоскости деформации пород.

Гнейс является слоистой зернистой горной породой, бо́льшая часть которой образовалась из гранита и которая переходит в гранит или иные кристаллические изверженные горные породы, но может образоваться и из осадочных горных пород. Хотя метаморфические горные породы и находятся у дневной поверхности или в залеганиях, где вследствие эрозии может иметь место разрушение и образование трещин, вполне очевидно, что в целом они слишком непроницаемы, чтобы представлять интерес в качестве пород — коллекторов жидкости.

Осадочные породы разделяются согласно своему происхождению на: 1) обломочные, 2) органические и 3) химические отложения. Как уже отмечалось выше, обломочные осадки состоят из обломков, получившихся от эрозии более древних горных пород, и включают гравий, песок, ил, глину и продукты цементации этих материалов. Органические осадки состоят главным образом из известковистых или кремнистых остатков животных, например, раковин, кораллов и т. д. и обуглившихся остатков растений. Известковистые материалы образуют известняки, мел, мрамор и тому подобные горные породы, в то время как обуглившиеся материалы образуют торф, уголь и остальные родственные им вещества. Химические осадки состоят из минералов, выделившихся из водных растворов, и включают в себя такие отложения силиция, как кремний, халцедон, роговик, жильный кварц, железосодержащие отложения в виде железных руд; известковистые отложения, как, например, оруденелые золотоносные известняки, гипс, каменная соль и прочие растворимые щелочные и щелочноземельные металлы и соли. Эти химические осадки являются весьма важными, так как они представляют источник вторичной цементации обломочного материала.

Обломочные типы осадочных материалов были уже рассмотрены в некоторых деталях выше, а именно в отношении их пористости и проницаемости. Так как осадочные образования органического происхождения являются довольно часто важными источниками подземных жидкостей, но отличаются от остальных типов отложений восприимчивостью к деформациям в период после первоначального отложения, рассмотрим вкратце их свойства как коллекторов жидкостей.

Ни одна горная порода так резко не отличается своими способностями к вмещению жидкостей, как известняки и родственные им разности. Некоторые известняки являются прекрасными коллекторами жидкостей, в то время как другие совершенно непродуктивны вследствие недостатка пористости и проницаемости. Это явление только частично можно отнести за счет первоначального строения породы. В основном это обстоятельство является результатом разницы в степени воздействия на породу растворяющей деятельности циркулирующей в недрах воды. Таким образом, если для обломочных осадков изменения в период после первоначального отложения вследствие явлений цементации, консолидации и метаморфизма приводят к уменьшению пористости и проницаемости, исключительно высокая пористость и проницаемость некоторых известняков явились результатом их растворения циркулирующими водами в некоторый отрезок времени их геологической жизни. Это развитие и возрастание пористости после первоначального отложения и уплотнения вполне определяются термином „вторичная пористость".

Свежеотложившиеся известняки могут быть весьма пористы и проницаемы. Однако вследствие той легкости, с которой известковистые материалы подвергаются уплотнению, а также растворению и вновь выпадению из раствора, первоначальное их поровое пространство имеет тенденцию к закупорке или заполнению материалом при вторичных отложениях. По этой причине, а также вследствие метаморфических изменений, имеющих место в глубинных залежах, известняки более раннего возраста имеют в общем низкую пористость и почти непроницаемы. Однако эти породы могут быть подняты горообразовательными процессами и благодаря эрозии перекрывающих пород оказаться близко к поверхности. Наличие плоскостей напластования или трещин, образовавшихся в процессе интенсивного складкообразования, обеспечивает свободное поступление циркулирующим грунтовым водам. Так как воды содержат обычно двуокись углерода, то вдоль этих путей будет иметь место относительно быстрое растворение известковистого материала. Таким образом, создаются те кавернозные отверстия, которые свойственны известнякам, являющимся особенно богатыми коллекторами жидкостей. В некоторых случаях эти кавернозные отверстия могут являться действительно кавернами больших размеров. Однако термин „кавернозный известняк" относится также и к таким, которые содержат относительно небольшие поры, величиной от доли миллиметра до нескольких миллиметров в сечении. Такие отверстия, образуя соединяющиеся каналы, увеличенные в своем размере трещинами, составляют большую часть подземных карбонатных резервуаров с необычной продуктивностью.

Двуокись углерода в циркулирующих водах является растворяющим агентом и находится обычно в изобилии только в поверхностных водах. Поэтому известковые образования, которые залегают на значительных глубинах, должны иметь низкую пористость и проницаемость. Дело в том, что на больших глубинах вода имеет малое содержание двуокиси углерода и относительно медленную циркуляцию. Тогда, очевидно, наиболее благоприятные условия, которые могут способствовать образованию известняков с большой пористостью, заключаются в под-

нятии залежи от своего нормального положения в зону циркуляции грунтовых вод (где велико растворяющее действие последних) с последующим погружением на глубину и покрытием другими осадочными образованиями. Если получившаяся при этом вторичная пористость не подверглась последующему отложению или выпадению осадков из раствора, которые частично или полностью заполнят поровое пространство, то залежь сохранит свою благоприятную пористость даже на больших глубинах залегания, так как уплотненная горная порода в состоянии противостоять сжимающим усилиям, возникающим от тяжести вышележащих пород.

Восприимчивость известняков к выщелачиванию, которое в свою очередь зависит от геологической истории залежи, определяет радикальные изменения пористости и проницаемости, которые, как уже было упомянуто, являются характерными для известняков и иных родственных им пород. Является очевидным, что те же самые факторы влияют на фациальные изменения этих параметров в пределах одного и того же стратиграфического горизонта, а также и различных горизонтов, которые первоначально могли иметь один и тот же состав и строение. Отсюда является вполне обычным, что наиболее пористые участки известковой залежи приурочены к гребню купола или антиклинальной складки, который в известный период своей геологической жизни находился над или в зоне грунтовых вод.

Этого вполне достаточно, чтобы показать природу вторичной пористости, характеризующей некоторые известняки. Принимая во внимание также восприимчивость известняков к трещинообразованию во время упомянутого выше складкообразования, ясно, что подобные залежи могут показать заметное отклонение от идеальной пористой среды, принятой в настоящем исследовании. Так как соответствующие характеристики породы не могут быть установлены изучением небольших образцов, взятых из залежи (даже в большом количестве), как это обычно делается для решения практических проблем, отклонение от идеальной пористой среды в данном случае не имеет серьезного значения. Даже при соединяющейся сети многочисленных трещин аналогия будет постоянно сохранена. Только в том случае, когда относительно непроницаемая порода будет пересечена несколькими, далеко простирающимися трещинами, будет существовать серьезное отклонение от идеальной среды [1]. Нами было обращено специальное внимание на вторичную пористость, так как именно за ее счет следует отнести обычно встречаемую высокую проницаемость. Вместе с тем многие карбонатные породы могут иметь значительную пористость и проницаемость в своем, не подвергшемся изменению первоначальном состоянии. Такие известняки, состоящие из сцементированных карбонатных обломочных частиц, совершенно сопоставимы с песчаниками как в отношении их структуры, так и порового пространства. Иные породы могут быть пористы вследствие наличия в них остатков от скелетов мельчайших организмов, даже в больших структурах, какими отличаются коралловые образования.

---

[1] В главе VII, пп. 4 и 8 будут подвергнуты математической обработке проблемы, включающие в себя такие условия.

12. Связь структуры горных пород и подземных жидкостей. В то время как объем жидкости, заключенный в горной породе, определяется строением или пористостью последней, а подвижность его в породе зависит от ее проницаемости, распределение жидкостей в горной породе и ее миграционная характеристика в пределах стратиграфического объекта зависят от строения коллектора и от распределения в нем пропускного сечения.

Земная кора состоит из слоев или отдельных стратиграфических горизонтов различных горных пород, а также массивов или сланцеватых образований, которые подстилают или пересекают эти стратиграфические слои. Осадочные породы вследствие самой своей формы образования обычно слоисты. Изверженные и метаморфические породы могут образовать слои, но обычно они представлены массивными интрузиями. Под покровом из осадочных слоев и интрузий лежат изверженные породы, которые были первоначальным источником всех осадочных образований. Это так называемый изверженный фундамент или „базисный комплекс", на котором заканчивается наша заинтересованность. Мощность образований осадочных пород может колебаться от нескольких метров до сотен — занимать площадь от нескольких квадратных километров до нескольких тысяч, и они могут быть представлены или на дневной поверхности, или же быть глубоко погребенными под другими образованиями. Большинство осадочных образований состоит из слоев, мощность которых весьма незначительна по сравнению с площадью, которую они занимают. Так, например, песчаник Св. Петра, мощность которого в среднем не превышает 30 *м*, занимает площадь в северо-центральной части США около 300 000 кв. миль.

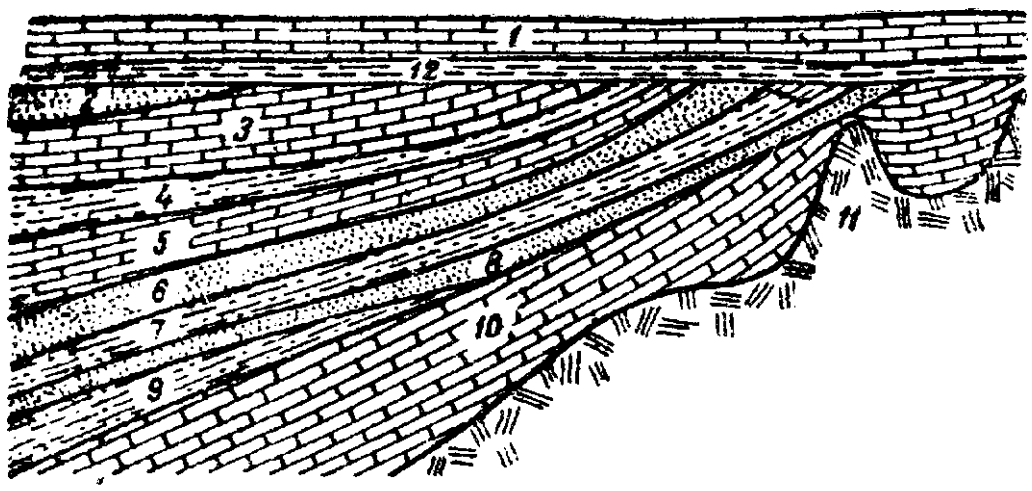
Такое постоянство единичного образования с однородностью строения, характерной для того песчаника, является необычной, так как это требовало однообразия условий отложения, обычно в природе не встречающихся. В то время как многие осадочные породы, отложившиеся одновременно, можно рассматривать как часть одного и того же образования, характеристика их может широко колебаться на сравнительно небольших расстояниях, завися от специфических условий, существовавших на данной определенной площади в момент осадкообразования. Более того, любое образование, например песчаник, может оказаться неплотным и ненарушенным песчаным телом значительной мощности, и при вскрытии его долотом в процессе бурения покажет чередующиеся слои песка, глин, известковистого песка и прослоек мергеля с относительно меняющейся мощностью. Эти отдельные слои могут быть представлены линзами мергелей в пласте, во всем остальном представляющим однородный песок, или пески могут образовать линзы в более или менее однородном пласте глины. С другой стороны, непрерывно простирающийся песчаный пласт может быть пересечен сравнительно тонким прослоем мергеля, который тянется на большое расстояние. Следует отметить эти отдельные свойства и понять их причинную связь, наблюдая за типами осадков и структурой их отложений в районах недавней или современной активной седиментации. Так, поток, стремящийся с высоких гор, обычно откладывает валуны и гальку близ последних и уносит с собой ил и глину далеко на рав-

нину. В некоторых местах вдоль морского берега имеются пляжи, состоящие из чистого гравия. Движение волн и водяных потоков дает достаточно энергии, чтобы унести тонкозернистый материал, который вымывается водой или подвергается эрозии из материала береговой зоны. В других местах сила волн и течений меньше и там отлагается песок и ил. Удаляясь от берега в море, мы наблюдаем постепенное изменение осадков, начиная от мощных скоплений грубозернистых разностей до все более и более тонкозернистых отложений. Там же, где вода глубока и чиста, могут образоваться известняки. В свете сортирования отложений вполне очевидно, что постепенное наступление моря „в результате оседания суши" приведет в конечном итоге к постепенному распространению каждого типа отложений в направлении наступления моря. Так, грубозернистые обломки на берегу постепенно покроются песками, затем илом, глинами и, наконец, даже известняками, если оседание суши будет достаточно велико. В то же самое время каждый вид образования распространится с бо́льшим или меньшим однообразием в направлении наступления моря. В результате этого может быть достигнута очередность образования слоев известняка, глин и песчаника, имеющих значительную протяженность и однообразие. Тем не менее можно ожидать местных изменений в строении и составе осадков, выражающихся в появлении линз глины в песках или наоборот.

Не представляется возможным углубляться здесь далее в физиографические и геологические факторы, влияющие на установление типа и распределение различных осадков, но приведенные в последующем основные положения должны быть вполне очевидны. Все стратиграфические слои являются следствием изменений в физических условиях, при которых имело место осадкообразование. Резкая разница в последовательности образований большого масштаба обязана своей причиной региональным изменениям, меньшие отклонения в пределах единичного слоя обязаны местным или временным изменениям. В качестве примера можно указать, что глинистые частицы среди соответствующих прослоек известняка могут быть отнесены за счет штормов исключительной силы, которые создавали значительные вихри в обычно чистых водах. Неисчислимая слоистость некоторых глин могла явиться следствием обычных или цикличных изменений бурной погоды.

Механизм отложения осадков предполагает необходимость отложения в первоначальном состоянии горизонтальных слоев. В областях с неактивной геологической деятельностью образовавшиеся осадки могут сохранить свое первоначальное залегание и существовать в настоящее время в виде горизонтальных или слегка наклонных формаций. С другой стороны, такая неактивность в течение длительной геологической эпохи в обычных условиях не встречается. Региональные поднятия и опускания, эффективность которых распространяется на большие расстояния, являются непременным условием накопления мощных осадочных образований. При этом местная активность, принимающая участие в диастрофизме в период, последующий за первоначальным отложением осадков, почти неизбежна. В результате этого происходят местные нарушения горизонтальных слоев, образующие

складки, купола, моноклинали, которые могут получить весьма крутое падение. Если горообразовательные процессы протекают замедленно, то пластичность большинства пород дает возможность отложившимся слоям постепенно изогнуться и сместиться, без серьезных нарушений залегания, в сравнительно покойную антиклинальную и синклинальную систему. Однако быстрое воздействие тех же геологических процессов или очень резкое складкообразование обычно приводят к образованию трещин и большинства сбросов в формациях. Повидимому, спокойное складко- или куполообразование без больших трещин не может серьезно нарушить непрерывность слоев, поскольку мы рассматриваем этот вопрос в свете перемещения жидкостей. С другой стороны, большие сбросы могут создать достаточную величину перемещения слоев, чтобы вызвать вертикальное смещение данного объекта на



Фиг. 3. Типовой геологический разрез несогласного залегания пород:

1 — известковистая глина; *2* — песок; *3* — известняк с прослойками глины; *4* — песчанистая глина; *5* — известняк с прослойками глины; *6* — песчаник; *7* — глинистый песчаник; *8* — песчаник; *9* — глинистый песок; *10* — известняк; *11* — гранит; *12* — глинистый сланец.

бо́льшую высоту, чем его мощность. В этом случае непрерывность формаций может быть прервана на сбросе, и проницаемый слой может войти в соприкосновение с непроницаемой породой. С другой стороны, область сброса может заполниться непроницаемым обломочным материалом, который получился от вышеупомянутых местных давлений и деформаций. Соответственно этому в некоторых районах непрерывность проницаемых слоев может нарушиться непроницаемыми интрузивными дейками иногда весьма малых размеров.

Если в продолжение своей геологической жизни какая-нибудь область, состоящая из мощных складчатых осадкообразований, подверглась эрозии, то антиклинали могут частично или полностью снивелироваться. В результате такого оголения наклонные слои будут заканчиваться выходами на дневной поверхности. Последующая седиментация на этой площади в результате регионального оседания покроет первоначальную поверхность новыми образованиями отличного геологического возраста, которые лягут несогласно поверх более ранних горных пород. Повидимому, такой разрыв непрерывности в геологическом разрезе, именуемый несогласным напластованием (фиг. 3), может образовать замкнутые границы для некоторых погребенных слоев и так же, как сбросы, ограничить их сообщаемость.

Эти несогласия являются весьма обычными и распространенными структурными факторами и представляют собой покровы над ископаемыми слоями с уже отмеченной неправильностью, которой характеризуются эрозионные явления на дневной поверхности. Эти несогласия, очевидно, будут иметь серьезное влияние на скопление и региональную миграцию подземных жидкостей.

13. Подземные жидкости, их залегание и миграция. Под алювиальным покровом поверхностных почв породы, составляющие земную кору, представлены несцементированным гравием, песками, глинами, которые в результате уплотнения этих материалов цементацией и давлением с глубиной переходят постепенно в песчаники и мергели. Эти горизонты могут содержать также прослойки известняков, если в течение всей своей геологической жизни рассматриваемая область была покрыта достаточно глубоким водным бассейном с развитой органической жизнью. Мощность зоны несцементированных или полусцементированных пород обычно колеблется от нескольких метров до сотен метров, а мощность зоны сцементированных уплотненных осадочных пород, подстилаемых метаморфическими породами, может достигать нескольких тысяч метров. В основе этого комплекса лежит кристаллический фундамент. Из предыдущего рассмотрения следует вспомнить, что все эти породы обладают известным поровым пространством или пористостью, которая может колебаться, начиная от 85% ко всему объему отложившегося на поверхности ила и глины, и 40% для недавних отложений хорошо отсортированных песков, до практически ничтожной пористости у очень глубоких метаморфизованных осадочных образований и изверженных пород. Даже на глубинах свыше 300 *м* можно встретить горные породы, обладающие эффективной пористостью в 5—10% и даже выше, а на промежуточных глубинах песчаники с пористостью 20—25% не представляют редкого явления.

Большая часть этих осадочных образований отложилась под действием воды или непосредственно из морских бассейнов. Даже если эти осадки отложились в пустынных областях под действием ветров или иных рабочих агентов или же в случае формирования залежей любого вида, они были приподняты и подвергнуты поверхностной эрозии, то на конечном этапе погружения они оказались насыщенными грунтовыми водами. Таким образом, следует ожидать, что все горные породы, залегающие под земной поверхностью и обладающие поровым пространством, должны быть насыщены жидкостью, что и подтверждается в действительности. Обычно в глубоко залегающих морских отложениях последние содержат погребенную или сингенетичную воду. Возможно также, что эта вода проникла под давлением в отложения из смежных коллекторов или мигрировала с далеких расстояний через пористые сообщающиеся каналы. В нефтяных и газовых залежах сингенетическая вода, поступив туда после отложения осадочных образований, может явиться частью общего содержания жидкостей в породе.

Так как поровое пространство или трещины залегающих под землею горных пород заполнены жидкостями, уместно рассмотреть давления,

присущие последним. Существуют два вида или источника давления, которым подвержены жидкости в подземных резервуарах. С одной стороны, как мы уже видели, все горные породы испытывают в различной степени обжатие после первоначального осадкообразования. Так как сжатие является результатом тяжести залегающих над данным объектом пород в комплексе с возможными дополнительными усилиями от земного диастрофизма, можно допустить, что эти же нагрузки приложены и к жидкостям, заключенным в рассматриваемом глубоко залегающем коллекторе. Величина этих нагрузок зависит от тяжести налегающих пород и составляет около 230 *кг/см*^{2} на глубине 1000 *м*. С другой стороны, известно, что жидкости свободно мигрируют на далекие расстояния по пластам к их поверхностным выходам или же через перекрывающие их полупроницаемые слои и микротрещины, прорезывающие непроницаемые породы, по которым возможно достичь по вертикали дневной поверхности. Отсюда конечное давление жидкости, существующее в данном пласте, не может быть больше гидростатического давления, соответствующего глубине залегания или выхода проницаемого коллектора. Интересно отметить, что давления в девственных пластах, вскрываемых при бурении, очень близки к напору гидростатического столба, соответствующего залеганию последних, что составляет около 100 *ат* на 1000 *м* глубины[1].

В некоторых случаях можно встретить и повышенные давления, особенно в артезианских источниках, где продуктивный пласт имеет „активный“ выход на поверхность, через который может беспрерывно поступать в пласт значительное количество воды.

В свете этого обстоятельства интересно установить объем жидкостей, которые залегают под дневной поверхностью в природном подземном резервуаре. Возьмем в качестве примера песчаный пласт с пористостью 20% и мощностью 1 *м*. Каждый квадратный километр такой формации будет заключать в себе 200 000 *м*^{3} порового пространства, а отсюда соответственный объем жидкости. Более того, если данный пласт содержит в себе газ, который, как уже было отмечено, будет находиться под давлением, соответствующим гидростатическому напору столба жидкости, равному глубине залегания пласта, то на сравнительно небольшой площади будет заключено много миллионов кубометров газа. Так как мощность единичного пористого горизонта этого типа может составлять десятки и сотни метров, то осадочные породы, даже залегающие на больших глубинах, могут заключать в себе, очевидно, огромные количества воды, нефти и газа. Рассматривая скопления нефти и газа как специфические случаи, мы можем разбить все подземные воды на два больших класса:

а) грунтовые или атмосферные воды, источники которых и сами они находятся относительно близко к поверхности почвы;

б) погребенные воды, — обычно встречаются в более глубоко залегающих образованиях и представляют собой жидкость, связанную

---

[1] В нефтяных месторождениях побережья Мексиканского залива, Луизианы и Техаса недавними исследованиями точных замеров пластовых давлений было установлено полное совпадение этих данных с фактическими материалами, полученными со скважин, вскрывших впервые новые горизонты.

с осадкообразованием, заключенную в них в процессе отложения или же мигрировавшую в эти формации спустя некоторое время после отложения осадков.

14. Залегание грунтовых вод. Из атмосферных осадков, выпадающих на землю, одна часть их немедленно проникает через почву в дренажные каналы, другая часть испаряется в атмосферу, а остаток влаги просачивается глубоко в почву. Это просачивание грунтовых вод находит постепенно свой путь медленной подпочвенной миграцией в топографически пониженные, дренирующие поверхности русла. Часть этой влаги возвращается к дневной поверхности капиллярными силами, а часть растительным покровом, откуда она медленно испаряется в засушливые периоды. Грунтовые воды можно, таким образом, рассматривать залегающими в двух зонах: одна из них ненасыщенная, или так называемая капиллярная, зона [1], содержащая в себе почти исключительно поверхностный слой неуплотненной почвы и залегающая над поверхностью насыщения, и вторая зона, залегающая ниже поверхности насыщения, т. е. ниже действительного уровня грунтовых вод.

Более точное разграничение этих двух зон может быть сделано по давлению воды. В действительной капиллярной зоне давление будет меньше атмосферного, а в зоне грунтовых вод давление будет выше атмосферного. Тогда фактический уровень грунтовых вод определяется поверхностью, где давление жидкости равно атмосферному давлению.

Следует также упомянуть, что зона грунтовых вод включает в себя две области, которые характеризуются различием в стратиграфических границах, влияющих на миграционный режим воды. Это означает, что существует поверхностная зона движения, которую в принципе можно рассматривать как распространяющуюся от уровня водяного зеркала до первого эффективно непроницаемого слоя больших территориальных размеров, до которого грунтовая вода доходит при своем нисходящем просачивании, и вторая зона, состоящая из более глубоких участков движения, которые лежат под первым водонепроницаемым слоем. Первая зона характеризуется свободной неограниченной верхней водной поверхностью (зеркало воды) и эффективно непроницаемой нижней и обладает миграционным режимом, подчиняющимся в значительной степени местной топографии или поверхностной дренажной системе. Регулируется

---

[1] Этот термин здесь расширен и включает в себя так называемую вадозную (аэрированную) зону и фактически капиллярную зону, так как весьма затруднительно установить отличительную грань между ними. Повидимому, вода будет подниматься поверх нормального уровня грунтовых вод действием капиллярных сил, подобно тому как это имеет место в капиллярной трубке. Высота подъема воды определится обычными факторами. Но в дополнение к этому в аэрированной зоне, как это имеет место в почвах, капли или даже массы воды, заполняющие многие поры, могут благодаря силам, удерживающим глобулу воды в пределах пор, остаться взвешенными поверх действительной капиллярной зоны. Продолжительный период испарения, очевидно, освободит эту взвешенную воду, и над водяным зеркалом грунтовых вод останется только фактическая капиллярная зона. Испарение с поверхности этой зоны нарушит тогда равенство давления, в результате чего будет иметь место движение воды через эту зону по вертикали. Строго говоря, только такое движение может быть названо капиллярным движением.

она так называемой гравитационной характеристикой течения [1]. Глубокие зоны, заключающие слои, ограниченные в кровле и подошве водонепроницаемыми перемычками, не имеют поверхностей со свободным или нулевым давлением, почему и движение вод в них совершается по более простой закономерности. Различие между этими зонами выражается часто в величине просачивания через дневную поверхность и артезианского истечения. Первая учитывается в основном местной топографией, а вторая — региональными особенностями строения недр.

15. Содержание воды в несцементированных поверхностных отложениях. Поровое пространство различных пористых сред было уже достаточно детально рассмотрено, чтобы иметь представление о величине ее для различных пород. Вследствие возможных широких изменений в типе материала, размере зерен и распределении их пористость даже несвязанных отложений может колебаться в довольно широких пределах. Так, Кинг [2] указывает, что насыщенный песок содержит от 20 до 22% воды от своего сухого веса, в то время как содержание воды в почвах и глинах колеблется, начиная от этих величин, до 40 и даже 50% от своего сухого веса. Так как кубический метр песка весит от 1615 до 1762 *кг*, а почв, глин и гравия от 1267 до 1762 *кг*, видно, какое огромное количество воды заключено в подземных резервуарах. Фактические замеры, произведенные Кингом, показали, что емкость почв эквивалентна в круглых цифрах слою воды толщиной 2 *м* на каждые 5 *м* почвы, лежащей под уровнем насыщения.

Там, где почва не залегает под плоскостью раздела насыщения, она обычно содержит в поверхностном слое мощностью от 0,3 до 1,5 *м*, за исключением засушливых периодов, 75% воды от объема полного насыщения последнего. Таким образом, количество воды, собирающейся в этой зоне, колеблется от 4% по весу сухой грубозернистой смеси песков до 32% в глинах с тончайшим строением.

16. Движение жидкости в капиллярной зоне. Так называемые капиллярные движения грунтовых вод ограничены обычно поверхностной зоной над уровнем последних. Не может существовать подлинного капиллярного движения воды в осадочных образованиях или породах ниже водного зеркала, где поровое пространство уже заполнено водой. Однако перемещение жидкости по капиллярам может иметь все же место из области с повышенным насыщением в пониженную. Такие капиллярные движения могут происходить вверх, вниз и в широтном направлении в зависимости от условий насыщения, существующих в данное время. Дождь, выпавший на сухую землю, так насыщает верхний слой почвы, что действие капиллярных сил стремится направить нисходящее гравитационное дренирование или просачивание в области низкого насыщения. В течение засушливых периодов капиллярное движение имеет обратное направление, так как испарение с поверхности беспрерывно лишает воды верхнюю часть капиллярной зоны, и для поддержания равновесия происходит замещение ее из нижней насыщенной зоны. Обыч-

---

[1] Этот тип течения рассматривается в главе VI, где показана с очевидностью необычайно трудная с аналитической стороны его характеристика.

[2] King F. H., U. S. Geol, Survey. 19th. Ann. Rept. Part. II, 67, 1897—98.

ная почва в условиях равновесия является сравнительно сухой у поверхности. Содержание влаги постепенно увеличивается по мере возрастания глубины, пока не будет достигнута зона насыщения или действительный уровень грунтовых вод. В однородной среде, повидимому, нет резкого перехода между этими двумя зонами. Тем не менее истинный уровень грунтовых вод вполне точно определяется стоянием водного зеркала в открытых канавах или колодцах, проведенных ниже зоны насыщения. В открытой канаве, вскрывшей только капиллярную зону, не будет содержаться свободной воды. Единственным движением последней будет испарение через стенки канавы. Эти закономерности (о чем уже упоминалось при установлении понятия об этих зонах), непосредственно вытекающие из рассмотрения условий давления, а также из определения уровня грунтовых вод как поверхности, где давление воды равно атмосферному, характеризуются свободной водной поверхностью в открытой канаве или колодце. Что же касается источника энергии, создающего капиллярное движение описываемого здесь вида, то вполне ясно, что его следует отнести за счет сил, вызывающих испарение воды. В дополнение к капиллярному движению этого типа, что в конечном итоге можно проследить, наблюдая процесс испарения, вода может проникать через эту зону под действием давления жидкости. Дождевая вода, собираясь на поверхности, при достижении условий насыщения может проникнуть в капиллярную зону под действием силы тяжести, а оттуда к водному зеркалу. Однако, этот, повидимому, простой процесс осложняется наличием воздуха в ненасыщенной зоне. Пузырьки воздуха, удерживаясь в почве, уменьшают поперечное сечение пор для движения воды, хотя и участвуют вместе с водой в процессе просачивания. В результате этого изменение скорости просачивания воды через капиллярную зону от величины насыщения представляет собой сложную зависимость.

Следующей причиной вторичного, или неустановившегося, движения воды в капиллярной зоне являются нормальные колебания атмосферного давления. Такие колебания по необходимости создают изменения в давлении почвенной жидкости и при нарушении условий равновесия вызывают движение грунтовых вод. Эти колебания барометрического давления имеют относительно небольшую величину. Изменение показаний барометра на 1 *см* рт. столба указывает, что атмосферное давление изменилось на 1,2—1,6%. Так как эти изменения давления воздействуют на большие массы воздуха, заключенного в капиллярной зоне, то соответственно этому изменяется и объем последнего. Короче говоря, это дыхание абсорбированного воздуха будет способствовать неустановившемуся движению небольшой амплитуды в капиллярной зоне. В результате этого уровень водного зеркала будет колебаться соответственно изменениям барометрического давления. Кинг приводит некоторые интересные наблюдения относительно величины наблюдаемого движения грунтовых вод под влиянием изменений барометрического давления. Им даны примеры, в которых показана непосредственная связь изменения скорости истечения воды в источнике с изменением барометрического давления. При этом наблюдались почти одинаковые колебания в уровне артезианской скважины, расположенной на расстоянии 800 *м* от источника. Кинг указывает, что влияние барометрических изменений

достаточно велико, чтобы снизить дебит источника на 8%, в то время как дебит артезианской скважины глубиной 275 *м* изменился по крайней мере на 10%. В случае дренирования гончарными трубами, расположенными очень близко к поверхности, эти наблюдаемые изменения в дебите возрастают до 15%. Основная причина этих поразительно высоких изменений, создаваемых колебаниями барометрического давления, может быть прослежена на одной интересной особенности капиллярной зоны. Кинг приводит экспериментальные данные, показывающие, что добавления небольших количеств воды в капиллярную зону достаточно, чтобы создать относительно высокие изменения в высоте стояния водного зеркала. Наблюдение это является менее поразительным для того, кто знаком с высокой степенью насыщения, имеющей место в этой зоне, непосредственно над водным зеркалом. Таким образом, повышение атмосферного давления благодаря уменьшению объема аккумулированного в почве воздуха создает нисходящее движение воды в капиллярной зоне. В результате этого неравномерного повышения высоты стояния водного зеркала для данного объема воды, добавленного в капиллярную зону вблизи уровня насыщения, к системе прикладывается относительно повышенное гидростатическое давление, в результате чего источник или артезианская скважина повышают свой дебит. Основной интерес этого явления заключается в том, что оно наглядно подтверждает факт воздействия относительно небольших изменений объема воздуха, заключенного в капиллярной зоне, который может создать неустойчивые возмущения значительной амплитуды в нормальных условиях равновесия этой зоны. Изменения температуры могут создать неустановившееся движение в пределах этой области подобным же образом.

Мы не будем дальше разбирать детальным образом движение воды в капиллярной зоне. Но следует отметить, что эти процессы имеют большое экономическое значение. Так, в течение засушливых периодов поддержание соответствующего обеспечения влагой растений, корни которых не достигают водного зеркала, зависит от капиллярного эффекта. Более того, скорость испарения, а отсюда понижение водного зеркала, в большой степени зависит от строения поверхности почвы. Дыхание почвы, которое получается в результате нисходящего просачивания поверхностных вод, изменений барометрического давления и температуры, обеспечивает глубокое проникновение в почву воздуха, необходимого для поддержания в ней органической жизни. Эти же явления оказывают существенную помощь для нормального процесса диффузии рассеянных и постепенно удаляющихся из почвы газообразных продуктов органических реакций. Без этого обстоятельства медленный процесс одной нормальной диффузии может привести в результате этого к условиям равновесия газового содержания почвы, совершенно отличного от фактически существующего, что даст резкое отличие в изобилии и видах органической жизни в почве.

Проблемы, которые включают движение жидкости в поверхностной капиллярной зоне, имеют большую ценность для сельского хозяйства и образуют важный этап исследовательской работы в этом направлении. Капиллярная зона представляет интерес для гидролога в той части, что поверхностные воды, достигая зоны насыщения, должны проходить

по необходимости через капиллярную область, так как вода может достичь истинного водного зеркала, только превзойдя равновесное состояние насыщения. Тем не менее, за исключением тех указаний, которые нами уже сделаны по отношению к проблемам движения вод в капиллярной зоне, мы не будем больше концентрировать своего внимания на них, так как основные наши интересы связаны с областью насыщения, начиная от истиного уровня грунтовых вод или водного зеркала и ниже.

17. Движение жидкости ниже водного зеркала. Поверхностная зона. Как уже было указано, движение воды в пределах капиллярной зоны регулируется характером насыщения, а также другими факторами, которые выносят этот вопрос за рамки настоящей работы. На уровне водного зеркала или грунтовых вод, а также под ним можно допустить состояние полного насыщения. Поэтому зона, где давления имеют положительную величину и где движение вод определяется только градиентами давления, представляет интерес, по вполне понятной причине, для аналитического исследования. Отсюда все наши рассуждения в дальнейшем будут ограничены этой областью.

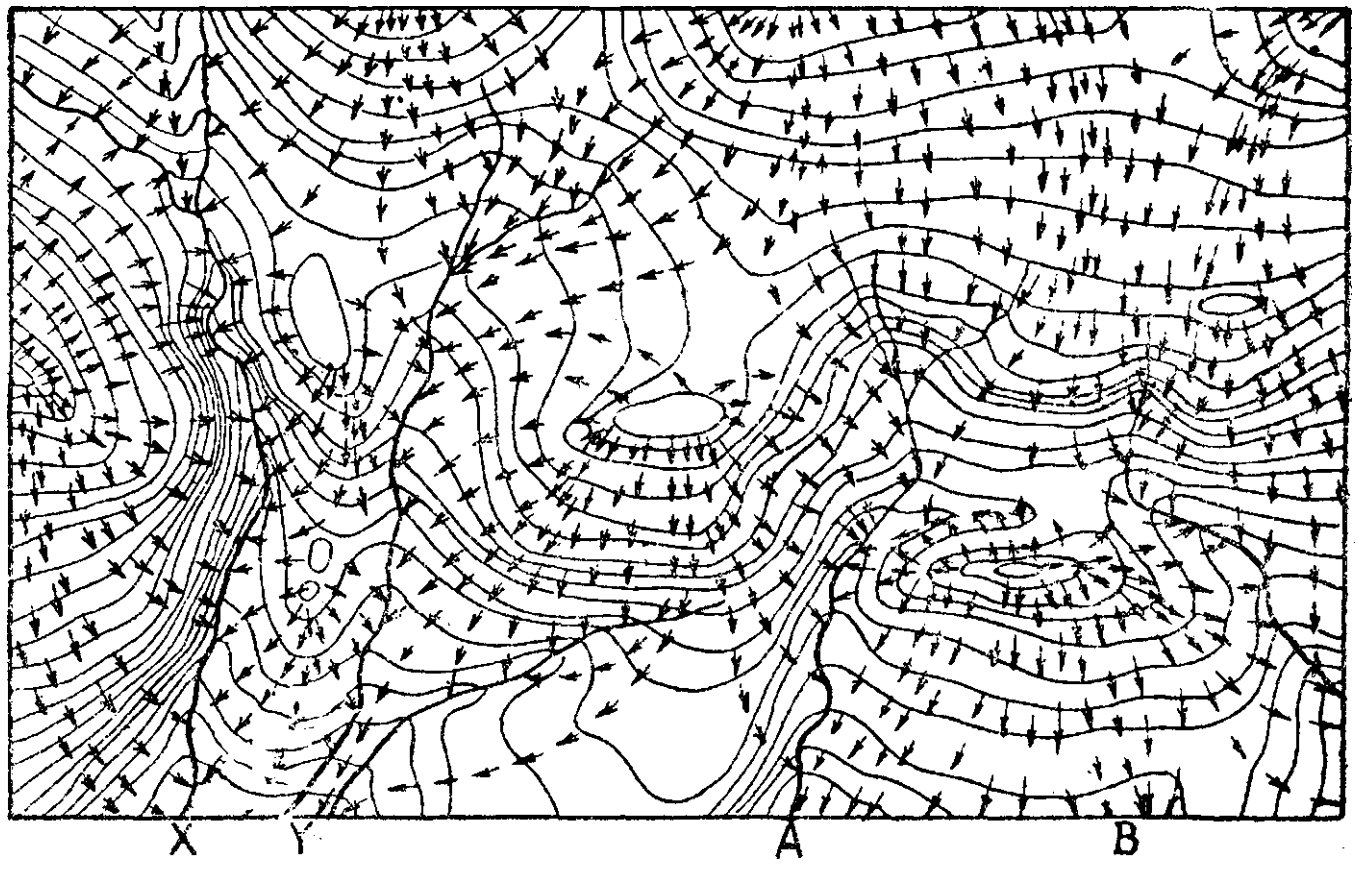
Выше уже было замечено (гл. I, п. 14), что зона грунтовых вод состоит из: 1) поверхностной зоны движения последних, где миграция вод подчиняется гравитационному фактору, и 2) глубоких зон, где пористую среду можно рассматривать как имеющую верхнюю и нижнюю перемычки, а сами системы определяются течением через пространственно ограниченные пористые коллекторы. В большинстве исследований, относящихся к рассматриваемому вопросу, изучается второй тип зон, так как он относится не только к глубоким зонам грунтовых вод, но в равной степени приложим и к еще более глубоким зонам с погребенной водой. Рассмотреть детально все бесчисленные типы проблем, относящихся к поверхностной зоне движения вод, не представляется возможным, но дать краткий обзор общих характеристик будет весьма полезно. Это послужит не только введением к практическим положениям, непосредственно вытекающим из дальнейших аналитических рассуждений, относящихся к этой специфической проблеме, но работу поверхностных вод можно будет подвергнуть в значительной мере непосредственному рассмотрению. Такие непосредственные наблюдения за их работой представляют промышленный интерес и дают неоценимый метод познания практических сторон движения вод через пористую среду.

Представителем поверхностной зоны движения грунтовых вод является речная долина[1]. Скорость и направление движения подземных вод в поверхностной зоне приурочены в основном к склонам поверхностного рельефа. Основной характерной чертой течения в поверхностной зоне является тот факт, что течение следует направлению поверхностного дренажа. Направление, по которому движутся поверхностные воды к ручьям и дренажным каналам, в общем сохраняется тем же, что имеют просачивающиеся воды в верхней зоне. Фактические замеры показывают, что водное зеркало обычно имеет уклон, по суще-

[1] Последующее содержание представляет собой свободное извлечение из работы „The Motions of Underground Waters", C. S. Slichter. U. S. Geol. Survey Publ., 1902.

ству не отличающийся от рельефа поверхности почвы, но только менее крутой. Поверхностный водораздел обычно совпадает с линией подпочвенного водораздела, и движение подпочвенного просачивания в ручьи и реки происходит по тем же направлениям, по которым происходит поверхностное дренирование к тем же водосборным объектам.

Низкий урез дренирования долины известен под техническим термином — тальвег. На топографической карте тальвег определяется линией естественного водоспуска. Ниже тальвега обычно существует аналогичный дренажный путь для подпочвенного водостока, который в целом совпадает с направлением тальвега. Для остальных частей долины



Фиг. 4. Топографическая карта, показывающая положение водяного зеркала (непрерывные тонкие линии), предположительное направление движения грунтовых вод (стрелками), а также тальвеги и линии дренажа (толстые линии) (по Ч. Слихтеру).

фактические направления движения подпочвенных вод представлены сетью кривых, которые пересекают контуры водяного зеркала под прямыми углами. Таким образом, линии тока соответствуют направлению градиента давления и в общем следуют уклонам поверхностного рельефа, как это показано на фиг. 4. Нельзя принимать в буквальном смысле полную аналогию между поверхностной топографией и подпочвенными тальвегами. Совпадение поверхностных и подпочвенных тальвегов и водоразделов является обычным явлением, но не геологической необходимостью. Поверхностный рельеф является одним из элементов, регулирующих подпочвенное движение вод, но довольно часто не самым важным. Горизонтальное распределение и перемещение грунтовых вод зависит раньше всего от формы поверхности первого действительно водонепроницаемого слоя, залегающего под водяным зеркалом. В известной степени на него оказывает влияние изменение высоты дневной поверхности или площади накопления вод, характер и строение проницаемых пластов, высота и расстояние до ближайшего тальвега

или дренажного канала и, наконец, количество выпадающих осадков. Комбинация этих факторов определяет собой глубину водяного зеркала в каждом заданном месте, а также направление и скорость перемещения подпочвенных водяных потоков. Они образуют сложную систему, и в каждом отдельном случае не представляется возможным сказать точно, какой из этих элементов играет ту или иную роль. Тонкозернистый состав коллекторов и большое количество дождевых осадков образуют тенденцию к высокому уровню стояния зеркала грунтовых вод на холмах и повышенных частях дневной поверхности и создают крутые градиенты водного зеркала. Наоборот, грубозернистый состав коллекторов и слабые атмосферные осадки дают в результате низкие уровни грунтовых вод и малые градиенты. С этой точки зрения вполне очевидно, что форма водонепроницаемого горизонта влияет на уровень грунтовых вод во влажном климате в меньшей степени, чем в сухом или полусухом. Как уже было показано, движение подпочвенных вод под влиянием силы тяжести направлено в общем в сторону ближайших речных потоков и озер. Тем не менее это движение может быть изменено вследствие различных причин, которые часто создают весьма сложные комбинации. Так, хотя обратный поток грунтовых вод к водосборам осуществляется, как правило, путем диффузии и почти неприметного просачивания, геологические условия на данной площади могут быть таковы, что поверхностные выходы водонепроницаемого пропластка могуг вывести, например, уровень грунтовых вод на дневную поверхность и сконцентрировать весь поток в единый мощный источник. В этом случае мы можем получить естественный водяной фонтан. Такая бросающаяся в глаза картина движения грунтовых вод отвлекает внимание неспециалиста от более важного, но менее заметного диффузионного просачивания.

Грунтовая вода, начав свое движение в сторону речной долины, может и не найти сразу своего пути в дренажный канал. Очень часто она направляется вниз по тальвегу и дальше в сторону моря, через пористую среду, в которой она заключена. Это движение может быть настолько сильным, что создает мощные подпочвенные потоки глубиной в несколько десятков метров и шириной в километры. Такой движущийся слой воды под ложем и берегами ручья носит название подруслового потока. Вполне очевидно, что подрусловый поток значительной величины невозможен в тонкозернистой среде, которая иногда заполняет речные долины. Среда эта может служить весьма хорошим подземным водяным резервуаром, но она не может играть основную роль при региональном дренировании той или иной площади. Совершенно иные условия могут возникнуть там, где пески и гравий под ложем потока представляют грубозернистые р а з н о с т и, что, например, часто встречается у истоков реки. Откладывающиеся здесь материалы состоят из крупнозернистых песков, гравия и булыжника, который сносится вниз горными потоками. Тонкозернистый материал уносится вниз до тех пор, пока ложе реки не достигнет плавного изгиба и поток воды потеряет свою высокую скорость. Таким образом, особенно вблизи истоков реки, под ложем последней существует большой объем воды, перемещающейся сквозь крупнозернистые р а з н о с т и. Иногда поток устремляется через узкую долину

или ущелье, где близко сходятся скалистые берега или же скалистое ложе его под обломочными породами подходит близко к дневной поверхности. В любом случае результатом этого будет заметное увеличение количества воды в реке, благодаря тому что воды подземного потока вытеснены на поверхность.

В устье каньона долина расширяется, и скалистое ложе реки погружается более глубоко от поверхности, в то время как поток осаждает все большую часть взвешенного в воде материала. Подрусловый поток может также расшириться и углубиться, чтобы заполнить увеличившийся по своим размерам пористый канал. Тонкозернистые р а з н о с т и и уменьшившийся уклон понижают скорость, с которой поток двигался вниз по долине. Долина может иметь такие размеры, что если количество выпадающих дождевых осадков достаточно, то просачивание с поверхности повышенных частей ее будет беспрерывно повышать объем воды подруслового потока, создавая подъем уровня нормальному количеству воды в самой реке и повышая дебит ее на всем пути последней к морю. С другой стороны, если ручей или поток попадет из горного каньона в засушливую область, поверхностный поток может постепенно исчезнуть, и его вода просочится в р а з н о с т и, заполняющие ложе долины. Путь потока будет отмечен только сухим старым руслом вдоль долины, которое только временами будет затопляться горными потоками.

Таким образом, расширение долины в том случае, когда поток выходит из горного каньона, будет иметь совершенно различный эффект в зависимости от того, является ли климат долины влажным или сухим. В одном случае расширение долины будет способствовать постоянному росту количества воды в реке, а в другом случае — постоянному уменьшению объема воды в последней, по мере того как река теряет запас воды в подрусловый поток, где она растекается по очень широкой полосе и где она претерпевает более интенсивные потери от испарения.

Взаимоотношения подруслового потока и вод в русле реки представляют много интересных явлений и вариаций. В некоторых случаях отложения сильта (ила) могут сделать ложе речного русла настолько водонепроницаемым, что на значительное расстояние между речными водами и водами подруслового потока не произойдет никакого смешения или замещения. В результате этого оба типа вод могут явиться совершенно независимыми и иметь совершенно различный химический состав. Повидимому, в таких случаях взаимосвязь между подрусловым потоком и речным руслом, которая рассматривалась выше, не может больше считаться справедливой. Хотя влагоемкость пористого материала, заполняющего долину, может быть очень велика, суммарный объем воды, уносимый ежесуточно подрусловым потоком, может быть относительно невелик. Скорость вод, просачивающихся через грубозернистые р а з н о с т и при крутом уклоне водяного зеркала, составляет около 3 *м* за сутки или несколько более. В то же самое время в менее проницаемых породах и при малых градиентах скорость просачивания воды может быть крайне мала. Вследствие больших изменений, возможных в каждом отдельном случае, это явление представляет собой совершенно самостоятельную проблему, дальнейшее рассмотрение которого в деталях считаем нецелесообразным.

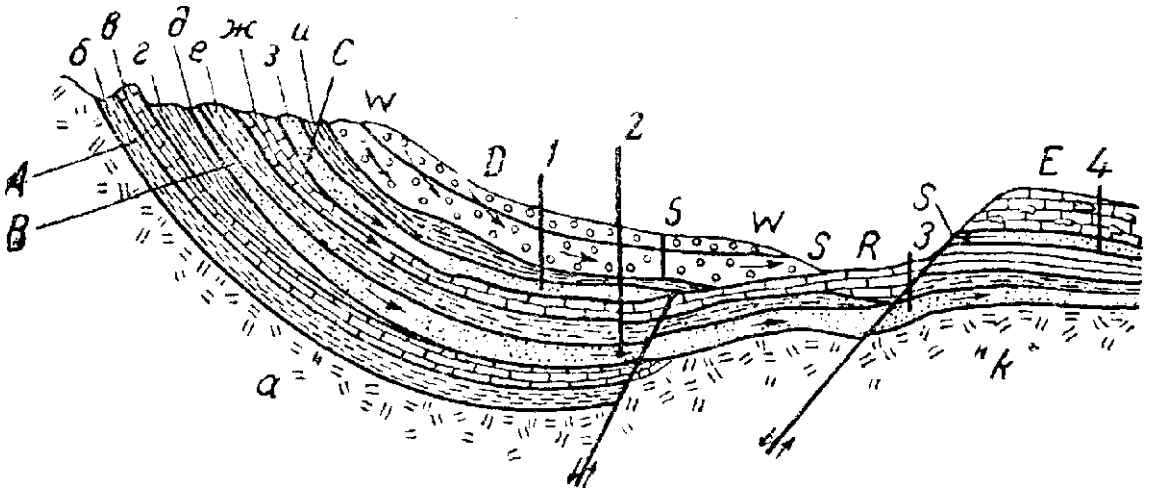
18. Движение жидкости под уровнем грунтовых вод. Глубокие зоны. Грунтовые воды могут проникнуть в более глубокие зоны путем просачивания в открытые на дневную поверхность выходы проницаемых слоев или косвенным путем — просачиванием воды из ручьев или рек, долины которых пересекают эти выходы. Вода покидает глубокую зону при более низком уровне по сравнению со своим поступлением в последнюю. Отсюда выходы глубокой зоны следует искать в пониженных обнажениях горных пород, где река, возможно, промыла себе русло сквозь них или же где верхние водонепроницаемые горизонты были совершенно смыты. В дополнение к таким характерным выходам стратиграфические горизонты могут пересекаться сбросами и трещинами, через которые вода может уйти в вышележащие слои. С другой стороны, приток воды по пути медленного просачивания через перекрывающие породы в данную формацию может рассеяться по этим породам и достичь поверхности по вертикали.

Следует помнить, что термин водонепроницаемость по отношению к горным породам весьма условен. Перекрывающий слой глины или скалы, которая служит транспортирующей средой, занимает площадь чрезвычайно больших размеров по отношению к своей мощности по вертикали. Перекрывающая непроницаемая горная порода, теряя в своей проницаемости, уравновешивается огромной площадью, через которую имеет место просачивание. Таким, образом, просачивание в вертикальном направлении может создать движение воды в пористом горизонте, если даже и отсутствует выход водопроводящей среды на дневную поверхность. Местное, направленное вверх просачивание воды может объяснить поэтому некоторые, повидимому аномальные, колебания давления грунтовых вод в артезианских бассейнах. Существование выходов, а отсюда точно установленное место инфильтрации грунтовых вод в проницаемую породу, дает все основания ожидать одинаковый статический напор по всей площади распространения указанного горизонта в отсутствии какого-нибудь определенного выхода источника воды. Однако потери от вертикального просачивания через вышезалегающие слои, увеличенные потерями через сбросы и трещины, приводят в результате к общей региональной миграции воды из проводящих пластов с соответствующей потерей гидростатического напора. Аналогичное явление имеет место в глубоко залегающих пластах зоны погребенных вод, где давление жидкости в горизонтах, не имеющих выхода на поверхность, близко соответствует, как это отмечалось уже выше (гл. I, п. 13), гидростатическому напору, равному глубине залежей.

Вполне очевидно, что отнесение горизонтов глубоких зон движения вод с целью удобства, к закрытой пористой водопроводящей системе является условным. Такие горизонты следует рассматривать как псевдоизолированные коллекторы, работа которых приближается к идеальной в зависимости от отношения проницаемости пласта по всей его протяженности к таковой же в его кровле. Если давление в данном горизонте выше, чем гидростатический напор, соответствующий глубине залежи, то просачивание в вертикальном направлении (вверх) не только возможно, но и неизбежно по крайней мере для известной части перекрывающих пород.

Эти соображения достаточно хорошо разъясняют причину широких

колебаний производительности, которую можно ожидать от водяных пластов артезианского типа. Если пласт с высокой проницаемостью имеет обильное питание водой на своих приподнятых выходах или же иных участках водопоглощения, а проницаемость перекрывающих пород относительно мала, и если к тому же пласт не имеет эффективного выхода для воды в своей погруженной граничной части, то артезианский напор будет соответственно равномерен по всей площади залегания пласта. С другой стороны, низкий дебит воды, поступающей в приподнятые выходы пластов, низкая проницаемость последних, относительно высокое количество просачивающейся вверх воды, а также



Фиг. 5. Поперечный разрез через гипотетический артезианский бассейн, показывающий поверхностную и глубокую зоны движения грунтовых вод (вертикальный масштаб преувеличен):

A — выход водонепроницаемого песчаника и известняка; *B* — выход проницаемого песчаника, который питается от реки *B*, представляет собой глубокий непрерывный артезианский водяной коллектор; *C* — проницаемый песчаник, который питается через выходы в долине атмосферными осадками, представлен неглубоким артезианским коллектором, теряющим воду в зоне сброса в вышележащие слои с соответствующей потерей напора; *D* — молодые отложения несцементированных пород с водяным зеркалом *WW* являются подземным источником питания для реки в *R*, неглубоких скважин *5* и ключей *S*; *E* — кавернозный известняк — источник высокодебитных скважин и фильтрации в залегающие ниже пласты песчаника. Последний питает источники на выходах и артезианские скважины на восточной стороне плато; *1*, *2*, *3*, *4* — глубокие скважины, артезианский напор которых показан высотой, начертанной сплошной линией; *5* — неглубокая скважина ниже водяного зеркала в зоне поверхностного движения грунтовых вод.

Во всех случаях потеря напора связана с миграцией, как это показано стрелками. Заметная потеря напора у скважины *3* связана с относительно низкой проницаемостью через зоны сброса. *а* — шиферные сланцы, граниты и т. д.; *б* — кембрийский песчаник; *в* — известняк; *г* — глинистый сланец; *д* — песчаник; *е* — глины и глинистый песчаник; *ж* — известняк; *з* — песчаник; *и* — глины; *к* — гранит.

большая площадь выхода последней из пласта приведут в результате порознь или в целом к крутым градиентам давления внутри пласта и к быстрому падению артезианского напора в направлении миграции воды.

На фиг. 5 приведен разрез через условный артезианский бассейн, где в принципе показаны некоторые из основных особенностей, о которых шла речь в отношении поверхностных и глубинных зон движения грунтовых вод. Мы бы рекомендовали читателю дальнейшее подробное изучение этого вопроса по многочисленным гидрологическим статьям и работам, чтобы расширить знакомство с этим наглядным подтверждением существования подпочвенного потока, так как рассматриваемый предмет в комплексе с фактическими полевыми наблюдениями представляет собой весьма большой научный и практический интерес.

19. Залегание погребенных вод. Является вполне очевидным, что любые морские осадки, которые после процесса отложения не были подняты над уровнем зеркала грунтовых вод и не были промыты атмосферными осадками вследствие просачивания грунтовых вод, должны содержать в себе воду, которая является, возможно, идентичной с той или происходит непосредственно от тех вод, что содержались в древних морях. Удержание воды пористыми разностями на протяжении геологических эпох становится еще более очевидным, если вспомнить, что пористость имеет свой максимум непосредственно вслед за отложением осадков, а по мере уменьшения пористости вследствие обжатия и цементации осадочных образований наблюдается явление вытеснения жидкости из пор последних. За исключением некоторых определенных случаев, когда грунтовая вода имеет непосредственное проникновение в глубоко залегающие пласты и в них возможно смешение или даже полное замещение находящейся там воды на грунтовую, а также при наличии открытых выходов пластов на дневную поверхность — первоначальная или погребенная вода (говоря более строго — часть ее) остается в залежи после ее образования, как в ловушке. Однако следует подчеркнуть, что погребенная вода, представленная в данном горизонте, не обязательно должна иметь местный характер и принадлежать к данной области или горизонту. Вследствие сложного процесса миграции, возможного в подземных горных породах, состав присутствующей в пласте воды может характеризовать погребенную воду, как проникшую в последний из смежных источников или же путем миграции по проницаемым разностям с относительно далеких расстояний. Совершенно не следует ожидать, что вода из скважин, вскрывших определенные глубокие горизонты, будет по своему химическому составу соответствовать воде древних морей. Изменения в составе воды должны были произойти в течение геологической эпохи, прошедшей с момента отложения ныне глубоко залегающих формаций до настоящего времени. Химическая активность в течение этого периода имела место в форме растворения породообразующих минералов, реакций обмена солей, а также осаждения минералов, что подтверждается цементацией песков и иных пористых разностей во многих стратиграфических горизонтах.

Глубокие изменения химического состава некоторых горных пород радикальным образом изменили их свойства, а такие изменения могли произойти только за счет работы миграционных вод.

Представляет собой интерес исследование некоторых минерализованных вод или рассолов, взятых из глубоких скважин, а также из относительно неглубоких пластов, где они не смешались с атмосферными осадками. Типичные образцы приведены в табл. 2. Характерной особенностью этих рассолов является их большая соленость по сравнению с морской водой. Нельзя себе представить, что соленость воды в современном океане ниже, чем соленость океанской воды миллионы лет тому назад. Многие осадочные образования, ныне вскрытые бурением, без сомнения, отложились во внутренних морях, где вследствие повышенного испарения имелись весьма большие концентрации растворенных минералов. Громадные залежи почти чистой поваренной соли, образующие часть стратиграфического разреза во многих областях, дают вполне точное подтверждение существования засушливых условий,

господствовавших в указанных районах во время отложения осадочной соли. С другой стороны, повышение солености можно всецело отнести за счет физических и химических процессов, имевших место после отложения осадков и их глубокого погребения. Колебания в других химических компонентах являются результатом изменений, обусловленных длительным контактом с породами подземного резервуара и смешением вод в процессе миграции. Так, особенностью вод, показанных в табл. 2, является весьма низкое содержание сульфатов, характерное для буровых вод нефтяных месторождений [1]. Полагают, что это явление обязано восстановительному действию нефти [2]. Равным образом поражает значи-

Таблица 2

Анализы погребенных вод (в *мг/л*)

Источники	Глубина, *м*	Хлориды	Сульфаты	Карбонаты	Бикарбонаты	Натрий	Калий	Кальций	Магний	Силиций	Железо и алюминий
1	Океанская вода	19 410	2700	—	70	10 710	390	420	1300	—	—
2	420	77 340	730	—	—	31 950	650	13 260	1940	—	—
3	1272,6	108 990	455	—	43	54 363	—	10 560	2390	—	—
4	—	152 100	319	—	—	73 620	—	17 700	2541	30	300
5	403	90 540	140	—	—	40 100	140	12 210	2140	—	70
6	351	82 350	—	—	—	36 300	260	11 400	1950	10	150
7	1890	196 000	60	—	—	78 200	6250	30 500	3000	—	190
8	450	3 273	11	48	3684	3 350	47	28	24	127	4
9	930	23 553	18	—	626	13 213		1 089	685	65	11
10	735	16 640	1310	—	587	9 318		1 350	377	—	42
11	—	2 670	Следы	696	5120	4 125	—	16	—	—	—
12	—	153	—	—	2866	1 148	—	10	10	—	—

1. Средний анализ из 77 проб океанской воды (экспедиция Чалленджер)
2. Брадфордский песчаник, Брадфорд, Пенсильвания.
3. Сент-Луисский песчаник, Сент-Луис, Оклахома.
4. Песчаник Лейтон, месторождение Гарбер, Оклахома.
5. Песчаник Бетлер, местечко Окленд, Пенсильвания.
6. Песчаник Бетлер, местечко Центр, Пенсильвания.
7. Песчаник Орискэни, Вашингтон, Пенсильвания.
8. Некоррозийная вода из месторождения Сонсет Мидвей, Калифорния.
9. Коррозийная вода из месторождения Сонсет Мидвей, Калифорния.
10. Месторождение Эльдорадо, Канзас.
11. Первый песчаник Уолл-Крик, восточная часть месторождения Солт-Крик, Уайоминг.
12. Первый песчаник Уолл-Крик, западная часть месторождения Солт-Крик, Уайоминг.

---

[1] Анализы, приведенные в табл. 2, являются типичными для образцов вод, взятых в нефтяных месторождениях и в примыкающих к ним районах.

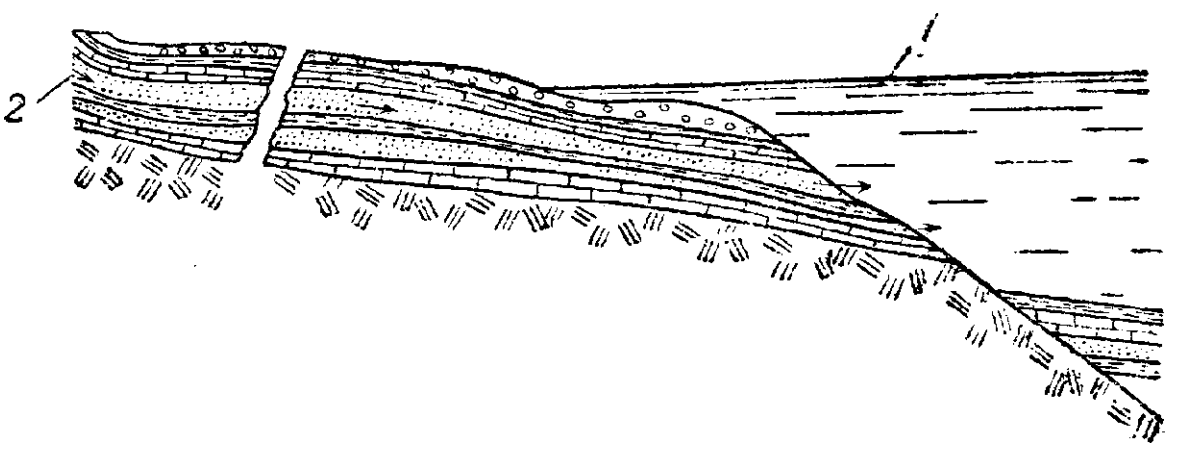
[2] Rogers C. S. U. S. Geol., Survey Prof. Paper, 117, Part. 2, 1—103, 1919; E. S. Bastin, Amer. Assoc. Petrol. Geolog, Bull. 10, 1290, 1936.

тельный рост содержания кальция в этих водах. Остальные рассолы содержат необычные количества брома, иода и других элементов и являются экономически выгодными источниками получения различных химикалий.

Когда стратиграфические формы и обнажения на выходах обеспечивают проникновение грунтовых вод в более глубоко залегающие участки пласта, такие сильно минерализованные воды служат объектом для смешивания их с миграционными грунтовыми водами и понижения концентрации солей. Например, в табл. 2 образцы вод 11 и 12 взяты из одного и того же песчаника, но так как последний выходит на поверхность около 24 *км* к западу (в горы) от нефтяного месторождения, то атмосферные осадки частично затопили песчаник и понизили концентрацию погребенной воды (интересно отметить, что наибольшее понижение концентрации рассола имело место в направлении против движения потока, что указывает на защитное влияние структуры, где скопились нефть и газ, которые принудили миграционную воду циркулировать вокруг нефтяной залежи). Можно привести и другой пример. Так, в одном пласте песчаника в Калифорнии на глубине 1800 *м* была встречена пресная вода. Выходы этого пласта в горах обеспечили свободный доступ грунтовой воде, которая благодаря крутому падению пласта и, повидимому, свободному, выходу из последнего обеспечила относительно быструю миграцию и эффективное замещение погребенной минерализованной воды. Выходы песчаника Вудбайн в северной части центрального Техсаса тянутся длинной грядой, проходящей через окрестности г. Даллас, где они получают обильное питание грунтовыми водами. Последние заместили погребенную воду в пласте, вплоть до зоны сброса Мексия. В этом песчанике к западу от зоны сброса по мере достижения области нарушения пресная вода постепенно становится минерализованной. К востоку от сброса и далее на протяжении всего остального бассейна в песчанике встречается типичная погребенная вода. Эти общие соображения служат для того, чтобы показать различие между погребенной и атмосферной водой. Становится ясным, что термин „погребенная вода" полагает содержание воды в горной породе, непосредственно связанное с самой породой, но такая буквальная интерпретация этого термина нами не имеется в виду. Так как структура горных пород в зонах погребенных вод аналогична зонам грунтовых вод, следует ожидать в горных породах комплексную миграцию жидкостей, распространяющуюся на далекие расстояния. Действительно, те немногие цитированные нами примеры, где произошло понижение концентрации погребенных вод грунтовыми, дают нам полное подтверждение подобного рода миграции. При такой широкой интерпретации термина „погребенная вода" исключается всякая путаница в представлении о том, что она находилась в каком-либо осадочном образовании с момента отложения осадков, с которыми она связана в настоящее время в застойном состоянии.

20. Миграция погребенных вод. Если существуют места поступления воды в топографически высоко расположенные выходы пласта и выход ее через дренажные каналы на нижней погруженной поверхности последнего, легко представить себе процесс миграции в глубоких зонах

грунтовых вод. Высокодебитные источники из пластов, которые погребены глубоко под примыкающей к данной площади гористой местностью, являются вполне определенным и обстоятельным подтверждением механизма миграции вод. Следует ожидать также региональную миграцию, созданную проникновением грунтовых вод в приподнятые выходы пластов на дневной поверхности, которые имеют постепенное погружение в сторону выходов, залегающих глубоко под уровнем океана (фиг. 6). В свете таких простых фактов нет основания подвергать дальнейшему рассмотрению миграцию погребенной воды, вызванную непосредственным проталкиванием ее по пласту наступающей сверху грунтовой водой. С другой стороны, при наличии закрытых бассейнов или же там, где крупное несогласное залегание, повидимому, исключает эффективные выходы пластов (фиг. 3), некоторые из них могут и не иметь вполне



Фиг. 6. Типовой разрез наклонно падающих слоев, которые выходят ниже уровня моря:

1 — уровень моря; *2* — песчаник.

определенных зон приема и стока, где могла бы возникнуть циркуляция подземных вод. Механизм миграции вод для этих условий не так ясен, хотя наглядность его существования за длительный геологический период подтверждается различными фактами. Упомянем только один из них. Осаждение силициевого или кальциевого цементирующего вещества в порах песчаного пласта, занимающее в некоторых случаях до 30% или более всего объема пласта, не может явиться, повидимому, результатом действия стоячих вод. Заключенная в пласте вода физически не может иметь в растворе столь большого количества твердых веществ в непосредственной к себе близости, чтобы создать такие мощные отложения. Повидимому, следует предположить более осложненную механику миграции погребенных вод, чем та, которую мы рассматривали для объяснения этих явлений.

21. Влияние уплотнения осадков на миграцию жидкостей. Уплотнение осадков мы рассматривали вкратце в главе I, пп. 7—9. Теперь вполне уместно осветить всю важность этого явления, так как оно благодаря своей связи с миграцией погребенных вод затрагивает крупные геологические процессы. Мы уже видели, что вследствие уплотнения от веса перекрывающих осадочных пород глины, имевшие пористость от 45 до 50% и содержавшие вследствие этого эквивалентное количество остаточной воды, теряют постепенно свою пористость с увеличением глубины погребения залежи. На глубине 1500—1800 *м* остаточ-

ная пористость и водонасыщенность составляют не свыше 5%. Повидимому, процесс образования сланцев из первичного глинистого и илистого материала требует вытеснения огромных количеств воды, первоначально заключенных в осадочных образованиях. Уплотнение песков имеет меньшую значимость, так как их суммарное уплотнение под весьма большими нагрузками достигает всего лишь нескольких процентов. Тем не менее цементация песков, которая уменьшает их пористость с первоначальной величины 40% до значений, колеблющихся в пределах от 30 до 5%, требует, повидимому, вытеснения соответствующего количества воды из этих осадков. Однако для песков этот процесс следует рассматривать скорее как вторичный эффект, чем как первопричину, так как осаждение цементирующего вещества было бы невозможно, если бы не циркуляция огромных количеств воды под действием иных агентов.

Эти явления разъясняют не только необходимость циркуляции исключительно больших объемов погребенной воды через проницаемые отложения, с которыми она связана, но и механизм процесса миграции в течение геологического периода, истекшего с момента отложения и глубокого погребения залежи. Допущение процесса вытеснения воды требует некоторых умозрительных заключений. Не только величина уплотнения, необходимая для образования сланцев из глин и илистых отложений, показывает на эти осадочные образования как на первичный источник погребенных вод, но и преобладание сланцев в какой-нибудь области с широко развитыми осадочными породами является дальнейшим подтверждением их ведущей роли в вышеуказанном процессе. Поэтому в последующем кратком изложении мы будем касаться только сланцев, полагая, что остальные осадки аналогичны по своему действию, но имеют меньшую значимость.

В процессе первоначального формирования сланцеобразующие осадки постепенно погребаются под последовательно утолщающимися слоями добавочных отложений. Благодаря весьма большой восприимчивости к уплотнению в процессе формирования и относительно высокой проницаемости по вертикали перекрывающих разностей, безусловно, бо́льшая часть воды, выжатой из глин и ила, будет вытесняться в вертикальном направлении через налегающий массив. Этот медленный процесс может сопровождаться постепенным выпадением цементирующего вещества в песчаных и аналогичных отложениях, причем значительная часть его будет поступать из растворов минералов, входящих в состав глин и илов. Однако, по мере того как глубина залежи становится большей, а проницаемость сланцев становится все меньшей и меньшей, значительная часть выжатой воды будет вытесняться в примыкающие песчаные слои, где благодаря относительно более высокой проницаемости такой среды будет иметь место скорее широтная, чем вертикальная, миграция воды. В результате этих преобразовательных процессов сланцы становятся все более и более водонепроницаемыми и являют собой уже граничные перемычки, которые стремятся удержать вытесненную воду в смежных песчаных горизонтах. В этих горизонтах вода находит себе более легкий путь в области с пониженным давлением и покидает пористый резервуар, даже если процесс миграции происходит на далекие расстояния. Следует помнить, как

уже отмечалось выше (гл. I, п. 18), что в этом процессе должно происходить вертикальное просачивание по направлению к дневной поверхности, через породы, дизъюнктивные трещины и плоскости сбросов в покрывающих образованиях. Вполне установленным фактом, доказанным наблюдениями, является то обстоятельство, что в целом давление жидкости в таких формациях довольно близко соответствует гидростатическому напору, равному глубине залежи, хотя в отдельных случаях, особенно на больших глубинах, можно столкнуться с повышенным и давлениями. Процесс вертикального просачивания, идущий совместно с процессом широтной миграции воды через проницаемые слои, является вполне обоснованным явлением, если представить себе грандиозный размах времени действия его и высокие давления, которые могут получиться, если вытеснение воды происходит с большой трудностью. Исключительно низкая проницаемость по сечению пород компенсируется, как уже отмечалось, до некоторой степени огромной площадью, принимающей участие в процессе вытеснения воды. В свете этого обстоятельства огромные количества воды, вытесняемые из глин, требуют лишь бесконечно малых средних скоростей потока в вертикальном направлении. Рассматривая типичный осадочный бассейн, где в центральной части его могут залегать от 3000 до 6000 тыс. *м* осадочных образований мы видим, что постепенное уплотнение сланцев, составляющих значительную часть отложений, приводит в результате к вытеснению воды в примыкающие проницаемые слои. Последние в свою очередь служат водопроводниками, где вода, двигаясь по пути наименьшего сопротивления, выжимается в конечном итоге через перекрывающие горные породы. Зоны сбросов, микротрещины, спайность в местах складкообразования являются вполне установленными участками для выхода воды на поверхность в дополнение к весьма медленному просачиванию ее на огромных пространствах через собственно горные породы. Вполне ясно, что в такой системе общее направление миграции будет итти от центра главного источника водных рессурсов в сторону бортов бассейна. Общее направление потока может быть очень сильно осложнено геологическими факторами, которые нарушают непрерывность системы. Этот процесс нельзя рассматривать в любом случае как чисто широтную миграцию, т. е. как будто весь поток должен постепенно найти себе выход у бортов бассейна. Как уже было подчеркнуто, общий поток в радиальном направлении сопровождается вертикальным просачиванием, которое совершается постепенно по всей площади. Наши обобщения далеки от достаточного, чтобы создать полную и удовлетворительную картину всего процесса. Подробное разъяснение некоторых особенностей последнего будет по необходимости весьма умозрительным, так как совершенно невозможно развить такое неуязвимое детальное объяснение, в котором были бы учтены миллионы лет действия процесса. Чтобы ответить на многие вопросы, возникающие при более близком рассмотрении этого явления, наши знания физических и химических процессов, учитывающих фактор времени такой величины, совершенно недостаточны. В свете существующих очевидных и известных фактов в отношении основы физического поведения таких систем представляется, что нарисованная здесь картина должна соответствовать действительной обстановке. Дополнительные подробности, которые

можно добавить для полноты к сказанному выше, могут сделать более ясным представленный механизм процесса, но не изменить его глубоко.

22. Залегание газа и нефти. Погребенные воды сами по себе вряд ли подверглись рассмотрению в настоящем исследовании, даже оставляя в стороне их непосредственную значимость при геологических процессах, а в отдельных случаях — вследствие необычных химических компонентов, обеспечивающих их промышленную эксплоатацию. Однако, как это хорошо известно, богатейшие залежи газа и нефти разведывают и эксплоатируют с помощью буровых скважин, которые проводятся на большую глубину от поверхности. Такие залежи не только тесно связаны с сопровождающей их погребенной водой, но скопления нефти и газа на определенных площадях в таких количествах, что делает экономически выгодной их разработку, могут быть связаны непосредственно с миграционными процессами этих вод. В процессе добычи нефти и газа из пород подземного резервуара вода участвует в работе последнего в различной степени. Роль буровой воды будет рассмотрена в подробном аналитическом исследовании, представленном в последующих главах. Теперь же мы ограничим свое внимание достаточно беглым обзором происхождения и формирования газа и нефти.

23. Происхождение газа и нефти. Возможно, что не существует еще таких залежей минералов промышленной ценности, происхождение, формирование и генезис которых подвергались бы такой дискуссии, как в отношении горючих ископаемых — газа и нефти. Газ, встречающийся совместно с углем и иными к нему тяготеющими ископаемыми, произошел исключительно из растительного вещества в процессе его преобразования в уголь. Почвенные газы, состоящие в основном из азота, углекислоты и метана, являются продуктами распада органических остатков, хотя в их формировании важным этапом было действие бактерий. Эти газы обычно настолько тщательно диспергированы, что их присутствие в почве можно обнаружить весьма тонким анализом. Во многих районах, например, в некоторой части долины реки Миссисипи, мощность болотистых отложений настолько велика, что в результате получились скопища значительного количества „болотного газа". Тщательный анализ такого газа показывает, что горючая или углеводородная часть его представлена метаном, с содержанием этана не более 0,001%, при полном отсутствии более высокомолекулярных углеводородов. Встречающийся в природе нефтяной газ хотя сильно меняется по своему составу, но в основном состоит из смеси углеводородов, от метана до гексана. Метан может составлять до 95% всего газа, но в некоторых случаях пропан и бутан имеют количественное преобладание. Это создает резкий контраст по отношению к обычным продуктам распада органической жизни, которые можно встретить в относительно неглубоких месторождениях, где, как уже было сказано, имеется только метан с небольшими следами этана. Вследствие этого до сравнительно недавнего времени исследователи считали, что генезис нефтяного газа следует отнести в основном к неорганическому происхождению. В настоящее время эта концепция почти совершенно заброшена, и действительным источником

происхождения газа признается органическое вещество. Однако объяснение процесса формирования нефтяных газов остается в существенной своей части чисто умозрительным.

Еще менее удовлетворительным является наше знание о процессах, имеющих место при формировании весьма сложных смесей жидких углеводородов, которые входят в состав нефти. Однако различные косвенные доказательства показывают окончательно, что, несмотря на неуверенность в процессе формирования, первичное генетическое вещество нефти является органическим.

По вопросу генезиса уместно отметить тот факт, что газ и нефть в породах подземного резервуара всегда тесно связаны. Хотя большие залежи газа и встречаются иногда с небольшими признаками нефти и, обратно, некоторые нефтяные месторождения содержат только небольшое количество газа, но эти явления могут быть отнесены за счет других условий, отличных от проблемы генезиса. Возможно, что газовые месторождения, почти совершенно лишенные нефтесодержания, существуют как таковые вследствие случайных условий, благоприятных для формирования только газа или его скоплений. С другой стороны, не встречается нефтяных месторождений, совершенно лишенных газа, за исключением тех случаев, где геологические условия благоприятствуют непосредственному рассеиванию газа вследствие утечки его из подземного резервуара. Поэтому можно допустить, что нефть и газ имеют общий генезис и произошли от органических реакций, подробности которых неизвестны.

В свете этого принятого органического происхождения нефти можно допустить, естественно, близкую генетическую связь между углем и нефтью. Однако большие углеразрабатываемые свиты обычно не являются нефтяными эксплоатационными горизонтами, хотя нефтяные горизонты в некоторых районах и связаны с богатыми слоями лигнита. Наиболее богатые нефтяные пласты встречаются обычно отдельно от залежей лигнита, и можно вполне утвердительно доказать, что нефтяные месторождения, приуроченные к залежам лигнита, составляют весьма небольшую часть известных нефтяных залежей, т. е. между углем и нефтью отсутствует внутренняя генетическая связь. При рассмотрении этой проблемы было отмечено, что для объяснения происхождения нефти и газа необходимо найти в обычных осадочных образованиях известняков, песков и сланцев первичное нефтепроизводящее вещество. Так как нефтепроизводящие свиты могут располагаться в образованиях, о которых известно, что они отложились в кислой среде, приуроченной или находящейся в пределах достижения миграционных жидкостей, — это должны быть осадочные отложения морского происхождения. Таким образом, следует допустить, что любая проницаемая горная порода или осадочное образование может быть соответствующим нефтяным коллектором. Однако наиболее важные нефтепроизводящие свиты ограничены морскими отложениями и особенно теми, которые отлагались в сравнительно неглубоких водах, где органическая жизнь была особенно обильна. Эта гипотеза является в настоящее время общепринятой, так как нам неизвестны отрицающие это общее положение доказательства.

Подводя итоги научно-исследовательским работам, обнимающим изучение органического содержимого современных осадков, проделанных во всем мире, Траск пишет:

1. Органическое содержимое осадков зависит в сильной степени от конфигурации морского дна. Отложения в депрессиях и закрытых бассейнах содержат больше органического вещества, чем те, которые расположены на прилежащих хребтах или склонах, имеющих более крутое падение по сравнению со смежными областями.

2. Органическое содержимое осадков увеличивается с тонкозернистостью текстуры. Глины содержат приблизительно в два раза больше органического вещества, чем илы, а последние содержат в два раза больше органического вещества, чем тонкозернистые пески.

3. Органическое содержание тонкозернистых осадков может значительно колебаться на расстоянии нескольких километров, без заметного макроскопического изменения в строении осадков.

4. Органическое содержание характерных морских отложений резко меняется в зависимости от обилия планктона в поверхностных водах, но в отложениях, встречающихся в неглубоких бухтах, лиманах и устьях рек, может зависеть больше от находящейся там растительности, чем от планктона.

5. Прибрежные отложения содержат больше органического вещества, чем океанские.

6. Органическое содержание осадков в областях земной поверхности, затопленных глубокими водами, достигает значительной величины. Полагают, что это затопление возникает вследствие прибрежного движения поверхностных вод в береговых районах с характерным подводным рельефом [1].

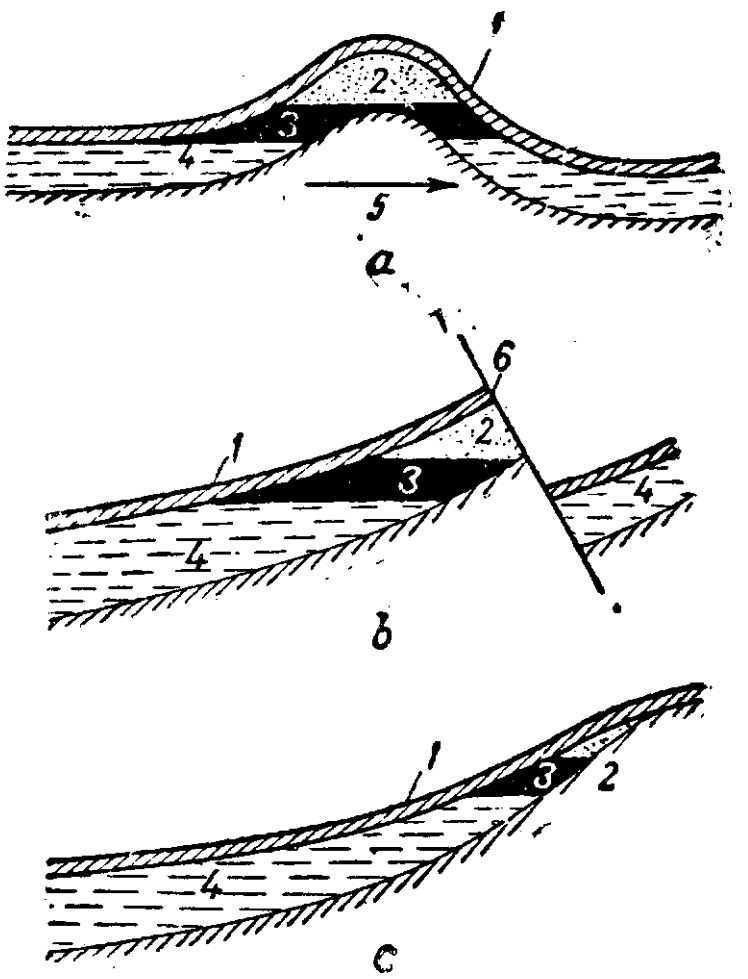
На основе работы Траска мы можем допустить, что глины и илы являются первичными источниками органического вещества не только вследствие их относительного богатства последним, но и вследствие обильного содержания глин в любом осадочном образовании значительной мощности. Пренебрегая также генетическими процессами, которые при этом имеют место, мы можем допустить с некоторой осторожностью, что в этих глинах, спустя значительное время после погребения залежи, образуются нефтяной газ и нефть.

24. Миграция и скопление газа и нефти. Влияние уплотнения на миграцию воды, содержащейся в глинах, было рассмотрено выше (гл, I, п. 21) достаточно подробно. Непосредственно показано, что газ и нефть, заключенные в глинах, будут постепенно вытеснены из них аналогично воде. При проникновении газа и нефти в примыкающие слои, например, в песчаники, имеющие достаточно высокую проницаемость и позволяющие широтную миграцию, нефть и газ примут участие в процессе миграции совместно с погребенной водой. В целом эта миграция будет направлена, как уже отмечалось, в сторону от площади с максимальным уплотнением, т. е. от наиболее мощной части разреза осадочных образований по пути к областям с наиболее свободным выходом. Здесь мы снова встречаемся с трудностью представить себе точный путь, каким образом свободный газ и нефть, которые не

---

[1] Trask P. D., Origin and Environment of Source Sediments of Petroleum, 1932 (API, Research Program, Project 4). В этой работе Траск показал, что недавно отложившиеся осадки не содержат нефтепроизводящего материала.

смешиваются с водой, могут пересечь пористую среду. Простые эксперименты показывают, что небольшие глобулы нефти или пузырьки газа, сравнимые по величине с размерами пор коллектора, будут в значительной степени подвергаться закупорке в порах [1]. Если бы это явление имело место в природе, то нефть и газ были бы настолько широко рассеяны, что нельзя было найти рентабельных залежей нефти. Однако вследствие огромного интервала времени, на протяжении которого шел процесс, обеспечивший накопление больших количеств газа и нефти по сравнению с размерами порового пространства, влияние поверхностного натяжения, благодаря которому происходит закупорка пор малыми глобулами нефти, будет исключено, поскольку в процессе участвует огромный объем жидкости. Отсюда можно представить себе картину, как под влиянием приложенных градиентов давления нефть и газ мигрируют с водой в виде тонких пленок относительно широких размеров, плавающих ввиду их малой плотности на воде в самой верхней части проницаемого слоя. Вполне очевидно, что неправильности в форме кровли такого пласта коллектора, например, карманы или входящие куполообразные поверхности, должны способствовать улавливанию легких жидкостей вследствие их пловучести. Действительно, при отсутствии растворимости, которая могла бы разрушить такие скопления, более легкие жидкости остаются в граничных нарушениях, как в ловушке, хотя бы градиент давления в зоне водяного потока был бы достаточен, чтобы превзойти пловучесть нефти и газа и вымыть эти скопления из ловушки. На фиг. 7,*a* показан схематически идеальный разрез антиклинальной складки, где в результате гравитационного отделения происходит накопление жидкостей с низкой плотностью, приносимых водой. Аналогично этому возможное накопление нефти у сброса, как это показано на фиг. 7, *b*, или в стратиграфической ловушке в проницаемом слое (фиг. 7, *c*), являют собой типовые залежи, встречающиеся на практике.



Фиг. 7. Типы ловушек, которые могут образовывать нефтяные или газовые резервуары:
1 — водонепроницаемая перекрыша; *2* — газ; *3* — нефть; *4* — вода; *5* — направление общей миграции; *6* — сбросовая зона.

Необходимо заметить, что нефтяные и газовые коллекторы не всегда приурочены к антиклинальным складкам или тому подобным хорошим ловушкам, как это показано на фиг. 7. По всей вероятности, „замкнутость“ подземного резервуара обязана резкому изменению в пористости коллектора, относительно большой величине залежи или линзовидности песчаных образований, которые могут встретиться среди

высоконепроницаемых слоев глинистых сланцев. В таких ловушках могут аккумулироваться нефть и газ. Тем не менее какова бы ни была природа подземного резервуара, промысловая практика вполне определенно указывает, что за редким исключением нефть, присутствующая в залежи, не может быть жидкостью, образовавшейся на месте, но должна была мигрировать в ловушку из других источников. Миграция вод на расстояние нескольких километров является вполне установленной очевидностью. Поэтому мы не видим причины устанавливать какой-либо предел расстоянию, на которое может распространяться миграция, за исключением разрыва непрерывности проницаемых слоев, а также наличия промежуточных зон выхода, ограничивающих широтную циркуляцию погребенных вод. Представляет собою интерес остановиться на последствиях миграции с далеких расстояний, так как пловучесть газа на воде значительно выше, чем нефти. Газ в свою очередь будет вытеснять нефть из подземного резервуара, если его накопилось достаточное количество, чтобы заполнить ловушку. Отсюда можно предположить, что если вдоль направления миграции существует серия таких ловушек, то избыток газа будет занимать подземные коллекторы предпочтительно ближе к нефтепроизводящим свитам. Однако данных, подтверждающих этот вывод, не имеется. Что же касается соотношения между количеством нефти и газа, которое можно встретить в таких коллекторах. было установлено, что не существует и не следует ожидать количественной связи между ними.

Практически все скопления нефти содержат достаточное количество газа, чтобы насытить нефть при давлении, существующем в подземном резервуаре. Кроме того, в последнем обычно существует избыточное количество свободного газа. Другие подземные коллекторы содержат только газ или очень малые количества нефти. На основании этих наблюдений можно притти к заключению, что бо́льшая часть органического первичного вещества превратилась в газ. То небольшое число случаев, когда нефть встречается в недонасыщенном состоянии, легко объясняется утечками в процессе накапливания или же после него. Следует напомнить, что механизм процесса миграции в большинстве осадочных бассейнов, как было здесь уже установлено, предусматривает постоянную утечку жидкостей в вертикальном направлении через перекрывающие свиты. Естественно возникает вопрос о величине суммарных потерь нефти и газа из первоначального резервуара. В одном случае, где имеются зоны сбросов, такие потери наглядны. В другом случае наблюдаемая недонасыщенность нефти или необычно малые объемы свободного газа дают предположительное доказательство того, что газ рассеялся, хотя перекрывающие пласты показывают нормальную степень непроницаемости. Поэтому можно сделать допущение, что пока в залежи существует ненормально высокое давление газа, его скопления будут медленно вытесняться через перекрывающие породы. Эта утечка прекратится, когда в резервуаре установится давление в равновесии с окружающими породами. Условие полного равновесия от поверхности вглубь требует, чтобы давление жидкости на любой глубине было равно гидростатическому напору столба воды этой длины, — условие, которое фактически наблюдается в большинстве случаев. Повидимому, отклонения от этой закономерности будут иметь место, если перекры-

вающая порода является действительно непроницаемой. Соответственно этому, если на подземный резервуар действует резкое оседание или подъем пластов и выравнивание давления недостаточно быстро реагирует на то чтобы сохранить равновесие, в резервуаре будет преобладать ненормально высокое или низкое давление. В этом явлении кроется еще одна причина резких колебаний соотношения нефти и газа при их скоплениях. Оставляя в стороне возможную изменчивость этого соотношения при формировании нефти и газа из органических осадков, мы заключаем, что случайные изменения в геологических и стратиграфических условиях воздействуют по необходимости на накопление нефти и газа в пределах подземных резервуаров. Насчитываются многочисленные подтверждения просачивания газа из, повидимому, запечатанных коллекторов. Наиболее интересной проблемой является то обстоятельство, что уходящий газ уносит с собой значительное количество водяного пара из погребенных вод. Если объем потерянного этим путем газа достаточно велик, концентрация твердых веществ в растворе погребенных вод будет по необходимости возрастать. Таким образом, эта причина вполне объясняет один из наиболее удивительных вопросов высокой минерализации погребенных вод. Фактически эта гипотеза получила очень малое подтверждение при изучении содержания солей в песках Брадфордского месторождения и анализе присутствующих там погребенных вод[1]. Не существует подсчетов относительно возможного объема газа, теряемого при вертикальном просачивании. Отсюда участие газа в процессе утечек воды является чисто спекулятивным рассуждением. Возможно даже, что действительный объем его намного превосходит всякое воображение. Траск[2] нашел, что для сравнительно молодых органических производящих осадков среднее количество газа, получаемого путем дестилляции, достигает 15 $м^3$ на тонну породы. Если только часть этого количества могла освободиться в течение природных процессов нефте- и газообразования, вполне резонно допустить, что действительный объем газа, ушедший из таких отложений со времени их образования, действительно грандиозен.

Дальнейшее рассмотрение многочисленных интересных подробностей относительно скоплений нефти и газа в настоящей работе не приводится. Те явления, которые были показаны, имеют своей целью обеспечить прочное обоснование для общей гипотезы, что в зоне погребенных вод миграция последних совершается под действием сил, отличных от продвижения атмосферных осадков (вод). В действительности уплотнение сланцев может создать огромный источник движущей силы. При этом нефть и газ, образовавшиеся в этих отложениях, богатых органическим веществом, вытесняются из этих нефтепроизводящих свит, чтобы принять участие в общем процессе региональной миграции. Таким путем можно себе представить картину формирования скоплений этих жидкостей, которая дает соответствующее освещение аналитическим исследованиям работы этих жидкостей, когда их извлекают из скважин, вскрывших породы подземных резервуаров.

---

[1] Newly J. B., Torrey P. D., Fettke C. R., Panyiti, L. C. Structure of Typical American Oil Fields, Am. Ass. Petr. Geol., 2, 432, 1929.

[2] Loc. cit.

Глава вторая

ЗАКОН ДАРСИ И ИЗМЕРЕНИЕ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

1. Закон Дарси. Для получения количественного представления о режиме работы жидкостей, движущихся в пористой среде, необходимо вначале установить физические основы, определяющие этот режим. Как более детально будет разъяснено в главе III, эти основы являются принципиально теми же, что и управляющие движением вязких жидкостей в обычных свободных сосудах, и выражаются уравнением классической гидродинамики Стокс-Навье [ур-ние (1), гл. III, п. 2].

Это уравнение налагает требование динамического равновесия при распределении скорости в каждой системе потока между силами инерции и силами внутреннего трения, а также внешними усилиями и распределением давлений внутри жидкости. Несмотря на вполне допустимое упрощение, т. е. пренебрежение инерционными усилиями, вследствие низких скоростей, обычно характеризующих течение в пористой среде, математические трудности применения этих уравнений к пористой среде совершенно непреодолимы для практических целей. Когда Дарси [1] в 1856 г. заинтересовался характеристикой течения через песчаные фильтры, он обратился к экспериментальному изучению проблемы и отсюда пришел к реальному обоснованию количественной теории движения однородных жидкостей в пористой среде. Его классические эксперименты дали весьма простой вывод, в настоящее время обычно называемый законом Дарси, а именно: дебит Q воды через слой фильтра прямо пропорционален площади A песка и разности Δh между давлениями жидкости при входе и выходе из слоя и обратно пропорционален толщине L слоя. Выражая эту зависимость аналитически, имеем:

$$Q = \frac{c\Delta h A}{L}, \qquad (1)\ [2]$$

где c — константа, характеризующая песок. Ввиду фундаментальности характера этого вывода вполне естественно, что изучение его справед-

---

[1] Darcy H. Les fontaines publiques de la ville de Dijon, 1856.

[2] Этот вывод может быть непосредственно получен из классической гидродинамики по аналогии с законом Пуазейля. Однако приложение уравнений Стокса-Навье, дающих более близкое приближение к аналитическому подтверждению правильности равенства (1), возможно только в крайне идеализированном случае медленного движения (пренебрегаем величинами инерции) вязкой жидкости в сети параллельных круговых трубок (O. Emersleben, Phys. Zeits., 26, 601, 1925).

ливости должно было явиться предметом многочисленных исследований. По существу эти исследования проводились в двух направлениях:

1) с объектом, который должен подтвердить уравнение (1) или установить соответствующее видоизменение последнего;

2) исследования, относящиеся к природе константы c, определяемой свойствами песка или пористой среды.

В следующем разделе мы подвергнем критическому рассмотрению выводы, которые могут быть получены от исследований первого типа.

2. Степень обоснованности закона Дарси. Чтобы понять более ясно общую природу „закона течения", на основании которого представлены данные экспериментов по движению жидкостей, например, проделанные Дарси, было бы полезно вначале подвергнуть рассмотрению те требования, которые налагаются при этом теорией размерностей[1]. Прикладывая хорошо известные правила этой теории[2], можно легко установить, что падение давления Δp через колонку песка длиной Δs, обусловливающее движение жидкости с плотностью γ, вязкостью μ и средней скоростью v, должно быть связано с этими переменными уравнением вида:

$$\Delta p = \text{const}\,\frac{\mu^2}{\gamma d^2}\,F\left(\frac{dv\gamma}{\mu}\right)\varphi\left(\frac{\Delta s}{d}\right), \qquad (1)$$

где неизвестные функции F и φ определяются из экспериментов, а d является мерой длины, характеризующей размер открытий пор или размер зерен песка. С физической стороны ясно, что функция φ должна находиться в линейной зависимости от своего аргумента и, действительно, это положение является единственным элементом всего анализа, на котором сходятся все многочисленные исследователи закона Дарси. Это наблюдение приводит уравнение (1) к виду:

$$\frac{\Delta p}{\Delta s} = \text{const}\,\frac{\mu^2}{\gamma d^3}\,F\left(\frac{dv\gamma}{\mu}\right), \qquad (2)$$

где левая часть равенства представляет собой градиент давления в линейной системе[3]. Аргумент $\frac{dv\gamma}{\mu} = R$ функции F является хорошо известным числом при обычных гидродинамических расчетах в прикладной гидравлике, а именно при рассмотрении движения жидкостей через свободные от песка трубы[4]. При d диаметре трубы член $\frac{dv\gamma}{\mu}$ известен под названием числа Рейнольдса.

---

[1] Muskat M. and Botset H. G. Physics, 1, 27, 1931.

[2] Например, работа Bridgman P. W. „Dimensional Analysis", главы VI и VII, 1931.

[3] Благодаря постоянству γv по длине линейной системы в условиях установившегося движения ясно, что градиент давления $\frac{\Delta p}{\Delta s}$ в случае движения жидкости будет постоянным вдоль всей системы, несмотря на природу функции F. Отсюда будет постоянным характер течения, а также член $\gamma\frac{\Delta p}{\Delta s}$ в случае, если жидкость является газом.

[4] Совсем недавно оно было приложено также к интерпретации проблем аэродинамики.

Уравнение (2) показывает, что его возможно приложить также к течению через сосуды, свободные от песка, ибо оно является не чем иным, как пространственным уравнением, определяющим характер течения. В частном случае при малых скоростях и плотностях жидкости или диаметрах трубы найдено, что функция F равна своему аргументу так, что

$$\frac{\Delta p}{\Delta s} = \text{const}\,\frac{\mu v}{d^2}. \qquad (3)$$

Этот вывод является аналогичным тому, что приводится в классической гидродинамике для вязких жидкостей, где он известен под названием закона Пуазейля и где постоянный коэфициент имеет величину 32, а v представляет собой среднюю скорость по сечению трубы [1]. Уравнение (3) обычно указывает наличие градиентов давления в линейном „ламинарном потоке".

Для более высоких значений d, v, γ или $1/\mu$, особенно когда число Рейнольдса возрастает так, что оно превосходит свою критическую величину порядка 2000, характер потока в трубах, свободных от песка, внезапно меняется от плавного струйного движения к неправильному и неустойчивому распределению вихреобразований. Тогда движение принимает характер турбулентного, где переход в направлении повышения или понижения скорости (наиболее удобный параметр при непрерывных изменениях процесса) достаточно резок, хотя цикл повышения и понижения скоростей в переходной области обычно показывает некоторый гистерезис. Этот тип потока характеризуется динамически тем, что функция F становится пропорциональной второй степени [6] своего аргу-

---

[1] В этом можно снова заметить основную разницу между ламинарным движением в трубе, свободной от песка, и уже подчеркнутым здесь нами ламинарным движением, подчиняющимся закону Дарси, через трубу, заполненную пористой средой. В первом случае распределение скоростей представлено в основном параболой для данного отрезка трубы (особенно точно в случае круглой трубы), уменьшаясь от максимума в центре последней до нуля у стенок. Макроскопическая же скорость в линейной пористой среде постоянна по всему поперечному сечению. Таким образом, если при пуазейлевском потоке суммарный расход пропорционален квадрату площади поперечного сечения, то в линейной пористой среде он пропорционален только первой степени площади. Эта разница, повидимому, заключается в огромнейших поверхностях, развитых в пористой среде, и обязана их равномерному распространению внутри ее. При этом может создаться грубое представление об аналогии с большим количеством параллельных капилляров, средняя скорость жидкости в сумме которых остается той же самой. Без сомнения, в каждом из капилляров распределение микроскопических скоростей по сечению аналогично скоростям в свободных от песка капиллярах.

[1] Это строго соответствует истине только для труб с шероховатой поверхностью. Для гладких труб показатель степени у скорости в числе Рейнольдса обычно близок к 1,75. Принято выделять коэфициент в уравнении (4) и рассматривать остающийся корректирующий множитель как „коэфициент трения", который в дальнейшем подвергается изучению путем построения его соотношения с числом Рейнольдса. Полный обзор экспериментальных данных по турбулентному потоку в трубах приведен в работе E. Kemler, A. S. M. E. Trans., 55, 7, 1933, а также в работе J. R. S. Pigott, Mech. Eng., 55, 497, 1933.

Исчерпывающее теоретическое исследование проблемы турбулентности можно найти в 3-й части работы H. Bateman „Hydrodinamics" National Research Concil, 1932.

мента, в частности, скорости. При этом уравнение (2) принимает вид

$$\frac{\Delta p}{\Delta s} = \text{const}\,\frac{\gamma v^2}{d}. \qquad (4)$$

Градиент давления здесь независим от вязкости жидкости, в то время как в ламинарном движении он прямо пропорционален вязкости. По аналогии с этими хорошо известными выводами из прикладной гидравлики вполне естественно воссоздать схожее представление результатов движения жидкости через песчаную колонку. Благодаря извилистым и неправильным каналам пористой среды следует, однако, ожидать, что переход от струйного к турбулентному типу течения будет не так резок, как при движении жидкости через сосуды, свободные от песка. Это обстоятельство приводит к представлению о градиенте $\frac{\Delta p}{\Delta s}$ как некоторой сумме величин скорости с различными показателями степени (макроскопическая скорость измеряется расходом на единицу площади среды). Действительно, попытки в этом направлении привели некоторых исследователей к выражению закона течения уравнением следующего вида:

$$\frac{\Delta p}{\Delta s} = av + bv^n. \qquad (5)^1$$

Предлагалось даже ввести в это выражение скорость в третьей степени[2]. Остальные же исследователи предложили соотношение следующего вида:

$$\frac{\Delta p}{\Delta s} = av^n, \qquad (6)^3$$

где n лежит в пределах 1—2.

Мы не будем пытаться объяснить возможные причины несоответствия между выводами различных исследователей. Остановимся просто на том, что является правильным отражением результатов, полученных при наиболее тщательном исследовании проблемы, а именно:

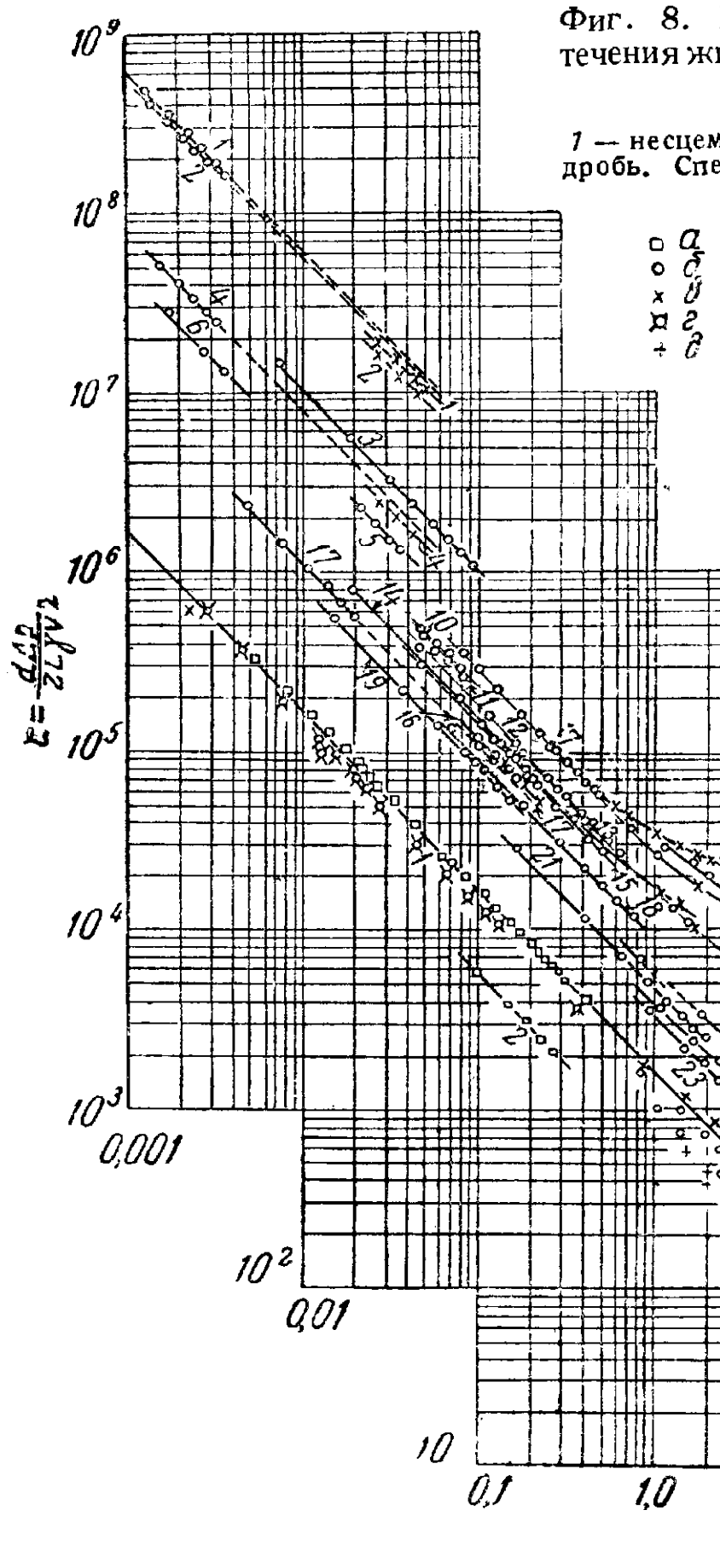
---

[1] Forchheimer Ph., Zeits. v. Deutsh. Ing., 45, 1782, 1901. Здесь n принято равным 2.

[2] Forchheimer Ph., Hydraulik, 3d edition, p. 54, 1930.

[3] Следует отметить, что уравнения (5) и (6) являются принципиально согласными с требованиями размерности, выраженными уравнением (2), при условии, что константы a и b подобраны так, чтобы поглотить влияние множителя $\mu^2/\gamma d^3$ и степенных выражений $\frac{d\gamma}{\mu}$, которые остаются при выделении скорости v из числа Рейнольдса. Действительно, поскольку к этому вопросу имеет отношение теория размерностей, F может быть представлено любой функциональной формой, включая даже такую, которая имеет бесконечный ряд показателей степени. С другой стороны, рассматривая вопрос с физической точки зрения, следует помнить, что выбор F влечет за собой осложнение вследствие изменения $\Delta p/\Delta s$ с изменением остальных переменных d, γ и μ.

Так, в частности, при рассмотрении уравнения (6) значения n, превышающие 2, будут согласно уравнению (2) указывать, что $\Delta p/\Delta s$ будет уменьшаться с повышением вязкости, а это физически совершенно невозможно.



Фиг. 8. Картограмма «фактора трения» для течения жидкостей через песчаники (по Фэнчеру, Льюису и Бернсу):

1 — несцементированный песчаник; *2* — свинцовая дробь. Спецификация: ζ — фактор трения; d — диаметр среднего зерна; Δp — падение давления; L — длина керна; γ — плотность жидкости; v — скорость = $\frac{\text{объемная скорость потока}}{\text{площадь поперечного сечения}}$, μ — абсолютная вязкость.

Обозначения:

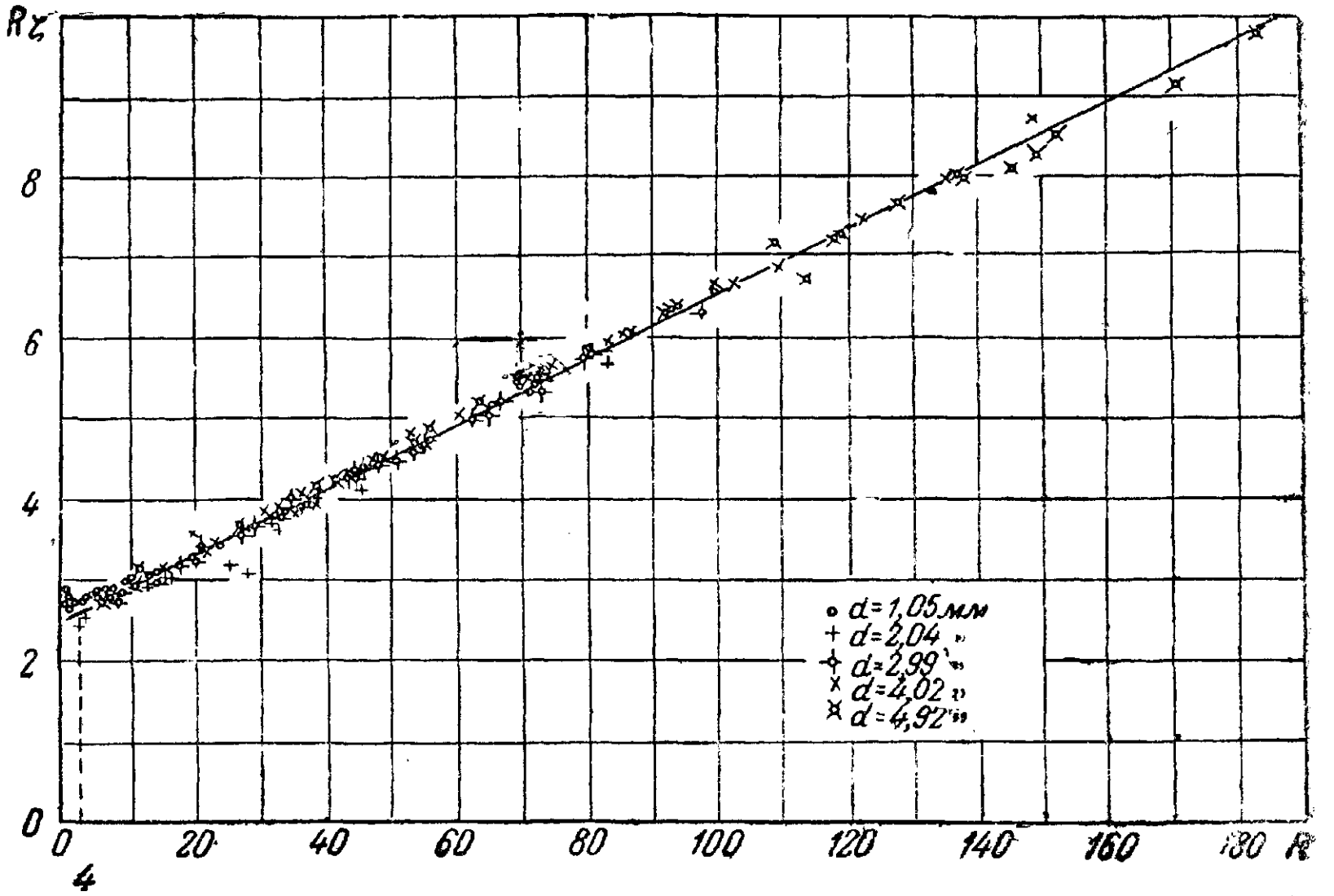
а — нефть, *б* — вода, — воздух (представлены данные); *г* — нефть по Ф. В. Клауду; *д* — газ по данным Горного бюро США.

Образец	Песчаник	Пористость, %	Образец	Песчаник	Пористость, %
	Сцементированный				
			15	3-й Венанго	21,4
			16	Робинсон	20,6
1	Брэдфорд	12,5	*17*	Керамика С	33.2
2	»	12,3	*18*	3-й Венанго	21,9
3	3-й Венанго	16,9	*19*	Вудбайн	23,8
4	Керамика А	37,0	*20*	»	26,9
5	Робинсон	20,3	*21*	»	27,7
6	Керамика В	37,8	*22*	»	22,1
7	Вудбайн	19,7	*23*	»	28,8
8	Вилькокс	15,9			
9	3-й Венанго	11,9		Несцементированный	
10	Робинсон	19,5			
11	»	18,4	*24*	Флинт	38,5
12	3-й Венанго	22,3	*25*	Оттава	30,9
13	Вилькокс	16,3	*26*	Оттава 20—30 меш	34,5
14	Уоррен	19,2	*27*	Свинцовая дробь	34,6

1) при низких скоростях и малых числах Рейнольдса градиент давления изменяется строго линейно с изменением скорости v или

$$\frac{\Delta p}{\Delta s} = \text{const}\, v, \tag{7}$$

как это было установлено первоначально законом Дарси в противоположность уравнению (6); по аналогии с описанием, принятым в обычной гидродинамике, течение, подчиняющееся уравнению (7), будет называться „ламинарным“;



Фиг. 9. График зависимости произведения числа Рейнольдса и фактора трения ($R\zeta$) от числа Рейнольдса для движения воды через дробь одинакового размера (по Линдквисту).

d — диаметр дробинки.

2) по мере увеличения числа Рейнольдса градиент $\frac{\Delta p}{\Delta s}$ начинает возрастать быстрее, чем скорость v, и вызывает изменения, которые лучше всего отражены в уравнении (5). Соответственное графическое подтверждение этого вывода, основанное на экспериментах с движением жидкостей, приведено на фиг. 8 и 9.

На фиг. 8, опубликованной Фэнчером, Льюисом и Бэрнсом[1], приведены данные о течении для некоторого количества сцементированных и несцементированных песков, представленные в виде „графика

[1] Fancher G. H., Lewis J. A. and Barnes K. B., Min. Ind. Exp. Sta., Penn. State College Bull., 12, 1933. Единицы и обозначения, принятые этими авторами, были нами изменены так, чтобы соответствовать единицам, принятым в настоящей работе.

фактора трения". Здесь за ординату принята величина $\zeta = d\,\Delta\,p/2L\gamma v^2$, которая по своей размерности соответствует „коэфициенту трения" и которая широко применяется при изучении движения жидкости по трубам. Абсциссой же является число Рейнольдса $\frac{dv\,\gamma}{\mu}$, где d, так же как и в величине ζ, служит „средним диаметром зерна"[1], определяемым из уравнения

$$d = \sqrt[3]{\frac{\sum n_s d_s^3}{\sum n_s}}, \tag{8}$$

В последнем уравнении d_s является среднеарифметической величиной отверстий в двух последующих ситах Тейлора и n_s — число зерен диаметра d_s, найденного ситовым анализом. Оставляя в стороне физическую значимость определения d, фиг. 8 дает очень важное указание, что, пока величина числа Рейнольдса не достигает значения единицы, зависимость полученных данных строго подчиняется соотношению:

$$\ln \zeta = a - \ln R, \tag{9}$$

из которого сейчас же следует, что

$$\frac{\Delta p}{\Delta s} = \text{const}\ \ v, \tag{10}$$

т. е. полностью согласуется с законом Дарси.

Закон Дарси постепенно теряет свою справедливость, если течение становится частично или полностью турбулентным[2]. С ростом числа

---

[1] Физически величина d должна представлять размер средней поры, чем диаметр зерна. Однако пора может быть измерена непосредственно только путем микроскопического исследования поперечного сечения самой пористой среды. Все попытки установить или применить значение d для введения его в число Рейнольдса относились до сих пор к средним величинам фактических диаметров зерен.

[2] Следует заметить, что Линдквист и Немени приписывают отклонение от условий ламинарного течения с возрастанием скорости, по степени важности, скорее инерционным силам в сравнении с силами внутреннего трения и скорее даже, чем реальному вихреобразованию. Однако эта точка зрения остается открытой для дискуссии, так как в линейном канале отсутствует накопление кинетической энергии в чистом виде, и перепад давления употребляется только на возмещение потерь трения. Как было установлено Фенчером, Льюисом и Бэрнесом, турбулентный характер течения может быть свободно продемонстрирован нагнетанием струи раствора флюоросцеина в главный поток жидкости, движущейся через колонку дроби. При низких скоростях потока краска проходит через дробинки струйками с небольшой диффузией. Когда же будет превзойдена определенная скорость, струйки начинают хаотически отталкиваться от одной дробинки к другой и полностью диффундировать в жидкость. Наконец, как уже заметил Немени, тот факт, что числа Рейнольдса, при которых появляются отклонения от ламинарного режима течения, значительно ниже тех, при которых наступает вихреобразование в сосудах, свободных от песка, сам по себе не удивителеи, если принять в расчет то обстоятельство, что фактические скорости в порах пористой среды выше в 4—8 раз макроскопических скоростей v. Поток фактически имеет место в каналах с резко меняющимся поперечным сечением, т. е. соблюдено условие, которое, как это хорошо известно, способствует раннему появлению вихреобразования. Поэтому вполне правдоподобно, что отклонения от закона Дарси, появляющиеся при низких числах Рейнольдса — порядка 1—10 (фиг. 8 и 9), являются свидетельством реального вихреобразования, распространенного на всю систему потока.

Рейнольдса или скорости, повидимому, не существует характерного видоизменения течения, которое бы допускало зависимость между $\frac{\Delta p}{\Delta s}$ и v при высоких значениях последней, с возрастанием числа Рейнольдса или скорости. Все, что было окончательно установлено в этом отношении, показывает, что эмпирические данные могут быть во всех случаях выражены уравнением типа (5), где n имеет значение, близкое к 2. Возможно, что наиболее поразительный пример рассматриваемого типа течения, где n равняется точно 2, был опубликован Линдквистом [1], чьи выводы по движению воды через колонку дроби одинакового размера показаны на кривой фиг. 9. В этом графике ординатой $R\zeta$ является произведение числа Рейнольдса на „фактор трения“ и потому она обратно пропорциональна скорости. Данные для $R > 4$ хорошо определяются линейной зависимостью:

$$R\zeta = a + bR, \tag{11}$$

которая, очевидно, эквивалентна выражению:

$$\frac{\Delta p}{\Delta s} = a'v + b'v^2. \tag{12}$$

Число Рейнольдса, при котором имеет место перелом, показанный на фиг. 9, очевидно, едва дает указание на порядок величины зоны перехода между струйным течением, подчиняющимся закону Дарси ($R\zeta = \text{const}$), и тем, которое подчиняется уравнению (12). Благодаря неправильной и капиллярной природе токопроводящих каналов в пористой среде отклонение от струйного типа течения, согласно уравнению (10), будет развиваться постепенно и не проявится внезапно, как в случае течения в сосудах, свободных от песка [1]. Без сомнения,

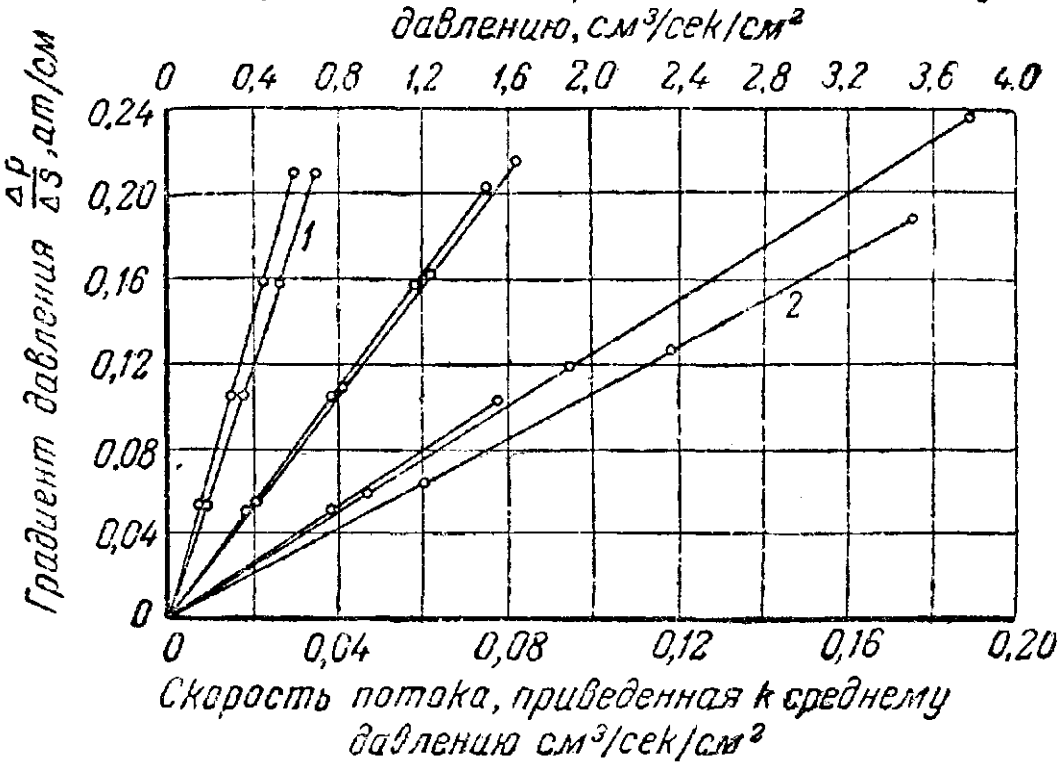
---

[1] Lindquist E., Premier Congres des Grands Barrages. Communication, Stockholm, 1933.

Эта фигура была использована P. Nemenyi в журн. Wasserkraft und Wasserwirtschaft, 29, 157, 1934. Аналогичные результаты были получены в опытах с движением воды через отсортированный гравий, как об этом сообщают F. Schaffernack und R. Dachler, Die Wasserwirtschaft, 1, 145, 1934, которые также установили переходную область, имеющую место при числах Рейнольдса от 3 до 6.

[2] Является вполне правдоподобным то обстоятельство, что переход между строго ламинарным и полностью турбулентным течением в пористой среде состоит в основном из постепенного распространения вихреобразования на все поры среды. Таким образом, первые отклонения от закона Дарси будут соответствовать началу заметных вихревых потерь в больших порах. По мере того как возрастает скорость, локальные зоны вихреобразования распространяются и на более мелкие поры, пока, наконец, вихреобразование не охватит весь объем среды. Сохранение линейной величины $a'v$ при таких условиях полного вихреобразования, согласно уравнению (12), в противоположность трубам, свободным от песка, где турбулентное состояние характеризуется единой квадратичной величиной $b'v^2$, следует отнести, возможно, к огромным поверхностям стенок, открытым для жидкости в пористой среде. Течение в трубах дает более резкий толчок силам трения, тормозящим поток, по сравнению со свободным поровым пространством, где вихревое движение может дать повышение потерь на трение. Так, если в свободном капиляре радиусом 1 *см* отношение поверхности стенок к свободному объему составляет 2 $см^{-1}$, отношение поверхности стенок к объему пор в песке с пористостью 20% и состоящему из одинаковых сферических зерен радиусом 0,1 *мм* составит 1,200 $см^{-1}$.

отсутствие столь резкого перехода явилось причиной, почему было предложено некоторыми исследователями уравнение (5), характеризующее течение в пористой среде даже при очень малых скоростях. В действительности ясно, что уравнение (5) должно существенным образом приблизиться к линейной зависимости по мере уменьшения v (в случае кривой Линдквиста $\frac{b}{a} \sim {}^1/_{10}$) При этом данные взяты были со значительной точностью и для достаточно низких скоростей. Все же существование фактической области струйного течения, подчиняющегося уравнению (10), может быть легко пропущено.

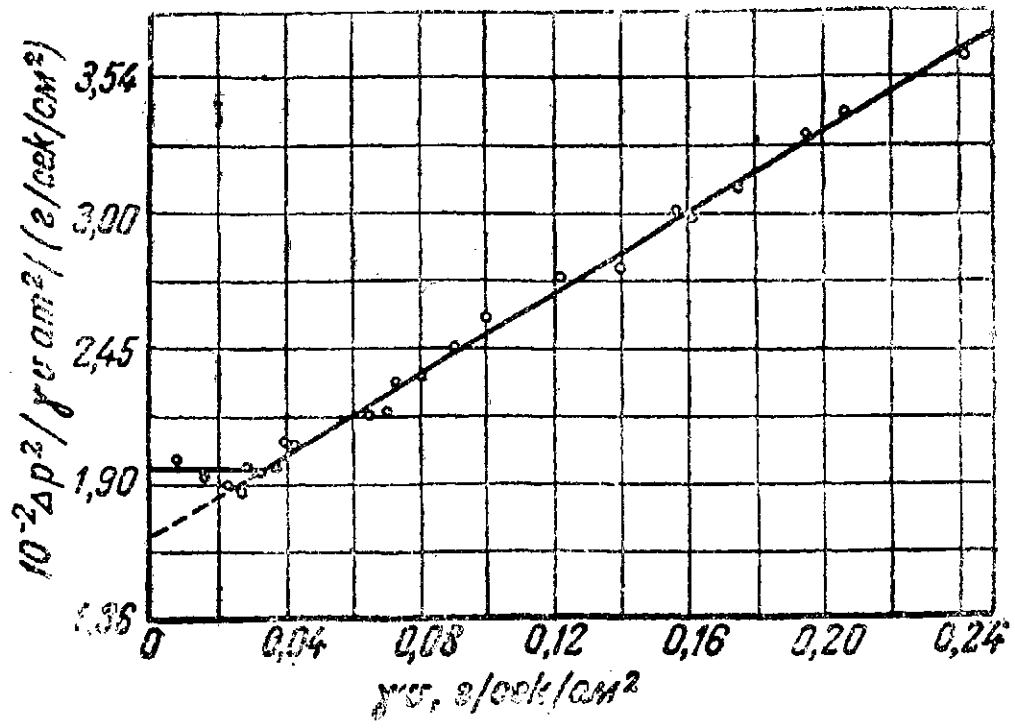


Фиг. 10. Кривые потока для воздуха через сцементированные песчаники (по Фенчеру, Льюису и Бэрнесу):

1 — читай верхнюю шкалу; *2* — читай нижнюю шкалу.

Весьма важно заметить, что поскольку число Рейнольдса принимается как основной параметр при установлении режима течения в пористой среде и используются основные представления, приведенные в уравнении (2), справедливость „закона течения“ должна быть одной и той же для жидкостей и газов, в тех же самых пределах чисел Рейнольдса. Изменение плотности вдоль потока по колонке песка при движении газа может быть свободно принято в расчет, беря $\gamma \frac{\Delta p}{\Delta s}$ или его эквивалент $\frac{\Delta p^2}{\Delta s}$, при изотермическом движении газа $(\gamma = \gamma_0 p)$ — для зависимой переменной и скорость массы γv — для независимой переменной. Можно взять также фактор трения s как зависимую переменную, нанесенную на график, по отношению к числу Рейнольдса или же, наконец, градиент давления $\Delta p/\Delta s$, построенный графически как функция выделяющегося объема газа, приведенного к среднему давлению в колонке с потоком. На фиг. 8, где приведены вторые зависимости, т. е. график „фактор трения“ — число Рейнольдса, можно наблюдать, как это указано условными обозначениями, и закономерности движения газов. Фиг. 8 показывает, что в пределах чисел

Рейнольдса [где d определено по уравнению (8)], для которых уравнение (9), а отсюда закон Дарси справедливы для жидкостей, — тому же самому уравнению подчиняется и движение газа. Для интервала струйного движения плотность формально выпадает из уравнения и получается вид его, одинаковый с уравнением (10). Еще более поразительное подтверждение правильности закона Дарси для движения газа приведено на фиг. 10. Построение этого графика сделано авторами на основании иных данных. На нем представлено последнее из только что приведенных положений. Наконец, переходя к отклонениям от закона Дарси при более высоких скоростях, мы получаем условия,



Фиг. 11. Поток воздуха через стеклянные бусы со средним диаметром 0,063 *см*:

Δp^2 — разность квадратов давления (по длине 92 *см*); γv — скорость массы. Разрыв кривой соответствует $R \sim 12$.

схожие с теми, которые мы рассматривали для движения жидкостей. Например, в качестве сопоставления к выводам Линдквиста на фиг. 11 приведены некоторые данные, полученные Маскетом и Ботсетом [1] при движении воздуха через стеклянную дробь. Линейность кривой для $\gamma v > 0{,}03$, очевидно, подразумевает для данного диапазона условие:

$$\frac{\Delta p^2}{\Delta s} = a(\gamma v) + b(\gamma v)^2. \qquad (13)$$

С другой стороны, Челмерс, Телайферо и Роулинс [2] нашли, что их опытные данные могут быть выражены лучше всего уравнением вида:

$$\frac{\Delta p^2}{\Delta s} = a(\gamma v) + b(\gamma v)^n, \qquad (14)$$

где значение n для различных взятых ими пористых сред лежит в пределах 1,753 и 2,018. Так как эти авторы обрабатывали свои данные на логарифмической бумаге, полученные ими кривые недостаточно чувстви-

[1] Muskat M. and Botset H. G., Physics, 1, 27, 1931.
[2] Chalmers J., Taliaferro D. B. and Rawlins F. L., Petr. Developm. Techn. A. I. M. E., 375, 1932.

тельны к истинному режиму при очень низких скоростях [1]. Поэтому вполне возможно, что более тщательное изучение полученных ими данных путем построения кривых в прямоугольной декартовой системе координат подтвердит справедливость закона Дарси для низких скоростей. Действительно, рассмотрение численных подстановок в уравнении (14) показывает, что из 16 образцов пористой среды, которые эти авторы подвергли изучению, ни в одном случае величина второго слагаемого в уравнении (14) не превосходила 1%, хотя скорость достигала 0,09 *см/сек*.

Высказанные рассуждения привели к заключению, что закон Дарси, утверждая наличие пропорциональности между макроскопической скоростью и градиентом давления, дает очень хорошее представление о „законе течения" для малых скоростей. Однако весьма затруднительно дать точные границы его применения. Основная трудность заключается в том, что определение величины d, входящей в число Рейнольдса, связано с присущей ей двойственностью, между тем как число Рейнольдса является независимой переменной, определяющей характер течения.

Так, принимая d диаметром одинаковых дробинок в опытах Линдквиста, приходим, как это уже было показано на фиг. 9, к ограничению области применения закона Дарси $R = 4$, в то время как кривая фиг. 11, полученная из опытов над стеклянными шариками, ограничивает область для R приблизительно 12 [2]. Определение d по уравнению (8) для неоднородной и сцементированной пористой среды приводит к числу Рейнольдса порядка единицы, при котором начинают появляться отклонения от закона Дарси. Пониженное значение числа Рейнольдса, без сомнения, обязано частично большим колебаниям размера пор в сцементированной среде или неоднородных песках. Все же сомнительно, чтобы формальное определение d по уравнению (8), которое не учитывает угловатости зерен или степени их сцементированности, в случае уплотненных песков могло иметь точное физическое значение. Для настоящих целей, когда в основном мы заинтересованы скорее в установлении области применимости закона Дарси, чем в тщательном ограничении зоны отклонений, является достаточным принять за безопасный нижний предел, при котором отклонения от закона Дарси станут заметными, число Рейнольдса, равное единице, где d выбрано по любому обоснованному среднему диаметру песчинки. Тогда остается вопрос, какие же значения числа Рейнольдса, включая сюда и единицу, можно принимать в реальных системах потока, представляющих практический интерес. Очень высокие расходы в отдельных случаях реальных систем потока будут, несомненно, соответствовать числам Рейнольдса, значительно превосходящим единицу. Однако не похоже, чтобы макроскопи-

---

[1] Благодаря весьма малой вязкости газов обычно происходят заметные отклонения от закона Дарси при более низких скоростях массы по сравнению с движением жидкостей.

[2] Следует упомянуть об экспериментах П. Эренбергера (Zeitschrift Osterr. Ing. Arch. Ver., p. 71, 1928) над движением воды через неоднородные пески с диаметром зерен 3,0 *мм*, при которых было найдено, что закон Дарси оставался справедливым при скоростях жидкости до 0,3 *см/сек*, что соответствовало числу Рейнольдса порядка 5.

ческие скорости в действительных системах потока, несущих жидкость, превосходили бы нормальную величину ее, при которой число Рейнольдса составляет единицу.

Так, скорость на обнаженном песчаном забое в скважине диаметром 6″ с дебитом 158 *м³/сутки* из трехметрового песчаника составляет приблизительно 0,126 *см/сек**. Принимая для плотности и вязкости жидкости величины 1 *г/см³* и 0,01 пуаза, т. е. параметры воды (принимать параметры нефти значило бы еще более уменьшить число Рейнольдса), а для d величину 0,05 *см*, что является верхним пределом для сцементированных песков, будем иметь число Рейнольдса для указанного случая равным 0,063.

Аналогично этому газовая скважина того же диаметра, работающая при 20° С из песчаного пласта того же самого типа, с дебитом 2850 *м³/сутки*[1] и дающая газ уд. веса 0,7 от уд. веса воздуха, имеет скорость массы на обнаженном фронте забоя $18{,}9 \cdot 10^{-4}$ *г/см²/сек*. Если вязкость газа при этом равна вязкости метана, то соответствующее число Рейнольдса будет 0,79, т. е. опять ниже верхнего предела единицы, на котором мы остановились выше при установлении области применения закона Дарси.

Благодаря геометрической сходимости у скважины радиального течения (гл. IV, п. 2) вышеприведенные скорости и числа Рейнольдса уменьшаются до 1/10 их величины, существующей на обнаженном фронте пласта, если отойти на расстояние 0,75 *м* от центра скважины, при радиусе последней 0,075 *м*. Тогда можно сделать вполне безопасный вывод, что в значительном числе типов течения, представляющих физический интерес, движение жидкости будет строго подчиняться закону Дарси, за исключением, может быть, весьма локализированных участков пористой среды достаточно ограниченных размеров.

Наконец, заметим, что мы сделали здесь попытку дать строгое обоснование приложения закона Дарси при количественном рассмотрении проблем течения на базе фундаментальных экспериментов, рассчитанных на проверку этого закона. Можно добавить к этому в качестве веского аргумента широкий охват явлений последними по сравнению с различными иными видоизменениями, которые были предложены для полного диапазона скоростей жидкости или же для области с повышенными числами Рейнольдса. Как это будет видно из последующих разделов, простота аналитических формулировок закона Дарси и непосредственно вытекающих из него заключений, например, уравнения Лапласа для распределения установившегося давления внутри пористой среды, делает возможным использовать его с количественной стороны для весьма различающихся между собой специфических проблем течения,

---

*Обычное движение воды в артезианских бассейнах еще более медленно; средняя скорость колеблется от 1,6 до 4,8 *км/год* или от 0,005 до 0,015 *см/сек* (см. работу C. S. Slichter, p. 26, The Motion of Underground Waters, U. S. Geol. Surv. Water-Supply Paper, 140, 1902).

[1] Газовые скважины с суточным дебитом до миллиона кубометров не являются чем-то необычным. Однако фактическая суточная добыча большинства газовых скважин обычно ограничивается величиной порядка 3000 *м³/сутки*. Кроме того, скважины, имеющие ненормально высокие дебиты, работают с пластов, мощность которых составляет более 3 *м*.

представляющих важную практическую ценность. Однако даже наиболее простые видоизменения этого закона, например, уравнения (5) и (6), непосредственно ведут к диференциальным уравнениям для распределения давления в пористой среде, которые легко разрешаются только в наиболее простых случаях. В настоящее время не представляется возможным обобщить и распространить опытные результаты основных экспериментов с линейными каналами на системы потока с отличной геометрией. Поэтому необходимо возвращаться к экспериментированию и изучать детально опытным путем каждую специфическую проблему течения отдельно для всей области геометрических измерений и приложенных перепадов давления.

Никому нельзя извинить применения ошибочных основных законов только потому, что они аналитически просты. Однако автор считает, что именно практические соображения служат оправданием применения для решения проблем течения методов, которые приводятся в последующих разделах, где числа Рейнольдса могут несколько превзойти установленный предел — 1 и где вопрос о строгой справедливости закона Дарси остается открытым. Следует, конечно, предпочесть рассмотрение любой проблемы простыми методами, которые могут быть количественно и не точны, потому что основные допущения, положенные в их основу, только приблизительно правильны, — строгому следованию основным законам, которые настолько сложны, если их выразить точно, что становится невозможным делать дальнейшие выводы или обобщения.

3. Постоянная в законе Дарси. Проницаемость пористой среды. Общая аналитическая формулировка закона Дарси относится к главе III. Однако мы подвергнем рассмотрению здесь природу постоянной пропорциональности между градиентами давления и скоростью течения в линейном канале и дадим обзор второму типу исследований, упомянутых в заключении к гл. II, п. 1. Обозначая градиент давления в линейном канале через $\frac{dp}{dx}$ и макроскопическую скорость через v, можно выразить наиболее удобным образом эту постоянную следующим отношением:

$$v = \text{const}\,\frac{dp}{dx}\,. \qquad (1)$$

Возвращаясь к размерным представлениям последнего раздела, замечаем, что преобразованием уравнения (4), гл. II, п. 2 постоянная из уравнения (1) может быть определена, как это показано в уравнении:

$$v = \text{const}\,\frac{d^2}{\mu}\,\frac{dp}{dx}\,, \qquad (2)$$

где d является эффективным диаметром песчинки или открытой поры [1], μ — вязкость жидкости, а остающаяся постоянная должна быть безразмерной величиной. Таким образом, физические элементы всей системы (пористая среда и жидкость), обладающие размерностью, выражены здесь через квадрат d для первой и через вязкость для второй. Плот-

[1] См. сноску 1 на стр. 64.

ность жидкости в уравнении отсутствует, так что множитель $\frac{dp}{dx}$ будет отличаться для различных жидкостей, а также для газов и жидкостей по разнице в их вязкости [1].

Остающаяся безразмерная постоянная должна содержать безразмерные параметры течения, которые могут включать только геометрические свойства пористой среды, например, пористость, форму зерен среды, степень цементации. Преполагается на один момент, что распределение зерен среды по их размерам включено в определение.

Отсюда, в принципе подробное знание природы пористой среды и вязкости жидкости должно позволить заранее предугадать численное значение постоянной в уравнении (1). Определение зависимости, с помощью которой можно получить эффективное познание последней, было предметом многочисленных исследований. Однако, к несчастью, единственной общей чертой всех этих выводов является то, что константа должна изменяться соответственно квадрату некоего среднего диаметра зерна пористой среды, т. е. условие, требуемое уравнением (2)[2]. Эти исследования проводились в очень широких размерах, начиная от классического анализа Слихтера [3], где поток подсчитывался через индивидуальные поры укладки одинаковых по размеру шаров на основе закона Пуазейля, измененного так, чтобы принять в расчет отдельную форму и длину пор, до обширных экспериментов Фэнчер, Льюиса и Бэрнеса[4]. Последними была сделана попытка классифицировать различные пески по их положению на линии, дающей изменения коэфициента трения по отношению к числу Рейнольдса среди аналогичных линий на графике единичных „коэфициентов трения“ (фиг. 8).

В свете полной невозможности достичь при проведенных исследованиях какого-то положительного результата, который обладал хотя бы небольшой областью справедливости и обобщенности, представляется наиболее обоснованной точкой зрения на эту проблему следующее:

---

[1] См. главу III, п. 3, где приведено объяснение причины этого отсутствия плотности в уравнении.

[2] Фактически вязкость μ не была представлена точно в большинстве аналитических выражений для постоянной уравнения (1). Это допущение является, возможно, причиной того, что большинство исследователей в своих опытах применяет одну какую-либо жидкость и μ просто поглощалось их числовыми постоянными. Первое точное выделение величины μ, определившее исключительное влияние жидкости (или газа) на постоянную в уравнении (1), и отнесение остаточной постоянной к динамическим свойствам пористой среды принадлежат по всей видимости следующим авторам: Wyckoff, Botset, Muskat and Reed, Rev. Sci. Instr., 4, 394, 1933; Bull. Amer. Assoc. Petrol. Geol., 18, 161, 1934.

[3] Критический обзор работ, так же как и обширное рассмотрение с качественной стороны природы порового пространства при укладке шаров и его влияние на проницаемость, можно найти в трудах C. S. Slichter, U. S. Geol. Surv., 19th Ann. Rept., 1897—1898, pt. II, p. 295; Graton . H. and Fraser H. J., Journ. Geol., 43, 785, 1935; а также Fraser H. J., Journ. Geol., 43, 910, 1935.

[4] В этой работе можно встретить большое количество ссылок на подобные же исследования, а также общий обзор литературы по вопросу проницаемости с исторической точки зрения. Другие ссылки можно найти в книге P. Nemenyi „Wasserbauliche Strömungs'lehre“, pt. V, 1933, и книге Ph. Forchheimer „Hydraulik“, Chap. III. 3d edit, 1930 (есть русский перевод), а также в недавно подготовленной библиографии (C. U. Fischel, U. S. Geol. Survey, February, 1935).

необходимо объединить вместе постоянную и величину d^2 из уравнения (2) в единый параметр, не имеющий себе подобных и характеризующий пористую среду полностью по отношению к движению жидкости в ней. Общая постоянная, которая определяет собой в динамической форме полностью пористую среду как носитель однородной жидкости при ламинарном движении, обозначается символом k и выражает собой проницаемость. Обычно она применяется с множителем $1/\mu$ или без такового и известна под названием „коэфициент проницаемости“ или „коэфициент передачи“ — по-немецки, „пропускная способность“ или „гидрогеологическая константа“, и уравнение (2) в конечном итоге принимает вид:

$$v = \frac{k}{\mu}\frac{dp}{dx}\,. \qquad (3)^1$$

На этом основании проницаемость пористой среды равна объему жидкости с вязкостью, равной единице, проходящей через поперечное сечение пористой среды, равное единице, в единицу времени под действием перепада давления, также равного единице. Эта постоянная определяется, несомненно, только структурой среды и совершенно не зависит от природы жидкости.

Размерность проницаемости, как это видно из сравнения уравнений (2) и (3), является размерностью поверхности, или

$$k = [L^2]. \qquad (4)$$

Следует заметить, что размерность $[L^2]$ для k непосредственно вытекает из отделения μ от k и выражения вытесняющего источника энергии через перепад давления.

Хотя анализ необходимо сделать достаточно обобщенным для включения в него всех типов однородных жидкостей и всех видов вытесняющих источников энергии, например, гравитационного напора, репрессии или же их комбинации, с практической точки зрения можно упростить его, чтобы специализировать определение k производством работ исключительно с ограниченным количеством жидкостей и рабочих агентов. Так, в области инженерных сооружений, которая имеет дело с просачиванием воды через плотины, в технике мелиорации с просачиванием воды через каналы и рвы, или же в любой другой области движения однородной жидкости через пористую среду, где сила тяжести является преобладающим рабочим агентом, градиент давления в законе Дарси может быть вполне обоснованно выражен через гидравлический градиент. Так как вода является исключительно интересующей нас в этом случае жидкостью, вязкость ее, учитывая температурные колебания, может быть также включена в проницаемость. Тогда закон Дарси может быть написан в такой форме:

$$v = \frac{k\,dp}{\mu\,dx} = \frac{k\cdot\gamma g}{\mu}\cdot\frac{d\overline{h}}{dx} = \overline{k}\frac{d\overline{h}}{dx}\,, \qquad (5)$$

---

[1] Алгебраический знак v является произвольным. В аналитических выводах последующих глав он будет выбран так, чтобы знак минус предшествовал правой стороне уравнения (3) при условии, что v будет положительно, если жидкость движется по направлению возрастающих значений координат, а обратное направление дает отрицательные значения для величины v (см. сноску 2 на стр. 113).

где $\bar{h}$ — напор жидкости и $d\bar{h}/dx$ — гидравлический градиент. Коэфициент $\bar{k}$ соответствует константе c в первоначальной формуле Дарси [уравнение (1), гл. II, п. 1] и определяет собой „эффективную“ проницаемость сложной системы: пористая среда и жидкость. В действительности будет установлено, что $\bar{k} = k\gamma g/\mu$ естественно выделяется во всех проблемах со строго гравитационным течением, например, рассматриваемых в главе VI, где он совершенно точно представлен символом $\bar{k}$. Так как гидравлический градиент представляет собой безразмерную величину, размерность $\bar{k}$ будет такой же, как v, т. е. сантиметр в секунду, а по величине единица $\bar{k}$, как это показано в табл. 4, будет эквивалентна 1,040 дарси.

Возвращаясь теперь к вопросу непосредственной зависимости проницаемости от структурных особенностей пористой среды, например, пористости, распределения размеров зерен, формы зерен и степени сцементированности, видим, что с практической точки зрения любая частная формула будет относительно справедливой только для весьма ограниченной области типов песка. Так, например, заранее становится ясным, что пористость не будет решающим фактором при установлении величины k. Если принять во внимание, что пористая среда может иметь высокий процент порового пространства и быть почти непроницаемой вследствие отсутствия внутренних соединений между порами, то пористость войдет в величину проницаемости весьма сложным образом. С другой стороны, проницаемость песка, состоящего из сферических зерен одинакового размера, при данном способе укладки может изменяться пропорционально квадрату диаметра зерна, даже если пористость среды остается постоянной[1]. Структура среды не может быть просто принята в расчет путем усереднения распределения размеров зерен, как, например, в уравнении (9), гл. 2, п. 2, чтобы получить „эффективный“ d.

Это доказано на том факте, что некоторые образцы, исследованные Фенчером, Льюисом и Бэрнесом, у которых значения d отличаются только на 2%, имеют значения k, различающиеся между собой в 45 раз. Можно легко обнаружить и другие схожие наблюдения среди остальных данных, собранных этими авторами. Наконец, степень сцементированности, которая естественно является весьма трудно устанавливаемым фактором, чтобы можно было его учесть, также отрицательно влияет на проницаемость уплотненных песков. Это достаточно ясно показано на табл. 3, заимствованной у Хоу и Хедсона [2], которые изучали влияние искуственно менявшегося состава глинистой связки на некоторые пористые плитки, состоявшие из глиноземных абразивных зерен.

---

[1] Поразительный пример ошибки, которая встречается в теоретических и даже полуэмпирических формулах, дающих приближенно правильные значения k, можно встретить в работе Козени (Wasserkraft und Wasserwirtschaft, 22, 86, 1927), где приводится сравнение замеренных и подсчитанных значений k. Так, формула Хазена показывает несоответствие, колеблющееся в пределах $-36 \div 180\%$, формула Крюгера $-50 \div 84\%$ и Козени $-68{,}7 \div 85{,}7\%$.

[1] Howe W. L. and Hudson C. J., Journ. Amer. Ceramic Soc., 10, 443, 1927.

Таблица 3

Содержание связки, %	Пористость, %	Проницаемость, дарси
5,6	46,2	375
10,5	40,8	317
15,0	35,2	243
19,0	32,7	200
22,7	27,4	134

Средний размер зерна в каждой из этих плиток был 0,787 *мм*. Можно себе представить, что в конце концов будет найдено соотношение между проницаемостью пористой среды и пористостью ее, размером зерен, их распределением и влиянием формы зерен. Но в настоящее время, конечно, гораздо проще и более правильно сделать непосредственный замер проницаемости путем эксперимента, чем заниматься трудоемким ситовым анализом, определением пористости, а затем уже производить расчет проницаемости на основе какого-то соотношения, которое в лучшем случае обладает приблизительной справедливостью. Как это будет видно из дальнейшего, непосредственное измерение k может быть сделано настолько несложным путем, поскольку техника его уже установлена, что с чисто практической стороны кажется трудным оправдать продолжительные и косвенные процедуры, заключающиеся в ситовом и зерновом анализе.

4. Единицы проницаемости и номенклатура. Проницаемость пористой среды, как это было показано в предыдущем разделе, имеет ту же размерность, что и площадь, т. е. L^2. Однако формальное определение ее приводит к выражению k через объем $\times$ (площадь[1]) и деленное на время $\times$ (градиент давления). Выбор единиц, которые характеризуют элементы этого выражения, в основном является совершенно произвольным. Опыт показывает, что наиболее подходящим комплексом будет, возможно: время в секундах; длина в сантиметрах; объем в $см^3$; давление в атмосферах (76,0 *см* рт. столба), вязкость в сантипуазах.

Существующая абсолютная система единиц CGS требует, чтобы единицей давления была принята длина на $см^2$. Это привело бы к неудобным в обращении малым численным значениям проницаемости пористой среды, встречающейся в природе. В табл. 4 даны коэффициенты перевода между различными предложенными единицами проницаемости, включая сюда и такие, которые применяются обычно в инженерной гидравлике и гидравлической литературе. Большая часть

---

[1] Кажущийся эквивалент выражения k $\frac{\text{скорость}}{\text{градиент давления}}$ не может считаться удовлетворительным, так как член, выражающий скорость, может быть осложнен скоростью опережения жидкости при движении ее в среде, что определяется величиной $\frac{\text{объем/площадь}}{\text{время} \cdot \text{пористость}}$.

Таблица 4

Переводные меры для единиц проницаемости

	Дарси $\frac{1\ см^3}{сек.\ см^2\ (ат/см)}$	$\frac{1\ см^3}{сек.\ см^2\ (дин/см^2)/см}$	$\frac{1\ кубофут}{сек.\ фут^2.\ (ат/фт)}$	$\frac{1\ кубофут}{сек.\ фут^2\ (англофут/дм^2)/фут}$	$\frac{1\ см^3\ H_2O\ (20°\ C)}{сек.\ см^2\ (1\ см\ H_2O/см)}$	$\frac{1\ галл.\ H_2O\ (20°\ C)}{мин.\ фут^2\ (1\ фут\ H_2O/фут)}$
$\frac{1\ см^3}{сек.\ см^2\ (ат/см)} =$	1	$9{,}8697 \cdot 10^{-7}$	$1{,}0764 \cdot 10^{-3}$	$7{,}3243 \cdot 10^{-5}$	$9{,}6130 \cdot 10^{-4}$	$1{,}4156 \cdot 10^{-2}$
$\frac{1\ см^3}{сек.\ см^2\ (дин/см^2)/см} =$	$1{,}0132 \cdot 10^{6}$	1	$1{,}0906 \cdot 10^{3}$	74,210	$9{,}7399 \cdot 10^{2}$	$1{,}4342 \cdot 10^{4}$
$\frac{1\ кубофут}{сек.\ фут^2\ (ат/фт)} =$	$9{,}2904 \cdot 10^{2}$	$9{,}1693 \cdot 10^{-4}$	1	$6{,}8046 \cdot 10^{-2}$	0,89302	13,151
$\frac{1\ кубофут}{сек.\ фут^2\ (англофут/дм^2)/фут} =$	$1{,}3653 \cdot 10^{4}$	$1{,}3475 \cdot 10^{-2}$	14,696	1	13,124	$1{,}9327 \cdot 10^{2}$
$\frac{1\ см^3\ H_2O\ (20°\ C)}{сек.\ см^2\ (1\ см\ H_2O/см)} =$	$1{,}0403 \cdot 10^{3}$	$1{,}0267 \cdot 10^{-3}$	1,1198	$7{,}6195 \cdot 10^{-2}$	1	14,725
$\frac{1\ галл.\ H_2O\ (20°\ C)}{мин.\ фут^2\ (1\ фут\ H_2O/фут)} =$	70,644	$6{,}9724 \cdot 10^{-5}$	$7{,}6041 \cdot 10^{-2}$	$5{,}1742 \cdot 10^{-3}$	$6{,}7910 \cdot 10^{-2}$	1

Примечание. Первые четыре меры относятся к жидкости, имеющей вязкость 1 сантипуаз. Вязкость воды при 20° С принимается 1,005 сантипуаз.

сцементированных песков, встречающихся в подземных резервуарах, имеет проницаемость от 5,0 до 0,0005 в вышеуказанных единицах.

Ввиду основной роли, которую играет закон Дарси во всех количественных рассмотрениях проблем движения однородных жидкостей в пористой среде, казалось бы правильным присвоить единице проницаемости наименование „дарси“ в память пионера-исследователя[1]. Отсюда, приняв вышеуказанные единицы, имеем для k:

$$k = 1 \text{ дарси} \sim 1\ (см^3/сек)/см^2/(am/см).$$

В дальнейшем все численные значения проницаемости мы будем выражать в дарси или же во вполне определенных долях последнего.

5. Основы методики измерения и вычисления проницаемости пористой среды. Как это уже было показано в гл. II, п. 3, принцип измерения проницаемости пористой среды в лабораторных условиях состоит в непосредственном определении расхода жидкости, определенной вязкости через единицу площади[2] линейного образца среды, и градиента давления, вызывающего это течение, а также в подсчете k из выражения:

$$k = \frac{\mu v}{dp/dx} \ . \tag{1}$$

При фактических экспериментах производят непосредственные замеры суммарного расхода Q через образец, длины его L, площади A, а также граничных давлений P_1 и P_2. Те же величины, которые входят в состав уравнения (1), определяются расчетным путем. Так, зависимость v от Q определяется из соотношения

$$v = \frac{Q}{A} \ . \tag{2}$$

Если протекающее вещество является жидкостью, то, очевидно, скорость v должна быть одинаковой по длине образца (пренебрегаем

---

[1] Это наименование первоначально было предложено в работе Wyckoff, Botset, Muskat and Reed (Rev.-Sci. Instr., 4, 394, 1933). Оно тогда же было принято совместно с указанным комплексом единиц Американским нефтяным институтом. Приведенные выше единицы, за исключением того, что давление было выражено в 10^6 динах, или 0,99 *am*, было по всей видимости предложено впервые в работе P. G. Nutting, Amer. Assoc. Petrol. Geol., 14, 1337, 1930.

[2] Ф. Толк [Ing. Archiv, 2, 428 (1931)] дал полную теорию измерения проницаемости для сцементированной пористой среды (бетон) на образцах, изготовленных в виде лучевых дисков; при этом жидкость нагнеталась в часть одной из сторон лицевой поверхности и покидала образец с другой стороны через цилиндрическую поверхность, а также в одном случае через остаточную часть поверхности нагнетания. Эти измерения были предложены под предлогом трудности обеспечить герметичность периферийной поверхности линейного образца среды. Однако было найдено, что предложенная ниже техника эксперимента линейного течения оказалась не только точной, но вместе с тем простой и быстрой. Кроме того, метод Толка не свободен от замечания, что капиллярное противодавление на периферии и лицевых поверхностях лучевого образца, хотя бы он был погружен в жидкость, нарушит режим течения. Наконец, следует заметить, что окончательные формулы Толка для определения константы проницаемости включают комплексные функции размеров образца, которые при расчетах приводят к сложным и не так легко поддающимся интерпретации формулам по сравнению с теми, что были выведены для экспериментов с линейным течением.

эффектом сжимаемости, который совершенно не представляет интереса при таких экспериментах).

Отсюда по уравнению (1) градиент давления dp/dx должен иметь ту же самую величину вдоль всей длины колонки с потоком и должен быть равен своему среднему значению, т. е.

$$\frac{dp}{dx} = \text{const} = \frac{P_1 - P_2}{L} \qquad (3)^1$$

при условии, что k будет постоянным по длине образца. Подставляя эти значения v и dp/dx в уравнение (1), получим, что k можно подсчитать по следующей формуле:

$$k = \frac{\mu Q L}{A (P_1 - P_2)} . \qquad (4)$$

При экспериментах с газом скорость v не будет более постоянной по длине колонки с потоком. Она будет скорее всего возрастать благодаря расширению газа по мере достижения выхода из образца. Поэтому dp/dx будет также возрастать по мере приближения к выходной поверхности, и рост этот должен проходить таким путем, чтобы отношение $\frac{v}{dp/dx}$ оставалось постоянным. С другой стороны, произведение γv будет одинаковым вдоль всей длины колонки с потоком. Полагая расширение газа изотермическим, как для идеального газа, что будет справедливым, за исключением высоких скоростей потока, получим, что произведение $p\frac{dp}{dx}$ будет также постоянным. Отсюда:

$$2p\frac{dp}{dx} = \frac{dp^2}{dx} = \text{const} = \frac{P_1^2 - P_2^2}{L} = 2\bar{P}\frac{P_1 - P_2}{L} , \qquad (5)$$

где $\bar{P}$ — среднее алгебраическое давление $\frac{P_1 + P_2}{2}$.

После подстановки этих значений в уравнение (1) значение k примет вид:

$$k = \frac{2\mu v p L}{P_1^2 - P_2^2} = \frac{\mu v p L}{(P_1 - P_2)\bar{P}} , \qquad (6)$$

где v относится к скорости при давлении p. Так как vp пропорционально скорости массы в системе, а $vp/\bar{P}$ является скоростью при среднем давлении $\bar{P}$, то, обозначая всю массу выходящего расхода газа через Q_m, а его объем, замеренный при среднем давлении,

---

[1] Из этого вывода непосредственно следует, что давление изменяется линейно вдоль колонки с потоком, — заключение, справедливое для любого режима течения жидкости в однородной линейной пористой среде (постоянство v), будет ли он струйным или турбулентным. Аналогично этому p^2 будет изменяться линейно в любой изотермической линейной системе, где движется газ, который можно считать идеальным. Поэтому линейные изменения p или p^2 не являются критерием для струйного режима потока в пористой среде.

через $\overline{Q}$, получим, что в конечном итоге k можно представить в одном из следующих видов:

$$k = \frac{2\mu Q_m L}{\gamma_0 A (P_1^2 - P_2^2)} \qquad (7)^1$$

или

$$k = \frac{\mu \overline{Q} L}{A (P_1 - P_2)} , \qquad (8)$$

где γ_0 — плотность газа при атмосферном давлении и дается для идеального газа формулой w/RT, где w — молекулярный вес, R — молярная газовая константа и T — абсолютная температура. Таким образом, проницаемость может быть определена из экспериментов с движением газа фактически по той же методике и формуле (8), что и проницаемость при движении жидкости, при одном лишь условии, что объем расхода в первых опытах приводится соответственно к среднему алгебраическому давлению в канале потока. Вышеприведенные формулы дают возможность рассчитать k по единичному замеру выходящего объемного расхода и перепаду давления. Однако следует помнить, что эти формулы базируются на допущении, что эксперименты с потоком производятся в области струйного движения.

Чтобы убедиться в этом, мы советуем при каждом определении проницаемости замерить несколько величин расхода при различных перепадах давления, сравнить зависимости между ними и определить k по вышеуказанным сравнениям для каждого измерения в отдельности. Постоянство результатов последнего или же прямолинейная зависимость его от перепада давления в декартовой системе координат, где связь [2] между расходом Q по отношению к $\Delta P\,(P_1 - P_2)$, в случае движения жидкости, или $\overline{Q}$ по отношению к ΔP, или же Q_m по отношению к $\Delta P^2\,(P_1^2 - P_2^2)$, в случае движения газа, дается прямой, проходящей через начало координат, является необходимым и достаточным условием существования струйного режима потока. Наклон этих линий даст количество $kA/\mu L$ для первых двух видов построения и $\gamma_0 kA/2\mu L$ для последнего. Если течение в условиях эксперимента хотя бы частично турбулентно, кривые имеют изгиб в сторону осей ΔP или ΔP^2.

В конечном итоге можно притти к следующему. Для того чтобы получить численное значение k по вышеприведенным формулам, уравнения (4), (7) и (8) — непосредственно в единицах дарси — необходимо выразить μ — в сантипуазах, Q, $\overline{Q}$ — в $см^3/сек$, Q_m — в $г/сек$, L — в $см$, A — в $см^2$, P_1 и P_2 — в am, а в уравнении (7) γ_0 — в $г/см^3$, или в случае применения его эквивалента — идеального газа — w — в $г$, T — в °К и R — имеет свое значение 82,07.

---

[1] Из сравнения уравнений (7) и (8) следует, что если „проницаемость газа“ k_g будет определена непосредственно по величине $\frac{\mu Q_m L}{A (P_1^2 - P_2^2)}$, то она будет связана с истинной проницаемостью уравнением $k = \frac{2k_g}{\gamma_0}$.

[2] Является необходимым условием того, что жидкость не обладает пластичностью и последнее обстоятельство не приписывается струйному режиму течения.

6. Измерение проницаемости несцементированных песков. Как было замечено каждым, кто делал попытку определить проницаемость несцементированной пористой среды или песка, что получаемое значение ее изменяется в очень широкой области в зависимости от набивки песка в держателе образца. Хотя эффективный диаметр зерна для данного песка, несмотря на его тщательное определение, остается неизменным при различной набивке последнего, влияние последней на пористость[1] может выразиться в сильно увеличенных отклонениях проницаемости образца. Влияние пористости на проницаемость несцементированного песка можно продемонстрировать ссылками на теоретические формулы Слихтера* и Козени**, которые, будучи, без сомнения, совершенно непригодными для определения абсолютных значений проницаемости, тем не менее дают порядок величины колебания пористости данного песка. Так, формула Слихтера, выведенная для укладки шаров одинакового размера при различных видах набивки, дает отношение проницаемости при высшем значении пористости, возможной для одинаковых шаров, 47,64% (кубическая укладка) к низшему возможному значению пористости, 25,95% (близко к гексагональной укладке), равное 7,5. Формула Козени, показывающая изменение k от пористости f, определяемое зависимостью $\frac{f^3}{(1-f)^2}$, дает колебания в вышеуказанном диапазоне — 26—47% — в 11,5 раза.

Поэтому, если нельзя получить одновременно последующую характеристику песка, где значения проницаемости были бы единственными и воспроизводимыми, только измерение проницаемости несцементированного песка само по себе имеет маловажное значение. Вполне вероятным является то обстоятельство, что пористость неоднородного песка является основным параметром, определяющим конечное значение проницаемости[2] данного агрегата песчаных зерен. Вполне естественно, что одна пористость еще не дает полной и достаточной спецификации последнего, так как даже малые изменения в пористости дают заметные колебания в величине проницаемости[3]. В тех случаях, когда пористость оказывается достаточно устойчивой по отношению к проницаемости, последняя может быть замерена по следующей методике. Тщательно перемешанный песок насыпается в стеклянную трубку, размеры которой соответствуют объему взятого песка и снабженную

---

[1] По анализу зависимости набивки по отношению к пористости в случае однородных шаров см. работу W. O Smith, P. D. Foote and P. F. Busang, Phys. Rev., 34, 1271, 1929, а также весьма глубокое исследование L. C. Graton and H. J. Fraser, Journ. Geol., 43, 785, 1935 (см. также гл. I, п. 6).

* Slichter C. S., Geol. U. S. Surv., 19th Ann. Rept., 1897—1898, pt. II, p. 295.

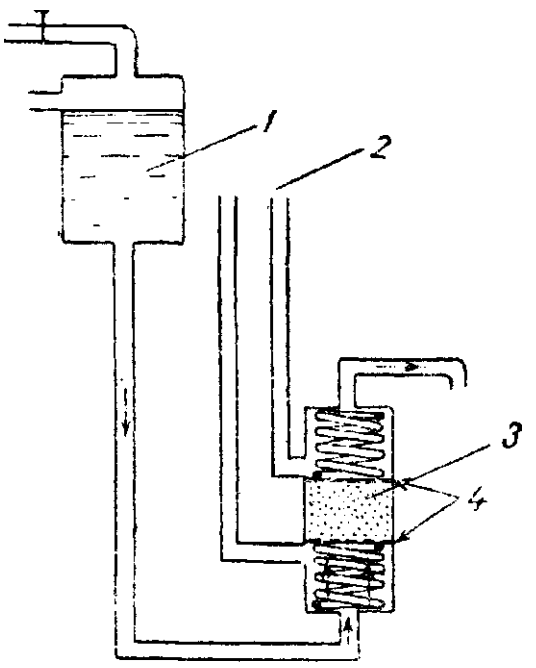
** Kozeny J., Wasserkraft und Wasserwirtschaft, 22, 67, 86, 1927.

[2] Внутреннюю связь между пористостью и проницаемостью для данного агрегата песчинок, обусловленную набивкой, не следует смешивать с той, которую обычно принимают в виде указания на признак единственной корреляции между пористостью и проницаемостью среди различных песков (см. гл. II, п. 3).

[3] Для агрегатов, состоящих из одинаковых шаров, среды с различными проницаемостями, но одной и той же пористости, могут быть получены путем „сдваивания“ или „страивания“ некоторых из основных систем кубической или гексагональной укладки (см. работу Graton and Fraser).

сетками, чтобы удержать песок на месте[1], а затем трамбуется до желаемого значения пористости. Манометры, установленные на входе и выходе из песчаной колонки, должны обеспечить показания перепада давления, воздействующего на жидкость.

Во всех случаях рекомендуется устанавливать трубку с песком вертикально во избежание оседания последнего и образования обходных каналов в верхней части трубки при ее горизонтальном расположении.



Фиг. 12. Схема прибора для определения проницаемости несцементированных песков:

1 — питающая жидкость; *2* — манометры давления *3* — песок; *4* — фильтры-сетки.

Остальные подробности процедуры измерения, а также меры предосторожности, которые необходимо принять, чтобы обеспечить тщательность результатов, в основном будут те же самые, что описаны в гл. II, пп. 7—9 для измерений со сцементированными разностями. На фиг. 12 показана схематически установка аппарата по определению проницаемости помощью жидкости. Вполне понятно, что для экспериментов с движением газа необходимы соответствующие видоизменения установки.

В целом необходимо знать значение проницаемости несцементированной пористой среды в своем первоначальном, ненарушенном состоянии. Это особенно справедливо для гидрологических проблем, рассматривающих движение воды в поверхностных слоях почвы. В этом случае становится ясным, что если бы пористость даже была универсальным параметром, который смог установить „состояние“ почвы, все же пришлось бы столкнуться с проблемой определения той же пористости без нарушения структуры последней. При измерениях проницаемости необходимо убедиться, что почва при экспериментах остается в том же состоянии, в каком она находилась в грунте.

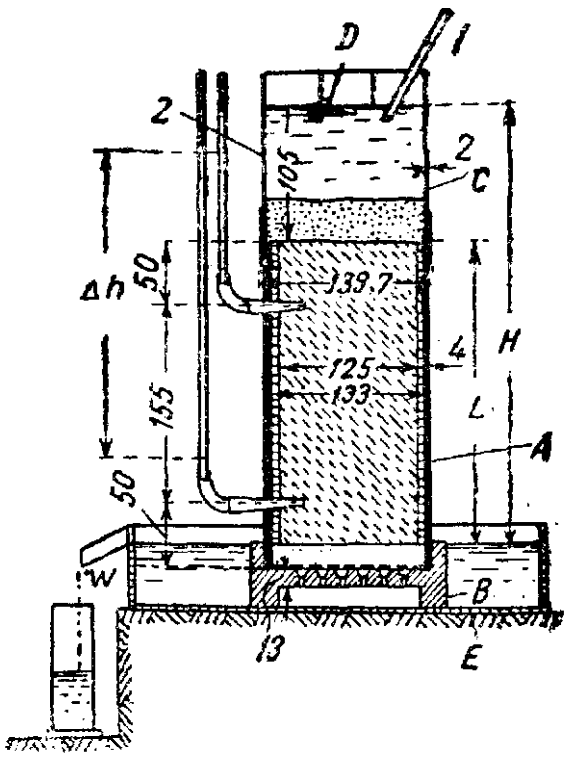
Поэтому рекомендуется замерять проницаемость такой не сцементированной среды на месте или же отбирать образец почвы путем, который не оставлял бы сомнения в ненарушенности образца. Постановка первой задачи, как она решается для определения проницаемости методом опытных откачек из артезианских колодцев или скважин, пробуренных для добычи нефти или газа, будет рассмотрена в гл. II, п. 11[2].

---

[1] Это может быть легче всего установлено по длине песчаной колонки, занятой данной навеской песка, средняя плотность зерна которого заранее установлена, или же по объему воды, необходимому для насыщения песка, по мере подъема воды в последний.

[2] Обширное исследование по вопросу измерения проницаемости почв путем наблюдения за просачиванием воды в почву было проведено Kozeny J., Die Wasserwirtschaft, pp. 555, 589, 1931. Оставляя в стороне приближенный характер анализа, приведший Козени к конечным формулам для исчисления проницаемости, видно, что сами методы являются в своей основе неудовлетворительными для получения выводов, обладающих в какой-то степени точностью. В них не только не учитывается влияние капиллярных сил, но природа самого течения такова, что нельзя принять предварительных мер во избежание

Терцаги[1] описывает типовую методику, которая была разработана им для отбора образцов почвы без нарушения ее структуры, т. е. второй тип предварительно поставленной задачи. Основные особенности этого метода заключаются в следующем: вокруг определенного образца почвы, предназначенного к испытанию, выкапывают кольцевую канавку, оставляя образец в виде столбика несколько больших размеров, чем он потребуется в конечном итоге. Затем на столбик надевают с обжатием металлический цилиндр, состоящий из двух половинок на шарнирном соединении, чтобы верхушка почвы находилась над головкой цилиндра.



Фиг. 13. Аппарат для измерения проницаемости почв (по Терцаги):

1 — поступление; *2* — жесть

Сначала удаляют почву над верхней кромкой цилиндра, и образец отрезают от почвы, лежащей в подошве прибора. В то же самое время под нижний край цилиндра подкладывают пластинку, чтобы предохранить образец от выпадения. Цилиндр с образцом устанавливают на столе, цилиндр открывают и удаляют в сторону, а на образец надевают металлический кожух больших размеров. В зазор между образцом и кожухом, а также на торцевые поверхности образца заливают расплавленный парафин. В этом состоянии образец переносят в лабораторию. Здесь кожух и парафиновый покров аккуратно снимают с образца. Затем последний снова покрывают тонким слоем горячего парафина. Образец помещают в цилиндрический держатель прибора по определению проницаемости, и свободный зазор между ними снова заполняют расплавленным парафином. Цилиндр переворачивают, удаляют около 2 *см* почвы и заменяют последнюю песочным фильтром. На нижний конец цилиндра навинчивают перфорированный башмак *B* (фиг. 13). После этого цилиндр *A* устанавливается вертикально, верхняя поверхность почвы очищается, навинчивается сосуд *C* и добав-

---

захвата пузырьков воздуха порами почвы. Хотя методы взятия образцов почвы и замер их проницаемости тем же техническим путем, что предназначен для сцементированных песков, не совсем свободен от замечаний, однако он является более предпочтительным по сравнению с методами, основанными на измерениях непосредственного просачивания влаги в поверхностные слои, почвы.

[1] Terzaghi K., Die Wasserwirtschaft, Nos. 18/19, 1930. Несколько похожая процедура взятия проб была описана Fraser H. J., Amer. Journ. Sci., 22, 9, 1931, для определения пористости почв. Однако предложенный им метод покрытия сухих почв парафином делает его неудовлетворительным при получении вполне надежных значений проницаемости таких образцов. Иные пробоотборники описаны Powell E. B., Soil Sci., 21, 53. 1921, and Veihmyer F. J., Soil Sci., 27, 147, 1929. Последний из этих пробоотборников рассчитан на взятие проб значительно ниже верхнего поверхностного покрова почвы. Однако в этих пробоотборниках ни в одном случае не было сделано приспособления, чтобы применить их совместно с прибором по определению проницаемости образца почвы (см. раздел B, т. I, Proc. Intern. Conf. Soil Mechanics and Foundation Eng., 1936).

ляется еще один песочный фильтр. Весь прибор помещают в бассейн E, имеющий слив W, находящийся поверх нижней кромки образца. Показания давления берут по двум манометрам, трубки от которых погружены в образец через стенки цилиндра A. Расходы протекающей сверху вниз воды замеряются по водосливу W[1]. При исследовании образца с низкой проницаемостью Терцаги чаще применял метод, где велось наблюдение за величиной снижения верхнего уровня воды, связанного с трубкой небольшого сечения, нежели замерял установившуюся величину течения при постоянном напоре[2]. Однако при таких экспериментах уменьшение величины снижения уровня, возникающее от уменьшения напора, может быть замаскировано снижением величины проницаемости образца вследствие фильтрационного эффекта воды. Можно проверить отсутствие влияния последнего построением на логарифмической бумаге отношения суммарного напора h_t к его первоначальному значению h_0 как функция времени. Линейная зависимость явится подтверждением, что течение не нарушено изменениями среды. Уравнение, определяющее зависимость между напором жидкости и временем t, пока уровень воды оставит верхнюю трубку, дается в следующем виде:

$$\ln \frac{h_t}{h_0} = -\frac{k\gamma g A_s t}{\mu L A_t}, \qquad (1)^3$$

где A_s — площадь образца; L — его длина; A_t — сечение трубки, в котором наблюдается h_t. С помощью этих констант, а также плотности γ и вязкости μ жидкости можно свободно определить значение проницаемости из наклонной прямой, даваемой уравнением (1).

Если образцы были первоначально освобождены от влаги, то следует предпочесть применение воздуха воде при экспериментах с образцом, взятым и подготовленным согласно вышеизложенной методике. Это особенно удобно в тех случаях, где проницаемость достаточно низка. Подробная техника применения воздуха аналогична той, что описана ниже (гл. II, п. 9) при рассмотрении измерений проницаемости сцементированных пористых разностей. Если вода разрушает образец, разрыхляя его или способствуя разбуханию некоторых его компонентов, можно рекомендовать применение воды при опытах только при условии, что будет дано достаточно времени для выравнивания этих нарушений, чтобы обеспечить постоянную величину их раньше, чем будет приступлено к снятию наблюдений.

В общем следует отметить, что единственная существенная разница между проблемой определения проницаемости сцементированных образцов, подробная техника которой будет описана в последующих разде-

---

[1] Чтобы избежать захвата воздуха, по мере того как вода начинает проникать в образец, по всей вероятности, будет, безопасным направить движение воды в этих опытах так же, как и при измерениях со сцементированными песками, — снизу вверх, разумеется, с соответственным изменением в конструкции аппарата.

[2] В этом случае должна быть в общем предпочтена фильтрация воды в направлении снизу вверх.

[3] Вывод этого уравнения аналогичен описанному в сноске на стр. 531 (гл. X, п. 6) для нахождения величины проницаемости продуктивного пласта по величине подъема жидкости в эксплоатационной скважине.

лах, и не сцементированных пористых разностей, встречающихся в естественном состоянии, заключается в получении образца последних без нарушения их структуры. Следует заметить, что метод взятия проб, предложенный Терцаги, должен предохранить образец от разрушения, но все же следует считать, что более простой и удовлетворяющей процедурой будет такая, где пробоотборник будет составной частью прибора для определения проницаемости. Это даст возможность избежать частой смены держателей образца и будет иметь особое преимущество, когда образец обладает плохими связующими свойствами и будет распадаться на части, при открытии цилиндра пробоотборника. Однако, если образец уже взят и помещен в прибор по определению проницаемости, дальнейшая техника и меры предосторожности должны быть аналогичны тем, что описаны в последующих разделах для определения проницаемости сцементированных разностей.

7. Общая техника определений проницаемости сцементированной пористой среды[1]. Будут ли производиться окончательные измерения проницаемости жидкостями или газами — безразлично, но существуют определенные правила всей процедуры испытания, например, связанные с подготовкой и установкой образца, которые необходимо выполнять во всех случаях. Только путем строгого подчинения определенной, вполне установленной методике можно получить воспроизводимые и весьма ценные значения проницаемости.

Чтобы уменьшить влияние ошибочности, возникающей вследствие местной неоднородности, например, наличия конкреции или прослойков глин, рекомендуется применять образцы значительного размера, порядка 3 *см* диаметром и 1 *см* длиной. Если это возможно, образцы следует нарезать так, чтобы их оси были перпендикулярны или параллельны плоскости напластования песчаника, т. е. чтобы получить значения проницаемости в этих двух направлениях. Нарезка образцов осуществляется пропазованной медной трубкой, установленной в тихоходном сверлильном станке с подачей грубозернистого карборунда и небольшого количества воды. Полученный керн устанавливается в специальной машинке (фиг. 14), снабженной нортоновским режущим диском из карборунда на бакелитовой связке, диаметром 17,5 *см* и толщиной 1,5 *мм*[2]. Соответствующая скорость диска составляет 1700 об/мин. На диск в процессе нарезки беспрерывно подается небольшое количество воды. Чтобы избежать затягивания мелких опилок в поверхность керна капиллярными силами с последующим заиливанием поверхности и закупоркой пор, необходимо предварительно пропитать керны водой

---

[1] Техника, описанная здесь и в последующих разделах, опубликована в работе R. D. Wyckoff, H. G. Botset, M. Muskat and D. W. Reed, Rev. Sci. Instr., 4, 394, 1933, а также в Bull. Amer. Assoc. Petrol. Geolog., 18, 161, 1934.

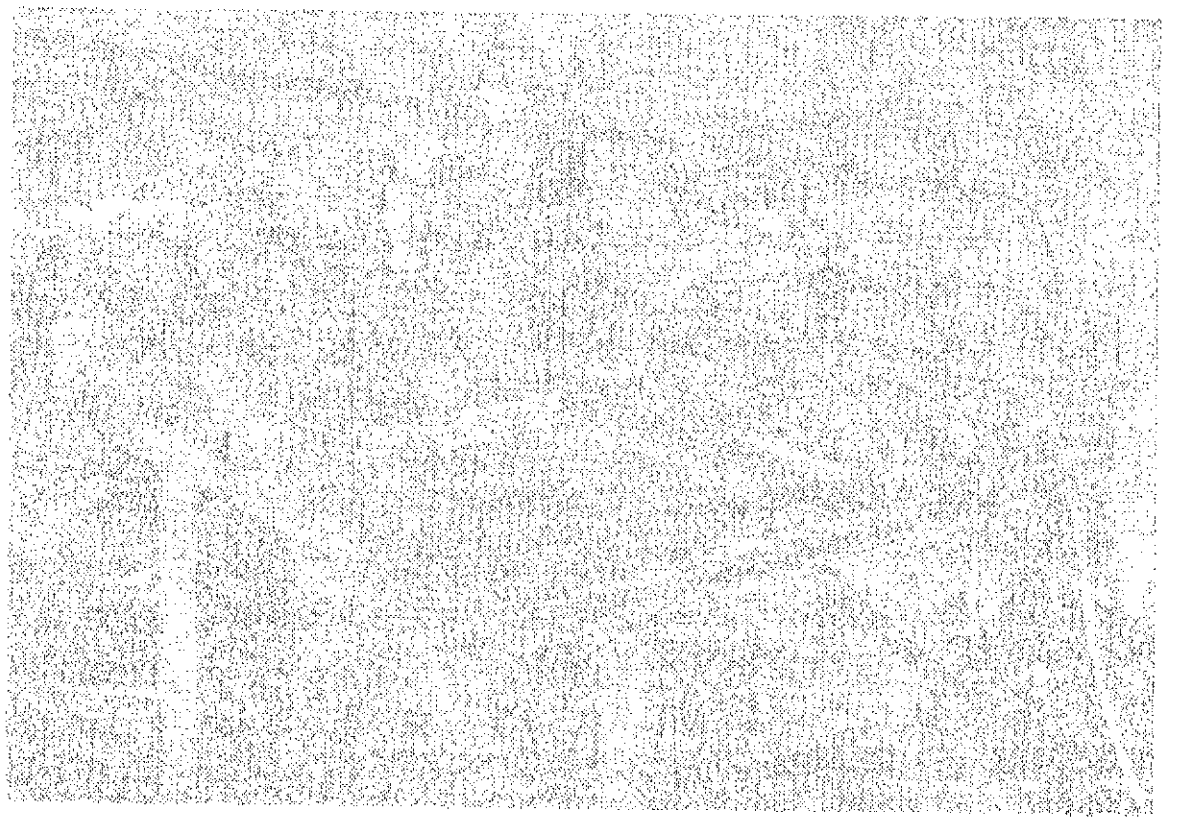
В основном та же методика дается в работе Fancher, Lewis and Barnes, а также W. L. Horner (Petrol. Eng., 5, May, 1931). Детально техника измерений проницаемости, описанная здесь, была разработана на опытах с кернами из нефтяных песков. Вместе с тем она вполне приложима ко всем сцементированным пористым разностям.

[2] Некоторые исследователи предпочитают метод расщепления. Но, если принять соответствующие меры предосторожности, как это показано на примерах, можно получить те же самые результаты способом нарезки.

или иной какой либо жидкость, которая не растворяет исследуемого материала. Это предосторожность дает возможность достаточно продолжительное время вращать режущий диск. С этой целью мы применяем либо, основываясь на различии растворимости двух применяемых нами веществ, которые были получены в одном случае после резки диском, а в другом случае после расщепления на специально предназначенном прессе, где поверхности кромок не подвергаются соприкосновению с загрязнениями.

Таблица 5

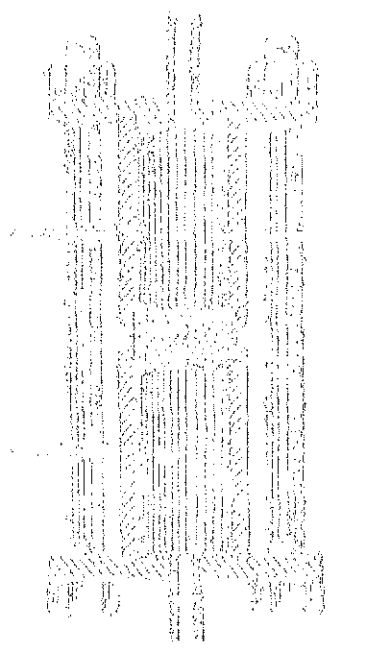
Образец шлифа	Режущим диском	Расщепленном
А (1 образец) с левой	0,65	0,67
А (2 образец) » »	4,83	4,88



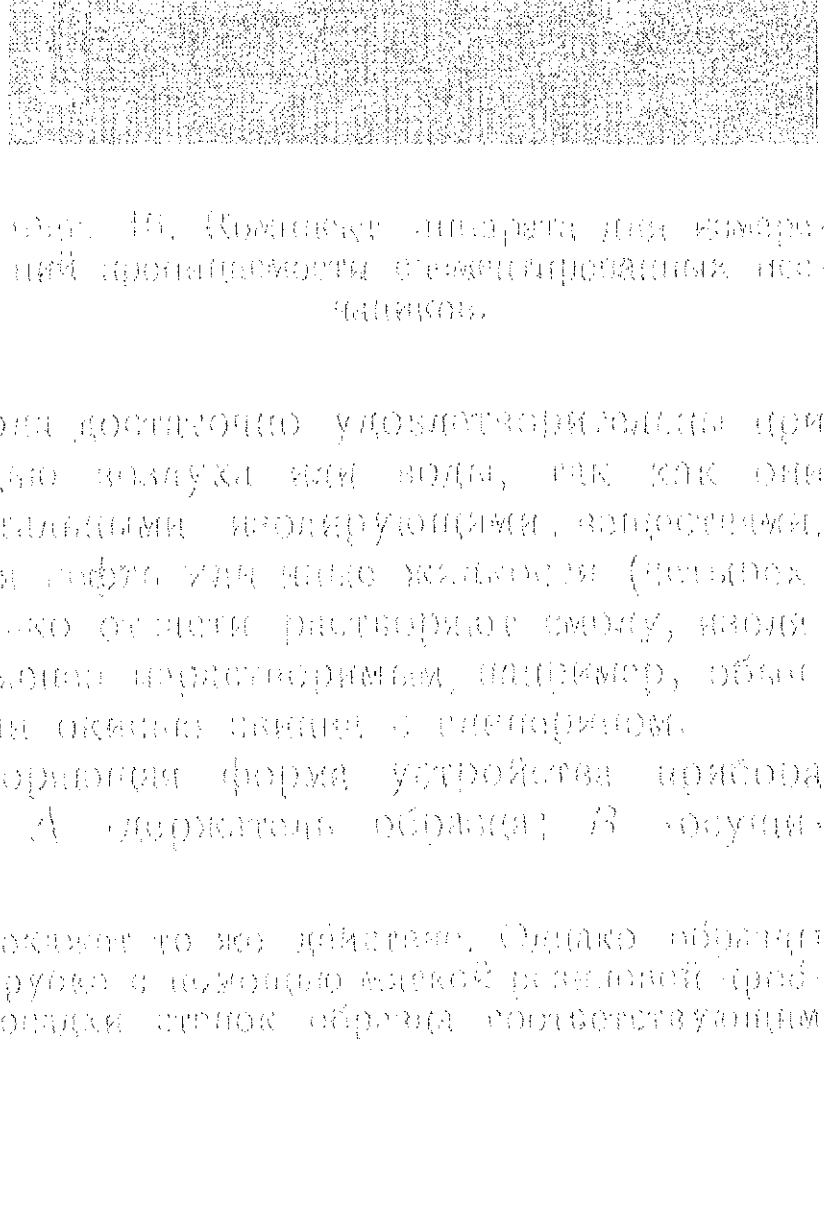
Фиг. 14. Машина для взрезания шлифа.

Для образца пористой среды жидкости кромок по поперечного шлифа, перед во него должны быть тщательно удалены до производства измерений проницаемости. Для этой цели можно применить большой экстрактор Сокслета, где в качестве растворителя берется серноуглеродистый углерод, бензол или хлороформ. Экстракцию можно ускорить, если предварительно залить образец в тяжелый конец малой трубки диной около 15 см. Очень плотная обертка достаточно хороша для того, чтобы при погружении трубки в экстрактор с образцом, покрытым на тонком конце ее, пищу жидкости, который может поднимаемый на высоту соответственно 15 см, проталкивать растворитель внутрь образца. Трудности удаления всех следов нефти заставляют возвращаться к испытанию только обрезков кернов из нефтяных пластов. Загрязнения керамики в приборе могут зависеть от

жутся экспериментатора, но безопасны и просты процедуры опыта связаны с следующим. Пористая боковая поверхность вокруг верхнего торца покрывается тонким слоем парафина, чтобы получить непроницаемый слой изолирующего вещества[1]. Затем образец устанавливается между торцами труб (рис. 15), которые снабжены винтами и несколько подстрижены, чтобы получить короткую связь с образцом. Между концами труб оставляется зазор, чтобы можно было обнаружить неудовлетворительную изоляцию, через которую можно ожидать утечку по окружности образца. Необходимо принять меры предосторожности, чтобы избежать возможности



Фиг. 14. Шприц для образца пористой среды с изогнутыми трубками.



Фиг. 15. Комплект аппаратуры для измерения проницаемости с помощью воды.

вертикальных обрезов, при которых можно достаточно удовлетворительно производить измерения с помощью жидкости, так как они могут служить по крайней мере с остальными изолирующими, вертикальными или при условии, что проницаемость горных пород или иного жидкого (пористого) материала, которое только оставит растворимую смесь, изолирующий материал должен быть достаточно непроницаемым, например, обычным эпоксидным цементом или смесью с цементом.

На фиг. 16 показана удовлетворительная форма устройства прибора для определения проницаемости: *А* — держатель образца; *Б* — осуши-

[1] Любой непроницаемый покров окажет то же действие. Однако образец можно герметизировать и каучуковой трубкой с помощью жидкой резиновой грибки, которая затвердевает по тугой посадке стенок образца после испарения растворителя.

тельная трубка с хлористым кальцием; *C* — жидкостной газомер при измерениях с газами; *D* — ртутный дифференциальный манометр, показывающий перепад давления через образец; *E* — ртутный манометр, показывающий давление на выходе из образца; *F* — баллоны, применяемые при опытах с жидкостями; *G* — пружинные манометры для приблизительного определения давления, существующего в баллонах. Так как пружинные манометры недостаточно точны, чтобы получить удовлетворяющие результаты, то необходимы ртутные манометры.

Для низких давлений можно применить водяные манометры. Для повышенных давлений следует применять ртутные манометры. При измерениях с помощью газа следует принять во внимание определение абсолютных давлений в системе наравне с суммарным перепадом давления.

При производстве измерений проницаемости с помощью жидкостей рекомендуется, как и в случае работы с несцементированными песками, устанавливать кернодержатели вертикально с входящим концом нагнетательной трубки в нижней его части. Тогда верхняя поверхность образца всегда покрыта жидкостью и устраняется возможность образования воздушного фильтра на выпускном торце последнего. Если же на этой поверхности существует неудовлетворительное смачивание, то результаты измерения могут быть серьезно испорчены капиллярными силами.

Следует наблюдать при измерениях расходов течения, чтобы перепады давления были постоянны в процессе замера. В случае небольших расходов газового потока газ можно собирать над поверхностью воды. Конечный замеренный объем газа должен быть отнесен к известному атмосферному давлению. Более высокие расходы газа могут быть замерены с помощью аккуратно откалиброванного счетчика или газомера. Температуру жидкости следует отмечать во всех случаях, чтобы получить истинное значение вязкости жидкости. Это особенно важно в случае измерений проницаемости с помощью жидкостей, так как колебание температуры в 1° С может оказаться причиной изменения величины вязкости многих жидкостей при комнатной температуре порядка 2%.

8. Дальнейшие подробности измерений проницаемости с помощью жидкостей. Наиболее серьезной трудностью, с которой столкнулись в ранних измерениях проницаемости сцементированных пористых разностей с помощью жидкостей, была закупорка песка в процессе осуществления течения, с постепенным непрерывным уменьшением проницаемости во времени. Фактически в большей части ранней литературы, посвященной этому вопросу, значения проницаемости относятся к измерениям, взятым спустя определенный отрезок времени, следовавший за началом экспериментов с течением, с ясным сознанием об изменении замеряемой величины во времени. Однако эти выводы с точки зрения представления о динамической характеристике пористой среды скорее всего не имеют ценности, так как дают численное определение, свойственное исключительно специфическим особенностям эксперимента, при которых оно было получено.

Одной из обычных причин закупорки пористой среды при непрерывном течении жидкости, например воды, является выделение воздуха

или газа, растворенного в жидкости. Этот газ остается в порах среды в виде небольших пузырьков и может уменьшить конечную проницаемость для жидкости до небольшой доли ее первоначального значения[1]. Эффективным средством для устранения этой трудности является применение дистиллированной воды, а в добавление к этому фильтрование ее перед поступлением в испытуемый образец. Менее определенной причиной закупорки пор сцементированной пористой среды даже в том случае, когда применяется дистиллированная вода, является растворение силиция из стекла, в котором хранится вода[2], и отложение его из раствора в порах образца. В этом случае опять фильтрование воды через песчаный или алундовый фильтр непосредственно перед ее применением предупредит образование этой трудности. Кроме того, стенки сосуда с водой следует покрыть парафином, чтобы совершенно избежать растворения силиция. С другой стороны, когда в качестве опытной жидкости применяется нефть, закупорка может образоваться благодаря отложениям клейких, смолистых веществ в результате окисления ненасыщенных углеводородов. В этом случае нельзя получить воспроизводимых и надежных результатов, если только ненасыщенные углеводороды не будут удалены хорошо известными химическими средствами, и нефть будет находиться в неокисляющей атмосфере азота или естественного газа[3].

Следующая мера предосторожности, за которой следует вести наблюдение, заключается в том, чтобы воздух не был удержан в образце, когда опытная жидкость проникает в последний. Безопасной процедурой является отсос воздуха из системы вакуумным насосом, присоединенным к выходному отверстию. После того как давление в образце будет значительно понижено, дают жидкости проникнуть в образец. Применяемая жидкость, разумеется, не должна способствовать разрыхлению цементирующего вещества образца. Во многих случаях было установлено, что наиболее подходящей жидкостью является четыреххлористый углерод, так как вода разрушает цементирующее вещество.

9. Дальнейшие подробности измерений проницаемости с помощью газов. По аналогии с требованиями, чтобы образец, через который протекает жидкость при измерениях проницаемости, был свободен от

---

[1] Совместное присутствие газовой и жидкой фазы в пористой среде способствует возникновению системы неоднородной жидкости, рассмотрение которой лежит вне рамок настоящей работы. Однако можно упомянуть, что образование таких систем благодаря выделению газа из жидкой фазы состоит из первоначального этапа улавливания и аккумуляции выделяющегося газа в порах среды с непрерывным уменьшением проницаемости по отношению к жидкости. Это будет происходить до тех пор, пока не будет достигнуто условие динамического равновесия, при котором дополнительное количество газа, выделяющегося из жидкости, достигнет своего максимального значения, а газовая и жидкая фазы займут в среднем какую-то часть порового пространства, определяемую первоначальной проницаемостью среды. Проницаемость по отношению к жидкости не будет уже больше снижаться, после того как это условие будет достигнуто, хотя бы количество газа, растворенного в жидкости, возросло (см. R. D. Wyckoff and H. G. Botset, Physics, 7, 325, 1936).

[2] Botset H. G., Rev. Sci. Instr., 2, 84, 1931.

[3] Там же в работе Ботсета.

заключенного в нем воздуха или газа, необходимым предохранительным мероприятием в случае испытательного вещества — газа — является отсутствие в образце влаги. Жидкости, которые первоначально заключались в поровом пространстве, можно удалить тщательной длительной сушкой в соответствующей печи, хотя температуру в последних не следует поднимать выше 102° С, или же применением вакуума, чтобы способствовать улетучиванию жидкости. Опасность загрязнения образца влагой или иными посторонними веществами из проходящего через него газа может быть устранена фильтрованием или сушкой воздуха (пропусканнем через трубу с хлористым кальцием) перед тем, как он поступает в испытуемый образец.

Как уже было упомянуто в гл. II, п. 7, прибор для измерения проницаемости с помощью газа должен быть снабжен манометром, показывающим абсолютное давление в системе в дополнение к дифференциальному манометру, показывающему перепад давления в образце. Эти требования вытекают из того обстоятельства, что формула для подсчета проницаемости по замерам газового потока включает или квадраты абсолютных давлений [уравнение (7), гл. II, п. 5], или расход потока в объемных единицах, отнесенный к среднему давлению в системе [уравнение (8), гл. 2, п. 5].

10. Сравнение газа и жидкостей при измерениях проницаемости. Хотя проницаемость пористой среды (как это было видно из предыдущих глав) является константой, определяемой только структурой среды, и не зависит от природы однородной жидкости, проходящей через нее, — это обстоятельство только недавно нашло свое признание в литературе. Фактическое ознакомление с литературой, посвященной этому вопросу, оставляет впечатление, что если кто-либо займется практической проблемой движения определенной жидкости в пористой среде, определение проницаемости последней он должен делать только этой жидкостью. Проницаемость любой среды выражается обычно терминологически как „проницаемость по отношению к определенной, представляющей интерес жидкости“. Так, практически во всей литературе, посвященной измерениям проницаемости в керамической промышленности, в связи с возникающими проблемами принято применение воздуха без всякого упоминания о приложимости выводов с внесением поправки (даже на вязкость жидкости) к движению иной жидкости в среде. Определение проницаемости в гидрологической литературе почти исключительно выражается в величинах ее по отношению к воде жидкости, которая применяется в этом случае почти без исключения. Однако в свете того обстоятельства, что измерение проницаемости пористой среды с помощью газа дает динамическую характеристику среды, приложимую к потоку газов или жидкостей сквозь последнюю, представляет собой практический интерес отметить, что в действительности существуют вполне определенные преимущества измерения проницаемости с помощью газов[1]. Эти преимущества заключаются в устранении

[1] Если не представляется возможным совершенно удалить нефть или другие жидкости, первоначально представленные в образце, гораздо безопаснее применять в качестве опытного вещества жидкость, которая легко смешивается с той, что находится в образце.

трудностей, возникающих вследствие закупорки образца веществами, которые отлагаются из жидкостей; разбухания цементирующего вещества в сцементированной пористой среде; исключение ошибок, возникающих вследствие захвата образцом воздуха; необходимостью отсасывать воздух из образца и заполнять образец жидкостью под вакуумом; уничтожение опасности разрушения сцементированного образца и разрыхления цементирующего вещества, а также легкость получения замеряемых потоков, даже для очень плотных образцов, без приложения повышенных давлений. Поэтому с точки зрения простоты, скорости и тщательности следует заметить, что измерения проницаемости с помощью воздуха или любого иного, удобного к применению газа, предпочтительнее измерения с помощью жидкостей.

Проницаемость пористой среды является постоянным параметром ее и не зависит от жидкости, применяемой при определении проницаемости. Фактическая справедливость этого допущения видна из данных, приведенных в табл. 6. Данные эти, базирующиеся на результатах измерений одних и тех же образцов с помощью воздуха и жидкости и подсчитанные по формулам гл. II, п. 5, показывают, что в пределах ошибки эксперимента при таких измерениях конечные значения проницаемости фактически остаются теми же, не завися от примененной жидкости.

Таблица 6

Образцы	Проницаемость, дарси	
	k (измерения воздухом)	k (измерения жидкостью)
Песок зернистостью 40— 45 меш	139,13	139,4 (H_2O)
» » 80—100 меш	24,90	22,0 (H_2O)
№ 1 песчаник из пласта Вудбайн (В. Тексас)	1,18	1,20 (CCl_4)
№ 2 » » » » »	1,56	1,57 (H_2O)
№ 3 » » » » »	1,63	1,63 (H_2O)
№ 4 » » » Бири	1,54	1,50 (H_2O)

Несоответствие между данными, относящимися к песку зернистостью 80—100 меш, следует, без сомнения, отнести за счет небольшого изменения в набивке при прохождении воды через песок, одновременно с неполным удалением захваченного воздуха. Следует также упомянуть здесь, что аналогичные несоответствия часто обязаны гидратации и разбуханию глины в песчанике. Для песчаников, не содержащих глин или иных легко гидратизирующихся веществ, например, песчаника Вилкокс[1]

[1] Если практическая проблема, в которой участвует величина проницаемости, включает поток воды и опытный песчаник показывает явление гидратации и разбухания, будучи смочен водой, не следует брать низких значений проницаемости, которые получаются при измерениях с помощью воды. Так как естественные горные породы нередко обладают тенденцией к гидратации и разбуханию при смачивании их водой, то если производятся измерения над еще не подвергавшимися исследованию горизонтами, рекомендуется предварительно испытывать образцы пород на этот эффект.

(основной нефтяной пласт в штате Оклагома, США), между значениями проницаемости, измеренными с помощью газа и воды, существует согласие, аналогичное результатам, полученным в табл. 7.

11. Измерения проницаемости в полевых условиях. Измерение проницаемости пористой среды на соответствующем приборе и по определенной методике в лабораторных условиях, несомненно, дает наиболее тщательные результаты.

Вместе с тем является обычно необходимым определить значение проницаемости в полевых условиях на основе общих данных по движению жидкости в системе потока. Типичные условия, при которых возникает эта необходимость, встречаются в том случае, когда водоносные пески сложены несцементированными разностями и вместе с тем залегают на такой глубине, что к ним нельзя приложить метод отбора грунтов для поверхностных слоев почвы, описанный в гл. II, п. 6.

Это представляет собой обычное явление при изучении артезианских бассейнов, подвергающихся дренированию скважинами, или же других искусственных сооружений каптажа по выводу потока на дневную поверхность. Другое типичное положение, обычно встречающееся при добыче жидкостей из подземных резервуаров, имеет место в том случае, где, несмотря на сцементированность пористой среды, нет кернов или образцов, необходимых для определения проницаемости в лабораторных условиях. До последних нескольких лет получение кернов со скважин рассматривалось как дорогостоящая роскошь. Однако и в настоящее время, когда взятие кернов из бурящихся скважин является вполне планомерным мероприятием, обнаруживается часто, что сам процесс бурения разрушает керны. Если сцементированность песчаника недостаточно прочна или же если песчаник, сохраняя свою структуру, может быть поврежден проникновением глинистого раствора, который оставляет в нем значительное количество твердого вещества, не представленного в среде в ее девственном состоянии, то полученная проницаемость не отразит истинного состояния среды.

Поэтому значительный практический интерес представляет собой процедура, с помощью которой можно определить проницаемость пористой среды на месте ее нахождения, без какого-либо нарушения состояния среды, по характеристике течения в сложной системе песчаник-скважина. Так как подобные методы найдут себе самое широкое применение в тех типах течения, где большие участки пористой среды дренируются скважиной малого диаметра, представленные в настоящем разделе формулы приложимы только к таким системам, где режим потока принят радиальным по отношению к интересующей нас скважине. Чтобы не смешать основы подсчета с аналитическими подробностями, заранее будут рассмотрены специальные формулы, вывод которых дается в последующих главах. Однако следует уточнить, что применение любых формул к подсчету проницаемости песчаника по данным течения у скважины, дренирующей этот песчаник, требует предварительного знания размерностей параметров, характеризующих систему. В частности, необходимо знать радиус скважины r_w, мощность песчаника h и глубину входа скважины в песчаник. В дополнение к этому следует знать или замерить вязкость жидкости, добываемой из сква-

жины. Наконец, все формулы включают в себя радиус r_e, который следует рассматривать как величину, определяющую „внешнюю эффективную границу" системы песчаник-скважина. При выводе формул этот радиус, входит как величина расстояния от центра скважины до точки, где известно давление жидкости, соответствующее P_e — давлению резервуара. С другой стороны, последнее соответствует также давлению на обнаженном забое скважины после того, как она закрыта на некоторый, достаточно долгий промежуток времени, пока в ней не будет достигнуто равновесие. Радиус r_e, при котором давление жидкости в процессе фонтанирования скважины приблизительно равно давлению резервуара, заранее с достоверностью не известен. Следует заметить, что он входит в представленные формулы в логарифмическом виде. Отсюда значительная ошибка при исчислении r_e приведет в целом к небольшому изменению в конечном значении k. Для целей фактического подсчета достаточно принять для r_e половину среднего расстояния от рассматриваемой скважины до ее ближайших соседей, за исключением тех случаев, когда дебиты последних резко отличны от рассматриваемого. Давление в срединной точке между двумя соседними скважинами приблизительно равно (как это было уже определено выше) давлению резервуара. Если не имеется достаточно данных относительно местоположения или дебитов остальных скважин, можно взять для r_e значение 152,5 *м*. Ошибка в окончательно подсчитанной величине k будет только 10%, если истинное значение r_e составляет половину или же двойную величину от 152,5 *м*.

Допуская, что параметры, рассмотренные выше, были определены, можем окончательно установить проницаемость для несущего жидкость песчаного пласта из соотношения:

$$k = \frac{\mu\, Q \ln r_e / r_w}{2\pi h (P_e - P_w)}, \qquad (1)^1$$

где Q — расход жидкости в объемных единицах при давлении на забое скважины P_w за единицу времени.

В случае, если скважина дает газ, соответствующая формула будет:

$$k = \frac{\mu\, \bar{Q} \ln r_e / r_w}{2\pi h (P_e - P_w)} = \frac{\mu\, Q_m \ln r_e / r_w}{\pi h \gamma_0 (P_e^2 - P_w^2)}, \qquad (2)^2$$

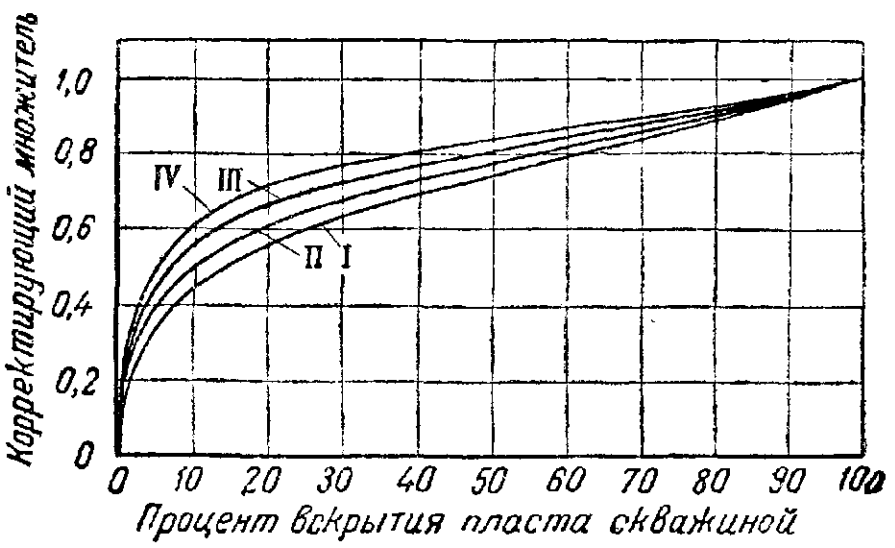
где $\bar{Q}$ — дебит газа в объемных единицах, приведенный к среднеалгебраическому давлению в пласте $\frac{(P_e + P_w)}{2}$; Q_m — дебит газа в единицах массы; γ_0 — плотность газа при атмосферном давлении и температуре замера, значение w/RT принимается для идеального газа. В обоих этих уравнениях конечное значение k будет выражено в единицах дарси при условии что μ выражено в сантипуазах; Q и $\bar{Q}$ — в *см³/сек*; h — в *см*;

---

[1] Вывод этого уравнения дан в гл. IV, п 2. Здесь следует отметить, что значения логарифма во всех формулах настоящей работы относятся к основанию $e = 2{,}71828$. Зависимость между основанием e и основанием десятичных логарифмов дается соотношением $\log_{10} x = 0{,}43429 \ln_e x$.

[2] Вывод этих уравнений дан в гл. XI, п. 3.

P_e и P_w — в *ат*; Q_m — в *г/сек*; γ_0 — в *г/см³*. Если проницаемость подсчитывается по величине идеального газа, w выражается в *г/моль*; T — в °К, а $R = 82{,}07$. Так как r_e и r_w входят в уравнение в виде дроби, то отношение их безразмерно только при условии, что оба радиуса выражены в тех же самых единицах. Эти формулы справедливы в том случае, если скважина полностью вскрыла песчаный пласт и когда столб жидкости соответственно уравнению (1), равный динамическому забойному давлению P_w, больше мощности песчаного пласта. Тогда течение горизонтальное, радиальное, без гравитационной составляющей.



Фиг. 17. Корректирующие множители для подсчета величины проницаемости по данным текущего дебита скважин с частичным вскрытием забоя при мощностях песчаника:

I — 15,25 *м*; *II* — 22,9 *м*; *III* — 38,15 *м*; *IV* — 61 *м*.

Если скважина не вскрыла полностью песчаный пласт и h в уравнениях (1) и (2) берется просто как мощность песчаника, открытого забоем скважины, следует ввести некоторую поправку в эти формулы, иначе применение их дает повышенное значение для k. Поправочные коэфициенты, на которые должны быть умножены величины, полученные из уравнений (1) и (2), чтобы получить истинные значения проницаемости, приводятся в виде графиков на фиг. 17 как функции вскрытия забоем различной мощности песчаников для скважины радиусом 0,075 *м*. Эти графики получены на основе тщательного анализа проблемы течения в несовершенной скважине, т. е. вскрывшей пласт только частично (гл. V, пп. 3 и 4)[1]. Поправочный коэфициент применяется в обоих случаях: для скважин, дающих жидкости, и для скважин, дающих газ, но применить его можно только в том случае, если известны действительное вскрытие пласта забоем и суммарная мощность песчаника. Если песчаный пласт представлен анизотропной средой, проницаемость будет отличной в различных направлениях как параллельно, так и перпендикулярно плоскостям напластования, и в видимое значение k, которое дается уравнениями (1) и (2), должен быть введен дополнительный поправочный коэфициент. Этот коэфициент довольно легко подсчитывается на основании выводов, развитых в главе V, п. 5 и представленных на фиг. 87. Однако, ввиду того что в целом заранее неизвестна величина анизотропии, мы и не дадим здесь точного представления об этом поправочном коэфициенте. С другой стороны, если высота жидкости в скважине в процессе испытания меньше мощности песчаника,

---

[1] Возможно, что наиболее простой путь получения поправочных коэфициентов C дается формулой $C = \dfrac{\text{частичное вскрытие}}{\dfrac{Q}{Q_0}}$, где $\dfrac{Q}{Q_0}$ является отношением дебита скважины с неполным вскрытием пласта к дебиту скважины с полным вскрытием, как это показано на фиг. 264 и 265.

следует быть осторожным в выборе и применении соответствующего видоизменения уравнения (1). Это положение обычно возникает в артезианских скважинах, где можно не получить значительных дебитов без дополнительной откачки и снижения уровня ниже кровли продуктивного пласта. В дополнение к фактической высоте жидкости необходимо знать также, является ли течение в скважину подчиняющимся строго гравитационному режиму с высотой стояния жидкости в отдаленной точке песчаного пласта соответственно ниже кровли последнего, или подчиняется сложной системе артезианского и гравитационного течения с высотой напора жидкости в отдельных точках пласта больше мощности последнего.

Для первого случая — строго радиального гравитационного течения — было найдено опытным путем (гл. VI, п. 18), что проницаемость может быть определена из следующего уравнения:

$$k = \frac{\mu Q \ln \frac{r_e}{r_w}}{\pi \gamma g (h_e^2 - h_w^2)}, \qquad (3)^1$$

где γ — плотность жидкости; g — ускорение силы тяжести; h_w — напор жидкости в скважине, считая от непроницаемой подошвы продуктивной зоны, и h_e — напор на расстоянии радиуса r_e.

Если h_e превышает мощность песчаного пласта h так, что существует перепад величиной $\gamma(h_e - h)$, накладываемый на гравитационную составляющую течения, то результирующий поток в системе будет таков, что значение k будет даваться уравнением следующего вида (гл. VI, п. 19):

$$k = \frac{\mu Q \ln \frac{r_e}{r_w}}{\pi \gamma g (2hh_e - h^2 - h^2_w)}. \qquad (4)$$

Для обоих уравнений (3) и (4) опять делается допущение, что скважина полностью вскрывает продуктивный песчаник. Практически это всегда будет иметь место, когда давления жидкости настолько малы, что гравитационная составляющая течения становится важнейшим фактором суммарной отдачи песчаного пласта.

---

[1] В связи с этим можно напомнить о так называемом „методе Тима" для подсчета k. В этом случае, применяя первоначальную интерпретацию Дюпюи значений h в уравнении (3) как фактических высот жидкости (см. гл. VI, п. 17, в котором приведено более подробное рассмотрение этого вопроса) и беря любые две точки r_e, r_w (r_1, r_2) в песчаном пласте с соответствующими высотами жидкости h_1 и h_2, можно рассматривать выражение $h_1^2 - h_2^2$ как сомножители $(h_1 + h_2)(h_1 - h_2)$ или произведение двойной средней мощности насыщения на разность депрессии при снижении уровня ниже его ненарушенного состояния между r_1 и r_2. Связывая независимое установление первого сомножителя с замером второго, определяют затем значения k для данного дебита откачки Q в двух пробных скважинах, пробуренных на расстоянии r_1 и r_2 от эксплоатационной. Однако в свете сомнительной справедливости интерпретации Дюпюи величин h как высот жидкости и большой стоимости таких определений явствует, что предложенная здесь процедура, несмотря на ее ограничения, должна быть в целом более приемлема и более практична (см. также гл. VI, п. 18 краткий обзор применения этого метода в полевых опытах, описанный L. K. Wentzel).

Следует заметить, что если действительная мощность песчаника h превосходит величину вскрытия последнего h_e, то, чтобы принять в расчет частичное вскрытие пласта в нормально работающих под давлением скважинах, формулировка уравнения (3) должна быть поправлена коэфициентом из фиг. 17 совершенно так же, как это описано для уравнений (1) и (2). Соответственно этому в случае применения уравнения (4), когда действительная мощность песчаника превосходит величину вскрытия последнего скважиной или видимую мощность h и если h_e, h_w представляют собой напоры жидкости, считая от забоя скважины, применение поправочных коэфициентов опять возместит влияние недостаточного вскрытия пласта [1].

Методика фактических определений k по вышеприведенным формулам, должна состоять в основном из измерения забойного давления в резервуаре P_e или высоты столба жидкости h_e в скважине, закрытой на достаточно продолжительный отрезок времени, чтобы достигнуть состояния равновесия между жидкостью в ней и окружающем песчанике, а также из измерения дебита Q, $\bar{Q}$ или Q_m, соответствующего значению забойного давления P_w или высоте столба жидкости h_w в процессе фонтанирования скважины с дебитом Q. Измерения должны быть произведены только при установившемся режиме течения и после того, как погаснет переходное состояние[2], наступающее за открытием скважины после ее остановки или же при изменении величины предыдущего отбора. В этом можно удостовериться, только отмечая, когда забойное давление или высота столба жидкости достигнут своего установившегося значения при твердо сохраняющейся величине дебита Q или же меняющемся значении последнего.

В дополнение к этим фактическим опытам с течением необходимо также подсчитать или измерить мощность песчаника h. Хотя h не входит непосредственно в уравнение (3), тем не менее значение его необходимо знать даже и в этом случае. Тогда можно быть уверенным, что поток в действительности гравитационный и что уравнение (3) приложимо к рассматриваемому случаю.

Наиболее точное определение h или фактическое вскрытие пласта берется в общем по буровому разрезу скважины. Если это невыполнимо или является по каким-либо причинам не удовлетворяющим по тавленным требованиям, можно использовать данные по соседним скважинам [3]. Однако, поскольку рассматривается определенная скважина, то

---

[1] Аналитическое доказательство справедливости применения поправочных коэфициентов будет приведено в гл. VI, п. 20.

[2] В гл. X, п. 6 приведен несколько отличный метод полевого измерения проницаемости пористой среды, основывающийся на измерении скорости подъема жидкости в стволе скважины, после того как столб жидкости был снижен от его положения равновесия.

[3] Кровля продуктивного песчаника в системах негравитационного течения может быть установлена, по крайней мере принципиально, при условии, что измерения производятся достаточно аккуратно. Для непрерывного диапазона забойного давления и построения графика $Q/(P_e - P_w)$ по отношению к P_w, отмечая значение, при котором это отношение начинает возрастать благодаря добавлению составляющей гравитационного течения, по мере того как высота жидкости в скважине падает ниже кровли песчаника, получим значение столба жидкости, эквивалентного мощности песчаника (для совершенной скважины).

всякий замер Q и Δp или $h_e^2 - h_w^2$ даст в общем необходимые данные, чтобы произвести по ним подсчет максимального текущего дебита скважины, а также дебитов при любом заранее намеченном значении P_w или h_w, что обычно и является действительной целью измерений. Поскольку течение является ламинарным, дебиты будут прямо пропорциональны $P_e - P_w$ или $h_e^2 - h_w^2$ (для обычного гравитационного течения). Поэтому всякий замер Q и $P_e - P_w$ или $h_e^2 - h_w^2$ даст коэффициент пропорциональности, включающий геометрические и физические параметры, который в состоянии продиктовать текущие дебиты для остальных значений $P_e - P_w$ или $h_e^2 - h_w^2$.

Что касается значения пластового давления P_e или высоты столба жидкости h_e, следует заметить, что производство двух наблюдений дебита Q для двух значений P_w или h_w позволяет исключить P_e или h_e из формул. Заменяя разность двух значений Q через ΔQ и разность значений P_w или h_w^2 через ΔP_w и Δh_w^2, можно убедиться из уравнений (1), (2), (3) и (4), что k на основании такой пары наблюдений определится из следующего выражения:

$$k = \frac{\mu \Delta Q \ln r_e/r_w}{2\pi h \Delta P_w} \tag{5}$$

для жидкостей при радиальном потоке,

$$k = \frac{\mu \Delta Q \ln r_e/r_w}{2\pi h \Delta P_w} \tag{6}$$

для газов при радиальном потоке и

$$k = \frac{\mu \Delta Q \ln r_e/r_w}{\pi \gamma g \Delta h_w^2} \tag{7}$$

для простого и сложного гравитационного течения.

Разумеется, если известны P_e или h_e, то значения k, подсчитанные для каждого эксперимента из уравнений (1—4), должны быть согласными между собой. Несоответствие значений будет указывать на ошибку в измерении или на иной — неструйный режим течения. По этой же самой причине при определении проницаемости общим правилом должно быть измерение значений Q по крайней мере для двух значений P_w или h_w.

Следующим моментом, который необходимо отметить в связи с применением вышеуказанных формул при определении k в полевых экспериментах, будет то, что формулы, выведенные для строго радиального течения, могут безопасно применяться, даже когда течение не является больше строго радиальным. Так, для случая, представленного уравнениями (1) и (2), можно совершенно строго доказать (гл. IV, п. 5), что если даже давления по всей поверхности кругового контура радиусом r_e далеки от постоянства, полученные уравнения остаются справедливыми. Это возможно при условии, что для пластового давления P_e будет принято его среднее значение, которое фактически может иметь место по всей поверхности контура. Соответственно, если скважина не находится в центре кругового контура, выражения для радиального течения все же остаются справедливыми, хотя бы местоположение скважины находилось на очень небольшом расстоянии от контура (гл. IV, п. 6).

Фактически можно сохранить вышеуказанные уравнения для k, даже если граница дренирования не является больше окружностью, при условии замены r_e соответственно обоснованным средним расстоянием от скважины до действительной границы (гл. IV, п. 16). Эти положения могут быть строго доказаны только для систем с негравитационным течением. Вместе с тем ясно, что так как они вытекают в основном из геометрии течения, то эти положения, без сомнения, будут относительно справедливы также и для гравитационных течений. Фактически можно показать на основе приближенной теории гравитационного течения в скважину, разработанной в главе VI, п. 20, что указанные выше обобщения уравнений (1) и (2) выдерживаются при тех же самых условиях также и для случая гравитационного течения, для которого даны уравнения (3) и (4). Наконец, следует помнить, что в основе вышеприведенного рассмотрения лежит подразумевающееся допущение однородности песчаника[1]. Только в том случае, когда это допущение совершенно справедливо, можно ожидать, что значение k, определенное полевым экспериментом в данной скважине, будет согласно с величиной, полученной лабораторным измерением керна, который мог быть взят из той же самой скважины. Если песчаник слоист или же имеет участки или прослойки с меняющейся проницаемостью, такого согласия ожидать нельзя. В этих случаях полевой замер дает „эффективную" проницаемость, которая, не характеризуя ни одного элемента среды, тем не менее является параметром бо́льшей практической значимости, чем тщательно проведенное определение значения проницаемости, полученное в лаборатории для маленького образца. Эта причина и обусловливает ту разницу, благодаря которой полевые измерения будут всегда давать более точные средства предугадывания фактических текущих дебитов скважины при различных противодавлениях, чем по существу своему более дорогие лабораторные определения проницаемости единичных образцов песчаника, даже если можно будет располагать последними в достаточном количестве.

12. Типовые значения проницаемости. Измерения проницаемости производились многими экспериментаторами в течение последних 40 лет. Однако наиболее систематизированный опубликованный перечень результатов измерений проницаемости нефтяных песков, выполненных со всеми предосторожностями, необходимыми, чтобы обеспечить тщательность полученных результатов, принадлежит Фенчеру, Льюис и Бэрнесу[2].

Более ранние определения, произведенные Бэрб и Брэнсон, были все проделаны с помощью воды. Многие из определений Фенчера, Льюис и Бэрнеса, были выполнены при помощи экспериментов с движением воздуха уже после того, как было признано равенство между

---

[1] На протяжении всей работы сделано дополнительное допущение об однородности жидкостей. Поэтому необходимо быть осторожным и не применять формул, выведенных в настоящей работе, к таким случаям, где, например, в песчанике освобождаются значительные количества газа, по мере того как жидкость (нефть) уходит в скважины. Величины „эффективной" проницаемости, полученные на основании применения этих формул, к таким случаям не будут постоянными течения, но будут изменяться в целом в зависимости от скорости течения и количества газа, освободившегося в пласте песчаника.

[2] Fancher, Lewis and Barnes, цитированная работа.

измерениями проницаемости с помощью жидкостей и газов. Большое преобладание данных о песчаниках из Пенсильвании обязано не только близости этих исследователей к нефтяным месторождениям Пенсильвании, но и тому обстоятельству, что в северо-западной части указанных месторождений стало текущей практикой отбирать керны и определять проницаемость продуктивных песчаников во всех новых скважинах, которые бурились для целей заводнения нефтяных горизонтов. Однако в этой же таблице приводится достаточное количество определений и по другим месторождениям, чтобы дать, по крайней мере, общее представление о порядке величины проницаемости, которую можно встретить в различных пластах. Последовательные замеры образцов из одного и того же месторождения показывают большое разнообразие проницаемости, которое можно встретить в том же самом продуктивном горизонте. Фенчер, Льюис и Бэрнес приводят некоторые весьма интересные примеры изменчивости проницаемости образцов песчаника из одной и той же скважины. Их данные особенно резко показывают наличие прослойков непроницаемых глинистых сланцев, полученных в результате исследования образцов при непрерывном керноотборе.

Из рассмотрения данных по скважине следует заметить, что хотя пористости в целом остаются почти неизменными, в отношении проницаемости Брадфордский песчаник представлен двумя отличными разностями. В то время как второй образец показывает в целом удовлетворительную степень однообразия проницаемости, в первом керне имеются две вполне определенные „плотные“ зоны. Третий образец являет собой пример замечательного постоянства пористости с весьма умеренными колебаниями проницаемости. Четвертый керн как будто является характерным для брадфордского песчаника. Он показывает неустойчивость проницаемости и отчетливую слоистость песчаника [1].

Эти же авторы показывают достаточно высокую проницаемость типичного песчаника Венанго. Значительную изменчивость ее можно наблюдать в некоторых кернах, взятых с непрерывным отбором, например, в образце песчаника Клерендон. В этом случае только три образца песчаника на мощности 11,1 *м* имеют проницаемость, которую можно замерить в условиях эксперимента, и эти значения показывают колебания в 54 раза.

Полученные результаты дают довольно интересный материал, который можно получить систематическим измерением проницаемости. В то же самое время они показывают, что допущение однородности пористой среды, которая слагает подземные резервуары, несущие жидкость, является совершенно ложным. Несмотря на это обстоятельство, можно найти полное оправдание принятой однородности, так как иначе большинство проблем практической значимости без этого допущения не будет доступно для аналитической обработки, а отсюда их нельзя будет

---

[1] Интересно заметить, что отчетливая слоистость брадфордского песчаника подтверждается также и несоответствием между временем, потребным для прохождения воды от инжекционной скважины к эксплоатационной в типовых установках по заводнению, рассчитанных теоретически и наблюденных в промысловой практике (гл. IX, п. 33), также см. M. Muskat and R. D. Wyckoff A. I M. E. Techn. Publ., 507, 1933.

подвергнуть количественному рассмотрению. Тем не менее имеются все физические основания полагать, что в большинстве случаев отсутствие однородности, показанное в табл. 8, не влияет серьезно на справедливость выводов, полученных на базе этого допущения.

Когда скважины полностью вскрывают песчаный пласт, течение двухмерное и его основные свойства, включая сюда распределение давления и линий тока, не зависят от численного значения проницаемости. Действительно, одно и то же явление будет иметь место в двух параллельных или примыкающих слоях различной проницаемости при условии, что граничные условия остаются теми же. Единственная физическая разница между ними будет заключаться в том, что численные величины скоростей жидкости для соответственных точек этих двух слоев будет всегда находиться в зависимости от их проницаемости. Все эти теоретические выводы, основанные на допущении, что слоистый песчаник эквивалентен единичной однородной пористой среде, будут совершенно справедливы, при одном лишь условии, что проницаемость, входящая в выражения для скоростей суммарного течения, берется как средневзвешенная величина из всех определенных значений для различных слоев согласно их мощностей. Суммарное течение будет иметь правильную величину с этой поправкой, а скорость в любой точке будет средневзвешенной из скоростей в различных слоях. Отсюда, поскольку изменчивость проницаемости в горизонтальном направлении не имеет значительной величины, можно при теоретическом исследовании таких проблем, которые в основном двухмерны и где проекция течения представлена горизонтальной плоскостью, совершенно не принимать во внимание изменчивости ее в вертикальном направлении. По отношению к изменчивости проницаемости в горизонтальном направлении следует заметить, что за исключением того случая, когда эти изменения имеют место в непосредственной близости к забою скважины или сходящейся поверхности стока, только такие изменчивости представляют собой практическую значимость, которые имеют значительное распространение по площади. Влияние рассеянных локализированных пятен высокой или низкой проницаемости будет усреднено в течении, имеющем большие размеры, и его совершенно не следует принимать в расчет при аналитических выкладках.

В тех проблемах, что рассматривают частичное вскрытие песчаника скважинами или же просачивание под плотинами, где значительная часть или же все течение движется в направлении крупных изменений проницаемости, последние, разумеется, могут серьезно влиять на основные свойства потока. В этом случае, если только принять в расчет изменения проницаемости, могут быть получены точные выводы. Тем не менее ввиду огромных аналитических трудностей, связанных с этим расчетом, наличие изменений проницаемости, за исключением известных простых случаев, заставляет нас вернуться к допущению однородности, так как только последним путем мы можем получить определенные результаты полуколичественного характера. В большинстве проблем качественная сторона явления неоднородности может быть достаточно легко установлена физическими доказательствами, и выводы, основывающиеся на допущении постоянства проницаемости, дадут ограничивающие случаи по отношению к тем, где проницаемость является величиной переменной.

С той же самой точки зрения можно рассматривать и значимость анизотропности песчаника, как это показывают относительные значения проницаемости, замеренные параллельно и перпендикулярно плоскостям напластования. Из 65 пар данных, имеющихся в таблице Фэнчера, Льюиса и Бэрнеса более чем две трети (46) дают значение проницаемости параллельно плоскостям напластования выше по сравнению с теми, которые определены в плоскости, нормальной к последним. Отношение между этими двумя значениями проницаемости колеблется от 1 до 42. С другой стороны, среди тех случаев, где проницаемость нормально к плоскости напластования превосходит проницаемость в плоскости, параллельной последней, максимальное отношение между этими двумя величинами составляет 7,3.

Здесь опять следует заметить, что допущение изотропности, лежащей в основе анализа практически всех проблем, рассматриваемых в последующих главах, будет вполне достаточным, чтобы дать правильное представление о важнейших свойствах течения, в большинстве случаев представляющих промышленный интерес. В действительности, это будет совершенно справедливо, если течение двухмерно и проекции его параллельны плоскостям напластования. При этих условиях просто отсутствует слагаемая скорости, нормальная к плоскости напластования, так что проницаемость в этом направлении не входит в задачу [1]. С другой стороны, когда эта задача включает составляющие течения более чем в одном направлении с различными величинами проницаемости, анизотропность может быть принята в расчет, применяя преобразование координат. Последнее описано в гл. IV, п. 15 и освещается исследованием в гл. V, п. 5 проблемы о скважинах, частично вскрывающих анизотропный продуктивный песчаник. Как это будет показано ниже, аналитическое решение задачи в системе преобразованных координат эквивалентно такому, что соответствует течению в изотропной среде с соответственно измененными границами. Поэтому с аналитической точки зрения при рассмотрении таких анизотропных систем приходится возвращаться к решению изотропных систем с несколько видоизмененной геометрией, так что полное рассмотрение последних включает в то же самое время неявное решение аналогичных проблем, где можно по желанию принять в расчет анизотропию. Отсюда в большинстве случаев совершенно достаточно рассмотреть сначала проблему, как заданную в изотропной среде, и только в самом конце, если подвергается изучению влияние анизотропии, ввести соответствующее преобразование координат. Типичные данные о проницаемости несцементированных пористых разностей приведены в табл. 7. В таблицу включены данные о пористости, чтобы показать более ясно характеристику природы пористой среды в дополнение к той, что дается ситовым анализом, так как на основании вывода, сделанного в гл. II, п. 6, проницаемость несцементированной пористой среды данного агрегата песчаных зерен может изменяться в широких пределах, завися от пористости, полученной при набивке. Несцементированная разность не включает в себя

---

[1] См. гл. V, п. 5, особенно фиг. 87, показывающую, что для скважины, полностью вскрывшей песчаник, текущие дебиты не зависят от проницаемости, нормальной к плоскости напластования.

лишнюю переменную, определяемую цементацией ее, и чья изменчивость может явиться причиной больших отклонений проницаемости различных песчаников приблизительно с одним и тем же средним размером зерна и пористости. В таблице перечислено только немногое из проделанного большого количества измерений. Тем не менее они дают достаточно материала, чтобы показать, по крайней мере, порядок величины чисел, которые можно получить из определений проницаемости несцементированной пористой среды.

Таблица 7

Проницаемости и пористости несцементированных песков

Зернистость песка	Пористость, %	Проницаемость, дарси
30—40	40,0	344,81
40—50	40,0	65,89
50—60	40,0	43,46
60—70	40,0	30,96
70—80	40,0	26,36
80—100	40,0	10,49
100—120	40,0	9,93
120—140	40,0	9,26
Тонкие неоднородные пески	30—35	1—10
Илы	36—41	5—180*
Тонкие пылевидные пески	37—70	0,01—0,1**

13. Измерения пористости. Как это уже было показано в предыдущих разделах, производительность однородной жидкости, движущейся в пористой среде, полностью определяется проницаемостью последней и только косвенно зависит от пористости, которая в основном является статическим свойством. Тем не менее пористость имеет огромнейшую значимость при промышленной оценке пористых разностей, заполненных нефтью или газом, так как она определяет суммарное содержание жидкости в таких резервуарах. Поэтому мы вкратце опишем некоторые типовые методы измерения пористости пористой среды, коснувшись только основных принципов, заключенных в этих методах [1].

Следует сделать различие между абсолютной пористостью среды и ее эффективной пористостью. Первая дает суммарный объем всех пустот в пористой среде в процентах по отношению к ее валовому объему и в случае сцементированной разности будет включать в себя объем всего порового пространства вне зависимости от того, соединяются ли между собой поры для движения жидкостей или нет. Второе понятие относится только к той части порового пространства, которое предоставлено потоку жидкости. Совершенно ясно, что только соединяющиеся поры могут влиять на проницаемость среды как косвенным путем, так и непосред-

---

* Vaidhianathan V. L. and Luthra H. R., Punjab Irrigation Research Institute, Research Pub., 2, № 2, 1934.

** Traxler R. N. and Baum L. A. H., Physics, 7, 9, 1936.

[1] Более подробный обзор всех этих методов можно найти в работе Фенчера, Льюиса и Бэрнеса, а также см. работу O. E. Meinzer U. S. Geol. Surv. Watersupply Paper, 489, 1923.

ственно воздействуя на нее. Однако для полноты опишем оба метода определения как для полной, так и эффективной пористости пористой среды. Общепризнанный и наиболее точный метод определения суммарной пористости образца горной породы принадлежит Мельчеру и Нэттингу[1]. Этот метод является полностью гравиметрическим и покоится на следующем соотношении:

$$f = 100\left(1 - \frac{V_g}{V_b}\right) = 100\left(1 - \frac{\gamma_b}{\gamma_g}\right), \qquad (1)$$

где f — пористость, V_g и γ_g — объем и плотность зерен песка в образце и V_b, γ_b — валовой объем и видимая (валовая) плотность образца. После тщательного экстрагирования какой бы то ни было жидкости из образца и высушивания его так, как это было описано при рассмотрении измерений проницаемости, плотность γ_b определяют следующими этапами: 1) производят взвешивание образца; 2) покрывают образец тонким слоем парафина или коллодия определенной плотности и снова подвергают его взвешиванию; прирост в весе, деленный на плотность покрытия, дает объем последнего[2]; 3) погружают образец в заполненный водой пикнометр, предварительно взвешенный пустым и с заполнением воды, и подвергают его опять взвешиванию. Потеря веса, найденного этапом (3), деленная на плотность воды, даст объем покрытого защитной пленкой образца, а вычитая объем покрытия и деля на вес (1), получают искомую величину γ_b. Затем определяют плотность зерен песка, раздробляя образец в ступке и измеряя объем взвешенного количества зерен[3], замещением жидкости (тетрахлорэтан или тетралин) в пикнометре методом, аналогичным описанному при нахождении γ_b. Затем по уравнению (1) находят значение f.

Значительно более простая процедура представлена методом Русселя[4], который базируется на 1-й части уравнения (1) и требует только объемных измерений. Валовой объем образца определяется с помощью

---

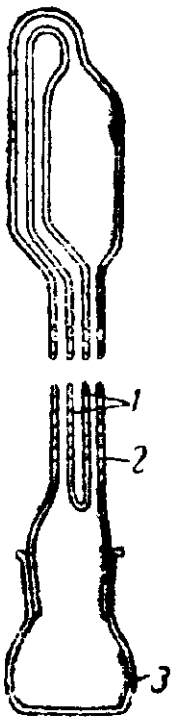
[1] Melcher A. F., A. I. M. E., 65, 469, 1921; Amer. Assoc. Petrol. Geolog., 8, 716, 1924; там же, 9, 442, 1925; Nuting P. G., Amer. Assoc. Petrol. Geolog., 14, 1337, 1930.

[2] Если в качестве иммерсионной жидкости применяется ртуть, этот этап может быть опущен, за исключением образцов с крупными порами. В последнем случае было установлено, что наиболее удобным прибором для взвешивания являются весы Жоли, измененные Эти (Athy, Amer. Assoc. Petrol. Geolog., 14, 1337, 1930).

[3] Следует заметить, что при экспериментировании с нефтяными или водяными песками не следует сушить зерна песка после раздробления образца, чтобы получить плотность зерен. В уравнении (1) γ_g следует рассматривать как определяющую также содержание массы жидкости в изолированных порах образца. Если для нахождения γ_g взята абсолютная плотность высушенных зерен, уравнение (1) даст ошибку в величине суммарной пористости $\Delta f = \gamma_1 \delta f / \gamma_g$, где γ_1 — средняя плотность жидкости в изолированных порах и δf — разность между суммарной и эффективной пористостью (M. Muskat, Rev. Sci. Instr., 7, 503, 1936). Так, если $\gamma_1 = 1$, $\delta f = 1\%$, $\gamma_g = 2{,}6$, то $\Delta f = 0{,}38\%$, что полностью сводит на-нет высокую тщательность, которая присуща методике определения γ_b и γ_g.

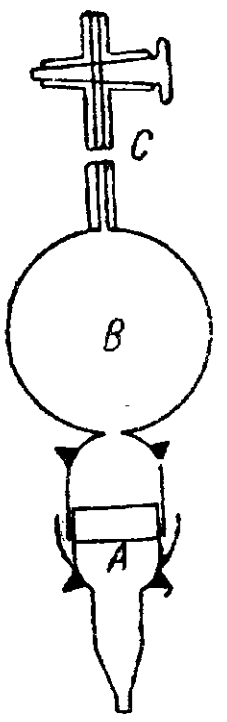
[4] Russel W. L., Amer. Assoc. Petrol. Geolog., 10, 931, 1926; см. также H. R. Brankstone, Geaby W. B. and Smith W. O., Amer. Assoc. Petrol Geol., 16, 915, 1932.

стеклянного волюметра (фиг. 18), который состоит в основном из двух сосудов приблизительно одинакового объема, соединенных двумя параллельными градуированными трубками. Нижний сосуд присоединяется притертой поверхностью к небольшому контейнеру для образца. Прибор повертывается, и верхний сосуд заполняется тетрахлорэтаном до откалиброванной нулевой отметки. Образец, хорошо насыщенный тетрахлорэтаном, помещается в контейнер. Оба сосуда затем соединяются вместе и прибор возвращается в свое первоначальное положение. Замещение предварительно введенной жидкости в образец отмечается по

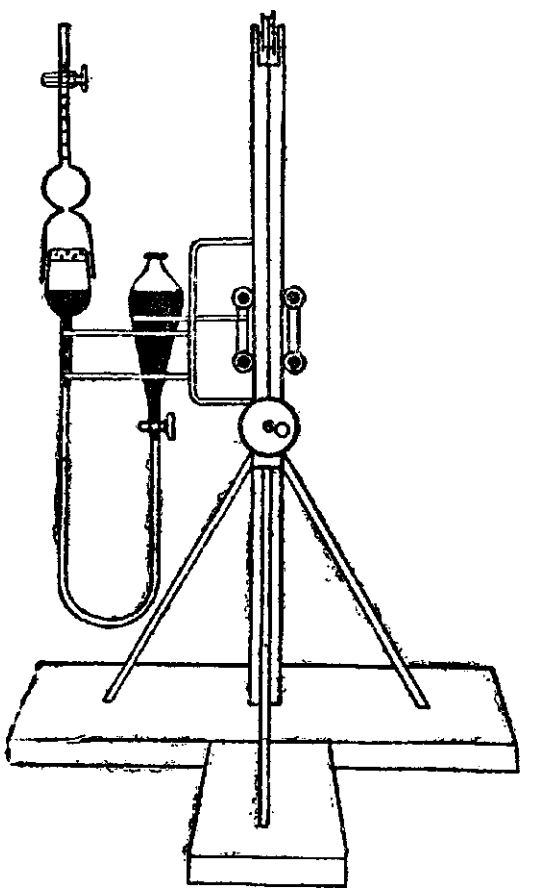


Фиг. 18. Аппарат Русселя для определения пористости:

1 — градуированные трубочки; *2* — нулевая точка; *3* — контейнер для образца породы.



Фиг. 19. Порозиметр Уэшберна и Бэнтинга.



Фиг. 20. Схематическое изображение подъемного приспособления для сосуда, выравнивающего уровни в порозиметре типа Уэшберна — Бэнтинга.

калиброванным соединительным трубкам, давая, таким образом, непосредственный валовой объем образца. Та же самая процедура, но с соответствующими видоизменениями повторяется над раздробленными зернами песка образца, и устанавливается их объем. Пористость определяется подстановкой искомых величин в уравнение (1). Этот метод принципиально дает непосредственные и прямые показания. Однако он требует исключительно высокую технику эксперимента, чтобы избежать значительных ошибок, могущих возникнуть при переносе образца после насыщения в волюметр, а также при разрушении образца на составляющие его зерна.

Кроме того, при опыте с уплотненными песчаниками неполное насыщение образца поведет к дополнительным ошибкам. Это может произойти благодаря последующему проникновению жидкости из волюметра в образец, после того как последний ввели в контейнер и подвергли иммерсии.

Один из первых методов, разработанных для измерения эффективной пористости и главный принцип которого является основой большинства конструкций „газовых порозиметров“, принадлежит Уэшберну и Бентингу [1]. Основной принцип его заключается в непосредственном измерении объема воздуха или газа, содержащегося в соединяющемся поровом пространстве при атмосферном давлении, после того как газ подвергнут расширению. Определение пористости выполняется на порозиметре, представленном на фиг. 19—20, где A — камера для образца, B — камера расширения, C — градуированный капилляр, припаянный к верхней части B и снабженный краном на конце. Сначала улавливается воздух в образце при атмосферном давлении поднятием уравнительного сосуда, пока уровень ртути в порозиметре не поднимется выше крана при его закрытом положении. Затем уравнительный сосуд опускается вниз, чтобы уменьшить давление в порозиметре и позволить воздуху, заключенному в образце, расшириться и проникнуть в градуированную трубку. Объем этого удалившегося воздуха при атмосферном давлении замеряется вторичным поднятием уравнительного сосуда, пока ртуть в нем и в градуированной трубке не установится на одной высоте.

После того как воздух, собравшийся в градуированной трубке, будет удален открытием крана и будет произведено повторное наполнение трубки ртутью до уровня последнего, объем воздуха, остающегося в образце при уменьшенном давлении, соответствующем той величине, при которой был удален первый замеренный объем, определяется повторением первоначальной процедуры. Этот процесс повторяется до тех пор, пока остающееся количество воздуха в образце не становится настолько малым по объему, что его можно не принимать во внимание. Затем валовой объем образца замеряется методом замещения или гравиметрическим. Отношение этих величин дает значение пористости [2]. Отличный метод предложен Бэрнесом [3]. Основой этого метода, который также дает значение эффективной пористости, является определение объема сообщающихся пор взвешиванием высушенного образца, а затем насыщенного тетрахлорэтаном. Разность этих двух весов, деленная на плотность жидкости, даст искомый объем. Полное насыщение образца достигается отсасыванием воздуха, заполнявшего его соединяющиеся поры, из высушенного предварительно керна в процессе иммерсии в сосуде с тетрахлорэтаном.

Когда сосуд открыт в атмосферу, жидкость проникает и насыщает эвакуированные поры. Валовый объем образца определяется затем по

---

[1] Washburn E. W. and Bunting E. N., journ. Amer Ceramic Soc., 5, 48, 112, 1922.

[2] Процедура, описанная здесь, в действительности представляет собой видоизменение первоначального метода Уэшберн-Бэнтинга, разработанное Фенчером, Льюисом и Бэрнесом. Дальнейшие вариации первоначального принципа предусматривают расширение газа в образце и камере образца, заполненной под высоким давлением, в другую камеру с установленным объемом (C. J. Coberly and Stevens A. B., A. I. M. E., Petr. Dev. Technol., 103, 261, 1933), или же в бюретку с атмосферным давлением (R. B. Barnes, p. 50, Prod, Bull., 217, Amer. Petrol. Inst., 1936). Объем зерен образца получается непосредственным приложением закона Бойля.

[3] Barnes K. B., Bull. Mineral Ind. Exp. Sta., Penn State College, 10, 1931

Таблица 8

Пористость сцементированных песчаников и горных пород

Песчаник	Месторождение	Суммарная пористость, %		Эффективная пористость, %	
		Мельчер-Нэттинг	Руссель	Уэшберн-Бентинг	Бер эс
Стоктон	Стоктон, Нью-Йорк		1,3		1,2
»	» »		2,9		2,7
»	» »		7,9		7,6
»	Лэмбервилл		3,7		3,5
»	»		4,3		4,3
Чикис	Нарвон стейшен		3,8		3,6
»	» »		4,3		4,1
»	Валлей Фордж		4,9		4,8
»	» »		6,0		5,1
»	» »		7,8		7,2
3-й Венанго	Ойл Сити		7,5		4,8
»	» »		8,5	8,3	
»	» »	11,1	9,8		
»	» »	11,4	11,3		
»	» »		12,7	12,6	12,4
»	» »			13,3	12,9
»	» »	13,2	13,0		
»	» »		13,3		13,3
»	» »			14,6	14,3
»	» »	14,3	14,5		
»	» »		15,3	14,9	14,5
»	» »		15,5	14,9	14,4
»	» »		16,0	15,7	
»	» »	16,4	16,3		
»	Плезентвил		17,1	14,7	
»	»		17,7		17,4
»	»		17,8	15,3	
»	»	17,7	17,8		
»	»			20,9	20,8
»	»			21,6	21,3
3-й Брадфорд	Брадфорд		13,1	12,2	12,1
»	»		13,4	13,3	13,0
»	»	13,6	13,5	13,3	12,8
»	»		13,6	13,4	13,1
»	»		13,7	13,2	13,0
»	»	16,1	15,7	15,4	14,9
»	»		16,1	15,6	15,5
»	»		16,2	15,2	15,0
»	»		16,9	15,3	15,0
Кларендон	Уоррен		10,0	9,9	9,3
»	»		11,8	11,8	11,6
»	»		12,1	11,8	11,4

Русселю или иному эквивалентному методу. В этом случае вопрос полноты насыщения керна, особенно для уплотненных песчаников, в течение определенного интервала времени, а также соответственная обтирка насыщенных поверхностей опять создают большую неуверенность в абсолютной точности этого способа.

В табл. 8 и 9 Фенчер, Льюис и Бэрнес [1] дают интересное сравнение всех четырех методов, описанных выше, а также типовые измерения пористости, произведенные этими авторами по различным методам. Можно видеть, что суммарная пористость во многих образцах превосходит эффективную пористость на 0,5—1,0%, а в одном случае даже

Таблица 9

Сравнение методов определения пористости

Рассматриваемые параметры	Мельчер-Нэттинг	Руссель	Уэшберн-Бентинг	Бэрнес
Тип пористости	Суммарная	Суммарная	Эффективная	Эффективная
Прибор	Дорогой*	Дешевый	Дешевый	Дорогой*
Точность	До 0,005%**	До 0,025%***	До 0,075%	До 0,05%***
Время измерения	4 часа	1 час	0,75 часа	1 час
Размеры и форма	1 кусок диаметром 2,5 *см* и длиной 1,25*см*	Один или несколько маленьких кусков, в сумме равных от 10 до 14 $см^3$. Форма должна позволить поместить в прибор образец	Предпочтительно 1 кусок от 10 до 14 $см^3$; правильные контуры. Форма должна позволить поместить в прибор образец	1 кусок 10—14 $см^3$; правильного контура; форма должна позволить поместить в прибор испытуемый образец
Предназначение	Сцементированный песчаник любой структуры	Сцементированный песчаник любой структуры	Любая горная порода с малым отверстием пор	Любая горная порода с малым отверстием пор
Условия после анализа	Уменьшение до размеров зерна	Уменьшение до размеров зерна	Некоторые поры заполнены ртутью, последняя прилипает к поверхности зерен	Легко восстанавливается до первоначальных условий

[1] Цитированная работа, Bull., 12, 1933.

* Основная статья расхода — аналитические весы. Если последние надо купить специально для пользования этим прибором, последний дорог. Если же весы уже имеются, то стоимость его такая же, как и остальных приборов.

** С прецизионным аппаратом.

*** С весьма точной техникой производства опытов.

на 3,8% [1,2]. Такая разница может дать ясное представление о больших количествах возможных к извлечению подземных жидкостей при подсчете запасов в пластовых условиях. Можно вспомнить из гл. I, п. 6, что для несцементированных песков граница возможной пористости однородных шаров представляется соответственно 26,0—47,6%. Верхний предел обычно остается справедливым для зерен нешаровой формы и неоднородного распределения размеров, за исключением тех случаев, когда имеет место экстенсивное „сводообразование" зерен внутри пористой среды [3]. Нижний предел — 26% может быть значительно снижен путем смешивания песков с различными размерами зерен, и пористость может даже практически совершенно исчезнуть при добавлении пыли или илов.

---

[1] Имеются сообщения, что в таких песках, как, например, взятые из месторождения Кеттлмен-Хилс, Калифорния, эта разница настолько высока, что суммарная пористость в три раза выше эффективной пористости (16,2—5,2) (см. уже цитированную работу C. J. Coberly and Stevens A. B.).

[2] Большое количество аналогичных данных, относящихся к скважинам, из которых были взяты образцы, можно найти в работе A. F. Melcher, Amer. Assoc. Petrol. Geolog., 8, 716, 1924.

[3] Эти исключения можно обычно встретить в порошках, где „сводообразование" бывает настолько экстенсивным, что пористость возрастает до таких высоких значений, как 70% (R. N. Traxler and Baum L., A. H., Physics, 7, 9, 1936).

Глава третья

ОБЩИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

1. **Основные гидродинамические соотношения.** Раньше чем приступить к анализу и количественному рассмотрению специальных задач по движению жидкости в пористой среде, было бы неплохо сначала дать обзор и подвести итог некоторым, хорошо известным принципам гидродинамики, которые можно приложить к любому течению. После этого мы сформулируем те соотношения, которые характеризуют течение жидкости в пористой среде, и на их основе разовьем решения, которые соответствуют специфическим проблемам, представляющим промышленный интерес. При производстве анализа основных принципов гидродинамики легко установить, что они представляют собой вновь сформулированные соответственные основы механики в такой редакции, чтобы их можно было приложить к течению жидкостей. Так, раньше всего следует заметить, что хотя жидкости и не представляют собой устойчивых систем, но они подчиняются закону сохранения материи. Этот закон гласит, что масса жидкости в замкнутой системе не может ни создаться вновь, ни исчезнуть.

Для целей анализа представляется удобным сформулировать этот закон по отношению к движению жидкости следующим образом: избыток массы потока в чистом виде в единицу времени для бесконечно малого элемента объема жидкости точно равен изменению плотности жидкости в этом элементе в единицу времени, помноженному на объем элемента. Если подвергнуть это положение дальнейшему анализу, то оно получит вид, эквивалентный уравнению:

$$\operatorname{div}(\gamma\bar{v}) = \frac{\partial}{\partial x}(\gamma v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\gamma v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\gamma v_z) = -\frac{f\partial\gamma}{\partial t}, \qquad (1)^1$$

где $\bar{v}$ — вектор скорости жидкости в точке (x, y, z), обладающий компонентами v_x, v_y, v_z; γ — плотность жидкости в точке (x, y, z); f — пористость среды.

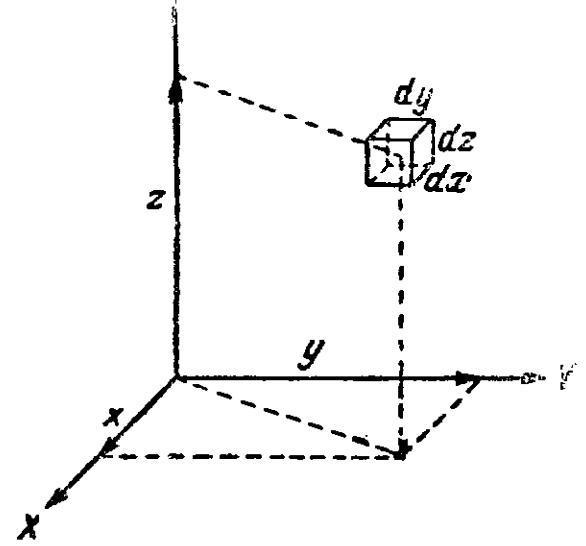
---

[1] Обозначение div или ∇ взято из обозначений векторного анализа и определяется средним выражением в уравнении (1), где γv рассматривается как общая функция вектора (A. P. Wills, Vector Analysis, 2d edit., 1923).

Уравнение (1) можно вывести следующим путем. Возьмем прямоугольный параллелепипед с ребрами dx, dy, dz и центром в точке (x, y, z); масса потока через боковую сторону $dydz$, перпендикулярную к оси x на расстоянии $x - \frac{dx}{2}$ от плоскости yz будет, очевидно (фиг. 21):

$$\left[\gamma v_x - \frac{\partial}{\partial x}(\gamma v_x)\frac{dx}{2}\right] dydz,$$

где γv_x относится к точке (x, y, z).



Фиг. 21.

Так как масса вытекает с параллельной стороны, то она выразится через

$$\left[\gamma v_x + \frac{\partial}{\partial x}(\gamma v_x)\frac{dx}{2}\right] dydz,$$

и рабочий поток, прошедший через обе стороны параллелепипеда, будет разностью расхода на этих двух сторонах, или

$$\frac{\partial}{\partial x}(\gamma v_x)\, dxdydz.$$

Рассматривая аналогично этому остальные стороны параллелепипеда и складывая полученные величины вместе, находим, что величина результирующего потока в единицу времени для элемента объема $dxdydz$ будет:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(\gamma v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\gamma v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\gamma v_z)\right] dxdydz.$$

Масса жидкости в элементе объема будет, очевидно, $\int \gamma\, dxdydz$, где γ — мгновенное значение плотности в точке (x, y, z). Отсюда убыль массы в элементе за единицу времени может быть выражена:

$$-\frac{\int \partial\gamma}{\partial t}\, dxdydz.$$

Приравнивая это выражение согласно закону сохранения материи, величине, определяющей убыль массы из элемента объема, и сокращая диференциал объема $dxdydz$, получаем непосредственно уравнение (1).

Уравнение (1), так называемое „уравнение неразрывности“ или его эквивалент встречаются почти во всех отраслях физики. В рассматриваемом случае оно определяет собой закон сохранения материи. В теории электричества несколько измененные формы его выражают закон сохранения заряда. В теории теплопередачи аналогичное уравнение неразрывности выражает закон сохранения тепловой энергии. Фактически каждый физический закон сохранения может быть выражен в форме, эквивалентной уравнению (1). Если состояние потока не зависит от времени, т. е. он является установившимся, правая сторона

уравнения (1) становится равной нулю, и уравнение неразрывности принимает вид:

$$\operatorname{div}(\gamma\bar{v}) = \frac{\partial}{\partial x}(\gamma v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\gamma v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\gamma v_z) = 0. \qquad (2)$$

Это уравнение может быть в известных случаях еще более упрощено. Мы уже подчеркивали, что при рассмотрении нами вопросов гидродинамики мы имеем дело с материальной жидкостью. Отсюда становится ясной необходимость установить природу рассматриваемой жидкости и термодинамический характер ее движения.

Иными словами, следует знать „уравнение состояния", определяющее собою жидкость. В общей форме это уравнение представляет количественную зависимость между плотностью γ, давлением p и абсолютной температурой T, что может быть выражено следующим равенством:

$$\Phi(p, \gamma, T) = 0, \qquad (3)$$

где p, γ и T относятся к одному и тому же элементу жидкости.

В качестве примера уравнения (3) можно отметить, что если принять жидкость физически совершенно несжимаемой, получим уравнение состояния следующего вида:

$$\gamma = \text{const}. \qquad (4)$$

Для идеального газа уравнение состояния будет:

$$p - \frac{\gamma RT}{w} = 0, \qquad (5)$$

где w — молекулярный вес газа;

R — газовая постоянная, отнесенная к 1 молю.

Уравнение (3) представляет собой определение природы исследуемой жидкости в аналитической форме, и поэтому оно должно являться отправным пунктом при рассмотрении каждой гидродинамической задачи. Установление термодинамического режима течения потребует, разумеется, иного уравнения вида (3) и потому позволит исключить одно из переменных p, γ и T, чтобы дать полное описание термодинамической природы жидкости и течения с помощью только двух переменных, например, $\gamma = \gamma(p)$.

Так, если жидкость представлена идеальным газом и уравнением состояния будет (5), т. е. течение будет изотермическим, характеристика этого типа течения в аналитической форме выразится:

$$T = \text{const}, \qquad (6)$$

что является упрощением уравнения (5) до вида:

$$\gamma = cp; \qquad c = \frac{w}{RT}. \qquad (7)$$

С другой стороны, если течение адиабатическое, мы вместо уравнения (6) будем иметь:

$$T = \text{const}\ \gamma^{m-1}, \qquad (8)$$

где m — отношение удельной теплоты при постоянном давлении к удельной теплоте при постоянном объеме. В этом случае уравнение (5) приведется к виду:

$$p = \left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)^m, \tag{9}$$

где γ_0 — плотность для $p = 1$.

Уместность приложения уравнения состояния к решению гидродинамических проблем может быть показана на примере непосредственного применения уравнения (4).

Так, для случая несжимаемых жидкостей уравнение (4) должно быть подставлено в уравнение неразрывности (2), что приведет его к виду:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \tag{10}$$

которое включает теперь только компоненты скорости.

Уравнение (10) можно рассматривать как условие, определяющее распределение скорости в любой несжимаемой жидкости. Однако аналитически этого недостаточно, чтобы определить индивидуальные компоненты скорости, а физически это уравнение не дает различия между одной несжимаемой жидкостью и другой. Оно также не делает различия между системами, подверженными воздействию внешних массовых сил, как, например, силе тяжести, и системами, где движение осуществляется под действием перепадов давления, а также между жидкостями, движущимися через пористую среду, и жидкостями, протекающими через нестесненные сосуды.

Тогда, очевидно, становится необходимым дать характеристику интересующей нас жидкости с динамической и термодинамической стороны и установить вполне определенно, как она реагирует на градиенты давления и внешние усилия. Следует также сформулировать гидродинамический эквивалент закона Ньютона: сила, воздействующая на любое тело, равняется произведению массы этого тела на его ускорение. Более детально эта формулировка будет зависить от природы жидкости и условий, при которых она движется. Хотя мы, в конечном итоге, заинтересованы только в движении жидкости в пористой среде, будет полезно рассмотреть вначале динамическую характеристику жидкости, как она дается в классической гидродинамике струйного потока.

2. Классическая гидродинамика. Уже было отмечено, для того, чтобы иметь законченную систему гидродинамики, в дополнение к уравнению неразрывности и уравнению состояния, требуется получить динамическое определение природы течения. Рассматривая элемент единицы объема жидкости, легко установить, что в целом он подвержен трем видам усилий: 1) компоненты градиента давления $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$; 2) компоненты внешних „массовых сил“ (как, например, сила тяжести) F_x, F_y, F_z, воздействующих на каждый элемент объема жидкости, и 3) силы, тормозящие движение жидкости и обязанные внутренним силам сопротивления или трению, испытываемому жидкостью. В работах

по гидродинамике[1] показано, что последние силы для случая струйного течения даются декартовыми компонентами:

$$\mu\nabla^2 v_x + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial\theta}{\partial x},\ \mu\nabla^2 v_y + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial\theta}{\partial y},\ \mu\nabla^2 v_z + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial\theta}{\partial z},$$

где μ — вязкость жидкости, определяемая как напряжение при сдвиге в жидкости, созданное единичным градиентом скорости, перпендикулярным к плоскости сдвига, и ∇^2 — оператор,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

где θ — функция, вытекающая из уравнения неразрывности, дается выражением

$$\theta = \operatorname{div}\bar{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

и физически определяет градиент объемного расширения жидкости.

Как уже было отмечено ранее, динамическое уравнение движения должно быть получено приравниванием суммы этих сил произведению массы элемента объема на ускорение, вызванное приложением сил. Так как в целом скорость жидкости будет изменяться от точки к точке, следует заметить при вычислении величины ускорения, что скорость элемента жидкости будет изменяться в течение какого-то интервала времени не только от своего первоначального положения, но будет испытывать дополнительное изменение вследствие того, что за истекший интервал времени этот элемент переместился в другую область жидкости. Поэтому ускорение должно быть выражено производной от скорости по суммарному времени, т. е. через оператор

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dv}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial y} + \frac{dz}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} + v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Объединяя эти выводы, получаем в конечном итоге динамические уравнения движения, первоначально выведенные Навье и Стоксом[2]:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma\frac{Dv_x}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + F_x + \mu\nabla^2 v_x + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial\theta}{\partial x}\\
\gamma\frac{Dv_y}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + F_y + \mu\nabla^2 v_y + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial\theta}{\partial y}\\
\gamma\frac{Dv_z}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + F_z + \mu\nabla^2 v_z + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial\theta}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

При физическом рассмотрении вопроса видно, что, полная система гидродинамических уравнений должна содержать уравнение неразрыв-

---

[1] См., например, H. Lamb, Hydrodynamics, 6 th ed., p. 577, 1932, Есть русский перевод: Лэмб, Гидродинамика, 1947 г.

[2] Navier C. L. M. H., Ann. chim. phys., 19, 234, 1821; Stokes G. G. Trans. Cambridge Phil. Soc., 8, 287, 1845.

ности, уравнение состояния и динамическое уравнение движения жидкости. Не входя в теоретический разбор достаточности этих уравнений, можно заметить, что по крайней мере с элементарной точки зрения вышеприведенная система уравнений полная, так как мы имеем пять независимых уравнений [уравнения (1), (3), гл. III, п. 1 и (1)] для пяти основных неизвестных „γ, p, v_x, v_y, v_z“[1].

В действительности эти пять уравнений в принципе достаточны, чтобы детально описать движение вязкой жидкости, движущейся внутри или через сосуд любой формы. Строго говоря, течение вязкой жидкости в пористой среде является частным случаем общей проблемы струйного движения жидкостей между непроницаемыми стенками. Поскольку поры среды имеют фиксированные размеры и их граничные поверхности имеют определенные геометрические формы, течение через эти поры в принципе подчиняется классическим уравнениям гидродинамики [уравнения (1) и (3), гл. III, п. 1].

Однако даже беглый обзор исследований в области гидродинамики показывает, что, за исключением определенных случаев с относительно простой геометрией, математические трудности при решении этих классических уравнений почти непреодолимы. Решение с помощью этих уравнений проблем движения жидкости через каналы неправильной и извилистой формы, как, например, в песчанике, остается под большим вопросом, и следует обратиться к иным методам работы в этой области.

3. Обобщенная форма закона Дарси. Из рассмотрения гл. III, п. 1 становится ясным, что поскольку гидродинамика течения в пористой среде может быть сформулирована отлично от классической теории струйного потока, это различие должно заключаться в основном в выражении динамических уравнений, которые классическая теория дает в форме уравнения (1), гл. III, п. 2. Разумеется, закон сохранения материи и термодинамические определения жидкости должны быть сохранены в любой гидродинамической системе. Однако, совершенно резонно, что динамические связи жидкости, движущейся по узким каналам, с макроскопической точки зрения могут быть представлены в совершенно отличной форме от той, что получается при микроскопическом анализе, и представлены уравнением (1), гл. III. п. 2.

Это и есть то отличие, которое было установлено эмпирическим путем ранними экспериментами Дарси над жидкостями и более поздними опытами над газами (см. гл. II, п. 2) и было сформулировано как закон Дарси. Последний гласит, что макроскопическая скорость жидкости, движущейся в пористой среде, прямо пропорциональна градиенту давления, воздействующего на жидкость. Описывая скорость макроскопически, мы полагаем, что элементы объема, к которым относятся скорость и давление, содержат предположительно большое количество пор. При этом динамические переменные фактически усреднены в большом количестве пор среды, хотя в отдельности они могут показывать большую изменчивость в пределах отдельной поры. Таким

---

[1] Предполагается, что переменная T исключается отсюда с помощью уравнения для определения термодинамического режима потока, например, уравнения (6) и (8), гл. III, п. 1.

образом, если бы можно было найти точное решение уравнения (1), гл. III, п. 2, указанные переменные соответствовали бы ему полностью. Иными словами, закон Дарси является по своей природе статистическим выводом, дающим опытный эквивалент уравнения (1), гл. III, п. 2, Стокса-Навье, усередненный на протяжении очень большого количества отдельных пор. Непосредственные эксперименты, относящиеся к закону Дарси, как это было показано в главе II, ограничены колонками или слоями пористого вещества, в которых макроскопический поток имеет по необходимости линейный характер. Поэтому следует раньше дать обобщение эмпирическим выводам, а затем уже разработать законченную теорию, которую можно будет приложить к любому течению [1].

Для этого сначала сделаем допущение, что результирующая скорость в любой точке трехмерного течения прямо пропорциональна по величине и имеет то же направление, что результирующий градиент давления в этой точке. Это будет равнозначно допущению, что результирующая скорость может быть разложена на три компонента, параллельные осям координат, причем каждый из них связан с градиентом давления независимо от остальных. Тогда закон Дарси примет следующий вид:

$$v_x = -\frac{k_x}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}; \qquad v_y = -\frac{k_y}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}; \qquad v_z = -\frac{k_z}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}, \qquad (1)^2$$

где μ — вязкость жидкости. Проницаемость k в этих уравнениях может изменяться от точки к точке и может быть различной для всех трех компонентов v_x, v_y, v_z, как это показано сносками при буквенных обозначениях. Однако среду обычно рассматривают как изотропную [3], и потому k принимается независимым от направления, если только не указывается обратное. Уравнение (1) все же не является достаточно общим, чтобы охватить все интересующие нас случаи. Если скорость жидкости имеет компонент, направленный по вертикали, ясно, что необходимо принять в расчет явным или неявным путем силу тяжести. В этом случае мы опять должны вернуться к обобщению и допустить, что если какая-нибудь массовая сила с компонентами F_x, F_y, F_z действует на единицу объема жидкости, она будет влиять на скорость точно так же, как и градиент давления. Тогда для этого случая закон Дарси напишется так

$$\left.\begin{aligned} v_x = -\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + F_x\right); \qquad v_y = -\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y} + F_y\right) \\ v_z = -\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z} + F_z\right) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

---

[1] Некоторые характерные эмпирические подтверждения, оправдывающие эти обобщения, будут приведены в гл. IV, пп. 7 и 11 (см. фиг. 37 и 55).

[2] Знак минус взят в уравнении (1) для того, чтобы компоненты скорости были положительными, когда жидкости движутся в направлении увеличивающихся значений координат (гл. II, п. 3).

[3] См. гл. II, п. 12

Если сила $\bar{F}$ имеет потенциал[1] V, можно ввести функцию Φ, определяемую выражением:

$$\Phi = \frac{k}{\mu}(p - V), \tag{3}$$

так, что

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ v_y &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ v_z &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Отсюда видно, что Φ фактически является „потенциалом скорости" — функция, отрицательный градиент которой дает вектор скорости.

Для удобства уравнения (4) могут быть объединены в единое векторное уравнение

$$\bar{v} = -\nabla\Phi. \tag{5}$$

Уравнения (3) и (5) можно рассматривать как обобщенный закон Дарси. Их можно принять за динамическую основу для всех проблем, связанных с течением вязкой, а также всех остальных типов однородных жидкостей в пористой среде. Они являются нашим заменителем уравнения (1), гл. III, п. 2 Стокса-Навье и могут рассматриваться как их макроскопический эквивалент. Следует заметить, что зависимость потенциальной функции Φ от вязкости жидкости μ выражается совершенно определенно. Поэтому нет необходимости вводить ее в значение проницаемости k, даже если оба эти фактора принимаются за постоянные величины. Как уже было отмечено в гл. II, п. 3, это разделение освобождает k от любой связи с природой жидкости и делает ее зависящей только от природы пористой среды. Фактически одной константы k вполне достаточно, чтобы охарактеризовать однородную пористую среду как носитель любой однородной жидкости.

Следующим моментом, который следует отметить по отношению к обобщенным уравнениям Дарси (3) и (4), — это отсутствие в них плотности γ. Они не только отличаются по форме от классических уравнений гидродинамики [гл. III, п. 2 (1)], но также и тем, что не содержат совершенно зависимой переменной γ. В уравнениях Стокса-Навье γ входит в член $\gamma \frac{D\bar{v}}{Dt}$, который представляет собой инерцию или силу ускорения в жидкости. Поэтому отсутствие γ в уравнениях Дарси (3) и (4) указывает на пренебрежение силами инерции. Следует заранее ожидать этого фундаментального различия, если обратить внимание на то, что благодаря очень большой поверхности, обнаженной для жидкости в пористой среде, сопротивление, определяемое вяз-

---

[1] Вектор $\bar{F}$ имеет „потенциал" Φ, если его можно представить как градиент (положительный или отрицательный, в зависимости от условий) от Φ, т. е. если $\bar{F}$ может быть выражено как $\bar{F} = -\nabla\varphi$, где ∇ — диференциальный оператор вектора с компонентами $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$.

костью, значительно превосходит любые силы ускорения в жидкости, пока не установится турбулентное течение. При этих условиях вполне правильно уже заранее пренебречь величиною инерции, как это часто и делается в действительности при пользовании классическими уравнениями для случаев, где преобладающими силами являются те, что возникают вследствие сопротивлений от внутренних сил трения. Поэтому отсутствие переменной γ в уравнениях Дарси следует приписать сравнительной незначительности сил ускорения по сравнению с внутренними сопротивлениями трения в пористой среде, несущей жидкость. Различия в форме уравнений следует отнести к влиянию на классические уравнения статистического усереднения мгновенных и мельчайших изменений, имеющих место в отдельных порах, так что создается упрощенное представление в величинах, которые имеют макроскопическое значение [1].

4. **Уравнения движения.** Теперь, когда сформулированы динамические законы, характеризующие течение жидкостей в пористой среде, мы должны вернуться обратно и дополнить их уравнением неразрывности и уравнением состояния, чтобы сделать систему полной. Так, прилагая сначала динамическое уравнение (5), гл. III, п. 3 к уравнению неразрывности (1), гл. III, п. 1, получим:

$$\operatorname{div}(\gamma \nabla \varphi) = \nabla \cdot \left[\gamma \nabla \frac{k}{\mu}(p - V)\right] = f \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \tag{1}$$

где при всех условиях, представляющих практический интерес, μ может быть принято независимым от давления и поэтому может быть вынесено за скобки. Для однородной среды k может быть также вынесено за скобки, и если мы ограничим себя однородной средой, то после этого k можно считать постоянной величиной за исключением некоторых определенных проблем, например, главы VII, при условии, что значение проницаемости не определено иным путем [2]. Уравнение (1) тогда примет вид:

$$\nabla \cdot [\gamma \Delta (p - V)] = \frac{f\mu}{k} \frac{\partial \gamma}{\partial t}. \tag{2}$$

Теперь осталось дать определение природы жидкости, чтобы получить диференциальное уравнение с одной переменной γ или p. В каче-

---

[1] В действительности было бы весьма интересно получить вывод закона Дарси как прямое следствие уравнений классической гидродинамики [гл. III, п. 2, (1)], но создается впечатление, что выводы, какие были сделаны Н. К. Боз, являются ложными (N. K. Bose, Memoir Punjab Irrigation Res. Lab., 2, № 1, 1929, and Punjab Eng. Cong., 1930). В последнем случае уравнение (4) было получено как решение уравнения (1), гл. III, п. 2, где величина инерции была отброшена, а обе стороны уравнения (4) представляли экспоненциальное изменение во времени. Оставляя в стороне посторонние изменения времени, видно, что решение уравнения (1), гл. III, п. 2 в форме уравнения (4) по необходимости должно относиться к микроскопическим скоростям и давлениям в поре и не может быть признано идентичным макроскопическим скоростям и давлениям уравнения (4), пока не будут приняты в детальный расчет граничные условия, которые бы удовлетворяли всем порам среды.

[2] См. гл. II, п. 12 для подтверждения правильности этого допущения, несмотря на большую изменчивость k, установленную по кернам из той же самой скважины.

стве достаточно общего уравнения, включающего все однородные жидкости, представляющие промышленный интерес, и все типы струйного течения, мы можем взять [1]:

$$\gamma = \gamma_0 p^m e^{\beta p}.$$

Определенные жидкости физической значимости можно подвергнуть следующей классификации:

жидкость: $m = 0$;

несжимаемые жидкости: $\beta = 0$;

сжимаемые жидкости: $\beta \neq 0$.

Газы: $\beta = 0$;

изотермическое расширение: $m = 1$;

адиабатическое расширение:

$$m = \frac{\text{удельная теплота при постоянном объеме}}{\text{удельная теплота при постоянном давлении}}.$$

Прилагая эти обозначения к уравнению (2) и делая допущение, что сила тяжести является единственной массовой силой, воздействующей на жидкость, так что $V = \gamma g z$, находим, что для несжимаемых жидкостей

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 = \nabla^2 p, \qquad (4)^2$$

где Φ определяется уравнением (3), гл. III, п. 3. Для сжимаемых жидкостей

$$\nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{\beta} - \gamma g z \right) \nabla \gamma - \gamma^2 g \nabla z \right] = \frac{f\mu}{k} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t}. \qquad (5)$$

Заметим, что нормальная жидкость имеет величину β порядка $10^{-4} ат$, в то время как величина γg имеет значение порядка $10^{-3} ат/см$. Ясно, что величиной $\gamma g z$ можно совершенно пренебречь по сравнению с $\frac{1}{\beta}$. С другой стороны, члены $\gamma^2 g \nabla z$ и $\frac{1}{\beta} \nabla \gamma$ пропорциональны отношению вертикальной массовой силы, возникающей благодаря силе тяжести, к той, что создается градиентом давления жидкости. Если это отношение имеет значительную величину, как, например, в случае систем гравитационного течения (глава VI), и сжимаемость жидкости также имеет физическую значимость, решение уравнения (5) потребует весьма точных выкладок.

Однако, подобное решение будет в целом очень трудным благодаря нелинейности уравнения. Поэтому для практических целей необходимо рассмотреть фазу сжимаемости и гравитационный компонент течения раздельно: первую путем решения уравнения (5), пренебрегая членами, включающими g, и последний — решением уравнения (4).

С практической точки зрения ошибки в этом приближении по сравнению с точным решением уравнения (5) не имеют больших послед-

---

[1] Muskat M., Physics, 5, 71, 1934.

[2] Вывод уравнения, которому подчиняется движение жидкостей в пористой среде, был первоначально дан в работе (C. S. Slichter, Geol. U. S. Survey, 19th Ann. Rept., 1897 — 1898, p. 330), где представлено большое количество решений специальных проблем, посвященных этому вопросу.

ствий; например, в тех случаях, где градиент давления будет представлен достаточно большими значениями, чтобы привести к значительным изменениям плотности жидкости на небольших расстояниях, и где этот же градиент будет очень велик по сравнению с градиентом гравитационного напора γg*. Если изменение плотности имеет значительную величину, особенно вследствие большой протяженности потока (горизонтальной) (см. гл. X, п. 1), течение будет в значительной степени ограничено горизонтальными плоскостями, и гравитационный компонент снова будет иметь малое значение. В таких проблемах, где сила тяжести играет значительную роль, влияние сжимаемости будет иметь меньшее значение, и анализ можно свободно основывать на уравнении (4). В тех же условиях, где влияние сжимаемости жидкости играет преобладающую роль, сила тяжести может быть исключена из рассмотрения. Поэтому в тех случаях, когда течение жидкости можно фактически рассматривать как течение сжимаемой жидкости, мы должны отбросить из уравнения (5) члены, содержащие g, и принять, что система подчиняется уравнению:

$$\nabla^2\gamma = \frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\gamma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\gamma}{\partial z^2} = \frac{f\beta\mu}{k}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial t}\ ; \qquad (6)$$

для газов:

$$\nabla^2\gamma^{\frac{1+m}{m}} = \frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}^{\frac{1+m}{m}} + \frac{\partial^2\gamma}{\partial y^2}^{\frac{1+m}{m}} + \frac{\partial^2\gamma}{\partial z^2}^{\frac{1+m}{m}} = \frac{(1+m)f\mu\gamma_0}{k}^{\frac{1}{m}}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial t}. \qquad (7)$$

Эти основные диференциальные уравнения мы примем как основу для решения разнообразных проблем течения в пористой среде, имеющих промышленное значение. Следует тут же заметить, что для несжимаемых жидкостей отпадает изменчивость во времени, так что в системе не может быть переходного или неустановившегося состояния, если только граничные условия не изменяются во времени. Давление подчиняется так называемому „уравнению Лапласа“, которое встречается также в других разделах физики [1].

Основное уравнение (6) для сжимаемых жидкостей включает в себя время и фактически по форме совпадает с уравнением теплопроводности Фурье [2]. Однако его форма при установившемся состоянии [3] совпадает с приведенной для несжимаемых жидкостей, где плотность играет роль потенциала давления или скорости. Подробно это будет рассмотрено в третьей части настоящей работы.

---

* Если даже $\frac{1}{\gamma_0}\cdot\frac{\partial\gamma}{dx} = 10^{-5}$, то общий градиент давления будет больше градиента силы тяжести γg в 100 раз.

[1] См. гл. III, п. 6.

[2] Carslaw H. S., «Mathematical Theory ot the Conduction of Heat in Solids», 2d ed., 1921. Есть русский перевод.

[3] Гермин „установившееся состояние“ в этой работе принимается как определение условий течения, где важнейшие динамические переменные — давление, плотность и скорость — не изменяются во времени, так что все члены основного диференциального уравнения, включающие $\frac{d}{dt}$, могут быть приравнены нулю.

Уравнение (7) для газов также содержит время и поэтому допускает неустановившееся состояние. Однако являясь при этом нелинейным и включая зависимую переменную γ в степени больше единицы, оно не может иметь точного решения в замкнутой форме. Поэтому в четвертой части будет разработана приближенная теория движения газов. С другой стороны, следует отметить, что в этом случае установившееся состояние также подчиняется уравнению Лапласа при зависимой переменной $\gamma^{\frac{1+m}{m}}$.

Уравнение Лапласа (4) принимается за основу всего аналитического материала второй части, где рассматриваются проблемы течения жидкостей при установившемся состоянии. Это уравнение вытекает из допущения, что жидкость совершенно не сжимаема. Оно дает для реальных жидкостей в общем довольно хорошее приближение, за исключением тех случаев, когда жидкость обладает ненормально высокой сжимаемостью или когда размеры потока весьма велики (см. гл. X, п.1). С другой стороны, можно рассматривать применение уравнения (4), как дающее только формальное упрощение проблемы движения реально сжимаемой жидкости. Если это только требуется, можно получить распределение плотности жидкости γ для установившегося движения сжимаемой жидкости из выражения для Φ или p, выведенного для системы несжимаемой жидкости той же геометрии, простой интерпретацией Φ или p, как γ, при одном условии, что пренебрегают влиянием силы тяжести. При этом граничные условия (гл. III, п. 5) выражаются в единицах граничной плотности или массы потока.

На поверхностях или кривых равного давления или потенциала плотность будет постоянной, и линии тока будут касательны к градиенту вектора $\gamma\nabla\gamma$ или вектору скорости массы [1] $-\frac{\gamma k}{\mu}\nabla d$. Для практических целей в связи с весьма низкой сжимаемостью реальных жидкостей всегда будет достаточно рассматривать течение жидкости в установившемся состоянии как проблему течения несжимаемой жидкости и отсюда подчиняющимся уравнению (4). За исключением тех случаев, когда сжимаемость непосредственно входит как важная часть в проблему, например, тот случай, о котором будет итти речь в гл. X, п.1, можно рассматривать решения для установившегося состояния как восстанавливающие в непрерывной последовательности изменения граничных условий во времени. Время входит во все эти выражения скорее как постоянная величина (параметр), чем как независимая переменная. Каждое мгновенное распределение давления и связанного с ним расхода будет в то же мгновение отражать граничные условия, как будто последние сохраняли свое значение и раньше в продолжение неопределенно долгого отрезка времени. Хотя такое определение изменений времени будет точным только для строго несжимаемой жидкости, однако, с практической точки зрения этого будет вполне достаточно при рассмотрении аналогичных проблем, где можно пренебречь сжимаемостью, если только система действительно находится в установившемся состоянии.

---

[1] При интерпретации символа ∇ см. уравнения (3) и (4), гл. I I, п. 5, а также сноску в гл. III, п. 3.

Следует заметить также, что основные диференциальные уравнения (4), (6) и (7) базируются на неявном допущении, что течение обладает фиксированной геометрией. Однако, для определенных типов гравитационного течения жидкость, освобождая первоначальный объем пористой среды, не возмещается, и геометрические границы интересующей нас области будут изменяться таким образом, что получится непрерывное уменьшение объема. Этот тип проблемы непосредственно входит в сферу изучения флуктуации уровня грунтовых вод, что представляет большой практический интерес в вопросах залегания вод, ирригации и т. д. К несчастью, он осложнен такими аналитическими трудностями, что получить удовлетворительные решения даже для более простых случаев не представляется возможным. Приложение теории Дюпюи — Форхгеймера, которая обычно применялась для решения таких задач и которая приведена в гл. VI, п. 17, включает в себя столько находящихся под вопросом допущений, что может быть оправдано с трудом воспроизведение анализов, базирующихся на этой теории, хотя ничего лучшего до сих пор еще не было предложено. Поэтому мы решили опустить в настоящей работе любой вид рассмотрения флуктуаций уровня грунтовых вод с надеждой, что это опущение будет стимулировать последующих исследователей к работе над этой важной проблемой. В конечном итоге можно заметить, что аналитические основы, уравнения (4), (6) и (7), решений специфических проблем течения, которые даются в последующих главах, были выведены на допущении строгой справедливости обобщенного закона Дарси, уравнение (5), гл. III, п. 3, или ламинарности рассматриваемого течения. Область применимости этого закона покрывает, как это было указано в гл. II, п. 2, почти все практически интересные проблемы. Фактически мы можем ограничить рамки настоящей работы теми проблемами течения, которые подчиняются закону Дарси.

5. Граничные и начальные условия. Как это хорошо известно из теории диференциальных уравнений в частных производных, уравнения (4), (6), (7), гл. III, п. 4, имеют бесконечное количество решений. Кроме того, решения линейных уравнений (4) и (6), гл. III, п. 4, можно связать линейно с произвольными постоянными коэфициентами, которые дадут дополнительно иные решения. Естественно, возникает вопрос, как можно выбрать среди этих решений те, которые следует приложить к какой-нибудь определенной проблеме. Без всякого детального анализа ясно, что выбранное решение должно быть таково, чтобы оно имело индивидуальный характер для интересующей нас проблемы.

Так как все проблемы, которые мы собираемся рассматривать, имеют один и тот же динамический характер и все они подчиняются уравнениям (4) и (7), гл. III, п. 4, то их различие между собой по необходимости следует отнести к различию в границах, определяющих жидкость, и в отдельных физических условиях, которые налагаются на эти границы в тот начальный момент, когда вводятся „граничные условия".

Следует заметить, что эти границы совсем не представляют собой водонепроницаемых стенок, ограничивающих область, занятую жидкостью от пространства. Они скорее являются в общем геометрическими поверхностями, во всех точках которых скорость жидкости или потенциал скорости, а также данная функция их обеих могут рассматриваться как

известные величины. Только в исключительных случаях, где на отдельных частях этих геометрических поверхностей нормальные составляющие скорости становятся равными нулю, эти части соответствуют физически непроницаемым границам [1]. Эти поверхности могут находиться всецело в конечной области пространства. В таком случае физической задачей является определение скорости и распределение потенциала внутри ограниченной поверхности для данных „граничных условий". Интересующая нас область может распространяться также до бесконечности, будучи заключена в замкнутые поверхности конечной области пространства. В одном случае нас может интересовать распределение скорости и потенциала внутри сферической области для данного распределения потенциала или скорости на поверхности сферы. Можно сосредоточить свое внимание также на пространстве, внешнем по отношению к сфере и распространяющимся до иной поверхности, замыкающей сферу, или даже до бесконечности. В последнем случае условия, которые налагаются на решение при бесконечном протяжении области, могут состоять, например, в требовании, чтобы потенциал или скорость обращались в нуль заранее указанным способом.

Когда рассматривается задача установившегося состояния, т. е. решается проблема со строго несжимаемой жидкостью, то ввиду отсутствия независимой переменной t в уравнении (4), гл. III, п. 4, является достаточным следующий перечень „граничных условий": заданные значения потенциала давления или скорости [2], нормальной составляющей скорости, или же линейной связи между ними во всех граничных точках системы, чтобы установить единственность распределения давления или потенциала внутри области с определенными границами. Если система принадлежит к неустановившемуся состоянию, с распределением плотности в системе, изменяющейся во времени, необходимо оговорить также начальные условия, т. е. первоначальное распределение плотности, при котором система начинает свое существование. Вполне понятно, что плотности, а отсюда давления в любой конечный отрезок времени в двух системах с одними и теми же граничными условиями будут совершенно различны. Например, в одном случае система имеет постоянную плотность в произвольный начальный момент, в то время как в другом случае плотность в тот же самый начальный момент имеет совершенно иное переменное распределение.

С другой стороны, следует заметить, что всякое неустановившееся состояние с граничными условиями, стремящимися к постоянным значениям, будет приближаться с течением времени к состоянию установившегося распределения, вне зависимости от начальных условий, и будет

---

[1] „Нормальной" составляющей скорости к поверхности называется компонент скорости, перпендикулярный к поверхности.

[2] Термины потенциал давления и потенциал скорости применяются здесь в достаточно широком смысле и взаимозаменяемы, так как оба они удовлетворяют уравнению Лапласа (4), гл. III, п. 4, и любой из них можно принять в качестве основной физической зависимой переменной, характеризующей течение несжимаемой жидкости. Окончательный выбор соответствующей величины при производстве фактического анализа делается в зависимости от удобства, что в свою очередь определяется той ролью, которую играет сила тяжести, воздействующая на движение жидкости.

определяться только конечными значениями граничных условий [1]. Это означает, что после неопределенно длительного промежутка времени все течения с одной и той же геометрией и одними и теми же постоянными пределами граничных условий, не содержащие внутри себя каких-либо источников жидкости или стоков (области бесконечно малого объема, где жидкость вводится в систему или удаляется из нее), будут иметь ту же самую установившуюся плотность и распределение давления. Величина расхода, при котором исчезает влияние начальных условий и устанавливается состояние установившегося распределения для данной пористой среды, определяется в основном эффективной сжимаемостью жидкости. Расход увеличивается по мере уменьшения сжимаемости. Это является следствием того факта, что „начальные условия" не нужны при решении задач с несжимаемыми жидкостями. Можно рассматривать несжимаемые жидкости как жидкости со сжимаемостью, равной нулю. Отсюда следует, что если бы в системе существовало сначала неустановившееся распределение давления, оно бы немедленно исчезло и установилось бы состояние установившегося распределения последнего. Таким образом, рассмотрение проблемы неустановившегося состояния для несжимаемых жидкостей при постоянных граничных условиях автоматически преобразуется в проблему установившегося состояния для данных граничных условий. По этой же самой причине распределение давления в системе с несжимаемой жидкостью и граничными значениями давления и скорости, изменяющимися во времени, пройдет через непрерывный ряд состояний установившихся распределений и каждый из них будет соответствовать мгновенным условиям на границах.

Однако для сжимаемых жидкостей или газов не может быть установившихся состояний, если только граничные условия не остаются во времени постоянными, так как изменения в граничных значениях не будут передаваться сейчас же остальной части системы. Фактически благодаря сжимаемости жидкости потребуется неопределенное время для полного перераспределения плотностей и восстановления условий установившегося состояния. Исходя из этого, видно, что в конечном итоге физическая проблема движения жидкостей в пористой среде в общем определяется заданием: 1) геометрических границ области пространства, для которого желательно иметь решение, 2) граничных условий на этих границах и 3) плотности и отсюда распределения давления в начальный момент. Обозначая границы через S и зависимые переменные p, Φ или γ через Φ, можем принять одну из следующих форм для обозначения граничных условий, имеющих физический смысл:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & \Phi \text{ дается на } S \\ \text{b)} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial n} \text{ дается на } S \ (n \text{ является нормалью к } S) \\ \text{c)} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial n} + h\Phi \text{ дается на } S \ [h \text{ может быть функцией от } (x, y, z)] \end{array}\right\} \quad (1)$$

где эти граничные значения зависят или не зависят от времени.

[1] Здесь делается допущение, что величина алгебраической суммы течения, проходящего через систему, стремится в конечном итоге к нулевому значению.

Тогда физическая проблема сводится к аналитической задаче нахождения функции $\Phi(x, y, z)$, которая в зависимости от природы жидкости удовлетворяла бы уравнениям (4), гл. III, п. 4; (6), гл. III, п. 1 или (7), гл. III, п. 4, и в то же самое время особенностям выбранного заранее граничного, а также начального условий, если только проблема относится к неустановившемуся течению сжимаемой жидкости или газа. К счастью, можно доказать, что если эта функция определена, то не существует других, которые бы удовлетворяли всем этим условиям. Поэтому можно быть уверенным, что если это решение было найдено применявшимся методом, то всякий другой правильный метод по необходимости приведет к тому же самому выводу.

6. Аналогии с остальными физическими проблемами. Было уже показано, что общая задача установившегося течения жидкостей в пористой среде может быть сведена к решению уравнения Лапласа с зависимыми переменными p, γ или $\gamma^{\frac{1+m}{m}}$ при соответствующих граничных условиях, которые даются, например, уравнением (1), гл. III, п. 5. Так как это уравнение очень хорошо известно по остальным разделам физики, то можно использовать общий метод его решения, а в отдельных случаях принять и сами решения для большого количества практически интересных проблем течения из числа тех, что уже были решены с иными целями в других разделах физики, простым переводом их в соответствующие гидродинамические эквиваленты. Поэтому в табл. 10 мы приводим сопоставление между гидродинамикой установившегося течения жидкости в пористой среде и проблемами установившейся теплопроводности, электростатикой и электрическим током в сплошных проводниках. Эти аналогии могут оказать помощь в отчетливом представлении себе проблем течения тем, кто уже знаком с подобными проблемами в области теплопроводности, электростатики или электротока. Существуют еще иные физические проблемы, например, известные случаи теории кручения упругих стержней или течения вязких жидкостей, согласно законов классической гидродинамики, которые также подчиняются уравнению Лапласа. Однако более широко распространенные примеры из таблицы будут совершенно достаточны, чтобы показать общность природы этих аналогий. Для удобства был выбран специфический случай течения несжимаемой жидкости, где зависимой переменной является давление p. При этом пренебрегаем влиянием силы тяжести. Однако существует одна особенность в гидродинамике течения в пористой среде, которая не имеет непосредственного аналога в остальных физических проблемах, охарактеризованных в табл. 10.

Это потенциал V в уравнении (3), гл. III, п. 3, который представляет собою потенциал силы тяжести, если он только входит в рассматриваемые проблемы течения, и имеет вид:

$$V = \gamma g z, \tag{1}$$

где z — вертикальная ось, направленная вниз. Хотя в расчет и принимается формальное введение потенциала Φ, однако, следует учитывать этот факт при установлении граничных условий, которые с физической стороны более естественно представить в виде значений давления. Так,

Таблица 10

Аналогия между течением несжимаемой жидкости в пористой среде, теплопроводностью, электростатикой и электропроводностью

Гидродинамика установившегося потока через пористую среду (несжимаемые жидкости)	Теплопроводность	Электростатика	Электропроводность
Давление p	Температура u	Электростатический потенциал Φ	Напряжение — потенциал V
Отрицательный градиент давления $-\nabla p$	Отрицательный температурный градиент $-\nabla u$	Вектор напряжения поля $\bar{E}=-\nabla\Phi$	Отрицательный градиент потенциала $-\nabla V$
$\frac{\text{Проницаемость}}{\text{Вязкость}}:\frac{k}{\mu}$	Коэфициент теплопроводности k	$\frac{\text{Диэлектрическая постоянная}}{4\pi}:\frac{\varepsilon}{4\pi}$	Удельная проводимость σ
Вектор скорости $\bar{v}=\frac{k}{\mu}\nabla p$	Величина теплопроводности $\bar{q}=-k\nabla u$	Диэлектрическое замещение $\frac{\varepsilon}{4\pi}\bar{E}=-\frac{\varepsilon}{4\pi}\nabla\Phi$	Вектор тока $\bar{I}=-\sigma\nabla V$
Закон Дарси	Закон Фурье	Закон Максвелла о диэлектрическом замещении	Закон Ома
Поверхность равного давления $p=\text{const}$	Изотермическая поверхность $u=\text{const}$	Эквипотенциальная поверхность $\Phi=\text{const}$	Эквипотенциальная поверхность $V=\text{const}$
Непроницаемые перемычки или линии тока	Изолированные поверхности или линии теплопередачи	Трубки или силовые линии	Свободная или изолированная поверхность трубки или линии тока
$\frac{\partial p}{\partial n}=0$	$\frac{\partial u}{\partial n}=0$	$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=0$	$\frac{\partial V}{\partial n}=0$

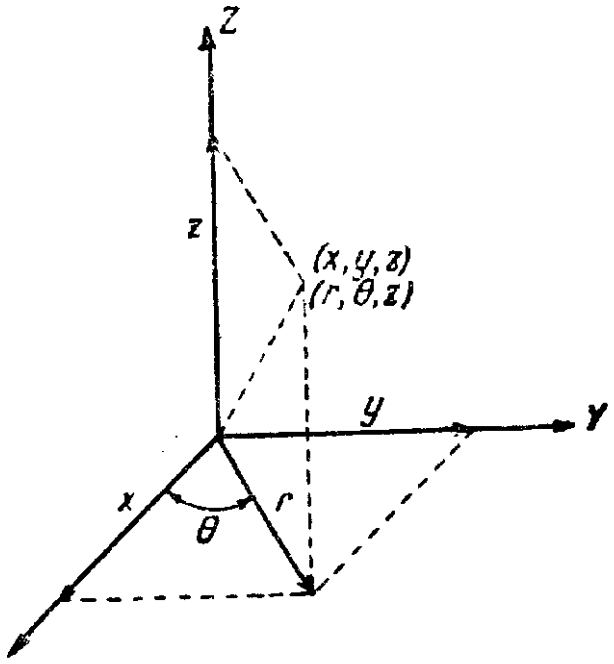
если жидкость движется по трещине в породе, которая поддерживается все время в состоянии дренирования, давление будет постоянным по всей поверхности трещины, в то время как Φ будет изменяться линейно с изменением z. С другой стороны, если трещина будет заполнена жидкостью в гидростатическом равновесии, давление по поверхности трещины будет возрастать линейно с изменением z, в то время как потенциальная функция Φ будет постоянной по всей поверхности. Если пренебречь силой тяжести, давление будет постоянным в обоих случаях по всей поверхности трещины. В общем можно принимать или давление p, или потенциал Φ. В последующих главах в зависимости от специфики рассматриваемых задач мы будем произвольно переходить от одного фактора к другому.

7. Недекартовы системы координат. Так как изучаемые в последующих разделах системы течения жидкости обладают часто особыми видами симметрии, будет удобным выразить основное уравнение Лапласа

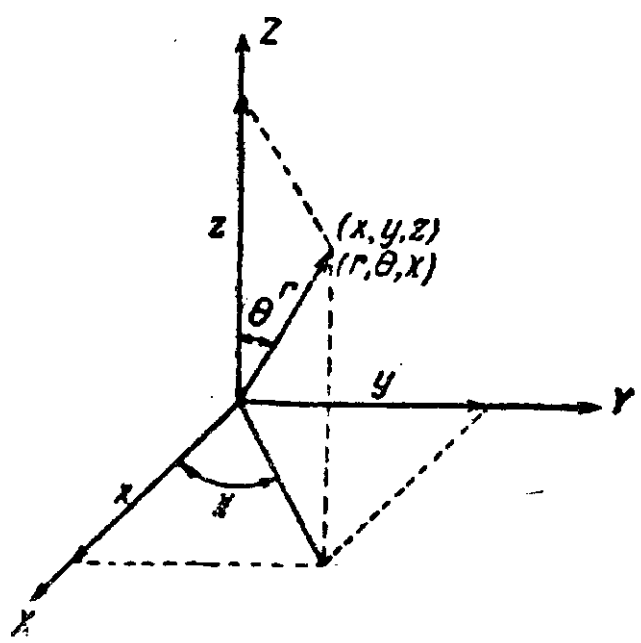
в таких системах координат, где симметрия системы может быть выражена соответственным образом. Поэтому перепишем уравнение

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial z^2} = 0$$

в цилиндрических и сферических координатах, установим их связь с прямоугольными декартовыми координатами (x, y, z) и, допустив, что Φ является потенциалом скорости, дадим компоненты последней в новых системах координат.



Фиг. 22.



Фиг. 23.

Цилиндрические координаты (r, θ, z), (фиг. 22):

$$\left.\begin{aligned} r = \sqrt{x^2+y^2};\ \theta = \operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x};\quad z = z \\ x = r\cos\theta;\quad y = r\sin\theta;\quad z = z \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$v_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r};\quad v_\theta = \frac{-1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta};\quad v_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}; \tag{2}$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \tag{3}$$

Сферические координаты (r, θ, χ) (фиг. 23):

$$\left.\begin{aligned} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2};\ \theta = \operatorname{tg}^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z};\quad \chi = \operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x} \\ x + r\sin\theta\cos\chi;\quad y = r\sin\theta\sin\chi;\quad z = r\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$v_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r};\ v_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta};\ v_\chi = -\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \chi}; \tag{5}$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \chi^2} = 0. \tag{6}$$

Эти уравнения показывают, что если течение жидкости симметрично относительно некоторой оси, то эту симметрию можно свободно выразить в системе цилиндрических координат, принимая ось z за ось сим-

метрии и принимая $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0$. С другой стороны, если система обладает сферической симметрией, то последняя естественно должна выразиться в сферических координатах с началом координат в центре симметрии, с исключением членов, выраженных через $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial \chi}$ в уравнении (6).

8. **Заключение.** Раньше чем дать решение какой-нибудь частной проблемы движения жидкостей в пористой среде, следует разработать общую формулировку гидродинамики рассматриваемого течения. Любое такое исследование можно представить себе как формулировку в новой редакции хорошо известных основных определений и законо-
мерностей механики, выраженных гидродинамическими значениями так, чтобы их можно было приложить к течению жидкостей. Это требует раньше всего, чтобы течение полностью подчинялось закону сохранения материи. Поэтому оно должно удовлетворять уравнению неразрывности [(1), гл. III, п. 1], которое является аналитическим утверждением закона сохранения материи. После этого необходимо определить термодинамическую природу интересующей нас жидкости и режим течения. Природа жидкости в общем виде может быть представлена зависимостью между давлением, плотностью и температурой его [уравнение (3), гл. III, п. 1], которое является уравнением состояния жидкости. Постоянство плотности в уравнении состояния характеризует собой несжимаемую жидкость. Так, закон Бойля может быть принят в. качестве уравнения состояния для течения идеального газа. Термодинамический режим течения может быть охарактеризован аналогичным путем зависимостью между давлением, плотностью и температурой. Так, температура потока постоянна при изотермическом режиме и изменяется от известного показателя степени плотности для адиабатического режима. Наконец, необходимо установить динамические связи жидкости с градиентом давления и внешними силами. В основном это дается гидродинамическим подтверждением первого закона движения Ньютона. Из всех характеристик течения, требуемых формулировками, эта характеристика является наиболее специфичной. В то время как все жидкости должны удовлетворять уравнению неразрывности, и большие группы их могут контролироваться единичным уравнением состояния, одна и та же жидкость может иметь различные динамические характеристики в зависимости от условий, при которых происходит движение, и среды, в которой поток движется.

Классическая гидродинамика, например, определяет динамическое действие на жидкость с помощью уравнения Стокса-Навье [уравнение (1), гл. III, п. 2]. Последнее дает следующее распределение сил, которые воздействуют на жидкость: градиент давления, внешние массовые силы, например, сила тяжести и силы внутреннего трения в жидкости, которые определяются ее вязкостью.

В принципе этот анализ можно приложить ко всем видам движения жидкости и даже в том случае, когда жидкость проходит сквозь пористую среду. Однако решение конечных уравнений можно получить только для относительно простых случаев. Эти уравнения создают

непреодолимые математические трудности, если их приложить непосредственно к течению через лабиринты и путанные ходы пористой среды. К счастью, эти математические трудности не так серьезны, как они кажутся, так как, помимо всего, мы не заинтересованы в мельчайших подробностях движения жидкости в отдельных порах. Практический интерес представляют собой только макроскопические свойства течения, усередненные по большому количеству пор.

Эта конечная усередненная зависимость течения в пористой среде подвергалась изучению эмпирическим путем. Проведенные исследования дали весьма простой вывод — закон Дарси, а именно: скорость жидкости в любой точке пористой среды прямо пропорциональна градиенту давления в этой точке. При этом все полученные количества усреднены по большому числу пор [уравнение (1), гл. III, п. 3][1]. Это уравнение является макроскопическим эквивалентом динамического определения природы течения вязких жидкостей, лежащего в основе классической гидродинамики, и образует динамический базис для гидродинамики струйного течения однородных жидкостей в пористой среде. Обобщая первичные результаты опытов Дарси, чтобы получить пространственную форму течения и включить в нее влияние силы тяжести [уравнение (2), гл. III, п. 3], а также прилагая уравнение неразрывности и уравнение состояния к различного типа жидкостям, получаем, что давление и плотности должны удовлетворять следующим уравнениям.

Для несжимаемых жидкостей:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=0;$$

$$\Phi=\frac{k}{\mu}(p-V) \qquad \text{[см. уравнение (4), гл. III, п. 4]}$$

Для сжимаемых жидкостей:

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2}=\frac{f\beta\mu}{k}\cdot\frac{\partial \gamma}{\partial t} \qquad \text{[см. уравнение (6), гл. III, п. 4]}$$

Для газов:

$$\frac{\partial^2 \gamma^{(1+m)/m}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \gamma^{(1+m)/m}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \gamma^{(1+m)/m}}{\partial z^2}=$$

$$=\frac{(1+m)f\mu\gamma_0^{1/m}}{k}\cdot\frac{\partial \gamma}{\partial t} \qquad \text{[см. уравнение (7), гл. III, п. 4],}$$

где Φ и p — потенциал скорости и давление жидкости в точке (x, y, z); V — потенциал массовых сил (тяжести), воздействующих на жидкость, γ — плотность жидкости; t — время; k — проницаемость пористой среды; f — ее пористость; β — сжимаемость жидкости; μ — вязкость жидкости; γ_0 — плотность газа при единичном давлении; m — константа, опреде-

[1] Этот вывод справедлив только в пределах известных скоростей жидкости, в зависимости от среднего размера зерна или поры среды, плотности и вязкости жидкости. По мере того как эти пределы будут превзойдены, правильность вывода будет становиться все менее точной. Однако почти во всех практических проблемах скорости жидкости фактически меньше или того же самого порядка, что и предельные скорости, почему эти системы и находятся в области ламинарного или макроскопического струйного потока.

ляющая термодинамическую природу течения, имеющая значение 1 для изотермического потока и 0,71 для воздуха при адиабатическом течении.

Во всех случаях, подчиняющихся вышеуказанным уравнениям, предполагается, что пористая среда остается изотропной и однородной.

Все проблемы течения однородных жидкостей в пористой среде при ламинарных условиях подчиняются одному из этих уравнений. Специфические задачи характеризуются геометрией области, где происходит течение, граничными условиями, которые устанавливаются на контурах этих областей, и начальным распределением давления или плотности в тот момент, когда система начинает свою жизнь, при условии, что рассматриваемая проблема относится к неустановившемуся состоянию. Граничные условия заключаются в установленных значениях зависимых переменных на контурах, или полных производных от зависимых переменных, которые представляют собой нормали скоростей жидкости на границах области. Когда заданы эти условия, а это можно установить совершенно произвольно, проблема становится аналитически определимой и существует только одно решение ее, которое удовлетворяет диференциальному уравнению, граничным и начальным условиям (гл. III, п. 5).

Теперь, когда гидродинамика движения жидкости в пористой среде была сформулирована в целом в виде диференциальных уравнений в частных производных для давления или плотности, необходимо разработать способы их решения. Поэтому представляется интересным заметить, что уравнение Лапласа, которому подчиняются все случаи установившегося течения, уже хорошо известно в остальных разделах физики, например, теории установившейся теплопроводности, электростатике и электрического тока. Так как при изучении последних областей науки многие проблемы уже были решены, эти решения можно перенести и приложить к проблеме течения жидкости в пористой среде, если только мы будем знать, как произвести переход и интерпретацию интересующих нас количеств от одного предмета науки к другому. Поэтому была показана внешняя аналогия, относящаяся к количественным значениям температуры, напряжения, тока, диэлектрической постоянной и т. д., с соответственными понятиями в нашей гидродинамической системе (гл. III, п. 6). Наконец, предусматривая, что некоторые из интересующих нас проблем обладают специфическими формами симметрии, уравнение Лапласа было представлено в иных системах координат, где определенные виды симметрии найдут себе более яркое выражение, чем в декартовой системе координат (гл. III, п. 7).

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

УСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ

Глава четвертая

ПРОБЛЕМЫ ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ И МЕТОДЫ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

1. Введение. После рассмотрения наиболее элементарного типа задач о течении — линейном, который подвергся изучению в главе II[1] при установлении закона Дарси, следующей по простоте задачей является двухмерный или плоский поток. В этой задаче принимают, что распределение вектора скорости в жидкости $\bar{v}$ зависит только от двух прямоугольных координат системы и остается независимым по отношению к третьей. С физической точки зрения, разумеется, всякая жидкость по необходимости имеет свое развитие во всех трех измерениях, но значение плоских течений заключается в том, что при этом все особенности движения жидкости можно рассматривать в одной плоскости. Для всех иных плоскостей, параллельных данной, характер движения будет тождественным. Проблемы плоского течения, имеющие практический интерес, представлены в общем следующими двумя типами задач. Первый тип ограничен горизонтальным плоским движением, где $\bar{v}$ не зависит от вертикальной координаты z. Такие задачи возникают при рассмотрении песчаников с постоянной мощностью, все поры которых заполнены жидкостью и разбурены скважинами, вскрывшими всю мощность песчаника. При этом течение должно быть по необходимости плоским. Отсюда следует, что если даже сила тяжести и воздействует на каждый элемент жидкости, то последний будет двигаться всей своей массой в вертикальном направлении, или же нигде не будет иметь перемещения, а отсюда и скорости по вертикали. Поэтому становится ясным, что сила тяжести в любом случае при этом типе движения не имеет никакого значения. Поэтому можно совершенно точно принять давление p эквивалентом[2] потенциала скорости.

В главе VI рассмотрены соответствующие задачи, где уровни жидкости на поверхностях стока падают ниже кровли песчаника, что влечет за собой появление определенного гравитационного эффекта.

---

[1] Кроме того линейного течения, которое было уже описано, и чьи характерные особенности фактически приведены в гл. II, п. 5, не имеется другого подробно изученного случая этого движения.

[2] Коэфициент k/μ должен быть, конечно, умножен на p, чтобы получить правильные численные значения внутренних скоростей при любом течении.

Исходя из указанных предпосылок, следует, что основное уравнение в прямоугольной системе координат, которому подчиняется горизонтальное плоское движение в установившемся состоянии, будет:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0; \tag{1}$$

$$v_x = -\frac{k}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}; \quad v_y = -\frac{k}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}. \tag{2}$$

Второй тип задач плоского течения, который будет рассматриваться в настоящей главе, характеризуется большим распространением течения в одном горизонтальном направлении без всяких изменений динамического режима вдоль последнего. Отсюда природа жидкости, за исключением граничного участка всего течения, остается той же самой во всех вертикальных плоскостях, пересекающих эту огромную протяженную систему под прямым углом.

Задачи второго типа возникают при рассмотрении фильтрации и противодавления под плотинами, длина которых сравнительно велика по отношению к их ширине. В этом случае соответственной динамической переменной будет потенциальная функция Φ, так как вследствие того, что течение осуществляется в вертикальной плоскости, линии тока будут нормальны скорее к эквипотенциальным поверхностям, чем к поверхностям равного напора. Однако в процессе математического решения можно применить и p и Φ, так как они оба удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0; \quad \Phi = \frac{k}{\mu}(p \pm \gamma g y), \tag{3}$$

откуда

$$v_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}; \quad v_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y} \pm \gamma g\right), \tag{4}$$

где y принимается за вертикальную координату; $\pm$ соответствуют положительному и отрицательному направлению y.

2. Радиальное течение в скважину. Радиальным течением называется плоское движение жидкости, симметричное относительно оси и изменяющееся в отдельных своих чертах с удалением от оси симметрии. Это течение является наиболее простым случаем плоского движения Чтобы можно было извлечь пользу из симметрии рассматриваемой задачи, необходимо при решении принять соответствующую систему координат. Это очевидно, цилиндрическая система координат, приведенная к плоскости.

Из уравнений (2) и (3), гл. III, п. 7 имеем, что основные уравнения в цилиндрической системе координат, приложенные к плоскости, а также уравнения эквивалентные (1) и (2), гл. IV, п. 1 имеют вид:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} = 0; \tag{1}$$

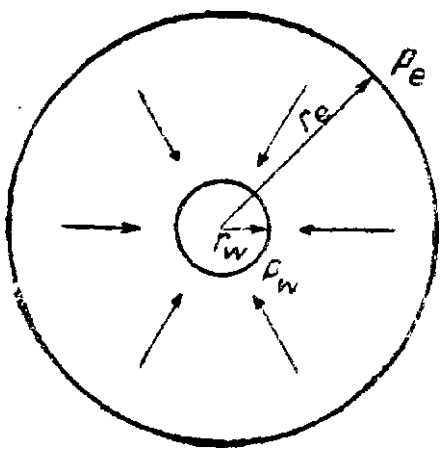
$$v_r = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r}; \qquad v_\theta = -\frac{k}{\mu r}\frac{\partial p}{\partial \theta}. \tag{2}$$

Из полученных определений следует, что, в частности, для радиального течения это выражение примет вид:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)=0; \tag{3}$$

$$v_r=-\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r}; \qquad v_\theta=-\frac{k}{\mu r}\frac{\partial p}{\partial \theta}=0. \tag{4}$$

Интегрируя уравнение (3), получим сначала:



Фиг. 24.

$$r\frac{\partial p}{\partial r}=\text{const}=c_1, \tag{5}$$

а затем:

$$p=c_1\ln r+c_2, \tag{6}$$

как общее выражение для распределения давления при радиальном течении.

В предыдущей главе было показано, что диференциальные уравнения для потенциала скорости и давления должны быть восполнены описанием границ течения и состоянием граничных условий. Как уже было отмечено, эти границы и граничные условия являются совершенно произвольными при условии, что не было сделано предварительных допущений относительно режима течения. Но так как в настоящем случае уже было произведено допущение радиальности течения, мы уже не являемся свободными в выборе соответствующих границ и граничных условий. Фактически не представляет собой труда показать, что единственной системой, создающей радиальное течение, является область, оконтуренная двумя концентрическими окружностями, на каждой из которых давление постоянно.

Таким образом, радиальное течение характеризуется следующими условиями (фиг. 24):

$$\left.\begin{aligned} r&=r_w; \qquad p=p_w\\ r&=r_e; \qquad p=p_e \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где при решении практических задач r_w может соответствовать радиусу скважины, в которую поступает жидкость (вода или нефть) из пласта; p_w — давление на обнаженном забое скважины. Последнее может явиться до известной степени произвольным и может регулироваться напором столба жидкости, поддерживаемого в скважине[1]. С другой стороны, давление p_e нельзя изменять по усмотрению. В целом оно зависит от глубины залегания несущего жидкость песчаника относительно его выходов и всей предварительной истории разработки песчаника. Расстояние r_e является совершенно произвольным. Его следует принимать от центра скважины до такой точки, где есть все основания получить

[1] Рекомендуется, однако, поддерживать всегда уровень жидкости выше кровли продуктивного песчаника. Иначе следует принимать в расчет гравитационный эффект (глава VI).

вполне обоснованные величины давления p_e. Вводя условия (7) в (6), получаем в итоге два уравнения для c_1 и c_2:

$$p_w = c_1 \ln r_w + c_2, \qquad p_e = c_1 \ln r_e + c_2,$$

где

$$c_1 = \frac{(p_e - p_w)}{\ln r_e/r_w};$$

$$c_2 = \frac{p_w \ln r_e - p_e \ln r_w}{\ln r_e/r_w},$$

так, что

$$p = \frac{p_e - p_w}{\ln r_e/r_w} \ln r + \frac{p_w \ln r_e - p_e \ln r_w}{\ln r_e/r_w} = \frac{p_e - p_w}{\ln r_e/r_w} \ln \frac{r}{r_w} + p_w. \qquad (8)$$

Прикладывая сюда уравнение (4), получим следующее выражение для v_r:

$$v_r = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{k}{\mu r} \frac{(p_e - p_w)}{\ln r_e/r_w}. \qquad (9)$$

В конечном итоге суммарный приток за единицу времени из песчаника в скважину определится, очевидно, из уравнения:

$$Q = -h \int_0^{2\pi} r v_r d\theta = \frac{2\pi k h (p_e - p_w)}{\mu \ln r_e/r_w}, \qquad (10)$$

где h — мощность песчаника. Отсюда p и v_r можно выразить через расход Q:

$$p = \frac{Q\mu}{2\pi k h} \ln \frac{r}{r_w} + p_w; \qquad (11)$$

$$v_r = -\frac{Q}{2\pi r h}. \qquad (12)$$

Как показывают эти уравнения, давление при радиальном течении меняется с изменением логарифма расстояния от центра скважины; скорость изменяется прямо пропорционально общему перепаду давления в системе $p_e - p_w$ и обратно пропорционально радиусу последней; текущий дебит в системе также пропорционален общему перепаду давления $p_e - p_w$. Все эти функции изменяются обратно пропорционально логарифму отношения радиусов контуров. Кривые равного напора являются окружностями, концентричными по отношению к контуру скважины, а линии тока — радиусами-векторами, проведенными из центра внутренней граничной окружности. Рассмотрим следующий численный пример, основанный на этих выводах. Допустим:

$$p_w = 0; \qquad p_e = 10 \ am;$$

$$r_w = 0{,}075 \ м; \qquad r_e = 150 \ м; \qquad k = 1 \text{ дарси};$$

$$\mu = 1 \text{ сантипуазу}.$$

Из уравнений (8) и (9) следует:

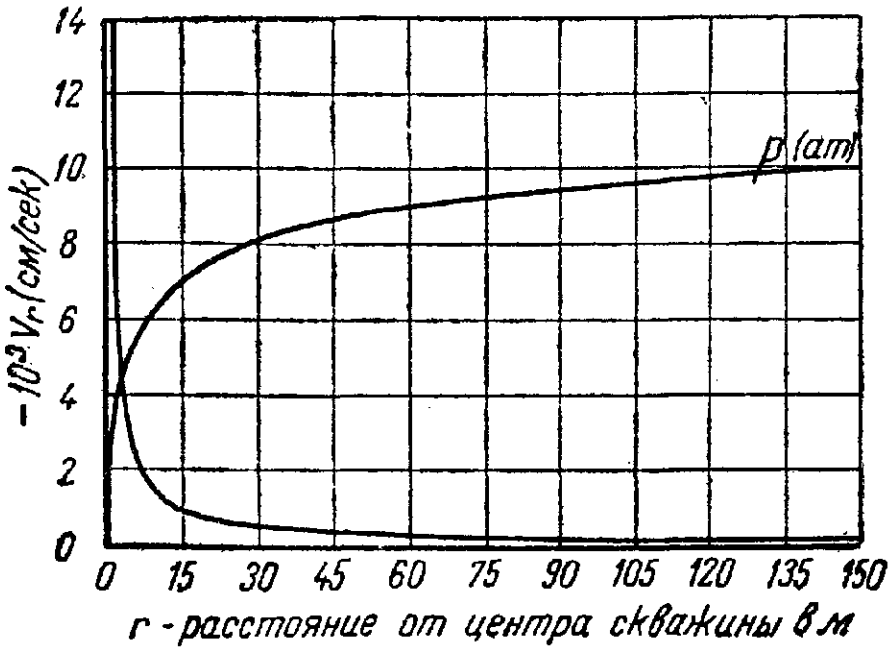
$$p = \frac{10 \ln r/r_w}{\ln 2000} = 1{,}32 \ln 4r \ am; \tag{13}$$

$$v_r = -\frac{10}{r \ln 2000} = -\frac{1{,}32}{r} \ см/сек; \tag{14}^1$$

$$Q = \frac{20\pi}{\ln 2000} = 8{,}27 \ см^3/сек/см \text{ песчаника} =$$

$$= 71{,}452 \ м^3/сутки/м \text{ мощности}. \tag{15}$$

На фиг. 25 приведены графики построения данных решения уравнений (13) и (14).



Фиг. 25. Распределение радиальной скорости (v_r) и давления (p) относительно забоя скважины, вскрывшей полностью однородный пласт песчаника с постоянной мощностью, где $k/\mu = 1$, и соответственные давления при $r = 0{,}075$ *м* и $r = 150$ *м* равняются нулю и 10 *am*.

Полученные выводы всецело основаны на непосредственной аналитической трактовке проблемы радиального течения. Однако представляет собой интерес привести здесь несколько более физически обоснованный метод решения, чем манипуляция с диференциальными уравнениями (3). В этом случае необходимо начать с интегрирования уравнения неразрывности, которое полагает, что суммарное течение через любую концентрическую по отношению к граничному контуру окружность является постоянной величиной или

$$2\pi r v_r h = \text{const} = -Q.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что

$$v_r = -\frac{Q}{2\pi r h}. \tag{12}$$

Прикладывая сюда уравнение (4), имеем:

$$v_r = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{Q}{2\pi r h}.$$

В результате получаем снова:

$$p = \frac{Q\mu}{2\pi k h} \ln \frac{r}{r_w} + p_w. \tag{11}$$

---

[1] В этом случае отрицательное значение v_r, так же как и в уравнениях (9) и (12), при условии $p_e > p_w$ обозначает просто, что жидкость движется в направлении уменьшающихся значений r.

Эти выводы индентичны с уже полученным ранее уравнением. Однако этот же вывод ясно показывает, что первое интегрирование диференциального уравнения для p (5) непосредственно обеспечивает уравнение неразрывности. Второе интегрирование соответствует приложению закона Дарси к распределению скорости, а отсюда к распределению давления.

Возвращаясь к вопросу распределения давления и скорости, можно отметить некоторые отличительные особенности графиков на фиг. 25. Видно, что давление растет очень быстро, а скорость резко падает с увеличением расстояния от скважины на интервале последнего, имеющего малые значения. С другой стороны, при больших расстояниях от скважины изменения давления и скорости очень малы. Давление медленно растет, приближаясь к своему максимальному значению на внешнем контуре [1], а скорость падает еще более плавно по мере своего приближения к минимуму на том же внешнем контуре. Что же касается абсолютного значения скорости, следует заметить, что для рассмотренного только что числового примера, где текущий дебит составлял 214,4 $м^3/сутки$ для песчаника мощностью 3 $м$, скорость даже на забое скважины не превышала 0,17 $см/сек$. Отсюда для скважины, дающей воду с указанным дебитом из песчаника с эффективным диаметром зерна — 0,05 $см$, число Рейнольдса даже на обнаженной поверхности забоя будет только 0,85. Оно будет значительно ниже того критического значения числа Рейнольдса, при котором закон Дарси начинает отклоняться от эксперимента (гл. II, п. 2). Из уравнения (10) видно, что текущий дебит Q прямо пропорционален проницаемости песчаника. Изменчивость его определяется логарифмом отношения радиуса внешнего контура к радиусу скважины. Она показывает необходимость иметь большие изменения в величине последних, чтобы это отразилось заметным образом на текущем дебите. Для удвоения продуктивности скважины увеличением ее радиуса необходимо, чтобы радиус скважины был увеличен до значения

$$r'_w = \sqrt{r_e r_w}. \qquad (16)$$

---

[1] Тот факт, что p в уравнении (11) продолжает возрастать до бесконечности по мере роста значения r большем, чем r_e, не следует принимать за указание на ошибку в основной теории, ведущей к уравнению (11). Все, что можно требовать от любой аналитической теории, — это дать физически правильные выводы в границах области, для которых ищется решение. При экстраполяции полученного решения за пределы этих границ не встречается надобности в его физической значимости. Если, например, хотят, чтобы при величине r_e давление было p_e, это требование должно быть принято совершенно точно граничным условием задачи. Тогда значение p при r_e будет зафиксировано однозначно в полученном решении. Аналогично этому, если p в уравнении (11) станет бесконечно большим ($-\infty$) при r равным нулю, оно не получит никакого значения, так как уравнение (11) по своему существу не имеет никакого смысла при $r < r_w$ и не должно применяться при условии $r < r_w$. Фактически, если освободить забой скважины от связи с пластом песчаника, это сделает по необходимости недействительным приложение решения, полученного для течения в песчанике к самой скважине.

Чтобы получить тот же самый эффект уменьшением радиуса внешнего контура, последний должен уменьшиться до величины

$$r_e' = \sqrt{r_e r_w}. \tag{17}$$

Для приведенного числового примера это означает, что удвоение текущего дебита вызовет необходимость увеличения радиуса скважины от 0,075 до 3,354 *м* или уменьшения радиуса внешнего контура питания от 150 до 3,354 *м*.

Практическое значение этого малого изменения величины Q с изменением r_w и r_e заключается в том, что относительно небольшие погрешности в значении r_w и r_e для любого практического случая будут создавать мало заметные ошибки при конечном исчислении Q. Отсюда можно допускать вполне приемлемыми значения для $r_w = 0{,}075$ *м* и $r_e = 150$ *м*, не боясь ввести большие погрешности в исчисление Q (гл. II, п. 11). Следующим интересным моментом в приведенном выводе является то обстоятельство, что увеличение производительности артезианской или нефтяной скважины за счет увеличения диаметра последней является недостаточно практичным методом. Приведенный пример ясно показывает, что может потребоваться увеличение диаметра скважины в 40 раз только для того, чтобы удвоить ее производительность. Наконец, следует упомянуть, что согласно аналогиям, приведенным в предыдущей главе, уравнения (8) и (9) соответствуют распределению потенциала и плотности тока между двумя концентричными цилиндрами, разделенными средой с величиной проводимости k/μ. Уравнение (10) дает суммарную величину тока, протекающего через систему.

3. Ряд Фурье. Чтобы распространить выводы, полученные в предыдущем разделе, также и на те случаи, где течение в скважину не является строго радиальным, необходимо несколько отклониться от темы и привести описание существенных моментов из теории рядов Фурье. Так как нас интересует только их приложение к решению уравнения Лапласа [(1), гл. IV, п. 2], то все доказательства, относящиеся к теории Фурье, будут опущены и рассмотрение вопроса будет ограничено формулировкой теоретических выводов и некоторыми примерами, их иллюстрирующими.

Основная теорема, определяющая ряд Фурье, сформулирована следующим образом. Любая функция $f(x)$, имеющая конечное число конечных точек разрыва непрерывности, а также максимума и минимума в интервале $-c \leqslant x \leqslant c$, может быть выражена для этого интервала рядом Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{c} + b_n \sin \frac{n\pi x}{c} \right), \tag{1}$$

где

$$a_n = \frac{1}{c} \int_{-c}^{+c} f(x) \cos \frac{n\pi x}{c}\, dx; \qquad b_n = \frac{1}{c} \int_{-c}^{+c} f(x) \sin \frac{n\pi x}{c}\, dx. \tag{2}$$[1]

[1] Принимая уравнение (1), можем легко получить из него (2) умножением обеих сторон (1) на величину, например, $\cos \frac{m\pi x}{c}\, dx$ и интегрируя затем по-

Для значений x, когда $f(x)$ изменяется монотонно, сумма ряда в правой части уравнения (1) равняется $f(x)$. Для значений x, где $f(x)$ имеет точки разрыва, сумма ряда в уравнении (1) равняется среднему алгебраическому значению $f(x)$ по обе стороны разрыва непрерывности.

Если функция с такими наложенными ограничениями определяется сегментом $0 \leqslant x \leqslant c$, ее можно выразить на сегменте $0 \leqslant x \leqslant c$ любым из следующих рядов:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty a_n \cos \frac{n\pi x}{c} \\ a_n &= \frac{2}{c} \int_0^c f(x) \cos \frac{n\pi x}{c} dx \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

или

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sum_1^\infty b_n \sin \frac{n\pi x}{c} \\ b_n &= \frac{2}{c} \int_0^c f(x) \sin \frac{n\pi x}{c} dx \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Вывод этих выражений для действительных случаев будет показан нами на следующих примерах.

1. Общий ряд Фурье. Допустим, что

$$f(x) = 0: \qquad -\pi \leqslant x \leqslant 0;$$
$$f(x) = x: \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$

как это показано на фиг. 26.

Ссылаясь на уравнения (1) и (2), видно, что в данном случае $c = \pi$. Отсюда значения коэфициентов в разложении будут:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx dx,$$

$$a_n = -\frac{2}{n^2 \pi},$$

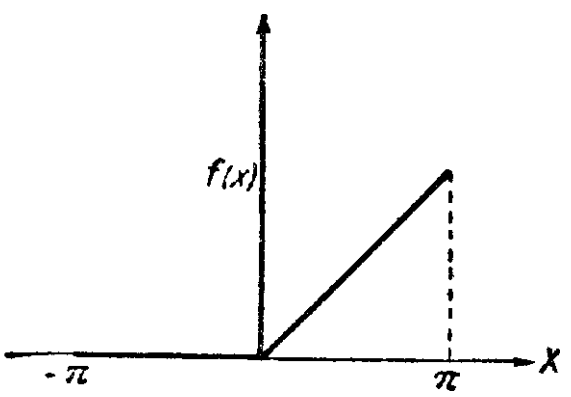
лученное выражение в пределах от $-c$ до $+c$. Это интегрирование даст нам величину коэфициента a_m. Аналогичная процедура с умножением обеих сторон уравнения (1) на член $\sin \frac{m\pi x}{c} dx$ даст величину b_m. Для полного представления о теории рядов Фурье читатель может познакомиться с книгой H. S. Carslaw, „Fourier's Series and Integrals", 3d. ed., 1930; или E. T. Whittaker and G. N. Watson, „Modern Analysis", chap. IX, 4 th ed., 1927. Есть русский перевод. Практическое приложение теории рядов Фурье можно найти в книге W. E. Byerly, „Fourier's Series and Spherical Harmonics", 1893. Приведенные в настоящей работе формулировки рядов Фурье являются довольно свободными. Это сделано для того, чтобы избежать введения пространной терминологии, требуемой при более точном рассмотрении вопроса.

когда n — нечетное и $a_n = 0$, когда n — четное. Однако a_0 должно быть подсчитано в отдельности, как:

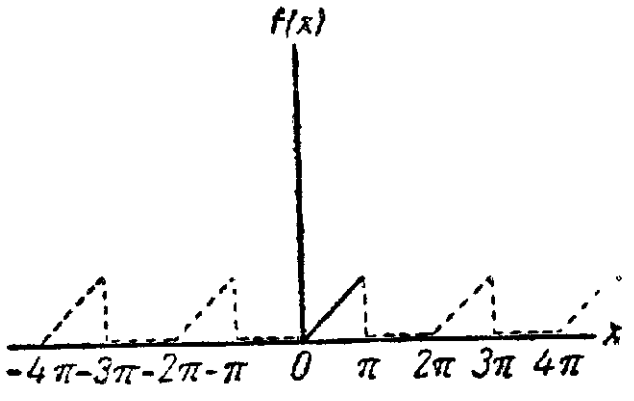
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Аналогично этому значение b_n выразится так:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$



Фиг. 26. Построение функции:
$f(x) = 0$: $-\pi \leqslant x \leqslant 0$;
$f(x) = x$; $0 \leqslant x \leqslant \pi$.



Фиг. 27. Построение общего вида ряда Фурье, изображенного на фиг. 26.

Подставляя эти значения в уравнение (1), получим следующий вид его для $f(x)$:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) + \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots\right). \quad (5)$$

Хорошо сделать в этом месте следующее предостережение. Справедливо, что для каждого значения x между $x = -\pi$ и $x = 0$ сумма ряда в уравнении (5) будет фактически равна нулю, а для всех значений x между $x = 0$ и $x = +\pi$ сумма ряда будет равна значению x. Однако для значений $x < -\pi$ сумма ряда не будет больше оставаться равной нулю и не будет также равна x для значения $x > \pi$. Вне сегмента $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ ряд повторяет свои значения на этом сегменте. В частности, он имеет свойства

$$f(x + 2\pi) = f(x), \quad \text{а фактически} \quad f(x + 2n\pi) = f(x), \quad (6)$$

как это показано на фиг. 27.

Отсюда видно, что ряд Фурье по своему численному значению эквивалентен в каждой точке произвольной функции в пределах сегмента для которого эта функция определена. Вместе с тем он воспроизводит периодически эту функцию на равных интервалах вне установленного сегмента. Таким образом, если необходимо взять ряд Фурье для некоторой функции в точке x_0, необходимо определить эту функцию для промежутка, который включал бы в себя по крайней мере x_0.

Следующий пример относится к ряду косинусов, в котором ряд Фурье содержит только члены с косинусами, например, уравнение (3).

II. Разложение по косинусам. Допустим, как это показано на фиг. 28,

$$f(x)=b; \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi$$
$$f(x)=0; \qquad \pi \leqslant x \leqslant 2\pi$$

Для этого случая $c=2\pi$. Отсюда на основании уравнения (3)

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos\frac{nx}{2}\,dx=\frac{b}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{nx}{2}\,dx;$$

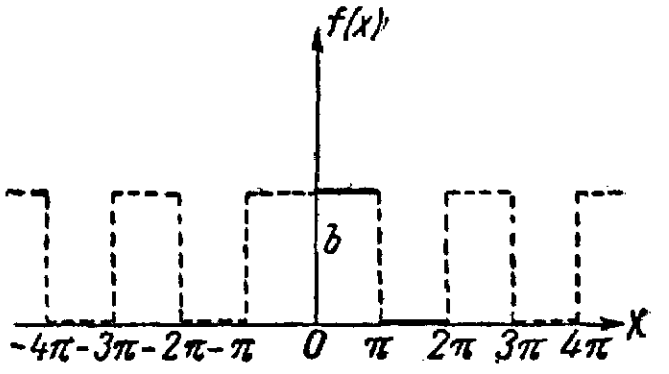
$a_n=0$, когда n — четное; $a_n=\dfrac{2b(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi n}$, когда n — нечетное.

Далее $a_0=b$. Отсюда

$$f(x)=\frac{b}{2}+\frac{2b}{\pi}\left(\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\cos\frac{3x}{2}+\frac{1}{5}\cos\frac{5x}{2}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{7}\cos\frac{7x}{2}+\ldots\right). \qquad (7)$$

В этом выражении имеются два момента, вызывающие особый интерес. Первое, что следует заметить, — при $x=\pi$ все тригонометрические функции в уравнении (7) обращаются в нуль и $f(\pi)=\frac{b}{2}$.

Так как на основании уже данного определения это есть среднее значение функции в точке разрыва непрерывности, видно, что ряд Фурье в точке разрыва непрерывности фактически принимает значение, равное среднему алгебраическому предельных значений функции по обе стороны разрыва.



Фиг. 28. Построение ряда по косинусам функции:
$f(x)=b : 0 \leqslant x \leqslant \pi$; $f(x)=0$: $\pi \leqslant x \leqslant 2\ \pi$.

Так как cos x является четной функцией x, то следующее, что необходимо заметить, — ее значение не меняется при изменении x на $-x$, и ряд Фурье, представленный уравнением (7) и фиг. 28, не только воспроизводит периодически себя для $x>2\pi$, но для $x<0$ он дает точное отражение своих значений в области, где $x>0$. Хотя поведение ряда Фурье имеет значение только в промежутке его предельных значений, представляется интересным заметить, что разложение функции в ряд косинусов для $0 \leqslant x \leqslant c$ эквивалентно допущению, что она является четной функцией в двойном промежутке $-c \leqslant x \leqslant c$. В случае разложения функции в ряд по синусу можно видеть, что результаты будут несколько отличны.

III. Разложение по синусам. Разложим теперь только что проанализированную функцию в ряд синусов. Допустим снова, что:

$$f(x)=b; \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi;$$
$$f(x)=0; \qquad \pi \leqslant x \leqslant 2\pi.$$

Из уравнения (4) имеем:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin\frac{nx}{2}\,dx=\frac{b}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\frac{nx}{2}\,dx$$

$$b_n=\frac{2b}{n\pi}: \qquad n\text{ — нечетное};$$
$$b_n=0; \qquad n=4m;$$
$$b_n=\frac{4b}{n\pi}: \qquad n=2m,$$

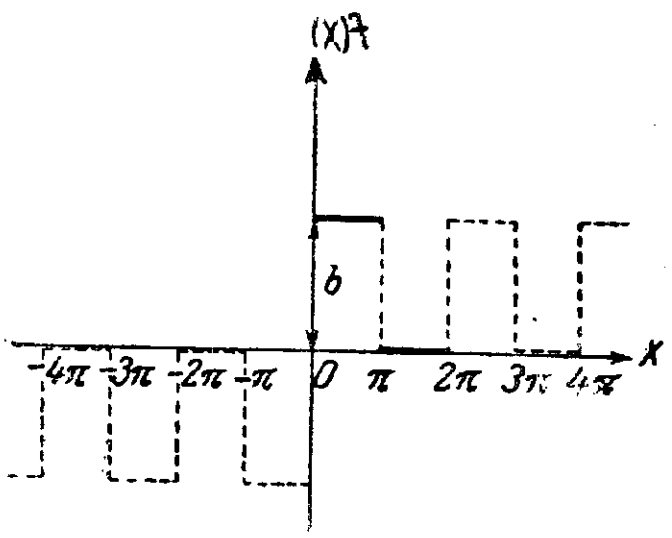
откуда

$$f(x)=\frac{2b}{\pi}\left(\sin\frac{x}{2}+\sin x+\frac{1}{3}\sin\frac{3x}{2}+\frac{1}{5}\sin\frac{5x}{2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\sin 3x+\ldots\right) \tag{8}$$

Для $x=\pi$ следует опять:

$$f(\pi)=\frac{2b}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\right)=\frac{b}{2},$$

как и при разложении в ряд косинусов. Но так как $\sin x$ является нечетной функцией x, т. е. функция меняет свой знак при изменении x на $-x$, ряд в уравнении (8) дает отрицательное отражение функции $f(x)$, как это показано на фиг. 29, когда x меняется на $-x$. Отсюда видно, что разложение в ряд синусов для $0 \leqslant x \leqslant c$ эквивалентно допущению, что $f(x)$ является нечетной функцией в промежутке $-c \leqslant x \leqslant c$. Из общего ряда при разложении по синусу (уравнение 4) следует также, что ряд по синусу дает в сумме нуль для предельных значений в концах промежутка даже в том случае, если функция определена как не имеющая нулевых значений в конечных точках. Так, из уравнения (8) следует, что $f(0)=0$, хотя определение $f(x)$ требует условия, чтобы $f(0)=b$. Разложение ряда по косинусу воспроизводит на концах промежутка значения, установленные первоначальной функцией. Таким образом, можно легко подтвердить, что разложение по косинусу, согласно уравнению (7), дает $f(0)=b$, так как ряд



Фиг. 29. Построение ряда по синусам функции:
$f(x)=b;\ 0 \leqslant x \leqslant \pi;$
$f(x)=0;\ \pi \leqslant x \leqslant 2\pi.$

$$\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}.$$

Наконец, следует отметить следующие важные и оригинальные свойства ряда Фурье. Если два ряда Фурье с одним и тем же промежутком предельных значений равны во всех точках этого промежутка, то оба ряда тождественно равны и коэфициенты соответствующих тригонометрических функций должны быть также равны. Это равноценно утверждению, что если ряд Фурье во всех точках промежутка предельных значений обращается в нуль, он равен тождественно нулю.

4. Несимметричное течение в скважину. С практической точки зрения строго радиальное течение, налагающее условие постоянства давления на круговой контур, концентричный поверхности скважины, повидимому, является слишком идеальным случаем по отношению к действительным условиям, которые существуют на практике. Скорее следует допустить, что даже такие, течения, которые имеют только одну скважину, не будут обладать в целом постоянством давления при распределении его на внешних границах системы; скважины не будут лежать в центре их внешних контуров и наконец, сами границы, давления на которых предусмотрены и известны, будут по своей форме отличны от окружности. Во всех этих случаях течение в скважину будет несимметрично, и распределение давления будет зависеть от координат азимута и радиуса системы. В последующих трех разделах будут подвергнуты исследованию три такие типичные задачи. В первом случае мы еще сохраним в качестве внешней границы окружность, концентричную скважине, но позволим граничному давлению, а также давлению на поверхности забоя скважины изменяться произвольным путем. Решение задачи будет базироваться на теории рядов Фурье. Другой случай будет относиться к круговым, но не концентричным контурам, соответствующим смещению скважины от центра ее внешнего контура. Для решения этой задачи будет применен метод функций Грина. Наконец, будет рассмотрена задача, в которой внешний контур не является больше окружностью, а скорее прямой линией, как, например, линия водонефтяного контакта при продвижении краевой воды.

5. Произвольное распределение давления на контуре. Если течение в скважину не обладает совершенной симметричностью, то задача не может подвергнуться упрощению, как это сделано в п. 2. Вернее всего следовало бы приложить более общие уравнения (1) и (2), гл. IV, п. 2, и их решения, которые зависят в целом от угла θ, а также от радиуса r. Легко убедиться в том, что эти решения могут иметь один из следующих видов:

$$\text{const};\quad \ln r;\quad r^{\alpha}\cos\alpha\theta;\quad r^{\alpha}\sin\alpha\theta;\quad r^{-\alpha}\cos\alpha\theta;\quad r^{-\alpha}\sin\alpha\theta,$$

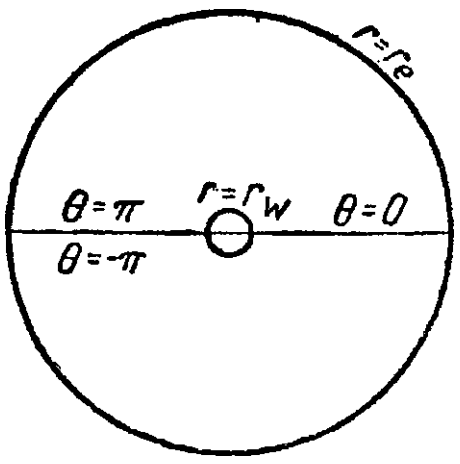
где α является действительной постоянной для всех задач, имеющих практическое значение. Так как уравнение (1), гл. IV, п. 2, является линейным, ибо оно не имеет членов, содержащих p или его производных в степени больше единицы, то всякое линейное сочетание отдельных решений будет также являться его решением. На этом основании общее решение уравнения (1), гл. IV, п. 2, может быть написано в следующей форме

$$p = c_0 \ln r + \sum r^{\alpha}(a_{\alpha}\sin\alpha\theta + b_{\alpha}\cos\alpha\theta) + \\ + \sum r^{-\alpha}(c_{\alpha}\sin\alpha\theta + d_{\alpha}\cos\alpha\theta). \qquad (1)$$

В этом уравнении величины c_0, a_α, b_α, c_α, d_α и даже сами α являются постоянными, не зависящими от r и от θ, и должны быть подобраны так, чтобы p или $\frac{\partial p}{\partial r}$ приняли бы заранее установленные значения вдоль двух окружностей радиусом $r=r_w$ и $r=r_e$, которые оконтуривают интересующую нас область. Это может быть получено, как это описано в п. 3, гл. IV, приложением теории рядов Фурье.

С этой целью является удобным допустить, что окружность 2π разделена при радиусе $\theta=\pi$, как это показано на фиг. 30, так, что искомый сегмент будет $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$. В этом случае, если значения p на границе будут выражены рядами Фурье, граничные условия могут быть написаны в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} r=r_w; \quad p=p_w=\sum (w_n \sin n\theta + x_n \cos n\theta): \\ -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi \\ r=r_e; \quad p=p_e=\sum (e_n \sin n\theta + f_n \cos n\theta): \\ -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$



Фиг. 30.

Однако раньше, чем приложить эти выражения, следует вначале заметить, что с физической точки зрения p само должно быть периодично по отношению к θ с периодом 2π. Отсюда можно сделать непосредственное заключение, что величины α в уравнении (1) должны приняты по необходимости только целые значения, которые можно обозначить через n, где n положительно. Зная величины α, можно приложить условия уравнения (2) к (1). Это даст:

$$\sum_0^\infty (w_n \sin n\theta + x_n \cos n\theta) = c_0 \ln r_w + \sum_0^\infty r_w^n (a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta) + \sum_1^\infty r_w^{-n} (c_n \sin n\theta + d_n \cos n\theta),$$

$$\sum_0^\infty (e_n \sin n\theta + f_n \cos n\theta) = c_0 \ln r_e + \sum_0^\infty r_e^n (a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta) + \sum_1^\infty r_e^{-n} (c_n \sin n\theta + d_n \cos n\theta).$$

Так как эти уравнения должны удовлетворяться для всех значений θ в сегменте $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$, то, исходя из свойств ряда Фурье, приведенных в п. 3, гл. IV, следует, что коэфициенты при $\sin n\theta$ и $\cos n\theta$ с обеих сторон уравнений должны быть равны.

Это даст следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} w_n &= a_n r_w^n + c_n r_w^{-n} \qquad n>0,\\ x_n &= b_n r_w^n + d_n r_w^{-n} \qquad n>0,\\ e_n &= a_n r_e^n + c_n r_e^{-n} \qquad n>0,\\ f_n &= b_n r_e^n + d_n r_e^{-n} \qquad n>0,\\ x_0 &= c_0 \ln r_w + b_0,\\ f_0 &= c_0 \ln r_e + b_0,\\ a_0 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Решим эти равенства относительно a_n, c_n, b_n, d_n:

$$a_n = \frac{w_n r_e^{-n} - e_n r_w^{-n}}{D_n}$$

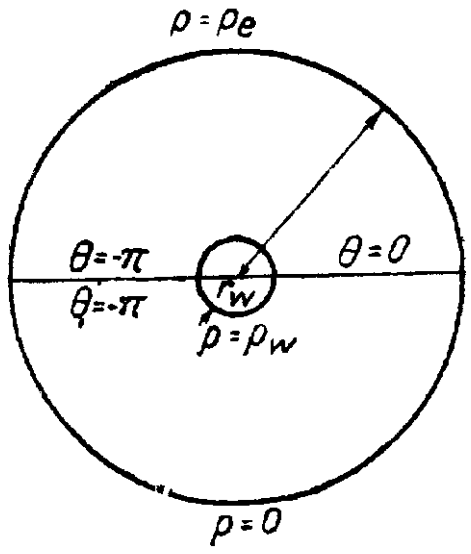
$$b_n = \frac{x_n r_e^{-n} - f_n r_w^{-n}}{D_n}$$

$$c_n = \frac{c_n r_w^n - w_n r_e^n}{D_n}$$

$$d_n = \frac{f_n r_w^n - x_n r_e^n}{D_n}$$

$$D_n = r_w^n r_e^{-n} - r_w^{-n} r_e^n$$

$$c_0 = \frac{(f_0 - x_0)}{\ln r_e/r_w}; \qquad b_0 = \frac{x_0 \ln r_e - f_0 \ln r_w}{\ln r_e/r_w}$$



Фиг. 31.

Отсюда, если известны w_n, x_n, e_n, f_n, уравнение (3) дает постоянные a_n, b_n, c_n и d_n, которые определяют распределение давления во всех точках между границами с радиусом r_w и r_e.

В качестве примера была выбрана следующая задача (фиг. 31):

$$\left.\begin{aligned} r = r_w: &\qquad p = p_w = \text{const}: \ -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi\\ r = r_e: &\qquad p = p_e = \begin{cases} p_e: & 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\\ 0: & -\pi \leqslant \theta \leqslant 0 \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Хотя эти условия являются достаточно определяющими задачу, они должны быть раньше всего выражены рядом Фурье.

Так, из уравнения (2) видно, что разложение p_w выражается просто:

$$p_w = x_0; \quad x_n = w_n = 0; \quad n>0. \tag{5}$$

С другой стороны, разложение p_e имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} p_e &= \frac{p_e}{2} + \frac{2p_e}{\pi}\left(\sin\theta + \frac{\sin 3\theta}{3} + \frac{\sin 5\theta}{5} + \ldots\right)\\ f_0 &= \frac{p_e}{2}; \quad f_n = 0; \quad n>0,\\ e_n &= 0, \text{ когда } n \text{ — четное},\\ e_n &= \frac{2p_e}{n\pi}, \text{ когда } n \text{ — нечетное}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Тогда решение для p примет следующую форму:

$$p = c_0 \ln r + \sum_0^\infty r^n (a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta) + \\ + \sum_1^\infty r^{-n} (c_n \sin n\theta + d_n \cos n\theta), \tag{7}$$

где согласно уравнениям (3), (5) и (6)

$$c_0 = \frac{\frac{p_e}{2} - p_w}{\ln r_e/r_w}; \qquad b_0 = \frac{p_w \ln r_e - \frac{p_e}{2} \ln r_w}{\ln r_e/r_w},$$

$$a_0 = 0;$$

$$a_n = 0, \qquad n \text{ — четное},$$

$$a_n = -\frac{2p_e r_w^{-n}}{n\pi D_n}; \qquad n \text{ — нечетное},$$

$$b_n = 0; \qquad n > 0,$$

$$c_n = 0; \qquad n \text{ — четное},$$

$$c_n = \frac{2p_e r_w^n}{n\pi D_n}; \qquad n \text{ — нечетное},$$

$$d_n = 0; \quad D_n = r_w^n r_e^{-n} - r_w^{-n} r_e^n.$$

Отсюда в конечном итоге p можно выразить следующим равенством:

$$p = \frac{\frac{p_e}{2} \ln \frac{r}{r_w} + p_w \ln \frac{r_e}{r}}{\ln r_e/r_w} + \frac{2p_e}{\pi} \sum_{n\text{—нечетное}} \frac{\sin n\theta}{nD_n} \left[\left(\frac{r_w}{r} \right)^n - \left(\frac{r}{r_w} \right)^n \right]. \tag{8}$$

Легко убедиться, что при $r = r_w$ уравнение (8) приводит немедленно к значению $p = p_w$; когда же $r = r_e$, оно, как и следует ожидать, приводится к уравнению (6). Распределение скорости, соответствующее распределению давления согласно уравнению (8), легко устанавливается приложением уравнений (2), гл. IV, п. 2, к (8). Так,

$$\left.\begin{aligned} v_r &= -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{k\left(\frac{p_e}{2} - p_w\right)}{\mu r \ln r_e/r_w} + \frac{2p_e k}{\pi \mu r} \sum_{n\text{—нечетное}} \frac{\sin n\theta}{D_n} \times \\ &\qquad \times \left[\left(\frac{r_w}{r} \right)^n + \left(\frac{r}{r_w} \right)^n \right], \\ v_\theta &= -\frac{k}{\mu r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{2p_e k}{\pi \mu r} \sum_{n\text{—нечетное}} \frac{\cos n\theta}{D_n} \left[\left(\frac{r_w}{r} \right)^n - \left(\frac{r}{r_w} \right)^n \right]. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Расход[1] в скважине примет вид:

$$Q = -\int_{-\pi}^{+\pi} rv_r\, d\theta = \frac{2\pi k\,(p_e/2 - p_w)}{\mu \ln r_e/r_w}. \qquad (10)$$

Сравнивая этот вывод с уравнением (10), гл. IV, п. 2, которое дает значение Q для строго радиального течения, заметно, что влияние приложения давления p_e только на половине внешнего контура равноценно приложению половины p_e по всему контуру. Аналогично этому легко показать, что если давление p_e приложено только к дуге окружности, угол которой s при окружности радиусом r_e, расход составит:

$$Q_s = 2\pi k\,\frac{\left(\frac{p_e s}{2\pi} - p_w\right)}{\mu \ln r_e/r_w}. \qquad (11)$$

Это равноценно допущению распределения давления $\frac{p_e s}{2\pi}$ по всему внешнему контуру. Так как для общего распределения давления согласно уравнению (1) дебит Q определяется выражением:

$$Q = -\int_{-\pi}^{+\pi} rv_r\, d\theta = \frac{2\pi k c_0}{\mu} = \frac{2\pi k\,(f_0 - x_0)}{\mu \ln r_e/r_w} = \frac{2\pi k\,(\bar{p}_e - \bar{p}_w)}{\mu \ln r_e/r_w}, \qquad (12)$$

то для более общей формулировки следует заметить, что если p_e, p_w являются усередненными значениями произвольного распределения давления соответственно радиусам r_e и r_w, то суммарное течение через пласт песчаника является аналогичным тому, при котором средние давления будут равномерно приложены к их соответственным границам. Этот интересный вывод показывает всю силу более совершенного аналитического метода решения, хотя физически это явление имеет слабое доказательство своей очевидности[2]. Отсюда следует, если только известно окружающее давление вокруг скважины, можно пренебречь отклонениями при распределении давления и рассчитывать добычу со скважины, как будто течение в нее строго радиальное.

В последнем случае неуверенность в выборе внешней границы системы r_e приведет к сравнительно небольшим ошибкам при исчислении

---

[1] В данном случае, а также в последующих разделах термин „расход" будет представлять собой величину текущего дебита с данной поверхности стока на единицу мощности пористой среды.

[2] Следует заметить, что ряд Фурье можно приложить также и к решению уравнения Лапласа в декартовых координатах [уравнение (1), гл. IV, п. 1]. Это непосредственно вытекает из того обстоятельства, что $\frac{\text{ch}}{\text{sh}}\,ay\ \ \frac{\cos}{\sin}\,ax$ и $\frac{\text{ch}}{\text{sh}}\,ax\ \frac{\cos}{\sin}\,ay$ являются частными решениями этого уравнения. Однако эти решения применимы только в том случае, когда область питания ограничена прямыми линиями, параллельными оси x или y. Применение разложения в ряд Фурье для решения задач, рассматриваемых в последующих главах, приводится в главах V, п. 3, VI, п. 20, VII, пп. 5 и 10 и X, п. 14.

значения Q, так как радиусы входят в величину Q в логарифмической форме.

Когда вместо распределения давления будет дано распределение скорости по одному или обоим радиусам r_e и r_w, можно применить для решения тот же самый аналитический метод. Так как в этом случае суммарный расход дается с самого начала, то все, что остается решить, — это установить отдельные подробности распределения давления и скорости в пласте песчаника, а такая задача не представляет большого практического интереса. Обычно достаточно знать средние давления, и уравнение (12), написанное в следующей форме:

$$\bar{p}_e = \frac{\mu Q \ln r_e/r_w}{2\pi k} + \bar{p}_w . \tag{13}$$

Этого вполне достаточно, чтобы охарактеризовать среднее давление на расстоянии r_e от скважины, когда известны среднее давление p_w и текущий дебит Q.

Возвращаясь к первоначальной задаче, ограниченной уравнением (4), следует уточнить, является ли величина p_w положительной или отрицательной. В зависимости от этого течение будет соответствовать движению из верхней половины системы с радиусом $r = r_e\,(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ в скважину и утечке из скважины в нижнюю половину системы радиусом $r = r_e\,(-\pi \leqslant \theta \leqslant 0)$, или же движению в скважину из всей оконтуренной внешней границей области. Плотность расхода при этом будет выше при условии $\theta > 0$, чем при условии $\theta < 0$.

Наконец, при условии $\bar{p}_w > \bar{p}_e$ следует держаться аналогичного аналитического метода, за исключением того, что скорости будут иметь обратное направление и система будет представлена движением, направленным от скважины в окружающий ее песчаный пласт.

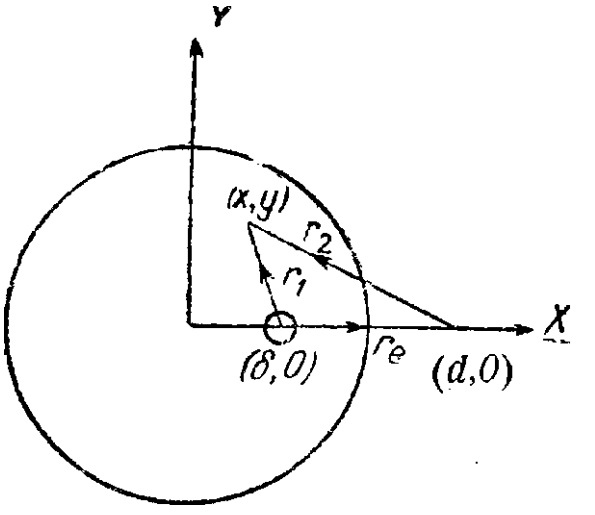
6. Течение между неконцентричными круговыми границами. Функция Грина. В предыдущем разделе было показано, что допущение постоянства давления по внешнему круговому контуру, окружающему скважину, может дать очень близкое приближение при подсчете расхода, поступающего в скважину, при одном условии, что допущенное постоянство давления представляет собой среднее значение распределения давления по контуру. Следующим вопросом, который будет подвергнут рассмотрению, является приближение, заключающееся в допущении, что скважина находится в центре внешнего контура. Поэтому следует проанализировать условия течения в системе, где скважина и внешний контур не концентричны, и посмотреть, в какой степени эти условия будут отличаться от идеальной обстановки, когда центр скважины совпадает с центром внешнего кругового контура.

С этой целью является удобным ввести для решения задачи теорию и метод функции Грина. Для плоской задачи функция Грина может быть сформулирована следующим образом: решение G уравнения Лапласа, симметричное в двух точках $(x, y; x', y')$, имеет логарифмическую особенность при $(x, y) = (x', y')$ и равно нулю, если (x, y) является точкой на контуре рассматриваемой области питания. В теории потенциала изучается аналогичная функция, которая обладает тем свойством,

что ее производная по нормали равняется нулю на всех точках контура. Для целей, поставленных в настоящей работе, встречается потребность только в функции, сформулированной в первоначальном изложении. Если эта функция будет найдена для данной области, можно показать, что распределение потенциала внутри последнего определится из следующего:

$$\bar{p}(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\oint \bar{p}(x', y')\frac{\partial G}{\partial n'}(x, y; x'y')\,ds, \qquad (1)$$

где $\bar{p}(x', y')$ дает значение p на контуре области, элементы которого обозначены через ds; n — внешняя нормаль к ds, а интеграл распространяется на весь контур. В принципе функция Грина представляет собой наиболее мощное аналитическое оружие, способное разрешить задачи в области теории потенциала. Однако недостатком ее является то обстоятельство, что нахождение функции Грина является часто такой же тяжелой задачей, что и решение задачи о потенциале прямыми способами. Все же для задачи, рассматриваемой в настоящем разделе, функция Грина может быть найдена без затруднения. Ход решения будет таков.



Фиг. 32. Источник находится в точке $(\delta, 0)$ внутри круга с радиусом $r = r_e$ и его отображение $(d,0)$.

Допустим наличие двух элементарных точек питания (с пространственной точки зрения линия питания) с противоположными знаками на расстоянии δ и d от центра круга, описанного радиусом r_e. Обе точки лежат на одной и той же радиальной линии так, что $\delta < r_e < d$ (фиг. 32). Тогда результирующее давление в точке (x, y) можно выразить следующим равенством:

$$p = \ln\frac{r_2}{r_1} + \text{const} = \ln\frac{cr_2}{r_1}, \qquad (2)$$

где r_1 — расстояние (x, y) от источника в точке $(\delta, 0)$ и r_2 — расстояние от места стока в точке $(d, 0)$. Это выражение является решением уравнения Лапласа и имеет логарифмическую особенность внутри круга $r = r_e$ при $r_1 = 0$. Оно становится равным нулю вдоль линии, определяемой уравнением:

$$\frac{cr_2}{r_1} = 1, \qquad (3)$$

или же для кривых:

$$\left(x - \frac{\delta - c^2 d}{1 - c^2}\right) + y^2 = \frac{c^2(d-\delta)^2}{(1-c^2)^2}. \qquad (4)$$

Чтобы представить контур $r = r_e$ с центром в начале координат, необходимо следующее:

$$d = \frac{r_e^2}{\delta}, \qquad c = \frac{\delta}{r_e}. \qquad (5)$$

Отсюда функция:

$$G_0 = \ln \frac{\delta}{r_e} \cdot \frac{r_2}{r_1}$$

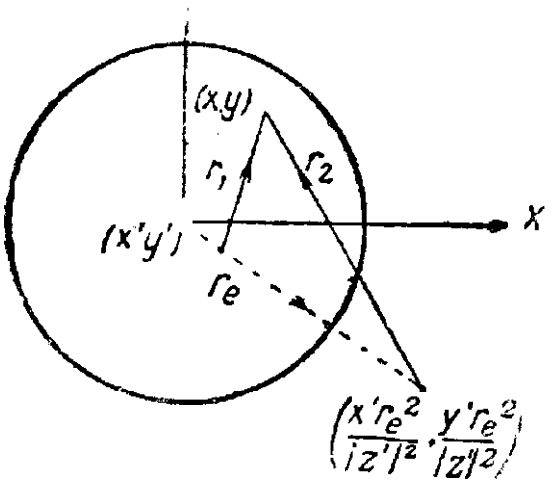
удовлетворяет требованиям функции Грина для области, оконтуренной окружностью $r = r_e$, за исключением того, что ее особенность относится к фиксированной точке $(\delta, 0)$. Если последняя будет замещена переменной точкой $z' = (x', y')$, легко убедиться, что соответствующая функция, которая явится интересующей нас функцией Грина, будет иметь вид:

$$G(x, y; x', y') = \ln \frac{|z'|\, r_2}{r_e r_1}, \tag{6}$$

где

$$\left.\begin{aligned} |z'| &= \sqrt{x'^2 + y'^2}, \\ r_2 &= \sqrt{\left(x - \frac{x' r_e^2}{|z'|^2}\right)^2 + \left(y - \frac{y' r_e^2}{|z'|^2}\right)^2} \\ r_1 &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

В общем случае отображением расположенной в круге $r = r_e$ точки (x', y'), как это показано на фиг. 33, будет точка $\left(\frac{x' r_e^2}{|z'|^2}, \frac{y' r_e^2}{|z'|^2}\right)$.



Фиг. 33. Отображение произвольной точки (x', y') внутри круга с радиусом $r = r_e$.

Если скважина небольшого радиуса r_w помещена в точке (x', y'), для которой $|z'| = \delta$, ясно, что в случае

$$\frac{r_w}{r_e} \ll \frac{\delta}{r_e} < 1,$$

функция G будет постоянной во всех практических случаях по кругу радиусом r_w и будет иметь фактическое значение

$$\ln\left[\frac{\delta(d-\delta)}{r_e r_w}\right] = \ln \frac{r_e^2 - \delta^2}{r_e r_w}.$$

Отсюда решение p, для которого

$$\left.\begin{aligned} p = p_w: \quad & \sqrt{(x-\delta)^2 + y^2} = r_w, \\ p = p_e: \quad & r = r_e \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

---

[1] Отсутствие симметрии в этом выражении для G является только внешним, так как достаточно небольших преобразований, чтобы показать $|z'| r_2$ действительно симметричным в точке (x, y) и (x', y'). Вид G, который более отчетливо показывает симметрию, будет $G = \ln \left| \frac{r_e^2 - \bar{z}' z}{r_e (z - z')} \right|$, где z, z' являются комплексными векторами к (x, y) и (x', y'), а вертикали указывают на комплексное сопряжение.

дается следующим равенством:

$$p = p_e - (p_e - p_w)\,\frac{G(x, y;\ \delta, 0)}{\ln \dfrac{r_e^2 - \delta^2}{r_e r_w}}. \qquad (9)$$

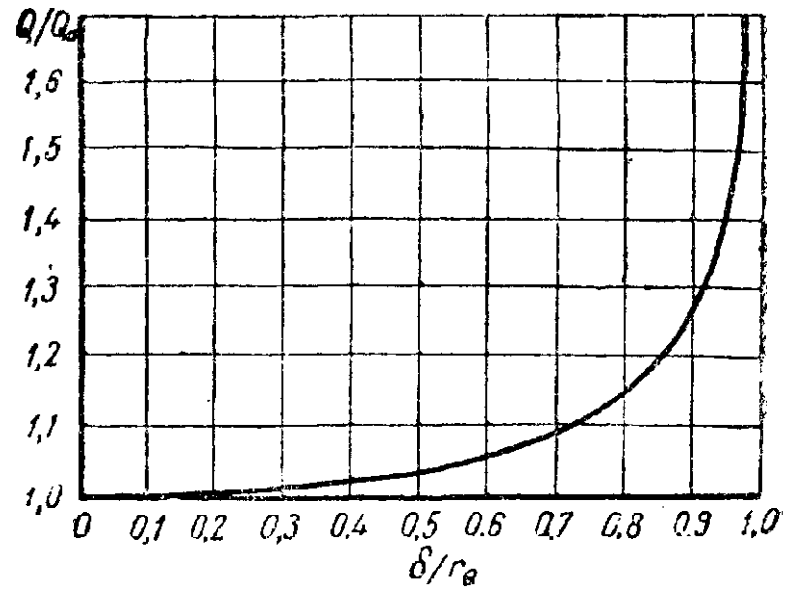
Последнее дает распределение давления между скважиной и круговым контуром радиуса r_e для случая, когда скважина смещена на расстояние δ от центра внешнего контура и где граничные условия даются уравнением (8). Чтобы определить расход из пласта в скважину, является удобным принять центр ее за начало полярных координат (r, θ). Тогда Q выразится из уравнения:

$$Q = -\int_{-\pi}^{+\pi} r v_r\, d\theta = -\frac{k(p_e - p_w)}{\mu \ln \dfrac{r_e^2 - \delta^2}{r_e r_w}} \int_{-\pi}^{+\pi} r_w \left(\frac{\partial G}{\partial r_1}\right)_{r_1 = r_w} d\theta = \frac{2\pi k (p_e - p_w)}{\mu \ln \dfrac{r_e^2 - \delta^2}{r_e r_w}} \qquad (10)$$

Интересно сравнить полученное значение Q из уравнения (10) с полученным ранее для строго радиального течения Q_0 согласно уравнению (10), гл. IV, п. 2. Отношение

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{\ln\left(1 - \dfrac{\delta^2}{r_e^2}\right)}{\ln \dfrac{r_e}{r_w} + \ln\left(1 - \dfrac{\delta^2}{r_e^2}\right)} \qquad (11)$$

дано построением на фиг. 34 как функция δ/r_e для $r_e/r_w = 2000$. Видно, что влияние смещения скважины из центра области питания настолько незначительно, что, даже когда она находится на половине расстояния между центром внешнего контура и самим контуром, рост дебита меньше 5% от первоначального Q_0.



Фиг. 34. График влияния на эксплоатационную производительность скважины ее смещения (δ) от центра внешнего кругового контура:

Q/Q_0 = (эксплоатационная производительность смещенной скважины) / (эксплоатационную производительность центральной скважины); (радиус скважины) / (радиус внешнего контура, r_e) = 1/2000.

С практической точки зрения этот вывод показывает, что можно пренебречь ошибкой, которая создается допущением нахождения скважины непосредственно в центре кругового контура, если только смещение ее из центра не является величиной порядка самого радиуса контура. Этот вывод вполне оправдывает применение формулы простого радиального течения в том случае, когда забой скважины наклонен к плоскости залегания песчаника под любым более или менее обоснованным углом, так как получающееся в конечном итоге

результирующее смещение скважины от центра пласта создает малоощутительные изменения в значении Q.

Для того чтобы подчеркнуть исключительное преимущество применения функции Грина, если только последняя была найдена, определим распределение давления для случая, когда последнее не является более постоянным по внешнему контуру. Так, если граничные условия представлены в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{ll} p = p_w: & \sqrt{(x-\delta)^2 + y^2} = r_w \\ p = p_e\theta: & r = r_e \end{array}\right\} \qquad (12)$$

уравнения (1) и (9) дают нам следующее решение:

$$p = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} p_e(\theta')\, r_e \left(\frac{\partial G}{\partial n'}\right)_{r'=r_e} d\theta' + \frac{p_w - u_0}{\ln \dfrac{r_e^2 - \delta^2}{r_e r_w}}\, G(x, y; \delta, 0), \qquad (13)$$

где

$$u_0 = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} p_e(\theta')\, r_e \left\{\frac{\partial G(\delta, 0; x', y')}{\partial n'}\right\}_{r'=r_e} d\theta' \qquad (14)$$

является, очевидно, значением первого члена в уравнении (13) для центра скважины и отсюда согласно теореме Гаусса (гл. IV, п. 16) представляет среднее давление на поверхности забоя, обязанное распределению давления на внешнем контуре. Таким образом, математическое определение давлений в любой точке между забоем скважины и внешними границами сводится к решению определенного интеграла из уравнения (13). Равным образом решается просто задача определения расхода в скважину при этих условиях. В уравнении (10) расход обозначается следующим выражением:

$$Q = \frac{k}{\mu}\int_{-\pi}^{+\pi} r_w \left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_{r=r_w} d\theta.$$

Легко убедиться в том, что интеграл в уравнении (13) не определяет собой полезного расхода в скважину, так как все выражение содержит член, связанный с p и имеющий конечное значение во всех точках внутри внешнего контура. Отсюда Q принимает вид:

$$Q = \frac{k r_w (p_w - u_0)}{\mu \ln \dfrac{r_e^2 - \delta^2}{r_e r_w}} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\frac{\partial G}{\partial r_1}(x, y; \delta, 0)\right]_{r_1 = r_w} d\theta = \frac{2k\pi (u_0 - p_w)}{\mu \ln \dfrac{r_e^2 - \delta^2}{r_e r_w}}. \qquad (15)$$

Значение u_0 среднего давления на поверхности скважины, обязанное распределению его на контуре, так же, как и значение давления для центра скважины, обязанное распределению давления на поверхности

последней, может быть получено простым решением интеграла (уравнение 14), принимая во внимание, что

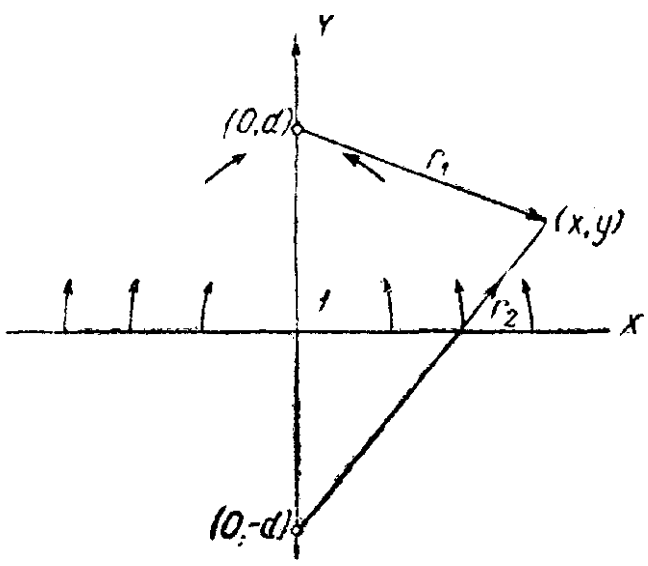
$$G(\delta, 0; x', y') = \frac{1}{2} \ln \frac{r_e^4 + \delta^2 r'^2 - 2\delta r' r_e^2 \cos\theta'}{r_e^2 \{r'^2 + \delta^2 - 2r'\delta \cos\theta'\}}, \qquad (16)$$

где $|z'|$ заменено через r' и θ' — угол между z' и осью x. Легко установить, что полученный результат является интегралом Пуассона:

$$u_0 = \frac{1 - \delta^2/r_e^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{p_e(\theta')\, d\theta'}{1 - 2\frac{\delta}{r_e}\cos\theta' + \frac{\delta^2}{r_e^2}}. \qquad (17)$$

Так как метод решения с помощью функций Грина требует первоначального определения функции Грина применительно к геометрии изучаемой проблемы, в приложении приводятся функции Грина для некоторых двухмерных областей. Они могут явиться полезными при решении других плоских задач.

7. Течение из бесконечного линейного источника питания в скважину. Фронтальное продвижение. Метод отражений. Следующей плоской задачей, имеющей практический интерес и относящейся к течению в единичную скважину, является такая, где внешним контуром вместо окружности будет прямая линия. Эта система соответствует наиболее простому случаю наступления краевой воды, где проникающая в пласт вода образует „фронтальное продвижение", замещая и оттесняя нефть в скважину, расположенную вблизи водо-нефтяного раздела. Она может также соответствовать течению в артезианскую скважину, пробуренную в проницаемом песчанике, который беспрестанно насыщается водой из близлежащей реки или канала. Тогда последний будет являться линейным источником питания, в котором давление будет поддерживаться постоянным и выше, чем давление на забое скважины (фиг. 35). Можно допустить, что бесконечно протяженный линейный источник жидкости представлен осью x-ов и что на расстоянии d от него имеется скважина радиусом r_w. Допустим на один момент, что давление вдоль линейного источника питания поддерживается на нулевом значении, а давление на забое скважины равным p_w. Будет ли тогда течение жидкости направлено в скважину или из скважины и каков будет характер распределения давления?



Фиг. 35. Бесконечный линейный источник движения жидкости по направлению к скважине в точке $(0, d)$.

1 — линейный источник.

Из рассмотрения, произведенного в предыдущем разделе, становится ясным, что вследствие незначительности размеров радиуса скважины по

сравнению с остальными величинами размеров, рассматриваемых в практической задаче, для аналитических целей можно представить себе любую скважину с постоянным давлением p_w в виде точечного источника или стока, помещенного в центре забоя скважины (с трехмерной точки зрения это будет линейный источник питания или стока, ось которого перпендикулярна к плоскости xy). Потенциал такой скважины будет иметь вид:

$$p = q \ln \frac{r}{r_w} + p_w, \tag{1}$$

где r_w — радиус скважины и q — произвольный коэфициент. В системе, состоящей из некоторого числа скважин, каждая из них будет участвовать в суммарном распределении давления именно этой величиной, причем радиусы r будут, разумеется, замеряться от центра забоев отдельных скважин. Справедливо, что в уравнении (1), при $r=0$, т. е. соответственно центру скважины p становится неопределенным. Однако в этом нельзя усмотреть затруднений, так как интересующая нас область помещается между скважиной и внешним контуром. Допустим, что в самой скважине нет песка или иной пористой среды, т. е. основное уравнение (1), гл. IV, п. 2, неприложимо к ее внутренности. Поэтому, если последнее экстраполировать на те области, которые не подчиняются этому уравнению, решение уравнения (1), гл. IV, п. 2, не представляет собой никакого интереса.

Исходя отсюда, можно к величинам, представленным уравнением (1) и отнесенным к реальным скважинам в верхней полуплоскости, где $y>0$, т. е. в интересующей нас области, добавить другие аналогичные величины, относящиеся к гипотетическим скважинам в нижней полуплоскости, где $y<0$. В этом случае опять принятые величины обратятся в неопределенность в центрах соответствующих скважин. Но так как поведение их в пределах интересующей нас области, где $y>0$, не будет противоречиво, то приложение их в этом месте не встречает особых затруднений. Так, в частности, реальная скважина в точке $(0, d)$ может иметь или можно допустить, что она имеет, зеркальное отражение в нижней части плоскости под осью x-ов. Кроме того, можно допустить, что это отражение является отрицательным, т. е. его потенциальная форма является отрицательной величиной членов соответствующего уравнения (1). Тогда в результате взаимодействия этих двух скважин будет иметь место следующее соотношение:

$$p = q \ln \frac{r_1}{r_w} + p_w - q \ln \frac{r_2}{r_w} - p_w = q \ln \frac{r_1}{r_2}, \tag{2}$$

где r_1 и r_2 будут соответственными расстояниями от центра скважины и ее отражения. Посмотрим теперь, что обозначает это выражение. Чтобы найти его значение для поверхности забоя скважины, необходимо заметить следующее. Для реальной скважины $r_1 = r_w$ и r_2 изменяется от $2d - r_w$ до $2d + r_w$. Но так как r_w гораздо меньше d, а согласно уравнению (2) p изменяется логарифмически с изменением r_2, вполне

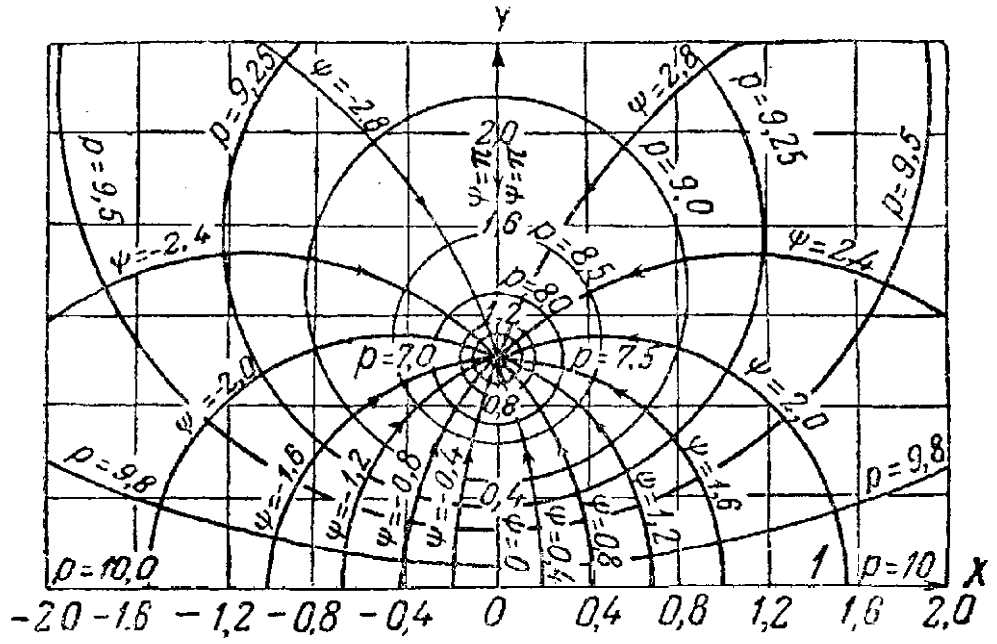
оправдывается допущение $r_2 = 2d$ для всех случаев рассмотрения поверхности забоев скважин. Тогда уравнение (2) примет вид:

$$p = q \ln \frac{r_w}{2d}\ ; \qquad r_1 = r_w, \tag{3}$$

который при соответствующем подборе величины q может принять любое допускаемое и заранее намеченное значение.

Однако большую значимость имеет вывод из уравнения (2), что при $r_1 = r_2$, — $p = 0$ и что геометрическое место точек, где $r_1 = r_2$, — есть ось x-ов. Иначе говоря, решение

$$p = \frac{p_w}{\ln r_w/2d} \ln \frac{r_1}{r_2}\ , \tag{4}$$



Фиг. 36. Кривые равного давления и линии тока для движения жидкости в скважину из бесконечного линейного источника при постоянном давлении.

1 — линейный источник.

обращается в нуль на оси x-ов и имеет значение p_w для поверхности забоя скважины. Таким образом, этот вывод является решением физической задачи, поставленной в начале настоящего раздела.

Быть может, на практике явится более удобным установить давление на линейном источнике питания скорее p_e, чем нуль.

Тогда легко заметить, что решение задачи в декартовых координатах будет:

$$p = \frac{p_w - p_e}{\ln r_w/2d} \ln \frac{r_1}{r_2} + p_e = \frac{1}{2} \frac{p_e - p_w}{\ln 2d/r_w} \ln \frac{x^2 + (y-d)^2}{x^2 + (y+d)^2} + p_e. \tag{5}$$

Отсюда кривые постоянного напора даются отношением:

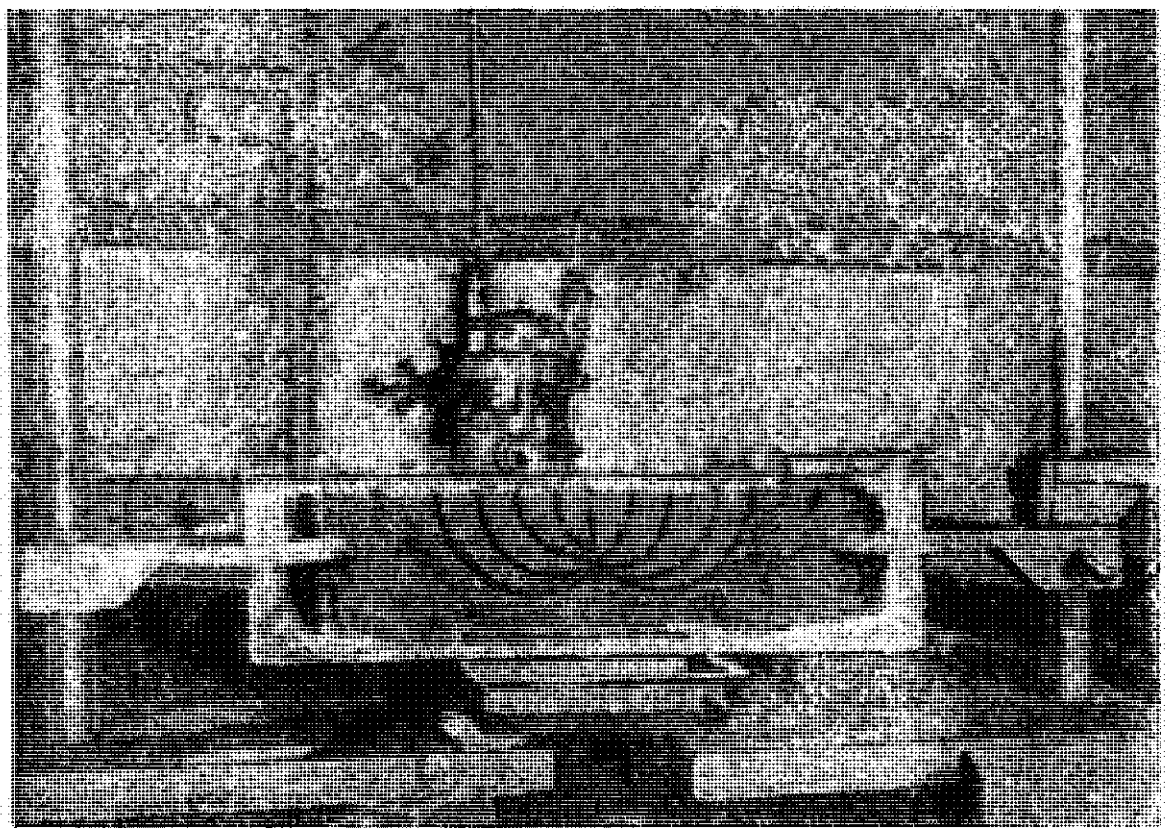
$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{x^2 + (y-d)^2}{x^2 + (y+d)^2} = \text{const} = c^2, \tag{6}$$

или

$$x^2 + \left[y - d\left(\frac{1+c^2}{1-c^2}\right)\right]^2 = \frac{4d^2c^2}{(1-c^2)^2} \tag{7}$$

и являются, очевидно, окружностями радиуса $2dc/(1-c^2)$ с центрами, находящимися в точке $\left[0, d\left(\frac{1+c^2}{1-c^2}\right)\right]$. На фиг. 36 приведены несколько

кривых равного напора и линий тока. Ортогональные траектории кривых равного напора указывают макроскопические пути перемещения частиц жидкости[1]. Теоретические линии тока на этой фигуре — окружности с центрами в $(\overline{c}, 0)$ и радиусами $\sqrt{\overline{c^2+d^2}}$ легко сравниваются с аналогичными следами на фотографии (фиг. 37), полученной Козени на песчаных моделях. Полное согласие между ними можно рассматривать как строгое подтверждение обобщающего значения закона Дар-



Фиг. 37. Фотография экспериментальных данных на песчаной модели, подтверждающих распределение линий тока, представленных на фиг. 36 (по Козени).

си. Этот закон, выведенный первоначально на основании опытов с линейными колонками песка, распространяется и на течения, где движение жидкости может обладать компонентами, направленными более чем по одной оси декартовых координат.

Суммарный расход, поступающий из линейного источника питания в скважину, определится из выражения:

$$Q = -\frac{k}{\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{y=0}dx = \frac{2kd\,(p_e - p_w)}{\mu \ln 2d/r_w}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+d^2} =$$

$$= \frac{2\pi k\,(p_e - p_w)}{\mu \ln 2d/r_w}. \qquad (8)$$

---

[1] Kozeny J., Wasserkraft und Wasserwirtschaft, 22, 103, 1927. Вертикальное направление потока при опытах Козени не имеет никакого отношения к линиям тока. Единственным выводом, который можно сделать из них, — это рассматривать кривые равного напора (фиг. 36), как эквипотенциальные поверхности, для которых скорее будет $p - \gamma gz$, чем постоянная величина p.

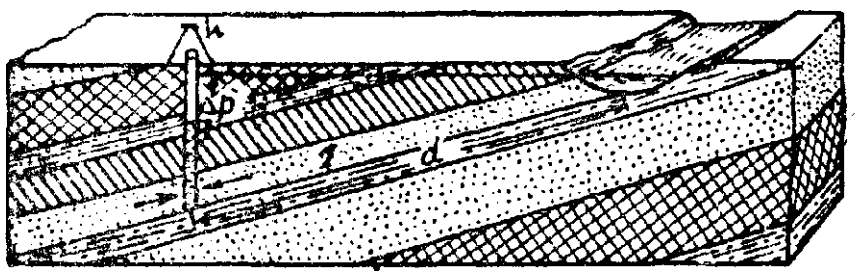
Легко убедиться, что этот вывод можно получить также из уравнения

$$Q = -\frac{kr_w}{\mu}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_{r_1=r_w} d\theta_1, \qquad (9)$$

где n — нормаль к окружности радиусом $r_1 = r_w$, определяющим скважину.

Интересно заметить, что согласно уравнению (8) расход в скважину, находящуюся на расстоянии d от линейного источника питания с давлением p_e, является аналогичным расходу в ту же самую скважину, если она окружена круговым источником питания с радиусом $2d$ и давлением p_e. Отсюда поток пропорционален перепаду давления $p_e - p_w$ и изменяется логарифмически с изменением расстояния от скважины до источника питания.

Уравнение (8) можно приложить к решению задачи подсчета производительности артезианской скважины, пробуренной вблизи реки или канала (фиг. 38)[1]. В частности, оно показывает, что эта производительность изменяется весьма медленно, логарифмически, с изменением расстояния скважины от источника питания водой. Более того, производительность прямо пропорциональна превышению напора жидкости в реке или канале над уровнем, который поддерживается в скважине.



Фиг. 38. Артезианская скважина, дренирующая пласт песчаника который питается водой из реки или из канала.

1 — песчаник.

Возьмем в качестве численного примера (фиг. 38) перепад давления жидкости 3 *м*, проницаемость песчаника 1 дарси, диаметр скважины 0,15 *м* и расстояние от берега 30 *м* (допустим вертикальность скважины). Тогда:

$p_e - p_w = 0{,}295$ *ат*; $k = 1$ дарси; $\mu = 1$; $r_w = 0{,}075$ *м*; $d = 30$ *м*.

Согласно уравнению (8) имеем:

$Q = 0{,}309$ *см*^{3}/*сек*/*см* мощности песчаника.

Для скважины, которая пробурена на расстоянии 60 *м* от берега, производительность уменьшится до величины 0,295 *см*^{3}/*сек*/*см* мощности песчаника.

Полученное аналитическое решение можно распространить также на подсчет влияния интерференции вследствие наличия других скважин

---

[1] То обстоятельство, что представленный на фиг. 38 пласт песчаника имеет уклон, не имеет никакого влияния на справедливость полученного решения. Поскольку скважина вскрыла песчаник полностью, течение в скважину будет строго двухмерным, исключая не заслуживающие внимания нарушения его, обязанные отклонению оси скважины от перпендикулярности по отношению к плоскости напластования песчаника.

вдоль берега реки или канала. Подробности такого решения будут даны в главе IX, где будет развита общая теория многоскважинных систем. Следует упомянуть, что метод отображений является в основном способом нахождения соответствующей функции Грина для частной интересующей нас задачи. Это становится ясным из сравнения уравнения (4) с функцией Грина в гл. IV, п. 6 и уравнения (5) с функцией Грина для полубесконечной плоскости, рассматриваемой в приложении. Фактически функции Грина, перечисленные в приложении, можно свободно получить как конечные выводы соответствующего комплекса конечного или бесконечного числа отображений. Уравнение (7), которое показывает, что для функции давления

$$p = q \ln \frac{r_1}{r_2},$$

окружности радиусом $\frac{2dc}{1-c^2}$ и центрами в точке $\left[0, d \frac{1+c^2}{1-c^2}\right]$ являются эквипотенциальными кривыми, позволяет точное решение[1] задачи гл. IV, п. 5 без допущения, что $r_w \ll r_e$.

Таким образом, можно убедиться в том, что, обозначая $\alpha = r_e/r_w$, $\beta = \frac{\delta}{r_e}$, константы c_e, c_w, характеризующие внешний контур и скважину, определяются из следующего выражения:

$$\beta c_w^2 + c_w \left(\alpha\beta^2 - \alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \beta = 0,$$

$$c_e = \beta + \frac{c_w}{\alpha}$$

и

$$p(x, y) = \frac{\Delta p}{\ln c_e/c_w} \ln \frac{r_1}{r_2} - \frac{p_e \ln c_w - p_w \ln c_e}{\ln c_e/c_w},$$

где

$$r_1^2 = x^2 + \left[y - \frac{r_e(1-c_e^2)}{2c_e}\right]^2; \quad r_2^2 = x^2 + \left[y + \frac{r_e(1-c_e^2)}{2c_e}\right]^2,$$

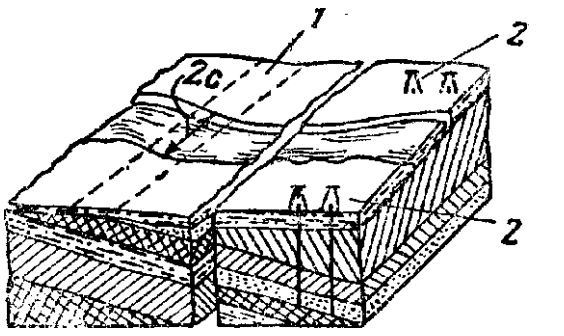
и центры круговых границ радиусом r_e, r_w будут находиться в точках:

$$\left[0, \frac{r_e}{2c_e}(1+c_e^2)\right], \quad \left[0, \frac{r_w}{2c_w}(1+c_w^2)\right].$$

8. Течение из конечного линейного источника питания в песчаник бесконечной величины. Метод сопряженных функций. В последнем разделе была подвергнута рассмотрению задача единичной скважины, дренирующей песчаник, в который поступает жидкость из бесконечного источника питания. Такая обстановка создается, если линейный источник питания, например, канал или река, параллелен

[1] Другой способ точного решения этой задачи заключается в применении „биполярных" координат (см. H. Bateman „Partial Differential Equations", стр. 260, 1932).

контакту жидкости с песчаником на большем расстоянии по сравнению с остальными размерами системы, например, расстоянием скважины от источника питания. Если же канал или река пересекают выход песчаника, как это показано на фиг. 39, то эффективным источником питания будет ширина канала или реки, которая может быть значительно меньше расстояния скважины от выхода пласта. Тогда источник питания следует рассматривать как конечный и для него должно быть найдено соответственное аналитическое решение.



Фиг. 39. Выход песчаника пересекает ложе реки или канала, которые образуют при этом линейный источник питания:

1 — выход пласта песчаника; *2* — скважины

При разборе такого решения является удобным применить теорию сопряженных функций, которую вкратце и опишем. Физическое значение теории сопряженных функций заключается в основном наблюдении, что обе части аналитической функции [1] комплексной переменной, действительная и мнимая, $z = x + iy$, определяемые выражением

$$\omega = \Phi + i\Psi = f(z) = f(x + iy) \qquad (1)$$

удовлетворяют плоскому уравнению Лапласа. Тогда из уравнения (1) непосредственно вытекает, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\,\frac{\partial \Psi}{\partial x} = f'z; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} + i\,\frac{\partial \Psi}{\partial y} = if'(z), \qquad (2)$$

так что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}\ ; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}\ , \qquad (3)$$

и

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0. \qquad (4)$$

Функции Φ и Ψ являются потенциальными. Более того, они образуют взаимно связанную ортогональную решетчатую систему, так как из уравнения (3) следует непосредственно, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \qquad (5)$$

Если теперь допустить, что Φ является потенциалом скорости, согласно уравнения (5) гл. III, п. 3, так что:

$$v_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}\ ; \quad v_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}\ , \qquad (6)$$

получим

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{\partial \Phi/\partial y}{\partial \Phi/\partial x} = -\frac{\partial \Psi/\partial x}{\partial \Psi/\partial y}\,. \qquad (7)$$

Таким образом, направление течения жидкости в любой точке совпадает с касательной в этой точке к кривым $\Psi(x, y) = \text{const}$. Эти кривые известны под названием линий тока для жидкости, где кривые

[1] Функцию $f(z)$ называют „аналитической“ в точке $z = a$, если она имеет однозначно определяемую производную в a, а также в каждой точке, непосредственно примыкающей к ней.

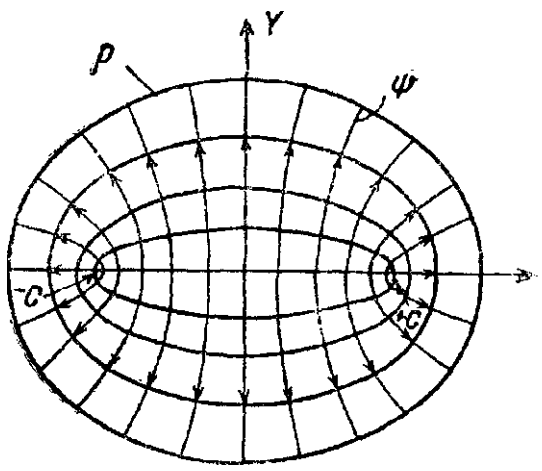
$\Phi(x, y) = \text{const}$ являются эквипотенциальными линиями. Такие две функции называются сопряженными. Функции $\Psi(x, y)$ также известны под названием „функций тока".

Отсюда видно, что, если составить уравнение вида (1) и принять Φ и Ψ соответственно за действительную и мнимую часть его, можно рассматривать Φ как потенциал скорости в физической задаче с эквипотенциальными линиями $\Phi = \text{const}$ и линиями тока $\Psi = \text{const}$. Вспоминая, что для плоской горизонтальной системы потенциал скорости Φ является давлением, умноженным на величину k/μ, заключаем, что если в частном случае одна из кривых $\Phi = \text{const}$ совпадает с интересующей нас физической границей, общие значения Φ и Ψ соответствуют физической проблеме, где граничные условия обеспечиваются постоянством давления.

В настоящем разделе, рассматривая физическое приложение этой теории, мы введем предположение, что конечный линейный источник питает при постоянном давлении пласт бесконечной величины. Задача о скважине, дренирующей этот песчаный пласт, будет рассмотрена в ближайшем разделе. Так, для частного случая (уравнение 1) будет допущено, что

$$f(z) = p + i\Psi = \operatorname{ch}^{-1} \frac{(x + iy)}{c}, \tag{8}$$

где c — постоянная величина и где потенциальная функция Φ заменена давлением жидкости p. Легко заметить, что, выделяя действительную и мнимую часть выражения, имеем:



Фиг. 40. Кривые равного давления и линии тока относительно конечного линейного источника питания.

$$\left.\begin{aligned} x &= c \operatorname{ch} p \cos \Psi \\ y &= c \operatorname{sh} p \sin \Psi \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

так что

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{c^2 \operatorname{ch}^2 p} + \frac{y^2}{c^2 \operatorname{sh}^2 p} &= 1 \\ \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \Psi} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \Psi} &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Уравнения (10) показывают, что кривые равного напора $p = \text{const}$ являются конфокальными эллипсами, фокусы которых находятся в точке $x = \pm c$, а полуоси имеют значения $c \operatorname{ch} p$ и $c \operatorname{sh} p$. Линии тока $\Psi = \text{const}$ являются конфокальными гиперболами, у которых полуоси соответственно $c \cos \Psi$ и $c \sin \Psi$, как это показано на фиг. 40. С физической стороны эти кривые можно принять дающими распределение давления и линий тока в системе, где поддерживается постоянное давление p_e по эллиптическому контуру:

$$\frac{x^2}{a_e^2} + \frac{y^2}{b_e^2} = 1,$$

и давление p_w по внутренней конфокальной эллиптической поверхности:

$$\frac{x^2}{a_w^2} + \frac{y^2}{b_w^2} = 1.$$

Когда $b_w = 0$, внутренний эллипс вырождается в конечный линейный источник питания длиной $2c$, определяемый из

$$y = 0; \quad |x| \leq a_w = c; \quad b_w = 0, \tag{11}$$

Тогда распределение давления и линий тока определяется вполне точно следующим выражением[1]:

$$p = \operatorname{ch}^{-1} H; \quad \Psi = \cos^{-1} H, \tag{12}$$[2]

где

$$H = \left[\frac{x^2 + y^2 + c^2 \pm \sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4x^2c^2}}{2c^2}\right]^{1/2}, \tag{13}$$

знак плюс относится к p, а минус к Ψ.

В частности, вдоль оси x-ов, на которой лежит линейный источник питания, уравнения (12) и (13) дают:

$$\left.\begin{array}{lll} p = 0: & |x| \leq c; & p = \operatorname{ch}^{-1}\left|\frac{x}{c}\right|; |x| \geqslant c \\ \Psi = 0; & x > c; & \Psi = \pi; \quad x < -c \\ & & \Psi = \cos^{-1}\frac{x}{c}; \; |x| < c \end{array}\right\} \tag{14}$$

Чтобы найти величину суммарного расхода Q, поступающего в песчаник из линейного источника питания, необходимо только заметить следующее свойство функции тока Ψ, а именно

$$\Delta\Psi = \int d\Psi = \int \frac{\partial\Phi}{\partial n}\, ds = \frac{k}{\mu}\int \frac{\partial p}{\partial n}\, ds, \tag{15}$$

где интегралы относятся ко всей кривой, представленной элементарным отрезком ds. Отсюда разность в величине Ψ между любыми двумя точками системы равняется полезной величине расхода, проходящего через любую кривую, соединяющую обе точки. Из уравнения (14) вытекает, что расход Q, выходя из источника питания, определяется выражением

$$Q = \frac{2\pi k}{\mu}. \tag{16}$$

Эта величина соответствует нулевому давлению у линейного источника питания и давлению $p_e = \ln\frac{(b_e + a_e)}{c}$ на внешнем конфокальном эллипсе, имеющем полуоси a_e и b_e.

---

[1] Уравнения (12) и (14) даются также Слихтером (U. S. Geol. Surv. 19th Ann. Rept., 295, 1897—1898).

[2] Уравнение (12) показывает непосредственно, что p, $\Psi = \text{const}$ есть конфокальные эллипсы, а гиперболы определяются выражением $p = \operatorname{ch}^{-1}\frac{(r_1 + r_2)}{2c}$; $\Psi = \cos^{-1}\frac{(r_1 - r_2)}{2c}$, где r_1, r_2 являются расстояниями от фокусов $(\pm c, 0)$, внешних точек линейного источника питания (x, y).

Отсюда для общего перепада давления Δp, поддерживаемого между источником питания и внешним эллипсом с меньшей полуосью b_e, значение расхода будет:

$$Q = \frac{2\pi k \Delta p}{\mu \ln \dfrac{a_e + b_e}{c}} = \frac{2\pi k \Delta p}{\mu \ln \dfrac{b_e + \sqrt{c^2 + b_e^2}}{c}}, \tag{17}$$

где $2c$ — длина линейного источника питания[1].

Наконец, можно заметить, что для расстояний от линейного источника питания, значительно больших по сравнению с длиной самого источника питания, давление, как это и следует ожидать, принимает логарифмическую радиальную форму. Если $x^3 + y^2 = r^2 \gg c^2$, то $H \sim r/c$ или x/r. Беря верхний или нижний знаки в уравнении (13), получаем:

$$\left.\begin{aligned} p &\cong \operatorname{ch}^{-1} \frac{r}{c} \cong \ln \frac{2r}{c} : \qquad x^2 + y^2 \gg c^2 \\ \Psi &\cong \cos^{-1} \frac{x}{r} = \theta \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где θ — угол полярных координат, начало которых находится в центре источника.

9. Течение из конечного линейного источника питания в скважину. Преобразования сопряженной функции. Бесконечный ряд отображений. В предыдущем разделе было показано, что всякое уравнение вида (1), гл. IV, п. 8 дает две „сопряженных функции“, одна из которых может „интерпретироваться“ физически как система эквипотенциальных кривых, а другая соответствующими им линиями тока. Они найдут себе отражение в действительной физической системе, если заранее намеченное распределение давлений и расходов на ее границах будет пропорционально (аддитивной константе) тем величинам, которые создаются решеткой сопряженных функций на кривых, оконтуривающих физическую систему. Так, при рассмотрении задачи, представленной в гл. IV, п. 8, фактическое решение состоит в заключении, что один из эквипотенциалов решетки сопряженной функции, сформулированной уравнением (8), гл. IV, п. 8, а именно вырождающийся эллипс из уравнения (14), гл. IV, п. 8 геометрически совпадает с конечным линейным источником питания исследуемой физической системы. Аналогичные задачи могут решаться тем же путем.

Однако для решения представленной задачи будет использовано несколько иное свойство сопряженных функций. Это означает: вместо того чтобы получить из них непосредственное решение уравнений Лапласа, эти функции будут использованы для преобразования независимой переменной (x, y). Здесь следует заметить, что преобразование сопряженной функции

$$\zeta = \xi + i\eta = f(z) = f(x + iy) \tag{1}$$

---

[1] Следует заметить, что уравнения (16) и (17) дают величину расхода, выходящего с обеих сторон источника питания.

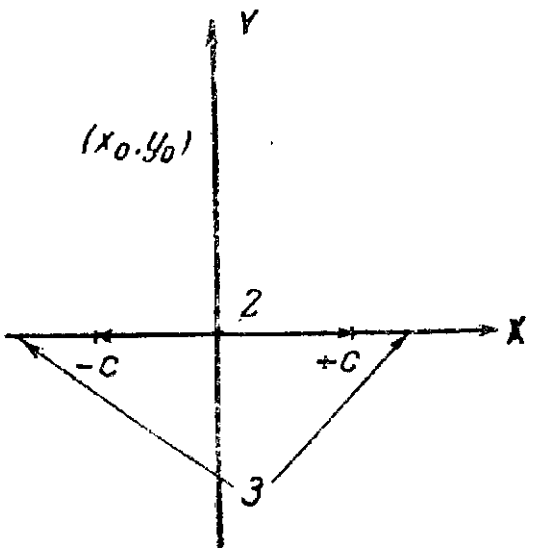
оставляет уравнение Лапласа инвариантным, так что если

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0,$$

то, очевидно, также справедливо:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} = 0. \tag{2}$$

Преобразование уравнения (1) можно использовать для замены геометрических границ физической системы на иные, являющиеся более подходящими при аналитических упражнениях. Так, физическая система в прямоугольной (x, y) системе координат, т. е. в плоскости z, соответствующая течению из конечного линейного источника питания в скважину, может быть представлена схематически на фиг. 41. Вследствие того, что предполагается пересечение выхода песчаника ложем реки, можно принять, что, кроме линейного источника питания, соответствующего выходу песчаного пласта в ложе реки, отсутствует расход через ось x-ов и в песчаник. Это требование легко удовлетворяется само по себе, если использовать распределение давления согласно предыдущему разделу и добавить к нему логарифмический член, обязанный наличию скважины в точке (x_0, y_0), и другой логарифмический член, обязанный ее положительному отражению в точке $(x_0, -y_0)$. Однако присутствие этих двух логарифмических членов нарушит постоянство давления на линейном источнике питания. Тогда возникнет задача найти такое дополнительное распределение расхода по линейному источнику, которое скорректирует нарушение распределения давления, созданное наличием действительной скважины и ее отражением. Чем пытаться решить интегральное уравнение, к которому приводит эта задача, вернее будет преобразовать схему на плоскости z в плоскость (ξ, η) или „плоскость ζ“ следующим путем.



Фиг. 41.

1 — плоскость z; *2* — конечный линейный источник питания; *3* — нулевой расход.

Прибегая снова к соотношению комплексного переменного из гл. IV, п. 8, имеем:

$$\zeta = \xi + i\eta = \operatorname{ch}^{-1} \frac{(x + iy)}{c}. \tag{3}$$

Отсюда следует, как и раньше,

$$\left.\begin{aligned} x &= c \operatorname{ch} \xi \cos \eta \\ y &= c \operatorname{sh} \xi \sin \eta \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{c^2 \operatorname{ch}^2 \xi} + \frac{y^2}{c^2 \operatorname{sh}^2 \xi} &= 1 \\ \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \eta} &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Подходя аналогичным путем, что и при интерпретации уравнения (14); гл. IV, п. 8, замечаем, что ось x-ов в плоскости z переходит в $y=0$,

$$\left.\begin{array}{rll} |x|<c: \to: & \xi=0, & 0\leq\eta\leq\pi \\ x>c: \to: & \eta=0, & 0\leq\xi<\infty \\ x<-c: \to: & \eta=\pi, & 0\leq\xi<\infty \\ (x_0,\ y_0) \to (\xi_0,\ \eta_0) & & \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Таким образом, верхняя полуплоскость z представляется на фиг. 42 в виде полубесконечной полосы плоскости ζ.

Уравнением распределения давления в плоскости ζ опять является уравнение Лапласа (2), и граничные условия внешне останутся теми же самыми, что и раньше, а именно:

$$\left.\begin{array}{ll} p=p_e: & \xi=0, \quad \eta=\pi \quad \text{(линейный источник)} \\ \dfrac{\partial p}{\partial\eta}=0: & \eta=0, \quad \eta=\pi \quad \text{(остаток оси } x\text{-ов)} \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Хотя диференциальные уравнения и граничные условия внешне остались теми же, важно заметить, что в плоскости ζ налагается простое условие на каждый из граничных сегментов, в то время как в плоскости z были наложены „смешанные условия“ на единичный контур ($y=0$), т. е. установление p на одной части его и $\frac{\partial p}{\partial y}$ на остальной части. Отсюда действительной целью введения в решение представленной задачи, так же как и в других аналогичных преобразованиях сопряженной функции, является освобождение от смешанных граничных условий [1].

Чтобы решить теперь преобразованную задачу согласно уравнений (2) и (7), необходимо расширить и применить метод отражений, уже описанный в гл. IV, п. 7. Рассматривая снова скважину в точке (ξ_0, η_0) как математический сток, можно получить нулевой расхода на контурах $\eta=0,\ \pi$, устанавливая дополнительно отражения в точке $(\xi_0, -\eta_0)$ и $(\xi,\ 2\pi-\eta_0)$. Однако первое условие создает расход, не равный нулю, при $\eta=\pi$, а второе при $\eta=0$. Тогда эти точки должны будут исправляться собственными отражениями и т. д.

В дополнение к этому бесконечная система должна отражаться в направлении оси η так, чтобы создать постоянное (превращающееся в нуль) давление по оси η (линейного источника питания в плоскости z).

---

[1] Гораздо более простым способом решения задач со смешанными граничными значениями является объединение метода преобразований сопряженной функции со „смешанными“ функциями Грина, которые сформулированы так, что имеют нулевое значение на той части контура, где давление было установлено и где производные их по нормали равняются нулю на той части контура, для которой эти производные были определены (см. M. Muskat, Physics, 6, 27, 1935, в частности, раздел B). Действительно, при таком решении, распределение давления согласно уравнению (11) будет найдено просто, как сама функция Грина, хотя координаты (ξ, η) будут установлены преобразованием, отличным от уравнения 3).

Тогда конечный полный ряд отражений определится выражениями (фиг. 42):

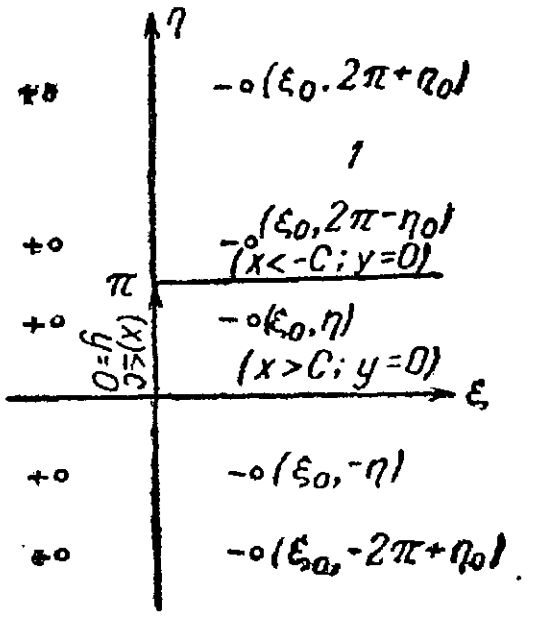
$$-q:(\xi_0,\ \pm 2n\pi \pm \eta_0);\qquad +q:(-\xi_0,\ \pm 2n\pi \pm \eta_0), \tag{8}$$

где q представляет „напряжение“ физической скважины в точке (ξ_0, η_0).

Отсюда распределение давления в результате такой системы отражений напишется:

$$p=\frac{q}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\ln\frac{(\xi+\xi_0)^2+(\eta-2n\pi-\eta_0)^2}{(\xi-\xi_0)^2+(\eta-2n\pi-\eta_0)^2}+$$

$$+\frac{q}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\ln\frac{(\xi+\xi_0)^2+(\eta-2n\pi+\eta_0)^2}{(\xi+\xi_0)^2+(\eta-2n\pi+\eta_0)^2}. \tag{9}$$



Фиг. 42. Отображение на плоскости ζ, необходимое для удовлетворения граничных условий, показанных на фиг. 41.

1 — плоскость ζ.

Эти суммы могут быть упрощены ввиду того, что

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\ln\left[(\xi-h)^2+(na-\eta)^2\right]=$$

$$\ln=\prod_{-\infty}^{+\infty}\left[(\xi-h)^2+(na-\eta)^2\right]=$$

$$=\ln^*\prod_{-\infty}^{+\infty\prime}n^2a^2+\ln\eta^2+2\ln\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{\eta}{na}\right)\left(1+\frac{\eta}{na}\right)+$$

$$+\ln\prod_{-\infty}^{+\infty}\left\{1+\frac{(\xi-h)^2}{(na-\eta)^2}\right\}=$$

$$=\ln\sin^2\frac{\eta\pi}{a}+\ln\frac{\operatorname{ch}2\pi\,(\xi-h)/a-\cos 2\pi\eta/a}{1-\cos 2\pi\eta/a}=$$

$$=\ln\left[\operatorname{ch}2\pi\,(\xi-h)/a-\cos 2\pi\eta/a\right], \tag{10}$$ [1]

где константа $\ln\prod_{-\infty}^{+\infty\prime}n^2a^2$, а также другие конечные константы отброшены.

Уравнение (9) может быть приведено к виду:

$$p=p_e+\frac{q}{2}\ln\frac{\left[\operatorname{ch}(\xi+\xi_0)-\cos(\eta-\eta_0)\right]}{\left[\operatorname{ch}(\xi-\xi_0)-\cos(\eta-\eta_0)\right]}\times$$

$$\times\frac{\left[\operatorname{ch}(\xi+\xi_0)-\cos(\eta+\eta_0)\right]}{\left[\operatorname{ch}(\xi-\xi_0)-\cos(\eta+\eta_0)\right]}, \tag{11}$$

где константа p_e была добавлена, чтобы получить $p\ (\xi=0)=p_e$.

---

* Отметка „прим“ указывает, что член $n=0$ опущен.

[1] Whittaker and Watson, „Modern Analysis“, 4th ed., p. 137, 1927.

Уравнение (11) удовлетворяет второму граничному условию (7). Тогда дифференциальное уравнение (2) может быть подтверждено непосредственной подстановкой. Если теперь помощью уравнений (4) и (5) (ξ, η) выразить через (x, y) и подставить в (11), можно сейчас же получить распределение давления для первоначальной задачи в плоскости z. Однако, чтобы получить величину расхода в системе, следует избежать применения этой достаточно сложной подстановки. На радиусе скважины можно принять $\eta = \eta_0$, $\xi = \xi_0 = \varepsilon \ll 1$, откуда:

$$p_w = p_e + \frac{q}{2} \ln \frac{2 \operatorname{sh}^2 \xi_0 \ (\operatorname{ch} 2\xi_0 - \cos 2\eta_0)}{\varepsilon^2 \sin^2 \eta_0} =$$

$$= p_e + q \ln \frac{2c \operatorname{sh} \xi_0 \ (\operatorname{sh}^2 \xi_0 + \sin^2 \eta_0)}{r_w \sin \eta_0}, \qquad (12)$$

где r_w — радиус скважины, так как

$$\overline{ds}^2 \text{ (плоскость } z) = c^2 \ (\operatorname{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta) \ \overline{d}s^2 \text{ (плоскость } \zeta). \qquad (13)$$

Уравнение (12) указывает, что очень близко к центру скважины распределение давления дается выражением:

$$p = p_e + \text{const} - q \ln \varrho, \qquad (14)$$

где ϱ — расстояние от центра скважины.

Тогда расход в скважину будет:

$$Q = - \frac{2\pi k q}{\mu}, \qquad (15)$$

так что, возвращаясь к уравнению (12), величина расхода в общем виде будет:

$$Q = \frac{2\pi k \ (p_e - p_w)}{\mu \ln \dfrac{2c \operatorname{sh} \xi_0 \ (\operatorname{sh}^2 \xi_0 + \sin^2 \eta_0)}{r_w \sin \eta_0}} =$$

$$= \frac{2\pi k \ (p_e - p_w)}{\mu \ln \dfrac{4y_0}{r_w} \left\{ \dfrac{\sqrt{(c^2 - r_0^2)^2 + 4y_0^2 c^2}}{c^2 - r_0^2 + \sqrt{(c^2 - r_0^2)^2 + 4y_0^2 c^2}} \right\}}, \qquad (16)$$

где

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2.$$

Представляют интерес некоторые случаи, ограничивающие применение этой формулы. Так, если скважина находится на перпендикуляре, секущем надвое линейный источник питания, значение Q принимает вид:

$$Q_1 = \frac{2\pi k \ (p_e - p_w)}{\mu \ln \dfrac{2y_0}{r_w} \left(1 + \dfrac{y_0^2}{c^2}\right)} = \frac{2\pi k \ (p_e - p_w)}{\mu \ln \left\{ \dfrac{2y_0}{r_w} \operatorname{cosec}^2 \dfrac{\theta}{2} \right\}}, \qquad (17)$$

где θ — угол у скважины, стянутый линейным источником. Уравнение (17) имеет аналогичную форму, которая была найдена для бесконечного источника питания [гл. IV, п. 7, уравнение (8)], за исключением отсутствия в нем множителя $1 + \frac{y_0^2}{c^2}$. Отсюда оно становится, как и следует этого ожидать, тождественным случаю, когда скважина при-

ближена к конечному источнику питания $(y_0/c \ll 1)$ [1]. Однако, если скважина сильно удалена от линейного источника питания $(y_0/c \gg 1)$, текущий дебит ее уменьшается, словно линейный источник эквивалентен внешнему круговому контуру питания с радиусом, обратно пропорциональным кубу угла, стянутого линией источника у скважины.

Если скважина находится на одной линии с краями линейного источника питания, т. е. если $x_0^2 = c^2$, то

$$Q_2 = \frac{2\pi k\ (p_e - p_w)}{\mu \ln \dfrac{4y_0 \sqrt{4c^2 + y_0^2}}{r_w \sqrt{4c^2 + y_0^2} - y_0}}, \quad |x_0|^2 = c_0^2 \tag{18}$$

что, очевидно, имеет меньшую величину по сравнению со случаем, когда $x_0 = 0$, так как аргумент логарифма в данном случае больше, чем в уравнении (17).

Так, если $y_0 = c$, то

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\ln 7{,}24\, y_0/r_w}{\ln 4\, y_0/r_w}.$$

Если скважина расположена от центра линейного источника питания на расстоянии, равном половине ширины источника, то уравнение (16) приводится к виду:

$$Q_3 = \frac{2\pi k\ (p_e - p_w)}{\mu \ln 4y_0/r_w}, \tag{19}$$

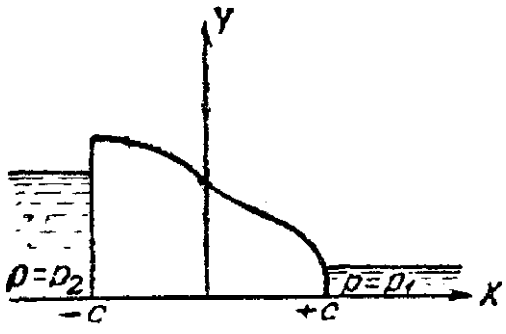
который не зависит от x_0.

Наконец, следует заметить, на основании уравнения (17), что поправочный множитель $\operatorname{cosec}^2 \dfrac{\theta}{2}$ входит в логарифмический член. Отсюда допущение бесконечного линейного источника питания $(\theta = \pi)$ даст весьма малую ошибку при практическом исчислении Q, если вполне определенно известно, что расстояние от скважины до выхода пласта значительно больше, чем ширина реки или канала, питающего этот выход.

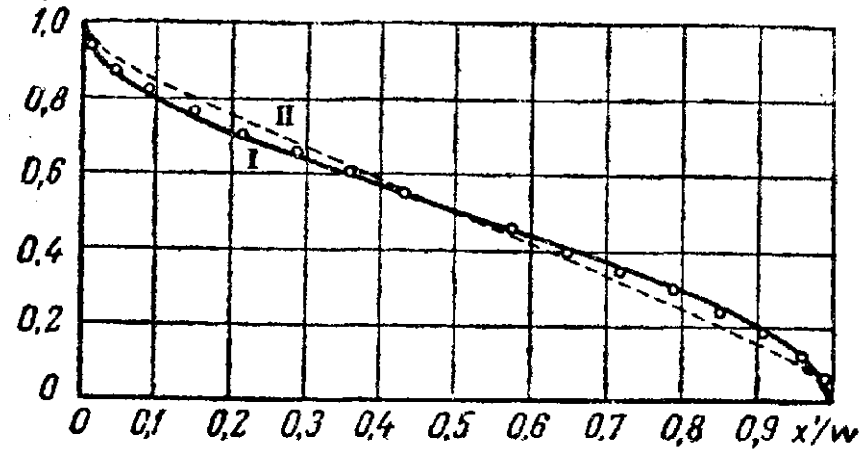
10. Противодавление на плотину с расширенным основанием. Забивная крепь отсутствует. При рассмотрении фильтрации воды под плотиной значительной ширины возникает весьма интересный практический вопрос, связанный с характеристикой противодавления, воздействующего на основание плотины и возникающего вследствие этой фильтрации. Эта задача имеет большую значимость при проектировании плотин и может быть решена непосредственным приложением теории потенциала, вкратце описанной в предыдущих разделах. Так как основной интерес здесь лежит в природе распределения давления на основание плотины при допущении, что оно установлено на пористом массиве без значительного углубления в него, то ширину основания плотины следует рассматривать как конечную величину, а длину плотины следует принять бесконечной. Кроме того, чтобы упростить под-

[1] В действительности, если c делается неопределенно большим, уравнение (16) приводится непосредственно к уравнению (8), гл. IV, п. 7.

счет противодавлений и моментов [1], глубина песчаника, залегающего под плотиной, принимается бесконечной для данного случая, а также для случаев, рассматриваемых в последующем разделе (фиг. 43). При рассмотрении задачи о фактическом расходе при фильтрации будет дано точное решение только для пласта конечной мощности (см. гл. IV, пп. 12 и 14), так как песчаник бесконечной мощности даст бесконечный расход фильтрации. Когда под основанием плотины отсутствуют сваи, характер распределения давления можно установить простой интерпретацией выводов из гл. IV, п. 8. Если мы произведем замену функций Ψ и p в уравнении (10), гл. IV, п. 8, и будем рассматривать давление p как потенциал скорости Φ, можно заметить, на основании уравнения (14), гл. IV, п. 8, что



Фиг. 43. Схематическое поперечное сечение водонепроницаемой плотины, установленной на пористом ложе, имеющем бесконечную мощность.



Фиг. 44. Распределение давления в основании плотины без забивной крепи:

p — давление в основании плотины для единицы перепада общего давления; x'/w — (расстояние от пяты плотины) / (ширину основания); I — мощность проницаемого слоя h, залегающего ниже основания плотины, принимается бесконечной; II — $w/h = 5{,}0$; кружочки — $w/h = 1{,}0$.

решения, которые даются в гл. IV, п. 8, соответствуют распределению потенциала, где по оси x-ов $\Phi = \pi$ для $x < -c$ и $\Phi = 0$ для $x > c$. Участок оси x-ов между ними соответствует линии тока $\Psi = 0$. Кроме того, потенциал, а отсюда и распределение давления на основание даются следующим выражением:

$$p = \frac{\Delta p}{\pi} \cos^{-1} \frac{x}{c} + p_1, \qquad (1)$$

где Δp — суммарное падение давления между сторонами плотины вверх и вниз по течению. Давление, под которым находится плотина, обозначим через p_1. На фиг. 44 дано графическое построение уравнения (1), показывающее, что обычное допущение линейной изменчивости не дает такой большой ошибки, но оно приводит к завышенным давлениям вблизи края плотины вверх по течению и заниженным давлениям у края ее вниз по течению.

Эта разница особенно заметна, когда рассматриваются скорости, пропорциональные наклонам кривой фиг. 44. Согласно уравнению (1)

---

[1] Это приближение не повлечет за собой серьезных ошибок, за исключением тех случаев, когда ширина плотины велика по сравнению с мощностью песчаника или когда забивная крепь при ее наличии проникает глубже, чем на половину мощности песчаника (см. фиг. 44 и 68).

это ведет к созданию неопределенно больших скоростей у краев плотины [1], указывающих на большую опасность эрозии и песчаных потоков, чем это можно получить при линейном распределении давления.

Суммарная направленная вверх сила F на единицу длины плотины дается выражением:

$$F=\int_{-c}^{+c}\left[\frac{\Delta p}{\pi}\cos^{-1}\frac{x}{c}+p_1\right]dx=c\Delta p+2p_1c=(p_2+p_1)\frac{w}{2}, \qquad (2)$$

где w — ширина плотины и p_2 — давление вверх по течению. Очевидно, это же значение будет существовать при допущении линейной изменчивости давления. Суммарный момент сил противодавления по отношению к пяте плотины будет:

$$M=\int_{-\frac{w}{2}}^{+\frac{w}{2}}\left(x+\frac{w}{2}\right)\left[\frac{\Delta p}{\pi}\cos^{-1}\frac{2x}{w}+p_1\right]dx=\frac{w^2}{16}(3p_2+5p_1), \qquad (3)$$

в то время как линейное распределение давления даст величину момента

$$M=\frac{w^2(p_2+2p_1)}{6},$$

которая всегда будет меньше истинного значения уравнения (3). Когда $p_1=0$ величина ошибки достигает 11,1%.

11. Противодавление на плотину с забивной крепью [2]. Теорема Шварца-Кристоффеля. Задачей, имеющей большое практическое значение, является определение противодавления на плотину в том случае, когда основание плотины покоится на забивной крепи из шпунтовых свай. Однако раньше чем дать вывод точного решения для этого случая, будет полезно осветить более ясно реальную аналитическую значимость преобразований гл. IV, п. 8, которые были приложены в предыдущей главе.

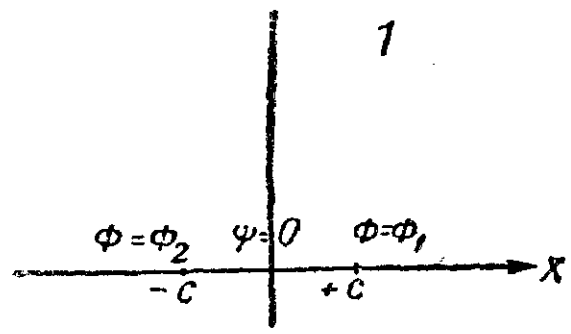
Так, первоначальная задача состояла из нахождения распределения потенциала (удовлетворяющего уравнению Лапласа), которое предполагало бы постоянное значение его по оси x-ов для $x<-c$, отличное постоянное значение его для $x>c$, и искомое значение распределения потенциала было таково для $|x|<c$, чтобы ось x-ов соответствовала бы линии тока, где $\Psi=\text{const}$ $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}=0\right)$. Однако трудно

---

[1] Разумеется, с физической стороны строго бесконечные скорости никогда не могут иметь места, вследствие того что в этом случае нарушится закон Дарси (гл. II, п. 2). Однако аналитическая теория, основанная на законе Дарси, правильно характеризует тенденцию в развитии столь высоких скоростей, хотя бы даже отдельные подробности распределения давления и скорости в отдельных местах решения не отражали бы с точностью физическое течение.

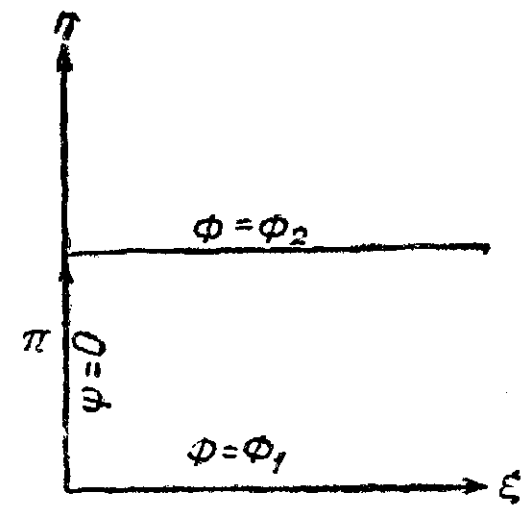
[2] Основные аналитические выводы этого раздела вплоть до уравнения (14), но выведенные в несколько измененной форме, включая сюда фиг. 50—53, были даны W. Weaver, «Journ. Math. and Physics», 11, 114, 1932.

удовлетворить требованию, где оба значения Φ и его производная по нормали $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ были определены для отдельных частей одного и того же прямолинейного контура (ось x-ов) с помощью элементарных решений,



Фиг. 45. Отображение плотины без забивной крепи, установленной на пористом ложе, имеющем бесконечную мощность, на плоскости Z.

1 — плоскость Z.



Фиг. 46. Отображение фиг. 45 на плоскость ζ.

1 — плоскость ζ.

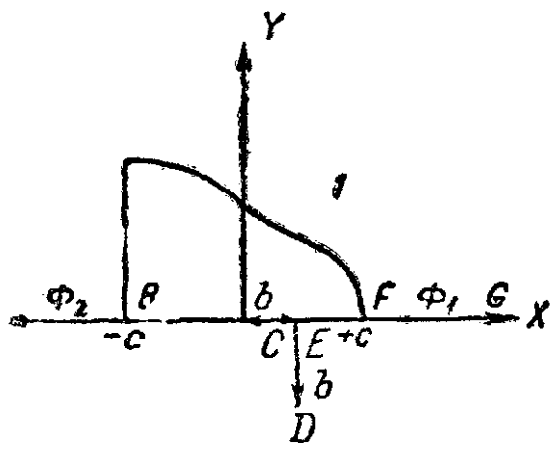
выведенных непосредственно из уравнения Лапласа. По этой причине было введено преобразование комплексной переменной [1], равноценное выражению:

$$\zeta = \xi + i\eta = \operatorname{ch}^{-1} \frac{(x+iy)}{c}. \tag{1}$$

Для плоскости ζ граница первоначальной системы (ось x-ов на фиг. 45) реализует свою внешность на фиг. 46 в виде полубесконечной полосы. Для такой геометрической области с установленными граничными условиями можно написать выражение распределения потенциала:

$$\Phi = \frac{\Delta\Phi}{\pi}\eta + \Phi_1. \tag{2}$$

Отмечая, что вдоль оси x-ов, где $\Psi = 0$, $\eta = \cos^{-1}\frac{x}{c}$, получим уравнение (1), гл. IV, п. 10.



Фиг. 47. Отображение плотины с забивной крепью и шириной d, установленной на пористом ложе бесконечной мощности, на плоскости z.

1 — плоскость z.

Этот же метод решения можно использовать для более сложной задачи о плотине, установленной на забивной крепи из шпунтовых свай, представленной на фиг. 47. Из последней ясно, что контур $BCDEF$ является линией тока системы. Отсюда, если этот участок контура отображен на отрезке действительной оси вспомогательной плоскости, а участки AB и FG на остальной части действительной оси, то задача становится внешне равноценной случаю, представленному на фиг. 45, который можно решить с помощью дальнейшего преобразования урав-

---

[1] Та же самая процедура была применена нами в гл. IV, п. 9, хотя весь ход анализа, последовавшего за преобразованием уравнения (1), был совершенно отличен от приведенного здесь.

нения вида (1). В этом и заключается новый аналитический путь, по которому решается задача о плотине с забивной крепью [1]. Реализацию конформного отображения можно выполнить на основе теоремы Шварца-Кристоффеля, которая дает методику получения внешности любой полигональной области на верхней половине комплексной плоскости, где контур области преобразуется по отношению к действительной его оси. Действительно, преобразование уравнения (1), примененное для получения внешности плоскости z (фиг. 45) на плоскость ξ (фиг. 46) может быть получено из этой теоремы первоначальной реализацией отображения бесконечного прямоугольника (фиг. 46) на плоскость z и последующим его инвертированием.

Теорему Шварца-Кристоффеля можно сформулировать так: полигон с вершинами $z_k = x_k + iy_k$ на плоскости $z = x + iy$ и внутренними углами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ отображается на верхнюю полуплоскость $\zeta = \xi + i\eta$ с точками $\zeta = \xi_k$, соответствующими вершинам $z = z_\kappa$ при условии, что соотношение между z и ζ определяется уравнением:

$$z = c_1 \int \frac{d\zeta}{\Pi\,(\zeta - \xi_k)^{1 - \alpha k/\pi}} + c_2, \qquad (3)$$

где c_1 и c_2 — константы, определяемые размерами и ориентировкой полигона. Если $\xi = \pm\infty$ соответствует углу полигона, то соответствующий коэфициент в произведении интегрируемой функции опускается. Правильность этой теоремы может быть легко установлена, если обратить внимание, что аргументы $\frac{dz}{d\zeta}$, соответствующие уравнению (3), в действительности изменяются на величину $\pi - \alpha_k$, по мере того как пересекаются точки $\zeta = \xi_k$. Чтобы приложить эту теорему для решения рассматриваемой задачи, необходимо учесть все углы α_k полигона $ABCDEFGA$. Это будут, очевидно:

$$\alpha = \angle FED = \frac{\pi}{2}; \quad \alpha = \angle EDC = 2\pi; \quad \alpha = \angle DCB = \frac{\pi}{2};$$

$$\alpha = \angle BAG = 0.$$

Тогда, принимая значение $\zeta = 1$, соответствующее точке E, $\zeta = 0$ — точке D, $\zeta = -1$ — точке C и $\zeta = -\infty$ — точке A, уравнение (3) примет вид:

$$z = c_1 \int \frac{\zeta d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} + c_2 = c_1 \sqrt{\zeta^2 - 1} + c_2. \qquad (4)$$

---

[1] Следует заметить, что задача нахождения сопряженной функции, с помощью которой осуществляется преобразование внешности одной области на контур другой, очень близка к нахождению функции Грина для данной области. В частности, можно показать, если $G(x, y; \xi, \eta)$ является функцией Грина для данной области и $G_1(x, y; \xi, \eta)$ — ее сопряжение, то функция $\xi = f(z) = e^{G - iG_1}$ дает возможность отобразить внешность контура первоначальной области на внутренность единичного круга в плоскости ζ, причем точка (ζ, η) совместится с началом координат плоскости ζ (см. Riemann-Weber's, „Differentialgleichungen der Physik", vol. 1, p. 546, 1925).

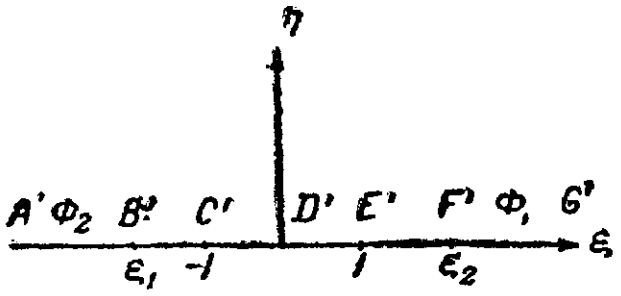
Константы c_1 и c_2 можно определить из условия, чтобы установленные соответствия были справедливы численно. Это означает, что

$$E \to \zeta = 1; \quad b = c_2; \quad D \to \zeta = 0; \quad b - id = c_1 i + c_2;$$

$$C \to \zeta = -1; \quad b = c_2 \tag{5}$$

явится условием, при котором $A \to \zeta = -\infty$ будет, очевидно, тождественно удовлетворяться. Отсюда уравнение (4) примет вид:

$$z = -d\sqrt{\zeta^2 - 1} + b, \tag{6}^1$$



Фиг. 48. Отображение фиг. 47 на плоскость ζ.
1 — плоскость ξ.

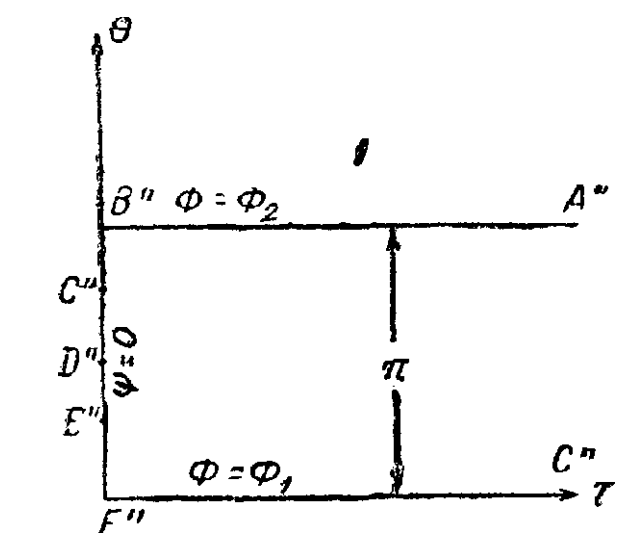
реализующий конформное отображение на плоскости ζ, как это видно из фиг. 48, причем B' и F' имеют соответственные значения:

$$\xi_1 = -\sqrt{1 + \frac{(c+b)^2}{d^2}}$$

и

$$\xi_2 = +\sqrt{1 + \frac{(c-b)^2}{d^2}}.$$

Тогда задача сводится в принципе к вопросу о плотине без забивной крепи. Перемещая начало координат плоскости ζ так, чтобы оно легло на полпути между B' и F', и меняя масштаб так, чтобы длина $B'F' = 2$, т. е. прибегая к преобразованию следующего вида:



Фиг. 49. Отображение фиг. 47 на плоскости λ.
1 — плоскость λ.

$$\zeta' = \frac{\zeta - \frac{(\xi_2 + \xi_1)}{2}}{\frac{(\xi_2 - \xi_1)}{2}};$$

$$\xi' = \frac{\xi - \frac{(\xi_2 + \xi_1)}{2}}{\frac{(\xi_2 - \xi_1)}{2}}, \tag{7}$$

получим плоскость ζ, преобразованную в равноценную ей плоскость z (фиг. 45). Отображая теперь плоскость ζ' на плоскость λ путем следующего преобразования:

$$\lambda = \tau + i\theta = \operatorname{ch}^{-1}\zeta', \tag{8}$$

получим полубесконечную полосу, представленную на фиг. 49. Тогда конечное решение для распределения потенциала определится из выражения:

$$\Phi = \frac{\Delta\Phi}{\pi}\theta + \Phi, \tag{9}$$

которое на основании уравнений (6), (7) и (8) дает значение Φ как функции (x, y) в первоначальной плоскости z. Для изучения противо-

---

[1] Следует заметить, что отрицательный радикал должен быть взят для $\xi > 1$, а положительный для $\xi < 1$.

давления на плотину следует рассматривать только те значения Φ, для которых $y=0$, $|x|<c$. Это налагает условие, что ζ и ζ' вещественны и что фактически $|\xi'|<1$. Отсюда уравнение (9) для потенциала у основания плотины примет вид:

$$\Phi=\frac{\Delta\Phi}{\pi}\cos^{-1}\xi'+\Phi_1. \tag{10}$$

Вводим сюда обозначения:

$$c=\frac{w}{2};\quad b+c=\bar{x};\quad x'=x+\frac{w}{2};\quad \alpha=\frac{w}{d};\quad \beta=\frac{\bar{x}}{d},$$

где w — ширина плотины; $\bar{x}$ — расстояние от свай до пяты основания; α — отношение ширины плотины к глубине забивки свай; x' — расстояние, отсчитываемое по основанию, начиная от пяты плотины. Сделав соответствующие подстановки и возвращаясь к значениям давлений, можем переписать в конечном итоге уравнение (10) так:

$$p=\frac{\Delta p}{\pi}\cos^{-1}\times$$

$$\times\left[\frac{2\sqrt{1+\left(\frac{x'}{d}-\beta\right)^2}-\sqrt{1+(\alpha-\beta)^2}+\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1+(\alpha-\beta)^2}+\sqrt{1+\beta^2}}\right]+p_1, \tag{11}$$

где знак первого радикала берется плюс для $x'>\bar{x}$ и минус для $x'<\bar{x}$.

Легко заметить, что при $d=0$ это уравнение приводится к уравнению (1), гл. IV, п. 10, т. е. для плотины без забивной крепи. Тогда вся сила противодавления на плотину будет:

$$F=p_1w+\frac{\Delta p}{\pi}\left\{\int_0^{b_1}\cos^{-1}\left[\frac{-2\sqrt{1+\left(\frac{x'}{d}-\beta\right)^2}-e+j}{e+j}\right]dx'+\right.$$

$$\left.+\int_{b_1}^{w}\cos^{-1}\left[\frac{2\sqrt{1+\left(\frac{x'}{d}-\beta\right)^2}-e+j}{e+j}\right]dx'\right\}, \tag{12}$$

где

$$e=\sqrt{1+(\alpha-\beta)^2};\quad j=\sqrt{1+\beta^2}.$$

Раскрытие этих интегралов повлечет за собой применение эллиптических интегралов 3-го порядка и поэтому гораздо проще получить их решение графическим или численным путем. Только в отдельных случаях, где сваи находятся в одном из плечей основания плотины или же в ее центре, сила F может быть выражена с помощью элементарных функций. Так, если забивная крепь находится у верхнего плеча плотины (у пяты ее), то

$$\left.\begin{aligned}&\beta=0,\quad j=1,\quad e=\sqrt{1+\alpha^2}\\&F=p_1w+\frac{d\Delta p\,(e-1)}{2}\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Забивная крепь в центре основания плотины:

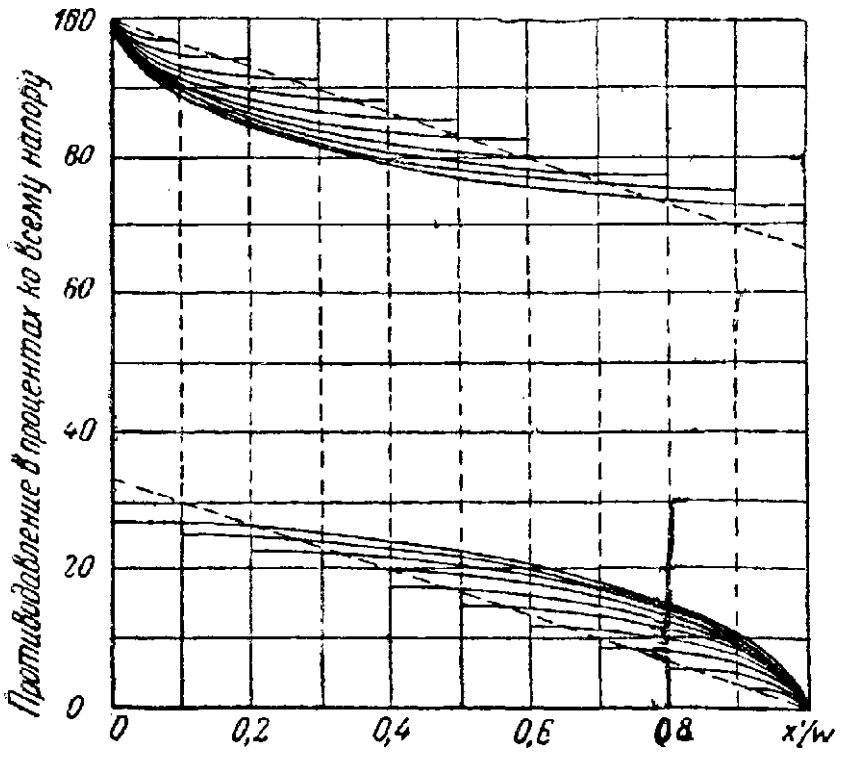
$$\left.\begin{aligned} &\beta = \frac{\alpha}{2}, \qquad j = e, \\ &F = p_1 w + \frac{w\Delta p}{2} = \frac{(p_2 + p_1)\, w}{2} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Забивная крепь у нижнего плеча плотины (у носка плотины):

$$\left.\begin{aligned} &\beta = \alpha, \quad e = 1, \quad j = \sqrt{1+\alpha^2} \\ &F = p_1 w + d\,\Delta p \left(\alpha - \frac{(j-1)}{2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Суммарный момент противодавления дается уравнением:

$$M = \frac{p_1 w^2}{2} + \frac{\Delta p}{\pi}\, d\beta F_0 + \frac{d^2 \Delta p}{8\pi}\, [\pi\, (3e^2 - j^2 - 2ej - 4) + \\ + \{8 + 2je - 3\,(j^2 + e^2)\} \left\{\sin^{-1}\sqrt{\frac{j+1}{j+e}} + \sin^{-1}\sqrt{\frac{e+1}{j+e}}\right\} - \\ - \sqrt{(j+1)(e-1)}\,(3j + 3e - 2) - \\ - \sqrt{(e+1)\,(j-1)}\,\,(3e - 3j - 2)], \tag{16}$$



Фиг. 50. Распределение давления в основании плотин, имеющих забивную свайную крепь, с глубиной, равной ширине основания плотины; x'/w = (расстояние от пяты плотины) / (ширину основания).

Вертикальные пунктирные линии дают местоположение свай, а их длины — потерю давления через сваи. Наклонные пунктирные линии совместно с вертикальными пунктирными участками дают распределение давления, продиктованное теорией Бляя (теория ползущей линии).

где F_0 — выражение, заключенное в скобках уравнения (12). Следующим интересным выводом является определение потери давления δp вокруг свай, которая дается разностью давлений между плечами основания плотины вверх и вниз по течению, считая от свайной крепи. Эта величина находится из уравнения (11) и дается выражением:

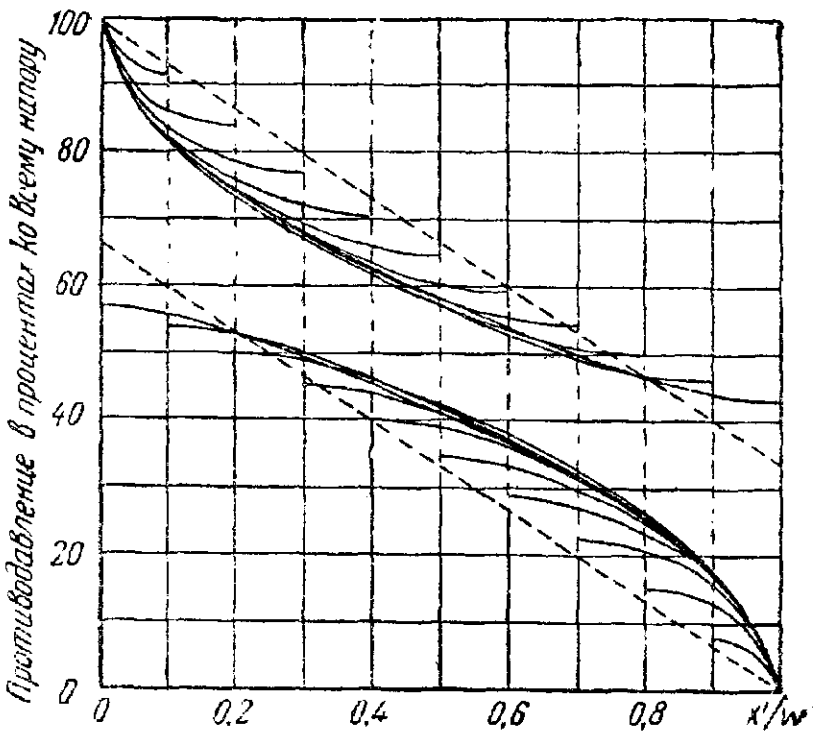
$$\delta p = \frac{\Delta p}{\pi} \cos^{-1} \frac{1}{(j+e)^2}\, [-4 + \\ + 4\sqrt{(j^2-1)(e^2-1)} + \\ + (j-e)^2]; \tag{17}$$

фактическое давление в подошве свай будет иметь величину:

$$p = \frac{\Delta p}{\pi} \cos^{-1} \frac{j-e}{j+e} + \\ + p_1 + \gamma g d. \tag{18}$$

Легче всего представить всю значимость этих выводов из графиков, отображающих уравнения (11) — (18). Так, фиг. 50 и 51 показывают распределение противодавления в основании плотины для различных положений забивной крепи и для отношений ширины плотины к глубине

забивки свай от 1 до 4; ординаты показывают долю всей потери давления, соответствующую величине $(p - p_1)/\Delta p$ уравнения (11). Положение свай показано на фигурах вертикальными пунктирными линиями. Длина свай согласно уравнению (17) также создает потерю давления через них. В то время как эти потери не меняются особенно заметно с изменением местоположения свай, — с увеличением α, как и следует ожидать, значение их резко падает.



Фиг. 51. Распределение давления у основания плотин с забивной свайной крепью, имеющей глубину, равную одной четверти ширины основания:

x'/w — (расстояние от пяты плотины) / (ширина основания). Вертикальные пунктирные линии дают местоположение свай, а их длины — перепад давления через сваи. Наклонные пунктирные линии совместно с вертикальными пунктирными участками дают распределение давления, продиктованное теорией Бляя (теория ползущей линии).

Суммарные силы противодавления и опрокидывающие моменты, выраженные в долях величин, которые они имели бы в случае отсутствия забивной крепи (и при $p_1 = 0$), приводятся на фиг. 52 и 53, где они построены в зависимости от местоположения свай и для различных значений α. Интересно заметить, что забивная крепь, если только она установлена в центре основания плотины, не влияет на величину общей силы противодавления. Если же крепь установлена под тем плечом плотины, что находится вниз или вверх по течению, это будет соответственно увеличивать или уменьшать силы противодавлений. Рассмотренный анализ последних и их влияния на плотины базируется всецело на достаточно идеализированном представлении всей проблемы. Возможно, что наиболее серьезным приближением в этом случае является допущение о бесконечности распространения пористой среды, подстилающей плотину [1], и ограниченное проникновение основания плотины в пористое вещество. Однако прежние теории основывались на еще более интуитивных допущениях.

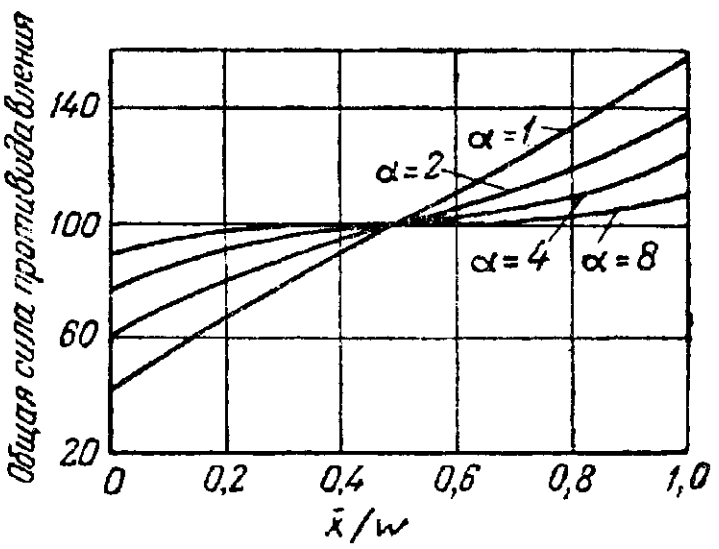
Наиболее широко распространенной теорией этого типа [2] была теория „пути фильтрации“ Бляя, которая заключается в основном в допущении, что свайная крепь глубиной d добавляет к эффективной ширине основания плотины свой периметр $2d$. Тогда весь перепад давления распределяется линейно по развитой ширине $w + 2d$. Получающееся в результате этого перепада распределение давления в осно-

---

[1] Это приближение приводит в результате к весьма малым перепадам давления через сваи на „безопасной стороне“ плотины и к очень большим силам противодавления (фиг. 68). Однако фактические ошибки будут достаточно малы, за исключением тех случаев, когда сваи доходят на короткое расстояние до подошвы проницаемых слоев.

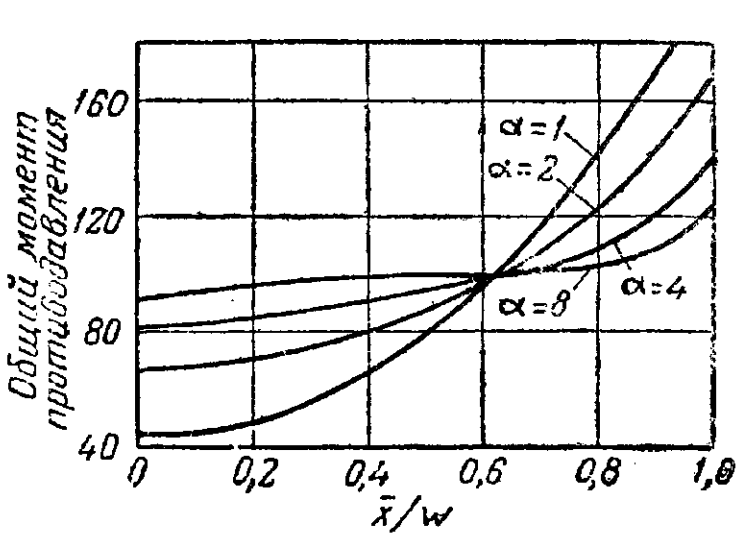
[2] Остальные теории являются не чем иным, как допущениями и описаны Уивером.

вании плотины для случая $\alpha = 1{,}4$ показано на фиг. 50 и 51 наклонными пунктирными линиями. Вертикальные пунктирные линии, заключенные между последними, указывают величину перепада давления через забивную крепь. Можно заметить, что в целом ошибки, получающиеся при распределении давления, не велики. Однако перепады давления через сваи, согласно теории Бляя, не зависят от местоположения свай. Приведенная же нами теория показывает, что величина этого перепада может изменяться в два раза, по мере того как сваи перемещаются от верхнего или нижнего бьефа к центру плотины.



Фиг. 52. Изменение общей силы противодавления в зависимости от местоположения забивной свайной крепи под основанием плотины и выраженное в процентах от величины этой силы при отсутствии свайной крепи.

Напор жидкости со стороны нижнего бьефа равен нулю; $\bar{x}/w$—(расстояние от пяты плотины) / (ширина плотины); α=(ширина плотины) / (глубину свай).



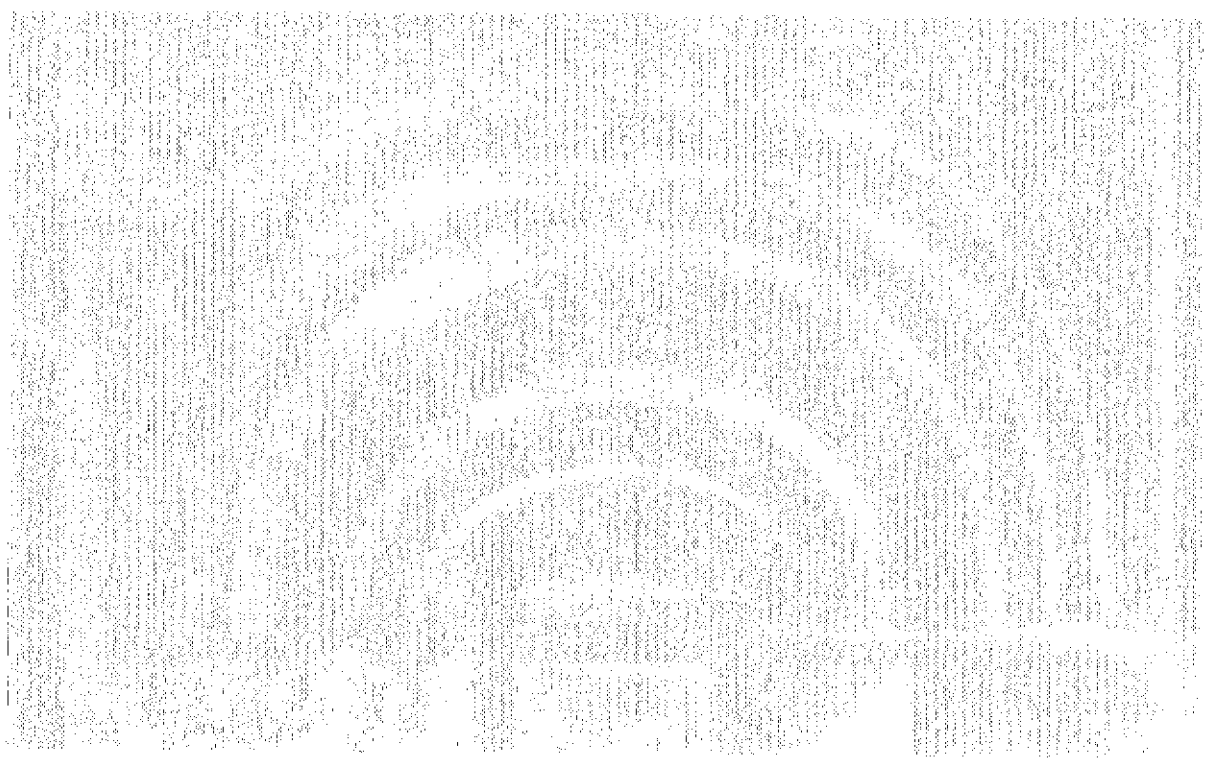
Фиг. 53. Изменение общей величины опрокидывающего момента относительно пяты плотины в зависимости от местоположения забивной свайной крепи под основанием плотины, выраженное в процентах к значению момента, при отсутствии свайной крепи.

Напор со стороны нижнего бьефа равен нулю, $\bar{x}/w$ — (расстояние свай от пяты плотины) / (ширину плотины); α = (ширина плотины) / (глубину свай).

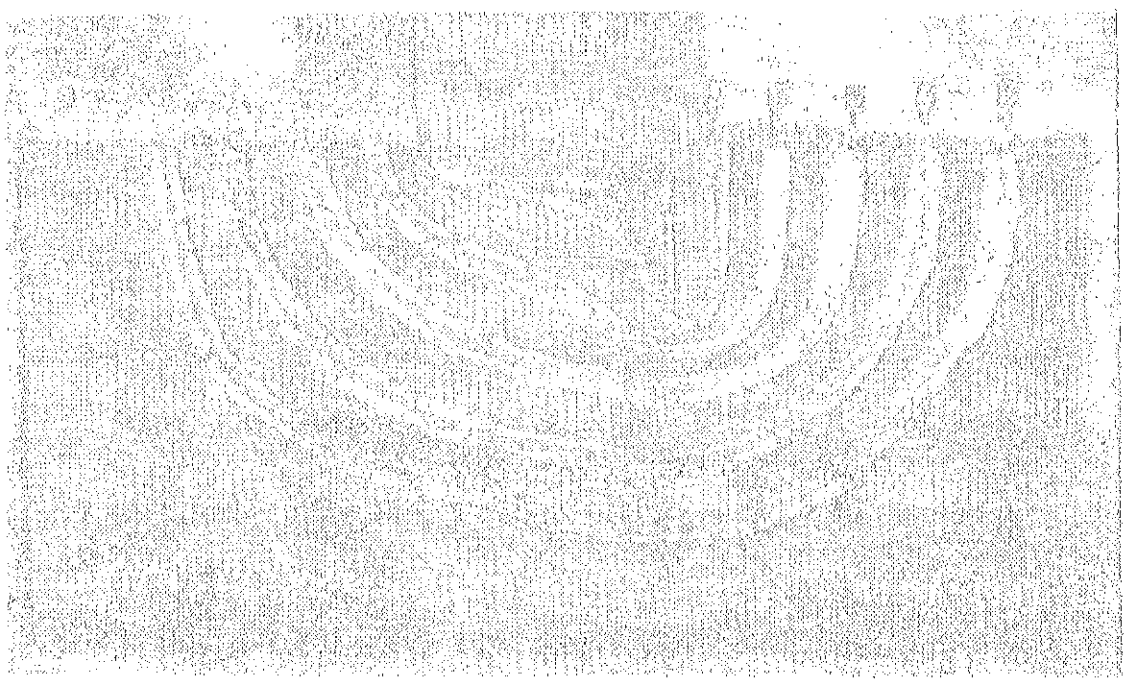
Что же касается общей силы противодавления, то теория Бляя дает слишком малое значение ее (до 20%), когда свайная крепь находится под плечом плотины, примыкающим к верхнему бьефу, и очень большое значение (на 8%) для местоположения свай у нижнего бьефа. Опрокидывающие моменты, рассчитанные по теории Бляя, являются заниженными (до 30%), когда сваи установлены в пределах 70% ширины основания плотины, считая от верхнего бьефа, и слегка завышенными для местоположения свай, находящихся в пределах 30% ширины основания плотины, считая от нижнего бьефа. Теория Бляя является поэтому с количественной точки зрения только приблизительной. Однако следует напомнить, что лежащее в ее основе допущение о фильтрационном потоке, следующим за основанием плотины и сторонами забивной свайной крепи, является совершенно правильным. К несчастью, существование этого потока упорно отвергается при рассмотрении этого вопроса Тейлором и Эппаль[1] в их прекрасной во всем остальном экспери-

[1] Taylor E. M. and H. L. Uppal, Punjab Irrigation Research Institute, «Research Publ.», 2, № 3, 4, 1934.

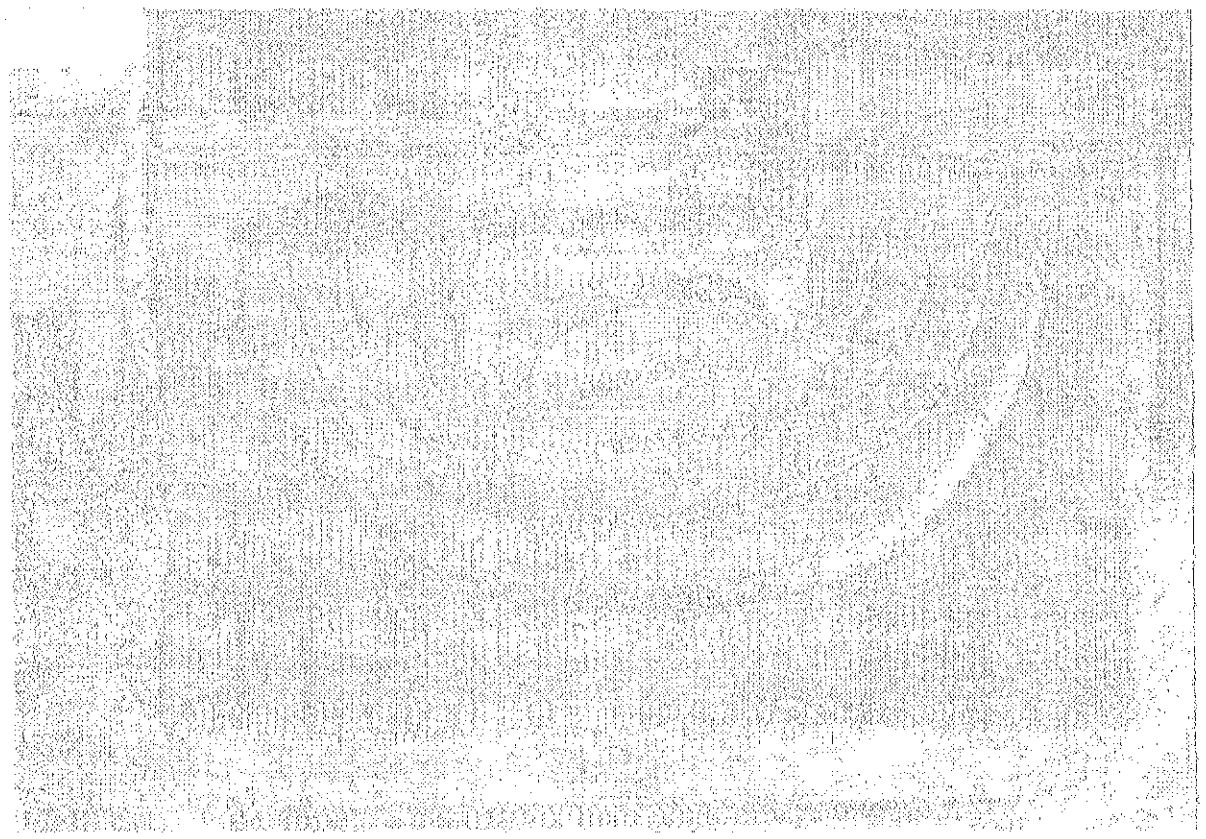
Выводы из расширенного изучения распределения давления под действительными плотинами — водосливной плотиной Пенджаб — приводятся у



ления, если желательно подвергнуть изучению с большой точностью отдельные элементы течения. С другой стороны, следует заметить, что, за исключением случая отсутствия лобовой кромки, линия тока, обходящая основание плотины, будет иметь в общем меньшую средиюю



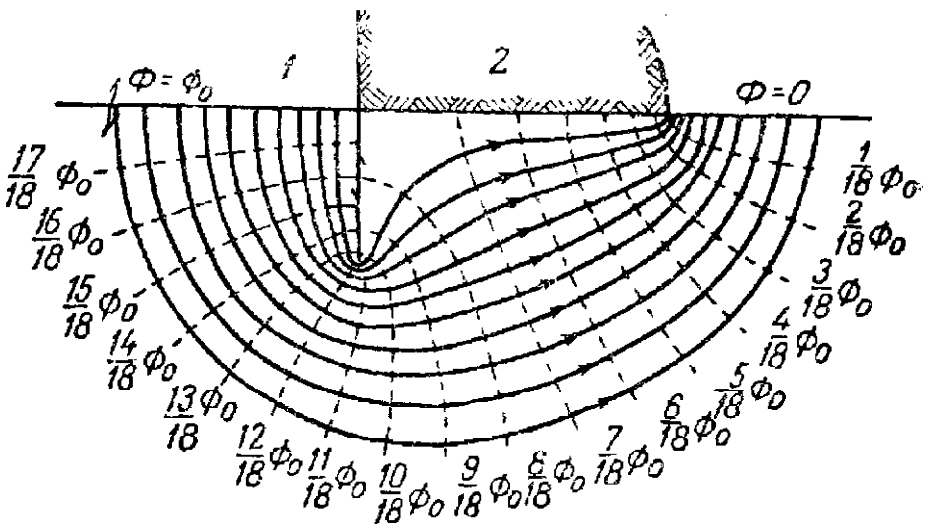
Фиг. 55. Фотографии линий тока под плотиной со слабой кромкой в виде щелей. — получены на экспериментах на песчаных моделях (по Пейперу и Эйнаро).



Фиг. 56. Фотографии линий тока под плотиной со слабой кромкой, забитой в пол и покрытой листами. Линии тока получены из экспериментов на песчаных моделях (по Пейперу и Эйнаро).

скорость по сравнению с остальными частями, соприкасающимися основанию лобовой кромки (хотя фактически они не касаются ее), и непосредственно прилегающими к дну нижнего бьефа. Область между линией тока с наивысшей средней скоростью и ползущей линией тока, ог-

бающей основание плотины и забивной крепи, может явиться тогда „мертвой зоной", хотя в действительности жидкость движется вдоль линий тока системы. Поскольку экспериментальные модели в настоящее время достаточно разработаны, чтобы показать детали движения, можно видеть, как последнее увязывается с приведенной здесь теорией. Достаточно только сравнить фиг. 55 и фиг. 57[1], на которых приведены вычисленные эквипотенциальные линии и линии тока для случая, где глубина забивной крепи равна половине ширины плотины. Все характерные особенности течения являются, очевидно, одинаковыми в обоих случаях.



Фиг. 57. Теоретическое распределение потенциала и линии тока под плотиной с забивной свайной крепью, установленной в ее пяте на глубине, равной половине ширины основания плотины (по Уиверу):

1 — напор воды; *2* — поперечное сечение плотины.

Постоянство нарушений крайних линий тока на модели должно быть отнесено, без сомнения, за счет конечности ширины забивной крепи, конечности глубины песка при забивке свай и отсутствию однородности песка. Как видно, нарушение в линиях тока распространяется только на расстояние, равное приблизительно глубине крепи. Фактически эксперименты на моделях могут быть приняты как еще одно прямое подтверждение справедливости обобщенного закона Дарси при рассмотрении других видов течения, помимо линейного.

12. Фильтрационный расход под плотинами с удлиненной шириной основания. Отсутствие забивной крепи. Преобразование эллиптической функции [2]. В последних двух разделах была приведена теория противодавлений под плотинами при допущении, что залегающий в их основании песчаник имеет мощность бесконечной величины. Как видно из дальнейшего, это допущение приводит в общем к довольно хорошему приближению в отношении распределения давления и общей величины противодавления в плотинах, а также к фильтрационному расходу бесконечной величины за исключением тех случаев, когда мощность пласта песчаника незначительна или забивная крепь близко подходит к подошве проницаемого слоя. Чтобы получить физически

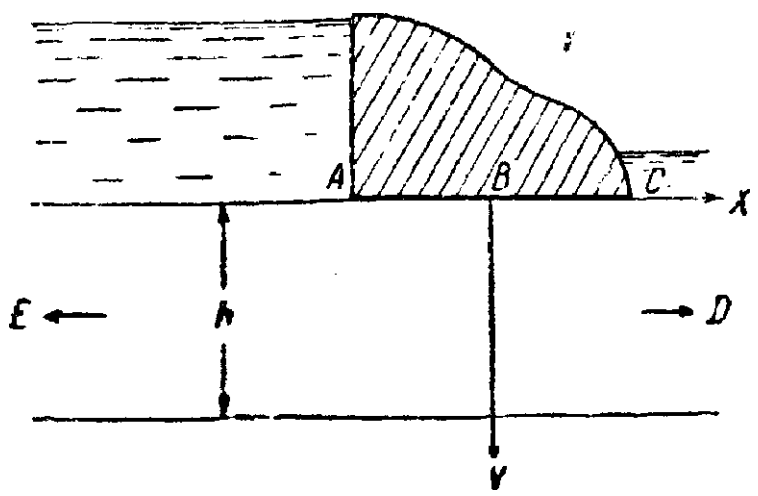
---

[1] Эквипотенциальные линии на фиг. 57, взятые из работы Уивера, первоначально фиксировались как кривые равного напора. Однако значения их должны получаться из добавления в каждой точке к величине Φ члена $\gamma g y$ (для $k/\mu = 1$). Обоими экспериментальными путями: на электролитических и песчаных моделях было установлено также вполне удовлетворительное подтверждение теории (фиг. 50 и 51), а также отдельная изменчивость в распределении давления у основания плотины со свайной крепью у верхнего бьефа.

[2] Выводы для этого раздела, а также двух последующих разделов взяты из работы M. Muskat. Physics, 7, 116, 1936.

ощутимое значение расхода, необходимо принять для этого в расчет конечную мощность проницаемого слоя.

Это может быть сделано тем же путем, который был описан в гл. IV, п. 11, за исключением того, что преобразования сопряженной функции [уравнения (1) и (8), гл. IV, п. 11] будут заменены преобразованием эллиптической функции.



Фиг. 58. Плотина, не имеющая забивной свайной крепи и установленная на проницаемом ложе конечной мощности, в плоскости z.

1 — плоскость z.

Так, прилагая теорему Шварца-Кристоффеля, уравнение (3), гл. IV, п. 11, легко заметить, что плоскость z на диаграмме течения, представленной на фиг. 58, преобразуется в верхнюю полуплоскость ζ с помощью преобразования функции $z(\zeta)$, которое дается выражением

$$z = c_1 \int \frac{d\zeta}{\zeta^2 - m^2} + c_2. \qquad (1)$$

Вычислив интеграл и разрешив уравнение (1) относительно ζ, легко найти, что

$$\zeta = \frac{\operatorname{th} z/2h}{\operatorname{th} \pi w/4h}, \qquad (2)$$

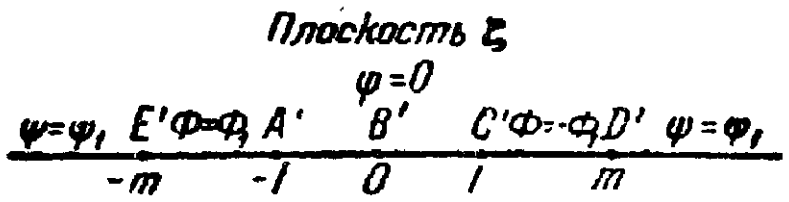
где w — ширина плотины и h — мощность песчаника.

Константы выбраны так, что

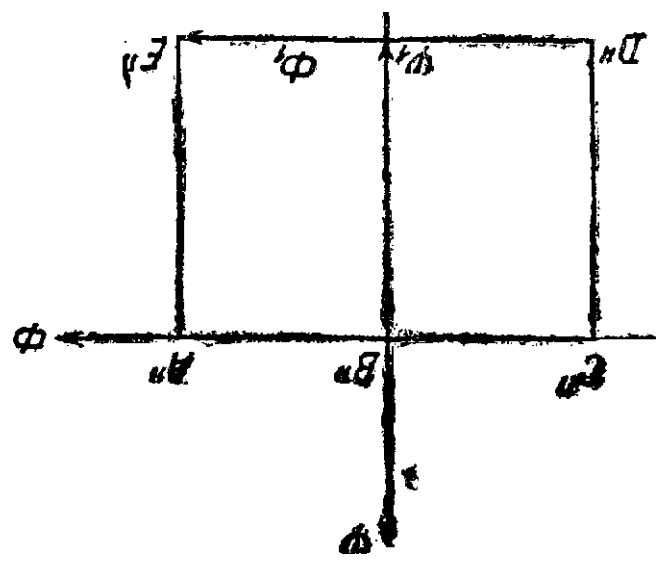
$$z = 0 \rightarrow \zeta = 0;$$

$$z = \pm\frac{w}{2} \rightarrow \zeta = \pm 1. \qquad (3)$$

Конформное отображение плоскости ζ с граничными значениями



Фиг. 59. Отображение внешности фиг. 58 на плоскости ζ.



Фиг. 60. Отображение внешности фиг. 58 на плоскости ω.

1 — плоскость .

потенциальной функции и функции тока показано на фиг. 59; m имеет значение $\operatorname{cth} \pi w/4h$. Приняв теперь обратную точку зрения той, которая была выведена в гл. IV, п. 11, и построив сначала конформное отображение плоскости $\omega = \Phi + i\Psi$, соответствующее плоскости z, ясно, что

при этом мы встретимся с прямоугольной фигурой (фиг. 60) [1]. Отсюда, если отобразить плоскость ω на плоскость ζ (фиг. 59), получим зависимость между ω и z через промежуточную переменную ζ, дающую желаемое распределение потенциала и линий тока в первоначальной системе.

Прилагая снова теорему Шварца-Кристоффеля к результату этого отображения, находим:

$$\omega = \Phi + i\Psi = c_1 \int \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2-1)\ (\zeta^2-m^2)}} + c_2, \tag{4}$$

где, как уже было отмечено, m — координата D' должна иметь значение $\operatorname{cth} \pi w/4h$, чтобы удовлетворить уравнение (3). Принимая $k^* = 1/m$, $c_2 = 0$ и подбирая пределы интегрирования так, что $\omega = 0$ соответствует B', получим уравнение (4), написанное в следующем виде:

$$\omega = c_1 \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)\ (1-k^{*2}\zeta^2)}}. \tag{5}$$ [2]

Если $\zeta \leqslant 1$, это уравнение может быть выражено так:

$$\omega = c_1 \int_0^{\sin^{-1}\zeta} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^{*2}\sin^2\theta}} = c_1 F\ (\sin^{-1}\zeta_1 k^*); \tag{6}$$

$$k^* = \operatorname{th} \frac{\pi w}{4h},$$

где F — эллиптический интеграл первого порядка с „амплитудой“ $\sin^{-1}\zeta$ и „модулем“ k^*. [3]

Замечая, что точка C'', в которой $\Phi = -\Phi_1$, $\Psi = 0$, соответствует условию $\zeta = +1$, имеем, следовательно:

$$-\Phi_1 = c_1 \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)\ (1-k^{*2}\zeta^2)}} = c_1 F\left(\frac{\pi}{2},\ k^*\right) = c_1 K\ (k^*), \tag{7}$$

где $K\ (k^*)$ — полный эллиптический интеграл первого порядка с модулем k^*. Так как общее падение потенциала в системе $\Delta\Phi$ составляет $2\Phi_1$, то уравнение (5) может быть окончательно написано так:

$$\omega = \Phi + i\Psi = \frac{-\Delta\Phi}{2K} \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)\ (1-k^{*2}\zeta^2)}}. \tag{8}$$

---

[1] Значение Ψ_1 показано отрицательным как следствие отношения $\frac{\partial\Psi}{\partial y} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} < 0$ для системы координат, представленной на фиг. 58.

[2] Предполагается, что множитель k^* вошел в константу c_1.

[3] Обычное обозначение k для модуля здесь заменено через k^*, чтобы не смешать с условным обозначением, принятым в настоящей работе для проницаемости.

Фильтрационный расход под плотиной дается, очевидно, величиной Ψ_1. Последняя может быть найдена из значения ω для D'' в соответствии с $\zeta = m = 1/k^*$.

Так:

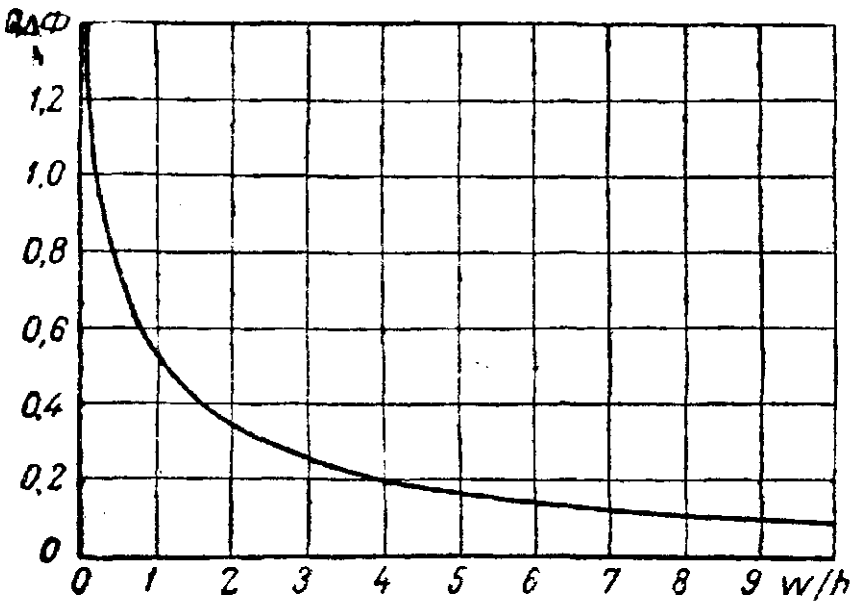
$$-\Phi_1 + i\Psi_1 = \frac{-\Delta\Phi}{2K}\int_0^{1/k^*} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^{*2}\zeta^2)}} =$$

$$= \frac{-\Delta\Phi}{2K}(K + iK'), \qquad (9)^1$$

где K' — полный эллиптический интеграл первого порядка с модулем $\sqrt{1-k^{*2}}$. Так как $-\Psi_1$ представляет собой общий расход Q под плотиной (на единицу длины плотины) и $\Delta\Phi$ — величина падения общего потенциала от верхнего бьефа к нижнему, соответствующая перепаду давления Δp или разности уровней верхнего и нижнего бьефов, т. е. действующему напору ΔH, из уравнения (9) непосредственно вытекает, что

$$Q = \frac{kK'\Delta p}{2\mu K} = \frac{k\gamma g K'\Delta H}{2\mu K};$$

$$k^* = \operatorname{th}\frac{\pi w}{4h}. \qquad (10)$$



Фиг. 61. Расход фильтрации под плотинами, не имеющими свайной крепи; $Q/\Delta\Phi$ — расход на единицу падения потенциала через плотину и на единицу длины последней; w/h — (ширина основания) / (мощность проницаемого слоя, залегающего под основанием плотины).

На фиг. 61 дается построение фильтрационного расхода на единицу падения потенциала, т. е. $Q/\Delta\Phi = K'/2K$ как функции w/h, т. е. отношения ширины основания плотины к мощности проницаемого слоя [2]. Из этого построения, как и следовало ожидать, видно, что расход или эффективная проводимость системы падает с возрастанием значений w/h, начиная от бесконечно больших величин при нулевом значении w/h и достигая нулевого расхода, когда w/h становится бесконечно большим.

Разумеется, при фактическом подсчете величины фильтрации необходимо помножить ординаты фиг. 61 на член $k\gamma g\Delta H/\mu$ [3]. Уравнение (10)

---

[1] Whittaker and Watson, p. 502. Полное рассмотрение эллиптических интегралов функций можно найти в гл. XXII этой работы.

[2] Весьма подробные таблицы для K, K' и K'/K можно найти в работе „Tafeln der Besselschen, Theta, Kugel — und andere Funktionen", 1930 г., составленной K. Hyashi.

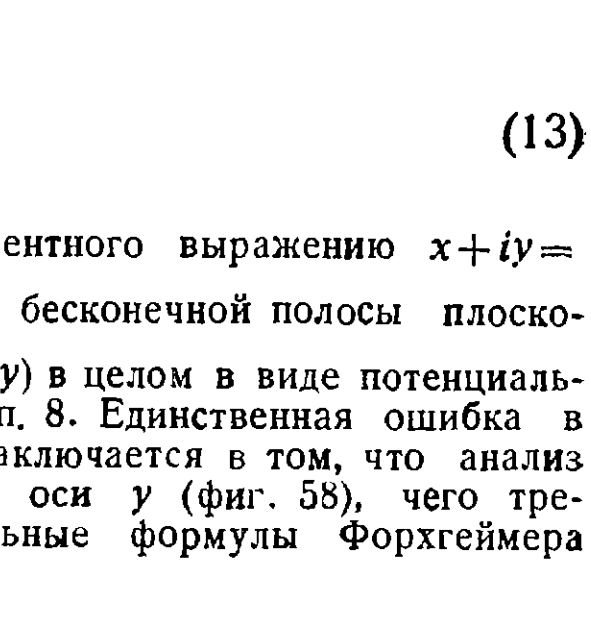
[3] Можно упомянуть, что исключительно близкое приближение к точному значению Q, которое дается уравнением (10), было получено в 1917 г. Форхгеймером (Wien, Ber., 126, 409, 1917). Он получил свое приблизительное решение построением бесконечного комплекса конформных отображений на основании плотины так, чтобы достичь нулевого значения нормального расхода при $y = h$. Результат бесконечного ряда отображений был просуммирован введением в него пре-

или его эквивалентная форма

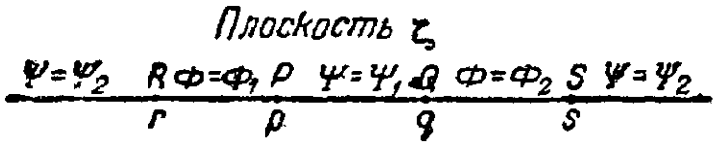
$$\frac{Q}{\Delta\Phi} = \frac{K'}{2K} \tag{11}$$

были выведены здесь для специального случая фильтрации под плотиной, у которой отсутствует забивная крепь. Вместе с тем важно заметить, что этот вывод является в целом достаточно удовлетворительным для любой системы, оконтуренной двумя сегментами постоянного потенциала, последовательно сменяющимися двумя сегментами линий тока. Полная характеристика этой системы, представляющей особый интерес в зависимости от значения $Q/\Delta\Phi$, заключается в величине модуля k^* эллиптических интегралов.

Таким образом, допуская, что течение, изображенное на плоскости $\omega\,(\Phi, \Psi)$, согласно фиг. 62, отображено на верхнюю полуплоскость ζ так, чтобы получить конформное отображение на фиг. 63, получаем, как следствие из теоремы Шварца-Кристоффеля, что зависимость между ω и ζ дается уравнением вида



Фиг. 62.
1 — плоскость ω.



Фиг. 63. Отображение фиг. 62 на плоскость ζ.

$$\omega = \Phi + i\Psi = \int \frac{d\zeta}{[(\zeta - r)\,(\zeta - p)\,(\zeta - q)\,(\zeta - s)]^{1/2}}\,. \tag{12}$$

Если теперь сделать преобразование [1]

$$\lambda = \frac{D\zeta - B}{A - C\zeta} \tag{13}$$

образования комплексного переменного, эквивалентного выражению $x + iy = \operatorname{ch}\pi\,\frac{(x+iy)}{h}$, которое отображает внешность бесконечной полосы плоскости (x, y) (фиг. 58) на всю область плоскости (x, y) в целом в виде потенциальной функции, сноска на которую дана в гл. IV, п. 8. Единственная ошибка в анализе, как это дается самим Форхгеймером, заключается в том, что анализ не дает строго постоянного потенциала вдоль оси y (фиг. 58), чего требует симметрия (гл. IV, п. 16). Окончательные формулы Форхгеймера имеют следующий вид:

$$\frac{Q}{\Delta\Phi} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}\pi w/8h - 1}{3\operatorname{ch}\pi w/8h - 1}, \quad \text{для} \quad \frac{w}{h} < 1$$

и

$$\frac{Q}{\Delta\Phi} = \frac{1}{\left[0{,}86 + \frac{w}{h}\right]}, \quad \text{для} \quad \frac{w}{h} > 1;$$

[1] Bateman H., „Partial Differential Equations", p. 302, 1932.

и подобрать A, B, C и D так, чтобы:

$$\left.\begin{aligned} A - Cp &= B - Dp; & A - Cq &= Dq - B \\ A - Cr &= k^*(B - Dr); & A - Cs &= k^*(Ds - B) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

найдем, что ω принимает следующую форму:

$$\omega = \Phi + i\Psi = G\int_0^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)\,(1-k^{*2}\lambda^2)}}, \tag{15}$$

где модуль k^* в уравнениях (14) и (15) является корнем меньше единицы уравнения

$$\begin{aligned} k^{*2}\,(q-p)\,(r-s) + k^*\,[(q-p)^2 + (r-s)^2 - (p+q-r-s)^2] + \\ + (q-p)\,(r-s) = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

и G — константа, вытекающая из сделанного преобразования. В дополнение к приведению уравнения (12) к стандартной форме эллиптического интеграла (уравнение 15) преобразование уравнений (13) и (14) ведут к следующим соответствиям между плоскостью ω и λ:

$$\lambda(R) = \frac{-1}{k^*}; \quad \lambda(P) = -1; \quad \lambda(Q) = +1; \quad \lambda(S) = \frac{1}{k^*}. \tag{17}$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} \omega(R) &= \Phi_1 + i\Psi_2 = G\int_0^{\frac{-1}{k^*}} \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)\,(1-k^{*2}\lambda^2)}} = -G(K - iK') \\ \omega(P) &= \Phi_1 + i\Psi_1 = G\int_0^{-1} \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)\,(1-k^{*2}\lambda^2)}} = -GK \\ \omega(Q) &= \Phi_2 - i\Psi_1 = G\int_0^{1} \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)\,(1-k^{*2}\lambda^2)}} = GK \\ \omega(S) &= \Phi_2 + i\Psi_2 = G\int_0^{\frac{1}{k^*}} \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)\,(1-k^{*2}\lambda^2)}} = G\,(K + iK') \end{aligned}\right\} \tag{18}[1]$$

где K, K' являются полными эллиптическими интегралами первого порядка с соответственным модулем k^* и $\sqrt{1-k^{*2}}$.

Из этих преобразований непосредственно следует, что

$$\frac{\Psi_2 - \Psi_1}{\Phi_2 - \Phi_1} = \frac{Q}{\Delta\Phi} = \frac{K'}{2K}. \tag{19}$$

Индивидуальные особенности системы в плоскости z входят только в значения p, q, r, s, которые определяют собой величину k^* согласно

[1] Whittaker and Watson, уже цитированная работа, глава XXII.

уравнению (16). Этот вывод окажется весьма полезным при расчете фильтрационного расхода под плотинами с забивной крепью, который будет рассмотрен в последующих разделах.

Следует дальше заметить, что уравнение (10) можно приложить не только к определению фильтрации под плотинами без забивной крепи, но оно дает также хорошее приближение при установлении фильтрации вокруг стыка плотины с берегом, если только сама плотина не связана намертво с водонепроницаемой горной породой. Для той части плотины, что находится выше уровня нижнего бьефа, перепад давления, принятый в уравнении (10), может быть приближен к действительному за счет усереднения действующего напора между уровнями верхнего и нижнего бьефов. Боковая фильтрация под уровнем нижнего бьефа будет соответствовать суммарному действующему напору или разности уровней с обеих сторон плотины.

Основной целью анализа, произведенного в настоящем разделе, было получение вывода для фильтрационного расхода (уравнение 10). Но представляет также интерес произвести для этого простого случая сравнение распределения давления под плотиной, которое дает здесь точная теория, где принимается в расчет конечная мощность проницаемого слоя, лежащего в основании плотины, и тем случаем, который рассматривается в гл. IV, п. 10, для бесконечно распространяющегося проницаемого слоя. Для этого необходимо только заметить, что так как $\Psi = 0$ вдоль основания плотины, то уравнение (6) дает следующее выражение:

$$\frac{p}{\Delta p} = \frac{\Phi}{\Delta \Phi} = -\frac{1}{2K} F\left(\sin^{-1}\zeta,\ k^*\right):$$

$$\zeta = \frac{\operatorname{th} \pi x/2h}{\operatorname{th} \pi w/4h}\ ;\quad k^* = \operatorname{th} \frac{\pi w}{4h}\ , \tag{20}$$

где Φ и x замеряются от центра плотины. Результирующее распределение давления для $w/h = 5$ приведено на фиг. 44 в виде пунктирной линии, а для $w/h = 1$ показано кружочками. Отсюда видно, что допущение бесконечной мощности у проницаемого слоя, залегающего в основании плотины, дает хорошее приближение для величины распределения давления (и отсюда суммарного противодавления) вдоль основания плотины, если даже оно и влечет за собой бесконечный фильтрационный расход.

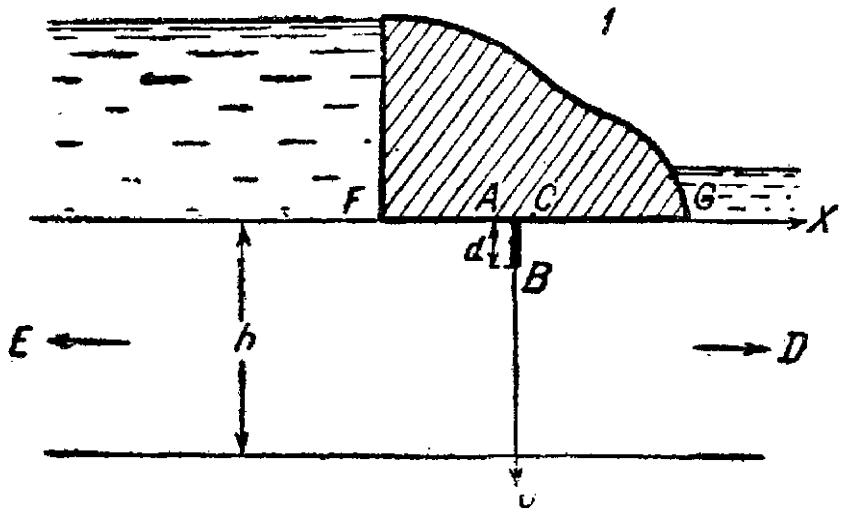
13. Фильтрационный расход под плотинами с удлиненной шириной основания при наличии забивной крепи. Если плотина имеет забивную свайную крепь, проникающую на глубину d в проницаемый слой мощностью h, то фильтрационный расход может быть рассчитан последовательным приложением преобразований двух сопряженных функций, выведенных из теоремы Шварца-Кристоффеля. Так, плоскость z (фиг. 64) будет отображаться на верхнюю полуплоскость ζ при соответствиях:

$$A \to \zeta = -1;\quad B \Rightarrow \zeta = 0;\quad C \Rightarrow \zeta = +1 \tag{1}$$

путем преобразования функции:

$$z = c_1 \int \frac{\zeta d\zeta}{(\zeta^2 - m^2)\sqrt{\zeta^2 - 1}} + c_2 =$$

$$= \frac{c_1}{2\sqrt{m^2-1}} \ln \frac{\sqrt{m^2-1} - \sqrt{\zeta^2-1}}{\sqrt{m^2-1} + \sqrt{\zeta^2-1}} + c_2, \qquad (2)$$

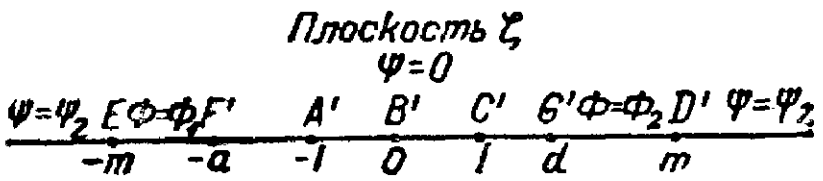


Фиг. 64. Плотина, имеющая свайную крепь на глубине d и установленная на проницаемом слое с мощностью h, в плоскости z.

1 — плоскость z.

где точки D, E предположительно переходят в $\zeta = \pm m$ и знак $\sqrt{\zeta^2 - 1}$ должен быть минус для $\zeta < -1$, плюс для $\zeta > +1$ и плюс мнимые значения для $-1 \leqslant \zeta \leqslant +1$. Накладывая в качестве условий соответствия уравнения (1) и требование, чтобы при $\zeta = \pm mz$ оно переходило в линию $z = x + ih$, легко установить, что

$$c_1 = -\left(\frac{2h}{\pi}\right) \operatorname{ctg} \frac{\pi d}{2h}, \quad c_2 = 0, \quad m = \operatorname{cosec} \frac{\pi d}{2h}. \qquad (3)$$



Фиг. 65. Отображение фиг. 64 на плоскость ζ.

Тогда уравнение (2) можно написать так:

$$\zeta^2 = 1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi d}{2h} \operatorname{th}^2 \frac{\pi z}{2h}. \qquad (4)$$

Реализация конформного отображения плоскости ζ показана на фиг. 65 с граничными значениями Φ и Ψ и крайними точками основания плотины; F', G' обозначим через a, b.

Чтобы найти величину фильтрационного расхода, необходимо теперь приложить выводы последнего раздела, которые дают

$$\frac{Q}{\Delta\Phi} = \frac{K'}{2K}, \qquad (5)$$

с

$$m(a+b)k^{*2} - 2(ab+m^2)k^* + m(a+b) = 0$$

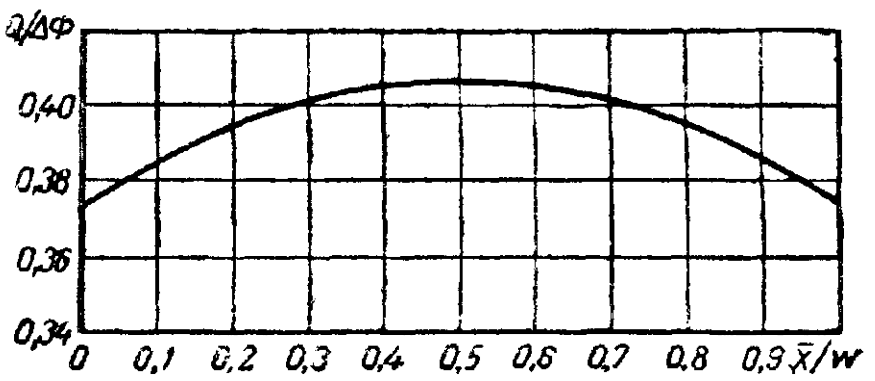
или

$$k^* = \frac{ab + m^2 - \sqrt{(m^2-b^2)(m^2-a^2)}}{m(a+b)}, \qquad (6)$$

где

$$\left.\begin{aligned} b^2 &= 1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi d}{2h} \operatorname{th}^2 \frac{\pi w}{2h}\left(1 - \frac{\bar{x}}{w}\right) \\ a^2 &= 1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi d}{2h} \operatorname{th}^2 \frac{\pi \bar{x}}{2h} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

$\bar{x}$ — расстояние забивной крепи, считая от пяты основания плотины.

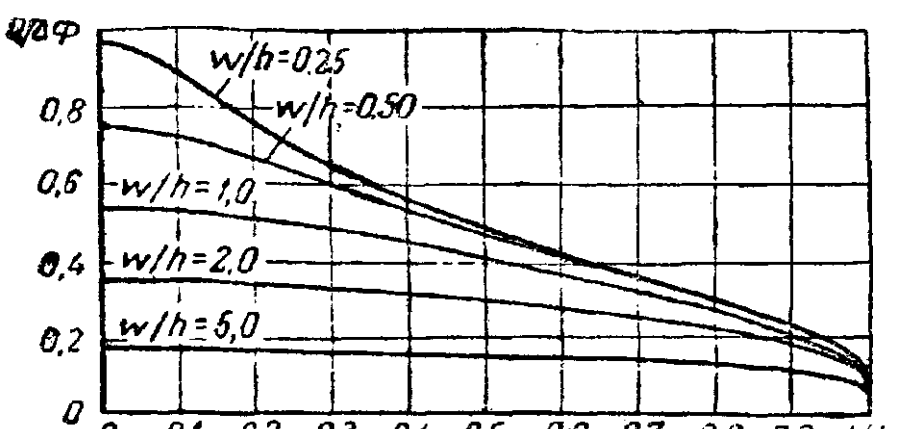


Фиг. 66. Кривая зависимости расхода фильтрации под плотиной, как функция местоположения свайной крепи:

$Q/\Delta\Phi$ — расход на единицу падения потенциала через плотину и на единицу длины плотины; x/w — (расстояние свайной крепи от пяты плотины) / (мощность залегающего ниже проницаемого слоя) = 1; (глубина свай) / (мощность ниже залегающего проницаемого слоя) = 0,5.

Чтобы показать влияние местоположения свайной крепи на величину фильтрационного расхода, на фиг. 66 построим зависимость $Q/\Delta\Phi$ по отношению $\bar{x}/w$, для $w/h = 1$ и $d/h = 0{,}5$.

Видно, что расход достигает своего максимума при симметричном положении свай. Общая величина колебания невелика. Чтобы увидеть, как изменяется $Q/\Delta\Phi$ с изменением относительной ширины w/h и глубины забивной крепи d/h, достаточно допустить, что сваи установлены в середине основания плотины.



Фиг. 67. Расход фильтрации под плотиной со свайной крепью, установленной в центре основания:

$Q/\Delta\Phi$ — расход на единицу падения потенциала через плотину и на единицу длины плотины; d — глубина свай; w — ширина основания; h — мощность проницаемого слоя ниже плотины.

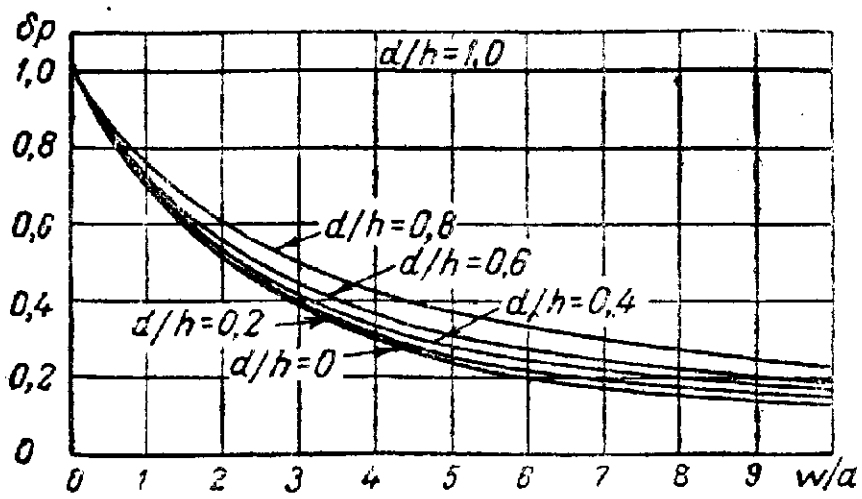
Полученные таким путем значения дадут и в дальнейшем верхние пределы для фильтрационного расхода и будут обладать, таким образом, большим коэфициентом запаса при расчетах типов течений, встречающихся на практике.

На фиг. 67 показаны изменения $Q/\Delta\Phi$ с глубиной свайной крепи d/h для различной ширины основания плотины w/h и для $\bar{x}/w = {}^1/_2$. Как и следует ожидать, фильтрационный расход уменьшается с возрастанием глубины забивки свай и ширины плотины. Для плотин, ширина которых значительно превосходит мощность проницаемого слоя, расход почти не зависит от глубины свай до тех пор, пока последние не достигнут непосредственной близости к подошве водопроницаемого слоя. То обстоятельство, что расход возрастает очень резко, по мере того как отношение d/h падает ниже значения 1, показывает, что пока

сваи не будут укреплены намертво в водонепроницаемом слое, всегда будет существовать значительная фильтрация, имеющая место обычно в плотинах без свайной крепи, даже если последняя проникла на 99% в толщу проницаемого слоя.

Мы не будем здесь входить в отдельные детали распределения давления в основании плотин с забивной крепью, как это дается в вышеприведенном анализе. Однако можно получить подтверждение точности приближенной теории, которая приводится в гл. IV, п. 11, подсчетом перепада давления через свайную крепь для частного случая, когда последняя установлена в центре основания плотины. Повторяя ход анализа, приведший нас к уравнению (5), гл. IV, п. 12, легко установить, что этот перепад давления δp дается выражением

$$\frac{\delta p}{\Delta p} = \frac{1}{K}\int_0^{\overline{b}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)\,(1-k^{*2}\zeta^2)}} = \frac{1}{K}\,F\left(\sin^{-1}\frac{1}{b},\ k^*\right), \qquad (7)$$



Фиг. 68. Падение давления через свайную крепь, установленную в центре основания плотины:

δp = (падение давления через крепь) / (общее падение давления через плотину); d = глубина стояния свай; w = ширина основания плотины; h = мощность проницаемого слоя, залегающего ниже основания плотины.

где

$$k^* = \frac{b}{m}; \quad b^2 = 1 + \operatorname{ctg}^2\frac{\pi d}{2h}\,\operatorname{th}^2\frac{\pi w}{4h}; \quad m = \operatorname{cosec}\frac{\pi d}{2h}, \qquad (8)$$

и Δp — суммарный перепад давления через плотину. На фиг. 68 приведено построение уравнения (7) для различных значений d/h. Кривая для $d/h = 0$ соответствует случаю проницаемого слоя бесконечной мощности, когда уравнение (7) приводится к эквивалентному виду (17), гл. IV, п. 11, а именно:

$$\frac{\delta p}{\Delta p} = \frac{1}{\pi}\,\cos^{-1}\frac{(w/2d)^2 - 1}{(w/2p)^2 + 1}. \qquad (9)$$

То обстоятельство, что отклонения от этой предельной кривой не получают большого значения, пока $d/h > 0{,}5$, оправдывает применение более простой теории, развитой в гл. IV, п. 11 (где $d/h = 0$), при изучении сил противодавления и опрокидывающих моментов в плотинах без забивной крепи, по крайней мере для более низких значений d/h.

Это приближение должно быть в любом случае безопасно с точки зрения практического конструирования плотин без забивной крепи, так как оно приводит к более высоким значениям сил противодавления и моментов, чем они в действительности имеют место. Что же касается численных значений фильтрационного расхода, который соответствует кривым на фиг. 66 и 67, а также параметрам, которые представ-

лены в последующем разделе, следует заметить, что численное значение расхода $\overline{Q}$ дается следующим выражением:

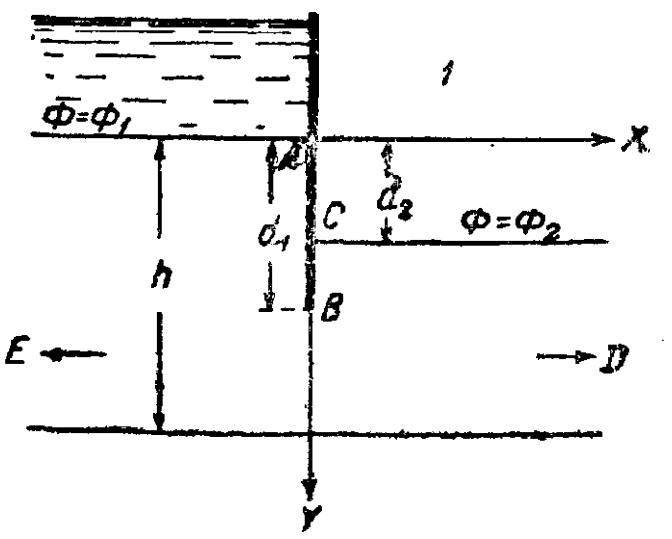
$$\overline{Q} = \frac{kL\Delta p}{\mu}\left(\frac{Q}{\Delta\Phi}\right), \qquad (10)$$

где k — проницаемость водопроницаемого слоя; μ — вязкость воды; L — длина плотины; Δp — перепад давления между верхним и нижним бьефом плотины. Если k выразить в дарси, L — в $см$, Δp — в am, μ — в сантипуазах, то $\overline{Q}$ будет выражено в $см^3/сек$.

Так, беря $k = 10$ дарси; $\mu = 1$ сантипуаз, $L = 3048$ $см$, $\Delta p = 1$ am, значение $Q/\Delta\Phi = 0{,}1$ соответствует $\overline{Q} = 3048$ $см^3/сек$.

В свете большой значимости величины дебита или фильтрации и того обстоятельства, что значения $Q/\Delta\Phi \sim 0{,}1$ сохраняются, согласно фиг. 67, для глубины свайной крепи, достигающей 99% от мощности проницаемого слоя, становится ясным, что реальная безопасность от высоких скоростей при фильтрации и размыве может быть получена в плотинах, непосредственно не установленных на водонепроницаемом основании, закреплением намертво свай в непроницаемом слое. Если только забивная крепь не установлена таким путем, то она очень мало уменьшит величину фильтрации, за исключением тех случаев, когда ширина плотины мала по сравнению с мощностью проницаемого слоя [1].

14. Фильтрационный расход под коффердамом. Выводы последних нескольких разделов вполне достаточны, чтобы показать наиболее характерные особенности фильтрационного потока воды под стационарными сооружениями плотин. Вместе с тем применение временных водонепроницаемых перемычек, например коффердамов, в процессе проведения гидравлических работ привлекает также практический интерес к вопросу расхода фильтрации под такими временными сооружениями для окончательного перекрытия или уменьшения количества фильтрующейся воды. На фиг. 69 представлена схематично типовая водонепроницаемая перемычка — коффердам. Перемычка установлена до глубины d_1 в водопроницаемом слое мощностью h. Со стороны нижнего бьефа слой пес-



Фиг. 69. Изображение перемычки, установленной на глубине d_1 ниже поверхности, с глубиной котлована, равной d_2, в плоскости z.

1 — плоскость z.

[1] Более подробное рассмотрение некоторых практических вопросов проблемы фильтрации воды под плотинами можно найти в работах A. Casagrande, Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 61, 365, 1935; см. также E. W. Lane, Proc. Amer. Civ. Eng., 60, 929, 1934, где сведены различные наблюдения, относящиеся к 250 существующим плотинам, а также в работе L. F. Harza, на стр. 967 того же цитированного журнала, где приведены результаты измерений сил противодавления под плотинами, полученные на электролитических моделях. Сюда входит некоторое число случаев с двумя рядами шпунтовых свай, а также слоистое залегание пористого основания под плотинами.

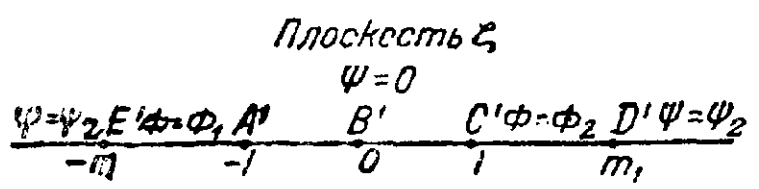
чаника извлечен до глубины d_2. Сама перемычка представлена тонким водонепроницаемым шпунтовым рядом AB. На стороне нижнего бьефа установлены насосы для откачки воды, просачивающейся в котлован.

Знание величины ожидаемой фильтрации имеет значение не только для расчета откачивающей установки соответствующей производительности, но также для предупреждения опасностей от размывания и разрушения самой перемычки. Прилагая снова уравнение (3), гл. IV, п. 11, устанавливаем, что диаграмма плоскости z (фиг. 69) будет отображена на верхней полуплоскости ζ преобразованием функции, определяемой выражением:

$$z = c_1 \int \frac{\zeta d\zeta}{(\zeta - m_1)(\zeta + m_2)\sqrt{\zeta^2 - 1}} + c_2 =$$

$$= \frac{c_1}{m_1 + m_2}\left[\frac{-m_1}{\sqrt{m_1^2 - 1}} \ln \frac{\sqrt{(m_1 - 1)(\zeta + 1)} + \sqrt{(m_1 + 1)(\zeta - 1)}}{\sqrt{(m_1 - 1)(\zeta + 1)} - \sqrt{(m_1 + 1)(\zeta - 1)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{m_2}{\sqrt{m_2^2 - 1}} \ln \frac{\sqrt{(m_2 + 1)(\zeta + 1)} + \sqrt{(m_2 - 1)(\zeta - 1)}}{\sqrt{(m_2 + 1)(\zeta + 1)} - \sqrt{(m_2 - 1)(\zeta - 1)}}\right] + c_2, \qquad (1)$$



Фиг. 70. Отображение внешности фиг. 69 на плоскость ζ.

где следующие соответствия

$$A \to -1; \quad B \to 0; \quad C \to +1;$$
$$D \to m_1; \quad E \to -m_2 \qquad (2)$$

были предположены заранее, как это указано на фиг. 70. Эти условия последовательно дают

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \pi i c_1 \left(\frac{-m_1}{\sqrt{m_1^2 - 1}} + \frac{m_2}{\sqrt{m_2^2 - 1}}\right) + c_2 (m_1 + m_2) \\ id_1 &= \frac{c_1}{m_1 + m_2}\left[\frac{-m_1}{\sqrt{m_1^2 - 1}} \ln \frac{\sqrt{m_1 - 1} + i\sqrt{m_1 + 1}}{\sqrt{m_1 - 1} - i\sqrt{m_1 + 1}} + \right. \\ &\left. + \frac{m_2}{\sqrt{m_2^2 - 1}} \ln \frac{\sqrt{m_2 + 1} + i\sqrt{m_2 - 1}}{\sqrt{m_2 + 1} - i\sqrt{m_2 - 1}}\right] + c_2 \\ id_2 &= c_2. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Замечая отсюда, что c_1 является действительной величиной, условие, при котором $z = x + ih$ для $\zeta > m_1$, после уравнивания мнимых частей обеих сторон уравнения (1) для $\zeta > m_1$ получается из следующего выражения

$$ih = \frac{-\pi i m_1 c_1}{(m_1 + m_2)\sqrt{m_1^2 - 1}} + c_2. \qquad (4)$$

Исключая c_2, можно написать окончательно три уравнения для c_1, m_1 и m_2:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\pi m_1 c_1}{\sqrt{m_1^2 - 1}} &= -(h - d_2)(m_1 + m_2); \quad \frac{\pi m_1 c_1}{\sqrt{m_2^2 - 1}} = -h(m_1 + m_2) \times \\ &\times 2c_1 \left[\frac{-m_1}{\sqrt{m_1^2 - 1}} \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{\frac{m_1 + 1}{m_1 - 1}} + \right. \\ &\left. + \frac{m_2}{\sqrt{m_1^2 - 1}} \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{\frac{m_2 - 1}{m_2 + 1}}\right] = (d_1 - d_2)(m_1 + m_2) \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Вводя сюда обозначение

$$m_1 = \sec \alpha_1; \quad m_2 = \sec \alpha_2 \tag{6}$$

и исключая c_1, в конечном итоге получаем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} &= 1 - \frac{d_2}{h}, \\ \alpha_1 \left(1 - \frac{d_2}{h}\right) + \alpha_2 &= \pi \left(1 - \frac{d_1}{h}\right) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Для особого случая, когда $d_2 = 0$, т. е. отсутствует котлован со стороны нижнего бьефа перемычки, уравнение (7) получает непосредственное решение:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{d_1}{h}\right); \quad m_1 = m_2 = \operatorname{cosec} \frac{\pi d_1}{2h}; \quad d_2 = 0. \tag{8}$$ [1]

Однако в целом уравнения (7) могут быть решены без особых трудностей графическим путем.

Величина фильтрационного расхода может быть теперь рассчитана с помощью уравнения (19), гл. IV, п. 12, где значение k^* дается из уравнения (16), гл. IV, п. 12. Решая последнее уравнение и используя обозначения (6), находим, что

$$\frac{Q}{\Delta\Phi} = \frac{K'}{2K}; \quad k^* = \frac{\cos (\alpha_1 + \alpha_2)/2}{\cos (\alpha_1 - \alpha_2)/2} \tag{9}$$

Для частного случая, когда глубина котлована со стороны нижнего бьефа достигает глубины забивки свай, т. е. $d_2 = d_1$, полученное решение нарушается, и задачу необходимо решить прямым путем, принимая с самого начала точки B и C совмещенными. Выполняя это решение аналитическим путем, совершенно аналогичным приведенному выше, находим, что для этого случая k^* определяется выражением:

$$k^* = \frac{1}{\left(\frac{2h}{d} - 1\right)}; \quad d_2 = d_1 = d. \tag{10}$$

Значения фильтрационного расхода, которые даются уравнениями (8), (9) и (10), приведены в виде построения на фиг. 71 как функции глубины проникновения перемычки в слой песка d_1/h для различных значений d_2/d_1. В этом случае также следует ожидать с физической стороны общего уменьшения величины $Q/\Delta\Phi$ с возрастанием d_1/h или уменьшением d_2/d_1, т. е. пока перемычка не будет установлена

---

[1] Форхгеймером для этого случая также было получено решение с высокой степенью приближения, но путем, сходным с тем, о котором упоминалось в сноске в гл. IV, п. 12. Его окончательные формулы таковы:

$$\frac{Q}{\Delta\Phi} = \frac{\pi}{\left[4 \ln 2 \operatorname{ctg} \frac{\pi (1 - d_1/h)}{4}\right]}, \quad \text{для} \quad \frac{d_1}{h} > \frac{1}{2}$$

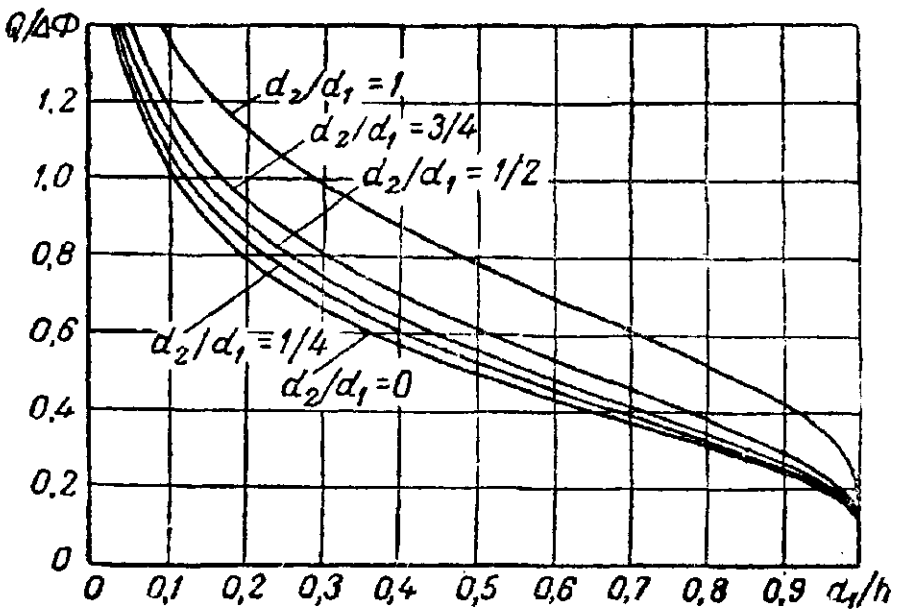
и

$$\frac{Q}{\Delta\Phi} = \left(\frac{1}{\pi}\right) \ln 2 \operatorname{ctg} \frac{\pi d_1}{4h}, \quad \text{для} \quad \frac{d_1}{h} < \frac{1}{2}.$$

на самую подошву проницаемого слоя, можно наолюдать заметное постоянство этого расхода.

Так как физический эквивалент ординат в данном случае является тем же самым, что дается в уравнении (10), гл. IV, п. 13, значение действительного закрепления коффердама на скале очевидно вполне.

Значения $Q/\Delta\Phi$, выведенные в настоящем разделе и в некоторых предыдущих, относятся к суммарному расходу, фильтрующемуся через пласт песчаника вдоль всего бесконечного слоя EA со стороны верхнего бьефа и покидающему этот пласт вдоль всей бесконечной поверхности CD со стороны нижнего бьефа (фиг. 69). Вместе с тем конечные ограничения этих поверхностей при реальном течении не нарушают справедливости полученных аналитических выводов. Нетрудно показать, что значительная часть расхода, поступающего или покидающего пористую среду, сконцентрирована вблизи особых точек A и C. Таким образом, фильтрация на единицу длины с поверхности CD дается следующим выражением



Фиг. 71. Расход фильтрации под перемычками:

$Q/\Delta\Phi$ — расход на единицу падения потенциала через перемычку и на единицу длины перемычки; d_1 — глубина перемычки; d_2 — глубина котлована со стороны нижнего бьефа; h — мощность проницаемого слоя.

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{d\Psi}{d\zeta} : \frac{dx}{d\zeta}. \tag{11}$$

Беря случай, когда $d_2 = 0$ и $m_1 = m_2 = m$, имеем, что

$$\frac{d\Psi}{d\zeta} = \frac{A}{\sqrt{(\zeta^2-1)(m^2-\zeta^2)}}; \qquad \frac{dx}{d\zeta} = \frac{B\zeta}{(m^2-\zeta^2)\sqrt{\zeta^2-1}}.$$

Отсюда

$$\frac{d\Psi}{dx} = \text{const}\,\frac{\sqrt{m^2-\zeta^2}}{\zeta} = \text{const}\,\frac{\operatorname{ctg}\pi d/2h\,\operatorname{sech}\pi x/2h}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\pi d/2h\,\operatorname{th}^2\pi x/2h}}, \tag{12}$$

так как реализация конформного отображения плоскости z на плоскость ζ в данном случае является следствием приложения той же функции, что была определена уравнением (4), гл. IV, п. 13. Видно, что $\frac{d\Psi}{dx}$ быстро приближается к нулевому значению, если удалиться от перемычки на расстояние одинарной или двойной мощности проницаемого слоя. Однако полученные здесь результаты обладают с практической точки зрения достаточным коэфициентом безопасности при установлении величины фильтрационного расхода в любом случае, ибо они значительно превосходят фактические значения расхода в физических системах, где EA и CD являются в действительности конечными величинами.

15. Анизотропная среда. Как уже было отмечено в главе II, произведенные измерения показали, что довольно часто проницаемость перпендикулярно плоскости напластования песчаника значительно отличается от ее величины, замеренной в плоскости, параллельной напластованию. В таких случаях песчаник можно рассматривать как анизотропную среду с проницаемостью, зависящей от направления потока. В большинстве практических задач эта анизотропность не имеет большого значения, особенно в тех случаях, где скорости в основном приурочены к плоскостям, параллельным напластованию. Вместе с тем представляется интересным принять в расчет фактор анизотропности, когда последняя подвергается рассмотрению. Так как дальнейшая дискуссия будет ограничена только анизотропным характером среды, здесь будет достаточно сделать допущение, что проницаемость, являющаяся отличной для направлений течения вдоль различных координатных осей, во всем остальном постоянна и не зависит от системы координат. Тогда, возвращаясь к гл. III, п. 3, видно, что закон Дарси для однородного, но анизотропного песка может быть написан в следующем виде:

$$v_x = -\frac{k_x}{\mu}\frac{\partial p}{dx}; \quad v_y = -\frac{k_y}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}; \quad v_z = -\frac{k_z}{\mu}\cdot\frac{\partial p}{dz} + \frac{k_z}{\mu}\gamma g. \qquad (1)$$

Полагая, что отдельные проницаемости k_x, k_y, k_z постоянны, получаем из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 = -k_x\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - k_y\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - k_z\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}.$$

Тогда распределение давления $p\ (x, y, z)$ не будет больше устанавливаться уравнением Лапласа, а будет даваться равенством:

$$k_x\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + k_y\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + k_z\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \qquad (2)$$

Однако небольшое преобразование последнего выражения приведет его к уравнению Лапласа. Так, преобразуя систему координат в $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, определяемую

$$\bar{x} = \frac{x}{\sqrt{k_x}}; \quad \bar{y} = \frac{y}{\sqrt{k_y}}; \quad \bar{z} = \frac{z}{\sqrt{k_z}}, \qquad (3)$$

непосредственно получаем следующее:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial \bar{z}^2} = 0. \qquad (4)$$

Отсюда явствует, что влияние анизотропности на проницаемость может быть заменено эквивалентным преобразованием координат. Таким образом, чтобы найти давление в точке (x, y, z) согласно уравнению (2), необходимо только изменить контуры системы путем преобразования (3), решить уравнение Лапласа (4) для этих новых границ, а уже затем подсчитать давление в точке

$$(x/\sqrt{k_x},\ y/\sqrt{k_y},\ z/\sqrt{k_z}).$$

В гл. V, **п. 5** будет рассмотрено приложение этой теории к задачам, имеющим некоторый практический интерес.

Что же касается движения в первоначальной физической системе, можно заметить, что в общем линии тока не будут нормальны к эквипотенциальным линиям. Действительно, легко усмотреть, что угол между этими направлениями дается уравнением:

$$\cos\theta = \frac{\bar{v}\cdot\nabla p}{|\bar{v}|\,|\nabla p|} = \frac{k_x\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + k_y\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + k_z\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2}{|\bar{v}|\,|\nabla p|}. \tag{5}$$

Поэтому результативная проницаемость вдоль линий тока будет:

$$k_r = \frac{|v|}{|\nabla p|\cos\theta} = \frac{|v|^2}{\bar{v}\nabla p} = \frac{1}{\frac{\cos^2\theta_x}{k_x} + \frac{\cos^2\theta_y}{k_y} + \frac{\cos^2\theta_z}{k_z}}, \tag{6}$$

где θ_x, θ_y, θ_z — углы между вектором $\bar{v}$ и координатными осями (x, y, z)[1]. С другой стороны, эквивалент изотропной проницаемости в преобразованной системе дается для трехмерных систем выражением $\sqrt{k_x k_y k_z}$, а для плоских систем $\sqrt{k_x k_y}$.

16. Выводы из общей теории потенциала. Теорема Грина. В предыдущих разделах настоящей главы были представлены решения некоторых задач плоского течения, имеющих практическое значение. При этом были использованы некоторые из наиболее мощных аналитических методов теории потенциала. Так как мы в первую очередь заинтересованы в физической интерпретации и значении этих задач, то нами были показаны только те методы, которые имеют непосредственное приложение к проблемам некоторого практического значения[2]. Однако существует ряд общих выводов, имеющих практический интерес, которые можно будет достаточно хорошо обрисовать здесь и которые не зависят от таких подробных данных, которыми характеризовались уже рассмотренные задачи. В качестве первого вывода следует упомянуть, что в целом каковы бы ни были отдельные формы граничных контуров, течение в любой системе замкнутых поверхностей всегда пропорционально разности давлений между поверхностями, через которые движется жидкость и от которых она движется при условии, что оба ряда поверхностей имеют постоянное давление каждый. Это положение можно рассматривать как само собой очевидное следствие линейности уравнения Лапласа. Его можно вывести также, пользуясь методом функции Грина. Однако представляет собой интерес показать следу-

---

[1] Эти результаты были также получены, но с несколько более сложными выводами в работах C. G. Vreedenburgh and O. Stevens. Int. Conf. Soil Mech. and Fondation Eng., 1936; а также F. Schaffernak, Die Wasserwirtschaft, p. 399, 1933.

[2] Возможно, что наиболее часто применяемым методом решения, который не рассматривался в предыдущих разделах, является приложение интеграла Фурье. Полное рассмотрение этого способа, хорошо иллюстрированное примерами, можно найти в работе W. E. Byerly „Fourier's Series and Spherical Harmonics", гл. IV.

ющее доказательство этого положения, основанное несколько на ином принципе теории потенциала.

С этой целью мы используем гидродинамическую аналогию хорошо известной теоремы обратной взаимности Грина, которая формулируется в теории электричества так: если полные заряды E_1, E_2 и т. д. на отдельных проводниках системы создают потенциалы V_1, V_2 и т. д., а заряды E_1', E_2' и т. д. создают потенциалы V_1', V_2' и т. д., то:

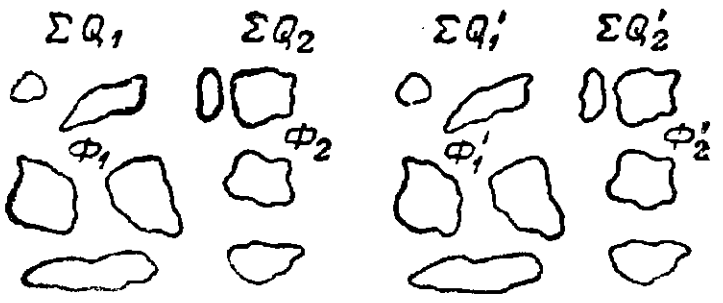
$$\sum E_i V_i' = \sum E_i' V_i.$$

В гл. III, п. 6 уже было показано, что путем непосредственного распространения аналогий заряды E и постоянные потенциалы V для ряда проводников соответствуют гидродинамически полным расходам Q и постоянным потенциалам Φ. Поэтому возможно приложить теорему Грина к течению жидкости в пористой среде, сформулировав ее следующим путем:

Если постоянные потенциалы Φ_1, Φ_2 и т. д. на некоторых поверхностях обеспечивают расходы Q_1, Q_2... и если потенциалы Φ_1', Φ_2'... обеспечивают расходы Q_1', Q_2'..., то

$$\sum \Phi_i Q_i' = \sum \Phi_i' Q_i. \qquad (1)$$

Физически это обозначает, что если одно установившееся состояние характеризуется количествами Φ_i, Q_i, то Φ_i', Q_i' любого другого установившегося течения в той же самой системе должны удовлетворять уравнению (1). Этот вывод можно приложить к решению рассматриваемой задачи следующим путем.



Фиг. 72.

Допустим, что дренируемые поверхности имеют постоянный потенциал Φ_1, а поверхности питания — постоянный потенциал Φ_2, причем соответствующие расходы будут, как это показано на фиг. 72, Q_1 и Q_2. Допустим, что аналогичные величины для иного установившегося состояния обозначены теми же буквами, но со значками „прим".

Из уравнения (1) следует, что

$$\Phi_1 \sum Q_1' + \Phi_2 \sum Q_2' = \Phi_1' \sum Q_1 + \Phi_2' \sum Q_2. \qquad (2)$$

Так как в системе, которую мы считаем замкнутой, не может быть накопления или уничтожения жидкости, то полные расходы должны удовлетворять отношению:

$$\sum Q_1 + \sum Q_2 = 0 = \sum Q_1' + \sum Q_2'. \qquad (3)$$

которое позволяет написать уравнение (2) в следующем виде:

$$(\Phi_1' - \Phi_2') \sum Q_1 = (\Phi_1 - \Phi_2) \sum Q_1',$$

или

$$\frac{\sum Q}{\Phi_1 - \Phi_2} = \frac{\sum Q'}{\Phi_1' - \Phi_2'} = \ldots = \text{const}, \tag{4}$$

откуда

$$\sum Q = \text{const}\ \Delta\Phi, \tag{5}$$

что явилось положением, требующим доказательства, ибо константа зависит только от геометрии системы и, очевидно, прямо пропорциональна проницаемости k. Отсюда следует дополнительно вполне естественный вывод, что если потенциалы обратимы, то и расходы обратимы, сохраняя, однако, то же самое численное значение, что и ранее. Наконец, можно заметить, что полученный результат, решенный методом функции Грина, сохраняет свое значение даже для отдельных расходов Q.

Следующий вывод, представляющий некоторый интерес, относится к общему случаю плоского течения в скважину, который вне зависимости от контура области, дренируемой скважиной, выражается следующим уравнением:

$$Q = \frac{2\pi k \Delta p}{\mu \ln c/r_w}, \tag{6}$$

где Δp — перепад давления между внешним контуром (предположительно с постоянным давлением) и скважиной радиуса r_w;

c — константа, зависящая от формы внешнего контура.

Следует заметить, что, несмотря на форму внешнего контура, $p\ (x,\ y)$ может быть выражено следующим выражением:

$$p = q\Phi\ (x,\ y) + \text{const}, \tag{7}$$

где $\Phi\ (x,\ y) \cong \ln r$ — для небольших значений r (замеренных от центра скважины). Полагая теперь

$$\ln c = \Phi\ (r_e), \tag{8}$$

где $\Phi\ (r_e)$ представляет собой постоянное значение Φ на внешнем контуре, прилагая граничные условия, чтобы определить q, и рассчитывая обычным способом величину Q, находим в результате уравнение (6). Интересно заметить, что константа c в отдельных примерах соответствует вполне обоснованному эффективному среднему расстоянию внешнего контура от скважины.

Так, в частном случае:

1) Круговой контур радиуса r_e, концентричный со скважиной,

$$c = r_e$$ [см. уравнение (10), гл. IV, п. 2];

2) Круговой контур радиуса r_e с центром на расстоянии δ от скважины

$$c = \frac{r_e^2 - \delta^2}{r_e}$$ [см. уравнение (10), гл. IV, п. 6];

3) Линейный источник питания на расстоянии d от скважины

$$c = 2d \qquad \text{[см. уравнение (8), гл. IV, п. 7];}$$

4) прямоугольный контур со сторонами $2a$, $2b$ и скважиной в центре

$$c = \frac{4\sqrt{ab}}{\pi}.$$

Вывод последнего случая (4) можно получить без всякого труда, применяя функцию Грина для прямоугольного участка, как это дается в приложениях. Следует заметить, что во всех случаях значения c соответствуют величинам, которые можно рассматривать как средние „эффективные“ радиусы фактических внешних контуров. Отсюда можно вполне обоснованно обобщить и сделать логическое заключение, что для всех практических целей необходимо рассчитывать Q по уравнению (6), а для определения величины c сделать расчет соответственного среднего расстояния внешнего контура от скважины.

В главе IV, п. 6 была применена „теорема Гаусса о среднем“, которая, будучи выражена через давление p, может быть сформулирована таким образом: давление в любой точке равняется среднему давлению по любому кругу, который не включает в себя каких-нибудь источников питания или стоков, и центр которого находится в искомой точке. Для доказательства этой весьма полезной теоремы снова можно использовать метод ряда Фурье[1]. Так, из гл. IV, п. 5 ясно, что распределение давления в пределах окружности радиуса r_e, не содержащей источников питания или стоков относительно интересующей нас точки, может быть выраже о следующим:

$$p = \sum_{0}^{\infty} r^n (a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta), \qquad (9)$$

где a_n, b_n так подобраны, что p принимает заранее намеченные значения на внешнем контуре $r = r_e$. Отсюда удовлетворяется следующее выражение:

$$p_e(\theta) = \sum_{0}^{\infty} r_e^n (a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta). \qquad (10)$$

Если p остается конечным внутри круга, то коэфициенты c_n, d_n соответственного уравнения (1), гл. IV, п. 5 должны быть приравнены нулю.

Из уравнения (10) непосредственно следует, что среднее значение $p_e\theta$ дается:

$$\overline{p}_e = b_0 = p(r = 0), \qquad (11)$$

что является аналитическим выражением вышеуказанной теоремы.

Следующий общий вывод из теории потенциала указывает, что для любой проблемы течения, плоского по отношению к декартовой системе

[1] Этот результат получается непосредственно, если в интеграле Пуассона принять $\delta = 0$ [уравнение (17), гл. IV, п. 6].

координат, можно взаимно заменить эквипотенциальные линии на линии тока и все же иметь систему, удовлетворяющую уравнению Лапласа. В гл. IV, п. 8 было показано, что функция тока Ψ не только удовлетворяет уравнению Лапласа, но более того, кривые $\Psi = \text{const}$ нормальны к эквипотенциальным кривым $\Phi = \text{const}$. Отсюда становится ясным, что можно обменять роли Ψ и Φ, рассматривая первую как функцию потенциала, а последнюю как функцию тока. Таким образом, любой комплекс эквипотенциальных линий и линий тока для данной физической задачи можно интерпретировать как решение другой физической задачи, где эквипотенциальные линии и линии тока обменялись ролями, и граничные условия были изменены соответствующим путем.

Взаимозаменяемость эквипотенциальных линий и линий тока может быть показана на специальном примере из задачи радиального течения в полукруговой системе, где эквипотенциальные линии даются окружностями:

$$\Phi = \frac{k}{\mu} p = \frac{Q}{\pi} \ln \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r_w} + \Phi_w = \text{const}^1, \tag{12}$$

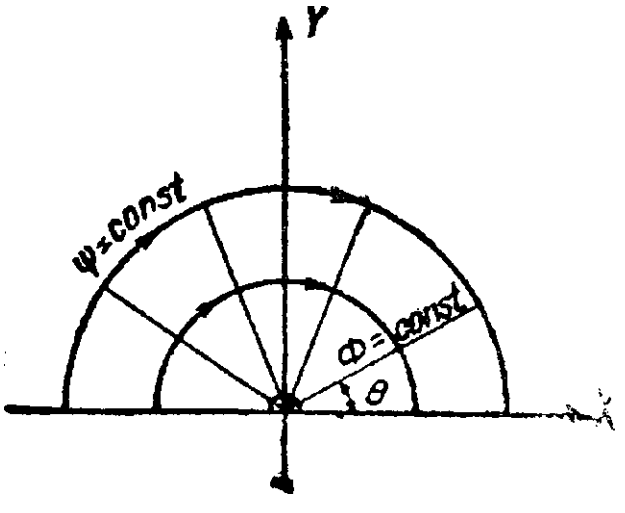
а линии тока

$$\Psi = \frac{Q}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} = \frac{Q}{\pi} \theta = \text{const}. \tag{13}$$

являются, очевидно, радиусами. Приложив полученные результаты, замечаем, что если заменить линию тока $\theta = 0$ эквипотенциальной линией $\Phi = 0$, а линию тока $\theta = \pi$ эквипотенциальной линией $\Phi = Q$, то новые линии тока будут окружностями:

$$\Psi = \frac{Q}{\pi} \ln \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r_w}, \tag{14}$$

как это показано на фиг. 73. Это соответствует течению между двумя смежными полубесконечными линейными источниками питания и стоками. Давление в источниках питания должно быть выше давления стоков на величину $(k/\mu = 1)\, Q$.



Фиг. 73. Результат замены местами эквипотенциальных линий и линий тока при радиальном течении.

Последняя теорема из теории потенциала, имеющая практический интерес, относится к вопросу установления известной симметрии в распределении потенциала для течения, чья геометрия обладает определенной симметрией.

Для целей настоящей работы эта теорема может быть сформулирована следующим путем.

Если течение имеет плоскость симметрии и все контуры с высоким потенциалом при одном и том же постоянном потенциале находятся по одну сторону плоскости, а все контуры с низким потенциалом при одном и том же постоянном потенциале симметрично расположены по другую сторону плоскости, то распределение потенциала внутри системы

---

[1] В этом случае Q относится к расходу через единицу мощности в полукруговую поверхность стока $r = r_w$.

будет также симметрично по отношению к геометрической системе линий тока и эквипотенциальных линий на обеих сторонах плоскости. Нумерация эквипотенциальных линий будет иметь тот же самый численный порядок при возрастающей последовательности, идя от плоскости симметрии к границам с высоким потенциалом, а также при убывающей последовательности, идя к границам с низким потенциалом. В частности, плоскость симметрии будет иметь потенциал, равный среднеалгебраическому потенциалу на контурах.

Простое доказательство этой почти очевидной теоремы может быть построено следующим путем. Допустим, что контуры с высоким и низким потенциалом S_1 и S_0 имеют потенциал 1 и 0. Распределение последнего обозначим через $\Phi(x, y, z)$. Тогда распределение потенциала $\Phi' = 1 - \Phi$ будет соответствовать, очевидно, тождественному состоянию течения, но с обращенными скоростями. Так как условия Φ' можно получить вращением потока на 180° относительно соответственной оси в плоскости симметрии, то при этих условиях вследствие геометрической симметрии системы нумерация потенциалов, начиная с 1 при S_0, будет тождественной нумерации в первоначальной системе, начиная с 1 при S_1. Отсюда, если P_1, P_0 — точки, симметричные по отношению к плоскости симметрии на сторонах S_1 и S_0, т. е.

$$\Phi(P_1) = \Phi'(P_0) = 1 - \Phi(P_0), \tag{15}$$

то

$$\Phi(P_1) + \Phi(P_0) = 1. \tag{16}$$

По мере того как P_1 и P_0 приближаются и достигают плоскости симметрии, становится ясным, что $P_1 = P_0 = \bar{P}_1$.
Отсюда

$$\Phi(\bar{P}) = \frac{1}{2}. \tag{17}$$

Тогда уравнение (16) можно переписать в таком виде:

$$\Phi(P_1) - \Phi(\bar{P}) = \Phi(\bar{P}) - \Phi(P_0), \tag{18}$$

что совместно с уравнением (17) является аналитическим эквивалентом формулировки доказанной теоремы.

Следует заметить, что эта теорема является основой для выводов, которые даются в заключении к настоящей главе (п. 18) по отношению к распределению давления и сил противодавления в плотинах с двумя рядами шпунтовых свай, установленных симметрично по отношению к вертикальной плоскости, проходящей через центровую линию основания плотины.

17. Приближенные и неаналитические методы решения задач плоского течения. В предыдущих разделах было показано, что можно идеализировать, не вводя серьезных ошибок, различные проблемы течения жидкости в пористой среде, тщательное рассмотрение которых в настоящей главе привело к тому, что они стали доступны точной аналитической формулировке. Однако на этом основании нельзя надеяться, что для всех возникающих практических задач в этой области можно найти решения в аналитической форме.

Поэтому для полноты обзора мы вкратце упомянем о некоторых возможных способах подхода к проблеме, когда нельзя найти строгого аналитического решения. Наш основной интерес заключается здесь скорее в раскрытии физической сущности проблем течения, чем в аналитической теории уравнения Лапласа. Мы не претендуем на полноту раскрытия возможных методов решения его и ограничимся в большинстве случаев простым их определением. Наиболее интересным из этих методов, с аналитической точки зрения, является, возможно, совершенство техники вывода ряда аналитических функций, которые в пределе приближаются индивидуально или в соответственных комбинациях к потенциальной функции, удовлетворяющей предначертанным граничным условиям. Среди различных видов этих функций имеются удовле воряющие в отдельности граничным условиям, но не удовлетворяющие диферен-
циальному уравнению (метод Пуанкаре), а также такие, что являются в отдельности решением уравнения Лапласа, но не удовлетворяют граничным условиям (метод среднего арифметического Ньюмена). Эти методы являются весьма мощным орудием при изучении формальной теории решений уравнения Лапласа, но непригодны, в частности, для обработки специфических задач. Читатель может найти полное обозрение этих методов в работе „Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften", т. II, ч. III, 1, стр. 177—377, а также в „Potential Theory " O. D. Kellog, гл. XI, 1929 г.

Значительно более практический путь решения базируется на выводе из вариационного исчисления[1], гласящем, что проблема решения уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

для удовлетворения заранее установленных граничных условий на контурах определенной области эквивалентна нахождению функции Φ, удовлетворяющей этим граничным условиям и имеющей такое значение, чтобы привести интеграл

$$I = \int\int \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy \qquad (2)^2$$

к минимуму. Хотя задача приведения интеграла I к минимуму обычно преобразуется обратно в решение (1), непосредственная попытка получения приближенного минимума во многих случаях будет являться более

---

[1] Riemann-Webers, уже цитированная работа, главы V и XX; также Courant-Hilbert, „Methoden der Mathematischen Physik", 1924, главы IV и VI; есть русский перевод.

[2] Это выражение содержит, очевидно, весьма интересное следствие, а именно: фактическое распределение давлений и скоростей в пористой среде, несущей жидкость в условиях ламинарного течения, должно быть таковым, чтобы создать минимум общей макроскопической кинетической энергии жидкости по сравнению со всеми остальными способами распределения, согласующимися с заранее принятыми граничными условиями. Другим следствием является то обстоятельство, что движение жидкости должно быть таковым, чтобы общая величина произведенной работы трения была минимальной, так как интегральное выражение I пропорционально величине последней в каждой точке (x, y).

легкой процедурой. Среди различных схем минимизации I следует упомянуть о схемах Ритца [1] и Трефтца [2], которые являются аналогами приведенных выше формальных аналитических методов. В них мы встречаемся с соответственными рядами функций, которые удовлетворяют граничным условиям, но не уравнению Лапласа, и обратно.

Практическое содержание метода Ритца состоит в основном из построения функции Φ:

$$\Phi(x, y) = g(x, y) + \sum_{1}^{n} c_m \Phi_m(x, y), \tag{3}$$

где $g(x, y)$ является любой диференцируемой функцией, удовлетворяющей граничным условиям, в то время как Φ_m является последовательностью функций, обращающихся в нуль на контуре. Значение g может быть принято равным нулю, если каждое из Φ_m удовлетворяет граничным условиям. Выбираем постоянные коэфициенты c_m таким путем, что, когда Φ будет подставлено в уравнение (2), I будет иметь минимум. Согласно элементарным правилам исчисления выбор c_m приводит к системе уравнений линейных относительно c_m:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial I}{\partial c_m} = \int\int (g_x \Phi_{mx} + g_y \Phi_{my})\, dx\, dy +$$

$$+ \sum c_j \int\int (\Phi_{mx}\Phi_{jx} + \Phi_{my}\Phi_{jy})\, dx\, dy = 0; \quad m = 1, 2 \ldots n, \tag{4}$$

где индексы (x, y) показывают на диференцирование по x и y, или же, применяя теорему Грина [3], получаем окончательно:

$$\sum c_j \int\int \Phi_m \nabla^2 \Phi_j\, dx\, dy = -\int\int \Phi_m \nabla^2 g\, dx\, dy; \; m = 1, 2 \ldots n. \tag{5}$$

Точность результативной функции Φ будет, очевидно, зависеть от выбора функций Φ_m и числа элементов n, принятого в суммировании.

Успешность применения этой методики будет зависеть вполне определенно от выбора Φ_m, так как для получения их численных значений следует разрешить интегральные уравнения (4) и (5). Таким образом, если можно выбрать Φ_m так, что их производные по x и y образуют ортогональные ряды, становится ясным, что уравнения (4) сведутся к n отдельным уравнениям по единичным коэфициентам c_m. Иначе их следует рассматривать как ряд совместных уравнений. Однако в любом случае можно показать, что хотя бы конечная сумма отобранных Φ_m представляла фактически строгое решение, значение интеграла из уравнения (2) с любым конечным рядом, например, согласно уравнению (3), будет больше по сравнению с его минимальным значением, даваемым точным решением. Путь решения, который дает Трефтц, отличается от схемы Ритца только природой функций Φ_m. Здесь Φ_m выбраны первоначально как потенциальные функции. Отсюда все они удовлетворяют

---

[1] Ritz W., J. rein. u. angew. Math., 135, 1, 1909.
[2] Trefftz E., „Intern. Cong. Applied Mech.", стр. 131, Цюрих, 1926.
[3] E. B. Wilson, „Advanced Calculus", p. 349, 1912.

уравнению (1), но не удовлетворяют граничным условиям. Беря тогда ряд

$$\chi(x, y) = \sum_{1}^{n} c_m \Phi_m(x, y) \tag{6}$$

и устанавливая как эквивалент уравнения (2) требование, чтобы выражение

$$\int\int |\nabla (\Phi - \chi)|^2 \, dx \, dy \tag{7}$$

имело значение минимума, где Φ является истинным решением при значениях границ $g(s)$, легко установить, что c_m получаются из линейных уравнений:

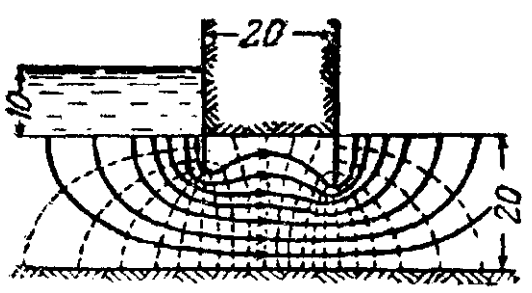
$$\sum c_j \int \Phi_j \frac{\partial \Phi_m}{\partial n} \, ds = \int g(s) \frac{\partial \Phi_m}{\partial n} \, ds. \tag{8}$$

В этом случае точность χ будет зависеть снова от выбора Φ_m и числа членов в ряду. Однако в противоположность методу Ритца величина I в уравнении (2), используя значение χ из (6), для данного случая будет всегда меньше истинного минимального значения I при правильном решении, если только последнее не было выражено как конечная сумма Φ_m. Отличный метод вывода решения уравнения Лапласа, соответствующий вполне определенной физической проблеме течения, заключается в графическом интегрировании уравнения. При этом способе решение последнего представляется геометрической сетью эквипотенциальных линий и линий тока, соответствующих физической задаче. Эта сеть получается в результате следования определенным правилам и при повторении дает последовательно более близкое приближение к форме сети, определяемой точным решением. Отдельные детали этого метода могут быть самого разнообразного порядка. Они могут базироваться на принципе соответственного преобразования первоначально произвольной сети, которая показывала бы режим на контурах, соответствующий заранее принятым граничным условиям, или же на принципе дальнейшего развития элементов сети, первоначально выбранных так, чтобы удовлетворить полностью или частично граничным условиям внутри интересующей области, согласно правилам, соответствующим дифференциальному уравнению, которое необходимо решить. Главной особенностью совершенно иной схемы является графическое построение функций Грина для рассматриваемой области и последующий подсчет конечного значения потенциала графическим или численным интегрированием согласно уравнению (1), гл. IV, п. 6. Подробное описание этих методов с полной библиографией можно найти в работе „Numerische und graphische Integration“, C. Runge und Fr. A. Willets „Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften“, II, 3, 1, стр. 164—171.

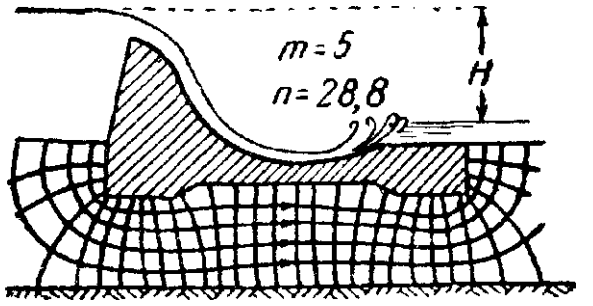
Примеры распределения потенциала для проблем течения, полученные этим путем, показаны на фиг. 74 и 75.

Указанные виды графического интегрирования уравнения Лапласа непосредственно дадут только сети эквипотенциальных линий и линий

тока. Фактический же расход в системе может быть установлен следующим путем: предполагая, что общее падение потенциала в системе $\Delta\Phi$ от поверхности поступления потока до поверхности стока было разделено на n равных частей $(n-1)$ эквипотенциальными линиями, лежащими между контурами, замечаем, что падение между каждой из них будет $\Delta\Phi/n$. Если разрыв между двумя из этих эквипотенциальных линий в данной точке будет S, то расход на единицу длины вдоль эквипотенциальной поверхности будет $\Delta\Phi/ns$. Допуская теперь, что линии тока были построены так, что они образуют квадратную сеть с эквипотенциальными линиями, получим величину расхода между двумя такими линиями тока $\Delta\Phi/n$. Отсюда в конечном итоге, если квадратная



Фиг. 74. Эквипотенциальные линии и линии тока под плотиною со свайной крепью, полученные графическим интегрированием (по Терцаги).



Фиг. 75. Эквипотенциальные линии и линии тока под плотиною с основанием, имеющим неправильную геометрическую форму, полученные графическим интегрированием:

m — число единиц расхода; n — число эквивалентных единиц потенциала; H — общий напор жидкости (по Терцаги).

сеть содержит $(m-1)$ линий тока между ограничивающими линии тока контурами, получим величину общего расхода в системе из следующего выражения:

$$Q = \frac{m}{n}\,\Delta\Phi. \qquad (9)$$

Для того чтобы найти фактический расход в системе, необходимо подсчитать число квадратов на отрезке, ограниченном двумя линиями тока, а также на отрезке, ограниченном двумя эквипотенциальными линиями, взять их отношение, а затем приложить уравнение (9). Результат такого подсчета приведен на фиг. 75, причем было найдено, что m и n имеют значения 5 и 28,8.

Другой способ решения уравнения Лапласа заключается в численном интегрировании. В этом случае было также предложено значительное количество схем. Однако все они дают искомое решение в форме численных значений потенциала или функции давления на заранее принятой сетке точек, покрывающих интересующую нас область.

Единственный численный способ, который необходимо рассмотреть здесь для применения в практических целях, заключается в том, что диференциальное уравнение в частных производных сначала заменяется

соответствующим разностным уравнением, и математическая обработка прилагается к последнему уравнению [1].

Уравнение в частных разностях строится с помощью применения (для двух переменных) соответствий:

$$\left.\begin{aligned} \delta\,\frac{\partial\Phi}{\partial x} &\to \Phi(x+\delta, y)-\Phi(x, y)\\ \delta\,\frac{\partial\Phi}{\partial y} &\to \Phi(x, y+\delta)-\Phi(x, y)\\ \delta^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} &\to \Phi(x+\delta, y)-2\Phi(x, y)+\Phi(x-\delta, y)\\ \delta^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} &\to \Phi(x, y+\delta)-2\Phi(x, y)+\Phi(x, y-\delta) \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

для квадратной ячейки со стороной δ. Принимая δ в качестве единицы длины, получим разностное выражение, соответствующее уравнению Лапласа, в следующем виде:

$$\Phi(x+1, y)+\Phi(x, y+1)+\Phi(x-1, y)+ +\Phi(x, y-1)-4\Phi(x, y)=0, \quad (11)$$

где x и y являются независимыми координатами точек решетчатой ячейки.

Чтобы решить это уравнение прямым путем, необходимо выписать его последовательно для каждой точки (x, y) в пределах контура, определяющего интересующую нас область. В уравнения, где (x, y) непосредственно примыкают к контуру и содержат по крайней мере одно граничное значение Φ, подставляется заранее принятое граничное значение. Таким образом, будет получен ряд линейных неоднородных уравнений, выраженный через неизвестные значения Φ во внутренних точках решетки, численно равный количеству этих точек. В результате решения этих уравнений обычным алгебраическим путем получается решение уравнения (11).

Повидимому, для практических целей такое непосредственное решение будет утомительным и трудоемким. Поэтому были разработаны приближенные методы получения желаемых результатов, даже не прибегая к обработке уравнения (11) как точного алгебраического выражения. Наиболее удобным путем нахождения таких решений является методика усереднения, предложенная Либманом[2].

В этом случае уравнение (11) переписывается в следующем виде:

$$\Phi(x, y)=\frac{1}{4}[\Phi(x+1, y)+\Phi(x, y+1)+ +\Phi(x-1, y)+\Phi(x, y-1)], \quad (12)$$

---

[1] Следует упомянуть также о возможности решать численным путем задачи о потенциале математической обработкой интегрального уравнения, эквивалентного диференциальному уравнению в частных производных Лапласа (Келлог, стр. 286) и вариационного приближенного метода Ритца (см. также гл. IV, Bull. 92 of the National Research Council on „Numerical Integration of Differential Equations“, 1933).

[2] Liebmann H., Münch. Sitzgs. Ber., p. 385, 1918.

из которого видно, что значение Φ в любой точке является средней арифметической величиной четырех непосредственно примыкающих соседних точек. Теперь можно показать, что беря для величины Φ заранее принятые значения на контурах, а внутри последних любое произвольное распределение значений его, и повторно прилагая уравнение (12), чтобы получить улучшенные значения потенциала на внутренних точках, можно получить такое распределение потенциала, что дальнейшее приложение уравнения (12) уже больше не изменит его. Это предельное распределение будет, очевидно, представлять решение разностного уравнения (11) с заранее принятыми граничными условиями.

Вольфом [1] была опубликована подробная техника выполнения этих последовательных приближений, производимая систематическим путем на основе многократного приложения уравнения (12), а также доказательство сходимости этого метода. Оставляя в стороне неизбежную при этом приближенность, вследствие практической необходимости нарушения процедуры усереднения после конечного числа операций, а отсюда раньше, чем будет достигнуто фактически предельное решение разностного уравнения [2], следует заметить, что, приближенность в только что рассмотренном численном способе присуща последнему благодаря замене диференциального уравнения в частных производных уравнением в частных разностях.

Вполне ясно, что ошибки, вводимые таким путем, будут уменьшаться с уменьшением размера ячейки или увеличением числа внутренних точек, для которых подсчитывается величина потенциала. Размер принятой ячейки при действительном вычислении будет, очевидно, определяться точностью, которую желательно получить при конечных результатах.

Последним неаналитическим методом получения решений специальных проблем течения, имеющим большое практическое значение, является применение экспериментальных моделей течения [3]. Особый интерес представляют эксперименты с электрическими моделями, основанные на тождестве движения электрических токов в электропроводящей системе и ламинарного течения однородной жидкости в пористой среде, как это уже было охарактеризовано в гл III, п. 6. Эквипотенциальные линии и линии движения тока в электрической системе соответствуют эквипотенциальным линиям и линиям тока течения для пористой среды, а величина единицы удельного сопротивления электрической модели соответствует обратной величине расхода для единицы вязкости жидкости, единицы проницаемости среды и единицы полной разности потенциала. Возможно также, что наиболее гибким типом модели является электрическая модель, в которой пористая среда замещена электролитом, а распределение потенциала представлено зондами.

---

[1] Wolf F., Zeits. Angew. Math. und Mech., 6, 118, 1926.

[2] Можно заметить также, что несколько отличный вид развития процесса усереднения приводит к процедуре, которая принципиально обеспечивает метод получения точного решения разностного уравнения конечным числом операций, L. F. Richardson, Trans. Roy. Soc., London, A-210, 307, 1910.

[3] Эксперименты с песчаными моделями, применяемые многими исследователями, не рассматриваются здесь, так как они представляют собой воспроизведение в малом масштабе фактических типов течений.

При этом следует применять переменный ток, чтобы избежать эффекта поляризации на электродах, представляющих собой границы питания и стока системы. С помощью электролитической модели могут изучаться обе системы — плоского и пространственного течения. В частности, плоское течение изучается этим путем гораздо свободнее благодаря представляющейся возможности зондирования внутреннего состояния системы, даже если она не обладает заметными характерными чертами симметрии. Распределение потенциала и линий тока в пространственном течении, содержащем непроницаемую перемычку, может быть свободно установлено на электролитической модели, если заменить перемычку геометрически сходным телом — непроводником. Электролитическая модель, которая дает графическое представление о действительном движении частичек жидкости для плоских систем, состоит из электролита, в котором движение ионов становится видимым благодаря наличию индикатора, меняющего цвет последнего, по мере того как ионы движутся от приемных электродов. Этот метод применялся с успехом к задаче о водяной репрессии и более подробно рассматривается в гл. IX, п. 17.

Обычная проводящая модель, на которой можно изучать пространственные системы течения, обладающие такой симметрией, что наиболее важные свойства их воспроизводятся на плоскости, составленной из линий тока, например, на радиальной плоскости в системе, обладающей осевой симметрией, может быть построена из любого однородного вещества с высоким сопротивлением, например, из графита. Контуры течения для большей части поставленных задач могут быть проверены опытно с помощью металлических электродов — контуры постоянного потенциала — или с помощью изолированных поверхностных элементов, соответствующих границам, образуемым линиями тока. Примеры применения таких моделей приведены в гл. VIII, п. 12, в связи с анализом устранения водяных конусов в несовершенных нефтяных скважинах глинистыми линзами.

Когда представленная система двухмерная, можно с успехом применить плоские модели из токопроводящей пластины. Общие принципы их применения и интерпретации остаются те же, что и в остальных электрических моделях. Непроницаемые перемычки, например, линзы песчаника, проверяются опытным путем, вырезыванием из токопроводящей пластины фигуры, геометрически похожей на форму изучаемого барьера. Некоторые примеры распределения потенциала на этом типе модели приводятся в гл. IX, п. 21 для различных установок водной репрессии нефтяных пластов.

Особенно удобным свойством электрических моделей для плоских систем является то обстоятельство, что их можно применять для непосредственного получения эквипотенциальных линий и линий тока системы. Благодаря взаимной ортогональности этих кривых они могут быть взаимно заменены местами и все же отображать возможное течение (гл. IV, п. 16). Отсюда, нанося эквипотенциальные линии на модели, у которой пограничные линии тока соответствуют граничным поверхностям постоянного потенциала первоначальной системы, и поверхности постоянного потенциала соответствуют поверхностным элементам линий тока, можно получить непосредственно линии тока первоначального течения. Этим путем можно избежать достаточно неточной процедуры

нахождения линий тока вычерчиванием нормальных траекторий к эквипотенциальным линиям[1].

Следует заметить, что при движении жидкостей в пористой среде не существует прямой электрической аналогии с гравитационным эффектом. Поэтому необходимо в задачах, куда входят вертикальные скорости, например, фильтрация под плотинами, соорудить модель скорее на базе аналогии между электрическим потенциалом и потенциалом скорости жидкости, чем на базе аналогии между электрическим потенциалом и давлением жидкости. С другой стороны, системы, куда входят свободные поверхности,—поверхности линий тока, на которых давление постоянно, нельзя рассматривать просто, так как свободные поверхности, которые автоматически развиваются в реальных системах гравитационного течения, не появятся в электрической модели, которая будет повсюду перерезаться линиями протекающего электрического тока.

В подобных случаях необходимо разрезать модель таким образом, чтобы она действительно была ограничена кривой той же самой формы, что и свободная поверхность в физическом течении. Однако это может быть сделано только опытным путем, так как форма свободной поверхности вообще сначала неизвестна и ее определение является фактически одной из искомых величин при решении задач гравитационного течения. Критерий для правильного определения формы свободной поверхности заключается в том, что потенциал вдоль ее должен изменяться линейно с изменением вертикального превышения свободной поверхности над горизонтальной плоскостью; физически это обозначает, что давление, как это требуется определением последней, постоянно на свободной поверхности. Опытная настройка формы элемента ограничивающей поверхности аналогичным путем описана в гл. VIII, п. 10 для случая пространственной модели, примененной для изучения задачи образования водяных конусов. В дополнение к опытной настройке контура в электрической модели так, чтобы он соответствовал свобод ой поверхности, необходимо также в проблемах гравитационного течения, например, при определении величины фильтрации под плотинами, принять во внимание граничные элементы неизвестной длины, составляющие „поверхности фильтрации“. Прикрепляя к модели полоски проводника по длине рассматриваемого сегмента и пропуская через эту полоску ток, чтобы создать вдоль нее линейное изменение потенциала, можно удовлетворить условию постоянства давления вдоль таких поверхностных сегментов. Длина этой полоски подбирается так, чтобы дать соединение со свободной поверхностью, которая должна заканчиваться у кровли поверхности фильтрации. Фактическое приложение этого типа модели к задаче фильтрации через плотины будет представлено в гл. VI, п. 6.

Последний пункт, о котором следует упомянуть в связи с экспериментами на моделях, связан с масштабами моделей и их цифровыми

---

[1] Можно обратить также внимание на очень интересное приложение электрических моделей, недавно разработанные K. N. E. Bradfield, S. G. Hooker and R. V. Southwell (Proc. Roy. Soc., 159A, 315, 1937). Эти авторы показывают, как можно прилагать электрические модели к преобразованию конформных и сопряженных функций в плоских системах потенциала. Это делает возможным решение задач с такой геометрией, где теорему Шварца-Кристоффеля или ее обобщение нельзя применять дальше с практическим результатом.

значениями. Хотя предварительно необходимо определить абсолютные размеры модели для удобства и для получения желаемой точности, однако раньше всего совершенно необходимо геометрическое подобие модели и первоначального течения потока, особенно если результаты, полученные на модели, будут приложены к физической проблеме течения. Только в этом случае распределение потенциала и линий тока на модели будет эквивалентно соответствующим параметрам действительного течения. Что же касается сопротивления модели или дебита жидкости, важно заметить при выборе единицы удельного сопротивления, что полное сопротивление системы обратно пропорционально одному какому-нибудь размеру ее. Все же остальные размеры входят в систему в зависимости от величины своего отношения к принятому размеру. Отсюда, чтобы получить эмпирические обобщения из экспериментов на моделях, необходимо изучить сопротивление, как функцию отношений различных размеров модели к фиксированному размеру или же попытаться выразить произведение величины сопротивления и выбранного размера в зависимости от отношений остальных размеров к выбранному.

18. Заключение. Встречающиеся в природе водоносные и нефтеносные песчаники обладают часто значительным постоянством мощности на большом протяжении. Проблема движения жидкости в таких песчаниках включает поэтому анализ плоских задач теории потенциала. Это физическое приближение представляет особенный интерес для тех случаев, когда скважины, пробуренные с целью дренирования залегающих горизонтально песчаников постоянной мощности, вскрыли последние полностью. Тогда можно вполне безопасно пренебречь вертикальной изменчивостью в распределении потенциала. В последующей главе будет показано, что если скважина вскрыла не полностью пласт песчаника, то задача принимает пространственный характер, который нельзя удовлетворить приближением, основанным на двухмерных упрощениях. В свете ограничения течения плоскостями, параллельными горизонту, в плоских задачах сила тяжести фактически исчезает из уравнений. Отсюда при изучении горизонтальных плоских систем можно принять давление жидкости p, помноженное на отношение проницаемости к вязкости жидкости k/μ, как эквивалент потенциала скорости.

На этом основании был произведен подробный анализ нескольких физических задач течения, подчиняющихся уравнению:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \quad \text{[см. уравнение (1), гл. IV, п. 1]},$$

где x и y являются декартовыми координатами для горизонтальной плоскости. Каждая задача выбиралась так, чтобы показать условия течения, имеющего практический интерес, и в то же самое время привести один из общих методов анализа, который применяется в теории плоского потенциала. В большинстве этих задач рассматриваемая система состоит из скважины небольшого радиуса, которая дренирует песчаник или через которую происходит питание последнего жидкостью. Различие между этими отдельными задачами заключается в условиях, которые налагаются на границы области, окружающей скважину, форму контура

этой области и изотропность песчаника по отношению к его проницаемости. Анализ этих отдельных задач приводит к следующим общим выводам.

Каждая скважина в пласте песчаника, в котором перемещается в единицу времени и через единицу его мощности количество жидкости Q, вносит в распределение давления в системе[1] член, определяемый выражением:

$$p = \frac{Q\mu}{2\pi k} \ln r \quad \text{[см. уравнение (11), гл. IV, п. 2]},$$

где k — проницаемость песчаника; μ — вязкость жидкости; r — радиус, замеренный от центра скважины. Окончательное распределение давления в системе слагается из величин указанного типа, связанных с наличием индивидуальных скважин в системе, и других членов, находящихся в точной зависимости от границ области питания и принятых граничных условий. На основании приложения теории рядов Фурье (см. гл. IV, п. 3) было установлено, что течение в скважину радиусом r_w в центре кругового контура радиусом r_e может быть подсчитано из уравнения:

$$Q = \frac{2\pi k (\bar{p}_e - \bar{p}_w)}{\mu \ln r_e/r_w} \quad \text{[см. уравнение (12), гл. IV, п. 5]},$$

где p_e, p_w являются соответственно средними значениями давлений, которые поддерживаются на внешнем круговом контуре и на забое скважины.

Идя обратным путем, можно установить среднее значение давления $\bar{p}_e$ на окружности радиусом r_e, замыкающей скважину, если известно давление p_w на данной скважине, имеющей текущий дебит Q, из соотношения:

$$\bar{p}_e = \frac{Q\mu \ln r_e/r_w}{2\pi k} + \bar{p}_w \quad \text{[см. уравнение (13), гл. IV, п. 5]}.$$

Если известно давление в некоторой точке (x, y), то среднее давление по кругу, у которого данная точка является центром и который не содержит в себе скважин или иных источников и стоков жидкости, должно равняться этому давлению в центре [см. уравнение (11), гл. IV, п. 16].

С другой стороны, если внешний контур области не представляет окружности или не концентричен боковой поверхности скважины, то расходы жидкостей в скважину или из нее определяются приложением функции Грина или методом конформных отображений. На основании общих соображений расход может быть выражен уравнением:

$$Q = \frac{2\pi k \Delta p}{\mu \ln c/r_w} \quad \text{[см. уравнение (6), гл. IV, п. 16]},$$

где Δp — перепад давления, существующий между скважиной радиусом r_w и внешним контуром, а c — константа, зависящая от формы внешнего

---

[1] Значение Q во всех этих уравнениях относится к расходу через единицу мощности песчаника.

контура, к значению которой можно приблизиться выбором соответствующего среднего расстояния скважины до контура. Так, если внешний контур представлен окружностью, но скважина расположена вне центра его даже на такую значительную величину, как половина радиуса кругового контура, то ошибка в величине расхода, которая получится, если принять c равным этому радиусу, будет менее 5% (см. гл. IV, п. 16 и фиг. 34). Вследствие логарифмической зависимостн дебита Q от длин, характеризующих размеры системы, даже приблизительный подсчет последних приводит в результате к весьма точным значениям для проектирования дебита Q.

Если система содержит более одного источника или стока и если ряды источников и стоков имеют каждый постоянное давление, то приложение теоремы Грина или общих соображений, которые обеспечивают применение теории функции Грина, показывает, что суммарный расход в системе прямо пропорционален перепаду давления между рядом источников и рядом стоков и проницаемости среды, в которой они расположены [см. уравнение (5), гл. IV, п. 16].

Если эффективный внешний контур, обеспечивающий питание скважины жидкостью, не является даже приблизительно круговым, то практической задачей является такой случай, когда внешний контур представлен бесконечным линейным источником питания. Аналитическая идеализация бесконечного линейного источника питания и единичной скважины соответствует наиболее простой задаче перемещения краевой воды, когда вода движется поступательно, образуя фронтальное продвижение и вытесняя нефть в скважину, расположенную вблизи водонефтяного раздела. Мы встречаемся с подобным явлением, рассматривая движение воды в артезианскую скважину, вскрывшую пласт песчаника, выходы которого открыты в канале или ложе реки и параллельны их берегам (см. фиг. 38). Решение этой задачи методом конформных отображений показывает, что текущий дебит скважины является таким же, какой можно получить из скважины, окруженной концентрическим круговым контуром питания при симметричном радиальном течении и при радиусе контура, равном двойному расстоянию скважины от линейного источника питания [уравнение (8), гл. IV, п. 7].

Если ложе реки или канала пересекает выход песчаника (см. фиг. 39), то источник питания жидкостью нельзя рассматривать больше как бесконечную линию, а вместо этого ее следует принимать как конечную линию питания. Такую систему можно подвергнуть рассмотрению методом сопряженных функций (гл. IV, п. 8), что приводит к системе конфокальных эллипсов для эквипотенциальных линий и софокусных гипербол для линий тока (см. фиг. 40). Разумеется, течение в скважину, вскрывшую пласт песчаника, получающего питание водой из такого конечного линейного источника, будет меньше по сравнению с тем случаем, когда источник питания будет иметь бесконечную длину. Это различие между ними становится незначительным, если скважина расположена очень близко к конечному линейному источнику питания. При решении этой задачи методом преобразования сопряженной функции установлено, что на любом заданном расстоянии от источника питания текущий дебит будет наибольшим, если скважина расположена на перпендикуляре, рассекающем пополам линейный источник, и будет уменьшаться по мере

того, как скважина перемещается по направлению к концам линейного источника и еще дальше.

Следующим типом плоской задачи является случай, когда течение осуществляется скорее в вертикальной, чем в горизонтальной плоскости. Такие явления возникают, когда течение обладает постоянной динамической характеристикой, простирающейся на значительные расстояния в горизонтальном направлении, например, при фильтрации под плотинами, длина которых велика по сравнению с их толщиной. Так как сила тяжести эквивалентна постоянному вертикальному градиенту давления, то для таких задач соответственной динамической переменной явится потенциал скорости[1] $\Phi = \frac{k}{\mu}(p - \gamma g y)$ в противоположность давлению p для горизонтальных плоских систем. Кроме того, линии тока в системе, когда течение вертикально, будут скорее ортогональны по отношению к кривым постоянного потенциала скорости, чем к кривым равного напора.

Однако с аналитической стороны эти задачи все же требуют решения плоского уравнения Лапласа [(3), гл. IV, п. 1]. Особенно интересные примеры этого типа плоских задач относятся к фильтрации под плотинами, длина которых велика по сравнению с шириной их оснований. Эти задачи включают в себя вопросы противодавления и опрокидывающих моментов у основания плотины, а также численного значения фильтрации. В большинстве практических случаев для решения первого вопроса достаточно принять мощность проницаемого слоя, залегающего в основании плотины, бесконечной и этим путем упростить анализ.

Если в основании плотины отсутствует забивная шпунтовая крепь, аналитическая задача становится эквивалентной случаю горизонтального течения из конечного линейного источника питания в пласт песчаника бесконечных размеров, при замене местами эквипотенциальных линий и линий тока в последней системе, и последующим поворотом горизонтальной плоскости в вертикальную. Давление в основании плотины распределяется по арккосинусу (см. фиг. 44), показывая, таким образом, большие градиенты со стороны пяты и носка основания плотины в противоположность обычно принимаемому линейному распределению давления. Однако суммарная опрокидывающая сила является той же самой, что при допущении линейного распределения давления, а именно равна среднему алгебраическому значению давления в пяте и носке основания плотины, помноженному на ширину последней.

С другой стороны, суммарный опрокидывающий момент всегда превышает величину, подсчитанную исходя из линейного закона распределения давления, и достигает завышения на 11% для давлений, имеющих нулевое значение в носке основания плотины. В том случае, если под основанием плотины имеется один ряд забивной шпунтовой крепи, задача может быть решена аналитическим путем, переведя геометрию системы в вид, тождественный плотине без забивной крепи. Это преобразование производится на основе теоремы Шварца Кристоффеля, которая дает формулу для отображения внешности любого многоуголь-

---

[1] Здесь принимается, что y представляет вертикальную ось, направленную вниз.

ника на комплексную полуплоскость и где контур полигона преобразуется в действительную ось комплексной плоскости (гл. IV, п. 11). Анализ показывает, что и в этом случае также существуют градиенты высоких давлений у пяты и носка основания плотины.

Следующим характерным вопросом, имеющим практический интерес, является падение давления через забивную крепь. Это падение давления уменьшается достаточно быстро, по мере того как увеличивается отношение ширины плотины к глубине забивки свай, но оно может достичь значительной величины при небольшом значении этого отношения. Когда глубина свай так же велика, как ширина плотины, и свайная крепь находится у пяты или носка ее основания, падение давления через свайную забивную крепь может достигать 72,8% от величины всего падения давления, имеющего место на протяжении всего основания плотины от пяты до ее носка (см. фиг. 50).

Когда забивная крепь находится в центре основания плотины, то соответственное падение давления между напором верхнего и нижнего бьефов вдоль основания плотины составит 70,5% всего перепада давления через плотину. Для больших отношений ширины плотины к глубине свай величина этого снижения достаточно высока, но все же это незначительное уменьшение процента является противоположностью тому выводу, что дает теория Бляя. В последней теории свайная крепь успешно заменяется дополнительной эквивалентной шириной основания, равной периметру свай, и падение давления вдоль всей растянутой „ползущей линии“ принимается линейным. Падение давления, обязанное наличию свай в упомянутой теории, пропорционально только глубине забивки свай, но не зависит от их местоположения. Непосредственным выводом из высоких перепадов давления через свайную крепь является то обстоятельство, что градиенты на всей остальной части основания плотины будут по необходимости малыми, уменьшая, таким образом, опасность разрушения основания плотины размывом песка вследствие высоких скоростей движения жидкости.

Что же касается суммарной величины сил противодавления для плотин со шпунтовыми сваями, теория указывает, что, за исключением тех случаев, когда сваи установлены непосредственно под центром плотины, забивная крепь может внести существенные изменения в величину этих сил. Так, для свай, глубина которых равна ширине плотины, сила противодавления уменьшается на 59% в том случае, если сваи находятся в пяте основания плотины, и увеличивается на ту же величину, если сваи установлены в носке плотины. Разумеется, этот эффект падает по мере того, как увеличивается отношение ширины плотины к глубине забивной крепи. В этом случае теория Бляя дает опять только приблизительные результаты. Значения суммарной силы противодавления, рассчитанные по этой теории, получаются ниже на 20% для свайной крепи у верхнего бьефа и выше на 6% у нижнего бьефа.

Однако влияние установки шпунтовых свай на величину суммарного опрокидывающего момента (относительно пяты плотины) не является симметричным относительно центра расположения крепи. Последняя уменьшает величину опрокидывающего момента, будучи установлена на расстоянии 62% ширины плотины от ее пяты, и увеличивает величину момента, будучи установлена на расстоянии 38% от ее ширины, считая

от носка плотины. Величина этих колебаний довольно значительна, особенно для небольших отношений ширины плотины к глубине свай. Если это отношение составляет единицу, то сваи, установленные в пяте основания, уменьшают величину суммарного опрокидывающего момента на 46% по сравнению с плотиной без свай. Если же сваи установлены в носке плотины, то опрокидывающий момент будет соответствовать 202,3% величины последнего для плотины без свай. В этом случае заключения теории „ползущей линии“ (Бляя) также отличаются от выводов правильной теории, ибо они дают слишком низкие значения опрокидывающего момента для свайной крепи, установленной на расстоянии 70% от пяты основания плотины, и слегка завышенные значения для местоположения свай в пределах 30% от носка плотины.

Теория „ползущей линии“ со стороны[1] количественных заключений является фактически неправильной. Вместе с тем линия ползучести жидкости, образованная основанием плотины и периметром свайной крепи, представляет собой ограничивающую линию тока жидкости. Действительно, если основание плотины всегда будет направлено вниз выпуклой стороной, эта ограничивающая линия является линией тока максимальной скорости. Однако для плотин со свайной крепью линиями тока максимальной скорости являются те, что следуют более короткими путями, пересекающими песчаник между низшими точками, достигаемыми сваями, и идущими непосредственно к носку плотины.

Аналитическая теория, развитая в настоящей главе, относилась своей количественной стороной только к плотинам с одним рядом свай. Влияние дополнительных шпунтовых рядов можно свободно вывести на основании более простых задач. Так, если представлены два ряда свай равной длины — один ряд в пяте основания плотины, а другой—в носке ее, или же они расположены симметрично по отношению к основанию плотины, то распределение давления под плотиной будет обладать симметрией относительно вертикальной плоскости, проходящей через центровую линию основания плотины (гл. IV, п. 16). В частности, эта центровая линия будет являться эквипотенциальной линией, величина которой будет равна среднеарифметическому потенциалу верхнего и нижнего бьефа. Разность потенциала между этой линией и двумя точками, симметрично расположенными относительно нее, будет одна и та же. Соответственно этому перепад давления у обеих свайных крепей будет одним и тем же. Кроме того, суммарная величина силы противодавления остается неизменной при наличии двух таких симметрично расположенных рядов свай. Абсолютная величина перепада давления через свайные крепи будет меньше по сравнению с тем случаем, когда под плотиной существует только один ряд свай. Разумеется, результирующий перепад будет больше, чем для

---

[1] Численное решение задачи о плотине с аналогичной забивкой крепи у пяты и носка плотины, основанное на уточненном методе Форхгеймера и заключающееся в дополнительном введении рядов Фурье к потенциалам, предложенным Форхгеймером, было дано в работе R. Hoffmann, Die Wasserwirtschaft, 1, 108, 1934.

В этой работе можно также найти описание экспериментов с песчаной моделью, которые удивительным образом подкрепляют распределение линий тока и потенциала, подсчитанное теоретическим путем.

одинарной забивной крепи той же самой длины. Если сваи у пяты и носка плотины имеют значительную длину, то промежуточные забивки свай создают в общем значительно меньшие перепады давления благодаря сравнительно небольшим градиентам вдоль основания плотины.

Однако во всех случаях, будет ли уменьшаться или увеличиваться значение опрокидывающей силы, ряды свай будут уменьшать величину градиентов давления и скоростей вблизи пяты и носка плотины. Таким образом, будет снижаться опасность размывания песка и разрушения плотины.

При изучении вопроса фильтрации под плотинами следует принять во внимание конечную мощность залегающих под ними проницаемых слоев, так как фильтрация будет иметь бесконечное значение даже для плотин со шпунтовыми рядами свай, если залегающие под ними проницаемые слои имеют бесконечную мощность. В то время как общий аналитический метод преобразования сопряженной функции является вполне достаточным для данного случая, а также для систем с бесконечной мощностью проницаемых слоев, конечность последних приводит в случае, где функции имели до того элементарный характер (гл. IV, п. 12), к преобразованиям эллиптической функции.

Среди косвенных выводов из этого анализа следует упомянуть общее подтверждение распределения давления в основании плотины, установленное ранее на основании более элементарной теории. Так, для плотины без шпунтовых свай конечная мощность проницаемого слоя не будет иметь значительного влияния на распределение давления, хотя бы мощность слоя была в несколько раз меньше по величине, чем ширина плотины (см. фиг. 44). В случае плотины со шпунтовыми сваями конечная мощность проницаемого слоя не будет особенно заметно влиять на перепад давления через свайную крепь, хотя бы сваи проникли в толщу проницаемого слоя более чем на 50% (см. фиг. 68). Однако расход при фильтрации в значительной степени определяется мощностью проницаемого слоя или, выражаясь более точно, отношением ширины плотины к мощности последнего. Этот расход непрерывно уменьшается от бесконечно больших до совершенно исчезающих значений по мере того, как это отношение увеличивается от нуля до бесконечности (см. фиг. 61). Положение шпунтового ряда свай влияет на величину расхода при фильтрации сравнительно в малой степени (см. фиг. 66). Расход при фильтрации симметрично уменьшается от максимального своего значения для свайной крепи, установленной в центре основания плотины, до минимума. Это приблизительно ниже на 9% для свайной крепи, установленной в пяте или носке плотины.

Как и следует ожидать, расход при фильтрации падает с увеличением глубины забивки свай. Однако это изменение достаточно мало, если только мощность залегающего проницаемого слоя не больше или того же порядка, что и ширина плотины. Во всех случаях расчеты приводят к довольно неожиданному выводу, что расход будет продолжать оставаться в пределах относительно высоких значений, пока глубина свай не возрастет до такого размера, что они будут находиться в непосредственной близости к подошве проницаемого слоя (см. фиг. 67). Так, когда ширина плотины равняется мощности последнего, а забив-

ная свайная крепь, находящаяся в центре основания плотины, проникает на 99% глубины слоя, расход при фильтрации будет все же составлять 25,3% величины его для того случая, когда шпунтовые сваи совершенно отсутствуют.

Если ширина плотины равняется пятикратной мощности проницаемого слоя, то расход фильтрации при глубине забивки свай, составляющей 99% мощности слоя, будет составлять 60,6% величины расхода по сравнению с тем случаем, когда шпунтовые сваи совершенно отсутствуют. Отсюда видно, что если установка свай у пяты или носка плотины даже на сравнительно умеренную глубину влияет в значительной степени на величину опрокидывающих усилий в плотине, то их влияние на величину расхода при фильтрации невелико, при условии, что сваи практически не заякорены в подошве проницаемого слоя. Даже щель в 7,5 *см* между подошвой проницаемого слоя мощностью в 7,5 *м* и нижним концом свай обеспечивает фильтрацию, величина которой может достичь 60% того значения, которое имело бы фильтрационное течение под плотиной, если бы в плотине вообще отсутствовали сваи. Кроме того, столь большая фильтрация через ограниченные каналы, повидимому, повлечет за собой высокие скорости жидкости, что может привести к серьезным осложнениям с движением песка.

Для подсчета величины расхода при фильтрации под перемычками или иными временными перекрытиями воды, имеющими небольшую толщину, и меняющуюся глубину котлована со стороны нижнего бьефа перемычки (гл. IV, п. 14) можно применить тот же аналитический метод, который ведет к решению задачи о расходе при фильтрации под плотинами с расширенным основанием. Как и следует ожидать, расчеты показывают, что расход при фильтрации увеличивается по мере того, как глубина котлована со стороны нижнего бьефа достигает глубины заложения перемычки (см. фиг. 71). Однако общее увеличение расхода при изменении глубины котлована со стороны нижнего бьефа с начала его углубления до того, как он достигнет основания водяной перемычки, невелико. Расход достигнет, например, роста в 56% при глубине проникновения перемычки, равной 50% мощности проницаемого слоя. Уменьшение величины расхода с увеличением вскрытия проницаемого слоя плотиной или водозакрывающей шпунтовой крепью в данном случае более характерно по сравнению с расходом при соответствующем изменении глубины свай для случая плотины, имеющей расширенное основание. С другой стороны, величина расхода при фильтрации продолжает сохранять высокие значения до тех пор, пока плотина или водонепроницаемая перемычка не будут фактически заякорены в водонепроницаемой горной породе.

Значения расходов при фильтрации, которые даются непосредственно анализом, $Q/\Delta\Phi$ исчислены на единицу падения потенциала между верхним и нижним бьефом плотины и на единицу длины последней. Если перевести их в величины практического значения, можно установить, что $Q/\Delta\Phi = 0{,}1$ эквивалентно расходу при фильтрации —3,47 *дцм*^{3}/*сек* под плотиною длиною в 30 *м* и разностью напора между верхним и нижним бьефом — 1 *am*. Когда будет замечено, что величина фильтрационного расхода с увеличением глубины установки свай или водо-

непроницаемой перемычки повлечет за собой значения $Q/\Delta\Phi$, равные или значительно превосходящие 0,1, для глубин коффердама или забивной крепи, равных 99% мощности проницаемого слоя, практическая необходимость в заякоривании сваи или водонепроницаемой перемычки в скальную породу становится неизбежной. Эти рассуждения и выводы относятся к системам, где среда принимается однородной и изотропной. Однако рассмотренный аналитический метод можно использовать также и для случая, когда песчаник однороден, но анизотропен, т. е. проницаемость его различна в различных направлениях. С этим вопросом встречаются обычно, когда сравниваются вертикальные течения через плоскости напластования с течениями, параллельными плоскостям напластования. Такие задачи можно решить методами потенциальной теории при условии, что системы координат будут соответственно преобразованы [уравнение (3), гл. IV, п. 15] так, чтобы привести уравнение распределения давления к виду уравнения Лапласа.

Следующей характерной особенностью плоских задач движения жидкости в пористой среде, о которой стоит упомянуть, является взаимозаменяемость эквипотенциальных линий и линий тока [уравнение (4), гл. IV, п. 8], представленных кривыми, вдоль которых происходит перемещение частиц жидкости [уравнение (7), гл. IV, п. 8]. Это взаимоотношение вытекает из того обстоятельства, что эквипотенциальные линии и линии тока образуют взаимно ортогональную сетку [уравнение (5), гл. IV, п. 8], где функции тока также удовлетворяют уравнению Лапласа [уравнение (4), гл. IV, п. 8]. Отсюда каждое решение уравнения Лапласа в двух измерениях представляет собой решения для двух отличных физических задач, где роли функции потенциала и тока взаимозаменяются.

Последняя теорема потенциальной теории, представляющая собой интерес при рассмотрении известных типов задач течения, относится к тому случаю, когда течение обладает геометрической плоскостью симметрии и граничные условия являются также симметричными относительно этой плоскости. При этом они симметричны скорее с внешней стороны, чем по их численным значениям. Тогда распределение потенциала и линий тока внутри системы будет также симметричным относительно этой плоскости при условии, что счет эквипотенциальных линий будет вестись по абсолютному значению их разности, считая от потенциала плоскости симметрии. Приведенные выше различные аналитические решения обнимают собой наиболее важные с практической стороны задачи о плоском течении. Однако следует заметить, что даже небольшие изменения в геометрии различных течений могут не только сделать недействительными первоначальные аналитические решения, но даже привести к непреодолимым математическим трудностям при выводе новых правильных решений. В таком случае следует прибегнуть к приближенным аналитическим методам или даже к не аналитическим, т. е. к эмпирическим решениям.

Образцы приближенных аналитических методов для решения задач о потенциале были развиты в процессе вывода доказательств существования решений уравнения Лапласа для заранее установленных граничных условий. Однако эти методы неприложимы в случае специальных

проблем. Один из действительных методов, имеющий очень широкое применение, базируется на том положении, что задача о решении дифференциального уравнения Лапласа при данных граничных условиях аналитически тождественна нахождению потенциала скорости, удовлетворяющего этим граничным условиям и обеспечивающего минимум величины кинетической энергии жидкости в системе [уравнение (2), гл. IV, п. 17].

Последняя задача может быть приближенно решена подбором в качестве потенциальной функции линейного сочетания частных функций, которые удовлетворяют граничным условиям, но не удовлетворяют уравнению Лапласа, т. е. методом Ритца, или же удовлетворяют уравнению Лапласа, но не граничным условиям, т. е. методом Трефтца. Подобрав такие ряды частных функций, приводим фактический процесс аналитического решения, необходимого для получения приближенного результата, к решению систем совместных линейных алгебраических уравнений для нахождения постоянных коэфициентов в линейных сочетаниях частных функций. Коэфициенты в этих алгебраических уравнениях представлены интегралами, которые включают частные функции и заранее установленные граничные значения, которые допускаются точным решением на контурах.

Менее совершенной методикой решения задач течения, которое с трудом подвергается точному анализу, является построение графическим путем распределения потенциала и линии тока. Сетки такого распределения могут быть получены с последовательно возрастающей точностью, следуя определенным правилам их построения, вытекающим из решения диференциальных уравнений. Когда такое графическое интегрирование уравнения Лапласа будет представлено в виде квадратной сетки эквипотенциальных линий и линий тока, то расход в системе на единицу падения величины потенциала будет представлен отношением числа квадратов, лежащих между двумя соседними эквипотенциальными линиями, простирающимися от одной граничной поверхности линии тока к другой, к числу квадратов, лежащих между двумя соседними линиями тока, простирающимися между контурами высокого и низкого потенциала [уравнение (9), гл. IV п. 17].

Для решения задач течения можно применить строго численные способы. Последние базируются на замене диференциального уравнения Лапласа в частных производных соответственным разностным уравнением [уравнение (10), гл. IV п. 17]. Последнее [(11), гл. IV, п. 17] можно решить в принципе алгебраическим путем. Для получения решения этого уравнения строго повторяющимися численными операциями была разработана методика, которая дает последовательно возрастающие по точности значения для потенциала в вершинах квадратной решетки, покрывающей внутренность системы потока. Наконец, можно совершенно избежать всех аналитических операций и изучать специфические проблемы течения с помощью экспериментов на моделях. Обычно пользуются экспериментами на песчаных моделях, чтобы дать непосредственную картину условий течения в отдельных случаях, но в действительности эти модели представляют собой лишь репродукции фактических течений в уменьшенном масштабе. Вряд ли можно считать, что эти опыты представляют собой приложение основных зако-

нов течения при обобщении основных элементарных экспериментов, устанавливающих закон Дарси. Весьма действенный эмпирический метод, который не требует возврата к применению песчаных моделей, покоится на аналогии между течением тока в электропроводящей системе и течением жидкости в пористой среде (гл. III, п. 6). При этом методе можно применять электролитические модели или модели, состоящие из полупроводников или металлических листов.

Главное преимущество электролитических моделей заключается в том, что они позволяют определить непосредственно распределение потенциала внутри пространственных систем, не имеющих симметрии относительно оси. Когда пространственная система имеет симметрию относительно оси, например, в случае несовершенной скважины, внутреннее распределение потенциала может быть установлено нанесением его на осевые плоскости плотных секционных моделей, изготовленных из обладающего высоким сопротивлением материала, например графита (гл. VIII, п. 10). Поверхности постоянного потенциала во всех электрических моделях представлены металлическими электродами.

В случае плоских систем можно получить электрическим путем на моделях с электролитной поверхностью видоизмененные аналоги экспериментов на песчаных моделях, где линии тока являются следами нагнетания красок в различных точках песка. Это может быть обеспечено применением растворов индикатора так, чтобы изменять цвет электролита, по мере того как ионы, являющие собой поступающую жидкость, движутся от нагнетательных электродов. Такие модели особенно полезны, чтобы показать графически движение нагнетаемой воды в различных процессах метода заводнения (гл. IX, п. 17).

Особенно удобным типом экспериментальной модели для изучения плоского течения является модель плоской проводящей поверхности (гл. IX. п. 21). Водонепроницаемые перемычки, например, линзы очень плотного песчаника, шунтовая свайная крепь или иные виды водяных преград, легко могут быть представлены путем вырезания из проводящей поверхности фигур, геометрически подобных рассматриваемым перемычкам.

Взаимозаменяя в таких моделях эквипотенциальные поверхности и линии тока, имеем, что нахождение и определение потенциалов в новой системе дает непосредственно линии тока первоначальной системы.

Хотя и не существует прямой электрической аналогии с гравитационным явлением, но последнее принимается внешне в расчет построением модели таким образом, что электрический потенциал является скорее аналогом потенциала скорости, чем давления жидкости. Однако этого совершенно недостаточно для гравитационных течений (глава V]), где жидкость не заполняет полностью пористую среду, но занимает только область, которая граничит в точках максимальной высоты по вертикали с поверхностью линии тока, вдоль которой давление имеет постоянную величину, так называемую „свободную поверхность“. Эта граничная поверхность заранее не известна, но может быть установлена опытным путем, вырезыванием модели таким образом, чтобы она соответствовала поверхности линии тока с постоянным давлением (гл. VI, п. 6). В дополнение к этому при изучении например, фильтрации воды через плотины, необходимо обеспечить по-

каз „поверхности фильтрации“, которая являет собой часть поверхности стока, вдоль которой давление имеет более постоянную величину, чем потенциал.

Так как постоянство давления влечет за собой линейное изменение потенциала, можно получить соответственные граничные условия на поверхности фильтрации, прикрепляя полоску проводника к поверхности модели, пропуская через него ток и создавая, таким образом, линейное изменение потенциала. Однако длина участка поверхности должна быть отрегулирована опытным путем так, чтобы соединить „свободную поверхность“ с ее верхним краем. Следует заметить, что, применяя любой тип экспериментальной модели, необходимо сохранить общее требование к ним, а именно, модель должна быть геометрически строго подобна физическому течению. Распределение потенциала и линий тока зависит только от формы модели, а не от ее абсолютных размеров, которые могут быть выбраны на основе удобства и точности. Суммарный расход через модель или при действительном течении будет пропорционален одному из абсолютных размеров; остальные же размеры будут входить в решение только в форме отношения. Фактически наиболее важные переменные, которые применяются при изучении систем одного и того же типа, но с постепенно изменяющейся геометрией, например, расход фильтрации под плотинами с изменяющейся глубиной забивной крепи, должен всегда выражаться отношением двух из имеющихся размеров: глубина свай, деленная на ширину плотины или на мощность проницаемого слоя (гл. IV, п. 13).

Глава пятая

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ (ТРЕХРАЗМЕРНЫЕ) ЗАДАЧИ

1. Введение. Многие задачи о движении жидкостей в пористой среде, имеющие практическое значение, можно с достаточным приближением свести к одному из видов плоского течения, проанализированных в предыдущей главе. Однако остаются иные задачи, имеющие также весьма серьезное значение, которые отличаются вполне определенным пространственным характером. Так, если скважина, вскрывшая продуктивный песчаник, полностью не проходит сквозь него, то течение в той части песчаника, которая не вскрыта забоем скважины, будет иметь компонент скорости, направленный вверх и влекущий жидкость в скважину. В верхней же части пласта песчаника течение будет попрежнему в значительной степени радиальным и будет иметь сравнительно небольшой компонент скорости по вертикали. Поэтому распределение давления в пласте песчаника будет изменяться по вертикальной координате, т. е. задача будет иметь пространственный (трехмерный) характер. По отношению к общим методам решения пространственных задач следует заметить, что все те методы, которые были рассмотрены нами в приложении к плоским системам (глава IV), за исключением только одного из них, имеют свои аналоги в том случае, когда в систему включается третья координата. Только метод сопряженных функций не имеет своего аналога для случая трехмерного уравнения Лапласа. Все же для решения практических задач мы находим, что имеющиеся в нашем распоряжении методы вполне достаточны для получения искомых результатов.

В настоящей главе мы будем иметь дело чаще всего с функцией потенциала:

$$\Phi = \frac{k}{\mu}\left(p - \gamma g z\right), \text{ [уравнение (3), гл. III, п. 3]} \quad (1)$$

а не с давлением p при условии, что пористая среда является изотропной. Ввиду того, что добавление вертикальной координаты сообщает силе тяжести возможность влиять на распределение давления, основным диференциальным уравнением будет уравнение Лапласа, отнесенное к Φ, и

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (2)$$

Разрешим теперь уравнение (2) для некоторых специальных случаев, имеющих практический интерес [1].

2. Сферическое течение. Вполне очевидно, что аналогом плоской задачи радиального потока (гл. IV, п. 2) является такой, где распределение потенциала и скорости зависит только от радиуса r в системе сферических координат. Так как общий вид уравнения Лапласа в сферических координатах (r, θ, χ)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial \chi^2}=0 \qquad (1)$$

[см. уравнение (6) гл. III, п. 7]
в случае сферического течения приводится к выражению

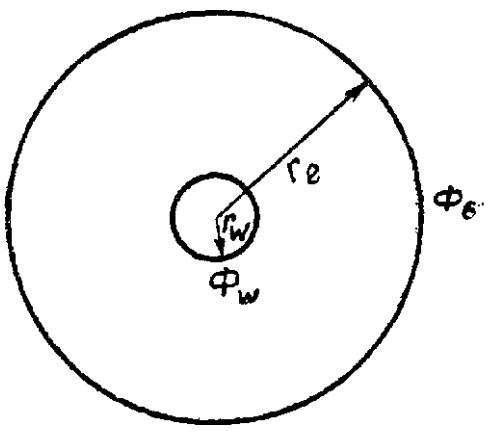
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)=0, \qquad (2)$$

то отсюда непосредственно следует, что

$$r^2\frac{\partial \Phi}{\partial r}=\text{const}=c_1, \qquad (3)$$

или

$$\Phi=-\frac{c_1}{r}+c_2. \qquad (4)$$



Фиг. 76.

Это выражение дает функцию общего распределения потенциала Φ при сферическом течении. Наиболее характерной особенностью его является изменение Φ обратно пропорционально радиусу r. Очевидно, это обстоятельство создает более резкую изменчивость, чем логарифмическая зависимость от r, характеризующая плоское радиальное течение [уравнение (6), гл. IV, п. 2]. Чтобы установить физическое значение обеих констант c_1 и c_2, следует только приложить уравнение (4) к специальному случаю, определяемому граничными условиями (фиг. 76):

$$\left.\begin{aligned}\Phi=\Phi_w:\quad r=r_w\\ \Phi=\Phi_e:\quad r=r_e\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Эти условия приводят к выражениям:

$$\Phi_w=-\frac{c_1}{r_w}+c_2;\qquad \Phi_e=-\frac{c_1}{r_e}+c_2,$$

так, что

$$\Phi=\frac{\Phi_e-\Phi_w}{\frac{1}{r_e}-\frac{1}{r_w}}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_w}\right)+\Phi_w. \qquad (6)$$

Теперь ясно, что Φ пропорционально разности потенциалов $\Phi_e-\Phi_w$ между сферическими контурами при r_e, r_w.

---

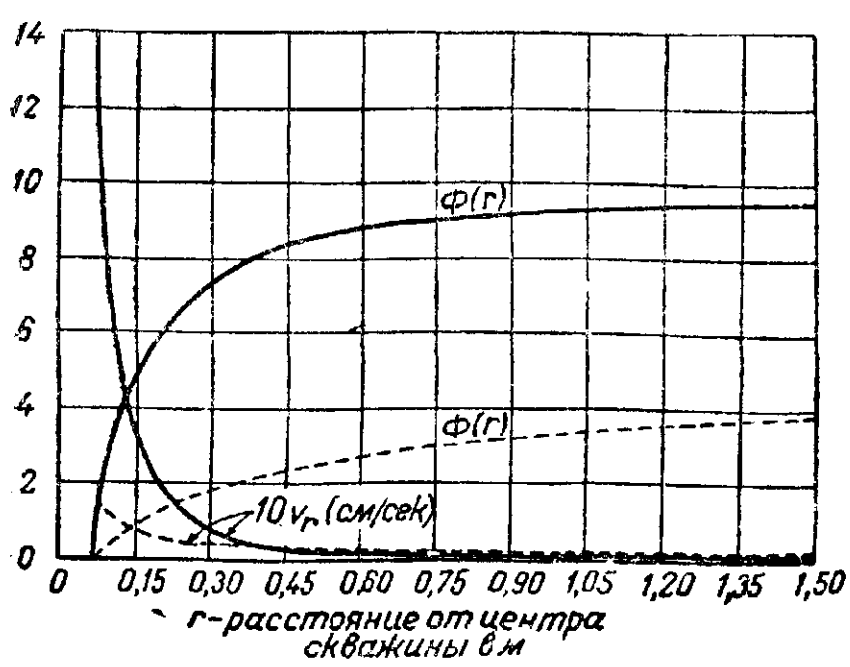
[1] Остальные задачи пространственного течения, включающие песчаники с неоднородной проницаемостью, или двухжидкостные системы будут рассмотрены в гл. VII, пп. 9 и 10 и гл. VIII, п. 10.

Скорость в системе получается, как обычно, диференцированием:

$$v_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\Phi_e - \Phi_w}{\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_w}} \frac{1}{r^2}, \tag{7}$$

и суммарное течение через систему дается выражением:

$$Q = -\int_0^{2\pi} d\chi \int_0^{\pi} r^2 \sin\theta \, v_r d\theta = \frac{4\pi (\Phi_e - \Phi_w)}{\frac{1}{r_w} - \frac{1}{r_e}}. \tag{8}$$



Фиг. 77. Распределение скорости (v_r) и потенциала (Ф) в сферической (сплошные кривые) и радиальной (пунктирные кривые) системах течения; $\Phi(r)$ принимается равным нулю при $r = 0{,}075$ *м* и 10 при $r = 1{,}5$ *м*.

Отсюда Φ и v_r могут быть переписаны в таком виде:

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{r_w} - \frac{1}{r}\right) + \Phi_w, \tag{9}$$

$$v_r = -\frac{Q}{4\pi r^2}. \tag{10}$$[1]

Из этих уравнений видно, что оба значения Φ и v_r изменяются прямо пропорционально расходу Q так же, как это имеет место в случае плоского течения [уравнения (11), (12), гл. IV, п. 2]. Однако их изменение в зависимости от r в последнем случае гораздо резче. Это можно наблюдать более отчетливо на кривых для Φ и v_r (фиг. 77) для случая, где

$$p_w = 0;\ p_e = 10\ am \text{ при } z = 0 \text{ и } \frac{k}{\mu} = 1,$$

так, что [2]

$$\Phi_w = 0;\ \Phi_e = 10;\quad r_w = 7{,}62\ см;\ r = 15240\ см;$$

---

[1] Как и в случае радиального течения, уравнение (10) может быть непосредственно получено из интегрируемой формы уравнения неразрывности, а именно:

$$Q = -4\pi r^2 v_r = \text{const}.$$

Интегрируя это выражение, где v_r заменено через $-\frac{\partial \Phi}{\partial r}$, приходим непосредственно к уравнению (9).

[2] Следует заметить, что косвенное установление граничных условий для Φ на основании заранее принятых значений давления, не является, повидимому, осложнением, неизбежно связанным с применением потенциальной функции Φ. Скорее это возникает из почти универсального образа представления о давлении как о количестве принципиальной физической значимости даже в пространственных системах. В действительности, когда принимается во внимание сила тяжести, основное значение приобретает потенциальная функция, хотя оба они — давление и Φ — удовлетворяют уравнению Лапласа. Если принять в вышеуказанной системе, что давление постоянно на контуре $r = r_w, r_e$, то его распределение примет вид (6), и отсюда система будет сферически симметрична. Однако распределение скорости не будет более при этом радиальным, и система в целом и в действительности не будет сферически симметричной.

отсюда

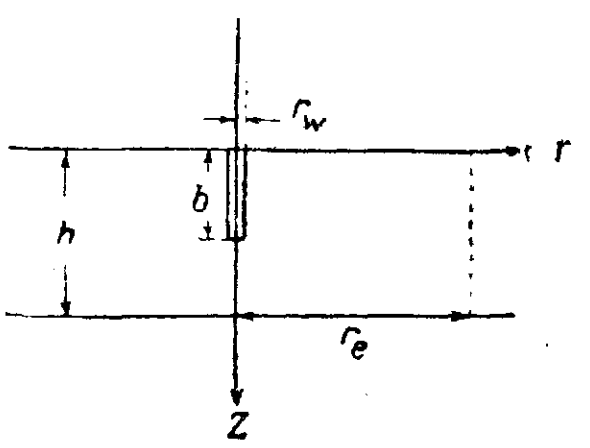
$$\Phi = 10{,}005 - \frac{76{,}24}{r},$$

$$v_r = -\frac{76{,}24}{r^2}\ см/сек;\ Q = 958\ см^3/сек.$$

Сравнение с пунктирными кривыми, которые относятся к случаю радиального течения при тех же самых граничных условиях, указывает что высокие градиенты потенциала в случае сферического течения локализуются с гораздо более высокой концентрацией вблизи контура малого радиуса по сравнению с заведомо высоко концентрированной областью больших градиентов при радиальном течении. Следующее по важности различие заключается в значении величины Q. Так, для практических случаев, когда $r_w \ll r_e$, уравнение (8) приводится к следующему виду:

$$Q \cong 4\pi (\Phi_e - \Phi_w) r_w, \qquad (11)$$

где расход изменяется в зависимости от r_w, в то время как при радиальном течении Q изменяется гораздо медленнее по логарифмической зависимости [уравнение (10), гл. IV, п. 2]. Кроме того, уравнение (11) показывает, что расход при сферическом течении независим от радиуса внешнего контура, поскольку этот радиус велик по сравнению с r_w. Следует напомнить, что при радиальном течении Q изменяется логарифмически в зависимости и от радиуса внешнего контура и от радиуса самой скважины.



Фиг. 78. Схематическое изображение скважины с частичным вскрытием пласта забоем (несовершенной).

Практическое значение проблемы сферического течения заключается в том, что последнее соответствует скважине малого радиуса, только вскрывшей относительно мощный пласт песчаника. Это соответствие явится специальным предметом анализа ближайшего раздела (фиг. 78). Разумеется, само уравнение (11) показывает, что Q не зависит от радиуса внешнего контура и отсюда от фактической формы последнего при условии, что радиус внешнего контура велик по сравнению с радиусом скважины[1]. Иными словами, если участок поверхности, представляющий забой скважины, невелик по сравнению с поверхностью внешнего контура, ни одна часть которого не прилегает близко к поверхности скважины, можно заменить скважину небольшой сферической полостью. Течение в нее можно принять сферическим, вне зависимости от детальной формы самой скважины или внешней оконтуривающей поверхности.

---

[1] Допущение постоянства потенциала Φ_e на внешнем контуре может быть также опущено, если в уравнениях (8) и (11) Φ_e заменить усредненной величиной фактического потенциала на внешнем контуре. Этот вывод можно получить путем, совершенно аналогичным тому, что был выведен в гл. IV, п. 5 для плоского течения. Ряд Фурье, который был использован для последнего, заменяется в данном случае соответствующими функциями — сферическими гармониками — полярных и азимутальных углов θ и χ (см. Byerly, гл. VI).

Следует упомянуть, что на практике, когда скважина только вскрывает пласт песчаника, поверхность забоя скважины фактически представлена полусферой. Тогда расход будет составлять только половину от своего значения в уравнениях (8) и (11), а в (9) и (10) величина $\frac{Q}{4\pi}$ должна быть заменена на $\frac{Q}{2\pi}$.

Наконец, представляет интерес сравнить эффективность скважины, работающей при сферическом течении, со скважиной, работающей при радиальном течении, при том же самом падении потенциала $\Delta\Phi$. Обозначая текущий дебит в первом случае через Q_s, а во втором случае через Q_r, видно, что полученные ранее выводы дают следующее соотношение:

$$\frac{Q_s}{Q_r} = \frac{r_w}{h} \ln \frac{r_e}{r_w}, \qquad (12)$$

где h — мощность пласта песчаника при радиальном течении. Для численного примера, рассмотренного выше, следует, что:

$$\frac{Q_s}{Q_r} = \frac{0{,}57}{h},$$

где h — в *м*.

Таким образом, для пласта песчаника мощностью 15 *м* радиальное течение будет давать дебит в 25 раз больший по сравнению со сферическим течением, при условии, что фонтанирование происходит при одном и том же падении потенциала. В свете различных величин текущих дебитов при радиальном течении — для совершенных скважин и при сферическом течении — для несовершенных скважин становится ясным, что единственным условием, при котором вполне преднамеренно решают вести эксплоатацию скважин с помощью последнего вида течения, будет таков, когда нефтяная зона подстилается подошвенными водами. Тогда трудности, связанные с водяным конусообразованием, удерживают от слишком больших величин вскрытия пласта забоем скважины (гл. VIII, п. 10).

3. Несовершенные скважины. Распределение потенциала. Как это видно из рассмотрения, приведенного в предыдущем разделе, радиальное течение, соответствующее скважине, полностью вскрывшей пласт песчаника, и сферическое течение, отражающее случай, когда скважина вскрыла только верхнюю поверхность пласта песчаника, не могут быть использованы достаточно удовлетворительно для изложения положения, когда величина вскрытия пласта забоем скважины является не полной или исчезающе малой. Ввиду того, что условие частичного вскрытия пласта встречается на практике очень часто, дадим в общих чертах анализ этой проблемы, опустив, однако, численные подробности решения[1].

---

[1] Muskat M., Physics, 2, 329, 1932. Решение, которое приводится в цитируемой работе, дается в значениях аналогичной электрической проблемы, где электрод проникает частично в большой цилиндрический диск. Аналогия рассматриваемой задачи с цитируемой вытекает непосредственно из тождества граничных условий [уравнение (2) — ниже] этих двух систем (см. также A. F. Samsioe, Zeits. angew. Math. und Mechaniks, 11, 124, 1931).

Допустим, что скважина симметрично расположена по отношению к окружающему ее пласту песчаника, на контуре которого значение потенциала поддерживается постоянным. Тогда система будет радиально симметричной и естественными координатами системы будут цилиндрические координаты. Особо будет допущено, что скважина радиусом r_w вскрывает песчаник мощностью h до глубины b. С внешней стороны песчаник оконтурен окружностью $r = r_e$, концентричной скважине, а с кровли и подошвы отделен водонепроницаемыми пластами (фиг. 78).

Аналитически эта задача может быть сведена к нахождению решения Φ в системе уравнений:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}=0, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} v_z &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z}=0; \quad z=0,\ h \\ \Phi &= \text{const} = \Phi_w: \quad r=r_w, \quad z \leqslant b \\ \Phi &= \text{const} = \Phi_e: \quad r=r_e \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Первое из уравнений (2) соответствует условию, при котором жидкость не будет проходить через верхнюю и нижнюю поверхность песчаника, так как он перекрыт непроницаемыми слоями. Второе граничное условие показывает, что на поверхности забоя скважины поддерживается постоянство потенциала, как будто скважина полна жидкости по крайней мере до кровли песчаника. Третье условие повторяет допущение, что внешний контур песчаника сохраняет постоянство потенциала.

Отправным пунктом при анализе может явиться одно из следующих направлений.

Можно получить формальное решение уравнения (1) непосредственно в виде ряда или интеграла бесселевых функций с коэфициентами, подобранными так, чтобы они удовлетворяли уравнению (2). Можно применить также менее изящный метод конформных отображений, который в данном случае явится более подходящим для численных операций.

Чтобы облегчить рассмотрение этой задачи, в данном случае будет принят метод конформных отображений. Другой же метод будет использован в более трудной задаче переслаивающихся горизонтов (гл. VII, п. 9).

Раньше, чем мы приступим к анализу, введем для удобства единицу длины, которая равняется двойной мощности песчаника h. Тогда переменные могут быть представлены следующими выражениями:

$$\varrho=\frac{r}{2h}; \quad w=\frac{z}{2h}; \quad x=\frac{b}{2h}; \quad \varrho_w=\frac{r_w}{2h}; \quad \varrho_e=\frac{r_e}{2h}. \tag{3}$$

Вполне очевидно, что уравнение (1) не изменяется от этого преобразования.

---

[1] Хотя уравнение (1) представляет собой только зависимость двух независимых переменных (r, z), его нельзя рассматривать как уравнение Лапласа в двух измерениях, если только его нельзя преобразовать в основной вид уравнения (1), гл. IV, п. 1. Для примера можно сравнить уравнение (1) с (1), гл. IV, п. 2, которое является двухмерным уравнением Лапласа.

Чтобы применить теперь метод конформных отображений, следует заметить сначала, что частным решением уравнения (1) является функция:

$$d\Phi = \frac{q\,d\alpha}{\sqrt{\varrho^2 + (w-\alpha)^2}}, \tag{4}$$

которая с физической стороны представляет собой элементарный источник жидкости[1] с напряжением $q\,d\alpha$, расположенный вдоль оси w на расстоянии α от кровли песчаника. Возвращаясь к рассуждениям последней главы, где скважины в двухмерных задачах были заменены точечными источниками или стоками, расположенными в центре скважины, видно, что в случае пространственной задачи вполне естественно распространить замену скважины размещением непрерывных источников или стоков вдоль оси скважины от кровли песчаника до крайней точки забоя скважины.

В свете указанных представлений можно сделать попытку решить поставленную задачу интегрированием уравнения (4) относительно α в пределах от 0 до x, приняв q, имеющую функциональную зависимость от α так, что будут удовлетворяться граничные условия уравнения (2). Однако будет более удобным развивать решение этап за этапом, которые удовлетворят последовательным путем различные граничные условия.

Сначала мы найдем решение, которое удовлетворяет первому из граничных условий уравнения (2), т. е. отсутствию течения жидкости через стратиграфические поверхности песчаника. Чтобы получить это решение, удобнее всего воспользоваться методом конформных отображений.

Следуя процедуре, аналогичной той, что была приведена в гл. IV, п. 9, легко установить, что условие нулевого расхода через граничные плоскости $\left(w = 0, \frac{1}{2}\right)$ может быть удовлетворено суперпозицией бесконечного ряда элементов течения, размещенных в точках $(0, \pm n, \pm \alpha)$, где n изменяется от нуля до ∞ (фиг. 79). Результирующий потенциал фронта этого течения является простой суммой потенциалов отдельных его элементов и отсюда равен величине:

$$d\Phi = q\,d\alpha \left\{ \frac{1}{[\varrho^2 + (w-\alpha)^2]^{1/2}} + \frac{1}{[\varrho^2 + (w+\alpha)^2]^{1/2}} + \right.$$
$$+ \sum_1^\infty \left[\frac{1}{\{\varrho^2 + (n+w-\alpha)^2\}^{1/2}} + \frac{1}{\{\varrho^2 + (n+w+\alpha)^2\}^{1/2}} + \right.$$
$$\left. \left. + \frac{1}{\{\varrho^2 + (n-w-\alpha)^2\}^{1/2}} + \frac{1}{\{\varrho^2 + (n-w+\alpha)^2\}^{1/2}} \right] \right\}. \tag{5}$$

---

[1] С физической точки зрения элемент скважины, дренирующей пласт, соответствует скорее стоку, чем источнику. Однако мы сохраняем последнее понятие, потому что при этом избегается повторное применение отрицательных значений коэфициентов плотности расхода q.

С формальной стороны первый этап задачи решен. Однако уравнение (5) в представленном виде совершенно непригодно для численной обработки. Поэтому его следует преобразовать в такой вид, который можно было использовать для интересующей нас области. Чтобы подсчитать величину $d\Phi$, как это дается уравнением (5), для небольших значений ϱ, т. е. в области, близко расположенной к скважине, можно разложить каждый член в уравнении (5) в степенной ряд относительно ϱ. После небольших преобразований найдем, что

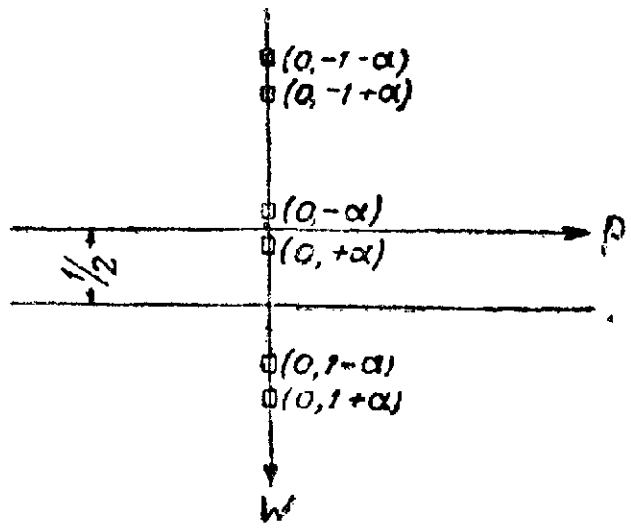
$$d\Phi = qd\alpha \left\{ \frac{1}{[\varrho^2 + (w-\alpha)^2]^{1/2}} + \frac{1}{[\varrho^2 + (w+\alpha)^2]^{1/2}} - \right.$$
$$-\psi(1-w-\alpha) - \psi(1-w+\alpha) - \psi(1+w+\alpha) - \psi(1+w-\alpha) -$$
$$-{}^1/_2\varrho^2 [\zeta(3,1-w-\alpha) + \zeta(3,1+w+\alpha) + \zeta(3,1-w+\alpha) +$$
$$+\zeta(3,1+w-\alpha)] + {}^3/_8\varrho^4 [\zeta(5,1-w-\alpha) + \zeta(5,1+w+\alpha) +$$
$$\left. +\zeta(5,1-w+\alpha) + \zeta(5,1+w-\alpha)] \right\}, \qquad (6)$$

где ψ — функция, определяемая членами функции Γ из выражения[1]:

$$\psi(y) = \frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)} = -0{,}5772 - \frac{1}{y} +$$
$$+ \lim_{n\to\infty} \sum_1^n \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{y+m} \right),$$

и

$$\zeta(s,y) = \sum_0^\infty \frac{1}{(n+y)^s}.$$



Фиг. 79. Ряд конформных отображений для скважины с частичным вскрытием пласта.

Для больших значений ϱ, т. е. порядка 1, уравнение (6) сходится очень медленно. Однако установлено, что прямое решение уравнения Лапласа для системы, состоящей из комплекса отображений $(0, \pm n \pm \alpha)$, особенно пригодно для этой цели. Оно дается выражением:

$$d\Phi = 4qd\alpha \left[2 \sum_1^\infty K_0(2n\pi\varrho) \cos 2n\pi w \cos 2n\pi\alpha + \ln \frac{2}{\varrho} \right], \qquad (7)$$

где K_0 — функция Ганкеля нулевого порядка[2]. Так как эта функция для больших значений аргумента уменьшается экспоненциально, то одного или двух членов ряда в уравнении (7) достаточно для всех случаев и даже для значения ϱ, достигающего 0,5[3]. Ряды уравнений (6) и (7)

---

[1] Whittaker and Watson, глава XII.

[2] Whittaker and Watson, стр. 373.

[3] Трудность суммирования этого ряда для малых значений ϱ заключается в том, что K_0 становится логарифмической бесконечностью, по мере того как ϱ приближается к нулю.

являются потенциальными функциями, показывающими эффект единичного элемента расхода $qd\alpha$ в точке $(0, \alpha)$ и его отображений. Чтобы получить значение потенциала в зависимости от всей скважины или глубины b, необходимо распределить эти элементы вдоль всей длины скважины, т. е. уравнения (6) и (7) следует проинтегрировать по α от $\alpha=0$ до $\alpha=x=b/2h$.

Полагая, что напряжение источника постоянно вдоль всей скважины, можем выразить конечные результаты так:

для малых значений ϱ

$$\Phi = q\left\{-\ln\frac{\Gamma(1+w+x)\cdot\Gamma(1-w+x)}{\Gamma(1-w-x)\,\Gamma(1+w-x)}+\ln\frac{w+x+[\varrho^2+(w+x)^2]^{1/2}}{w-x+[\varrho^2+(w-x)^2]^{1/2}}-\right.$$
$$-{}^1/_4\varrho^2[\zeta(2,1-w-x)-\zeta(2,1-w+x)+\zeta(2,1+w-x)-$$
$$\left.-\zeta(2,1+w+x)+0(\varrho^4)\right\}; \qquad (8)$$

для больших значений ϱ

$$\Phi = 4q\left[\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty\frac{1}{n}K_0(2n\pi\varrho)\cos 2n\pi w\sin 2n\pi x + x\ln\frac{2}{\varrho}\right]. \qquad (9)$$

Эти выводы слишком далеки от целевой установки получить решения, определяющие отсутствие течения через стратиграфические поверхности песчаника. Чтобы установить, являются ли полученные решения конечным ответом задачи, представленной уравнениями (1) и (2), необходимо подвергнуть их проверке и определить, удовлетворяют ли они последним граничным условиям уравнения (2). Рассматривая сначала требование постоянства Φ при $r=r_w$, из уравнения (9) видно. что если это условие и не удовлетворяется полностью[1], то изменением Φ в зависимости от w или z для $\varrho \geqslant 1$ можно пренебречь со всей безопасностью для всех практических целей. Это обстоятельство связано с тем, что для $\varrho \geqslant 1$, $K_0(2n\pi\varrho)$ гораздо меньше, чем $x\ln\frac{2}{\varrho}$, (за исключением специальных случаев $\varrho\sim 2$), так что может быть опущен из решения весь тригонометрический ряд.

Остается посмотреть, удовлетворяют ли уравнения (8) и (9) конечному граничному условию, что Φ постоянно по всей поверхности забоя скважины, т. е. для $\varrho=\varrho_w$, $w \leqslant x$. Расчеты, основанные на решении уравнения (8), приводят к результатам, которые даются пунктирными кривыми на фиг. 80. Очевидно, это условие не удовлетворяется и необходимо видоизменить полученное решение. Действительно, неболь-

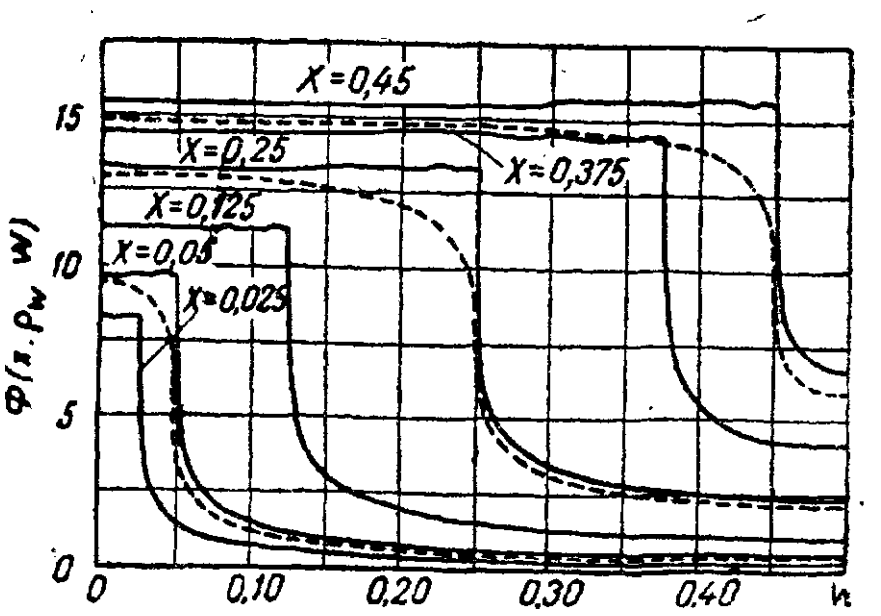
---

[1] Строгое постоянство Φ на внешнем радиусе $\varrho=\varrho_e$ контура можно получить простым путем, заменяя в уравнениях (7) и (9) члены $K_0(2n\pi\varrho)$ через

$$K_0(2n\pi\varrho) - K_0(2n\pi\varrho_e)\,I_0(2n\pi\varrho)/I_0(2n\pi\varrho_e),$$

где I_0 — бесселева функция 3-го рода нулевого порядка, которая в противоположность K_0 становится экспоненциально большой для больших значений аргументов и равняется единице для нулевого значения аргумента. Однако для практических целей добавленный член будет иметь маловажное численное значение.

шое рассуждение показывает, что, приняв постоянство плотности расхода $q(\alpha)$ при выводе уравнений (8) и (9), не следует ожидать, что принятое допущение даст точную картину рассматриваемой проблемы. Дело в том, что в дополнение к обычному распределению течения радиального характера, поступающего через каждую единицу длины вдоль всей поверхности забоя скважины, нижняя часть скважины получает бо́льшую часть своего дебита из песчаника, не вскрытого скважиной. Этот дополнительный расход будет не просто поступать в конечную точку забоя скважины, но будет распределяться вдоль нижней части последнего, разумеется, с большей концентрацией в направлении фактической ее оконечности. С этой точки зрения исправление недостатка в постоянстве распределения потенциала по поверхности забоя скважины, повидимому, заключается в том, чтобы отбросить допущение постоянства плотности расхода $q(\alpha)$ и выбрать такое распределение его, чтобы потенциал скважины был постоянным. Однако точный подбор величины $q\alpha$ влечет за собой аналитические трудности для скважин с конечным радиусом. Когда же радиус скважины становится исчезающе малым, можно показать, что в целом $q(\alpha)$ будет пропорционально потенциалу скважины в α, за исключением оконечности последней, где величина $q\alpha$ должна быть удвоена. Для скважины с конечным радиусом можно определить $q\alpha$, разбивая его на отдельные прерывные элементы и выравнивая их напряжения, пока не будет установлено, что потенциал на поверхности забоя скважины стал постоянным в пределах желаемой высокой точности. Сплошные кривые на фиг. 80 показывают результаты такого выравнивания. Конечные потенциалы в этом случае имеют максимальные отклонения от среднего значения —2%. Пунктирные кривые представляют невыравненные потенциалы, т. е. для распределения с постоянной плотностью потока. Требуемые плотности расхода для этого выравнивания резко возрастают (на 45%) по мере приближения к оконечности скважины, и избыток жидкости, поступающий в фактические забои скважин, может быть представлен точечными источниками, помещенными в центре забоев.



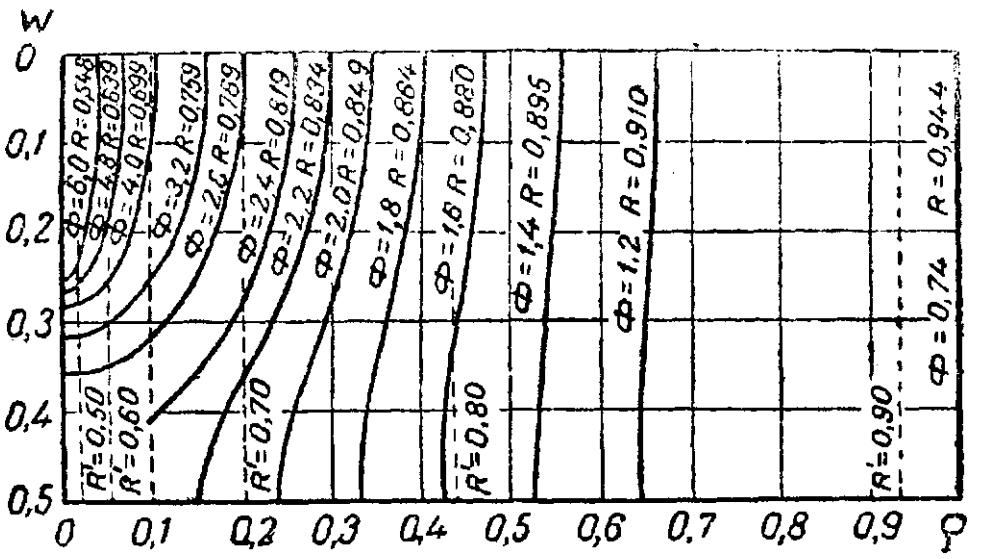
Фиг. 80. Распределение потенциала на поверхности забоя скважины ($\varrho_w = 0{,}001$), как функция глубины w, после выравнивания распределения плотности расхода:

x — (глубина вскрытия) / (2 × мощность песчаника); пунктирные кривые дают неотрегулированное распределение.

На фиг. 81 показано результативное распределение потенциала в песчанике для скважины, вскрывшей пласт на 50%, и радиусом, равным 1/500 мощности песчаника.

Характер концентрированного падения потенциала у скважины показан значениями R, которые выражают собой часть суммарного падения потенциала в пласте песчаника. Сравнивая эти величины с соот-

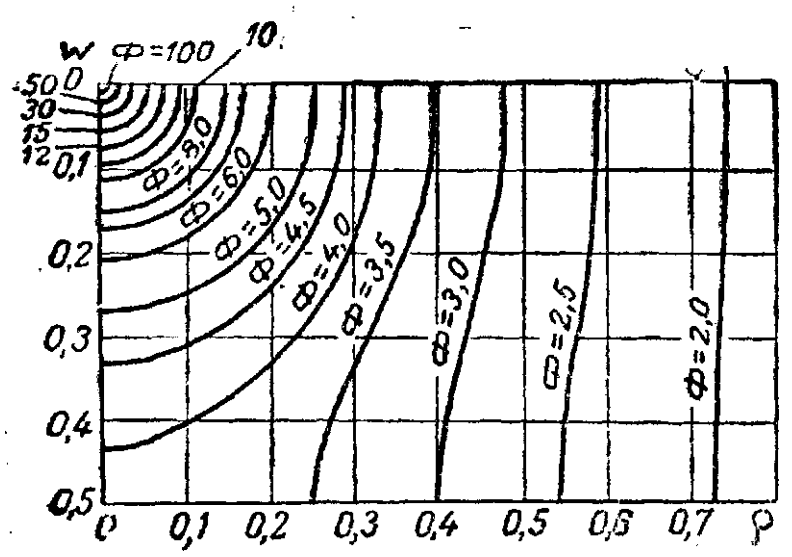
ветствующими параметрами для строго радиального течения, показанными на фиг. 81 пунктиром для эквипотенциальных линий и дробных значений R', становится очевидной их более резкое сгущение для несовершенной скважины. Однако следует заметить, что эквипотенциальные



Фиг. 81. Распределение потенциала относительно скважины с радиусом 0,075 *м* и 50% вскрытием 37,5 *м* песчаника:

R — доля общего падения потенциала в подземном резервуаре радиусом 152,5 *м*. Пунктирные кривые и *R'* соответствуют системе строго радиального течения и совершенной скважине. Единица замеренного расстояния — 2 × мощность песчаника.

линии для случая частичного вскрытия пласта быстро заменяются на радиальный тип, и их с трудом можно отличить от соответствующих параметров радиального течения на расстоянии от скважины, не превышающем двойной мощности песчаника[1]. Повидимому, с глубиной вскрытия последнего этот переход на радиальный характер станет еще более резким.



Фиг. 82. Распределение потенциала у «несовершенной» скважины.

На фиг. 82 приводится соответствующая система эквипотенциальных линий для другого крайнего случая, когда скважина только вскрывает кровлю песчаника, т. е. когда в выше рассмотренных уравнениях $x \sim \varrho_w$. Следует заметить, что в этом случае эквипотенциальные линии, как и следует ожидать, очень близки к сферической форме вблизи скважины. С отступлением на некоторое расстояние от скважины эквипотенциальные линии снова, как и раньше, выполаживаются и принимают радиальный характер. Конечно, это происходит не так резко, как в том случае, когда скважины фактически вскрывают песчаник на значительную часть его мощности.

---

[1] Это обстоятельство служит подтверждением вышеупомянутого замечания, что решение, которое дается уравнением (9), автоматически удовлетворяет последнему условию уравнения (2). Вместе с тем нами не было сделано вполне определенной попытки выразить это положение точным образом.

4. Текущие дебиты несовершенных скважин. В последнем разделе был рассмотрен характер распределения потенциала у скважин, вскрывших пласт песчаника неполностью. Эта характеристика, являющаяся качественной, важна для правильн го представления о механизме течения в несовершенной скважине. Однако на практике обычно сталкиваются с вопросом количественного определения эксплоатационных дебитов, которые можно ожидать в таких системах. Для решения этой задачи применим методику анализа последнего раздела.

На первоначальном этапе рассмотрения текущих дебитов явится полезным обосновать более тщательно интерпретацию плотности расхода q, входящей в уравнения последнего раздела. Это устанавливается непосредственным подсчетом фактического расхода несовершенной скважины при постоянстве значения величины q. Так, используя уравнение (9), гл. V, п. 3, и беря определения для ϱ и w из (3), гл. V, п. 3, получаем в результате:

$$Q = -4\pi h \int_0^{1/2} \varrho \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho}\, dw = 8\pi h q x = 4\pi q b, \qquad (1)$$

ибо члены ряда в уравнении (9), гл. V, п. 3, обращаются при интегрировании в нуль. Отсюда видно, что величина q равна $^1/_4\pi$ реального потока в скважину на единицу длины обнаженной части ее продуктивного горизонта[1].

Для того чтобы получить постоянство потенциала на поверхности забоя скважины, необходимо принять плотность расхода q за переменную и получить его приближенное значение суперпозицией отдельных элементов течения, имеющих напряжения q_m, развитых до глубин[2] x_m'. Для этого случая Q будет, очевидно, определяться выражением:

$$Q = 8\pi h \sum q_m x_m, \qquad (2)$$

так как величина потенциала дается суммированием членов, например, уравнения (9), гл. V, п. 3. Для расстояний от скважины порядка величины мощности пласта песчаника или более того можно, как уже было отмечено, с достаточно близкой степенью приближения опустить весь ряд в уравнении (9) гл. V, п. 3, и переписать его, приняв q за положительную величину, например:

$$\Phi = -4qx \ln \frac{2}{\varrho}.$$

Для случая суперпозиции элементов течения потенциал для $\varrho \gg 1$ можно написать, на основании уравнения (2), так:

$$\Phi = -4 \sum q_m x_m \ln \frac{2}{\varrho} = -\frac{Q}{2\pi h} \ln \frac{2}{\varrho}. \qquad (3)$$

---

[1] Было принято изменение знака q в уравнении (9), гл. V, п. 3, для того, чтобы сделать забой скважины поверхностью стока песчаника.

[2] Согласно этому представлению сначала помещают участок максимальной плотности расхода, распространяющийся до забоя скважины ($x_m = x$), а затем последовательно накладывают более короткие элементы с противоположными плотностями тока, пока не будет получено распределение потенциала, характера, указанного на фиг. 80.

Обозначая совершенно точно потенциал на поверхности забоя скважины через Φ_w, имеем между скважиной и величиной ϱ разницу в Φ, которая составляет ~ 1, определяемую следующим выражением:

$$\Delta\Phi = \frac{Q}{2\pi h}\left(\frac{-\Phi_w}{4\sum q_m x_m} - \ln\frac{2}{\varrho}\right) \qquad (4)^1$$

Наконец, установив, что $\Delta\Phi$ относится ко всей величине перепада суммарного потенциала между скважиной радиусом ϱ_w и внешним контуром пласта песчаника радиусом ϱ_e, возвращаясь к первоначальным единицам длины и обозначая мощность песчаника через h получаем величину текущего дебита в единицу времени из следующего выражения:

$$Q = \frac{-2\pi h \Delta\Phi}{\dfrac{\Phi_w(r_w)}{4\sum q_m x_m} + \ln\dfrac{4h}{r_e}}. \qquad (5)$$

Чтобы использовать эту формулу, необходимо в дополнение к заранее принятым физическим константам r_w, r_e и h знать величины Φ_w и $\sum q_m x_m$. Это требует, как уже было замечено в предыдущем разделе, эмпирического выравнивания элементов тока, а этот процесс является весьма трудоемким. Тем не менее эта операция была проделана для двух случаев, где $\varrho_w = 1/600$ и $\varrho_w = 1/1000$, т. е. для песчаника мощностью 22,5 и 37,5 *м* и радиусе скважины 7,5 *см*. Положив в основу эти параметры, было установлено, что получающееся в результате этого приближенное решение даст значения с точностью до 0,5%. Таким образом, можно принять плотность тока на забое скважины постоянной и тогда взять потенциал Φ_w как „среднеэффективную величину", во что он и обращается на расстоянии $^3/_4$ интервала от кровли песчаника до забоя скважины.

Чтобы получить приближенную формулу, можно заменить в уравнении (5) член $\sum q_m x_m$ через q_x и Φ_w значением Φ из уравнения (8), гл. V, п. 3, при $w = {}^3/_4\, x$. Опуская члены порядка ϱ^2, находим, что

$$Q = \frac{2\pi k h\, \Delta p/\mu}{\dfrac{1}{2h}\left\{2\ln\dfrac{4h}{r_w} - \ln\dfrac{\Gamma(0{,}875\,\bar{h})\,\Gamma(0{,}125\,\bar{h})}{\Gamma(1-0{,}875\,\bar{h})\,\Gamma(1-0{,}125\,\bar{h})}\right\} - \ln\dfrac{4h}{r_e}}, \qquad (6)^2$$

---

[1] Можно сравнить это выражение с соответствующим выводом для строго радиального течения, который согласно уравнению (11), гл. IV., п. 2, тождественен выражению:

$$\Delta\Phi = \frac{Q}{2\pi r h}\left(\ln\frac{2}{\varrho_w} - \ln\frac{2}{\varrho}\right).$$

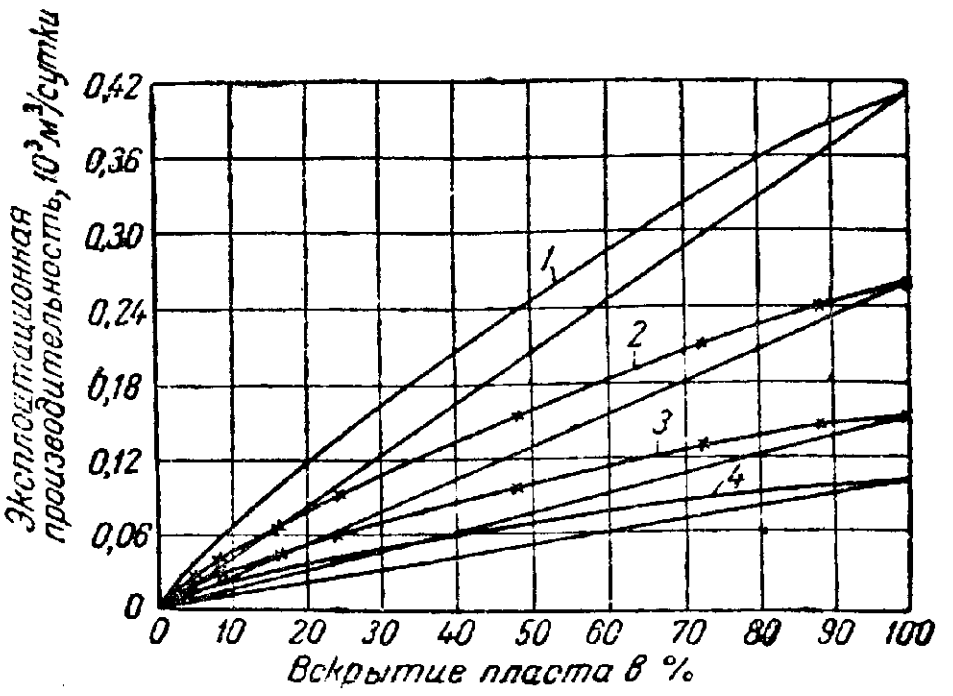
[2] Козени (Wasserkraft u. Wasserwirtschaft, 28,101) нашел, что результативные расходы, нанесенные на фиг. 83, могут быть получены из еще более простой формулы:

$$Q = \frac{2\pi k h \bar{h}\, \Delta p/\mu}{\ln r_e/r_w}\left(1 + 7\sqrt{\frac{r_w}{2h\bar{h}}}\cos\frac{\pi\bar{h}}{2}\right).$$

где $\bar{h}$ — глубина вскрытия пласта скважиной, выраженная в долях мощности песчаника h; k — проницаемость песчаника; μ — вязкость жидкости. На фиг. 83 дается зависимость Q от процентной глубины вскрытия песчаника забоем скважины ($100\ \bar{h}$) для песчаников различной мощности; r_e/r_w принимается равным 2000, а $k\Delta p/\mu$ принимается за единицу. Сплошные кривые для мощности песчаника при $h = 22{,}5$ и $37{,}5$ *м* были подсчитаны по методу, который включает в себя уравнение (5). Крестики на кривых соответствуют значениям, подсчитанным по уравнению (6). Отсюда является вполне очевидным, что уравнение (6) представляет собой приближение, которое вполне удовлетворяет всем практическим целям. Остальные кривые на фиг. 83 были подсчитаны по уравнению (6). Прямые линии на фиг. 83 показывают текущие дебиты, которые были бы получены, если бы течение в скважинах

Фиг. 83. Зависимость эксплоатационной производительности скважин с частичным вскрытием пласта от величины вскрытия последнего.

Прямые линии показывают эксплоатационную производительность, если поток строго радиален. Крестики дают значения, подсчитанные согласно уравнениям (6), гл. V, п. 4. Непрерывные кривые были подсчитаны из непосредственной аналитической процедуры для мощности песчаника 22,5 и 37,5 *м*. Общее падение потенциала принимается за единицу (разность давления —1 *am*, если $k/\mu = 1$); радиус скважины — 0,075 *м*; радиус внешнего контура — 152,5 *м*.



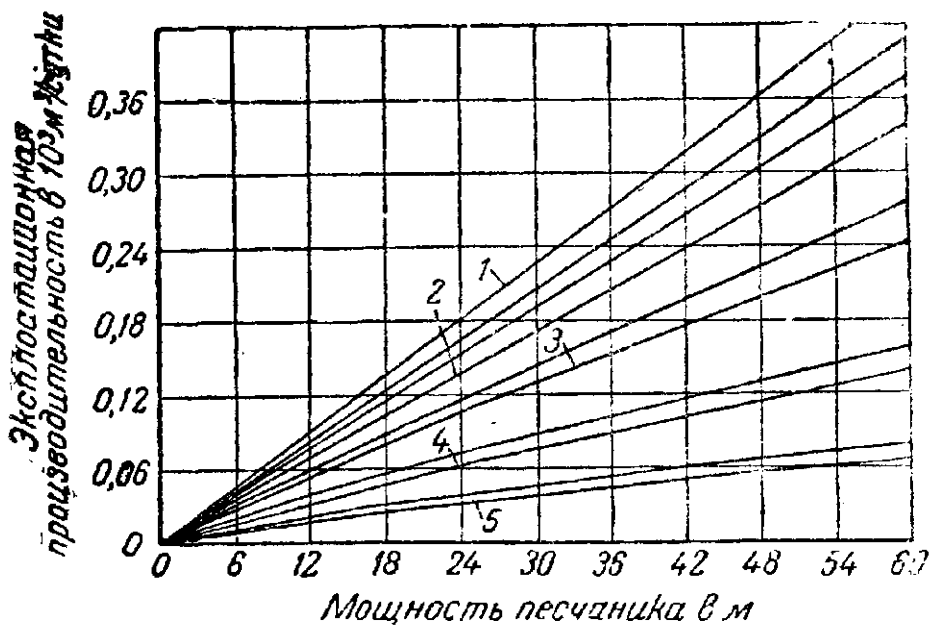
1 — мощность песчаника 60 *м*; *2* — мощность песчаника 37,5 *м*; *3* — мощность песчаника 22,5 *м*; *4* — мощность песчаника 15,0 *м*.

с частичным вскрытием пласта было строго радиальным. Отсюда видно, что по мере уменьшения величины вскрытия превышение фактического эксплоатационного дебита над соответствующей величиной для строго радиального течения непрерывно возрастает, пока при величине вскрытия около 20% это превышение может превзойти на 50% соответствующую величину для строго радиального течения.

Поэтому приближение к строго радиальному течению приводит к большим ошибкам. Эти выводы указывают также, что нельзя рассматривать реальную систему как эквивалентную простой суперпозиции собственно радиального течения в скважину и полусферического течения в ее нижнюю оконечность, ибо доля последнего в общем расходе составляет величину порядка 2 или 3% от расхода при радиальном течении.

На фиг. 84 эти выводы представлены в несколько отличном виде. Здесь текущие дебиты нанесены в зависимости от мощности песчаника для различных глубин вскрытия и для двух скважин с различными радиусами. Интересно заметить, что для песчаников, мощность которых превышает 15 *м*, изменение текущего дебита в зависимости от мощности песчаника имеет почти точную линейную зависимость даже для несо-

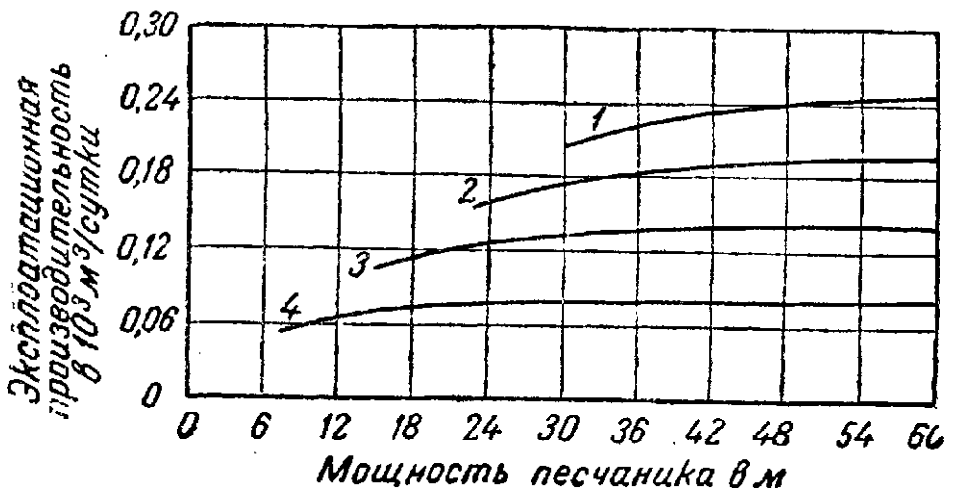
вершенных скважин. Это обстоятельство делает возможным экстраполяцию и интерполяцию полученных кривых со значительной степенью точности.



Фиг. 84. Зависимость эксплоатационной производительности скважин с частичным вскрытием пласта от мощности песчаника.

Общее падение потенциала принимается за единицу; r_w — радиус скважины; радиус внешнего контура — 152,5 *м*.

1 — вскрытие пласта (100%) $r_w = 0{,}15$ *м*, $r_w = 0{,}075$ *м*;
2 — вскрытие пласта (75 %) $r_w = 0{,}15$ *м*, $r_w = 0{,}075$ *м*;
3 — вскрытие пласта (50%) $r_w = 0{,}15$ *м* $r_w = 0{,}075$ *м*;
4 — вскрытие пласта (25%) $r_w = 0{,}15$ *м*, $rw = 0{,}075$ *м*;
5 — вскрытие пласта (10%) $r_w = 0{,}15$ *м*, $r_w = 0{,}075$ *м*.



Фиг. 85. Зависимость эксплоатационной производительности скважин с частичным вскрытием пласта и фиксированной величиной вскрытия, как функции от мощности песчаника. Общее падение потенциала принимается за единицу; радиус скважины — 0,075 *м*; радиус внешнего контура — 152,5 *м*.

1 — вскрытие пласта 30 *м*; *2* — вскрытие пласта 22,5 *м*; *3* — вскрытие пласта 15,0 *м*; *4* — вскрытие пласта 7,5 *м*.

Рассматривая в основном те же самые выводы, но совершенно с иной точки зрения, на фиг. 85 были нанесены текущие дебиты в зависимости от мощности песчаника для различных зафиксированных значений действительной глубины вскрытия песчаника в метрах. Эти кривые непосредственно показывают эффект от дополнительной мощности песчаника под забоем скважины. В частности, можно заметить, что, за исключением первых нескольких метров песчаника под забоем скважины, дополнительные слои песчаника дают последовательно уменьшающиеся нарастания дебита скважины. Так, для скважины с глубиной вскрытия 7,5 *м* повышение мощности песчаника от 37,5 до 60 *м* увеличит текущий дебит менее чем на 2%, в то время как первые 22,5 *м*, считая от забоя скважины от (7,5 до 30 *м*), увеличивают текущий дебит на 45,6%.

Что же касается изменения текущих дебитов в зависимости от радиуса скважины, то кривые на фиг. 84 показывают, что для больших величин вскрытия пласта текущие дебиты изменяются логарифмически с радиусом скважины (как это имеет место в случае радиального течения), а затем увеличивают свой диапазон колебаний с уменьшением величины вскрытия пласта, пока в пределе, для случая несовершенной скважины, текущие

дебиты не начинают изменяться пропорционально изменению радиуса скважины, как это мы имеем в случае сферического течения [уравнение (11), гл. V, п. 2].

5. Несовершенные скважины в анизотропных песчаниках. При рассмотрении главы V, пп. 3 и 4 было принято важное допущение, что пласт песчаника вполне изотропен. Однако случается часто, что проницаемость в направлении, перпендикулярном плоскости напластования, значительно меньше по сравнению с аналогичной величиной в направлении, параллельном плоскости напластования[1].

Поэтому представляет интерес посмотреть, какое влияние оказывает анизотропность на текущий дебит скважины, вскрывшей только частично пласт песчаника.

С общей качественной стороны, когда проницаемость по вертикали меньше величины проницаемости по горизонтали, влияние анизотропности в основном будет выражаться в уменьшении вертикальных скоростей в системе так, что характер течения станет более близким к радиальному. Таким образом, доля текущего дебита скважины, обязанная той части песчаника, которая фактически не вскрыта забоем скважины, уменьшится, а вместе с ней уменьшится и суммарный текущий дебит. Так как эта доля по мере возрастания величины вскрытия пласта скважиной равномерно уменьшается, то влияние анизотропного характера песчаника должно возрастать от исчезающе малого значения для совершенной скважины до максимума в скважинах, только вскрывших кровлю песчаника. На первом этапе представляется удобным отделить проницаемость k от потенциальной функции Φ и принять вместо нее упрощенную функцию:

$$\varphi = \frac{1}{\mu}(p - \gamma g z). \tag{1}$$

Аналитически эта задача может быть решена методом, рассмотренным в гл. IV, п. 15. Так, принимая для удобства величину проницаемости параллельно плоскости напластования за единицу и перпендикулярно к ней (параллельно оси z, так как здесь принято допущение о горизонтальном залегании слоев песчаника), обозначив через k_z, можем написать следующее диференциальное уравнение для φ в цилиндрических координатах:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + k_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{2}$$

Теперь это уравнение может быть приведено к виду, одинаковому с выражением для изотропной среды, производя любое изменение переменных:

$$r = \frac{r'}{\sqrt{k_z}}: \quad z = z'; \text{ или } r = r': z = z'\sqrt{k_z}. \tag{3}$$

---

[1] См. гл. II, п. 12, где было показано, что обратное положение, когда проницаемость в направлении, перпендикулярном плоскостям напластования, превышает соответствующую величину в параллельном направлении, может встретиться также довольно часто, но здесь будет рассмотрен и математически обработан наиболее распространенный общий случай. Приведенный анализ тем не менее можно приложить к обоим типам течений.

В том и другом случае уравнение (2) принимает вид:

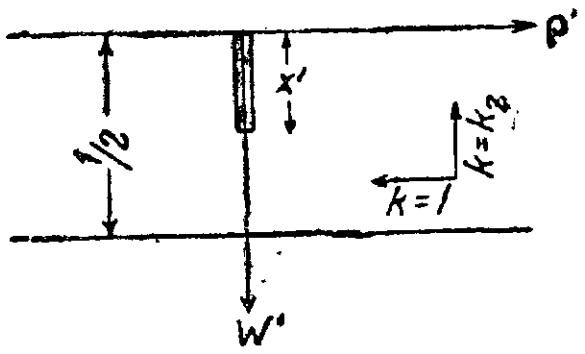
$$\frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial r'}\left(r'\frac{\partial\varphi}{\partial r'}\right)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z'^2}=0. \tag{4}$$

Вводя снова безразмерные переменные:

$$\varrho'=\frac{r'}{2h'};\quad w'=\frac{z'}{2h'}, \tag{5}$$

ясно, что граничные условия, которые следует принять для уравнения (4), будут (фиг. 86):

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi}{\partial w'}=0: && w'=0,\ \frac{1}{2}\\ &\varphi=\text{const}: && \varrho_w'=\sqrt{k_z}\varrho_w: \quad w'\leqslant x'=x,\\ &\varphi=\text{const}: && \varrho_e'=\sqrt{k_z}\varrho_e.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$



Фиг. 86. Скважина с частичным вскрытием пласта в анизотропном песчанике.

Отсюда следует, что распределение потенциала, представленное членами, содержащими переменные (w', ϱ'), соответствует аналогичной величине в изотропном песчанике, с тем же самым частичным вскрытием пласта скважиной и радиусами скважины и внешнего контура, равными соответствующим величинам в действительной физической задаче, увеличенным в $\sqrt{k_z}$ раз.

Тогда падение потенциала между скважиной и внешним контуром выразится следующим уравнением.

$$\Delta\varphi=\varphi_e(\sqrt{k_z}\,\varrho_e, x)-\varphi_w(\sqrt{k_z}\,\varrho_w, x). \tag{7}$$

Член $\varphi_w(\sqrt{k_z}\,\varrho_w, x)$ может быть, очевидно, получен из уравнения (8), гл. V, п. 3 со значением $w={}^3/_4\,x$, как это было принято в предыдущем разделе. Отсюда принимаем единицу плотности расхода вдоль забоя скважины:

$$\varphi_w(\sqrt{k_z}\,\varrho_x, x)=-2\ln\frac{2}{\sqrt{k_z}\,\varrho_w}+$$

$$+\ln\frac{\Gamma(1{,}75x)\,\Gamma(0{,}25x)}{\Gamma(1-1{,}75\,x)\,\Gamma(1-0{,}25\,x)}. \tag{8}$$

Что же касается φ_e, то, возвращаясь к гл. V, п. 3 и взяв уравнение (9), гл. V, п. 3, являющееся равнозначным (8) для больших значений ϱ, можем переписать его для случая $w=0$ следующим образом:

$$\varphi_e(\sqrt{k}\,\varrho_e, x)=$$

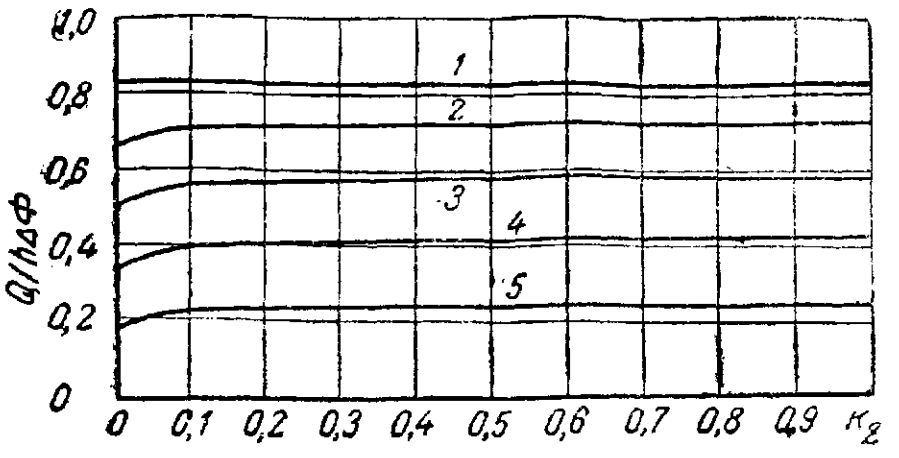
$$=-4\left[\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty\frac{1}{n}K_0(2n\pi\sqrt{k_z}\,\varrho_e)\sin 2n\pi x+x\ln\frac{2}{\sqrt{k_z}\,\varrho_e}\right]. \tag{9}$$

Необходимо заметить, что в главе V, пп. 3 и 4 этот ряд, применяя уравнение (9), гл. V, п. 3, опускался вследствие весьма резкого уменьшения K_0 с возрастанием аргумента, но когда k_z настолько мало, что $\sqrt{k_z}\,\varrho_e$ заметно меньше 1, следует принимать в расчет, по крайней мере, первые несколько членов этого ряда. Когда же k_z приближается к нулю, то, как и следует этого в действительности ожидать, приходится брать в расчет столько членов этого ряда, что становится более удобным применять для нахождения φ_e такой вид уравнения (8): $\Delta\varphi\,(k_z \sim 0) = 2 \ln \varrho_e/\varrho_w$.

Установив по существу значение $\Delta\varphi$, следует найти выражение для текущего дебита Q, которому соответствует $\Delta\varphi$. Применяя уравнение (1), гл. V, п. 4, к (9), находим, что

$$Q = 2\pi \int_0^h \varrho_e \frac{\partial \varphi_e}{\partial \varrho_e}\, dz = 8\pi h x. \qquad (10)$$

Теперь можно подсчитать количество $Q/h\Delta\varphi$ или эксплоатационный расход на единицу падения потенциала и на единицу мощности песчаника. Фиг. 87 показывает значения $Q/h\Delta\varphi$, нанесенные в виде кривых в зависимости от k_z для различных значений вскрытия песчаника мощностью 37,5 *м*. Крайние значения $k_z = 1$ и $k_z = 0$ отвечают соответственно, случаю изотропного песчаника, как это рассматривается в главе V, пп. 3 и 4, а также случаю строго радиального течения, ограниченного частью песчаника, фактически вскрытого скважиной. При рассмотрении фиг. 87 влияние изменения проницаемости в вертикальном направлении может казаться не столь большим. Однако график зависимости отношения текущих дебитов, т. е. $\dfrac{Q\,(k_z = 1)}{Q\,(k_z = 0)}$, с глубиной вскрытия песчаника, как это дается на фиг. 88, показывает, что, особенно для малых величин вскрытия, дополнение к расходу, обязанное вертикальному течению, достигает значительной величины. Так, для глубины вскрытия 20% строго радиальное течение повышается на 50%, принимая вертикальную проницаемость равной проницаемости в горизонтальном направлении, а для 10% вскрытия это увеличение достигает более чем 75%.



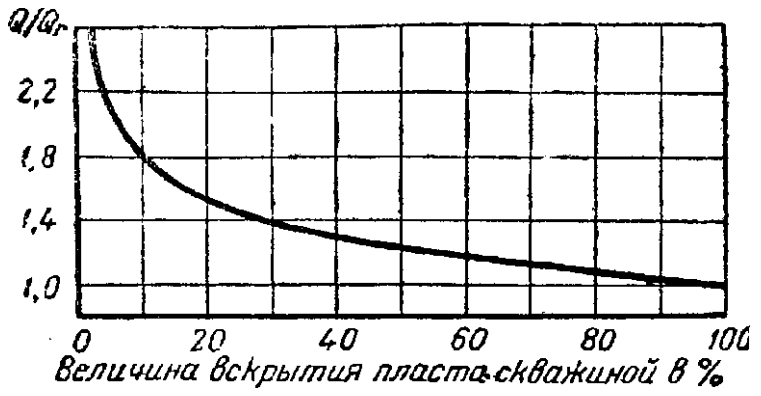
Фиг. 87. Зависимость эксплоатационной производительности скважин с частичным вскрытием пласта от проницаемости в вертикальном направлении k_z:

$Q/h\,\Delta\varphi$ — текущий дебит на единицу разности давления и на единицу мощности песчаника. Общая мощность песчаника 37,5 *м*; радиус скважины — 0,075 *м*; радиус внешнего контура — 152,5 *м*. Горизонтальная непроницамость — 1, вязкость жидкости — 1.

1 — величина вскрытия — 100%; *2* — величина вскрытия — 80%; *3* — величина вскрытия — 60%; *4* — величина вскрытия — 40%; *5* — величина вскрытия — 20%

Следует заметить, что возрастание дебита Q, обязанное проницаемости в вертикальном направлении, не является простой зависимостью

от k_z. Если бы это было действительно так, то кривые на фиг. 87 были бы представлены прямыми линиями, соединяющими точки $k_z = 0$ и $k_z = 1$. В действительности возрастание в зависимости от k_z устанавливается довольно быстро даже при малых значениях последнего и медленно изменяется для значений $k_z > 0{,}1$. Практическое значение этого вывода заключается в том, что он показывает, поскольку k_z не является чрезвычайно малой величиной, его не следует определять с большой точностью, хотя в то же самое время эта проницаемость дает возможность установить истинную величину расхода, поступающего в скважину.



Фиг. 88. Отношение эксплоатационной производительности скважин с частичным вскрытием пласта к соответствующей производительности для систем строго радиального потока:

Q — общая эксплоатационная производительность; Q_r — строго радиальный компонент от Q; мощность песчаника—37,5 *м*, радиус скважины — 0,075 *м*, радиус внешнего контура — 152,5 *м*.

С другой стороны, пока k_z не составит значительной доли горизонтальной проницаемости, приведенный анализ указывает, что анизотропность песчаника может обусловить значительное уменьшение текущего дебита, который поступает в несовершенную скважину, вскрывшую анизотропный песчаник, и потому во всех случаях, где это возможно, следует принимать в расчет этот фактор.

6. Заключение. Довольно часто бывает, что скважины, которые бурятся на жидкость, содержащуюся в песчаниках, не вскрывают их полностью. Так, недобуривание всей толщи продуктивного горизонта может явиться, например, для артезианских скважин, следствием недостаточного предварительного знакомства с фактической мощностью продуктивного пласта песчаника. В последующем это может быть установлено по разрезам соседних буровых. При бурении нефтяных скважин это недобуривание может явиться результатом желания избежать вскрытия пластовых вод, которые залегают или могут залегать в подошве нефтяного песчаника. Трудности, возникающие с проникновением воды в забой нефтяной скважины, часто бывают настолько серьезны, что обычно при подозрении на подошвенную воду на практике прекращают бурение раньше, чем будет вскрыта нижняя вода. Если же подошвенная вода была по ошибке вскрыта, то обычно заливают забой цементом, если это только представляется возможным. В том случае, когда скважина не вскрыла полностью всей мощности продуктивного песчаника, течение не будет радиальным, как в том случае, когда вскрытие пласта произведено полностью, что рассматривалось уже в предыдущем разделе. В рассматриваемом случае в дополнение к жидкости, залегающей в песчанике против вскрытого забоя скважины, к последней будет также двигаться жидкость, залегающая в пласте песчаника ниже забоя. Вполне очевидно, чтобы достичь забоя скважины, эта жидкость должна двигаться в вертикальном направлении, а также радиально. При этом течение становится трехразмерным, так как комплексное представление

о динамике такого течения требует по необходимости введения в рассмотрение горизонтальной и вертикальной скоростей.

Методы решения трехразмерных задач почти аналогичны тем, что были приняты в предыдущем разделе при рассмотрении систем плоского течения. Начнем только с более общего трехразмерного вида уравнения Лапласа [уравнения (1) и (2), гл. V, пп. 1 и 2].

Вполне возможно, что наиболее простой из задач такого рода является задача о сферическом течении — точном аналоге строго радиального течения в плоской системе. С физической стороны эта задача соответствует скважине, только вскрывшей пласт песчаника значительной мощности, обладающего постоянством характеристики. Сам забой скважины представляет собой полусферическую поверхность с радиусом, равным радиусу скважины[1].

Эквипотенциальные поверхности системы представлены полусферами, концентричными поверхности забоя скважины, а линии тока представлены радиусами, направленными к центру последнего. Потенциал [уравнение (1), гл. V, п. 1] изменяется обратно радиальному расстоянию [уравнение (6), гл. V, п. 2] от центра скважины, и потому градиенты гораздо круче у скважины по сравнению со случаем радиального течения.

Скорость изменяется обратно пропорционально квадрату радиального расстояния [уравнение (7), гл. V, п. 2], что также создает более резкое уменьшение величины ее, чем при радиальном течении. Эта высокая крутизна градиентов давления вблизи скважины и их почти исчезающе малое значение на более значительных расстояниях приводят к выводу, что эксплоатационная производительность таких сферических течений практически не зависит от радиуса внешнего контура, где приложен высокий потенциал. С другой стороны, эта производительность чувствительна к радиусу скважины, будучи фактически пропорциональна его величине [уравнение (11), гл. V, п. 2]. По своей абсолютной величине скважина, работающая при сферическом течении, имеет гораздо меньшую производительность, чем скважина, полностью вскрывшая пласт песчаника и потому работающая при плоском течении. Это отношение для пласта мощностью 15 *м* и при радиусе скважины 0,075 *м* составляет 1:26 [уравнение (13), гл. V, п. 2]. В задачах с более практическим уклоном, где пласт песчаника имеет конечную мощность и частично вскрыт скважиной, анализ становится значительно более сложным. В этом случае необходимо дать такое распределение потенциала, которое не создает течения в кровле и подошве песчаника, т. е. соответствует случаю, когда пласт песчаника залегает между водонепроницаемыми глинами, и потенциал имеет постоянное значение на поверхности забоя скважины.

Чтобы удовлетворить первому требованию, удобно приложить метод конформных отображений, уже рассмотренный в главе IV, и последовательно отобразить поверхность забоя скважины на верхнюю и нижнюю плоскости песчаника, создавая в конечном итоге бесконечный ряд таких отображений. Более затруднительно, чтобы потенциальная функция приняла постоянное значение по всей поверхности забоя скважины. При

---

[1] Когда такие скважины проводятся на водосодержащие песчаники, они обычно называются скважинами с открытым забоем.

аналитическом решении задачи начинают с потенциала, связанного с элементом расхода, помещенным в некоторой точке по оси скважины. Тогда реальная задача будет заключаться в нахождении такого распределения элементов расхода вдоль оси скважины, чтобы потенциал на поверхности скважины сохранял свое постоянство. Когда скважина полностью вскрывает пласт песчаника, очевидно разные количества жидкости поступают через каждую единицу глубины вдоль поверхности забоя скважины. Когда же вскрытие пласта скважиной несовершенно, ясно, что жидкость, поступающая из отдельных частей песчаника, залегающих ниже забоя скважины, будет большей частью концентрироваться вблизи последнего, создавая, таким образом, увеличение плотности расхода жидкости, поступающей на поверхность скважины по мере приближения ее к забою.

Установив распределение расхода, которое дает постоянство потенциала на поверхности забоя скважины, мы по существу разрешили задачу. При этом возможно не только дать распределение потенциала в пласте песчаника, но и найти немедленно же соотношение между текущими дебитами и падением потенциала в пласте. Как уже было показано, плотность расхода жидкости на поверхности скважины неуклонно возрастает по мере достижения забоя скважины благодаря тому, что в нижнюю часть поверхности скважины поступает жидкость из той части песчаника, что залегает ниже глубины вскрытия. Тогда полная сумма этих плотностей тока на поверхности даст суммарную эксплоатационную производительность.

Суммируя также доли потенциала, зависящие от этих отдельных элементов расхода, получаем результативное распределение потенциала. Наиболее характерной особенностью этого распределения является то обстоятельство, что оно принимает почти полный радиальный характер по мере того, как отступает от скважины на расстояние порядка двойной мощности песчаника и в действительности изменяется логарифмически на радиальной дистанции [уравнение (9), гл. V, п. 3]. Однако вблизи поверхности скважины эквипотенциальные поверхности близко следуют контуру скважины, будучи приближенно сферичными для несовершенной скважины (см. фиг. 82) и цилиндрическими для частично совершенных скважин (см. фиг. 81).

Практический интерес представляют собой величины текущих дебитов, которые соответствуют распределению давления. Анализ показывает, что суммарная эксплоатационная производительность скважины, вскрывшей частично пласт песчаника определенной мощности, возрастает более резко, чем глубина вскрытия (для малых значений вскрытия), но более замедленно по мере того, как глубина вскрытия достигает 100% (см. фиг. 83). Объяснение этого явления опять находится в рассмотрении нерадиального течения, которое поступает в скважину, из той части песчаника, что залегает ниже глубины вскрытия. Когда глубина вскрытия мала, величина нерадиального течения будет увеличиваться с глубиной вскрытия благодаря тому, что будет открываться все большая поверхность песчаника, в которую может поступать нерадиальное течение. Так как часть течения, соответствующая строго радиальному, будет возрастать пропорционально глубине вскрытия, суммарный дебит будет резко увеличиваться. Однако по мере того,

как глубина вскрытия достигает известной точки, мощность невскрытой части песчаника, откуда поступает нерадиальный поток, уменьшается. Это обстоятельство уравновешивает влияние увеличивающейся при бурении поверхности забоя скважины, в результате чего изменение в суммарном расходе становится менее резким по сравнению с величиной дальнейшего вскрытия.

Что же касается величины нерадиальной части в величине расхода по сравнению со строго радиальным течением, установлено, что она неуклонно возрастает от исчезающе малых значений при 100%-ном вскрытии пласта, когда течение полностью радиальное, до величины 50% от радиального течения при 20%-ном вскрытии и, наконец, превышает долю радиального течения при величине вскрытия пласта 6% и менее. Косвенно это указывает на то, что действительное течение частично совершенной скважины не может быть даже грубо приближено к непосредственной суперпозиции радиального течения в самой скважине и полусферического течения на ее оконечности.

Рассматривая влияние мощности песчаника на эксплоатационную производительность скважины при данном частичном вскрытии пласта, из анализа видно, что для мощности песчаника более чем 15 *м* изменение эксплоатационной производительности в зависимости от мощности песчаника почти полностью линейно. Наклоны кривых возрастают с величиной частичного вскрытия пласта скважиной (см. фиг. 84). При небольшой мощности эксплоатационная производительность скважины возрастает в зависимости от мощности песчаника несколько быстрее, хотя этот эффект заметен только для более мелких глубин вскрытия.

Как и следует ожидать, изменение в величине эксплоатационной производительности в частично совершенной скважине в зависимости от радиуса скважины занимает промежуточное положение между изменениями для случая строго сферического течения и строго радиального течения. Это означает, что для больших глубин вскрытия течение приближается к радиальному и эксплоатационная производительность изменяется логарифмически в зависимости от радиуса скважины. Однако степень этого изменения возрастает с уменьшением глубины вскрытия, пока в пределе для несовершенной скважины, что соответствует сферическому течению, эксплоатационные производительности изменяются пропорционально радиусу скважины. Видоизменением только что выведенной задачи эксплоатации несовершенных скважин, имеющей значительный практический интерес, является такая задача, где принимается в расчет влияние анизотропности песчаника на его проницаемость. Когда становится заметным, что большая часть замеров проницаемости единичных образцов сцементированных песков, произведенных параллельно и перпендикулярно плоскостям напластования, показывает значительное отклонение в величине обеих проницаемостей, явление анизотропности приобретает более чем академический интерес. К счастью, аналитическое решение проблемы анизотропного песчаника может быть достигнуто на основе задачи о несовершенных скважинах, производя только небольшие формальные изменения в анализе, разработанном для решения той же задачи, но в изотропной пористой среде.

С этой целью является весьма удобным принять проницаемость параллельно плоскости напластования за единицу, а проницаемость пер-

пендикулярно плоскости напластования обозначить через k_z, так что фактически k_z представляет собой отношение обеих проницаемостей. Тогда оказывается, что, умножая радиальные координаты на множитель $\sqrt{k_z}$ или же вертикальные координаты на множитель $1/\sqrt{k_z}$, можно простым приемом получить в новых координатах уравнения, которые будут совершенно те же, что и для изотропного песчаника [уравнение (4), гл. V, п. 4]. Более того, физическое соответствие преобразованной системы одинаково для несовершенной скважины в изотропном песчанике с той же самой частичной глубиной вскрытия, что и для анизотропного песчаника. Эффективность скважины (где численное значение радиусов разделено на двойную мощность песчаника) и внешние радиусы будут те же, что и в действительной системе, но умноженные на величину $\sqrt{k_z}$ [уравнение (6), гл. V, п. 5]. Сделав эти изменения в числовых значениях рассматриваемых физических размеров системы, можно проделать весь анализ, не принимая более в расчет физическую анизотропность системы, т. е. тем же самым аналитическим методом, что был применен для изотропных песчаников. Как можно предвидеть заранее, влияние анизотропности на эксплоатационные производительности более характерно для скважин с небольшой глубиной вскрытия. Кроме того, эти производительности беспрерывно возрастают с увеличением вертикальной проницаемости k_z, от значения $k_z = 0$, соответствующего строго радиальному течению, до значения $k_z = 1$, соответствующего изотропному песчанику (см. фиг. 87). Это возрастание не имеет линейного характера, но более резко проявляет себя при малых значениях k_z. Отсюда получается вывод, что в тех случаях, где k_z не отличается сильно от 1, анизотропность, за исключением малых величин вскрытия пласта, не будет иметь особенного значения. С другой стороны, там, где $k_z < 0{,}1$ и где глубины вскрытия не превышают 20%, текущий дебит с анизотропного песчаника будет меньше 80% соответствующей величины для скважины с изотропного песчаника.

Если проницаемость по вертикали примет исчезающе малое значение, то эксплоатационная производительность для скважины с глубиной вскрытия 20% упадет до 65% соответствующего дебита изотропного песчаника, а при 5% вскрытия пласта — менее чем на 47% эксплоатационной производительности скважины с изотропного песчаника.

Следующая интересная задача, возникающая в связи с изучением несовершенных скважин, относится к тому случаю, когда продуктивный горизонт скорее слоист, чем сложен единой однородной массой. Хотя при этом течение также имеет трехразмерную характеристику, но влияние неоднородности песчаника требует несколько отличного аналитического метода. Поэтому рассмотрение такой проблемы будет отнесено к главе VII, где будет развита общая методика решения таких систем с неоднородной проницаемостью. В той же главе будет рассмотрена трехразмерная задача о скважине с песчаной пробкой в лайнере, ибо этот случай также включает рассмотрение участков с различной проницаемостью в единой, соединяющейся между собой пористой среде[1].

---

[1] Толке дает несколько похожий метод анализа при рассмотрении своего способа определения проницаемости сцементированной пористой среды, на основании экспериментов с нелинейным течением. Однако в связи с тем, что его

Последняя трехразмерная задача течения, имеющая практическое значение, которая будет рассмотрена в настоящей работе, относится к водяному конусу. В этом случае, однако, течение включает в себя две однородные жидкости и потому потребуется снова дать метод решения, отличный от тех методов, которые применяются для систем, несущих только одну однородную жидкость. Поэтому рассмотрение этого вопроса также переносится в последующий раздел (глава VIII), который будет полностью посвящен анализу задач этого типа.

метод вряд ли найдет широкое применение при фактических измерениях проницаемости; теория Толке здесь не приводится.

Глава шестая

ГРАВИТАЦИОННОЕ ТЕЧЕНИЕ

1. Введение. В предыдущих разделах было показано, что в общем виде можно учесть формально влияние силы тяжести для трехразмерного течения, а также для плоского течения с движением жидкостей в вертикальной плоскости введением в уравнение неразрывности потенциала скорости:

$$\Phi = \frac{k}{\mu}(p \pm \gamma g z), \tag{1}$$

где знаки $\pm$ соответствуют положительному и отрицательному направлению вертикальной координаты $+z$. Этот способ приводит непосредственно к уравнению Лапласа для Φ,

$$\nabla^2 \Phi = 0, \tag{2}$$

которое можно взять за основу при изучении в отдельных деталях всех трехразмерных течений жидкости при установившемся движении. Эта формулировка уже была принята в предыдущей главе, где были получены решения для некоторых практических трехразмерных задач. Строго говоря, та же самая формулировка является вполне достаточной, чтобы дать описание всем возможным типам установившегося течения несжимаемой жидкости в однородной среде, когда следует учитывать влияние силы тяжести.

Однако, как это было уже указано предшествующими рассуждениями, каждый отдельный метод, применяемый для решения данной проблемы, зависит в значительной степени от природы границ, ограничивающих жидкость, а также от условий, которые были приняты для этих контуров. Тот класс задач, который будет нами рассматриваться в настоящей главе, характеризуется тем обстоятельством, что часть контура, ограничивающего жидкость, является „свободной поверхностью". Как и подразумевает собой этот термин, свободная поверхность является поверхностью жидкости, находящейся скорее в состоянии равновесия с атмосферой, чем с жесткой водопроницаемой гранью. Рассматривая эту поверхность со строго гидродинамической стороны, ее можно определить как линию тока, вдоль которой давление будет постоянным. Практическое значение систем, контуры которых обладают свободной поверхностью, заключается в том, что каждое течение, в котором сила тяжести является основной движущей силой, дает образование свобод-

ной поверхности. Так, вода, утекающая через плотину к более низкому уровню, обладает свободной поверхностью, заключенной внутри плотины. Соответственно этому вода, просачивающаяся из ирригационной канавы, обладает свободной поверхностью в почве, окружающей эту канаву. Наконец, вода в песчанике, который питает насосную скважину, где уровень жидкости поддерживается ниже кровли пласта песчаника, движется со свободной поверхностью, находящейся в состоянии равновесия с величиной постоянного давления, воздействующего на объем жидкости в песчанике и равного значению давления над уровнем жидкости в стволе скважины.

Допустим, что песчаник, несущий воду в артезианскую скважину, покрыт водонепроницаемым слоем. Тогда, становится ясным, что если уровень воды в скважине поднимется до значения, равного высоте залегания песчаника, течение прекратится, если только не будет приложен напор внешнего давления на питающий контур системы. В последнем случае свободная поверхность будет отсутствовать, и течение может быть описано методами, которые рассматриваются в предыдущих и последующих разделах. Однако в том случае, когда присутствует свободная поверхность, математические трудности, заключенные в решении этой проблемы, сейчас же становятся столь значительными, что практически являются непреодолимыми препятствиями для решения трехразмерной системы. Причина этого обстоятельства лежит в том, что контуры системы не являют собой более простой геометрической формы. Фактически истинная форма свободной поверхности неизвестна. Вернее всего форму последней следует определить одновременно с распределением давления внутри системы. Мы уверены, что в действительности возможно решить такую задачу аналитическим путем, на основании двойного условия, чтобы свободная поверхность была линией тока и поверхностью постоянного давления. Однако, к сожалению, мы не обладаем соответствующими аналитическими средствами, которые были бы достаточно сильными, чтобы найти точные решения таких задач, за исключением плоских систем, где метод преобразования сопряженных функций приводит в принципе к желаемым результатам. С другой стороны, даже этот метод требует значительно более комплексного анализа, чем это было использовано при его применении к системам без свободной поверхности, например, рассматривавшимся в главе IV.

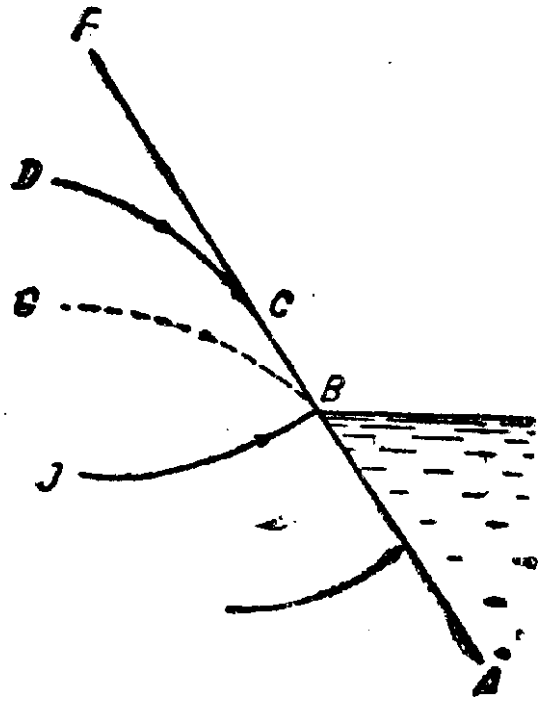
Дополнительное усложнение, возникающее при изучении общих проблем гравитационного течения, заключ ется в присутствии у большинства таких систем поверхностей фильтрации[1]. Так же, как и для свободной поверхности, давление по этим элементам поверхности является постоянным. Однако последние не представляют собой линий тока. Они являются просто частями контура пористой среды, где жидкость покидает систему и вступает в область, лишенную и жидкости и пористой среды. С другой стороны, длина этих элементов поверхности заранее не известна, так как их верхняя граница соединяется всегда со свободной поверхностью, которая первоначально также неизвестна. Существование таких элементов поверхности было установлено уже

---

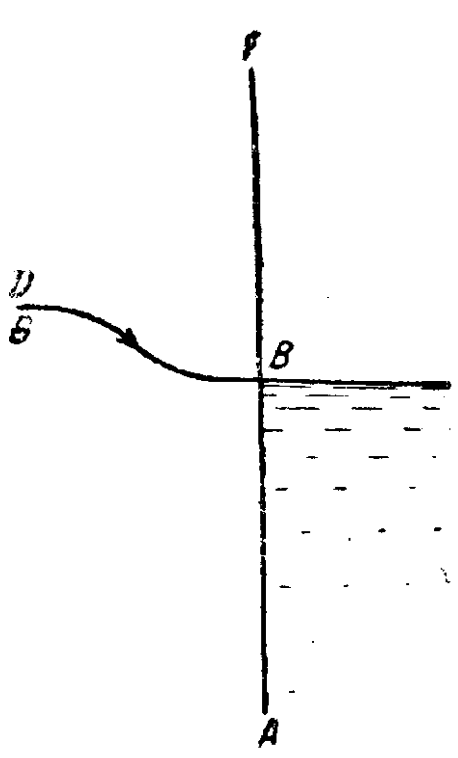
[1] Литературный перевод немецкого термина „Hang-quelle“ вряд ли отображает это явление так, как принятый нами термин.

несколько времени назад, но только недавно (гл. VI, п. 3) был разработан аналитический метод, при котором можно принять в расчет совершенно точно эти элементы.

Физическая основа существования таких поверхностей фильтрации заключается в наблюдении, что свободная поверхность не только должна иметь всегда наклон по мере приближения к поверхности стока, но и скорость вдоль свободной поверхности, будучи компонентом градиента силы тяжести вдоль поверхности, должна быть всегда конечной[1]. Так, допуская, что AF является физической границей стока гравитационного течения с уровнем истекания жидкости, достигающего точки B (фиг. 89)



Фиг. 89. Схема направления линий тока на наклонной поверхности стока при гравитационном течении.



Фиг. 90.

видно, что ограничивающая линия тока, что заканчивается вдоль AB, должна встретить AF в точке B под прямым углом, например, JB. Если теперь принять, что свободная поверхность также заканчивается в точке B, она должна образовать конечный угол с JB, например GB. Однако результативная сходимость обеих линий тока в точке должна повести к бесконечному значению скоростей в B, вдоль JB и GB. Вследствие существования уже отмеченного ограничения величины скоростей вдоль свободной поверхности полученный вывод невозможен, и потому свободная поверхность должна заканчиваться выше точки B, например в C. Тогда входящий участок BC является поверхностью фильтрации, так как он не является линией тока, но подвержен постоянному давлению. Если поверхность стока вертикальна AF, этот довод нарушается, так как можно допустить схождение свободной поверхности DB с последней линией тока GB, ограничивающей те линии, что режут AB под прямым углом (фиг. 90).

Поставленное условие не представляется возможным, так как неисчезающе малые горизонтальные скорости в AB требуют, чтобы давление

---

[1] Можно легко доказать, что суммарная скорость вдоль свободной поверхности не может быть более величины свободного вертикального падения, обязанного силе тяжести $k\gamma g/\mu$ [уравнение (5), гл. VI, п. 3].

жидкости имело производную в горизонтальном направлении вдоль AB, не равную нулю. Так как наклон DB в точке B равен нулю, то нарастание давления по горизонтали, отступя от AB, обязано объединенному эффекту от вертикальных скоростей вблизи AB, направленных вверх[1]. Но так как потенциал вдоль AB имеет постоянное значение и избыток потока в AB, помимо величины, соответствующей строго линейному течению, поступает с уровня поверх B, направленные вверх вертикальные скорости физически невозможны.

Когда наклон поверхности стока AF менее 90°, из приведенных доказательств не вытекает необходимость отделения поверхностью фильтрации верхушки уровня стока воды от оконечности свободной поверхности. Существование ее выводится на основании того факта, что для нулевого напора стока жидкости такие поверхности фильтрации, повидимому, необходимы во всех случаях. Физически совершенно необоснованно, чтобы эта необходимость внезапно исчезла, когда к системе будет дополнительно приложен неисчезающе малый напор стока жидкости. С другой стороны, изучение [2] годографов (гл. VI, п. 3) таких систем показывает, что при известных условиях поверхность стока с наклоном менее 90° может быть лишена поверхности фильтрации, когда уровень стока жидкости не принимает нулевого значения.

Вследствие требования, чтобы тангенциальная скорость вдоль поверхности стока была непрерывна при переходе от оконечности свободной поверхности в поверхность фильтрации, непосредственно вытекает, что для наклонов поверхности стока, которые равны или более 90°, свободная поверхность должна встретиться с поверхностью фильтрации или поверхностью стока тангенциально. В том случае, когда наклон поверхности стока менее 90°, это же самое условие приводит к заключению, что свободная поверхность не будет более тангенциальной к поверхности стока, но будет пересекать ее скорее вертикально.

Что же касается поведения свободной поверхности на плоскости водопоглощения, небольшое рассуждение показывает, что для фронта поглощения с наклоном $\geqslant 90°$ свободная поверхность будет входить в пласт песчаника горизонтально. Если же фронт водопоглощения пористой среды имеет наклон $\leqslant 90°$, свободная поверхность будет входить под прямым углом к фронту. Наконец, можно заметить, что во всех случаях скорость в нижней оконечности поверхности фильтрации будет теоретически[3] бесконечной благодаря разрыву непрерывности тангенциальной скорости над и под нижней оконечностью поверхности фильтрации. Когда наклон поверхности стока менее 90°, скорость у ее основания (горизонталь) будет также бесконечной. Это будет точка схождения линий тока, которые будут входить сюда с неисчезающе малыми значениями углового расхождения.

---

[1] Так как направленные вверх скорости сделают линии тока выпуклыми вблизи AB, то совпадение DB и GB будет иметь своим дальнейшим последствием, что линии тока будут сходиться в точке пересечения кривых B.

[2] B. Davison, Phil. Mag., 21, 904, 1936.

[3] Разумеется, в физической системе такие бесконечные значения не будут иметь места вследствие нарушения закона Дарси, после того как будут превышены числа Рейнольдса для данной системы.

Если эквипотенциальные поверхности стока или поглощения дают острые углы с граничной линией тока, например, в пяте плотины, фасы которой направлены в разные стороны, скорости в вершинах этих углов[1] будут равны нулю. Последние свойства применимы, разумеется, ко всем течениям и не имеют никакого отношения к гравитационному компоненту потока. В настоящем случае представляется вполне возможным дать достаточно полное качественное рассмотрение гравитационного течения. Однако их количественная обработка находится, в целом, в довольно неудовлетворительном состоянии. В принципе метод годографов дает средство для математической обработки практически любой двухразмерной системы. Однако цифровая работа при этом настолько трудоемка, что она была выполнена в подробностях только для ограниченного количества частных случаев. В то же самое время нет ни одной задачи по трехразмерным системам, для которой бы имелось точное аналитическое решение. Поэтому следует обратиться к приближенным методам. Однако их точность в некоторых случаях может быть установлена только по физической интуиции.

В свете этого обстоятельства в настоящей работе не делается попыток создать классификацию различных проблем гравитационного течения и подвергнуть систематической разработке каждый класс в отдельности. Вернее всего, мы представим вначале несколько имеющихся точных решений по двухразмерным задачам, которые получены аналитическим путем, а также на электрических моделях; затем приведем некоторые приближенные обработки прочих проблем, имеющих практическую ценность; после этого подвергнем обозрению некоторые эмпирические исследования проблем трехразмерного радиального течения и, наконец, дадим вкратце приближенную теорию подсчета расхода при гравитационном течении. Таким образом, порядок представления материала будет в значительной степени определяться методикой обработки, а не внутренней физической связью различных проблем.

2. Дренирование наклонного пласта песчаника[2]. Задача Гопфа и Трефтца. Задача Гопфа и Трефтца заключается по существу в решении вопроса дренирования наклонно залегающего пласта водяного песчаника канавой, проведенной в кровле последнего. Решение этой задачи, представленное в настоящем разделе, аналитически не является столь удовлетворительным по сравнению с решением, полученным методом годографа (гл. VI, п. 3), так как оно не учитывает поверхности фильтрации и вводит только косвенно форму дренажной канавы. Однако оно обладает преимуществом по сравнению с более точным методом в простоте анализа и вычислений.

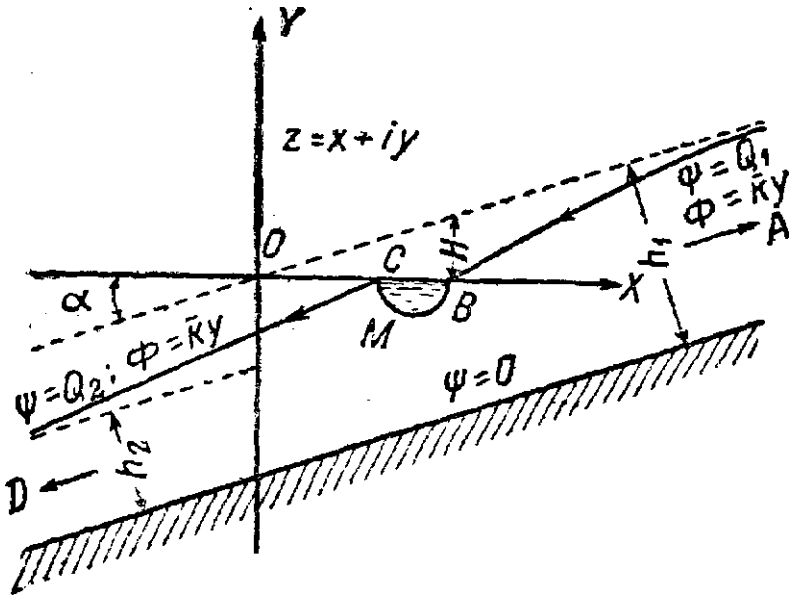
Действительно, в свете весьма трудоемких вычислительных операций, к которым необходимо прибегнуть при более точном методе, для решения общих проблем при двухразмерном гравитационном течении,

---

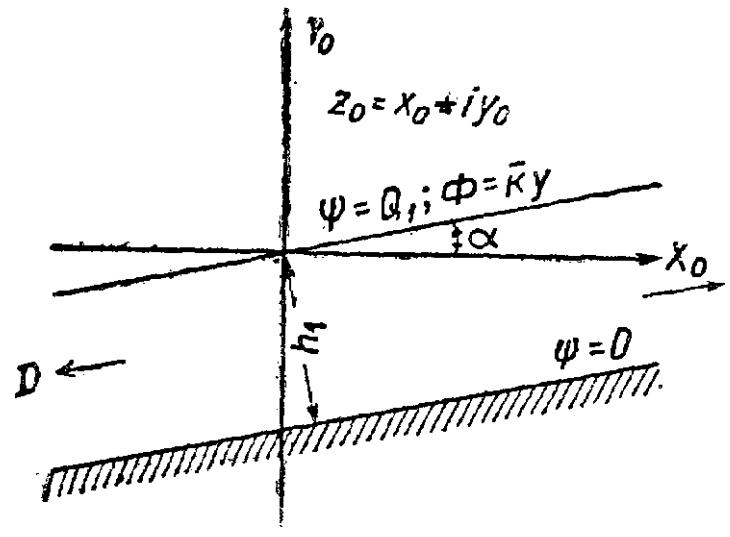
[1] Для поверхности стока это обстоятельство накладывает условие, что существует уровень стока жидкости, не равный нулю. Когда последний исчезает, скорость в носке плотины будет бесконечной.

[2] Hopf L. and Trefftz, E., Zeits angew. Math. und Mech., 1, 290, 1921. Здесь и в дальнейших аналитических выкладках не принимается в расчет капиллярная зона насыщения, залегающая над свободной поверхностью системы.

подробное описание решения Гопфа и Трефтца является, несмотря на его ограничения, полностью оправданным. На фиг. 91 представлена схема течения. Вода, которая движется вниз по склону из A, частично перехватывается канавой, а остаток ее продолжает двигаться в направлении D. Принято, что водонепроницаемый слой наклонен под углом α к горизонту и что далеко со стороны верхнего борта канавы вода заполняет песчаник до высоты h_1 над этим слоем. Со стороны нижнего борта канавы уровень воды падает до высоты h_2 над непроницаемым слоем. Наконец, система принимается двухразмерной, распространяющейся до бесконечности в обоих направлениях, нормальных к плоскости чертежа.



Фиг. 91. Изображение канавы, лежащей в кровле наклонно-залегающего песчаника в плоскости z (по Гопфу и Трефтцу).



Фиг. 92. Линейное течение изображенное на фиг. 91 исключая канаву.

Очевидно, сам водонепроницаемый слой соответствует линии тока. Это можно сформулировать как $\Psi = 0$. Соответственно этому наивысшие поверхности воды над и под канавой будут линиями тока, которые можно обозначить через $\Psi = Q_1$ и $\Psi = Q_2$, где $Q_1 - Q_2$—расход дренажной канавы[1].

Помимо того, что они являются линиями тока, поверхности $\Psi = Q_1 Q_2$ обладают еще более важными свойствами, так как они являются свободными поверхностями, находящимися в состоянии равновесия с атмосферой. Как уже было отмечено в гл. VI, п. 1, это обстоятельство налагает условие, что давление постоянно по всей свободной поверх-

---

[1] Как это было показано Гамелем (Hamel, Zeits. angew. Math. und. Mech., 14, 129, 1934), линия тока $\Psi = Q_1$ будет в общем случае вступать на поверхность стока поверх уровня жидкости в последней, образуя, таким образом, поверхность фильтрации (гл. VI, п. 1). Однако поскольку еще не осуществлено более точное аналитическое решение, в котором принята во внимание поверхность фильтрации, и так как теория Гопфа и Трефтца должна в любом случае дать существенные особенности искомого решения, эта теория будет дана здесь во всех своих подробностях, как пример метода решения, существенно отличающегося от процедур, представленных в последующих трех разделах настоящей главы.

ности и отсюда может быть принято равным нулю. Поэтому значение потенциалов Φ на этих поверхностях может быть выражено

$$\Phi = \frac{k\gamma g}{\mu} y = \bar{k} y, \qquad (1)^1$$

как это показано на фиг. 91, где y принимается за вертикальную координату. Разумеется, поставленное условие характеризует собой все гравитационные течения. С одной стороны, это условие создает трудности решения проблемы, а с другой делает возможным решение ее аналитическим путем, так как оно „компенсирует" неизвестные нам формы свободных поверхностей. В частном способе решения, принятом в настоящем разделе, установление формы свободной поверхности избегнуто соответствующим преобразованием координат (уравнение 4), и основная трудность, как это будет видно из дальнейшего, заключается в установлении истинной формы дренажной канавы.

Предварительно следует заметить, приступая к основной части анализа рассматриваемой здесь проблемы, что комплексный потенциал

$$\omega_0 = \Phi + i\Psi = z_0 \bar{k} \sin\alpha e^{-i\alpha} + iQ_1; \qquad \frac{Q_1}{\bar{k}\sin\alpha} = h_1 \qquad (2)$$

дает полное представление о наклонном течении при удаленной канаве (фиг. 92). Так, уравнивая действительную и мнимую части уравнения (2), видно, что

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \bar{k}\sin\alpha\,(x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha) \\ \Psi &= Q_1 - \bar{k}\sin\alpha\,(x_0\sin\alpha - y_0\cos\alpha) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Очевидно, линия тока $\Psi = 0$ совмещается с водонепроницаемым слоем, изображенным на фиг. 92, и верхняя поверхность $y_0 = x_0 \operatorname{tg}\alpha$ дает совершенно точно

$$\Psi = Q_1, \quad \Phi = \bar{k} y_0.$$

Тогда переменная z преобразуется в z_1 на основании соотношения:

где

$$\left.\begin{aligned} z &= z_0(\omega) + z_1(\omega) \\ z_0(\omega) &= \frac{(\omega - iQ_1)\,e^{i\alpha}}{\bar{k}\sin\alpha};\ \omega = \Phi + i\Psi \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

так что $z_1(\omega)$ представляет собой исключительное влияние канавы.

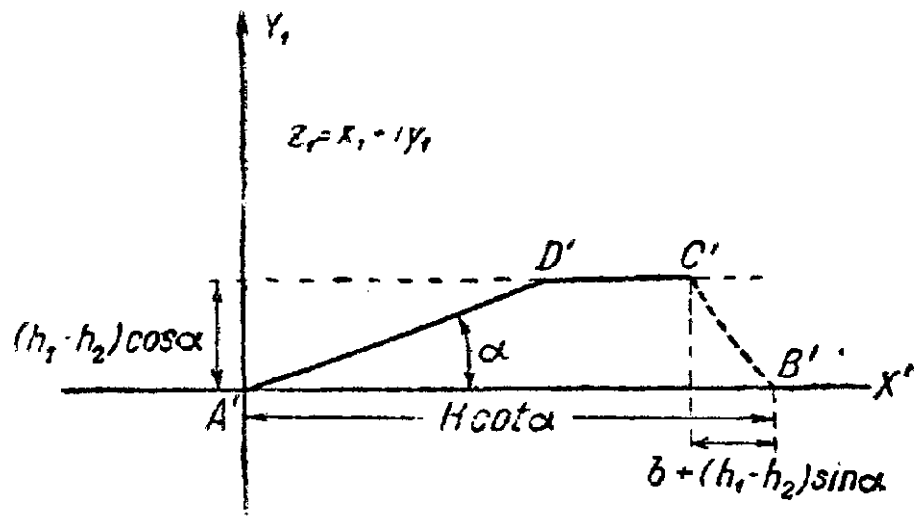
---

[1] Количество $k\gamma g/\mu$ обозначено здесь символом $\bar{k}$, так как оно представляет собой „эффективную" проницаемость систем, в которых движущим агентом является всецело сила тяжести и которые имеют дело исключительно с одной жидкостью — водой. Этот символ не выражает собой смысла коэфициента проницаемости с основной физической точки зрения. Однако с практической стороны является удобным применить эту специфическую форму эффективной проницаемости в области гражданского и мелиоративного строительства, где исключительное использование гидравлических градиентов в единицах водяного столба делает невозможным ошибочную экстраполяцию ее к остальным типам течения жидкости в пористой среде. Разумеется, размерность $\bar{k}$ соответствует размерности скорости, т. е. *см/сек* (гл. II, п. 3).

Принимая в расчет граничные условия, указанные на фиг. 91, совершенно точно видно, что плоскость z, на основании уравнения (4), отображается на плоскость z_1 согласно следующим соответствиям:

$$\left.\begin{array}{l} BA\rightarrow: \quad y_1=0; \quad x_1(B)=x(B); \quad x_1(A)=0 \\ AD\rightarrow: \quad x_1\sin\alpha-y_1\cos\alpha=0 \\ DC\rightarrow: \quad y_1=\dfrac{Q_1-Q_2}{k}\operatorname{ctg}\alpha; \quad x_1(D)=y_1\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{Q_1-Q_2}{k}\operatorname{ctg}^2\alpha \\ x_1(C)=x(C)-\dfrac{Q_1-Q_2}{k}; \quad x_1(B)-x_1(C)=b+\dfrac{Q_1-Q_2}{k} \end{array}\right\} \qquad (5)$$

где $b=x(B)-x(C)=$ ширине канавы и $h_2=Q_2/k\sin\alpha$. Секция $C'B'$ не определена до тех пор, пока не установлена форма канавы. Однако представляется более легким принять форму $C'B'$ (т. е. Q_1, Q_2, Q_m), а затем рассмотреть форму канавы, выполненную на этом условии, чем вставлять в решение непосредственную геометрическую ее форму. Отображение фиг. 91 в плоскости z_1 показано на фиг. 93. Система, представленная на фиг. 91, еще более просто отображается на плоскости ω. Результат этого отображения показан на фиг. 94.



Фиг. 93. Отображение фиг. 91 на плоскость z_1.

При таком отображении внешний разрез $B''M''C''$ соответствует канаве, где $\Phi=0$.

Значение Ψ уменьшается от Q_1 до минимума Q_m, а затем возрастает до Q_2.

Следующим этапом решения проблемы является определение z_1 с такой функциональной зависимостью от ω, что в направлении оси Φ

$$x_1\sin\alpha-y_1\cos\alpha=0;$$

в направлении $\Psi=Q_1$: $y_1=0$; в направлении $\Psi=Q_2$: $y_1=\dfrac{Q_1-Q_2}{k}\operatorname{ctg}\alpha$ и так, что отрезок $B''M''C''$ входит в канаву $y_1=F_1(x_1)$. Однако вместо того чтобы попытаться отобразить непосредственно внешность ω в плоскости z_1, гораздо проще следовать более косвенному методу отображения обеих плоскостей на первом квадранте плоскости $\zeta=\xi+ih$ (фиг. 95). При этом отображении внешности мы должны сделать следующие соответствия:

$$C''\rightarrow\zeta=0; \quad B''\rightarrow\zeta=\infty; \quad A''\rightarrow\zeta=\alpha;$$

$$D''\rightarrow\zeta=d; \quad M''\rightarrow\zeta=im.$$

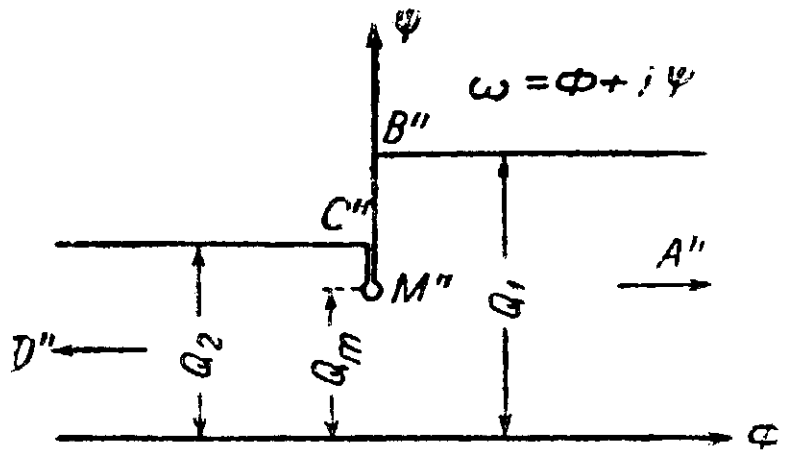
При небольшом изменении[1] теоремы Шварца-Кристоффеля (гл. IV, п. 11) легко заметить, что соответствующее преобразование функции дается следующим выражением:

$$\omega = \frac{Q_1}{\pi} \ln \frac{a+\zeta}{a-\zeta} - \frac{Q_2}{\pi} \ln \frac{\zeta+d}{\zeta-d} . \qquad (6)$$

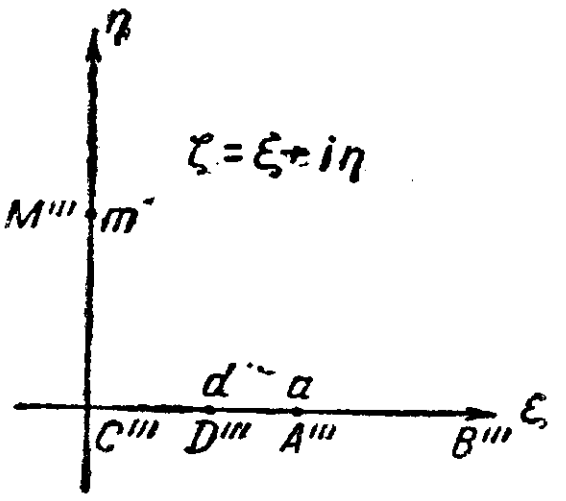
Для плоскости z_1 отображающая функция может быть найдена обобщением преобразования Шварца-Кристоффеля:

$$z_1 = \int_a^z \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta-d)^{\frac{a}{\pi}} (\zeta-a)^{1-\frac{a}{\pi}}}, \qquad (7)$$

где $f(\zeta)$ не имеет особенностей в первом квадранте, положительна на положительной стороне действительной оси (ξ) и обращается в нуль на бесконечности. Ее вид определяет собой геометрическую форму канавы.



Фиг. 94. Отображение фиг. 91 на плоскость ω.



Фиг. 95. Отображение плоскостей z_1 и ω, представленных на фиг. 93 и 94, на плоскость ζ.

Легко убедиться, что преобразование уравнения (7) отображает границу $C'D'A'B'$ на положительную действительную ось (ξ) на плоскости (ζ) и канаву BC на положительную мнимую ось (η). Связь, налагаемая уравнениями (6) и (7), между ω и z_1 (а отсюда и z) ограничивает формальное решение задачи. Нельзя получить точного вывода, пока не будет сделано особого допущения в отношении функции $f(\zeta)$, т. е. геометрической формы канавы. Только раньше чем устанавливать вид $f(\zeta)$, представляет собой интерес дать вывод взаимоотношения между расходом, отбираемым канавой $Q_1 - Q_2$ и остальными константами системы.

Так как точка B соответствует $\zeta = \infty$ и

$$x_1(B) = x(B)$$

[1] Следует только объединить уравнение (3), гл. IV, п. 11, с дальнейшим

непосредственно следует, что

$$x_1(B)=\int_a^{\infty}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-d)^{\frac{a}{\pi}}(\zeta-a)^{1-\frac{a}{\pi}}}$$

Для практических случаев отношение $\frac{a}{\pi}$ очень мало. Поэтому можно ограничиться приближениями, которые, за исключением близости к $\zeta=a,\ d$, даются

$$(\zeta-d)^{\frac{a}{\pi}}\cong 1;\quad (\zeta-a)^{1-\frac{a}{\pi}}\cong\zeta-a.$$

Отсюда следует, что разность отметки H верхнего края канавы от ненарушенного уровня дается выражением:

$$H=x_1(B)\operatorname{tg}(\alpha)=\pi f(a)+0\left(\frac{a}{\pi}\right).$$

Так как D соответствует $\zeta=d$, то

$$z_1(D)=\int_a^{d}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-d)^{\frac{a}{\pi}}(\zeta-a)^{1-\frac{a}{\pi}}},$$

так что

$$y_1(D)=\sin\alpha\int_d^{a}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-d)^{\frac{a}{\pi}}(a-\zeta)^{1-\frac{a}{\pi}}}=\frac{\pi}{a}f(a)\sin\alpha+0(a)\cong\pi f(a).$$

Объединяя эти выводы с уравнением (5), получаем, что для порядка $\frac{a}{\pi}$

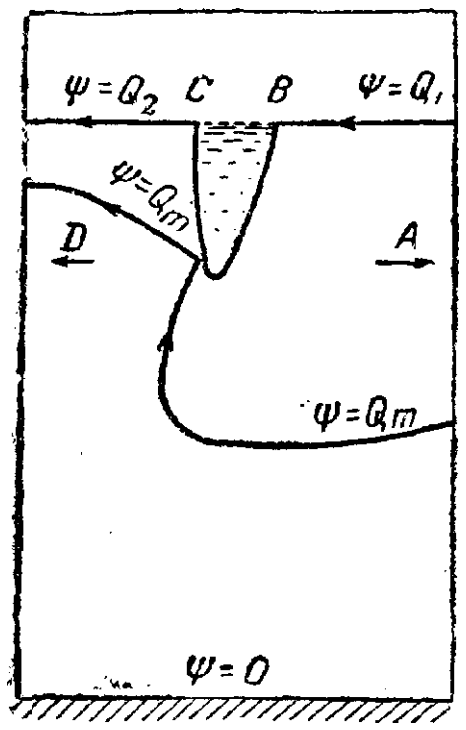
$$H=y_1(D)=\frac{Q_1-Q_2}{k\sin\alpha},$$

так что

$$\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}=\frac{H}{h_1}. \tag{8}$$

Отсюда для порядка $\frac{a}{\pi}$ доля первоначального расхода в песчанике, которая отбирается канавой, равна отношению разности отметок свободной поверхности в канаве к мощности ненарушенного слоя насыщенного водой песчаника. Все предшествующие формулы, которые были использованы для решения этой проблемы, включали в себя глубину воды в канаве или ее ширину. Между тем уравнение (8) показывает, что отношение $(Q_1-Q_2)/Q_1$ определяется разностью отметок H и начальной глубиной залегания жидкости h_1.

Не входя в отдельные детали, которые можно найти в первоисточнике, мы покажем выводы специальных математических выкладок, исполненных Гопфом и Трефтцом. Сделанные допущения были таковы: что $0{,}55\ Q_1$ входит в канаву и $0{,}05\ Q_1$ вытекает обратно. В единицах глубины h_1 ненарушенного потока следует, что



Фиг. 96. Геометрическая форма канавы и оконтуривающих линий тока в соответствии с уравнением (9), гл. VI, п. 2 (по Гопфу и Трефтцу).

$$h_2 = \frac{Q_2}{\overline{k} \sin \alpha} = 0{,}5;$$

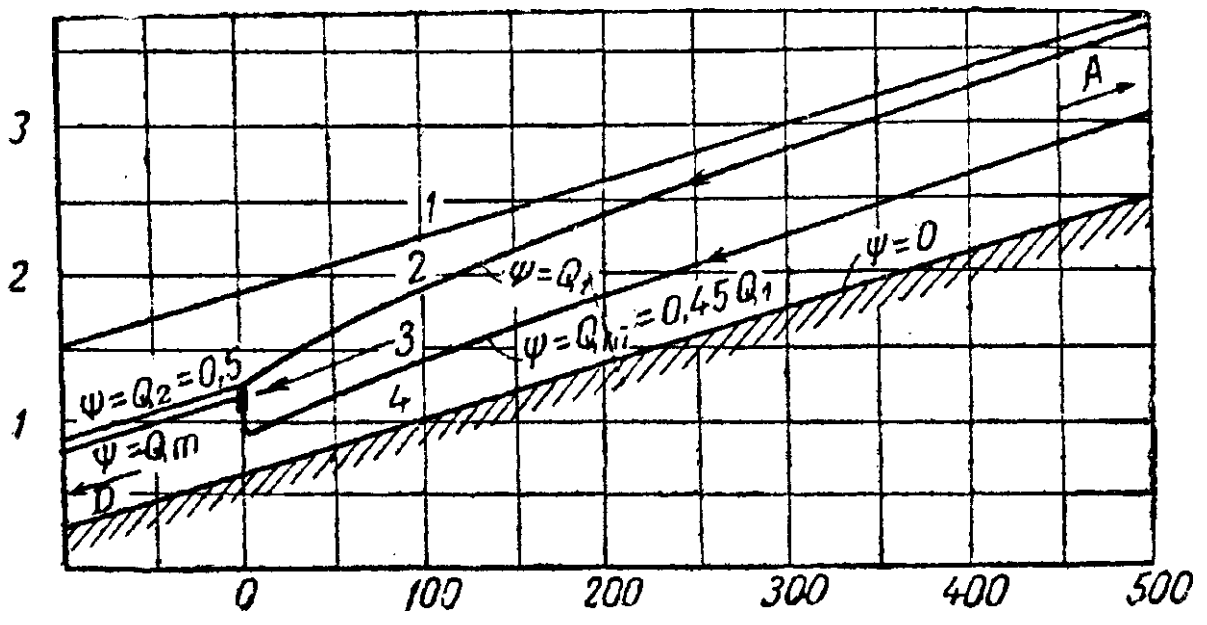
$$h_m = \frac{Q_m}{\overline{k} \sin \alpha} = 0{,}45;$$

$$H = 0{,}5.$$

Геометрическая форма канавы была определена после выбора для $f(\zeta)$ выражения

$$f(\zeta) = \frac{A_1}{\zeta + l} + \frac{A_2}{(\zeta + l)^2}, \qquad (9)$$

l было взято 7,25 и A_2 было взято так, что ширина b канавы была $^1/_{15}$. На фиг. 96 показана геометрическая форма канавы и положение минимальной линии тока ($\Psi = Q_m$), достигающей канавы. Общий внешний вид течения показан на фиг. 97. Форма канавы, показанная на фиг. 96, может показаться искусственной, однако можно без больших затруднений согласовать



Фиг. 97 (по Гопфу и Трефтцу):

1 — ненарушенная свободная поверхность; *2* — свободная поверхность; *3* — канава; *4* — непроницаемое ложе.

константы A и l или изменить внешний вид $f(\zeta)$, так что сечение канавы, по крайней мере в грубом приближении, примет любую заранее намеченную геометрическую форму.

Такое изменение не повлияет материально на производительность дренажа канавой или общую форму свободной поверхности системы, за исключением непосредственной близкости к канаве [1].

3. Решение задачи двухразмерного гравитационного течения методом годографа. Отображение границ. Метод годографов был развит довольно подробно Гамелем [2] и его способу обработки мы будем следовать. Этот математический анализ является весьма действенным, однако очень трудным методом обработки двухразмерных систем, содержащих одновременно водонепроницаемые границы, поверхности с постоянным потенциалом и поверхности фильтрации.

Годограф дает отображение динамической системы, координаты которой являются компонентами скорости ее частиц. В двухразмерных задачах первоначальный геометрический образ системы можно рассматривать заключенным в плоскости z, в то время как годограф находится в плоскости (u, v) или годографа, где u и v являются компонентами скорости в направлении первоначальных осей x и y. Особым преимуществом этого отображения плоскости (u, v) является то обстоятельство, что геометрические формы свободных поверхностей в первоначальной плоскости будут в принципе неизвестны до тех пор, пока не будет решена вся динамическая проблема. Вместе с тем их годографы являются окружностями с определенными и конечными параметрами. Более того, поверхности фильтрации, которые не могут быть зафиксированы в плоскости z, пока не будет известна точная геометрическая форма свободной поверхности, могут быть даны также заранее единственными в своем роде отображениями годографа. Таким путем будет получено аналитическое решение всей проблемы в целом. Поскольку границы системы зафиксированы в плоскости u и v, для окончательного решения проблемы можно приложить теорию сопряженных функций. Преобразования круговых сегментов, дающих изображение

---

[1] Пренебрежение поверхностью фильтрации в B делает значения величин расходов Q_1—Q_2, отбираемых канавой для данной разности отметок H, как это дается уравнением (8), несколько меньшими по сравнению с тем случаем, когда учитывается поверхность фильтрации в B.

[2] Краткое качественное описание теории было дано уже несколько ранее П. Немени в его работе „Wasserbauliche Strömungslehre“, стр. 204, 1933.

Этот метод почти аналогичен развитому Гельмгольцем и Кирхгофом для изучения неразрывного движения жидкости в классической гидродинамике. Однако приводимый здесь подробный анализ является более трудным для освоения вследствие необходимости иметь дело с круговыми сегментами в плоскости годографа (см. также работу M. Muskat, Physics, 6, 402, 1935).

Б. Дэвисон опубликовал по существу аналогичное исследование, но выраженное в более строгой аналитической терминологии (Phil. Mag., 21, 881, 904, 1936), являющееся дальнейшим развитием опубликованной этим автором более ранней его работы на русском языке и опубликованной в Mem. l'Inst. Hydr., 6, 121, 1932 г., Ленинград, которая, повидимому, не была аннотирована Гамелем. Дэвисон также прилагает общую теорию к задаче о плотине с вертикальными фасами (гл. VI, п. 4), но не приводит математических выкладок. Можно также отметить, что комбинация обратного преобразоваиия годографа по методу, развитому в гл. VI, пп. 8 и 9, была применена В. В. Ведерниковым к решению частного случая фильтрации воды в канал (C. R., 202, 1155, 1936), а также к фильтрации воды из канав, представленных прямолинейными секциями (Zeits. angew. Math. u. Mech., 17, 155, 1937).

свободных поверхностей, требуют введения [1] теории модулярных эллиптических функций, которая до сих пор не применялась широко при рассмотрении физических проблем.

Чтобы построить годограф системы в плоскости z, необходимо отобразить различные граничные сегменты на плоскость (u, v). Это может быть достигнуто следующим путем.

а) Водонепроницаемые границы. Обозначая через s — длину водонепроницаемой границы, получим, очевидно, компоненты скорости на контуре из следующего выражения:

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial s}\cos\alpha; \quad v = -\frac{\partial \Phi}{\partial s}\sin\alpha; \quad \frac{v}{u} = \operatorname{tg}\alpha, \tag{1}$$

где Φ — потенциал скорости: α — наклон элемента контура к оси x-ов в s. Отсюда для прямолинейной водонепроницаемой границы α будет иметь постоянную величину и ее образ в плоскости годографа будет изображаться прямой линией, проходящей через начало координат плоскости (u, v), параллельно границе.

б) Поверхность постоянного потенциала. Постоянная масса жидкости. В этом случае согласно определению $\Phi = \text{const}$, и компоненты скорости на поверхности будут:

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial n}\sin\alpha; \quad v = +\frac{\partial \Phi}{\partial n}\cos\alpha; \quad \frac{v}{u} = -\operatorname{ctg}\alpha, \tag{2}$$

где n — нормаль к поверхности. Отсюда следует, что прямолинейный контур постоянного потенциала дает линию через начало координат в плоскости (u, v), нормально к действительной границе.

в) Свободные поверхности. Так как согласно определению давление постоянно вдоль свободной поверхности, Φ дается выражением:

$$\Phi - \bar{k}y = C; \quad \bar{k} = \frac{k\gamma g}{\mu}, \tag{3}$$

где вертикальная координата, направленная вверх, берется $+y$. Эффективная проницаемость $\bar{k}$ равна, очевидно, вертикальной скорости свободного падения жидкости, обязанного силе тяжести. Отсюда при $\frac{\partial y}{\partial s} = \sin\alpha$

$$-\bar{k}\sin\alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0. \tag{4}$$

---

[1] Когда прямолинейные отрезки проходят все через точку, лежащую на круговом сегменте, инверсия преобразования делает излишней необходимость применения модулярных эллиптических функций (см. работу Ведерникова). Такие случаи возникают, когда все поверхности постоянного потенциала горизонтальны, например, при фильтрации в сухую канаву, или когда отсутствует поверхность фильтрации, например, в задаче фильтрации из канав. Более того, для большого класса проблем последнего типа метод годографов является совершенно ненужным (гл. VI, пп. 8 и 9). С другой стороны, в известных специальных случаях, например, при фильтрации воды через вертикальную перемычку, годографы могут быть настолько просты, что модулярные функции вырождаются в элементарные функции, которые могут быть построены из наблюдений (см. работу R. Dachler „Grundwasserströmung“, 95, 1936).

Так как свободная поверхность должна быть в то же самое время линией тока системы, $\frac{\partial \Phi}{\partial s}$ дает величину суммарной скорости на поверхности. Умножая уравнение (4) на $\frac{\partial \Phi}{\partial s}$, получаем, следовательно, что

$$v^2 + u^2 + \bar{k}v = 0. \tag{5}$$

Это соответствует, очевидно, окружности, проходящей через начало координат в плоскости (u, v), с радиусом $\bar{k}/2$ и центром $(0, -\bar{k}/2)$.

г) Поверхности фильтрации. На поверхности фильтрации, через которую жидкость проходит и вступает в область, свободную от обеих сред, пористой и жидкой, давление будет сохранять постоянное значение. Поэтому для решения задачи следует приложить уравнение (4). Однако поскольку этот тип поверхности не является поверхностью линии тока, скорость вдоль нее дается следующим выражением:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial s} = u \cos \alpha + v \sin \alpha, \tag{6}$$

так что

$$\bar{k} \sin \alpha + u \cos \alpha + v \sin \alpha = 0. \tag{7}$$

Отсюда, если поверхность является плоскостью, ее отображение в плоскости (u, v) будет представлять собой прямую линию, нормальную к поверхности и проходящую через точку $(0, -\bar{k})$, которая явится низшей точкой окружности уравнения (5), характеризующего свободную поверхность.

4. Фильтрация через плотину с вертикальными фасами. Аналитическая теория. Теперь, когда мы знаем построение годографа для данной динамической системы, мы готовы приступить к анализу практической проблемы. Возможно, что наиболее простой задачей, которая в одно и то же самое время содержит контурные отрезки, удовлетворяющие всем типам граничных условий, является фильтрация через вертикальную земляную плотину, длина которой сравнительно велика по отношению к ее толщине. Тогда задача аналогична двухразмерной системе.

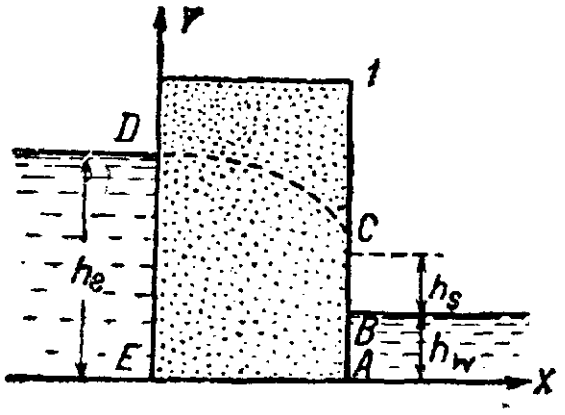
Допустим, что емкости со стороны верхнего и нижнего бьефа плотины настолько велики, что, несмотря на фильтрацию через плотину, вся система находится в состоянии гидростатического равновесия, за исключением внутренности плотины.

Чтобы построить годограф системы в плоскости z (фиг. 98), сначала следует заметить, что так как область слева от DE находится в гидростатическом равновесии, отрезок DE имеет постоянный потенциал и отсюда образует прямой отрезок в плоскости (u, v) нормально к DE, т. е. параллельно оси u. Действительно, отрезок лежит на оси u, так как он должен пройти через начало координат плоскости [уравнение (2), гл. VI, п. 3]; EA водонепроницаемая граница, вдоль которой $v = 0$, так что она также отображается на ось u. Потенциал вдоль AB имеет постоянную величину с исчезающе малыми вертикальными скоростями и поэтому отображается в $A'B'$ на плоскости (u, v); BC — поверх-

ность фильтрации, параллельная оси y. Отсюда она должна отобразиться в линию, параллельную оси u.

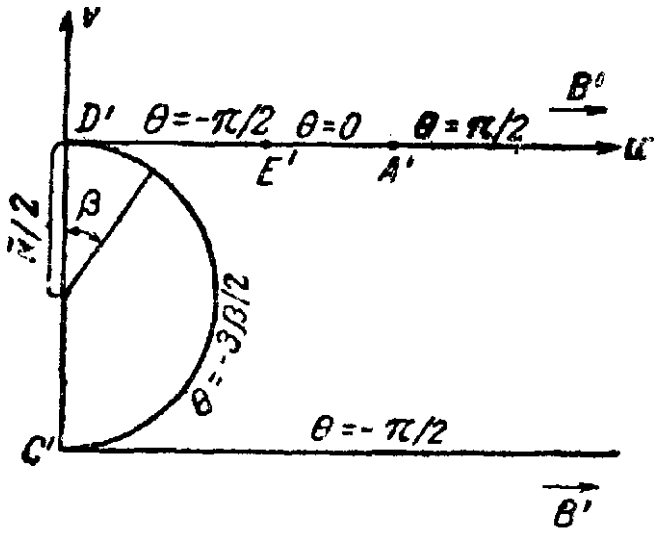
$$v = \bar{k} = \frac{-k\gamma g}{\mu}.$$

Наконец, свободная поверхность CD завершает собой диаграмму в виде полуокружности, проходящей через D' и C'*. Полный годограф такой системы показан на фиг. 99. Одни только граничные условия не дают точно установленного положения годографа свободной поверхности. Вместе с тем можно показать, что положение его (фиг. 99) вытекает из условия, что течение не имеет источников и стоков.



Фиг. 98. Схема фильтрации через плотину с вертикальными фасами в плоскости z.

1 — плоскость z.



Фиг. 99. Плоскость годографа фиг. 98.

1 — плоскость годографа (u, v).

Следует заметить, что пока задача в целом не будет решена, точная форма граничного отрезка DC в плоскости z, а отсюда и верхняя оконечность BC, в принципе неизвестны, хотя контуры системы в плоскости (u, v) являются вполне известными, за исключением численных значений абсцисс E' и A'. Следующий этап решения заключается в нахождении иной функции от (u, v), действительное значение которой на граничных отрезках может быть заранее установлено.

Такая функция может быть получена следующим путем. Беря сначала потенциал комплексного числа

$$f(z) = \Phi + i\Psi, \tag{1}$$

где Φ — потенциал скорости и Ψ — функция тока, получаем, что:

$$u - iv = -f'(z); \quad u + iv = -\overline{f'(z)}, \tag{2}$$

где жирная черта над $[-f'(z)]$ указывает на комплексно сопряженные числа. Эта функция является исходной для промежуточных потенциалов τ, θ, определяемых из выражения:

$$\tau + i\theta = -\ln[-f''(z)], \tag{3}$$

---

* Непосредственное использование Φ и Ψ для конформного отображения плоскости z на плоскость (u, v) является неудобным, так как неизвестно заранее ни значения, ни изменения $\frac{d\Psi}{d\Phi} = -\frac{u}{k}$ на поверхности фильтрации BC.

где θ может быть фактически установлена на контурах области в плоскости (u, v). Так

$$-f''(z)=\frac{(-d/dt)\,f'(z)}{(dz/dt)}=\frac{\dot{u}-i\dot{v}}{u+iv}=\frac{be^{-i\chi}}{ne^{iv}}, \tag{4}$$

где n, b — абсолютные значения скорости и ускорения, а χ, ν — отклонения от их направлений (точки указывают диференцирование по времени).

Отсюда

$$\tau=\ln\frac{n}{b}\;;\quad \theta=\nu+\chi. \tag{5}$$

Теперь граничные значения θ можно установить следующим путем. Для водонепроницаемого основания EA:

$$u=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\;;\quad v=0;\quad -f''(z)=\frac{du-idv}{dx+idy}=\frac{du}{dx}.$$

Отсюда $f''(z)$ действительна и

$$\theta_{EA}=2m\pi=0, \tag{6}$$

так как скорость и ускорение, очевидно, оба параллельны оси x-ов.

Для контура постоянного потенциала AB:

$$u=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\;;\quad v=0;\quad -f''(z)=\frac{du-idv}{dx+idy}=\frac{1}{i}\,\frac{du}{dy}.$$

Поскольку $\frac{du}{dy}>0$, то $\theta=\frac{\pi}{2}+2m'\pi$, так как $\nu=0$ в направлении AB, — $(\theta=\chi)$. Тогда вектор ускорения вблизи AB будет направлен вверх, так как линии тока, когда они выходят из DE, являются выпуклыми и должны резать AB под прямым углом, так что $\lambda>0$. Отсюда $m'=0$ и

$$\theta_{AB}=\frac{\pi}{2}. \tag{7}$$

Для поверхности фильтрации BC:

$$v=-\bar{k};\quad -f''(z)=\frac{1}{i}\,\frac{du}{dy}.$$

В этом случае $\frac{du}{dy}<0$, так что

$$\theta=-\frac{\pi}{2}+2m''\pi.$$

В точке B $\nu=0$, в C $\nu=-\frac{\pi}{2}$. Отсюда, так как

$$|\theta-\nu|=|\chi|\leqslant 2\pi,$$

то единственно возможными значениями для m'' будут (0,1). Если $m''=1$, то χ будет равняться $(^3/_2)\pi$ в B и непосредственно над B, в то время как непосредственно ниже B, в AB $\chi=\pi/2$. Отсюда вследствие непрерывности χ внутри системы, вблизи B, будут точки, где $\chi=\pi$.

Однако с физической стороны это является необоснованным, так как будет создаваться запаздывание частиц жидкости, по мере того как они будут приближаться к поверхности стока. Отсюда вытекает, что $m'' = 0$ и

$$\theta_{BC} = -\frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

Вдоль свободной поверхности CD:

$$n^2 = u^2 + v^2 = -\bar{k}v,$$

так что

$$\frac{du}{dv} = -\left[\frac{v + (\bar{k}/2)}{u}\right]; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u},$$

$$-f''(z) = \frac{du - i\,dv}{dx + i\,dy} = \frac{2uv + \frac{\bar{k}u}{2} + i\left(u^2 - v^2 - \frac{\bar{k}v}{2}\right)}{\bar{k}v} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Вводя полярный угол β (фиг. 99), можно выразить u и v следующими выражениями:

$$u = \bar{k} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}; \quad v = -\bar{k} \sin^2 \frac{\beta}{2}, \tag{9}$$

так что $f''(z)$ принимает вид:

$$-f''(z) = -\frac{e^{3i\beta/2}}{2 \sin \beta/2} \frac{dv}{dx}. \tag{10}$$

Отсюда

$$\theta = -\frac{3\beta}{2} + 2m''\pi,$$

так как $\frac{dv}{dx} < 0$. Поскольку $\beta = 0$, $v = 0$ и $\chi = 0$ в D, следует, что $m''' = 0$ или

$$\theta_{CD} = -\frac{3\beta}{2}. \tag{11}$$

Наконец, вдоль поверхности постоянного потенциала DE:

$$v = 0, \quad u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad -f''(z) = \frac{1}{i}\frac{du}{dy}.$$

В данном случае $\frac{du}{dy} < 0$, так что

$$\theta = -\frac{\pi}{2} + 2m^{\mathrm{IV}}\pi.$$

Вдоль DE $v = 0$, и частицы получают ускорение, направленное вниз; отсюда $\chi = -\pi/2$ и $m^{\mathrm{IV}} = 0$, или

$$\theta_{DE} = -\frac{\pi}{2}. \tag{12}$$

Теперь, когда граничные значения θ установлены, можно перейти к отображению годографа в плоскости (u, v) на бесконечную полуплос-

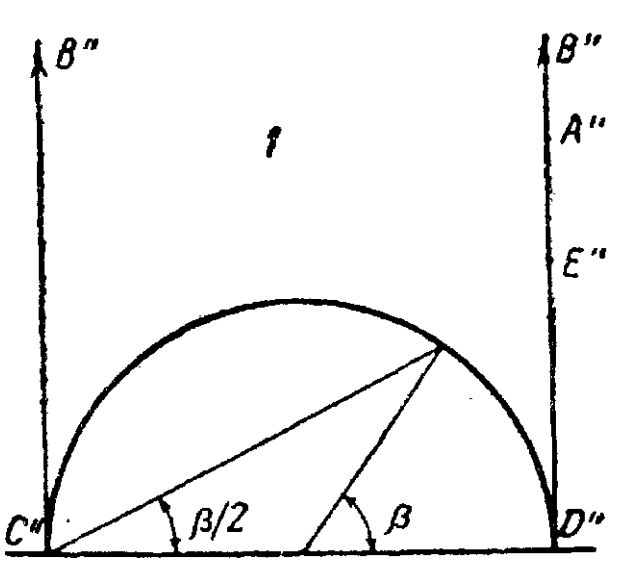
кость. Однако сначала явится удобным преобразовать годограф плоскости (u, v) в более обычную форму (фиг. 100), полученную отражением годографа на ось u, последующим умножением на $1/\bar{k}$, чтобы сделать длину $D'C'$ единицей, затем положительным поворотом на 90° и, наконец, переводом в обычные единицы. Преобразованная плоскость q определяется следующей переменной:

$$q = \frac{i}{\bar{k}}(u - iv) + 1 = 1 + \frac{v}{\bar{k}} + \frac{iu}{\bar{k}}. \qquad (13)$$

Область $B''C''D''E''A''B''$ в плоскости q может быть теперь конформно отображена в верхнюю полуплоскость λ с помощью модулярной эллиптической функции [1] $\lambda(q)$. При этом функция выбрана так, что

$$\lambda(0) = 0; \quad \lambda(1) = 1; \quad \lambda(i\infty) = -\infty;$$
$$\lambda(1 + i\infty) = +\infty. \qquad (14)$$

Очевидно, значения граничных констант θ сохранятся и в плоскости λ. Угол β для отрезка $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ будет также сохранен; соответствие $\lambda - \beta$ дается выражением:

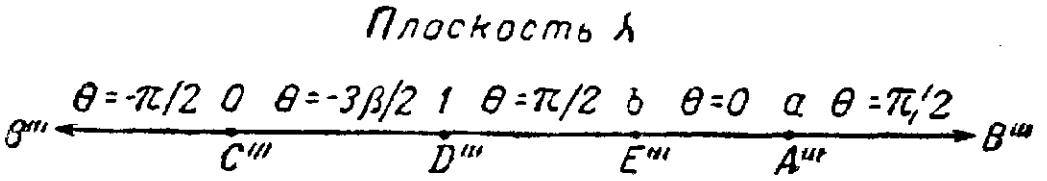


Фиг. 100. Отображение фиг. 99 на плоскость q.

1 — плоскость q.

$$\lambda = \lambda\,[1/2\,(1 + e^{i\beta})].$$

Отображение плоскости λ показано на фиг. 101.



Фиг. 101. Отображение фиг. 100 на плоскость λ.

Поскольку θ известна на действительной оси плоскости λ, комплексная функция $\theta - i\tau$ может быть выражена во всей верхней полуплоскости λ через обобщенный интеграл Пуассона как

$$\theta - i\tau = -i\tau_0 + \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{0\,(\varepsilon)\,(\lambda\varepsilon + 1)\,d\varepsilon}{(\varepsilon - \lambda)\,(1 + \varepsilon^2)}, \qquad (15)^2$$

где τ_0 — произвольная константа.

---

[1] Анализ, в котором даются необходимые формулы, относящиеся к модулярной эллиптической функции, можно найти в книге Г. А. Шварца (H. A. Schwarz, „Formeln and Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen"). Выводы, которые необходимы для данного анализа, приводятся в приложении.

[2] См. приложение.

Если теперь обозначить значения λ, соответствующие E''' и A''', через b и a, уравнение (15) при подстановке в него граничных значений θ принимает вид:

$$\theta - ir = -i\tau_0 + \frac{1}{\pi i}\left[\frac{-3}{2}\int_0^1 \frac{\beta(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\varepsilon - \lambda} + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi}{2}\ln\frac{\lambda - 1}{(a-\lambda)(\lambda - b)\lambda}\right], \qquad (16)$$

где τ_0 содержит известные константы. Возвращаясь к определениям θ, τ из уравнений (4) и (5), имеем в результате

$$-f''(z) = \sqrt{\frac{(\lambda - b)(a-\lambda)\lambda}{\lambda - 1}}\; e^{-\tau_0 + \frac{3}{2\pi}\int_0^1 \frac{\beta(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\varepsilon - \lambda}} \qquad (17)$$

Так как $\lambda = \lambda(q)$ является известной функцией $u - iv = -f'(z)$, следует, что $f''(z) = F[f'(z)]$ и

$$z = -\int \frac{d(u-iv)}{F(u-iv)} = \int e^{\tau + i\theta} d(u - iv) =$$

$$= C\int \sqrt{\frac{\lambda - 1}{\lambda(a-\lambda)(\lambda - b)}}\; e^{-\frac{3}{2\pi}\int_0^1 \frac{\beta(\varepsilon)}{\varepsilon - \lambda}\,d\varepsilon}\, d(u - iv), \qquad (18)$$

где $C = e^{\tau_0}$.

Знак радикала для действительного λ тот же самый, что и для $e^{-i\theta}$. В принципе задача решена, так как на основании уравнения (18) z дается как функция $(u - iv)$, а отсюда даются компоненты скорости как функции z.

5. Численные приложения. Физическое содержание аналитического решения, заключенного в уравнении (18), гл. VI, п. 4, может быть дано, как это соответствует смыслу констант a и b, оценкой геометрических размеров течения, установлением формы свободной поверхности, подсчетом распределения скорости вдоль границ, расчетом расхода через систему и конформным отображением распределения потенциала и линий тока в системе. Легко заметить, что приводимые ниже уравнения являются теми особыми выражениями, в которых даются эти выводы, учитывающие значения θ, указанные на фиг. 101 и принимающие константу C за единицу.

а) Распределение скорости $[x = x(u)]$ вдоль EA, длина последней L и распределение напора жидкости $h(x)$:

$$x(EA) = \int_{u(E)}^{u} e^{\tau}\,du; \qquad L = \int_{u(E)}^{u(A)} e^{\tau}\,du, \qquad (1)$$

$$h(x) = h_e - \int_0^x \left(\frac{u}{k}\right) dx = h_e - \frac{1}{k}\int_{u(E)}^{u} ue^{\tau}\,du. \qquad (2)$$

б) Распределение скорости $[y_w = y_w(u)]$ вдоль фронта стока AB и высота жидкости на стоке h_w:

$$y_w = \int_{u(A)}^{u} e^{\tau}\, du; \quad h_w = \int_{u(A)}^{\infty} e^{\tau}\, du. \tag{3}$$

в) Распределение скорости $[y_s = y_s(u)]$ вдоль поверхности фильтрации BC и длина $BC - h_s$:

$$y_s = -\int_{u(B)}^{u} e^{\tau}\, du; \quad h_s = -\int_{\infty}^{0} e^{\tau}\, du. \tag{4}$$

г) Геометрическая форма и распределение скорости.

$$[x = x(u, v); \quad y = y(u, v)],$$

вдоль свободной поверхности CD:

$$z - z_c = x - L + i(y - h_w - h_s) = \int e^{\tau - \frac{3i\beta}{2}}\, d(u - iv) =$$

$$= \frac{\bar{k}}{2} \int_{\pi}^{\beta} e^{\tau - \frac{i\beta}{2}}\, d\beta. \tag{5}$$

д) Распределение скорости $[y_e = y_e(u)]$ вдоль поверхности поглощения и высота h_e поглощаемой жидкости:

$$y_e = -\int_{u(E)}^{u} e^{\tau}\, du; \quad h_e = -\int_{u(E)}^{0} e^{\tau} du. \tag{6}$$

Соответствующий контроль между расчетом h_e и h_w на основании уравнения (2) дается следующим соотношением:

$$h_e - h_w = \int_{0}^{L} \left(\frac{u}{\bar{k}}\right) dx = \frac{1}{\bar{k}} \int_{u(E)}^{u(A)} u e^{\tau}\, du. \tag{7}$$

е) Суммарный расход Q через систему:

$$\left.\begin{aligned} Q = \int_{0}^{h_e} u\, dy_e = -\int_{u(E)}^{0} u e^{\tau}\, du = \\ = \int_{0}^{h_w} u\, dy_w + \int_{0}^{h_e} u\, dy_s = \int_{u(A)}^{\infty} u e^{\tau}\, du - \int_{\infty}^{0} u e^{\tau} du \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

ж) Чтобы найти распределение потенциала и линии тока аналитическим путем внутри системы, потребовалось бы выразить уравнение (18), гл. VI, п. 4, в числах сначала для получения распределения внутренней скорости, а затем путем интегрирования для нахождения $\Phi(x, y)$. После того как будут определены форма свободной поверх-

ности на основании уравнения (5) и значения Φ вдоль EA по уравнению (2), явилось бы более скорым и удобным методом нахождение $B(x, y)$ численным или графическим путем, приведенным в гл. IV, п. 17. Если имеется электрическая модель, то изображение эквипотенциальных линий может быть быстро получено на модели после того, как будут сделаны необходимые уточнения граничных условий, как это описано в гл. IV, п. 17 [1].

Чтобы понять все значение приближений, которые делались в более ранних теориях гравитационного течения и которые будут рассмотрены несколько ниже, весьма важно получить ясную физическую картину всех существенных свойств течения. Наиболее важной особенностью полученного решения с гидродинамической точки зрения является зависимость между суммарным расходом Q через плотину и напорами жидкости, который поглощается и отдается плотиной, т. е. h_e и h_w [2]. Поэтому мы разовьем главным образом эту часть решения и дадим несколько другие выводы, как они получаются косвенным путем при расчете Q.

Чтобы получить необходимые численные результаты, необходимо установить во всех случаях значение интегрируемых количеств в уравнениях (1) — (8):

$$e^{\tau} = \sqrt{\frac{\lambda - 1}{\lambda\,(a-\lambda)\,(\lambda - b)}}\; e^{-\frac{3}{2\pi}\int_0^1 \frac{\beta(\varepsilon)}{\varepsilon - \lambda}\, d\varepsilon} = \sqrt{\frac{\lambda - 1}{\lambda\,(a-\lambda)\,(\lambda - b)}}\; e^{\alpha}. \tag{9}$$

При этом необходимо сначала отметить, что модулярная эллиптическая функция $\lambda(q)$ была определена здесь уравнением (14), гл. VI, п. 4. Ее свойства определяются свойствами функции $k^{*2} = \theta(q)^3$, определяемой условиями:

$$\theta(0) = 1; \quad \theta(1) = \infty; \quad \theta(i\infty) = 0;$$
$$\theta(1 + i\infty) = 0. \tag{10}$$

Сравнивая эти условия с уравнением (14), гл. VI, п. 4, видно, что:

$$\lambda(q) = 1 - \frac{1}{\theta(q)} = 1 - \frac{1}{k^{*2}}. \tag{11}$$

---

[1] Некоторые распределения потенциала, получаемые на таких моделях, будут представлены в гл. VI, п. 6.

[2] Следует заметить, что со строго инженерной точки зрения эрозия поверхности стока и ее влияние на устойчивость плотины имеют гораздо большее значение. Для изучения этой части проблемы следует сосредоточить свое внимание на точке выхода свободной поверхности и распределении скорости вдоль фронта стока. Однако рассмотрение этих вопросов находится вне рамок настоящей работы, и читатель, который заинтересован в этом, должен обратиться к таким работам, как „Erdbaumechanik", K. Terzaghi, или вышедшая недавно работа A. Casagrande, J. Boston Soc. Civil Eng., 23, 13, 1936.

[3] Здесь модуль эллиптического интеграла снова обозначен условно k^*, чтобы не смешивать с обозначением k — коэфициента проницаемости.

Отсюда применяем формулу, взятую из приложения III к настоящей книге,

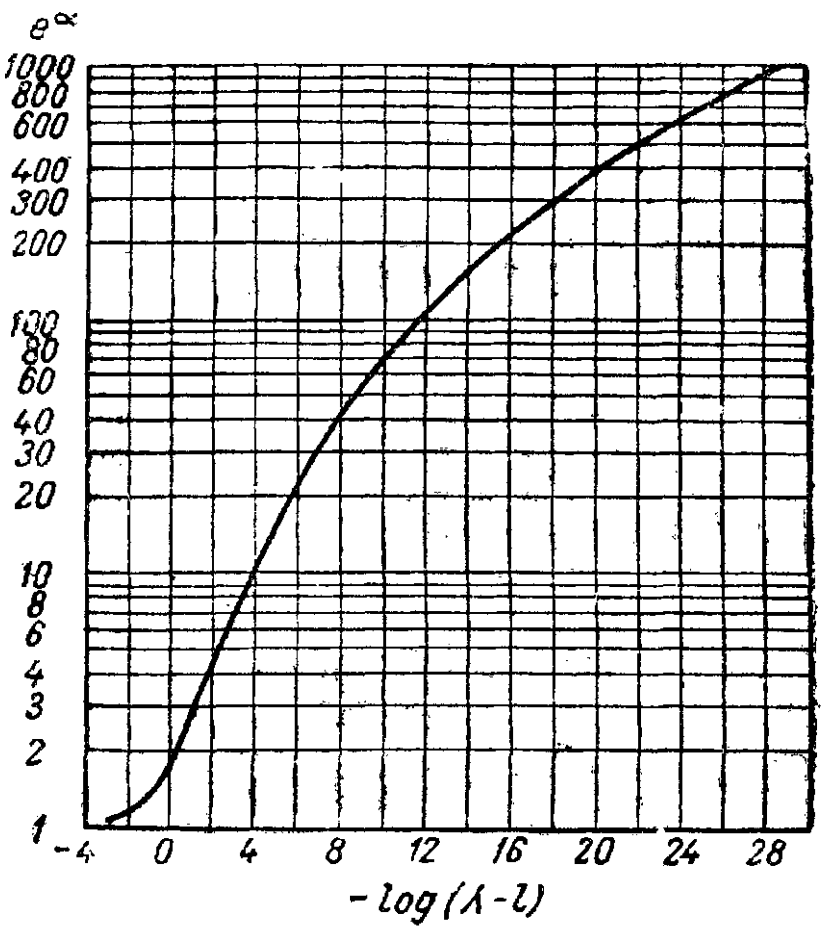
$$\lambda(q)=\theta\left(1-\frac{1}{q}\right), \tag{12}$$

которая теперь может быть развернута на основании правил, уже установленных для функции θ. Эта зависимость устанавливается связью между переменной λ, заключенной в интегрируемом количестве e^{τ} уравнения (18), гл. VI, п. 4, и переменной интегрирования $(u-iv)=-\bar{k}i\,(q-1)$, а также позволяет изменять переменную интегрирования от $u-iv$ до λ.

В конечном итоге следует раскрыть интеграл

$$\alpha(\lambda)=-\frac{3}{2\pi}\int_0^1\frac{\beta(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\varepsilon-\lambda}. \tag{13}$$

Это можно сделать, заметив, что переменная ε в уравнении (15), гл. VI, п. 4, фактически представляет действительную ось плоскости λ, на которой реализовано конформное отображение плоскости q из фиг. 100, помощью функции $\lambda(q)$. Тогда



Фиг. 102. Кривая $\alpha(\lambda)$, определяемая согласно уравнению (13), гл. VI, п. 5.

$$\varepsilon=\lambda(q)=\lambda\left(\frac{1}{2}+\frac{e^{i\beta}}{2}\right)=\theta\left(1-\frac{1}{q}\right)=\theta\left(i\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}\right)=k^{*2}, \tag{14}$$

откуда β может быть подсчитана как функция ε. Результат вычислений, выполненных на основании этого соотношения, приведен на фиг. 102 [1] и может быть использован для того, чтобы выразить в числах e^{τ} из уравнения (9) для всех значений a или b.

e^{a} известно как функция λ. Тогда e^{τ} можно рассчитать по уравнению (9) после выбора a и b. Связь между переменной λ и q или u в уравнениях (1)—(8) устанавливается с помощью формулы инверсии, утверждающей, что если

$$\lambda(q)=\theta(\xi)=k^{*2},$$

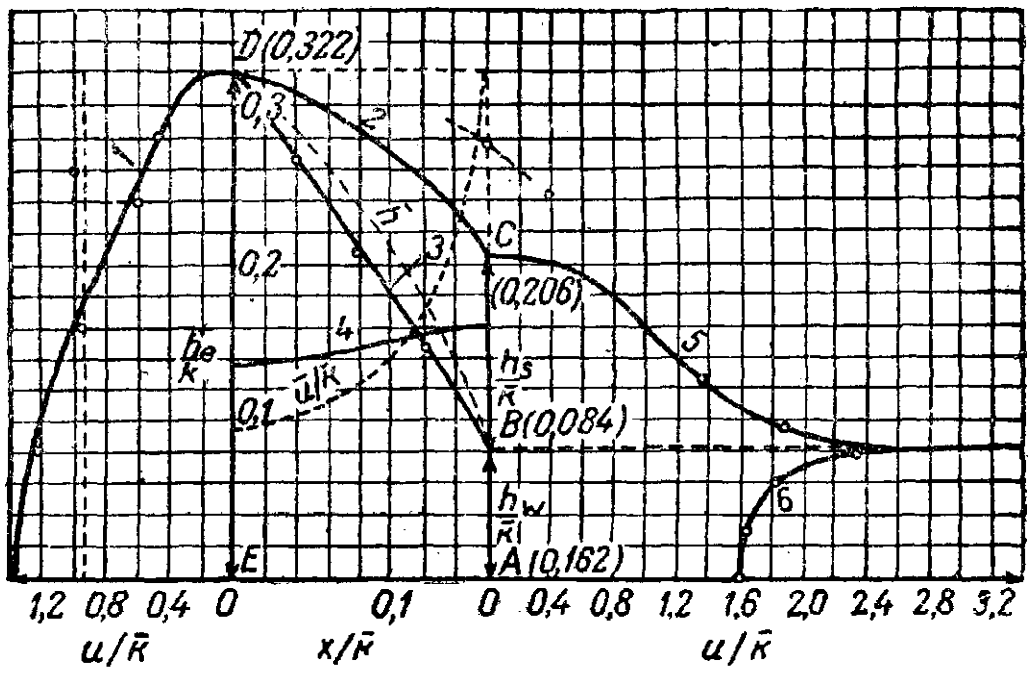
---

[1] Автор выражает свою признательность д-ру Г. Гамелю за присылку ему до публикации этой книги числовых выкладок М. Гюнтера, в которых даны значения e^{a} для $0{,}01\leq\lambda\leq20$ и $-20\leq\lambda\leq0$. Что же касается распространения этих выводов для $\lambda<0{,}01$ и $|\lambda|>20$, так же как и рассуждение о пяти случаях числовых выкладок, помимо сделанных Гюнтером ($b=5$; $a=10$), см. у Маскета (M. Muskat, цит.). Подсчеты Гюнтера были опубликованы затем в Zeits. angew. Math. u. Mech., 15, 255, 1935.

то

$$\pi i\xi = -\pi\frac{K'}{K} = G(k^{*2}) = \ln\frac{k^{*2}}{16} + \frac{k^{*2}}{2} + \frac{13k^{*4}}{64} + \frac{23k^{*6}}{192} + \dots, \tag{15}$$

где K' и K — полные эллиптические интегралы первого рода с модулем $\sqrt{1-k^{*2}}$ и k^*. Они перечислены независимо, а также в отношении K'/K, как функция k^* в работе K. Hayashi, „Tafeln der Besselschen, Theta, Kugel- und andere Functionen".



Фиг. 103. Распределение скорости по фасам и основанию плотины для случая I (табл. 11).

h_e, h_w, h_s — напор поглощения, напор на стоке и длина поверхности фильтрации; $\bar{h}$, u — скорости на свободной поверхности и основании плотины, согласно теории Дюпюи и Форхгеймера. Кружочками нанесены значения, вычисленные согласно теории гл. VI, п. 20.

1 — скорость вдоль поверхности поглощения (*ED*); *2* — свободная поверхность; *3* — давление вдоль *EA*; *4* — скорость вдоль *EA*; *5* — горизонтальная скорость вдоль поверхности фильтрации (*BC*); *6* — скорость вдоль поверхнсти стока (*AB*).

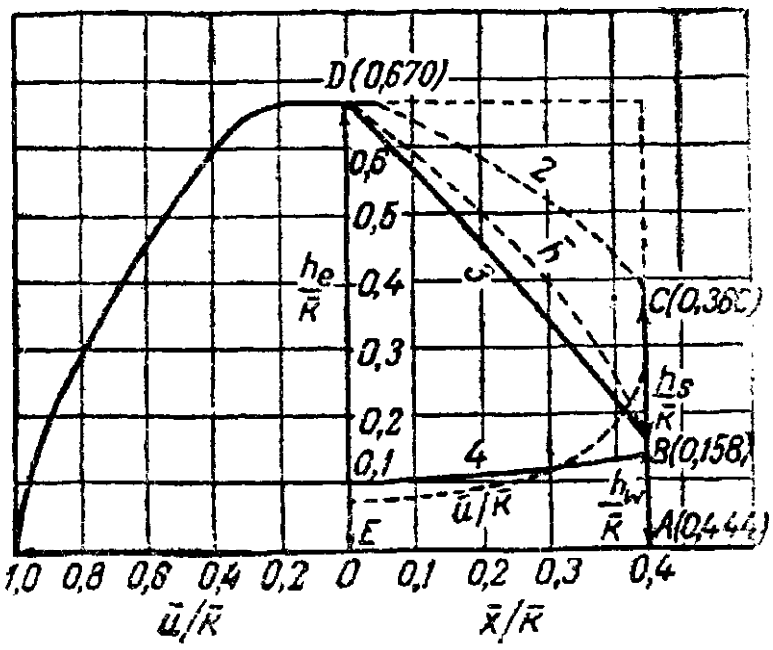
Окончательные интегрирования могут быть исполнены графическим путем в отношении переменной u для конечного значения u, а также аналитическим приближением в значении λ для бесконечности и близкому к особому значению λ (a, b).

На фиг. 103 дано распределение скорости вдоль фронта поглощения и стока, так же как и распределение напора жидкости вдоль основания плотины, соответствующее случаю, когда $a = 10$, $b = E$ Размеры для этого случая были рассчитаны Гюнтером, длины EA и DE. были найдены, как это дается уравнением (5), из конечности D свободной поверхности по отношению к C.

Табл. 11 дает числовые результаты для пяти других случаев, включая сюда значения наиболее важных размеров системы, правильные расходы $Q/\bar{k}^2$, а также рассчитанные на основании уравнения

$$\bar{Q} = \bar{k}\frac{(h_e^2 - h_w^2)}{2L}, \tag{16}$$

что может быть получено различными приближенными методами обработки этой проблемы (гл. VI, пп. 17 и 20). Рассчитанное распределение давления и скорости для случаев II, III и VI (табл. 11) показаны на фиг. 104—106. Свободные поверхности для этих случаев были нанесены на графике без предварительного расчета, следуя общей характеристике, указанной расчетом для случая I, и отрегулированные так, что они проходят через точки C, $(h_s + h_w)$, даваемые расчетом.



Фиг. 104. Распределение скорости по фасам и основанию плотины для случая II (табл. 11).

1 — скорость вдоль поверхности поглощения (ED); *2* — свободная поверхность; *3* — давление вдоль EA; *4* — скорость вдоль EA.

Кривые $\bar{h}$ представляют собой свободные поверхности, которые получаются на основании теории Дюпюи-Форхгеймера (гл. VI, п. 17), т. е. согласно уравнению

$$\bar{h}^2 = -(h_e^2 - h_w^2)\,\frac{x}{L} + h_e^2, \quad (17)$$

а скорости $\bar{u}/\bar{k}$ соответствуют $\bar{h}$, основанному на допущении Дюпюи, что горизонтальные скорости пропорциональны гидравлическому градиенту свободной поверхности.

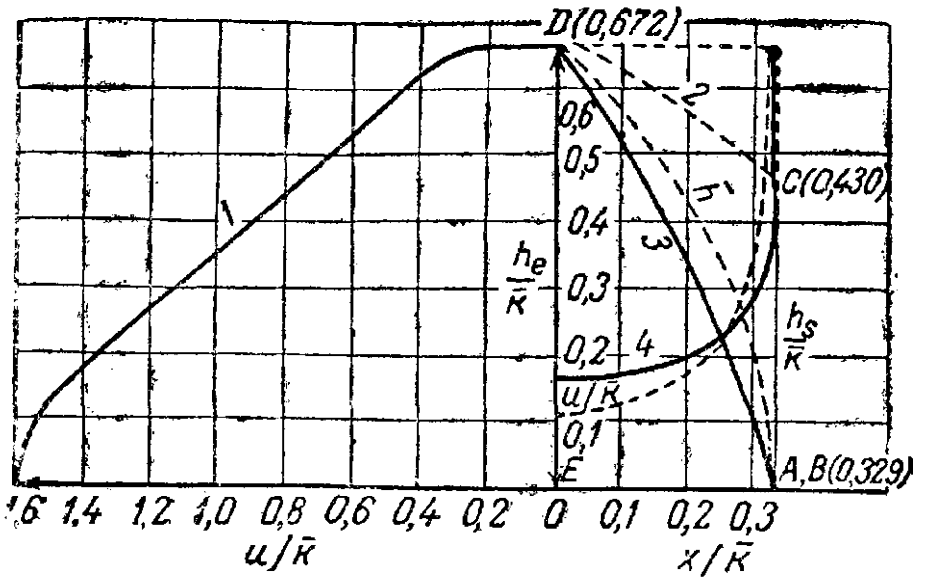
Таблица 11

Случай	I	II	III	IV	V	VI
b*	5	2	10	5	2	1,2
a	10	5	∞	∞	∞	∞
$h_e/\bar{k}$**	0,322	0,670	0,672	0,872	1,286	1,823
$h_w/\bar{k}$	0,084	0,158	0	0	0	0
$h_s/\bar{k}$	0,122	0,202	0,430	0,519	0,646	0,719
$L/\bar{k}$	0,162	0,444	0,329	0,484	0,906	1,692
$Q/\bar{k}^2$	0,299	0,480	0,687	0,783	0,913	0,983
$\bar{Q}/\bar{k}^2$	0,298	0,477	0,686	0,786	0,913	0,982

* Можно заметить, что случай $b=1$ соответствует фильтрации из пласта песчаника или плотины бесконечной мощности, т. е. $L=\infty$.

** Следует запомнить, что количества h_e, h_w, h_s, L и Q могут быть умножены на постоянную величину и все же соответствовать тем же самым параметрам a и b, так как константа C уравнения (18), гл. VI, п. 4, которая была принята за единицу, может быть выбрана совершенно произвольно. Выражение длин $h_e - L$ по отношению к k берет свое основание из того обстоятельства, что табличные значения отношения K'/K (уравнение 15), которое применяется как переменная интеграции в уравнениях (1) — (8), соответствует скорее $u/\bar{k}$, чем самой величине u.

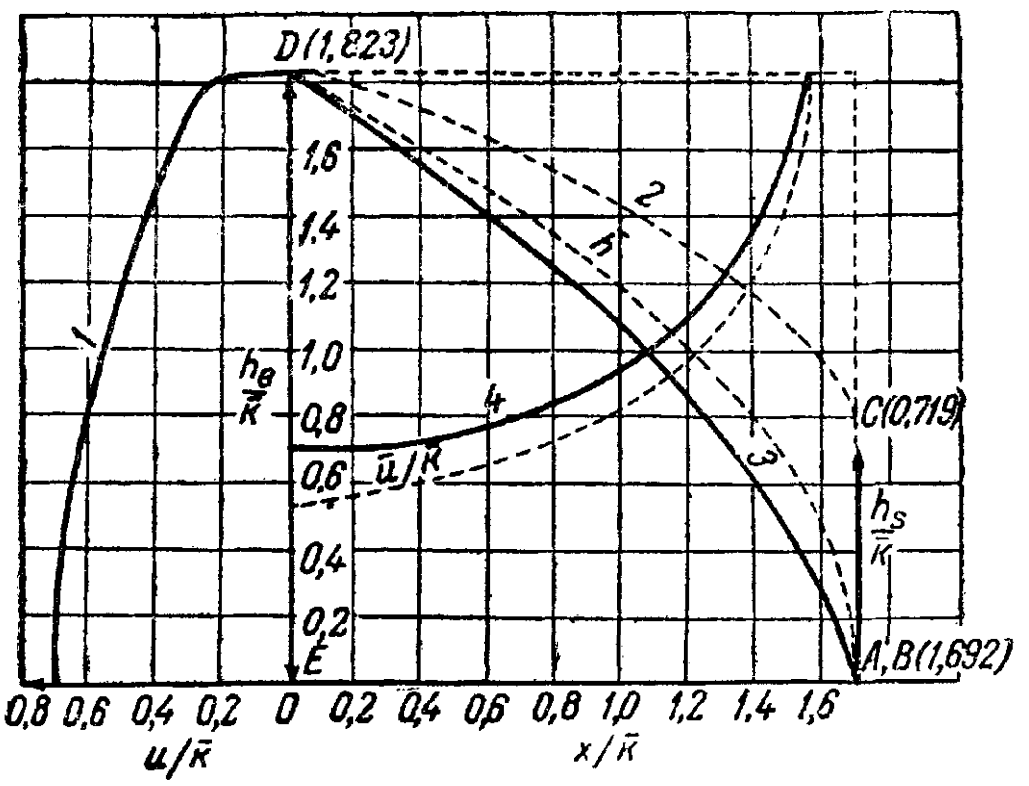
С практической точки зрения наиболее интересным выводом из этих выкладок является тот факт, что уравнение (16) очень близко воспроизводит правильные значения расходов Q[1].



Фиг. 105. Распределение скорости по фасам и основанию плотины для случая III (табл. 11).

1 — скорость вдоль поверхности поглощения (*ED*); *2* — свободная поверхность; *3* — давление вдоль *EA*; *4* — скорость вдоль *EA*.

Поэтому для практических целей достаточно подсчитать расход на основании простой формулы (16) и избежать, таким образом, утомительных выкладок, которых требует точная теория. Однако успешное использование уравнения (16) не следует рассматривать как оправдание тем приближениям, к которым приводят допущения, сделанные при выводе этого уравнения. Действительно, как это будет видно из гл. VI, п. 17, теория Дюпюи-Форхгеймера, которая также приводит к уравнению (16), базируется на таких допущениях, что даже его прибли-



Фиг. 106. Распределение скорости по фасам и основанию плотины для случая VI (табл. 11).

1 — скорость вдоль поверхности поглощения (*ED*); *2* — свободная поверхность; *3* — давление вдоль *EA*; *4* — скорость вдоль *EA*.

зительная справедливость не может быть заранее оправдана, и ее совпадение с уравнением (16) следует рассматривать как совершенную

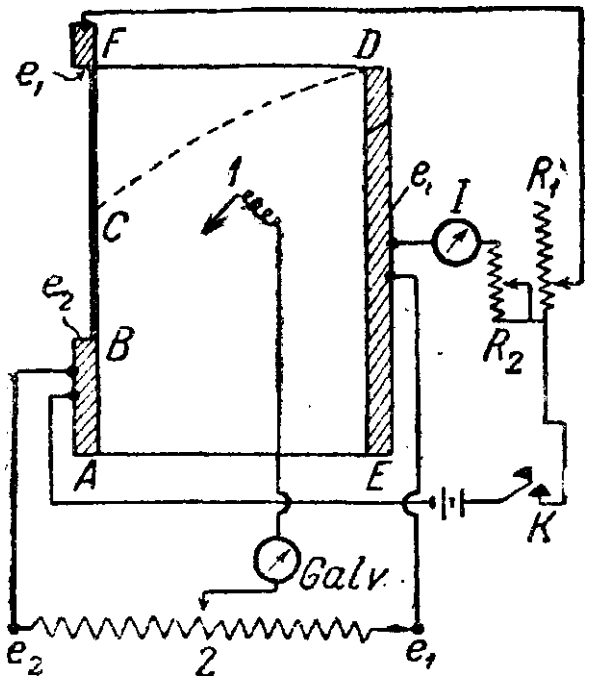
---

[1] Действительно, разница между $\bar{Q}$ и Q вряд ли будет более, чем несоответствие в величине последней, получающееся из-за ошибки, неминуемой при графическом раскрытии интегралов уравнения (8).

случайность. Как уже было замечено, эта теория предусматривает, что действительная свободная поверхность внутри плотин должна следовать уравнению (17) или кривым $\overline{h}$ на фиг. 103—106. Однако даже для случаев I и II (табл. 11), где напоры жидкости h_w представлены величинами, не равными нулю, несоответствия между правильной формой свободной поверхности и кривыми $\overline{h}$ настолько велики, что единственным сходством, на что можно согласиться, является однообразный характер падения обоих семейств кривых по мере приближения к поверхностям стока. Эти кривые, отмеченные буквой $\overline{h}$, представляют собой интерес не только потому, что они показывают ошибочность теории Дюпюи-Форхгеймера, предугадывающей формы свободной поверхности при гравитационном течении, но, кроме того, они еще предупреждают об осторожности, которую необходимо соблюдать, экстраполируя выводы, полученные аналитическим или эмпирическим путем для систем с одной геометрией, в случае их использования для другой геометрии. Установлено, что аналог уравнения (17) для радиального гравитационного течения воспроизводит довольно точно фактическое давление или распределение напора жидкости в основании радиальных песчаных моделей (гл. VI, п. 18). Он дает, однако, только грубое приближение к правильному распределению напора жидкости при линейной гравитационной фильтрации через плотину.

Это несоответствие становится еще более отчетливым, когда сравнивается действительное распределение скорости вдоль основания линейных систем со значениями ее, соответствующими уравнению (17) и обозначенными кривыми $\overline{u}/\overline{k}$, которые допускают, что это уравнение воспроизводит непосредственное распределение напора жидкости в основании сооружения или, как это дается теорией Дюпюи-Форхгеймера, свободную поверхность, уклон которой пропорционален горизонтальной скорости. Эта несоразмерность весьма заметна на фиг. 103 и 104, где $h_w \neq 0$. Вместе с тем отношение $\overline{u}/\overline{k}$ к точной величине скорости становится бесконечно большим, так как поверхность стока приближается к основанию сооружения для $h_w = 0$ по мере того, как последнее становится логарифмически бесконечным; $\overline{u}/\overline{k}$ принимает бесконечное значение, как $1/\sqrt{x}$ для $x \to 0$, где x — расстояние от точки A (фиг. 98). Несмотря на ошибочные стороны остальных характерных особенностей теории Дюпюи-Форхгеймера, стремящейся воспроизвести даже приблизительно внутренний режим линейного гравитационного течения, остается важным обстоятельством тот факт, что результирующий расход дается простой формулой (16) с достаточной для практических целей точностью, как это было первоначально выведено на основе теории Дюпюи-Форхгеймера. Эта парадоксальная ситуация по отношению к уравнению (16) будет освещена в гл. VI, п. 20, где будет показано, что (16) может быть получено из физически обоснованной приближенной теории. Последняя в то же самое время дает приближение к величине точного распределения давления. Именно та теория, которая будет приведена ниже, определяет собой физическое значение уравнения (16), но не теория Дюпюи-Форхгеймера, на основании которой был получен вывод уравнения (16) и который следует рассматривать только как совпадение.

6. Изучение гравитационного течения с помощью электрических моделей. Как уже было показано в гл. IV, п. 17, для течения жидкости отсутствует непосредственный электрический аналог гравитационного эффекта. В целом это обстоятельство не нарушает тождественности между электрическими моделями и негравитационным течением той же самой геометрической формы, включающими в себя вертикальные скорости, если только граничные условия для последних выражены в значениях потенциала скорости. Однако электрические модели гравитационного течения конструируются не так легко. Отсутствие априорного знания формы свободной поверхности оставляет соответствующую границу электрической модели не установленной. Так как электрический ток нельзя подвергнуть воздействию такой постоянной внешней массовой силы, как сила тяжести, он пересечет в итоге всякий проводник, в котором протекает, и граничные линии тока будут всегда совпадать с физическими контурами модели.



Фиг. 107. Электрическая схема тока для экспериментов на модели гравитационного течения:

1 — зонд потенциала; *2* — делитель потенциала.

Поэтому свободная поверхность в электрической модели должна быть искусственно введена в систему изменением физических контуров проводящей модели. Хотя ее точная форма заранее не известна, само определение поверхности налагает условие, что потенциал вдоль нее должен изменяться линейно с изменением координаты, соответствующей вертикальной координате течения жидкости. Отсюда если только геометрическая форма свободной поверхности на модели будет вырезана опытным путем так, что выполнится это условие, а также будут удовлетворены остальные граничные условия, то внутреннее распределение потенциала и линий тока будет совершенно таким же, как если бы свободная поверхность развилась автоматически в результате воздействия реальной массовой силы, например, силы тяжести. Схема распределения электрического тока в моделях, сконструированных[1] для изучения фильтрации воды через плотину с вертикальными ребрами, показана на фиг. 107, где *AEDF* представляет собой пластину высокого сопротивления, тождественную проницаемому сечению плотины.

---

[1] R. D. Wyckoff and D. W. Reed, Physics, 6, 395, 1935. Фиг. 108—111 также взяты из этой работы, которая содержит полностью все детали техники эксперимента, применявшейся в этих электрических моделях. Более раннее изучение гравитационного течения, основанное на электрической аналогии, было сделано C. G. Vreedenburgh and O. Stevens (De Ingenieur, 48, 187, 1933), которые применили для этой цели электролитические модели. Однако эти авторы должны были принять, что формы свободной поверхности заранее очертаны предварительными экспериментами на песчаных моделях. Более того, изменения потенциала вдоль поверхности фильтрации были приняты в расчет ими только приблизительно.

Высокое сопротивление необходимо для уменьшения потери тока через пластину, а отсюда и пертурбации линейного распределения потенциала вдоль BF, которая представляет часть поверхности стока над уровнем вытекающей жидкости. Более того, пластина должна быть изготовлена из такого материала, который можно легко вырезать с целью найти свободную поверхность DC. Эти оба требования удовлетворяются изготовлением пластины из листа плотного бристольского картона, политого 12—20 раз графитовой коллоидной жидкостью, например „аквадагом“. Однородность покрытия испытывают совершенно свободно электрическим путем, начертив распределение потенциала между двумя параллельными электродами с постоянным потенциалом и равной длиной, расположенными вдоль противоположных краев первоначально прямоугольного листа картона. Соответствующие граничные условия устанавливаются следующим путем. Поверхность поглощения с постоянным потенциалом дается высокопроводимым электродом ED, на котором поддерживается потенциал e_1, а поверхность стока с постоянным потенциалом—электродом AB при потенциале e_2. Отношение AB/ED равно h_w/h_e. Отношение AE/ED имеет значение L/h_e. Полоска сопротивления кладется вдоль остальной части BCF на поверхности стока. На оконечностях поддерживаются потенциалы e_2 и e_1.

Так как сопротивление полоски вдоль BCF гораздо меньше, чем у листа AED, ток в первой намного превосходит значение его в последнем.

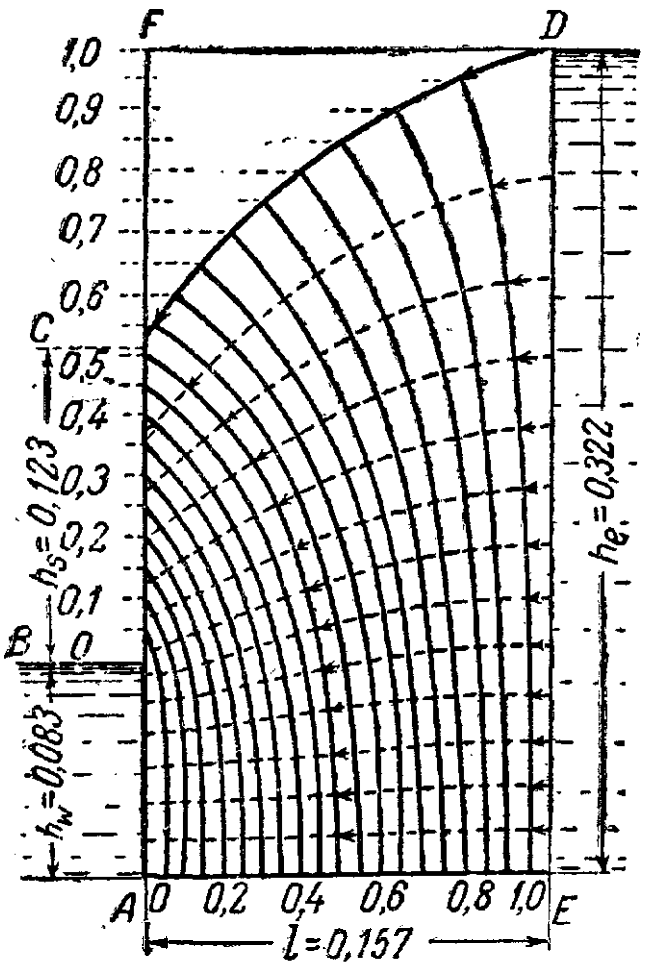
В результате этого изменение потенциала вдоль BF остается близко к линейному, соответствуя, таким образом, постоянному давлению поверх AB. Конечный этап в создании модели заключается в вырезывании левого верхнего угла DFC таким образом, что потенциал в любой точке вдоль DC будет изменяться линейно с расстоянием этой точки поверх AE.

Это достигается лучше всего регулированием формы CD так, чтобы оконечности одинаково расположенных эквипотенциальных линий на CD имели проекции на CF, расположенные на равном расстоянии. Укол, сделанный сравнительно острой иглой, дает удовлетворительную пробу потенциала. Поскольку форма CD была установлена, распределение потенциала может быть начерчено внутри контура $ABCDE$ совершенно так же, как и в любой другой электрической модели. Линии тока можно построить как линии, ортогональные эквипотенциальным кривым. Можно определить также расход тока в системе измерением его через счетчик с делителем потенциала в разомкнутой цепи. Если величина тока составляет I для падения потенциала $e_2 - e_1$ и если удельное сопротивление пластины σ, то расход в соответствующей плотине с проницаемостью k будет:

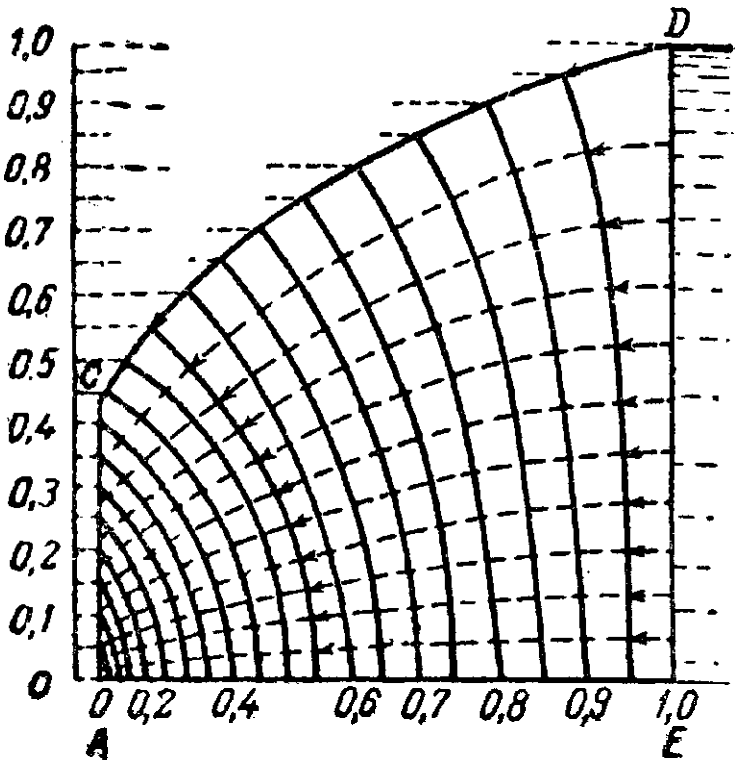
$$Q = \frac{k\gamma g\,(h_e - h_w)}{\mu}\ \frac{\sigma I}{e_1 - e_2}. \qquad (1)$$

На фиг. 108—111 показано распределение потенциала и линий тока, полученное указанным методом на электрических моделях плотин с вертикальными и наклонными фасами. Фиг. 108 воспроизводит плотину, относительные размеры которой для AB, AE и ED соответствуют величинам того случая, который был аналитически обработан в гл. VI,

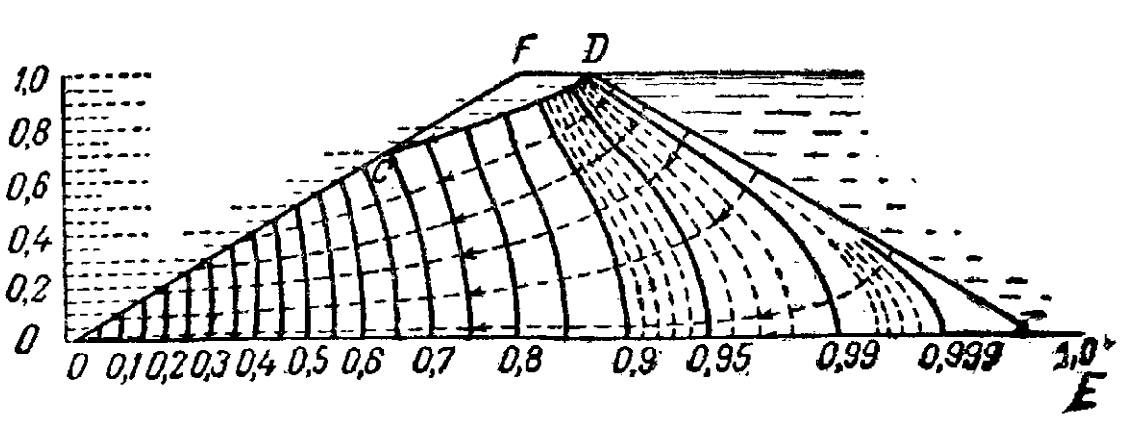
п. 5, и дает хорошее подтверждение применимости электрической модели для решения этих проблем, так как геометрическая форма свободной поверхности и высота BC превосходно согласуются со значениями, подсчитанными в гл. VI, п. 5 (фиг. 103). Более того, распределение скорости вдоль ED и AC, а также распределение потенциала вдоль EA, которые приводятся на фиг. 108, близко совпадают с соответствующими величинами на фиг. 103.



Фиг. 108. Распределение потенциала и линии тока в плотине с вертикальными фасами, соответствующее случаю, изображенному на фиг. 103, и полученное из экспериментов с электрическими моделями (по Вайкову и Риду).



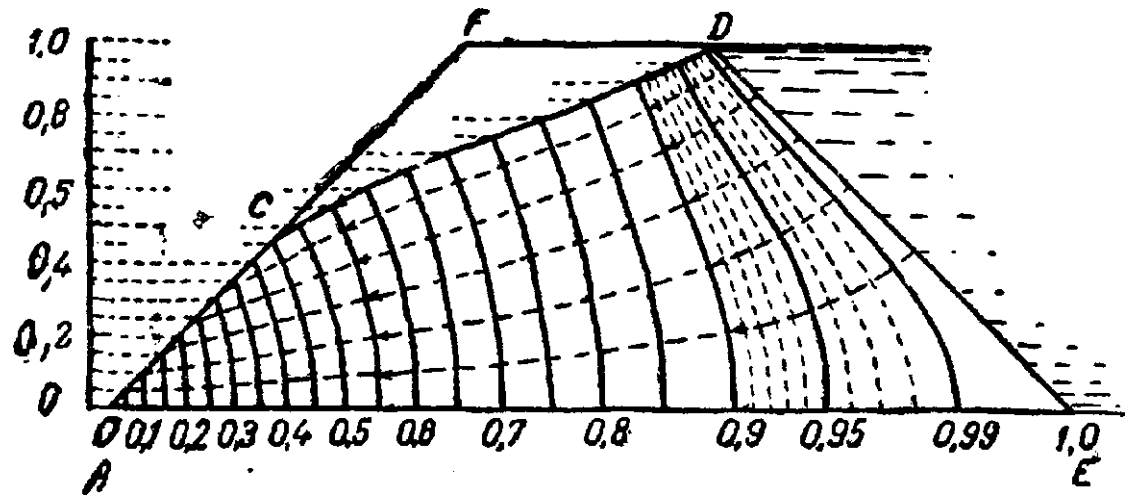
Фиг. 109. Распределение потенциала и линии тока в плотине с вертикальными фасами и нулевым уровнем жидкости на стоке, полученное из экспериментов на электрических моделях (по Вайкову и Риду).



Фиг. 110. Распределение потенциала и линии тока в плотине с фасами, имеющими наклон 30°, полученное из экспериментов на электрических моделях (по Вайкову и Риду).

Фиг. 109 дает распределение потенциала и линии тока для плотины с вертикальными фасами и исчезающе малым уровнем вытекающей жидкости. Размеры приблизительно пропорциональны соответствующим величинам случая VI (табл. 11), (гл. VI, п. 5). Распределение потен-

циала и линий тока для плотин с ребрами, наклоненными под углами 30 и 45°, показано на фиг. 110 и 111. Следует заметить низкие градиенты в пяте E, а также перегибы свободной поверхности. В то время как теоретически предсказанные нулевые значения скорости в E оказались (гл. VI, п. 1), таким образом, подтвержденными бесконечно большие скорости, которые следует ожидать в носке плотины A, должны, очевидно, густо концентрироваться вблизи A, так как даже последняя из эквипотенциальных линий, начерченных на фиг. 110 и 111, не дает практически никакого намека на достижение бесконечно больших скоростей в A.



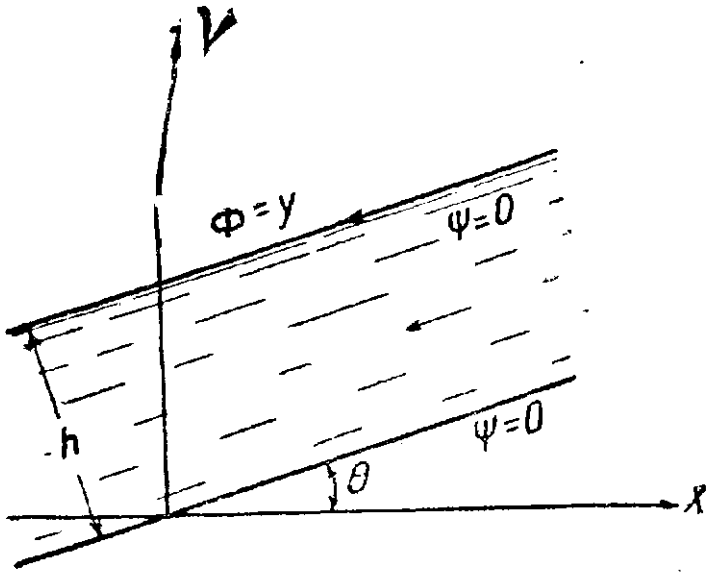
Фиг. 111. Распределение потенциала и линии тока в плотине с фасами, имеющими наклон 45°, полученное из экспериментов на электрических моделях (по Вайкову и Риду).

Следует заметить, что приведенные здесь примеры приложения метода электромоделирования для изучения гравитационного течения включают в себя достаточно идеализированные проблемы фильтрации воды через плотины. Однако этот метод практически неограничен в своих рамках. Нельзя только создать моделей, имитирующих плотины с центральной водонепроницаемой сердцевиной, но двухразмерные системы, содержащие участки различной проницаемости, могут прекрасно обрабатываться по этой методике. Водонепроницаемые участки могут имитироваться вырезыванием из проводника пластины фигур, геометрически подобных водонепроницаемым участкам. Влияние же изменения проницаемости можно изучать, изменяя число покрытий графитом, нанесенных на различных частях модели.

7. Соответствие некоторых точных решений уравнения Лапласа для гравитационного течения. Методы Гопфа, Трефтца и Гамеля, непосредственно направленные на изучение проблем гравитационного течения, приводят к решениям для систем с заранее установленной геометрией. Однако трудность выполнения полного необходимого анализа до самого конца является серьезным ограничением их общего приложения к различным частным задачам[1]. Поэтому некоторым оправданием

[1] Следует заметить, что трудности реализации конформного отображения плоскости годографа зависят всецело от аналитического метода. Поэтому с практической точки зрения можно получить существенные характерные стороны решения, делая преобразование графическим путем (F. Weinig and A. Shields, Wasserkraft und Wasserwirtschaft, 31, 233, 1937).

явится, если рассматривать не только приближенные методы математической обработки поставленных задач, но вначале даже более примитивные способы построения типового распределения потенциала, а затем уже оценивать, соответствуют ли они системам, имеющим практический интерес. Последняя процедура обладает тем достоинством, что она, по крайней мере, обеспечивает точное решение проблемы потенциала, если даже геометрия соответствующей физической системы не идентична с рассматриваемой. Поэтому вначале будут показаны типовые примеры таких решений[1]. Так как приводимые здесь решения будут все представлены сопряженными функциями, получающимися в результате выделения из комплексной переменной функции ее действительной и мнимой части, то по необходимости эти решения будут относиться к двухразмерным системам (гл. IV, п. 8).



Фиг. 112. Плоское линейное течение под действием силы тяжести.

Будет удобным также принять давление над свободной поверхностью равным нулю и $\bar{k}$ или $k\gamma g/\mu$ равным 1, так что условие, которое удовлетворяется Φ вдоль свободной поверхности, будет $\Phi = y$.

а) Течение с линейной водной поверхностью. Наиболее простым случаем изображения с помощью комплексной переменной гравитационного течения является тот, где рассматривается течение в бесконечно распространяющемся наклонном слое, не нарушенном источниками или стоками[2]. Согласно обозначениям на фиг. 112 соответственная зависимость выразится:

$$\omega = \Phi + i\Psi = z \sin\theta e^{-i\theta} + h\cos\theta, \tag{1}$$

так что

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= (x\cos\theta + y\sin\theta)\sin\theta + h\cos\theta \\ \Psi &= (-x\sin\theta + y\cos\theta)\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Тогда очевидно, линия тока

$$\Psi = 0;\ y = x\,\mathrm{tg}\,\theta \tag{3}$$

представит собой водонепроницаемое ложе и выражение

$$\Psi = Q = h\sin\theta;\ y = x\,\mathrm{tg}\,\theta + h\sec\theta \tag{4}$$

— верхнюю поверхность. Это есть выражение для свободной поверхности, которая получается из подстановки уравнения (4) в (2), что дает, как и следует ожидать,

$$\Phi = y. \tag{5}$$

---

[1] Решения, приведенные здесь, взяты из работы J. Kozeny in Wasserkraft und Wasserwirtschaft, 26, 28, 1931; см. также В. В. Ведерников, там же, 29, 128, 1934.

[2] Это положение уже применялось при обработке задачи Гопфа и Трефтца [уравнение (2), гл. VI п. 2].

б) Параболическая свободная поверхность. Полагая

$$x + iy = z = \frac{1}{2Q}\omega^2 \tag{6}$$

и выделяя действительную и мнимые части, получаем:

$$x = \frac{1}{2Q}(\Phi^2 - \Psi^2); \quad y = \frac{\Phi\Psi}{Q}. \tag{7}$$

Поэтому линия тока $\Psi = Q$ является свободной поверхностью:

$$y^2 - Q^2 - 2Qx = 0, \tag{8}$$

что соответствует выражению для параболы с фокусом в начале координат. Положительная ось x-ов соответствует водонепроницаемому основанию (фиг. 113), в то время как отрезок ее от начала координат до $x = -Q/2$ является поверхностью нулевого потенциала.

За исключением пористой среды, расположенной вправо от оси y, система должна приближаться к физическому явлению фильтрации через очень толстую плотину. Наличие среды вправо от оси y, повидимому, уменьшает суммарный расход Q от той величины его, что проходит через соответствующую плотину. Действительно, полагая, что на большом расстоянии L высота свободной поверхности и напор жидкости — h_e, из уравнения (8) следует, что Q можно получить из следующего выражения:

$$Q = L\left(\sqrt{1 + \frac{h_e^2}{L^2}} - 1\right). \tag{9}$$

которое всегда будет меньше, чем $h_e^2/2L$ — выражение, найденное в гл. VI, п. 5, для того, чтобы воспроизвести почти точно фильтрацию через плотину с нулевым напором вытекающей жидкости. Как это и следует ожидать, для малых значений h_e/L уравнение (9) очень тесно сближается с (16), гл. VI, п. 5 при ($h_w = 0$), так как излишнее количество пористой среды на поверхности стока (фиг. 113) должно принять малое значение по сравнению с основной массой плотины, по мере того как возрастает мощность последней. Следует заметить, что любую параболическую линию тока $0 < \Psi < Q$ можно рассматривать как границу течения, не изменяя свободной поверхности, которую дает уравнение (8).

в) Дренаж из канав. Следующее выражение дает несколько иной тип связи комплексной переменной. Оно приводит к системам со свободной поверхностью, соответствующей фильтрации воды из канав:

$$z = -He^{\frac{\pi\omega}{Q}} - i\omega + \frac{Q}{2}, \tag{10}$$

так что

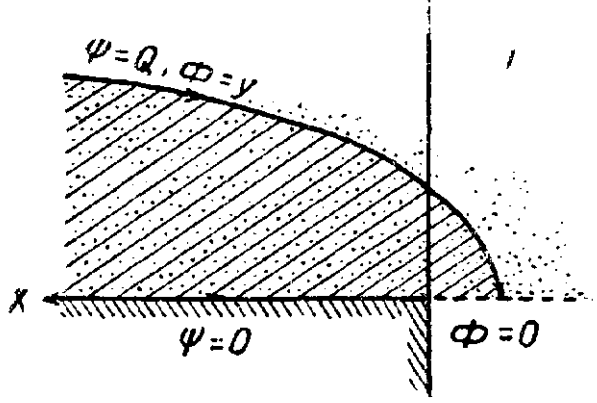
$$\left.\begin{aligned} x &= -He^{\frac{\pi\Phi}{Q}}\cos\frac{\pi\Psi}{Q} + \Psi + \frac{Q}{2} \\ y &= -He^{\frac{\pi\Phi}{Q}}\sin\frac{\pi\Psi}{Q} - \Phi \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Так как $+y$ берется здесь направленным вниз (фиг. 114), потенциал будет $(k/\mu)\ (p-\gamma g y)$, и условие для линии тока $\Psi = \text{const}$, которая явится свободной поверхностью, будет:

$$\Phi = -y \text{ (где } k\gamma g/\mu = 1).$$

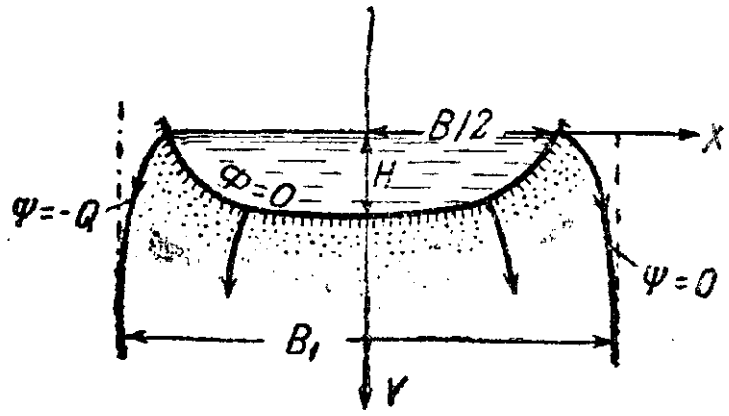
Две линии тока $\Psi = 0, -Q$ являются, очевидно, линиями тока свободной поверхности и определяются специальными кривыми:

$$x = -He^{-\frac{\pi y}{Q}} + \frac{Q}{2}; \quad x = +He^{-\frac{\pi y}{Q}} - \frac{Q}{2}, \tag{12}$$



Фиг. 113. Гравитационное течение с параболической свободной поверхностью (по Козени).

1 — плоскость z.



Фиг. 114. Фильтрация из канавы со свободной поверхностью, ограниченной вертикальными асимптотами (по Козени).

которые будут симметричными относительно оси y. Геометрическая форма канавы, вдоль которой $\Phi = 0$, дается выражением:

$$\left(x - \frac{Q}{\pi}\cos^{-1}\frac{y}{H}\right)^2 + y^2 = H^2. \tag{13}$$

Отсюда ширина канавы

$$B = Q - 2H, \tag{14}$$

в то время как ее максимальная глубина — H. Максимальная ширина поверхности жидкости, просачивающейся в пористую среду, будет

$$B_1 = 2\,|x|_{y=\infty} = Q = B + 2H. \tag{15}$$

Разумеется, полученные таким путем простые выводы могут быть приложены, если только геометрическая форма канавы принадлежит к семейству, установленному уравнением (13), и пористая среда имеет очень большую мощность, так что жидкость будет сохранять неопределенно долго свою вертикальную, направленную вниз фильтрацию. Небольшие отклонения в форме канавы от уравнения (13) не будут сами по себе создавать серьезных ошибок в случае пользования уравнениями (14) или (15). Однако допущение бесконечной мощности пористой среды вполне определенно ограничивает область применения этих формул случаями, где водяное зеркало грунтовых вод лежит на большой глубине под основанием канавы. Во многих практических слу-

чаях вода, просачиваясь из канав вниз, достигнет нормального уровня грунтовых вод на сравнительно небольшой глубине, заставляя при этом линии тока принимать скорее горизонтальное, чем вертикальное, направление. Несколько отличное приближенное решение задачи, особенно для проблем последнего типа, дается следующим отношением комплексной переменной:

$$z = He^{-\frac{\pi\omega}{Q}} - i\omega + \frac{Q}{2}, \tag{16}$$

что эквивалентно

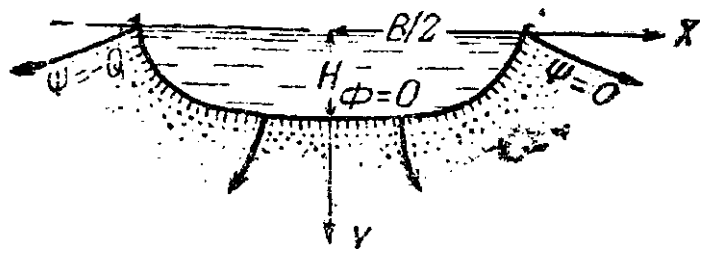
$$\left.\begin{aligned} x &= He^{-\frac{\pi\Phi}{Q}} \cos\frac{\pi\Psi}{Q} + \Psi + \frac{Q}{2} \\ y &= -He^{-\frac{\pi\Phi}{Q}} \sin\frac{\pi\Psi}{Q} - \Phi \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

В данном случае две симметричные линии тока свободной поверхности, $\Psi = 0$, $-Q$ даются выражением:

$$x = He^{\frac{\pi y}{Q}} + \frac{Q}{2}; \quad x = -He^{\frac{\pi y}{Q}} - \frac{Q}{2}. \tag{18}$$

Отсюда нарастание с глубиной происходит логарифмически, в зависимости от увеличения расстояния от канавы (фиг. 115), в то время как в случае уравнения (12) свободная поверхность достигает вертикальных асимптот, по мере того как она приближается к расстоянию $Q/2$ от центра канавы. Геометрическая форма канавы ($\Phi = 0$), соответствующая уравнениям (16) и (17), определяется равенством:

$$\left(x - \frac{Q}{\pi}\cos^{-1}\frac{y}{H}\right)^2 + y^2 = H^2, \tag{19}$$



Фиг. 115. Фильтрация из канавы с радиально распространяющейся свободной поверхностью (по Козени).

так что ее максимальная глубина будет H, ширина ее определяется выражением

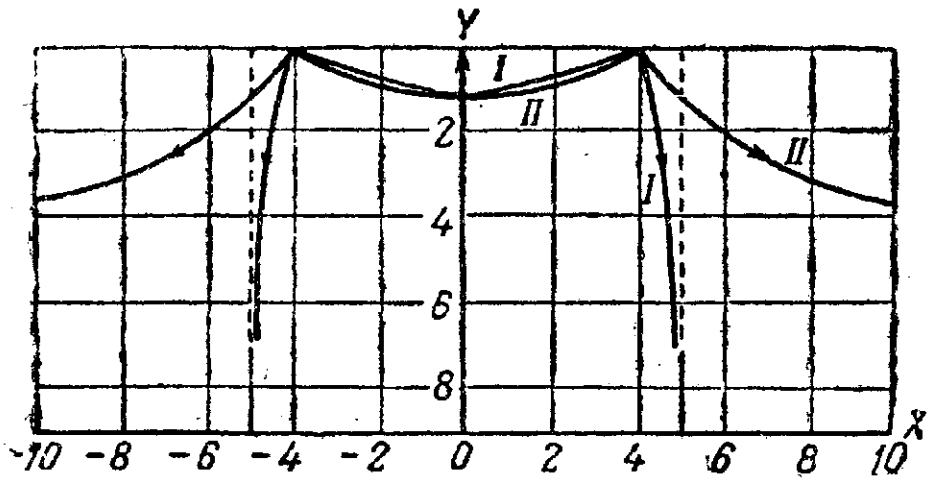
$$B = Q + 2H. \tag{20}$$

Таким образом, и в данном случае знание ширины и глубины канавы даст величину расхода фильтрации из нее при условии, что ее геометрическая форма определяется уравнением (19) [1]. На фиг. 116 показана геометрическая форма канав и предельная свободная поверхность для двух уравнений (10) и (16) при $H = 1$ и $B = 8$. В обоих случаях форма канав несколько отлична друг от друга. Вместе с тем основное различие между соответствующей им свободной поверхностью и характером течения не следует относить к различным формам канав.

---

[1] Следует заметить, что уравнение (19) с внешней стороны идентично (13). Однако для решения (19) относительно x следует взять положительный радикал $\sqrt{H^2 - y^2}$, в то время как в (13) для нахождения x следует принимать отрицательные значения этого радикала.

Основные свойства течения, например, общая природа свободной поверхности и расхода через систему, определяются в значительной степени скорее граничными условиями, чем тщательным изображением геометрической формы граничных поверхностей[1, 2]. Хотя для обоих уравнений (10) и (16) было принято допущение, что пористая среда имеет в действительности бесконечную мощность, эти уравнения предполагают резко отличные типы распределения потенциала на больших глубинах от поверхности. Так, из уравнения (11) следует, что потенциалы на больших глубинах представлены горизонтальными параллельными линиями



Фиг. 116. Свободная поверхность, получившаяся в результате фильтрации из канав при особых условиях:

I — форма канавы и свободной поверхности, определяемая уравнением (11), гл. VI, п. 7; *II* — форма канавы и свободной поверхности, определяемая уравнением (17), гл. VI, п. 7.

$$\Phi \sim -y. \qquad (21)$$

Это выражение представляет, очевидно, эффективное свободное падение фильтрационной жидкости под действием силы тяжести как вертикальной водной поверхности, ограниченной вертикальными асимптотами, как это показано свободной поверхностью на фиг. 116.

С другой стороны, для уравнения (16) эквипотенциальные линии на больших глубинах даются выражением:

$$\Phi \sim -\frac{Q}{2\pi} \ln \frac{x^2+y^2}{H^2}. \qquad (22)$$

Поэтому течение на больших глубинах должно быть радиальным, давая объяснение этим боковому растеканию свободной поверхности для случая, изображенного на фиг. 116. Более того, потенциал вдоль оси y, $-\frac{Q}{\pi} \ln \frac{y}{H}$ будет по вполне понятной причине больше соответствующей ему величины на той же самой глубине вдоль свободной по-

---

[1] Дальнейшие примеры систем, определяемых уравнением (11), можно найти в работе В. В. Ведерникова.

[2] Разумеется при аналитическом методе, примененном в настоящем случае, истинное поведение свободной поверхности и распределение потенциала на больших глубинах (см. уравнения 21 и 22), несомненно, зависят от геометрической формы канавы. Уравнение (13) дает форму канавы, которая имеет перегиб и выпуклую поверхность вблизи $y \sim 0$, давая, таким образом, начало вертикальному асимптотическому падению для свободной поверхности, в то время как уравнение (19) сообщает канаве профиль, который является везде вогнутым, со свободной поверхностью, имеющей тенденцию к радиальному расширению (фиг. 116). Однако ясно, что при решении проблемы в целом, где характеристика граничных условий была установлена с самого начала, может быть принят любой тип асимптотического поведения. Уравнения (21) или (22) могут быть получены при этом вне зависимости от геометрической формы канавы.

верхности [1] — y. Эта разница обеспечивает значение падения потенциала для горизонтального перемещения, наложенного на свободное вертикальное падение.

Уравнение (16) со своим усложнением (22) дает возможное течение. Вместе с тем его можно рассматривать только как грубое приближение к действительной проблеме фильтрации, где свободная поверхность, а также промежуточные линии тока должны стать асимптотами к горизонтальной или наклонной линии, представляющей собой нормальный уровень грунтовых вод. Такое же положение возникает, когда течение фильтрующейся воды происходит действительно в вертикальном направлении к глубоко залегающему водяному зеркалу или же к весьма проницаемому слою, несущему водяное зеркало, через кот рое просачивающаяся вода только капает, пока она не ударится о поверхность водяного зеркала (см. следующий параграф). Геометрическая форма свободной поверхности может быть несколько видоизменена вблизи канавы так, чтобы получить перегиб, принимая линейную комбинацию [2] [уравнений (10) и (16)], а строго горизонтальная асимптота ($y = y_0$) для свободной поверхности может быть получена прибавлением к уравнению (10) или (16) члена $\dfrac{A}{\sin h \frac{\pi}{Q}(\Phi + i\Psi + y_0)}$.

Это суммирование дает распределение потенциала на больших глубинах по типу свободного [уравнение (21)] или искусственно радиального падения согласно уравнению (22). Это обстоятельство не дает возможности построить с самого начала такую зависимость сопряженной функции, которая дала бы соответствующие физические вариации распределению потенциала для всех типов и проблем фильтрации, встречающихся на практике. Однако приведенные выше примеры должны служить по крайней мере указателями природы косвенных методов нахождения решений проблем течения, так же как и возможностей установления и ограничения их применимости [3].

---

[1] Более высокие значения Φ вдоль оси y для данного случая объясняют также, почему здесь значение расхода меньше, чем по уравнению (10) [уравнения (15) и (20)], если даже средняя ширина заполненной жидкостью среды гораздо больше по сравнению со случаем дренирования свободным падением.

[2] См. работу П. Немени (P. Nemenyi „Wasserströmungslehre", p. 201).

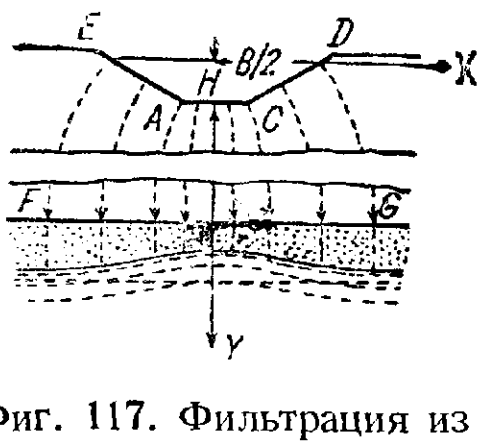
[3] Если обратить внимание, что для простого случая кругового сечения канавы и фильтрации по вертикальной поверхности (фиг. 116) прямое решение уравнения Лапласа дает

$$\Phi = -y\left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right); \quad \Psi = -x\left(1 + \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right);$$

где a — радиус канавы, то становится очевидной трудность получения распределения потенциала со свободной поверхностью прямым решением уравнения Лапласа. (N. K. Bose, Mem. Punjab Irrigation Res. Lab., Lahore, 2, № 1, 1929; а. также V. I. Vaidhianathan, H. R. Luthra and N. K. Bose, Proc. Ind. Acad. Sci., 1, 325, 1934).

Эти решения дают вертикальные асимптоты для линий тока $\Psi = \text{const}$, но ни одна из этих линий тока не представляет собой свободной поверхности. Определение трансцендентных функций $\Phi(x, y)$, $\Psi(x, y)$, которые удовлетворяют условиям уравнения (13) из решения $\nabla^2\Phi = 0$, $\nabla^2\Psi = 0$, в отдельности, без помощи метода комплексных переменных создаст, очевидно, наиболее невыполнимую задачу.

8. Фильтрация воды из каналов и канав в песчаники с глубоко залегающим водяным зеркалом. Более непосредственным методом решения проблемы фильтрации воды из каналов и канав в песчаники с глубоко залегающим водяным зеркалом (фиг. 117), который отличается от уже рассмотренного в гл. VI, п. 7, является способ, почти схожий с методом Гопфа и Трефтца, описанным нами в гл. VI, п. 2.



Фиг. 117. Фильтрация из канавы в песчаники с глубоко залегающим водяным зеркалом (по Ведерникову).

Применяя и в этом случае последовательные преобразования комплексной переменной, устанавливаем совершенно точно последовательный ряд распределений потенциала и линии тока. При этом соответствующий профиль канавы или канала находится только в конце решения [1]. Чтобы продемонстрировать этот метод, мы разберем сначала случай, где высокопроницаемый слой гравия, содержащий зеркало воды, залегает действительно на бесконечной глубине, ниже поверхности канала.

Путем, аналогичным введению комплексной переменной Гопфом и Трефтцом [уравнение (4) гл, VI, п. 2], вводится переменная:

$$\tau = \theta_1 + i\theta_2 = -z - i(\Phi + i\Psi - H);\ \theta_1 = \Psi - x;$$

$$\theta_2 = -(y + \Phi - H), \qquad (1)$$

где H — уровень жидкости в канале. Принимая y, имеющее направление вниз, и $\overline{k}$ для простоты за единицу, становится ясным, что вдоль свободной поверхности гравитационного течения $\theta_2 = H$, в то время как вдоль основания канала AC $\theta_2 = 0$, атмосферное давление принимается равным нулю.

Примем, что стороны канавы CD и AE имеют такую геометрическую форму, что вдоль них θ имеет постоянное значение C_1 и C_2, определяемое точками D и E. Отображение (фиг. 117) на плоскость τ будет соответствовать поэтому фиг. 118. В плоскости $\omega = \Phi + i\Psi$ граница $GDCAEF$ будет, очевидно, отображаться на бесконечную полосу, показанную на фиг. 119. Отображая обе плоскости τ и ω на действи-

---

[1] Анализ этого, а также последующего раздела сделан В. В. Ведерниковым. Влияние капиллярных явлений на проблему фильтрации из песчаников рассматривается им же в работе, опубликованной в том же журнале 30, 245, 1935. В более поздней работе (Zeitschr. angew. Math. u. Mech., 17, 155, 1937) Ведерников рассматривает проблему фильтрации воды из каналов приложением преобразований инверсии плоскостей годографа, которое исключает круговые отрезки и приводит к треугольным прямолинейным диаграммам. Последующим конформным отображением последних с помощью обычных преобразований Шварца-Кристоффеля на вспомогательные плоскости Ведерников дает возможность рассматривать случаи, где профиль канала имеет заранее установленную прямолинейную трапецоидальную форму. Тем не менее числовые результаты отличаются весьма незначительно от показанных в настоящем разделе для криволинейных профилей. С другой стороны, можно отметить, что оба метода Ведерникова могут быть приложены к настоящей задаче только потому, что отсутствуют поверхности фильтрации.

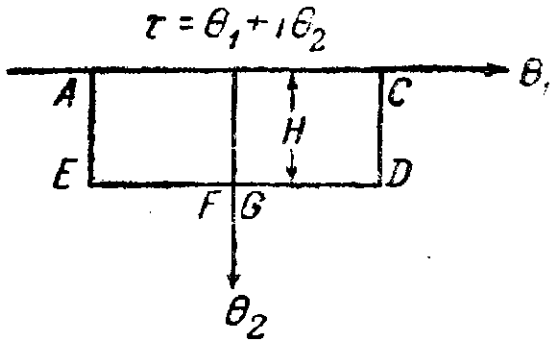
тельную ось плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ помощью теоремы Шварца-Кристофеля, причем соответствия будут:

$$\left.\begin{aligned} A &\to -k^*; \quad C \to +k^* \\ E &\to -1; \quad D \to +1 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

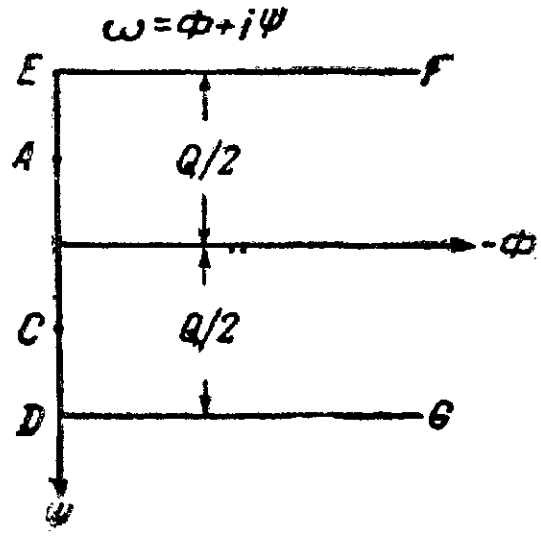
легко установить, что

$$\tau = \theta_1 + i\theta_2 = C_1 \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(k^{*2}-\zeta^2)}}; \tag{3}$$

$$\omega = \Phi + i\Psi = C_2 \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = C_2 \sin^{-1}\zeta. \tag{4}$$



Фиг. 118. Отображение фиг. 117 на плоскость τ.



Фиг. 119. Отображение фиг. 117 на плоскость ω.

Чтобы определить константы в этих преобразованиях, заметим, что в D, где $\zeta = +1$:

$$\tau = \frac{Q}{2} - \frac{B}{2} + iH = C_1 \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(k^{*2}-\zeta^2)}} = C_1(K + iK'),$$

$$\omega = i\frac{Q}{2} = C_2 \sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2} C_2; \quad C_2 = \frac{iQ}{\pi};$$

где K и K' — комплексные эллиптические интегралы первого порядка с модулями k^*, $\sqrt{1-k^{*2}}$. Отсюда:

$$C_1 K = \frac{Q-B}{2}; \; C_1 K' = H; \; \frac{Q-B}{2H} = \frac{K}{K'}. \tag{5}$$

Далее в C, где $\zeta = k^*$,

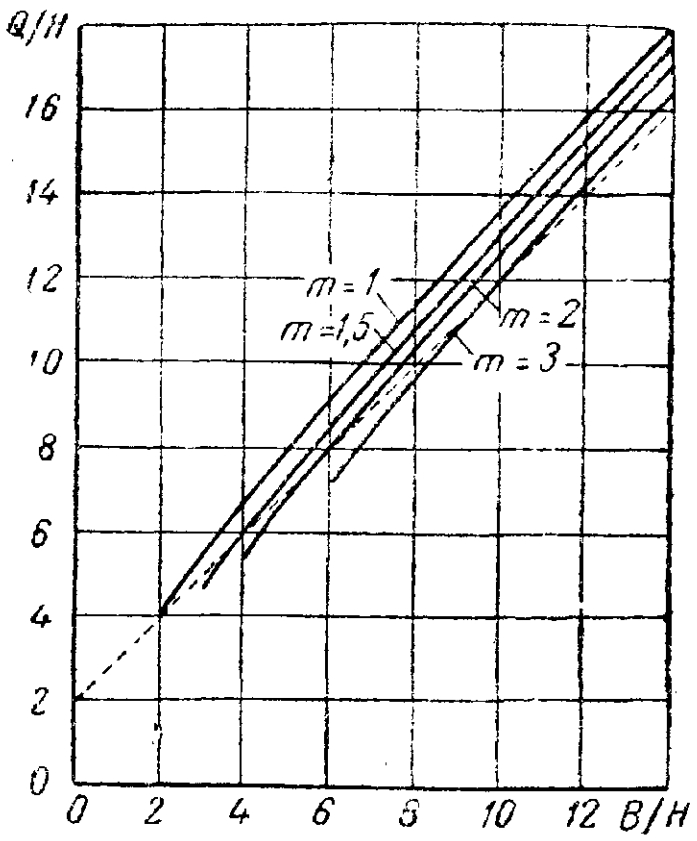
$$\omega = \Phi + i\Psi = i\Psi = i\left(\frac{Q}{2} - \frac{B}{2} + \frac{b}{2}\right) = \frac{iQ}{\pi} \sin^{-1} k^*,$$

так, что

$$\left.\begin{aligned} k^* &= \sin\frac{\pi}{Q}\left(\frac{Q}{2} - \frac{B}{2} + \frac{b}{2}\right) = \cos\frac{\pi m H}{Q} \\ \text{и} \qquad Q &= \frac{\pi m H}{\cos^{-1} k^*} = B + \frac{2HK}{K'} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

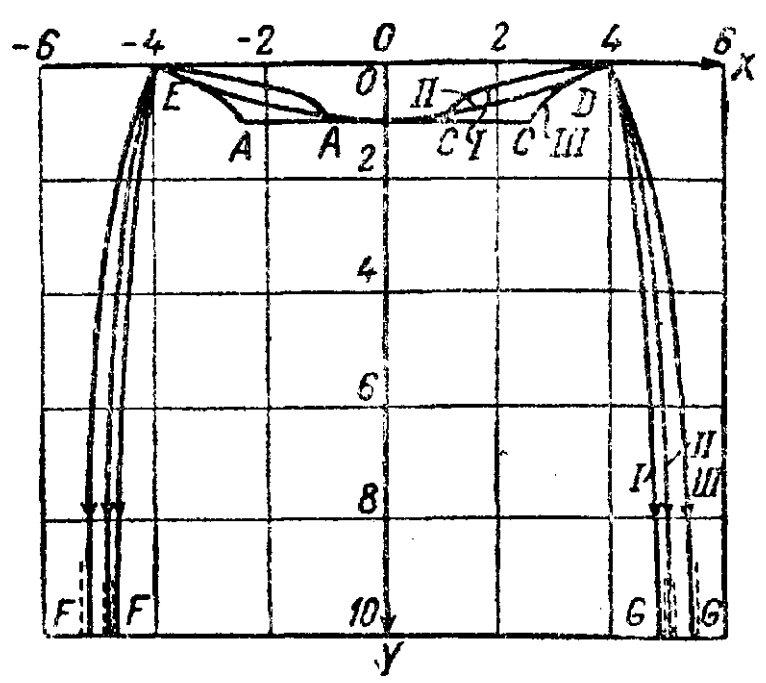
где b — ширина основания канала и $1/m$ — средний наклон ее сторон в рассуждении, что $m=(B-b)/2H$.

Уравнения (3) и (4) совместно с уравнением (1) дают распределение потенциала и линии тока так же, как и связывающую их геометрическую форму свободной поверхности. Расход дается уравнением (6), подсчеты выполняются более свободно, беря Q/H. Сначала по уравнению (6) рассчитывается величина связующего k^*, затем определяется значение B/H, которому соответствуют значения Q/H на основании второго уравнения (6). Несколько таких кривых для различных значений m приведены на фиг. 120 [1]. Максимум или асимптотическую ширину поверхности просачивающейся вниз воды, как и следует ожидать, легко найти из следующего выражения:



Фиг. 120. Изменение расхода фильтрации Q из каналов или канав, утекающего в глубоко залегающие песчаники, согласно уравнению (6), гл. VI, п. 8:

B — общая ширина канала или канавы по верхней кромке свободной поверхности; H — максимальная глубина свободной воды; $m=(B-b)/2H$; b — ширина плоской части основания. Пунктирная кривая дает величину $\overline{Q}$ согласно уравнению (14), гл. VI, п. 7; $\overline{k}$ принимается равным 1.



Фиг. 121. Профили канала или канавы и их свободная поверхность для фильтрации в песчаники с глубоко залегающим водяным зеркалом.

I — профиль согласно гл. VI, п. 8, $b=2$, $Q/H=9{,}68$; II — профиль согласно гл. VI, п. 7, уравнение (13) гл. VI, п. 7; $Q/H=10{,}0$; III — профиль согласно гл. VI, п. 8, $b=5$, $Q/H=10{,}8$; B — общая ширина по верхней кромке свободной поверхности; H — максимальная глубина свободной воды; b — ширина плоской части основания (для I и III случая); $B/H=8$ для всех случаев; $\overline{k}=1$.

$$B_1=2|x|_{y=\infty}=Q=B+\frac{2HK}{K'}\ . \qquad (7)$$

Следует помнить, что при численных выкладках для сохранения размерности между расходом Q и длинами, например B, необходимо умножить последние на $\overline{k}$, которое принимается здесь за единицу.

Следует заметить, что выражение для расхода, приведенное здесь [уравнение (6)], отличается от соответствующей величины, найденной бо-

[1] Кривые Ведерникова дают только зависимость B/H по отношению K/K' и все же требуют приложения второго из уравнений (6) для получения значения Q/H.

лее простым анализом (гл. VI, п. 7), т. е. уравнением (14), гл. VI, п. 7, только множителем K/K'. Так как эта величина может быть больше или меньше единицы $\left[\text{так как } \frac{Q}{H} < \text{или} > 4\ m\right]$, профили канала или канавы, выполненные на основании теории настоящего раздела, будут терять больше или меньше воды путем фильтрации по сравнению с соответствующими значениями, исполненными согласно уравнению (13), гл. VI, п. 7 [1].

На фиг. 121 ясно показано, что эта разница в значении Q обязана в действительности различию в профилях канала или канавы. На фиг. 121 начертаны профили дренажных поверхностей одной и той же ширины ($B=8$) и глубины ($H=1$), но с различной геометрической формой сторон, соответствующей в одном случае (II) уравнению (13), гл. VI, п. 7, а в двух других случаях уравнением (3) и (4). Кривая I приведена для случая $m=3$, а кривая III — для $m=1{,}5$. Соответствующие значения Q : 9,68; 10,0 и 10,8 показаны для случая I, II и III. Порядок величин этих расходов укладывается, как это следует ожидать, в значение средней глубины профилей, ниже верха свободной поверхности. Чем больше эта средняя глубина, тем меньше будет действительное сопротивление песчаника, которое должна преодолеть фильтрующаяся вода при суммарном падении потенциала в H единиц.

9. Фильтрация воды из каналов или канав в песчаники, которые подстилаются высокопроницаемыми гравийными ложами на малых глубинах. Когда глубина подстилающего высокопроницаемого гравийного ложа, содержащего зеркало воды, сравнима по размерам с каналом или напором жидкости в нем, анализ последнего раздела должен быть слегка изменен. Так как рассматриваемое гравийное ложе обладает более высокой проницаемостью по сравнению с осадочными образованиями, расположенными над ним, и может пропускать гораздо большее количество жидкости, чем последние могут ему обеспечить, то вода, которая просачивается в гравийное ложе, будет попросту капать в последнее и в виде струи капель ударяться о зеркало воды. Давление в кровле гравийного ложа может быть тогда принято равным атмосферному. Значение θ_2 вдоль поверхности FG (фиг. 117) будет поэтому H, как это имеет место вдоль свободной поверхности, и фиг. 118 для плоскости τ не изменится, за исключением того, что точки F_1G будут отделены и лягут вдоль ED на равных расстояниях от оси θ_2. Отображение плоскости τ на плоскость ζ будет дано тогда снова уравнением (3), гл. VI, п. 8. Однако диаграмма на плоскости ω изменится теперь в прямоугольник (фиг. 122). Обозначая точки на действительной оси плоскости ζ, на которой точки G, F отобразятся на основании уравне-

---

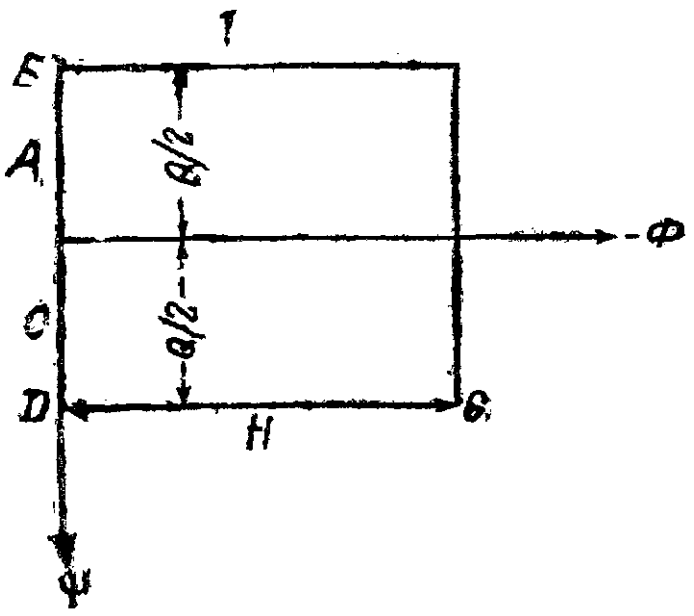
[1] Ведерников, повидимому, исключает все случаи, для которых $K/K'<1$, и объясняет излишек (для $K/K'>1$) расхода сверх величины, что дается уравнением (14), гл. VI, п. 7, истечением через трещину (аналитически „щель") в профилях у точек C и A. Однако основание для заключения, что уравнения (3) и (4) предполагают наличие щели в точках C и A не ясно. Фиг. 118 и 119 дают непрерывное отображение AC, CD и AE, так как $|\zeta|$ в уравнениях (3) и (4) пересекает значение k^*.

ния (3), гл. VI, п. 8, через $\pm 1/\alpha$, конформное отображение фиг. 122 на плоскости ζ (фиг. 123) определяется отношением:

$$\omega = \Phi + i\Psi = C_2 \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-\alpha^2\zeta^2)}}. \qquad (1)$$

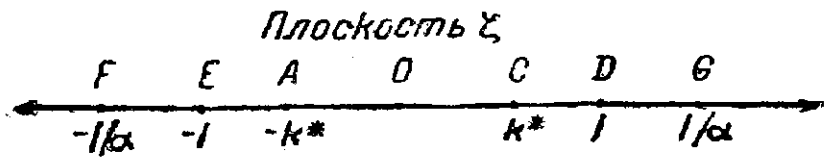
Константы C_1; C_2; α и k^* определяются из следующего: в d, где $\zeta = 1$, уравнения (1) и (3), гл. VI, п. 8, дают:

$$\frac{iQ}{2} = C_2 K(\alpha); \quad \frac{Q-B}{2} + iH = C_1 [K(k^*) + iK'(k^*)], \qquad (2)$$

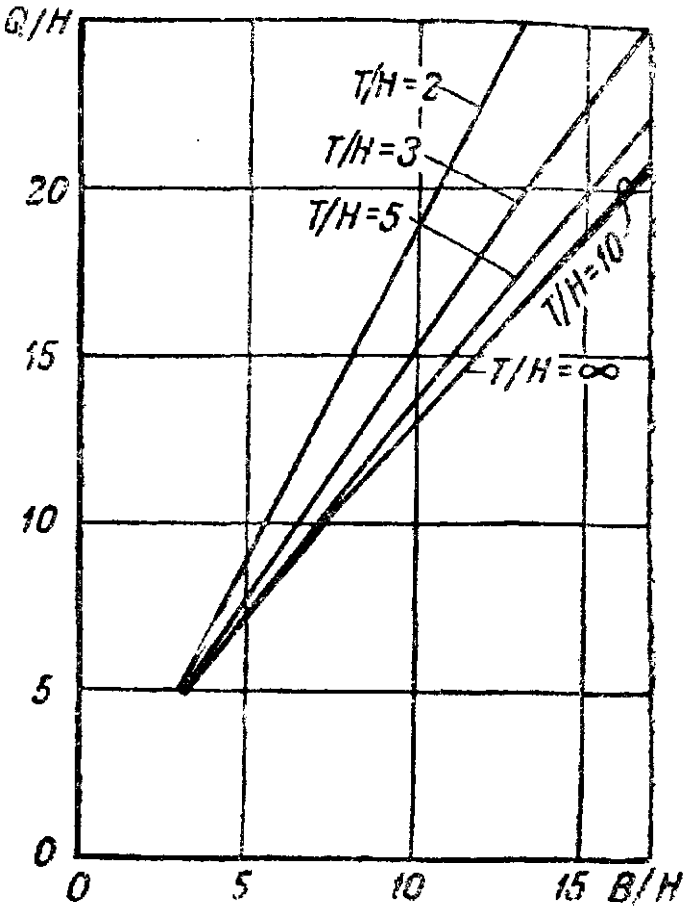


Фиг. 122. Отображение фиг. 117 для конечной глубины до FG на плоскость ω.

I — плоскость ω.



Фиг. 123. Отображение фиг. 122 на плоскость ζ.



Фиг. 124. Изменение расхода фильтрации Q с шириной каналов или канав, расположенных над неглубоко залегающими слоями гравия:

B — общая ширина по верхней кромке свободной поверхности; H — максимальная глубина свободной воды; T — глубина гравийного слоя ниже верхнего уреза свободной воды; $m = (B-b)/2H$; b — ширина плоской части основания; $\overline{\kappa} = 1$.

где α, k^* — модули эллиптических интегралов. В C, где $\zeta = k^*$ следует, что

$$i\Psi = \frac{i(Q - B + b)}{2} = C_2 F(\sin^{-1} k^*, \alpha), \qquad (3)$$

а в G

$$-T + i\frac{Q}{2} = C_2 [K(\alpha) + iK'(\alpha)],$$

так что

$$\frac{2T}{Q} = \frac{K'(\alpha)}{K(\alpha)}. \qquad (4)$$

Решая эти уравнения относительно Q, находим, что

$$Q = \frac{2Hm}{1 - \dfrac{F(\sin^{-1} k^*; \alpha)}{K(\alpha)}} = B + 2H\frac{K(k^*)}{K'(k^*)}. \qquad (5)$$

Чтобы рассчитать по этим уравнениям значение Q как функцию B, H и T для данного m, можно начать с допущения зависимости Q/T и получить значение α из уравнения (4). Затем определяется k^* из первой части уравнения (5) после установления величины Q/H и, наконец, B/H из второй части уравнения (5). На фиг. 124 показаны исчисленные таким путем несколько кривых зависимости Q/H по отношению к B/H. Как и следует ожидать, видно, что расходы фильтрации через ложе конечной толщины, как это дается уравнением (5), превосходят соответствующие величины для фильтрации через ложе бесконечной толщи, исчисленные в предпоследнем разделе. Этот излишек становится особенно велик, когда глубина T достигает порядка H.

10. Приближенная теория фильтрации воды через плотины с наклонными фасами. В гл. VI, п. 6 было показано, что распределение потенциала в плотинах с наклонными фасами может быть почти точно получено с помощью электрических моделей, после экспериментального вырезывания верхнего контура, имитирующего свободную поверхность. При этом каждая модель дает результаты только для единичного напора поглощаемой жидкости, напора вытекающей жидкости и наклонов поверхностей поглощения и стока. Для получения данных в табличном или графическом виде, который бы охватывал широкую область изменения этих переменных, потребовалась бы весьма трудоемкая и очень длительная экспериментальная работа. Поэтому представляет собой некоторую ценность иметь в своем распоряжении такой метод подсчета, который, будучи даже приближенным, даст правильный порядок величины расхода и может быть выполнен для какого-нибудь специфического случая без затраты ненужного труда.

Такой метод был разработан Дахлером [1], где поверхность поглощения, основная масса и поверхность стока плотины рассматриваются путем различных приближений как отдельные системы. Затем они объе-

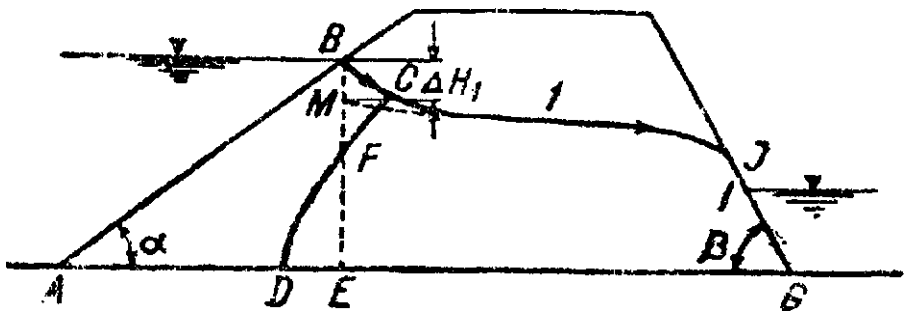
---

[1] Dachler, R., Die Wasserwirtshaft, G. 37, 1933; также стр. 41, 1934. Учитывая большое значение точного местонахождения оконечности J (фиг. 125) свободной поверхности на поверхности стока, с точки зрения стабильности, можно упомянуть, что для нулевых уравнений стока жидкости была предложена Казагранде (Die Bautechnik, 15, 1934) приближенная формула для установления положения J, которая получила экспериментальное подтверждение для значений $\beta \ll 90°$. Эта формула дается следующим выражением:

$$y_0 = m \sin\beta - \sqrt{m^2 \sin^2\beta - H^2},$$

где y_0 — высота J над основанием плотины, m — длина свободной поверхности плюс расстояние JI, для которого должно быть принято особое приближение, и H — суммарный напор жидкости на поверхности поглощения. Казагранде (Journ. New. Eng. Water Works Assoc., 51, 131, 1937) разработал кривые, дающие y_0 как функцию β и H для всех значений β. Они были получены из сравнения значений y_0, которые даются параболой Козени [уравнение (8) гл. VI, п. 7] для свободной поверхности, с величинами, непосредственно вытекающими из прямого графического решения для сетки эквипотенциальных линий и линий тока. Разность между этими двумя решениями дает построение ее как функции β и H. В последней работе можно найти также большое количество практических замечаний, относящихся к проектированию земляных плотин, основанных на гидродинамике проблем фильтрации, так же как и много иных полезных замечаний для построения и графических решений проблем течения, включающих свободную поверхность в изотропной и анизотропной среде.

диняются вместе условием, чтобы расходы через каждую систему в отдельности были равны и чтобы напоры жидкости были неразрывны, переходя из одной области в другую. На фиг. 125 поглощающая часть системы берется, ограниченная контуром $ABDC$. Поток через эту область подсчитывается с помощью преобразования сопряженной функции, соответствующей клину с углом α, ограниченного с одной стороны линией тока AD, а с другой стороны эквипотенциальной линией AB; BC принимается линией тока системы, которая уходит в B. При этом не делается попытки внести поправку в тот факт, что в данном случае отсутствует линия тока свободной поверхности.



Фиг. 125. Свободная поверхность в плотине с наклонными фасами (по Дахлеру).

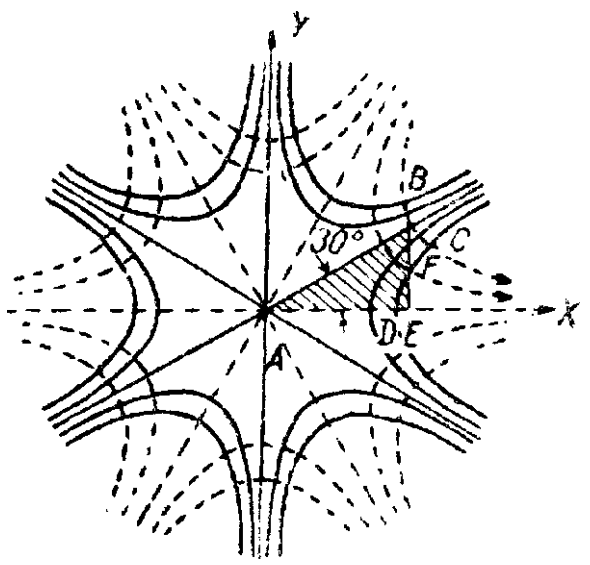
1 — свободная поверхность.

Если $\alpha = \pi/2n$, где n — целое число, то соответствующее преобразование комплексной переменной будет:

$$H = i\Psi = (x + iy)^n, \qquad (1)$$

где для удобства потенциал скорости заменен напором жидкости H. Типовые эквипотенциальные линии и линии тока для $n = 3$ показаны на фиг. 126, где

$$x^3 - 3xy^2 = H; \quad 3x^2y - y^3 = \Psi. \qquad (2)$$



Фиг. 126. Приближенное распределение потенциала и линии тока вблизи поверхности стока плотины с наклонными фасами (30° наклона), (по Дахлеру).

Величина эквипотенциальной линии C, ограничивающей эту область, вышеуказанной процедурой не установлена заранее. Однако выбор ее может быть сделан вполне определенно из условия [1], что потеря энергии трения при прохождении жидкости через $ABCD$ должна иметь то же значение, что и проходя через ABE. Эта потеря энергии, испытываемая жидкостью, проходящей между двумя линиями тока, разделенными $\Delta\Psi$, против перепада напора жидкости ΔH, будет:

$$dW = \gamma g \Delta H \Delta\Psi, \qquad (3)$$

где γ — плотность жидкости, а g — ускорение силы тяжести.

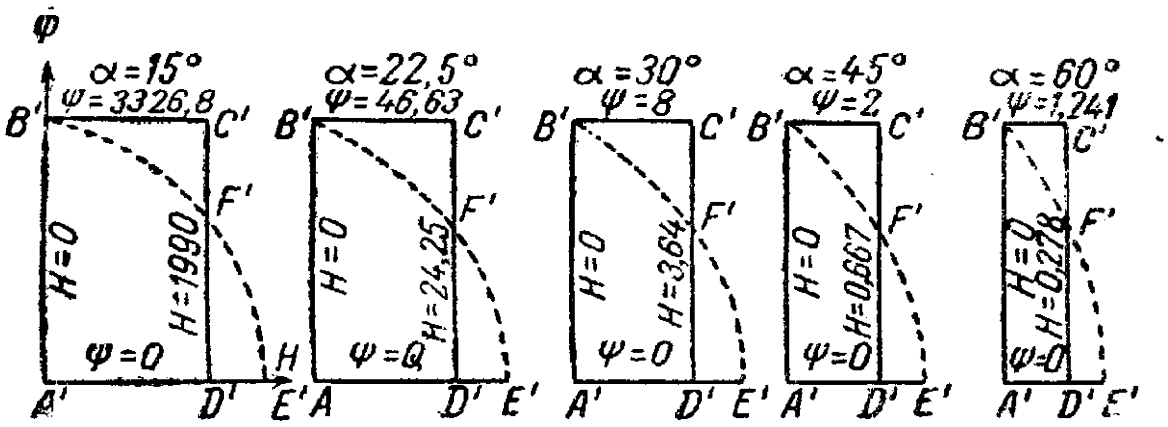
Отсюда поставленное выше условие становится тождественным требованию, чтобы BC и DE имели ту же самую площадь в плоскости (H, Ψ). Принимая длину EB за единицу, значение Ψ в точке B из урав-

[1] Это условие не имеет физического значения и выбрано только для удобства, так как оно позволяет сблизить подсчет потока вправо от BCD с той величиной, что находится вправо от BE и с тем же самым средним напором жидкости вдоль BE, что и вдоль BCD.

нения (2) или же его эквивалента для других значений n и продолжая линию $B'C'$ в плоскостях (H, Ψ) (фиг. 127) так, что площадь $B'C'F'$ равняется площади $F'D'E'$, можно свободно получить соответствующее значение H для CD. Результирующая проводимость $ABCD$, являющаяся отношением $\frac{A'B'}{H'D'}$ (фиг. 127), устанавливаемая этим путем, может быть выражена функцией угла α из следующего выражения:

$$\varepsilon_1 = \frac{Q}{\Delta H_1} = 1{,}12 + 1{,}93 \operatorname{tg} \alpha. \qquad (4)^1$$

Этот вывод находится в полном согласии со значениями, найденными путем непосредственных экспериментов. Следует заметить, что ΔH_1 в уравнении (4) относится к падению потенциала только на участке BC свободной поверхности. Течение в плотине вправо от BE делится тогда



Фиг. 127. Графическое определение ε_1 в уравнении (4), гл. VI, п. 10 (по Дахлеру).

на две части. Первая часть от BE до KL, заключенная в основной массе плотины, рассматривается имеющей по существу линейный характер (фиг. 125). Расход относится к потере напора жидкости ΔH_2 и выражается:

$$Q = \frac{H_m \Delta H_2}{l}, \qquad (5)$$

где H_m — средняя высота свободной поверхности вдоль CK и l — расстояние EL.

Для получения характеристики течения от KL до поверхности стока прибегают к экспериментам на модели. Точка K для несомненности выбирается на пересечении между фактической свободной поверхностью и линией GK, проведенной от носка плотины под наклоном β, равным двум третям поверхности стока (фиг. 128). Такие эксперименты на модели, выполненные с вертикальными поверхностями поглощения KL и углами $\beta = 30$, 45 и 60° для различных значений $\Delta H_3/H_3$ (фиг. 128), показали для количества

$$\varepsilon_3 = \frac{Q}{\Delta H_3} \qquad (6)$$

данные, указанные точками на фиг. 129.

---

[1] В настоящем разделе принято для удобства, что эффективная проницаемость $\bar{k}$ имеет значение 1.

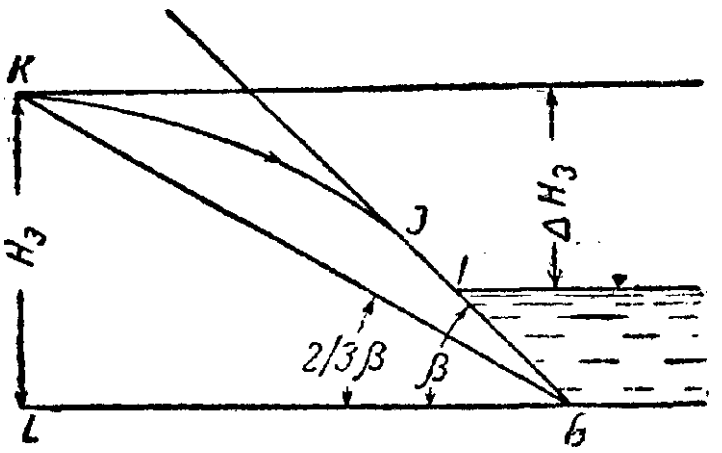
Сплошные кривые даются уравнением:

$$\varepsilon_3 = 0{,}068\,\beta^\circ\left(0{,}86 + 0{,}39\,\frac{\Delta H_3}{H_3} - \sqrt{\frac{\Delta H_3}{H_3} + 0{,}36}\right), \qquad (7)$$

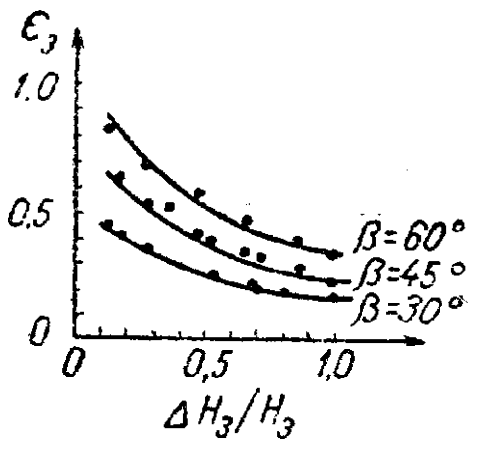
Эти выводы будут использованы таким образом (см. фиг. 130, где $\Delta H_3/H_3 = 1$). Сначала принимается положение L, затем берется H_3, выраженное через $GL\,\mathrm{tg}^{\,2}/_3\beta$ так, что, зная уровень стока жидкости, можно определить ΔH_3, а отсюда из уравнения (7) значение ε_3. Тогда можно рассчитать Q, возвращаясь к уравнению (6), а затем из (4) — ΔH_1. Так как суммарный диференциал напора жидкости дается выражением

$$\Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3 = H,$$

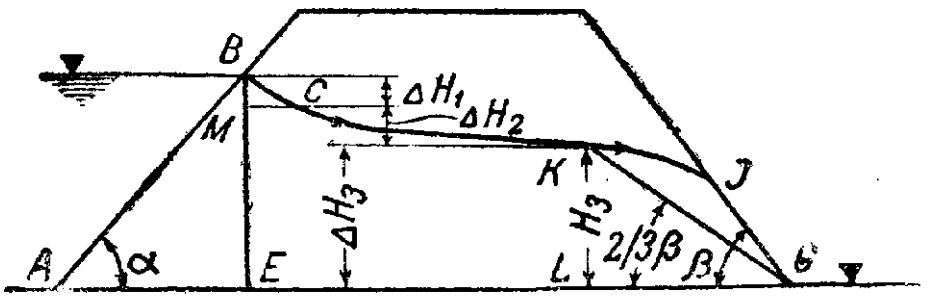
то ΔH_1 и ΔH_3 дадут значение H_2. Величина H устанавливается заранее, так же как и $H_m = H_3 + \Delta H_2/2$. Когда эти величины будут подставлены в уравнение (5), должно быть найдено то же самое значение для Q, что было дано первоначально уравнением (6). Отсутствие согласованности показывает ошибку в выборе положения L, и расчет должен быть повторен, пока не будет достигнута полная согласованность между различными количествами, входящими в эту формулу. Когда уровень вытекающей жидкости настолько высок, что $\Delta H_3/H_3 < 0{,}1$, предел



Фиг. 128 (по Дахлеру).



Фиг. 129. Результаты экспериментов на модели для определения ε_3. Сплошные кривые даются согласно уравнению (7), гл. VI, п. 10 (по Дахлеру).



Фиг. 130. Наиболее важные количества, которые применяются при подсчете расхода фильтрации через плотины с наклонными фасами (по Дахлеру).

справедливости уравнения (7) имеет свое экспериментальное оправдание. Приближенный подсчет расхода может быть исполнен, полагая течение линейным от BE до IN, где IN — вертикальное снижение уровня от пересечения массы вытекающей жидкости поверхностью стока. Дополнительное падение, вызванное клином справа от IN, может быть получено тогда приближенным методом, т. е. на основании выражения, дающего соответственную величину, обязанную только клину поверхности поглощения влево от BE, а именно уравнению (4).

К сожалению, точные решения проблемы фильтрации через плотины с наклонными фасами, которые можно было бы использовать для проверки точности рассмотренной выше приближенной теории, до сих пор отсутствуют. Вследствие высоких уровней поглощения жидкости, соот-

ветствующих моделям на фиг. 110 и 111, гл. VI, п. 6, область $KJGL$ с фактором геометрической формы ε_3, построенным по указанному выше методу, будет распространяться или перекрывать область ABE так, что это приводит к излишнему сопротивлению стока или к заниженным значениям расхода. Тем не менее интересно показать, что даже при таком неблагоприятном случае приближенная теория дает, по крайней мере, правильный порядок величины расхода. Заметив для фиг. 110, что $\alpha=\beta=30^\circ$ и $\Delta H_3/H_3=1$, из уравнений (4) и (7) следует, что $\varepsilon_1=2{,}235$ и $\varepsilon_3=0{,}171$. Так как в этом случае область $GJKL$, указанная на фиг. 130, перекрывает ABE, можно опустить участок $MKLE$, и значение Q определится из уравнений:

$$Q=2{,}235\Delta H_1=0{,}171\Delta H_3;\ \Delta H_3+\Delta H_1=1,$$

где суммарный напор жидкости принят за единицу. В результате получается $Q=0{,}159$.

Соответственно этому заметим, что для фиг. 111 $\alpha=\beta=45^\circ$, так что $\varepsilon_1=3{,}05$ и $\varepsilon_3=0{,}257$. Опустим опять участок $MKLE$ (фиг. 130) и легко установим, что в данном случае $Q=0{,}238$.

Чтобы получить соответствующие значения Q из распределения потенциала и линии тока, которые даются электрическими моделями, необходимо слегка изменить процедуру, описанную в гл. IV, п. 17. Так, вспоминая, что расход Δq между двумя соседними линиями тока определяется выражением

$$\Delta q=\frac{\Delta\Phi}{\Delta n}\Delta s, \tag{9}$$

где $\Delta\Phi$ — падение потенциала по длине Δn и Δs — промежуток между двумя линиями тока, ясно, что, принимая разрыв между эквипотенциальными линиями $\Delta\Phi$ так, чтобы они образовали квадраты при пересечении с линиями тока и $\Delta s=\Delta n$, суммарный расход будет равен числу m квадратов, лежащих между двумя крайними линиями тока, умноженному на $\Delta\Phi$, т. е.

$$Q=m\Delta\Phi. \tag{10}$$

Прилагая эту процедуру к фиг. 110 для полосы, лежащей между эквипотенциальными линиями $\Phi=0{,}75$ и $\Phi=0{,}80$, находим, что $m=5{,}1$. Отсюда, так как для всей единицы ΔH, $\Delta\Phi=0{,}05$, вытекает, что

$$Q=5{,}1\cdot 0{,}05=0{,}255.$$

Поступая аналогичным путем для случая фиг. 111, находим, что вдоль полосы между $\Phi=0{,}70$ и $\Phi=0{,}75$, $m=5{,}6$, так что

$$Q=5{,}6\cdot 0{,}05=0{,}28.$$

Эти значения следует сравнить со значениями 0,159 и 0,238, которые дает приближенная теория. Как это было предуказано заранее, последние значения слишком занижены, и разрыв между значениями будет гораздо меньше в наиболее благоприятном случае, соответствующем фиг. 111. Приближенная теория дает, однако, правильный порядок величин расхода. Поэтому для более низких уровней жидкости на верхнем бьефе плотины, при расширяющейся свободной поверхности, даже численные значения расхода будут иметь небольшую ошибку и явятся вполне обоснованными.

Последним пунктом проблемы фильтрации воды через плотины с наклонными фасами, который необходимо подчеркнуть, является усложненность уравнения (1) по отношению к скоростям фильтрации вдоль поверхности поглощения. Так уравнение (1) дает для распределения напора жидкости в области ABE

$$H = r^n \cos n\theta, \tag{11}$$

где r — радиальное расстояние от точки A, θ — угол полярных координат. Нормаль скорости к поверхности поглощения будет пропорциональна:

$$-\frac{1}{r}\left|\frac{\partial H}{\partial \theta}\right|_{\theta=a} = nr^{n-1} = \frac{\pi}{2a} r^{\frac{\pi}{2a}-1} \tag{12}$$

Отсюда следует, что скорость будет равна нулю в пяте плотины и возрастает до максимума вверх по склону ее. Возрастание скорости увеличивается по мере того, как уменьшается наклон ребра плотины [1]. Тот же тип колебаний скорости будет приблизительно иметь место и на поверхности стока ниже поверхности фильтрации. В месте пересечения поверхности фильтрации и уровня вытекающей жидкости скорость будет бесконечна, но будет резко падать по мере приближения к оконечности стока свободной поверхности. Скорость в этом месте будет направлена по касательной к поверхности стока и равняться компоненту скорости свободного падения $\bar{k}$ вдоль поверхности[2]. Так как области максимальных скоростей поглощения или стока будут являться участками максимальной эрозии, ясно, чтобы контролировать последнюю, необходимо обратить особое внимание на пересечение уровней жидкости со стороны верхнего и нижнего бьефа с фасами плотины [3].

11. Фильтрационные струи из каналов и канав, поглощаемые неглубоко залегающим зеркалом воды [4]. Теория движения грунтовых вод в наклонном пласте песчаника, который дренируется канавой, был рассмотрен в гл. VI, п. 2. Чистый дренаж канавой был дан уравнением (8), гл. VI п. 2. При рассмотрении фильтрации из канавы или канала, проведенного над неглубоко залегающим нормальным уровнем грунтовой воды, возникает обратная проблема, связанная с фильтрацией в окружающий пласт песчаника, заполненный водой. Хотя представляется возможным дать решение такой задачи, где зеркало воды залегает в слое, имеющем более высокую проницаемость по сравнению с первоначальным носителем фильтрационного течения прямыми аналитическими методами (гл. VI, пп. 8 и 9), однако в том случае, где

---

[1] Этот вывод нарушается для вертикальной поверхности поглощения, так как скорость уменьшается от максимума в пяте плотины до нуля у свободной поверхности.

[2] См. также гл. VI, п. 1.

[3] Практическое рассмотрение методов сохранения свободной поверхности от соударения с поверхностью стока в том случае, когда напор воды со стороны нижнего бьефа равняется нулю, с помощью вставок гончарных дренажных труб или проницаемых фильтров — бланкетов и устранением поверхностной эрозии можно найти в уже цитированной работе Казагранде.

[4] Необходимо совершенно точно представить себе, что выводы этого раздела, а также всех последующих разделов в настоящей главе, могут быть приложены после того, как будет достигнуто установившееся течение.

фильтрационное течение поглощается зеркалом воды, требуется приложение приближенных и полуэмпирических методов решения. Один такой тип решения мы дадим в настоящем разделе. Строго говоря, установившееся гравитационное течение из бесконечно распространяющегося пласта песчаника требует, чтобы песчаник не имел наклона, равного нулю в точках, отстоящих на некотором расстоянии от канавы, за исключением того случая, когда фильтрация, как это принято в гл. VI, п. 8, окончательно переходит в вертикальное свободное падение через песчаник. На больших расстояниях от канавы свободная поверхность должна, очевидно, стать асимптотически параллельной нормальному, ненарушенному уровню жидкости, а отсюда водонепроницаемому ложу.

Если последнее горизонтально и свободная поверхность ему параллельна, то скорости в удалении от канавы будут равны нулю. Это, разумеется, противоречит принятому допущению, что в пласт песчаника вводится из канавы или канала установившийся расход.

В дополнение к физическому условию, чтобы свободная поверхность при гравитационном течении, соответствующая вышеуказанному типу фильтрации из канавы или канала, стала асимптотой к водонепроницаемому ложу песчаника, распределение потенциала должно принять асимптотический вид, что соответствует линейному течению поверхности воды. Таким образом, эквипотенциальные линии на большом расстоянии от канавы или канала должны быть нормалями к водонепроницаемому ложу с постоянным их размещением, пропорциональным наклону водонепроницаемого ложа. Поэтому ясно, что точные решения уравнения Лапласа, которые даются в гл. VI, пп. 7, 8, 9, где предполагается асимптотическое приближение к вертикальному свободному падению, не могут быть приняты в качестве физического воспроизведения практических фильтрационных течений в песчаниках с конечной толщей [1], где фильтрационное течение сливается с нормальным зеркалом

---

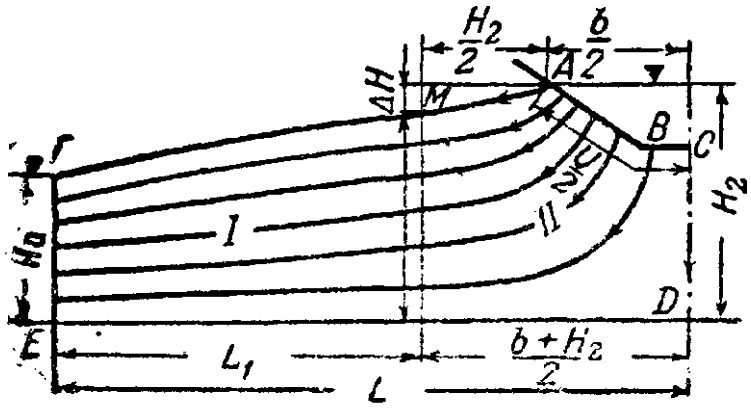
[1] Отсюда следует также отвергнуть распределение потенциала и линий тока:

$$\Phi = \frac{2b}{\pi} \cos\alpha \operatorname{ch} \frac{\pi x}{2b} \sin \frac{\pi y}{2b} + x \sin\alpha;$$

$$\Psi = -\frac{2b}{\pi} \cos\alpha \operatorname{sh} \frac{\pi x}{2b} \cos \frac{\pi y}{2b} + y \sin\alpha,$$

где x, y — координаты, параллельные и нормальные водонепроницаемому ложу пористого слоя с углом падения α и глубиной b, которые даются непосредственным решением для уравнения Лапласа (см. работу N. K. Bose; и V. I. Vaidhianathan H. R., Luthra и N. K. Bose, уже цитированную нами). Эти решения, действительно, дают распределение линии тока и потенциала вблизи канала, обладая некоторыми характерными физическими свойствами, которые и следует ожидать. Ни одна из линий тока $\Psi = \text{const}$ не представляет собой свободной поверхности и экспоненциальное возрастание Φ с большими значениями x не следует нормальной ненарушенной линейной поверхности течения, аналогичной выводу из уравнения (2), гл. VI, п. 7, что должно иметь место при больших значениях x (фиг. 31). Поэтому трудно оценить соответствующим образом практическое значение, которое следует приписать этим решениям. С другой стороны, даваемое здесь приближенное решение, связанное больше и непосредственно со значением расхода фильтрации, получается таким путем, что приближения, имеющиеся в анализе, имеют отрицательное влияние на точное количественное значение последнего.

грунтовых вод. Однако вместо того, чтобы как уже об этом было упомянуто, рассматривать песчаник бесконечных размеров с граничными условиями в бесконечности, допустим, что интересующая нас область имеет ширину $2L$ и что высота H_0 свободной поверхности в $x=\pm L$ известна. Тогда не возникнет трудности при обработке, если принять водонепроницаемое ложе для $|x|<L$ горизонтальным и систему в целом симметричной относительно оси канавы или канала. Если фильтрация будет продолжаться неопределенно долго, то за пределами $|x|=L$ песчаник должен принять в действительности наклон вниз, чтобы унести фильтрационную жидкость. Однако при установлении высоты H_0 при $x=L$ область вне $|x|=L$ исключается из рассмотрения в задаче, и метод анализа может быть выбран так, чтобы соответствовать системе конечных размеров. К сожалению, весьма трудно подвергнуть точной обработке даже ограниченные задачи, следуя такому методу, хотя в принципе к ним вполне приложимы способы Гопфа, Трефтца и Гамеля. Поэтому до сих пор необходимого анализа получено и не было. В дальнейшем мы разовьем приблизительное решение, в котором объединены оба метода — эксперименты на моделях и приближенный анализ для получения упрощенной процедуры подсчета расхода фильтрации, не входя в подробности изучения свободной поверхности системы.



Фиг. 131. Схематическое представление фильтрационного течения из канавы, которая лежит поверх неглубоко залегающего водяного зеркала (по Дахлеру).

Эта теория, также разработанная Дахлером [1], аналогична приведенной в предыдущем разделе для фильтрации через плотины. В ней течение также разделено на отдельные части. К каждой из них приложен различный метод приближения [2]. Благодаря симметрии, возникающей из допущения, что ненарушенный уровень грунтовых вод горизонтален, следует рассматривать только половину системы, которая представлена в виде диаграммы на фиг. 131. Как уже было сказано, в дополнение к ширине канала b и высоте уровня воды в ней над водонепроницаемым ложем H_2 будет считаться также известной высота H_0 свободной поверхности на расстоянии L от центра канала.

---

[1] Dachler R., Die Wasserwirtschaft, p. 110, 1933.

[2] Можно отметить здесь также работу (I. M. Burgers, De Ingenieur, 22, 1926), где делается аналогичное разделение течения. Течение в части *II* для канала с плоским дном ($DC=H_2$) сравнивается с линейным течением, соответствующим каналу с вертикальными стенками, углубленному до водонепроницаемого ложа, ED пласта песчаника. Тогда разница в потенциале для обоих случаев, в удаленной от канала точке, при том же самом значении потенциала и расхода в канале [соответствующего действительному каналу, рассчитанному на основании уравнения (4)] может быть представлена как „сопротивление истечению", возникающее из особенностей геометрической формы области *II*. Однако эта теория является менее удовлетворительной, чем теория Дахлера, так как она не принимает в расчет депрессии свободной поверхности и отсюда уменьшения средней толщи среды, пропускающей жидкость на далеких расстояниях от канала.

Разделение областей I и II на расстоянии $(b+H_2)/2$ от оси канала (фиг. 131) является совершенно произвольным и находит свое оправдание в том факте, что вне этого расстояния $(b+H_2)/2$ течение с большой степенью приближения будет линейным. Это подтверждается следами линий тока на песчаных моделях системы, представленной на фиг. 131 (фиг. 132). Обозначив через H_1 высоту свободной поверхности в MN, течение через область I можно представить приближенно следующим выражением:

$$\frac{Q}{2}=\overline{k}\left(\frac{H_1-H_0}{L_1}\right)\left(\frac{H_1+H_0}{2}\right);\ L_1=L-\frac{b+H_2}{2}. \qquad (1)^1$$

Для области II, где линии тока претерпевают наибольшее изменение своего направления, можно попытаться представить

$$\frac{Q}{2}=\overline{k}\left(H_2-H_1\right)\varepsilon, \qquad (2)$$

где „фактор геометрической формы“ ε определяется геометрией области канала. Исключая неизвестное количество H_1, величину Q получим из равенства:

$$Q=2\overline{k}\varepsilon\left[H_2+\varepsilon L_1-\sqrt{(H_2+\varepsilon L_1)^2-H_2^2+H_0^2}\right]. \qquad (3)$$

Из этого выражения легко заметить, что относительная ошибка в величине Q будет в целом меньше, чем в соответствующей величине ε. Поэтому ошибки, которые получаются при подсчете значения последней, не поведут к излишним ошибкам в конечном значении величины Q.

Чтобы получить величину ε, течение в области II будет приближаться к значению, которое соответствует распределению потенциала и линии тока, получаемым из следующего уравнения:

$$\left.\begin{aligned} H+i\Psi&=\ln\left(\operatorname{sh}z+\sqrt{\operatorname{sh}^2z-\operatorname{sh}^2 f}\right)\\ z&=x+iy,\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где опять взят напор жидкости вместо потенциала скорости Φ. На фиг. 133 показан типичный комплекс потенциалов и линий тока, ограниченный уравнением (4). Видно, что контур CDN вполне точно воспроизведен линией тока $\Psi=\pi/2$, где DN выражено через $y=\pi/2$. Очевидно, в качестве границы канала можно взять любую кривую $H=\text{const}$, в то время как свободная поверхность AM должна быть приближенно охарактеризована обычной линией тока, проходящей через A — оконечность контура канала. В частной задаче точка M выбирается так, что

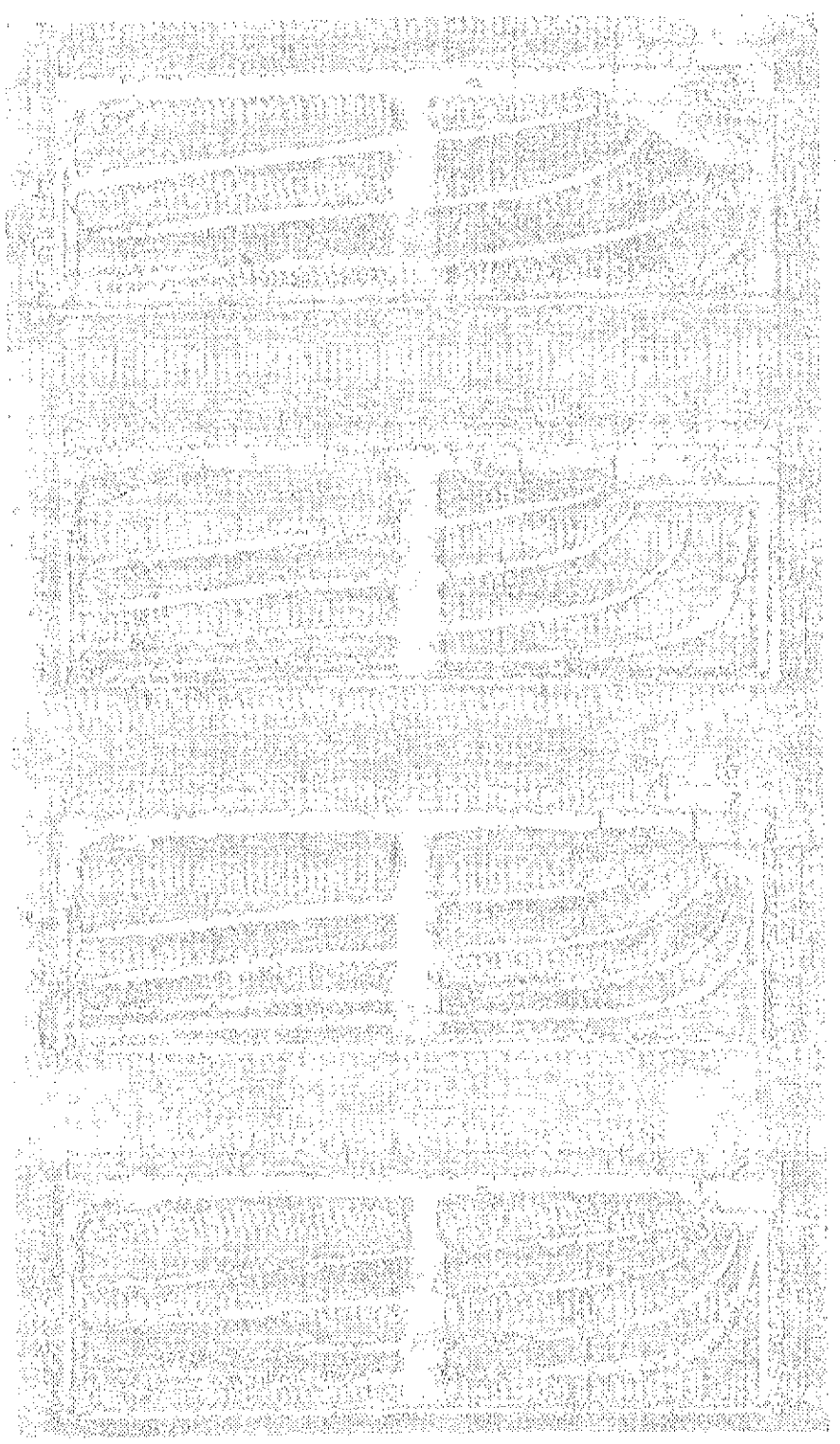
---

[1] В действительности средний потенциал вдоль FE будет меньше, чем эквивалент напора жидкости. Приблизительно та же самая ошибка будет входить и в MN, так что H_1-H_0 дает хорошее представление о правильности среднего разностного напора жидкости в области I. Для случая, представленного уравнением (2), соответствующие ошибки в H_2-H_1 учитываются методом определения величины ε.

ее высота H_1 будет давать тот же самый отсос согласно уравнению (1), что и по уравнению (2). Значения ε получаются на фиг. 133, подбирая различные значения $b/2$ к H_2 и рассматривая соответствующие значения H_1, которые даются на фиг. 134 в виде кривых с постоянным значением ε к координатам b/H_3 и H_1/H_3. Таким образом, для ряда очерченных контуров фиг. 133 соответствующие значения ε будут:

$$\varepsilon = \begin{matrix} \text{для} \\ \text{для} \end{matrix} \begin{matrix} \text{круга} \\ \text{щели} \end{matrix} \begin{matrix} 0{,}393 \\ 1{,}466 \quad 0{,}459 \end{matrix} = 1{,}16. \qquad (6)$$

В дополнение к отношению b/H_3, что является мерилом расширения, канавы по сравнению с мощностью поперечного слоя, форма канавы может быть охарактеризована отношением b/l, где l — длина смоченного периметра канавы. Однако на фиг. 134 результаты различных значений b/l сведены в кучу, где $b/l > 0{,}9$ соответствуют мелким профилям канав, и кучу, где $b/l < 0{,}9$ соответствуют глубоким профилям. Поэтому значения ε следует рассматривать как средние для профилей с $b/l > 0{,}9$ или $< 0{,}9$. Применение этих средних значений является достаточным для большинства практических целей. Однако более точные значения при каждом отдельном случае выбора b/l можно свободно получить, возвращаясь к фиг. 133 и рассчитывая непосредственно величину ε, как в примере, показанном в уравнении (5).

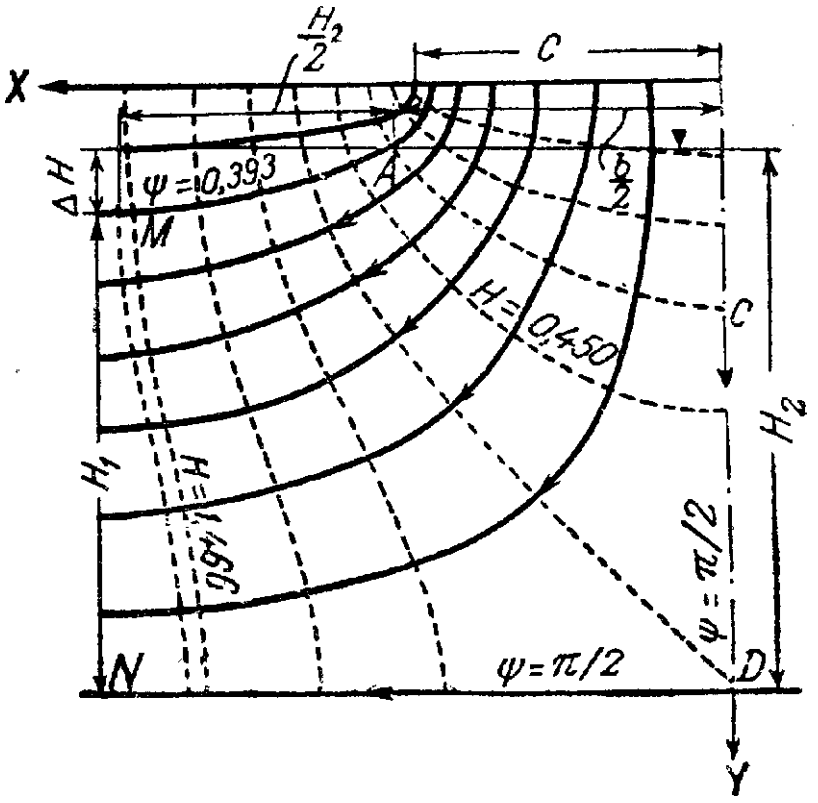


Фиг. 132. Фотографии экспериментов на модели, показывающие фотографические снимки из канав, имеющих поверх всему бокового водяного зеркала (по Дакеру).

Для $b/l = 0{,}9$ значения ε, получаемые из обеих половин диаграммы фиг. 134, могут быть усреднены. Непосредственные эксперименты на моделях, которые дают результаты, указанные точками на фиг. 134, подтверждают, что в результате указанного метода подсчета получаются значения ε с довольно близким приближением. На фиг. 135 приводятся фотографии типовых результатов этих экспериментов на моделях. После того как ε установлено, из уравнения (3) можно рассчитать расход. Однако значения Q будут получаться только при полном

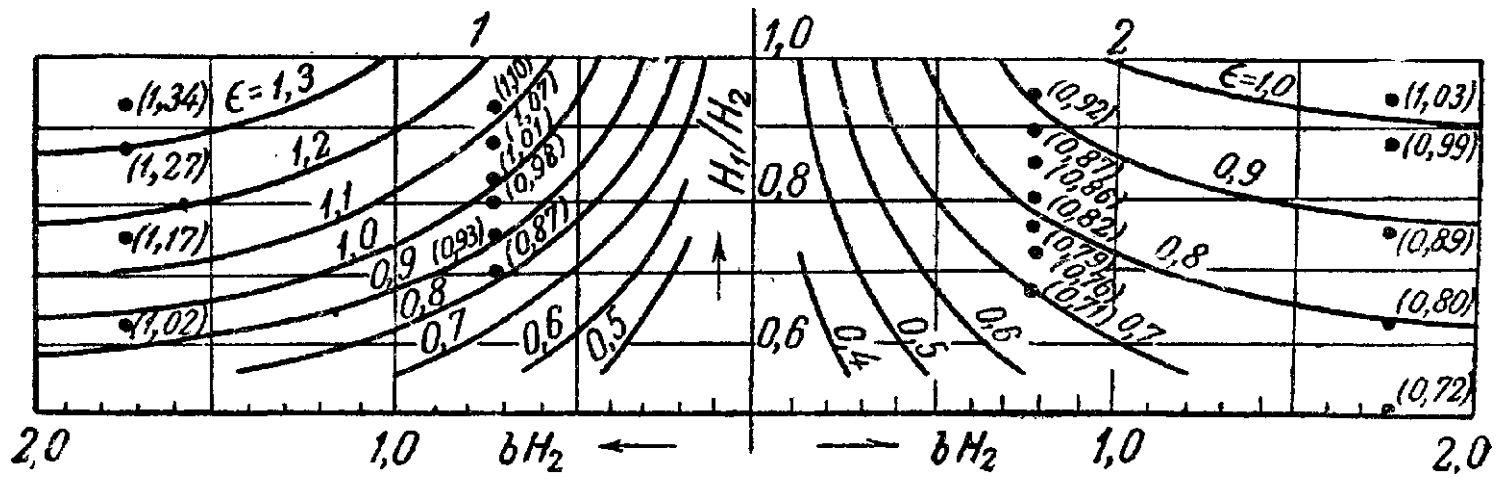
дении значения H_1, что сделает равными правые части уравнений (1) и (2). Так, выбирая

$$b=\frac{1}{2};\quad H_2=1;\ H_0=\frac{1}{2};\ L=5;\ \frac{b}{U}>0{,}9,$$



Фиг. 133. Приближенное распределение потенциала и линии тока вблизи канавы, показанной на фиг. 131 (по Дахлеру).

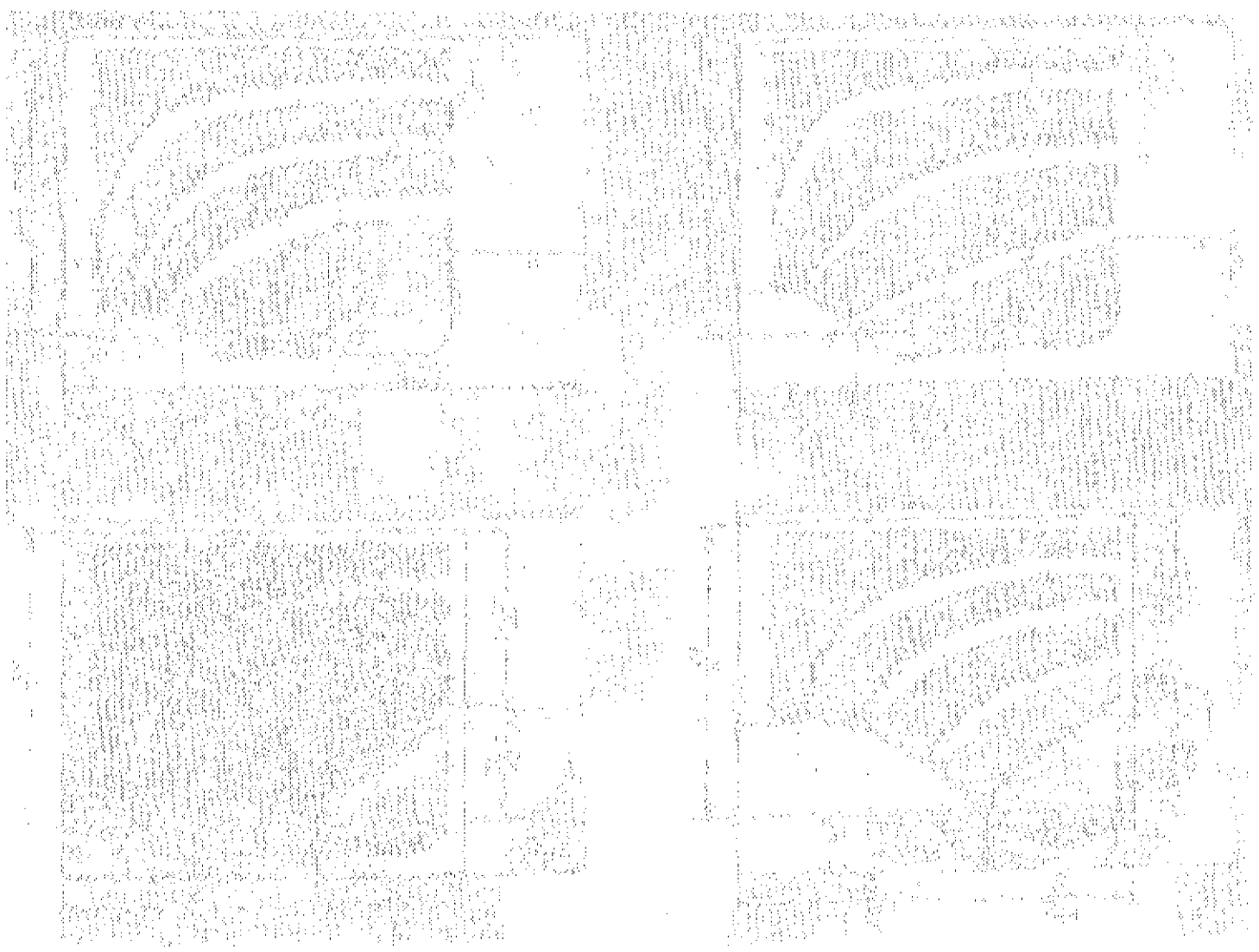
находим, со ссылкой на фиг. 134, что для $H_1=0{,}915$, $\varepsilon=6{,}8$, уравнения (1) и (2) дают в пределах 1% точности то же самое значение для Q, а именно $Q=1{,}37\bar{k}$.



Фиг. 134. Кривые постоянного значения ε, подсчитанные из распределения потенциала и линии тока, представленного на фиг. 133. Точки соответствуют значениям, найденным непосредственными экспериментами на моделях (по Дахлеру).

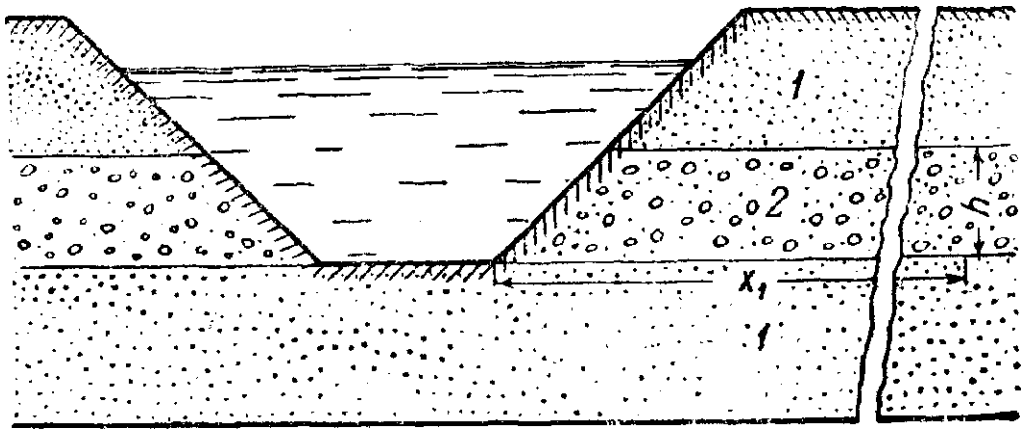
1 — глубокие поперечные сечения: $b/U<0{,}9$; *2* — неглубокие поперечные сечения: $b/U>0{,}9$.

Чтобы получить численные величины, имеющие практическое значение, входящие в состав формул единицы следует применять для различных констант. Если при указанных отношениях b/H_2, H_2/L и H_0/H_2, H_2 взяты в числах, например, $+H_2=304{,}8$ *см*, $k=10$ дарси и $\gamma/\mu=1$, то значение Q для воды будет $Q=1{,}37\cdot10\cdot0{,}968\cdot10^{-3}\cdot304{,}8=4{,}042$ *см*^{3}/*сек*/*см* длины канавы.



соответствующий точный анализ еще не был разработан, и поэтому представленные приближенные методы обработки таких проблем должны дать по крайней мере существенные стороны этих решений.

13. Субирригация. Частный вопрос, рассматриваемый здесь, заключается в установлении степени протяженности x_1 — одностороннего дренирования из канала в грубозернистый пласт песчаника раньше, чем вся утечка воды из канала проникнет в залегающие ниже слои. Сделаем допущение, что дренажный слой полностью насыщен водой и не имеет утечек в верхнем направлении, или свободной поверхности, вплоть до точки x_1, и что фильтрация в глины под каналом является постоянным вертикальным свободным падением с такой скоростью, с какой глины



Фиг. 136. Схематическое представление проблемы субирригации (по Гарднеру, Коллие и Фарру).

1 — глина; *2* — гравий.

в состоянии унести жидкость. Тогда уравнение неразрывности совместно с законом Дарси приведет к следующему выражению:

$$hk_g \frac{d^2p}{dx^2} = k_c \gamma g, \tag{1}$$

где h — толщина гравийного слоя; k_g — его проницаемость; k_c — проницаемость глины; γ — плотность воды; g — ускорение силы тяжести (фиг. 136). Интегрируя уравнение (1) при условиях, что давление и его градиент будут равняться нулю при x_1, можно легко убедиться, что x_1 дается в долях давления p_0 на поверхности канала гравийного слоя следующим уравнением:

$$x_1 = \sqrt{\frac{2p_0hk_g}{k_c\gamma g}} = \sqrt{\frac{2h_0hk_g}{k_c}}, \tag{2}$$

где h_0 — напор жидкости, тождественный давлению p_0. Таким образом, если p_0 являет собой напор жидкости — 0,610 *м*, слой гравия имеет мощность 0,305 *м*, и отношение $k_g/k_c = 100\,000$, то x_1 будет иметь значение 192,75 *м*. Хотя пренебрежение фильтрацией в направлении перекрывающего слоя глины создает тенденцию к завышению значения x_1, даваемого уравнением (2), последнее все же дает численный результат порядка правильных величин.

14. Проблема водонасыщения. Из определения потенциала скорости с вертикальной координатой y, направленной вверх

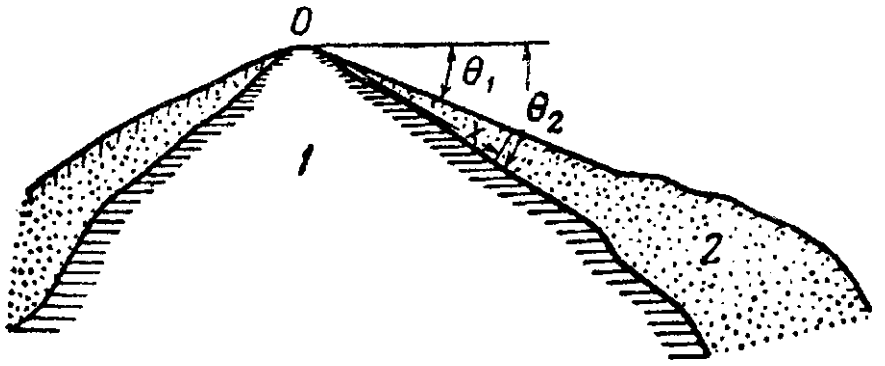
$$\Phi = \frac{k}{\mu}(p + \gamma g y), \tag{1}$$

следует, что высота над плоскостью $y = 0$, до которой поднимется жидкость в открытой трубе или трещине, пронизывающей пористую среду в плоскости y, дается выражением

$$H = \frac{p - p_0}{\gamma g} + y = \frac{\mu}{k\gamma g}\Phi - H_0 = \frac{\Phi}{\bar{k}} - H_0, \tag{2}$$

где p_0 — атмосферное давление и H_0 — соответствующий напор жидкости. Выбирая затем Φ, абсолютное значение которого требует всегда прибавления произвольно выбранной константы так, чтобы включить в уравнение (2) член H_0, видно, что кривая, представляющая собой высоты жидкости H — „пьезометрическую поверхность", пропорциональна потенциалу скорости в пористой среде. Так как H показывает нижний предел высоты, до которой распространяется зона полного насыщения жидкостью при гравитационном течении, „зона погружения в воду" — расчет распределения потенциала Φ дает по крайней мере ограничивающую нижнюю граничную поверхность той части пласта песчаника, которая насыщена и погружена в воду. Это определение условия водонасыщения соответствует такому его значению, которое зависит от величины давления жидкости, а именно, песчаник будет в любой точке водонасыщенным или сухим по мере того, как давление жидкости в нем будет больше или меньше атмосферного давления.

15. Проблема эрозии. Если почва, покрывающая склоны холма или горы, имеет недостаточную глубину залегания, чтобы отвести выпадающий на нее дождь, то излишек воды будет стекать по поверхности земли. В результате этого может образоваться серьезная эрозия верхнего покрова почвы. Приблизительный расчет минимальной глубины почвы, необходимой для удаления выпадающего дождя с интенсивностью q, может быть сделан следующим путем. Допустим, что поверхность почвы лежит на склоне холма с углом падения θ_2 и имеет форму клина (фиг. 137). Обозначая через $\theta_1(x)$ падение верхнего покрова почвы на расстоянии x от вершины холма, получим следующее равенство из уравнения неразрывности:



Фиг. 137. Склон холма, подвергнутый почвенной эрозии (по Гарднеру, Коллие и Фарру).

1 — скала; *2* — почва.

$$q \cos \theta_1(x) = \bar{k} \frac{d}{dx}\left[x \int_{\theta_1(x)}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \right], \tag{1}$$

или

$$\left(1-\frac{q}{k}\right)\cos\theta_1(x)=\cos\theta_2+x\sin\theta_1(x)\,\frac{d\,\theta_1(x)}{dx}\,. \qquad (2)$$

Легко удостовериться, что решение этого уравнения дается:

$$\cos\theta_1=\frac{\cos\theta_2}{1-\frac{q}{k}}+\frac{C}{x^{1-\frac{q}{k}}}\,. \qquad (3)$$

Так как θ_1 должен оставаться конечным даже при $x=0$, то C следует брать равным нулю. Поэтому θ_1 имеет постоянное значение, определяемое выражением:

$$\cos\theta_1=\frac{\cos\theta_2}{1-\frac{q}{k}}\,. \qquad (4)^1$$

Таким образом, видно, что если интенсивность падающего дождя q настолько велика, что правая сторона уравнения (4) превосходит единицу, то падающий дождь по необходимости будет растекаться по поверхности почвы, даже если верхний покров ее горизонтален.

16. Дренирование гончарными трубами. Основная задача систем дренирования гончарными трубами — защитить верхний покров почвы некоторой области от опасности затопления водой[2].

Так, если грунтовая вода в поверхностных отложениях подвержена направленному вверх градиенту потенциала, то она будет подниматься к поверхности и насыщать верхний почвенный покров, если только дренажные приспособления не в состоянии собрать весь направленный вверх поток воды. Приближенный расчет соответствующего размещения дренажных труб может быть произведен следующим образом. Представим себе дренажные трубы бесконечным рядом стоков с расстоянием между ними a, установленным на глубине d ниже поверхности. Они сообщат результирующему распределению потенциала в системе член

$$\Phi=q\ln\left[\operatorname{ch}\frac{2\pi(y-d)}{a}+\cos\frac{2\pi x}{a}\right] \qquad (1)$$

(гл. IV, п. 9 и гл. IX, п. 8), где расход каждой дренажной трубы $4\pi q$ (фиг. 138).

Условие, при котором в системе не будет водонасыщения или фильтрации воды через поверхностный покров, будет заключаться в допущении, что верхний покров водонепроницаем. Это условие аналитически

---

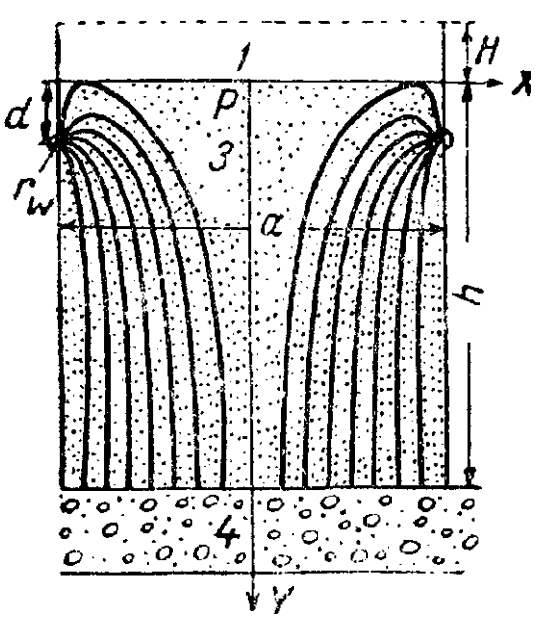
[1] В работе Гарднера, Коллие и Фарра совершенно точно принято, что верхняя поверхность почвы является плоскостью, так что $\frac{d\theta_1}{dx}=0$.

[2] Рассуждение, которое приводится здесь, отличается от метода Гарднера, Коллие и Фарра тем, что последний синтезирует течение из гравийного слоя в дренажные трубы как простую сумму линейного и радиального течений. В данном случае течение в систему дренажных труб представлено строго уравнением (2), за исключением того, что пренебрегается свободной поверхностью, которая образует верхнюю границу течения.

выполняется помещением мнимого ряда дренажных труб в $y=-d$ или прибавлением к величине Φ уравнения (1) совершенно аналогичного члена, где d в нем заменено через $-d$. Тогда можно написать результирующий потенциал в таком виде:

$$\Phi = c + q \ln \left[\operatorname{ch} \frac{2\pi (y-d)}{a} + \cos \frac{2\pi x}{a}\right]\left[\operatorname{ch} \frac{2\pi (y+d)}{a} + \cos \frac{2\pi x}{a}\right]. \quad (2)$$

Отсутствие фильтрации через поверхностный покров фактически обязано гравитационному характеру течения, а не водонепроницаемости его. Это можно установить добавлением условия, что давление в центральной точке P (фиг. 138) и на поверхностях дренирования с радиусом r_w будет атмосферным p_0. Сначала выберем константу c в уравнении (2) так, чтобы суммарный, направленный вверх движущий потенциал от гравийного слоя на глубине h был тождествен напору жидкости H. Чтобы иметь строго постоянный потенциал на глубине h, потребуется получить отражение двух рядов стоков, участвующих в уравнении (2) мнимыми отображениями сначала по линии $y=h$, затем в направлении оси x-ов, затем снова по $y=h$ и т. д., образуя при этом бесконечный ряд параллельных стоков. Если глубина гравийного слоя ниже линии дренажных труб имеет порядок или больше, чем расстояние между трубами a, то ряд при $y=+d$ уже дает потенциал при $y=h$, который будет постоянным для всех практических целей, что будет детально показано в гл. IX, п. 8. Таким образом, потенциал при $y=h$, соответствующий уравнению (2), может быть выражен:



Фиг. 138. Два ряда гончарных дренажных труб, установленных поверх гравийного слоя, чтобы предохранить почву от водонасыщения (по Гарднеру, Коллие и Фарру).

1 — пьезометрическая поверхность; *2* — поверхность почвы; *3* — глинистая почва; *4* — гравий.

$$\Phi\ (y=h) \cong c + q \ln \operatorname{ch} \frac{2\pi (h-d)}{a} \operatorname{ch} \frac{2\pi (h+d)}{a}. \quad (3)$$

Потенциал на поверхности в точке, лежащей между дренажными трубами:

$$\Phi(0,\ 0) = c + 2q \ln 2 \operatorname{ch}^2 \frac{\pi d}{a}, \quad (4)$$

так что q дается выражением:

$$q = \frac{\overline{k}H}{\ln \dfrac{\operatorname{ch} 2\pi (h-d)/a \operatorname{ch} 2\pi (h+d)/a}{4 \operatorname{ch}^4 \pi d/a}}. \quad (5)$$

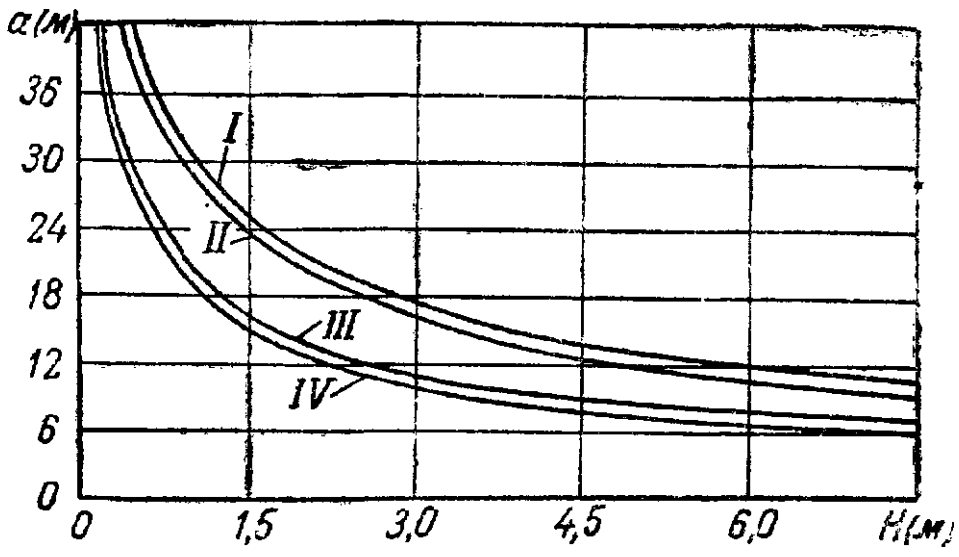
Прилагая теперь условие, что давление в P аналогично тому, что имеется на дренажных поверхностях, следует, что

$$\frac{2q}{\overline{k}} \ln 2\operatorname{ch}^2 \frac{\pi d}{a} = d + \frac{2q}{\overline{k}} \ln 2 \operatorname{sh} \frac{\pi r_w}{a} \operatorname{sh} \frac{2\pi d}{a}.$$

Объединяя это выражение с (5), можно написать уравнение, устанавливающее величину расстояния a, а именно:

$$\frac{\ln \dfrac{\operatorname{ch}^2 \pi d/a}{\operatorname{sh} \pi r_w/a \operatorname{sh} 2\pi d/a}}{\ln \dfrac{\operatorname{ch} 2\pi (h-d)/a \operatorname{ch} 2\pi (h+d)/a}{4 \operatorname{ch}^4 \pi d/a}} = \frac{d}{2H}. \qquad (6)$$

Наиболее простая процедура нахождения расстояния a между дренажными трубами из этого уравнения как функции остальных параметров r_w, d, h и H, повидимому, заключается в допущении некоторых значений r_w, d, h и a, а затем в подсчете соответствующих величин H. На фиг. 139 дается построение рассчитанных этим путем расстояний a по отношению к разности движущего напора жидкости H для глубин дренирования $d = 1{,}525$ и $3{,}05$ *м* и глубины залегания гравийного слоя $h = 15{,}25$ *м* с радиусом дренирующей трубы $0{,}075$ и $0{,}152$ *м*. Следует заметить, что по мере того, как возрастает движущий напор H, резко падает величина расстояния a. Поэтому стоимость эффективного дренажа с ростом H становится очень быстро недопустимой. Дальнейшее сравнение кривых при различных d и r_w показывает, что близкое размещение становится весьма существенным фактором, по мере того уменьшается глубина дренажных труб или их радиусы.



Фиг. 139. Расстояние a фронта гончарных труб, необходимых для предупреждения затапливания водой:

H — напор жидкости, создающей течение, направленное вверх; *I* — $d = 3$ *м*, $r_w = 0{,}15$ *м*; *II* — $d = 3$ *м*, $r_w = 0{,}075$ *м*; *III* — $d = 1{,}5$ *м*, $r_w = 0{,}15$ *м*; *IV* — $d = 1{,}5$ *м*, $r_w = 0{,}075$ *м*; d — глубина дренирования; r_w — радиус дренирования; глубина гравийного слоя, служащего источником питания, — 15 *м*.

17. Теория гравитационного течения Дюпюи-Форхгеймера. В настоящее время положения теории гравитационного течения Дюпюи-Форхгеймера являются настолько сомнительными, что обесценивают почти всю теорию, если только ее не прикладывать с большой осторожностью. Однако ее широкое применение даже в настоящее время требует дать по крайней мере краткое описание ее основных сторон. Все они, разумеется, вытекают из допущений, сделанных Дюпюи[1] в 1863 г., что для малых углов наклона свободной поверхности при гравитационном течении линии тока могут быть приняты горизонтальными и должны быть связаны со скоростями, пропорциональными наклону свободной поверхности, и не зависят от глубины (цилиндрическое течение). Эти два допущения позволили Дюпюи вывести формулу для радиального

[1] Dupuit J., Etudes theoriques et pratiques sur le mouvement des eaux, 1863.

гравитационного течения, а в руках Форхгеймера[1] дали общее уравнение для любого гравитационного течения. Вывод Форхгеймера может быть очень легко получен простым приложением уравнения неразрывности к жидкости в любой колонне песка, заполненного ею с высотой $\bar{h}$ поверх водонепроницаемого ложа системы. Если v_x, v_y являются компонентами скорости при установившемся движении в колонне и сохраняют свое значение по всей длине ее, то уравнение неразрывности требует, чтобы:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\bar{h}v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{h}v_y) = 0. \tag{1}$$

Далее, допущения Дюпюи налагают условия, что

$$v_x = -\bar{k}\frac{\partial h}{\partial x}; \qquad v_y = -\bar{k}\frac{\partial h}{\partial y}. \tag{2}$$

Отсюда немедленно следует:

$$\frac{\partial^2 \bar{h}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}^2}{\partial y^2} = 0, \tag{3}$$

что и является выводом Форхгеймера.

Это уравнение свободной поверхности при гравитационном течении было приложено к разнообразным проблемам последнего[2]. Повидимому, аналитическая процедура, которую можно применить для решения этого уравнения, соответствует той, что была развита в главе IV для математической трактовки двухразмерного уравнения Лапласа при распределении давления в несущей жидкость пористой среде, так как она фактически с внешней стороны дает выражение, тождественное приведенному нами ранее.

Так, в частности, уравнение (3) налагает условие, что для линейного течения длиной L, с граничными значениями для $\bar{h}$ величин h_e, h_w:

$$\bar{h}^2 = \frac{h_e^2 - h_w^2}{L} x + h_w^2, \tag{4}$$

в то время как для соответствующей радиальной системы, оконтуренной концентрическими кругами с радиусами r_e, r_w:

$$\bar{h}^2 = \frac{h_e^2 - h_w^2}{\ln r_e/r_w} \ln \frac{r}{r_w} + h_w^2 \tag{5}$$

Возвращаясь теперь к допущениям Дюпюи, ясно, что, так как

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x}; \qquad \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial y}, \tag{6}$$

то допущение о „цилиндрическом течении“ $\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0\right)$ налагает условие, чтобы вертикальная скорость оставалась постоянной в горизон-

[1] Forchheimer, Ph., Zeits. Arch. Ing. Ver. Hannover, 1886.
[2] Forchheimer, Ph., Hydraulik, 3d ed., Chap. III, 1930.

тальных плоскостях. Тогда на внешнем контуре, где поддерживается постоянство потенциала, v_z, очевидно, будет равняться нулю. Отсюда v_z будет равняться нулю внутри всей системы. Однако без вертикальных скоростей свободная поверхность будет горизонтальной, и течение не будет иметь гравитационной составляющей. Отсутствие вертикальных скоростей при гравитационном течении совершенно противоречит условиям, налагаемым законом Дарси.

Из следующего соотношения можно вывести суждение об общей природе действительных вертикальных изменений результирующей скорости при гравитационном течении:

$$\frac{\partial}{\partial z}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)=2\left[v_x^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v_z}{v_x}\right)+v_y^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v_z}{v_y}\right)\right]. \qquad (7)$$

Отсюда следует, что в точках, где линии тока образуют выпуклость, результирующая скорость уменьшается с возрастанием высоты и возрастает в тех точках, где линии тока образуют вогнутость. Результирующая скорость возрастает с увеличением высоты. Поэтому вблизи поверхностей поглощения с высоким уровнем жидкости результирующие скорости должны уменьшаться с высотой, в то время как вблизи поверхностей стока и постоянного потенциала с низкими уровнями жидкости, где линии тока будут перегнуты так, чтобы встретить эти поверхности под прямым углом, результирующие скорости будут увеличиваться с возрастанием высоты[1]. По сравнению с этими общими рассуждениями, показывающими несовместимость допущений Дюпюи с непосредственными условиями, налагаемыми законом Дарси, становятся еще более убедительными результаты специальных подсчетов, проведенных весьма строго в гл. VI, п. 5, для фильтрации воды через плотины с вертикальными ребрами. Так, возвращаясь к фиг. 103—106, видно, что даже вдоль поверхности поглощения, где наклон свободной поверхности является минимальным, распределение скорости далеко от постоянства[2]. Отсутствует также какая-либо связь между средней величиной скорости вдоль поверхности поглощения и наклоном свободной поверхности, которая всегда в этом месте равняется нулю. Ошибка допущений Дюпюи еще более заметна на поверхности стока, где скорости изменяются от нуля до бесконечно больших значений. Такое несоответствие было по всей вероятности замечено Дюпюи, так как он первоначально предложил свою теорию для применения только в областях с небольшим наклоном свободной поверхности.

Как и следует ожидать, обобщение Форхгеймера, представленное уравнением (3), стоит не большего, чем первоначальные допущения Дюпюи. В гл. VI, п. 5 было уже отмечено, что свободная поверхность,

---

[1] Эти общие выводы приложимы ко всем установившимся течениям жидкости. Их можно подтвердить и для частной задачи о фильтрации через плотины, сославшись на распределение скорости вдоль поверхностей плотин, как это показано на фиг. 103—106.

[2] Действительно, логичное приложение допущений Дюпюи приводит к абсурдному выводу, что, так как наклон свободной поверхности вдоль поверхности поглощения равняется нулю, ибо понятие „свободная поверхность“ вытекает из представления о контуре постоянного потенциала, скорость поглощения будет везде равняться нулю.

которая дается уравнением (4) и показана кривыми $\bar{h}$ на фиг. 103—106, является только плохим приближением к правильной форме свободной поверхности. Расхождения особенно велики в том случае, где напор жидкости на стоке равен нулю. Так как теория Дюпюи-Форхгеймера не учитывает поверхности фильтрации, то граничные значения $\bar{h}$, которые берутся в решениях уравнения (3), должны, очевидно, соответствовать величинам напора жидкости. Когда последний равняется нулю, также будут равняться нулю высоты свободной поверхности, выведенные на основании уравнения (3). С другой стороны, пренебрежение поверхностью фильтрации является не единственной причиной трудности; ибо если даже принять граничные высоты жидкости такими, которые даются точной теорией или экспериментами на моделях, то параболическое изменение уравнения (4) все же не даст близкого приближения к форме истинной свободной поверхности.

Как уже указывалось в гл. VI, п. 5, если пренебречь всеми отмеченными трудностями, относящимися к лежащим в основе теории допущениям и выводам из уравнения (3), и приложить допущения Дюпюи к решениям (3), чтобы получить величину расхода, то окончательные значения его будут тем не менее удивительно близки к величинам, устанавливаемым эмпирическим путем или точным решением. Так, для линейного течения эта процедура в соединении с уравнением (4) дает следующее выражение:

$$Q = \bar{k}\,\bar{h}\,\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = \frac{\bar{k}\,(h_e^2 - h_w^2)}{2L}, \tag{8}$$

а для радиального течения та же процедура, приложенная на основании уравнения (5), дает:

$$Q = 2\pi \bar{k}\, r \bar{h}\,\frac{\partial \bar{h}}{\partial r} = \frac{\pi \bar{k}\,(h_e^2 - h_w^2)}{\ln r_e/r_w}. \tag{9}$$

Как уже было замечено, уравнение (8) воспроизводит значения Q, которые даются строгим расчетом с точностью, достаточной для всех практических целей (см. последние два ряда в табл. 11). Уравнение (9), как это будет показано в гл. VI, п. 18, дает достаточно точно величину расхода по сравнению с соответствующими величинами, полученными эмпирическим путем на радиальных песчаных моделях. Разумеется, весьма затруднительно показать, каким образом различные ошибки в отношении величины $\bar{h}$ уничтожаются при решении уравнения (3) взаимно, таким образом, что в результате получаются близкие приближения к значению результирующего расхода. Однако в гл. VI, п. 20 мы найдем, что можно получить точный вывод обоих уравнений (8) и (9) совершенно отличным путем для систем, в которых, рассматривая их с физической стороны, можно ожидать встретить величину расхода, отличную от соответствующих им значений при аналогичных гравитационных течениях. Существует весьма обширная литература, в которой на основании решения уравнения (3) выводится свободная поверхность для различных гравитационных течений[1]. Однако в свете проведенной дискуссии

[1] См., в частности, Ph. Forchheimer, Hydraulik 3d ed., Chap. III, а также J. Kozeny, Ing. Zeits., 1, 97, 1921.

едва ли стоит воспроизводить эти выводы в настоящей работе. Если известно заранее, что наклон свободной поверхности невелик на протяжении всего течения или в любой части его, можно применить вполне обоснованно для приблизительных расчетов свободной поверхности уравнение (3) или первоначальные допущения Дюпюи при условии, что известны точные значения высоты жидкости на границах интересующей нас области.

Методы нахождения соответствующих решений уравнения (3) идентичны с теми, что были описаны нами и детально показаны в главе IV. Если геометрия системы и граничные условия аналогичны соответствующим значениям проблемы, рассматриваемой в главе IV, то развитые там решения могут быть формально взяты для решений уравнений (3) с единственным изменением, что функцию p или Φ из главы IV следует заменить через $\bar{h}^2$ уравнения (3).

Раньше чем расстаться с рассмотрением теории Дюпюи-Форхгеймера, следует заметить, что те же самые допущения были использованы для построения теории изменения во времени уровня грунтовых вод по соседству с каналами или колодцами[1]. Так, если $h(x, y)$ — высота уровня грунтовых вод в (x, y) над водопроницаемым ложем, принятым за горизонтальную поверхность, то уравнение неразрывности, приложенное тем же самым путем, что и при выводе уравнения (3), дает для изменения величины $\bar{h}$ в зависимости от времени и от координат следующее выражение:

$$f\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = \bar{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{h}\frac{\partial \bar{h}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{h}\frac{\partial \bar{h}}{\partial y}\right)\right\}, \tag{10}$$

где f — пористость песчаника. Так как это уравнение является нелинейным и не может быть решено точным путем, в него вводятся дальнейшие приближения. Вначале $\bar{h}$ выражается через $H+z$, где z — высота уровня грунтовых вод (свободная поверхность над нулевой плоскостью) и H — высота этой плоскости над водонепроницаемым ложем. Тогда уравнение (10) принимает вид:

$$f\frac{\partial z}{\partial t} = \bar{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[(H+z)\frac{\partial z}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(H+z)\frac{\partial z}{\partial y}\right]\right\}. \tag{11}$$[2]

Если теперь выбрать величину H так, что она представляет собой большую часть мощности водонасыщенной зоны, т. е. $z \ll H$, то уравнение (11) можно приближенно заменить следующим выражением:

$$\frac{f}{\bar{k}H}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \tag{12}$$

---

[1] См. Ph. Forchheimer, там же, стр. 104; V. Felber, Die Wasserwirtschaft, 25, 25, 60, 1932; Wasserkraft u. Wasserwirtschaft, 26, 73, 1931; J. Kozeny, там же, 28, 102, 1933.

[2] Это уравнение первоначально было предложено J. Boussinesq, Jour. Math., 10, 14, 1904, и может быть также приложено к случаю, когда водонепроницаемое ложе не является горизонтальным, так что H изменяется в зависимости от (x, y).

Это линейное уравнение тождественно соответствующему уравнению двухразмерной теплопередачи или же соответствующему двухразмерному течению сжимаемой жидкости в пористой среде [уравнение (6), гл. III, п. 4]. Хотя решения этого уравнения могут быть получены методами, развитыми в главе X, для почти произвольных граничных и начальных условий для z, подробное рассмотрение этих решений едва ли кажется оправданным в свете сомнительного характера допущений Дюпюи, лежащих в основе построения первоначального уравнения (10). Несмотря на практическое значение знания величины изменений уровня грунтовых вод при решении задач дренирования и ирригации, лучше подождать, пока не будет разработана более удовлетворительная теория, чем давать осложнения, заключающиеся в уравнении (12), которое влечет за собой ошибки неизвестной величины.

18. Эксперименты на песчаных моделях с трехразмерными гравитационными течениями. Теперь становится ясным, что в свете рассмотрения, проведенного в гл. VI, п. 17, уравнения (5) и (9) гл. VI, п. 17, базирующиеся на теории Дюпюи-Форхгеймера, дающие форму свободной поверхности и величину расхода при гравитационном радиальном течении, едва ли могут считаться в какой-либо степени справедливыми без прямого эмпирического или точного аналитического подтверждения. Однако эти уравнения были поставлены под сомнение только в 1927 г., когда Козени опубликовал свою первую попытку решить проблему течения прямыми методами потенциальной теории[1]. Так, начав с уравнения Лапласа [(2), гл. VI, п. 1], он сделал попытку синтезировать решение, удовлетворяющее граничным условиям гравитационного течения с помощью элементарных решений того типа, который был применен нами для исследования проблемы несовершенных скважин [уравнение (7), гл. V, п. 3]. К сожалению, точные граничные условия не были приложены им к решению этой задачи. Так, расход через систему был принят соответствующим линии тока, входящей в колодец на уровне жидкости в последнем. Однако в колодце, как уже было отмечено, будет иметь место определенный разрыв непрерывности, так что свободная поверхность системы будет входить в колодец над уровнем жидкости в последнем, давая толчок к образованию поверхности фильтрации. Тогда решение будет состоять только из постоянных членов и ряда функций Ганкеля, и радиальные скорости на значительных расстояниях от колодца станут экспоненциально исчезающе малыми. Однако с физической стороны ясно, что в точках, удаленных от поверхности колодца, радиальные скорости должны асимптотически приближаться к соответствующим значениям в строго двухразмерном радиальном течении. Поэтому потенциальная функция в таких точках асимптотически приближается к логарифмическому изменению или содержит, очевидно, логарифмический член, как это имеет место, например, в уравнении (5), гл. VII, п. 20 (vide infra). Наконец, потенциальная функция Козени не обладает характеристикой, требуемой каждым точным решением проблемы гравитационного течения, а именно, чтобы наивысшая линия тока была линией тока свободной поверхности с потенциалом, пропорцио-

[1] Kozeny J., Wasserkraft u. Wasserwirtschaft, 22, 120, 1927.

нальным его вертикальной координате. Конечное выражение Козени для суммарного расхода Q было:

$$Q = 2\pi \bar{k} \zeta h r_w F\left(\zeta, \frac{\pi r_w}{2h}\right), \tag{1}$$

где $\bar{k}$ — „эффективная" проницаемость песчаника, т. е. $k\gamma g/\mu$; h — мощность песчаника; r_w — радиус колодца и $\zeta = 1 - \frac{h_w}{h}$, где h_w — высота жидкости в колодце. $F(\zeta, \pi r_w/2h)$ является довольно сложной функцией обоих аргументов и должна быть подсчитана численно.

Условие пропорциональности расхода Q от r_w, которое налагает уравнение (1), когда функция F независима от $\pi r_w/2h$, является одним из наиболее важных указаний этой теории. Этот расход совершенно точно зависит от допущения, что величина $\pi r_w/2h$ значительна. Однако большинству практических случаев соответствует как раз обратное явление. Что же касается остальных условий, налагаемых уравнением (1), необходимо заметить, что недавние экспериментальные исследования проблемы гравитационного течения[1] установили формулу, не имеющую двух толкований и которая совершенно не соответствует уравнению (1).

Поэтому, если теорию Козени нельзя считать дающей удовлетворительное решение гравитационного радиального течения[2], все же она дала толчок для первого непосредственного экспериментального исследования проблемы.

Чтобы подвергнуть испытанию положения этой теории, что расход Q должен иметь свой максимум при $\zeta = \frac{1}{2}$, установить изменения его при $\zeta < 1/2$ (высота жидкости в колодце выше, чем половина мощности песчаника), а также посмотреть, какие произойдут изменения при введении $\zeta > 1/2$, Козени произвел сам некоторые экспериментальные измерения в круглом баке, Его эксперименты, повидимому, удовлетворяют его теории для значения $\zeta < 1/2$. Чтобы охватить все возможные данные, им была предложена эмпирическая формула:

$$Q = Q_{\max}\left[1 - \left(\frac{hw}{h}\right)^2\right]^{2/3}, \tag{2}$$

которая, очевидно, мало имеет физического значения. Более полное исследование теории Козени было выполнено Эренбергером[3]. Эти опыты

---

[1] Wyckoff R. D., Botset H. G. and Muskat M., Physics, 3, 90, 1932.

[2] Следует также упомянуть о более поздней работе Козени (Wasserkraft und Wasserwirtschaft, 28, 88, 1933), где была получена формула для распределения давления в основании системы при радиальном течении, воспроизводящая довольно близко результаты, полученные в экспериментах Wyckoff, Botset and Muskat. Однако анализ, который был им развит по аналогии с теорией комплексных переменных параболического линейного гравитационного течения (гл. VI, п. 7), повидимому, оправдывается с трудом, так как конечное распределение потенциала не удовлетворяет уравнению Лапласа.

[3] Ehrenberger R., Zeits. Oster. Ing. Arch. Ver., nos. 9/10, 11/12, 13/14, 1928.

были прекрасно поставлены и во многих отношениях были вполне исчерпывающими. Все же, повидимому, они не дали удовлетворительного ответа на вопросы, поставленные в задаче. Основным результатом этой работы было опять получение корректирующего опытного коэфициента, который следует приложить к формуле Козени. Ввиду того, что этот корректирующий множитель не имеет физического значения, распространение его на иные размеры модели течения или на иные геометрические формы течения должно быть установлено новыми экспериментами. Опыты Эренбергера с трудом поддаются интерпретации, так как в большинстве случаев жидкость откачивали из скважины с помощью спущенных труб, установленных сейчас же под уровнем жидкости, нарушая при этом, повидимому, течение по соседству со скважиной.

Следующие попытки получения более удовлетворительного ответа на проблему гравитационного течения были исследования Венцеля[1], а также Вайкова, Ботсета и Маскета, которые были выполнены ими почти одновременно.

Венцель был заинтересован скорее в задаче обратного решения уравнения (9), гл. VI, п. 17, и применить его для определения проницаемости водяного песчаника, чем в общей постановке вопроса гравитационного течения. Так, Венцель замечал снижение уровня в 80 с лишком наблюдательных скважинах, расположенных радиально относительно двух скважин, в которых производилась откачка с известной скоростью. После этого он подсчитал проницаемость на основании пар наблюдений за скважинами с расстояниями r_1 и r_2 от насосной скважины по формуле, в основном аналогичной обратному уравнению (9), гл. VI, п. 17, Дюпюи-Форхгеймера, а именно

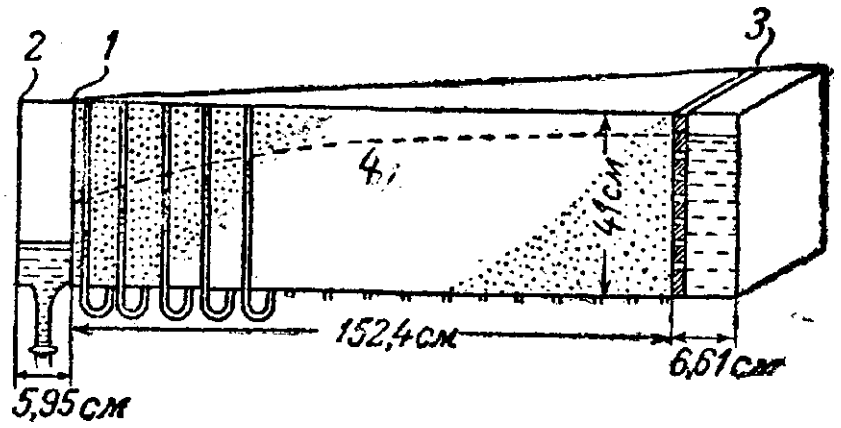
$$\overline{k} = \frac{Q \ln r_2/r_1}{\pi (h_2^2 - h_1^2)}, \qquad (3)$$

где h_1 и h_2 — высоты жидкости в двух точках r_1 и r_2.

Их можно определить путем вычитания значений снижения уровня из ненарушенных величин уровня воды в песчанике. Венцель в результате этих расчетов нашел, что проницаемость $\overline{k}$, повидимому, равномерно возрастала с увеличением расстояния r_2 второй обсервационной скважины, и вывел заключение, что по крайней мере в его экспериментах уравнение (3) должно подвергнуться некоторому исправлению. Однако ошибочность уравнения (3), заключающаяся в невозможности дать постоянное значение $\overline{k}$, была отнесена скорее за счет отсутствия равновесия при течении, чем к присущему уравнению (3) основному недостатку. После того, как начинается откачка в центральной скважине, повидимому, существует отставание во времени при установлении равновесия свободной поверхности в точках, далеко от нее расположенных. Это обстоятельство, согласно Венцелю, дает видимое увеличение значения $\overline{k}$, когда последняя рассчитывается по данным наблюдений, в удаленных от скважины точках. При полевых измерениях, например, сделанных Венцелем, необходимо обратить особое внимание на достижение установив-

[1] Wenzel L. K., Trans. Amer. Geophys. Union, p. 313. 1932, published by the National Research Council.

шегося состояния в системе. Однако не следует ожидать строгого постоянства $\bar{k}$ даже после того, как система достигла полного равновесия, пока основная формула Дюпюи [уравнение (5), гл. VI, п. 17] не стала бы совершенно справедливой. Результаты опытов Вайкова, Ботсета и Маскета[1] ясно показали, что причина этого несоответствия заключается в несколько иных фактах. Эти исследователи, в противоположность Венцелю, обратились к лабораторным методам Козени и Эренбергера. На фиг. 140 показана схема их прибора. Существенно новыми особенностями, введенными в эту работу, явились манометры, присоединенные к днищу резервуара с песком, с помощью которых производилось измерение радиального распределения давления вдоль ложа всей системы, а также непрерывная циркуляция жидкости в резервуаре так, чтобы можно было поддержать без труда вполне удовлетворительное установившееся состояние течения. Песок в резервуаре был набит так, чтобы обеспечить не только постоянство проницаемости, но и освобождение от захваченного системой воздуха. Для удобства был взят круговой сектор в 15°, который полностью воспроизводит радиальное течение.



Фиг. 140. Схема резервуара, применявшегося при экспериментальном изучении радиального гравитационного течения. Расстояние между каждым из первых 10 манометров — 5,08 *см*; расстояние между каждым из вторых 9 манометров — 10,16 *см*.

1 — проволочная сетка; *2*— центр скважины; *3* — перфорированная медная пластинка; *4* — песок.

Для изучения строго гравитационной задачи резервуар, заполненный тонкозернистым песком, имел стеклянные стенки. В последующих экспериментах, когда изучалось явление движения под давлением, был сооружен цельнометаллический резервуар (6,3-*мм* листовая медь) с вертикальными трубками на входе и выходе из системы. Поток жидкости замерялся по тщательно откалиброванному счетчику, включенному в систему циркуляции.

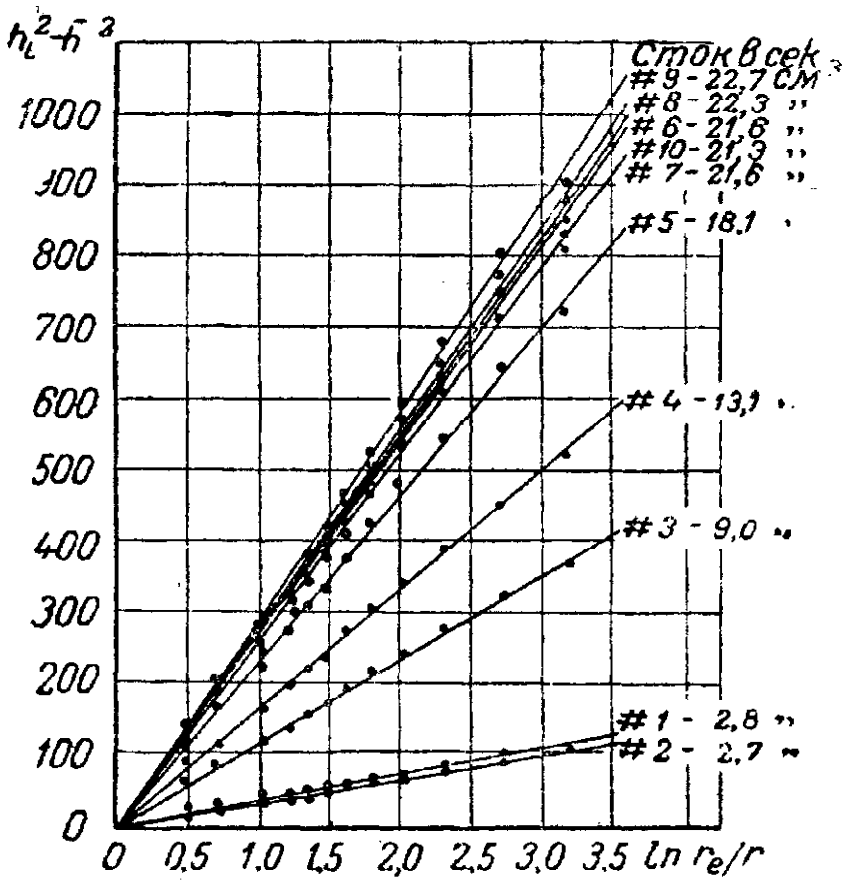
---

[1] Действительно, допуская правильность уравнения (3) для установившегося течения, казалось бы, что неустановившиеся явления, упоминаемые Венцелем, вызовут скорее видимое уменьшение $\bar{k}$ с увеличением значения r_2. Если удаленные точки r_2 запаздывают достичь своего состояния равновесия при откачках, то соответствующие значения $h_2^2 - h_1^2$ будут слишком велики. Отсюда найденное значение $\bar{k}$ будет меньше по сравнению с малыми значениями r_2, где запаздывание будет малозаметным. Следует заметить, что Венцель в полном отчете об этих испытаниях (U. S. Geol. Surv, Water Supply Paper, 679-A, 1936) показывает, что средние величины видимых значений проницаемости на противоположных радиусах от насосной скважины, что по его мнению, должно устранять по крайней мере частично влияние нормального градиента грунтовых вод в водоносном горизонте, являются более или менее постоянными. Тем не менее трудно дать оценку этого вывода в свете того обстоятельства, что глубина вскрытия песчаника насосной скважины составляла только 40%. Один этот факт должен обесценить уравнение (3), даже если принять допущения Дюпюи вполне справедливыми.

При экспериментах с резервуаром, имеющим стеклянные стенки, наблюдения за высотой стояния воды в песке производились на различных расстояниях от центра скважины. Однако лучшую количественную характеристику дают отсчеты по манометрическим трубкам, которые, очевидно, соответствуют напорам[1] жидкости в системе, замеренным в основании слоя песка. Анализ этих данных показывает, что в пределах ошибки эксперимента они удовлетворяют отношению:

$$\overline{h}^2 - h_w^2 = \frac{h_e^2 - h_w^2}{\ln r_e/r_w} \ln \frac{r}{r_w}, \qquad (4)$$

где $\overline{h}$ — отсчет по манометру напора жидкости на расстоянии r, а h_e и h_w — отсчеты при расстоянии r_e и r_w; последняя величина определяет собой соответственно радиус скважины. На фиг. 141 показана характеристика типичного комплекса полученных эмпирических данных и согласованность их с уравнением (4). Видно, что, несмотря на отклонения в отдельных точках, данные эти можно рассматривать в целом подтверждающими уравнение (4).



Фиг. 141. Распределение напора жидкости $\overline{h}$ (r) в основании радиальной модели гравитационного течения, представленной на фиг. 140. h_e — напор жидкости при $r = r_e$.

На фиг. 142 показаны манометрические отсчеты для одного из этих экспериментов, построенные в декартовой системе координат.

Точки дают наблюденные значения, кружки — исчисленные, согласно уравнению (4), а крестики — величины, подсчитанные на основании приближенной теории, которая дается в гл. VI, п. 20 (5).

Чтобы определить зависимость между суммарным расходом Q в системе и граничными условиями, было произведено измерение проницаемости по месту опытов[2], исходя из того обстоятельства, что, когда уровень жидкости в скважине находится поверх высоты песка,

---

[1] В гидрологической литературе эти высоты обычно называются „пьезометрическими высотами" (гл. VI, п. 14).

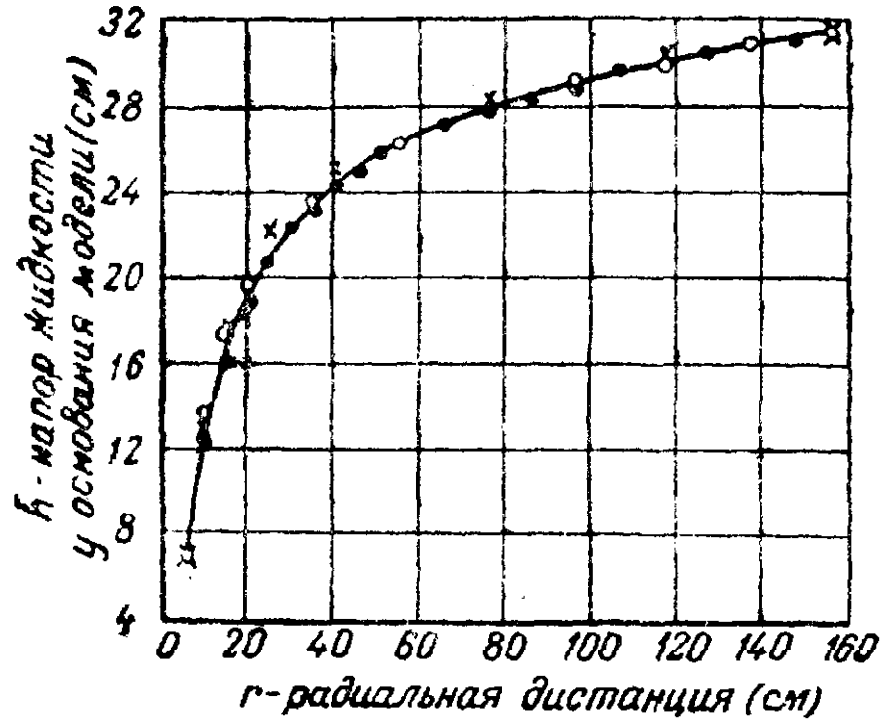
[2] В этих, а также во всех последующих экспериментах, где делается попытка отнести расход Q к физическим и геометрическим константам системы, резервуар, приведенный на фиг. 140, был заменен цельнометаллическим 15° сектором, выдерживающим давление, так как было найдено, что эффективная проницаемость песков в открытом резервуаре (фиг. 140) значительно отличается от соответствующих величин, подсчитанных из опытов с трубками, набитыми песком.

течение принимает двухразмерный радиальный характер, для которого являются уже известными распределение давления и расход Q.

Из уравнения (10), гл. VI, п. 2, видно, что $\bar{k}$ может быть подсчитано:

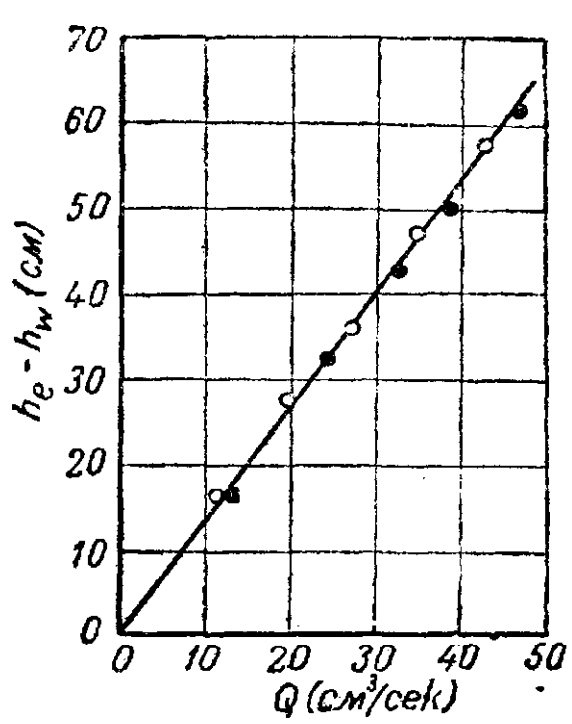
$$\bar{k} = \frac{Q \ln r_e/r_w}{2\pi (h_e - h_w) h}, \qquad (5)$$

где Q — расход течения через систему, где напоры жидкости в точках r_e и r_w будут соответственно h_e и h_w, и h — мощность песка. Отсюда, делая построение величины Q по отношению к $h_e - h_w$ и принимая в расчет множитель $(\ln r_e/r_w)/2h\pi$, получаем значение $\bar{k}$ из наклона результирующей прямой линии.



Фи . 142. Распределение напора жидкости в основании радиального течения гравитационного течения.

Точки — наблюденные значения; кружочки — исчисленные согласно уравнению (4), гл. VI, п. 18; × — подсчитанные согласно уравнению (5), гл. VI п. 20; $r_w = 6{,}4$ *см*; $r_e = 156$ *см*; $h_w = 7{,}0$ *см*; $h_e = 31{,}5$ *см*.



Фиг. 143. Определение проницаемости песчаника в экспериментах по гравитационному течению с помощью измерений при условиях строго радиального течения.

Перепад напора жидкости равен $(h_e - h_w)$; Q — расход течения через сектор.

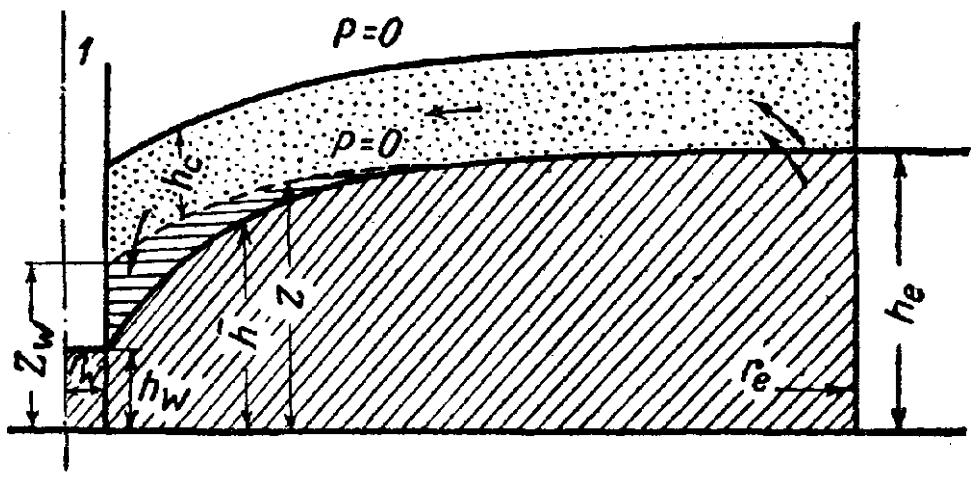
На фиг. 143 приведен такой график для некоторых фактически проведенных экспериментов.

Более серьезным вопросом явилось определение величины капиллярного слоя, который по природе своей должен перекрывать основную массу жидкости в песке и который следует принимать во внимание при окончательных выводах.

Сначала можно предположить, что капиллярный слой не будет участвовать в течении. Однако более внимательное рассмотрение показывает, что, наоборот, капиллярный слой должен вести себя как сифон, действующий в направлении главного течения, и, таким образом, увеличивать последнее. На фиг. 144 показана схематически сложная система капиллярного слоя и основной массы жидкости. Видно, что верхний и нижний покровы капиллярного слоя являются по существу своему

свободной поверхностью при атмосферном давлении. Напоры жидкости в основании песка обозначены через $\bar{h}$, напоры жидкости в песке через z. h_c представляет собой мощность капиллярного слоя и равняется приблизительно капиллярному подъему жидкости в рассматриваемом песке, через который она движется.

Выводы из проделанного анализа, дальнейшие подробности которого можно найти в первоисточнике, показывают, что когда высоты жидкости в скважине, а особенно в нагнетательном резервуаре, близки к кровле песка, так что капиллярный слой полностью не развит, можно пренебречь течением в капиллярном слое. Следующее уравнение воспроизводит довольно точно строго гравитационное течение:



Фиг. 144. Схема влияния капиллярного слоя на гравитационное течение.

$\bar{h}$ — напор жидкости у основания модели; z — высота жидкости в песке ниже капиллярного слоя; *1* — ось скважины.

$$Q_g = \frac{\pi \bar{k} (h_e^2 - h_w^2)}{\ln r_e/r_w}, \quad (6)$$

где приняты те же самые обозначения, что и в уравнении (5). С другой стороны, когда столб жидкости в скважине и нагнетательном резервуаре стоит ниже кровли песка на высоту по крайней мере капиллярного подъема жидкости, нельзя более пренебрегать течением в капиллярном слое, и комбинированное течение может быть довольно близко представлено уравнением:

$$Q_{g+c} = \frac{\pi \bar{k} (h_e - h_w)(h_e + h_w + h_c)}{\ln r_e/r_w}. \quad (7)$$

В табл. 12 приведены данные, взятые из отдельных опытов, которые показывают целесообразность применения скорее уравнения (7), чем (6), для сравнительно малых напоров поглощения, и где капиллярный слой был полностью развит. В этих экспериментах h_c принимается 9,5 *см*.

Таблица 12

Сравнительная таблица наблюденных и подсчитанных расходов через радиальную гравитационную систему

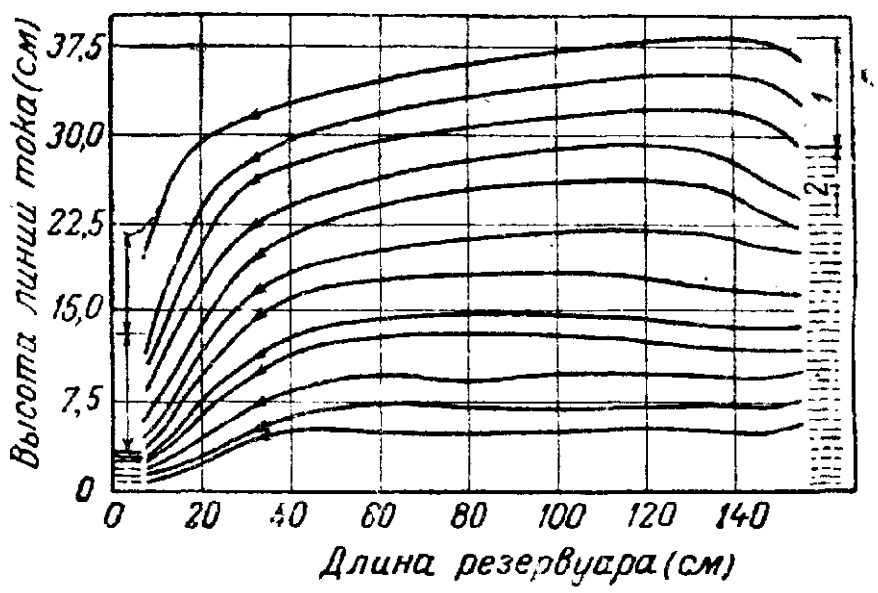
№ опытов	h_e	h_w	h	Подсчитанный расход по уравнению (6), *см³/сек*	Подсчитанный расход по уравнению (7), *см³/сек*	Наблюденный расход, *см³/сек*
1	23,67	18,07	29,0	3,06	3,76	3,90
2	15,37	0,17	29,0	3,09	4,98	4,95
3	14,37	0,17	29,0	2,70	4,47	4,55
4	9,57	0,17	29,0	1,18	2,37	2,50

Когда $h_c = 0$ или когда значением его можно пренебречь по сравнению с $h_e + h_w$, уравнение (7) обращается, как это и следует ожидать, в (6).

Таким образом, уравнение (6), которое было получено первоначально на основе ошибочных допущений Дюпюи и которое будет выведено в последующем (гл. VI, п. 20) с помощью физически обоснованного приближенного метода, получает эмпирическое обоснование, за исключением учета возмущений, обязанных наличию капиллярного слоя. Так как при встречающихся на практике течениях мощность песчаника обычно значительно выше высоты капиллярного подъема в пласте, в большинстве случаев для расчетов бу-

дет вполне достаточной более простая формула (6).

Что же касается формы свободной поверхности, то, несмотря на очень большое количество наблюдений, которые были проделаны над высотой ее, эмпирические исследования оказались недостаточными, чтобы дать какое-либо аналитическое представление об этой форме. На фиг. 145 приведено типичное семейство линий тока, включая сюда и их значения для капиллярной зоны, следы которых даются чернильными струйками вдоль поверхности поглощения. Теория Дюпюи-Форхгеймера дает совершенно точное уравнение свободной поверхности. Ошибка же его, заключающаяся в том, что теория не учитывает поверхности фильтрации у скважины, сама по себе является достаточной, чтобы обесценить все его усложнения, относящиеся к форме свободной поверхности. Как было показано выше, этот вывод следует



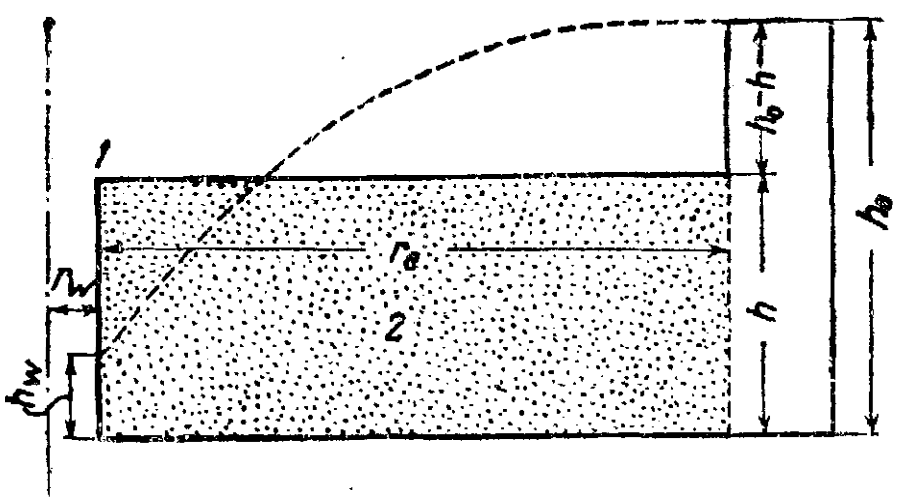
Фиг. 145. Ряд типовых линий тока, наблюденных при экспериментах с гравитационным течением.

1 — капиллярная секция; *2* — гидростатический уровень.

также из эмпирического наблюдения, что распределение напора жидкости у основания может быть формально представлено тем же самым выражением (4), что и формула Дюпюи-Форхгеймера для свободной поверхности. Справедливость последней формулы требует совпадения между пьезометрическими высотами у основания и высотами свободной поверхности. Однако опыты не подтверждают даже их приближенной сходимости. Что же касается допущений Дюпюи относительно цилиндрического течения в отдаленных частях системы при радиальном течении, то из эмпирических заключений для уравнений (4) и (6) можно извлечь косвенное подтверждение этого положения. Небольшое наблюдение показывает, что течение определяется значением скорости у основания, соответствующей уравнению (4), помноженной на напор поглощения h_e. Это в свою очередь налагает условие постоянства скорости вдоль поверхности поглощения, как это требуется гипотезой „цилиндрического течения". В дальнейшем будет показано, что приближенная теория (гл. VI, п. 20) также приводит к практически постоянной скорости по-

глощения, если радиус внешнего контура, как это легко выводится из уравнения (5), гл. VI, п. 20, значительно превышает мощность песчаника. С другой стороны, следует заметить, что значение средней скорости не является тождественной величиной гидравлического градиента свободной поверхности, который теоретически должен равняться нулю на внешнем контуре, но фактически дается градиентом напора жидкости в основании системы.

19. Составной напор при гравитационном течении. В исследовании, которое было описано в предыдущем разделе, были установлены зависимости между давлением и течением, контролирующие радиальное гравитационное течение. Полученные выводы были распространены на системы, в которых радиальные перемещения наложены на простое гравитационное течение. Это положение соответствует системам, в которых уровни или напоры жидкости в нагнетательных краях системы выше мощности песчаника. Разумеется, динамические столбы жидкости в скважинах должны быть при этом меньше мощности песчаника. В противном случае течение будет строго двухразмерным и радиальным без всякого гравитационного компонента. Небольшое рассмотрение показывает, что в первом приближении сложное течение, охарактеризованное нами выше, может решаться аналитически как строго радиальное течение, непосредственно наложенное на гравитационное. На фиг. 146 приведена диаграмма, из которой видно, что если h — мощность песчаника; h_0 — напор жидкости на поверхности поглощения и h_w — напор жидкости в скважине, то радиальный компонент расхода дается [уравнение (10), гл. IV, п. 2]:



Фиг. 146. Схематическое представление составного гравитационного течения.

1 — поверхность забоя скважины; *2* — песок.

$$Q_r = \frac{2\pi \bar{k} h (h_0 - h)}{\ln r_e/r_w} . \qquad (1)$$

Компонент гравитационного течения будет, согласно уравнению (6), гл. IV, п. 18:

$$Q_g = \frac{\pi \bar{k} (h^2 - h_w^2)}{\ln r_e/r_w} ,$$

так что результирующий суммарный расход:

$$Q_{gr} = \frac{\pi \bar{k} (2hh_0 - h^2 - h_w^2)}{\ln r_e/r_w} . \qquad (2)$$

Так как капиллярный слой не будет полностью развит, когда напор жидкости у нагнетательной поверхности будет превышать высоту песка,

влияние его будет ничтожным. Табл. 13 показывает типовую серию проверок уравнения (2), где

$$h = 29{,}0 \text{ см}; \quad r_e = 39 \text{ см}; \quad r_w = 3 \text{ см}; \quad \frac{\pi \bar{k}}{24} = 0{,}0335.$$

Эти данные были получены на цельнометаллическом, выдерживающем давление 15° секторе, в днище которого были расположены манометрические трубки для замера значений $\bar{h}$, аналогично схеме, представленной на фиг. 140. Следует заметить, что согласованность наблюденных и подсчитанных расходов в данном случае значительно лучше, чем при опытах со строго гравитационным течением.

Проделывая аналогичный анализ по распределению напора жидкости при сложном течении, легко сделать вывод, что результирующий напор жидкости при радиусе r у основания должен выразиться:

$$\bar{h} = \frac{h_0 - h}{\ln r_e/r_w} \ln \frac{r}{r_w} + \sqrt{h^2 - \frac{(h^2 - h_w^2)}{\ln r_e/r_w} \ln \frac{r_e}{r}}. \qquad (3)$$

Табл. 14 приводит эксперименты, проверяющие это уравнение для граничных условий

$$h_0 = 50{,}4 \text{ см}; \qquad h = 40{,}5 \text{ см}; \qquad h_w = 0;$$
$$r_w = 6{,}4 \text{ см}; \qquad r_e = 156{,}0 \text{ см}; \qquad Q = 50{,}0 \text{ см}^3/\text{сек}.$$

В данном случае согласованность в величине расходов опять гораздо лучше, чем для простого гравитационного течения. Поэтому можно рассматривать оба уравнения дающими вполне удовлетворительные решения.

Таблица 13

Сравнение наблюденных и подсчитанных расходов в радиальной системе со сложным напором и гравитационным течением

h_0	h_w	Подсчитанный расход, $см^3/сек$	Наблюденный расход, $см^3/сек$
89,47	27,47	46,97	46,1
78,38	27,47	38,56	38,4
59,67	27,47	24,38	23,7
39,37	27,47	8,99	8,6
70,87	22,57	36,07	36,1
47,57	22,57	18,41	18,5
78,37	17,17	44,56	44,2
58,47	17,17	29,48	29,0
44,97	17,17	19,25	19,3
74,37	12,57	43,32	43,5
59,57	12,57	32,09	31,5
48,17	12,57	23,46	23,9
68,17	6,97	40,05	40,8
50,87	6,97	26,94	27,0
35,55	6,97	15,32	16,4
61,47	0,17	35,61	36,1
56,47	0,17	31,82	32,1
48,17	0,17	25,52	26,7

Таблица 14

Сравнение наблюденного и рассчитанного распределения напора жидкости у основания радиальной системы для сложного напора и гравитационного течения

(r), *см*	Рассчитанный $(\bar{h})$, *см*	Наблюденный $(\bar{h})$, *см*	(r), *см*	Рассчитанный $(\bar{h})$, *см*	Наблюденный $(\bar{h})$, *см*
6,4	0	0	55,8	39,9	40,0
10,2	16,4	15,7	66,0	41,8	41,7
15,3	23,5	22,8	76,2	43,0	43,1
20,3	27,8	27,4	86,4	44,4	44,3
25,4	30,6	30,6	96,5	45,6	45,4
30,5	33,0	33,2	106,7	46,7	46,5
35,6	34,9	35,1	116,8	47,6	47,4
40,6	36,5	36,8	127,0	48,3	48,5
45,7	37,6	38,0	137,2	49,1	49,3
50,8	39,0	38,9	147,3	49,7	50,0
			156,0	50,4	50,4

20. Приближенная потенциальная теория расхода при гравитационном течении. Было показано, что вследствие сомнительного характера допущений, лежащих в основе теории Дюпюи-Форхгеймера, успех ее, приведший к установлению расхода при линейном и радиальном гравитационных течениях [уравнения (8) и (9), гл. VI, п. 17], которые дают исключительно близкие приближения к значениям расходов, получаемым с помощью точного аналитического решения или прямыми экспериментами, следует рассматривать как в значительной степени случайный. Было показано на основании общих рассуждений и специальных расчетов (гл. VI, п. 5), что эти допущения являются ложными. Чтобы разрешить это противоречивое положение, при котором формулы расхода принимаются в таком неблагоприятном освещении, мы дадим краткую теорию, которая также приводит к указанным формулам, но является свободной от допущений Дюпюи. Она включает только те приближения, при которых можно заранее ожидать, что они дадут небольшие ошибки в конечных расчетах величины расхода.

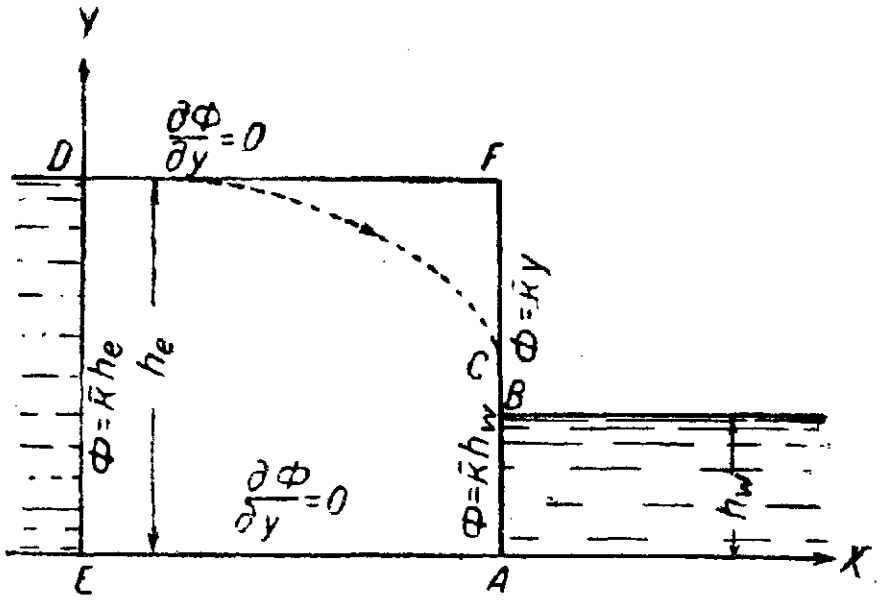
Эта теория[1] базируется на замене реального гравитационного течения таким, которое обладает теми же граничными условиями, но не включает свободную поверхность.

Так, для линейного течения с напором поглощения h_e и напором стока h_w приближенная система, заменяющая физическое гравитационное течение $ABCDE$, будет $AFDE$ с теми же самыми граничными условиями вдоль AF и ED, как и в $ABCDE$ (фиг. 147). Контуры EA и DF принимаются водонепроницаемыми. Вспоминая рассмотрение электрической модели гравитационного течения, которая дается в гл. VI, п. 6, видно, что приближенная система $AFDE$ совершенно аналогична электрической модели гравитационного течения перед тем, как был

[1] Muskat, M., Physics, 6, 402, 1935; также Trans. Amer. Geophys. Union, p. 391, 1936.

вырезан угол FCD, чтобы создать подобие свободной поверхности CD. Так как потенциал вдоль CF нарастает постепенно, пока в F не станет равным соответственному значению вдоль ED, ясно, что суммарный расход вдоль CF должен быть очень мал.

Поэтому участок DCF сообщит очень небольшую величину дополнительного расхода, помимо того, который проходит при физическом гравитационном течении $ABCDE$[1]. Отсюда расход через $AFDE$ будет по необходимости превышать величину расхода через $ABCDE$, так как $ACDE$ имеет большее проницаемое сечение, чем $ABCDE$. Вполне резонно ожидать, что этот излишек в расходе не будет иметь практического значения и оба расхода будут очень близки по своему абсолютному значению. Справедливость этого подтверждается непосредственными электрическими измерениями[2] проводимости модели приближенной системы $AFDE$ и системы $ABCDE$, соответствующей случаю I, гл. VI, п. 5, который показывает, что излишек величины первого расхода над вторым составляет не более $^1/_4\%$. В дальнейшем это обстоятельство подтверждается сравнением величины расхода, полученной теоретически из приближенной теории и рассчитанной по точному методу годографа согласно гл. VI, п. 5.



Фиг. 147. Схема приближенной системы для подсчета величины расхода через плотину с вертикальными фасами.

В свою очередь теоретическое значение расхода через приближенную систему $AFDE$ легко устанавливается после того, как будет определено внутреннее распределение потенциала соответственно граничным условиям, а именно

$$\left.\begin{array}{l} y=0,\quad h_e\colon\quad \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=0;\quad x=0,\quad 0\leqslant y\leqslant h_e\colon\ \Phi=k\bar{h}_e \\ x=L\colon\quad \begin{cases}\Phi=\bar{k}h_w\colon & 0\leqslant y\leqslant h_w \\ \Phi=\bar{k}y\colon & h_w\leqslant y\leqslant h_e\end{cases}\end{array}\right\} \qquad (1)$$

где $\bar{k}=k\gamma g/\mu$ — „эффективная“ проницаемость системы песчаник — вода.

Применяя теорию рядов Фурье, легко установить, что потенциальная функция, удовлетворяющая этим граничным условиям[3], может быть

---

[1] В действительности, как это будет показано дальше, плотность расхода вблизи F будет даже отрицательной, так как значение потенциала, например, вдоль FD уменьшается, удаляясь от F.

[2] Wyckoff R. D. and Reed D. W, Physics, 6, 395, 1935.

[3] См. гл. VI, п. 3.

выражена:

$$\Phi = \bar{k}h_e - \frac{\bar{k}}{2h_eL}(h_e^2 - h_w^2)x + \\ + \frac{2\bar{k}h_e}{\pi^2}\sum_1^\infty \frac{[(-1)^n - \cos n\pi h_w/h_e]}{n^2 \operatorname{sh} n\pi L/h_e} \cos\frac{n\pi y}{h_e} \operatorname{sh}\frac{n\pi x}{h_e}. \qquad (2)$$

Связанный с этим расход будет, очевидно,

$$Q = -\int_0^{h_e} \frac{\partial\Phi}{\partial x}\, dy = \frac{\overline{k}\,(h_e^2 - h_w^2)}{2L}, \qquad (3)$$

что является идентичным уравнению (8), гл. VI, п. 17, которое вытекает также из теории Дюпюи-Форхгеймера и дает значения $\bar{Q}/\bar{k}^2$ последнего ряда табл. 11. Возвращаясь опять к сравнению этих значений $\bar{Q}/\bar{k}^2$ и соответствующих значений, приведенных в соседнем ряду, получающихся на основе точной теории, видно, что в пределах ошибки выкладок (1%) оба ряда согласуются довольно точно. Это доказывает, что излишек расхода в приближенной системе по сравнению с физическим течением не может превзойти порядок величины этих ошибок.

Правильность установления величины расхода приближенной теорией не является случайной. Это можно доказать на основании того, что представленная теория дает также возможность хорошо воспроизводить распределение давления или потенциала вдоль основания системы гравитационного течения EA. Так, принимая в уравнении (2) $y = 0$ и беря значения h_e, h_w и L, соответствующие случаю I, гл. VI, п. 5, получаем конечное распределение давления вдоль EA, показанное кружочками на фиг. 103. Согласованность с соответствующими сплошными кривыми, подсчитанными на основании точной теории гл. VI, п. 5, повидимому, настолько близка, насколько это можно ожидать вообще от приближенной теории. Действительность показывает, что последняя дает удовлетворительное физически приближенное представление линейного гравитационного течения с такой стороны, которая непосредственно не относится к самой свободной поверхности. Фактически распределение скорости вдоль поверхности поглощения ED, как это налагается условиями уравнения (2) и как это представлено для того же случая соответствующими кружками на фиг. 103, также является вполне удовлетворительным приближением к реальному течению[1]. Наконец, распределение скорости вдоль поверхности стока AF представляет собой приближенное изображение правильного распределения, за исключением участка над и под свободной поверхностью, как это опять показано кружочками на фиг. 103. Изменение знака скорости вблизи верхнего края поверхности стока, разумеется, обязано тому обстоятельству, что приближенная теория налагает условия существования реального источника жидкости вблизи верхнего края поверхности стока, чтобы поддержать здесь высокий потенциал. Аналогичная приближенная система

[1] Аналогичное условие, налагаемое теорией Дюпюи-Форхгеймера, будет прямая линия, параллельная ED (фиг. 103) на расстоянии $u/\bar{k} = 0{,}925$.

может быть построена для задачи радиального гравитационного течения. Так, принимая опять в качестве граничных условий те, что соответствовали системе до введения в нее контура свободной поверхности, т. е.

$$\left.\begin{array}{l} y=0, \quad h_e: \quad \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}=0; \quad r=r_e, \quad 0 \leqslant y \leqslant h_e; \quad \Phi=\bar{k}h_e \\ r=r_w \begin{cases} \Phi=\bar{k}h_w: & 0 \leqslant y \leqslant h_w \\ \Phi=\bar{k}y: & h_w \leqslant y \leqslant h_e \end{cases} \end{array}\right\} \quad (4)$$

где $r=r_w$, r_e — радиусы контуров; внутреннее распределение потенциала определится из выражения:

$$\Phi=\bar{k}h_e+\frac{k\,(h_e^2-h_w^2)\ln r/r_e}{2h_e \ln r_e/r_w}+ \\ +\frac{2\bar{k}h_e}{\pi^2}\sum_1^\infty \frac{\left\{(-1)^n-\cos\dfrac{n\pi h_w}{h_e}\right\} U(\alpha_n r)\cos\dfrac{n\pi y}{h_e}}{n^2 U(\alpha_n r_w)}, \quad (5)$$

где [1]

$$U(\alpha_n r)=I_0\left(\frac{n\pi r}{h_e}\right)K_0\left(\frac{n\pi r_e}{h_e}\right)-I_0\left(\frac{n\pi r_e}{h_e}\right)K_0\left(\frac{n\pi r}{h_e}\right), \quad (6)$$

I_0, K_0 — бесселевы функции третьего рода нулевого порядка [2].

В данном случае величина расхода опять дается формулой Дюпюи-Форхгеймера, так как

$$Q=2\pi r\int_0^{h_e}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\,dy=\frac{\pi\bar{k}\,(h_e^2-h_w^2)}{\ln r_e/r_w}, \quad (7)$$

члены ряда при интегрировании становятся равными нулю. Как это было показано в гл. VI, п. 18, формула эта воспроизводит с точностью, достаточной для всех практических целей, эмпирически наблюденные значения расхода при радиальных гравитационных течениях. В данном случае точный вывод этой формулы для приближенной системы, определяемой уравнением (4), опять показывает, что она дает величину расхода, несколько более высокую, чем соответствующая величина при физическом гравитационном течении. Заранее можно ожидать, что такое несоответствие будет не больше ошибки расчета величины расхода по эмпирическим данным.

На фиг. 142 показано крестиками распределение потенциала или давления у основания системы радиального течения, соответствующее одному из экспериментов на песчаной модели, описанной в гл. VI, п. 18. Согласованность с эмпирическими наблюдениями — сплошная линия

---

[1] Для практических расчетов член $\dfrac{U(\alpha_n r)}{U(\alpha_n r_w)}$ для $r_e \geqslant h_e$ может быть приближенно заменен через $\dfrac{K_0(n\pi r/h_e)}{K_0(n\pi r_w/h_e)}$.

[2] См. гл. XVII, „Modern Analysis“, E. T. Whittaker and G. N. Watson.

и точки — в данном случае не так близка, как это имеет место между приближенно и точно рассчитанным распределением для линейного течения. Однако этот разрыв имеет весьма ограниченную величину.

В результате высокой концентрации градиентов давления при радиальном течении, а отсюда большей восприимчивости участка вблизи поверхности стока к изменениям своей геометрии [1], следует ожидать в действительности лучшей согласованности именно для случая линейного течения. При этом следует отметить, что уменьшение в толщине фактического русла вблизи поверхности стока, вследствие образования свободной поверхности при физическом гравитационном течении, влияет более серьезно на отдельные свойства последнего при радиальном нежели при линейном течении [1].

С другой стороны, приближения уравнения (5) к правильной величине распределения давления у основания системы могут считаться в действительности достаточно близкими, чтобы показать отсутствие случайности в применении более точной формулы для величины расхода (уравнение 7), тогда как в теории Дюпюи-Форхгеймера случайность имеет место без всякого сомнения. На основании наблюдения, что применение указанной приближенной теории при выводе уравнений (3) и (7) для величины расхода при линейном и радиальном гравитационных течениях является по существу тождественным обобщенной теореме, выведенной в гл. IV, п. 5 для расхода при плоском радиальном течении с произвольно выбранным распределением давления на круговых контурах, можно предложить более простой и все же удовлетворительный с физической стороны метод для вывода уравнений (3) и (7).

Следует напомнить, что в настоящем разделе было показано: величина расхода дается формулой, аналогичной строго радиальному течению [уравнение (10), гл. IV, п. 2], при условии, что для граничных давлений приняты усередненные величины фактического граничного распределения [уравнение (12), гл. IV, п. 5]. Уравнения (3) и (7) можно вывести на основе той же самой процедуры. Так, из любого уравнения (1) или (4) следует, что средняя величина потенциала на поверхности стока высотой h_e, находящейся под воздействием постоянного потенциала kh_w до высоты h_w, определяется из выражения:

$$\bar{\Phi}_w = \frac{\overline{k}\,(h_e^2 + h_w^2)}{2h_e}. \tag{8}$$

Так как потенциал на поверхности поглощения равняется ch_e, то разность средних потенциалов выразится:

$$\bar{\Delta}\Phi = \frac{\overline{k}\,(h_e^2 - h_w^2)}{2h_e}. \tag{9}$$

Прилагая это выражение к формуле расхода при строго линейном течении [уравнение (4), гл. II, п. 5], получим непосредственно уравнение (3). Уравнение (7) вытекает из приложения уравнения (9) к выражению для величины расхода при строго радиальном течении [уравне-

[1] Это явление аналогично большей чувствительности расхода при радиальных течениях к проницаемости песчаника у непосредственной поверхности стока по сравнению с линейными течениями (гл. VII, п. 3, и гл. VIII, пп, 3 и 4).

ние (10), гл. IV, п. 2]. Аналогичным путем можно решить типовую задачу о сложном гравитационном течении, которая рассматривалась в гл. VI, п. 19. Принимая потенциал на внешнем контуре, равным $k\bar{h}_0$, где h_0 больше мощности песчаника $h = h_e$, средний перепад потенциала принимает вид, вместо уравнения (9):

$$\Delta\bar{\Phi} = \frac{\bar{k}\,(2hh_0 - h^2 - h_w^2)}{2h}\,. \tag{10}$$

Прилагая это выражение к формуле расхода при строго радиальном течении, получаем непосредственно уравнение (2), гл. VI, п. 19, которое было установлено эмпирическим путем [1].

Следующим практическим приложением этого метода является гравитационное течение в несовершенных скважинах. В этом случае, оставляя без внимания отдельные детали распределения потенциала на поверхности скважины и внешнего контура, текущий дебит скважины с частичным вскрытием $\bar{h}$ пласта песчаника, суммарной мощностью h, может быть получен из следующего выражения:

$$Q = \frac{2\pi\bar{k}\bar{h}\Delta\bar{\Phi}}{C\ln r_e/r_w}\,, \tag{11}$$

где C — геометрический фактор, учитывающий несовершенство скважины, как это следует из гл. V, п. 4 и выраженный кривыми на фиг. 17; $\Delta\bar{\Phi}$ — разность среднего значения потенциала между поверхностью скважины и внешним контуром. Если при этом $h_w\,(\leqslant h\bar{h})$ будет представлять собой столб жидкости в скважине и величина потенциала принимается такой, что она равняется нулю на забое скважины при h_w, равном нулю, то средний потенциал на поверхности скважины будет $\bar{\Phi}_w = \frac{\bar{k}\,(h^2\bar{h}^2 + h_w^2)}{2h\bar{h}}$. Постоянный и средний потенциал на внешнем контуре будет, очевидно, $\bar{\Phi}_e = \bar{k}\bar{h}\bar{h}$. Тогда $\Delta\Phi$ дается выражением:

$$\Delta\bar{\Phi} = \frac{\bar{k}\,(\bar{h}^2h^2 - h_w^2)}{2h\bar{h}}\,, \tag{12}$$

откуда текущий дебит скважины будет:

$$Q = \frac{\pi\bar{k}\,(h^2\bar{h}^2 - h_w^2)}{C\ln r_e/r_w}\,. \tag{13}$$

Сравнение этого выражения с (7) показывает, что эффект несовершенства скважины, работающей при гравитационном течении, может быть принят во внимание введением того же самого поправочного фактора (фиг. 17), который учитывает явление несовершенства для скважин с нормальным напорным режимом. Аналогичным же путем можно показать, что уравнение (2), гл. VI, п. 19, объединенное с тем же самым по-

[1] Разумеется, этот же вывод можно получить из приближенной теории простой подстановкой в уравнение (4), $\Phi = \bar{k}h_0$ для граничных условий при $r = r_e$ вместо $\Phi = \bar{k}\bar{h}$ [h_e — принимается согласно обозначениям уравнения (4)].

правочным фактором C, даст величины текущих дебитов в несовершенных скважинах, работающих под сложным воздействием силы тяжести и напора (давления).

Наконец, можно заметить, что приближенные методы этого раздела можно приложить к гравитационным течениям с более сложной геометрией по сравнению с теми, которые нами специально рассматривались в настоящем разделе. Так, например, можно получить величину текущих дебитов различных единиц из групп артезианских скважин, работающих при простом или сложном гравитационном течении, из соответствующих значений, выведенных в главе IX для скважин, работающих на напорном режиме, простой заменой в последних формулах приложенных перепадов давления значениями $\gamma g \Delta\bar{\Phi}/\bar{k}$, которые даются с уравнениями (9) или (10). Аналогичным путем, прибегая к той же самой подстановке в уравнении (8), гл. IV, п. 7, можно получить текущий дебит скважины, работающей при гравитационном течении вблизи развитого линейного источника, например, реки или канала. Действительно, эта процедура должна дать близкое приближение к истинному значению величины расхода при любом гравитационном течении, где свободная поверхность резко не обрывается, оставляя поверхность поглощения или внешний контур так, что объем соответствующей приближенной системы будет намного превосходить соответствующую ей величину при физическом гравитационном течении [1].

21. Заключение. Когда средняя высота по вертикали, при которой жидкость покидает пористую среду, меньше той, при которой она поступает в последнюю, сила тяжести принимает на себя роль движущего агента, создающего течение в среде и через поверхности стока. Эта сила в действительности является градиентом потенциальной энергии жидкости, так как он перемещает последнюю от более высоких уровней поглощения к пониженным уровням стока. По мере того как жидкость перемещается от поверхности поглощения, она использует свою потенциальную энергию на преодоление сопротивления пористой среды. Более того, обладая тенденцией падать к нижнему уровню, жидкость в общем случае будет отрываться от верхней границы пористой среды и давать начало образованию „свободной поверхности“, создающей естественный контур зоны насыщения, над которой среда будет сухой и свободной от жидкости. Капиллярными явлениями мы пренебрегаем.

Присутствие этой свободной поверхности характеризует все гравитационные течения в противоположность тем системам, которые подвержены внешнему давлению жидкости и где жидкость под напором заполняет весь свободный объем пористой среды. Так как свободная поверхность представляет собой контур течения, через который не происходит никакого движения, ясно, что она является предельной линией тока системы. Более того, поскольку область поверх свободной поверхности свободна от жидкости, давление в этой области должно быть постоянным. Поэтому потенциал в каждой точке свободной поверхности будет

---

[1] Те же самые конечные формулы были уже получены для большого количества случаев применением теории Дюпюи-Форхгеймера (Гидравлика, глава III). Однако следует быть весьма осторожным при выводе заключений, связанных со свободной поверхностью, которые дает эта теория.

изменяться линейно в зависимости от высоты ее над произвольно выбранной горизонтальной плоскостью. При негравитационных течениях изменения потенциала на линиях тока по контурам заранее не известны и должны устанавливаться на основании нахождения распределения потенциала внутри системы. Знание же изменения потенциала над свободной поверхностью можно рассматривать как компенсацию того обстоятельства, что нам неизвестна заранее геометрическая форма свободной поверхности. С аналитической точки зрения задача определения геометрической формы свободной поверхности, даже если изменение потенциала поверх нее известно, является гораздо более трудным для решения, чем нахождение изменения потенциала, когда геометрические формы всех граничных элементов заранее предуказаны. Эта особенность проблемы и делает математическую обработку задач гравитационного течения особенно трудной.

Определение истинной формы свободной поверхности, даже для простейших систем, является весьма сложной задачей. Однако некоторые из свойств ее могут быть установлены на основании общих соображений. Быть может наиболее важным свойством свободной поверхности является то обстоятельство, что она всегда будет заканчиваться на поверхности стока поверх уровня поступающей жидкости, за исключением отдельных случаев, которые могут возникнуть, когда поверхности стока наклонены к горизонту менее 90°. Течение через участок поверхности стока между окончанием свободной поверхности и уровнем поступающей жидкости будет представлять собой фильтрацию в область, свободную от пористой среды и жидкости. Эта область будет поэтому подвержена постоянному атмосферному давлению, но не будет представлять поверхности линии тока. Этот участок поверхности стока именуется „поверхностью фильтрации“.

Так как геометрическая форма свободной поверхности, включая сюда ее окончание на поверхности стока, заранее не известна, не будет также известна длина поверхности фильтрации. В том случае, когда уровень стекающей жидкости равняется нулю, весь расход при гравитационном течении должен поступать через поверхность фильтрации, но существование этого явления было установлено только недавно. Таким образом, при аналитической обработке задач гравитационного течения это обстоятельство было принято в расчет только в относительно небольшом количестве случаев. Можно определить путь, каким заканчивается свободная поверхность у поверхности фильтрации без всякого специального анализа. Так, она будет касательной к поверхности стока, если наклон последней отрицателен или же бесконечен, и будет пересекать ее вертикально, если наклон поверхности стока положителен (гл. VI, п. 1).

Суммарная скорость вдоль свободной поверхности в пористой среде никогда не может превзойти величины скорости свободного падения, обязанной силе тяжести, и ее горизонтальная слагающая никогда не может быть более половины скорости свободного падения. Скорость в нижней оконечности поверхности фильтрации будет всегда бесконечно высокой, за исключением случаев нарушения закона Дарси, когда будут превзойдены критические скорости, свойственные некоторым жидкостям и средам, составляющим систему (гл. II, п. 2).

Первой практической задачей, для которой было получено полное и удовлетворительное решение, является дренаж наклонно падающего водяного песчаника канавой, прорытой в кровле песчаника. Единственное существенное приближение, которое дается Гопфом и Трефтцом при решении этой задачи, заключается в пренебрежении поверхностью фильтрации при входе свободной поверхности в дренажную канаву со стороны верхнего течения подземных вод.

Анализ базируется на предварительном преобразовании комплексной переменной первоначальной плоскости z, изображающей течение, на промежуточную плоскость, где интересующая нас область принимает вид трапецоидальной фигуры и где все контурные участки, включая и те, что относятся к свободной поверхности, определяются однозначно, за исключением соответствующей геометрической формы канавы. Затем на квадранте вспомогательной плоскости получают отображение этой плоскости, а также плоскости, дающей изображение распределения эквипотенциальных линий и линии тока первоначального течения. Таким образом, неявно дается требуемая зависимость между потенциалом скорости, функцией тока и координатами в плоскости z. Однако отображение трапецоидальной фигуры требует выбора геометрической формы участка, соответствующего контуру канавы, который в свою очередь накладывает условие единственности формы самой канавы. При практическом приложении этой теории неудобно устанавливать заранее форму канавы, а более простой процедурой будет выбрать функцию преобразования, а затем уже в конце анализа определить геометрическую форму канавы, обусловленную этим выбором.

Наиболее ценным выводом из этого анализа для практики является установление зависимости между общим количеством жидкости, которая отводится канавой, и снижением уровня свободной поверхности со стороны ее верхнего по течению края. Найденная зависимость показывает, что та часть первоначальной водонасыщенности песчаника, которая отводится канавой, равняется отношению величины снижения уровня свободной поверхности у канавы к мощности ненарушенного слоя водонасыщенного песчаника [уравнение (8), гл. VI, п. 2]. Этот вывод противоположен тому, который дают предшествующие формулы, которые включали в себя также ширину канавы и глубину воды в ней.

Весьма сильным, однако очень трудным, методом математической обработки задач гравитационного течения является метод годографов. Годограф есть изображение динамической системы, в котором координатами являются компоненты скорости. Применение его при изучении гравитационных течений базируется на том обстоятельстве, что хотя геометрическая форма свободной поверхности заранее не известна, но годограф последней будет всегда представлен участком окружности и радиусом, равным половине скорости свободного падения, с центром на отрицательной половине оси вертикальной скорости и проходящим через начало координат. Годограф прямолинейного водонепроницаемого контура будет прямой линией в плоскости годографа, параллельной контуру и проходящей через начало координат. Прямолинейная поверхность постоянного потенциала, образованная постоянной массой жидкости, имеет в качестве годографа линию, проходящую через начало координат и нормальную к контуру. Наконец, поверхность фильтрации представляется

в плоскости годографа линией, нормальной к поверхности, если только последняя прямолинейна, и проходящей через нижнее пересечение с осью вертикальной скорости кругового годографа, соответствующего свободной поверхности.

Таким путем можно получить полное отображение первоначальной системы на плоскость годографа, причем единственно неизвестными элементами будут числовые значения координат, соответствующие некоторым угловым точкам физического течения.

Трудность математической обработки годографа, если даже известна его геометрическая форма, заключается в том, что он содержит круговой участок, соответствующий свободной поверхности, а отображение таких фигур на полуплоскость не может быть выполнено в общем случае с помощью элементарных функций, которые даются теоремой Шварца — Кристоффеля. Однако в том случае, когда физическое течение представлено проницаемой плотиной с проницаемыми фасами, годограф принимает форму (фиг. 99), которая может дать отображение на полуплоскость с помощью модулярных эллиптических функций. На действительной оси этой плоскости можно расположить промежуточную потенциальную функцию, дающую сумму наклонений векторов скорости и ускорения вдоль контура. Из этих граничных значений можно определить в целом на полуплоскости потенциальную функцию и ей сопряженную. Зависимость между этими функциями и компонентами скорости течения [уравнения (2) и (3), гл. VI, п. 2] окончательно приводит к интегральному воспроизведению распределения внутренних скоростей в последнем.

Производя полностью эту процедуру, можно вывести аналитическим путем все интересующие нас свойства течения, воспроизводящего фильтрацию воды через плотину с вертикальными фасами, включая сюда точную форму свободной поверхности, распределение скорости вдоль фасов плотины, распределение давления вдоль ее основания и, наконец, расход фильтрации, проходящей через плотину. Числовые подсчеты, сделанные по этой методике, были выполнены только для шести специальных случаев, но и этих данных достаточно, чтобы показать все характерные особенности проблемы гравитационного течения в целом.

Так, установлено, что свободная поверхность покидает поверхность поглощения горизонтально и приближается к поверхности стока с постепенно увеличивающимся наклоном, переходящим в конечном итоге в касательную. Поверхность фильтрации достигает значительной величины. Порядок длины ее равняется половине разности напора жидкости между поглощением и стоком. Скорости вдоль поверхности поглощения возрастают равномерно от нуля у верхушки поглощаемого столба жидкости до максимума у его основания. Горизонтальная скорость вдоль поверхности стока у окончания свободной поверхности равняется нулю и возрастает до бесконечно больших значений, переходя вниз к крайней оконечности поверхности фильтрации. Если уровень жидкости на стоке не равен нулю, то скорость равномерно уменьшается с переходом вниз вдоль поверхности стока, пока не будет встречено водонепроницаемое ложе (см. фиг. 103 — 106).

Важным практическим выводом из этих выкладок является тот факт, что можно получить с исключительной точностью величину расхода на

единицу длины через такие плотины с вертикальными фасами на основании весьма простой формулы:

$$Q = \frac{k\gamma g(h_e^2 - h_w^2)}{2\mu L},$$

где k — проницаемость плотины; γ и μ — плотность и вязкость жидкости; g — ускорение силы тяжести; h_e и h_w — напоры жидкости на поверхности поглощения и стока плотины; L — ширина основания плотины. На первый взгляд этот вывод является весьма поражающим, так как приведенное уравнение было получено первоначально из теории Дюпюи-Форхгеймера, все остальные стороны которой находятся в резком несоответствии с теми выводами, которые получаются на основании расчетов согласно точной гидродинамической теории.

Так, теория Дюпюи-Форхгеймер а содержит ошибку в указании геометрической формы свободной поверхности, распределения давления у основания плотины и в распределении скорости вдоль поверхности поглощения. В действительности невольно приходишь к заключению, что вывод этой формулы на основании теории Дюпюи-Форхгеймера является совершенно случайным. С другой стороны, само уравнение имеет физическое значение, так как оно, как это будет показано ниже, может быть получено из другой приближенной теории, которая является свободной от допущения Дюпюи-Форхгеймера и включает в себя только такие приближения, относительно которых можно заранее ожидать, что они приведут к небольшим ошибкам при установлении величины расхода.

Применение метода годографов к математической обработке задач гравитационного течения в пористой среде представляет собой наиболее серьезное по своему значению теоретическое изыскание, которое было сделано в области изучения гравитационных течений. Однако этот метод страдает ужасающей трудностью производства числовых выкладок на всех входящих в него этапах. Когда же геометрия течения становится несколько сложнее плотины с вертикальными фасами, то производство анализа становится еще более трудным и требует для получения частных результатов применения графических или числовых методов.

Однако по счастливой случайности для решения задач гравитационного течения можно приложить также и метод электрического моделирования (гл. VI, п. 6), хотя при течении отсутствует прямая аналогия между электрическим током и эффектом силы тяжести. В действительности для любого гравитационного течения с почти произвольной сложностью можно построить точную эквивалентную электрическую модель. Разумеется, непосредственной трудностью при конструировании такой модели является отсутствие предварительной осведомленности о форме границ гравитационного течения, которые имитирует электрическая модель.

В частности, в формулировках задачи гравитационного течения не дается форма свободной поверхности и верхняя оконечность поверхности фильтрации — оконечность свободной поверхности на стоке. Фактически все эти данные должны быть определены в процессе решения задачи. Однако из определения понятия „свободная поверхность“

заранее известно, что потенциал вдоль последней должен изменяться линейно в зависимости от изменения вертикальной координаты. Тогда если остальные граничные условия будут смоделированы электрическим путем, аналогично моделям негравитационного течения (гл. VI, п. 17), и верхняя часть модели будет вырезана опытным путем так, что потенциал вдоль образованного этим путем контура будет изменяться линейно в зависимости от вертикальной координаты, граница эта будет точным эквивалентом свободной поверхности при действительном течении. Разумеется, необходимо отрегулировать значение потенциала вдоль участка поверхности стока так, чтобы оно также линейно возрастало с увеличением вертикальной координаты, ибо величина давления вдоль поверхности стока над уровнем жидкости на стоке должна иметь постоянное значение, как это имеет место над свободной поверхностью. Этого можно легко достичь, прикрепив к поверхности стока над уровнем стекающей жидкости полоску высокой проводимости и приложив к ее верхнему и нижнему концам соответственные потенциалы стока и поглощения. Как только будет найдена свободная поверхность, можно будет дать отображение внутреннего распределения потенциала и линии тока точно так же, как это делается в электрических моделях негравитационных течений.

Соответственно этому можно замерить расход тока, проходящий через модель, что дает эквивалентный расход жидкости при аналогичном течении. Особым преимуществом таких моделей, которые легко изготовляются из листов картона, покрытого коллоидным раствором графита, является их гибкость. Так, если аналитическая теория до сих пор была полностью разработана только для плотины с вертикальными фасами, то электрическим путем можно изучать так же легко плотины с наклонными фасами (фиг. 110—111), как и плотины с вертикальными фасами. Более того, электрическим путем можно моделировать без какой бы то ни было трудности сооружение плотины с внутренним водонепроницаемым сердечником или облицовкой, а также забивной крепью. Можно учесть также разницу в проницаемости отдельных участков сооружения простым изменением количества слоев графитового покрытия, нанесенного на соответственные части модели.

В дополнение к непосредственной аналитической процедуре, например, методу Гопфа и Трефтца или же методу годографов, где потенциальные функции строятся и выводятся так, чтобы получить решение для заранее принятого гравитационного течения, можно применить более упрощенную обратную процедуру построения потенциальных функций, а затем последующую привязку их к соответствующему физическому течению. Основным этапом этой процедуры является построение зависимостей комплексной переменной между вектором $z = x + iy$ и комплексным потенциалом $\omega = \Phi + i\Psi$, как $\omega = f(z)$ или $z = F(\omega)$, таким путем, чтобы вдоль одной из линий тока $\Psi = \text{const}$ потенциал изменялся линейно с изменением вертикальной координаты y. Эта линия тока будет представлять собой свободную поверхность соответствующего течения и если последняя имеет физическое значение, то комплексный потенциал будет также иметь физическое значение.

Такие зависимости были построены для следующих случаев: а) линейная поверхность течения по склону холма, f — линейная функция z;

б) системы с параболической свободной поверхностью; F — квадратичная функция ω; в) специальные случаи фильтрации из канав; F — сумма экспоненциальной и линейной функции ω. Решения для параболической свободной поверхности приближаются к соответствующим результатам для мощных плотин с вертикальными фасами. Решения, соответствующие фильтрации из канав, построенные таким же образом, дают совершенно искусственный радиальный тип распределения потенциала на больших расстояниях от канав или же такой тип распределения, который асимптотически приближается к фильтрации свободным падением на больших глубинах. Проблема фильтрации воды из канав или каналов, где фильтрующийся поток по существу своему относится к свободно падающему типу, может быть решена также более простой процедурой (пп. 6, 8, 9).

Такие системы с физической стороны соответствуют условиям, когда уровень грунтовых вод устанавливается на очень большой глубине или же когда воды уносятся слоем гравия или иной средой, проницаемость которой является более высокой по сравнению с проницаемостью отложений, непосредственно залегающих под основанием канавы или канала. При этом фильтрация из последних недостаточна для поддержания непрерывного течения в этом слое. Тогда фильтрационное течение само по себе не будет сливаться с уровнем грунтовых вод, но будет просто диспергировано в гравийном слое в виде капельных струй, ударяющихся беспрерывно о зеркало воды. Эти системы можно решать методом, весьма похожим на метод Гопфа и Трефтца. Решения будут получаться точными, пока строго удовлетворяется условие линейности изменения функции тока вдоль стенки канавы или канала с изменением ее горизонтальной координаты. Допуская сохранность этого условия, можно без всякого труда проделать до конца весь анализ и рассчитать в конечном итоге форму стенок, которые будут удовлетворять этому допущению.

В пределах, которым соответствует для практически интересных случаев найденная таким образом геометрическая форма, можно рассматривать полученное решение, дающее величину расхода фильтрации и форму свободной поверхности как достаточно точное. При этом для данной глубины и ширины верхних кромок канала или канавы имеется еще один произвольный параметр, определяющий геометрическую форму их стенок [уравнения (6), гл. VI, п. 8, и (5), гл. VI, п. 9]. Установлено, что расход возрастает, приближаясь к закону прямой линии, с изменением щирины канавы у верхнего уреза водной поверхности, а для фиксированного отношения ширины канавы к глубине воды в ней — прямо пропорционально величине последней. Более того, расход возрастает с увеличением среднего наклона стенок для данной ширины канавы и глубины воды в ней. Наконец, расход фильтрации возрастает с уменьшением глубины высокопроницаемого слоя, в котором находится зеркало грунтовых вод. Увеличение расхода становится очень большим, когда глубина этого слоя достигает значения, порядок которого составляет глубину свободной воды в пределах разреза канавы или канала (см. фиг. 124).

Метод электрического моделирования имеет возможность дать полное описание решения для любой специальной задачи течения. Однако для каждого отдельного случая требуется своя новая модель с отличными геометрическими размерами. Полное изучение проблемы фильтрации

воды через плотины с наклонными фасами требует сооружения различных моделей для ряда значений ширины основания, напоров жидкости на поглощении и стоке, угла наклона фасов поглощения и стока. Так как до сих пор такой комплекс исследований еще не был проделан полностью, следует обратиться к приближенным методам.

Для плотин с наклонными фасами приближенный метод расчета величины расхода через плотину может быть построен следующим образом. Допустим, что вся система течения, т. е. часть поперечного сечения плотины, занятая движущейся водой, делится на три независимые части. К каждой из них прикладывают самостоятельный приближенный метод решения. Первым участком принимают область, имеющую форму треугольного клина и ограниченную поверхностью поглощения, основанием плотины и нормалью к основанию, проведенной из самой верхней точки поверхности поглощения, которая достигается жидкостью. Когда наклон поверхности поглощения составляет четную часть $90°$ $(\pi/2n)$, течение на этом участке может быть совершенно точно описано комплексными потенциалами, если рассматривать течение как негравитационное. Принимается, что свободная поверхность вблизи поверхности поглощения следует наиболее высоко расположенной линии тока в первой области. Примыкающая к ней область с основной массой фильтрационного течения рассматривается приближенно, как имеющая линейную фильтрацию на линейно уменьшающемся участке, т. е. со свободной поверхностью, падающей с постоянной скоростью. Наконец, область которая включает в себя поверхность стока, подвергается совершенно иному рассмотрению. Характеристика этой области устанавливается на основании экспериментов с песчаной моделью.

Систематическое выполнение всего этого анализа требует принятия во внимание отдельных деталей, относящихся к местам соединения отдельных областей (гл. VI, п. 10). Однако точное положение этого смыкания определяется окончательно из условия, что подсчитанные расходы, проходящие через каждую из этих областей, должны быть равны между собой. Необходимая при этом поправка требует только применения простых алгебраических процессов.

В дополнение к величине расхода фильтрации этот метод дает также некоторые интересные сведения, относящиеся к характеру распределения скорости вдоль поверхности поглощения. Так, установлено, что, за исключением случая вертикальной поверхности поглощения, скорость фильтрации равномерно возрастает от нуля, подымаясь кверху от основания плотины. При этом с уменьшением наклона фаса плотины скорость этого возрастания увеличивается. На поверхности стока, ниже поверхности фильтрации, изменения скорости будут иметь аналогичный характер, хотя теоретически скорость у верхней оконечности уровня жидкости на стоке будет всегда бесконечной. Вполне понятно, что области с высокими скоростями являются теми участками, где более резко отмечается эрозия и где наиболее важно применять профилактические мероприятия.

Значения расхода через плотины с наклонными фасами, подсчитанные на основании рассмотренного метода, разумеется, не будут точными количественно вследствие большого числа сделанных различных допущений. Однако они будут иметь правильный порядок величин, и точность их

будет ближе для низких значений столбов жидкости на фасе поглощения. Это положение было подтверждено на основании тщательного выполнения всех расчетов для двух случаев, исследованных с помощью электрических моделей.

Методика разделения всего течения на независимые части, к которым можно приложить в отдельности различные приближенные методы обработки, может быть использована также при подсчете величины расхода при фильтрации из канав или каналов (гл. VI, п. 11), где фильтрационное течение сливается непосредственно с зеркалом грунтовых вод. В последнем случае течение может быть разделено на две области: а) область, непосредственно окружающую канаву, где линии тока имеют большую кривизну, и распространяющуюся от центра канавы на расстояние, равное полусумме ширины канавы и уровня жидкости над водонепроницаемым ложем, и б) область с приближенно линейным течением, распространяющуюся до крайних пределов интересующего нас течения. При этом предполагается, что известна высота стояния жидкости в песчанике. Течение в первой области принимается аналитически с допущением комплексной потенциальной функции, а связанные с ним величины расходов устанавливаются по экспериментам на песчаных моделях. Течение в области „б“ принимается линейным. Напор его на поверхности поглощения выбирается опытным путем так, чтобы расход через эту область был равен соответствующей величине в области, окружающей канаву. Эта процедура, включающая в себя ряд допущений, должна дать, как и в предыдущем случае, по крайней мере истинный порядок величины расхода фильтрации.

Для того чтобы установить существенные стороны некоторых других практических проблем ирригации, дренажа, эрозии и т. д., необходимо обратиться к иным, еще более приближенным методам анализа. Так, чтобы найти размер бокового дренажа в слой грубозернистого гравия, рассеченного каналом, раньше чем вода уйдет в залегающие под гравием слои, необходимо полностью пренебречь свободной поверхностью, которая образуется в пласте гравия. Наоборот, допуская, что течение в гравии состоит из направленной от канала линейной фильтрации, на которую налагается идущая вниз боковая утечка воды, найдем, что квадрат расстояния, на которое будет распространяться фильтрация, прямо пропорционален давлению на поверхности слоя гравия, его мощности и проницаемости и обратно пропорционален проницаемости залегающих под системою глин [уравнение (2), гл. VI, п. 13].

Если задача борьбы с эрозией почвы будет заключаться в необходимости найти такую толщину почвенного слоя, который унесет весь выпадающий на него дождь и не затопит поверхности слоя, то приближенное решение покажет, что такой слой почвы на склоне холма, чтобы не затопило его поверхности, должен иметь форму клина. Как и следует ожидать, угловая мощность клина возрастает с увеличением интенсивности дождя и уменьшается с увеличением проницаемости почвы [уравнение (4), гл. VI, п. 15].

Если пренебречь присутствием свободной поверхности, можно получить решения задачи дренажа гончарными трубами (гл. VI, п, 16), который применяется с целью предохранения от насыщения водой верхнего покрова почвы, направленной вверх фильтрацией воды из

залегающего под ним слоя гравия. Исключая капиллярные явления, зона водонасыщения может быть определена как область, которая должна быть полностью насыщена жидкостью, если она только соединяется с основным руслом течения трещиной или открытой скважиной. Верхняя, ограничивающая эту зону поверхность водонасыщения эквивалентна общепринятному термину „пьезометрическая поверхность", и ее высота пропорциональна потенциалу скорости в основном русле течения. В области, находящейся ниже пьезометрической поверхности или же в пределах зоны водонасыщения, давления жидкости будут, очевидно, превосходить атмосферное давление. Поэтому условие предупреждения почвенного покрова от насыщения водой путем дренажа его гончарными трубами тождественно условию, чтобы давление жидкости у поверхности не превосходило атмосферного. Принимая известными глубину дренажных труб, их радиусы, глубину залегающего ниже русла течения, поддерживающего направленную вверх фильтрацию, а также перепад давления жидкости, создающей эту фильтрацию, можно получить приближенный подсчет необходимого расстояния между дренажными трубами, которое исключает всякое просачивание через верхний слой почвы и его водонасыщение и полностью удаляет все направленное вверх фильтрационное течение [уравнение (6), гл. VI, п. 16]. Как и следует ожидать, необходимое расстояние между дренажными трубами уменьшается с ростом скоростного напора, уменьшением глубины дренирования или глубины слоя гравия и уменьшением радиуса дренирования (фиг. 139). Если же последние параметры меньше известных пределов, то стоимость эффективного дренирования гончарными трубами может достигнуть недопустимой величины.

К приближенному методу математической обработки задач гравитационного течения, который применялся заинтересованными в этой проблеме лицами в течение многих лет и даже в настоящее время, относится так называемая теория Дюпюи-Форхгеймера. Эта теория, созданная в 1863 г. Дюпюи и позже разработанная Форхгеймером, базируется в основном на следующих допущениях:

1) жидкость при гравитационном течении движется цилиндрическими оболочками, причем горизонтальная скорость не зависит от глубины;

2) значение горизонтальной скорости пропорционально наклону свободной поверхности.

На основании этих допущений можно вывести геометрическую форму свободной поверхности при гравитационном течении и величины расхода через нее [уравнение (3), гл. VI, п. 17].

Эти допущения обладают по всей видимости некоторой вероятностью для вывода приближенной теории. Тем не менее общие рассуждения и точные расчеты показывают, что эти допущения и вытекающие из них следствия находятся в очень сильном противоречии с фактической характеристикой гравитационного течения. Так, можно легко доказать, что постоянство горизонтальной скорости вне зависимости от глубины в системе, имеющей постоянный потенциал на вертикальном контуре, налагает условие равенства нулю всех вертикальных скоростей, а это в свою очередь уничтожает явление гравитационного эффекта, определяющего характер системы. Более того, точные подсчеты фильтрации через плотину с вертикальными фасами (гл. VI, п. 5) показывают

вполне определенно, что горизонтальные скорости далеки от постоянства и что их средние значения не имеют никакого отношения к наклону свободной поверхности, который всегда равняется нулю на поверхности поглощения.

Наконец, геометрическая форма свободной поверхности, которая предусматривается теорией Дюпюи-Форхгеймера, дает очень плохое приближение к истинному ее значению (фиг. 103). Это несоответствие является следствием полного пренебрежения этой теорией поверхности фильтрации на поверхности стока. В свете этих трудностей становится ясным, что успех теории Дюпюи-Форхгеймера, располагающей формулами, которые даются ею для определения величины расхода в практических целях и которые воспроизводят истинные значения величины расхода при линейном и радиальном гравитационных течениях, следует считать совершенной случайностью. Однако совершенно иной комплекс допущений, как это будет показано ниже, также приводит к идентичным формулам расхода. Эти допущения с физической стороны, повидимому, особенно соответствуют целям подсчета величины расхода при гравитационном течении. Несмотря на фундаментальное значение задачи радиального гравитационного течения в скважину, до 1927 г. не было предложено ничего нового, кроме применения упомянутой теории Дюпюи-Форхгеймера. Тогда же эта теория была впервые поставлена под сомнение и было предпринято решение рассматриваемой проблемы непосредственными методами теории потенциала. С точки зрения получения удовлетворительного математического решения, обладающего точностью, эти теоретические изыскания не имели успеха, но они послужили толчком к развитию экспериментального изучения проблемы. Наиболее поздняя из этих работ (гл. VI, п. 18), проделанная с песчаными моделями действительного течения, привела к следующему выводу: свободная поверхность не следует теории Дюпюи-Форхгеймера. В частности, свободная поверхность заканчивалась совсем не на уровне стока жидкости, как это принимала последняя теория, выше а на высоте порядка половины разности суммарного напора. Однако давление или распределение напора жидкости у основания системы можно выразить формулой, по виду идентичной с той, что дается теорией Дюпюи-Форхгеймера для геометрической формы свободной поверхности, а именно

$$\bar{h}^2 = \frac{h_e^2 - h_w^2}{\ln r_e/r_w} \ln \frac{r}{r_w} + h_w^2, \qquad \text{[уравнение (4), гл. VI, п. 18]},$$

где $\bar{h}$ — напор жидкости при радиусе r вдоль основания системы, ограниченной радиусами r_e, r_w, где h_e и h_w — напоры жидкости. Согласно теории Дюпюи-Форхгеймера $\bar{h}$ представляет собой высоту свободной поверхности при радиусе r. С другой стороны эта теория дает следующую формулу для расхода

$$Q = \frac{\pi k \gamma g \, (h_e^2 - h_w^2)}{\mu \ln r_e/r_w} \qquad \text{[уравнение (6), гл. VI, п. 18]}$$

где k — проницаемость песчаника; γ и μ — плотность и вязкость жидкости; g — ускорение силы тяжести. Эта формула воспроизводит

довольно точно замеренные величины расхода после того, как в них будет внесена поправка на течение в капиллярной зоне. Эти эксперименты были распространены также на те случаи, когда на простое гравитационное течение были наложены скоростные напоры — видоизменения, имеющие значительную практическую важность, но которые до этого времени не подвергались математической обработке ни теоретически, ни экспериментально. Выводы из этих обобщений были весьма недвусмысленны и обладали равным образом исключительной простотой. Так, было найдено, что распределение напора жидкости у основания сложной системы является просто суммой распределения напора жидкости при строго гравитационном течении и соответствующего напора, обязанного негравитационному течению с величиной напора на стоке, равной мощности песчаника. Соответственно этому результирующий расход можно представить в виде суммы отдельных расходов этих индивидуальных систем, т. е.:

$$Q = \frac{\pi k \gamma g\ (2h\,h_e - h^2 - h_w^2)}{\mu \ln r_e/r_w}\,, \qquad \text{[уравнение (2), гл. VI, п. 19]}$$

где h_e — внешний напор жидкости, который превышает мощность песчаника h.

Как уже было замечено, приведенная формула расхода при простом радиальном гравитационном течении была продиктована раньше теорией Дюпюи-Форхгеймера. Однако сложное течение, повидимому, не попадает в рамки этой теории, пока не будет принята суперпозиция указанных выше негравитационного и гравитационного течений. Кроме того, было показано, что успех этой теории даже для простого случая строго гравитационного течения имеет несколько большее значение, чем обыкновенная случайность. К счастью, оба случая простого и сложного течений можно решить различным приближенным методом, который не только приводит к формулам расхода, установленным эмпирическим путем, но, повидимому, является с физической стороны вполне обоснованным. Эта теория базируется на простом наблюдении, что вследствие относительно высоких потенциалов вдоль поверхности стока при гравитационном течении, например, в плотине с вертикальными фасами под точкой, где заканчивается свободная поверхность, будет проходить очень малое количество жидкости через верхний участок поверхности стока даже в том случае, когда свободная поверхность не будет падать ниже уровня жидкости со стороны поглощения. Так, с физической стороны можно ожидать, если продолжить линейное изменение потенциала вдоль поверхности стока до уровня столба жидкости на поглощении и если не допустить падения свободной поверхности раньше, чем будет вырезан верхний контур, на соответствующей электрической модели, имитирующей свободную поверхность, то результирующая величина расхода будет немного выше соответствующего значения при физическом гравитационном течении. Тогда эту гипотетическую приближенную систему можно подвергнуть совершенно точной математической обработке, и полученные расходы будут полностью соответствовать тем величинам, которые дает теория Дюпюи-Форхгеймера. Можно получить также аналогичные результаты, прикладывая этот метод к задаче радиального гравитационного течения (гл. VI, п. 20).

Вполне понятно, что полученный аналитический метод совершенно пренебрегает существованием свободной поверхности, и в этом отношении он не имеет никаких преимуществ по сравнению с теорией Дюпюи-Форхгеймера. Тем не менее, оставляя в стороне допущения, заключенные в этом методе, которые, повидимому, являются вполне резонными с точки зрения подсчета величины расхода, полученный метод вполне удовлетворяет и с физической стороны, так как он дает близкое приближение к истинному значению распределения давления вдоль основания обоих — линейного и радиального — гравитационных течений, а также распределение скорости вдоль поверхности поглощения плотин с вертикальными фасами, которое было подсчитано точным путем. Приближенная теория хорошо воспроизводит распределение скорости вдоль поверхности стока указанной плотины под верхней кромкой уровня жидкости на стоке, которая нарушается только непосредственно под и над оконечностью свободной поверхности. Поэтому с точки зрения предложенной теории не является такой уже удивительной точность величин расхода, которую дает эта теория. Наконец, можно заметить, что приближенную теорию можно приложить более упрощенным путем—заменой в итоге действительного изменения потенциала вдоль поверхности стока суммарной высотой (h_e), которая до высоты h_w имеет постоянный потенциал, эквивалентный напору жидкости h_w, а начиная от этой точки постоянное давление с его средним значением, эквивалентным напору жидкости $(h_e^2 + h_w^2)/2h_e$. Если затем решать задачи течения как негравитационные с полной разностью напора жидкости

$$h_e - \frac{(h_e^2 + h_w^2)}{2h_e} = \frac{(h_e^2 - h_w^2)}{2h_e},$$

можно получить вышеуказанные формулы непосредственно для величины расхода. Аналогично этому для случая сложного напорного и гравитационного течений необходимо приложить среднюю величину разности напора жидкости

$$h_e - \frac{(h^2 + h_w^2)}{2h} = \frac{(2h_e h - h^2 - h_w^2)}{2h}$$

при соответствующих негравитационных течениях, чтобы получить установленные эмпирическим путем формулы расхода. Можно показать, что этот метод полностью эквивалентен более подробной процедуре приближенной теории, которая была вкратце приведена выше. Поэтому таким путем можно вывести значение расхода для любого гравитационного течения общего типа, фильтрации через плотину или радиального течения в скважину с несовершенным или совершенным вскрытием пласта, где поверхность поглощения представлена вертикальным цилиндром (или плоскостью), проходящим через всю массу песчаника, не принимая формально в расчет неизвестный верхний граничный контур, создаваемый свободной поверхностью.

Глава седьмая

СИСТЕМЫ С НЕПОСТОЯННОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ

1. Введение. Поверхности разрыва непрерывности. Большинство течений, встречающихся на практике, являются достаточно „идеализированными“, чтобы оправдать допущение однородности пористой среды. Однако существуют известные типовые отклонения от однородности, которые не только представляют особый интерес как физические отклонения от идеальных систем, но о которых известно также, что они встречаются достаточно часто, чтобы оправдать детальное изучение проблем, включающих в себя эти отклонения. Вполне ясно, что все водонесущие песчаники далеки от однородности и постоянства, и связанные с ними величины проницаемости могут изменяться в довольно широких пределах внутри сравнительно ограниченных объемов песчаника. Однако эта местная неоднородность с ее редким распределением, взятая в большом масштабе, дает усередненный эффект, словно песчаник на всем его протяжении обладает вполне удовлетворительным постоянством. Поэтому практический интерес представляют только такие, взятые в крупном масштабе отклонения, когда проницаемость претерпевает резкие изменения, например, при пересечении пласта известными геометрическими границами, или же когда изменение проницаемости связано с изменением координат. Величина проницаемости в одно и то же время может изменяться с изменением направления течения. Однако при рассмотрении настоящей главы мы заранее допустим, что пласт песчаника изотропен. Влияние анизотропности в однородном песчанике было уже рассмотрено в гл. IV, п. 15. Когда проницаемость изменяется в пределах среды непрерывно, то распределение давления в системе может быть найдено и рассмотрено точно так же, как и для случая однородной среды, за исключением того, что основное уравнение Лапласа для давления заменяется, как это будет видно из следующего раздела, несколько более общим уравнением. Если песчаник слагается из двух или более различных областей с постоянной, но различающейся между собой проницаемостью, то на границах, разделяющих эти области, должны быть приняты определенные условия. Хотя детали решения, очевидно, будут зависеть от особенностей геометрических форм отдельных областей, но методика решения этой проблемы будет заключаться в следующем: для каждой области принимаются совершенно независимо решения уравнения Лапласа. Затем эти решения увязываются на контурах, разделяющих эти области, или на „поверхностях разрыва не-

прерывности", так что комбинированный ряд решений соответствует комбинированному течению жидкости. Эта „увязка" может быть сформулирована более точно следующими двумя условиями, которые должны удовлетворяться на любой поверхности разрыва непрерывности, разделяющей две области (1) и (2):

$$p\,(1)=p\,(2), \tag{1}$$

$$k_1 \frac{\partial p\,(1)}{\partial n} = k_2 \frac{\partial p\,(2)}{\partial n} \tag{2}$$

во всех точках контура, нормаль к которой обозначена через n.

Уравнение (1) выражает собой простое условие постоянства давления при переходе через поверхность разрыва непрерывности, ибо в целом такая геометрическая граница сама по себе не может вызвать дополнительного напряжения. В свете закона Дарси уравнение (2) дает, что нормаль скорости на поверхности разрыва непрерывности должна быть непрерывной. Это условие вытекает из непосредственного наблюдения, что каждый элемент жидкости, попадающий из любой области на поверхность разрыва непрерывности, должен по необходимости попасть в иную область в точке, где он поступает на раздел между областями [1]. Когда оба эти условия в каждой из точек всех поверхностей разрыва непрерывности удовлетворяются, то результирующий ряд распределения давления для нескольких областей будет соответствовать сложной системе, где отдельные части с различной проницаемостью соединены между собой как физически, так и геометрически.

2. Непрерывное изменение величины проницаемости. В практических условиях часто может и не встретиться возможность получения достаточно большого количества данных относительно залегающего на глубине песчаника для определения функциональной зависимости его проницаемости по отношению к расстоянию от определенной скважины. Представляет все же интерес показать, что, когда известно отклонение в величине проницаемости, можно решить задачу течения для таких песчаников принципиальным приложением тех же самых методов, что были уже использованы для однородной среды [2].

---

[1] Линии тока, однако, будут преломляться согласно закону $k_2 \operatorname{tg}\theta_1 = k_1 \operatorname{tg}\theta_2$, где θ_1, θ_2 — углы, образованные на разделе линиями тока с нормалью, проведенной к разделу в областях (1) и (2). Этот закон, который вытекает непосредственно из уравнений (1) и (2), контролирует таже преломление силовых линий в электростатических системах, где k/μ соответствует диэлектрической постоянной, и линий тока в электропроводящих системах, где k/μ представляет собой проводимость (гл. III, п. 6). Если линия тока является в одно и то же время свободной поверхностью, следует приложить к системе дополнительное условие: $\sin\theta_1 \cos(\alpha+\theta_1) = \sin\theta_2 \cos(\alpha+\theta_2)$, где α — наклон поверхности разрыва непрерывности. Отсюда углы θ_1, θ_2 для свободной поверхности вполне четко определятся через k_1/k_2 и α (См. работу A. Casagrande, Jour. New. Eng. Water Works Assoc., 51, 131, 1937).

[2] Можно упомянуть, что недавние работы показали, если при исследованиях с однородными жидкостями подобный анализ не представляет собой большой практической ценности, то определенные задачи течения, рассматривающие движение смеси газ-жидкость, можно подвергать изучению переводом характеристики смеси жидкости в эквивалентные ей изменения проницаемости пористой среды (R. D. Wyckoff, H. G. Botset, M. Muskat and M. W. Meres, Physics, 7, 325, 346, 1936).

Так, возвращаясь к общей формулировке закона Дарси, которая была выведена в главе III, видно, что он может быть представлен следующим рядом уравнений:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}; \quad v_y = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y} \\ v_z &= -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{k}{\mu}\gamma g \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Вполне понятно, что эти уравнения справедливы, даже если k зависит от координат, так как в действительности последние определяют собой местную проницаемость $k\,(x, y, z)$. Отсюда, прилагая снова уравнение неразрывности (2), гл. III, п. 1 и не допуская постоянства k, находим:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial p}{\partial z}\right)-\gamma g\frac{\partial k}{\partial z}=0. \tag{2}$$

Примем, что $k\,(x, y, z)$ известно. Тогда снова получим уравнение относительно p, которое, будучи разрешено, даст детальное распределение давления. Общего решения уравнения (2) [1] нельзя получить, но простой случай радиального двухразмерного течения позволяет иметь точное решение. Так, для двух переменных (x, y) уравнение (2) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial p}{\partial y}\right)=0, \tag{3}$$

или для более частного случая, когда k зависит только от радиуса и само течение радиальное, из уравнений (2), гл. IV, п. 2, и неразрывности следует:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[rk\,(r)\frac{\partial p}{\partial r}\right]=0, \tag{4}$$

так что

$$rk\,(r)\frac{\partial p}{\partial r}=\text{const}=\frac{Q\mu}{2\pi},$$

где Q — расход на единицу мощности песчаника.

Наконец,

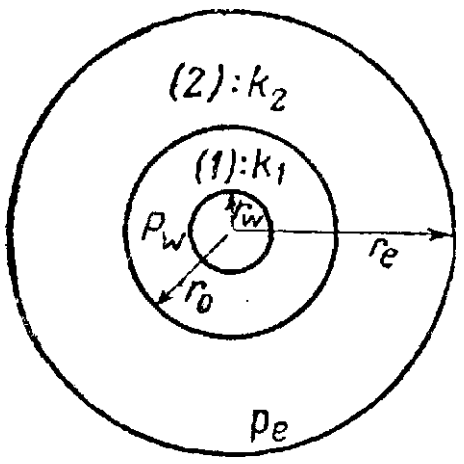
$$p\,(r)=\frac{Q\mu}{2\pi}\int_{r_w}^{r}\frac{dr}{rk\,(r)}+p_w, \tag{5}$$

где p_w — давление на забое скважины радиусом r_w. Таким образом, чтобы получить точный вид для p, необходимо произвести только единичное интегрирование. После этой операции можно проделать обычный анализ и интерпретацию его, как будто k имеет постоянную величину.

3. Прерывное радиальное изменение проницаемости. Проблемой, которая имеет значительно больший интерес, чем непрерывное измене-

[1] В том случае, когда k можно выразить через произведение функций от (x, y, z) и можно пренебречь гравитационным эффектом, последний член (уравнение 2) допускает общие решения разделением переменных. Частным случаем такого вида для k является тот случай, когда k изменяется только в одном направлении и зависит только от одной координаты.

ние проницаемости, рассмотренное в предыдущем разделе, является такая, где несущий жидкость песчаник слагается из двух или более различных однородных частей с различной проницаемостью. В качестве первого образца такой системы рассмотрим случай, когда система обладает двухразмерной радиальной симметрией [1], так что продуктивный горизонт можно рассматривать разбитым на две соприкасающиеся кольцевые области с проницаемостями k_1 и k_2 (фиг. 148). Такая система соответствует скважине, которая пробурена в области, имеющей бо́льшую или меньшую проницаемость, чем соответствующая ей величина для всего резервуара в целом.



Фиг. 148.

Эта система может воспроизводить также условия течения в скважину, которая была пробурена первоначально в однородном песчанике. Последующее отсутствие однородности могло явиться следствием частичной закупорки или заглинизирования области, непосредственно окружающей открытую поверхность песчаника, в процессе эксплоатации или бурения. Возрастание проницаемости вблизи ствола скважины могло последовать за введением в последнюю кислоты, например, при способе искусственного стимулирования добычи из карбонатных резервуаров, известного под названием „солянокислотная обработка“ [2].

Так как распределение давления в каждой из кольцевых областей будет обладать, очевидно, радиальной симметрией, то наиболее общим решением уравнения Лапласа, которое можно применить в дан-

---

[1] Легко убедиться в том, что для весьма обычного случая линейной системы, например, фильтрующего слоя, состоящего из участка пористой среды, длиной L_1 и проницаемостью k_1, примыкающего и последовательно расположенного по отношению к другому участку длиной L_2 и проницаемостью k_2, с давлениями на поверхности поглощения и стока P_1 и P_2, распределение давления на обоих участках дается выражениями: $p_1 = P_1 - \frac{k_2 (P_1 - P_2) x}{k_2 L_1 + k_1 L_2}$ и $p_2 = P_2 + \frac{k_1 (P_1 - P_2) (L - x)}{k_2 L_1 + k_1 L_2}$ так, что расход будет $Q = \frac{k_1 k_2 (P_1 - P_2)}{\mu (k_2 L_1 + k_1 L_2)}$, и результирующая эффективиая проницаемость $k_s = \frac{k_1 k_2 (L_1 + L_2)}{k_2 L_1 + k_1 L_2}$. Когда оба участка с площадью A_1 и A_2 примыкают друг к другу, но расположены параллельно, то распределение давления на обоих участках имеет одинаковое значение и дается выражением $p = P_1 - (P_1 - P_2) x/L$, где L — их общая длина. Суммарный расход определится:

$$Q = \frac{(k_1 A_1 + k_2 A_2) (P_1 - P_2)}{L \mu}$$

с эффективной проницаемостью $k_p = (k_1 A_1 + k_2 A_2)/(A_1 + A_2)$. Если представлены n участков с проницаемостью k_i и мощностью L_i последовательно, легко показать по аналогии с соответствующей проблемой электрических проводников, что результирующая проницаемость будет $1/k_s = (\sum L_i/k_i)/\sum L_i$. Если же участки имеют одну и ту же длину и площади A_i, но расположены параллельно, их результирующая проницаемость дается выражением $k_p = (\sum A_i k_i)/\sum A_i$.

[2] См. главу VII, п. 7.

ном случае для результирующего распределения, явится уравнение (6), гл. IV, п. 2. Обозначая решения для обеих этих областей с различной проницаемостью соответственными индексами 1 и 2, распределение давлений для области (1) имеет следующее выражение:

$$p_1 = a_1 \ln r + b_1, \tag{1}$$

а для области (2):

$$p_2 = a_2 \ln r + b_2. \tag{2}$$

Если принятые граничные условия будут:

$$p = p_w : \quad r = r_w; \quad p = p_e : \quad r = r_e, \tag{3}$$

то ясно, что так как r_w лежит в области (1) и r_e в области (2), то первое условие следует приложить к p_1, а второе к p_2. Таким образом, при $r = r_w$ уравнение (3) налагает условие, чтобы

$$p_1 = a_1 \ln r_w + b_1 = p_w, \tag{4}$$

и при $r = r_e$, чтобы

$$p_2 = a_2 \ln r_e + b_2 = p_e. \tag{5}$$

Выбирая a_1, b_1, a_2, b_2 так, чтобы они удовлетворяли этим уравнениям, мы примем во внимание соответственно граничные условия. В дополнение к этому должны быть приложены к поверхности разрыва непрерывности, которая определяется выражением $r = r_0$, условия уравнений (1) и (2), гл. VII, п. 1. Уравнение (1), гл. VII, п. 1 дает очевидно,

$$p_1 = a_1 \ln r_0 + b_1 = p_2 = a_2 \ln r_0 + b_2, \tag{6}$$

а из (2), гл. VII, п. 1, следует, что

$$\frac{k_1 a_1}{r_0} = \frac{k_2 a_2}{r_0}. \tag{7}$$

Таким образом, для данного случая были выведены четыре уравнения для четырех констант a_1, b_1, a_2, b_2. Когда эти уравнения будут решены и константы будут подставлены обратно в (1) и (2), находим:

$$p_1 = \frac{p_e - p_w}{\ln \frac{r_0}{r_w} + \frac{k_1}{k_2} \ln \frac{r_e}{r_0}} \ln \frac{r}{r_w} + p_w; \quad r_w \leqslant r \leqslant r_0, \tag{8}$$

$$p_2 = \frac{\frac{k_1}{k_2} (p_e - p_w) \ln \frac{r}{r_e}}{\ln \frac{r_0}{r_w} + \frac{k_1}{k_2} \ln \frac{r_e}{r_0}} + p_e; \quad r_0 \leqslant r \leqslant r_e. \tag{9}$$

Эти выражения дают результирующее распределение давления для сложной системы (фиг. 148).

Расход жидкости через песчаник в скважину на единицу мощности последнего дается, очевидно, выражением:

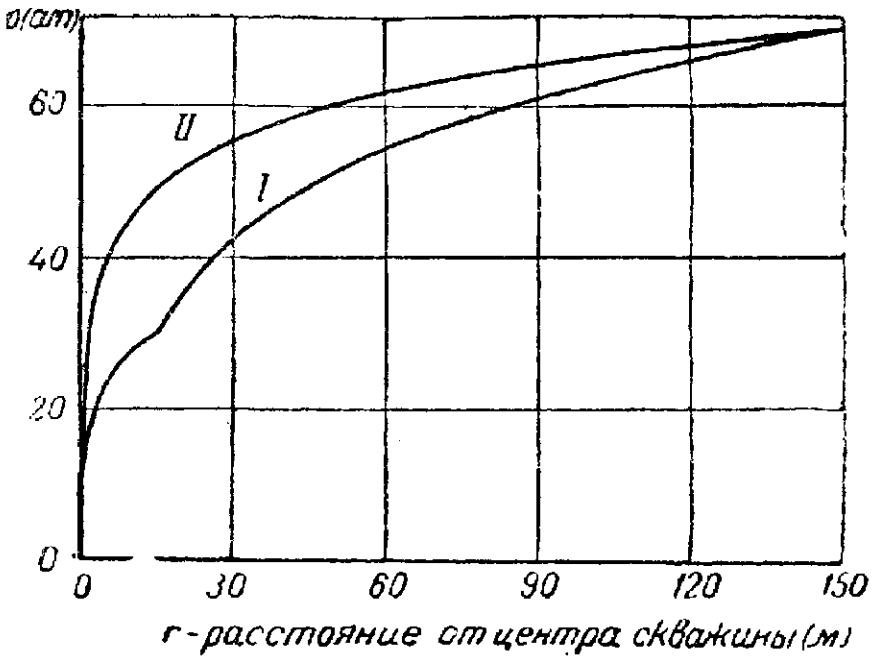
$$Q = \frac{2\pi k r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{2\pi k_1 (p_e - p_w)/\mu}{\ln \frac{r_0}{r_w} + \frac{k_1}{k_2} \ln \frac{r_e}{r_0}}. \tag{10}$$

На фиг. 149 построены распределения давления, которые даются уравнениями (8) и (9) и которые иллюстрируют эти зависимости. Кривые построены для системы со следующими параметрами:

$$r_w = 0{,}075\ м; \qquad r_0 = 15{,}25\ м; \qquad r_e = 152{,}5\ м;$$

$$p_e = 70\ am; \qquad p_w = 0; \qquad \frac{k_1}{k_2} = 3{,}0.$$

Пунктирная кривая представляет собой распределение давления, которое должно существовать в песчанике при его однородности. Видно, что высокая проницаемость вблизи скважины дает в результате медленный подъем давления вблизи последней или же пониженные градиенты давления. Разумеется, следует ожидать этого явления, если заметить, что один и тот же расход должен проходить через высокопроницаемую зону вблизи скважины так же, как и через более отдаленные области с низкой проницаемостью. Тогда соответствующие градиенты давления, за исключением тех, что связаны по необходимости с геометрией системы, будут естественно ниже по своему значению, но вполне достаточны, чтобы переносить жидкость в скважину. Можно еще более резко отметить влияние неоднородности песчаника при условиях, которые даются вышеуказанными уравнениями, если сравнить величину расхода Q через неоднородный песчаник с расходом Q_0 из песчаника с теми же самыми



Фиг. 149. Распределение давления при радиальном течении.

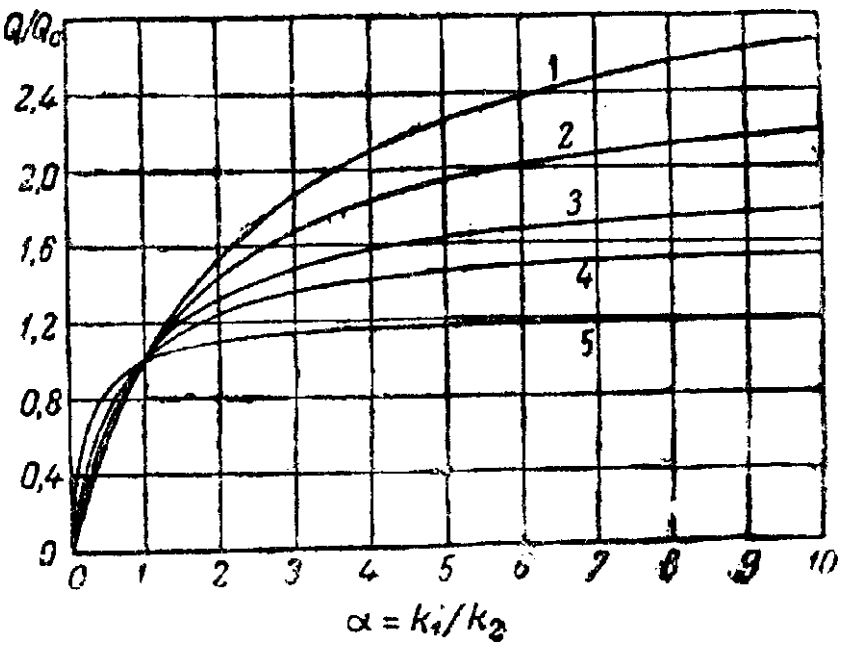
I — распределение в песчанике, где кольцевое пространство, окружающее ствол скважины, с радиусом 15,25 *м* имеет проницаемость, в три раза большую по сравнению с остальной массой песчаника; *II* — распределение в однородном песчанике; радиус скважины и давление — 0,075 *м* и нуль; радиус внешнего контура и давление — 152,5 *м* и 70 *am*.

пространственными размерами и находящимся под действием той же разности давлений, но с постоянной проницаемостью k_2. Обозначая отношение k_1/k_2 через α из уравнений (10) и (10), гл. IV, п. 2, имеем:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{\alpha \ln r_e/r_w}{\ln \dfrac{r_0}{r_w} + \alpha \ln \dfrac{r_e}{r_0}}; \qquad \alpha = \frac{k_1}{k_2}. \tag{11}$$

Разница в значении, отличающемся от единицы, дающая относительное изменение текущего дебита, обусловлена наличием цилиндра с проницаемостью k_1 в непосредственной близости к скважине и распространяющегося в песчанике на расстояние r_0, где проницаемость становится уже k_2. Так, для приведенного численного примера уравнение (11) дает значение $Q/Q_0 = 1{,}87$, показывающее, что наличие 15,25-*м* кольцевого пространства, окружающего скважину и имеющего проницаемость в три раза бо́льшую, чем основная масса песчаника, увеличивает течение на 87%.

На фиг. 150 построено уравнение (11) для нескольких значений r_0. Видно характерное влияние местных аномалий проницаемости на величину текущих дебитов. Так, если проницаемость призабойной зоны в 2,5 раза больше проницаемости остального песчаника, то, для того чтобы увеличить текущий дебит скважины на 30%, необходимо, чтобы радиус этой зоны составлял 1,52 *м*, т. е. 0,01% от всей протяженности песчаника, а именно для $r_e = 152{,}5$ *м*. С другой стороны, если внутренняя зона имеет 0,25 нормальной проницаемости, то текущий дебит скважины упадет больше чем на $^2/_3$ от своего нормального значения, хотя радиус призабойной зоны составляет только 0,305 *м*, т. е. 0,0004% объема песчаника. Эти огромные изменения, которые создаются небольшими зонами у забоя скважины, являются, очевидно, следствием высококонцентрированного характера перепада давления относительно центра скважины при радиальном течении.



Фиг. 150. Зависимость изменения производительности скважины от $k_1/k_2 =$ (проницаемость внутри кольцевого пространства с радиусом r_0) / (проницаемость от r_0 до 152,5 *м*):

Q/Q_0 — (эксплоатационная производительность скважины в песчанике, где $k_1/k_2 \neq 1$) / (эксплоатационная производительность скважины в песчанике с проницаемостью которая составляет повсюду k_2); радиус скважины —0,075 *м*.
1 — $r_0 = 15$ *м*; *2* — $r_0 = 7{,}5$ *м*; *3* — $r_0 = 3$ *м*; *4* — $r_0 = 1{,}5$ *м*; *5* — $r_0 = 0{,}3$ *м*.

Возвращаясь к фиг. 149, видно, что 60% всего перепада давления при радиальном течении с радиусом системы 152,5 *м* относительно скважины, с радиусом 0,075 *м*, сконцентрировано на первых 7,5 *м* песчаника. Остающиеся 40% перепада давления приурочены ко всей внешней зоне с радиусом протяженности 145 *м*. Это явление подтверждается также фиг. 150, из которой видно, что ординаты над линией $Q/Q_0 = 1$ для некоторых кривых растут медленнее значений r_0. В то время как первые 7,5 *м* с аномалией проницаемости $\sim 2{,}0$ увеличивают текущий дебит на 43%, прибавление следующих 7,5 *м* дает повышение дебита только на 10%. Соответственно этому снижение текущего дебита на 64,5%, обязанное наличию 7,5-*м* зоны аномальной проницаемости, равной 0,25 нормальной ее величины, падает до 67,6%, если добавляются следующие 7,5 *м* к зоне пониженной проницаемости.

Что же касается значения истинной величины аномалии проницаемости k_1/k_2, то следует заметить, что для зон с малым радиусом совершенно отсутствует необходимость иметь высокие значения k_1/k_2, чтобы повысить значительно величину Q/Q_0.

Так, кривые на фиг. 150 имеют постоянно уменьшающийся наклон с возрастанием α и достигают предельных значений $Q/Q_0 = (\ln r_e/r_w)/\ln (r_e/r_0)$ для $\alpha \to \infty$, что соответствует скважине с радиусом r_0 по сравнению со скважиной, имеющей радиус r_w. С другой стороны, предел Q/Q_0, когда α уменьшается от 1, составляет нуль.

Так, если внутренняя зона становится совершенно непроницаемой, течение через всю систему должно стать по необходимости равным нулю, как узка ни была бы зона пониженной проницаемости.

Помимо приложения этих выводов к проблеме солянокислотной обработки скважин, которая будет рассмотрена в последующем разделе, практическое значение полученных результатов заключается также и в том, что они дают объяснение большим колебаниям в величине текущих дебитов одинаковых, повидимому, скважин, эксплоатирующих один и тот же нефтяной или водяной песчаник. Так, весьма локализованная высокопроницаемая зона может сообщить скважине ненормально высокий текущий дебит, в то время как в остальном песчаник обладает сравнительным постоянством, и средние скважины дают значительно меньшие текущие дебиты. Соответственно этому скважина с ненормально низким текущим дебитом обязана этим зоне с пониженной проницаемостью, сосредоточенной в непосредственной близости к данной скважине.

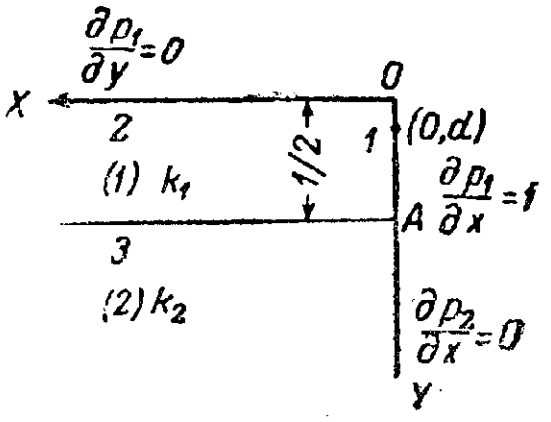
4. Прилегающие слои с различной проницаемостью. Течение жидкости в трещиноватых известняках. Как уже было показано в главе I, карбонатные резервуары, в противоположность сложенным из обычных несцементированных песчаников, пронизаны обычно многочисленными крупными и мелкими трещинами. Некоторые из этих трещин распространяются на значительное расстояние внутри продуктивного горизонта.

Так как проницаемость самого известняка обычно очень мала, то основную причину высоких текущих дебитов из таких коллекторов следует искать в присутствии этих трещин, которые, несмотря на их весьма малую ширину, имеют значительно бо́льшую эффективную проницаемость, чем сам известняк. Тогда можно представить себе общий характер механизма движения жидкостей в известняке следующим образом. Общая масса резервуара питает жидкостью высокопроницаемые трещины, которые приносят ее непосредственно или через сложное сплетение соединительных каналов в эксплоатационные скважины. Детали этого механизма вполне определяются внутренним строением известняка.

Так, равномерно распределенная сеть трещин дает в результате систему, эквивалентную однородному в радиальном направлении песчанику. Если же в известняке имеется только ограниченное количество далеко идущих трещин, можно считать течение обладающим некоторыми из свойств линейного канала. Последнее положение будет рассмотрено в настоящем разделе при допущении, что в системе существует только одна трещина и что единственным выходом для жидкости является часть поверхности забоя скважины, пронизанная этой трещиной. При идеализированном рассмотрении известняка с далеко идущими трещинами удобно рассматривать сам известняк и трещины как две примыкающие пористые среды с различной проницаемостью. Проницаемость трещины будем считать „эффективной“, соответствующей условию, аналогичному свободному линейному каналу, транспортирующему жидкость при ламинарном режиме. Практически в такой системе трещина будет иметь весьма малую ширину.

Следует предусмотреть это обстоятельство только до того предела, где будет наложено граничное условие на конечном выходе из среды, представляющей собой трещину, а это будет соответствовать более удобному требованию постоянства плотности тока.

Вследствие очень малой ширины трещины это требование почти аналогично постоянству давления, что и является физическим условием. Удобно также принять ширину трещины как единицу длины, а среду, представляющую собой трещину, и сам известняк принять бесконечных размеров. Широтное распространение известняка принимается также бесконечным. Вследствие симметрии системы, содержащей только одну трещину, необходимо рассмотреть только один квадрант плоскости (x, y) — горизонтальный участок системы „известняк-трещина“ (фиг. 151). Тогда можно сформулировать аналитическую задачу таким образом: найти распределение давления p_1 и p_2 так, чтобы



Фиг. 151. Схематическое изображение известняка, рассеченного трещиной, показывающее единичный квадрант плоскости поперечного сечения:

1 — ствол скважины; *2*—трещина; *3*—массив известняка.

$$\left.\begin{gathered}\nabla^2 p_1=0;\quad \nabla^2 p_2=0;\\ \frac{\partial p_1}{\partial y}=0;\ y=0;\quad \frac{\partial p_1}{\partial x}=1;\ x=0,\quad y\geqslant {}^1/_2;\\ p_1=p_2,\qquad k_1\frac{\partial p_1}{\partial y}=k_2\frac{\partial p_2}{\partial y};\quad y={}^1/_2;\\ \frac{\partial p_2}{\partial x}=0,\quad x=0,\quad y\geqslant {}^1/_2.\end{gathered}\right\}\qquad (1)$$

Для поставленной цели достаточно допустить, что среда (1) — трещина — распространяется до той же самой глубины, что и среда (2), и что ни одна из констант системы или физических условий не изменяется с глубиной. Таким образом, система становится двухразмерной. Более того, мы должны синтезировать конечное решение из предварительных, но более простых, соответствующих единичному элементу течения в точке $(0, d)$ среды (1). Отправной пункт вывода предварительных решений заключается в том, чтобы представить распределение давления, обязанное первичному элементу расхода, в точке $(0, d)$ в интегральной форме[1].

---

[1] Вывод этого решения можно получить также, распространяя метод конформных отображений, показанный в гл. IV, п. п. 7 и 9, для однородной среды, хотя последний будет гораздо сложнее аналитического метода, приведенного здесь. Метод конформных отображений основывается на следующем положении: чтобы удовлетворить граничные условия на поверхности разрыва непрерывности в $y={}^1/_2$, первичный элемент полюса в $(0, d)$ среды (1) требует отображения в $(0{,}1 - d)$, кратностью $(k_1-k_2)/(k_1+k_2)$, относящейся к p_1, и отображения в $(0, d)$ кратностью $2k_1/(k_1+k_2)$, относящегося к p_2. Эти отображения последовательно реализуются в других контурах так, чтобы получить конечный результат, удовлетворяющий иным граничным условиям проблемы. Анализ, который приводится здесь, следует М. Маскету, который вывел его для аналогичной электрической проблемы (Physics., 6, 14, 1935).

Такое распределение давления в системе дается выражением:

$$p_0 = \ln [x^2 + (y-h)^2] = 2 \int_0^\infty \frac{dz}{z} \left\{ e^{-z} - \cos xz \begin{bmatrix} e^{-(d-y)z};\ y \ll d \\ e^{-(y-d)z};\ y \gg d \end{bmatrix} \right\} \quad (2)$$

при условии, что система во всем своем объеме строго однообразна. Однако требование равенства величины расхода нулю при $y=0$ (вследствие симметрии системы относительно $y=0$) и различная проницаемость для $y > 1/2$ вводит возмущения в распределение давления для $y < 1/2$ и для $y > 1/2$. Обозначая эти возмущения через $\bar{p}_1$ и $\bar{p}_2$, значения их можно получить из следующего выражения:

$$\left.\begin{aligned} \bar{p}_1 &= 2 \int_0^\infty \frac{dz}{z} \ [\psi_1(z) + (A_1 e^{-yz} + B_1 e^{yz}) \cos xz] \\ \bar{p}_2 &= 2 \int_0^\infty \frac{dz}{z} \ [\psi_2(z) + A_2 e^{-(y-1/2)z} \cos xz], \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

где ψ_1 и ψ_2 — функции, независимые от (x, y), соответствующие члену e^{-z}, выраженному через p_0, а коэфициенты A_1, B_1, A_2 — функции переменной интегрирования z — выбираются таким образом, чтобы результирующие функции распределения давления удовлетворяли граничным условиям уравнения (1) [1]. Так как значение p_2 берется так, чтобы получить распределение давления в целом для $y > 1/2$, можно написать граничные условия для предварительной задачи, включающей в себя только единичный элемент расхода, где $p_0 + \bar{p}_1$, обозначаются через p_1, а именно:

$$\frac{\partial p_1}{\partial y} = 0; \quad y = 0; \quad p_1 = p_2, \quad k_1 \frac{\partial p_1}{\partial y} = k_2 \frac{\partial p_2}{\partial y}; \quad y = \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Прилагая эти условия к интегральным выражениям (2) и (3), легко найти, что последние будут удовлетворять при условии, когда произвольные функции ψ, A, B будут решениями уравнений:

$$\left.\begin{aligned} -e^{-dz} - A_1 + B_1 &= 0 \\ -e^{-(1/2-d)z} + A_1 e^{-z/2} + B_1 e^{z/2} &= A_2 \\ e^{-z} + \psi_1 &= \psi_2, \\ k_1 \{ e^{-(1/2-d)z} - A_1 e^{-z/2} + B_1 e^{z/2} &= -k_2 A_2 \} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Чтобы обеспечить сходимость $\bar{p}_1$ и p_2, ψ_1 и ψ_2 должны удовлетворять следующим зависимостям:

$$\psi_1(0) + A_1(0) + B_1(0) = 0; \quad \psi_2(0) + A_2(0) = 0. \quad (6)$$

---

[1] Можно легко убедиться подстановкой, что интегралы в уравнении (3) являются решениями уравнения Лапласа. Действительно, любая сходящаяся линейная прерывная форма ряда или непрерывная (интегральная форма) суперпозиция элементарных решений $e^{\pm yz} \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} xz$ будет удовлетворять уравнению Лапласа.

Решения этих уравнений даются выражениями:

$$\left.\begin{aligned} A_1\Delta &= 2\delta\,\mathrm{sh}\,(1/2-d)z + 2\,\mathrm{ch}\,(1/2-d)z \\ B_1\Delta &= 2(1-\delta)\,e^{-z/2}\,\mathrm{ch}\,dz; \quad A_2\Delta = 4\,\mathrm{ch}\,dz \\ \Delta &= -2\left(\delta\,\mathrm{ch}\,\frac{z}{2}+\mathrm{sh}\,\frac{z}{2}\right); \quad \delta=\frac{k_2}{k_1} \\ \psi_1 &= \left(\frac{2}{\delta}-1\right)e^{-z}; \quad \psi_2 = \frac{2}{\delta}\,e^{-z} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

При этих значениях для A_1, B_1, A_2 и ψ_1, ψ_2 конечное распределение давления можно написать в виде:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= 4\int_0^\infty \frac{dz}{z}\left[\frac{e^{-z}}{\delta}-\frac{\cos xz}{\delta\,\mathrm{ch}\,\frac{z}{2}+\mathrm{sh}\,\frac{z}{2}}\times\right. \\ &\left.\times\left\{\begin{array}{ll}\left[\delta\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}-d\right)z+\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}-d\right)z\right]\mathrm{ch}\,yz: & y\leqslant d\\ \left[\delta\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}-y\right)z+\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}-y\right)z\right]\mathrm{ch}\,dz: & y\geqslant d\end{array}\right\}\right] \\ p_2 &= 4\int_0^\infty \frac{dz}{z}\left[\frac{e^{-z}}{\delta}-\frac{e^{-(y-1/2)z}\,\mathrm{ch}\,dz\cos xz}{\delta\,\mathrm{ch}\,\frac{z}{2}+\mathrm{sh}\,\frac{z}{2}}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Приравнивая теперь $\delta = \mathrm{tg}\,\varepsilon$, получим следующую форму уравнения (8):

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= 4\int_0^\infty \frac{dz}{z}\left\{e^{-z}\,\mathrm{cth}\,\varepsilon-\frac{\cos xz}{\mathrm{sh}\left(\frac{z}{2}+\varepsilon\right)}\times\right. \\ &\left.\times\left[\begin{array}{ll}\mathrm{ch}\left(\frac{z}{2}+\varepsilon-dz\right)\mathrm{ch}\,yz; & y\leqslant d\\ \mathrm{ch}\left(\frac{z}{2}+\varepsilon-yz\right)\mathrm{ch}\,dz; & y\geqslant d\end{array}\right\}\right\} \\ p_2 &= 4\int_0^\infty \frac{dz}{z}\left[e^{-z}\,\mathrm{cth}\,\varepsilon-e^{-(y-1/2)z}\,\frac{\mathrm{ch}\,\varepsilon\,\mathrm{ch}\,dz\cos xz}{\mathrm{sh}\left(\frac{z}{2}+\varepsilon\right)}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Как уже было допущено, фактическая ширина полоски (1) принимается настолько малой при практическом приложении настоящей задачи, чтобы расход вдоль OA имел постоянную величину для постоянного давления. Полагая тогда постоянство распределения единичного расхода вдоль OA, ясно, что результирующее распределение давления будет получено из интегрирования уравнения (9) по отношению к d,— от $d=0$ до $d=1/2$. Однако для случая p_1 является удобным вычесть p_0 и оставить разность в логарифмической форме уравне-

ния (2). Обозначив интегрируемые значения также через p_1 и p_2, находим:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \left(\frac{1}{2}-y\right)\ln\left[x^2+\left(\frac{1}{2}-y\right)^2\right]+ \\ &+ y\ln(x^2+y^2)+2x\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{x}{2x^2+2y^2-y}-1+ \\ &+2\int_0^\infty \frac{dz}{z}\left\{\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{2}\right)e^{-z}+\frac{2\cos xz}{z\Delta}\times\right. \\ &\times\left[e^{-yz}\left(\delta\,\mathrm{ch}\,\frac{z}{2}+\mathrm{sh}\,\frac{z}{2}-\delta\right)+\right. \\ &\left.\left.+(1-\delta)\,e^{-z/2+yz}\,\mathrm{sh}\,\frac{z}{2}\right]\right\}; \\ p_2 &= 2\int_0^\infty \frac{dz}{z}\left[e^{-z}\,\mathrm{cth}\,\varepsilon-2e^{-(y-1/2)z}\,\frac{\mathrm{ch}\,\varepsilon\,\mathrm{sh}\,z/2\cos xz}{z\,\mathrm{sh}\,(z/2+\varepsilon)}\right]; \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

где Δ дается уравнением (7).

Для подсчетов удобно исключить константы, вычитая значения p при $x=0$. Так, для $y={}^1/_2$:

$$p_1(x,\,{}^1/_2)-p_1(0,\,{}^1/_2)={}^1/_2\ln(1+4x^2)+2x\,\mathrm{tg}^{-1}{}^1/_2x+$$

$$+4\int_0^\infty \frac{dz\sin^2 xz/2}{z^2\,\mathrm{sh}\,(z/2+\varepsilon)}\left[e^{-z/2}\,\mathrm{sh}\left(\frac{z}{2}+\varepsilon\right)+\mathrm{sh}\left(\frac{z}{2}-\varepsilon\right)\right]=$$

$$=\pi x+2\int_0^\infty \frac{\sin^2 xz\,\mathrm{sh}\,(z-\varepsilon)}{z^2\,\mathrm{sh}\,(z+\varepsilon)}\,dz, \quad (11)$$

$$p^2(x,\,{}^1/_2)-p_2(0,\,{}^1/_2)=8\,\mathrm{ch}\,\varepsilon\int_0^\infty \frac{\sin^2 xz/2\,\mathrm{sh}\,z/2}{z^2\,\mathrm{sh}\,(z/2+\varepsilon)}\,dz. \quad (12)$$

На фиг. 152 дано построение нескольких распределений давления (вдоль $y={}^1/_2$), получающихся из вышеуказанных уравнений (1)[1]. Изменение давления вначале линейно, а затем принимает логарифмическую форму. Давление для очень больших величин x и $\varepsilon \leqq 10^{-3}$ достигает значений, которые даются выражением:

$$p\left(x,\,\frac{1}{2}\right)-p(0,\,{}^1/_2)=\frac{2\,\mathrm{ch}\,\varepsilon}{\varepsilon}\,(1{,}2704+\ln\varepsilon x). \quad (13)$$

Вместе с тем линейное изменение p возрастает для все больших и больших значений x по мере того, как уменьшается ε и фактически становится совершенно линейным для $\varepsilon=0$, когда среда (2) имеет исчезающе малую проницаемость. Это следует из уравнения (11), где

$$p(x,\,{}^1/_2)-p(0,\,{}^1/_2)=2\pi x. \quad (14)$$

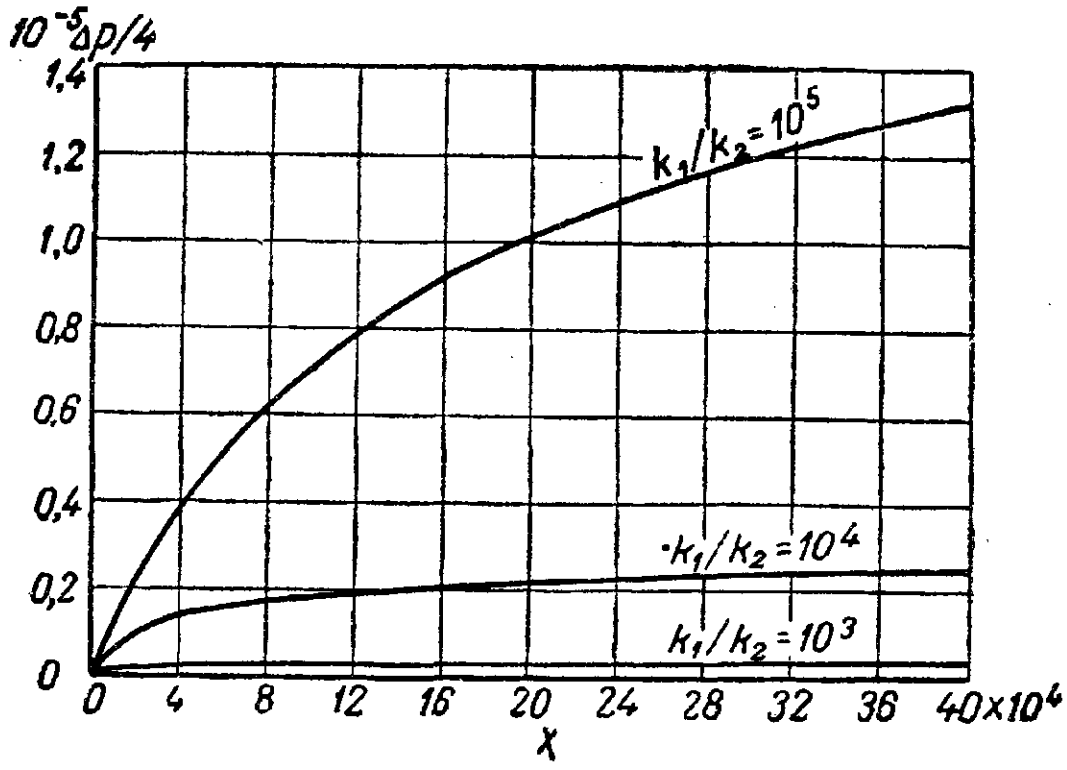
---

[1] Для $\varepsilon \leqq 10^{-3}$ можно получить очень близкие приближения к интегралам уравнений (11) или (12) комбинированием их с более простыми, для которых можно получить точные решения, или вывести их из таблицы для интегралов синуса и косинуса („Funktionen Tafeln“ by E. Jahnke and F. Emde, 1928; есть русское издание).

С другой стороны, в предельном случае, когда среда (2) имеет ту же самую проницаемость, что и среда (1), $\varepsilon = \infty$ и

$$p(x, {}^1/_2) - p\ (0, {}^1/_2) = \ln\ (1+x^2) + 2x\ \mathrm{tg}^{-1}\ \frac{1}{x}\ . \qquad (15)$$

Замечая, что уравнение (13) дает перепад давления между скважиной и точками вдоль трещины на расстоянии x для расхода $2\pi k_1/\mu$ в скважину с любой стороны оси y-ов, можно легко рассчитать перепад давления для единицы текущего дебита или эффективного сопротивле-



Фиг. 152. Распределение давления вдоль трещины, отдающей жидкость и рассекающей карбонатный резервуар:

Δp — падение давления от оконечности трещины у скважины до расстояния x (замеренного в единицах ширины трещины), для текущего дебита $4\pi k_1/\mu$ единиц на единицу мощности известняка; k_1/k_2 — (эффективная проницаемость трещины) / (проницаемость самого известняка).

ния системы. На фиг. 153 это сопротивление построено в виде кривой I для $k_1/\mu = 1$, в интервале k_2/k_1, имеющем практический смысл — $\leqslant 10^3$ и для $x = 4 \cdot 10^5$. Уменьшение наклона с уменьшением k_2/k_1 на этой фигуре всецело обязано тому обстоятельству, что, если проницаемость второй среды продолжает уменьшаться, то все больше и больше жидкости транспортируется непосредственно средой (1) — трещиной, при практической реализации рассматриваемой системы. Поэтому эффективная проводимость комбинированной системы не будет уменьшаться так сильно от этого фактора, как будет уменьшаться проводимость среды (2). Действительно, из уравнения (12) следует:

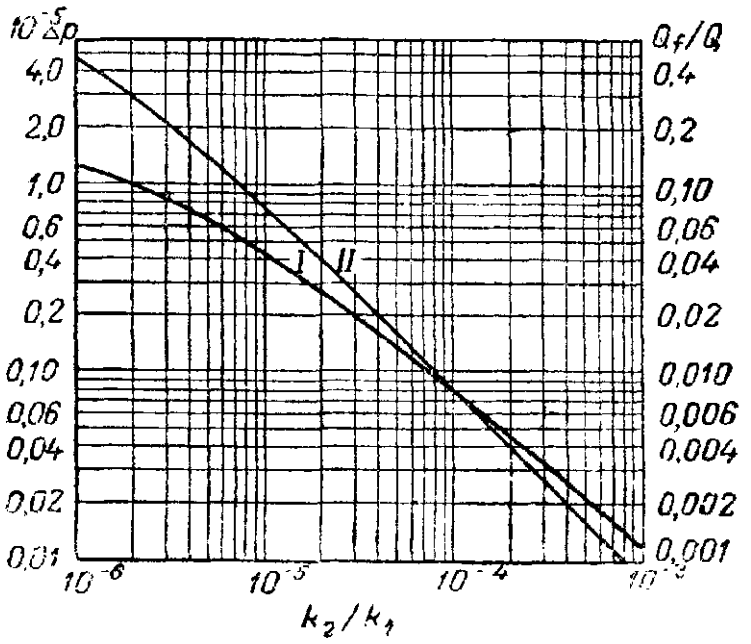
$$\frac{\partial p}{\partial x} = 4 \operatorname{ch} \varepsilon \int_0^\infty \frac{\sin xz \operatorname{sh} z/2}{z \operatorname{sh}\left(\frac{z}{2} + \varepsilon\right)}\, dz =$$

$$= -\frac{\operatorname{cth} \varepsilon}{x}\left[2 - \frac{1}{x^2}\ (\operatorname{cth}^2 \varepsilon - {}^1/_3) + 0\ \left(\frac{1}{x^4}\right)\right]. \qquad (16)$$

Полагая, что $\frac{\partial p}{\partial x}$ постоянно для больших значений x по ширине трещины, получаем величину расхода, поступающего непосредственно

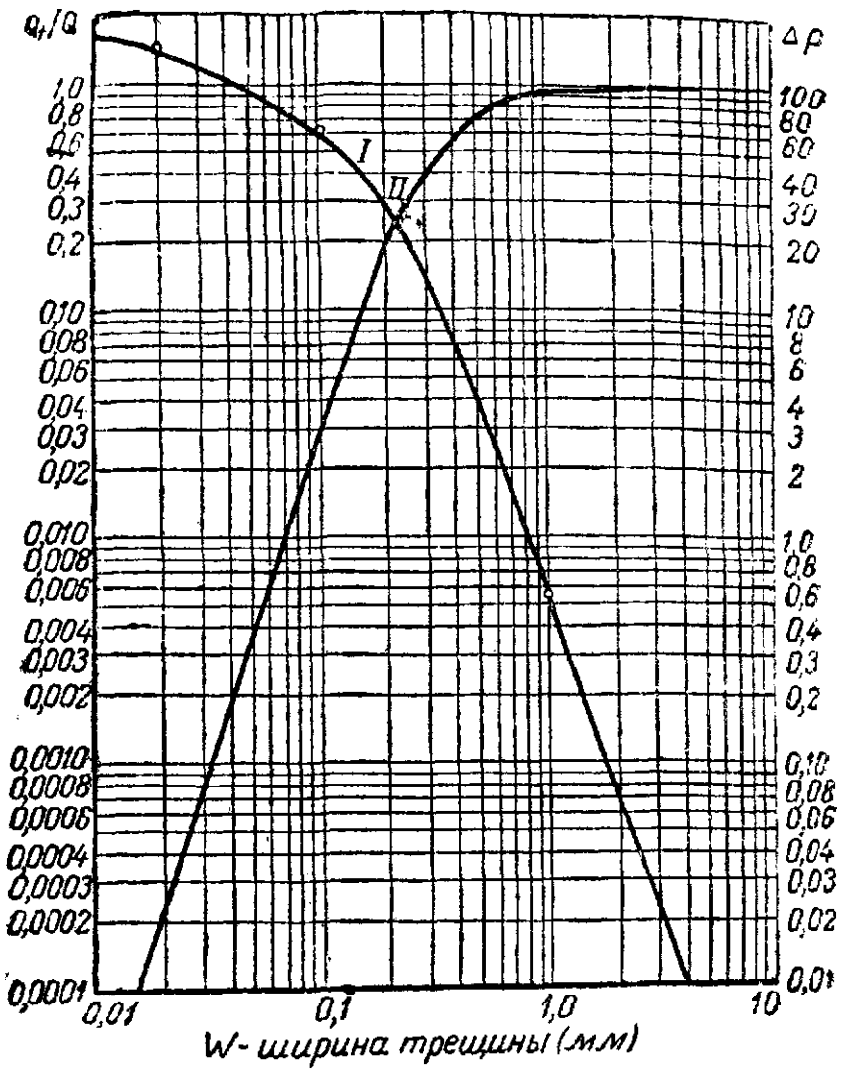
в трещину при больших значениях x. Разделив расход на 2π, получаем долю всего течения в скважину, поступающего непосредственно через трещину за пределами, по крайней мере, расстояния x от скважины. На фиг. 153 дается кривая *II*, которая показывает, как изменяется эта доля с изменением k_1/k_2 для $x = 4 \cdot 10^5$. Эта кривая показывает, что в то время как для $k_1/k_2 = 10^4$ из известняка на расстоянии x поступает в трещину 99,2% всего расхода, для $k_1/k_2 = 10^6$ поступает только 54% всего расхода.

Так как кривая *I* (фиг. 153) базируется на фиксированной единице проницаемости среды (1), она дает изменение сложного сопротивления системы известняк — трещина, где трещина сохраняется



Фиг. 153. Сопротивление систем трещин в карбонатном резервуаре на единицу эффективной проницаемости трещин (k_1):

I — падение давления Δp между скважиной и расстоянием $4 \cdot 10^5$ (в единицах ширины трещины) от скважины для единицы расхода на единицу мощности известняка; Δp — выражено в атмосферах, где $k_1/\mu = 1$; *II* — доля Q_f/Q общего потока, поступающего в скважину, которая прошла по всей трещине на расстояние $4{,}10^5$ единиц: k_2 — проницаемость самого известняка; μ — 1 сантипуаз.



Фиг. 154. Сопротивление систем трещин в карбонатном резервуаре для фиксированной проницаемости известняка (0,01 дарси):

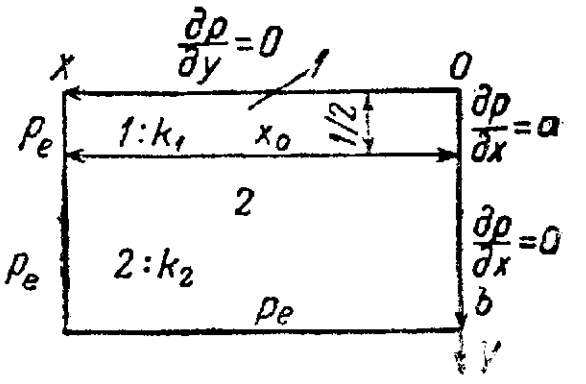
I — падение давления (в атмосферах) на протяжении первых 91,5 *м* от скважины для единицы расхода (*см*³/*сек*) на единицу мощности известняка; *II* — доля Q_f/Q общего потока, поступающего в скважину. Это количество прошло по всей трещине для полного интервала 91,5 *м*.

строго фиксированной, а может изменяться только проницаемость известняка. Если рассматривать известняк имеющим фиксированную проницаемость, при изменении только размера трещины, то эффективное сопротивление системы следует кривой *I*, представленной на фиг. 154[1]. В этом случае проницаемость известняка была принята 0,01 дарси, а радиус резервуара — 91,5 *м*. Следует заметить, что для относительно больших трещин сопротивление сложной системы изменяется обратно пропор-

[1] Эффективная проницаемость k_1 трещины здесь была переведена в эквивалентную ширину ее w с помощью уравнения (2), гл. VII, п. 8.

ционально кубу ширины трещины. Этого следует ожидать, так как на основании гл. VII, п. 8 эффективная проницаемость трещины изменяется пропорционально квадрату ее ширины, а величина суммарного расхода через трещину для данного перепада давления будет также пропорциональна ее абсолютной ширине. Кривая *II* на фиг. 154 дает долю Q_f/Q суммарного расхода, который поступает в скважину непосредственно через трещину; $1 - Q_f/Q$ дает долю расхода, которая поступает в трещину из окружающего известняка в пределах 91,5 *м* от скважины. Видно, что для трещин, ширина которых более 0,75 *мм*, менее 14% всего течения поступает в трещину в пределах 91,5 *м* от скважины.

5. Системы с ограниченными трещинами в известняках. Анализ последнего раздела базировался на допущении, что известняк и его трещины распространяются на бесконечно большие растояния от эксплоатационной скважины. Полученные выводы показали, что давление изменяется логарифмически на больших расстояниях от последней, так что составная проводимость системы будет нечувствительной к точным размерам ее при конечности системы. Однако было бы весьма поучительно сделать вывод соответствующих решений для такого случая, где с самого начала принимается конечность размеров системы. Тогда можно было бы приложить метод рядов Фурье аналогично тому, как это было сделано в последнем разделе, где применение интегрального анализа Фурье дало большой эффект [1].



Фиг. 155. Схематическое изображение оконтуренной системы известняк—трещина:

1 — трещина; *2* — массив известняка

Будет специально допущено, что на удаленных контурах давление поддерживается точно равным p_e (фиг. 155). Соответствующие решения для p_1 и p_2 можно получить из выражения:

$$p_1 = p_e + a\,(x - x_0) + \sum_{\text{нечет.}} A_n \cos \frac{n\pi x}{2x_0} \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{2x_0}, \qquad (1)$$

$$p_2 = p_e + \sum_{\text{нечет.}} B_n \times \cos \frac{n\pi x}{2x_0} \operatorname{sh} \frac{n\pi (b - y)}{2x_0}. \qquad (2)$$

Так как эти выражения полностью удовлетворяют условиям, что p_1, $p_2 = p_e$ при $x = x_0$, $p_2 = p_e$ при $y = b$; $\frac{\partial p_1}{\partial y} = 0$ при $y = 0$; $\frac{\partial p_2}{\partial x} = 0$ для $x = 0$, $\frac{1}{2} \geqslant y \leqslant b$ и $\frac{\partial p_1}{\partial x} = a$ для $x = 0$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$. Остающиеся условия, которые необходимо удовлетворить, заключаются

---

[1] Byerly W. E., „Fourier Series and Spherical Harmonics", гл. IV.

в непрерывности p и $k\frac{\partial p}{\partial y}$ при $y=\frac{1}{2}$. Они дают следующие уравнения:

$$a(x-x_0)+\sum A_n \operatorname{ch}\frac{n\pi}{4x_0}\cos\frac{n\pi x}{2x_0}=$$

$$=\sum B_n \operatorname{sh}\frac{n\pi(b-{}^1/_2)}{2x_0}\cos\frac{n\pi x}{2x_0},$$

$$k_1 A_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{4x_0}=-k_2 B_n \operatorname{ch}\frac{n\pi(b-{}^1/_2)}{2x_0}.$$

Замечая, что

$$a(x-x_0)=\frac{-8ax_0}{\pi^2}\sum_{\text{нечет.}}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2x_0},$$

и решая уравнение относительно A_n, B_n, а затем подсчитывая соответствующий перепад давления при $y=\frac{1}{2}$, находим, что

$$p_e-p_w=\frac{8ax_0}{\pi^2}\sum_{\text{нечет.}}\frac{1}{n^2\left[1+\frac{k_2}{k_1}\operatorname{cth}\frac{n\pi}{4x_0}\operatorname{cth}\frac{n\pi(b-{}^1/_2)}{2x_0}\right]}, \qquad (3)$$

где

$$p_w=p_1(0,\ {}^1/_2)=p_2(0,\ {}^1/_2).$$

Так как x_0 замеряется в единицах ширины среды (1) — трещины и потому будет выражаться очень большим числом, уравнение (3) приближенно можно выразить так:

$$\Delta p=\frac{8ax_0}{\pi^2}\sum_{\text{нечет.}}\frac{1}{n^2\left(1+\frac{4x_2x_0}{k_1n\pi}\right)}, \qquad (4)$$

где b берется порядка $2x_0$.

Тогда суммарный расход в системе будет, очевидно:

$$Q=\frac{2ak_1}{\mu}=\frac{\pi^2k_1\Delta p}{4\mu x_0\sum_{\text{нечет.}}\frac{1}{n\left(n+\frac{4k_2x_0}{k_1\pi}\right)}}. \qquad (5)$$

Отсюда, замечая, что

$$\sum_{\text{нечет.}}\frac{1}{n(n+a)}=\frac{1}{a}\left[0{,}2886+\psi(a)-\frac{1}{2}\psi\left(\frac{a}{2}\right)\right], \qquad (6)$$

где ψ — логарифмическая производная гамма-функции[1] и принимая $s=2x_0k_2/k_1\pi$, можно переписать уравнение (5) в таком виде:

$$\frac{\Delta p}{Q}=\frac{\mu}{\pi k_2}\left[0{,}2886+\psi(2s)-\frac{1}{2}\psi(s)\right]. \qquad (7)$$

Значения $\Delta p/Q$ для трещины шириной 1,0, 0,1 и 0,02 *мм*, полученные из уравнения (7), даны на фиг. 154 в виде кружков на кривой *I*. Следует заметить, что эти значения для практических целей хорошо

[1] См. главу V, п. 3.

согласуются с величинами, подсчитанными по методике гл. VII, п. 4. То обстоятельство, что сопротивления, которые даются уравнением (7), несколько завышены, всецело обязано принятому допущению, что нижняя граница среды (2), где предполагается давление равным p_e, находится на расстоянии $2x_0$ или больше от скважины, в то время как анализ гл. VII, п. 4 налагает в основном условие, что давление будет равняться p_e на круговом контуре с радиусом x_0 (при условии значительной величины x_0). Повидимому, последнее допущение является несколько менее произвольным, чем то, которое было принято при выводе уравнения (7). Однако для математических выкладок форма (7) более удобна, чем (11) и (12), гл. VII, п. 4.

6. Теория солянокислотной обработки скважин из карбонатных коллекторов[1]

Весьма интересным практическим приложением аналитической процедуры, разработанной в последних нескольких разделах, является физическое пояснение реакции нефтяных скважин, эксплоатирующих карбонатные коллекторы, на солянокислотную обработку. Солянокислотная обработка является средством искусственного стимулирования добычи из скважин, работающих с малыми и экономически невыгодными дебитами, путем введения на забой скважины интенсифицирующего агента — соляной кислоты. Этот метод до сих пор является единственным наиболее успешным процессом обработки скважин из карбонатных коллекторов, которые легко разрушаются от воздействия кислоты[2].

Элементарное объяснение, которое до сих пор обычно дается для понимания причин эффективности метода, заключается в том, что кислота «очищает» скважину и отсюда повышает ее текущий дебит. Однако широкое расхождение результатов, полученных в результате обработки, повидимому, аналогичных скважин, очевидно, требует более детального исследования этого явления в целом. Так, в некоторых случаях обработка, видимо, дает плохие результаты, а в других случах, при совершенно идентичных условиях, она высоко эффективна и приводит к резкому повышению нефтеотдачи. Кроме того, было найдено, что в некоторых случаях обработка повышает только текущую добычу, оставляя суммарную добычу из подземного резервуара неизменной, а в других случаях достигается увеличение суммарной физической отдачи нефти из подземного резервуара.

В настоящем разделе будет сделана попытка произвести согласование некоторых из особенно резко отличающихся результатов промысловой практики, на основе разделения первоначального механизма нефтеотдачи обработанных скважин и первоначальных условий, господствовавших в них до производства обработки. Однако с самого начала подчеркнем, что все дальнейшее рассуждение предполагает отсутствие новых источников жидкости, которые могут открыться в результате солянокислотной обработки, так что последняя скорее увеличивает суммарную экомическую нефтеотдачу резервуара, чем физическую. Если же кислота,

---

[1] Muskat M. and Wyckoff R. D., Physics, 7, 106, 1936.

[2] В скважинах, эксплоатирующих песчаные коллекторы, безуспешно пытались вплоть до настоящего времени применять обработку плавиковой кислотой.

проникая в трещины продуктивного горизонта, вскрывает новые и нетронутые источники жидкости, то не только возрастет суммарная физическая нефтеотдача системы, но весь характер ее настолько изменится, что замаскирует характерные свойства различных механизмов движения, которые рассматриваются в дальнейшем.

Скважины покажут резкое повышение текущих дебитов вне зависимости от воздействия кислоты на ту часть резервуара, которая была подвергнута первоначальному дренированию. Кроме того, кривая падения дебита после обработки может принять более пологий вид, чем до обработки. Если же новые источники жидкости не открыты, то кривая падения добычи становится круче, чем это имело место до обработки. Разумеется, во всех случаях скважины покажут немедленно после обработки первоначально высокий текущий дебит благодаря восстановлению давления в призабойной зоне в процессе обработки. Однако эти промежутки являются слишком кратковременными, чтобы проверить эффективность обработки. Поэтому следует учитывать только установившиеся дебиты для сравнения с предшествующими дебитами. Рассматривая только такие случаи, где кислота повышает только экономическую суммарную отдачу (повышение текущего дебита), ясно, что эффект от таких обработок по существу должен представлять собой повышение эффективной проницаемости продуктивного горизонта, окружающего забой скважины.

Так как солянокислотная обработка не может вызвать сама по себе воздействия на давление в резервуаре, она не оказывает никакого влияния на перепад давления, необходимый для продвижения нефти в скважину. Поэтому всякий прирост текущего дебита после обработки следует приписать эффективному уменьшению сопротивления течению. С этой точки зрения теория солянокислотной обработки для резервуаров, которые не показывают роста суммарной нефтеотдачи после обработки, будет заключаться в анализе эффекта результативной проницаемости пористой среды, вследствие введения в скважину кислоты, которая в состоянии реагировать и растворять те участки породы, с которой кислота вступает в непосредственный контакт.

Теоретическое обоснование получаемого эффекта основывается, очевидно, на определенном механизме нефтеотдачи и, в частности, на определенной геометрической конфигурации течения, принятой для первоначальных условий продуктивного горизонта до ввода в скважину кислоты. Для практических целей можно рассматривать следующие два типа такого механизма, хотя в действительности чаще могут встречаться промежуточные типы. Этими типами являются: 1) трещины или большие поры, широко и равномерно развитые в пределах всего коллектора, так что течение по существу радиально; 2) большая часть течения в скважину приносится ограниченным количеством развитых трещин, которые питаются широтно от известняка, — результирующее течение является средним между линейным и радиальным. В первом случае кислота просто увеличивает проницаемость относительно небольшого кольцевого пространства, концентрично расположенного относительно скважины, или объем порядка 20% от объема взятой кислоты.

Во втором случае кислота проникает в известняк на значительное расстояние по трещинам, расширяет их и увеличивает их эффективную

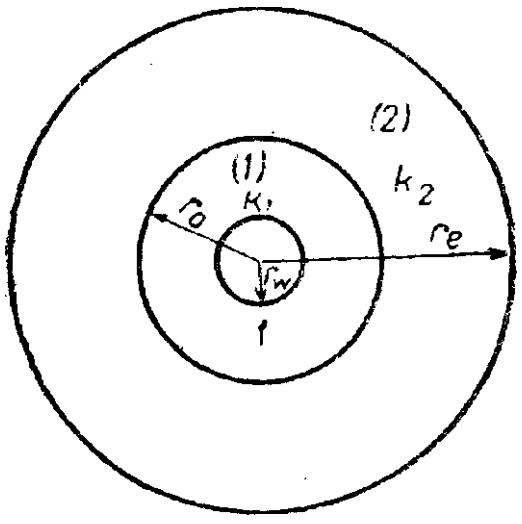
проницаемость на значительное расстояние вдоль их протяжения в массиве известняка. Существуют промысловые наблюдения, которые подтверждают, что в процессе солянокислотной обработки были затронуты скважины на расстоянии 366 *м* от обрабатываемой, что доказывает вполне определенно существование далеко распространяющихся трещин. Так, полагая, что в скважину было закачено 1890 *л* соляной кислоты 18° Be, которая равномерно проникла в окружающую породу с пористостью 20% и мощностью 3,0 *м*, будем иметь кольцевое пространство вокруг скважины, занятое соляной кислотой с радиусом 0,98 *м*. После полной реакции соляная кислота растворит 0,37 $м^3$ всей массы известняка. 3780 *л* соляной кислоты проникнет в кольцевое пространство с приблизительным радиусом 13,8 *м* и растворит 0,75 $м^3$ известняка. Однако 1890 *л* той же самой кислоты могут расширить трещину в известняке на 0,4 *см* на расстоянии 30,5 *м*.

Количественная величина эффекта от обработки будет весьма чувствительной к физической характеристике коллектора по отношению к его действительной проницаемости перед обработкой. Так, плотный известняк будет резко отличаться степенью реагирования по сравнению с известняком более высокой проницаемости, а известняк с тонкой трещиноватостью от известняка с более заметной шириной трещин. Более того, горизонт, который был забит или заглинизирован в непосредственной близости к призабойной зоне, покажет отличный результат по сравнению с однородным коллектором. Постараемся приложить теперь для этих независимых случаев аналитическую теорию, разработанную в последних нескольких разделах с учетом изменения конечных результатов.

7. Эффект от солянокислотной обработки в радиальной системе. На фиг. 156 приведено схематическое изображение радиального течения после обработки скважины соляной кислотой. Допустим, что кольцевое пространство между стволом скважины радиусом 0,075 *м* и радиусом r_0 было поражено соляной кислотой, в то время как остальной известняк за r_0 сохранил свою первоначальную проницаемость k_2. Результативный эффект от действия кислоты можно представить себе очень удобно отношением текущего дебита скважины после обработки Q к соответствующему значению Q_0 до обработки. Эксплоатационная производительность в свою очередь зависит от величин проницаемости внутри и вне кольцевой области, поражаемой кислотой. Представляется весьма удобным рассматривать раздельно случай, когда первоначальная проницаемость кольцевой области нормальна и равняется проницаемости основной массы известняка, так что кислота просто увеличивает ее до более высокого значения, и случай, где кольцевая область имеет первоначально низкую проницаемость вследствие природного отсутствия однородности резервуара, а также закупорки или заглинизирования его в процессе бурения. В последнем случае эффект от кислотной обработки будет заключаться по существу в увеличении проницаемости до приблизительно нормального ее значения. На фиг. 157[1] дается в виде

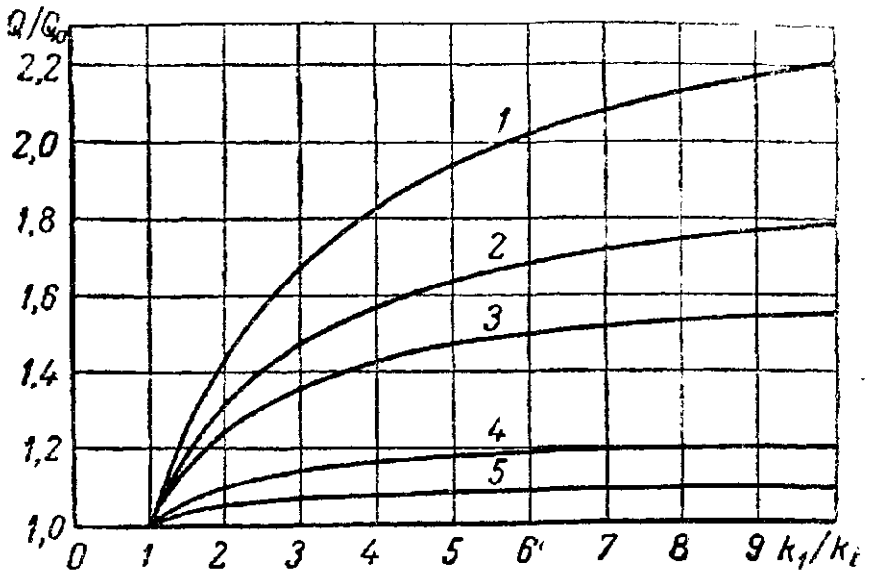
[1] Фиг. 157 и 158 по существу одинаковы с фиг. 150. Они только были перестроены так, чтобы их можно было приложить с удобством к проблеме солянокислотной обработки.

графика результат солянокислотной обработки для первого случая. На фиг. 157 абсциссы k_1/k_i дают отношение конечной проницаемости кольца к ее первоначальному значению; k_i равняется также k_2 — проницаемости основной массы известняка. Из фиг. 157 видно, что результаты в целом не так уже велики, пока радиус пораженного кислотой кольца не достигнет большого значения, что в свою очередь потребовало бы огромных количеств кислоты. Более того, Q/Q_0 не зависит особенно резко от абсолютного значения роста проницаемости до тех пор, пока k_1/k_i составляет величину порядка 5 или больше.



Фиг. 156. Радиальное течение в известняке, который был подвергнут солянокислотной обработке.

1 — зона, поражаемая соляной кислотой.



Фиг. 157. Повышение эксплоатационной производительности системы радиального течения, связанное с солянокислотной обработкой, при условии, что первоначальная проницаемость известняка повсюду одинакова:

Q/Q_0 — (эксплоатационная производительность после обработки) / (эксплоатационная производительность до обработки); k_1/k_i — (проницаемость пораженной зоны с радиусом r_0 после обработки)/(проницаемость пораженной зоны перед обработкой); радиус скважины — 0,075 *м*; радиус внешнего контура — 152,5 *м*.

1 — $r_0 = 7{,}5$ *м*; *2* — $r_0 = 3{,}0$ *м*; *3* — $r_0 = 1{,}5$ *м*; *4* — $r_0 = 0{,}3$ *м*; *5* — $r_0 = 0{,}15$ *м*.

Действительно, если бы даже удалось растворить внутреннее кольцо полностью так, что $k_1/k_i = \infty$, то увеличение Q_0 равнялось бы только цифре, соответствующей увеличению радиуса ствола скважины от 0,075 *м* до r_0. Таким образом, эксплоатационная производительность скважины не удвоится до тех пор, пока поражение породы соляной кислотой не достигнет радиуса 3,4 *м*, если даже соляная кислота полностью удалит известняк в пределах этого радиуса.

Соответствующие кривые для второго случая приведены на фиг. 158. Здесь абсциссами являются отношения первоначальной проницаемости внутреннего кольца к значению ее после солянокислотной обработки, причем заранее принимается, что последнее значение проницаемости соответствует основной массе известняка. В этом случае даже для малых значений r_0 можно гораздо легче получить большие значения Q/Q_0 при условии, что внутреннее кольцо обладало первоначально очень малой проницаемостью и не было ограничено значениями r_0. Повидимому, в предельном случае, когда забой скважины будет полностью очищен от пробки и глинистой корки, $k_i = 0$ и Q/Q_0 принимает бесконечно большое значение.

8. Эффект от солянокислотной обработки высокотрещиноватых известняков. Далеко распространяющиеся трещины в карбонатном коллекторе могут играть важную роль при добыче нефти из таких резервуаров, если заметить при этом, что трещина даже с малой шириной обладает эффективной проницаемостью, в сотни раз превосходящей проницаемость самого известняка. Реальную трещину с шириной w можно, очевидно, рассматривать как эквивалент открытого линейного канала равной ширины. Тогда для условий ламинарного течения можно показать, что транспортирующая производительность такого линейного канала на единицу градиента давления согласно классической гидродинамики дается выражением:

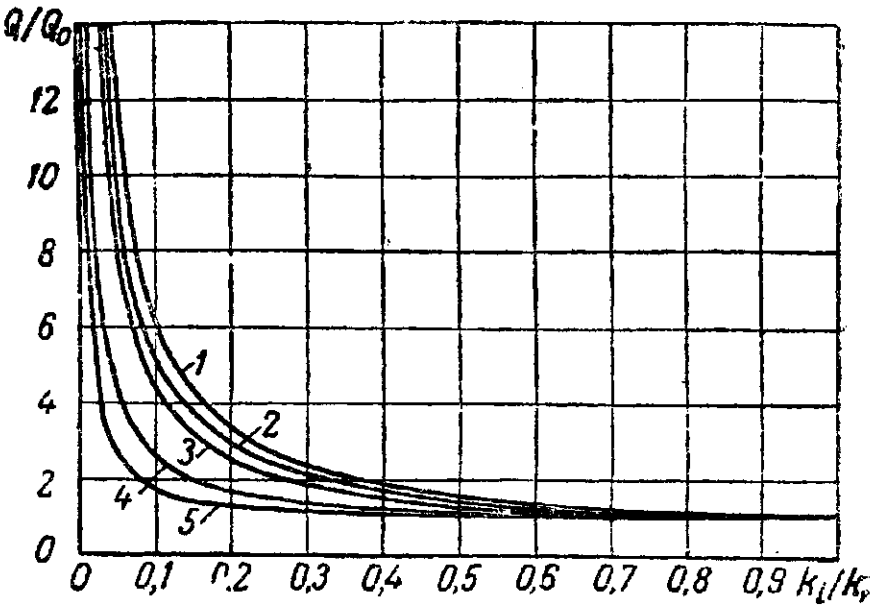
$$Q = w^3/12\mu, \qquad (1^1)$$

где μ — вязкость жидкости.

Отсюда эквивалентная проницаемость канала будет:

$$k = \frac{w^2}{12} = \frac{10^8 w^2}{12} \text{ дарси},$$

где w выражено в *см*. Тогда трещина с шириной только 0,1 *мм* будет иметь проницаемость 833 дарси, в то время как проницаемость самого известняка обычно бывает порядка 0,01 дарси. Действительно, суммарная производительность переноса жидкости в сложной радиальной системе с радиусом 13,5 *м*, состоящей из известняка с проницаемостью 0,01 дарси, может быть заменена единичной линейной трещиной длиной 13,5 *м* с глубиной, равной глубине радиальной системы, и шириной 0,126 *мм*.



Фиг. 158. Повышение эксплоатационной производительности радиального течения, связанное с солянокислотной обработкой, при условии, что зона, поражаемая соляной кислотой, с радиусом r_0 обладала первоначально более низкой проницаемостью по сравнению с остальной массой известняка, а затем под действием соляной кислоты возросла до величины, соответствующей проницаемости всей массы известняка:

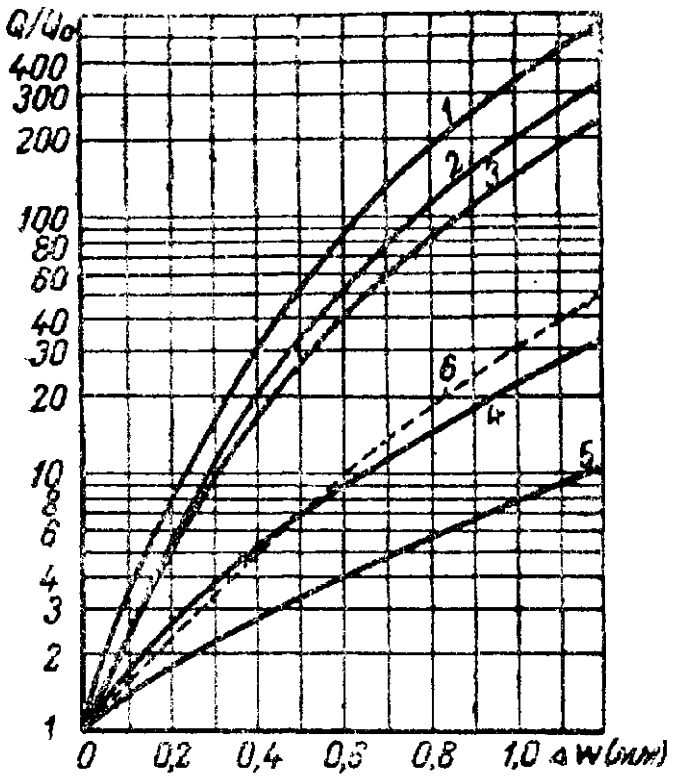
Q/Q_0 — (эксплоатационная производительность после обработки) / (эксплоатационная производительность перед обработкой); k_i/k_1 — (проницаемость пораженной зоны перед обработкой)/(проницаемость после солянокислотной обработки). Радиус скважины 0,075 *м*; радиус внешнего контура 152,5 *м*.
1 — $r_0 = 7{,}5$ *м*; *2* — $r_0 = 3{,}0$ *м*; *3* — $r_0 = 1{,}5$ *м*; *4* — $r_0 = 0{,}3$ *м*; *5* — $r_0 = 0{,}15$ *м*.

Если вводить кислоту в скважину, которая вскрыла карбонатную породу, то кислота будет, очевидно, стремиться быстро проникнуть в последнюю, расширить любую трещину, ведущую к стволу скважины, и вступить в реакцию с известняком, непосредственно окружающим забой. Отсюда, если только поражаемая кислотой область не имела первоначально аномальной проницаемости и имея в виду, что рост радиальной проницаемости у ствола скважины создает только относительно небольшое влияние на текущий дебит, представляет собой интерес подвергнуть исследованию те результаты, которые можно ожи-

---

[1] См. Lamb H., Hydrodynamics, 6 th. edit., p. 582, 1932. Есть русский перевод.

дать вследствие расширения трещин кислотной обработкой. На практике эти трещины имеют ограниченные размеры, и в целом кислота не проникает в трещины на всю их длину. Однако следует вспомнить, что в теоретическом анализе было принято, что с самого начала трещины протягиваются не только до эффективной границы резервуара (90—150 *м*), но что последующее действие кислоты равномерно расширяет трещины по всей их длине. Последнее допущение приводит к значительно большим приростам текущего дебита по сравнению с тем, который приходится наблюдать на практике, если только кислота не проникнет полностью в трещины.



Фиг. 159. Повышение эксплоатационной производительности трещиноватого известняка, связанное с солянокислотной обработкой:

Q/Q_0 — (эксплоатационная производительность после обработки)/ (эксплоатационная производительность перед обработкой); Δw — расширение трещины, созданное инжекцией соляной кислоты; w_i — первоначальная ширина трещины; сплошная линия — проницаемость известняка = 0,01 дарси; пунктирная линия — проницаемость известняка = $^1/_{12}$ дарси; *1* — w = 0,01 *мм*; *2* — w = 0,05 *мм*; *3* — w = 0,1 *мм*; *4* — w = 0,5 *мм*; *5* — w = 1,0 *мм*; *6* — w_i = 0,1 *мм*; $k_s = {}^1/_{12}$

Однако эти ошибки должны быть малы вследствие высоких концентраций распределения давления вдоль трещин у скважины, особенно в узких трещинах. Поэтому точное значение эффективной или действительной проницаемости в отдаленных точках от ствола скважины влияет очень мало на общее сопротивление системы.

На фиг. 159 приведен график, на котором показаны конечные результаты, базирующиеся на этих допущениях [1]. Ординаты Q/Q_0 дают отношение текущих дебитов после кислотной обработки и до нее; абсциссы дают дополнительную ширину трещин после обработки. Эти абсциссы приблизительно пропорциональны количеству израсходованной на обработку кислоты. Отдельные кривые относятся к различным начальным ширинам трещин и, за исключением пунктирной кривой, для всех случаев, представленных на фигуре, принято, что проницаемость известняка составляет 0,01 дарси, а для пунктирной кривой — 0,083 дарси.

Наиболее поразительным свойством этих кривых является, повидимому, колоссальный возможный эффект от обработки, особенно для трещин более мелких размеров, даже при умеренном приросте их ширины. Уже было сказано, что значения Q/Q_0, приведенные на фиг. 159, должны быть несколько более высокими благодаря сделанным в анализе допущениям. Отсюда кажется вполне вероятным, что если внести соответствующие поправки на эти допущения, все же получим, что увеличение текущих дебитов в 100 и больше раз может быть объяснено

---

[1] Расчет величины Q/Q_0 заключается в простом подсчете отношения обратных зависимостей ординат кривой *I* (фиг. 154) для начального и конечного значения ширины трещин.

всецело за счет механизма трещин, не требуя привлечения сюда какой-либо иной гипотезы.

Из фиг. 159 становится также ясным, что эффект от обработки, гораздо выше для систем, трещины которых первоначально были узкими, и потому давали добычу при низких дебитах.

Пунктирная кривая, которая была рассчитана для известняка с проницаемостью 0,083 дарси, легла на графике ниже, чем соответствующая кривая ($w_i = 0{,}1$ *мм*) для известняка с проницаемостью 0,01 дарси. Это показывает, что если первоначальный эксплоатационный дебит являлся скорее следствием низкой проницаемости известняка, чем малой ширины трещин, то эффект от обработки будет опять относительно велик по сравнению со скважиной, которая имела первоначально более высокий текущий дебит (более высокую проницаемость известняка).

Для радиального течения было показано, что эффекты от обработки будут гораздо выше для скважин, в которых проницаемость внутренней зоны составляет только небольшую часть проницаемости всей остальной массы известняка, т. е. для скважин, которые показывают относительно высокую закупорку призабойной зоны. Для фиксированной проницаемости внутренней зоны скважины с более высокой проницаемостью вне этой зоны, а отсюда наивысшим начальным текущим дебитом будут давать наиболее высокие показатели после солянокислотной обработки. Если же рассматривать проницаемость внешней зоны как фиксированную, то скважины, где внутреннее кольцевое пространство обладает низкой проницаемостью, а отсюда низшим начальным текущим дебитом, будут давать также самые высокие показатели после обработки. Как показали промысловые наблюдения, малодебитные скважины обычно реагируют лучше всего на солянокислотную обработку. Поэтому следует сделать заключение, что поскольку течение соответствует радиальному, такая реакция со стороны малодебитных скважин получается скорее по причине серьезной закупорки призабойной зоны, чем вследствие низкой проницаемости основной массы известняка. Конечные выводы можно резюмировать следующим образом.

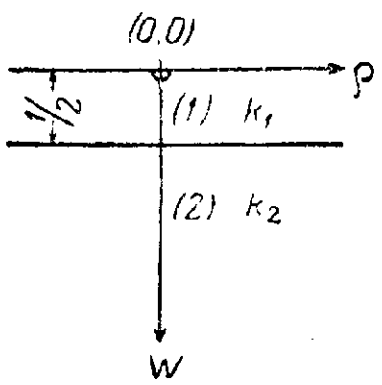
1. Небольшое увеличение эксплоатационной производительности (до 50%) после кислотной обработки можно объяснить, допуская увеличение проницаемости небольшой радиальной зоны вокруг ствола скважины от нормального значения до более высокого, так же как и удаление радиальной закупорки или расширение далеко простирающихся трещин, которые имеют широтное питание из самого известняка. Если только известняк не имеет развитой системы трещин или он не закупорен очень сильно у ствола скважины, то солянокислотная обработка должна быть малоэффективна для стимулирования нефтедобычи.

2. Умеренный прирост эксплоатационной производительности от 50 до 500% можно объяснить, предполагая радиальное течение при одном только допущении, что забой скважин был первоначально закупорен. Размер закупорки является основным фактором, определяющим начальный текущий дебит, так что малодебитные скважины должны давать самые высокие показатели после обработки. Это явление можно объяснить равным образом, принимая движение по широко развитой трещине.

3. Рост эксплоатационной производительности значительно выше 500% для скважин с первоначально умеренным дебитом можно объяснить только допущением, что в известняке присутствуют далеко развитые трещины, через которые поступает жидкость и которые расширяются кислотой. В этом случае малодебитные скважины должны дать наивысшие показатели после обработки, вне зависимости от того, является ли их первоначальный низкий текущий дебит следствием низкой проницаемости известняка или малой ширины трещин. Для скважин с очень низкими дебитами прирост свыше 500% можно объяснить также механизмом отдачи по трещинам, соответствующим радиальному течению, хотя необходимо допустить при этом, что первоначально в системе существовала почти полная закупорка зоны у ствола скважины.

На основании предварительных испытаний величины „отбора" следует отметить, что нельзя сделать априорных утверждений относительно механизма отдачи и предсказать отсюда возможный эффект от солянокислотной обработки. Всякий механизм отдачи покажет приблизительно линейное соотношение между текущим дебитом и перепадом давления, откуда можно вывести результирующее сопротивление системы. Это результирующее сопротивление может быть получено синтезом радиального течения и течения в породе с трещинами, соответственно предусмотрев некоторые физические и геометрические константы, необходимые для того, чтобы найти границы отдельных сторон системы.

9. Несовершенные скважины в переслаивающихся горизонтах. Иным типом задачи, включающей в себя область с различной проницаемостью и имеющей большое практическое значение, является несовершенная скважина, пробуренная на песчаник, состоящий из слоев с различной проницаемостью. В противоположность двухразмерным задачам, которые подвергались исследованию до сих пор в настоящей главе, рассмотрение поставленной задачи относится к трехразмерному типу. Однако с формальной точки зрения аналитическая процедура в данном случае будет почти аналогичной той методике, которая была разработана в гл. VII, п. 4, с одной только существенной разницей, что основные элементарные решения, из которых синтезируется конечное распределение потенциала, здесь будут являться произведением экспоненциальной и бесселевой функции, в то время как в гл. VII, п. 4, распределение потенциала выражалось произведением тригонометрической и экспоненциальной функций.



Фиг. 160. Схема «несовершенной» скважины, вскрывшей переслаивающийся песчаник.

В любом практическом случае глубина вскрытия пласта скважиной имеет величину, неравную нулю; песчаник имеет конечную мощность и может обладать переменной проницаемостью. Однако в данном случае примем для простоты, что скважина несовершенна, и песчаник сложен непосредственно из слоя *1* с проницаемостью k_1, покоящегося на бесконечном однородном песчанике *2* с проницаемостью k_2, как это показано на фиг. 160.

Эту задачу можно решить путем некоторого обобщения метода конформных отображений, примененного в гл. V, п. 3[1].

Однако более простым и поучительным является применение бесселевых функций[2] для рассмотрения задач о потенциалах с осевой симметрией. В то же самое время мы остановимся на основных положениях одного из наиболее современных методов классического решения диференциальных уравнений в частных производных математической физики, а именно методе разделения переменных. Этот метод обеспечивает систематическую процедуру при выводе элементарных решений уравнения Лапласа, так как применявшиеся до сих пор элементарные решения уравнения Лапласа, как $\ln r$ (гл. IV, п. 2), $r^n \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\theta$ (гл. IV, п. 5), $f(x+iy)$ (гл. IV, п. 8) $1/r$ (гл. V, п. 2) и $e^{\pm yz} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} xz$ (гл. VII, п. 4) при построении распределения давления или потенциала, соответствующего специальным физическим проблемам, были получены из форм вырождения диференциального уравнения, в частных производных, например, уравнения (2), гл. V, п. 2, и (3), гл. IV, п. 2, или были просто предложены как решения, подтверждающиеся подстановкой. Метод разделения переменных применяется следующим путем. Беря уравнение Лапласа в цилиндрических координатах (3), гл. III, п. 7, и допуская аксиальную симметрию и безразмерные переменные уравнения (3), гл. V, п. 3, а именно

$$w = \frac{z}{2h}; \qquad \varrho = \frac{z_1}{2h}, \tag{1}$$

где h — мощность верхнего слоя, которого коснулся забой скважины; имеем:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial w^2} = 0. \tag{2}$$

Теперь допустим, что функцию потенциала Φ можно выразить как функцию, в которой зависимые переменные „разделены“, а именно, как произведение функции R от одной переменной ϱ и функции W от одной переменной w, т. е.:

$$\Phi = R(\varrho)\, W(w); \tag{3}$$

это выражение подставляется в уравнение (2), и конечный результат делится на Φ. Отсюда находим:

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{d\varrho^2} + \frac{1}{R\varrho}\frac{dR}{d\varrho} + \frac{1}{W}\frac{d^2W}{dw^2} = 0. \tag{4}$$

Перенося последний член уравнения (4) в правую сторону и замечая, что левая сторона тогда представит собою функцию от ϱ, а правая часть функцию от w, ясно, что обе стороны могут быть

---

[1] Hummel J. N., Zeits. Geophysik, 5, 89, 228, 1929; также сноска в гл. VII, п. 4.

[2] Muskat M., Physics, 4, 129, 1933, где приведены остальные ссылки; см. также L. V. King, Roy. Soc. Proc. A = 139, 237, 1933. В этих сносках проблема рассматривается с точки зрения электрической аналогии течения.

равны только в том случае, если они обе равны некоторой постоянной величине, т. е.

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{d\varrho^2}+\frac{1}{R\varrho}\frac{dR}{d\varrho}=-\frac{1}{W}\frac{d^2W}{dw^2}=-\alpha^2,$$

где α — произвольная постоянная.

Отсюда непосредственно следует, что

$$\frac{d^2W}{dw^2}-\alpha^2W=0; \tag{5}$$

$$\frac{d^2R}{d\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{dR}{d\varrho}+\alpha^2R=0. \tag{6}$$

Таким образом, задача диференциального уравнения в частных производных (2) была сведена с помощью разделения переменных уравнения (2) к решению обыкновенных диференциальных уравнений (5) и (6) для компонентных функций R и W и к приведению, которое дает очень серьезные аналитические упрощения.

Решение уравнения (5) будет, очевидно,

$$W=\text{const}\,e^{\pm w\alpha}. \tag{7}$$

С другой стороны, уравнение (6) не имеет решения, которое может быть представлено конечным числом элементарных функций. Скорее всего решение этого уравнения можно получить с помощью бесконечного степенного ряда от $\varrho\alpha$ с однозначно установленными коэфициентами[1], сумма которого представляет бесселеву функцию нулевого порядка и обозначается через $J_0(\varrho\alpha)$, т. е.

$$R=\text{const}\sum_0^\infty\frac{(-1)^n(\varrho\alpha)^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}=\text{const}\,J_0(\varrho\alpha). \tag{8}$$[2]

Элементарные решения уравнения (2) отсюда могут быть выражены следующим:

$$\Phi=e^{\pm w\alpha}J_0(\varrho\alpha). \tag{9}$$

Возвращаясь теперь к первоначальной физической проблеме, поставленной в настоящем разделе, можно изобразить несовершенную сква-

---

[1] Piaggio, H. T. H., Differential Equations, 1929, глава IX. Есть русский перевод.

[2] Второе фундаментальное решение уравнения (6), часто называемое функцией Неймана $N_0(\alpha\varrho)$, имеет логарифмическую особенность при $\varrho=0$ и потому его не следует здесь подвергать рассмотрению. Кроме того, если α не имеет действительного значения, ни одно из решений уравнения (6) не может быть здесь использовано, так как одно из них становится бесконечностью при малом значении ϱ. Если α — мнимая величина, то решение, которое становится бесконечностью при большом значении ϱ, является функцией I_0, которая будет применена в следующем разделе. Решение, которое становится бесконечностью при малом значении ϱ, есть функция Ганкеля K_0, которая была использована в гл. V, п. 3, а также будет использована в последующем разделе. Дальнейшие подробности, относящиеся к теории этих различных функций, можно найти в гл. XVII, „Modern Analysis," E. T. Whittaker and G. N. Watson, а также в исследовании „The Theory of Bessel Functions, G. N. Watson, 1922, которое всецело посвящено функциям этого типа.

жину точечным стоком, расположенным в центре скважины. Такой сток будет создавать распределение потенциала вида

$$\Phi_0 = \frac{-1}{\sqrt{\varrho^2 + w^2}}. \qquad (10)$$

При помощи этого решения можно построить систему конформных отображений, как это было уже дано в гл. V, п. 3, так, чтобы получить результирующее распределение потенциала, удовлетворяющего граничным условиям. Но так как элементарное решение (9), уравнения (2), выведенное в настоящем разделе, выражено бесселевой функцией, его можно объединить с уравнением (10) только при условии, что последнее также будет выражаться бесселевой функцией.

Этого можно добиться с помощью интегрального выражения[1]:

$$\Phi_0 = \frac{-1}{\sqrt{\varrho^2 + w^2}} = -\int_0^\infty e^{-wa} J_0(\varrho a)\, da. \qquad (11)$$

Тогда, объединяя Φ_0 с аналогичной непрерывной суперпозицией элементарных решений, например уравнением (9), можно получить результирующее распределение потенциала в верхнем слое (фиг. 160) из следующего выражения:

$$\Phi_0 = \int_0^\infty J_0(\varrho a)\left[-e^{-wa} + A(a)e^{-wa} + B(a)e^{(w-1/2)a}\right]da. \qquad (12)$$

Последние два члена в интегрируемом количестве представляют собой возмущение в Φ_0, возникающее вследствие наличия нижнего слоя (фиг. 160). Действительно, если нижний слой имеет ту же самую проницаемость, что и верхняя зона, то потенциал, обязанный скважине, будет Φ_0 и, как это видно из дальнейшего, если $k_2 = k_1$, то A и B будут равны нулю.

Аналогично этому можно получить вывод для Φ_2. Это дает распределение потенциала в нижней зоне. Однако вследствие того, что последняя распространяется до бесконечности, член, включающий в себя e^{wa}, должен быть отброшен, так как в бесконечности он примет значение бесконечности. Отсюда Φ_2 примет вид:

$$\Phi_2 = \int_0^\infty C(a)e^{-(w-1/2)a} J_0(\varrho a)\, da. \qquad (13)$$

Вид функций $A(a)$, $B(a)$ и $C(a)$ должен быть выбран таким образом, чтобы Φ_1 и Φ_2 удовлетворяли граничным условиям задачи. Физически это значит: 1) плоскость $w = 0$ должна быть непроницаема для жидкости; 2) давления, а отсюда Φ/k должны быть непрерывными при переходе через поверхность раздела при $w = 1/2$; 3) нормаль скорости $-\partial\Phi/\partial n$

---

[1] Watson G, N., Theory of Bessel Functions, стр. 384.

должна быть непрерывной на поверхности раздела $w = {}^1/_2$. Аналитически это обозначает, что

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi_1}{\partial w} = 0:\ w = 0;\ \frac{\Phi_1}{k_1} = \frac{\Phi_2}{k_2} : w = \frac{1}{2} \\ &\frac{\partial \Phi_1}{\partial w} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} : w = \frac{1}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Так как интегралы обоих потенциалов Φ_1 и Φ_2 имеют те же пределы 0 и ∞ и так как интегрируемые выражения имеют тот же самый общий член $J_0(\varrho\alpha)$, необходимо рассмотреть остальную часть интегрируемого выражения, прилагая сюда граничные условия уравнения (14)[1].

Прилагая эти условия к функциям (12) и (13) и принимая $k_2/k_1 = \delta$, найдем, что коэфициенты A, B, C, должны удовлетворять:

$$\left.\begin{aligned} A - Be^{-\alpha/2} &= 0, \\ Ae^{-\alpha/2} + B - \frac{C}{\beta} &= e^{-\alpha/2} \\ Ae^{-\alpha/2} - B - C &= e^{-\alpha/2} \end{aligned}\right\} \tag{15}^2$$

Решения этих уравнений:

$$\left.\begin{aligned} A = \frac{-e^{-\alpha}(\delta-1)}{\Delta\,\delta}; \qquad B = \frac{-e^{-\alpha/2}(\delta-1)}{\Delta\delta} \\ C = \frac{2e^{-\alpha/2}}{\Delta}; \qquad \Delta = -\frac{2e^{-\alpha/2}}{\delta}\left\{\operatorname{sh}\frac{\alpha}{2} + \delta \operatorname{ch}\frac{\alpha}{2}\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

так что A и B равняются нулю для $\delta = 1\,(k_2 = k_1)$, как это было уже указано выше.

Найдем после некоторого приведения, что при этих значениях A, B и C и при обозначении;

$$\left.\begin{aligned} \delta = \operatorname{cth}\varepsilon: \quad \frac{k_2}{k_1} = \delta > 1 \\ \delta = \operatorname{th}\varepsilon: \quad \frac{k_2}{k_1} = \delta < 1 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

можно получить Φ_1 и Φ_2 из следующих выражений:

---

[1] Такие процедуры непосредственно ведут только к достаточным условиям для A, B, C. Теорема же об однозначности решения уравнения Лапласа с данными граничными условиями (гл. III, п. 5) обеспечивает, что полученное таким образом решение аналитически эквивалентно единственному физическому решению задачи.

[2] Первое из этих уравнений было получено, прилагая первое выражение из (14) только к членам A и B в Φ_1, так как первый член, обязанный Φ_0, как это дается уравнением (10), автоматически удовлетворяет первое выражение из (14), хотя производная его интегральной формы будет иметь разрыв непрерывности при $w = 0$.

для $\delta > 1$

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= \int_0^\infty \frac{J_0(\varrho\alpha)\,\mathrm{sh}\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{2} - w\alpha\right)}{\mathrm{ch}\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{2}\right)}\,d\alpha \\ \Phi_2 &= -\,\mathrm{ch}\,\varepsilon \int_0^\infty \frac{J_0(\varrho\alpha)\,e^{-(w-1/2)\alpha}}{\mathrm{ch}\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{2}\right)}\,d\alpha; \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

для $\delta < 1$

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= -\int_0^\infty \frac{J_0(\varrho\alpha)\,\mathrm{ch}\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{2} - w\alpha\right)}{\mathrm{sh}\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{2}\right)}\,d\alpha \\ \Phi_2 &= -\mathrm{sh}\,\varepsilon \int_0^\infty \frac{J_0(\varrho\alpha)\,e^{-(w-1/2)\alpha}}{\mathrm{sh}\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{2}\right)}\,d\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Эти уравнения содержат полное описание распределения потенциала в системе. Мы не входим здесь в подробности решения интегралов, но дадим вкратце конечные выводы анализа. Так, для $w = 0$, т. е. в кровле песчаника, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(w=0) &= -\left[\frac{1}{\varrho} + 2\sum_1^\infty \frac{\nu^n}{\sqrt{\varrho^2 + n^2}}\right], \\ \text{где} \quad \nu &= \frac{1-\delta}{1+\delta}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Это показывает, что распределение потенциала можно рассматривать как вытекающее из ряда конформных отображений при $w = \pm n$ с кратностью ν^n. Разлагая уравнение (19) по степеням ϱ или непосредственно подставляя в (18) и (19) степенной ряд для J_0, как это дается уравнением (8), получаем ряд, удобный для числовых выкладок, при малом значении ϱ; это

$$\Phi_1(w=0) = -\left[\frac{1}{\varrho} - 2\ln\,(1-\nu) - 2\nu + \frac{2\nu}{\sqrt{1+\varrho^2}} + 2\sum_1^\infty (-1)^m c_m f_m(\nu)\,\varrho^{2m}\right], \tag{21}$$

где

$$c_m = \frac{1\cdot 3\ldots 2m-1}{2\cdot 4\ldots 2m}; \quad f_m(\nu) = \sum_2^\infty \frac{\nu^n}{n^{2m+1}} \tag{22}$$

и где выделен член $2\nu/\sqrt{1+\varrho^2}$, чтобы увеличить радиус сходимости ряда от $|\varrho| = 1$ до $|\varrho| = 2$. Для больших значений ϱ можно получить

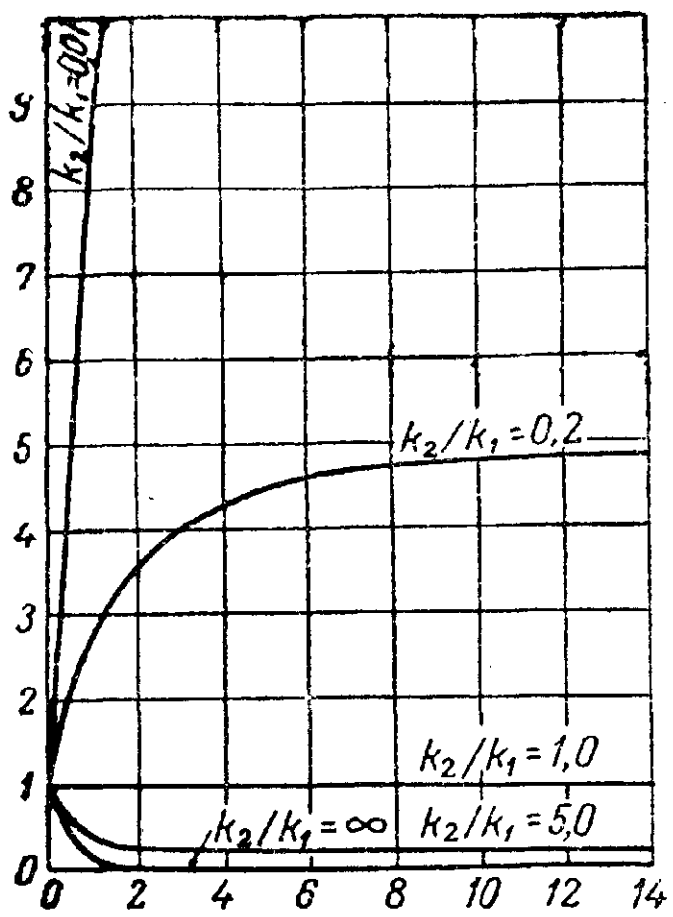
вывод асимптотического распространения Φ_1 с обратной зависимостью степеням ϱ. Для членов с $1/\varrho^9$ это дается выражением:

$$\Phi_1(w=0)=\frac{-1}{\delta\varrho}\left[1+\frac{1}{4\varrho^2\delta^2}(\delta^2-1)-\frac{3}{16\varrho^4\delta^4}(\delta^2-1)(3-2\delta^2)+\right.$$
$$\left.+\frac{5}{64\varrho^6\delta^6}(\delta^2-1)(17\delta^4-60\delta^2+45)-\ldots\right]. \qquad (23)$$

Если $\delta=0$, нижняя зона полностью непроницаема, уравнение (23) нарушается и необходимо вернуться к (7), гл. V, п. 3, которое было построено полностью для этого случая. С другой стороны, если нижняя зона имеет бесконечную проницаемость — $\delta=\infty$, то уравнение (23) должно быть опять заменено. Соответствующее выражение для этого случая будет:

$$\Phi_1(w=0;\ \delta=\infty)=-4\sum_0^\infty K_0(2n+1)\pi\varrho. \qquad (24)^1$$

Чтобы получить более ясное представление о влиянии нижней среды на распределение потенциала, на фиг. 161 была построена зависимость Φ_1 как функции от ϱ для нескольких избранных значений отношения k_2/k_1. Чтобы избежать трудностей построения и перекрывания кривых при малых значениях величины ϱ, на оси абсцисс вместо Φ_1 откладывается — $\varrho\Phi_1$.



Фиг. 161. Распределение потенциала в кровле двухслойного песчаника, вскрытого «несовершенной» скважиной:

k_2/k — (проницаемость нижнего (бесконечной мощности слоя), (проницаемость верхнего слоя); ϱ — радиальное расстояние замеренное в единицах двойной мощности верхнего слоя.

Видно, что когда проницаемость верхнего слоя выше, чем нижнего ($k_2/k_1<1$), потенциал не падает так резко, как в однородной системе. С другой стороны, когда нижние слои более проницаемы, чем залегающие выше, падение потенциала становится более резким. Эту зависимость следует понимать с количественной стороны, если обратить внимание на то, что нижний слой с низкой проницаемостью будет стремиться сконцентрировать течение в верхнем слое, сообщая ему радиальный характер, а отсюда и малые градиенты потенциала, в противоположность совершенному сферическому распределению, когда нижняя зона имеет ту же самую проницаемость, что и верхняя.

Совершенно противоположный эффект будет получен, если направить течение вниз, в нижнюю зону с повышенной проницаемостью. Большой практический интерес представляет собой зависимость между эффектив-

[1] Подробный вывод этих результатов, а также уравнения (7), гл. V, п. 3, и математическая обработка электрической аналогии случая, где проницаемый пласт состоит из трех слоев, можно найти в уже цитированной работе М. Маскета.

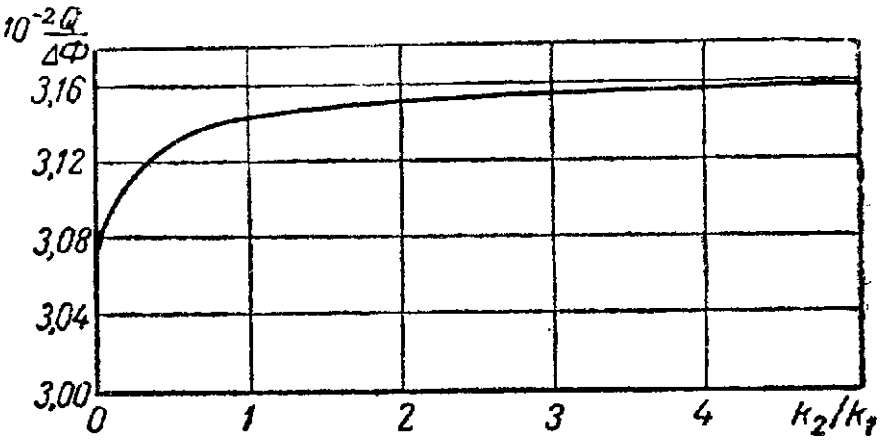
ным сопротивлением системы и отношением проницаемости k_2/k_1. Практически это осуществляется подсчетом текущего дебита скважины на единицу перепада давления или потенциала в системе как функции k_2/k_1. Эту зависимость лучше всего представить в графическом виде вследствие различия форм, которые принимает Φ для больших значений ϱ, зависящих от значения k_2/k_1. Делая эти выкладки, следует сначала заметить, что все приведенные выше выражения для потенциала соответствуют текущему дебиту скважины, умноженному на 2π, и потенциалам скважины, которые даются выражением:

$$\Phi_w = \frac{-1}{\varrho_w} + 2\ln\frac{2k_2}{k_1+k_2}. \qquad (25)^1$$

Примем для определенности, что

$$\varrho_w = 0{,}005; \qquad \varrho_e = 10,$$

где ϱ_w — отношение радиуса скважины к двойной мощности верхнего слоя и ϱ_e — отношение внешнего радиуса, к которому приложен внешний потенциал Φ_e, также к двойной мощности верхнего слоя. Тогда, например, для скважины с радиусом 0,075 *м* значение $\varrho_w = 0{,}005$ соответствует верхнему слою мощностью 7,5 *м*, а $\varrho_e = 10$ соответствует внешнему радиусу 152,5 *м*. На фиг. 162 дается построение количества[2] $Q/\Delta\Phi$ или расхода в скважину на единицу падения потенциала через песчаник по отношению к k_2/k_1 (или на единицу падения давления для значения в верхнем слое $k/\mu = 1$). Из рассмотрения этой кривой видно, что можно представить себе влияние нижней зоны только лишь как небольшую поправку к основному течению в верхнем слое песчаника.



Фиг. 162. Эксплоатационная производительность «несовершенной» скважины, вскрывшей 7,5-*м* пласт песчаника с проницаемостью k_1, залегающий на пласте песчаника бесконечной мощности с проницаемостью k_2:

$Q/\Delta\Phi$ — эксплоатационная производительность на единицу падения потенциала в верхнем слое (*см*³/*сек* на атмосферу для $k_1/\mu = 1$); радиус скважины — 0,075 *м*; радиус внешнего контура — 152,5 *м*.

Таким образом, для бесконечного интервала проницаемости нижней зоны k_2 суммарное изменение величины Q составляет только 3%. Последний вывод был получен из строгого допущения, что забой скважины только вскрывает верхний слой песчаника. Однако с количественной стороны нетрудно усмотреть, что рост влияния нижней зоны в том случае, когда величина вскрытия не равняется нулю, будет небольшим. Допустим на один момент, что нижний песчаник имеет ту же проницаемость, что и верхний. Тогда мы можем приложить к последнему случаю результаты выводов гл. V, пп. 3 и 4, а также фиг. 85, которые показывают, что

---

[1] Членами в уравнении (21) порядка ϱ_w^2 или меньше можно пренебречь.

[2] $\Delta\Phi$ представляет собой разность между $\Phi_1(10)$, как это дает уравнение (23), и Φ_w (0,005), как это дает уравнение (25).

для единичного песчаника и несовершенной скважины нижние слои его, залегающие под забоем скважины, по мере увеличения глубины залегания, дают быстро падающую долю в суммарном течении. Действительно, пока величина вскрытия скважиной верхнего слоя песчаника не превзойдет 50%, а в числовом значении будет меньше 7,5 *м*, всякое добавление под его залегание очень мощного песчаника той же самой проницаемости не увеличит по всей вероятности суммарного текущего дебита скважины более чем на 15%.

Возвращаясь к фиг. 162, видно, что по крайней мере для несовершенной скважины можно получить дополнительно более чем $^3/_4$ эксплоатационной производительности за счет нижнего песчаника с бесконечной проводимостью при условии, что проницаемость нижнего песчаника не превышает проницаемости верхнего слоя. Отсюда можно сделать заключение, что влияние нижней зоны с высокой проницаемостью на несовершенную скважину в песчанике, залегающем над нижним слоем, по всей вероятности не будет превосходить 20% роста суммарного текущего дебита для глубин вскрытия до 50%. В то же самое время при небольших глубинах вскрытия и низкой проницаемости более глубоких слоев этот рост дебита не будет превосходить по всей вероятности, 10%[1].

Наконец, можно заметить, что большие расхождения между кривыми на фиг. 161 для различных значений k_2/k_1 не противоречат только что отмеченной малой эффективности в колебании расхода Q в зависимости от k_2/k_1. Причина этого явления заключается, очевидно, в том, что видимые большие расхождения в значениях $\varrho\Phi$ для больших значений ϱ на кривых фиг. 161 включают только малые абсолютные изменения в значении Φ_e. Но так как Φ_e само по себе пренебрежимо мало по сравнению с потенциалом скважины Φ_w, то даже относительно большой процент изменения Φ_e очень мало повлияет на разность $\Delta\Phi = \Phi_e - \Phi_w$ и ординаты $Q/\Delta\Phi$, которые приведены на фиг. 162.

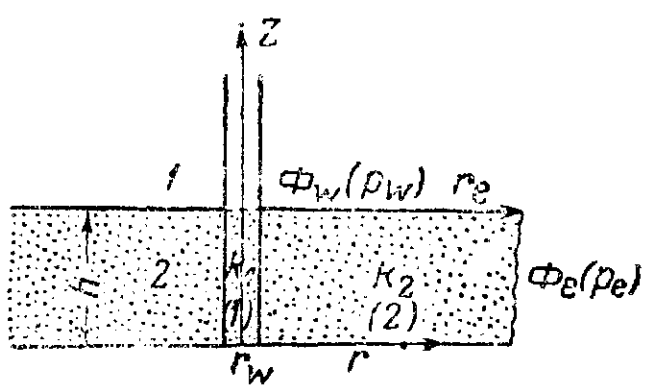
10. Эффективность заиленного лайнера на эксплоатационную производительность скважины. В качестве последней задачи, включающей в себя пористые среды с различной проницаемостью в пределах одного и того же течения, рассмотрим влияние заиленного (забитого песчаной пробкой) лайнера на эксплоатационную производительность скважины. Первая мысль, которая появляется при рассмотрении этой задачи, подсказывает, что присутствие колонны чистого песка на забое ствола скважины должно иметь малое влияние на текущий дебит последней, так как проницаемость такого столба чистого песка должна быть значительно выше проницаемости обычного песчаного коллектора.

Однако широкие наблюдения показывают, что в фонтанных или глубоконасосных скважинах текущие дебиты очень часто резко падают

---

[1] Принимая постоянство расхода вдоль поверхности скважины, а затем беря потенциал скважины, соответствующий величине его при $^3/_4$ глубины вскрытия от кровли песчаника, получаем близкое приближение к количественному решению при условии, когда глубина вскрытия не равна нулю, как это дается в гл. V, п. 3, для случая единичного песчаника. Однако для большей части практических целей должны быть вполне достаточными приведенные здесь качественные выводы.

вследствие поступления песка в ствол скважины. Так как во многих случаях после удаления накопившейся „пробки“ восстанавливается полная нефтеотдача, то потеря эксплоатационного дебита или даже фактическая гибель скважины часто обязаны присутствию песка в пределах лайнера, а не глинизации или закупорке глинистыми частицами фильтрасетки. Поэтому имеет большой практический смысл подвергнуть детальному анализу физическое объяснение этого явления. Схематическое представление этой физической системы приведено на фиг. 163.



Фиг. 163. Схематическое изображение скважины, имеющей заполненный песчаной пробкой хвост-фильтр.

1 — песчаная колонна; *2* — продуктивный горизонт.

Допустим, что песок заполняет ствол скважины до кровли продуктивного горизонта и имеет постоянную проницаемость k_1, в то время как проницаемость продуктивного горизонта составляет k_2. Песок в стволе скважины поддерживается исключительно силой тяжести, так что вблизи верха песчаной колонны течение жидкости, направленное, вверх,будет стремиться ослабить набивку, а при высоких скоростях течения жидкость может даже удалить песок из скважины. Однако основные стороны задачи могут быть, повидимому, представлены системой, в которой песчаная колонна имеет постоянную проницаемость от кровли до забоя. Представляется удобным допустить неограниченное распространение продуктивного горизонта по направлению от ствола скважины и принять безграничным давление в резервуаре на большом расстоянии r_e от последнего. Тогда поставленная задача может быть аналитически сформулирована так: найти такие потенциальные функции Φ_1 и Φ_2, чтобы

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \begin{cases} 2c: & z=1; \\ 0: & z=0; \end{cases} \qquad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0; \quad z = 0,1 \\ &\frac{\Phi_1}{k_1} = \frac{\Phi_2}{k_2}; \qquad \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}: \; r = r_w; \quad \Phi_2 \to \Phi_e \\ &\text{для } r \to r_e \gg r_w \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где за единицу длины принимается мощность песчаника h. Чтобы упростить анализ, вместо требования $\Phi_1 = \Phi_w$ (потенциал скважины) было выбрано условие $\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 2c$ при $z = 1$. Однако в свете малого значения радиуса r_w по сравнению с остальными размерами системы эти оба условия физически почти эквивалентны.

Вполне ясно, что первый ряд условий уравнения (1) удовлетворяется распределением потенциала:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= B_0 + c\left(z^2 - \frac{r^2}{2}\right) + \sum_1^\infty B_n I_0(n\pi r)\cos n\pi z \\ \Phi_2 &= \overline{A} + A_0 \ln \cdot \frac{r}{r_w} + \sum_1^\infty A_n K_0(n\pi r)\cos n\pi z \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где I_0 и K_0 — бесселевы функции третьего порядка. Первая функция становится экспоненциально бесконечной для больших значений аргумента, а вторая обращается экспоненциально в нуль также для больших значений аргумента. K_0 известна как функция Ганкеля, которая была нами введена в анализ для несовершенных скважин (гл. V, п. 3)[1]. Константы B_n, A_n и $\overline{A}$ следует определить, чтобы они удовлетворяли остальным условиям уравнения (1). Это можно получить из выражений:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_1^\infty [\delta B_n I_0(n\pi r_w) - A_n K_0(n\pi r_w)] \cos n\pi z = \overline{A} - \delta B_0 - \\ &\qquad - c\delta\left(z^2 - \frac{r_w^2}{2}\right) \\ &\pi \sum_1^\infty n\,[B_n I_1(n\pi r_w) + A_n K_1(n\pi r_w)] \cos n\pi z = \frac{A_0}{r_w} + c r_w \\ &\delta = \frac{k_2}{k_1}\ ;\quad \Phi_e = \overline{A} + A_0 \ln \frac{r_e}{r_w} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Первые два уравнения представляют собой ряды Фурье; коэфициенты при $\cos n\pi z$ можно определить согласно гл. IV, п. 3. Таким образом, находим, что

$$\left.\begin{aligned} &\overline{A} = \Phi_e + c r_w^2 \ln \frac{r_e}{r_w}\ ; \qquad A_0 = -c r_w^2 \\ &B_0 = \frac{\Phi_e}{\delta} - c\left[\frac{1}{3} - \frac{r_w^2}{2} - \frac{r_w^2}{\delta} \ln \frac{r_e}{r_w}\right], \\ &A_n = -\frac{I_1(n\pi r_w) B_n}{K_1(n\pi r_w)}\ ;\ B_n = \frac{-4c\,(-1)^n / n^2\pi^2}{\left[I_0(n\pi r_w) + \dfrac{I_1(n\pi r_w) K_0(n\pi r_w)}{\delta K_1(n\pi r_w)}\right]} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Принимая потенциал скважины Φ_w приуроченным к центру песчаной колонны, из уравнения (2) имеем:

$$\Phi_w = \frac{\Phi_e}{\delta} + c\left[\frac{2}{3} + \frac{r_w^2}{2} + \frac{r_w^2}{\delta} \ln \frac{r_e}{r_w}\right] + \sum_1^\infty (-1)^n B_n\,, \qquad (5)$$

так как $I_0(0) = 1$.

Вводя обозначение

$$\overline{B}_n = \frac{1}{n^2\left[I_0(n\pi r_w) + \dfrac{I_1(n\pi r_w)\, K_0(n\pi r_w)}{\delta K_1(n\pi r_w)}\right]}$$

---

[1] Остальные свойства бесселевых функций общего порядка n, т. е. I_n, K_n, см. гл. XVII, пп. 70 и 71, книги „Modern Analysis". Однако принятые здесь функции K_n взяты из работы „The Theory of Bessel Functions", где они были определены и потому будут отличаться на множитель $(-1)^n$ от тех функций, что установлены в книге „Modern Analysis".

и замечая, что величина расхода из скважины связана с константой c отношением

$$Q = -\pi r_w^2 h \left.\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\right|_{z=1} = -2\pi c h r_w^2, \tag{6}$$

находим, что проводимость системы может быть написана в форме:

$$\frac{Q}{\Delta p} = \frac{2\pi k_1 h r_w^2/\mu}{\frac{2}{3} + \frac{r_w^2}{2} + \frac{r_w^2}{\delta}\ln\frac{r_e}{r_w} - \frac{4}{\pi^2}\sum_1^\infty \overline{B}_n}, \tag{7}$$

где $\Delta p = p_e - p_w$. Обозначая через Q_0 величину расхода в стволе скважины, свободном от песка, влияние песка в стволе скважины можно выразить отношением:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{r_w^2 \ln r_e/r_w}{\delta\left\{\frac{2}{3} + \frac{r_w^2}{2} + \frac{r_w^2}{\delta}\ln\frac{r_e}{r_w} - \frac{4}{\pi^2}\sum_1^\infty \overline{B}_n\right\}}; \quad \delta = \frac{k_2}{k_1}. \tag{8}$$

Раньше чем приступить к рассмотрению уравнения (8), представляется интересным обратить внимание на изменение его характера с приближением к предельным случаям. Так, предел, где совершенно отсутствует в стволе скважины песок, очевидно, соответствует случаю, когда δ равняется нулю. Так как $\overline{B}_n$ принимает исчезающе малое значение при $\delta = 0$, то уравнение (8) приводится к виду:

$$\frac{Q}{Q_0}(\delta = 0) = 1, \tag{9}$$

который показывает, что система вырождается, как это и следует ожидать, в строго радиальное течение. Случай $\delta = 1$ полностью соответствует обычной несовершенной скважине, так как в этом случае песчаная колонна имеет ту же самую проницаемость, что и основная масса песчаника. В таком случае

$$\overline{B}_n = \frac{1}{n^2\left\{I_0(n\pi r_w) + I_1(n\pi r_w)\frac{K_0(n\pi r_w)}{K_1(n\pi r_w)}\right\}} = \frac{\pi r_w K_1(n\pi r_w)}{n}. \tag{10}^1$$

Суммируя $\sum B_n$ на основании формулы Эйлера[2], найдем:

$$z\sum_1^\infty \frac{K_1(nz)}{n} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi z}{2} + 0(z^2). \tag{11}$$

Отсюда, так как $r_w \ll 1$, уравнение (8) принимает вид:

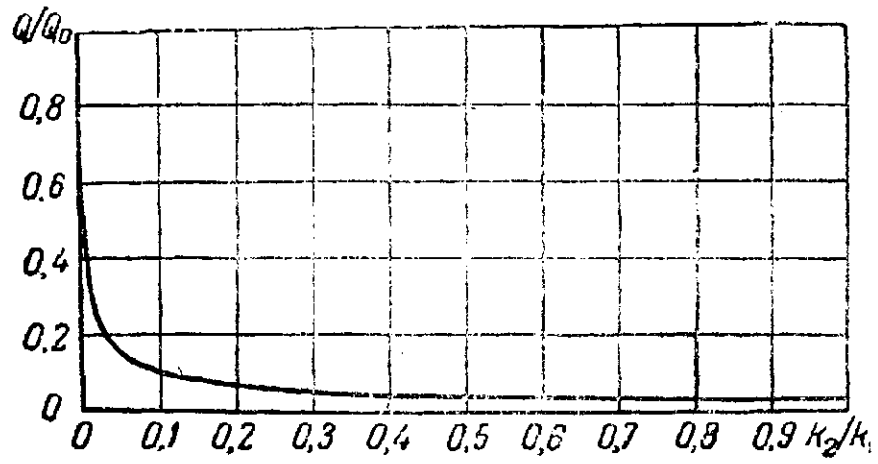
$$\frac{Q}{Q_0}(\delta = 1) = \frac{r_w \ln r_e/r_w}{2}; \quad Q = \frac{\pi k_2 r_w \Delta p}{\mu}, \tag{12}$$

---

[1] См. работу „Theory of Bessel Functions", p. 80.

[2] Whittaker E. T. and Robinson C., The Calculus of Observations, 2d. ed., 1926, глава VII, или Modern Analysis, гл. VII, п. 21. Есть русский перевод.

где во втором уравнении r_w является действительной величиной радиуса скважины. Последнее значение для Q (12) тождественно с тем, что вытекает из анализа, аналогичного гл. V, п. 3, и приложенного непосредственно к задаче несовершенной скважины, за исключением множителя 2[1]. Этот множитель, повидимому, возникает первоначально из того обстоятельства, что рассматриваемая здесь „несовершенная скважина" является диском с площадью πr_w^2, в то время как в цитированном нами анализе она была принята полушарием с площадью $2\pi r_w^2$. Вследствие того, что „потенциал скважины" Φ_w уравнения (5) принимается соответствующим центру диска, Δp уравнения (12) является максимальным Δp в системе, но не средним из значений Δp на граничных поверхностях.



Фиг. 164. Влияние заполненного песком фильтра на эксплоатационную производительность скважины;

Q/Q_0 — (эксплоатационная производительность скважины с песчаной пробкой в фильтре) / (эксплоатационная производительность скважины, свободной от песка); k_2/k_1 — (проницаемость песчаного коллектора) / (проницаемость песчаной пробки в фильтре); мощность песчаника — 7,5 *м*; радиус скважины — 0,075 *м*; радиус внешнего контура — 152,5 *м*.

На фиг. 164 приведено построение величины Q/Q_0 для общих значений δ с отношением $\frac{r_w}{h}=0{,}01$ и $r_e/r_w=2{,}000$. На этой фигуре показан почти вертикальным падением кривой весьма характерный эффект очень проницаемой песчаной колонки для малых значений k_2/k_1. Так, столб песка с проницаемостью в 200 раз большей проницаемости продуктивного горизонта уменьшает эксплоатационную производительность скважины до 34% ее первоначального значения[2].

Более того, если проницаемость песчаной колонки имеет тот же самый порядок, что и продуктивный горизонт, текущий дебит соответствует несовершенной в действительности скважине, независимо от точного значения отношения проницаемостей. Если рассматривать распределение потенциала в стволах скважин, заполненных песком, становится ясной физическая причина уже отмеченного эффекта песчаного столба с высокой проницаемостью. На фиг. 165 приведены кривые, показывающие вертикальное распределение потенциала вдоль оси стволов скважин, для которых $k_2/k_1=0{,}01$ и 0,1. Последнее значение соответ-

---

[1] Подробный анализ можно найти у М. Маскета (M. Muskat, Physics, 2, 329 1932. pt. 1. Уравнение (11), гл. V, п. 2, дает тот же самый результат при делении на 2, чтобы получить величину расхода в каждой полусферической поверхности.

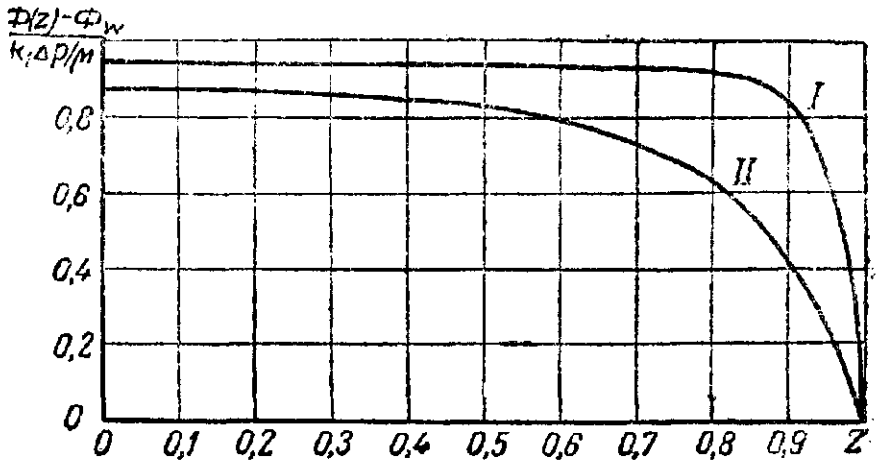
[2] Хотя проблема заиленного лайнера рассматривалась здесь с точки зрения скважины, дренирующей песчаник, но все полученные результаты, включая сюда фиг. 164 и 165, можно, повидимому, применить к случаю нагнетания жидкости через скважину в пласт, как, например, в системах заводнения или водоспуска минерализованных вод.

ствует столбу песка, содержащего значительное количество пылевидных частиц или ила. Распределение потенциала дается выражением:

$$\frac{\Phi_1(z)-\Phi_w}{k_1(p_e-p_w)/\mu}=\frac{1-z^2-\frac{4}{\pi^2}\sum\bar{B}_n+\frac{4}{\pi^2}\sum(-1)^n\bar{B}_n\cos n\pi z}{\frac{2}{3}+\frac{r_w^2}{2}+\frac{r_w^2}{\delta}\ln\frac{r_e}{r_w}-\frac{4}{\pi^2}\sum\bar{B}_n}, \quad (13)$$

непосредственно вытекающее из уравнений (2) и (5) и дающее долю суммарного перепада потенциала в песке, который существует между верхушкой песчаного столба и глубиной z.

Видно, что потенциал возрастает очень сильно с уменьшением значения z, так что нижние части песчаного фактически работают против высокого обратного давления по сравнению с давлением в скважине у верхушки песчаного столба. Поэтому они не принимают значительного участия в производительности скважины. Таким образом, глубина вскрытия пласта скважиной уменьшается от полного физического совершенства до эффективного значения менее чем 20% мощности продуктивного горизонта в однородном песчанике, если проницаемость песчаного столба становится меньше в 200 раз проницаемости продуктивного горизонта.



Фиг. 165. Распределение потенциала вдоль оси ствола скважины, заполненной песком, с проницаемостью k_1 до кровли продуктивного слоя; $\frac{\Phi(z)-\Phi_w}{k_1\Delta p/\mu}$ — (падение потенциала между кровлей продуктивного горизонта по оси скважины и глубиной z) / (общее падение потенциала в системе);

z — глубина (в единицах мощности песчаника) вдоль оси скважины от подошвы песчаной колонки. (Проницаемость песчаной колонки) / (проницаемость продуктивного песчаника) = 10 для кривой *I* и 100 для кривой *II*.

Было показано, что вполне возможно получить точное решение задачи заиленного лайнера при одном упрощающем допущении о постоянстве расхода на верхушке песчаного столба. Однако весьма поучительно отметить, что можно получить основные стороны проблемы на основании более элементарного анализа, базирующегося на некоторых вполне обоснованных физических приближениях. Так, допуская, что течение в пределах ствола скважины строго линейно, между тем как в продуктивном горизонте оно строго радиально, видно, что распределение давления вдоль оси ствола скважины должно удовлетворять уравнению:

$$\frac{d^2p(z)}{dz^2}=\frac{-2\delta}{r_w^2\ln r_e/r_w}[p_e+\gamma g(h-z)-p(z)], \quad (14)^1$$

где количества z, r_w и r_e будут абсолютными длинами, и решение уравнения дается равенством:

$$p_e+\gamma g(h-z)-p(z)=\frac{(p_e-p_w)\operatorname{ch} bz}{\operatorname{ch} bh}, \quad (15)$$

[1] Допущено, что p_e замерено у верхушки песчаного столба, $z=h$.

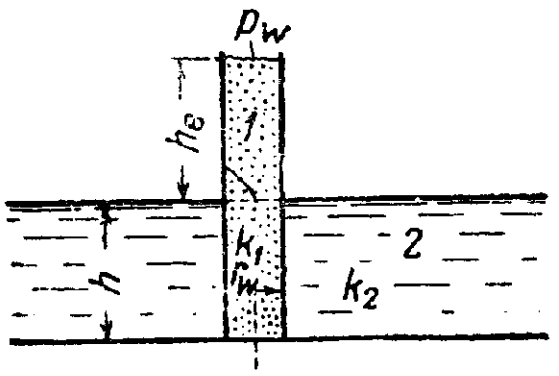
где

$$b^2 = \frac{2\delta}{r_w^2 \ln r_e/r_w}, \tag{16}$$

так что

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{\operatorname{th} bh}{bh}. \tag{17}$$

Как и следует ожидать, эта приближенная теория дает более низкие значения для Q/Q_0 по сравнению с точным анализом. Она не учитывает вертикальное течение в продуктивном горизонте в направлении верхней части песчаного столба, где давления имеют низшее значение. Так, для $\delta = 0{,}01$ уравнение (8) дает значение $Q/Q_0 = 0{,}258$, между тем как согласно уравнению (17) получается 0,195. Однако порядок величины этого эффекта остается тот же самый, что дается точной теорией.



Фиг. 166. Схема ствола скважины, заполненного песком до глубины h_e поверх кровли продуктивного горизонта.

1 — песчаная колонка; *2* — продуктивный песчаник.

Когда столб песка поднялся выше кровли продуктивного горизонта, больше не представляется возможным дать точной математической обработки системы и приходится обращаться к приближениям только что показанного типа. Так, следует допустить, что течение до кровли продуктивного горизонта следует теории, которая была разработана для решения задачи, где столб песка распространяется только до кровли продуктивного горизонта, а течение в стволе скважины выше продуктивного горизонта принимается строго линейным.

Отсюда, если столб песка распространяется до высоты h_e поверх кровли продуктивного горизонта (фиг. 166), потребуется дополнительный перепад давления:

$$\delta p = \frac{h_e Q \mu}{\pi r_w^2 k_1} + \gamma g h_e, \tag{18}$$

чтобы транспортировать расход Q через систему вне тех границ, которые требуются условием $h_e = 0$. Поэтому следует, что

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{r_{w2} \ln r_e/r_w}{\delta\left(\frac{2}{3} + \frac{r_w^2}{2} + \frac{r_w^2}{\delta} \ln \frac{r_e}{r_w} - \frac{4}{\pi^2} \sum_1^\infty B_n + 2h_e\right)}, \tag{19}$$

где h_e, r_w и r_e даны в единицах мощности песка.

Дополнительный столб песка над кровлей продуктивного горизонта действует как штуцер малого диаметра, установленный на скважине. Это следует из замечания, что если столб песка распространяется только на 1,5 *м* поверх кровли 7,5-*м* песчаника, эксплоатационная производительность скважины упадет до 42% той величины, которая была, если столб песка распространялся бы только до кровли продуктивного горизонта и имел проницаемость в 100 раз больше проницаемости послед-

него, и до 16%, если бы его проницаемость была только в 10 раз больше проницаемости продуктивного горизонта.

Причиной резкого падения производительности является всецело высокое эффективное сопротивление ствола скважины, возникающее вследствие его малого поперечного сечения. Практическое значение сохранения ствола скважины свободным от песка вытекает непосредственно из полученных выводов. В течение фонтанного периода скорости течения будут возможно вполне достаточными, чтобы вынести любое количество песка, поступающего в ствол скважины, но на последующих этапах эксплоатации в скважине может начаться скопление песка, которое быстро поведет к осложнениям, причиняемым образованием „песчаной пробки". Вполне понятно, что любая закупорка фильтра сетки будет действовать как дополнительный штуцер, помимо того что создается накоплением песка в лайнере.

Следует также заметить, что столб песка имеет весьма отчетливое закупоривающее действие, но он не устраняет полностью течения в точках, которые находятся значительно ниже верхушки песчаного столба. Поэтому если такая простая песчаная пробка на забое скважины и устраняет бо́льшую часть краевых вод, все же достаточное количество последних может проникнуть в скважину и создать серьезные затруднения в смысле образования эмульсий. Отсюда нельзя интерпретировать приведенный анализ как указание на необходимость применения несцементированных песчаных пробок для изоляции подошвенной воды, поступающей в скважину вследствие продвижения краевых вод. Тем не менее такие несцементированные песчаные столбы будут стремиться подавить подошвенную воду, которая может создать конус в скважине. Однако они не будут столь эффективны, как цементные пробки [1]. Действительно, можно проделать предварительное испытание ожидаемого успеха от создания такой пробки на забое путем засыпки несцементированного песка в ствол скважины, наблюдая за эффективностью ее на добычу воды. Если полученный результат невелик, не следует ожидать дальнейшего успеха от производства цементной забойной заливки, скважина, очевидно, потребует более решительных мер подземного ремонта.

11. Заключение. В том случае, когда в пористой среде имеются большие колебания в величине проницаемости, распределение давления получается несколько отличным путем по сравнению с системами, имеющими постоянную проницаемость. Чтобы найти распределение давления в системе с непрерывным изменением величины последней, необходимо применить обобщенную форму уравнения Лапласа [(2), гл. VII, п. 2]. Это уравнение можно решить аналитическим путем только в том случае, если проницаемость зависит только от декартовых координат или имеет осевую симметрию, зависящую только от радиального расстояния от точки [уравнение (5), гл. VII, п. 2].

Если проницаемость изменяется прерывисто, имея постоянные, но различные значения на отдельных участках, составляющих систему в целом, то распределение давления все же может быть найдено с по-

---

[1] См. гл. VIII, пп. 10 и 11, для более детального рассмотрения этой проблемы.

мощью уравнения Лапласа. Для этого устанавливаются независимые решения для каждой области с постоянной проницаемостью, а затем увязываются на «поверхностях разрыва непрерывности» таким образом, чтобы давления и скорости по нормали были одинаковыми с каждой стороны в каждой граничной точке системы [уравнения (1) и (2), гл. VII, п. 1]. Когда такая увязка закончена, результирующая последовательность распределения давления для нескольких областей будет соответствовать сложному течению, при котором различные участки с различной проницаемостью объединяются физически и геометрически.

Прерывистое изменение проницаемости, имеющее некоторый практический интерес, представляет собой случай, когда песчаник, несущий жидкость, можно рассматривать разделенным на два прилежащих концентрических кольцевых пространства с различной проницаемостью. Такая система может быть представлена скважиной, пробуренной в области, имеющей проницаемость бо́льшую или меньшую той, которую имеет в целом продуктивный песчаник.

Эта система будет также соответствовать скважине, которая была первоначально пробурена в однородном песчанике, а затем в ней забилась призабойная зона.

Последующая неоднородность явилась следствием частичной закупорки или заглинизирования в процессе эксплоатации или бурения области, непосредственно примыкающей к стволу скважины, или, наоборот, увеличения проницаемости у ствола скважины в результате солянокислотной обработки. Анализ этой проблемы показывает, как это и следовало ожидать, учитывая локализованный характер перепада давления при радиальном течении относительно центра скважины, что эксплоатационная производительность последней весьма чувствительна к величине проницаемости зоны, непосредственно примыкающей к стволу скважины. Так, если кольцевая зона, примыкающая к стволу скважины, имеет проницаемость в 2,5 раза больше проницаемости остального песчаника и только 1,5 *м* в радиусе, т. е. занимает 0,01% всего объема песчаника, то текущие дебиты для данных суммарных разностей давления будут на 30% выше по сравнению с однородным песчаником. Соответственно этому, если зона имеет проницаемость, составляющую $^1/_4$ соответствующей величины основной массы песчаника, то эксплоатационная производительность скважины уменьшится до 46% своего нормального значения.

Эти результаты не возрастают пропорционально радиусу зоны анормальной проницаемости. Более того, наибольший эффект создают первые несколько дециметров призабойной зоны, а дальнейшее увеличение последних дает последовательно все меньшие изменения эксплоатационной производительности. Аналогично этому для зон с относительно высокой проницаемостью рост эксплоатационной производительности — уменьшение суммарного сопротивления системы, по мере того как возрастает проницаемость внутренней зоны, быстро приближается к предельному значению и соответствует скважине, внутренняя зона которой была полностью удалена и потому имеет радиус, равный радиусу внутренней зоны (см. фиг. 150). Эти выводы объясняют большие изменения в величине эксплоатационной производительности, которые так часто наблюдаются в соседних и, повидимому, одинаковых скважинах. Если только песчаник не представлен совершенно неоднородной средой,

не похоже, чтобы соседние скважины могли вскрыть зоны с резко отличной местной проницаемостью и дать различные текущие дебиты, если даже рассматривать песчаник в целом как полностью однородный.

Следующая проблема, включающая системы, сложенные областями с различной проницаемостью, возникает при изучении течения жидкостей в карбонатных резервуарах. Карбонатные породы обычно обладают очень низкими проницаемостями, и текущие дебиты скважин, вскрывших карбонатные резервуары, должны быть отнесены к наличию каверн и трещин, которые распространяются по всему известняку. Когда такие трещины имеют ограниченные размеры и равномерно распределены по всему продуктивному горизонту, результирующая нефтеотдача будет эквивалентна отдаче из однородной пористой среды. Когда же трещины развиваются в длину и ограничены числом, их можно рассматривать независимо, как линейные каналы, которые питаются широтно жидкостью, поступающей из самого известняка. Тогда сами трещины можно представить себе как отличные зоны пористой среды с проницаемостью, равной эффективной проницаемости линейного свободного канала, несущего жидкость при условиях ламинарного режима.

Из классической гидродинамики следует, что свободный линейный канал с шириной w (в сантиметрах) имеет эффективную проницаемость $10^8 w^2/12$ дарси. Распространяя метод интегралов Фурье или рядов Фурье, развитый в главе IV для математической обработки однородных систем, можно получить вывод для распределения давления внутри системы, бесконечных или конечных размеров, состоящей из однородной двухразмерной пористой среды (сам известняк), рассеченной линейной полосой отличной проницаемости (трещина), которая вскрыта эксплоатационной скважиной. Изменение давления вдоль полосы вблизи скважины линейно и меняется логарифмически на больших расстояниях от скважины. Однако линейное изменение продолжает сохраняться на далеких расстояниях от скважины, по мере того как возрастает проницаемость полосы (трещины) относительно той величины ее, которой обладает остальная часть системы (см. фиг. 152). Для фиксированной проницаемости линейной полосы (фиксированной ширины и проницаемости трещины) сопротивление сложной системы возрастает с уменьшением проницаемости основной массы известняка. Однако, если проницаемость известняка сохраняется фиксированной, то результирующее сопротивление уменьшается с увеличением ширины трещины. При изменении ширины больше 0 5 *мм* сопротивление системы обратно пропорционально кубу ширины трещины.

Значимость последней как носителя жидкости в скважину подтверждается в дальнейшем подсчетом величины суммарного течения через систему, которое поступает в скважину после непосредственного перемещения по трещине по крайней мере вне заданного расстояния от скважины. Как и следует ожидать, эта доля увеличивается с шириной трещины. Действительно, для ширины трещины больше 0,75 *мм* в нее в пределах расстояния 91,5 *м* от скважины поступает менее 14% всего течения. Однако для ширины 0,1 *мм* или менее более 97% суммарного течения в скважину поступает через трещину в пределах ближайших 91,5 *м* к скважине (см. фиг. 154).

Исключительно интересным приложением анализа систем с непо-

стоянной проницаемостью является теория солянокислотной обработки скважин, эксплоатирующих карбонатные резервуары. На основании результатов, полученных аналитически для систем с непостоянной проницаемостью, можно легко объяснить эффект от воздействия соляной кислоты на карбонатные коллекторы и увеличение эксплоатационной производительности скважин, работающих в карбонатных резервуарах. Так, если течение в скважину по существу является радиальным благодаря приближенно постоянному распределению трещин ограниченных размеров, и продуктивный горизонт, непосредственно окружающий ствол скважины, имеет нормальную проницаемость по сравнению с основной массой известняка, то увеличение проницаемости зоны, примыкающей к стволу скважины, вследствие введения в скважину соляной кислоты даст относительно небольшой прирост текущего дебита скважины. Действительно, если даже кислота полностью растворит известняк в радиусе 1,5 *м* вокруг скважины, текущий дебит последней увеличится только на 65%. Однако, если забой скважины забит или известняк, окружающий ствол скважины, имеет ненормально низкую проницаемость, то введение соляной кислоты должно быть значительно более эффективным в смысле увеличения эксплоатационной производительности скважины. Если, например, призабойная зона имеет проницаемость, составляющую только 10% проницаемости основной массы известняка, которая в результате кислотной обработки возрастет до величины, соответствующей проницаемости известняка, то текущий дебит скважины увеличится на 70%, если поражаемая зона имеет только 7,5 *см* толщины, и на 350%, если кислота проникнет при этом на глубину 1,5 *м*. Получится еще больший эффект от кислотной обработки, если известняк пронизан далеко идущими трещинами, в которые проникает кислота и которые расширяются. Так, если известняк с проницаемостью 0,01 дарси рассечен одной далеко идущей трещиной с шириной 0,5 *мм*, то текущий дебит скважины, пересекающий эту трещину, увеличится на 570% при условии, что ширина трещины удвоится. Если первоначальная ширина трещины 0,1 *мм*, то добавление к ширине ее 0,5 *мм* вызовет увеличение текущего дебита на 2500%. Более того, малодебитные скважины в целом дают лучшие показатели после обработки, чем скважины с хорошим дебитом. Это подтверждается промысловой практикой.

Теоретический анализ течения жидкости в пористой среде с непостоянной проницаемостью дает возможность полностью объяснить большое разнообразие в промысловых наблюдениях над влиянием кислотной обработки на увеличение текущих дебитов скважин, эксплоатирующих карбонатные резервуары, на основе различия в детальном механизме нефтеотдачи отдельных скважин. Действительно, теория показывает, что поскольку трещиноватые известняки дают лучшие показатели после кислотной обработки по сравнению с непосредственно радиальным течением, торпедирование скважин, вскрывающих резервуары последнего типа, является эффективным предварительным мероприятием до кислотной обработки.

Следующей практической проблемой, включающей в себя систему, состоящую из участков различной проницаемости, является влияние заиленного лайнера на текущий дебит скважины. Хотя с трудом можно

ожидать, что присутствие столба чистого песка на забое скважины может значительно уменьшить эксплоатационную производительность последней, но обычные промысловые наблюдения показывают, что фонтанные и насосные скважины теряют значительно в дебите при поступлении песка в ствол последних. Более детальный анализ этого явления объясняет, однако, полностью наблюденный эффект. Так как вся добыча из скважины должна пройти через узкий ствол скважины, то градиенты давления в последнем, который рассматривается как пористая среда, должны быть очень высокими и весьма чувствительными к величине ее эффективной проницаемости. Действительно, если даже проницаемость столба песка в 100 раз больше проницаемости основной массы песчаника, то 87,5% всего перепада давления в системе происходит при непосредственном прохождении течения вдоль оси скважины от кровли до подошвы продуктивного горизонта.

Эта обстановка, повидимому, эквивалентна той, когда нижние участки песка работают против искусственно созданного высокого противодавления, уменьшая, таким образом, величину течения, поступающего из этих участков. При этом фактически уменьшается эффективная величина вскрытия песчаника и связанная с этим эксплоатационная производительность системы.

В частности, анализ показывает, что если столб песка в скважине распространяется до кровли продуктивного горизонта мощностью 7,5 *м* и имеет проницаемость в 100 раз большую проницаемости самого продуктивного горизонта, то текущий дебит уменьшится до 26% от значения, соответствующего стволу скважины, свободному от песка. Если отношение проницаемостей песка и горизонта составляет 10, то текущий дебит забитой песком скважины будет 0,1 его значения для скважины, свободной от песка. Это явление становится еще более отрицательным, если столб песка распространяется поверх кровли продуктивного горизонта. Для дополнительной высоты песка, только в 1,5 *м* поверх кровли продуктивного горизонта, текущий дебит системы уменьшается для одного и другого случая, приведенного выше, до 42 и 16% по сравнению с той величиной дебита, когда столб песка достигает уровня не выше кровли продуктивного горизонта.

Глава восьмая

СИСТЕМЫ ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ

1. Введение. С точки зрения технологии нефтедобычи почти повсеместное распространение подземных вод в непосредственной близости к песчаникам, содержащим нефть, представляет собой значительный практический интерес, связанный с вопросом взаимодействия между движением подземных вод и добычей нефти из песчаников, примыкающих к водяным пескам. Несмотря на то, что с физической стороны это является совершенно произвольным, на практике представляется удобным различать следующие проблемы добычи нефти, где последняя зависит от движения подземных вод. Первая проблема относится к тому случаю, где вода в основном находится на крыльях месторождения и продвигается в пласт нефтяного песчаника. Вторая проблема — где подземные воды залегают под нефтяным песчаником таким образом, что проведенная вертикально скважина вскрывает оба песчаника — нефтенасыщенный и водонасыщенный. Разумеется, последний случай может явиться непосредственным результатом продвижения краевой воды и до известной степени представлен во всех проблемах, связанных с продвижением пластовых вод, поскольку поверхности раздела вода — нефть никогда не бывают строго вертикальными.

Эти два типа задач тем не менее ведут к практическим выводам, которые столь резко отличаются между собой, что мы должны рассматривать их раздельно: продвижение водяного контура и образование водяных конусов. Последнее явление получило свое название вследствие того обстоятельства, что когда вода, залегающая в песчанике, находится ниже нефтяной зоны, отбор нефти из скважины создает воде тенденцию к подъему в виде конуса в область, находящуюся непосредственно под забоем скважины.

2. Продвижение краевой воды. Общая природа и формулировка проблемы. Даже небольшое рассмотрение приводит к вполне очевидному выводу, что взаимодействие между движением краевых вод и нефтью в песчаниках, примыкающим к водяным пескам, является в действительности взаимным и обратимым. Пока нефтяное месторождение не вскрыто бурением и нефть в нем не начнет двигаться по направлению к скважинам, соседние воды, очевидно, не имеют физической причины покинуть свое первоначальное состояние равновесия и начать продвижение в нефтяное месторождение. С другой стороны,

становится ощутимым влияние движения воды на перемещение нефти, если наблюдать, что водяные пески обычно распространяются до выходов на дневной поверхности. Эти выходы питают огромные и подвижные гидростатические напоры глубоко залегающих вод, примыкающих к нефтяным песчаникам.

Подземные воды обладают почти беспредельными запасами движущей энергии. Эта энергия может быть использована для интенсификации добычи нефти в двояком случае – когда нефть не содержит более достаточного количества своего активного движущего агента — растворенного газа, чтобы поддержать падение добычи, а также, когда добыча из месторождения производится при высоком противодавлении, и нефть отбирается как инертная жидкость, вытесняемая движущейся водой, а не расширением растворенных в нефти газов.

В первом случае мы имеем обстановку, соответствующую естественной „водной репрессии," какая была встречена на более поздних этапах эксплоатации месторождений Пауэлл и Мексай в Тексасе, а также во многих других аналогичных и хорошо известных примерах.

Во втором случае мы имеем тип добычи, который обычно называется „добычей при гидравлическом режиме". Такова, например, добыча из карбонатных месторождений Мексики и искусственно контролируемая добыча в месторождении Брэдфорд в Пенсильвании, получаемая из непосредственно осуществляемого проекта водной репрессии. Поэтому необходимо, чтобы подробный анализ общей проблемы продвижения воды имел четко начертанное разделение между различными возможными положениями, которые могут при этом встретиться, и эти положения следует рассматривать независимо друг от друга.

Так, рассмотрим сначала идеализированную задачу, где продвигающаяся вода играет роль „толкача" нефти, которая совершенно лишена газа, как, например, в практически истощенном месторождении, или которая добывается при столь высоком противодавлении, что из нефти, содержащейся в массе песчаника, выделяется очень небольшое количество свободного газа. Нефть при этом рассматривается как инертная жидкость. Ее движение всецело обязано гидростатическому напору продвигающейся воды, который, вполне понятно, должен быть больше давления, поддерживаемого на устье эксплоатационных скважин. Как следствие этого допущения следует, что вода и нефть находятся всегда в контакте вдоль перемещающейся поверхности раздела до тех пор, пока эта поверхность раздела не достигнет эксплоатационной скважины.

Следует опять подчеркнуть, что практически во всех случаях нефть в реальном подземном резервуаре насыщена газом при преобладающем давлении последнего. В дополнение к этому нефть часто ассоциируется с газом, образуя в повышенных частях структуры резервуара так называемую „газовую шапку", соответствующую преобладающему давлению в резервуаре. Отсюда дополнительно к вытесняющей энергии примыкающего к нефтяному коллектору водоносного горизонта существует в наличии еще энергия расширения содержащегося в резервуаре газа. Поэтому ясно, что в настоящем рассмотрении, где совершенно точно принято, что мы имеем дело с инертными жидкостями, установленное допущение предопределяет существование законченного гидравлического режима. Это значит, что мы принимаем условие, при котором всякое

поступление воды в резервуар равняется по объему количеству жидкости, отбираемому со скважин, и потому давление резервуара поддерживается постоянным в соответствующих пределах, при которых жидкости, участвующие в системе, являются несжимаемыми. При этих условиях газовый режим проталкивания, повидимому, не существует или же в лучшем случае обеспечивает только скрытый источник энергии при нефтеотдаче.

Отсюда опять можно принять за основу анализа закон Дарси, как это было сделано при рассмотрении проблем течения в последних нескольких главах, и поставленные аналитические задачи опять становятся задачами, относящимися к теории потенциала. Однако мы сталкиваемся с новым типом задач, включающих в себя две области, одна из которых занята нефтью, а другая занята водой. В каждой из них имеется движущаяся жидкость, которая регулируется потенциалом скорости Φ. Эти две области находятся постоянно в контакте на движущейся поверхности раздела. На этой поверхности раздела существует непрерывность величины давления и нормальной составляющей скорости, но внутри областей, разделенных поверхностью раздела, потенциальные функции отличны вследствие различия в величине вязкости нефти и воды, хотя рассматриваемый песчаник или пористая среда имеют одну и ту же проницаемость в водяной и нефтяной зонах.

В последней главе была дана математическая обработка некоторых систем, сложенных двумя областями различной проницаемости, например, рассматривалась проблема местного изменения проницаемости песчаника в непосредственной близости к скважине (гл. VII, п. 3), или проблема песчаника, который состоит из двух слоев различной проницаемости и дренируется скважиной одновременно с двух слоев (гл. VII, п. 9). Новая особенность, введенная в настоящем разделе, заключается в том, что отличие между областями является скорее следствием разницы в жидкостях, чем в проницаемости песчаника. Когда одна жидкость продвигается вперед, она замещает собой другую жидкость, и граница, разделяющая обе области (обе жидкости), беспрерывно изменяется.

Гидродинамически пористой среде при условии, что в ней движется одна и та же жидкость, и имеющей различную проницаемость с обеих сторон геометрической границы, соответствуют аналогии — электростатическая система с двумя диэлектриками, тепло- или токопроводящая система, сложенная участками с различной проводимостью. Обратный случай, т. е. наличие двух жидкостей, который особенно важен для настоящего раздела, повидимому, не имеет аналогии физического значения в других областях теории потенциала. Возможно, что по этой причине в трудах, касающихся теории потенциала, нельзя найти математической обработки этого типа потенциальной проблемы[1].

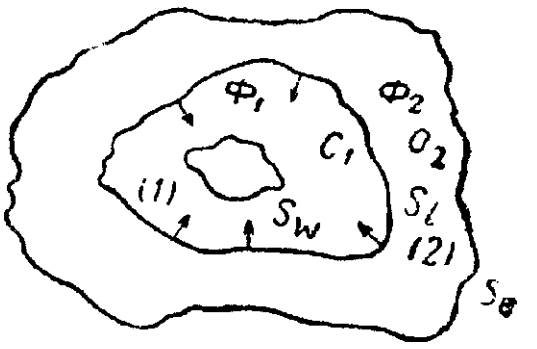
Общая постановка задачи может быть сформулирована таким образом. Даны две замкнутые поверхности S_e и S_w, ограничивающие область, для которой потенциальная функция определяется при следующих условиях: 1) значения Φ на поверхностях S_e и S_w устанавлива-

---

[1] Настоящее рассмотрение следует процедуре, развитой М. Маскетом, Physics, 5, 250, 1934.

ются как функции времени[1]; 2) допускается, что в данный момент поверхность S_i, замыкающая поверхность S_w, делит область между S_e и S_w на две части с константами c_1 и c_2 и потенциальными функциями Φ_1 и Φ_2 так, что Φ и $c\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ будут непрерывны на границе S_i; S_i само по себе обладает в каждой точке скоростью, определяемой из выражения $\bar{v} = -c\nabla\Phi$ (фиг. 167)[2].

Нетрудно получить графический и числовой вывод решения этой задачи, хотя сам процесс решения ее потребует большой затраты труда. Так, можно рассчитать графическими или математическими средствами для первоначального положения „S_i“ распределение потенциала Φ_1 и Φ_2.



Фиг. 167. Схема общего вида системы перемещения двух жидкостей.

Строя векторы скорости $c\nabla\Phi$ на S_i, определяем через короткий интервал времени положение S_i после начального момента. Тогда можно будет рассчитать новые функции Φ_1 и Φ_2 в новых областях (1) и (2) и повторить процесс анализа. Трудным шагом в этом анализе будет подсчет Φ_1 и Φ_2 даже для начального момента, когда только дается S_i. Само определение потенциальных функций Φ_1 и Φ_2 является до сих пор нерешенной задачей для „установившегося“ потенциала, если только S_i и области (1) и (2) не представляют собой простейшей геометрической формы и пока не обратятся к графическому или числовому методу решения.

Рассмотрим несколько более аналитическую формулировку, которая хотя и является почти эквивалентом только что приведенной методике, но дает способ решения, удовлетворяющий по крайней мере нескольким простым системам.

В этом случае удобно сосредоточить внимание непосредственно на поверхности раздела S_i. Так, допустим, что поверхность S_i в момент времени t представлена следующим выражением:

$$F(x, y, z, t) = 0. \qquad (1)$$

В последующий интервал времени $t+\delta t$ каждая точка (x, y, z) будет, очевидно, перемещаться в точку $(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z) = (x+v_x\delta t, y+v_y\delta t, z+v_z\delta t)$, где v_x, v_y, v_z — компоненты скорости в точке

---

[1] В общем случае граничные значения S_e и S_w могут быть „смешанными“. На известной части их следует принять нормальный градиент Φ, а не саму функцию потенциала Φ. Однако для настоящего случая вполне достаточно допустить, что в целом на всей поверхности S_e и S_w дан сам потенциал Φ.

[2] Потенциал скорости рассматривается здесь как функция $k(p-\gamma gz)$ и отсюда константа c имеет обратную связь с вязкостью μ. Следует также заметить для осторожности, что скорость $\bar{v} = -c\nabla\Phi$ эквивалентна объемной скорости течения в $см^3/сек$, как будто жидкость движется через среду со 100% пористостью. Такое специальное определение скорости, за исключением тех случаев, где оно будет сформулировано иначе, принято здесь и в последующем рассмотрении для удобства аналитических выкладок. Исключениями являются те случаи, где важна фактическая скорость, и тогда пористость f вводится полностью в уравнение уже позже.

(x, y, z) на поверхности раздела. Новая поверхность раздела будет:

$$F(x+v_x\delta t,\ y+v_y\delta t,\ z+v_z\delta t,\ t+\delta t)=0=F(x,\ y,\ z,\ t), \tag{2}$$

где выражение

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\bar{v}\nabla F=0 \tag{3}$$

является хорошо известным отношением Кельвина, контролирующим движение в жидкости с поверхностью, содержащей определенное количество частиц. Добавляя сюда условие, что

$$\bar{v}=-c\nabla\Phi, \tag{4}$$

видно, что уравнение (3) принимает вид:

$$\frac{\partial F}{\partial t}-c\nabla\Phi\cdot\nabla F=0. \tag{5}$$

Тогда формулировка задачи может быть установлена таким образом. Найти потенциальную функцию Φ_1, между поверхностью S_w и $F(x, y, z, t)=0$ и потенциальную функцию Φ_2 между $F(x, y, z, t)=0$ и поверхностью S_e, так что

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_1=\theta_w(x,\ y,\ z,\ t)\ \text{на}\ S_w\\&\Phi_2=\theta_e(x,\ y,\ z,\ t)\ \text{на}\ S_e\\&\left.\begin{aligned}&\Phi_1=\Phi_2\\&c_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}=c_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial n}\end{aligned}\right\}\ \text{на}\ F(x,\ y,\ z,\ t)=0\end{aligned}\right\} \tag{6}^1$$

где

$$\frac{\partial F}{\partial t}-c_{1,2}\nabla\Phi_{1,2}\cdot\nabla F=0.$$

Раньше чем перейти к решению трех простых случаев, можно отметить следующее. Последовательность эквипотенциальных поверхностей не может перманентно представлять функцию F, если не удовлетворяется специальное условие. В этом легко убедиться, если обратить внимание, что если $\Phi_0(x, y, z)=V$ представляет собой такое условие для последовательности эквипотенциальных поверхностей, которое во время t совпадает с F, то изменение в значении V, которое испытывает частица на F во время dt, будет дано выражением:

$$dV=\frac{\partial V}{\partial t}\,dt+\frac{\partial V}{\partial n}\cdot\frac{dn}{dt}\,dt=\left[\frac{\partial V}{\partial t}-c\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2\right]dt, \tag{7}$$

где n — элемент длины вдоль нормали, пересекаемой частицей. Тогда, очевидно, если количество, заключенное в квадратных скобках, не-

---

[1] Уравнение (6) накладывает фактически условие пренебрежения силой тяжести, так что $\Phi=kp$. Если принять во внимание силу тяжести, то вместо непрерывности самого Φ налагается требование непрерывности давления $p=\frac{\Phi}{k}+\gamma gz$. Однако, если пренебречь разницей в плотности между жидкостями в области (1) и (2), можно все же принять условие $\Phi_1=\Phi_2$.

постоянно вдоль поверхности раздела F, то значения V для различных точек F будет изменяться неодинаково для времени dt. В этот момент F не будет больше эквипотенциальной поверхностью, если она и была им до того в начальный момент времени.

Следующий пункт имеет большое практическое значение, но приложить его можно только к ограниченной группе оговоренных выше проблем. Так, допуская, что на поверхности S_e и S_w поддерживается соответственное постоянство потенциалов Φ_e и Φ_w, и так как градиент потенциала в области между S_e и S_w при этих условиях прямо пропорционален [1] разности $\delta\Phi = \Phi_e - \Phi_w$, можно принять

$$\nabla\Phi = \delta\Phi \nabla_0\Phi, \tag{8}$$

где $\nabla_0\Phi$ относится к единице суммарной разности потенциала. Тогда уравнение для F можно написать в следующем виде:

$$\frac{\partial F}{\partial (t\delta\Phi)} - c_{\nabla_0\Phi} \cdot \nabla F = 0, \tag{9}$$

и так как t входит исключительно только в первый член выражения (9), отсюда следует:

$$F = F(x, y, z, t\delta\Phi). \tag{10}$$

Тогда скорость продвижения жидкости из области (2) в область (1), очевидно, будет пропорциональна $\delta\Phi$. Из уравнения (10) видно, что геометрическая форма поверхности раздела зависит не от скорости продвижения, а только от произведения $t\delta\Phi$. Отсюда система с малым значением $\delta\Phi$ будет обладать тем же самым семейством поверхностей раздела F, что система с большим значением $\delta\Phi$, за исключением того, что поверхности раздела будут пересекаться в пропорционально позже наступающие интервалы времени.

Раньше, чем перейти к решениям отдельных частных случаев, мы должны возвратиться, в свете физических представлений, к гидродинамической терминологии и допустить, что область между S_e и $F = 0$ занята жидкостью с текучестью c_2, „продвигающейся“ и замещающей жидкость с текучестью [2] c_1, которая находится в области между $F = 0$ и S_w. Последняя является поверхностью стока или „скважиной“.

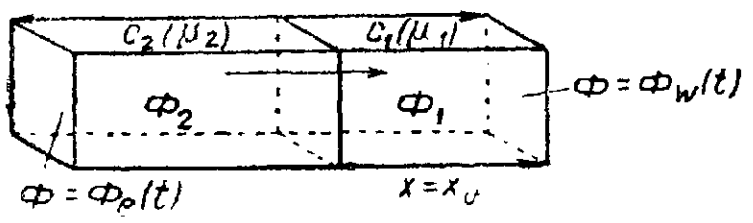
Легко убедиться в том, что если для установившегося F, Φ_1 и Φ_2 удовлетворить уравнение (6) с $\Phi_1 = \Phi_w$ и $\Phi_2 = \Phi_e$ на контурах, то решения Φ_2' и Φ_1' для условий, что $\Phi_1' = \Phi_w'$ на S_w и $\Phi_2' = \Phi_e'$ на S будут представлены выражениями:

$$\Phi_1' = \frac{\Phi_e' - \Phi_w'}{\Phi_e' - \Phi_w'}\Phi_1 + b, \qquad b = \frac{\Phi_e\Phi_w' - \Phi_w\Phi_e'}{\Phi_e - \Phi_w},$$

$$\Phi_2' = \frac{\Phi_e' - \Phi_w'}{\Phi_e - \Phi_w}\Phi_2 + b,$$

[2] Константы c—величины, обратные вязкости, — обозначают в данном случае понятие „текучесть“ в полном согласии с обычной терминологией, принятой в реологической литературе.

3. Линейное продвижение. Линейная система представляет собой, очевидно, наиболее простое выражение только что сформулированной проблемы. С физической точки зрения такая система, как это показывает фиг. 168, может соответствовать каналу, в котором движутся две жидкости и смачиваемый периметр которого мал по сравнению с его длиной. Совершенно противоположный случай может быть представлен такой системой, где размеры поверхности раздела, давление на котором имеет постоянную величину, настолько велики по сравнению со своими отклонениями, что она может быть принята совершенно плоской, распространяющейся в бесконечность, поверхностью раздела двух жидкостей. В реальном приближении первая система может быть получена, в крайнем случае, на узком канале с высокой проницаемостью, где продвигающаяся вода гонит впереди себя нефть с поступательно перемещающейся общей поверхностью раздела. Обстановка, которая соответствует второму случаю, создается при общем продвижении краевой воды по всему площадному контуру месторождения, например, в Восточно-Тексаском месторождении. [1]



Фиг. 168. Система линейного продвижения жидкости.

Для того чтобы подвергнуть аналитической обработке поставленную линейную задачу, является удобным изменить соответствующим образом формальное изложение уравнения (6), гл. VIII, п. 2, и рассмотреть сначала определение поверхности F, ограниченного для настоящего случая выражением:

$$\frac{\partial F}{\partial t} - c\frac{\partial \Phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial x} = 0. \tag{1}$$

Вследствие простоты задачи градиент потенциала $\partial\Phi/\partial x$ может быть непосредственно получен из члена, определяющего собой положение F. Можно легко убедиться в том, что на поверхности раздела, которая дается условием $x = x_0$:

$$c_2\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = c_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \frac{c_2c_1(\Phi_e - \Phi_w)}{(c_2 - c_1)x_0 + c_1L}, \tag{2}$$

где расстояние L является просто удобным пунктом отметок, от которого производится замер продвижения поверхности раздела.

Примем для следующих обозначений:

$$F = x - x_0(t) = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{dx_0}{dt}; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 1.$$

Отсюда уравнение (1) примет вид:

$$\frac{dx_0}{dt} + \frac{c_2c_1(\Phi_e - \Phi_w)}{(c_2 - c_1)x_0 + c_1L} = 0 \tag{3}$$

---

[1] Подробный анализ эксплоатации месторождения Восточный Техсас, базирующийся на физическом представлении продвигающейся воды как расширяющейся жидкости, будет приведен в гл. X, п. 8.

с решением

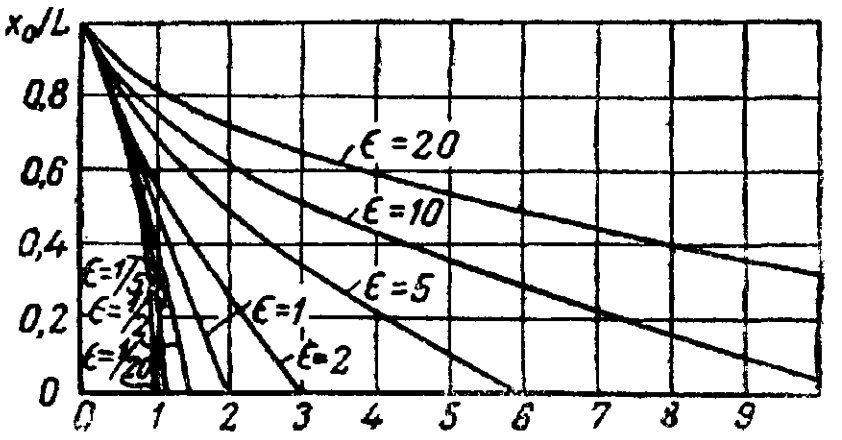
$$\frac{c_2 - c_1}{2}(x_0^2 - L^2) + c_1 L (x_0 - L) = -c_1 c_2 \int_0^t (\Phi_e - \Phi_w)\, dt, \qquad (4)$$

где начальный момент времени принимается таким, что поверхность раздела на внешнем контуре составляет $x_0 = L$. В том случае, когда разница в граничных значениях $\Phi_e - \Phi_w$ поддерживается постоянной, уравнение (4) принимает следующую форму:

$$\left(\frac{x_0}{L} - 1\right)\left[\frac{x_0}{L}(1 - \varepsilon) + \varepsilon + 1\right] + \frac{2\Delta\Phi c_1 t}{L^2} = 0; \quad \varepsilon = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \qquad (5)$$

То обстоятельство, что t входит в объединенный член $2\Delta\Phi c_1 t/L^2$, показывает, что для соответствующих состояний продвижения поверхности раздела время, потребное для достижения этих состояний, изменяется обратно пропорционально средней величине градиента потенциала $\frac{\Delta\Phi}{L}$, прямо пропорционально суммарной длине системы L и прямо пропорционально вязкости замещенной жидкости. Имея это положение в виду, можно подвергнуть детальному рассмотрению процесс продвижения, построив график x_0/L по отношению к t и принимая для удобства величину $2\Delta\Phi c_1/L^2$ равной единице.

На фиг. 169 приведены подсчитанные таким путем кривые для различных значений ε. Индивидуальные кривые имеют, как это показывает уравнение (5), параболическую форму. Как и следует ожидать продвижение поверхности раздела ускоряется по мере уменьшения x_0, если продвигающая жидкость обладает более высокой текучестью ($\varepsilon < 1$), и замедляется, если продвигающая жидкость имеет пониженную текучесть ($\varepsilon > 1$). Фактический расход через систему по мере того, как поверхность раздела движется в направлении $x_0 = 0$, дается в основном наклоном кривых на фиг. 169 и представлен более точно на фиг. 170. Последние кривые были подсчитаны из следующего уравнения:



Фиг. 169. Зависимость перемещения поверхности раздела от времени при линейном продвижении жидкости:

x_0/L — доля общей длины системы, занятая ко времени t (произвольных единиц) первоначальной жидкостью; ε — (вязкость наступающей жидкости)/(вязкость вытесняемой жидкости). *1*—$\varepsilon = 1/20$; *2*—$\varepsilon = 1/5$; *3*—$\varepsilon = 1/2$; *4*—$\varepsilon = 1$; *5*—$\varepsilon = 2$; *6*—$\varepsilon = 5$; *7*—$\varepsilon = 10$; *8*—$\varepsilon = 20$.

$$-\frac{Q}{L} = \frac{dy}{dt} = \frac{-1}{2(\varepsilon + y - \varepsilon y)}; \quad y = \frac{x_0}{L}. \qquad (6)$$

На фиг. 170 отчетливо показано резкое убыстрение продвижения поверхности раздела и соответствующий ему прирост величины расхода через систему при условии $\mu_2 < \mu_1$ ($\varepsilon < 1$). Это явление подтверждается резким увеличением величины $\frac{dy}{dt}$ по мере того, как y приближается

к нулю. Суммарное время, необходимое для перемещения поверхности раздела через систему, дается величиной t при $x=0$ или

$$t_{max}=\frac{\mu_1\left(1+\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)fL^2}{2\Delta\Phi}, \qquad (7)$$

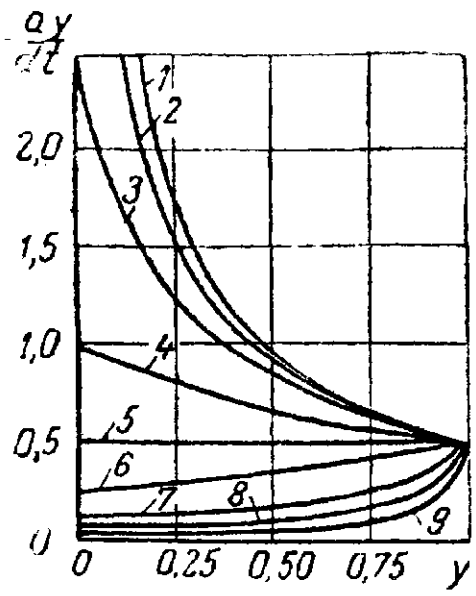
где f — пористость среды. Когда $\mu_2<\mu_1$ — это, очевидно, дает меньшее „время продвижения" по сравнению с единичной жидкостью:

$$t_{max}{}^0=\frac{\mu_1 fL^2}{\Delta\Phi}. \qquad (8)$$

Из уравнения (7) можно заметить, что максимальное падение величины t_{max}, обязанное продвижению раздела, достигается при условии, когда $\mu_2 \ll \mu_1$, так что

$$t_{max}/t_{max}{}^0 \sim {}^1/_2. \qquad (9)$$

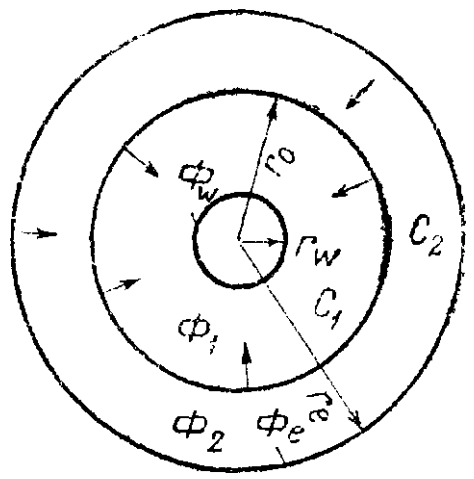
Отсюда в предельном случае вытеснение жидкости продвигающейся жидкостью пониженной вязкости наполовину срежет время, необходимое для прохождения через систему колонки первоначальной жидкости. Вполне ясно, что когда $\mu_2>\mu_1$, t_{max} превзойдет величину $t_{max}{}^0$ и, наконец, примет бесконечное значение, как только μ_2 станет бесконечно большим.



Фиг. 170. Скорость замещения жидкости при линейном продвижении $(-dy/dt)$:

y — доля общей длины системы, занятая первоначальной жидкостью; ε — (вязкость наступающей жидкости) / (вязкость замещенной жидкости).
1 — $\varepsilon={}^1/_{20}$; *2* — $\varepsilon={}^1/_{10}$; *3* — $\varepsilon={}^1/_5$; *4* — $\varepsilon={}^1/_2$; *5* — $\varepsilon=1$; *6* — $\varepsilon=2$; *7* — $\varepsilon=5$; *8* — $\varepsilon=10$; *9* — $\varepsilon=20$.

4. Двухразмерное радиальное продвижение. При искусственном процессе водной репрессии (заводнении) или на более поздних этапах естественного продвижения краевой воды в месторождении может возникнуть такая обстановка, когда какая-либо скважина окажется полностью окруженной водяным кольцом, продвигающимся радиально и вытесняющим перед собой нефть широким фронтом в эксплоатационную скважину. Для упрощения математической обработки можно так идеализировать задачу, что она будет обладать полной радиальной симметрией. Так, функции Φ_2 и Φ_1 будут взяты постоянными на внешнем и внутреннем контурах, соответственно ограниченных цилиндрами $r=r_e$ и $r=r_w$ (фиг. 171).



Фиг. 171. Схематическое представление радиального продвижения.

В этом случае снова следует упомянуть, что внешний контур $r=r_e$ представляет собой просто удобную первоначальную позицию для производства замера процесса продвижения; $r=r_w$ представляет собой реальную поверхность скважины. Ввиду радиальной симметрии задачи можно принять:

$$F=r-r_0\,(t)=0;$$
$$\nabla\Phi\nabla F=\frac{d\Phi}{dr}\,\frac{\partial F}{\partial r}, \qquad (1)$$

так что $r = r_0(t)$ дает положение поверхности раздела во время t. Тогда уравнение (5), гл. VIII, п. 2, принимает вид:

$$\frac{\partial r_0}{\partial t} + c\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r_0} = 0. \tag{2}$$

Распределение потенциала в аналогичной системе было уже дано в гл. VII, п. 3 для любого значения r_0. Вспоминая выводы этого раздела, легко заметить, что

$$c_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = \frac{c_1 (\Phi_e - \Phi_w)/r_0}{\ln \frac{r_0}{r_w} + \frac{c_1}{c_2} \ln \frac{r_e}{r_0}} = c_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}. \tag{3}$$

Подставляя это выражение в (2) и интегрируя, в результате имеем, что

$$\left.\begin{aligned} r_0^2 (b - a + a \ln r_0^2) &= -4c_1 \int_0^t \Delta\Phi \, dt + \text{const} \\ \text{где} \qquad a &= 1 - \varepsilon; \quad b = \varepsilon \ln r_e^2 - \ln r_w^2; \quad \varepsilon = \frac{c_1}{c_2} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Беря $\Delta\Phi$ за константу, т. е. принимая, что во времени не происходит изменений давления на скважине или внешнем контуре, и допуская, что при $t = 0$ поверхность раздела r_0 находится на внешнем контуре r_e, можно проинтегрировать полностью уравнение (4). Результаты интегрирования получим в следующем виде:

$$\frac{r_0^2}{r_e^2}\left(\ln \frac{r_e^2}{r_w^2} - a + a \ln \frac{r_0^2}{r_e^2}\right) = \frac{-4 c_1 t \Delta\Phi}{r_e^2} + \ln \frac{r_e^2}{r_w^2} - a. \tag{5}$$

Устанавливаем для удобства $4c_1 t \Delta\Phi / r_e^2 = 1$ и добавляем числовое допущение, что $r_e/r_w = 2000$. Это составляет нормальный порядок величин для практически интересующих нас случаев. Отсюда можно построить кривые, соответствующие уравнению (5), для различных значений $\varepsilon = \mu_2/\mu_1$ (фиг. 172). Заметим, что по мере того как прогрессирует продвижение раздела, т. е. уменьшается r_0/r_e, скорость продвижения убыстряется. Отметим также, что в данном случае реальное ускорение является результатом скорее естественного ускорения, обязанного сходящемуся характеру течения, а также эффекту замещения первоначальной жидкости с вязкостью μ_1 жидкостью, имеющей вязкость μ_2. Этот эффект замещения будет увеличивать или уменьшать ускорение в зависимости от того $\varepsilon < 1$ или $\varepsilon > 1$.

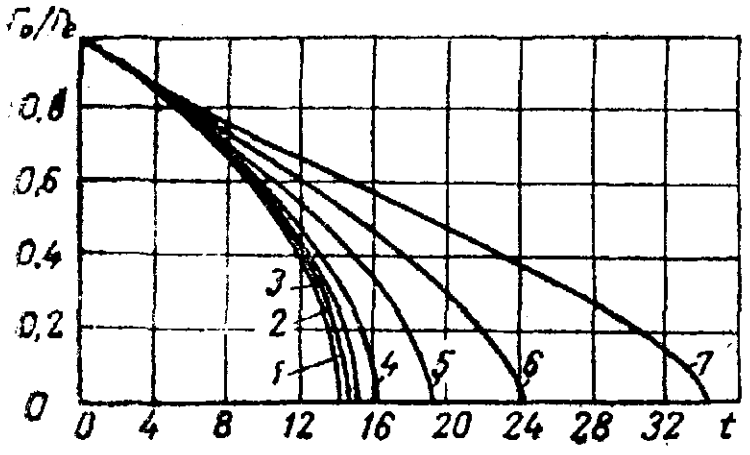
Скорость течения жидкости в процессе продвижения, которое пропорционально $\partial r_0^2/\partial t$, можно рассчитать из следующего:

$$\frac{-Q}{\pi r_e^2} = \frac{\partial (r_0/r_e)^2}{\partial t} = \frac{-2c_1 \Delta\Phi / r_e^2}{(1-\varepsilon) \ln \frac{r_0}{r_e} + \ln \frac{r_e}{r_w}}; \quad \varepsilon = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \tag{6}$$

Принимая опять

$$\frac{4c_1\Delta\Phi}{r_e^2} = 1 \text{ и } r_e/r_w = 2000,$$

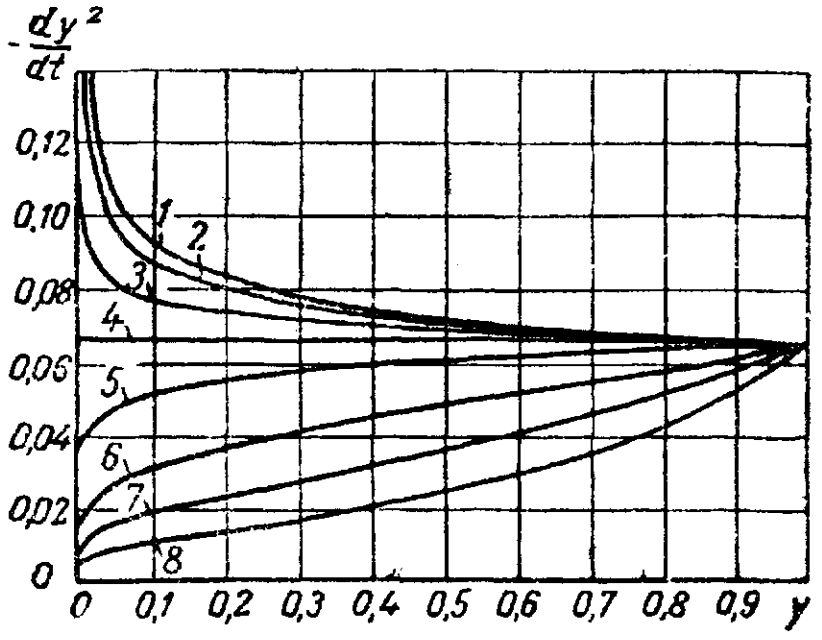
можно дать построение уравнения (6) для различных значений ε, где r_0/r_e заменено через y (фиг. 173). Интерпретация кривых на этой фигуре аналогична фиг. 170. Основным пунктом, требующим здесь особого замечания, является тот факт, что в данном случае прирост течения для случая $\mu_2 < \mu_1$ не становится заметным, пока $y \sim 0$.



Фиг. 172. Зависимость перемещения поверхности раздела от времени при линейном продвижении жидкости:

r_0 — радиус поверхности раздела ко времени t (произвольных единиц); r_e — радиус внешнего контура; ε — (вязкость продвигающейся жидкости) / (вязкость замещенной жидкости); r_w — радиус скважины — $r_e/2000$.

1 — $\varepsilon = 1/10$; *2* — $\varepsilon = 1/2$; *3* — $\varepsilon = 1$; *4* — $\varepsilon = 2$; *5* — $\varepsilon = 5$; *6* — $\varepsilon = 10$; *7* — $\varepsilon = 20$.



Фиг. 173. Скорость замещения жидкости $\left(\frac{-dy^2}{dt}\right)$ радиального продвижения:

y — (радиус поверхности раздела) / (радиус внешнего контура, r_e); ε — (вязкость наступающей жидкости) / (вязкость замещенной жидкости). Радиус скважины — $r_e/2000$.

1 — $\varepsilon = 1/20$; *2* — $\varepsilon = 1/5$; *3* — $\varepsilon = 1/2$; *4* — $\varepsilon = 1$; *5* — $\varepsilon = 2$; *6* — $\varepsilon = 5$; *7* — $\varepsilon = 10$; *8* — $\varepsilon = 20$.

Суммарное время, необходимое для перемещения поверхности раздела от положения $r_0 = r_e$ до $r_0 = r_w$ в реальной среде с пористостью f дается согласно уравнения (5) следующим выражением:

$$t_{\max} = \frac{r_e^2 f}{4c_1\Delta\Phi}\left[\left(1 - \varepsilon\frac{r_w^2}{r_e^2}\right)\ln\frac{r_e^2}{r_w^2} + (\varepsilon - 1)\left(1 - \frac{r_w^2}{r_e^2}\right)\right] \cong$$

$$\cong \frac{r_e^2 f}{4c_1\Delta\Phi}\left[\ln\frac{r_e^2}{r_w^2} + \varepsilon - 1\right]: \quad \frac{r_w}{r_e} \ll 1. \tag{7}$$

Отношение этого значения к соответствующей величине для единичной жидкости с текучестью c_1 будет, очевидно:

$$\frac{t_{\max}}{t_{\max}(\varepsilon = 1)} = 1 + \frac{\varepsilon - 1}{\ln r_e^2/r_w^2}. \tag{8}$$

Отсюда непосредственно вытекает, что для случая, где вязкость продвигающей жидкости меньше вязкости замещенной жидкости ($\varepsilon < 1$), уменьшение величины $t_{\max}$ вследствие поступления жидкости с более высокой текучестью не может превзойти значения $^1/_2 \ln r_e/r_w \sim 6{,}6\%$ для $r_e/r_w = 2000$. В соответственной задаче линейного течения продви-

жение раздела для жидкости с более высокой текучестью может уменьшить значение t_{max} наполовину по сравнению с однородной системой. Чтобы обосновать физически эту разницу во времени, следует обратить внимание на следующее. Так как ускорение продвижения раздела становится заметным, когда жидкость с высокой текучестью вступает в область высоконапорных градиентов вблизи скважины, то значение t_{max} будет отличаться от соответствующей величины для однородной жидкости ($\varepsilon = 1$) только благодаря этому последнему этапу продвижения. Но этот этап продолжается только ничтожную часть всего времени, которое затрачивается на весь процесс продвижения. Поэтому влияние этого этапа на величину t_{max} незначительно.

С другой стороны, для $\varepsilon \geqslant 1$ опять вытекает, что аналогично случаю линейного продвижения t_{max} можно сделать произвольно большой величиной, по мере того как ε возрастет до бесконечности.

5. Линия частиц жидкости в однородной системе. Когда система имеет сферическую симметрию [1], можно также решить для нее совершенно точно проблему продвижения воды или водонефтяного раздела. Однако системы общего типа, в которых геометрическая форма поверхности раздела не видна непосредственно из геометрии всей проблемы, представляют для решения большие трудности. В таких системах геометрическую форму поверхности раздела следует найти одновременно с его мгновенным положением и с распределением потенциала по обе стороны раздела. Представляется вполне возможным разработать такой метод последовательных приближений [2], где необходимо найти совершенно независимо для каждого этапа решение потенциального уравнения, геометрической формы и положения поверхности раздела. Однако для практического использования полученных результатов остаются все же непреодолимые трудности.

Поэтому представляется очень интересным разработать такое приближение к реальной задаче продвижения, которая покажет, хотя бы с качественной стороны, геометрическую форму поверхности раздела нефть — вода и природу ее продвижения. Такое приближение можно разработать, пренебрегая разницей в вязкости между этими двумя жидкостями.

Тогда поверхностью раздела вода — нефть будут служить геометрическая поверхность или кривая, которая в данный начальный момент совпадает с реальной поверхностью раздела вода — нефть и которая затем движется вперед со всеми частицами жидкости на первоначальной поверхности таким же образом, каким они перемещались бы вперед в системе единичной жидкости по направлению к эксплоатационной скважине. Аналитическая процедура этой проблемы заключается в прослеживании, по времени, линии частиц жидкости, первоначально находившихся вдоль реальной поверхности раздела нефть — вода, по мере того как эта линия будет перемещаться вперед по направлению к скважине. Тогда в системе будут отсутствовать реальная физическая поверхность раздела и деление всей интересующей нас

---

[1] М. Маскет (M. Muskat, Physics), уже цитированная работа.
[2] М. Маскет (M. Muskat, Jour. of Applied Physics, 8,434, 1947).

области на две части, для которых следует найти независимые друг от друга потенциальные функции. Рассматриваемая система будет обладать скорее постоянством текучести жидкости и проницаемости на протяжении всей системы с единым распределением потенциала, приложенным ко всей интересующей нас области от внешнего контура до эксплоатационной скважины.

Так как взятое приближение включает в себя еще движение кривой, содержащей данный ряд частиц жидкости, как это имеет место в реальной задаче о продвижении контура на поверхности раздела нефть — вода, эту кривую можно представить себе опять некоторой функцией F, которая удовлетворяет соотношению Кельвина [уравнение (5), гл. VIII, п. 2].

Тогда, беря c за единицу и обозначая через Φ потенциальную функцию, справедливую для обычной однородной системы, получим для F следующее:

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \nabla\Phi \cdot \nabla F = 0. \tag{1}$$

Если сохранить величину давления на контурах постоянной, система будет обладать, очевидно, постоянной последовательностью эквипотенциальных поверхностей и линий тока.

Если теперь ввести в анализ ряд ортогональных криволинейных координат, например,

$$\left.\begin{gathered} u = u(x, y, z); \quad v = v(x, y, z); \quad w = w(x, y, z) \\ \nabla u \cdot \nabla v = \nabla u \cdot \nabla w = \nabla v \cdot \nabla w = 0 \end{gathered}\right\} \tag{2}$$

$\nabla\Phi \cdot \nabla F$ принимает вид:

$$\nabla\Phi \cdot \nabla F = \frac{\partial\Phi \cdot \partial F}{\partial u \cdot \partial u} |\nabla u|^2 + \frac{\partial\Phi \cdot \partial F}{\partial v \cdot \partial v} |\nabla v|^2 + \frac{\partial\Phi \cdot \partial F}{\partial w \cdot \partial w} |\nabla w|^2. \tag{3}$$

Отсюда, если одну из последовательностей поверхностей, например, u, принять как последовательность эквипотенциальных поверхностей $\Phi = \text{const}$, то $\nabla\Phi \cdot \nabla F$ будут приведены к форме:

$$\nabla\Phi \cdot \nabla F = \frac{\partial F}{\partial u} |\nabla u|^2.$$

При данной системе координат уравнение для F можно получить из следующего выражения;

$$\frac{\partial F}{\partial t} - |\nabla u|^2 \frac{\partial F}{\partial u} = 0, \tag{4}$$

где $|\nabla u|^2$ следует выразить в величинах u, v, w. Интегрирование уравнения (4) приводит к следующему выводу:

$$F = at + a \int \frac{du}{|\nabla u|^2} + g(v, w) = \text{const}, \tag{5}$$[1]

[1] Разумеется, любая функция правой стороны уравнения (5) будет также удовлетворять (4), но так как результирующая функция должна равняться константе, то не будет ошибки в обобщении, если принять аргумент этой функции равным константе.

где g — произвольная функция, подобранная таким образом, чтобы F приняло свою начальную форму при $t=0$ (α можно принять всегда за единицу). Тогда все последующее прохождение частиц, лежащих первоначально на этой линии, можно найти построением уравнения (5) для последовательных значений t.

Теперь перейдем к описанию двух задач, имеющих практический интерес и непосредственно вытекающих из этой теории. Рассмотрение их будет ограничено для простоты двухмерным пространством. В этом случае можно принять криволинейные координаты как эквипотенциальные кривые $\Phi=\text{const}$ и линии тока $\Psi=\text{const}$. Уравнение (5) можно тогда написать в следующей форме:

$$F(\Phi, \Psi)=t+\int \frac{d\Phi}{[\nabla\Phi]^2}+g(\Psi)=\text{const}. \tag{6}$$

6. Движе́ние линейного контура в единичную скважину. Рассмотрим в качестве первого примера случай продвижения в единичную скважину группы частиц, лежащих первоначально на линейном источнике (см. фиг. 35), причем сам линейный источник находится в бесконечности. Это положение соответствует идеализированному заводнению нефтяного резервуара наступающей краевой водой. Резервуар содержит только одну скважину, которая эксплоатируется исключительно при водонапорном режиме и расположена вблизи контура краевой воды. Из теории сопряженных функций (гл. IV, п. 8) известно, что распределение эквипотенциальной линии и линии тока для поставленной задачи может быть получено из функции комплексной переменной:

$$\Phi+i\Psi=q\ln\frac{z-id}{z+id}+\Phi_0, \tag{1}$$

которая представляет собой комплексный потенциал, обязанный стоку в точке $(0, d)$ и его отрицательному отображению в точке $(0, -d)$. Константа q дает напряжение источника или стока, а Φ_0 представляет собой значение потенциала в положении „фронтального“ движения $y=0$.

Разлагая уравнение (1) на действительную и мнимую части, легко найти, что

$$\left.\begin{aligned}\Phi&=\frac{q}{2}\ln\frac{x^2+(y-d)^2}{x^2+(y+d)^2}+\Phi_0;\\ \Psi&=q\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{-2dx}{x^2+y^2-d^2}\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Далее, из теории сопряженных функций следует, что [уравнение (3), гл. IV, п. 8]

$$|\nabla\Phi|^2=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{i\partial\Psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\frac{i\partial\Psi}{\partial x}\right)=$$
$$=\left|\frac{2qid}{z^2+d^2}\right|^2=\frac{4d^2q^2}{(x^2+d^2-y^2)^2+4x^2y^2}. \tag{3}$$

Вводя теперь обозначение

$$\frac{\Phi_0-\Phi}{q}=\eta;\qquad\frac{\Psi}{q}=\xi;\qquad\frac{x}{d}=x;\qquad\frac{y}{d}=y. \tag{4}$$

Уравнение (2) можно переписать:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+1&=2y\ \operatorname{cth}\eta \\ x^2+y^2-1&=-2x\operatorname{ctg}\xi \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

так что,

$$x=\frac{\sin\xi}{\operatorname{ch}\eta\pm\cos\xi}\ ; \qquad y=\frac{\operatorname{sh}\eta}{\operatorname{ch}\eta\pm\cos\xi}\ . \tag{6}$$

Примем линию тока $\Psi=0$, лежащей вдоль оси y-ов между скважиной и фронтальным движением воды, откуда следует условие использования положительного знака. Подставляя затем уравнение (6) в (3), найдем:

$$|\nabla\Phi|^2=\frac{q^2}{d^2}(\operatorname{ch}\eta+\cos\xi)^2. \tag{7}$$

Прилагая полученное выражение к уравнению (6), гл. VIII, п. 5, и интегрируя его, получим в результате:

$$F(\eta,\ \xi,\ t)=t-\frac{d^2}{q\sin^2\xi}\times$$

$$\times\left[\frac{\operatorname{sh}\eta}{\cos\xi+\operatorname{ch}\eta}-2\operatorname{ctg}\xi\operatorname{tg}^{-1}\operatorname{tg}\frac{\xi}{2}\operatorname{th}\frac{\eta}{2}\right]+g(\xi)=0. \tag{8}$$

Если первоначальное положение линии с интересующими нас частицами представлено осью x-ов, т. е. кривая $y=0$, мы должны иметь $g(\xi)=0$. Тогда конечный результат определится из выражения:

$$t=\frac{d^2}{q\sin^2\xi}\left[\frac{\operatorname{sh}\eta}{\cos\xi+\operatorname{ch}\eta}-2\operatorname{ctg}\xi\operatorname{tg}^{-1}\operatorname{tg}\frac{\xi}{2}\operatorname{th}\frac{\eta}{2}\right]. \tag{9}$$

Вдоль оси y-ов, т. е. $\xi=0$, уравнение (9) будет неопределенным. Обычные методы расчета дают для него решение:

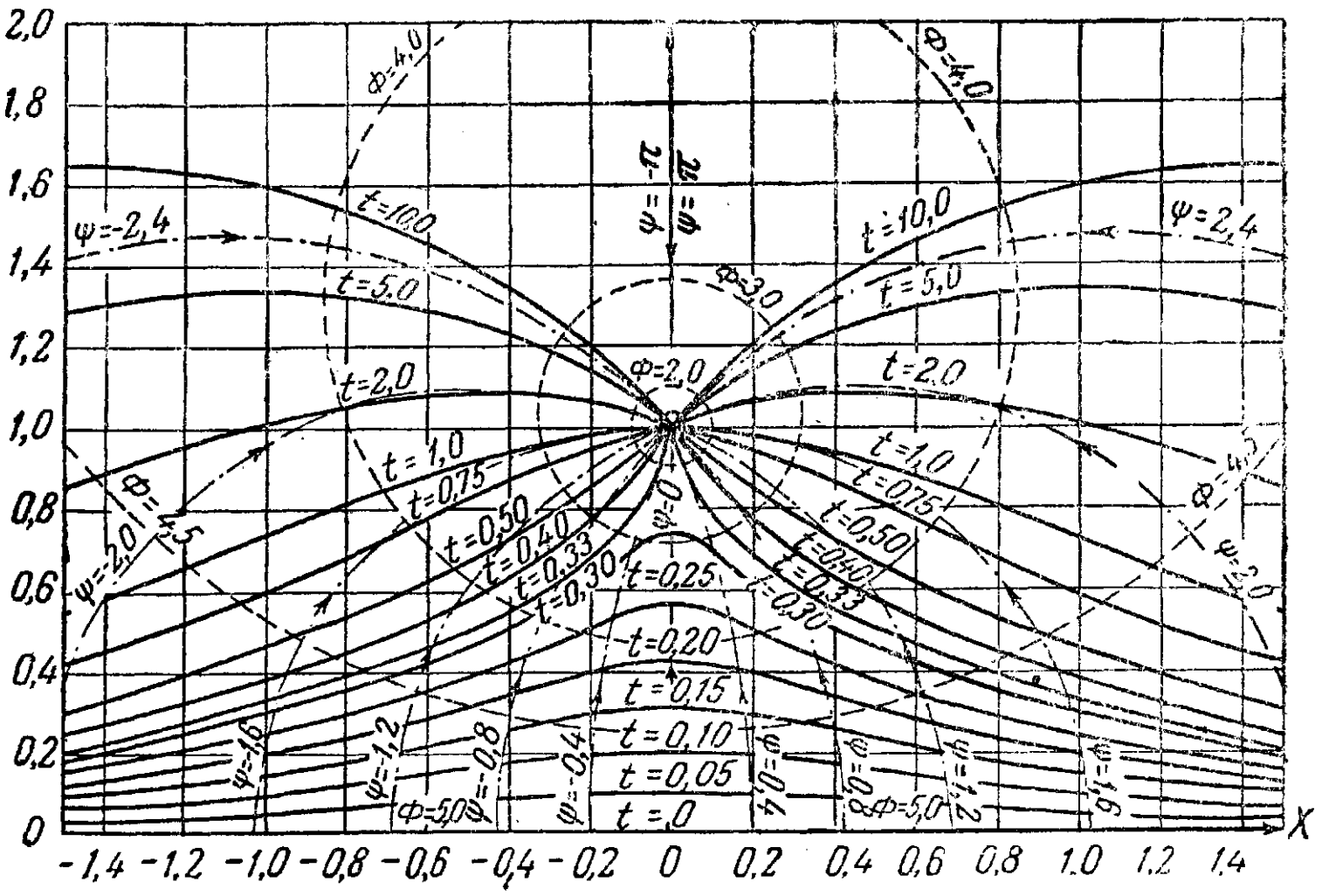
$$t(x=0)=\frac{d^2}{q}\frac{\operatorname{th}\eta/2}{6}\left(3-\operatorname{th}^2\frac{\eta}{2}\right)=\frac{yd^2}{6q}(3-y^2). \tag{10}$$

На фиг. 174 в декартовой системе координат дано построение кривых $t=\text{const}$, принимая $d=q=1$. В начальный момент линия частиц, чей путь прослеживается нами, лежит на оси x (линейный контур движения). Потенциал пути для удобства принят $\Phi=5{,}0$, что соответствует допущению $\Phi_0=5{,}0$. Остальные эквипотенциальные линии $\Phi=\text{const}$ и линии тока $\Psi=\text{const}$, установленные согласно уравнению (5), начерчены пунктирными линиями. Легко убедиться, что эта фигура представляет собой систему взаимно ортогональных окружностей с центрами, лежащими соответственно на оси y и x.

Как это можно заранее предвидеть, кривые $t=\text{const}\leqslant{}^1/_3$ имеют максимальные координаты вдоль оси y. Это обозначает просто, что частицы вблизи оси y-ов движутся быстрее по сравнению с более удаленными от нее. Вполне понятно, что это обстоятельство является прямым следствием повышенных градиентов потенциала вдоль оси y. По мере того, как частицы приближаются к скважине в $y=1$, они движутся в областях с повышенными градиентами и их скорости непрерывно увеличиваются. Максимум прироста значений t становится

все более и более отчетливым, пока в предельном случае, когда $t = 1/3$, частицы вдоль оси y испытывают столь большие градиенты, что кривые времени будут иметь серповидный вид по мере того, как первая частица из лежавших первоначально на линии $y = 0$ поступает в скважину.

Поскольку кривая $t = \text{const}$ проходит через точку схождения $y = 1$, все последующие кривые также пройдут через эту точку, так как все



Фиг. 174. Процесс развития линии частиц жидкости, по мере того как они выходят из бесконечного линейного источника и движутся в однородной среде по направлению к изолированному стоку (скважине):

$\Phi = \text{const}$ — эквипотенциальные линии; $\Psi = \text{const}$ — линии тока.

линии тока должны заканчиваться в этом месте. С другой стороны, эта точка схождения остается фиксированной, а потому все остальные точки, расположенные вдоль кривых $t = \text{const}$, должны следовать линиям тока, и кривые для $t > 1/3$ должны снова выполаживаться вблизи оси y. Для высоких значений t они будут следовать линиям тока даже выше точки (0,1) и образовывать пересечение кривых в направлении, противоположном соответственному значению для $t = 1/3$. Рассматривая фиг. 174, на полученных кривых можно подтвердить довольно тщательно представленное положение.

Наконец, если приложить полученный анализ к системе, имеющей размеры, встречающиеся на практике, то интересно отметить порядок рассматриваемых величин. Так, из уравнения (9) становится ясным, что если линейный контур движения находится на расстоянии d от скважины и суммарная разность давлений $-\Delta p$, то представленные в системе интервалы времени определятся из выражения:

$$t = \frac{fd^2 \mu t}{k \Delta p} \ln \frac{2d}{r_w}, \qquad (11)$$

где t — время, которое было принято на фиг. 174; r_w — радиус скважины; k — действительная проницаемость песчаника; f — его пористость; μ — вязкость жидкости. Отсюда, если $f=0{,}20$, $\mu=1$ сантипуаз, $k=1$ дарси, $d=152{,}5$ *м*, $r_w=0{,}075$ *м* и $\Delta p=47{,}6$ *кг/см*^{2}; время $t=\frac{1}{3}$ для линии частиц, впервые достигающих скважины, будет равняться

$$\bar{t}=31{,}2 \text{ дня.}$$

Что же касается площади, пройденной линией частиц за время, в течение которого они впервые достигли эксплоатационной скважины, следует просто заметить, что эта площадь будет равняться суммарному расходу, покидающему движущий источник, или поступающему в эксплоатационную скважину в течение этого интервала времени, деленному на пористость среды. Так, согласно уравнению (2) расход, поступающий в скважину, на единицу мощности песчаника найдется из следующего выражения:

$$Q=2\pi r_w\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{r_w}=2\pi q=\frac{2\pi k\Delta p}{\mu\ln\frac{2d}{r_w}}\,, \tag{12}$$

которое в комбинации с уравнением (11) дает значение суммарной площади, промытой в течение времени $t=\frac{1}{3}$, из следующего равенства:

$$A=\frac{Q\bar{t}}{f}=\frac{2\pi d^2}{3}\,. \tag{13}$$

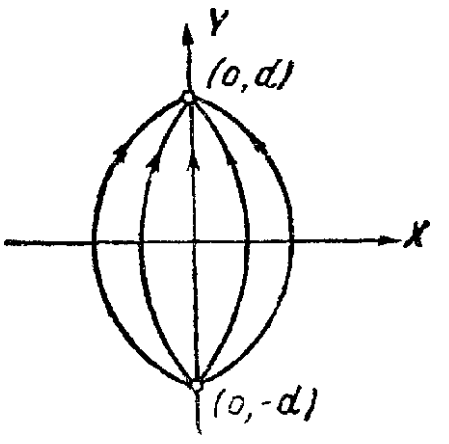
Таким образом, при достижении частицами жидкости скважины, которая находится по сравнению с другой скважиной на двойном расстоянии от движущего линейного контура, пройденная площадь будет в 4 раза больше. В соответствующей задаче реального продвижения воды уравнение (13) дает, очевидно, объем замещенной в пласте или добытой из скважины нефти ранее, чем вода достигнет забоя этой скважины, при допущении, что отсутствует задержка нефти в пласте и что процесс водной репрессии был полноценным.

7. Прямое перемещение воды между двумя скважинами. В качестве второго примера приведем математическую обработку задачи непосредственной водной репрессии, ограниченной двумя скважинами, расположенными в бесконечном двухразмерном резервуаре. Это обозначает, что мы проследим линию частиц жидкости, выходящих из „нагнетательной“ или „водяной“ скважины, расположенной в точке $(0,-d)$ и движущихся по направлению к эксплоатационной скважине в $(0,d)$, (фиг. 175). Как и в предыдущем случае, мгновенные пути, которые создаются частицами при движении, в реальной задаче о водной репрессии будут соответствовать поверхностям раздела вода—нефть в соответствующие же мгновения, за исключением, разумеется, внесения необходимой поправки, на разницу в величине вязкости между нефтью и водой. Последним фактором в рассматриваемой задаче мы пренебрегаем. После небольшого рассмотрения можно заметить, что распределение потенциала в поставленной задаче, будет аналогично тому, что мы имели при движении линейного контура в скважину. Как показывает уравнение (1), гл. VIII, п. 6, распределение потенциала в по-

следнем случае представляет собой не что иное, как распределение его между источником и стоком, симметрично расположенным относительно линии „перемещения“. Поэтому в данном случае можно применить предыдущий анализ вплоть до уравнения (8), гл. VIII, п. 6. Тогда особенность, характеризующая поставленную задачу, будет входить только в формулировку начальных условий, т. е. вместо требования, чтобы при $t=0$ линия частиц лежала на оси x, необходимо, чтобы при $t=0$ частицы только выходили из „водяной“ скважины в $(0,-d)$. В частности, вводится требование, чтобы

$$\eta=\eta_0 \quad \text{при} \quad t=0,$$

где η_0 — эквипотенциаль, являющаяся окружностью, вокруг нагнетательной скважины или даже с нею совпадающая. При этом требовании можно определить $q(\xi)$ в уравнении (8), гл. VIII, п. 6, таким образом:



Фиг. 175. Схема непосредственного перемещения жидкости между двумя скважинами.

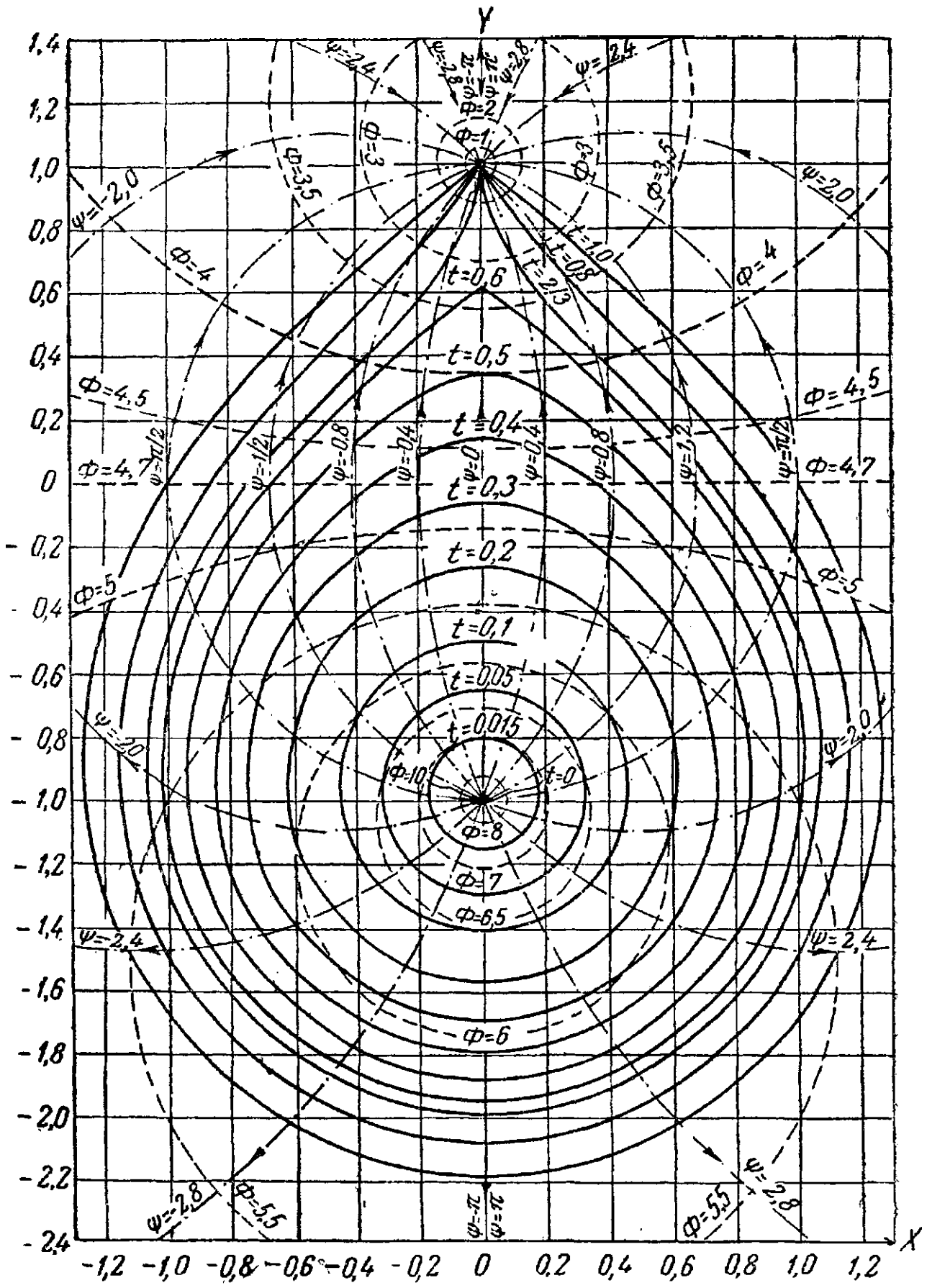
$$t=\frac{d^2}{q\sin^2\xi}\left(\frac{\operatorname{sh}\eta}{\operatorname{ch}\eta+\cos\xi}-2\operatorname{ctg}\xi\operatorname{tg}^{-1}\operatorname{tg}\frac{\xi}{2}\operatorname{th}\frac{\eta}{2}\right)-$$

$$-\frac{d^2}{q\sin^2\xi}\left(\frac{\operatorname{sh}\eta_0}{\operatorname{ch}\eta_0+\cos\xi}-2\operatorname{ctg}\xi\operatorname{tg}^{-1}\operatorname{tg}\frac{\xi}{2}\operatorname{th}\frac{\eta_0}{2}\right). \qquad (1)$$

На фиг. 176 уравнение (1) представлено в виде диаграммы для констант $d=q=1$ и $\eta_0=-\operatorname{sh}^{-1}\cdot 100$. Это налагает условие, что начальное положение линии частиц является эквипотенциальной окружностью с радиусом, составляющим $^1/_{200}$ расстояния между скважинами. Возможно, что наиболее удивительной особенностью этих кривых на представленной фигуре является их небольшое отклонение от полной радиальной симметрии. Хотя кривые в действительности обладают овальной формой, но остроконечность продвигающегося фронта линии частиц становится заметной, когда частица на оси y центровой линии между скважинами достигнет середины расстояния между последними. Даже при $t=^2/_3$, когда путь частицы впервые достигает эксплоатационной скважины и частица на центровой линии уже прошла вперед все расстояние, разделяющее скважины, удаленный фронт кривой прошел не более половины этого расстояния, хотя он и двигался непрерывно в областях с постепенно уменьшающимися градиентами.

Причина этого относительно небольшого отклонения кривых $t=\text{const}$ от радиальной симметрии становится понятной, если обратить внимание на природу распределения потенциала в системе, представленного на фиг. 176 пунктирными кривыми $\Phi=\text{const}$. Так, для $t\leqslant{}^1/_3$, когда все частицы находятся еще ниже середины линии $y=0$, и по мере того, как они удаляются от нагнетательной скважины, все частицы встречают постепенно уменьшающиеся градиенты. Более того, эквипотенциальные линии остаются приближенно концентричными по отношению к нагнетательной скважине на значительном расстоянии от нее. Поэтому в процессе первого периода перемещение линии частиц происходит в потенциальном поле с почти полной радиальной симметрией.

Нарушение, которое имеет место, является простым следствием диференциального изменения между градиентами вдоль линий тока $\Psi \sim 0$ вблизи оси y и линий тока, находящихся в отдалении от последней. С другой стороны, когда $t > {}^1/_3$, частицы вблизи оси y пере-



Фиг. 176. Процесс развития кольца частиц жидкости, по мере того, как они выходят из источника и движутся в однородной среде по направлению к стоку;

Φ = const — эквипотенциальные линии; Ψ = const — линии тока.

секают серединную линию и вступают в поле с повышенными градиентами. В это время частицы, удаленные от оси y, все еще движутся в областях с пониженными градиентами. Частицы, находящиеся поверх оси x, получают ускорение, а частицы, которые находятся ниже оси x, все еще запаздывают. В результате этого начинает развиваться факти-

ческое нарушение симметрии. Однако в это время площадное „распространение" кривых становится уже таким большим, что максимальное линейное нарушение, которое можно получить за время, в течение которого будет достигнута движущимися частицами эксплоатационная скважина, дается отношением 2 : 1. Порядок величин фактических интервалов времени, которые даются значениями t на фиг. 176, можно получить для поставленной задачи из выражения:

$$\bar{t} = \frac{2fd^2\mu t}{k\Delta p} \ln \frac{2d}{r_w}, \qquad (2)$$

где принятые обозначения те же, что были взяты для уравнения (11), гл. VIII, п. 6. Отсюда, если $k = 1$ дарси; $f = 0{,}2$; $\mu = 1$ сантипуаз; $2d = 152{,}5$ *м*; $r_w = 0{,}075$ *м*; $\Delta p = 47{,}6$ *кг/см²*; $\bar{t} = 42{,}9\,t$ дней, так что $t = {}^2/_3$ дает величину $\bar{t} = 28{,}6$ дней для линии частиц, впервые достигающих эксплоатационной скважины. Сравнивая этот вывод с гл. VIII, п. 6, видим, что в данном случае жидкости потребуется меньше времени, чтобы пройти между двумя скважинами, по сравнению с движущимся линейным контуром и скважиной, находящихся на таком же расстоянии между собой, как и система двух скважин, причем жидкости в обоих случаях движутся при одном и том же перепаде давления. Наконец, можно показать, что площадь, пройденная линией частиц за то время, что они впервые достигнут эксплоатационной скважины, может быть рассчитана путем, аналогичным примененному в последнем разделе, и дана выражением:

$$A = \frac{Q\bar{t}}{f} = \frac{4\pi d^2}{3}. \qquad (3)$$

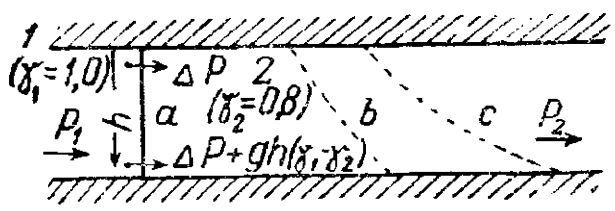
Можно подвергнуть аналитической обработке и более сложные системы, но все же их более легко изучать с помощью электролитической модели. Так как более сложные практические системы включают в себя группы или сетки скважин, отложим рассмотрение этих моделей до ближайшей главы. С другой стороны, мы должны вернуться к первоначальной проблеме продвижения воды и посмотреть, какие можно ожидать изменения при введении в вышеприведенный идеализированный анализ таких факторов, как сила тяжести и различие в вязкости между двумя жидкостями.

8. Влияние силы тяжести на геометрическую форму продвигающейся поверхности раздела. Частные примеры, которые мы подвергли детальной математической обработке в последних нескольких разделах, были взяты двухразмерными. Это обстоятельство налагает условие, если песчаник имеет даже значительную мощность, то динамические условия в нем являются совершенно аналогичными во всех плоскостях, параллельных напластованию или же плоскости, выбранной нами в качестве маркирующей. Отсюда вытекает непосредственный вывод, что во всех проблемах, связанных с продвижением воды, которые рассматривались нами, поверхность раздела вода—нефть должна быть совершенно вертикальной и перпендикулярной маркирующей плоскости. Однако такие поверхности раздела могут существовать только

в том случае, если допустить одинаковые плотности для нефти и воды, т. е. условие, которого, повидимому, невозможно добиться практически. Количественный анализ этой проблемы исключительно труден. Однако с качественной стороны следующие положения могут показать общее влияние силы тяжести на конфигурацию системы с продвижением краевой воды.

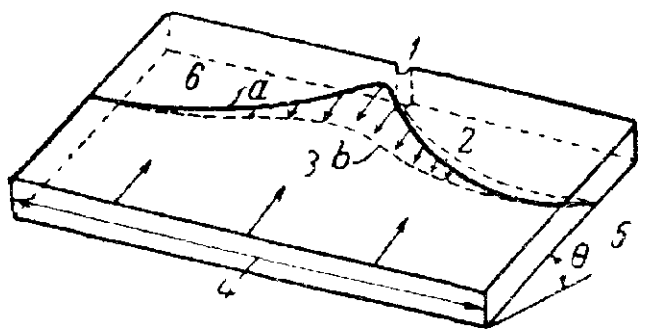
Фронт продвижения в общей системе двух жидкостей в результате воздействия силы тяжести подвержен двум видам нарушения: 1) принятая в допущении вертикальная стенка воды имеет тенденцию выполаживаться в горизонтальную поверхность; 2) в наклонно падающем продуктивном горизонте будет иметься тенденция пресечь „языкообразование", так что весь фронт будет иметь тенденцию продвигаться вперед вдоль линий, параллельных контурам структуры.

Рассматривая более детально случай (1), ясно, что если существует разница в величине плотности —0,2 между нефтью и водой, то принятая вертикальность фронта создает такие условия, как если бы фронт ограничивал жидкость с плотностью 0,2, двигающуюся



Фиг. 177. Схема эффекта силы тяжести при горизонтальном линейном продвижении.

1 — вода; *2* — нефть.



Фиг. 178. Схема влияния силы тяжести на продвижение жидкостей, имеющих наклон.

1 — скважина; *2* — градиенты силы тяжести; *3* — вода ($\gamma_1 = 1{,}0$); *4* — фронтальное продвижение; *5* — падение пласта; *6* — нефть ($\gamma_2 = 0{,}2$).

вперед через пористую среду. Так обращаясь к системе, показанной на фиг. 177, которая представляет собой линейный пористый канал с давлениями P_1 и P_2, приложенными на его граничных поверхностях, можно принять, что на первоначальном этапе заводнения поверхность раздела вода — нефть *a* является вертикальной плоскостью, которая начинает перемещаться вдоль канала под влиянием перепада давления $(P_1 - P_2)$. Вполне ясно, что разница в плотности жидкостей приведет в результате к возрастанию разности давления с глубиной, и фронт воды будет прогрессировать с большей силой на дне канала по сравнению с верхним его сечением. Так, если первоначально этот фронт был вертикальным, то последующие этапы покажут несколько отличную конфигурацию поверхности раздела вода — нефть, или, как это показано на фигуре, приблизительно в *b* и *c*. Поэтому в однородном пласте всегда следует ожидать появления краевой воды сначала на забое скважины. Однако, рассматривая любую плоскость внутри пласта, мы замечаем, что геометрическая форма продвигающейся воды будет почти аналогичной форме, полученной аналитическим путем в предыдущих разделах.

Нарушение, которое возникает в случае (2), также является следствием разницы в плотности между нефтью и водой и фактически представляет собой более широкую фазу только что рассмотренного нарушения. На фиг. 178 показан участок наклона падающего горизонта

с движущимся линейным контуром по направлению к единичной скважине. Фронт a показывает, что общий вид геометрической формы поверхности раздела вода — нефть будет на позднем этапе таким, как если бы пласт был горизонтален. Вследствие наклона пласта и разницы в плотности между нефтью и водой компонент силы тяжести, равный $g \sin \theta$, действует на частицы воды в приподнятом серповидном контуре вдоль плоскости пласта. Это дает начало образованию эффективного скоростного напора, равного весу столба жидкости с высотой, равной вертикальному превышению частицы в серповидном контуре над общим ненарушенным уровнем и плотностью $\Delta\gamma$, который будет противостоять динамическим градиентам давления, обязанным движению линейного контура, а отсюда стремиться к уничтожению серповидного контура.

В результате будет иметь место менее отчетливое языкообразование, как показывает на фиг. 178 конфигурация b. Чем круче наклон пласта, тем значительнее будет тенденция гашения этого языкообразования и тем ближе будет приближаться фронт воды к горизонтальной поверхности. Из дальнейших рассмотрений становится также ясным, что чем выше отношение градиента силы тяжести к градиенту динамического давления, тем меньше будет тенденция к серповидному или языковидному образованию. Вполне понятно, что это обстоятельство является основной причиной регулирования величины отбора из скважин до обоснованно малых значений дебита (низких градиентов динамического давления), чтобы получить и поддержать более равномерное продвижение воды по пласту.

9. Влияние разницы в величине вязкости между жидкостями с обеих сторон поверхности раздела. Представляет весьма большой интерес рассмотреть природу изменений, которые будут внесены в приведенные идеализированные системы, например, продвижение линейного контура в единичную скважину, или непосредственное продвижение воды между двумя скважинами, если не пренебрегать разницей в вязкости между двумя жидкостями с обеих сторон поверхности раздела. Эти изменения отразятся, очевидно, на геометрической форме поверхности раздела и скорости его продвижения.

Касаясь геометрической формы поверхности раздела, можно сделать общие замечания, что линия частиц не нарушится даже в системе двух жидкостей, если только отдельные ее части не находятся в областях с различными градиентами давления. Так, в случае радиального течения (гл. VIII, п. 4) все частицы на первоначальной окружности подвержены одному и тому же градиенту давления, и поверхность раздела сужи-вается равномерно без всякого нарушения, существует разница в вязкости или нет. Одна только разница в вязкости с обеих сторон поверхности раздела не может сама по себе служить источником нарушений. Скорее всего вязкость может только видоизменить те нарушения, которые создаются колебаниями в градиенте давления. Эти колебания в основном являются следствием геометрии системы. Видоизменения будут возр стать с величиной имеющихся нарушений даже в отсутствии разности вязкостей. В частности, эффект от продвижения воды в нефть с более высокой вязкостью будет сопровождаться увеличением наруше-

ния и заострения „языков“ и „серпов“, которые показаны на фиг. 174 и 176, для системы единичной жидкости. Замещение нефти, имеющей более высокую вязкость, продвигающейся водой будет, повидимому, уменьшать суммарное сопротивление системы, а отсюда увеличивать средние скорости жидкости. Однако рост скоростей будет максимальным вдоль главной оси языкообразования, где большая часть нефти уже была замещена водой. Поэтому диференцированный рост скоростей жидкости углубляет нарушение таким путем, чтобы сделать языкообразование более отчетливым. При этом общий эффект не достигает больших значений, пока поверхность раздела не достигнет соседства с эксплоатационными скважинами, где естественная асимметрия градиентов давления, а отсюда естественное нарушение получают значительную величину.

Точные решения гл. VIII, пп. 3 и 4 показывают природу изменения, которое вызывается разностью вязкости, на скорость продвижения водяного контура. Поступление продвигающейся жидкости пониженной вязкости немедленно начнет снижать общее сопротивление системы и отсюда повысит общую скорость продвижения воды. Порядок величин роста скоростей не будет велик, за исключением того случая, когда нефть замещается водой в областях геометрического схождения. Так, в случае движения линейного контура в единичную скважину (гл. VIII, п. 6) увеличение эксплоатационного дебита и скорости продвижения воды будет невелико до тех пор, пока поверхность раздела не начнет обращаться в серп и подходить к непосредственной близости эксплоатационной скважины. С другой стороны, в случае прямого продвижения воды между двумя скважинами (гл. VIII, п. 7) вытеснение нефти водой из зоны, непосредственно окружающей нагнетательную скважину, сейчас же даст значительно больший текущий дебит по сравнению с тем положением, когда вода обладает такой же высокой вязкостью, что и нефть. Однако этот дебит будет увеличиваться очень медленно в течение большей части последующего процесса перемещения жидкостей и будет резко возрастать снова, когда поверхность раздела придет в тесную близость с эксплоатационной скважиной.

Все эти рассуждения дают лишь качественное представление о природе и конечном эффекте разности в величине вязкости между продвигающейся и вытесняемой жидкостью. При этом следует запомнить, что, рассматривая количественный эффект этого фактора на упрощенную конфигурацию продвижения водяного контура, необходимо различать очень осторожно идеализированное представление, при котором допускается, что продвигающаяся вода полностью вытесняет нефть, первоначально заключенную в песчанике, и фактическое положение, где нефть только частично замещается наступающей водой.

Первый из рассмотренных случаев фактически базируется на допущении полного смешения двух жидкостей, причем пористая среда сохраняется одинаковой до и после водной репрессии. Эффектом продвижения воды будет просто замещение нефти водой, имеющей обычно более низкую вязкость. Однако в действительности вода и нефть не являются ни при каких условиях полностью смешивающимися жидкостями и потому ведут себя совершенно различно по обе стороны раздела, что приводит в результате к задержке песчаником части перво-

начально заключенной в нем нефти, несмотря на отмывающее действие продвигающейся воды. Вполне ясно, что оставшаяся нефть будет снижать эффективную проницаемость затопленной зоны для воды, которая стремится пройти через песчаник. Поэтому в реальной обстановке продвижения контура вытесняющая жидкость не только будет иметь отличную вязкость по сравнению с замещаемой, но затопленная зона получит пониженную проницаемость по сравнению с той, которой еще обладает пласт с первоначально находившейся там жидкостью.

При аналитических подсчетах это снижение первоначальной проницаемости вследствие присутствия в песчанике остаточной нефти можно немедленно перевести в эквивалентный прирост вязкости продвигающейся воды. Этот прирост может быть настолько велик, что с избытком уравновешивает более низкую, как правило, вязкость воды по сравнению с нефтью. Поэтому вполне возможно, что в реальных проблемах продвижения контура эффективная величина κ/μ для заводненной зоны по сравнению с нефтяной зоной будет меньше, несмотря на более низкую реальную вязкость воды. При этих условиях идеализированное представление проблемы, где пренебрегается разницей в вязкости, должно быть видоизменено, чтобы находиться в соответствии с зоной, заводненной жидкостью, имеющей более высокую вязкость. Тогда приведенные выше видоизменения для продвижения жидкости, имеющей пониженную вязкость, станут обратимы, и образование языка или серпа так же, как и скорости продвижения, будет отставать по сравнению с конечными результатами, получающимися заранее для системы, где отсутствует разница вязкости между двумя жидкостями.

В следующей главе будет дано приложение этих общих принципов к практической задаче водной репрессии (флюдинг), где будет подвергнута рассмотрению общая теория многоскважинных систем.

10. Образование водяных конусов. Физические основы теории. Во многих скважинах, как это уже упоминалось в начале настоящей главы, наблюдается явление, известное под термином „образование водяных конусов“. Это явление обычно имеет место, когда скважины эксплоатируются при высоких скоростях откачки, и где вода постепенно, а иногда и внезапно, замещает часть всего дебита нефти и поступает на дневную поверхность вместо последней.[1] Так как вода, имеющая большую плотность по сравнению с нефтью, будет оставаться при статических условиях в подошве песчаника, то ее подъем в нефтяную зону, а отсюда в скважину есть результат динамического эффекта вследствие движения нефти поверх воды. Детальная разработка процесса образования водяного конуса, прорывающегося через нефтяную зону, является настолько сложной проблемой, что теоретический анализ последней становится практически невозможным. Тем не менее, прибегая к известным допущениям[2], можно дать полное математическое решение за-

[1] Это же самое явление можно продемонстрировать на вязких жидкостях в сосудах, свободных от песка. Однако, давая теорию последнего явления, следует скорее обратиться к классической гидродинамике, чем к закону Дарси. Между тем физическая конфигурация и приведенное ниже уравнение (1) будут идентичными, движется ли нефть через песок или нет.

[2] M u s k a t M. and W y c k o f f R. D., A. I. M. E., 114 Pet. Dev. Techn., 144, 1935.

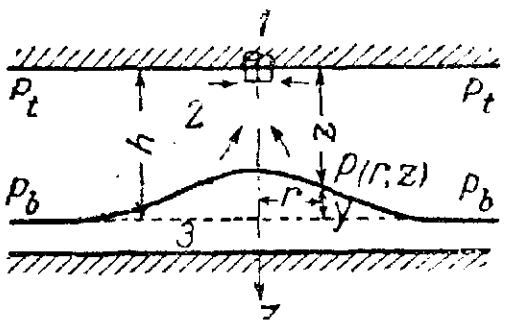
дачи течения перед прорывом воды, а также в течение того отрезка времени, когда вода спокойно залегает под нефтяной зоной, образуя приподнятую или коническую поверхность. Для производства этого анализа идеализируем физическую задачу (фиг. 179), представленную однородным пластом песчаника, где верхняя часть его насыщена нефтью, а нижняя — водой. Мы особенно заинтересованы в тех условиях, при которых нефть поступает в скважину, не принося с собой воды.

Это обстоятельство, очевидно, требует, чтобы вода приняла состояние статического равновесия и отсюда

$$\left.\begin{aligned} p(r,\ z)+\gamma_w g\ (h-z)=P_b \\ p\ (r,\ z)+\gamma_0\, gy=P_b \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

или

где $p\ (r,\ z)$ — давление на поверхности раздела вода — нефть в точке $(r,\ z)$; γ_w — плотность воды; γ_0 — плотность нефти; g — ускорение силы тяжести; h — мощность продуктивного горизонта; P_b — давление резервуара или пласта, замеренное в подошве последнего в точке, удаленной от скважины. Данное рассмотрение вследствие радиальной симметрии задачи будет относиться к вертикальному участку, проходящему через ось скважины.



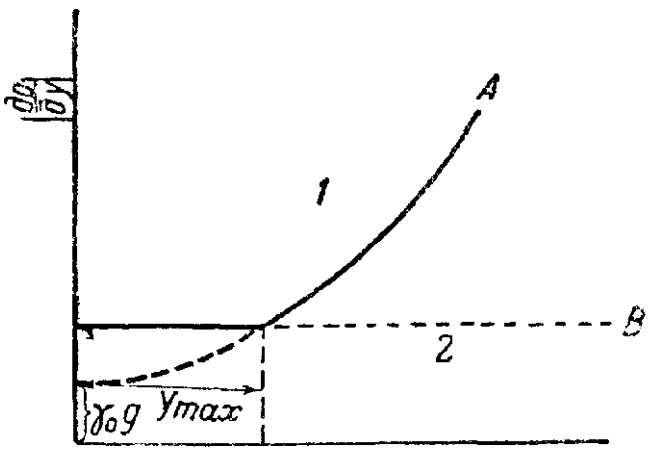
Фиг. 179. Схематическое изображение образования водяного конуса в однородном песчанике.

1 — скважина; *2* — нефть (γ_0); *3* — вода (γ_w).

Уравнение (1) представляет собой необходимое условие равновесия для того, чтобы водяной конус оставался в статическом состоянии ниже нефтяной зоны, где происходит движение жидкости. Физически это значит, если падение давления в любой точке, например P, ниже давления в резервуаре при том же самом уровне, равняется разности гидростатического напора gy $\gamma_w - \gamma_0$), то столб воды, поднимающийся до этой точки, будет находиться в статическом равновесии. Помимо этого обстоятельства сама физическая обстановка показывает, что для поддержания динамического равновесия на поверхности раздела вода — нефть последний должен являться ограничивающей линией тока нефтяной зоны. Однако стабильность этой поверхности раздела и приподнятой под ним конической поверхности определяется природой градиентов давления в непосредственной близости к последней. Поэтому даже элементарное рассмотрение этой задачи вполне подтверждает, что при всех условиях течения водяной конус не может оставаться стабильным в нефтяной зоне. Отсюда на каждую частицу воды, расположенную на поверхности раздела нефть — вода, будет воздействовать присутствующий в непосредственно примыкающей нефтяной зоне градиент давления. Вследствие того, что течение сходящееся — градиент давления в непосредственной близости к скважине резко возрастает. Характер этого возрастания показан кривой A на фиг. 180. С другой стороны, в водяной зоне вследствие наличия ускорения силы тяжести существует постоянный, направленный вниз градиент вертикального давления. Его абсолютная величина показана кривой B на фиг. 180. С этой точки зрения становится вполь-

не очевидным, что по ту сторону высоты, обозначенной через y_{max}, где градиент давления в нефтяной зоне точно равняется диференциалу силы тяжести (направленному в противоположную сторону), и воздействующему на воду, не может иметь места стабильность водяного конуса. Любой небольшой прирост высоты водяного конуса поверх этой точки приведет в конечном результате к прорыву воды в скважину. Фактически фиг. 180 представляет собой количественное определение области стабильности конуса и текущего дебита нефти, соответствующего верхнему пределу — максимуму текущего дебита безводной нефти, что является основной целью всех математических выкладок, сопутствующих рассматриваемым физическим задачам.

Допуская заранее известным $p\,(r, z)$, получаем из уравнения (1) вполне отчетливую кривую, соответствующую $z = z\,(r)$ Эта кривая не может воспроизвести с точностью геометрию поверхности конуса, если только последняя не соответствует линии тока в нефтяной зоне. Однако сложность задачи при ее точном решении делает необходимым принять уравнение (1), достаточно определяющим поверхность конуса, и пренебречь несоответствием, возникающим вследствие отклонения ее от точной линии тока. Тем не менее кажется вполне обоснованным допустить, что это несоответствие потребует лишь небольшой поправки к требованиям уравнения (1), так как последнее дает поверхности конуса, соответствующие во всех отношениях физически обоснованным поверхностям линии тока.



Фиг. 180. Схема условий равновесия вдоль оси водяного конуса.

Ось ординат — аксиальный градиент давления (dp/dy); ось абсцисс — y — расстояние от подошвы нефтяной зоны; *1* — в нефтяной зоне, связанной с потоком; *2* — в статической водяной зоне ($\gamma_w g$).

Уравнение (1) нельзя подвергнуть математической обработке, не прибегая к некоторым допущениям. Так, его нельзя решить относительно поверхности конуса, если только заранее не известна функция давления $p\,(r, z)$ на поверхности водяного конуса в пределах нефтяной зоны. С другой стороны, распределение давления в нефтяной зоне непосредственно связано, хотя бы односторонне, с геометрической формой поверхности статического конуса, который будет реагировать на течение нефти как непроницаемая перегородка. Так как сложная проблема полного одновременного определения поверхности водяного конуса и распределения давления в нефтяной зоне является слишком трудной, для получения точного решения необходимо прибегнуть к известным приближениям. Наиболее простым и, повидимому, единственным допущением, являющимся приемлемым при математической обработке[1] и не

---

[1] Можно заметить, что верхушка водяного конуса, оставаясь поверхностью раздела между двумя жидкостями, согласно условию гидростатического равновесия, уравнение (1), эквивалентна свободной поверхности, которой характеризуются общие гравитационные течения. Поэтому в принципе трактуемый вопрос должен быть подвергнут математической обработке согласно методам, приведенным в главе VI. К несчастью, пространственный (трехразмер-

гребующим бесполезной затраты труда, будет, что функция распределения давления в нефтяной зоне $p\ (r,\ z)$, т. е. в области течения, в действительности остается той же самой в присутствии водяного конуса, что и функция $p\ (r,\ z)$ для случая, где отсутствует конусообразование и где поверхность воды совершенно горизонтальна.

Порядок величины изменения $p(r,\ z)$ вследствие присутствия в системе водяного конуса невелик. Однако природа этого изменения имеет большое практическое значение и ее ясно следует себе представить, если только выводы из только что указанных допущений подверглись правильной трактовке.

Так, сосредоточив свое внимание на вершине водяного конуса, где $r=0$, видим, что можно принять фактическое давление на верхушке этого конуса равным $p(y)$. Далее, представляется весьма удобным допустить давление в пласте P_b постоянным, в то время как высота водяного конуса колеблется в зависимости от изменения давления на скважине p_w. Тогда уравнение (1) принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} p(y)+\gamma_w g y = P_b = \text{const} \\ \text{или} \\ \Phi(y)+(\gamma_w-\gamma_0)\, g y = P_b = \text{const} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

введя в анализ более удобную переменную $\Phi\ (y)=p\ (y)+\gamma_0 g y$, которая представляет собой потенциал скорости в нефтяной зоне, для $k/\mu=1$, плюс константа $\gamma_0 g h$. Тогда, допуская существование стабильного конуса с вершиной, находящейся в y, удовлетворяющего уравнению (2), имеем, что снижение потенциала скважины Φ_w на величину $\Delta\Phi_w$ будет по вполне понятным причинам снижать значение Φ при y. Отсюда должна возрастать сама величина y, чтобы все же удовлетворить уравнению (2). Поэтому рост падения потенциала через песчаник повысит рост конуса y. Можно сказать по этому поводу еще больше. Уравнение (2) налагает условие, что порядок величины изменения y дается выражением:

$$-g\Delta\gamma\Delta y=\Delta\Phi=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{\Phi_w}\Delta y+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\Delta y+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\Phi_w}\right)_y\Delta\Phi_w. \qquad (3)$$

Доля участия в $\Delta\Phi$ первого члена правой части уравнения (3) всецело зависит от превышения точки замера Φ на величину Δy, причем высота конуса и Φ_w остаются фиксированными; второй член сообщает дополнительное изменение Φ, всецело обязанное тому обстоятельству, что конус поднялся в действительности до точки $y+\Delta y$ и благодаря этому y нарушил распределение потенциала для высоты конуса; последний член представляет собой прямой эффект от изменения потенциала скважины

ный) характер задачи конусообразования не дает возможности приложить точную аналитическую процедуру, базирующуюся на теории преобразования сопряженных функций. Поэтому для получения решения следует обратиться к непосредственно эмпирическим способам, описанным, например, в гл. VI, п. 18, для радиальных гравитационных течений В этом случае задача конусообразования является точной обратной постановкой задачи, за исключением присутствия поверхности фильтрации в обычном гравитационном течении, или же следует обратиться к рассматриваемой здесь приближенной аналитической процедуре.

Φ_w, которое сообщает начало подъему конуса от положения y; наконец, $y_w - \gamma_0$ заменяется через $\Delta\gamma$.

Если верхушка конуса стабильна при y, нефть при y может не иметь направленной вверх скорости. Отсюда

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{\Phi_w} = 0. \tag{4}$$

Тогда из уравнения (3) следует, что

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \Phi_w}\right)_y \left| \Delta\Phi_w \right| = \left[\Delta\gamma + \frac{1}{g}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\right] g\,\Delta y. \tag{5}$$

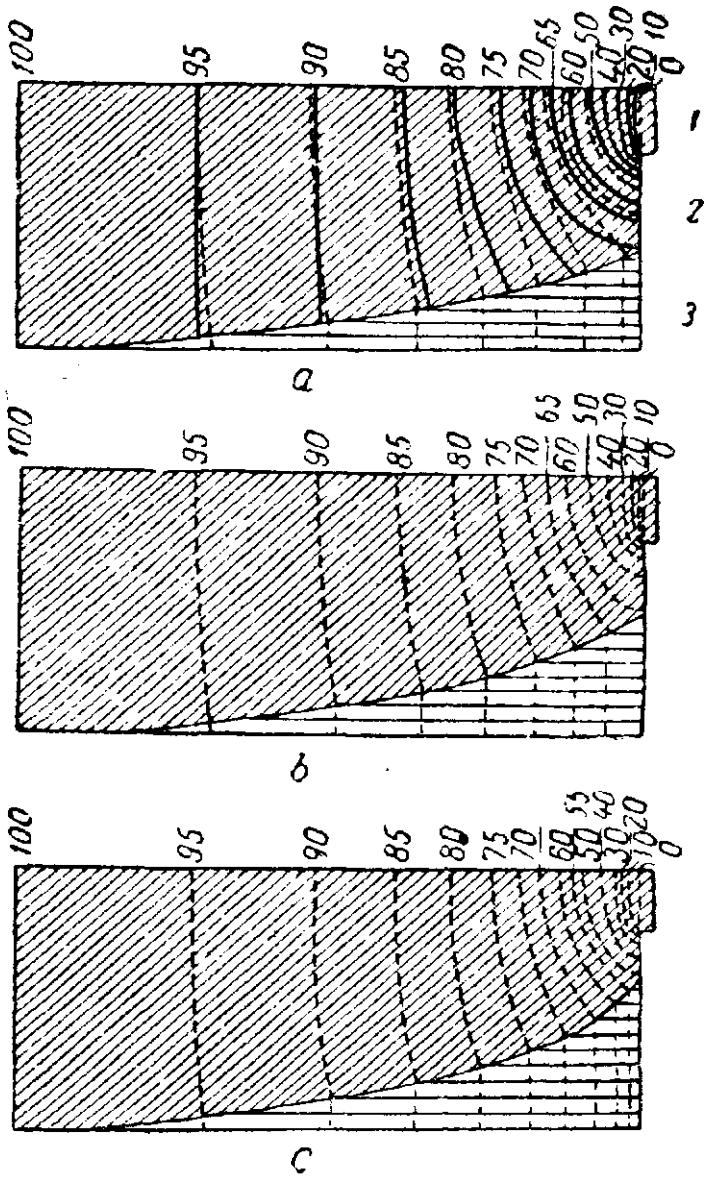
Вполне понятно, что при этих условиях $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \Phi_w}\right)_y$ будет всегда больше нуля. Однако знак при $\partial\Phi/\partial y$ не будет уже таким определенным, хотя соображения качественного порядка косвенно показывают, что знак этот должен быть отрицательным. К счастью, на этот вопрос можно дать вполне определенный ответ, обращаясь к электрической модели задачи конусообразования[1]. Такая построенная модель состоит из радиального сектора прессованного картона. К широкой стороне сектора припаяна металлическая пластинка, чтобы получить эффект постоянного потенциала резервуара. У вершины сектора припаян тонкий медный стержень, представляющий собой несовершенную скважину при постоянном потенциале последней, принятом для удобства за нуль. Эквивалент водяного конуса получается простым отрезанием нижней части сектора, регулируя экспериментально его точную форму таким образом, чтобы распределение потенциала на отрезанной поверхности удовлетворяло электрическому тождеству уравнения (2). На фиг. 181 показано распределение потенциала для нескольких высот водяного конуса. Из этого распределения потенциала видно, что величина $\partial\Phi/\partial y$ фактически отрицательна. Более того, эта величина по оси скважины растет по своему значению в зависимости от роста водяного конуса.

Возвращаясь к уравнению (5), можно вывести на этом основании заключение, что член, заключенный в скобки $\left[\Delta\gamma + \frac{1}{g}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\right]$, будет непрерывно уменьшаться с ростом высоты конуса, пока он окончательно не превратится в нуль. Когда будет достигнуто последнее условие, Δy станет бесконечно большим для конечного $\Delta\Phi_w$. Это обстоятельство, очевидно, обозначает, что водяной конус становится нестабильным. Вместо того, чтобы продолжать расти с конечной скоростью по мере уменьшения Φ_w, конус сразу достигает забоя скважины, так что из последней происходит одновременный отбор воды и нефти. Поэтому должна существовать критическая высота для водяного конуса, вне которой конус не может расти и остается статическим и стабильным, не прорываясь в ствол скважины. Эта критическая высота конуса достигается, когда суммарная разность давлений в песчанике достигает извест-

[1] См. гл. IV, п. 17, в которой дается общее рассмотрение экспериментов, проводящихся с электрическими моделями.

ного критического значения, превзойдя который, конус прорвется в скважину. Текущий дебит, соответствующий критической разности давлений, будет максимальным дебитом нефти, которое можно получить из системы без одновременной добычи воды.

Мы так сильно углубились в подробное рассмотрение доказательства критического и нестабильного положения водяного конуса после достижения им известного максимума высоты для того, чтобы показать отсутствие прямой связи критического характера водяного конуса со сделанными допущениями, которые выводятся из приведенной ниже приближенной теории. Реальным приближением этой теории, как уже было показано, явится полное пренебрежение членом $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)$.



Фиг. 181. Фотографии распределения потенциала на графито-проводящих моделях, представляющих собой радиальные секторы горизонтов, сложенных нефтяными песками, которые подстилаются водой. Эта вода образовала конусы подзабоем скважин. Эквипотенциальные линии исчислены в процентах общего падения потенциала через песчаник.

Сплошные линии на фото *a* представляют распределение потенциала, тогда отсутствует водяной конус.
1 — скважина, *2* — нефтяная зона; *3*— водяной конус

В то же время мы должны сохранить член $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{\Phi_w}$, соответствующий ненарушенному распределению потенциала, которое не только положительно, но фактически быстро уменьшается по мере приближения к забою скважины. Результат будет по крайней мере с качественной стороны тем же самым, что и в полученных ранее выводах, и приведет тем же путем к максимуму и критической высоте водяного конуса. Поэтому полученные приближения развитой нами теории будут влиять отрицательно только на количественную сторону решения. Они не будут обесценивать те общие стороны решения, которые относятся к критическому характеру конуса, а также к зависимости максимума текущего дебита и перепада давления от глубины вскрытия пласта скважиной и мощности песчаника в том случае, когда в системе отсутствует образование конуса.

11. Аналитические выводы. Было показано, что для решения уравнения (1), гл. VIII, п. 10 необходимо знать форму распределения давления $p(r, z)$. Чтобы сделать возможным производство анализа, необходимо пренебречь влиянием конуса на это распределение. Так, допустим, что $p(r, z)$ дается анализом течения между двумя совершенно горизонтальными непроницаемыми контурами в скважину, вскрывшую пласт песчаника от кровли только частично. Раньше чем применить детальное решение к рассматриваемому этапу задачи, что уже было дано в гл. V, п. 3, мы приступим к дальнейшему

развитию уравнения (1), гл. VIII, п. 10. Так, вводя снова вместо давления p потенциальную функцию Φ и дальнейшее обозначение

$$\left.\begin{aligned} \Delta\Phi &= \Phi - \Phi_w = \Phi - \frac{k}{\mu}\, p_w\,(z=0) \\ \Delta P &= P_t - p_w = P_b - \gamma_0 g h - p_w \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

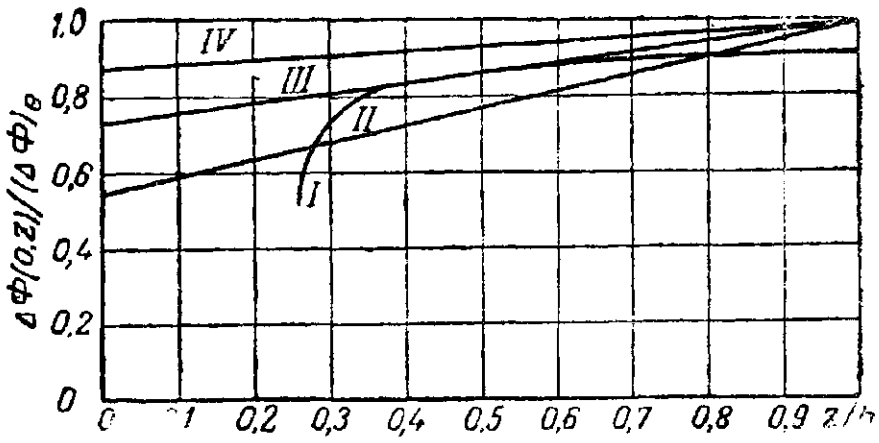
так что ΔP является падением давления между скважиной и внешним контуром песчаника, замеренным в кровле последнего, можем переписать уравнение (1), гл. VIII, п. 10, в следующем виде:

$$\Delta\Phi = \frac{k}{\mu}\,\Delta P - \frac{k}{\mu}\, g\Delta\gamma\,(h-z). \qquad (2)$$

Замечая, что для больших значений r, $\Delta\Phi = \frac{k}{\mu}\,\Delta P \equiv (\Delta\Phi)_e$, уравнению (2) можно придать конечную форму:

$$\frac{\Delta\Phi\,(r,\,z)}{(\Delta\Phi)_e} = 1 - \frac{g\Delta\gamma}{\Delta P}\, h\left(1 - \frac{z}{h}\right), \qquad (3)$$

которая легко интерпретируется как эквивалент уравнения (1), гл. VIII, п. 10. На основании теории, разработанной в гл. V, п. 3, можно найти левую сторону уравнения и построить график для фиксированных значений r как функции z (для $r = 0$ можно принять также кривые, которые приведены на фиг. 80). Тогда решение уравнения (3) для z можно найти из пересечения прямых линий, соответствующих правой стороне уравнения, с кривыми, соответствующими левой стороне. В качестве примера можно взять несовершенную скважину, имеющую 25% вскрытие (9,35 *м* из 37,5 *м*). Примем, что $(\Delta\Phi)_e$ относится к падению потенциала между скважиной и точкой, удаленной на 152,5 *м*, и установим $r = 0$, чтобы получить значение z для верхушки конуса. Тогда можно построить на фиг. 182 левую сторону уравнения (3) в виде кривой. Правая же сторона для трех произвольных значений ΔP будет выражена графически группой прямых линий, наклон которых будет обратно пропорционален ΔP.



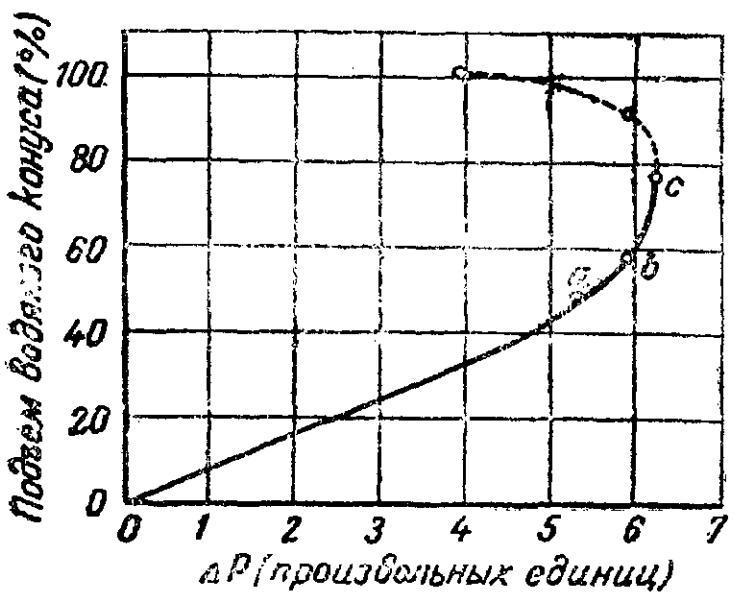
Фиг. 182. Графическое решение уравнения (3), гл. VIII, п. 11, для получения равновесных высот конуса.

Значения z на пересечении прямых линий с кривой *I* будут, очевидно, решениями уравнения (3). Они представляют собой высоты конусов для соответствующих физических констант системы и выбранных значений ΔP, которые удовлетворяют условиям гидростатического равновесия, уравнение (1), гл. VIII, п. 10.

Однако с физической стороны эти два пересечения имеют совершенно отличное значение. Так, при повышенном подъеме конуса $z/h = 0{,}28$ наклон кривой *I* превосходит наклон кривой *II*. Это означает, что при $z = 0{,}28$ градиенты в нефтяной зоне будут больше гидростатического

градиента в водяной зоне. Отсюда, если в системе и существовало бы гидростатическое равновесие при $z = 0{,}28$, это равновесие было бы динамически неустойчивым по отношению к бесконечно малым нарушениям на поверхности конуса.

Поэтому основание конуса при $z/h = 0{,}28$ не играет никакой роли в физике проблемы. Наоборот, основание при $z/h = 0{,}78$ дает физически стабильный конус, так как в этом случае градиент в нефтяной зоне будет меньше градиента водяной зоны. Если увеличивается ΔP, то наклон линий для правой стороны уравнения (3) будет уменьшаться до тех пор, пока для случая кривой *III* линии станут касательными к кривой *I*. Тогда для еще больших значений ΔP не будет иметь места пересечение с кривой *I* или будет отсутствовать стабильная высота конуса. Точка касания кривых *I* и *III* ($z/h = 0{,}48$) дает критическую и максимальную выс ту конуса, возможную для данных r_e, r_w, h и $\Delta\gamma$.



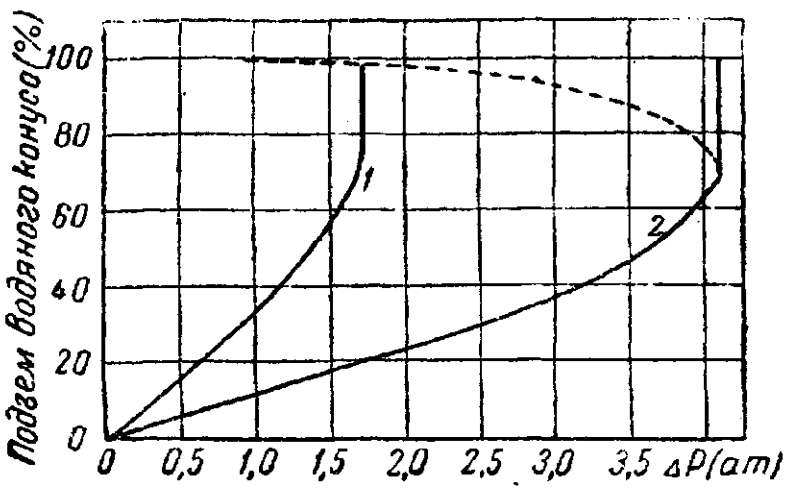
Фиг. 183. Изменение высоты водяного конуса ниже забоя нефтяной скважины с 25% вскрытием пласта в зависимости от перепада давления через песчаник. Данные получены с помощью экспериментов на модели.

a, *b* и *c* — относятся к случаям, показанным на фиг. 181. Общее расстояние между забоем скважины и подошвой нефтяной зоны принимается за 100% подъема водяного конуса.

Вполне очевидно, что поблизости к критическому конусу, очерченному над поверхностью воды, последняя весьма чувствительна к небольшим изменениям давления в пределах примыкающей нефтяной зоны. Приведенный в настоящей главе анализ основывается на распределении давления, ненарушенного присутствием водяного конуса. Фактически это нарушение в распределении давления имеется вследствие существования конуса в рассматриваемой системе. Из последнего раздела следует вспомнить, что ненарушенное распределение давления даст, по крайней мере с качественной стороны, тот же самый эффект, который приведет к образованию критического конуса как и правильное распределение, которое учитывает влияние конусообразования. Действительно, давая пос роение высот конусов, полученных на экспериментальной модели, по отношению к их эквивалентным разностям давлений (в произвольных единицах), можно получить сплошную кривую, показанную на фиг. 183. Точка на конусе высотой 91% была получена из фиг. 181 экстраполяцией вероятного эффекта конусообразования на распределение давления при условии, что конус воды дает подъем 86%. Последняя точка дается на основании наблюдения, что для конуса высотой 100% можно удовлетворить уравнение (1), гл. VIII, п. 10, только в том случае, если суммарная разность давлений равняется допустимой суммарной разности гидростатического напора в системе. Сравнивая результирующую кривую с кривой, приведенной на фиг. 184 и выведенной аналитическим путем, видим, что все наиболее характерные особенности последней фактически подтверждаются на экспериментальных моделях. Проведенные эксперименты показывают, что фактические

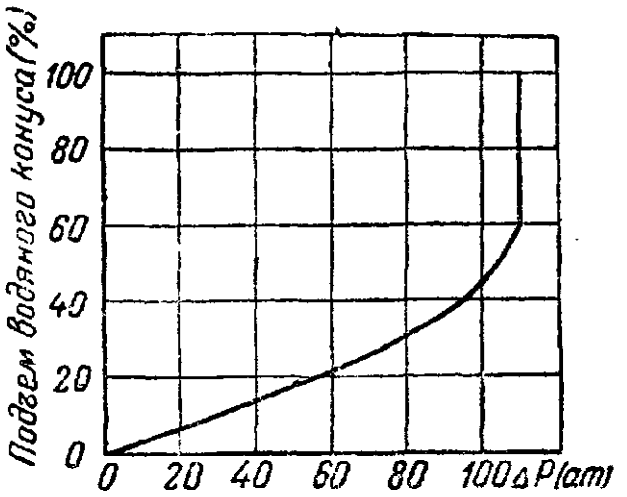
водяные конусы будут иметь значения, несколько более близки е к кри тическим, чем соответствующие конусы, полученные теоретическим путем.

Возвращаясь теперь к дальнейшему развитию аналитической обработки, рассмотрим поведение конусов в системах, имеющих практический интерес. Эта процедура будет заключаться в наблюдении наклонов линий, например кривой *II* на фиг. 182, дающей известное пересечение с кривыми потенциала, например кривой *I*. Эти пересечения представляют собой высоты конуса z/h. Наклон m этих линий вполне опреде-



Фиг. 184. Изменение высот водяного конуса ниже забоя нефтяных скважин с 25 и 50% вскрытием пласта в зависимости от перепада давления ΔP через песчаник.

Общее расстояние между забоем скважины и подошвой нефтяной зоны принимается за 100% подъема водяного конуса. Вертикальные участки представляют собой нестабильные высоты конуса. Пунктирные участки соответствуют нижним пересечениям кривых, представленных на фиг. 182. Мощность песчаника — 37,5 *м*; радиус скважины — 0,075 *м*; радиус контура горизонта — 152,5 *м*; разница в значении плотности вода—нефть составляет 0,3 *г/см*³. *1* — вскрытие пласта — 50%; *2* — вскрытие пласта — 25%.



Фиг. 185. Изменение высоты водяного конуса ниже забоя «несовершенной» нефтяной скважины в зависимости от перепада давления ΔP через песчаник.

Вертикальный участок представляет собой нестабильные высоты водяного конуса. Мощность песчаника — 37,5 *м*; радиус скважины — 0,075 *м*; радиус внешнего контура — 152,5 *м*; разница плотности вода—нефть — 0,3 *г/см*³.

ляется отношением $m = \frac{gh\Delta\gamma}{\Delta P}$. Отсюда можно подсчитать ΔP, если известны m и остальные константы системы. По этим величинам строится график относительно z/h. Такие кривые приведены на фиг. 184 и 185 и соответствуют следующим константам [1]:

$$\Delta\gamma = \gamma_w - \gamma_0 = 0{,}3 \ г/см^3;$$

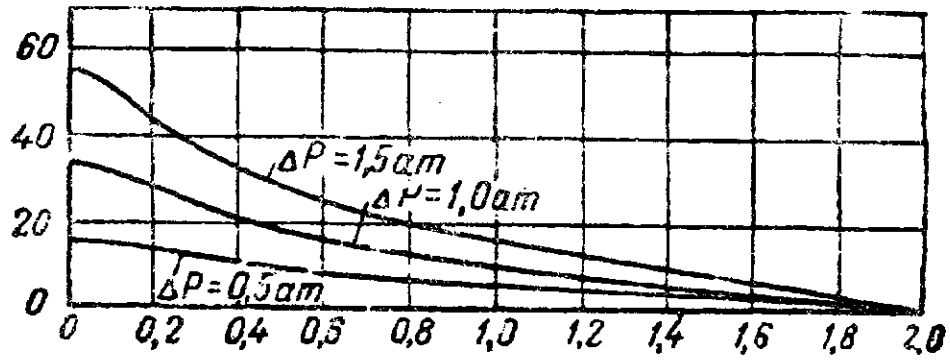
$g = 980$ и эквивалентно 0,0097 *am* на единицу плотности;
$h = 37{,}5$ *м*; r_w — радиус скважины — 0,075 *м*;
r_e = радиус контура резервуара — 152,5 *м*.

Совершенно неудивительно, что перепады давления, необходимые для создания водяных конусов, так малы, как это видно из фиг. 184, если обратить внимание, что столб воды высотой, равной половине мощности песчаника, 37,5 *м* имеет напор менее 2 *am*. Более того, так как ΔP на фиг. 184 и 185 представляют собой перепады давления, заме-

[1] Подробности этих расчетов можно найти в первоначальной работе Маскета и Викова.

ренные в кровле песчаника, то перепадами давления в нефтяной зоне, способными поднять воду, являются эти же величины ΔP плюс гидростатический напор нефти между забоем скважины и подошвой нефтяного горизонта. С другой стороны, относительно большие значения ΔP, необходимые для образования водяного конуса в случае несовершенной скважины, обязаны всецело большой концентрации градиентов давления вблизи последней, когда скважина только вскрывает песчаник. Действительно, градиенты давления вблизи скважины изменяются обратно пропорционально квадрату расстояния от нее.

Поэтому более 100 *ат* из всего перепада давления 107 *ат* (для подъема конуса 54%) может быть потеряно в пределах 1,5 *м* от скважины и только небольшая доля его явится эффективной для подъема воды в конусе. Вертикальные участки кривых показывают, что по ту сторону критических высот, соответствующих точкам касания кривых *I* и *III* (фиг. 182), нет условий для существования физических устойчивых конусов. Пунктирный участок кривой для 25% вскрытия (фиг. 184) представляетс обой верхнее пересечение, например, на кривых *I* и *II* (фиг. 182). Как было предусмотрено заранее, эта кривая согласуется во всех основных своих свойствах с кривой фиг. 183, выведенной из экспериментов на моделях, за исключением только разрыва непрерывности касательной к аналитической кривой при ее критической высоте. Это является следствием пренебрежения возмущением в распределении давления, возникающего всецело от присутствия водяного конуса.



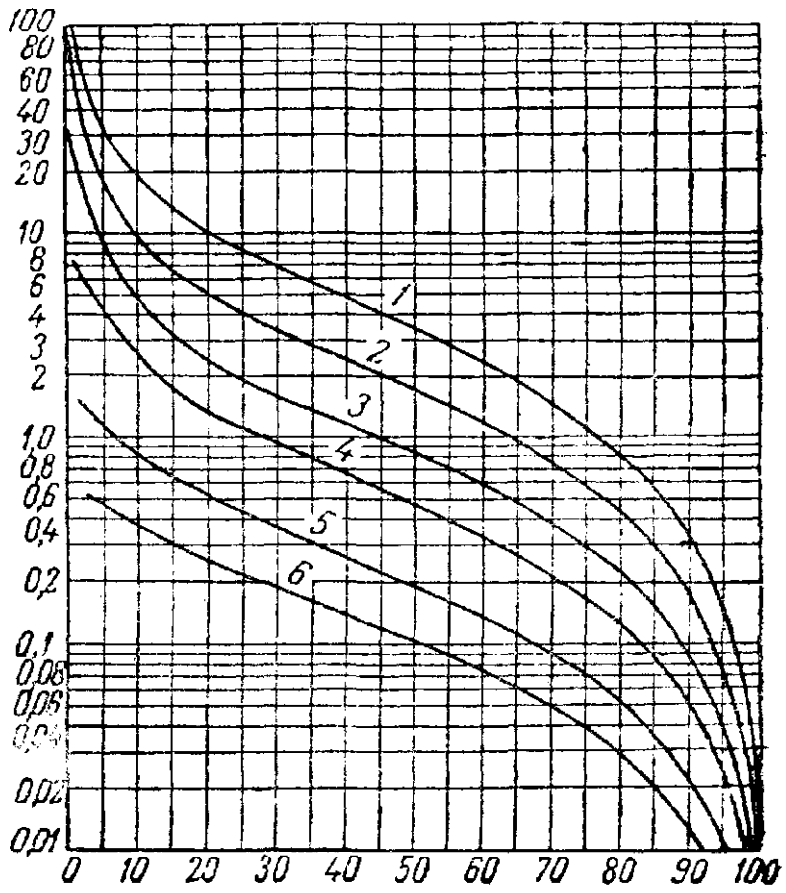
Фиг. 186. Теоретическое поперечное сечение геометрических форм водяных конусов ниже забоя нефтяной скважины с 50% вскрытием песчаника для различных перепадов давления через песчаник; мощность песчаника — 37,5 *м*; радиус скважины — 0,075 *м*; радиус контура нефтяного горизонта — 125,5 *м*; разница плотности нефть — вода — 0,3 $г/см^3$.

Ось ординат—подъем водяного конуса в %; ось абсцисс—расстояние от скважины в единицах мощности песчаника.

Вся вышеприведенная дискуссия, связанная с высотой водяного конуса, относилась к значению последней вдоль оси песчаника, т. е. в области, непосредственно залегающей ниже забоя скважины. Однако следует заметить, что можно произвести все подсчеты совершенно тем же способом для любого расстояния, отступя от скважины, при одном только условии, что кривая *I* (фиг. 182) будет соответствующим образом видоизменена так, чтобы она относилась к вертикальному распределению потенциала на выбранных заранее расстояниях от скважины. Если это проделать для некоторого числа кривых различных радиусов, можно получить графическое представление о геометрической форме водяного конуса построением корней уравнения (3), выведенного нами уже ранее.

На фиг. 186 показаны результаты таких расчетов, проделанных для 37,5 *м* песчаника с глубиной вскрытия 50% и для различных разностей давления в песчанике. Разумеется, фактические геометрические

формы конусов будут получаться вращением кривых на фиг. 186 вокруг вертикальной оси. Эти кривые, зависящие от техники подсчета, не могут быть точными в деталях. Однако все они обладают общей геометрической формой, которую следует ожидать для кривых линий, воспроизводящих поверхность водяного конуса и фактически весьма похожих на кривые, полученные из экспериментов на моделях (фиг. 181). На фиг. 187 даны значения разностей критического давления, необходимого для появления водяного конуса в скважине, и получаемые, как это было показано выше, из решения уравнения (3).



Фиг. 187. Значения максимальных перепадов давления (давление резервуара —забойное давление), которые можно поддерживать на поверхности нефтяного песчаника, не допуская образования водяных конусов, в зависимости от величины вскрытия пласта песчаника и для различной мощности h нефтяной зоны. Радиус скважины— 0,075 *м*; радиус контура продуктивного горизонта 152,5 *м*; разница плотности нефть — вода — 0,3 $г/см^3$.

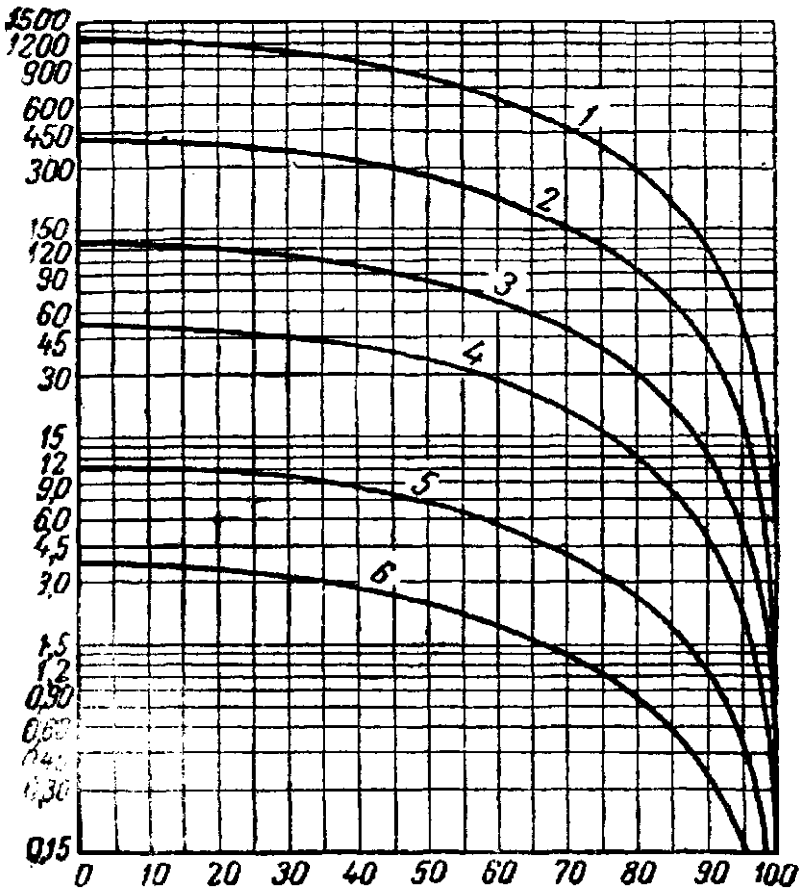
Ось ординат—максимальные перепады давления без образования конусов в *ат*; ось абсцисс — величина вскрытия пласта в %; *1*—h = 60 *м*; *2*—h = 37,5 *м*; *3* — h =22,5 *м*; *4* — h = 15 *м*; *5* — h = 7,5 *м*; *6*— h =4,5 *м*.

Следует заметить, что разность критического давления возрастает очень быстро, особенно для более мощных песчаников с уменьшением глубины вскрытия. Более того, эта разность падает по мере того, как глубина вскрытия пласта достигает 100%, и забой скважины устанавливается вблизи уровня воды. Как и следует ожидать, разность критического давления не только уменьшается с уменьшением мощности песчаника, но влияние этого изменения мощности песчаника становится особенно отчетливым, когда эта мощность падает. С физической точки зрения разности давления и градиенты являются регулирующими факторами, определяющими стабильность водяного конуса. Однако с практической точки зрения быть может наиболее интересным фактом является связь дебита нефти с проникновением воды в скважину. Чтобы найти текущие дебиты соответствующие ΔP на фиг. 187, необходимо приложить только конечные выводы гл. V, п. 4, как они приведены на фиг. 83 и 84, где дано построение эксплоатационной производительности на единицу разности давления для скважин с неполным вскрытием пласта, по отношению к величине вскрытия и мощности песчаника.

На фиг. 188 дано графическое построение полученных таким путем критических или максимальных текущих дебитов. Может быть наиболее интересной особенностью этих кривых является то обстоятельство, что несовершенные скважины позволяют иметь максимальные текущие отборы, не допуская прорыва водяного конуса в скважину. Вполне понятно, что забой несовершенной скважины находится на гораздо большем

расстоянии от водяного горизонта, чем забой скважины с частичным вскрытием пласта. Это обстоятельство будет естественным образом способствовать подавлению конусообразования.

Фиг. 187 действительно показывает, что разности критического давления максимальны для несовершенных скважин. С другой стороны можно ожидать, что очень высокое сопротивление системы несовершенной скважины более чем сбалансирует влияние разрыва между забоем скважины и уровнем воды так, чтобы получить оптимум неравного нулю вскрытия, при котором критический текущий дебит является максимальным по отношению к обоим факторам: малой и большой величине вскрытия пласта. Однако кривые на фиг. 188 показывают, что расстояние забоя скважины от уровня воды является наиболее важным фактором, хотя заметно, что кривые для малой величины вскрытия почти выполаживаются. Для практических целей скважины с величиной вскрытия 15—20% дают фактически те же текущие дебиты безводной нефти, что и весьма малые величины вскрытия пласта. Это явление следует приписать действительно счастливому обстоятельству, так как путем небольших вскрытий пласта можно получить на практике оптимум технологических условий, не прибегая к необходимости иметь несовершенные скважины [1], являющиеся весьма непрактичными с точки зрения использования производительности песчаника.



Фиг. 188. Максимально возможные величины отбора нефти, которые можно получать со скважин без образования водяных конусов, в зависимости от величины вскрытия пласта для различной мощности h нефтяной зоны. Радиус скважины — 0,075 *м*; радиус контура продуктивного горизонта — 152,5 *м*; разница плотности нефть—вода — 0,3 *г/см*³.

Ось ординат — максимальные величины отбора нефти без образования водяных конусов (*м*³/*сутки*); ось абсцисс—вскрытие пласта (%); *1* — h = 60 *м*; *2* — h = 37,5 *м*; *3* — h =22,5 *м*; *4* — h = 15 *м*; *5* — h = 7,5 *м*; *6* — h = 4,5 *м*.

Практическое значение приведенного анализа заключается в том, что он показывает необходимость избегать больших величин вскрытия нефтяного песчаника, если известно, что нижняя часть последнего содержит воду. Этот же анализ показывает далее, если в скважине уже имело место известное конечное вскрытие пласта и существует определенный текущий дебит нефти с водой, поступающей из конуса, можно попы-

[1] Отмечая параллелизм кривых на фиг. 188 по логарифмической шкале, можно показать, что максимальные текущие дебиты Q можно выразить весьма приближенно через $Q = f(\bar{h})\, h^{2,3}$, где $f(\bar{h})$ зависит только от процентного вскрытия пласта $\bar{h}$. Эту формулу можно использовать для подсчета Q из песчаника с мощностью h, несколько иной, чем она была взята для фиг. 188.

таться вполне законным путем исправить создавшееся положение, заливая цементом забой скважины и уменьшая действительную величину вскрытия пласта. Отсюда видно, что образование водяного конуса, начавшееся в нефтяном пласте, не является необходимым постоянным спутником добычи нефти.

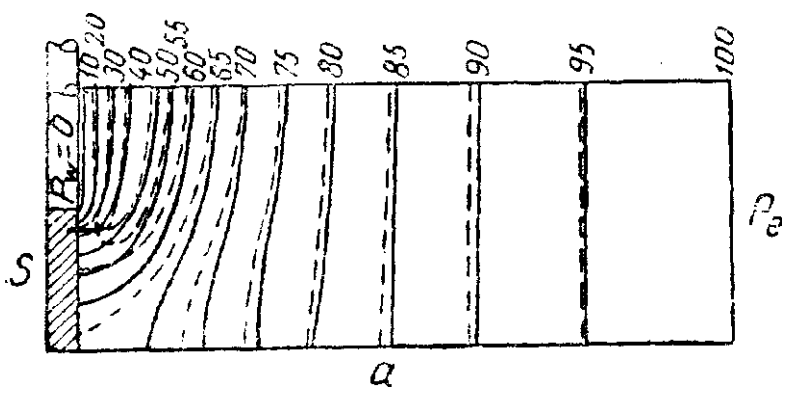
Основными причинами существования конуса обводнения являются условия, чтобы перепад давления между контуром резервуара и точками ниже забоя скважины превосходил гидростатический напор соответствующего столба воды, а также чтобы градиенты динамического давления системы превышали статический градиент, возникающий вследствие разницы в плотности нефти и воды. Отсюда, если забой скважины залит цементом или текущий дебит ее снижен так, что суммарный перепад давления и динамические градиенты являются недостаточными для перекрытия гидростатического напора и градиента силы тяжести, водяной конус может опасть в направлении подошвы пласта.

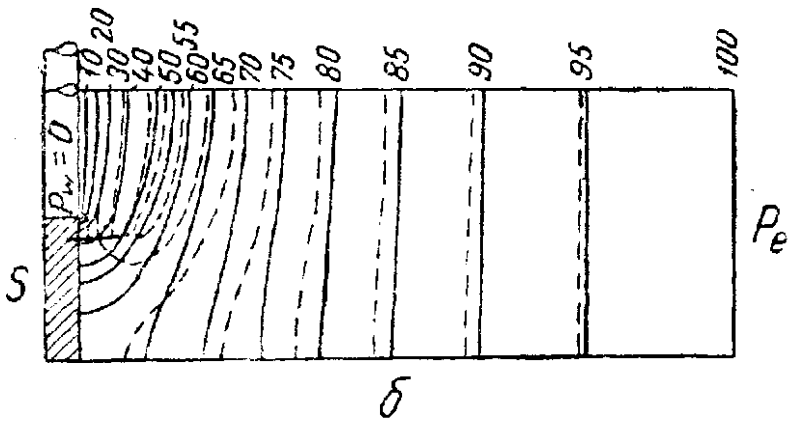
Трудно подсчитать время, которое следует затратить на такие переходные явления, но даже для очень плотных песчаников вполне вероятным кажется, что этот интервал времени измеряется часами. Таким образом, ясно, что, регулируя противодавление на скважине, мы в состоянии контролировать, с известной степенью произвольности, дебит поступающей в скважину воды или стабилизовать добычу нефти при воде, залегающей статически ниже нефтяного горизонта.

12. Подавление водяного конусообразования прослоями глин. Промысловая практика в целом подтверждает полученные в настоящей работе заключения, относящиеся к подавлению водяных конусов уменьшением величины вскрытия пласта скважиной. Однако наблюдения часто показывают, что порядок величины этого эффекта значительно выше, чем это можно ожидать из фиг. 187 и 188.

Так, наблюдали случай, когда заливка забоя на 0,6—0,9 *м* оказывалась достаточной, чтобы устранить почти полностью воду из скважин, которые незадолго до этого эксплоатировались с высоким процентным содержанием воды. В качестве примера можно привести одну скважину из месторождения Восточный Техсас, где 20% содержание воды сменилось на струю чистой нефти после тампонажа нижних 0,6 *м* от первоначальной глубины вскрытия 2,1 *м*. Ясно, что если бы пласт песчаника был строго однороден, как это принимается в приведенной выше теории, изменение в суммарной величине вскрытия от приблизительно 16 до 11% должно иметь очень маленькое влияние на подавление водяного конуса. Поэтому наблюденный в приведенном примере эффект следует отнести к неоднородности условий залегания песчаника. Действительно, разрез этой скважины показывает плотную зону мощностью 0,6 *м*, начиная с 1,2 *м* от кровли продуктивного горизонта, а забой скважины был затампонирован как раз до этой зоны. Вполне понятно, что глинистый прослой, широко развитый на забое скважины, предохранит последнюю от подъема водяного конуса. Однако во многих песчаниках встречается большое количество мелких прослойков глины в виде небольших перебитых линз, включенных в основную массу песчаника. Тогда возникает вопрос, насколько эффективен тампонаж забоев до уровня таких линз, имеющих ограниченные размеры.

Будет очень трудно попытаться дать аналитическое решение этой проблемы, за исключением, быть может, только графического метода. Однако на поставленный вопрос можно дать очень простой ответ с помощью электрической модели течения, которая уже была описана в гл. VIII, п. 10. На фиг. 189 *а* и *б* приведены сплошными линиями эквипотенциальные линии для 50% вскрытия пласта забоем скважины в однородном песчанике, найденные с помощью этой модели. На этой фигуре внешний потенциал принимается для удобства за 100. Непроницаемые глинистые линзы были введены в модель простым прорезыванием щелей ниже забоя скважины в одном случае с радиусом, равным 11,3% от мощности песчаника, а в другом случае с радиусом 20,6% от мощности последнего. Новое распределение потенциала показано пунктирными кривыми.





Фи. 189. Эквипотенциальные линии, полученные из экспериментов на электрической модели, для 50% величины вскрытия в однородном песчанике перед (сплошной контур) и после (пунктирный контур) введения в систему непроницаемых глинисытх линз S:

а—радиус глинистых линз— 11,3% мощности песчаника; *б*—радиус глинистых линз—20,6% мощности песчаника.

С количественной стороны полученное изменение в распределении потенциала, обусловленное прорезями или линзами глин, не может быть использовано. Однако с качественной стороны полученные параметры являются вполне определенными и имеющими полный смысл. Из фиг. 189 ясно, что в присутствии непроницаемых линз градиенты потенциала сконцентрированы и повышаются в верхней части песчаника, а также вблизи края линз. На далеких расстояниях от скважины и в области, расположенной ниже линз, эти градиенты уменьшаются. Однако особо интересным моментом является то обстоятельство, что присутствие линз резко повышает потенциал в области, расположенной под линзами, где вода обладает тенденцией к подъему. Так, для более мелких линз (фиг. 189, *а*), граничная точка в подошве линзы, соответствующая 55% контуру потенциала в однородном песчанике, первоначально лежала на 40% контуре. Для линзы, изображенной на фиг. 189, *б*, эта же самая точка, первоначально расположенная на 40% контуре в присутствии линзы, будет служить оконечностью 65% контуру.

Так как тенденция нарастания водяного конуса в данной точке в основном пропорциональна разности потенциалов между этой точкой и эффективным контуром песчаного резервуара, ясно, что обе эти линзы (фиг. 189) будут соответственным образом снижать тенденцию к конусообразованию до значений порядка 75 и 58% по сравнению с однородным песчаником. Такой конечный результат вполне соответствует изменению отбора при эксплоатации с 20% содержания воды

до чистой нефти. Отсюда становится понятным тот на первый взгляд противоречивый успех глушения водяного конуса забойным тампонированием, который можно объяснить теми же самыми физическими принципами, какими мы обычно объясняем другие стороны этого явления. Вполне ясно, что наиболее эффективным средством закрытия подошвенной воды является тампонаж забоя скважины до уровня одной из более плотных линз, если даже последние имеют весьма ограниченные площадные размеры.

13. Заключение. Залегание вод по соседству с нефтесодержащими песчаниками обычно приводит к появлению одной из двух или совместно обеих проблем общего типа. В первом типе проблем вода проникает в нефтяные песчаники в виде „продвигающейся краевой воды", в результате чего нефтяной песчаник подвергается затоплению. Второй тип проблемы является в широком смысле только вариантом продвижения краевой воды. При этом последняя проникла уже в нефтяной песчаник и благодаря своей большей плотности стремится залечь в его подошве, но динамические градиенты, возникающие вследствие движения нефти в эксплоатационную скважину, превосходят разность плотности между нефтью и водой и приносят последнюю в скважину в виде приподнятого конуса, нарастающего из водного горизонта.

При математическом решении задачи о продвижении краевой воды возникает новый тип задачи о потенциале. Так как вязкость воды отличается от вязкости нефти, то система вода — нефть должна быть сложной, составленной из двух областей различного потенциала, разделенных поверхностью раздела вода — нефть. По мере того как вода продвигается в нефтяной песчаник, область потенциала, соответствующая нефтяной зоне, постепенно замещается той областью потенциал , которая соответствует водяной зоне, и поверхность раздела между ними беспрерывно принимает новые формы. Движение контура между двумя областями потенциала приводит в конечном итоге к задаче совершенно отличного типа по сравнению с теми, которые встречаются в остальных физических проблемах, рассматривавшихся нами до сего времени.

Можно дать очень легко общую формулировку задачи теории потенциала этого типа. Однако очень трудно получить процедуру точного решения этой проблемы, за исключением ограниченного числа специальных случаев. Тем не менее можно установить общее положение, что геомет ическая форма поверхности раздела не зависит от абсолютного значения разности давлений, действующих на перемещение нефти и воды к поверхности стока. Вполне понятно и соответствует истине, что скорость продвижения и поступательного перемещения поверхности раздела вода — нефть прямо пропорциональна разности давления. Однако геометрическая форма поверхности раздела не связана с последним. Система с небольшой разностью давления будет обладать совершенно тем же семейством поверхностей раздела, что и система с большей разностью, за исключением того, что положения этих поверхностей будут пересекаться в пропорционально более поздние мгновения [1].

---

[1] Рассмотрение вопросов, приведенное в настоящей главе, связано с жидкостями, которые являются совершенными по способности смешиваться (например два вида масла) и не показывают разницы в поведении на разделе фаз. При рассмотрении же реальных несмешивающихся жидкостей затопляющая

Из точных решений задачи продвижения контура можно получить в законченном виде только те, в которых симметрия системы заранее устанавливает и делает очевидным геометрическую форму поверхности раздела. Эти решения обнимают проблемы линейного, строго радиального и сферического продвижения контура. Для остальных систем необходимость одновременного нахождения геометрической формы поверхности раздела и распределения потенциала в двух раздельных областях приводит к очень большим аналитическим трудностям.

Анализ показывает (гл. VIII, п. 3), что для системы линейного продвижения, когда краевая жидкость продвигается в систему, содержащую жидкость повышенной вязкости, темп продвижения и темп отбора со скважин возрастает. Это всецело является следствием того обстоятельства, что первоначальная жидкость, обладающая более высокой вязкостью, беспрерывно замещается продвигающейся жидкостью более низкой вязкости, уменьшая, таким образом, сопротивление системы и повышая величину текущего дебита. Этот эффект возрастает по мере того, как вытесняющая жидкость сохраняет уменьшенные значения вязкости. Следует запомнить, что время, необходимое для прохождения вытесняющей жидкости через данную длину песчаника, если даже жидкость и обладает исчезающе малой величиной вязкости, никогда не может упасть меньше чем наполовину того времени, которое потребовалось, если бы вытесняющая жидкость обладала вязкостью замещаемой [уравнение (9), гл. VIII, п. 3] жидкости.

Проблема радиального продвижения контура может быть решена точным методом (гл. VIII, п. 4). Если вытесняющая жидкость имеет относительно низкую вязкость, то темп продвижения по мере замещения ею жидкости с более высокой вязкостью, окружающей скважину, убыстряется вследствие сходящегося характера течения и за счет естественного ускорения. Однако рост текущего дебита не становится заметным до тех пор, пока поверхность раздела между двумя жидкостями не приходит в непосредственную близость со скважиной. Если вытесняющая жидкость обладает вязкостью, составляющей 10% величины вязкости вытесняемой жидкости, то текущий дебит удвоится по сравнению с начальным дебитом, имеющим место при возникновении процесса движения контура, когда будет замещено 99,96% первоначально заключенной в пласте жидкости. Вследствие этого эффект от пониженной вязкости вытесняющей жидкости на снижение интервала времени, необходимого на достижение поверхностью раздела скважины, будет для радиального продвижения гораздо меньшим по сравнению с линейным продвижением контура. В данном случае, если вытесняющая жидкость обладает даже нулевой вязкостью, отрезок времени, необхо-

---

жидкость полностью не замещает первоначальной жидкости, находившейся в песчанике. В результате этого процесса затопления площадь будет содержать смесь двух жидкостей. Задержка некоторой части первоначальной жидкости в пределах затопленной зоны приводит в результате к закупорке пор, что, строго говоря, следует рассматривать как уменьшение проницаемости пористой среды. Однако при аналитической обработке задачи уменьшение проницаемости пористой среды может быть соответствующим образом заменено увеличением вязкости затопляющей жидкости. Дальнейшие подробности динамического поведения таких систем находятся вне рамок настоящего рассмотрения.

димый для достижения поверхностью раздела скважины, уменьшится только на 7% [уравнение (8), гл. VIII, п. 4].

Сферическое течение приводит к выводам, весьма похожим на выводы, сделанные для радиального течения. Влияние схождения русла течения становится еще более отчетливым по отношению к замедлению темпа текущего дебита, по мере того как продвижение контура происходит с жидкостью, обладающей низкой вязкостью. Уменьшается также и эффект от продвижения, выражающийся в укорочении отрезка времени, необходимого для достижения вытесняющей жидкостью поверхности стока. Когда симметрия системы является недостаточной, чтобы установить определенность формы поверхности раздела нефть — вода, ее следует определить одновременно с распределением потенциала на любой стороне поверхности раздела. Однако аналитические трудности, возникающие при этом, настолько велики, что трудно получить искомое решение без помощи численных или графических методов.

Можно получить вывод теории возмущения в системе таким путем, который требует независимых решений для геометрической формы поверхности раздела и распределения потенциала. Однако и в этом случае такой метод решения повлечет за собой большие практические трудности. Если же пренебречь разницей в вязкости между вытесняющей и замещаемой жидкостями, можно получить хорошую качественную характеристику рассматриваемого явления. Поверхность раздела в реальной системе продвижения контура заменяется геометрической линией или поверхностью частиц жидкости. Допустим, что эти частицы первоначально лежали на границе между двумя жидкостями вдоль реального контура. Тогда их последующее движение соответствует по крайней мере с качественной стороны, если только не пренебрегать разницей в вязкости, движению реальной поверхности.

Когда граничные условия сохраняются фиксированными, можно найти общее решение этой упрощенной задачи, — „нулевому приближению“ к реальной проблеме продвижения контура, — простой квадратурой системы при условии, что можно установить границы эквипотенциальной поверхности и линии тока. Образцами этих теоретических решений являются решение задачи о линейном движении контура в единичную скважину (гл. VIII, п. 6) и непосредственного продвижения воды между двумя скважинами (гл. VIII, п. 7). Первая проблема соответствует идеализированному движению краевой воды в нефтяном месторождении, которое содержит одну скважину, пробуренную вблизи контура краевой воды. Вторая проблема представляет собой систему водной репрессии (флюдинг), состоящую из одной нагнетательной и одной эксплоатационной скважины. Можно проследить за развитием заводнения по поступательному перемещению линии частиц жидкости, первоначально окружавших нагнетательную скважину и затем движущихся по направлению к эксплоатационной скважине (см. фиг. 176).

Интерпретация полученных решений для рассматриваемых, а также аналогичных им задач становится вполне понятной, если обратить внимание, что в однородной системе (отсутствует разница вязкости между наступающей и замещаемой жидкостями) линия частиц жидкости или поверхность раздела вода — нефть в реальной двухжидкостной системе испытает нарушения только в случае перемещения в областях

с непостоянным распределением давления. Прямая линия частиц жидкости будет оставаться прямой, если она будет только приурочена к системе с прямолинейными параллельными эквипотенциальными линиями и если она будет параллельной последним. Аналогично этому частицы, лежащие на окружности, концентричной с системой круговых эквипотенциальных линий, будут продолжать оставаться в системе концентрических окружностей. С другой стороны, если частицы лежат в непостоянных полях, то те из них, которые находятся под воздействием более высоких градиентов давления, будут двигаться вперед по сравнению с остальными, создавая постепенное нарушение линии частиц.

В случае перемещения линейного контура в единичную скважину (фиг. 35) градиенты давления будут, очевидно, наибольшими вдоль нормали от скважины до первоначального положения линии движения. Отсюда частицы, расположенные вдоль этой линии и вблизи нее, будут опережать при своем движении дальше расположенные частицы, способствуя образованию языков гипотетической поверхности раздела. Так как по мере приближения к скважине градиенты увеличиваются, то это нарушение будет беспрерывно возрастать, и в конечном итоге поверхность раздела, поступившая в скважину, будет иметь форму серпа. Аналогичные выводы можно развить при интерпретации решения непосредственного процесса заводнения между двумя скважинами (см. фиг. 176), а также иных более сложных проблем.

Полученные решения и заключения всецело базируются на идеализированных моделях, где пренебрегают эффектом силы тяжести и разницей вязкости воды и нефти. Однако нетрудно заметить те видоизменения, которые возникают вследствие наличия в системе этих факторов. Так, если продвижение контура фактически является трехразмерным, то эффект силы тяжести выразится в дополнительном вертикальном компоненте скоростей частиц. Это обстоятельство в горизонтально залегающем песчанике повлечет за собой выполаживание поверхности раздела вода—нефть так, что она скорее займет наклонное, чем вертикальное, положение. Если песчаник не горизонтален и вода продвигается вверх по крыльям структуры, то можно показать простым анализом, что основной эффект силы тяжести выразится в уменьшении языкообразования поверхности раздела.

Аналогично этому разница в вязкости между наступающей и замещаемой жидкостями будет создавать два типа изменений в конфигурации системы, построенной на основе идеализации, принятой в теории. Как уже упоминалось, темп продвижения контура будет ускоряться или замедляться в зависимости от большей или меньшей вязкости вытесняющей жидкости по сравнению с замещаемой.

Однако этот результат будет оставаться незначительным, пока поверхность раздела между двумя жидкостями не вступит в области с высококонцентрированными градиентами давления. Следующим видоизменением, которое необходимо отметить, является влияние разницы вязкости на геометрическую форму поверхности раздела. Оно вытекает из элементарных рассуждений, что вытесняющая жидкость с высокой вязкостью будет наступать с приглушенным языкообразованием. Образование языков воды будет особенно резким с уменьшением вязкости наступающей жидкости. Однако это нарушение фронта продвижения

будет иметь место только в областях, уже имеющих естественное отклонение, вызванное асимметрией градиентов давления. Если отсутствует нарушение геометрической формы линии частиц в однородной системе, то этого нарушения, очевидно, не будет на поверхности раздела при реальном продвижении контура с аналогичной геометрией и распределением граничного давления.

В дополнение к проблемам продвижения воды, которые содержат одновременную математическую обработку системы двух жидкостей в пределах одной и той же пористой среды, существует еще проблема образования водяных конусов. В наиболее простом случае эта проблема возникает, когда нефтяная зона подстилается водяным песчаником так, что вместо водонепроницаемого ложа для продуктивного пласта существует еще один пласт песчаника или его продолжение, содержащее более тяжелую, но также и более подвижную жидкость — воду, как нижнюю границу нефтяного горизонта.

Нефть движется в скважину, вскрывшую нефтяную зону, под влиянием перепада давления, существующего между скважиной и точками, расположенными на большом расстоянии от нее. Вполне очевидно, что этот же перепад давления или по крайней мере часть его будет воздействовать также и на водяную зону, заставляя воду двигаться по направлению к скважине. В действительности последняя тенденция достаточно реальна, и именно эта реальность является физическим обоснованием проблемы водяных конусов. Однако в водяной зоне существуют иные силы, которые противостоят этому перепаду давления. Относительная величина двух противостоящих сил и определяет собой: будет ли вода фактически поступать с нефтью в скважину.

Противодействующая сила возникает из-за разницы в плотности нефти и воды. Так как забой скважины не вскрывает водяной зоны, то подъем воды должен происходить против силы тяжести, соответствующей разности плотности между водой и нефтью до того, как вода проникнет в скважину. В нефтяной же зоне сила тяжести фактически аннулируется и не оказывает никакого влияния на течение. Допустим, что скважина только вскрыла кровлю нефтяной зоны мощностью 37,5 *м* и в ней поддерживается давление 20 *ат*. Давление резервуара в кровле песчаника, которое движет нефть в скважину, составляет 50 *ат*.

Теперь можно показать на основании уравнений (6) и (7), гл. V, п. 3, что давление ниже и вдоль оси несовершенной скважины на глубине z падает ниже по сравнению с точкой, расположенной в подошве нефтяной зоны и на расстоянии 152,5 *м* от скважины, на величину

$$p_e - p = \gamma_0 g\ h - z) + \Delta P\left[\frac{2r_w}{z} - \frac{r_w}{h}\psi\left(1 + \frac{z}{2h}\right) - \frac{\pi r_w}{2h}\operatorname{ctg}\frac{\pi z}{2h}\right],$$

где γ_0 — плотность нефти ($\sim 0{,}8$ *кг/см*^{3}); g — ускорение силы тяжести; h — суммарная мощность нефтяной зоны (37,5 *м*); ΔP — разность суммарного давления (~ 30 *ат*); r_w — радиус скважины — 0,075 *м*; ψ — логарифмическая производная функции гамма. Если пренебречь нарушением распределения давления, которое создается присутствием водяного конуса, то рассматриваемая разность давления будет также воздействовать на воду и стремиться поддержать ее поверх общего уровня воды до высоты, напор которой будет равняться $p_e - p$.

Таким образом, при высоте 3,6 *м* над общим уровнем воды ($z = 33{,}9$ *м*) приведенная формула показывает, что $p_e - p = 0{,}4023$ *ат*, в то время как столб 3,6 *м* воды требует поддержания напора только 0,3894 *ат*[1]. Отсюда водяной конус не может оставаться стабильным после подъема на 3,6 *м*, но все же он продолжает подниматься. С другой стороны, если конус приподнят до 4,8 *м* от водяного горизонта ($z = 32{,}7$ *м*), то $p_e - p = 0{,}4975$ *ат*, в то время как напор воды в конусе составит 0,5192 *ат*. В данном случае разница между давлением резервуара и давлением, соответствующим принятой высоте конуса, не в состоянии поддержать последний на данной высоте, и конус должен опасть. Экспериментируя на моделях или прибегая к более систематизированному графическому решению [уравнение (3), гл. VIII, п. 11], найдем, что если конус приподнят до высоты 4,0 *м* поверх водяного уровня ($z = 33{,}5$ *м*), разность динамического давления в нефтяной зоне только уравновесит и поддержит гидростатический напор водяного конуса.

Аналогично этому можно найти высоту конуса в точках, отличных от точек расположения вдоль оси скважины. По этим точкам можно дать начертание составной поверхности конуса (фиг. 186), отделяющую движущуюся нефть поверху, и статический приподнятый конус воды внизу.

Если увеличить разность давления в 30 *ат* путем снижения давления на скважине, то высота конуса, очевидно, возрастет до значения, которое дается уравнением (3), гл. VIII, п. 11 с новым значением ΔP. Поскольку ΔP возрастает еще дальше, то конус в конечном итоге поднимется до такой высоты, что всякий последующий рост ΔP притянет водяной конус в скважину. Отсюда можно сделать вывод, что при высотах, больших критических, нет устойчивости водяного конуса (для данного песчаника и глубины вскрытия забоем скважины). Поэтому разность давления ΔP, поднимающая конус до своего критического значения, будет максимальной, которую только можно поддержать в системе, не отбирая из песчаника воду. Соответствующие текущие дебиты будут также максимально возможными для получения дебита безводной нефти.

Эксперименты на электрических моделях водяных конусов (см. фиг. 181 и 183) подтвержают, что верхние пределы устойчивости высот подъема последних учитываются допущениями аналитической теории. Те же самые расчеты можно выполнить и для других значений мощности нефтяной зоны, а также для скважин, которые фактически вскрыли полностью нефтяные зоны. Такие расчеты показывают, что разность давления, необходимая для поступления воды в скважину, будет наибольшей только для несовершенной скважины, непрерывно уменьшаясь с увеличением глубины вскрытия (см. фиг. 187). С другой стороны, эти расчеты показывают довольно разительный вывод, что фактический темп добычи нефти, который можно поддержать без одновременного отбора воды, будет максимальным для несовершенной скважины и уменьшается с увеличением глубины вскрытия (см. фиг. 188). Это означает, что если под нефтяным песчаником залегает пласт, содержащий воду, и сам пе-

---

[1] Плотность воды принимается здесь 1,1 *г/см*^{3}, хотя в окончательном определении высоты устойчивого конуса имеет значение только разница в плотности жидкостей.

счаник на известную глубину будет вскрыт скважиной, то дебит безводной нефти, который можно получить из скважины, беспрерывно возрастает, если только тампонировать постепенно забой скважины, пока он не будет только касаться (вскрывать) верхушки нефтяной зоны.

Эффект действительного отдаления забоя скважины от водяного горизонта более чем уравновешивает возросшее сопротивление системы песчаник — скважина в связи с уменьшением до минимума площади обнаженного забоя. Практически установлено, что кривая зависимости текущего дебита по отношению к глубине вскрытия для малых величин последнего почти полога. Поэтому даже 20% вскрытие позволит иметь почти тот же самый текущий дебит, что получается со скважин, имеющих исчезающе малые величины вскрытия. Отсюда, если скважина уже была затампонирована до величины вскрытия — 20% и вода все же не была закрыта, необходимо резко снизить текущий дебит скважины увеличением противодавления на ней. Если уменьшить разности давления до таких размеров, чтобы они не были в состоянии поддерживать далее напор жидкости, равный высоте забоя скважины над водяным горизонтом, то вода по необходимости должна будет падать, пока не достигнет уровня равновесия с динамическими градиентами, возникающими вследствие течения нефти.

Полученные практические выводы в целом подтверждаются промысловыми наблюдениями, хотя часто встречаются и аномальные случаи, когда тампонаж нескольких дециметров забоя скважины вполне достаточен для закрытия практически всей воды, поступающей в скважину, которая эксплоатируется с высоким процентным содержанием воды. Объяснение таких случаев следует искать в допущении, что скважины тампонируются до водонепроницаемых линз. Эксперименты на моделях показывают, что такие непроницаемые линзы, имеющие весьма ограниченные радиальные размеры, поднимают давление в области, расположенной под линзами, оставляя, таким образом, в системе небольшие доли суммарного перепада давления, необходимого для подъема воды в виде водяного конуса. Отсюда хотя в целом и является бесполезным тампонировать скважину с водяным конусом, имеющую небольшую величину вскрытия, тем не менее можно добиться подавления водяного конуса при производстве тампонажа забоя скважины до уровня водонепроницаемых линз, если даже последние и обладают площадью ограниченных размеров.

Глава девятая

МНОГОСКВАЖИННЫЕ СИСТЕМЫ

1. Введение. До сих пор мы подвергали математической обработке различные типы течений, обладавшие единичной поверхностью поступления или выхода, через которую жидкость могла покинуть или вступить в систему. В частности, большинство рассмотренных детально задач относилось к единичной скважине как к поверхности стока жидкости, которая питается с контуров окружающего скважину песчаника или пористой среды. Решения, полученные для этих задач, давали описание режима отдельных скважин при различных геометрических и физических условиях среды в целом. Детально рассмотренные стороны этих решений относились в основном к непосредственной близости индивидуальных скважин, например, распределение давления у скважин с частичным вскрытием пласта или же явление, встречающееся в проблеме водяных конусов.

При математических выкладках в процессе анализа необходимо было ограничивать во всех случаях или принимать с известной точностью определенный тип и форму внешнего контура, с которого идет питание жидкостью рассматриваемой скважины. Как указывалось довольно часто в предыдущих главах, размеры контура в большинстве выражений, имеющих физический смысл, входят в логарифмической форме. Поэтому им можно дать только приближенное значение, и получаемые конечные результаты обладают небольшой степенью ошибок. Обычно эти приближенные расчеты требуют известных допущений, ибо иным путем нельзя будет обеспечить полноты аналитической процедуры. Так, например, радиус внешнего контура обычно принимается порядка 152,5 *м* с пояснением, что если истинное значение радиуса лежит где-нибудь между 75 и 305 *м*, то подсчитанные текущие дебиты будут не намного отличаться по сравнению с дебитами, полученными при допущении радиуса 152,5 *м*. Несмотря на это, если рассматриваемая скважина является единственной в реальном нефтяном резервуаре или в далеко простирающемся водяном песчанике, который может тянуться более чем 18—20 *км*, то допущение о внешнем контуре с радиусом 152,5 *м* является по меньшей мере неоправданным.

На этом основании принимается, что если размеры всего резервуара или песчаника фактически намного больше 305 *м*, то существуют другие пробуренные скважины по соседству с интересующей нас скважиной. Эти скважины расположены так, что они создают на расстоя-

нии 152,5 *м* от себя эффективный внешний контур. С аналитической стороны это допущение формально вполне оправдывается на основании приведенного ранее положения, что „внешний контур" не должен иметь физического или геометрического значения. Его единственной функцией является установление границ поверхности, где плотность расхода и давление можно рассматривать (с известной точностью) заранее известными. Фактически же нами были проведены достаточно подробные доказательства [гл. IV, п. 5)], что детальное распределение давления даже на заранее принятой эффективной границе для подсчета эксплоатационной производительности скважины неизвестно. Для последней цели необходимо знать только величину средних давлений на контуре.

Тем не менее следует допустить, что введение и использование термина „эффективный" контур накладывает, по крайней мере с качественной стороны, условия знания распределения давления в сложной системе, где следует принимать в расчет взаимодействие всех работающих скважин. Как это будет видно из дальнейшего, если представлены четыре скважины, образующие квадрат с 60-*м* стороной вблизи центра большой площади, ограниченной окружностью с радиусом 3050 *м*, то каждая скважина будет обладать эксплоатационной производительностью, соответствующей радиусу эффективного контура, равного $0{,}3 \cdot 10^9$ *м*, что намного больше реального радиуса контура (гл. IX, п. 3). С другой стороны, если четыре скважины образуют единый элемент бесконечной квадратной сетки расстановки, где поверхностями поглощения будут скважины, расположенные в центре квадратов, то радиус эффективного контура для каждой скважины будет составлять 6960 *м* (гл. IX, п. 24). Кажется почти невероятным, что эти конечные выводы можно принять заранее, не прибегая к детальной аналитической процедуре, где с самого начала задачи подвергаются математической обработке как многоскважинные системы. Однако проблемы, рассматриваемые в настоящей главе, в некотором отношении имеют гораздо больший практический интерес по сравнению с проблемами, в которых рассматривались единичные скважины. Поэтому в настоящей главе будут развиты теория и решения для нескольких классов таких проблем.

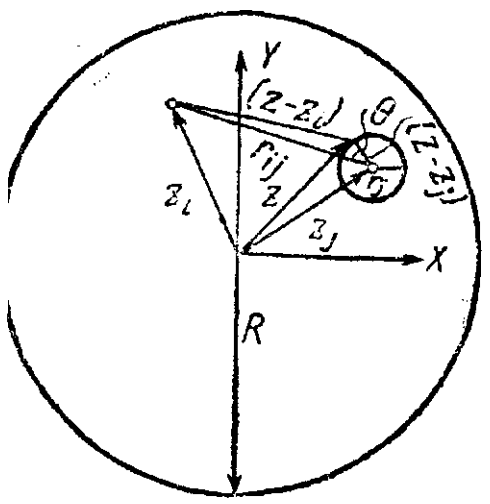
С практической и аналитической точки зрения представляется гораздо более удобным разделить и подвергнуть независимой математической обработке многоскважинные системы, где эксплоатационные скважины образуют группы, распределенные на небольшой площади, по сравнению с суммарной площадью несущего жидкость песчаника, и теми системами, где группа скважин распределена по всей или же большей части резервуара или продуктивного песчаника. Первый тип задач возникает на ранних этапах разбуривания большого участка продуктивного горизонта. Проведенный анализ покажет эффект интерференции групп скважин, которые сосредоточены на площади, составляющей лишь небольшую часть всего продуктивного песчаника. Второй тип задач встречается при рассмотрении взаимодействия между скважинами в резервуаре, который в значительной своей степени или полностью разбурен, или же разработка месторождения включает в себя процесс водной репрессии (флюдинга), или же бурение выброшенных скважин. Задача о небольших группах скважин вследствие своей простоты бу-

дет рассматриваться нами с самого начала. В этом рассмотрении, а также на протяжении всей настоящей главы, примем, что песчаники однородны, имеют постоянную мощность и полностью вскрыты скважинами так, что течение можно принять двухразмерным.

2. Малые группы скважин. Общая теория. Из предыдущих глав следует напомнить, что скважина в двухразмерной системе может быть представлена членом, зависящим от распределения давления, в следующей форме:

$$\frac{Q\mu}{2\pi k}\ln r,$$

где Q —расход, связанный со скважиной (как источник или сток) [1]; μ — вязкость жидкости; k—проницаемость песчаника; r—радиальное расстояние, замеренное от центра скважины. Более того, линейность уравнения Лапласа, которому должно удовлетворять распределение давления, налагает следующее условие. Если мы сложим вместе некоторое количество логарифмических членов только что приведенного типа, каждый из которых удовлетворяет уравнению Лапласа, то сумма этих членов будет удовлетворять последнему и сумма будет являться решением, дающим распределение давления, обязанное некоторому количеству скважин в системе.



Фиг. 190.

Так, если z_1, z_2... представляют собой комплексные векторы $x_1 + iy_1$, $x_2 + iy_2$ ... от произвольно выбранного начала координат к центру ряда скважин с расходами Q_1, Q_2... и если z является вектором, конец которого в переменной точке $x + iy$ (фиг. 190), результирующее распределение давления, дается выражением:

$$p(x, y) = c + \frac{\mu}{2\pi k}\sum_j Q_j \ln(z - z_j), \qquad (1)$$

где c—константа, которую можно выбрать так, что среднее давление на внешнем круговом контуре принимает заранее установленное значение.

При известных c и Q_j уравнение (1) позволяет определить распределение во всех точках системы.

Если известны давления на скважине, то с практической точки зрения представляет больший интерес предусмотреть значения расходов Q_j. Поэтому сначала мы должны определить давления на скважине, которые накладываются условиями уравнения (1), причем следует рассматривать Q_j как известные величины. Радиусы скважин r_j принимаются нами очень малыми по сравнению с остальными, имеющими физический смысл параметрами. Поэтому давления на скважине p_j бу-

---

[1] Если только это не будет специально оговорено, расход Q в настоящей главе относится к единице мощности песчаника.

дут определены как средние величины из p, взятые на окружностях с радиусом r_j и центрами в z_j, т. е.

$$p_j = \frac{1}{2\pi r_j} \oint_{zj} p\,ds, \tag{2}$$

где символ $\oint_{zj}$ определяет собой контур с радиусом r_j, взятым относительно точки $z = z_j$.

Если теперь обозначить расстояние $|z_i - z_j|$ между центрами i-ной и j-ной скважины через r_{ij}, можно легко убедиться в том, что

$$\oint_{zj} \ln|z - z_j|\,ds = 2\pi r_j \ln r_j, \tag{3}$$

в то время как

$$\oint_{zj} \ln|z - z_i|\,ds = 2\pi r_j \ln r_{ji}. \tag{4}$$

Прилагая эти выражения, а также уравнение (1) к уравнению (2), получаем в результате, что

$$p_j = c + \frac{\mu Q_j}{2\pi k} \ln r_j + \frac{\mu}{2\pi k} \sum{}' Q_i \ln r_{ij}, \tag{5}$$

где значок „прим“ означает собой отбрасывание члена $i = j$. Аналогично этому, принимая контур по окружности $z = R$, которую можно рассматривать представляющей собой внешний контур, среднее давление[1] на последнем можно найти из выражения:

$$p_e = c + \frac{\mu}{2\pi k} \sum Q_j \ln R. \tag{6}$$

Это выражение, а также уравнение (5) являются основными уравнениями математической обработки задачи о небольших группах скважин, так как они позволяют определить величины Q_j, если даны значения давлений p_j и p_e. Теперь приложим эти уравнения к решению некоторых практических примеров.

3. Примеры. **а)** Единичная скважина не дает характеристики общей многоскважинной системы, отличающейся интерференционными особенностями. Однако представляется весьма интересным приложить вышеуказанные уравнения к этому наиболее простому случаю, Так принимая $j = 1$, получаем из уравнения (5), гл IX, п. 2:

$$p_1 = c + \frac{\mu Q_1}{2\pi k} \ln r_1.$$

---

[1] Прилагая функцию Грина, рассмотренную в гл. IV, п. 6, можно получить распределение давления для многоскважинной системы так, чтобы оно соответство вало строго постоянному давлению на внешнем контуре. Однако с практической точки зрения это решение будет достаточно искусственно по сравнению с решением, где заранее принимается только среднее давление.

Из уравнения (6), гл. IX, п. 2, следует, что

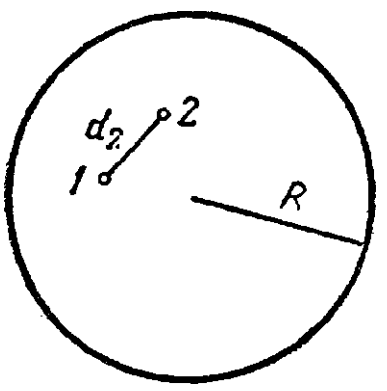
$$p_e = c + \frac{\mu Q_1}{2\pi k} \ln R,$$

так что

$$Q_1 = \frac{2\pi k\,(p_e - p_1)}{\mu \ln R/r_1}. \qquad (1)$$

Можно сразу увидеть, что это уравнение идентично по форме с простой формулой радиального течения, выведенной в главе IV. Представляет интерес сравнить более детально обе эти формулы. Так, следует заметить, что в настоящем случае не было сделано допущения постоянства давления на скважине или внешнем контуре; p_1 и p_e представляют собой средние величины фактических давлений на скважине и внешнем контуре.

Кроме того, уравнение (1), представляющее собой точный вывод, было получено без допущения, что внешний контур концентричен скважине. С другой стороны, следует заметить, что уравнение (1) не противоречит выводам гл. IV, п. 6, где было показано влияние на величину Q смещения скважины из центра внешнего кругового контура В гл. IV, п. 6, было принято, что давления на скважине и контуре постоянны и сохраняются фиксированными. В настоящем случае такое условие не накладывается. Поэтому по мере того, как скважина перемещается в пределах окружности с радиусом R, независимость Q от положения скважины обеспечивается вариацией распределения внешнего давления на контуре p_e. Кроме того, уравнение (1) основывается на распределении давления согласно уравнению (1), гл. IX, п. 2, при $Q_j = 0;\ j \neq 1$, что соответствует радиально симметричному давлению относительно единичной скважины в системе. Выводы же гл. IV, п. 6, основывались на совершенном распределении общего давления, свободного от источника, или стока, наложенного на логарифмическое соотношение, обязанное наличию в системе скважины. Отсюда уравнение (1) является таким видоизменением простой формулы радиального течения, чтобы его можно было приложить при несколько иных условиях по сравнению с обобщенными выводами гл. IV.



Фиг. 191. Две скважины на пласте песчаника с большим эффективным радиусом R.

б) Две скважины. Реальное явление интерференции будет иметь место, очевидно, сначала в задаче, где в пределах внешнего контура имеются только две скважины (фиг 191). В этой, а также во всех последующих задачах будет допущено, что давления скважин p_j и их радиусы r_j будут одними и теми же для различных скважин. Поэтому влияние различного количества скважин или расстояния между ними на расходы Q можно всецело отнести скорее за счет именно этих факторов, чем за счет специального подбора давлений и расстояния между отдельными скважинами. Кроме того, примем ряд обозначений: обычное давление на скважине — p_w; обычный радиус скважины — r_w; среднее давление на внешнем контуре — p_e; радиус внешнего контура — R.

Тогда, возвращаясь к уравнениям (5) и (6), гл. IX, п. 2, можно получить для настоящего случая следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} p_w &= c + \frac{\mu Q_1}{2\pi k} \ln r_w + \frac{\mu Q_2}{2\pi k} \ln d_2 \\ p_w &= c + \frac{\mu Q_1}{2\pi k} \ln d_2 + \frac{\mu Q_2}{2\pi k} \ln r_w \\ p_e &= c + \frac{\mu Q_1}{2\pi k} \ln R + \frac{\mu Q_2}{2\pi k} \ln R \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Решение для Q_1 и Q_2 легко найти из следующего выражения:

$$Q_1 = Q_2 = \frac{2\pi k (p_e - p_w)}{\mu \ln R^2/r_w d_2}. \qquad (3)$$

Как это подробно рассматривалось для единичной скважины, в данном, а также во всех других случаях, непосредственно вытекающих из уравнений (5) и (6), гл. IX, п. 2, установлено, что расходы или эксплоатационная производительность различных скважин зависят не от их абсолютных положений, но от расстояния между скважинами. Было уже показано, что эта особенность уравнений (5) и (6), гл. IX, п. 2, является прямым следствием того, что первоначальное распределение давления [уравнение (1), гл. IX, п. 2] состоит из членов, обязанных своим существованием скважинам в пределах окружности, избранной в качестве внешнего контура. Хотя это может показаться ненужным препятствием к широкой применимости анализа, но уравнения (5) и (6), гл IX, п. 2, в действительности являются аналитическим выражением того комплекса, который мы рассматриваем под названием „небольшая группа скважин". Согласно первоначальному определению для таких систем можно рассматривать все стоки, заключенные в последних и находящиеся в пределах внешнего контура. Отсюда распределение давления для такой системы слагается только из логарифмических членов, соответствующих этим стокам.

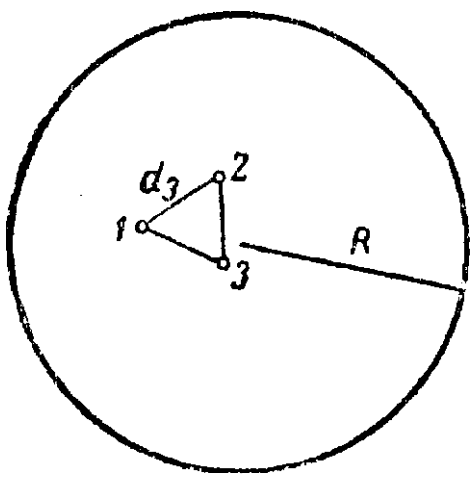
Возвращаясь к уравнению (3), следует заметить, что расходы Q_1 и Q_2 уменьшаются с уменьшением d_2. Вполне понятно, что этот эффект является непосредственным проявлением взаимной интерференции между двумя скважинами. Фактически интерференция соответствует расходу скважины при таких условиях, будто скважина эксплоатируется только одна при той же разности давлений в области, ограниченной окружностью с радиусом R^2/d_2, который при допущении небольшой группы скважин намного больше действительного радиуса ($d_2 \ll R$). Отсюда величина эффективного сопротивления системы на одну скважину скорее эквивалентна круговой области с площадью $\pi R^4/d_2^2$, а не с πR^2. Последнее положение будет соответствовать отсутствию интерференции между двумя скважинами. Представляет интерес заметить, что если текущий дебит единичной скважины равен суммарному расходу двухскважинной системы, то радиус этой скважины должен быть $\sqrt{r_w d_2}$. Так, например, если радиус скважин в двухскважинной системе равняется 0,075 *м* и разрыв между скважинами 60 *м*, то эквивалентная или единичная скважина должна иметь радиус 2,13 *м*. Отсюда будет

непрактично пытаться заменить двухскважинную систему односква-жинной.

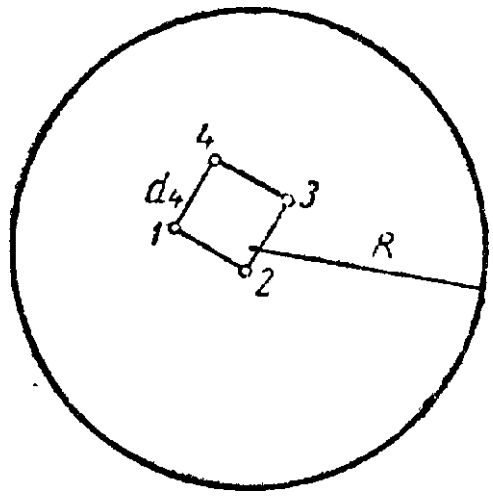
в) Три скважины, размещенные по треугольной сетке. Для решения задачи о трех скважинах (фиг. 192) необходимо составить четыре уравнения, аналогичные ряду уравнений (2). Легко найти, что

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = \frac{2\pi k\,(p_e - p_w)}{\mu \ln R^3/r_w d_3^2}\,. \qquad (4)$$

В данном случае интерференция возрастает (Q уменьшается) по мере того, как уменьшается интервал между скважинами. Каждая скважина обладает расходом, соответствующим эффективному внешнему контуру с радиусом R^3/d_3^2, по отношению к единичной скважине,



Фиг. 192. Группа из трех скважин, размещенных по треугольной сетке.



Фиг. 193. Группа из четырех скважин, размещенных по квадратной сетке.

лежащей в пределах того же контура. Так как величина R^3/d_3^2 гораздо больше, чем R^2/d^2 (для случая $d_2 = d_3$), то интерференция в трехскважинной системе, как это и следует ожидать из общих соображений, будет значительно выше интерференции в двухскважинной системе. Если суммарный расход ($3Q_1$) будет собран вместе, он будет соответствовать единичной скважине с радиусом $(r_w d_3^2)^{1/3}$.

г) Четыре скважины, размещенные по квадратной сетке. В этом случае все интервалы между скважинами больше не будут равны между собой (фиг. 193). Однако симметрия все же будет достаточной, чтобы получить равные расходы для каждой из скважин, а именно

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = \frac{2\pi k(p_e - p_w)}{\mu \ln R^4/\sqrt{2}\, r_w d_4^3}\,. \qquad (5)$$

Каждая скважина будет иметь эффективный внешний радиус $\frac{R^4}{\sqrt{2}\, d_4^3}$, и все скважины вместе дадут расход, эквивалентный единичной скважине с радиусом $(\sqrt{2}\, r_w d_4^3)^{1/4}$.

д) Четыре скважины по квадратной сетке с одной скважиной в центре. Из симметрии системы (фиг. 194) ясно, что четыре внешние скважины будут иметь равные расходы, но отлич-

ные от расхода центральной скважины. Поэтому шесть уравнений (5) и (6), гл. IX, п. 2, могут быть немедленно сведены к трем:

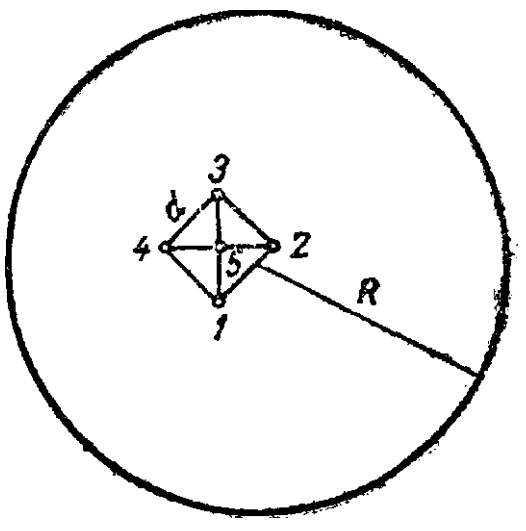
$$\left.\begin{aligned} p_w &= c + \frac{\mu}{2\pi k}\left(Q_1 \ln \sqrt{2}\, r_w d^3 + Q_5 \ln \frac{d}{\sqrt{2}}\right) \\ p_w &= c + \frac{\mu}{2\pi k}\left(4Q_1 \ln \frac{d}{\sqrt{2}} + Q_5 \ln r_w\right) \\ p_e &= c + \frac{\mu}{2\pi k}\,(4Q_1 \ln R + Q_5 \ln R), \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

откуда можно свободно получить:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= \frac{2\pi k}{\mu \Delta}\,(p_e - p_w) \ln \frac{d}{\sqrt{2}\, r_w}, \\ Q_5 &= \frac{2\pi k}{\mu \Delta}\,(p_e - p_w) \ln \frac{d}{4\sqrt{2}\, r_w} \\ \Delta &= 4 \ln \frac{\sqrt{2}\, R}{d} \ln \frac{d}{\sqrt{2}\, r_w} + \ln \frac{R}{r_w} \ln \frac{d}{4\sqrt{2}\, r_w} \\ \frac{Q_5}{Q_1} &= \frac{\ln\left(\dfrac{d}{4\sqrt{2}\, r_w}\right)}{\ln\left(\dfrac{d}{\sqrt{2}\, r_w}\right)} = 1 - \frac{\ln 4}{\ln\left(\dfrac{d}{\sqrt{2}\, r_w}\right)} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Следует заметить, что в настоящем примере имеет место не только предыдущий тип явления интерференции, где наличие группы скважин просто уменьшает расходы отдельных скважин, но существует еще и дополнительное влияние четырех внешних скважин на одну центральную. Последняя скважина теряет в дебите благодаря именно своему центральному местоположению. Потеря в дебите, представленная членом $\dfrac{\ln 4}{\ln\left(\dfrac{d}{\sqrt{2}\, r_w}\right)}$, достигает 22% при интервале между скважинами — 60 *м*. Группа в целом имеет эффективный радиус единичной скважины $\bar{r}_w$, который дается выражением:

$$\ln \frac{\bar{r}_w}{r_w} = \frac{\left\{\ln\left(d^2/2r_w^2\right)\right\}^2}{\ln\left(d^5/2^{9/2} r_w^5\right)}. \qquad (8)$$



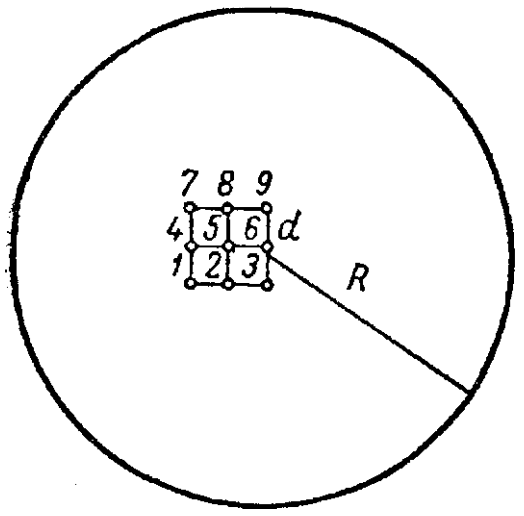
Фиг. 194. Группа из пяти скважин, размещенных по четыреугольной (квадратной) сетке, и скважиной, находящейся в центре.

е) Девять скважин. Из симметрии этой системы (фиг. 195) ясно, что

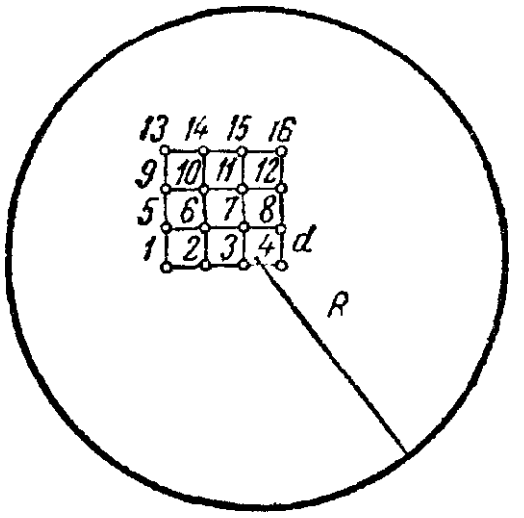
$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= Q_3 = Q_7 = Q_9 \\ Q_2 &= Q_4 = Q_6 = Q_8 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Чтобы найти эффект интерференции этих скважин, достаточно знать только отношения $Q_1 : Q_2 : Q_5$. С этой целью необходимо рассмотреть только три из девяти уравнений (5), гл. IX, п. 2, представленных в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} p_w - c &= \frac{\mu}{2\pi k}\,(Q_1 \ln 8\sqrt{2}\, r_w d^3 + Q_2 \ln 5d^4 + Q_5 \ln d\sqrt{2}) \\ p_w - c &= \frac{\mu}{2\pi k}\,(Q_1 \ln 5d^4 + Q_2 \ln 4r_w d^3 + Q_5 \ln d) \\ p_w - c &= \frac{\mu}{2\pi k}\,(Q_1 \ln 4d^4 + Q_2 \ln d^4 + Q_5 \ln r_w) \end{aligned}\right\} \quad (10)$$



Фиг. 195. Группа из девяти скважин, размещенных по квадратной сетке.



Фиг. 196. Группа из 16 скважин, размещенных по квадратной сетке.

с решением

$$Q_1 : Q_2 : Q_5 = \left[y^2 + y \ln \frac{5}{2^{3/2}} - (\ln 2)^2\right] : \left[y^2 + y \ln \frac{5}{2^{7/2}} + \ln \sqrt{2} \ln \frac{5}{4}\right] : [y^2 - y \ln 2^{7/2} + \ln 2 \ln 200 - (\ln 5)^2], \quad (11)$$

где

$$y = \ln \frac{d}{r_w}.$$

Отсюда, если $d = 60$ *м*, $r_w = 0{,}075$ *м*, то

$$Q_1 : Q_2 : Q_5 = 1{,}00 : 0{,}819 : 0{,}615. \quad (12)$$

Влияние взаимной интерференции на абсолютное значение расстояния между скважинами видно из того, что при $d = 15$ *м*, $\sim Q_1 : Q_2 : Q_5 = 1{,}00 : 0{,}778 : 0{,}533$.

ж) Шестнадцать скважин. Аналогично вышеизложенному для данного случая можно написать (фиг. 196):

$$\left.\begin{aligned} &Q_1 = Q_4 = Q_{13} = Q_{16}, \\ &Q_2 = Q_3 = Q_5 = Q_8 = Q_9 = Q_{12} = Q_{14} = Q_{15} \\ &Q_6 = Q_7 = Q_{10} = Q_{11}, \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

с уравнениями

$$\left.\begin{aligned} p_w - c &= \frac{\mu}{2\pi k}\left(Q_1 \ln 27\sqrt{2}\, r_w d^3 + Q_2 \ln 520\, d^8 + Q_6 \ln 20\, d^4\right) \\ p_w - c &= \frac{\mu}{2\pi k}\left(Q_1 \ln 2\sqrt{130}\, d^4 + Q_2 \ln 60\sqrt{10}\, r_w d^7 + \right. \\ &\qquad \left. + Q_6 \ln 2\sqrt{10}\, d^4\right) \\ p_w - c &= \frac{\mu}{2\pi k}\left(Q_1 \ln 20\, d^4 + Q_2 \ln 40\, d^8 + Q_6 \ln \sqrt{2}\, r_w d^3\right) \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

и решение

$$\left.\begin{aligned} Q_1 : Q_2 : Q_6 = &\left(y^2 + y \ln \frac{26\sqrt{20}}{3} + \ln 13 \ln \sqrt{20} - \right. \\ &\left. - \ln \frac{3\sqrt{10}}{2} \ln 10\sqrt{2}\right): \\ &: \left(y^2 + y \ln \frac{20\sqrt{13}}{27} + \ln \sqrt{20} \ln \frac{20}{27\sqrt{2}} - \right. \\ &\left. - \ln \frac{\sqrt{2}}{20} \ln \frac{\sqrt{130}}{10}\right): \\ &: \left(y^2 + y \ln \frac{2\sqrt{20}}{81} - \ln 13 \ln \frac{\sqrt{130}}{10} - \right. \\ &\left. - \ln \frac{20}{27\sqrt{2}} \ln \frac{3\sqrt{10}}{2}\right), \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

так что

$$\left.\begin{aligned} Q_1 : Q_2 : Q_6 &= 1{,}00 : 0{,}735 : 0{,}445 \quad \text{для} \quad \frac{d}{r_w} = 800 \\ Q_1 : Q_2 : Q_6 &= 1{,}00 : 0{,}692 : 0{,}362 \quad \text{для} \quad \frac{d}{r_w} = 200 \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

з) Батарея из скважин, расположенных по окружности[1]. Подвергнем анализу обобщение полностью симметричной расстановки двух, трех и четырех скважин, т. е. систему, где n скважин расположено по окружности с радиусом r ($\ll R$) (фиг. 197). Так как на основании симметрии все Q_j равны, то уравнения (5) и (6), гл. IX, п. 2, дадут:

$$\left.\begin{aligned} p_w &= c + \frac{\mu Q_j}{2\pi k}\left(\ln r_w + \sum{}' \ln r_{ji}\right) \\ p_e &= c + \frac{\mu n Q_j}{2\pi k} \ln R \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

так что

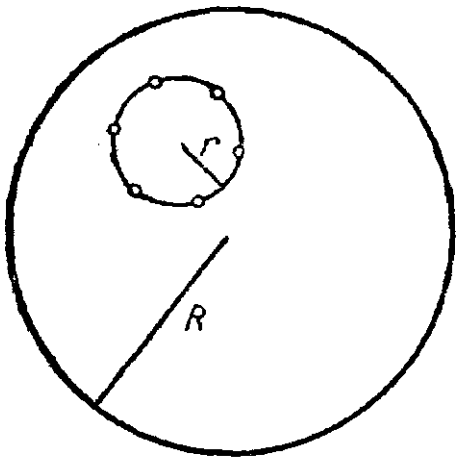
$$Q_j = \frac{2\pi k \Delta p/\mu}{\left(\ln \dfrac{R^n}{r^{n-1} r_w} - \dfrac{1}{n} \sum\limits_{1}^{n-1} \ln 2 \sin \dfrac{\pi m}{n}\right)}, \quad (18)$$

[1] Эта проблема была подвергнута рассмотрению также Гарднером, Коллие и Фарром (см. цит. работу).

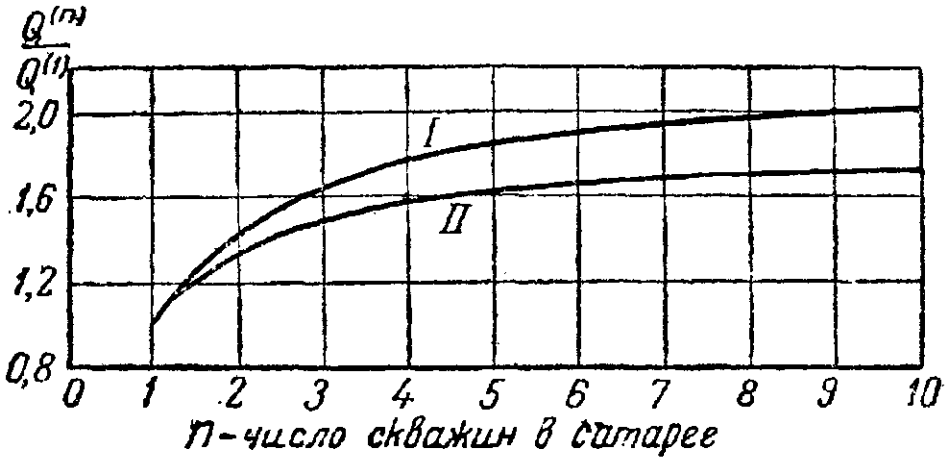
с суммарной эксплоатационной производительностью системы:

$$Q^{(n)} = nQ_j = \frac{2\pi k \Delta p/\mu}{\left(\ln \frac{R}{r} + \frac{1}{n} \ln \frac{r}{r_w} - \frac{1}{n} \sum_{1}^{n-1} \ln 2 \sin \frac{\pi m}{n} \right)}, \qquad (19)$$

где логарифм эквивалентного радиуса будет $\ln R$ минус количество, заключенное в круглые скобки. Отношение суммарной результирующей эксплоатационной производительности батареи $Q^{(n)}$ к текущему дебиту



Фиг. 197. Круговая батарея скважин, дренирующая пласт песчаника с радиусом R.



Фиг. 198. Изменение эксплоатационной производительности круговой батареи скважин в зависимости от числа последних в батарее:

$Q^{(n)}/Q^{(1)}$ — (эксплоатационная производительность батареи из n скважин) / (эксплоатационная производительность единичной скважины); (радиус батареи) / (радиус r_w индивидуальной скважины) = 200 для кривой *I*, = 800 для кривой *II*. Радиус внешнего контура — 1525 *м*; $r_w = 0{,}075$ *м*.

единичной скважины построено на фиг. 198 как функция n для $r/r_w = 80$ и $r/r_w = 200$, с R, принятым 1525 *м* и $r_w = 0{,}075$ *м*. Предельные значения 2,15 и 1,79 для $Q^{(n)}/Q^{(1)}$, по мере того как n стремится к бесконечности, достигаются достаточно быстро с возрастанием n. Однако следует заметить, что эти асимптотические значения, соответствующие единичной скважине, имеющей диаметр r, возрастают очень медленно с ростом r. Отсюда, хотя стоимость батареи будет меньше стоимости эквивалентной единичной скважины, но ее конечная эксплоатационная производительность будет по существу ограничена так же, как и производительность единичной скважины.

4. Зависимость эксплоатационной производительности от числа скважин в группе. Из рассмотрения отдельных примеров последнего раздела видно, что по мере увеличения количества скважин в группе увеличивается также и взаимная интерференция между ними. Вследствие этого уменьшается эксплоатационная производительность каждой скважины. Совокупный эффект интерференции показан сравнением суммарной эксплоатационной производительности различных групп, рассмотренных в последнем разделе. С этой целью примем во всех случаях $d/r_w = 800$ и $R = 1525$ *м*. Обозначив через $Q^{(n)}$ суммарную эксплоатационную производительность группы, содержащей n скважин, и через

$Q_i^{(n)}$ индивидуальный текущий дебит i-ого типа скважины в группе из n скважин, получим сначала:

$$\frac{Q^{(1)}}{Q_1^{(1)}} = \frac{Q^{(2)}}{2Q_1^{(2)}} = \frac{Q^{(3)}}{3Q_1^{(3)}} = \frac{Q^{(4)}}{4Q_1^{(4)}} = \frac{Q^{(5)}}{4Q_1^{(5)} + Q_5^{(5)}} =$$

$$= \frac{Q^{(9)}}{4Q_1^{(9)} + 4Q_2^{(9)} + Q_5^{(9)}} = \frac{Q^{(16)}}{4Q_1^{(16)} + 8Q_2^{(16)} + 4Q_6^{(16)}} = 1,$$

затем, подставляя индивидуальные значения в $Q_i^{(n)}$, будем иметь:

$$Q^{(1)} : Q^{(2)} : Q^{(3)} : Q^{(4)} : Q^{(5)} : Q^{(9)} : Q^{(16)} =$$

$$= 1 : 1{,}509 : 1{,}818 : 2{,}061 : 2{,}152 : 2{,}778 : 3{,}333. \qquad (1)$$

Это уравнение показывает, что совокупный эффект интерференции скважин возрастает, а участие в суммарной производительности каждой скважины уменьшается с увеличением числа эксплоатационных скважин. Еще более ясно это можно видеть из величины средних дебитов на скважину в различных группах, соответствующих уравнению (1). Обозначая их через $\overline{Q}^{(n)} = Q^{(n)}/n$, получаем в результате:

$$\overline{Q}^{(1)} : \overline{Q}^{(2)} : \overline{Q}^{(3)} : \overline{Q}^{(4)} : \overline{Q}^{(5)} : \overline{Q}^{(9)} : \overline{Q}^{(16)} =$$

$$= 1 : 0{,}755 : 0{,}606 : 0{,}515 : 0{,}430 : 0{,}309 : 0{,}208. \qquad (2)$$

В свете этого резкого снижения средних расходов на скважину становится очевидным все значение интерференции и взаимодействия между скважинами. Вполне понятно, что на известном этапе буровых работ дополнительная добыча, которая получается от скважин, бурящихся в порядке уплотнения сетки, будет недостаточной для того, чтобы окупить дополнительные расходы на бурение [1].

5. Распределение давления на внешнем контуре. Раньше чем расстаться с проблемой небольших групп скважин, представляется интересным подвергнуть детальному исследованию значение, а также внутренний смысл понятия „средние давления", которыми мы пользовались на протяжении всего проведенного анализа. Так, для поверхности забоя скважины небольшая величина радиусов последней по сравнению с остальными размерами системы, имеющей физическое значение, налагает немедленно условие, что фактическое распределение давления, которое дается уравнением (1), гл. IX, п. 2, будет очень мало изменяться на поверхности забоя скважины. Поэтому средние давления p_j практически эквивалентны строго постоянным давлениям. Однако для p_e — среднего давления на внешнем контуре — требуется дальнейшее уточнение.

---

[1] Разумеется, приведенный анализ и полученные результаты следует понимать так, что жидкость, которая отбирается из скважин, поступает из внешнего источника. Таким образом, в песчанике вблизи скважин нет места истощению жидкости, как было бы в том случае, если бы скважины эксплоатировались под действием и расширением растворенных в нефти газов или же за счет расширения жидкости, возникающего вследствие ее упругого сжатия.

Допущение о том, что внешний контур системы является круговым, совершенно несущественно и не входит в уравнение (5), гл. IX, п. 2. Однако мы его сохраним в последующем рассмотрении, так как это допущение дает удивительно простые выражения для коэфициентов Q_j в уравнении (6), гл. IX, п. 2. Тогда, возвращаясь к уравнению (1), гл. IX, п. 2, и допуская, что z — точка на внешнем контуре, имеем:

$$p(z)=c+\frac{\mu}{4\pi k}\sum Q_j \ln\left(R^2+|z_j|^2-2R\,|z_j|\cos\theta_j\right), \qquad (1)$$

где θ_j — угол между z_j и z, заканчивающийся на контуре. Так как $|z_j|<R$, уравнение (1) можно переписать в расширенном виде:

$$p(z)=c+\frac{\mu}{2\pi k}\sum Q_j \ln R-\frac{\mu}{2\pi R k}\sum Q_j\,|z_j|\cos\theta_j-$$

$$-\frac{\mu}{4\pi R^2 k}\sum Q_j\,|z_j|^2\cos 2\theta_j-\ldots \qquad (2)$$

Отсюда, вычитая среднее давление p_e, согласно уравнению (6), гл. IX, п. 2, найдем в остатке:

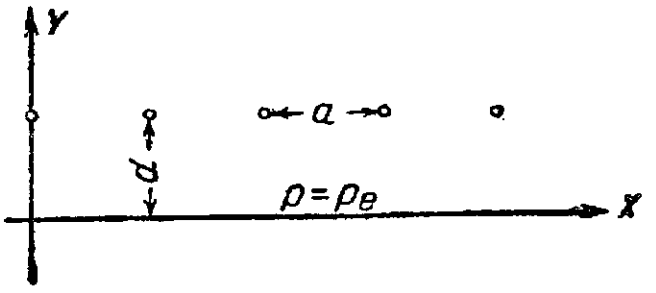
$$p(z)-p_e=-\frac{\mu}{2\pi R k}\left[\sum Q_j\,|z_j|\cos\theta_j+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2R}\sum Q_j\,|z_j|^2\cos 2\theta_j+\ldots\right. \qquad (3)$$

Небольшое рассмотрение этого выражения показывает, что первое суммирование можно разделить на два члена, пропорциональные линейным моментам $\sum Q_j x_j$, $\sum Q_j y_j$, скважин относительно начала координат и взвешенным относительно эксплоатационной производительности этих скважин. Второе суммирование пропорционально квадратичным моментам. Поэтому в первом приближении фактическое распределение давления будет постоянно на внешнем контуре, если центр тяжести скважин, взвешенный по отношению к их расходам, лежит в центре внешнего контура. Наоборот, видно, что давление будет постоянно в соответствии с этим первым приближением на любой большого радиуса окружности, начертанной вокруг центра тяжести скважины.

Эти рассуждения показывают, почему в прошлых рассмотрениях мы молча приняли, что скважины размещены вблизи центра интересующей нас области и ни одна из них не лежит близко к внешнему контуру. Если скважины были бы размещены вблизи внешнего контура, то их моменты относительно центра тяжести могут быть достаточно велики, и отклонение граничного давления от своего среднего значения будет настолько большим, что заставит последнее понятие потерять свое физическое значение. Так как гипотеза „небольшой группы“ скважин так же налагает условие их локализации при расстановке скважин, можно сформулировать количественное определение этого типа системы последних при условии совпадения центра разбуриваемой области и центра тяжести системы скважин совместно с ограничением порядка величины квадратичных моментов.

6. Небольшие группы скважин, питающиеся бесконечным линейным контуром. Математическая обработка, которую мы приводили до сих пор в отношении эксплоатационной характеристики небольших групп скважин, базировалась на допущении, что отдаленный внешний контур, с которого происходит питание системы жидкостью, представлен окружностью. Хотя это допущение было в основном сделано для удобства и не имело никакого влияния на общую характеристику явлений интерференции между скважинами различных групп, все же существует определенный класс задач, где следует принять совершенно точно в расчет некруговой характер внешнего контура. Рассмотрим систему течения, состоящую из нескольких артезианских скважин, пробуренных в проницаемом песчанике, который питается водой из близлежащей реки или канала. Вполне определенно, что эффективный внешний контур системы не является окружностью. Скорее всего он представлен бесконечным линейным источником, совпадающим с эффективным выходом песчаника в ложе канала или реки.



Фиг. 199. Линейный ряд скважин, параллельный напорной линии

Аналитически группа из n скважин, расположенных на расстоянии a друг от друга и лежащих параллельно и на расстоянии d от линейного источника, где давление p_e (фиг. 199), дает распределение его в форме следующего выражения:

$$p\,(x, y)=\frac{\mu}{4\pi k}\sum_{0}^{n-1} Q_m \ln\left[\frac{(x-ma)^2+(y-d)^2}{(x-ma)^2+(y+d)^2}\right]+p_e, \qquad (1)$$

где Q_m — расходы индивидуальных скважин; k — проницаемость среды; μ — вязкость жидкости. Если в каждой скважине поддерживается давление p_w, то расходы Q_m будут определяться:

$$p_e-p_w=\frac{\mu}{4\pi k}\left\{2Q_j \ln\frac{2d}{r_w}+\sum{}' Q_m \ln\left[1+\frac{4d^2}{a^2\,(m-j)^2}\right]\right\}:$$

$$j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n=1, \qquad (2)$$

где знак „прим“ обозначает, что член $m=j$ опущен. Таким образом, если $n=1$, то уравнение (2) дает в результате

$$Q_0=\frac{2\pi k\Delta p}{\mu \ln 2d/r_w}, \qquad (3)$$

что соответствует тому же самому значению, найденному нами для специального случая [уравнение (8), гл. IV, п. 7].

Для $n=2$ уравнение (2) дает:

$$Q_0=Q_1=\frac{2\pi k\Delta p}{\mu\left[\ln\frac{2d}{r_w}+\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{4d^2}{a^2}\right)\right]}. \qquad (4)$$

Добавочный член в знаменателе, заключенный в квадратных скобках, очевидно, представляет собой взаимную интерференцию между двумя скважинами. Таким образом, если $d/a=1$, $d/r_w=400$, то каждая скважина в двухскважинной системе будет иметь эксплоатационную производительность, составляющую 89,26% текущего дебита, который бы имела скважина, если бы только она одна дренировала этот песчаник. Вполне понятно, что уменьшение дебита на 10,74% еще больше возрастет, когда скважины будут расположены ближе друг к другу (a — уменьшается).

Для $n=3$ легко найти, что

$$\left.\begin{aligned} Q_0=Q_2&=\frac{4\pi k\Delta p\ln\left[\dfrac{\beta^2}{\left(1+\dfrac{4d^2}{a^2}\right)}\right]}{\mu\left\{(\ln\beta^2)\left[\ln\beta^2\left(1+\dfrac{d^2}{a^2}\right)\right]-2\left[\ln\left(1+\dfrac{4d^2}{a^2}\right)\right]^2\right\}}\\ \frac{Q_1}{Q_0}&=1-\frac{\ln\left[\dfrac{\left(1+\dfrac{4d^2}{a^2}\right)}{\left(1+\dfrac{d^2}{a^2}\right)}\right]}{\ln\left[\dfrac{\beta^2}{\left(1+\dfrac{4d^2}{a^2}\right)}\right]}, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

где

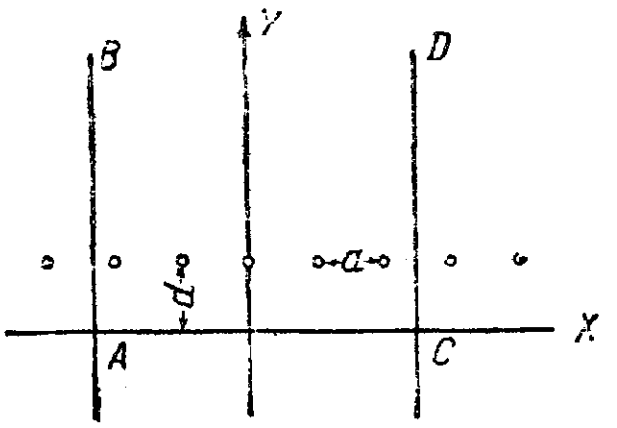
$$\beta=\frac{2d}{r_w}.$$

В данном случае, если $d/a=1$, $d/r_w=400$, легко найти снова, что Q_0 и Q_2 составляют 86,0%, в то время как $Q_1=79{,}3\%$ текущего дебита, соответствующего единичной скважине, дренирующей песчаник (уравнение 3). $Q_1<Q_0=Q_2$, очевидно, обязано тому обстоятельству, что центральная скважина интерферирует со скважинами, расположенными по обе стороны от нее, в то время как концевые скважины интерферируют только с одной скважиной.

Тем же путем легко разработать и иные значения Q для других величин n. В гл. IX, п. 8, будет приведен анализ для предельного случая, когда n принимает бесконечно большое значение.

7. Бесконечные линейные ряды скважин. Когда площадь, залегающая над песчаником, несущим жидкость, пересечена полностью по крайней мере в одном направлении единичным или несколькими параллельными рядами скважин, которые распространяются по сравнению с расстоянием между скважинами на большие расстояния, то система может быть заменена эквивалентным комплексом бесконечных рядов скважин. Если граница песчаника отсекает фронт скважин вдоль линии симметрии, например в CD (фиг. 200), то в системе не возникнет реакции от контура на течение внутри последнего, и течение останется то же самое, как если бы ряд скважин распространялся бесконечно, без нарушения его распространения предельностью песчаника. Если

граница песчаника пересекает ряд скважин несимметрично, например в AB, то тождественность с бесконечным рядом все же не будет сильно нарушена, так как краевой эффект, возникающий от близости к контуру, будет приурочен в основном к нарушению распределения давления у скважины, наиболее близко расположенной к контуру. Поэтому в дальнейшем анализе допустим, что мы имеем реальные бесконечные ряды расположенных на равном расстоянии скважин, имеющих один и тот же радиус, на которых поддерживается одно и то же давление.



Фиг. 200.

8. Распределение давления у бесконечного ряда скважин. Напорная линия. Для того чтобы получить основное представление о распределении давления для бесконечного ряда скважин, каждая скважина должна быть заменена математическим двухразмерным стоком. Последний будет иметь мощность, пропорциональную расходу или эксплоатационной производительности скважины. Все скважины принимаются одинаковыми и равномерно распределенными. Возвращаясь к ряду, изображенному на фиг. 200, и принимая, что он находится на расстоянии d вверх от оси x-ов, имеем, что результирующее распределение давления, обязанное отдельным скважинам ряда, является, очевидно, алгебраической суммой отдельных распределений и потому определяется выражением:

$$p(x, y) = q \sum_{-\infty}^{-\infty} \ln [(y-d)^2 + (na-x)^2] =$$

$$= q \ln \prod_{-\infty}^{-\infty} [(y-d)^2 + (na-x)^2]. \qquad (1)$$

В главе IV, п. 9 уже была показана величина этой суммы или произведения с конечным выводом:

$$p(x, y) = q \ln \left[\operatorname{ch} \frac{2\pi (y-d)}{a} - \cos \frac{2\pi x}{a} \right]. \qquad (2)$$

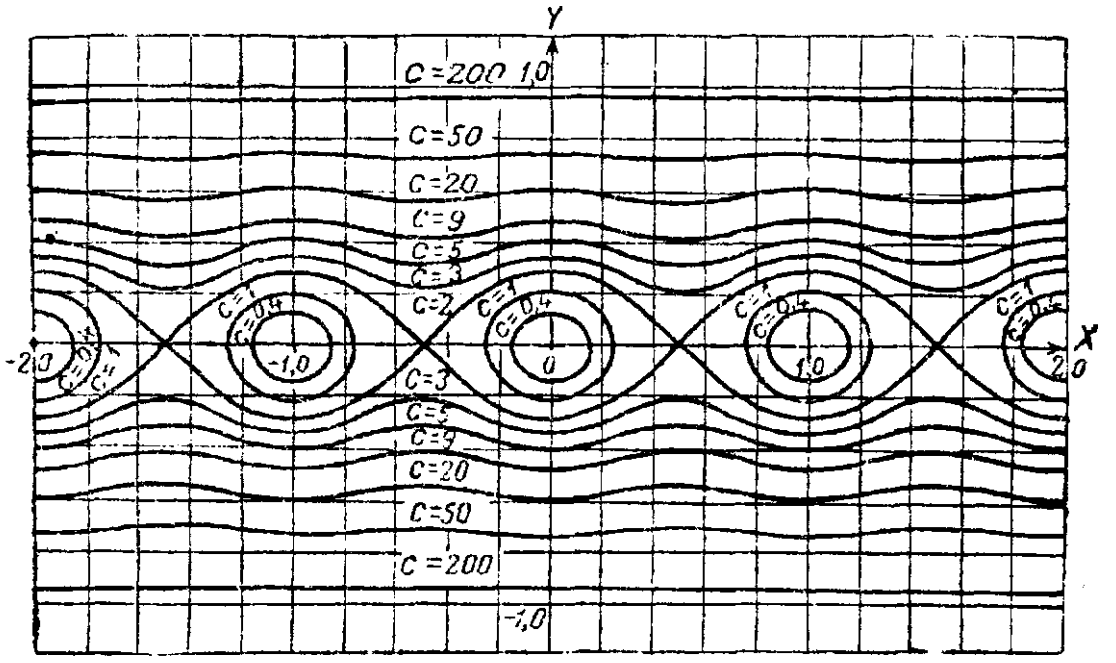
Это уравнение будет основным элементом в последующих решениях задач, включающих в себя бесконечные ряды скважин, именно так, как применялся до сих пор член $q \ln r$, выражающий собой долю давления единичной скважины. Поэтому интересно рассмотреть более детально это уравнение.

Как это можно проверить прямой подстановкой, уравнение (2) удовлетворяет уравнению Лапласа в соответствии с требованиями распределения давления в пористой среде, несущей жидкость при установившемся состоянии, а также фактически отвечает ряду равномерно расставленных стоков. Это положение вытекает из наблюдения, что аргумент логарифма равняется нулю для ряда точек (na, d) координат стоков — центров скважин. Более того, $p(xy)$ симметрично относительно

оси ряда $y=d$ и периодично относительно x с периодом a, равным интервалу между стоками. Можно получить весьма поучительную картину на основании уравнения (2), рассматривая кривые равного давления, которые определяются этим уравнением. Эти кривые выводятся из решения:

$$\operatorname{ch}\frac{2\pi(y-d)}{a}-\cos\frac{2\pi x}{a}=\text{const}=c=e^{p/q}. \qquad (3)^1$$

На фиг. 201 дается построение уравнения (3) в координатах $x=x/a$, $y=y/a$ для $d=0$. Из фиг. 201 видно, что на расстоянии от скважин, равном общему интервалу a, т. е. при $y=\pm 1$, кривые равного давления для практических целей будут параллельны (так как ch $2\pi \gg 1$).



Фиг. 201. Контуры равного давления относительно единичного линейного ряда скважин с одинаковым расстоянием между ними; давление $p=\ln c$.

Эта характерная особенность может быть показана также построением распределения давления вдоль линий, нормальных ряду скважин. На фиг. 202 приведены две крайние кривые этого типа, показывающие давление вдоль линии, нормальной к ряду скважин и проходящей через одну из скважин, а также давление вдоль линии, нормальной к ряду скважин и проходящей в середине интервала между скважинами с $d=0$ и $q=1/2$.

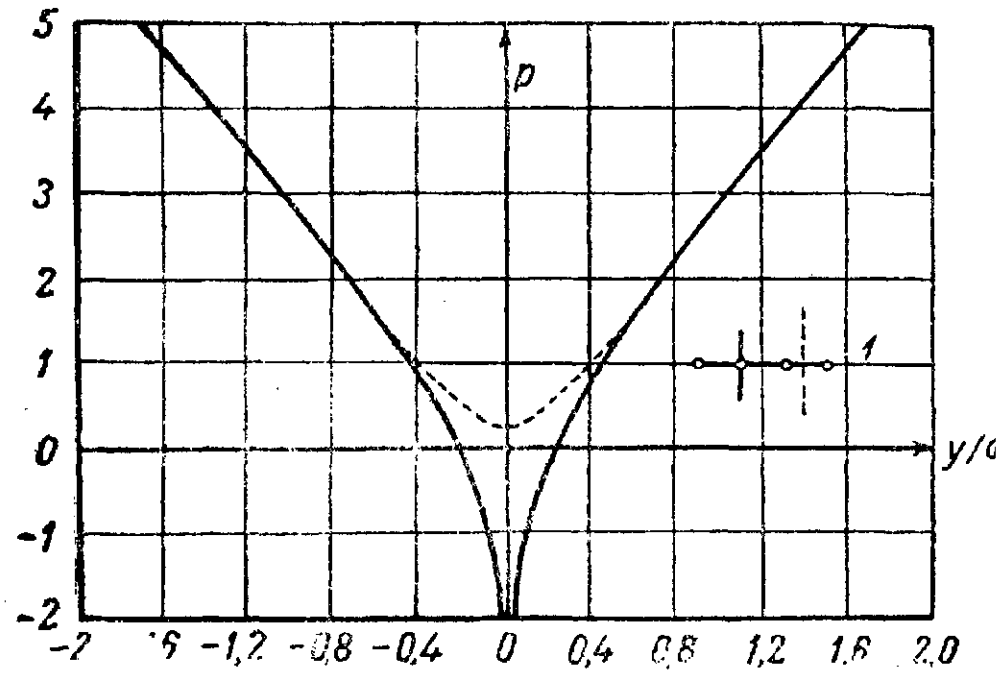
Эти кривые снова показывают, что давление практически не зависит от x, если отойти от линии ряда скважин на расстояние порядка обычного интервала между скважинами. Кроме того, фиг. 202 показывает, что на расстояниях порядка общего интервала между скважинами градиенты давления становятся постоянными, как будто ряд скважин заменен непрерывной линией стока.

---

[1] Отклонения кривых равного давления [уравнение (3)] от небольших круговых контуров скважин не имеют никакого физического значения. Однако следует заметить, из чисто академического интереса, что можно получить, если только это необходимо, строгие окружности равного давления, применяя метод сопряженных функций (R. C. J. Howland, Proc. Cambridge Phil. Soc., 30, 315, 1934).

Следующим моментом, на котором мы здесь остановимся, является точное отношение между коэфициентом расхода q и фактическим расходом Q в скважину. Для вывода этой связи заметим просто, что на очень близком расстоянии от любой рассматриваемой скважины, например, расположенной на оси y-ов, давление имеет весьма приближенно следующее значение:

$$p = q \ln 2 + 2q \ln \frac{\pi r}{a} , \qquad (4)$$



Фиг. 202. Распределение давления относительно бесконечного ряда скважин с расстоянием между скважинами a, лежащего на оси x-ов; сплошная линия — распределение давления вдоль нормали к ряду, проходящей через скважину; пунктирная линия — распределение давления вдоль нормали к ряду, проходящей между двумя скважинами.

1 — линейный ряд скважин.

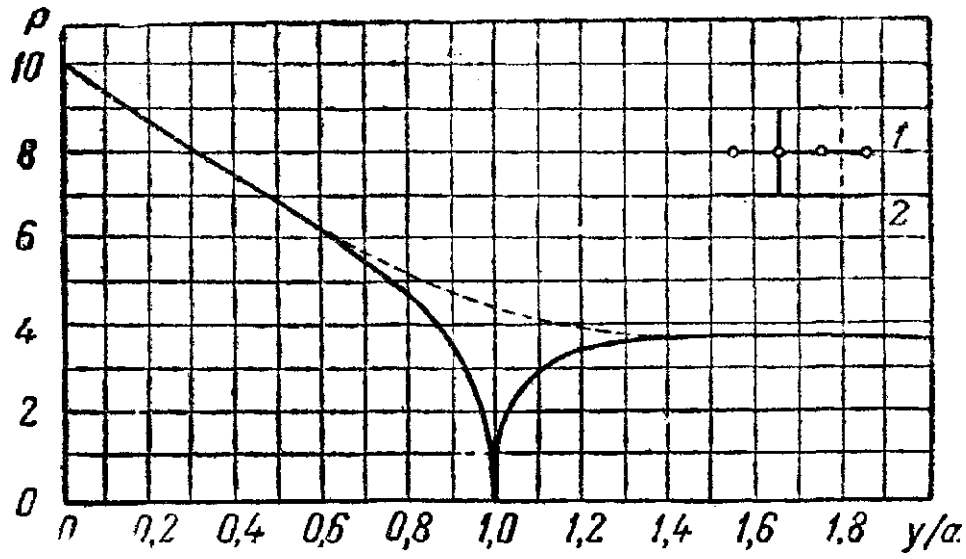
где r представляет собой расстояние от скважины. Поэтому фактический расход в скважину выразится:

$$Q = -\frac{2\pi k r dp}{\mu dr} = \frac{4\pi k q}{\mu} , \qquad (5)$$

где мощность песчаника опять принимается за единицу. Как уже было отмечено, распределение давления, которое представлено уравнением (2), дает систему кривых равного давления, практически параллельных линии скважин на расстоянии от последней порядка общего интервала между скважинами. Однако для практических целей более удобным является применение распределения давления, которое дает строго постоянное давление на линии, параллельной ряду скважин, при установленном расстоянии от последнего. Этой линии придается физический смысл „напорной линии“, которая оттесняет жидкость на линию размещения скважин. Для получения такого распределения необходимо только дать отражение данного ряда на линию, которая находится под постоянным давлением, а затем прибавить функции давления, обязанные действительному и мнимому ряду скважин. Так, если допустить, что в системе координат на фиг. 200 осью x является линия постоян-

ного давления (напорная линия), то необходимо сложить давления, созданные данной линией на расстоянии d вверх от оси, и давления, созданные ее отрицательным отображением на расстоянии d ниже оси. Отсюда следует, что давление, возникающее в такой системе, можно выразить следующим:

$$p = C \mp q \ln \frac{\operatorname{ch} 2\pi\ (y-d)/a - \cos 2\pi x/a}{\operatorname{ch} 2\pi\ (y+d)/a - \cos 2\pi x/a}, \qquad (6)$$



Фиг. 203. Распределение давления, нормальное к бесконечному ряду скважин, с расстоянием между скважинами a, при $y = a$, и напорной линией при $y = 0$;

сплошная линия — распределение давления вдоль нормали к ряду, проходящей через скважину; пунктирная линия — распределение давления вдоль нормали к ряду, проходящей между двумя скважинами.

1 — ряд скважин; *2* — напорная линия.

где C — постоянное давление, поддерживаемое на „напорной линии“ ($y = 0$). Кривые равного давления такой системы даются выражением:

$$\frac{\operatorname{ch} 2\pi\ (y-d)/a - \cos 2\pi x/a}{\operatorname{ch} 2\pi\ (y+d)/a - \cos 2\pi x/a} = \text{const}, \qquad (7)$$

особый случай которого будет, очевидно, при положении напорной линии контура в $y = 0$.

Распределение давления вдоль линий, нормальных к рядам скважин, в одном случае проходящих через скважину, а во втором случае проходящих через середину интервала между скважинами (фиг. 203), с константами C и q, имеющими соответственно значения 10 и $^1/_2$, и расстояние h, равное общему интервалу a. Из рассмотрения фиг. 203 следует, что для ряда скважин, который питается от напорной линии при $y = 0$, давление не будет больше симметричным относительно ряда скважин. Несомненно, что напорная линия совместно с принятым рядом скважин создает местный градиент в направлении, нормальном к линии напора. Однако вне фронта скважин в системе не существует общей миграции, имеющей связь с этим градиентом, так как течение из напорной

линии для каждой единицы длины, равной интервалу между скважинами в ряду скважин, имеет значение:

$$Q = -\frac{k}{\mu}\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{y=0} dx = \frac{4\pi kq}{\mu},$$

что является расходом на скважину в ряду. (Это вполне вероятно, если обратить внимание на то, что некоторое количество жидкости проходит через фронт скважин вдоль линий тока в площади, расположенной между скважинами, и эти линии тока, загибаясь обратно, приближаются к скважинам со стороны, противоположной направлению напора.

Наконец, весьма интересно подсчитать эффективное сопротивление системы. Из уравнения (6) видно, что давление на скважинах, ограниченных небольшими окружностями, радиусом r_w относительно точек (na, d) дается выражением:

$$p_w = C + 2q \ln \frac{\operatorname{sh} \pi r_w/a}{\operatorname{sh} 2\pi d/a}. \tag{8}$$

Так как C представляет собой давление на линии напора, то разность давлений, действующая в системе, будет $C - p_w = \Delta p$. Принимая в расчет уравнение (5), получаем:

$$Q = \frac{2\pi k \Delta p}{\mu \ln \dfrac{\operatorname{sh} 2\pi d/a}{\operatorname{sh} \pi r_w/a}}. \tag{9}$$

Так как $r_w/a \ll 1$ и $2d/a$ имеют обычно порядок 1 или несколько больше, то уравнение (9) можно написать в следующем виде:

$$Q = \frac{2\pi k \Delta p/\mu}{\ln\left(\dfrac{ae^{\frac{2\pi d}{a}}}{2\pi r_w}\right)}. \tag{10}$$

Интересно заметить, что уравнение (10) точно соответствует расходу при строго радиальном течении между скважиной с радиусом r_w и эффективным внешним концентричным круговым контуром с радиусом

$$r_e = \frac{a}{2\pi} e^{\frac{2\pi d}{a}}. \tag{11}$$

Как и следует ожидать, пока $d/a \ll 0{,}3$, то $r_e > a$, так как высокое давление прикладывается только с одной стороны скважины и не является симметричным по сравнению с радиальным течением. Тогда эффективное сопротивление системы дается через $\Delta p/Q$ или

$$R = \frac{\mu}{2\pi k} \ln \frac{ae^{\frac{2\pi d}{a}}}{2\pi r_w} \tag{12}$$

Наконец, эффект взаимной интерференции в бесконечной сетке размещения скважин вытекает непосредственно из уравнения (10) при сравнении последнего с расходом Q_0 для единичной скважины [(3), гл. IX, п. 6]. Так, для $d/a=1$; $d/r_w=400$, найдем, что

$$\frac{Q}{Q_0}=0{,}641.$$

Сравнивая этот вывод с конечными результатами, гл. IX, п. 6, видно, что интерференция, возникающая от скважин, находящихся на значительном расстоянии от любой рассматриваемой, должна быть сравнительно небольшой. Только ближайшие скважины с одной и другой стороны по отношению к рассматриваемой в состоянии уменьшить эксплоатационную производительность до 79% Q_0.

Вполне достаточно рассмотрения единичного ряда скважин, чтобы дать общую картину характерных свойств, присущих бесконечным линейным рядам. Однако практические проблемы включают в себя обычно явления взаимодействия и интерференции между двумя и более рядами.

Раньше, чем приступить к анализу более сложных систем, покажем более отчетливо физический смысл понятия „напорная линия“, которое мы считаем весьма удобным применять в последующих рассмотрениях довольно часто и которое нами уже было введено в предыдущий анализ. Если подвергнуть это понятие интерпретации в буквальном смысле этого слова, то „напорную линию“ можно принять как концентрированный линейный источник жидкости, искусственно помещенный параллельно рядам рассматриваемых скважин. Как источник это понятие будет иметь весьма ограниченное практическое значение[1]. Поэтому, чтобы получить физическую интерпретацию этого понятия, следует заметить, что „напорная линия“ представляет собой только удобное аналитическое воспроизведение течения жидкости в целом, являющейся внешней по отношению к рядам размещения скважин и на них непосредственно воздействующую.

Так, изучая взаимодействие между скважинами на большом участке месторождения или резервуаре жидкости с группой близко расположенных скважин или рядов последних, видно, что применение понятия „напорная линия“ позволяет заменить сложное описание и детальное математическое исследование внутренней области нефтяного участка его аналитическим эквивалентом — распределением давления вдоль границ нефтяного участка. Чтобы найти течение из большого резервуара в систему рядов скважин, необходимо вместо резервуара представить себе среднее его давление вдоль границы последнего параллельным внешней системе скважин. Затем допустим существование „напорной линии“, которое поддерживается при среднем давлении и обеспечивает поступление жидкости в систему скважин.

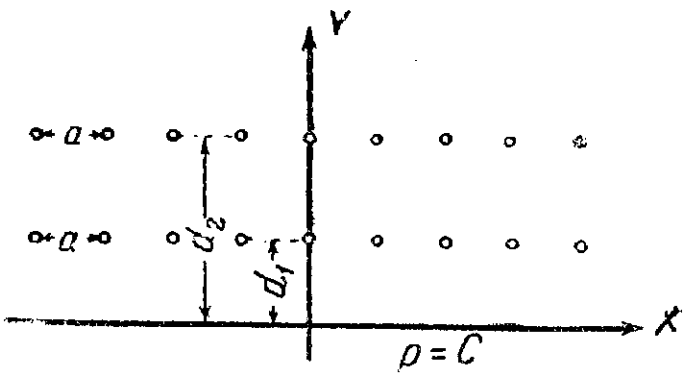
Как это будет рассмотрено в дальнейшем, при математической обработке проблемы бурения выброшенных скважин можно заменить несколько взаимно воздействующих друг на друга участков напорными

---

[1] См. гл. IX, п. 6, где „напорная линия“ фактически представляет собой развитый линейный источник, например, реку или канал, где имеется выход проницаемых песчаников.

линиями, расположенными вблизи границ последних. Этим линейным контурам придаются давления, соответствующие средним давлениям, которые наблюдаются вблизи границ рассматриваемых участков.

9. Двухлинейное расположение скважин. Эффект заслона. Для того чтобы подвергнуть математической обработке задачу о двух линейных рядах скважин, которые могут соответствовать на практике линиям скважин, выброшенным за границу участка, необходимо прибавить к уравнению (6), гл. IX, п. 8, еще один логарифмический член с другим d. Допустим для ясности, что первый ряд находится на расстоянии d_1 от напорной линии с давлением C, а второй ряд при $y=0$ находится на расстоянии d_2 от нее. Как показывает фиг. 204, примем расстояние между скважинами в пределах этих двух рядов имеющим одно и то же значение a, и допустим размещение обоих рядов так, чтобы скважины второго ряда были точно позади скважин первого ряда. Тогда, беря уравнение (6), гл. XI, п. 8, в качестве основного элемента, соответствующего единичному ряду скважин, получим, что распределение давления в двухлинейной системе скважин выразится:



Фиг. 204. Схематическое изображение напорной линии питающей жидкостью два ряда скважин.

$$p = C + q_1 \ln \frac{\operatorname{ch} 2\pi (y - d_1)/a - \cos 2\pi x/a}{\operatorname{ch} 2\pi (y + d_1)/a - \cos 2\pi x/a} + \\ + q_2 \ln \frac{\operatorname{ch} 2\pi (y - d_2)/a - \cos 2\pi x/a}{\operatorname{ch} 2\pi (y + d_2)/a - \cos 2\pi x/a}, \qquad (1)$$

где $4\pi k q_1/\mu$ и $4\pi k q_2/\mu$ являются соответственно расходами на скважину в первом и втором ряду скважин. То обстоятельство, что q_1 и q_2 не берутся равными величинами, возникает из асимметрии системы, которая вводится сделанным допущением, а именно — два ряда скважин дают свою добычу под воздействием только напорной линии при $y=0$. Эта линия находится, очевидно, ближе к первому ряду скважин по сравнению со вторым. Фактически отклонение отношения q_1/q_2 от единицы может служить мерилом эффекта заслона первого ряда скважин по отношению ко второму, что с практической точки зрения представляет собой особый интерес.

Чтобы найти реальное значение отношения q_1/q_2, необходимо, очевидно, заранее установить давления, при которых скважины дают свою добычу в обоих этих рядах. Если только оба эти ряда скважин не разделены физической границей участка, можно допустить, что скважины работают при почти одинаковых забойных давлениях и постоянстве условий залегания песчаника. Это было уже нами заранее принято во всем настоящем анализе. Более того, явление заслона, интерференции и взаимодействия между двумя рядами скважин будет всецело зависеть от геометрической асимметрии их положений по отношению к напорной линии. Допущение различных забойных давлений скважин

в обоих рядах влечет за собой дополнительное взаимодействие. которое будет стремиться замаскировать параметры системы, зависящие от ее геометрии.

Отсюда устанавливается требование, чтобы давление на скважинах в обоих рядах было совершенно точно одним и тем же. Тогда, чтобы определить отношение q_1/q_2, достаточно уравнять значения p при двух скважинах на оси y согласно уравнению (1) или, более точно, при двух точках $(0,\ d_1-r_w)$ и $(0,\ d_2-r_w)$, где радиус скважины принимается очень малым по сравнению с d_1 и d_2 или расстоянием между скважинами — a. Таким образом, найдем:

$$\frac{q_1}{q_2}=\frac{\ln\dfrac{\operatorname{sh}\pi r_w/a\,\operatorname{sh}\pi(d_2+d_1)/a}{\operatorname{sh}2\pi d_2/a\,\operatorname{sh}\pi(d_2-d_1)/a}}{\ln\dfrac{\operatorname{sh}\pi r_w/a\,\operatorname{sh}\pi(d_2+d_1)/a}{\operatorname{sh}2\pi d_1/a\,\operatorname{sh}\pi(d_2-d_1)/a}}. \tag{2}$$

Проанализируем это уравнение, чтобы посмотреть, как изменяется q_1/q_2 в зависимости от некоторых входящих в него главных переменных величин. Первый случай, который мы рассмотрим, будет изменение q_1/q_2 в зависимости от изменения d_1 — расстояния от положения напорной линии питания до первого ряда скважин. С этой целью допустим, что остальные переменные остаются постоянными и что оба линейных ряда скважин разделены интервалом, равным взаимному их размещению. Принимаем отношение радиуса скважины к интервалу размещения — 0,000375, что соответствует радиусу скважины 0,075 *м* и интервалу между скважинами ~201 *м*. Тогда уравнение (2) можно переписать так:

$$\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{q_1}{q_1}=\frac{\ln\dfrac{0{,}000375\operatorname{sh}\pi\sin\pi\left(1+\dfrac{2d_1}{a}\right)}{\sin 2\pi\left(1+\dfrac{d_1}{a}\right)\operatorname{sh}\pi}}{\ln\dfrac{0{,}000375\operatorname{sh}\pi\left(1+\dfrac{2d_1}{a}\right)}{\operatorname{sh}2\pi d_1/a\,\operatorname{sh}\pi}}. \tag{3}$$

Для полноты рассмотрения было бы гораздо лучше выразить эффект заслона отношением величины течения в первом ряду скважин ко всей суммарной величине течения. Обозначая это отношение через S, получим значение эффекта из следующего выражения:

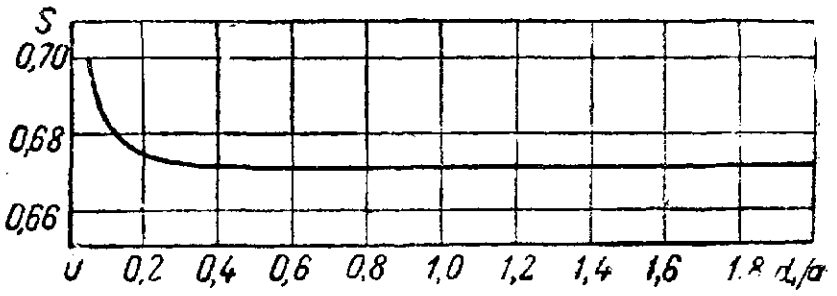
$$S=\frac{Q_1}{Q_1+Q_2}=\frac{1}{1+Q_2/Q_1}, \tag{4}$$

которое можно легко подсчитать, так как Q_2/Q_1 известно из уравнения (3). Можно отметить также, что утечка во второй ряд дается величиной $(1-S)$. Так, например, при эффекте заслона 100% $S=1$ и, как это следует ожидать, утечка равняется нулю.

Фиг. 205 дает построение уравнения (4) как функции d_1/a. Кривая на этой фигуре имеет две интересные точки. Первая точка показывает, что когда напорная линия весьма далеко отстоит от эксплоатационных скважин, и интервалы обоих рядов скважин от этой линии становятся

действительно равными между собой, эффект заслона падает не ниже 67%, а утечка во второй ряд достигает 33%. Это обстоятельство может показаться на первый взгляд поразительным в свете того явления, что когда положение напорной линии питания далеко от скважин, то последние хотя и будут расположены одна позади другой, но практически будут казаться расположенными на одинаковом расстоянии от положения линейного контура. Отсюда они должны давать то же самое количество жидкости.

Если вспомнить, что эффект заслона и утечки между двумя рядами скважин определяется только природой распределения давления относительно последних и что это обстоятельство не может заметно нарушиться изменением положения линейного контура питания, поскольку последний находится от ряда скважин на расстоянии порядка их взаимного расположения, можно вполне ожидать существование эффекта заслона на значительных расстояниях от положения линейного контура питания. Эти наблюдения в то же самое время поясняют остальные интересные особенности кривых. Так, интерференция существует не только при больших величинах (т. е. $S > {}^1/_2) d_1/a$, но предельные значения для S достигаются очень быстро и доходят почти до 0,1%, когда положение линейного контура питания находится на расстоянии от первого ряда скважин на 0,4 их взаимного расположения. Это заключение опять вытекает из того положения, что поскольку линейный контур питания перемещается вне $d_1/a \sim 0{,}4$, распределение давления в непосредственной близости к рядам скважин, вне зависимости от точного значения d_1/a, остается почти тем же самым. Разумеется, абсолютное значение давления в любой точке зависит от d_1/a, но эффект заслона и утечки определяются только геометрической формой кривых равного давления и линий тока относительно скважин и практически не зависят от d_1/a для $d_1/a > 0{,}5$.



Фиг. 205. Изменение эффекта заслона между двумя рядами скважин в зависимости от расстояния d_1 напорной линии от первого ряда скважин:

S — (эксплоатационная производительность на скважину в первом ряду), / (эксплоатационная производительность на две скважины в обоих рядах); $a = 201$ м — расстояние между скважинами и между обоими рядами.

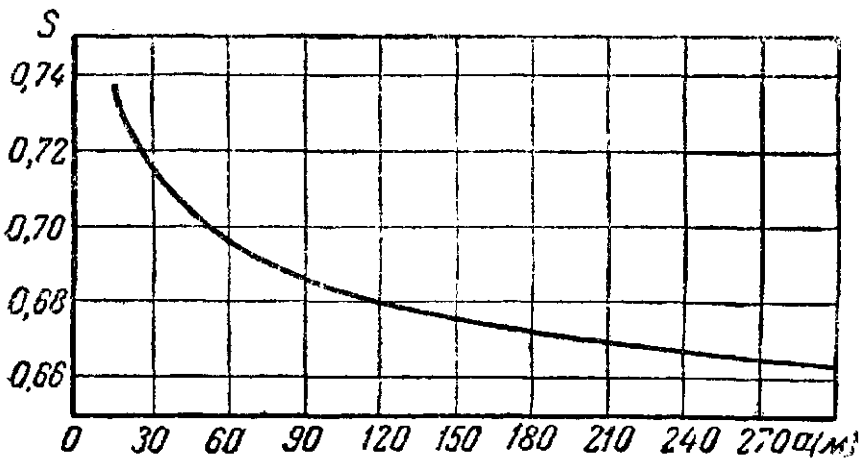
На практике расстояние от линейного контура питания до рядов размещения скважин обычно бывает порядка нескольких сот метров. Поэтому из приведенного рассмотрения видно, что при математической обработке остальных этапов задачи, не вводя в решение ошибки, большей 0,1%, можно допустить для удобства, что d_1/a точно равняется единице. Отсюда для изучения влияния абсолютного значения расстояния a между скважинами мы должны допустить, что оба ряда скважин разделены интервалом со значением a и что положение линейного контура питания также находится на расстоянии a от скважин, т. е. что

$$d_1 = a, \quad d_2 = 2a.$$

Тогда уравнение (2) принимает вид:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\ln \dfrac{\operatorname{sh} \pi r_w / a \operatorname{sh} 3\pi}{\operatorname{sh} 4\pi \operatorname{sh} \pi}}{\ln \dfrac{\operatorname{sh} \pi r_w / a \operatorname{sh} 3\pi}{\operatorname{sh} 2\pi \operatorname{sh} \pi}} \cong 1 + \frac{2\pi}{\ln a/2\pi r_w}. \qquad (5)^1$$

На фиг. 206 дано построение отношения величины эффекта заслона S, соответствующее уравнению (5). Из этой фигуры видно, что с увеличением расстояния между скважинами эффект заслона уменьшается и увеличивается утечка через первую линию. Однако величина этого изменения невелика, так как увеличение утечки на 5% имеет место при увеличении расстояния между скважинами с 30,5 до 305 *м*. Этот интересный вывод показывает, что вряд ли будет практичным попытаться уменьшить в значительной степени утечку между двумя рядами скважин простым уменьшением расстояния между ними.



Фиг. 206. Изменение эффекта заслона между двумя рядами скважин в зависимости от расстояния между скважинами a;

S — (эксплоатационная производительность на скважину в первом ряду) / (эксплоатационная производительность на две скважины в обоих рядах). Ряды скважин установлены на расстоянии a и $2a$ от напорной линии.

Следует заметить, между прочим, что это заключение относится специально к тому случаю, где не только сохраняется одно и то же забойное давление в обоих рядах скважин, но где в то же самое время ряды скважин разделены всегда постоянным интервалом внутри самих рядов.

В последнем разделе настоящей главы будет подвергнута математической обработке задача расстановки выброшенных скважин. Там будет показано, что если желают изменить давления скважин в одном из рядов размещения последних по сравнению с остальными, утечке между рядами можно дать, в известных пределах, любое произвольное значение.

Когда рассматриваемая задача не относится к проблеме расстановки выброшенных скважин, можно сохранить давления скважин в обоих рядах одним и тем же и все же изменять величину утечки, изменяя расстояние между рядами. Величину этого эффекта можно наблюдать, принимая следующие значения:

$$d_1 = a;\ d_2 = d_1 + \Delta d = a + \Delta d;\ a = 201\ м;\ r_w = 0{,}075\ м,$$

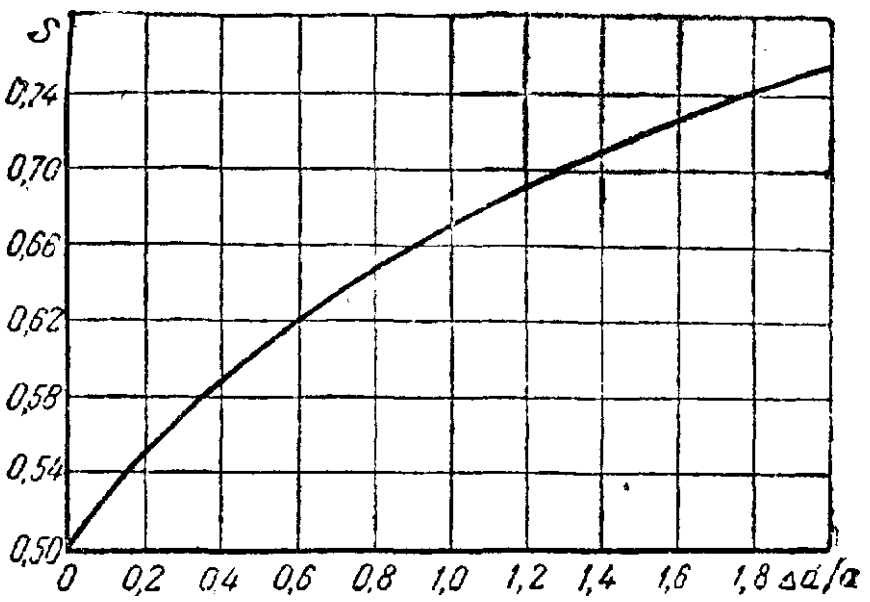
---

[1] Интересно заметить, что изменения в величине Q/Q_2 или утечки при одинаковом взаимном размещении совершенно те же самые, что и вытекающие из изменения радиуса скважины r_w.

и приводя уравнение (2) к следующей форме:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\ln \dfrac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi r_w}{a}\operatorname{sh}\pi\left(2+\dfrac{\Delta d}{a}\right)}{\operatorname{sh} 2\pi\left(1+\dfrac{\Delta d}{a}\right)\operatorname{sh}\dfrac{\pi\Delta d}{a}}}{\ln \dfrac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi r_w}{a}\operatorname{sh}\pi\left(2+\dfrac{\Delta d}{a}\right)}{\operatorname{sh} 2\pi \operatorname{sh}\dfrac{\pi\Delta d}{a}}} \cong 1 + \frac{2\pi\Delta d/a}{\ln a/2\pi r_w}; \frac{\Delta d}{a} \gg 1. \qquad (6)$$

Функция заслона S для этих уравнений построена на фиг. 207. Как и следует ожидать, эффект заслона возрастает по мере того, как второй ряд скважин отдаляется от первого ряда. Величина изменения этого эффекта несколько больше, чем соответствующий эффект заслона, являющийся результатом изменения интервала между скважинами. Поэтому до тех пор, пока давления скважин сохраняются в обоих рядах одинаковыми и ни одно из расстояний, например, a, d, $\Delta d/a$, не становится очень малым, можно ожидать, что эффект заслона имеет значение грубо 2/3, т. е. почти 1/3 суммарного течения в системе будет проходить через первый ряд скважин и входить во вторую линию (т. е. $Q_1/Q_2 \sim 2$) вне зависимости от точного значения a, d или Δd.



Фиг. 207. Изменение эффекта заслона между двумя рядами скважин в зависимости от расстояния Δd между ними:

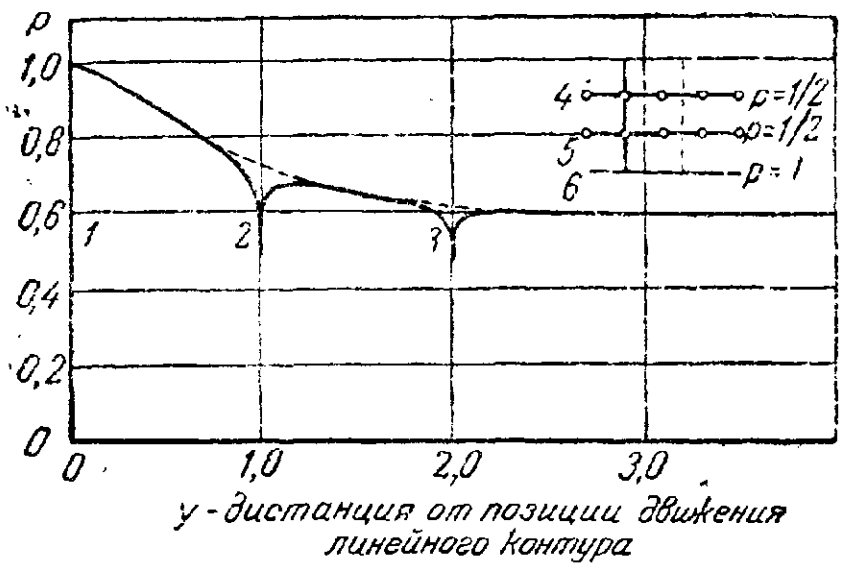
S — (эксплоатационная производительность на скважину в первом ряду) / (эксплоатационная производительность на две скважины в обоих рядах); $a = 201$ *м* — расстояние между скважинами внутри рядов и расстояние первого из них от напорной линии.

Как было уже отмечено, общая характеристика эффекта утечки и заслона в системе рядов размещения скважин в значительной степени определяется распределением давления в непосредственной близости к рядам размещения. Поэтому, чтобы более ясно представить себе основы рассмотренного эффекта, важно получить, по крайней мере, общую картину этого распределения. С другой стороны, мы до сих пор не в состоянии показать отдельные детали этого распределения, так как согласно уравнению (1) последнее зависит полностью от значений q_1 и q_2 или эффекта заслона в системе. Вместе с тем мы знаем, что до тех пор, пока давления скважин в обоих рядах размещения сохраняются одними и теми же, отношение q_1/q_2 или эффект заслона не изменяется так сильно в зависимости от изменения других констант системы. Отсюда значение S около 2/3 явится показательным примером, на котором возможно будет основывать подсчет давления. Выберем такой случай, где взаимное расположение скважин, интервал между рядами и расстояние первого ряда скважин от положения „напорной

линии питания" будут одинаковы. Примем определенно, что давления скважин составляют половину давления на „линии питания". Тогда из фиг. 207 следует, что

$$q_1/q_2 = 2{,}04;\ p = 1;\ y = 0;\ p = 1/2;\ y = 1 \pm r_w;\ x = 0.$$

Абсолютные значения q_1 и q_2 даются уравнением (1) с конечным результатом $q_1 = 0{,}0162$. На фиг. 208 приведено построение распределения давления, подсчитанное с этими константами, вдоль нормали к рядам скважин, проходящей последовательно к двум скважинам, а также вдоль нормали, проходящей через середину интервала между двумя парами скважин. Из этой фигуры видно, что обе эти кривые практически повсюду совпадают, за исключением участков, непосредственно близких к рядам скважин. Это указывает на характерную локализацию влияния единичной скважины на остальные. Результирующее распределение давления быстро сливается в одну кривую, которая соответствует постоянному распределению линии стоков, если отойти на короткое расстояние от рядов скважин.



Фиг. 208. Распределение давления вдоль линий, нормальных к двум параллельным рядам скважин, которые питаются одной напорной линией. Расстояние между рядами скважин, а также между первым рядом и напорной линией берется равной расстоянию между скважинами внутри рядов, которое принимается за единицу.

Давление на напорной линии равно единице; давление в рядах скважин — $^1/_3$ единицы; сплошные линии — распределение давления вдоль линии, проходящей через скважину; пунктирные линии — распределение давления вдоль линии, проходящей посредине, между двумя скважинами.

1 — напорная линия; *2* — первый ряд скважин; *3* — второй ряд скважин; *4* — вторая линия; *5* — первая линия; *6*—напорная линия.

Из фиг. 208 следует, что для больших расстояний за рядами скважин значение давления приближается к 0,6 его нормальной величины и остается далее постоянным. Этот вывод с физической стороны соответствует условию, — если давление в области слева от скважин (на фиг. 208) равняется единице, то давление в области справа от скважин — 0,6. Однако в действительности справа от ряда скважин можно иметь по желанию любую отличную величину давления. Соответствующее решение, которое отвечает этим условиям, можно получить довольно легко. Вместе с тем следует заметить, что произвольный выбор давления с обеих сторон рядов скважин накладывает известные условия относительно течения жидкости в системе. Так, рассчитывая течение на скважину через линию $y = \text{const}$ параллельно ряду скважин, например,

$$Q = -\frac{2k}{\mu}\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{\partial p}{\partial y}\, dx,$$

найдем, что

$$Q = \frac{4\pi k q_1}{\mu} + \frac{4\pi k q_2}{\mu}: \quad 0 \leqslant y < d_1,$$

$$Q = \frac{4\pi k q_2}{\mu}: \quad d_1 < y < d_2,$$

$$Q = 0; \quad d_2 < y. \tag{7}$$

Это, очевидно, обозначает, что суммарное течение $\frac{4\pi k (q_1 + q_2)}{\mu}$, которое выходит из контура высокого давления $y = 0$, полностью поступает во внутреннюю область двухрядного размещения скважин, не образуя остаточного течения, проникающего в область пониженного давления на внешней стороне рядов скважин. С другой стороны, уравнение (7) показывает, что давление при $y > d_2$ (площадь на некотором расстоянии позади второго ряда) выше давлений скважин, и из этой области нет течения в ряды скважин [1].

Эти конечные выводы по необходимости налагают условие и вместе с тем удовлетворяются распределением давления, показанным на фиг. 208. Таким образом, давление для $y > d_2$ равняется приблизительно 0,6 от давления при $y = 0$. Отсюда, если заранее наметить p так, чтобы для $y > d_2$, $p \neq 0{,}6$, то зависимости расхода, приведенные в уравнении (7), будут по необходимости нарушены.

Как это будет детально показано при рассмотрении проблемы размещения выброшенных скважин, можно получить распределение давления, где $p \neq 0{,}6$ для $y > d_2$, прибавлением к уравнению (1) члена αy и изменением величины α так, чтобы, например, при $y = d_2 + a$, $-p$ имело заранее установленное произвольное значение. Это обстоятельство накладывает условие, что существует общий расход $a\alpha$ на скважину через систему рядов скважин. Вместе с тем, если все же желают, чтобы давления скважин сохранялись прежними, то отношения q_1/q_2, как они даются уравнением (2), должны быть видоизменены.

Отсюда вытекает, что численные свойства распределения давления (фиг. 208) являются в действительности необходимым следствием из допущения, что через ряды скважин отсутствует остаточное миграционное течение. Если же только допустить такую миграцию, то давлениям в области низкого давления можно придать любое, заранее выбранное значение. Последним интересующим нас вопросом, относящимся к системе двухрядного размещения скважин, будет являться вывод точной зависимости между суммарным расходом для пары скважин в системе и общим перепадом давления между скважинами и напорной линией питания. Принимая, что $\frac{(d_2 - d_1)}{a}$ и d_1/a порядка единицы и что $2\pi r_w/a \ll 1$, получаем из уравнения (1):

$$\Delta p = 2q_1\left(\frac{2\pi d_1}{a} + \ln\frac{a}{2\pi r_w}\right) + \frac{4\pi q_2 d_1}{a} = \frac{Q\mu d_1}{ak} + 2q_1 \ln\frac{a}{2\pi r_w}.$$

---

[1] Из фиг. 208 можно заметить, что вдоль линий, пересекающих середину интервала между скважинами, градиенты для $y > d_2$ направлены в сторону от второго ряда и, таким образом, уничтожают градиенты, направленные к ряду вдоль линий, проходящих через скважины.

Далее, согласно уравнениям (4) и (7):

$$Q = \frac{4\pi k q_1}{\mu S} = \frac{4\pi k q_1}{(1-L)\mu} : \; L = 1 - S,$$

где L — представляет собой утечку.

Отсюда

$$Q = \frac{2\pi k \Delta p/\mu}{\frac{2\pi d_1}{a} + (1-L)\ln\frac{a}{2\pi r_w}}, \qquad (8)$$

что, очевидно, будет выше по сравнению с соответствующим значением из уравнения (10), гл. IX, п. 8, для однорядного размещения скважин. Это вызвано наличием фактора утечки L. Поэтому эффективное сопротивление системы скважин, размещенных в два ряда, можно выразить

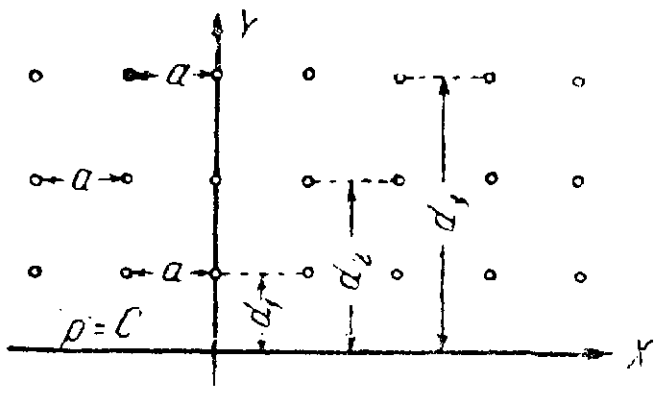
$$R = \frac{\mu\left(\frac{d_1}{a} + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{a}{2\pi r_w} - \frac{L}{2\pi}\ln\frac{a}{2\pi r_w}\right)}{k}. \qquad (9$$

Сравнивая это уравнение с (12), гл. IX, п. 8, для размещения в один ряд, видно, что уменьшение сопротивления, которое дает уравнение (9) для системы, представлено только последним членом, пропорциональным утечке, соответствующей второму ряду скважин. Возьмем в качестве показательного примера следующий случай:

$$S = {}^2/_3; \; d_1/a = 1; \; a/r_w = 2640.$$

Тогда найдем, что проводимость $Q/\Delta p$ в уравнении (8) составляет $0{,}6094\, k/\mu$ по сравнению со значением $0{,}5098\, k/\mu$, соответствующим уравнению (10), гл. IX, п. 8, или для $L = 0$ в (8).

10. Размещение скважин тремя рядами. По мере того, как в системе увеличивается число рядов скважин, выражения, показывающие различные характеристики эффекта заслона и утечки, становятся все более и более сложными. Вместе с тем вывод этих выражений остается по существу тем же самым, что и для случая размещения скважин в два ряда. Поэтому мы распространим полученную аналитическую процедуру только на трехрядную систему, так как всякие дополнительные материалы, которые можно получить из математической обработки большого числа рядов скважин, едва ли оправдают их рассмотрение. Начнем опять с выражения для распределения давления, которое возникает вследствие наличия трехлинейных рядов, с равным интервалом a между ними, и размещенных на



Фиг. 209. Схематическое изображение напорной линии питающей жидкостью три ряда скважин.

расстоянии d_1, d_2 и d_3 от оси y, давление на которой принимается равным C (фиг. 209). Тогда можно написать:

$$p(x,\ y) = C + q_1 \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{2\pi (y - d_1)}{a} - \cos \frac{2\pi x}{a}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi (y + d_1)}{a} - \cos \frac{2\pi x}{a}} + \left.\begin{aligned} &+ q_2 \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{2\pi (y - d_2)}{a} - \cos \frac{2\pi x}{a}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi (y + d_2)}{a} - \cos \frac{2\pi x}{a}} + \\ &+ q_3 \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{2\pi (y - d_3)}{a} - \cos \frac{2\pi x}{a}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi (y + d_3)}{a} - \cos \frac{2\pi x}{a}}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Так же как и раньше, члены $4\pi k q_1/\mu$, $4\pi k q_2/\mu$ и $4\pi k q_3/\mu$ представляют собой величины чистых расходов на скважину, поступающих в скважины, размещенные в три ряда. В анализе проблем одно- и двухрядного размещений было уже показано, что если только $d_1/a < 0{,}5$, то можно пренебречь изменением эффекта заслона в системе с изменением d_1, и значение этого эффекта можно принять соответственно величине его, представленного для $d_1/a = 1$. Тогда, принимая

$$\frac{d_1}{a} = 1; \quad \frac{(d_2 - d_1)}{a} = b; \quad \frac{(d_3 - d_2)}{a} = c; \quad \frac{r_w}{a} = \varrho$$

и допуская, что давления скважин в трех рядах были одними и теми же, можно найти эффект заслона решением

$$p(0, d_1 - r_w) = p(0, d_2 - r_w) = p(0, d_3 - r_w) \quad (2)$$

для q_2/q_1 и q_3/q_2.

В результате получаются решения в форме детерминантов

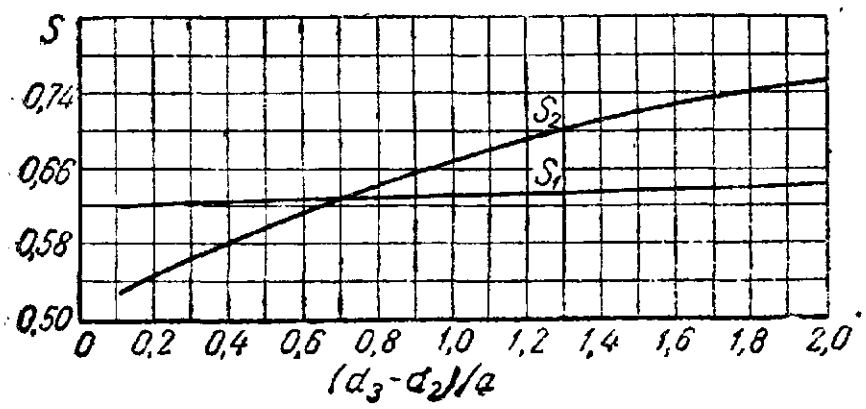
$$\frac{q_2 \Delta}{q_2} = \begin{vmatrix} \ln \frac{\operatorname{sh} \pi b \operatorname{sh} 2\pi}{\operatorname{sh} \pi (2 + b) \operatorname{sh} \pi\varrho} \\ \ln \frac{\operatorname{sh} \pi (b + c) \operatorname{sh} \pi (2 + 2b + c)}{\operatorname{sh} \pi (2 + b + c) \operatorname{sh} \pi c} \\ \ln \frac{\operatorname{sh} \pi (b + c) \operatorname{sh} 2\pi}{\operatorname{sh} \pi (2 + b + c) \operatorname{sh} \pi\varrho} \\ \ln \frac{\operatorname{sh} \pi (b + c) \operatorname{sh} 2\pi (b + c + 1)}{\operatorname{sh} \pi (2 + b + c) \operatorname{sh} \pi\varrho} \end{vmatrix} \quad (3)$$

$$\frac{q_3 \Delta}{q_1} = \begin{vmatrix} \ln \frac{\operatorname{sh} \pi b \operatorname{sh} 2\pi (1 + b)}{\operatorname{sh} \pi (2 + b) \operatorname{sh} \pi\varrho} \\ \ln \frac{\operatorname{sh} \pi b \operatorname{sh} 2\pi}{\operatorname{sh} \pi (2 + b) \operatorname{sh} \pi\varrho} \\ \ln \frac{\operatorname{sh} \pi b \operatorname{sh} \pi (2 + 2b + c)}{\operatorname{sh} \pi (2 + b) \operatorname{sh} \pi c} \\ \ln \frac{\operatorname{sh} \pi (b + c) \operatorname{sh} 2\pi}{\operatorname{sh} \pi (2 + b + c) \operatorname{sh} \pi\varrho} \end{vmatrix} \quad (4)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \ln \dfrac{\operatorname{sh} \pi b \operatorname{sh} 2\pi (1+b)}{\operatorname{sh} \pi (2+b) \operatorname{sh} \pi \varrho} \\ \ln \dfrac{\operatorname{sh} \pi (b+c) \operatorname{sh} \pi (2+2b+c)}{\operatorname{sh} \pi (2+b+c) \operatorname{sh} \pi c} \\ \ln \dfrac{\operatorname{sh} \pi b \operatorname{sh} \pi (2+2b+c)}{\operatorname{sh} \pi (2+b) \operatorname{sh} \pi c} \\ \ln \dfrac{\operatorname{sh} \pi (b+c) \operatorname{sh} 2\pi (b+c+1)}{\operatorname{sh} \pi (2+b+c) \operatorname{sh} \pi \varrho} \end{vmatrix} \qquad (5)$$

Теперь можно перейти к детальному изучению изменения q_2/q_1 и q_3/q_1 с изменением: b — расстояния между первыми двумя рядами; c — расстояния между вторым и третьим рядами; ϱ — учитывающим влияние расстояния между скважинами a. Приведенное выше подробное математическое решение для двухрядного размещения уже показало с общей стороны природу влияния этого изменения. Поэтому количественнное рассмотрение этого вопроса будет ограничено только изменением эффекта заслона с изменением c — расстояния между вторым и третьим рядом. Расстояние между двумя первыми рядами $d_2 - d_1$ принимается равным расстоянию между скважинами a и отсюда $b = 1$. С этой целью будет весьма удобно ввести в анализ фактор эффекта заслона S_1 и S_2, где



Фиг. 210. Изменение эффекта заслона в системе, состоящей из трех параллельных рядов скважин, в зависимости от расстояния $d_3 - d_2$ между вторым и третьим рядами. Расстояние между первыми двумя рядами, а также между первым рядом скважин и напорной линией принимается равным интервалу между скважинами внутри рядов, $a = 201$ *м*:

S_1 — доля всего количества жидкости, отбираемой со всех трех рядов скважин, которая поступает в первую линию; S_2 — доля всего количества жидкости, утекающей через первый ряд скважин и поступающей во вторую линию.

$$S_1 = \frac{q_1}{q_1 + q_2 + q_3};$$

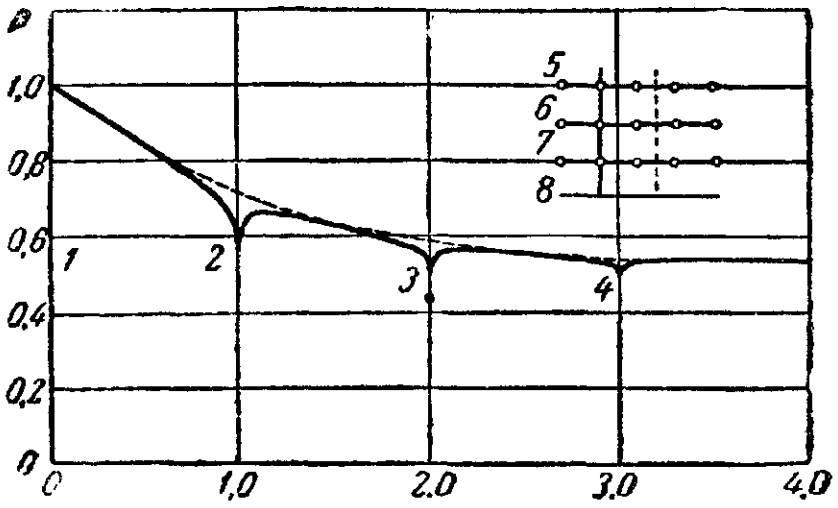
$$S_2 = \frac{q_2}{q_2 + q_3}, \qquad (6)$$

так что S_1 представляет собой долю суммарного течения, которое поступает в первый ряд скважин, а S_2 дает долю суммарного течения, которое проникает за первый линейный ряд и движется во второй ряд скважин; $1 - S_1$ — утечка позади первого ряда, а $1 - S_2$ — утечка позади второго ряда, которая движется в третий ряд скважин.

На фиг. 210 дается построение значений S_1 и S_2, подсчитанных из уравнений (3) — (6). Видно, что изменение эффекта заслона первого линейного ряда при разрыве между вторым и третьим рядом протекает достаточно медленно. С другой стороны, эффект заслона второго ряда изменяется достаточно резко с $d_2 - d_1$ и приближается к совершенному заслону ($S_2 = 1$) для бесконечного разрыва между

последними двумя линейными рядами[1]. Следует заметить по отношению к утечке позади первого ряда $(1 - S_1)$, что она гораздо выше по сравнению с соответствующей величиной в двухрядной системе расстановки скважин. Хотя по величине эта разница менее 5% суммарного течения, но, по мере того как третий ряд скважин удаляется в бесконечность, утечка стремится к нулю.

Когда расстояние между вторым и третьим рядом одинаково с интервалом между первым и вторым рядами, $1 - S_1 \sim 0{,}37$, около $^3/_8$ всего течения проходит через первый ряд скважин, $^2/_3$ утечки ($S_2 \cong ^2/_3$) или $^1/_4$ всего течения входит во второй ряд, а остальные $^1/_3 - ^1/_8$ всего течения в конечном итоге достигают третьего ряда. Это соответствует следующим отношениям эксплоатационной производительности трех рядов скважин $Q_1 : Q_2 : Q_3 = 5 : 2 : 1$.



Фиг. 211. Распределение давления вдоль линий, нормальных к трем параллельным рядам скважин; давление на напорной линии равно единице; давление на скважинах — $^1/_2$ единицы, сплошная линия — распределение давления вдоль нормали, проходящей через скважины; пунктирная линия—распределение давления вдоль нормали, проходящей посередине между скважинами; все расстояния между скважинами и линейными рядами принимаются равными единице.

Ось абсцисс — y — расстояние от напорной линии; *1* — напорная линия; *2* — первый ряд скважин; *3* — второй ряд скважин; *4* — третий ряд скважин; *5* — третья линия — $p = ^1/_2$; *6* — вторая линия — $p = ^1/_2$ *7* — первая линия — $p = ^1/_2$. *8* — напорная линия — $p = 1$.

То обстоятельство, что эффект заслона первого ряда скважин изменяется только от значения 0,671 для двухрядного размещения до 0,631 (при $c = 1$) для трехрядного размещения, показывает, что добавление в систему дополнительных рядов скважин внесет возможно незначительные изменения величины эффекта заслона и соответственно небольшие увеличения в значение утечек. Нетрудно показать, что, когда скважины размещены бесконечным числом рядов, добавленных к первому ряду, верхний предел суммарной утечки будет составлять 0,378. Физиче ское основание этого вывода заключается опять же в том, что эффект заслона и утечки позади ряда скважин определяется только распределением давления в его непосредственной близости. Так как влияние распределения давления на первый ряд скважин вследствие наличия отдаленных рядов скважин невелико, всякая дополнительная утечка, вызываемая ими, будет также очень мала. Становится вполне очевидным, что любая попытка увеличить эксплоатационную производительность односторонней системы простым добавлением рядов скважин должна быть проведена с большой осторожностью. Значительный прирост дебитов

---

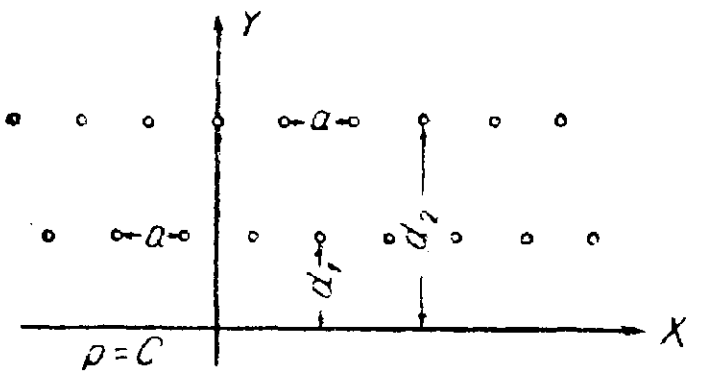
[1] Можно заметить, что кривая S_2 для практических целей идентична с кривой заслона при двухрядном размещении скважин (см. фиг. 207).

может быть достигнут только использованием более отдаленных рядов со все более и более низкими забойными давлениями.

Общая картина распределения давления в трехрядной системе может быть получена из фиг. 211, на которой приведены профили, перпендикулярные рядам скважин, по линии, проходящей через скважины, а также вдоль линии, проходящей через середину интервала между ними. Наконец, можно заметить, что отношение между суммарным расходом на тройку скважин и разностью давления, действующим в системе, дается уравнением (8), гл. IX, п. 9, за исключением того обстоятельства, что L представляет собой величину суммарной утечки.

Действительно, можно свободно показать, что уравнение (8), гл. IX, п. 9, справедливо для любого количества параллельных рядов скважин, образующих прямоугольную сетку последних.

11. Размещение скважин в шахматном порядке. До сих пор мы разбирали многоскважинные системы, где ряды скважин были так размещены, что образовывали правильные прямоугольные сетки, т. е. где соответствующие скважины нескольких линейных рядов были расставлены вдоль линий, перпендикулярных к рядам. Однако на практике простая геометрия играет очень маленькую роль, а имеет значение только эффективность различной конфигурации скважин в зависимости от эффекта заслона, утечки и характеристики отнесения заложения скважины в сторону. Поэтому важно посмотреть, имеет ли размещение скважин в шахматном порядке некоторые преимущества по сравнению с обычными прямоугольными сетками размещения. Чтобы получить максимум положительного эффекта от шахматной расстановки скважин, допустим, что некоторые ряды взаимно смещены параллельно самим себе, на половину интервала размещения между скважинами (фиг. 212) и ось x представляет собой положение напорного линейного контура при давлении C. Тогда распределение давления согласно уравнению (6), гл. IX, п. 8:



Фиг. 212. Схематическое изображение напорной линии, питающей жидкостью два ряда скважин, которые смещены в рядах в шахматном порядке.

$$p = C + q_1 \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{2\pi (y - d_1)}{a} - \cos \frac{2\pi x}{a}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi (y + d_1)}{a} - \cos \frac{2\pi x}{a}} + \\ + q_2 \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{2\pi (y - d_2)}{a} + \cos \frac{2\pi x}{a}}{\operatorname{ch} \frac{(y + d_2)}{a} + \cos \frac{2\pi x}{a}}. \qquad (1)$$

Налагая условие, что давление скважин в двух рядах размещения одинаково, т. е. что

$$p(0, d_1 - r_w) = p\left(\frac{a}{2}, \; d_2 - r_w\right), \qquad (2)$$

найдем:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\ln \dfrac{\operatorname{sh} \pi r_w/a \operatorname{ch} \pi (d_2+d_1)/a}{\operatorname{sh} 2\pi d_2/a \operatorname{ch} \pi (d_2-d_1)/a}}{\ln \dfrac{\operatorname{sh} \pi r_w/a \operatorname{ch} \pi (d_2+d_1)/a}{\operatorname{sh} 2\pi d_1/a \operatorname{ch} \pi (d_2-d_1)/a}}. \qquad (3)$$

Сравнивая этот результат с уравнением (2), гл. IX, п. 9, которое мы прилагаем в случае, когда оба ряда не размещены по шахматной сетке, видно, что единственная разница между ними заключается в замене отношения $\frac{\operatorname{sh} \pi (d_2+d_1)/a}{\operatorname{sh} \pi (d_2-d_1)/a}$ отношением $\frac{\operatorname{ch} \pi (d_2+d_1)/a}{\operatorname{ch} \pi (d_2+d_1)/a}$. Тогда $\operatorname{ch} \pi z$ почти точно равняется $\operatorname{sh} \pi z$ для $z \geqslant 1$. Так как для всех практических случаев $(d_2-d_1)/a \geqslant 1$, то уравнения (3) и уравнение (2), гл. IX, п. 9, не будут различаться особенно заметно между собой, если только $(d_2-d_1)/a$ не представлено малой величиной. Это означает, что размещение скважин в рядах по шахматной сетке не будет оказывать никакого влияния на эффект заслона или утечки, характеризующий систему, если только расстояния между рядами не взяты значительно меньше интервалов в рядах между скважинами. В частности, если только оба ряда не разделены между собой расстоянием меньше 10% интервала между скважинами в рядах, то утечка в двухрядной системе, расставленной по шахматной сетке, будет превосходить соответственную величину в системе с квадратной сеткой на величину не более 1% общего значения утечки. Отсюда можно сделать заключение, что для практических целей размещение скважин в системе по шахматной сетке не имеет сколько-нибудь заметного влияния на характер заслона или утечки в многоскважинной системе.

12. Теория размещения отстоящих (внешних) скважин. Формулировка проблемы. До сих пор мы рассматривали в основном естественную утечку или характеристику эффекта заслона в многоскважинных системах, где давления всех скважин сохранялись одинаковыми и утечки создавались геометрической асимметрией давлений, действующих на границах системы. Теперь мы рассмотрим вопрос нейтрализации этой утечки, возникающей вследствие геометрической асимметрии, которая создается искусственно наложенной несоразмерностью давлений скважин в нескольких рядах последних. Это является основным вопросом, входящим в проблему размещения отстоящих скважин, который можно сформулировать следующими словами. Даются два участка с заранее принятыми и в целом различающимися между собой средними давлениями и двумя рядами скважин, отделенными друг от друга общей границей участка. Тогда при данном давлении скважин в одном ряду следует определить, каково должно быть давление при эксплоатации во втором ряду, чтобы через контур между участками не имело места остаточное течение жидкости.

Чтобы уяснить физическую основу аналитической обработки этой системы, следует дать более уточненное значение понятию „среднее давление“ на участке. С физической стороны это понятие будет налагать условие получения среднеарифметической величины индивидуальных замеров давления в отдельных точках, распределенных по всему участку, и отсюда будет служить мерилом эксплоатационной производительности

последнего. Однако с точки зрения взаимодействия данного участка (или жидкости, в нем залегающей) с примыкающими участками, а также с любой данной группой скважин эти числовые средние величины не могут иметь непосредственного значения. Для определения трактуемого эффекта необходимо знать среднее из давлений на границе участка вблизи рассматриваемой группы скважин или соседних участков, т. е. величину среднего давления на внешних (выброшенных) контурах. Вполне понятно, что распределение давления в интервале участка участвует в определении величин контурных давлений. Однако для рассмотрения величины связи участка с внешним течением участок в целом можно заменить состоянием его граничных давлений.

Следует заметить, что давления на участках в процессе их истощения будут изменяться, но эти изменения будут настолько медленны, что практически можно принять в системе условия установившегося течения. Вместе с тем, поскольку все же наблюдаются заметные изменения давления, требования к внешнему размещению скважин также могут изменяться, чтобы соответствовать новым условиям. Наконец, следует заметить, что теория, развитая в последующих разделах, приложима только к тому компоненту движения жидкости, которая возникает вследствие общей миграции в каждый участок из внешних источников, — напорного линейного контура при давлениях p_1 и p_2. При этом должны быть исключены из рассмотрения компоненты, представляющие собой естественную производительность каждого участка, получающуюся под воздействием расширения содержащейся в нем жидкости вследствие ее сжимаемости или выделения и расширения растворенных в ней газов. Таким образом, остаются только скорости жидкости и градиенты давления, соответствующие системе строго несжимаемой жидкости.

Распространяя дальнейшие исследования на практические случаи, можно притти к следующему заключению. Если окружить данный участок соответственно контролируемыми выброшенными скважинами, можно сделать нулевой миграцию в участок через границы последнего. Вместе с тем станет равной нулю и добыча со скважин внутри участка[1]. Однако при практической реализации такой обстановки мы встречаемся с тем обстоятельством, что, хотя для миграции в пределы участка и были приняты весьма эффективные превентивные мероприятия, тем не менее внутри участка, пока давление на последнем не упадет до нуля, будет существовать течение жидкости со скважин. Очевидно, эта добыча получается только благодаря расширению содержащейся в пористой среде жидкости в границах участка. Отсюда следует исключить эту добычу вместе с градиентами давления, с ней связанными, из системы раньше, чем к ней будет приложена развитая в последующем разделе теория внешних (выброшенных) скважин.

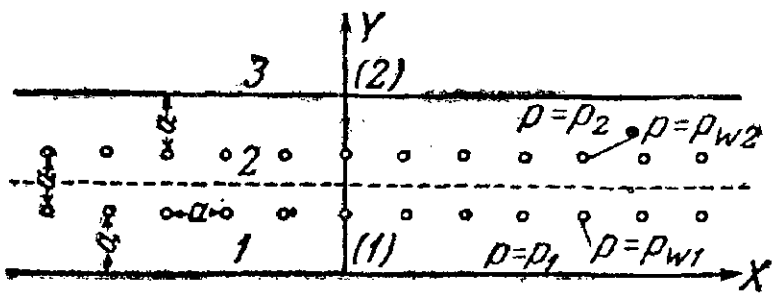
13. Однорядное размещение внешних скважин. Исходя из принятого в последнем разделе положения, два участка, взаимодействие

[1] Система из четырех скважин в круговом резервуаре, которая была рассмотрена нами в гл. IX, п. 3 (случай „г"), фактически может интерпретироваться как система, где участки внутри квадрата были настолько хорошо изолированы внешними четырьмя скважинами, что из внутренних скважин отсутствовала всякая добыча.

которых охраняется двумя рядами внешних скважин, заменяются двумя линиями, параллельными размещению скважин, на которых поддерживается среднее давление участков. Допустим для ясности, что каждая из этих линий отделяется от соседнего ряда скважин расстоянием, равным интервалу между внешними рядами скважин, который в свою очередь принимается равным расстоянию между скважинами a (фиг. 213). Тогда фактическая граница участка лежит посередине двух рядов скважин. Две линии, вдоль которых $P = P_1$ и $P = P_2$, являются аналитическими представлениями индивидуальных участков в целом, а именно, что они лежат вне рядов своих внешних скважин. Следуя предыдущему анализу, можно написать общее выражение для распределения давления в системе:

$$p = p_1 + \alpha y + q_1 \ln \frac{\operatorname{ch} 2\pi (y-1) - \cos 2\pi x}{\operatorname{ch} 2\pi (y+1) - \cos 2\pi x} + \\ + q_2 \ln \frac{\operatorname{ch} 2\pi (y-2) - \cos 2\pi x}{\operatorname{ch} 2\pi (y+2) - \cos 2\pi x}, \qquad (1)$$

где расстояние между скважинами a принимается за единицу. В таком виде уравнение (1) показывает, что $p = p_1$ при $y = 0$ и что существуют два ряда скважин при $y = 1$ и $y = 2$, с расходами $4\pi q_1 k/\mu$ и $4\pi k q_2/\mu$, а также в системе существует региональная миграция с величиной α. Остающаяся задача состоит в определении α, q_1 и q_2 таким образом, чтобы отсутствовал остаточный расход через $y = {}^3/_2$, общую границу участка; чтобы $p = p_{w_2}$ при $y = 2$, положении второго ряда скважин и чтобы $p = p_2$ при $y = 3$, представляющим собой внешний участок. Уравнение (1) не дает строго постоянного значения для p при $y = 3$. Однако из предыдущих рассмотрений было видно, что изменения p параллельно размещению скважин на расстояниях от ряда скважин порядка взаимного расстояния между скважинами настолько малы, что любая линия, параллельная ряду размещения, может быть принята совершенно точно за кривую равного давления.



Фиг. 213. Схема внешнего размещения скважин с одним рядом внешних скважин.

1 — участок *1*; *2* — граница участка; *3*— участок *2*.

Чтобы определить α, следует заметить, что для любого члена в общей форме, например,

$$p = q \ln \frac{\operatorname{ch} 2\pi (y-d) - \cos 2\pi x}{\operatorname{ch} 2\pi (y+d) - \cos 2\pi x},$$

расход Q дается выражением:

$$Q = -\frac{k}{\mu} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial p}{\partial y}\, dx \quad \begin{cases} = \dfrac{4\pi k q}{\mu} : y < d \\ = 0 : \quad y > d \end{cases} \qquad (2)$$

Отсюда непосредственно вытекает: для того чтобы не было остаточного расхода через общую границу участка $y = {}^3/_2$, α должно иметь значение

$$\alpha = 4\pi q_2. \tag{3}$$

Теперь, устанавливая требования, чтобы

$$p(0{,}2 - r_w) = p_{w_2}; \quad p(0{,}3) = p_2, \tag{4}$$

найдем значения q_1 и q_2, что дает

$$\left.\begin{aligned} p_1 + 8\pi q_2 - 4\pi q_1 + 2q_2 (\ln 2\pi r_w - 4\pi) &= p_{w_2} \\ p_1 + 12\pi q_2 - 4\pi q_1 - 8\pi q_2 &= p_2. \end{aligned}\right\} \tag{5}[1]$$

Решая это уравнение, получаем:

$$q_2 = \frac{p_2 - p_{w_2}}{4\pi - 2\ln 2\pi r_w};$$

$$q_1 = \frac{4\pi (p_1 - p_{w_2}) - 2(p_1 - p_2)\ln 2\pi r_w}{4\pi (4\pi - 2\ln 2\pi r_w)}. \tag{6}$$

Наконец, чтобы получить точный ответ на задачу, как она была поставлена первоначально, необходимо найти давление p_{w_1} в первом ряду скважин согласно условиям, которые налагаются значениями q_1 и q_2.

Возвращаясь к уравнению (1) и принимая $y = 1 - r_w$, легко найти, что

$$p_{w_1} = p_{w_2} - 0{,}9614(p_1 - p_2), \tag{7}$$

для $r_w = 1/2640$, так что

$$p_{w_1} \lessgtr p_{w_2}, \text{ как и } p_1 \lessgtr p_2; \tag{8}$$

что и следует ожидать.

Так как p_{w_1} положительно, существует нижний предел для p_{w_2}, который удовлетворяет уравнению (7). Так, например, если участок высокого давления имеет давление $p_1 = 102$ *ат*, а участок низкого давления $p_2 = 68{,}0$ *ат*, и если внешние скважины последнего участка имеют давление $p_{w_2} = 32{,}7$ *ат*, то p_{w_1} должно равняться нулю, чтобы избежать миграции из участка высокого давления в участок низкого давления.

Если же внешние скважины участка низкого давления эксплоатируются с давлением ниже 32,7 *ат*, то даже вакуум на внешних скважинах участка высокого давления не обеспечит полностью предупреждения миграции.

С другой стороны, если внешние скважины со стороны участка низкого давления имеют $p_{w_2} > 32{,}7$ *ат* или если $p_1 - p_2 < 34{,}0$ *ат*, p_{w_1} можно держать выше нуля и все же предупредить миграцию.

---

[1] В данном случае, а также во всех последующих расчетах сделано допущение, что для $m \geqslant 1$, $\frac{\text{ch}}{\text{sh}}\, m\pi = e^{m\pi}/2$ и $\text{sh}\, \pi r_w = \pi r$.

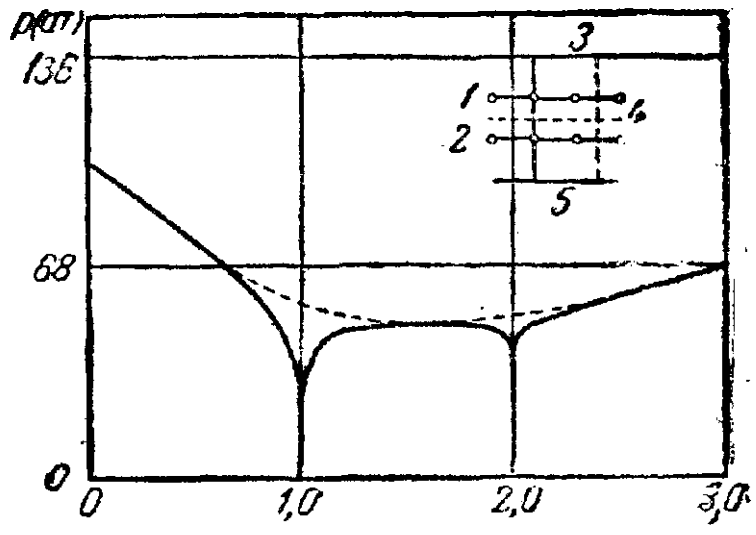
Наконец, если $p_1 - p_2$ становится отрицательным, то положение получается обратимым, и, чтобы предупредить миграцию в участок, помимо $y = 0$ значение p_{w_1} фактически должно поддерживаться выше, чем p_{w_2}. Эти конечные выводы можно просуммировать, заменив фактор 0,9614 в уравнении (7) единицей и переписать его в следующем виде:

$$p_{w_1} - p_{w_2} = p_2 - p_1. \tag{9}$$

Этот вывод можно сформулировать простым правилом: чтобы предупредить миграцию через границу участка, разница в давлениях между внешними рядами скважин должна быть равна и противоположна разности давлений между участками. Если невозможно создать перепад давления между внешними рядами скважин, чтобы он был равен разности давления между участками, то некоторое количество жидкости будет по необходимости переходить из участка с высоким давлением в участок с низким давлением. Наоборот, если разность давления между внешними скважинами снижена больше, чем разность давления между участками, то может существовать даже остаточная миграция в участок высокого давления. Этому правилу можно дать физическое объяснение, переписав уравнение (9) таким образом:

$$p_1 - p_{w_2} = p_2 - p_{w_1}.$$

Из этой формы уравнения (9) видно, что величины миграции жидкости из любого участка в противоположный — внешний — равны и дают отсюда нулевую миграцию.



Фиг. 214. Распределение давления вдоль линий, нормальных к двум параллельным рядам скважин, где их давления отрегулированы таким образом, чтобы предотвратить миграцию между рядами; сплошная линия — распределение давления вдоль нормали, проходящей через скважины; пунктирная линия — распределение давления вдоль нормали, проходящей посередине между скважинами.

Давление участка *1* — 102 *am*; давление участка *2* — 68 *am*.

Ось абсцисс—*y*—расстояние от напорной линии; *1* — внешние ряды участка *2*; *2* — внешние ряды участка *1*; *3* — участок *2*—$p = 68$ *am*; *4* — граница участка; *5* — участок *1* — $p = 102$ *am*.

Прилагая теперь уравнение (7) к (6), видно, что текущие дебиты из внешних линейных рядов находятся в соотношении

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{p_1 - p_{w_1}}{p_2 - p_{w_2}}.$$

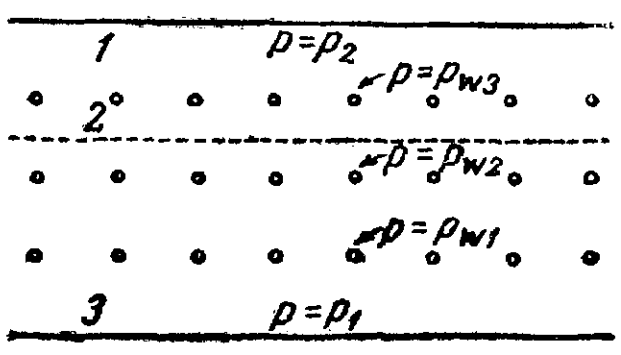
Физические основы проблемы внешнего размещения скважин можно рассмотреть более ясно из распределения давления в системе, где давление было отрегулировано так, чтобы не иметь миграционного течения между двумя внешними рядами скважин.

На фиг. 214 дается построение выводов для приведенного выше числового примера: давление участков — 102 и 68 *am*; давление скважин во внешних рядах — 0 и 32,7 *am*. Можно сравнить это построение

с фиг. 208, которая дает распределение давления в двухрядной системе, где отсутствует регулирование давления во внешних скважинах. Следует заметить, что в последнем случае давления посередине интервала между скважинами равномерно уменьшаются, переходя от первого ряда ко второму. Между тем величина давления на фиг. 214 имеет минимум между обоими рядами. Он находится выше максимума кривой давления вдоль линии, проходящей через пару скважин. На фиг. 208 показан остаточный градиент, который перемещает жидкость через первый ряд во второй. Вместе с тем на фиг. 214 видно, что эти градиенты выравниваются, и потому отсутствует остаточное течение между двумя рядами.

Гораздо большее значение имеет наблюдение, что регулирование давления для внешних скважин эквивалентно снижению эффективного среднего давления участка высокого давления до значения, равного среднему давлению участка низкого давления. Только таким путем можно снять общий градиент между двумя участками, а вместе с этим и связанную с ним миграцию. В то же самое время остаточный градиент давления через границу участка сделается равным нулю. Действительно, обработки большей части общих случаев, которые даются в последующих разделах, с физической стороны представляют собой только регулирование распределения давления на участках высокого давления. Это регулирование осуществляется снижением давления на внешних рядах скважин, чтобы получить в среднем столь же низкие давления в действительности, как и на внешне расположенных участках.

14. Многорядное размещение внешних скважин. Если на одном или обоих участках существуют иные ряды скважин, параллельные фактическим линиям внешнерасположенных скважин, то приведенный анализ и выводы останутся строго справедливыми при условии, что в качестве давлений участков p_1 и p_2 приняты средние их значения на линиях, взятых на обоих участках и ближе всего расположенных к внешним скважинам. Фактически наиболее удобный путь регулирования эффективного давления на участках p_1 и p_2 будет заключаться в варьировании давлениями скважин рядов, параллельных линиям внешне расположенных скважин. Чтобы рассмотреть детально, каким образом можно осуществить подобную процедуру, мы можем допустить, что участок высокого давления имеет две линии внешних скважин вместо одной. Тогда, обращаясь к обозначениям, принятым на фиг. 215, допустим, что давление в первом ряду внешних скважин участка высокого давления p_{w_1}; давление в ближайшем к границе ряду p_{w_2} и внешние скважины в примыкающем участке эксплоатируются при давлении p_{w_3}. Средние давления участков позади внешних скважин принимаются соот-



Фиг. 215. Схема многорядной системы расстановки внешних скважин.

1 — участок *2*; *2* — граница участка; *3* — участок *1*.

ветственно p_1 и p_2. Прилагая к анализу те же самые методы, что были приняты нами ранее, имеем:

$$\left.\begin{aligned} p_{w_1} - p_1 &= 4\pi q_3 + 2q_1(-2\pi + x) - 4\pi q_2 - 4\pi q_3 \\ p_{w_2} - p_1 &= 8\pi q_3 - 4\pi q_1 + 2q_2(-4\pi + x) - 8\pi q_3 \\ p_{w_3} - p_1 &= 12\pi q_3 - 4\pi q_1 - 8\pi q_2 + 2q_3(-6\pi + x) \\ p_2 - p_1 &= 16\pi q_3 - 4\pi q_1 - 8\pi q_2 - 12\pi q_3, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где

$$x = \ln 2 \operatorname{sh} \frac{\pi r_w}{a}.$$

Так как для трех неизвестных q_1, q_2, q_3 имеются четыре уравнения, то уравнение (1) может существовать, если

$$\begin{vmatrix} -4\pi + 2x & -4\pi & 0 & p_1 - p_{w_1} \\ -4\pi & -8\pi + 2x & 0 & p_1 - p_{w_2} \\ -4\pi & -8\pi & 2x & p_1 - p_{w_3} \\ -4\pi & -8\pi & 4\pi & p_1 - p_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Заменяя, как и раньше, $-x/2\pi = 0{,}96$ (для $a/r_w = 2640$) через 1, приведем уравнение (2) к виду:

$$2p_1 + 2p_{w_1} + 6p_{w_2} = 5p_2 + 5p_{w_3}, \quad (3)$$

который дает следующее значение расхода на скважину в трех рядах:

$$\left.\begin{aligned} 5Q_1 &= 2p_1 + 3p_{w_1} + p_{w_2} \\ 5Q_2 &= p_1 + p_{w_1} - 2p_{w_2} \\ 2Q_3 &= p_2 - p_{w_3} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

В данном случае, а также на всем остальном протяжении раздела отношение k/μ принимается равным 1. Отсюда отношение результативных текущих дебитов из внешне расположенных рядов скважин выразится:

$$\frac{Q_1 + Q_2}{Q_3} = \frac{2}{5} \frac{3p_1 - 2p_{w_1} - p_{w_2}}{p_2 - p_{w_3}}. \quad (5)$$

Уравнение (3) не позволяет простого физического объяснения, как это дает (4), гл. IX, п. 13. Однако условия, которые налагает это уравнение, не трудно разобрать. Так, возвращаясь обратно к примеру гл. IX, п. 13, где было принято, что $p_1 = 102$ *ат* и $p_2 = 68{,}0$ *ат*, из уравнения (9), гл. IX, п. 13, было показано, что если давления внешних скважин участка низкого давления поддерживаются на уровне ниже 34,0 *ат*[1], то даже применение вакуума на внешних скважинах участка высокого давления не предохранит от миграции через границу последнего. В данном случае из уравнения (3) непосредственно выте-

[1] Скорее эта величина, чем 32,7 *ат*, является предельным значением для p_{w_2}, если x заменяется через -2π, как это было принято ранее.

кает, что при данных давлениях на участке давления внешних скважин должны удовлетворять соотношению:

$$2p_{w_1} + 6p_{w_2} = 5p_{w_3} + 136.$$

Отсюда, если даже на внешних скважинах участка низкого давления поддерживается вакуум ($p_{w_3} = 0$), то внешние скважины участка высокого давления могут все же предупредить миграцию только при условии, что

$$p_{w_1} + 3p_{w_2} = 68{,}0.$$

Это выражение можно удовлетворить не только при комбинации $p_{w_2} = 0$; $p_{w_1} = 68{,}0$ *ат*, но даже при $p_{w_2} > p_{w_3}$, т. е. при $p_{w_2} = 6{,}8$ *ат* и при $p_{w_1} = 47{,}6$ *ат*. Таким образом, видно, что можно предупредить миграцию второй линией внешних скважин на участке высокого давления при помощи некоторого количества различных комбинаций с регулированием давления на внешних скважинах, если даже поддерживать вакуум на внешних скважинах участка низкого давления. При наличии более чем двух рядов внешних скважин возможности варьирования давлением последних и предупреждения миграции становятся еще больше. Действительно, приведенный анализ можно свободно распространить на случаи, где примыкающие участки имеют любое количество внешних рядов скважин.

Общие выводы можно свести в единую таблицу, введя следующие обозначения:

P_1 — давление участка (*1*);
P_2 — давление участка (*2*);
n_1 — число рядов внешних скважин на участке (*1*) впереди (P_1);
n_2 — число рядов внешних скважин на участке (*2*) впереди P_2;
p_{1k} — давление скважины на участке (*1*) во внешнем ряду k, замеренное от линии, где давление составляет P_1:
p_{2k} — давление скважины на участке (*2*) в k-ом внешнем ряду, замеренное от линии, где давление составляет P_2;
$\overline{Q}_1$ — сумма текущих дебитов на скважину во внешних линиях участка (*1*);
$\overline{Q}_2$ — сумма текущих дебитов на скважину во внешних линиях участка (*2*).

Тогда условия отсутствия миграции и связанные с ними текущие дебиты определятся из следующих выражений[1]:

1) $$n_1 = 1; \quad n_2 = 1,$$

$$P_1 + p_{11} = p_{21} + P_2; \quad \frac{\overline{Q}_1}{\overline{Q}_2} = \frac{P_1 - p_{11}}{P_2 - p_{21}}; \quad \overline{Q}_2 = \frac{1}{2}(P_2 - p_{21});$$

[1] Эти выражения основаны на точном допущении, что различные линии размещения внешних скважин расположены друг от друга на расстоянии 200 *м*, т. е. на расстоянии между скважинами в пределах рядов. Это составляет площадь уплотнения скважин — 1 скважина на 4 *га*. Вместе с тем эти выражения дают, видимо, также правильный порядок величины распределения давлений во внешних линейных рядах, если даже расстояния между рядами различны и отличаются от 200-*м* интервала, вследствие медленного (логарифмического) изменения количества x, которое принимается $= 2\pi$ в пределах этих расстояний.

2) $$n_1 = 2; \quad n_2 = 1,$$

$$P_1 + p_{11} + 3p_{12} = {}^5/_2 (p_{21} + P_2),$$

$$\frac{\overline{Q_1}}{\overline{Q_2}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3P_1 - 2p_{11} - p_{12}}{P_2 - p_{21}}; \quad \overline{Q}_2 = \frac{1}{2} (P_2 - p_{21});$$

3) $$n_1 = 2; \quad n_2 = 2,$$

$$P_1 + p_{11} + 3p_{12} = 3p_{22} + p_{21} + P_2,$$

$$\frac{\overline{Q_1}}{\overline{Q_2}} = \frac{3P_1 - 2p_{11} - p_{12}}{3P_2 - 2p_{21} - p_{22}}; \quad \overline{Q}_2 = \frac{3P_2 - 2p_{21} - p_{22}}{5};$$

4) $$n_1 = 3; \quad n_2 = 1,$$

$$P_1 + p_{11} + 3p_{12} + 8p_{13} = {}^{13}/_2 (p_{21} + P_2),$$

$$\frac{\overline{Q_1}}{\overline{Q_2}} = \frac{2}{13} \frac{8P_1 - 5p_{11} - 2p_{12} - p_{13}}{P_2 - p_{21}}; \quad \overline{Q}_2 = {}^1/_2 (P_2 - p_{21});$$

5) $$n_1 = 3; \quad n_2 = 2,$$

$$P_1 + p_{11} + 3p_{12} + 8p_{13} = {}^{13}/_5 (3p_{22} + p_{21} + P_2),$$

$$\frac{\overline{Q_1}}{\overline{Q_2}} = \frac{5}{13} \cdot \frac{8P_1 - 5p_{11} - 2p_{12} - p_{13}}{3P_2 - 2p_{21} - p_{22}}; \quad \overline{Q}_2 = \frac{3P_2 - 2p_{21} - p_{22}}{5};$$

6) $$n_1 = 3; \quad n_2 = 3,$$

$$P_1 + p_{11} + 3p_{12} + 8p_{13} = 8p_{23} + 3p_{22} + p_{21} + P_2,$$

$$\frac{\overline{Q_1}}{Q_2} = \frac{8P_1 - 5p_{11} - 2p_{12} - p_{13}}{8P_2 - 5p_{21} - 2p_{22} - p_{23}}; \quad \overline{Q}_2 = \frac{8P_2 - 5p_{21} - 2p_{22} - p_{23}}{13};$$

7) $$n_1 = 4; \quad n_2 = 1,$$

$$P_1 + p_{11} + 3p_{12} + 8p_{13} + 21p_{14} = 17 (p_{21} + P_2),$$

$$\frac{\overline{Q_1}}{\overline{Q_2}} = \frac{1}{17} \cdot \frac{21P_1 - 13p_{11} - 5p_{12} - 2p_{13} - p_{14}}{P_2 - p_{21}}; \quad \overline{Q}_2 = \frac{1}{2} (P_2 - p_{21});$$

8) $$n_1 = 4; \quad n_2 = 2,$$

$$P_1 + p_{11} + 3p_{12} + 8p_{13} + 21p_{14} = {}^{34}/_5 (3p_{22} + p_{21} + P_2),$$

$$\frac{\overline{Q_1}}{\overline{Q_2}} = \frac{5}{34} \cdot \frac{21P_1 - 13p_{11} - 5p_{12} - 2p_{13} - p_{14}}{3P_2 - 2p_{21} - p_{22}}; \quad \overline{Q}_2 = \frac{3P_2 - 2p_{21} - p_{22}}{5}.$$

9) $$n_1 = 4; \quad n_2 = 3;$$

$$P_1 + p_{11} + 3p_{12} + 8p_{13} + 21p_{14} = {}^{34}/_{13} (8p_{23} + 3p_{22} + p_{21} + P_2),$$

$$\frac{\overline{Q_1}}{\overline{Q_2}} = \frac{13}{34} \cdot \frac{21P_1 - 13p_{11} - 5p_{12} - 2p_{13} - p_{14}}{8P_2 - 5p_{21} - 2p_{22} - p_{23}}; \quad \overline{Q}_2 = \frac{8P_2 - 5p_{21} - 2p_{22} - p_{23}}{13};$$

10) $$n_1 = 4; \quad n_2 = 4;$$

$$P_1 + p_{11} + 3p_{12} + 8p_{13} + 21p_{14} = 21p_{24} + 8p_{23} + 3p_{22} + p_{21} + P_2,$$

$$\frac{\overline{Q_1}}{\overline{Q_2}} = \frac{21P_1 - 13p_{11} - 5p_{12} - 2p_{13} - p_{14}}{21P_2 - 13p_{21} - 5p_{22} - 2p_{23} - p_{24}},$$

$$\overline{Q}_2 = \frac{21P_2 - 13p_{21} - 5p_{22} - 2p_{23} - p_{24}}{34}.$$

15. Числовой пример. Прилагая только что выведенные уравнения к проблеме внешнего размещения скважин, следует помнить, что при этом подразумевается допущение о свободе регулирования текущих дебитов, а отсюда и давлений в пределах, которые могут обеспечить эффективное размещение внешних скважин. Если добыча с участков ограничена и это ограничение построено на допущении равного отбора со скважины при ограниченном количестве скважин на участке, то проблема внешнего размещения скважин не имеет под собой никакого обоснования.

Миграцию через границы участка можно предупредить разбуриванием каждого участка с одинаковой степенью уплотнения, если только одинакова „потенциальная" производительность скважин или же величина уплотнения принимается пропорциональной потенциалам скважин (давление участка, помноженное на его проницаемость) при различной величине этих потенциалов, которая не учитывается при принудительном ограничении добычи с участка. С другой стороны, становится совершенно бесполезной всякая попытка предупредить миграцию, если отсутствуют мероприятия к искусственному сокращению добычи (дорейшен), и примыкающий участок эксплоатируется „открытой струей" (с минимально допустимым забойным давлением) на всем протяжении участка. Единственным защитным мероприятием в таком случае является разбуривание рассматриваемого участка с такой же степенью уплотнения, что на соседнем участке, и эксплоатация этих скважин в открытую, аналогично тому, как эксплоатируется соседний участок[1].

Чтобы проблема размещения внешних рядов скважин имела реальное значение, необходимо, очевидно, допустить заранее, что мы обладаем известной свободой в области регулирования добычи и распределения давления на рассматриваемом участке так, чтобы предупредить миграцию в сторону. Если примыкающий к данному какой-либо иной участок истощен полностью в отношении своей естественной эксплоатационной производительности, но продолжает все же помпироваться глубоким насосом, то рассматриваемый участок представляет собой простую жертву для него, так как должен обеспечить последний всей отбираемой жидкостью. Вместе с тем, когда примыкающий участок неполностью истощен и его внешние ряды скважин эксплоатируются при установленных забойных давлениях (не все из них нулевые), можно использовать приведенные формулы для нахождения давлений для внешних линий скважин, чтобы предупредить потерю жидкости с участка высокого давления. Более того, можно наложить ограничение, чтобы суммарные текущие дебиты из каждого участка сохранялись при известном соотношении и если только это условие является неблагоприятным для участка высокого давления, то давления на внешней линии скважин могут быть так отрегулированы, чтобы предупредить миграцию через границу участка.

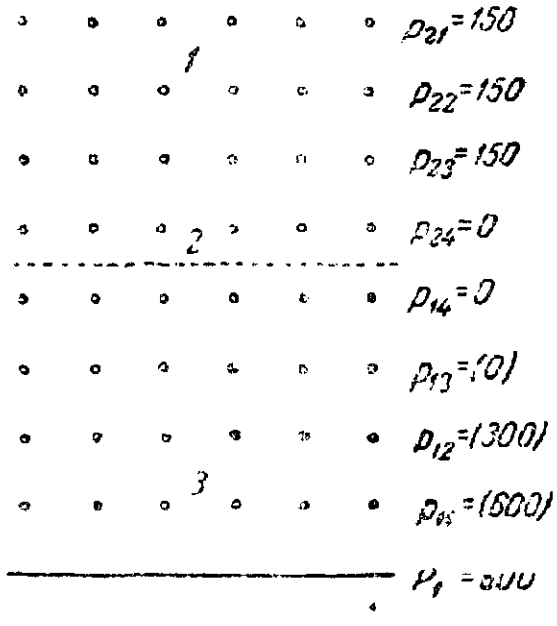
На фиг. 216 показан частный случай проблемы, где рассматриваются четыре ряда скважин на каждом участке параллельно их общей

---

[1] Вполне понятно что этот „совет" исходит из капиталистических условий хищнической разработки нефтяных месторождений США (*от перев.*).

границе. Примем, что давление резервуара или эффективное давление участка (*1*) позади внешних рядов составляет ~ 20 *ат*, а участка (*2*) около 40 *ат*. Разумеется, эти величины несколько меньше по сравнению с давлениями на крайних оконечностях обоих участков вследствие общей миграции из этих участков в соответственные внешние линии скважин у их общей границы.

Допустим также, что на основании некоторого соглашения об ограничении добычи с участка (*2*) с него разрешается получать такую же величину отбора, что и с участка (*1*). Кроме того, для получения этой разрешенной добычи давления внешних скважин на участке (*2*) поддерживаются на уровне 10 *ат*, за исключением линейного ряда перед границей участка, на которой поддерживается вакуум ($p_{24} = 0$). Вопрос заключается в следующем: можно ли отрегулировать давления во внешних рядах скважин участка (*1*) так, чтобы отбирать добычу не больше соседа, и все же предупредить потерю нефти через границу участка, а также, каковы будут при этом давления участка (*1*). Чтобы получить искомый ответ, необходимо приложить формулы случая (10) последнего раздела со следующими параметрами [1]:



Фиг. 216. Схематический проект расстановки внешних скважин, где на каждом участке размещено четыре ряда.

1 — участок *2*; *3* — граница участка; *3* — участок *1*.

$$\frac{\bar{Q}_1}{\bar{Q}_2} = 1; \quad P_1 = 40; \quad P_2 = 20; \quad p_{14} = 0 = p_{24};$$

$$p_{23} = 10; \quad p_{22} = 10; \quad p_{21} = 10.$$

Из формулы [случай (10)] следует, что для условия $\bar{Q}_1/\bar{Q}_2 = 1$, т. е. когда две группы внешних скважин дают один и тот же текущий дебит, имеем:

$$21P_1 - 13p_{21} - 5p_{22} - 2p_{23} - p_{24} = 21P_1 - 13p_{11} - 5p_{12} - 2p_{13} - p_{14}.$$

При принятых обозначениях это выражение приводится к виду:

$$13p_{11} + 5p_{12} + 2p_{13} = 620.$$

Подставляя те же самые данные в первую из формул случая (10), получаем, что условие отсутствия миграции принимает вид:

$$p_{11} + 3p_{12} + 8p_{13} = 100.$$

Так как все давления должны быть положительны, но вместе с тем не превосходить 40 *ат*, легко найти, что единственными значениями p_{11}, p_{12}, p_{13}, которые могут удовлетворять этим требованиям и полученным уравнениям, будут:

$$p_{11} = 40; \; p_{12} = 20; \; p_{13} = 0.$$

[1] Принимается заранее $p_{14}=0$ в свете общих преимуществ участка (*2*) по созданию миграции из участка (*1*).

Тогда, если первая линия внешних скважин закрыта, вторая линия эксплоатируется при 20 *am*, а третья и четвертая линии эксплоатируются под вакуумом, миграция нефти из участка (*1*) в примыкающий к нему участок будет предупреждена. Вместе с тем следует отметить, что если распределение давления во внешних линиях участка (*2*) значительно отличается от той величины, что была избрана нами заранее, т. е. если линейные ряды, за исключением одного из них, непосредственно примыкающего к границе участка, эксплоатируются при неодинаковых давлениях,—в таком случае будет невозможно избежать миграции, а также отрицательных давлений или же давлений выше 40 *am* на участке (1). С другой стороны, следует заметить, что распределение давления на участке (*2*) фактически обязано нелогичному требованию, чтобы участок (*1*) отбирал добычу не больше соседа, если даже давление резервуара в нем будет в два раза выше. Если это ограничение будет снято и участку (*1*) будет позволено эксплоатироваться с двойным отбором, по сравнению с соседом, можно будет предупредить миграцию, если даже распределение давления на участке (*2*) будет значительно изменяться.

Так, устанавливая [1]

$$P_2 = 20;\ p_{21} = 13{,}3;\ p_{22} = 10;\ p_{23} = 6{,}6;\ p_{24} = 0$$

и

$$\frac{\bar{Q}_1}{\bar{Q}_2} = 2;\ p_1 = 40;\ p_{14} = 0,$$

уравнения (случай 10) дадут

$$p_{11} + 3p_{12} + 8p_{13} = 77{,}7,$$
$$13p_{11} + 5p_{12} + 2p_{13} = 473{,}3,$$

что можно удовлетворить, например, рядом давлений:

$$p_{11} = 33{,}3;\ p_{12} = 6{,}8;\ p_{13} = 3{,}2$$

или $p_{11} = 31{,}65;\ p_{12} = 11{,}8;\ p_{13} = 1{,}4.$

В дополнение к фиксированным отношениям текущих дебитов из внешних рядов в оба участка необходимо иметь в целом заранее установленные абсолютные значения суммарных текущих дебитов из рядов внешних скважин. Это обстоятельство еще более ограничит возможность внешнего размещения скважин в целях полного предупреждения миграции. Общее количество поставленных ограничений — три: отсутствие миграции, установленное отношение текущих дебитов всех внешних рядов и установленные абсолютные значения суммарной эксплоатационной производительности. Отсюда комплекс из четырех внешне размещенных рядов скважин должен обеспечить, повидимому, в целом среди бесконечных алгебраических возможностей небольшой диапазон распределения давления во внешних рядах, которые не потребуют отрицательных давлений на скважинах, или давлений, более высоких по сравнению с давлением участка.

---

[1] Это распределение приведет к $p_{11} = 46{,}6$ *am* для $p_{13} = 0$, если $\bar{Q}_1 = \bar{Q}_2$

16. Проблема водной репрессии (флюдинг). Одна из наиболее интересных областей приложения теории течения инертных жидкостей через песчаники заключается в методе искусственной добычи нефти, известном под названием „водная репрессия" (флюдинг). Этот способ применяется с известным успехом в нефтяном месторождении Брадфорд, Пенсильвания, и заключается в процессе вытеснения нефти, остающейся в песчанике, после того, как становятся неэкономичными обычные методы добычи последней с помощью нагнетания воды, вводимой в песчаник [1] извне искусственным путем.

Техника процесса нагнетания воды в пласт включает в себя некоторые свои особенности, но физическая обстановка соответствует полностью сетке размещения нагнетательных водяных скважин, которые выбираются из числа заброшенных нефтяных скважин или специально пробуренных для целей нагнетания воды, а также из наличия эксплоатационных нефтяных скважин. Вода, поступая в песчаник при высоком давлении (благодаря весу столба воды в скважине или дополнительного приложенного давления), стремится двигаться по направлению к нефтяным скважинам, на которых поддерживается более низкое давление вследствие того, что они большей частью откачиваются глубокими насосами. Нефть, остающуюся в песчанике, благодаря истощению первоначально растворенного в ней газа можно рассматривать в действительности инертной („мертвой"), обладающей очень небольшой тенденцией, или совершенно ей не обладающей, к перемещению по направлению к эксплоатационным скважинам. Нагнетательная вода находится под высоким давлением и при своем движении от инжекционных скважин вытесняет нефть из пор песчаника и гонит ее по направлению к эксплоатационным скважинам.

Нужно иметь в виду, что вода не отмывает полностью песчаник от нефти, и сама нефть не движется сплошным валом впереди воды с резкой поверхностью раздела. Однако этими усложнениями можно пренебречь ввиду того, что они мало влияют на справедливость заключений, которые получаются из приближенной теории. Более серьезная трудность заключается в необходимости пренебречь разницей вязкости между нагнетаемой водой и замещаемой нефтью.

Отсюда вся проблема водной репрессии в свете этой разности вязкостей принадлежит к классу двухжидкостных систем, которые рассматривались в главе VIII. Вместе с тем в этой главе было показано, что если только системы не очень просты геометрически, математическая обработка двухжидкостных систем крайне затруднительна, за исключением, быть может, использования графического метода. В действительности будет казаться бесполезным начинать аналитическое рассмотрение многоскважинных систем, если только не допустить вязкость обоих жидкостей одинаковой и дать обработку эквивалентной однородной системы аналогично гл. VIII, п. 5. С другой стороны, приложение этого метода к проблеме водной репрессии было отложено нами ранее до настоящей главы вследствие того, что приводимая здесь математическая обработка скорее

[1] Рассмотрение развития применения метода водной репрессии и состояние этого вопроса в настоящее время было приведено в серии очерков (C. R. Fettke, Oil and Gas Journ.; см. особенно стр. 32; 19 августа 1937 г., а также стр. 48, 26 августа 1937 г:).

акцентирует динамическую сторону бесконечной сетки размещения скважин, чем двухжидкостного характера задачи.

Практические вопросы, которые входят в проблему водной репрессии, ограничиваются не только анализом и пониманием механизма водной репрессии данной сетки размещения нагнетательных и эксплоатационных скважин, но также и рассмотрением относительных преимуществ различных сеток размещения нагнетательных и эксплоатационных скважин. Чтобы получить ответ на все эти вопросы, является удобным подвергнуть математической обработке совершенно независимо различные этапы проблемы, например, поведение поверхности раздела вода—нефть; распределение потенциала, сопротивление сетки скважин и коэфициент полезного действия водной репрессии.

17. Процесс образования поверхности раздела вода—нефть. Эксперименты на электролитических моделях. Если пренебречь разницей в вязкости между нагнетаемой водой и замещаемой нефтью, то для прослеживания прогрессирующего движения воды, по мере того как она покидает инжекционные скважины и перемещается по направлению к эксплоатационным скважинам, гоня перед собой нефть, можно применить метод, развитый в гл. VIII, п. 5. Это потребует не только точного вывода уравнений для эквипотенциальных линий ($\Phi = \text{const}$) и линий тока $\Psi = \text{const}$ системы, но еще более трудоемкого получения формулировки $[\nabla\Phi]^2$, выраженного через Φ и Ψ. После того как будут получены все данные, производство выкладок даже для таких простых случаев, как движение линейного или эллиптического контуров, будет весьма затруднительным [1].

К счастью, можно совершенно избежать этой вычислительной работы использованием очень простых электролитических моделей [2] процесса водной репрессии при различных сетках размещения скважин. В основании этих моделей лежит наблюдение, что так как скорость иона в электролитической системе пропорциональна градиенту потенциала, аналогично тому, как скорость частицы жидкости в пористой среде пропорциональна градиенту давления, то пути ионов в электролитических системах должны быть эквивалентны путям частиц жидкости в пористой среде с той же самой геометрией и с тождественными граничными условиями. Электролитическая модель состоит в основном из электролита, содержащего ион-индикатор, например, фенолфталеин, заключенный в соответствующей пористой среде, чтобы предупредить образование излишних скоростей, имеющих место при обычной диффузии.

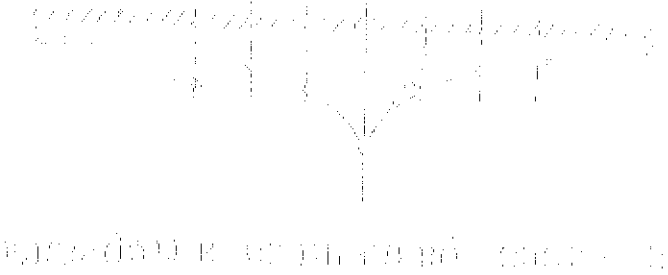
С этой целью с успехом применяется фильтровальная бумага, пропитанная электролитом. Отрицательный электрод представляет собой источник жидкости при соответствующем течении, положительный электрод изображает эксплоатационную скважину. Продвижение ионов OH от отрицательного к положительному электроду соответствует продвижению водяного фронта в задаче водной репрессии. Перемещение ионов OH указывается фенолфталеином, который бесцветен в кислой среде

---

[1] Этот случай рассматривал M. Маскет, Physics, 5, 250, 1934.

[2] Wyckoff R. D., Botset H. G. and Muskat M., Trans. A. I. M. E. Pet. Dev. Tech., 103, 219, 1933; см. также R. D. Wyckoff and H. G. Botsset, Physics. 5, 205, 1934. Для изучения деталей техники моделирования см. гл. IV, п. 17.





жидкости достигают продуктивной скважины, дается кривой $t = 2/3$. Фиг. 218 является фотографией сложной системы, которая показывает последовательные этапы перемещения поверхности раздела, а также конечный этап, на котором течение впервые достигает эксплоатационной скважины. Тот факт, что на модели течение гораздо Уже, чем при исчислении (фиг. 176), можно легко объяснить тем, что в модели боковые границы нельзя поместить достаточно далеко от центровой линии скважин, чтобы смоделировать в этом направлении полностью бесконечную плоскость. Продемонстрировав таким образом, что указанная модель в состоянии давать не только общую картину продвижения заводнения, но дает также количественную характеристику затопленной площади на любом этапе продвижения контура, с ошибкой порядка нескольких процентов, вполне возможно перейти к моделированию более сложных систем, для которых весьма трудно получить аналитические выводы.

18. Эксперименты на модели с линейным контуром заводнения[1]. Вследствие того, что многие практические задачи включают проблему продвижения краевой воды, которое можно в пределах вполне разумного расстояния от краевых скважин рассматривать линейным контуром заводнения, рассмотрим сначала приложение электролитомоделирования именно к этим задачам.

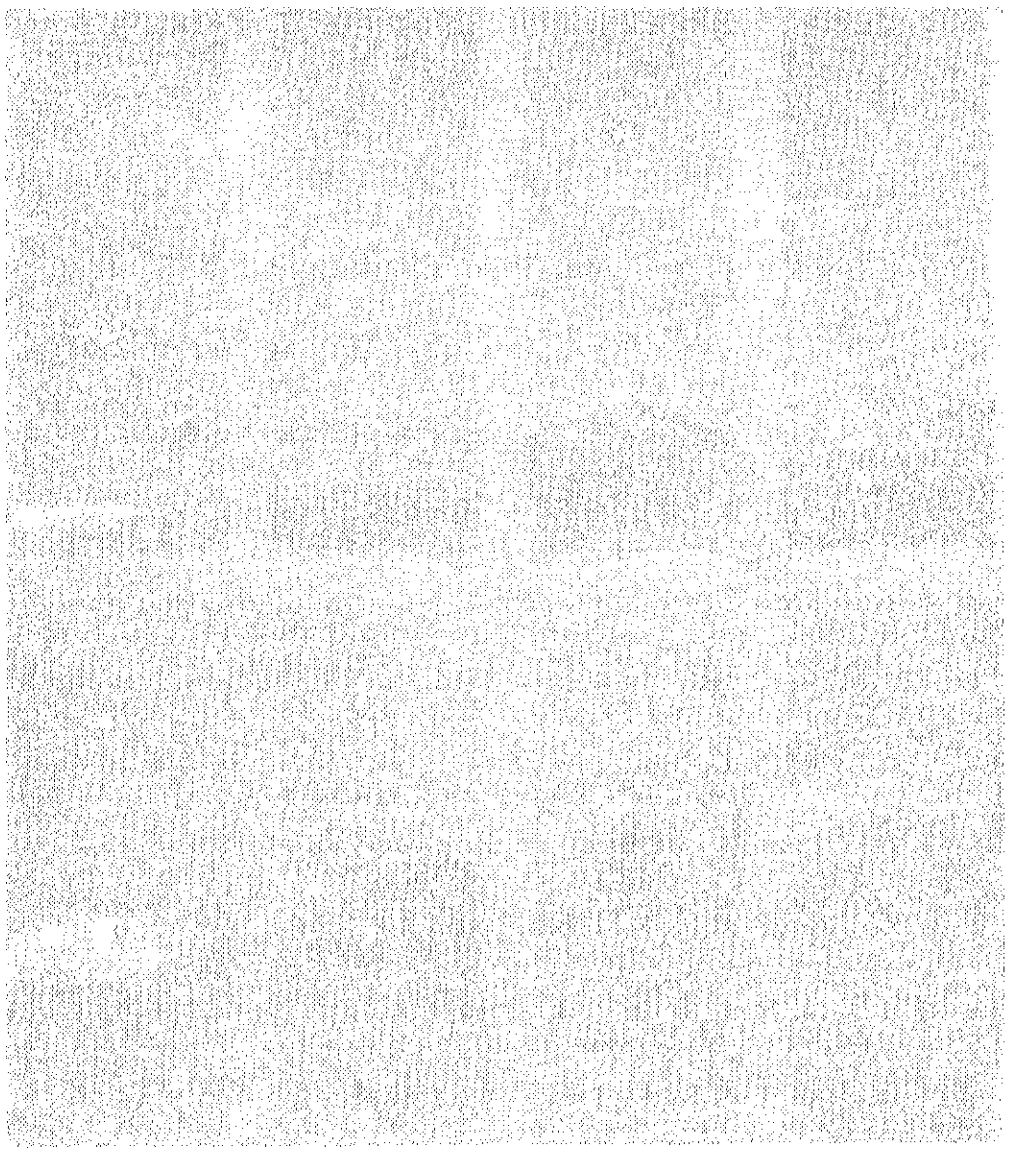
В качестве практического примера рассмотрим ряд краевых скважин, работающих параллельно контуру краевой воды, совместно со вторым рядом, расположенным внутри эксплоатационных скважин. Внизу фиг. 219 показано принятое расположение последних. Пунктир представляет собой элементарный участок фронта, взятый из бесконечного ряда аналогичных секций. Модель показывает, что перемещающийся фронт воды остается по существу параллельным первоначальному ряду без серьезного нарушения или языкообразования, пока заводнение не достигает первого ряда скважин в пределах расстояния порядка половины интервала между скважинами. После этого фронт продвигается довольно резким серповидным очертанием в первый ряд скважин.

Очертание водного фронта перед тем, как заводнение настигает скважины, показано четвертой фотографией на фиг. 219. После того как будет достигнут этот пункт, краевые скважины эксплоатируются с нормальным отбором, что практически повлечет за собой, разумеется, добычу нефти и воды. Поток воды будет перемещаться дальше, как это показывает фото, пока не будет достигнут второй ряд скважин. В этом пункте эксперименты на модели были прекращены. Интересно отметить наличие нейтральных зон, соединяющих скважины переднего ряда с внутри расположенными соседними. Эти нейтральные зоны показаны обращенными полумесяцами позади первой линии скважин. Если вторая линия внешних, последовательно расположенных скважин будет заменена аналогичной линией размещения, но с шахматной расстановкой скважин, то заводнение даст результаты, показанные на фиг. 220. Хотя конечное продвижение контура отличается

---

[1] Фотографии моделей, которые приведены в настоящем разделе, а также в последующих разделах, взяты из работы Вайкова, Ботсета и Маскета.

в отдельных точках от нормального хода струи, из фотографии видно, что за пределами такого отклонения в ходе явления наблюдаются отклонения от прямолинейности.

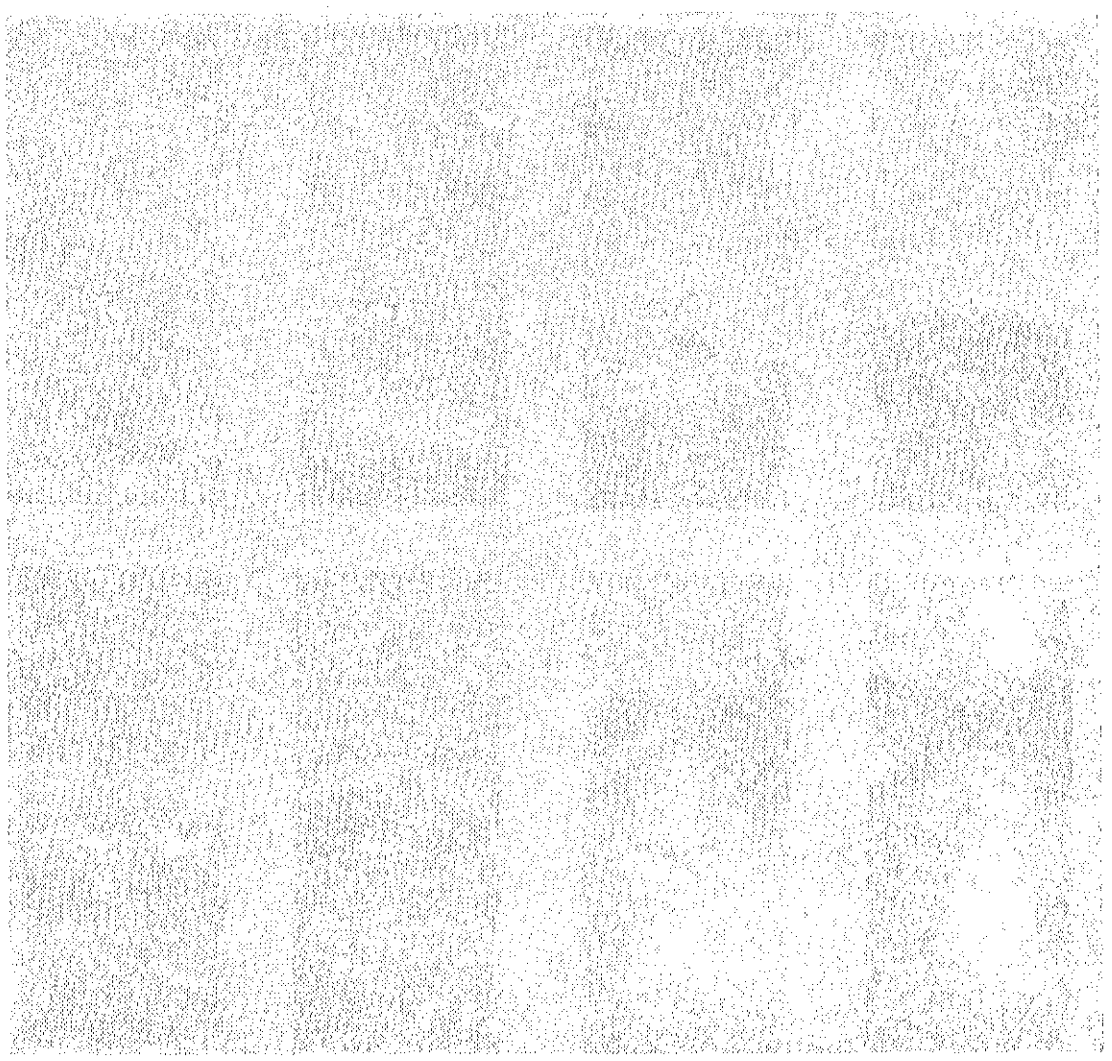


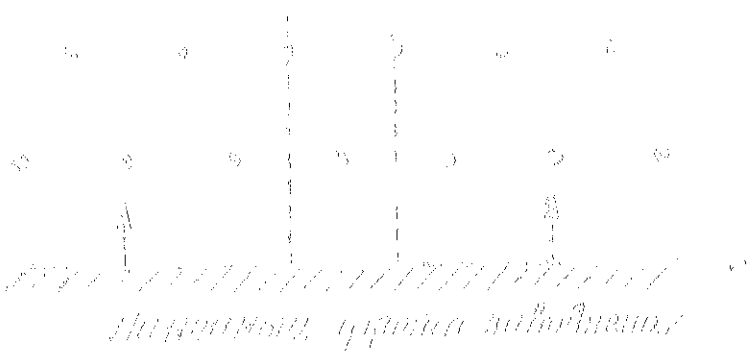
Направление движения

Фиг. 219. Фотография отклонения тонкой водной струи при пропускании поперечного пояса для двухслойного рыбьего истока. Фотография получена по данным оптических измерений.

На фиг. 221 приведен еще один интересный пример явления, наблюдающегося одновременно с двух противоположных сторон тройного рыбьего пояса. Фотография показывает причину возникновения, происходящего на участке, очерченном из диаграммы, будучи симметричным относительно этого участка, продвижению всех фронтов наступающей воды на различных этапах дало получиться фотографическим конфигурации, наблюдаемой на одинаковом участке. В данном случае можно

имеется отрицательное корнеобразование и другое знак. В то же самое время свободная от воды сторона образует режим сосредоточенного заряда в первом виду скважин со стороны, противоположной нагнетательной.



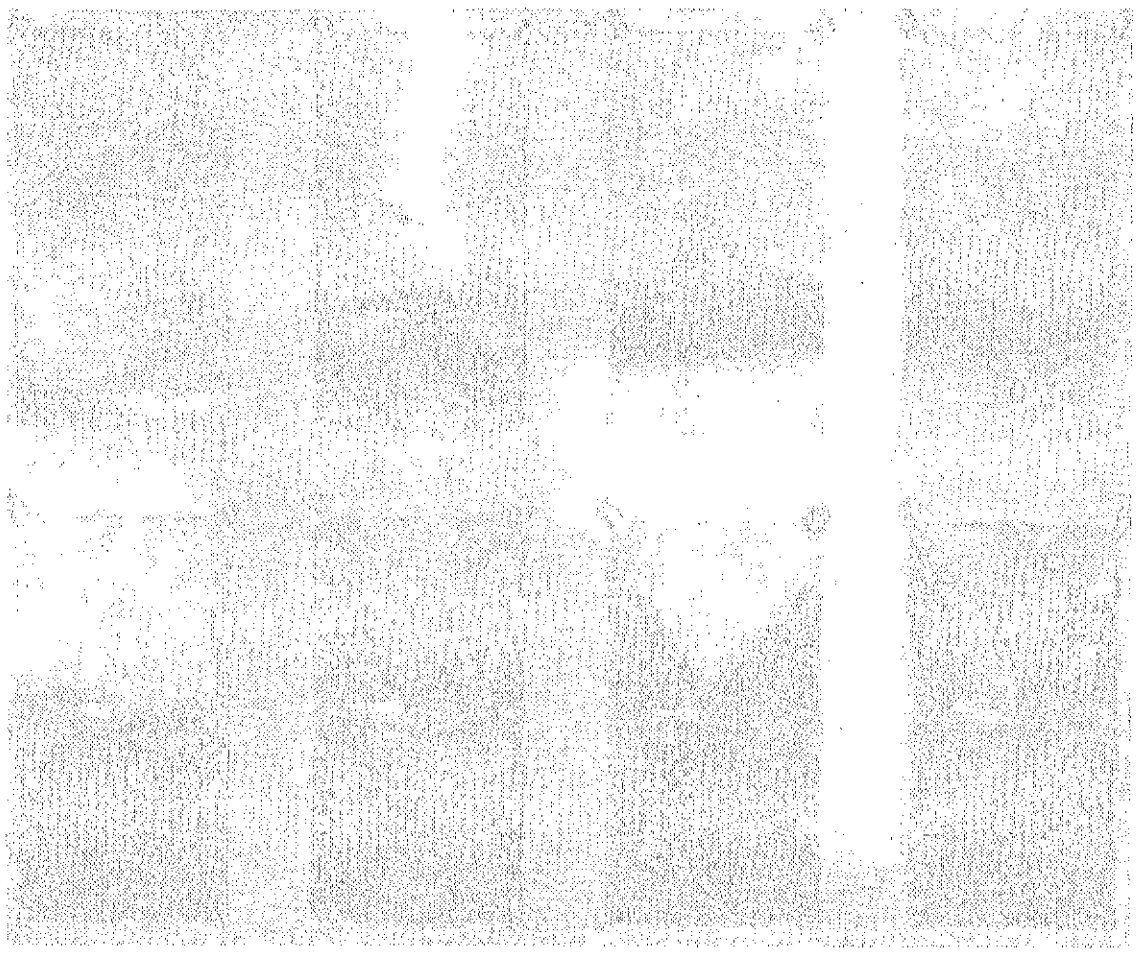


Фиг. 120. Фотография отливки с полосой волнообразного течения при фиксированном продольном бое в вицинальной, вызванной смещением и пилообразной корнями другим видом скважин. Этот рифель получен на лучших электродистиллированных водой.

Это также можно сравнить с фиг. 2[3], где бесконечно длинного чередования с противоположной стороны образуется у первого рабочего ряда скважин и могут отличаться и почти замкнуты.

Для простоты было сделано допущение во всех этих иллюстрациях, что скважины размещены на равном расстоянии и ориентируются с той же самой видимой отбора, имеется с тем, если на любой вицинали, примыкающей к фронту волы, скважины исполнительно при обычном отборе, по сравнению с остальной линейно или же

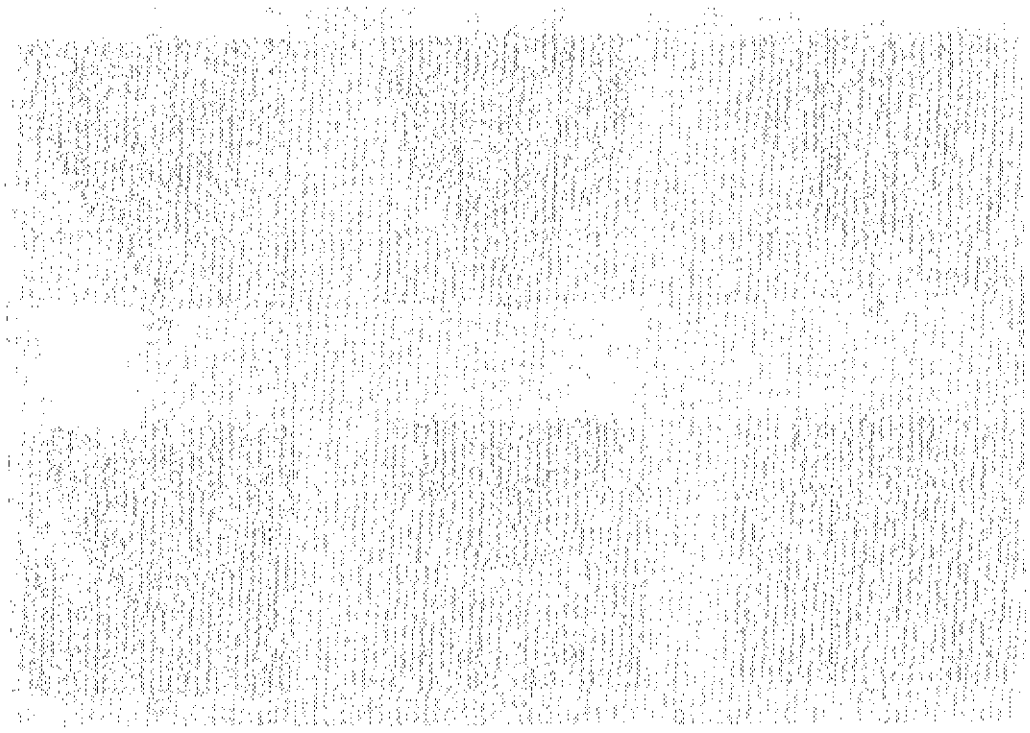
при изменении рода увлекаемой более вязкой жидкости, тем не менее будет наступать в эту площадь более быстрым темпом по сравнению с оставшимися участками фронта. Такая обстановка создает эффект, подобный тому, который мы имеем, когда

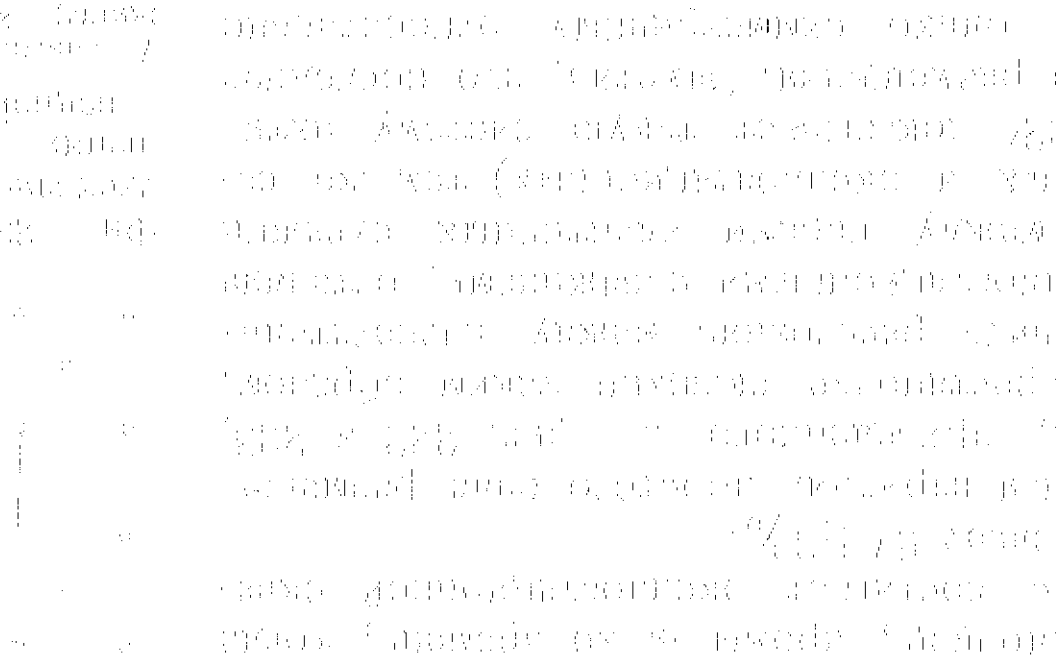


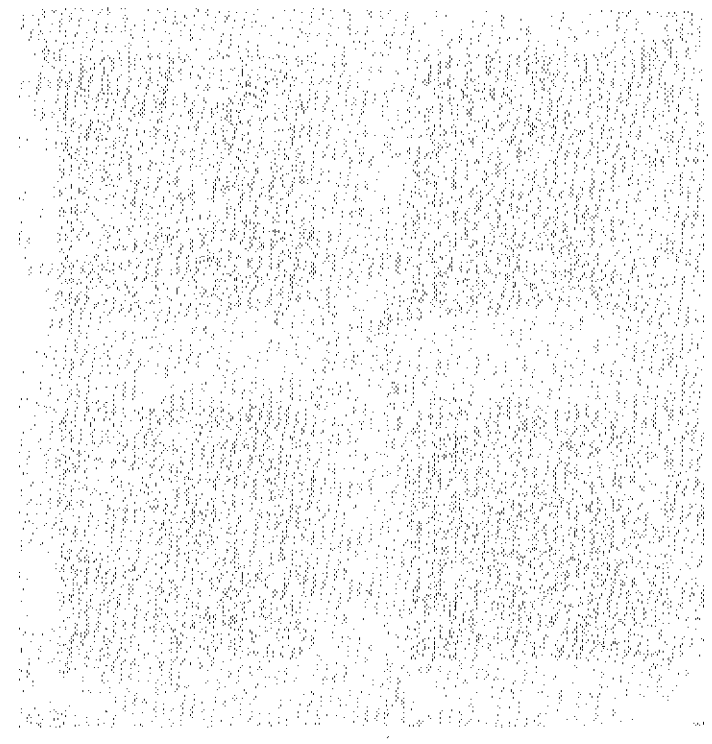
Фиг. 221. Фотография развития процесса двухсторонней волной репрессии при фронтальном продвижении воды с прямым углом смачивания. Фотография получена на данной гидравлической модели.

так называемых скважина или сток замещается площадью, на которой текущие жидкости имеют высокое значение. В пределах этой площади фазовые струйки значительно удаляются друг от друга, но в дополнение к этому будет иметь место существенное искривление, происходящее в эту площадь.

10. Экспериментальное исследование, соответствующее искусственному методу водяной репрессии. Как уже было отмечено, сущность этого искусственного







Такая конструкция обязует „специалистов-руководителей" постоянно проявлять свои и отыскивать новую систему [illegible] и знания

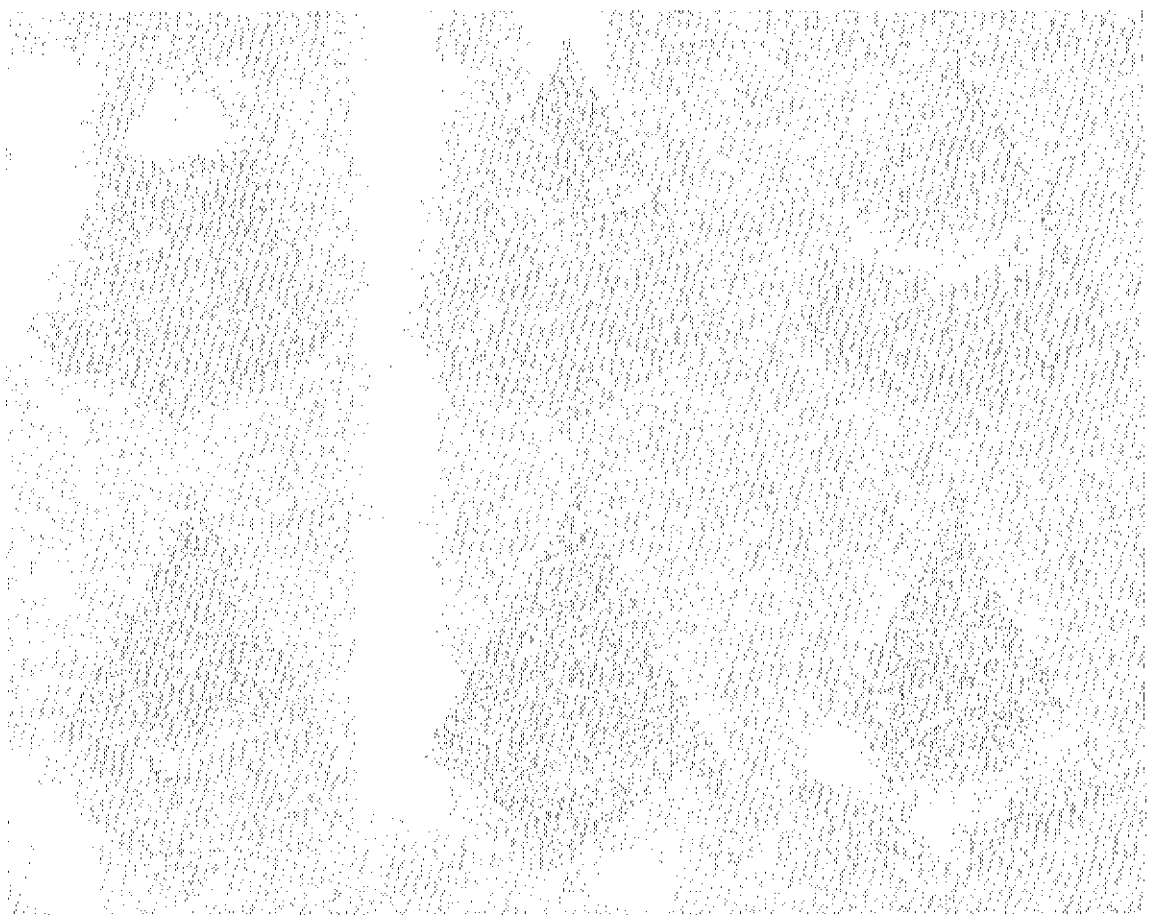
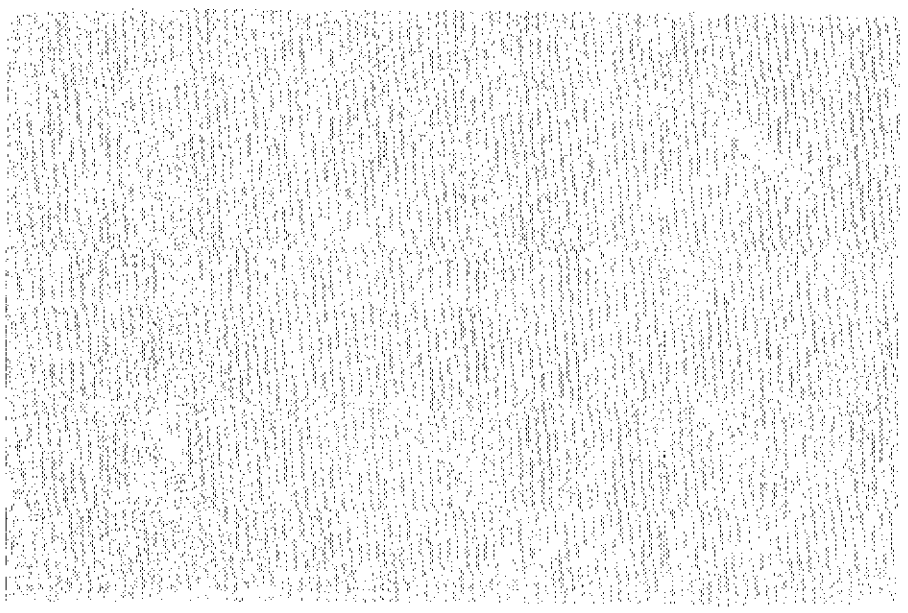
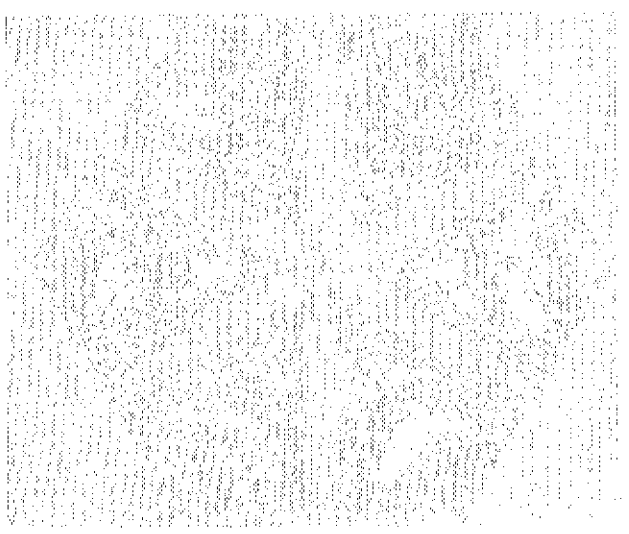


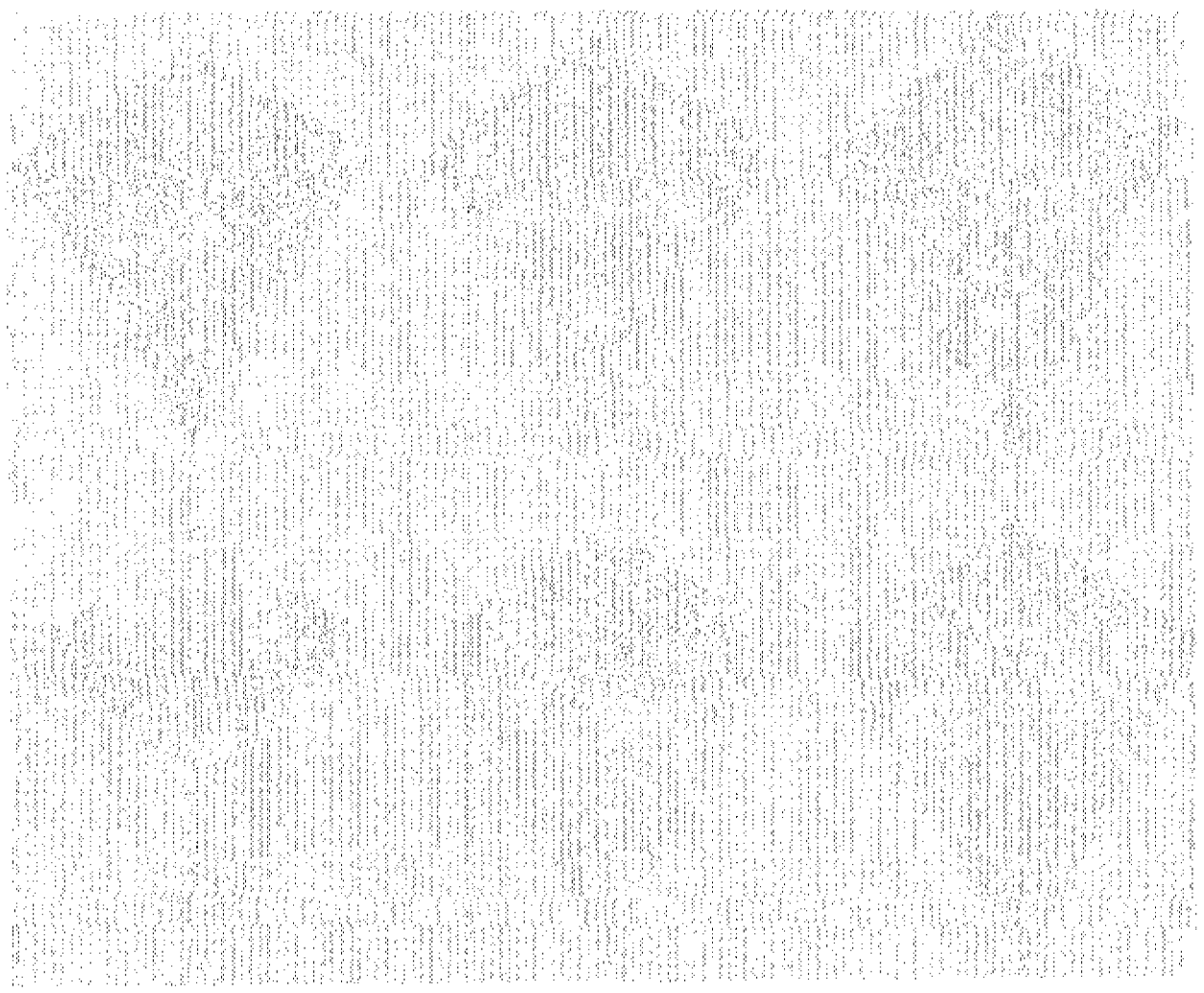
Рис. 161. Этот [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]



Рис. 162. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

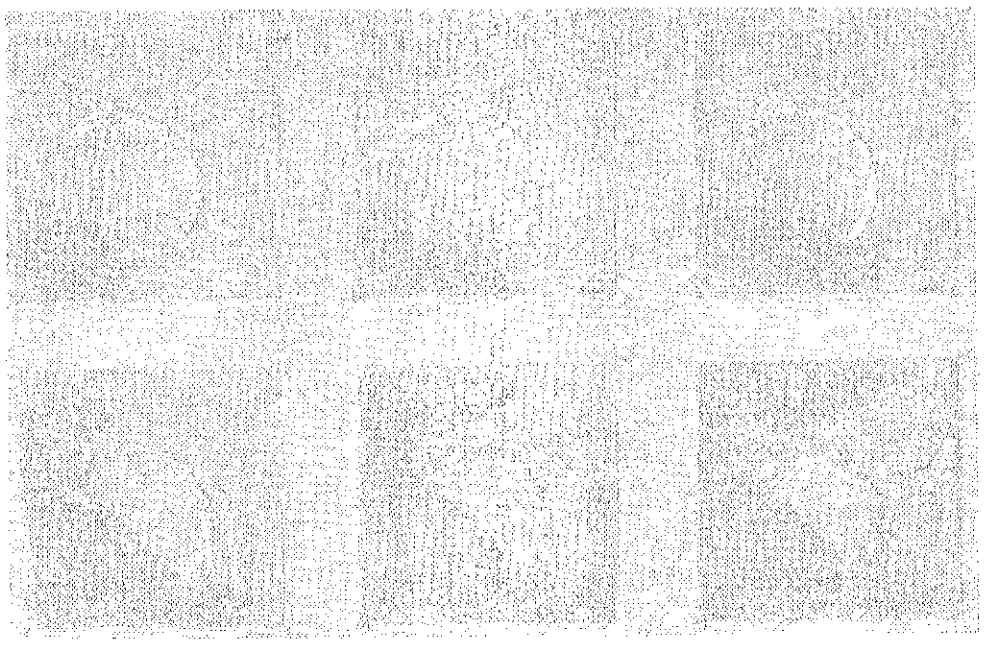






ния, изображенного на фиг. 232 и 235, довольно ясно показывает видоизменяющее влияние барьера. Этот пример от начала до конца является чисто искусственным, но зато с тем он интересен, так как показывает общую картину барьеров в любой системе заводнения.

Интересно заметить полноту вытеснения из нижележащей стороны барьера, а также „нейтральную ось", идущую от эксплоатационной скважины к барьеру, [последний обладает способностью образовывать два источника вблизи своих концов. Нейтральная ось является типичной для двух примыкающих источников, фиг. 230 иллюстрирует эффект



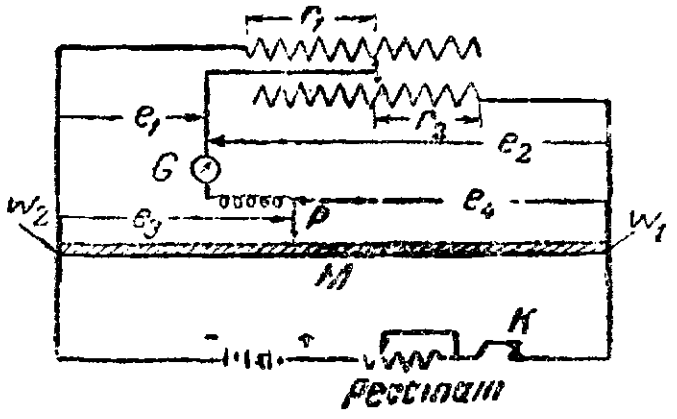
Фиг. 233. Фотографии процесса развития течения вокруг построенного краевой водой барьера, высотой в половину вертикального размещения. Фотографии получены по делям электрической модели (по Байсли и Весселу).

изменения геометрической формы самого барьера на изменение характера заводнения или моделирования. Из фиг. 233 видно, что прямоугольный барьер заменен круговой дугой, которая в пределах обычно встречающихся барьеров, имеющих вкладыши любой или угол. Сравнивая фиг. 233 с 232, видно, что барьер, содержащий вкладыш в конце этого очень сильно изменяет вкладышей в дугу площади. При этом следует заметить, что если заводнение существует достаточно долго, „мертвые" участки должны исчезнуть. В этом можно убедиться, анализируя распределение потенциала в таких системах путем, указанным в последующем разделе.

21. Модели с листовыми проводниками и распределение потенциала. Электролитические модели позволяют весьма отчетливо геометрическую форму в процессе вытеснения, идущего от взаимодействующих скважин по направлению к эксплоатационным нефтяным скважинам. Вместе с тем отсутствие строгой однородности условий электролитического вытеснения у промышленного пласта и трудность измерения условий проводимости электролита в модели делают их недостаточно удовлетворительными для замера суммарного сопротивления сетки размещения скважин при любой рецессии или распределении потенциала внутри пласта. К счастью, все эти трудности можно

избежать, применяя другие, очень простые эксперименты на модели с листовым проводником.

В главе III было отмечено, что течение вязкой жидкости в пористой среде совершенно аналогично электрическому току в металлической проводящей системе той же самой геометрии[1]. Так как скорость жидкости в пористой среде пропорциональна градиенту давления, то плотность тока в металлической проводящей системе пропорциональна напряжению или градиенту потенциала. Отсюда следует, что для эквивалентных геометрических форм не только будет одинаковым сопротивление в соответствующих единицах, но и распределение в них потенциала будет тождественным.



Фиг. 234. Схема электрического тока для изучения распределения потенциала при двухмерных течениях с помощью моделей из листового проводника.

На фиг. 234 приведено экспериментальное устройство для двухразмерной проводящей модели, где M представляет собой модель и является просто тонким металлическим листом постоянной толщины, вырезанным в форме элемента сетки скважин или ее сегмента, для интересующего нас частного случая заводнения или течения. Небольшие электроды W_1 и W_2 соответствуют нагнетательным и эксплоатационным скважинам. Делитель потенциала r_1, r_2, присоединенный через гальванометр G к испытуемому электроду P, позволяет уравновешивание нулевым методом падения потенциала e_3 по отношению к e_1 и e_4 по отношению к e_2. При нажатии на рубильник K батарея сообщает мгновенные токи системе. При условиях нулевого отклонения гальванометра:

$$\frac{e_3}{e_3+e_4}=\frac{e_1}{e_1+e_2}=\frac{r_1}{r_1+r_2}, \tag{1}$$

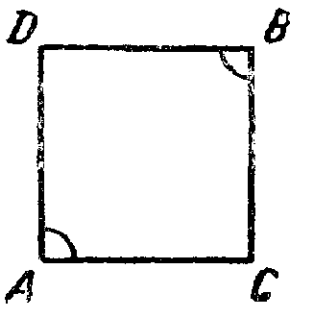
отсчет по шкале r_1 для фиксированного значения r_1+r_2 пропорционален падению потенциала между электродом W_2 и точкой в P. Если, в частности, $r_1+r_2=100$ *ом*, то значение r_1 дает процент суммарного падения потенциала в системе между W_1 и W_2, которое имеет место между P и W_2. Сохраняя значение r_1 фиксированным и передвигая P так, чтобы поддержать нулевое отклонение в G, и замыкая K, можно проследить эквипотенциальную кривую. Меняя также r_1 и повторяя процесс, можно закартировать всю систему эквипотенциальных линий, т. е. распределение потенциала.

При определении экспериментальным путем распределения потенциала следует обратить внимание на некоторые предосторожности при эксперименте, а именно для получения эквивалентных радиусов необходимо иметь регулирование в системе несколькими электродами. В симметричных системах это может быть проверено на точках симметрии в распределении потенциала, положения которых весьма чувствительны к радиусам электродов и которые, очевидно, будут смещаться от их со-

[1] См. гл. IV, п. 17.

ответственных положений, если электроды не будут иметь равные радиусы. В дополнение к этому следует избегать влияния температуры на электроды вследствие высоких плотностей тока. Это явление устраняется в значительной степени, сохраняя рубильник K выключенным и отсюда ток нулевым, за исключением тех мгновенных испытаний, когда необходимо прочесть показания гальванометра. Применение воздушного охлаждения с наддувом на электродах вполне достаточно для снятия остаточного теплового эффекта.

В качестве последнего пункта экспериментальной процедуры можно указать на определение электрическим путем линий тока, а также кривых равного давления соответствующей задачи течения, не изменяя существенно моделей. Как было показано в гл. IV, существует взаимная обратная связь между эквипотенциальными линиями и линиями тока в любой двухразмерной задаче потенциала. Если рассматривать, что значения потенциала, установленные на контурах данной системы, заменены равными значениями плотностей расхода, то эквипотенциальные линии первоначальной системы становятся линиями тока в новой задаче, а первоначальные линии тока становятся новыми эквипотенциальными линиями. Так, для элемента пятискважинной сетки, где скважины размещены по углам A, B (фиг. 235), ясно, что небольшие круговые дуги, замыкающие собой скважины, являются эквипотенциальными кривыми и контуры ACB и ADB являются предельными линиями тока системы. Отсюда согласно закону взаимности, если отрезать углы при A и B вдоль круговых дуг и прикрепить[1] вдоль бывших линий тока ACB и ADB полоски высокопроводящего металла, то дуги у A и B станут ограничивающими линиями тока, а граничными эквипотенциальными линиями станут бывшие линии тока ACB и ADB. Определив таким образом эквипотенциальные линии в новой системе, мы получим линии тока для первоначальной задачи.



Фиг. 235.

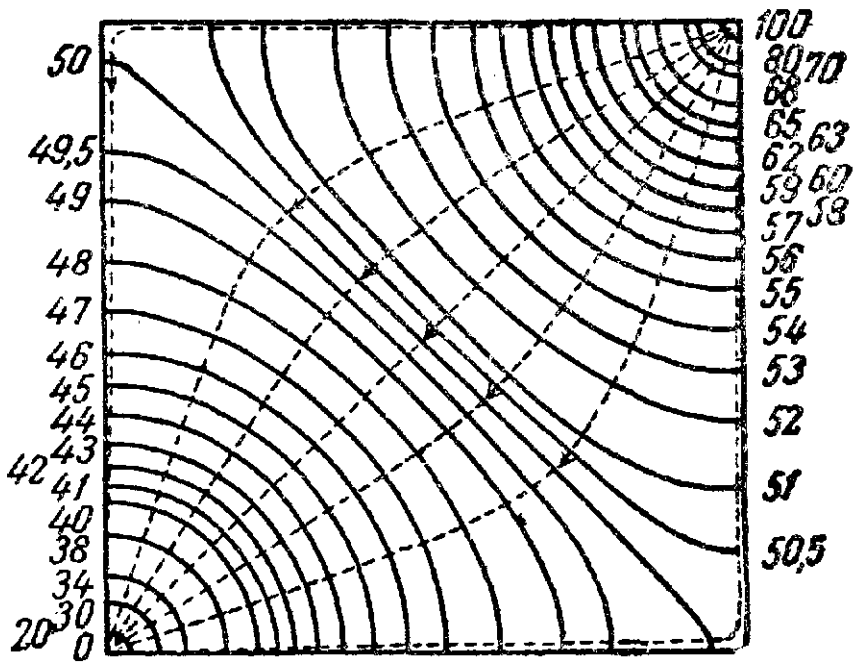
На фиг. 236 приведено распределение давления при водной репрессии для квадранта одного элемента пятискважинного размещения, развитие заводнения на котором показано на фиг. 225. Допустим, что инжекционная скважина в правом верхнем углу работает при давлении на 100 единиц выше по сравнению со скважиной в нижнем левом углу, так что значения, которые даются для линий равного давления, представляют собой проценты суммарного перепада давления через систему инжекция — отдача, вне зависимости от абсолютных значений давлений. Резко подчеркнутое постоянство радиального характера распределения давления относительно двух скважин дает вполне естественное объяснение радиальному характеру продвижения водной репрессии, показанной на фиг. 225. Кроме того, распространение в ширину линий равного давления, а отсюда низкие градиенты вблизи свободных от скважин углов квадранта показывают, почему запаздывает наступление воды вдоль краев модели. В это же время диагональная область продолжает

---

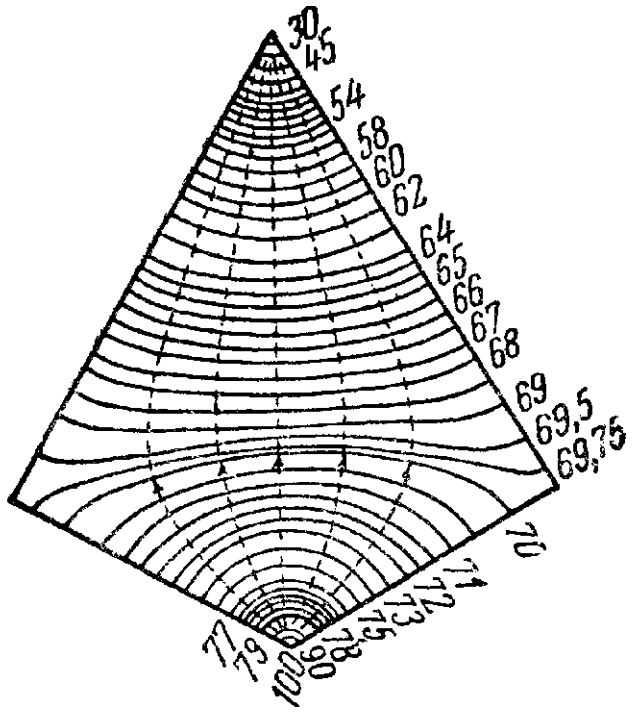
[1] Следует заметить, что проводимость этих полосок должна быть достаточно велика, чтобы убедиться в незначительности перепада в них потенциала, когда ток переходит из контура высокого потенциала в низкий.

образовывать квадратообразную конфигурацию, как на четвертой и пятой фотографии фиг. 225, и, наконец, обращается в острый серп, как только фронт воды входит в область высоких градиентов у продуктивной скважины.

На фиг. 237 показаны результаты аналогичного анализа и сравнение с соответствующим продвижением водной репрессии. Фиг. 230 получена на основании сделанного распределения давления на участках семискважинного размещения при заводнении. Наиболее удивительной особенностью этой фигуры является концентрация градиента высокого давления относительно центральной скважины, взятой в качестве эксплоатационной. Видно, что 50%-ная кривая равного давления в пяти-



Фиг. 236. Распределение потенциала и линий тока в квадранте элемента пятискважинного размещения скважин при водной репрессии, полученное из экспериментов на моделях с листовым проводником.



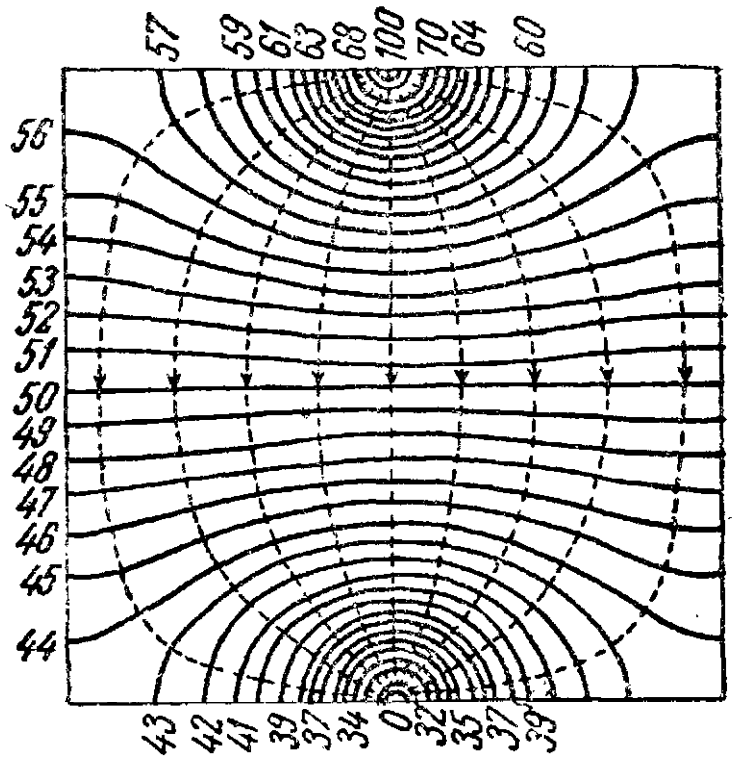
Фиг. 237. Распределение давления и линий тока на участке элемента семискважинного размещения скважин при водной репрессии, полученное из экспериментов на моделях с листовым проводником.

скважинном квадранте находится на середине между нагнетательной и эксплоатационной скважинами, а в данном случае она находится на расстоянии от центральной скважины только 1/9 всего интервала „нагнетание — отдача". Вполне понятной причиной является то обстоятельство, что благодаря наличию в семискважинном размещении в два раза большего количества периферийных скважин по сравнению с центральными, плотности расхода у центральных скважин в два раза выше по сравнению с периферийными скважинами. Разница между градиентами у центральной и периферийной скважины объясняет также причину очень острого серпа на фиг. 230, где эксплоатационная скважина является центральной, а также отстающие и более широкие языки на фиг. 228, где водная репрессия направлена в сторону периферийной скважины.

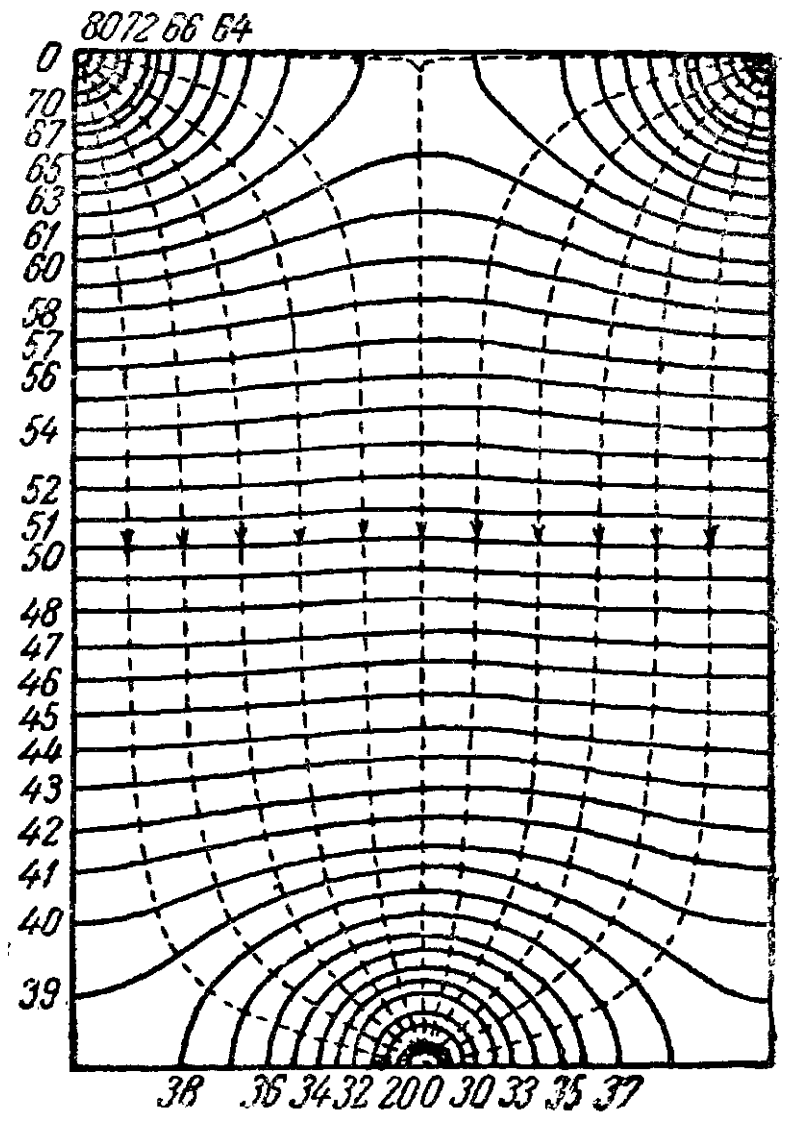
На фиг. 238 показано иное симметричное распределение, соответствующее водной репрессии по принципу движения линейного контура. Очень низкие градиенты вдоль углов модели и последующее медленное продвижение водной репрессии в направлении боковых границ довольно ясно показывают, что заводнение концентрируется вдоль цент-

ровых линий, как это видно из фиг. 223. При этом остается почти половина (43%) всей сетки скважин незатопленной, когда вода впервые достигает вдоль линии центров эксплоатационной скважины.

Контрастом фиг. 238 является распределение давления при сетке размещения скважин с шахматной расстановкой и движении линейного контура (фиг. 239). Видно, что распределение относительно нижней скважины весьма похоже на конфигурацию при последовательном движении линейного контура в водной репрессии. Однако смещение верхнего ряда скважин естественно влечет за собой предварительное расширение фронта водной репрессии, когда вода выходит из инжекционной сква-



Фиг. 238. Распределение давления и линий тока на элементе размещения скважин при водной репрессии при прямой напорной линии, полученное из экспериментов на моделях с листовым проводником.



Фиг. 239. Распределение давления и линий тока на элементе размещения скважин при водной репрессии с шахматной расстановкой нагнетательных скважин, полученное из экспериментов на моделях с листовым проводником.

жины и делится на два языка, симметрично движущихся к эксплоатационным скважинам (фиг. 221).

Аналогичным путем можно заранее предсказать по крайней мере общие черты любой системы водной репрессии, если только в ней закартировано и построено распределение давления. Наконец, следует заметить, что электромодели с листовыми проводниками можно использовать очень удобно для определения сопротивления сетки скважин, а также деталей распределения потенциала. Для этого необходимо сначала замерить удельное сопротивление материала, из которого сделана модель, а затем абсолютное значение сопротивления модели мостиком Уитстона или нуль-потенциометром. Величина абсолютного сопротивления, деленная на удельное сопротивление металла, из которого изготовлена модель, даст эквивалент сопротивления сетки размещения скважин

водной репрессии для единицы проницаемости среды и единицы вязкости жидкости.

22. Аналитические расчеты проводимости сеток скважин при водной репрессии. Общий метод. Рассмотренные в последнем разделе модели с листовыми проводниками дают возможность получить точные замеры сопротивления сеток скважин при водной репрессии. Вместе с тем эти модели страдают недостатком, а именно они дают конечные результаты, соответствующие только данным размерам принятой модели. Поэтому для изучения изменчивости в величине проводимости сеток скважин при водной репрессии, в зависимости от расстояния между скважинами в сетках, необходимо построить новую модель, соответствующую каждому ряду интересующих нас размеров. Однако при аналитической обработке можно сохранить полностью размеры системы в виде параметров, которые нуждаются в уточнении только на конечных численных выкладках. Допустим, что водная репрессия, так же как и при экспериментах на моделях, производится на бесконечной сетке инжекционных и эксплоатационных скважин. Как было показано в гл. IX, п. 8, каждый бесконечный ряд скважин одинакового знака, параллельный оси x, можно представить себе его участием в распределении давления полной сетки скважин из следующего выражения:

$$p = q \ln\left[\operatorname{ch}\frac{2\pi}{a}(y-b) - \cos\frac{2\pi}{a}(x-c)\right], \text{ [уравнение (2), гл. IX, п. 8]}, \quad (1)$$

где a — расстояние между скважинами; b — расстояние от оси x; c — расстояние от оси y до ближайшей скважины справа, q — коэфициент суммарного расхода Q, поступающего через каждую скважину в пласт песчаника, на единицу мощности последнего, согласно отношению

$$Q = \frac{4\pi kq}{\mu}, \text{ [уравнение (5), гл. IX, п. 8]}. \quad (2)$$

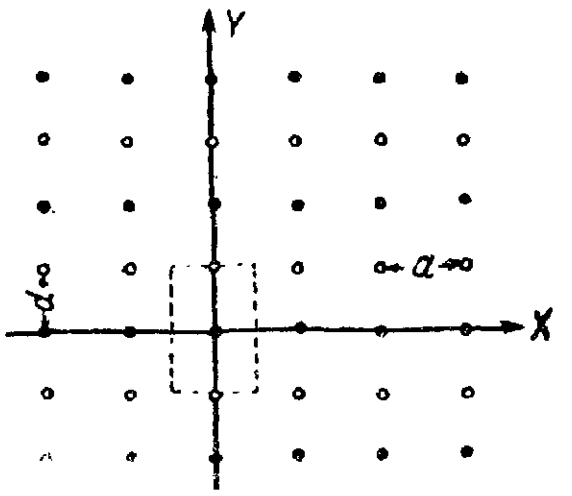
Тогда распределение давления, соответствующее полной сетке скважин, получается непосредственно из суммирования членов, обязанных их индивидуальным рядам, каждый с соответственными значениями q, b и c.

Вместе с тем бесконечная сетка скважин будет состоять из бесконечного числа рядов инжекционных и эксплоатационных скважин. Отсюда суммирование членов, обязанных их отдельным рядам, должно быть сделано со всей тщательностью, чтобы избежать расхождения ряда. Физический смысл правильного суммирования заключается в том, что бесконечный ряд линий инжекционных и эксплоатационных скважин прибавляется в форме пар рядов, симметричных относительно оси x, а также константы, добавляемой к члену, выражающему давление каждой пары и такой величины, чтобы результирующая сумма была сходящейся.

Когда будет найдено выражение для распределения давления в сетке скважин, разница в давлении между представительницами инжекционных и эксплоатационных скважин даст чистую разность давления, действующую в системе. Разделив это выражение на Q, получим в результате „проводимость“ сетки или текущий дебит на единицу разности давления, элемент сетки и для единицы мощности песчаника, а также

для $k/\mu = 1$. Обрабатывая последовательно различные сетки скважин при водной репрессии [1], продемонстрируем этот метод на ряде имеющих практический интерес задач.

23. Проводимость при прямолинейном заводнении. На фиг. 240 приведена геометрическая схема при прямолинейном заводнении. Кружками показаны инжекционные скважины, а точками — эксплоатационные скважины. Вследствие симметрии системы вся сетка скважин может быть определена элементом, который дается пунктирным прямоугольником. С другой стороны, для аналитического воспроизведения системы необходимо отметить только, что члены уравнений, например, (1), гл. IX, п. 22, должны выбираться со знаком $+q : b = 2nd$, $c = 0$, и $-q$; $b = 2(n+1)d$, $c = 0$.



Фиг. 240. Размещение скважин при водной репрессии для прямой напорной линии.

Складывая эти члены и добавляя константы согласно указаниям последнего раздела, получаем результирующее распределение давления в следующей форме:

$$p(x, y) = q \ln\left(\operatorname{ch}\frac{2\pi y}{a} - \cos\frac{2\pi x}{a}\right) + q\sum_{1}^{\infty}(-1)^m \times$$

$$\times \ln \frac{4\left[\operatorname{ch}\frac{2\pi(y-md)}{a} - \cos\frac{2\pi x}{a}\right]\left[\operatorname{ch}\frac{2\pi(y+md)}{a} - \cos\frac{2\pi x}{a}\right]}{e^{4\pi md/a}}. \qquad (1)$$

Чтобы найти разницу давления, которое дается уравнением (1) и существует между скважинами в нагнетательных и эксплоатационных рядах, достаточно, очевидно, выбрать эксплоатационную скважину в начале координат, а нагнетательную скважину расположить непосредственно над ней по оси y. Устанавливая тогда первоначально $x = 0$, получим значение для p:

$$p(x=0) = q \ln 2 \operatorname{sh}^2 \frac{\pi y}{a} +$$

$$+ q\sum_{1}^{\infty}(-1)^m \ln \frac{16 \operatorname{sh}^2\frac{\pi(y-md)}{a} \operatorname{sh}^2\frac{\pi(y+md)}{a}}{e^{4\pi md/a}}. \qquad (2)$$

У нагнетательной скважины можно принять $y = r_w$, где r_w — радиус скважины. Величину его можно считать очень малой по сравнению с d или a.

Отсюда

$$p(0, r_w) = q \ln 2 \operatorname{sh}^2 \frac{\pi r_w}{a} + q\sum_{1}^{\infty}(-1)^m \ln \frac{16 \operatorname{sh}^4 \pi md/a}{e^{4\pi md/a}}. \qquad (3)$$

---

[1] Эти конечные выводы были получены М. Маскетом и Р. Д. Вайковым в цитированной выше статье.

На нагнетательной скважине $y = \pm r_w$ и

$$p(0,\ d \pm r_w) = q \ln 2 \operatorname{sh}^2 \pi d/a - q \ln \frac{16 \operatorname{sh}^2 \pi r_w/a \operatorname{sh}^2 2\pi d/a}{e^{4\pi d/a}} + \\ + q \sum_2^\infty (-1)^m \ln \frac{16 \operatorname{sh}^2 \pi d\,(m-1)/a \operatorname{sh}^2 \pi d\,(m+1)/a}{e^{4\pi m d/a}}. \qquad (4)$$

Тогда разность остаточного давления

$$\Delta p = 2q \ln \frac{\operatorname{sh}^3 \pi d/a}{\operatorname{sh}^2 \pi r_w/a \operatorname{sh} 2\pi d/a} + \\ + 2q \sum_2^\infty (-1)^m \ln \frac{\operatorname{sh} \pi d\,(m-1)/a \operatorname{sh} \pi d\,(m+1)/a}{\operatorname{sh}^2 \pi m d/a}. \qquad (5)$$

Так как для практических случаев величина d/a будет не меньше $1/4$, все члены ряда, за исключением первого, могут быть опущены с ошибкой порядка только $0{,}1\%$. Тогда выражение для Δp можно переписать в следующем виде:

$$\Delta p = 2q \ln \frac{\operatorname{sh}^4 \pi d/a \operatorname{sh} 3\pi d/a}{\operatorname{sh}^2 \pi r_w/a \operatorname{sh}^3 2\pi d/a}. \qquad (6)$$

Как было уже отмечено, расход на скважину дается уравнением [1]

$$Q = \frac{4\pi k q}{\mu}.$$

Отсюда величина, обратная сопротивлению системы, или ее действительная проводимость, получается из выражения:

$$\frac{\mu Q}{k \Delta p} = \frac{2\pi}{\ln \dfrac{\operatorname{sh}^4 \pi d/a \operatorname{sh} 3\pi d/a}{\operatorname{sh}^2 \pi r_w/a \operatorname{sh}^3 2\pi d/a}}. \qquad (7)$$

Для $d/a \geqslant 1$ можно применить с высокой степенью точности упрощенную формулу:

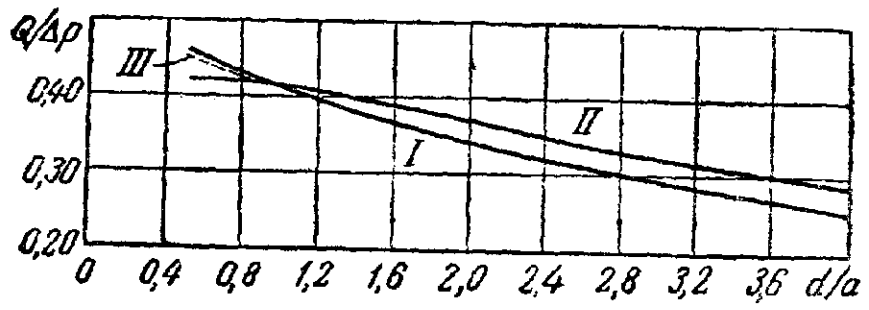
$$\frac{\mu Q}{k \Delta p} = \frac{2\pi}{\dfrac{\pi d}{a} - 2 \ln 2 \operatorname{sh} \dfrac{\pi r_w}{a}}. \qquad (8)$$

---

[1] Вследствие допущения, что k/μ имеет то же самое значение в затопленной зоне и в зоне, куда вода еще не достигла, абсолютные значения проводимости среды при водной репрессии, выведенные в настоящем и последующих разделах, могут отличаться весьма заметно от значений, которые наблюдаются в реальных размещениях скважин при водной репрессии. Вместе с тем относительные значения, полученные сравнением различных типов размещения или различных расстояний между скважинами в последних, на основании теоретических умозаключений должны между собой сближаться. Кроме того, с помощью небольшого промыслового эксперимента можно развить подходящий процесс усреднения для нахождения величины k/μ, на основании которого можно вполне удовлетворительно предсказать абсолютные проводимости системы.

Интересно заметить, что уравнение (8) соответствует значению $\mu Q/k\Delta p$ для положения напорной линии между непрерывной линией источников и стоков с фактическим разрывом между ними $d+\frac{2a}{\pi}\ln\frac{a}{2\pi r_w}$. Второй член представляет собой, очевидно, увеличение эффективного расстояния между линиями источников и стоков вследствие того, что течение должно выйти и вступить в систему из несвязанных между собой индивидуальных скважин, а не распределиться равномерно вдоль линий источников и стоков.

На фиг. 241 дано построение уравнений (7) или (8) как функций d/a; на кривой I $a/r_w = 2640$, что соответствует радиусу скважины 0,075 *м* и расстоянию между инжекционной и эксплоатационной скважинами — 201 *м*; на кривой II $d/r_w = 2640$, что соответствует расстоянию 201 *м* между инжекционным и эксплоатационным рядами. Следует заметить, что $\mu Q/k\Delta p$, или действительная проводимость, уменьшается достаточно медленно с увеличением интервала между рядами. Вполне понятно, что это явление всецело обязано тому обстоятельству, что основная часть всего сопротивления системы ведет свое начало от радиального течения относительно отдельных скважин в нагнетательных и эксплоатационных рядах. Поэтому увеличение интервала между последними влияет только на относительно небольшую часть сопротивления, которое связано с линейным течением между рядами. Так, даже при $d/a = 4$ действительная проводимость системы все же составляет половину величины соответствующей при условии, что скважины непрерывно расставлены на линиях нагнетательных и эксплоатационных скважин ($\mu Q/k\Delta p = 2a/d$).



Фиг. 241. Изменение проводимости водной репрессии при последовательном продвижении линейного контура в зависимости от d/a (расстояние между рядами нагнетательных и эксплоатационных скважин) / (расстояние между скважинами внутри рядов):

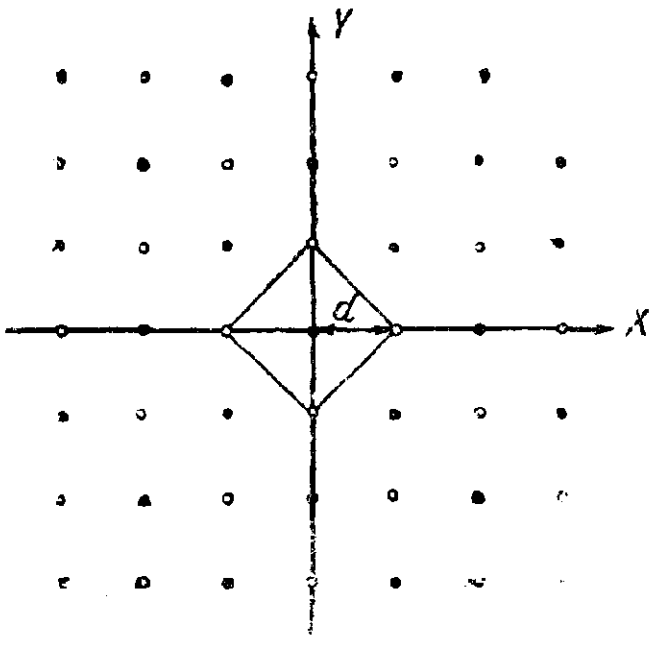
$Q/\Delta p$ — текущий дебит на скважину и на единицу перепада давления в песчанике с единичной проницаемостью и единичной мощностью; *I* — *a* принято 201 *м* и фронтальное продвижение последовательным; *II* — *a* принято 201 *м* и фронтальное продвижение последовательным; *III* — *a* принимается 201 *м* и фронтальное продвижение шахматным.

Действительная проводимость при прямолинейном заводнении приведена на фиг. 243 построением относительно d (кривая I), которая соответствует случаю, где интервал между нагнетательными скважинами равняется интервалу между нагнетательной и эксплоатационной скважинами ($d = a$).

24. Проводимость среды с пятью скважинами при водной репрессии. Для проведения аналитической процедуры удобно выбрать оси координат в пятискважинном размещении так, чтобы они проходили через диагонали обычного пятискважинного элемента или квадрата, указанного на фиг. 242. Здесь центральная скважина принята эксплоатационной скважиной (с положительным коэфициентом расхода). Тогда

пятискважинное размещение может быть представлено следующим рядом групп скважин:

$$+q:(2nd,\ 2md);\quad [(2n+1)d,\ (2m+1)d],$$
$$-q:[(2nd,\ (2m+1)d];\quad [(2n+1)d,\ 2md],$$



Фиг. 242. Пятискважинное размещение скважин при водной репрессии.

где n показывает положение скважины в ряду, параллельном оси x, а m указывает на расстояние этого ряда от оси x. Построим сетку размещения скважин так же, как и в предыдущем случае (гл. IX, п. 23), беря совместно парные ряды, симметрично расположенные относительно оси x. Затем, группируя нагнетательные и эксплоатационные ряды со скважинами, расположенными непосредственно одна над другой, можно написать результирующее распределение давления:

$$p = q \ln \frac{\operatorname{ch} \pi y/d - \cos \pi x/d}{\operatorname{ch} \pi y/d + \cos \pi x/d} -$$
$$- q \sum_1^\infty (-1)^m \ln \frac{4\left[\operatorname{ch} \frac{\pi (y - md)}{d} + \cos \frac{\pi x}{d}\right]\left[\operatorname{ch} \frac{\pi (y+md)}{d} + \cos \frac{\pi x}{d}\right]}{e^{2m\pi}} +$$
$$+ q \sum_1^\infty (-1)^m \ln \times$$
$$\times \frac{4\left[\operatorname{ch} \frac{\pi (y - md)}{d} - \cos \frac{\pi x}{d}\right]\left[\operatorname{ch} \frac{\pi (y+md)}{d} - \cos \frac{\pi x}{d}\right]}{e^{2m\pi}}. \qquad (1)$$

Как и в предыдущем рассмотрении, уравнение (1) налагает условие существования разности давления между нагнетательными и эксплоатационными скважинами, которое дается следующим выражением:

$$\Delta p = p(0, d \pm r_w) - p(0, r_w) =$$
$$= 2q \ln \frac{\operatorname{cth} \pi r_w/2d}{\operatorname{cth} \pi/2} + 2q \ln \frac{\operatorname{sh}^2 \pi/2}{\operatorname{sh} \pi \operatorname{sh} \pi r_w/2d} +$$
$$+ 2q \sum_2^\infty (-1)^m \ln \frac{\operatorname{sh} \pi (m-1)/2 \operatorname{sh} \pi (m+1)/2}{\operatorname{sh} 2\pi m/2} +$$
$$+ 2q \sum_1^\infty (-1)^m \ln \frac{\operatorname{ch}^2 \pi m/2}{\operatorname{ch} \pi (m-1)/2 \operatorname{ch} \pi (m+1)/2} =$$
$$= 2q \ln \frac{\operatorname{th}^4 \pi/2 \operatorname{th} 3\pi/2 \operatorname{cth}^8 \pi}{\operatorname{sh}^2 \pi r_w/2d} +$$
$$+ 2q \sum_3^\infty (-1)^m \ln \operatorname{cth}^2 \frac{\pi m}{2} \operatorname{th} \frac{\pi (m-1)}{2} \operatorname{th} \frac{\pi (m+1)}{2}, \qquad (2)$$

где $\operatorname{ch} \pi r_w/2d$ принято равным единице.

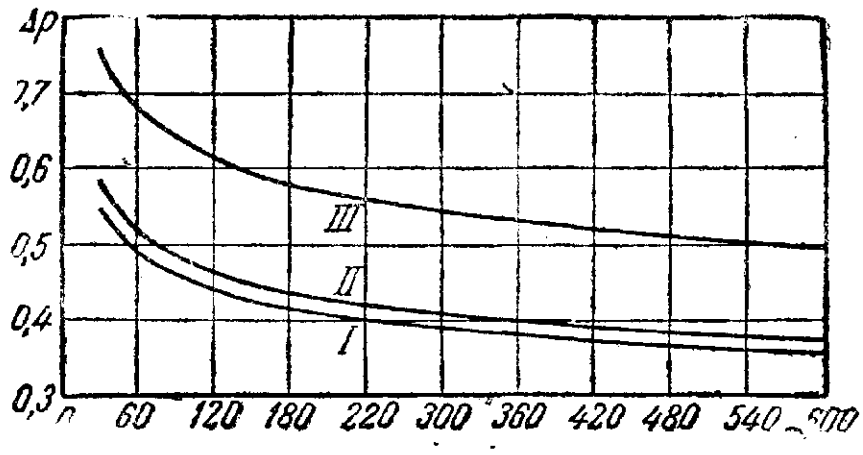
Так как представленный ряд составляет менее 0,1% всего Δp, его можно свободно опустить. Тогда останется:

$$\Delta p = -4q\left(\ln \operatorname{sh} \frac{\pi r_w}{2d} + 0{,}1674\right). \qquad (3)$$

Отсюда, заменив sh его аргументом, получим:

$$\frac{\mu Q}{k\Delta p} = \frac{\pi}{\ln \frac{d}{r_w} - 0{,}6190}. \qquad (4)$$

Принимая снова $r_w = 0{,}075$ *м*, дадим построение уравнения (4) с $Q\mu/k\Delta p$ по отношению к d (фиг. 243), кривая *II*. Видно, что эта кривая идет почти совершенно параллельно, но выше (на 4—6%) кривой проводимости для прямолинейного заводнения. Общее изменение $\mu Q/k\Delta p$ по отношению к d весьма похоже на изменение расхода при радиальном течении в зависимости от изменения радиуса скважины или внешней границы системы. Так, проводимость при удвоении интервала между рядами от $d = 305$ *м* до $d = 610$ *м* уменьшается в любом случае только около 9%. Для строго радиального течения в единичную скважину эта же величина уменьшения проводимости составит соответственно 8,3%.



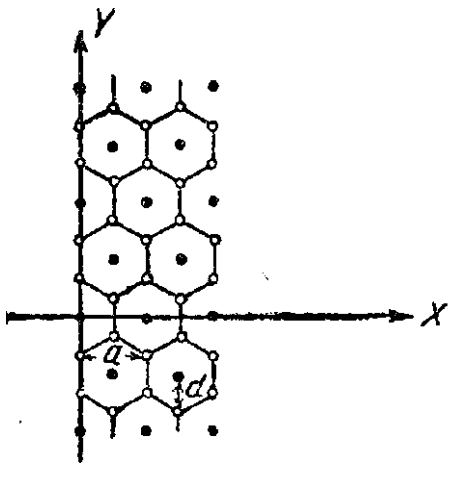
Фиг. 243. Изменение проводимости сеток размещения водной репрессии в зависимости от расстояния d между нагнетательными и эксплоатационными скважинами:

$Q/\Delta p$ — текущий дебит на элемент сетки и на единицу перепада давления в песчанике с единичной проницаемостью и единичной мощностью; *I* — нормальный процесс водной репрессии с последовательным продвижением линейного контура ($d = a$); *II* — пятискважинная водная репрессия; *III* — семискважинная водная репрессия. Ось абсцисс — d — расстояние между нагнетательными и эксплоатационными скважинами (*м*).

25. Проводимость среды с семью скважинами при водной репрессии. Следуя процедуре, которая была применена нами для пятискважинного размещения, разобьем семискважинное размещение при производстве аналитической обработки на следующие группы скважин (фиг. 244):

$$+2q:(na,\ 3md);$$
$$[(n+{}^1/_2)\,a, (3m+{}^3/_2)\,d];$$
$$-q:[na,\ (3m+1)\,d];$$
$$[(n+{}^1/_2)\,a,\ (3m+{}^1/_2)\,d];$$
$$-q:[na, (3m+2)\,d];$$
$$[(n+{}^1/_2)\,a,\ (3m+{}^5/_2)\,d],$$

где n и m имеют те же обозначения, что и при пятискважинном размещении.



Фиг. 244. Семискважинное размещение скважин при водной репрессии.

Присутствие коэфициента 2 для первой группы скважин объясняется тем, что в семискважинном размещении имеется только половина центральных (эксплоатационных) по сравнению с количеством перифе-

рийных (нагнетательных) скважин. Из геометрии шестиугольника ясно, что $a=\sqrt{3}d$. Суммируя участие различных групп скважин в распределении давления, найдем, что

$$
\begin{aligned}
p = {} & 2q \ln\left(\operatorname{ch}\frac{2\pi y}{a} - \cos\frac{2\pi x}{a}\right) + \\
& + 2q\sum_{1}^{\infty} \ln \frac{4\left[\operatorname{ch}\frac{2\pi(y-3md)}{a} - \cos\frac{2\pi x}{a}\right]\left[\operatorname{ch}\frac{2\pi(y+3md)}{a} - \cos\frac{2\pi x}{a}\right]}{e^{12\,\pi md/a}} + \\
& + 2q\sum_{0}^{\infty} \ln \frac{4\left[\operatorname{ch}\frac{2\pi(y-3d/2-3md)}{a} + \cos\frac{2\pi x}{a}\right]\left[\operatorname{ch}\frac{2\pi(y+3d/2+3md}{a} + \cos\frac{2\pi x}{a}\right]}{e^{4\pi d(3m+3/2)/a}} - \\
& - q\sum_{0}^{\infty} \ln \frac{4\left[\operatorname{ch}\frac{2\pi(y-d-3md)}{a} - \cos\frac{2\pi x}{a}\right]\left[\operatorname{ch}\frac{2\pi(y+d+3md)}{a} - \cos\frac{2\pi x}{a}\right]}{e^{4\pi d(3m+1)/a}} - \\
& - q\sum_{0}^{\infty} \ln \frac{4\left[\operatorname{ch}\frac{2\pi(y-2d-3md)}{a} - \cos\frac{2\pi x}{a}\right]\left[\operatorname{ch}\frac{2\pi(y+2d+3md)}{a} - \cos\frac{2\pi x}{a}\right]}{e^{4\pi d(3m+2)/a}} - \\
& - q\sum_{0}^{\infty} \ln \frac{4\left[\operatorname{ch}\frac{2\pi(y-d/2-3md)}{a} + \cos\frac{2\pi x}{a}\right]\left[\operatorname{ch}\frac{2\pi(y+d/2+3md)}{a} + \cos\frac{2\pi x}{a}\right]}{e^{4\pi d(3m+1/2)/a}} - \\
& - q\sum_{0}^{\infty} \ln \frac{4\left[\operatorname{ch}\frac{2\pi(y-5d/2-3md)}{a} + \cos\frac{2\pi x}{a}\right]\left[\operatorname{ch}\frac{(y+5d/2+3md)}{a} + \cos\frac{2\pi x}{a}\right]}{e^{4\pi d(3m+5/2)/a}}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Подсчитывая опять разность давления между нагнетательными и эксплоатационными скважинами и выделяя все члены, где $m=0$, можно выразить Δp следующим выражением:

$$
\begin{aligned}
\Delta p = p(0, d \pm r_w') - p(0, r_w) = {} & 2q \ln \frac{\operatorname{sh}^3\frac{\pi d}{a}\operatorname{ch}^3\frac{\pi d}{2a}\operatorname{ch}^4\frac{5\pi d}{2a}\operatorname{sh}\frac{2\pi d}{a}}{\operatorname{sh}^3\frac{\pi r_w}{a}\operatorname{ch}^6\frac{3\pi d}{2a}\operatorname{ch}\frac{7\pi d}{2a}\operatorname{sh}\frac{3\pi d}{a}} + \\
& + 4q\sum_{1}^{\infty} \ln \frac{\operatorname{sh}\frac{(3m-1)\pi d}{a}\operatorname{sh}\frac{(3m+1)\pi d}{a}}{\operatorname{sh}^2\frac{3m\pi d}{a}} + \\
& + 4q\sum_{1}^{\infty} \ln \frac{\operatorname{ch}\frac{(3m+1/2)\pi d}{a}\operatorname{ch}\frac{(3m+5/2)\pi d}{a}}{\operatorname{ch}^2\frac{(3m+3/2)\pi d}{a}} + \\
& + 2q\sum_{1}^{\infty} \ln \frac{\operatorname{sh}^2\frac{(3m+1)\pi d}{a}}{\operatorname{sh}\frac{3m\pi d}{a}\operatorname{sh}\frac{(3m+2)\pi d}{a}} +
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$+2q\sum_{1}^{\infty}\ln\frac{\operatorname{sh}^2\frac{(3m+2)\pi d}{a}}{\operatorname{sh}\frac{3(m+1)\pi d}{a}\operatorname{sh}\frac{(3m+3)\pi d}{a}}+$$

$$+2q\sum_{1}^{\infty}\ln\frac{\operatorname{ch}^2\frac{(3m+{}^1/_2)\pi d}{a}}{\operatorname{ch}\frac{(3m-{}^1/_2)\pi d}{a}\operatorname{ch}\frac{(3m+{}^3/_2)\pi d}{a}}+ \qquad (2)$$

$$+2q\sum_{1}^{\infty}\ln\frac{\operatorname{ch}^2\frac{(3m+{}^5/_2)\pi d}{a}}{\operatorname{ch}\frac{(3m+{}^3/_2)\pi d}{a}\operatorname{ch}\frac{(3m+{}^7/_2)\pi d}{a}}.$$

Бесконечный ряд можно теперь просуммировать следующим образом. Беря первый ряд, найдем, что:

$$\sum_{1}^{\infty}\ln\frac{\operatorname{sh}\frac{(3m-1)\pi d}{a}\operatorname{sh}\frac{(3m+1)\pi d}{a}}{\operatorname{sh}^2\frac{3m\pi d}{a}}=$$

$$=\sum_{1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{\operatorname{sh}^2\frac{\pi d}{a}}{\operatorname{sh}^2\frac{3m\pi d}{a}}\right)\approx-\operatorname{sh}^2\frac{\pi d}{a}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}^2\frac{3m\pi d}{a}}\approx$$

$$\approx-4\operatorname{sh}^2\frac{\pi d}{a}\sum_{1}^{\infty}e^{\frac{-6m\pi d}{a}}=-\frac{2e^{\frac{-3\pi d}{a}}\operatorname{sh}^2\frac{\pi d}{a}}{\operatorname{sh}\frac{3\pi d}{a}}.$$

Приближения, которые, повидимому, влекут за собой пренебрежимо малые ошибки вследствие того, что

$$\frac{\pi d}{a}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}=1{,}8138,$$

создадут условия, при которых замена $\operatorname{sh}\frac{3\pi d}{a}$ через $e^{\frac{3\pi d}{a}}/2$ и отбрасывание членов, например, $\frac{\operatorname{sh}^4\frac{\pi d}{a}}{\operatorname{sh}^4\frac{3m\pi d}{a}}$, дадут очень маленькую ошибку по сравнению с оставшимися членами. Суммируя аналогичным путем остальные ряды, можем сгруппировать их всех в член:

$$\frac{-4qe^{-\frac{3\pi d}{a}}\operatorname{sh}^2\frac{\pi d}{a}}{\operatorname{sh}\frac{3\pi d}{a}}\left(2+e^{-\frac{\pi d}{a}}-e^{-\frac{2\pi d}{a}}-2e^{-\frac{3\pi d}{a}}-e^{-\frac{4\pi d}{a}}+e^{-\frac{5\pi d}{a}}\right),$$

числовая величина которого составит $-0{,}0029\,q$. Подсчитывая теперь значение членов первой части Δp, найдем, что Δp можно переписать в таком виде:

$$\Delta p = 2q\left(-3\ln \operatorname{sh}\frac{\pi r_w}{a} + 0{,}0790\right). \qquad (3)$$

Замечая теперь, что расход на эксплоатационную скважину составляет $8\pi kq/\mu$, и опять заменяя sh своим аргументом, получим действительную проводимость системы из следующего выражения:

$$\frac{\mu Q}{k\Delta p} = \frac{4\pi}{3\ln\dfrac{d}{r_w} - 1{,}7073}. \qquad (4)$$

Принимая $r_w = 0{,}075$ *м*, получим построение уравнения (4) на фиг. 243 в виде кривой *III*. Из кривой видно, что она почти параллельна кривым *I* и *II*. Отсюда проводимость семискважинной системы выше на 32% по сравнению с пятискважинным размещением и на 39% выше по сравнению с прямолинейным заводнением.

Вполне понятно, что это сравнение относится к трем системам водной репрессии с тем же самым расстоянием между нагнетательными и эксплоатационными скважинами, и не учитывает разности в величине уплотнения числа скважин на единицу площади для любой из трех сеток размещения. Легко убедиться в том, что степень уплотнения скважин для всех трех случаев размещения при водной репрессии будет:

линейное размещение — 1 скв. на da единиц площади;

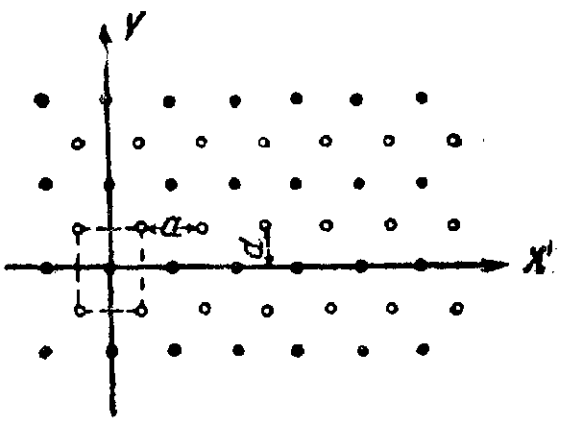
пятискважинное размещение — 1 скв. на d^2 единиц площади;

семискважинное размещение — 1 скв. на $0{,}866\,d^2$ единиц площади.

Отсюда если $d = a$, то при прямолинейном заводнении, как это было принято на кривой *I* построения фиг. 243, водная репрессия имеет ту же степень уплотнения на 1 *га*, что и пятискважинное размещение. В то же самое время при семискважинном размещении водная репрессия имеет степень уплотнения на 15% выше на единицу площади. Чтобы выравнять степень уплотнения, необходимо принять расстояние между нагнетательной и эксплоатационной скважинами при семискважинном размещении (d_7) в 1,075 раза больше по сравнению в пятискважинной системой. Это означает, что если расстояние между нагнетательной и эксплоатационной скважинами при пятискважинном размещении составляет 152,5 *м*, при семискважинном размещении, чтобы иметь то же самое количество скважин на единицу площади в системе водной репрессии, расстояние должно увеличиться до 163,8 *м*. Влияние этого снижения до величины, равной степени уплотнения на единицу площади, весьма невелико и все же сохраняет проводимость среды при семискважинном размещении на элемент сетки последней, соответственно около 31 и 38% выше значения проводимости среды при пятискважинном размещении и прямолинейном заводнении.

26. Проводимость при шахматном размещении скважин. Если повернуть фиг. 242 на 45°, можно заметить, что пятискважинная сетка фактически является шахматным размещением скважин с $d/a = {}^1/_2$.

Поэтому разница около 3% между сопротивлением среды при пятискважинном размещении скважин и сопротивлением среды при линейном размещении ($d/a = 1/2$), (фиг. 241), а также гораздо большая разница (130%) в величине к. п. д. между этими системами водной репрессии всецело связана, как это будет показано дальше, с шахматной расстановкой скважин. Является интересным подвергнуть математической обработке общий случай шахматной расстановки скважин ($d/a \neq 1/2$) или же „смещенной пятискважинной сетки" и посмотреть, дает ли последняя какие-либо преимущества по сравнению с обычными, более симметричными размещениями скважин при водной репрессии. Для этого выберем координатную ось так, чтобы она проходила через две соседние нагнетательные и эксплоатационные скважины. Однако такие оси не позволяют иметь периодического воспроизведения координат, если только величина $4d^2/a^2$ не представляет собой целого числа. Поэтому для общих значений d/a необходимо начертить оси координат аналогично нормальным последовательным рядам нагнетания, т. е. согласно фиг. 245. Следуя процедуре, которая была принята в предыдущих разделах, можем написать распределение давления в системе так:



Фиг. 245. Шахматное размещение скважин при водной репрессии.

$$p = q \ln\left(\operatorname{ch}\frac{2\pi y}{a} - \cos\frac{2\pi x}{a}\right) + \left.\begin{aligned} &+ q\sum_{1}^{\infty} \ln \frac{4\left|\operatorname{ch}\frac{2\pi(y-2md)}{a} - \cos\frac{2\pi x}{a}\right|\left[\operatorname{ch}\frac{2\pi(y+2md)}{a} - \cos\frac{2\pi x}{a}\right]}{e^{8m\pi d/a}} - \\ &- q\sum_{0}^{\infty} \ln \frac{4\left[\cos\frac{2\pi(y-2md-d)}{a} + \cos\frac{2\pi x}{a}\right]\left[\operatorname{ch}\frac{2\pi(y+2md+d)}{a} + \cos\frac{2\pi x}{a}\right]}{e^{4\pi d(2m+1)/a}} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Разность давления между нагнетательными и эксплоатационными скважинами будет:

$$\Delta p = p\left(\frac{a}{2},\ d \pm r_w\right) - p(0, r_w) =$$

$$= 2q \ln \frac{\operatorname{ch}^4\frac{\pi d}{a}\operatorname{ch}^3\frac{3\pi d}{a}}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi r_w}{a}\operatorname{sh}^4\frac{2\pi d}{a}\operatorname{sh}\frac{4\pi d}{a}} +$$

$$+ 2q\sum_{2}^{\infty} \ln \frac{\operatorname{ch}\frac{(2m-1)\pi d}{a}\operatorname{ch}^3\frac{(2m+1)\pi d}{a}}{\operatorname{sh}^3\frac{2m\pi d}{a}\operatorname{sh}\frac{2(m+1)\pi d}{a}}, \quad (2)$$

для которого ряд является незначительной величиной, если только $d/a \geqslant 1/2$. Тогда проводимость системы будет:

$$\frac{\mu Q}{k\Delta p} = \frac{2\pi}{\ln \dfrac{\operatorname{ch}^4 \dfrac{\pi d}{a} \operatorname{ch}^3 \dfrac{3\pi d}{a}}{\operatorname{sh}^2 \dfrac{\pi r_w}{a} \operatorname{sh}^4 \dfrac{2\pi d}{a} \operatorname{sh} \dfrac{4\pi d}{a}}}, \tag{3}$$

которое приводится к уравнению (8), гл. IX, п. 23, для последовательных рядов при $d/a \geqslant 1$. Действительно, на фиг. 241 построение уравнения (3) для $a = 201$ *м* дает кривую *III*, которая сливается полностью с соответствующей кривой для последовательной сетки размещения (кривая *I*) при $d/a > 1$ линейного контура питания. Отсюда следует, что, исключая размещение, где $d/a < 1$ (что включает сюда и пятискважинное размещение), мы получаем сопротивление системы с линейным контуром питания неизмененным даже при переходе на шахматную расстановку скважин. Это заключение можно рассматривать как обобщение тех же самых конечных выводов, что были получены нами ранее для конечного числа рядов размещения скважин.

27. Расчет коэфициента полезного действия водной репрессии[1]. В гл. IX, п. 19, пользуясь электролитическими моделями, уже были найдены величины к. п. д. водной репрессии, т. е. определение части всей площади сетки размещения скважин, затопленной к моменту, когда нагнетаемая вода впервые достигает эксплоатационной скважины. Представляет собой интерес для подсчета к. п. д. водной репрессии применить метод расчета распределения давления, использованный для установления величины сопротивления системы водной репрессии.

Так как этот метод сравнительно прост, его можно использовать также для нахождения изменения к. п. д. водной репрессии при питании от линейного контура в зависимости от величины отношения расстояния между нагнетательными и эксплоатационными рядами к интервалу между скважинами в этих рядах. Этод метод в принципе аналогичен применявшемуся нами в гл. VIII, пп. 6 и 8, для нахождения площади заводнения в задачах движения линейного контура между двумя скважинами, а также при движении линейного контура в единичную скважину. При этом подсчитывается время, необходимое для перемещения частицы от инжекционной скважины к эксплоатационной вдоль линии тока наиболее высокой средней скорости. Этот интервал времени, умноженный на величину расхода в инжекционной скважине, даст значение площади (в двухразмерной

---

[1] Как это следует из гл. VIII, п. 9, пренебрежение разницей величины k/μ с обеих сторон поверхности раздела вода — нефть даст по вполне понятным причинам толчок к несоответствию между подсчитанными абсолютными значениями к. п. д. и наблюденными при реальном проведении процесса водной репрессии. Однако это несоответствие будет иметь менее серьезное значение по сравнению с темо, что связаны с абсолютными величинами проводимости системы водной репрессии, обязанной этому пренебрежению (сноска гл. IX, п. 23). Они могут свободно замаскироваться горизонтальным изменением нормальной проницаемости песчаника, имеющей место в большом масштабе на практике.

системе), которая затопляется к тому моменту, когда нагнетаемая жидкость впервые достигает эксплоатационной скважины. Разделив эту площадь на площадь элементарной единицы сетки размещения скважин при водной репрессии (которая содержит только одну инжекционную скважину), получаем непосредственно часть затопленной сетки размещения скважин, а отсюда к. п. д. водной репрессии.

28. Коэфициент полезного действия при водной репрессии с последовательным питанием от линейного контура. Приложим сначала этот метод к последовательному питанию скважин от линейного контура. Ясно, что линии тока с наивысшей средней скоростью являются центровыми линиями между нагнетательными и эксплоатационными скважинами, одна из которых будет ось y на фиг. 240. Так как скорость вдоль оси y является градиентом давления, то из уравнения (2), гл. IX, п. 23, следует, что

$$v_y = -\frac{k}{f\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{x=0} = -\frac{2\pi kq}{af\mu}\operatorname{cth}\frac{\pi y}{a} -$$

$$-\frac{2\pi kq}{af\mu}\sum_{1}^{\infty}(-1)^m\left[\operatorname{cth}\frac{\pi(y-md)}{a}+\operatorname{cth}\frac{\pi(y+md)}{a}\right], \qquad (1)$$

где f — пористость песчаника.

Тогда время, необходимое нагнетаемой жидкости для достижения эксплоатационной скважины (помещенной в начале координат), будет:

$$t = \int_{d}^{0}\frac{dy}{v_y} = \frac{f\mu}{k}\int_{0}^{d}\frac{dy}{(\partial p/\partial y)_{x=0}}. \qquad (2)^1$$

Заменяя переменную с помощью подстановки

$$w = \operatorname{ch}^2\frac{\pi y}{a},$$

можно получить уравнение (2) в следующем виде:

$$t = \frac{a^2 f\mu}{4\pi^2 kq}\int_{1}^{\operatorname{ch}^2\frac{\pi d}{a}}\frac{dw}{w+2w(w-1)\sum_{1}^{\infty}(-1)^m(w-\operatorname{ch}^2 m\pi d/a)} \qquad (3)$$

Пренебрежение членами ряда, за исключением первого, может привести к ошибкам в величине t, которые не имеют практического зна-

---

[1] Для точности пределы уравнения (2) должны составлять r_w и $d-r_w$. Вместе с тем при $y=0, d, \frac{\partial p}{\partial y}\sim\infty$, и ошибка при определении t, опуская r_w, составляет только $f\mu r_w^2/2kq$. Этой величиной можно совершенно пренебречь, так как она прибавляет к реальной площади водной репрессии площади обеих скважин в каждой единице сетки размещения.

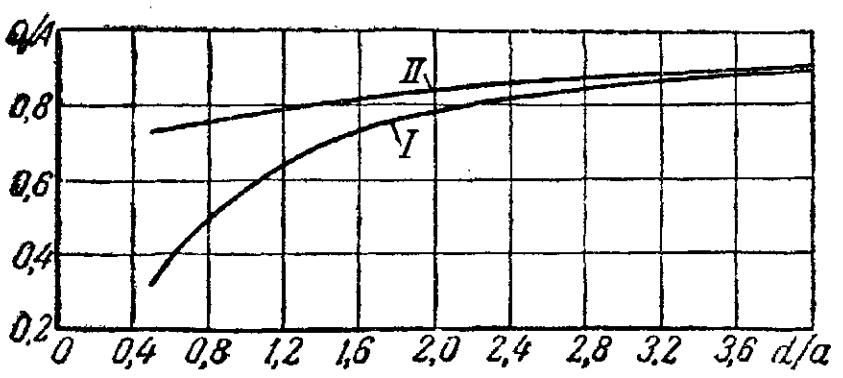
чения, помимо тех случаев, когда d/a значительно меньше $^1/_2$. Для $d/a \geqslant {}^1/_2$ уравнение (3) можно переписать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} t = \frac{a^2 f\mu}{4\pi^2 kq} \int_1^{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi d}{a}} \frac{\left(\operatorname{ch}^2 \frac{\pi d}{a} - w\right) dw}{w\left(w + \operatorname{ch}^2 \frac{\pi d}{a} - 2\right)} = \\ = \frac{a^2 f\mu}{2\pi^2 kq\left(\operatorname{ch}^2 \frac{\pi d}{a} - 2\right)} \left(\operatorname{ch}^2 \frac{\pi d}{a} \ln \operatorname{ch} \frac{\pi d}{a} - \operatorname{sh}^2 \frac{\pi d}{a} \ln 2\right). \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Так как заводненная площадь к этому времени составит на элемент сетки размещения $4\pi kqt/f\mu$ от всей площади $2da$, то соответствующая ей относительная величина заводнения будет:

$$\frac{Q}{A} = \frac{1}{\pi\left(\operatorname{ch}^2 - \frac{\pi d}{a} - 2\right)\frac{d}{a}} \left(\operatorname{ch}^2 \frac{\pi d}{a} \ln \operatorname{ch} \frac{\pi d}{a} - 0{,}6932 \operatorname{sh}^2 \frac{\pi d}{a}\right). \quad (5)$$

На фиг. 246 дается построение уравнения (5) в виде кривой *I*. Из кривой видно, что к. п. д. водной репрессии значительно возрастает (уменьшается стремление к обходному движению) с уменьшением расстояния a между скважинами одного и того же профиля (эксплоатационная — эксплоатационная, нагнетательная — нагнетательная) или же увеличением дистанции d между скважинами разного профиля (нагнетание — эксплоатация).



Фиг. 246. Изменение эффективности водной репрессии при фронтальном заводнении в зависимости от d/a — (расстояние между рядами нагнетательных и эксплоатационных скважин) / (расстояние между скважинами внутри рядов); Q/A — (площадь элемента сетки размещения, затопленная ко времени, когда вода впервые достигнет эксплоатационных скважин) / (первоначальная площадь элемента сетки размещения);

I — водная репрессии при фронтальном заводнении; *II* — шахматное размещение нагнетательных скважин.

Вместе с тем этот эффект уменьшается с возрастанием d/a. Действительно, для $d/a \geqslant 1{,}5$ уравнение (5) можно привести к форме:

$$\frac{Q}{A} = 1 - 0{,}441/(d/a), \quad (6)$$

которая показывает гиперболический рост к. п. д. с большими значениями d/a.

Можно заметить, что для $d/a = 1$ уравнение (5) дает $Q/A = 0{,}57$. Эта величина полностью согласуется со значением, найденным ранее с помощью электролитической модели.

29. Коэфициент полезного действия пятискважинного размещения. Для пятискважинной системы можно выбрать снова за ось y ли-

нию тока наивысшей средней скорости. Фактическое значение скорости дается выражением:

$$v_y = -\frac{k}{f\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{x=0} = \frac{\pi kq}{df\mu}\left(\operatorname{th}\frac{\pi y}{2d} - \operatorname{cth}\frac{\pi y}{2d}\right) +$$

$$+\frac{\pi kq}{df\mu}\sum_{1}^{\infty}(-1)^m\left[\operatorname{th}\frac{\pi(y-md)}{2a} + \operatorname{th}\frac{\pi(y+md)}{2d}\right] -$$

$$-\frac{\pi kq}{df\mu}\sum_{1}^{\infty}(-1)^m\left[\operatorname{cth}\frac{\pi(y-md)}{2d} + \operatorname{cth}\frac{\pi(y+md)}{2d}\right] =$$

$$= -\frac{2\pi kq}{df\mu}\operatorname{sh}\frac{\pi y}{d}\left[\frac{1}{w^2-1} + \frac{2\operatorname{ch}\pi}{\operatorname{ch}^2\pi - w^2} - \frac{2\operatorname{ch}2\pi}{\operatorname{ch}^2 2\pi - w^2}\right], \qquad (1)$$

для членов с $m=3$ и $w=\operatorname{ch}\pi y/d$.

Подставляя это выражение в (2), гл. IX, п. 28, и интегрируя, найдем:

$$t = \frac{2{,}27\, f\mu d^2}{2\pi^2 kq}. \qquad (2)$$

Так как затопленная площадь составит $4\pi kqt/f\mu$, а площадь каждого элемента сетки размещения $2d^2$, то относительная величина заводнения будет:

$$\frac{Q}{A} = 0{,}7226. \qquad (3)$$

Эта величина к. п. д. находится в полном согласии с ранее найденным значением его на электролитической модели (гл. IX, п. 19).

30. Коэфициент полезного действия семискважинного размещения при водной репрессии. В данном случае осью y (фиг. 244) опять берется линия тока наивысшей средней скорости. Скорость вдоль линии тока на основании уравнения (1), гл. IX, п. 25, будет:

$$v_y = -\frac{k}{f\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{x=0} = \frac{-4\pi kq}{af\mu}\operatorname{cth}\frac{\pi y}{a} -$$

$$-\frac{4\pi kq}{af\mu}\sum_{1}^{\infty}\left[\operatorname{cth}\frac{\pi(y-3md)}{a} + \operatorname{cth}\frac{\pi(y+3md)}{a}\right] +$$

$$+\frac{4\pi kq}{af\mu}\sum_{0}^{\infty}\left[\operatorname{th}\frac{\pi\left(y-\frac{3d}{2}-3md\right)}{a} + \operatorname{th}\frac{\pi\left(y+\frac{3d}{2}+3md\right)}{a}\right] +$$

$$+\frac{2\pi kq}{af\mu}\sum_{0}^{\infty}\left[\operatorname{cth}\frac{\pi(y-d-3md)}{a} + \operatorname{cth}\frac{\pi(y+d+3md)}{a}\right] +$$

$$+\frac{2\pi kq}{af\mu}\sum_{0}^{\infty}\left[\operatorname{cth}\frac{\pi(y-2d-3md)}{a} + \operatorname{cth}\frac{\pi(y+2d+3md)}{a}\right] +$$

$$+\frac{2\pi kq}{af\mu}\sum_{0}^{\infty}\left[\operatorname{th}\frac{\pi\left(y-\frac{d}{2}-3md\right)}{a} + \operatorname{th}\frac{\pi\left(y+\frac{d}{2}+3md\right)}{a}\right] +$$

$$+\frac{2\pi kq}{af\mu}\sum_{0}^{\infty}\left[\operatorname{th}\frac{\pi\left(y-\frac{5d}{2}-3md\right)}{a}+\operatorname{th}\frac{\pi\left(y+\frac{5d}{2}+3md\right)}{a}\right]=$$

$$=-\frac{4\pi kq}{af\mu}\operatorname{sh}\frac{2\pi y}{a}\left[\frac{1}{w-1}+\frac{2}{w+\operatorname{ch}\frac{3\pi d}{a}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{w-\operatorname{ch}\frac{2\pi d}{a}}-\frac{1}{w-\operatorname{ch}\frac{4\pi d}{a}}-\frac{1}{w+\operatorname{ch}\frac{\pi d}{a}}-\frac{1}{w+\operatorname{ch}\frac{5\pi d}{a}}\right] \qquad (1)$$

после того, как будут опущены все члены для $m>0$, и после подстановки

$$w=\operatorname{ch}\frac{2\pi y}{a}.$$

Подставляя это выражение в (2), гл. IX, п. 28, и интегрируя его, найдем:

$$t=\frac{2{,}013\,f\mu a^2}{8\pi^2 kq}. \qquad (2)$$

Так как площадь шестиугольного элемента составляет $\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$, а вся затопленная площадь $8\pi kqt/f\mu$, то относительная величина заводнения

$$\frac{Q}{A}=0{,}740. \qquad (3)$$

Эта величина приблизительно на 5% ниже найденной с помощью электролитической модели (0,78—0,80). Последняя согласованность является неплохой, так как капиллярный эффект на краях модели в том случае, где водная репрессия приближается к последним, стремится создать завышенное значение видимого к. п. д. водной репрессии.

31. Коэфициент полезного действия шахматной расстановки при водной репрессии с питанием от линейного контура. Как уже было отмечено выше, фактические оси координат при шахматной расстановке скважин с питанием от линейного контура при водной репрессии должны быть проведены через скважины, имеющие один и тот же знак, за исключением особых значений d/a. Отсюда линия тока наивысшей средней скорости — линия центров между нагнетательными и эксплоатационными скважинами — не совпадает больше с одной из осей и потому необходимо подсчитать оба компонента градиента давления. Тогда скорость вдоль фактической линии центров можно выразить:

$$v_s=-\frac{k}{f\mu\sqrt{1+4\bar{d}^2}}\left\{\frac{\partial p}{\partial x}+2\bar{d}\frac{\partial p}{\partial y}\right\};\ \bar{d}=\frac{d}{a}, \qquad (1)$$

и время, в течение которого нагнетаемая жидкость достигает эксплоатационных скважин, выразится:

$$t=-a\sqrt{1+4\bar{d}^2}\int_{0}^{1/2}\frac{d\bar{x}}{v_s};\ \bar{x}=\frac{x}{a}. \qquad (2)$$

На фиг. 246 приведена кривая *II*, которая была найдена графическим путем для различных значений $\bar{d}$, выписав полностью $\partial p/\partial x$ и $\partial p/\partial y$, установив $y = 2d\bar{x}$ и, наконец, проинтегрировав уравнение (2). Из этой кривой видно, что хотя шахматная расстановка скважин имеет очень небольшое влияние на сопротивление системы и к. п. д. водной репрессии при шахматной расстановке значительно меняется.

32. Общие наблюдения над сетками размещения при водной репрессии. Раньше чем перейти к детальному сравнению различных систем водной репрессии, что является весьма необходимым при осуществлении проектов заводнения нефтяных пластов, представляет собой большой интерес остановиться на некоторых общих чертах проблем водной репрессии. Сначала следует отметить, что к. п. д. водной репрессии, сформулированный в настоящей работе как площадь в идеальной системе, затопленная в отрезок времени, пока нагнетаемая жидкость впервые достигнет эксплоатационной скважины, не зависит от суммарного перепада давления, действующего в системе. Как можно видеть из расчета к. п. д., перепад давления, пропорциональный q, определяет собой абсолютное значение отрезка времени, необходимого для того, чтобы заводняющая жидкость достигла эксплоатационных скважин. Вместе с тем перепад давления полностью аннулируется при установлении границ заводненной площади. Этот вывод показывает также, что геометрическая форма водной репрессии не зависит от перепада давления. Фактически полное доказательство этого конечного вывода приведено было уже в гл. VIII, п. 2.

Следующим моментом, который необходимо отметить, является то обстоятельство, что к. п. д. водной репрессии пяти- и семискважинного размещения не зависит от размеров системы. Эти к. п. д. определяются только геометрией сеток размещения, которые в свою очередь контролируют распределение потенциала или давления [1]. Для линейного контура, от которого происходит питание скважин, геометрия системы определяется не однозначным условием, чтобы нагнетательные и эксплоатационные скважины лежали параллельными перемежающимися линейными рядами с равным интервалом между ними. Эта форма может изменяться вариацией отношения интервала нагнетание—отбор d к интервалу нагнетание—нагнетание a, а также шахматной расстановкой сетки размещения скважин. Так как эти геометрические изменения влияют на величину к. п. д., то система последовательного питания скважин от линейного контура обладает значительной гибкостью. Следует также заметить, что по отношению к величине сопротивления в системе водной репрессии расстояния между скважинами и физические размеры системы имеют большую значимость.

Сопротивление всегда возрастает с увеличением этого расстояния (фиг. 243). Для системы последовательного питания скважин от линейного контура сопротивление может возрасти для данного радиуса сква-

---

[1] Радиус скважины входит в точное уравнение времени для полного заводнения. Вместе с тем к. п. д. водной репрессии будет пропорционален отношению площади забоя скважины к площади затапливаемого элемента сетки размещения и потому радиусом скважины можно полностью пренебречь.

жины, не только увеличивая расстояние d между нагнетательной и эксплоатационной скважиной, но также уменьшая расстояние a между двумя нагнетательными скважинами. Вместе с тем изменение сопротивления в зависимости от размеров системы происходит очень медленно, будучи по характеру своему логарифмической зависимостью.

33. Сравнение сеток размещения при водной репрессии. В предыдущих разделах была приведена теория независимых характеристик водной репрессии — сопротивления и к. п. д. пятискважинного и семискважинного размещения, а также системы последовательного питания скважин от линейного контура. Сравнение этих сеток размещения по отношению к их проводимости было произведено на основе равной степени уплотнения на единицу площади. Результаты сравнения показали, что проводимость при семискважинном размещении на элемент сетки последней соответственно выше на 31 и 38% проводимости при пятискважинном размещении водной репрессии и последовательном питании скважин от линейного контура. Вместе с тем это сравнение не оправдывается с практической точки зрения, так как семискважинная сетка размещения содержит три скважины на элемент сетки, в то время как пятискважинная сетка и система последовательного питания скважин от линейного контура содержат только две скважины на элемент сетки размещения. Отсюда при той же степени уплотнения на единицу площади семискважинная сетка содержит только 2/3 количества элементов (шестиугольников) по сравнению с пятискважинной сеткой и системой последовательного питания скважин от линейного контура.

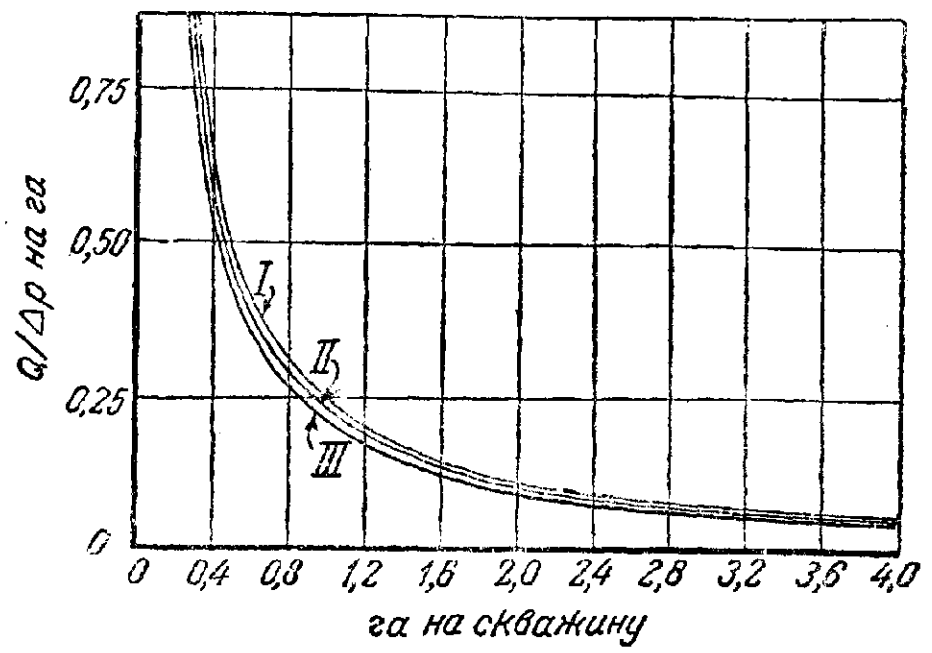
Чтобы получить сравнение, имеющее большую практическую ценность, необходимо дать ответ на следующий вопрос. Дается определенная площадь, покрытая сеткой размещения скважин для водной репрессии и состоящая из определенного количества n инжекционных и эксплоатационных скважин. Какую следует принять сетку размещения последних для успешности процесса водной репрессии? Среди бесконечного количества возможных положений системы последовательного питания скважин от линейного контура (различных значений d/a) вначале рассмотрим для простоты только такие, для которых $d = a$, а затем установим, как можно будет видоизменить это сравнение, если принять в расчет случаи, где d не равняется a. Рассмотрение шахматной расстановки системы последовательного питания скважин от линейного контура будет также отложено для последующей дискуссии. Полученные выводы дают вполне исчерпывающий ответ на поставленный вопрос, особенно в отношении имеющихся у систем водной репрессии тенденций создавать региональное обходное движение воды (к. п. д. системы). Так, семискважинная сетка размещения будет лучше по сравнению с пятискважинной сеткой, а последняя будет лучше системы последовательного питания скважин от линейного контура. Действительно, тенденции к байпасу у семискважинного, пятискважинного и линейного размещения могут быть представлены отношением 1 : 1,02 : 1,30.

Если обратиться к текущим дебитам, которые получаются из затопленной площади при данном перепаде давления между нагнетательными и эксплоатационными скважинами получается совершенно отличный ответ. Для семискважинного размещения проводимость системы или

текущие дебиты на элемент сетки размещения, грубо говоря, на 31 и 38% соответственно превышают текущие дебиты при пятискважинном размещении и системе последовательного питания скважин от линейного контура при равной степени уплотнения на единицу площади. Однако семискважинные сетки размещения, которые содержат три скважины на элемент ее по сравнению с остальными сетками размещения при водной репрессии, будут содержать только $^2/_3$ количества элементов по сравнению с остальными сетками. Поэтому ординатам кривой *III* на фиг. 243 следует придать $^2/_3$ того значения, которое имеют кривые *I* и *II*. Отсюда при данном перепаде давления текущие дебиты для всей заводненной площади будут самые низкие для семискважинного размещения, и отношения между дебитами в пятискважинной системе, линейной системе и семискважинной системе размещения выразятся приблизительно:

$$Q_5 : Q_d : Q_7 = \\ = 1{,}00 : 0{,}95 : 0{,}88.$$

Это можно видеть более ясно из фиг. 247, где были пересчитаны данные фиг. 243 так, чтобы получить текущие дебиты на единицу площади как функции величины уплотнения числа скважин на единицу площади.



Фиг. 247. Изменение проводимости нагнетательных скважин в зависимости от степени уплотнения скважин; $Q/\Delta p$ — текущий дебит, который можно получить с 1 *га* на единицу перепада давления в песчанике с единичной проницаемостью и единичной мощностью:

I — нормальное фронтальное заводнение ($d = a$); *II* — пятискважинная водная репрессия; *II* — семискважинная водная репрессия.

Так как эксплоатационная производительность у пятискважинного размещения на 12% выше по сравнению с семискважинным размещением, а к. п. д. его только на 2% ниже, можно притти к заключению, что следует отдать предпочтение пятискважинной системе водной репрессии. Вместе с тем семискважинное размещение является более выгодным по сравнению с системой последовательного питания скважин от линейного контура, так как величина байпаса у последней на 30% перевешивает 7%-ное повышение текущего дебита по сравнению с семискважинной сеткой размещения водной репрессии. С другой стороны, можно сделать более выгодной систему последовательного питания скважин от линейного контура, если воспользоваться преимуществом повышения его к. п. д., сближая расстояние между скважинами в пределах линейных рядов нагнетательных и эксплоатационных скважин.

Чтобы иметь ту же самую степень уплотнения числа скважин на единицу площади, а отсюда то же самое количество скважин, необходимо, чтобы произведение da равнялось d_5^2 при пятискважинной сетке размещения, или 0,866 d_7^2 семискважинной сетки размещения, в то

время как отношение d/a, которое определяет собой производительность и сопротивление водной репрессии, оставалось совершенно произвольной величиной. Так, на основании фиг. 246 ясно, что если $d/a = 1{,}59$, то производительность водной репрессии при последовательном питании скважин от линейного контура повысится и станет равной производительности пятискважинной системы размещения. Тогда, допустив, что расстояние „нагнетание—отбор" в пятискважинной системе составляет 201 *м*, имеем соответствующие интервалы для системы последовательного питания скважин от линейного контура (для $d/a = 1{,}59$) — $a = 159{,}5$ *м* и $d = 253{,}8$ *м*. Отсюда, согласно уравнению (8), гл. IX, п. 23, величина проводимости будет 0,379. С другой стороны, из фиг. 243 видно, что при этих же условиях проводимость пятискважинной системы составит 0,433, а проводимость семискважинной системы составит 0,378.

Если обратить внимание на то, что повышение производительности системы последовательного питания скважин от линейного контура эквивалентно производительности пятискважинного размещения скважин путем изменения d/a, проводимость его снижается до величины, соответствующей 87% проводимости пятискважинного размещения скважин. Поэтому последнюю систему следует рассматривать гораздо более ценной по сравнению с линейной нешахматной системой движения воды. Что же касается семискважинной сетки размещения скважин, то для практических целей видно, что систему последовательного питания скважин от линейного контура и семискважинное размещение можно сделать по существу эквивалентными. Для этого необходимо принять $d/a = 1{,}59$. Тогда проводимости обеих систем станут одними и теми же и их производительности будут различаться между собой по абсолютной величине только на 2%.

До сих пор разновидности системы последовательного питания скважин от линейного контура были связаны только с изменением d/a. Если теперь использовать дополнительную возможность шахматной расстановки системы движения линейного контура, последнюю можно сделать еще более эффективной, чем пятискважинная сетка размещения. Оставляя отношение $d/a = 1{,}59$ и сдвигая в шахматном порядке линейные ряды нагнетательных и эксплоатационных скважин, можно поднять к. п. д. его до 0,81, что дает 12%-ным прирост по отношению к производительности пятискважинного размещения — 0,723 (фиг. 246). Пониженная проводимость этой системы (0,87 проводимости пятискважинной системы) может быть скомпенсирована 13%-ный приростом приложенного перепада давления. К. п. д. водной репрессии нельзя улучшить, поскольку уже выбрана геометрия всей системы. Отсюда становится ясным, что увеличение к. п. д. водной репрессии шахматной расстановкой на 12% более чем сбалансирует 13%-ную потерю в проводимости системы. Поэтому шахматную расстановку системы последовательного питания от линейного контура следует рассматривать как еще более эффективную по сравнению с пятискважинной системой для той же степени уплотнения числа скважин на единицу площади.

На практике более удобно вводить в фактические проекты водной репрессии скорее отношение $d/a = 1{,}5$, чем принятое нами выше значение 1,59. Взяв это отношение, сравним различные сетки размещения на

базе степени уплотнения — одна эксплоатационная скважина на 4 *га* ($d_5 = 201$ *м*) (табл. 15).

Таблица 15

Относительные к. п. д. для различных сеток размещения скважин при водной репрессии

Типы сеток размещения	Относительный текущий дебит (проводимость для равной степени уплотнения: число скважин на единицу площади)	К. п. д. водной репрессии %
Шахматное размещение $d/a = 1{,}5$; $a = 164{,}4$ *м*; $d = 246{,}6$ *м*	0,383	80,0
Пятискважинное размещение $d_5 = 201$ *м*	0,433	72,3
Обычное линейное размещение скважин $d/a = 1{,}5$; $a = 164{,}4$ *м*; $d = 246{,}6$ *м*	0,383	70,6
Семискважинное размещение $d_7 = 216{,}25$ *м*	0,378	74,0

В данном случае не вызывает никакого сомнения, что шахматная расстановка линейной системы даст наилучшее устройство водной репрессии. С другой стороны, с чисто экономической точки зрения можно заметить, что семискважинная система водной репрессии обладает некоторым преимуществом по сравнению с пятискважинным размещением и линейной системой контура, которое не связано с физическим сравнением, приведенным выше. В этих сравнениях было принято, что общее количество скважин на данной площади остается одним и тем же для всех систем. Это налагает условие, что число нагнетательных и эксплоатационных скважин для линейной системы и пятискважинного размещения при водной репрессии остается одинаковым. Однако при семискважинной водной репрессии только одна треть всех скважин будет представлена эксплоатационными скважинами, при условии, что они помещаются в центрах шестиугольников. Если эксплоатационные скважины являются глубоконасосными, а потому и более дорогими при эксплоатации по сравнению с нагнетательными скважинами, повидимому, будет более выгодно распределить общее количество скважин среди $^2/_3$ нагнетательных скважин и $^1/_3$ эксплоатационных, чем принять размещение скважин нагнетание—отбор 1 : 1, как это требуют остальные две сетки размещения скважин при водной репрессии. Если же случится, что эксплоатация нагнетательных скважин окажется более дорогой, то можно будет поместить их в центр шестиугольников и сохранить указанное преимущество, так как производительность и сопротивление системы

не изменяются при обмене местами скважин нагнетательных на эксплоатационные.

Рассмотрим в качестве практической иллюстрации произведенного сравнения частный численный пример, приблизительно соответствующий водной репрессии Брадфордского месторождения. Допустим, что имеются четыре эксплоатационные площади по 400 *га* в каждой. На каждой площади размещено по 400 скважин, включая сюда инжекционные и эксплоатационные скважины. Эти скважины будут расставлены соответственно в шахматное линейное размещение при $d/a = 1{,}5$, последовательное линейное размещение, пятискважинное и семискважинное размещение. Примем мощность песчаника 12,2 *м*, пористость его 10%, а проницаемость 0,01 дарси. Табл. 16 дает наиболее важные параметры для сравнения различных систем водной репрессии. Превосходство шахматной линейной расстановки скважин перед всеми остальными системами совершенно очевидно.

Таблица 16

Сравнение различных сеток размещения скважин при водной репрессии для специального проекта заводнения

Величина нефтеносной площади — 400 *га*; число скважин — 400; суммарный перепад давления 68,05 *ат*; мощность песчаника 12,2 *м*; проницаемость 0,01 дарси; пористость песчаника 10%; абсолютная вязкость смеси нефть—вода—10 сантипуаз

Типы сеток	Число нагнетательных скважин	Число эксплоатационных скважин	Расстояние между нагнетательными скважинами, *м*	Расстояние между нагнетательным и эксплоатационными скважинами, *м*	Дебит нагнетаемой жидкости (воды), $м^3/сутки$	Время подхода нагнетаемой жидкости к эксплоатационной скважине, годы	К. п. д. водной репрессии	Количество безводной нефти в *т* (10^6)
Шахматное размещение $d/a = 1{,}5$	200	200	82,4	130	600	18,0	80,0	0,3543
Линейное размещение $d = a$	200	200	100,6	100,6	650	11,8	57,0	0,254
Пятискважинное размещение	200	200	142,4	100,6	683,3	14,3	72,3	0,3215
Семискважинное размещение	267	133	108,3	108,3	597,6	16,7	74,0	0,33

Разумеется, следует запомнить, что в подробный расчет совершенно не принят конечный эффект, связанный с помещением сетки расстановки скважин на площадях, имеющих границы 400 *га*.

Скорее всего допустим, что разрабатываемые нефтеносные площади являются просто секциями бесконечной сетки размещения. Кроме того, пренебрегаем начальным переходным моментом, связанным со сжатием газа. Фактически с самого начала будет сделано допущение, что вся

10%-ная пористость заполнена нефтью, которая затем вытесняется полностью продвигающейся водой. Если принять даже, что из пласта удастся получить только 50%-ную отдачу нефти, интервалы времени, приведенные в 3-й колонке табл. 16 справа, уменьшатся приблизительно наполовину.

Отрезок времени, необходимый для достижения водой эксплоатационных скважин, учитывая даже коэфициент $^1/_2$, непозволительно велик по сравнению с тем отрезком времени, который наблюдается в фактически осуществляемых на практике проектах водной репрессии (приблизительно в 10 раз больше). Хотя это и ставит под некоторое сомнение справедливость представленной здесь теории, все же чувствуется, что это несоответствие бросает значительный свет на физическое состояние песчаника, в месторождении Брадфорд, где осуществляется водная репрессия. Наблюдения показывают, что в последнем месторождении имеется более отчетливое обходное движение воды (байпас), чем это возможно в идеальном однородном песчанике. Это явление подтверждает, что в песчанике должно иметь место значительное каналообразование при водной репрессии, связанное с высокопроницаемыми слоями или со значительными прослойками высокопроницаемых зон вдоль основной массы песчаника, порядок проницаемости которого составляет около 0,001 дарси.

Следующим фактором, усиливающим каналообразование в пласте, является прорыв воды через нефть. Это явление может иметь место даже при постоянных физических условиях песчаника аналогично тому, как газ обходит нефть в однородных песчаниках. Однако основной эффект водяного прорыва, по всей вероятности, все же связан с высокой проницаемостью прослоев или слоев в пласте, так как замеры кернов, взятых из продуктивных песчаников [1], показали существование изменений величины проницаемости в 100 и больше раз.

Кроме того, вне зависимости от полной ясности физики пласта, необходимой при анализе промысловых наблюдений, сам термин „производительность", принятый в настоящей работе, служит количественным показателем эффективности процесса водной репрессии. Эту величину можно получить простым делением добычи безводной нефти на объем нефти в песчанике в начале процесса заводнения. Эта процедура дает удельный измеритель размерам прорыва воды.

Из общего сравнения, сделанного выше, между теоретическим идеализированным примером и выводами из практических промысловых наблюдений можно сделать заключение, что по всей вероятности вопросы расстояния между скважинами и их размещения играют в целом сравнительно малую роль для успешного осуществления процесса водной репрессии. Скорее всего внимание оператора должно концентрироваться на предупреждении прорыва в зонах высокой проницаемости. Эта основная задача должна быть разрешена раньше, чем браться за резкое повышение производительности (к. п. д.) процесса искусственной водной репрессии.

Возвращаясь, наконец, к вопросу абсолютного расстояния между скважинами, следует вспомнить более ранние выводы, полученные в пре-

---

[1] См. гл. II, п. 12.

дыдущих разделах, и которые показали, что эти величины не оказывают никакого влияния на производительность водной репрессии и дают только очень незначительный эффект на проводимость системы. Поэтому проблему расстояния между скважинами следует рассматривать в экономическом аспекте вопроса. При разработке этой задачи следует вывести баланс стоимости высоких текущих дебитов при сближенном расстоянии между скважинами и больших капиталовложениях, относительно низких текущих дебитов, при расширенном расстоянии между скважинами и пропорционально низких капиталовложениях.

34. Заключение. Многие интересующие нас задачи можно представить в идеализированном виде и привести к вопросу единичной скважины, дренирующей пористую среду.

Однако существуют и другие задачи, например, размещение внешних скважин по границам промысловых площадей, над залеганием нефтяных резервуаров, или же водная репрессия нефтяных пластов. Эти задачи должны полностью подвергаться математической обработке как многоскважинные системы. Так как „внешние контуры“, которые входят во всех случаях в спецификацию систем единичной скважины, представляют собой на практике обычно границы, которые создаются наличием иных скважин, пробуренных по соседству с интересующим нас участком, очень ценно дать детальный разбор фактического установления таких контуров. При математической обработке многоскважинных систем весьма удобно рассматривать независимо друг от друга системы, содержащие конечное и ограниченное число скважин, распределенных по сравнительно небольшой площади относительно всего протяжения газо-,нефте- или водоносного песчаника, а также и те системы, которые состоят из большого или в действительности бесконечного числа скважин. В первом случае каждая скважина может быть охарактеризована величиной среднего давления на поверхности ее забоя. Взаимное расстояние между скважинами при этом невелико по сравнению с расстоянием эффективного внешнего контура. „Внешнее давление контура“ можно охарактеризовать усередненным значением логарифмических членов на контуре, представляющих собой индивидуальное участие нескольких скважин в результирующем распределении давления. Анализ дает ряд линейных уравнений, которые связывают давления индивидуальных скважин с их расходом и давлением на внешнем контуре [уравнения (5) и (6), гл. IX, п. 2].

С помощью этих уравнений можно изучать взаимную интерференцию и взаимодействие между скважинами малых групп. Для этого допускаем равенство давлений этих скважин, и подсчитаем связанные с ними расходы. Последние для двух, трех, четырех или иного любого количества скважин, расположенных симметрично, например, по окружности круга, будут по необходимости равны.

Вместе с тем между ними существует также и некоторая интерференция. Это видно из уменьшения величины обычных расходов, по мере того как скважины размещаются ближе друг к другу [уравнения (3), (4), (5), (18), гл. IX, п. 3]. Кроме того, расходы на скважину уменьшаются с возрастанием общего количества скважин в группе [уравнения (18), гл. IX, п. 3, и (2), гл. IX, п. 4]. Таким образом, каж-

дая скважина в группе из четырех единиц будет обладать расходом, составляющим 51,5% расхода единичной скважины из того же самого резервуара, и фонтанирующей при том перепаде давления. Фактически интерференция растет настолько быстро с увеличением числа скважин, что группа в 16 скважин, размещенная по прямоугольной сетке (см. фиг. 196), будет эксплоатироваться с общим дебитом в 3,33 раза, бо́льшим по сравнению с единичной скважиной, работающей в аналогичных производственных условиях [уравнение (1), гл. IX, п. 4].

Влияние интерференции для малых групп скважин становится еще более отчетливым при сравнении величины расходов внутри групп скважин с расходами скважин, расположенных по внешнему кольцу последних. Так, расход скважины, расположенной в центре квадратного размещения из четырех единиц, составляет только 78% расхода скважины, расположенной по внешнему контуру. Центральная скважина в группе из 9 единиц (фиг. 195) будет эксплоатироваться с дебитом, составляющим 61,5% дебита скважин, расположенных по углам сетки, если даже она работает при том же самом забойном давлении (для $d/r_w = 800$). Аналогично этому центральная четверка из группы в 16 скважин (фиг. 196) будет эксплоатироваться с дебитом, равным 44,5% дебита, который получается из скважин расположенных, в четырех углах, если взаимное расположение между скважинами составляет 61 *м*, и только 36,2%, если взаимное расстояние между скважинами будет 15,25 *м* [уравнение (16), гл. IX, п. 3].

Эти выводы являются по существу независимыми от абсолютного положения группы скважин относительно их внешнего контура: Вместе с тем справедливость этих выводов зависит только от принятого допущения, что ни одна из скважин не расположена очень близко к границам участка. Подробное исследование распределения давления на внешнем контуре, т. е. условие, которое налагается анализом, показывает, что для действенности теории является вполне достаточным в первом приближении, чтобы центр всего внешнего контура не был слишком далек от центра тяжести системы скважин, взвешенного по отношению к соответствующим расходам.

Следующим интересным классом небольших групп скважин является такой, где несколько скважин, расположенных в линейный ряд, питается жидкостью из соседнего и параллельного линейного источника. В таких системах внешний контур подвергается математической обработке полностью как бесконечный линейный источник. Применяя при этом метод конформных отображений, легко вывести соответствующее распределение давления. В данном случае вновь подтверждается взаимная интерференция между скважинами, исходя из того, что расходы на скважину в группе падают с увеличением числа скважин. Так, каждая из двух скважин, находящихся на расстоянии 30,5 *м* друг от друга и на дистанции 30,5 *м* от линейного источника, будет обладать расходом, составляющим только 89,26% расхода скважины, работающей в единичном порядке с этого же пласта песчаника. Если в группе имеются три скважины, то внешние две будут иметь расход 86%, а средняя только 79,3% расхода единичной скважины с того же пласта. Что же касается влияния величины взаимного расстояния между скважинами, то в данном случае, как и раньше, установлено, что

эффект интерференции возрастает с уменьшением интервала между скважинами. В обоих типах группировки скважин это изменение в основном имеет логарифмический характер.

Когда число скважин становится настолько большим, что они полностью пересекают пласт песчаника, содержащего в себе жидкость, их можно подвергнуть математической обработке как бесконечное размещение или сетку расстановки скважин.

Допустим, что все скважины находятся под одним и тем же давлением и равномерно размещены линейными рядами. Тогда распределение давления, связанное с отдельными скважинами, может быть просуммировано, и конечный результат можно рассматривать как единицу, представленную одним членом:

$$p\ (x,\ y) = q\left[\ln \operatorname{ch} \frac{2\pi (y-d)}{a} - \cos \frac{2\pi x}{a}\right],$$ [уравнение (2), гл. IX, п. 8],

где линейные ряды расположены параллельно и на интервале d от оси x-ов, с расстоянием между скважинами a и индивидуальными текущими дебитами $4\pi kq/\mu$. Это выражение можно рассматривать для одной скважины в ряде, а также, когда система состоит из нескольких рядов размещения,—складывать с ему подобными. Это выражение дает распределение давления, симметричное относительно оси размещения и относительно каждой скважины (см. фиг. 201). Однако самой важной его особенностью является то обстоятельство, что колебания линий равного давления по мере отхода от ряда размещений быстро угасают, так что на дистанции, равной взаимному расстоянию между скважинами, линии равного давления для всех практических случаев становятся строго прямыми и параллельными рядам размещения.

Дальнейшее изучение свойств линейного размещения скважин требует уточнения формулировки источника жидкости, поступающей в скважины. Для этого можно допустить, что питание жидкостью обеспечивается „напорной линией“ или бесконечным линейным источником, который поддерживается при постоянном давлении, превышающем давление скважин. Тогда распределение давления не является более симметричным относительно оси размещения скважин. Скорее всего оно дает региональный градиент давления от линейного источника в направлении рядов расстановки скважин (см. фиг. 203). На основании анализа распределения давления и величины расхода в двух или более рядах, размещенных параллельно и с одной стороны линейного источника можно подвергнуть детальному исследованию эффект интерференции линейных рядов.

Повидимому, в этом случае расход в более удаленные от линейного источника ряды будет соответствовать непосредственно величине утечки через первый линейный ряд скважин. Благодаря же интерференции между рядами он будет меньше по сравнению с расходом, поступающим в первый линейный ряд. В частности, найдено, что для системы, содержащей два ряда размещения, утечка через первый линейный ряд падает с уменьшением расстояния между скважинами внутри рядов, а также по мере того, как оба ряда с фиксированным интервалом между ними отодвигаются от позиции линейного источника. Вместе с тем величина минимальной утечки через первый

ряд достигается, когда интервал первого линейного ряда скважин до позиции линейного источника составляет только 0,4 расстояния между скважинами в пределах линейных рядов. Дальнейшее увеличение разрыва между линейными рядами скважин и линейным источником или же уменьшение расстояния между скважинами снижает весьма незаметно величину утечки. Минимальное значение этой утечки составляет 33% для расстояния между скважинами 201,0 *м*.

Что же касается абсолютного значения расстояния между скважинами, то расчеты показывают, что величина утечки возрастает с увеличением расстояния между скважинами, но этот эффект очень мал. Так, если первый ряд скважин отдален от позиции линейного источника и от второго ряда скважин интервалом, равняющимся расстоянию между скважинами, то утечка через первый линейный ряд скважин, если расстояние между скважинами упадет с 305 до 30,5 *м*, уменьшается от 33,6 до 28,5% всего суммарного течения в системе. Отсюда становится непрактичным уменьшать значительно величину утечки через линейный ряд скважин простым уменьшением расстояния между последними.

Соответственно этому для фиксированных расстояний между скважинами утечка через линейный ряд размещения скважин уменьшается с увеличением интервала между линейными рядами последних. Вместе с тем этот эффект относительно невелик в данном случае, и для расстояния между скважинами 201 *м* величина утечки с увеличением интервала между линейными рядами от 30,5 до 305 *м* падает от 46 до 28%. Отсюда, за исключением тех случаев, когда интервалы между рядами очень велики или очень малы, грубо говоря, одна треть всего расхода в системе, состоящей из двух параллельных рядов скважин с одинаковым давлением последних, пройдет через первый линейный ряд и войдет во второй ряд скважин.

Этим же путем можно произвести аналогичный анализ системы, состоящей из трех параллельных линейных рядов, расположенных с одной стороны линейного источника и где все скважины фонтанируют при одном и том же давлении. Хотя величина утечки через первый линейный ряд в данном случае, по вполне понятным причинам, будет больше по сравнению с системой, где отсутствует третий ряд скважин, но фактическая величина этого роста будет иметь порядок около 5%. Таким образом, когда разрывы между линейными рядами и расстояние первого линейного ряда скважин от линейного источника составляют порядок расстояния между скважинами внутри рядов, утечка через первый линейный ряд составляет $^3/_8$ всего расхода системы; $^2/_3$ этой величины, или $^1/_4$ всего расхода, поступает во второй линейный ряд скважин, а остающаяся $^1/_3$ или $^1/_8$ суммарного расхода, достигает, наконец, третьего ряда скважин. Поэтому текущие дебиты во всех трех линейных рядах будут находиться в пропорции 5 : 2 : 1.

Если добавлять к системе еще линейные ряды скважин, то дополнительные значения утечек, которые вызываются этими рядами, а отсюда и течение в последние будут быстро падать до исчезающе малых значений. Это обстоятельство показывает, что если только дальние ряды скважин не держать на пониженном давлении по сравнению с рядами, ближними к линейному источнику, например, к реке или каналу, то

они не будут иметь практического значения при дренаже области, залегающей позади первых двух или трех линейных рядов. Подвергая анализу влияние взаимно сдвинутых в шахматном порядке примыкаюших линейных рядов скважин, можно притти к весьма интересному выводу в отношении эффекта заслона и характеристики утечки через бесконечные линейные ряды скважин. Этот анализ показывает, что если только интервал между линейными рядами значительно меньше расстояния между скважинами, то практически эффект заслона и утечки при шахматной расстановки скважин будет таким же, как при обычном линейном размещении. До тех пор, пока разрыв между двумя линейными рядами меньше 0,1 расстояния между скважинами, утечка в шахматной двухлинейной системе будет превосходить таковую же в обычной линейной системе на величину не более 1% всей утечки.

Поскольку мы допускаем, что давление скважин в нескольких линейных рядах сохраняется одинаковым, интерференция и характеристика утечки в системах должны быть связаны с их геометрической формой. То обстоятельство, что первый линейный ряд скважин в системе, состоящей из нескольких линейных рядов размещения, обладает более высокими расходами по сравнению с остальными рядами, является непосредственным следствием допущения, что источник жидкости, питающий эти ряды, помещен не симметрично, а именно с одной стороны системы расстановки скважин. Вместе с тем в задаче о расстановке внешних скважин делается попытка противопоставить явлению утечки, связанной с геометрической асимметрией системы, искусственно создаваемую в некоторых линейных рядах системы асимметрию давлений на скважинах.

Проблему расстановки внешних рядов скважин можно сформулировать таким образом. Даны два участка с заранее установленным и в общем отличающимся средним давлением в одном или более линейном ряду внешних скважин по отношению к общей границе участка. Какие давления следует поддерживать на внешних рядах скважин одного участка, чтобы не иметь остаточного потока через границу последнего, если на внешних рядах скважин другого участка поддерживаются определенные и отличные давления. Эти „средние“ давления следует рассматривать скорее как усередненные величины давлений вблизи внешних линейных рядов скважин, чем средние давления по каждому из участков, так как эти усередненные величины вполне определяют собой все стороны взаимодействия последних. Если каждый участок имеет только один линейный ряд внешне расположенных скважин, то анализ показывает, что можно предупредить миграцию жидкости через границу участка, если разница в рабочих давлениях скважин, как это было указано ранее, между внешними линейными рядами равна и обратна по знаку разности между „средними“ давлениями обоих участков.

Когда в системе представлены два или более линейных ряда внешне размещенных скважин, можно получить без затруднения выводы соответствующих ограничений в отношении давлений, которые следует поддерживать на внешне расположенных скважинах (гл. IX, п. 14). Однако интерпретация аналитических выражений в данном случае не так очевидна, как для единичного ряда внешне расположенных скважин.

В целом регулировка давления последних по существу заключается в снижении эффективных давлений на участке высокого давления до величины, имеющейся на скважинах участка низкого давления. При этом на общей границе уничтожается региональной градиент между участками и связанное с ним явление миграции. С другой стороны, приложение аналитических выводов к практическим задачам требует применять приведенный анализ только к инертному компоненту жидкости всего течения в системе. Участие в течении, связанное со сжимаемостью жидкости—выделением и расширением растворенных газов, должно быть отброшено раньше всего. Должны быть отброшены также градиенты давления, связанные с этим физическим явлением, чтобы не прикладывать аналитические выводы, базирующиеся на гипотезе несжимаемой жидкости.

Конечная проблема, относящаяся к многоскважинным системам и имеющая значительный практический интерес, заключается в водной репрессии. Это есть метод искусственного получения добычи нефти, при котором вода вводится извне в нефтяной песчаник для того, чтобы вытеснить нефть из пор и протолкнуть ее в эксплоатационные скважины. Последние совместно с нагнетательными скважинами обычно размещаются по правильным геометрическим сеткам. Хотя вода и нефть имеют различную вязкость и потому образуют двухжидкостную систему, но этой разницей вязкости можно пренебречь, чтобы сделать полученный анализ вполне обоснованным и легко трактуемым. Сделав это допущение, можно приложить к решению поставленной проблемы несколько экспериментальных и теоретических методов обработки, которые дают совместно достаточно полную картину всех наиболее важных сторон проблемы заводнения нефтяных пластов.

Для прослеживания путей развития поверхности раздела вода—нефть, по мере того как она перемещается от нагнетательной к эксплоатационным скважинам, служит очень простая электролитическая модель, являющаяся достаточно удобным приспособлением. Здесь поверхностью раздела вода—нефть служит граница поступательного движения ионов OH в пористой среде, например, пропитанной фильтровальной бумаге, от электродов, представляющих собой нагнетательные скважины. По мере того как они перемещаются вперед и реагируют с соответствующим индикатором, пропитывающим среду, движение ионов обнаруживается по красной окраске последней. Можно совершенно свободно доказать тождественность этой модели с моделью течения жидкости в пористой среде, сравнивая следы движения ионов на модели с теми результатами, которые получаются при аналитических выводах некоторых простых случаев, где производство анализа не представляет собой большого труда.

Перемещение ионов OH можно непрерывно регистрировать на фотографиях модели в различные отрезки времени. Следует заметить, что в данном случае, а также в случае применения модели с листовым электропроводником или метода аналитической обработки, о которых речь будет итти ниже, следует подвергнуть изучению лучше единичный элемент или ячейку симметрии системы водной репрессии, чем всю бесконечную сетку размещения скважин. Этим путем можно представить себе подробное развитие процесса водной репрессии, где

жидкость первоначально движется от нагнетательных скважин в радиальном направлении, а потом занимает искаженный фронт в соответствии с геометрией сетки размещения. Затем она образует достаточно острые „языки“ или серповидные полосы, которые по мере того как поверхности раздела достигают соседства с эксплоатационными скважинами, быстро стягиваются здесь высокими градиентами (см. фиг. 219, 231).

В дополнение к тому, что она дает очень простыми путями подробную картину различных этапов водной репрессии, электролитическая модель является особенно ценной для установления производительности различных сеток размещения скважин при заводнении. Производительность системы можно представить себе частью общей площади сетки размещения скважин, которая промывается наступающей поверхностью раздела, когда последняя только достигает эксплоатационных скважин и дает при идеальных условиях, допущенных здесь, объем нефти из эксплоатационных скважин, добытый к тому времени, когда вода впервые достигает последние. Это количество можно получить непосредственно из фотографии моделей, замером площади окрашенного участка водной репрессии к моменту, когда фронт ионов впервые касается электродов, соответствующих эксплоатационным скважинам, и делением ее на площадь элемента сетки размещения.

Этим путем можно легко найти, что производительность (к. п. д.) последовательной линейно водной репрессии, где нагнетательные и эксплоатационные скважины размещены последовательно параллельными линейными рядами, составляет $57 \pm 3\%$. Обычное пятискважинное размещение водной репрессии, где линии инжекционных скважин смещены относительно линий эксплоатационных скважин в шахматном порядке и где дистанция между линейными рядами одного и того же профиля равняется расстоянию между скважинами в пределах последних, составляет $75 \pm 3\%$.

Семискважинное размещение водной репрессии, где каждая эксплоатационная или инжекционная скважина окружена шестью инжекционными или эксплоатационными скважинами, расположенными в углах шестиугольника, составляет 77—80%. Получающийся диапазон замеренных величин связан с эффектом диффузии и капиллярности на модели, которая в общем обладает тенденцией к получению наблюденной площади водной репрессии несколько бо́льших размеров по сравнению с идеальной водной репрессией. Следующим весьма интересным приложением электролитической модели является изучение эффекта от присутствия в песчанике непроницаемых барьеров, которые имеют тенденцию искажать продвижение водной репрессии. Такие системы практически невозможно подвергнуть обработке иными методами, и их исследуют на электролитических моделях, непосредственно вырезывая из пористой среды участки той же самой геометрической формы, что и принятый барьер (см. фиг. 232 и 233).

Вполне понятно, что разница в поведении различных сеток размещения водной репрессии связана с разницей в распределении давления для различных сеток, обусловленной различием геометрических форм системы. Вследствие отсутствия строгой однородности условий нахождения электролита в электролитической модели последнюю нельзя использовать для определения величины распределения давления. Вместе

с тем эту часть проблемы можно изучать с помощью одинаково простой электрической модели с листовым проводником. Для этого вырезается тонкий лист из однородного металлического проводника по форме элемента интересующей нас сетки размещения. К нему прикрепляются электроды, которые представляют собой нагнетательную и эксплоатационную скважины. Распределение потенциала замеряется с помощью мостика Уитстона или по методу нульпотенциометра. Полное совпадение электропроводящей системы с системой течения жидкостей в пористой среде было уже отмечено в гл. III, п. 6. Имея в своем распоряжении величины распределения давления, полученные на моделях с листовым проводником (фиг. 236—239), можно дать свободно полную интерпретацию процесса развития водной репрессии, каким он наблюдался нами на электролитических моделях. Фактически можно заранее продиктовать качественную и количественную сторону любой системы водной репрессии, поскольку закартировано и построено распределение в ней давления. В дополнение к этим значениям распределения давления, которые можно получить на модели с листовым проводником, последняя служит также для измерения сопротивления в любой из сеток размещения водной репрессии. Это сопротивление создает перепад давления, необходимый для получения в системе размещения водной репрессии единицы текущего дебита на единицу проницаемости песчаника и единицу вязкости жидкости.

Развитие процесса продвижения водной репрессии, который показывают электролитические модели, а также распределение давления и сопротивления, которые даются моделями с листовым проводником, является вполне достаточным, чтобы дать полное представление о любой системе размещения водной репрессии. Все эти данные, получаемые от экспериментов на моделях, страдают тем недостатком, особенно в отношении величины сопротивления, что их следует повторять всякий раз в зависимости от изменения относительных размеров элементов сетки размещения. С другой стороны, при аналитической обработке абсолютные размеры элементов сохраняются полностью, как параметры, которые специфицируются только в конечных числовых выкладках.

Чтобы подсчитать сопротивление системы или его обратную связь, „проводимость“ данной сетки размещения, необходимо просто сложить отдельные логарифмические члены, характеризующие давление различных скважин. После этого находим перепад давления, действующий в системе, подсчитывая разность этих сумм соответственно для нагнетательных и эксплоатационных скважин. Величина проводимости на элемент сетки размещения получается делением этой разности на величину расхода для последнего.

Такие подсчеты показывают, что проводимость системы водной репрессии на элемент сетки размещения для семискважинной расстановки скважин на 39% приблизительно выше по сравнению с пятискважинным размещением водной репрессии. Во всех случаях величина проводимости медленно падает с увеличением расстояния между скважинами. Так, увеличение расстояния между инжекционной и эксплоатационной скважинами с 122 до 244 *м* уменьшает проводимость только на 10% (фиг. 243).

Пяти- и семискважинные размещения водной репрессии полностью определяются своей геометрией. Систему же последовательного питания скважин от линейного контура можно модифицировать по сравнению с ее обычной конфигурацией. Для этого скважины сдвигают в шахматном порядке в последовательно расположенных линейных нагнетательных и эксплоатационных рядах или изменяют интервал между последними по сравнению с расстоянием между скважинами в их пределах. Анализ показывает, что, когда разрыв между линейными рядами значительно меньше расстояния между скважинами внутри последних, шахматная расстановка последних снижает проводимость системы. Для интервала же между линейными рядами порядка или несколько больше расстояния между скважинами этим эффектом можно полностью пренебречь. Если отодвинуть позицию напорной линии питания, это сильно уменьшит проводимость системы, хотя эффект будет все же достаточно мал (см. фиг. 241). Так, для фиксированного расстояния между скважинами величина проводимости уменьшается только на 17%, если интервал между линейными рядами, равный расстоянию между скважинами возрастет вдвое.

Если обратить внимание, что каждый элемент сетки размещения в семискважинной системе водной репрессии содержит три скважины, а пятискважинная расстановка или линейная система водной репрессии содержит только две скважины, видно, что сравнение величин их проводимости на элемент сетки размещения отводит семискважинному размещению видимое преимущество. Так, при том же числе элементов сетки размещения последняя будет иметь на 50% больше скважин по сравнению с остальными системами водной репрессии. Фактически, если делать более практически обоснованное сравнение на базе равной степени уплотнения числа скважин на единицу площади, можно найти, что семискважинное размещение водной репрессии имеет более низкую проводимость по сравнению с линейной системой. Пятискважинное размещение при тех же условиях будет иметь самую высокую проводимость.

Аналитический подсчет производительности сетки размещения водной репрессии гораздо проще, чем расчет его сопротивления. Для получения значения производительности необходимо подсчитать отрезок времени, необходимый для того, чтобы вода впервые достигла эксплоатационных скважин. Этот интервал времени, помноженный на площадную скорость нагнетания воды в элемент сетки размещения, дает площадь системы, затопленную к моменту, когда вода впервые достигает эксплоатационных скважин. Эта площадь, деленная на площадь элемента сетки, дает к. п. д. (производительность) водной репрессии.

Было найдено, что к. п. д. семи- и пятискважинного размещения составляет соответственно 74,0 и 72,3%. Полученные значения находятся в полном согласии в пределах экспериментальных ошибок с данными, полученными на основании опытов с электролитическими моделями. Значения (к. п. д.) производительности, фиксируемые геометрией обеих сеток размещения, не зависят от абсолютных величин расстояния между скважинами, перепадов давления, проницаемости песчаника или вязкости жидкости (пренебрегая разницей между нефтью и водой). Вместе с тем производительность линейной системы может изменяться за счет сбли-

жения, удаления и шахматной расстановки линейных рядов системы водной репрессии.

В противоположность тому, что было найдено нами для проводимости водной репрессии, где шахматная расстановка не имела практически никакого эффекта, к. п. д. линейной системы резко повышается при шахматной расстановке. Это имеет место особенно в том случае, когда интервалы между линейными рядами в два раза меньше расстояния между скважинами в пределах этих рядов. Когда расстояние между линейными рядами равняется половине расстояния между скважинами внутри рядов, это соответствует пятискважинному размещению водной репрессии. Нешахматное размещение заводнения будет иметь к. п. д. только 31,4%, шахматная же расстановка увеличивает к. п. д. до 72,3%, т. е. до к. п. д. пятискважинного размещения (фиг. 246).

Изменение расстояния в рядах линейной системы имеет резкое влияние на к. п. д. ее. Изменяя отношение интервала между линейными рядами к расстоянию между скважинами внутри рядов с 1 : 2 до 2 : 1, получаем увеличение производительности системы с 31,4 до 77,9%. Если теперь вытянутую систему водной репрессии подвергнуть шахматной расстановке, ее производительность еще больше возрастет, а именно до 83% — для последнего случая. Таким образом, комбинируя отношение интервала между рядами к расстоянию между скважинами, а также шахматной расстановкой, можно поднять к. п. д. обычной линейной системы водной репрессии от нижнего значения 57% до 74%, что значительно превосходит соответствующую производительность семискважинного размещения скважин.

Отсюда можно сделать вывод, что низкую проводимость водной репрессии можно компенсировать увеличением перепада давления, создающего течение. Вместе с тем нельзя изменить производительность водной репрессии, если уже выбрана геометрия сетки размещения. Однако соответствующим подбором отношения интервала между линейными рядами к расстоянию между скважинами, а также их шахматной расстановкой можно получить от линейной системы наиболее благоприятные физические условия для водной репрессии.

Выбирая для ясности шахматную расстановку скважин в рядах линейной системы, где интервал между линиями в 1,5 раза больше расстояния между скважинами внутри линейных рядов найдем, что эта система обладает проводимостью на 12% меньше пятискважинной системы водной репрессии. В то же самое время ее производительность соответствует семискважинной водной репрессии, при одинаковой степени уплотнения числа скважин на единицу площади. С другой стороны, к. п. д. этой системы будет составлять 80% по сравнению со значениями 72,3 и 74% для пяти- и семискважинной системы водной репрессии. Отсюда семискважинное размещение в действительности является наименее благоприятной сеткой расстановки скважин и относительный к. п. д. линейной системы, превышающий на 10% к. п. д. пятискважинного размещения, должен более чем уравновесить ее значительную величину сопротивления.

На основании строго теоретического исследования было найдено, что вытянутая и шахматная расстановка линейной системы водной репрессии является более благоприятной по сравнению с обычно

применяемыми на практике пяти- и семискважинным размещением последней.

Однако существуют на практике другие этапы проблемы заводнения, которые являются гораздо более серьезными по сравнению с частным вопросом расстояния между скважинами и устройства сетки расстановки последних. Так, было найдено, что если подсчитать время, необходимое для того, чтобы вода прошла от инжекционных к эксплоатационным скважинам в реальных промысловых условиях, приблизительно соответствующих Брадфордскому месторождению, эти отрезки времени в 10 раз больше фактически наблюденных на практике. Это может только означать, что в Брадфордском песчанике имеется гораздо больше обходного движения воды (байпаса), чем это возможно наблюдать в идеальном однородном песчанике. Это явление показывает, в свою очередь, что в песчаниках имеет место значительное каналообразование, связанное с высокопроницаемыми слоями, или с прослойками в основной массе песчаника, имеющими повышенную проницаемость. Так как подобное каналообразование может уравновесить любые преимущества, которые создаются различиями в системах сеток размещения скважин, наиболее важной практической задачей для эффективного проведения процесса водной репрессии является тампонаж высокопроницаемых слоев или прослойков.

Соответственно этому в свете медленного изменения проводимости системы в зависимости от изменения расстояния между скважинами, а также благодаря тому обстоятельству, что производительность водной репрессии совершенно не зависит от этого расстояния, вопрос последнего в проектах водной репрессии имеет незначительное физическое значение и должен решаться в основном на базе экономических соображений, непосредственно относящихся к данному интересующему нас проекту водной репрессии.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ

Глава десятая

ТЕЧЕНИЕ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

1. Введение. Рассмотрение различных проблем течения жидкости, которые были развиты нами во второй части настоящей работы, основывалось на допущении, что течения были все время „установившимися“ или же проходили через „непрерывный ряд установившихся состояний“. Время, даже когда оно входило в наше рассмотрение, играло скорее роль параметра, чем независимой переменной, и совершенно не встречалось в основном диференциальном уравнении Лапласа для распределения потенциала или давления. Вся аналитическая процедура проводилась до сих пор с совершенно точным допущением граничных условий, независимых от времени. Однако при этом подразумевалось, что если граничные условия изменяются во времени, то будет изменяться также распределение потенциала. Вместе с тем изменения его будут таковы, что каждое мгновенное состояние его будет распределением установившегося состояния, присвоенное соответствующим мгновенным значениям граничных условий (гл. III, п. 4).

В выводах гл. VIII, где рассматривались двухжидкостные системы, время играло более важную роль, так как контуры интересующей нас области менялись во времени и природа распределения потенциала, так же как и абсолютное значение его, беспрерывно изменялась. В последнем случае изменение течения было представлено членами, отображавшими непрерывную последовательность состояния, где каждый из них являл собою распределение установившегося состояния, присвоенное соответствующим мгновенным форме и положению контуров системы, а также мгновенным значениям граничных переменных.

Строго физическое условие допущения „непрерывной последовательности установившихся состояний“ давало правильное представление о физических изменениях системы во времени. Но так как течение в последнем фактически находится в неустановившемся состоянии, это обстоятельство приводит к тому, что скорость распространения возмущений в пористой среде должна быть бесконечной. Кроме того, изменения количества массы жидкости при течении, связанные с соответствующими изменениями граничных условий, невелики по сравнению с установившимся расходом через систему. Бесконечная скорость распространения возмущения в пористой среде будет иметь своим последствием следующее явление, а именно — любое изменение граничных

условий или даже геометрической формы контуров будет немедленно передаваться во все внутренние точки системы. Если при этом распространение соответствующих изменений не будет уменьшаться, оно приведет в результате к мгновенным согласованиям распределения давления с величинами, связанными с новыми граничными условиями или граничными поверхностями.

Поскольку пористая среда и жидкость образуют непрерывное и однородное распределение материи, распространение возмущения (изменение давления) через нее будет одинаковым с распространением в непрерывной упругой среде. С другой стороны, такая упругая среда, за исключением эффекта дисперсии, характеризуется определенными максимальными скоростями распространения возмущений, которое дается скоростью распространения продольных волн в среде, а именно $v=\sqrt{E/\gamma}$, где E — модуль упругости, а γ — плотность жидкости. Так как величина последней имеет порядок 1, то допущение бесконечности v налагает поэтому условие бесконечно большого значения E, а отсюда нулевую сжимаемость. Известно, что в лабораторных условиях сжимаемость жидкостей[1], которые встречаются в подземных условиях, имеет величину порядка от 10^{-4} до 10^{-5} *am*. Поэтому, казалось бы, что скорость распространения возмущения не бесконечна, но имеет конечный верхний предел.

Вместе с тем становится ясным, что с физической стороны основное значение имеет не абсолютная величина этого распространения, но скорее всего то ее значение, которое относится к скорости жидкости в среде. Максимальные скорости жидкости, которые можно ожидать в обычных резервуарах, за исключением первых метров песчаника у забоя скважины, порядка 1 *см/сек* (гл. II, п. 2). Скорости продольных волновых колебаний в это же самое время будут порядка 10^5 *см/сек*. Тогда, очевидно, численно высокая скорость продольных волновых колебаний эквивалентна также достаточно высокой относительной скорости, если сравнивать с реальными скоростями в среде. Поэтому в нормальных условиях достаточно справедливо допущение несжимаемости жидкости или бесконечно высокие скорости распространения возмущений. Отсюда можно рассматривать выводы гл. II, как имеющие физически правильные основы по отношению к допущенному условию непрерывной последовательности установившегося состояния.

Второе требование заключается в том, чтобы изменения количества массы жидкости при течении, связанные с изменением граничных условий, были невелики по сравнению с установившимся расходом через систему. Это условие является более серьезным требованием обоснованности допущения „непрерывной последовательности установившегося состояния“. Если только это условие не удовлетворено, то амплитуды измене-

---

[1] Сжимаемость самой среды практически имеет значение второго порядка, поскольку давления жидкости меньше среднего внутреннего давления внутри среды. Тогда изменение этого давления будет воздействовать только на отдельные стороны распределения внутреннего давления в пределах индивидуальных зерен среды, оставляя неизменным значение среднего внутреннего давления. Амплитуда „возмущения“, распространяющегося через среду, будет меньшего порядка по сравнению с возмущением, которое передается через жидкость, заполняющую пористую среду.

ния давления на контуре внутри пористой среды будут уменьшаться таким образом, что выравненное внутреннее распределение давления совершенно не будет соответствовать установившемуся состоянию, вытекающему из новых граничных условий. Так, изменения в распределении давления повлекут за собой одновременно изменения в распределении плотности. Если течение имеет значительные размеры или же сжимаемость жидкости велика, то масса жидкости, участвующая в этом выравнивании давления, может принять настолько большие значения, что потребуется много дней на поглощение колебаний, если средние давления поднялись, или же для его снятия, если средние давления снизились. Тогда в системе будет иметь место соответствующая задержка в восстановлении установившегося распределения давления, вытекающего из новых граничных условий.

Рассматривая радиальную систему с внешним радиусом r_e, где скорость изменения среднего давления, связанная с соответствующими изменениями на контурах, обозначена через dp/dt, получим несколько более уточненную формулировку этого условия. Соответствующая скорость изменения количества массы жидкости на единицу мощности пласта выразится приблизительно из следующего выражения:

$$\frac{dM}{dt} = \pi r_e^2 f \beta \bar{\gamma} \frac{dp}{dt}, \qquad (1)$$

где $\bar{\gamma}$ — средняя плотность жидкости; β — сжимаемость жидкости; f — пористость среды. Для установившегося расхода массы, проходящего через систему при разности в величине плотности $\Delta\gamma$, между r_e и внутренним радиусом скважины r_w и для жидкости с вязкостью μ:

$$Q_0 = \frac{2\pi k \Delta\gamma}{\beta\mu \ln r_e/r_w} \quad [\text{см. уравнение (15)}], \qquad (2)$$

где k — проницаемость среды. Отношение этих двух уравнений будет иметь следующее значение:

$$\frac{\frac{dM}{dt}}{Q_0} = \frac{\mu f \bar{\gamma} \beta^2 r_e^2 \frac{dp}{dt} \ln \frac{r_e}{r_w}}{2k\Delta\gamma} \cong 100\, \beta^2 r_e^2 \frac{dp}{dt}, \qquad (3)$$

для $f = 0{,}2$; $k/\mu = 0{,}1$; $(\bar{\gamma}/\Delta\gamma) \ln r_e/r_w \approx 100$.

Отсюда при $\beta = 5 \cdot 10^{-5}/am$ и $r_e = 15{,}25 \cdot 10^3$ *см* для изменения давления на величину 1 *am/сутки* полученное отношение все же будет иметь значение только $0{,}67 \cdot 10^{-3}$. Поэтому в системах с умеренными размерами, где жидкости движутся с нормальным коэфициентом сжимаемости, вполне оправдывается применение решений установившегося состояния, которые были получены во второй части настоящей работы. При этом полностью пренебрегают явлением сжимаемости жидкости и обобщают непрерывные ряды решения таких установившихся состояний, чтобы получить физически значущие изменения во времени при распределении давления или расходов в том случае, если системы не соответствуют полностью установившемуся состоянию.

Аналогичная оправданность использования концепции непрерывной последовательности установившихся состояний видна из подсчета вре-

мени, необходимого для установившегося состояния в случае радиального течения. Можно довольно легко убедиться в том, что содержание массы в радиальной системе, имеющей контуры с радиусами r_e, r_w ($r_w \ll r_e$), которая первоначально обладала постоянной плотностью γ_e, уменьшится на величину

$$Q = \frac{\pi r_e^2 f (\gamma_e - \gamma_w)}{2 \ln r_e / r_w} \tag{4}$$

за время, в течение которого принятая постоянная плотность выравнивается до уровня, соответствующего установившемуся распределению давления, где плотность при r_w составляет γ_w и при r_e составляла γ_e. Отсюда, допуская, что начало течения состоит непосредственно в установившемся отборе излишнего содержания массы в резервуаре между r_w и r_e, найдем, что это займет отрезок времени порядка [1]

$$t \sim \frac{Q}{Q_0} = \frac{f \beta \mu r_e^2}{4k}. \tag{5}$$

Для системы, имеющей размеры, одинаковые с теми, что были приведены ранее, значение t достигается через 1,6 часа. В данном случае видно, что анализ различных проблем, который был дан нами во второй части на основе уравнения Лапласа для установившегося состояния, можно рассматривать вполне достаточным для всех практических надобностей, если только жидкости обладают нормальной сжимаемостью и геометрические размеры течения имеют умеренную величину.

Когда течение имеет значительные размеры или когда жидкость имеет ненормально высокую сжимаемость или же то и другое вместе, допущение о „непрерывной последовательности установившихся состояний“ не является больше справедливым. Тогда необходимо применить теорию, учитывающую полностью переходные состояния в распределении давлений или плотности, которые в целом будут совершенно отличны от установившегося состояния, соответствующего мгновенным значениям граничных давлений или расходов [2].

Это вытекает из обстоятельства, что величина отношения в уравнении (3) и время в (5) увеличиваются с ростом β и r_e. Отсюда, если действительный радиус резервуара увеличится с 152,5 до 8045 *м*, то время в уравнении (5) увеличится до 186 дней, а отношение в уравнении (4) возрастает до 1,87. Если же и коэфициенты сжимаемости будут выше нормальных, то эти отношения становятся еще значительнее.

---

[1] Величина расхода через систему в первоначальный момент будет бесконечно велика и будет приближаться к установившемуся состоянию только экспоненциально. Однако уравнение (5) дает правильный порядок величины t. Точная теория этой проблемы будет приведена в гл. X, п. 4.

[2] Важным практическим примером, где неустановившееся время играет основную роль в эксплоатационной характеристике системы течения, является нефтяное месторождение Ист-Тексас, где вся добыча первых $3^1/_2$ лет — 74,3 млн. *т* нефти была практически связана с расширением воды в песчанике Вудбайн в пределах радиуса 32 *км* относительно самого месторождения (гл. X, п. 8). Действительно, в таком случае сжимаемость должна иметь столь большое значение, которое только можно отнести к распределенным свободным газовым массам.

Тогда еще более осложняется возможность получения вполне удовлетворительного метода отнесения подробной характеристики течения к установившемуся состоянию. Такие ненормально высокие коэфициенты сжимаемости, на которые мы только что ссылались, могут встретиться там, где свободный газ диспергирован в жидкости по всей пористой среде. Под этим явлением мы совершенно не имеем в виду свободного газа, который встречается, за исключением случая перенасыщения, в порах коллектора, где он несет с собой газонасыщенную жидкость в связи с падением давления в последней ниже точки насыщения. При этом по характеристике жидкая фаза становится „газожидкостной смесью". Эта смесь показывает многие свойства сжимаемой жидкости, и ее нельзя рассматривать как однородную жидкость, подчиняющуюся закону Дарси.

Для объяснения сжимаемости мы принимаем наличие диспергированного свободного газа в форме локализованных газовых карманов, размеры которых малы по сравнению с размерами всего резервуара с жидкостью и которые распределены внутри резервуара с некоторой степенью равномерности. Основную массу жидкости можно рассматривать по существу несжимаемой, так как наличие газовых карманов сообщает, повидимому, всей жидкой фазе упругие свойства. Эти свойства создают изменение режима резервуара в таких масштабах, которые вряд ли могут быть возможны, если жидкость сама по себе обладает значительной сжимаемостью.

Легко показать, что объем таких диспергированных газовых масс, необходимых для создания результативной действительной сжимаемости $\overline{\beta}$ жидкости, первоначальная сжимаемость которой была β_0, дается выражением:

$$x = \frac{\overline{\beta} - \beta_0}{\frac{1}{p} - \beta_0}, \tag{6}$$

где x — часть всего объема жидкости, занятая свободным газом; p — давление жидкости, принимая наличие идеального газа и пренебрегая его растворимостью в жидкости. Таким образом, если $\beta_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ *am* и $p = 100$ *am*, то распределенное содержание свободного газа в пределах 4,5% дает результирующую сжимаемость, в 10 раз бо́льшую по сравнению с β_0; x и $\overline{\beta}$ изменяются с давлением. Обычно при подсчете действительной величины конечной сжимаемости вполне достаточно взять средние значения x и p. Если брать в расчет сжимаемость жидкостей, движущихся в пористой среде, основной интерес будет заключаться в изучении изменений во времени распределения давления и расхода, непосредственно вытекающих из изменений граничных условий, непрерывных или прерывных.

Вместе с тем следует помнить, что строгое допущение о сжимаемости, не равной нулю, совершенно не исключает возможности установившегося течения для сжимаемых жидкостей. Наоборот, всякое течение сжимаемой жидкости будет стремиться к установившемуся, вне зависимости от предшествующего развития процесса, когда граничные величины расхода или давления примут постоянное значение. Сжимаемость жидкости определяет пути и скорость этого приближения к установив-

шимся условиям. При этом всегда принимается в строго математическом смысле бесконечный отрезок времени. Когда же установившееся состояние достигнуто, сжимаемость в задаче больше не сохраняется, за исключением того, что распределение плотности жидкости заменяется соответствующим распределением давления.

Из гл. III, п. 4 вспомним, что в общем случае неустановившееся течение сжимаемой жидкости в однородной пористой среде (пренебрегая эффектом силы тяжести) подчиняется уравнению:

$$\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\gamma}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\gamma}{\partial z^2}=\frac{f\beta\mu}{k}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial t}, \tag{7}$$

где соответственно γ — плотность жидкости; β — ее сжимаемость; μ — вязкость; k и f — проницаемость и пористость среды. Плотность связана с давлением жидкости уравнением

$$\gamma=\gamma_0 e^{\beta p}, \tag{8}$$

где γ_0 — плотность при нулевом давлении.

Если граничные условия не изменяются во времени, то правую сторону уравнения (7) можно приравнять нулю. Тогда оно превратится в уравнение для установившегося состояния:

$$\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\gamma}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\gamma}{\partial z^2}=0. \tag{9}$$

Это уравнение представляет собой уравнение Лапласа и тождественно с уравнением для распределения давления в несжимаемой жидкости. Из настоящего заключения вытекает непосредственно, что все решения задач, приведенные во второй части настоящей работы, за исключением гл. VI и VII, можно вновь интерпретировать для сжимаемой жидкости. При этом термин „давление“ просто заменяется термином плотность по отношению к обоим видам распределения внутри течения и на его контурах. Например, для линейного течения с плотностями жидкости на контурах γ_1 и γ_2 распределение плотности будет:

$$\gamma=\gamma_2+\frac{\gamma_1-\gamma_2}{L}x, \tag{10}$$

где L — длина линейного канала. Выражая это уравнение через распределение давления, получим эквивалентную ему, но более сложную форму:

$$p=\frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{(e^{\beta p_1}-e^{\beta p_2})}{L}x+e^{\beta p_2}\right]. \tag{11}$$

Тогда расход массы через систему будет:

$$Q=-\frac{k\gamma}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{k}{\beta\mu}\frac{\partial\gamma}{\partial x}=\frac{k}{\beta\mu}\frac{\gamma_2-\gamma_1}{L}=Q_0(1+\beta\bar{p}). \tag{12}$$

Уравнение (12) относится к членам, выраженным через β^2, где Q_0 — расход несжимаемой жидкости с плотностью γ_0 и вязкостью μ, и где $\bar{p}$ — среднеалгебраическое давление.

Соответственно этому для радиального течения с помощью анализа, аналогичного приведенному в гл. IV, п. 2, приходим к следующему выражению:

$$\gamma = \frac{\gamma_e - \gamma_w}{\ln r_e/r_w} \ln \frac{r}{r_w} + \gamma_w, \tag{13}$$

с распределением давления, представленным в следующей форме:

$$p = \frac{1}{\beta} \ln \left\{ \frac{(e^{\beta p_e} - e^{\beta p_w}) \ln r/r_w}{\ln r_e/r_w} + e^{\beta p_w} \right\}, \tag{14}$$

и расходом массы:

$$Q = \frac{2\pi k (\gamma_e - \gamma_w)}{\beta \mu \ln r_e/r_w} = Q_0 (1 + \beta \bar{p}). \tag{15}$$

В отношении к членам, выраженным через β^2, Q_0 — расход массы в радиальном направлении для несжимаемой жидкости, с плотностью γ_0; $\gamma_0(1 + \beta\bar{p})$ является по отношению к членам, выраженным через β^2, средней плотностью жидкости при линейном и радиальном течении. Отсюда из уравнений (12) и (15) следует, что можно подсчитать расход массы при установившемся течении для сжимаемой жидкости, по отношению к членам β^2, принимая за плотность жидкости среднеалгебраическое значение ее на контурах системы. В противном случае следует применить обычные формулы, где пренебрегаем сжимаемостью. Этот вывод одинаково справедлив для всех установившихся течений с постоянными давлениями или скоростями на контурах, так как замена Δp через $\Delta\gamma$ приводит всегда к коэфициенту $(1 + \beta\bar{p})$, на который следует умножить Q_0.

Отдельные стороны распределения давления в системе со сжимаемой жидкостью по сравнению с теми системами, где явлением сжимаемости пренебрегают, можно подвергнуть изучению с помощью уравнений (11) и (14). Тогда, очевидно, они будут различаться между собой членами, пропорциональными β.

Можно показать, что для постоянных граничных давлений градиент последнего, а отсюда и скорость в любой точке установившегося течения сжимаемой жидкости, будет меньше или больше по отношению к членам β^2, сравнительно с соответствующей величиной в аналогичном течении несжимаемой жидкости, с теми же самыми граничными давлениями и в зависимости от того, является ли плотность в данной точке больше или меньше величины среднеалгебраической плотности.

Что же касается подробной математической обработки задач неустановившегося течения, можно сделать попытку подвергнуть изучению неустановившиеся состояния во всех разнообразных системах, которые рассматривались во второй части.

Как уже было отмечено, можно вполне обоснованно применять сделанное допущение об установившемся состоянии или же о непрерывной последовательности установившихся состояний практически при всех условиях, за исключением тех случаев, где жидкость имеет ненормально высокую сжимаемость или когда размер течения достаточно велик. По-

этому задачи, которые будут подвергнуты математической обработке в третьей части, будут ограничены теми вопросами, где эффект сжимаемости может иметь некоторое реальное физическое значение. Кроме того, будут рассмотрены типы задач с переходным режимом, которые представляют собой интерес для качественного рассмотрения систем газожидкостных смесей. Вполне понятно, что реальные размеры при изучении первого класса задач будут входить в анализ только как параметры, которые в конечном итоге можно подобрать больших или малых размеров. Вместе с тем системы с численными размерами умеренной величины будут интересны с физической стороны, когда они связаны с достаточно высокими коэфициентами сжимаемости жидкости[1].

Наконец, следует заметить, что для аналитического удобства все граничные условия и значения должны быть выражены через плотность γ, а не через давление p. В конечной физической интерпретации перевод в эквивалентные значения p производится уравнением (8).

2[2]. Радиальное течение. Некоторые предварительные аналитические формулировки. Когда течение радиальное, уравнение (2), гл. X, п. 1, общего вида, которому подчиняется движение сжимаемых жидкостей в пористой среде, можно переписать для плоско-полярных координат в виде:

$$\kappa\left\{\frac{\partial^2\gamma}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\gamma}{\partial r}\right\}=\frac{\partial\gamma}{\partial t}: \qquad \kappa=\frac{k}{f\beta\mu}. \tag{1}$$

Это уравнение имеет четыре существенно различающихся между собой элементарных решения, а именно:

$$\gamma=\ln r; \tag{2}$$

$$\gamma=r^2+4\kappa t; \tag{3}$$

$$\left.\begin{matrix}\gamma=J_0(\alpha r)\\ Y_0(\alpha r)\end{matrix}\right\}e^{-\kappa\alpha^2 t}; \tag{4}$$

$$\gamma=\frac{1}{t}\,e^{-r^2/4\kappa t}, \tag{5}$$

где соответственно α — любое действительное число[3], а J_0, Y_0 — бес-

---

[1] Действительно, как это показано ниже или как это непосредственно вытекает из преобразования координат и переменных времени в уравнении (1), гл. X, п. 2, чтобы получить безразмерные величины, основные переменные аналитического решения будут включать произведение сжимаемости и квадрата одной из размерностей системы. Переходное время будет иметь значение, когда его произведение достигает большой величины [например, уравнение (5)].

[2] Анализ этого, а также последующих разделов, вплоть до гл. X, п. 15, взят у M. Маскета, Physics, 5, 71, 1934.

[3] Уравнение (4) явится также решением при комплексном α. Вместе с тем, если только действительная часть α^2 отрицательна, последняя не будет иметь физического значения по отношению к интересующей нас здесь задаче. Эти решения согласно уравнению (4) можно вывести методом разделения переменных, который был продемонстрирован в гл. VII, п. 9. Подробные свойства функций Y_0, так же как и функций J_0, можно найти в книге „Современный анализ“, гл. XVII, а также в исследованииG. N. Watson, „The Theory of Bessel Functions“, 1922.

селевы функции первого и второго рода нулевого порядка. Как это будет показано в следующих разделах, можно синтезировать различные решения, соответствующие различным физическим радиальным течениям, создавая определенные линейные комбинации из первых трех решений уравнений (2)—(4). В гл. X, п. 15, решение, приведенное в уравнении (5), будет приложено к несколько отличному типу задачи.

При синтезе этих решений удобно будет использовать то обстоятельство, что если $\gamma_0(r, t)$ является решением уравнения (1), которое обращается в нуль при $t=0$ и равняется 1 при $r=r_0$, то

$$\gamma = \int_0^t f(\lambda) \frac{\partial}{\partial t} \gamma_0(r, t-\lambda)\, d\lambda \qquad (6)^1$$

является решением уравнения (1), которое также равняется нулю при $t=0$, но имеет значение $f(t)$ при $r=r_0$. На основании этой формулы из решения для постоянных граничных значений можно получить вывод решения с переменными граничными условиями.

Обычно прибегают к использованию следующих интегралов. Обозначая через $U(\alpha r)$ функцию

$$U(\alpha r) = AJ_0(\alpha r) + BY_0(\alpha r), \qquad (7)$$

где A и B являются двумя произвольно выбранными константами, которые могут зависеть от α, но не от r, имеем:

$$\int_a^b rU(\alpha r)\, dr = \frac{-1}{\alpha^2}\left[r\frac{dU}{dr}\right]_a^b; \qquad (8)$$

$$\int_a^b rU(\alpha r) \ln r\, dr = \frac{1}{\alpha^2}\left[U - r\frac{dU}{dr}\ln r\right]_a^b; \qquad (9)$$

$$\int_a^b rU(\alpha r)\, U(\alpha' r)\, dr = \frac{1}{\alpha^2 - \alpha'^2}\left[rU(\alpha r)\frac{dU(\alpha' r)}{dr} - rU(\alpha' r)\frac{dU(\alpha r)}{dr}\right]_a^b; \qquad (10)$$

$$\int_a^b rU^2(\alpha r)\, dr = \frac{1}{2}\left\{r^2U^2(\alpha r) + \frac{1}{\alpha^2}\left[r\frac{dU(\alpha r)}{dr}\right]^2\right\}_a^b. \qquad (11)$$

В истинности этих выражений можно убедиться, используя обстоятельство, что $U(\alpha r)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Бесселя, а именно:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{dU(\alpha r)}{dr}\right] = -\alpha^2 U(\alpha r), \quad \text{[см. уравнение (6), гл. VII, п. 9].} \qquad (12)$$

---

[1] Эта формула представляет собой частный случай теоремы Дюамеля, рассмотрение которой и доказательство можно найти в работе Карслоу (Carslaw, Theory of The Conduction of Heat, 1921, 2 изд., 16 стр. Есть русский перевод Х. С. Карслоу, Теория теплопроводности, 1947).

Наконец, представляется удобным использовать следующее соотношение:

$$J_0(\alpha r)\,Y_1(\alpha r) - Y_0(\alpha r)\,J_1(\alpha r) = \frac{-2}{\pi \alpha r}; \qquad (13)^1$$

где J_1, Y_1 — бесселевы функции первого порядка и равны отрицательным производным J_0 и Y_0.

Рассматриваемая здесь радиальная система будет определяться так же, как и в задачах установившегося течения, двумя концентрическими круговыми контурами с радиусами r_1 и r_2, на каждой из которых плотность, а отсюда и давление или расход будут распределяться с равномерно фиксированными и изменяющимися во времени значениями. Когда один из контуров представлен скважиной, имеющей размеры, применяемые на практике, т. е. небольшие по сравнению со всеми остальными размерами течения и с твердо установленной нормой расхода, внутренний контур можно заменить математическим стоком.

3. Радиальные системы, в которых плотности заданы на обоих границах. Общий случай радиальной системы, где значение плотности задано на обеих границах, можно установить из условий:

$$\left.\begin{aligned} \gamma = f_1(t): &\quad r = r_1 \\ \gamma = f_2(t): &\quad r = r_2 \\ \gamma = g(r): &\quad t = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $g(r)$ — начальное распределение плотности (или давления). Решение этой задачи дает не только распределение давления в любое последующее мгновение, но также и величину расходов, поступающих в систему или уходящих из нее. Чтобы получить вывод решения, удовлетворяющего одновременно всем условиям уравнения (1), представляется удобным сначала дать предварительные и более простые решения γ_1, γ_2 и γ_3, которые определяются из следующих условий:

$$\left.\begin{aligned} (\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3) &= (1,\ 0,\ 0): r = r_1, \\ (\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3) &= (0,\ 1,\ 0): r = r_2, \\ (\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3) &= [0,\ 0,\ g(r)]: t = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Если теперь на основании этих выражений построить решение

$$\gamma = \gamma_3(r,\ t) + \int_0^t \left[f_1(\lambda) \frac{\partial \gamma_1(r,\ t-\lambda)}{\partial t} + f_2(\lambda) \frac{\partial \gamma_2(r,\ t-\lambda)}{\partial t} \right] d\lambda, \qquad (3)$$

то все условия уравнения (1) будут удовлетворяться одновременно как следствие из уравнения (2), гл. X, п. 2. Вывод индивидуальных решений γ_1, γ_2 и γ_3 можно получить следующим путем. Вводя функцию

$$U(\alpha_n r), \qquad U(\alpha_n r) = Y_0(\alpha_n r_2)\,J_0(\alpha_n r) - J_0(\alpha_n r_2)\,Y_0(\alpha_n r) \qquad (4)$$

и выбирая α_n так, чтобы

---

[1] См. Уотсон, там же, стр. 76.

$$U(a_n r_1) = 0, \tag{5}$$

можно представить себе γ_1, γ_2 и γ_3 в развернутом виде:

$$\gamma_1 = \frac{\ln r/r_2}{\ln r_1/r_2} + \sum_{a_n} A_n U(a_n r)\, e^{-\kappa a_n^2 t}\ , \tag{6}[1]$$

$$\gamma_2 = \frac{-\ln r/r_1}{\ln r_1/r_2} + \sum B_n U(a_n r)\, e^{-\kappa a_n^2 t}\ , \tag{7}$$

$$\gamma_3 = \sum C_n U(a_n r)\, e^{-\kappa a_n^2 t}. \tag{8}$$

Отсюда непосредственно вытекает, что γ_1, γ_2 и γ_3 удовлетворяют условиям уравнения (2) при $r = r_1$ вне зависимости от значений констант A_n, B_n и C_n. Последние константы следует выбирать так, чтобы γ_1, γ_2, γ_3 удовлетворяли также требованиям уравнения (2) в начальный момент $t = 0$. Таким образом, принимая в уравнениях (6), (7) и (8) $t = 0$, видно, что если удовлетворяется (2), то константы A_n, Bn и C_n должны удовлетворять:

$$\sum A_n U(a_n r) = \frac{-\ln r/r_2}{\ln r_1/r_2}\ ; \tag{9}$$

$$\sum B_n U(a_n r) = \frac{\ln r/r_1}{\ln r_1/r_2}\ ; \tag{10}$$

$$\sum C_n U(a_n r) = g(r). \tag{11}$$

Ряды, которые находятся в левой части этих уравнений, известны под названием рядов Фурье-Бесселя и аналогичны полностью рядам Фурье, которые были рассмотрены в гл. IV, п. 3. Единственная существенная разница между ними заключается в том, что тригонометрические функции синус и косинус последних заменены в данном случае линейными сочетаниями бесселевых функций $U(a_n r)$. Вместе с тем с методической стороны является важным фактором то обстоятельство, что любая произвольная функция, например $g(r)$, может быть развернута в форме рядов (9), (10) и (11), допуская условия, аналогичные требуемым в случае разложения ряда Фурье и которые всегда будут удовлетворяться в интересных с физической стороны задачах. Эта форма разложения будет такова, что сумма ряда в любой точке, где $g(r)$ непрерывно, равняется значению $g(r)$, а также среднеалгебраическому суммы правого и левого предела $g(r)$ в любой точке разрыва непрерывности[2].

Определение коэфициентов C_n, например уравнения (11), можно теперь получить на основании процедуры, совершенно аналогичной той, что дает коэфициенты в ряде Фурье. Так, умножая обе стороны

---

[1] В данном случае суммирование ряда, а также всех аналогичных рядов, выведенных в настоящей главе, распространяется только на положительные корни a_n уравнения (5) или его аналога для остальных идентичных с ним рядов.

[2] См. Уотсон, там же, гл. XVIII.

уравнения (11) на $rU(\alpha_m r)\,dr$ и интегрируя каждую сторону в пределах от r_1 до r_2, из уравнения (10), гл. X, п. 2, а также (4) и (5) видно, что интегралы с коэфициентами C_n все равны нулю. Поэтому при $n=m$ уравнение (11), гл. X, п. 2, дает отличное от нуля значение с конечным результатом:

$$\frac{C_m}{2\alpha_m^2}\left[r_2^2U'^2(\alpha_m r_2)-r_1^2U'^2(\alpha_m r_1)\right]=\int_{r_1}^{r_2} rg(r)\,U(\alpha_m r)\,dr, \qquad (12)$$

где значок „прим“ обозначает диференцирование по r. Таким образом, можно получить точное выражение для каждого коэфициента C_m. Кроме того, уравнение (12) также, очевидно, дает значение A_m и B_m, если вместо $g(r)$ в уравнении (12) подставлены соответственно правые стороны (9) и (10). Проделывая с помощью уравнений (8) и (9), гл. X, п. 2, конечное интегрирование, а затем упрощая его с помощью уравнения (13), гл. X, п. 2, которое показывает, что

$$U'(\alpha_n r_2)=\frac{-2}{\pi r_2}; \qquad U'(\alpha_n r_1)=\frac{-2J_0(\alpha_n r_2)}{\pi r_1 J_0(\alpha_n r_1)}, \qquad (13)$$

и, наконец, подставляя значения A_n, B_n и C_n в уравнения (6), (7) и (8), найдем, что γ_1, γ_2 и γ_3 принимают следующие формы:

$$\gamma_1=\frac{\ln r/r_2}{\ln r_1/r_2}+\pi\sum\frac{J_0(\alpha_n r_1)\,J_0(\alpha_n r_2)\,U(\alpha_n r)\,e^{-\kappa\alpha_n^2 t}}{J_0^2(\alpha_n r_1)-J_0^2(\alpha_n r_2)}, \qquad (14)$$

$$\gamma_2=\frac{-\ln r/r_1}{\ln r_1/r_2}-\pi\sum\frac{J_0^2(\alpha_n r_1)\,U(\alpha_n r)\,e^{-\kappa\alpha_n^2 t}}{J_0^2(\alpha_n r_1)-J_0^2(\alpha_n r_2)}, \qquad (15)$$

$$\gamma_3=\frac{\pi^2}{2}\sum\frac{\alpha_n^2 J_0^2(\alpha_n r_1)\,U(\alpha_n r)\,e^{-\kappa\alpha_n^2}}{J_0^2(\alpha_n r_1)-J_0^2(\alpha_n r_2)}\int_{r_1}^{r_2} rg(r)\,U(\alpha_n r)\,dr. \qquad (16)$$

Складывая эти решения, согласно уравнению (3), можно получить конечное решение, удовлетворяющее условиям (1), из следующего выражения:

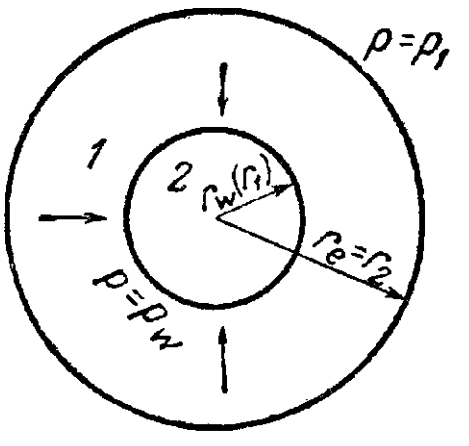
$$\gamma=\pi\sum\frac{\alpha_n^2 J_0(\alpha_n r_1)\,U(\alpha_n r)\,e^{-\kappa\alpha_n^2 t}}{J_0^2(\alpha_n r_1)-J_0^2(\alpha_n r_2)}\left[\frac{\pi}{2}J_0(\alpha_n r_1)\int_{r_1}^{r_2} rg(r)\,U(\alpha_n r)\,dr-\right.$$

$$\left.-\kappa J_0(\alpha_n r_2)\int_0^t f_1(\lambda)\,e^{\kappa\alpha_n^2\lambda}\,d\lambda+\kappa J_0(\alpha_n r_1)\int_0^t f_2(\lambda)\,e^{\kappa\alpha_n^2\lambda}\,d\lambda\right] \qquad (17)$$

Применяя это уравнение, следует заметить, что, для того чтобы проверить граничные значения, нет необходимости заменять r непосред-

ственно через $r = r_1$, так как в силу уравнений (4) и (5) γ, очевидно, тождественно равняется нулю. Сначала следует просуммировать ряд, а затем дать r приблизиться к предельным значениям r_1 и r_2. Получаемая при этом трудность решения возникает из того обстоятельств , что ряды уравнений (9), (10) и (11), из которых выводятся значения γ_1, γ_2 и γ_3, имеют разрыв непрерывности при r_1 и r_2. Вместе с тем, если сначала ряды просуммированы и в суммы подставлены граничные значения для r, такие трудности уже больше не возникают при получении окончательных решений.

4. Падение добычи в месторождении, которое эксплоатируется при гидравлическом режиме с переменным давлением. Уравнение (17), гл. X, п. 3, дает распределение плотности в любое время t, внутри любой системы, ограниченной контурами с радиусами r_1 и r_2, для которых соответствующие плотности будут $f_1(t)$ и $f_2(t)$ и которые первоначально имели радиальное распределение плотности $g(r)$. Путем диференцирования можно получить также расход через систему как функцию времени. Чтобы продемонстрировать метод применения уравнения (17), гл. X, п. 3, рассмотрим нефтяное месторождение, которое эксплоатируется при гидравлическом режиме. Все месторождение собрано воедино и заменено единичной круговой областью, имеющей радиус r_w, равный одному из размеров месторождения (фиг. 248). Тогда расход вдоль этого радиуса r_w можно рассматривать как объединенную добычу из различных скважин месторождения.



Фиг. 248. Схема нефтяного месторождения, которое эксплоатируется при радиальном продвижении краевой воды.

1 — водяной песчаник; *2* — нефтяное месторождение.

Допустим, что первоначальное мгновение соответствует моменту, предваряющему вскрытие месторождения. Тогда начальное распределение плотности можно принять равным постоянной плотности γ_i. Радиус r_2 будет соответствовать внешнему радиусу r_e, давление на котором, а следовательно, и плотность будут приняты имеющими постоянную величину, т. е. равное первоначальному давлению. Допустим, кроме того, что на границе месторождения, оконтуренной „радиусом области“ — $r_w(r_1)$, в одном случае давление внезапно снижается до $p_w(\gamma = \gamma_w)$, а в другом случае давление снижается непрерывно так, чтобы плотность линейно снизилась до γ_0.

Аналитически эти допущения налагают условия, что

$$\left.\begin{array}{lll} \gamma = g(r) = \gamma_i; & (p = p_i); & t = 0 \\ \gamma = \gamma_e = \gamma_i; & (p_e = p_i); & r = r_e\,(r_2) \\ (a): \gamma = \gamma_w; \left(p_w = \dfrac{1}{\beta} \ln \dfrac{\gamma_w}{\gamma_0}\right), & & \\ (b): \gamma = \gamma_i - \varepsilon t; \left(p_w = \dfrac{1}{\beta} \ln \dfrac{\gamma_i - \varepsilon t}{\gamma_0}\right) & & r = r_w\,(r_1) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Подставляя эти значения в уравнение (17), гл. X, п. 3, и суммируя ряды, не содержащие времени, а также используя разложения уравнений (9) и (10), гл. X, п. 3, найдем, что

$$\left.\begin{aligned}(a):\gamma = {} & \frac{\gamma_i \ln \frac{r}{r_w} + \gamma_w \ln \frac{r_e}{r}}{\ln r_e/r_w} - \\ & - \pi(\gamma_i - \gamma_w) \sum \frac{J_0(\alpha_n r_e)\, J_0(\alpha_n r_w)\, U(\alpha_n r)\, e^{-\kappa\alpha_n^2 t}}{J_0^2(\alpha_n r_w) - J_0^2(\alpha_n r_e)},\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}(b):\gamma = {} & \frac{\gamma_i \ln \frac{r}{r_w} + (\gamma_i - \varepsilon t) \ln \frac{r_e}{r}}{\ln r_e/r_w} - \\ & - \frac{\pi\varepsilon}{\kappa} \sum \frac{J_0(\alpha_n r_e)\, J_0(\alpha_n r_w)\, U(\alpha_n r)}{\alpha_n^2 [J_0^2(\alpha_n r_w) - J_0^2(\alpha_n r_e)]} + \\ & + \frac{\pi\varepsilon}{\kappa} \sum \frac{J_0(\alpha_n r_e)\, J_0(\alpha_n r_w)\, U(\alpha_n r)\, e^{-\kappa\alpha_n^2 t}}{\alpha_n^2 [J_0^2(\alpha_n r_w) - J_0^2(\alpha_n r_e)]}.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Прямой подстановкой можно убедиться в том, что эти выражения удовлетворяют граничным и начальным условиям (1). В частности, практический интерес представляет собой величина расхода или текущего дебита, который можно получить при вышеуказанных условиях из данного месторождения. Эта величина, очевидно, дается следующим выражением:

$$Q = \frac{2\pi k}{\mu}\left(r\gamma \frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r_w} = \frac{2\pi k}{\mu\beta} r_w \left(\frac{\partial \gamma}{\partial r}\right)_{r_w}. \tag{4}$$

Прилагая это выражение к уравнениям (2) и (3), найдем:

$$\left.\begin{aligned}(a): Q = {} & \frac{2\pi k}{\mu\beta}(\gamma_i - \gamma_w)\left\{\frac{1}{\ln r_e/r_w} - \right. \\ & \left. - \pi r_w \sum \frac{J_0(\alpha_n r_e)\, J_0(\alpha_n r_w)\, U'(\alpha_n r_w)\, e^{-\kappa\alpha_n^2 t}}{J_0^2(\alpha_n r_w) - J_0^2(\alpha_n r_e)}\right\};\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}(b): Q = {} & \frac{2\pi k\varepsilon}{\mu\beta}\left\{\frac{t}{\ln r_e/r_w} - \frac{\pi r_w}{\kappa} \sum \frac{J_0(\alpha_n r_e)\, J_0(\alpha_n r_w)\, U'(\alpha_n r_w)}{\alpha_n^2 [J_0^2(\alpha_n r_w) - J_0^2(\alpha_n r_e)]} + \right. \\ & \left. + \frac{\pi r_w}{\kappa} \sum \frac{J_0(\alpha_n r_e)\, J_0(\alpha_n r_w)\, U'(\alpha_n r_w)\, e^{-\kappa\alpha_n^2 t}}{\alpha_n^2 [J_0^2(\alpha_n r_w) - J_0^2(\alpha_n r_e)]}\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Прилагая к уравнению (5) уравнение (13), гл. X, п. 3, и суммируя постоянный ряд уравнения (6) с помощью (8), гл. X, п. 2, можно переписать в конечном итоге эти выражения в таком виде:

$$(a): Q = \frac{2\pi k(\gamma_i - \gamma_w)}{\mu\beta}\left[\frac{1}{\ln \varrho} + 2 \sum \frac{J_0^2(x_n\varrho)\, e^{-x_n^2 \bar{t}}}{J_0^2(x_n) - J_0^2(x_n\varrho)}\right], \tag{7}$$

$$(b): Q = 2\pi f\varepsilon r_w^2 \left\{\frac{\bar{t}}{\ln \varrho} + \frac{\varrho^2}{2(\ln \varrho)^2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2\varrho^2} - \frac{1}{\varrho^2}\ln \varrho - \left(\frac{\ln \varrho}{\varrho}\right)^2\right] - 2 \sum \frac{J_0^2(x_n\varrho)\, e^{-x_n^2 \bar{t}}}{x_n^2 [J_0^2(x_n) - J_0^2(x_n\varrho)]}\right\}, \tag{8}$$

для чего вводим следующее безразмерное обозначение:

$$\frac{r_e}{r_w} = \varrho; \quad \alpha_n r_w = x_n; \quad \frac{kt}{r_w^2} = \bar{t}. \tag{9}$$

Допустим в качестве численного примера общей задачи, что физические размеры системы имеют следующие значения:

r_w — радиус области — 32 180 *м*;

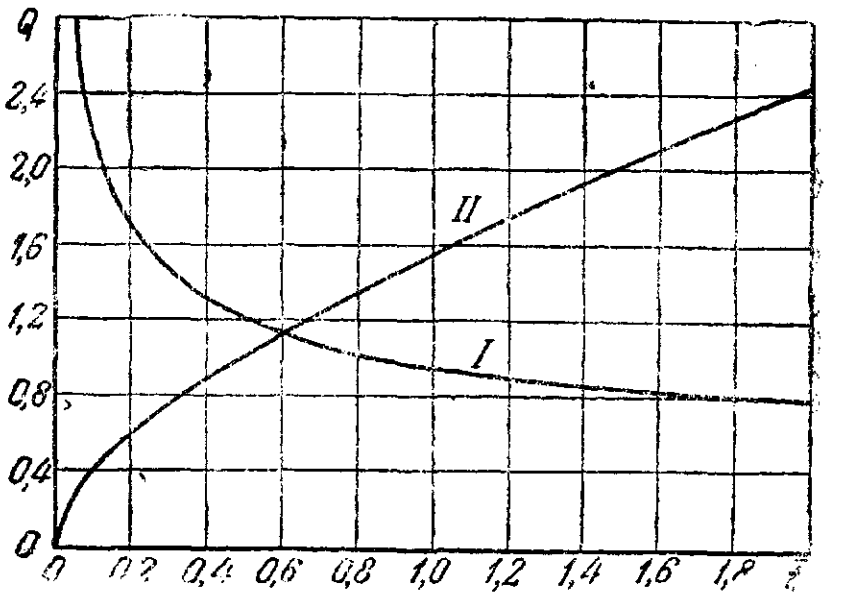
r_e — внешний радиус резервуара — 160 900 *м*.

Тогда для численного решения уравнений (7) и (8) необходимо сначала определить корни α_n уравнения (5), гл. X, п. 3. Принимая обозначения (9), имеем для первых семи корней в случае $\varrho = 5$:

n	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0,7632	1,5575	2,3470	3,1352	3,9210	4,7073	5,4933

Значения бесселевых функций можно получить из таблиц, например Хаяши или Уотсона[1]. На фиг. 249 приведены конечные результаты этого частного решения, где количества $\frac{Q\beta\mu}{2\pi k(\gamma_i - \gamma_w)}$ и $\frac{Q}{2\pi f \varepsilon r_w^2}$, обозначенные через $\bar{Q}$, построены относительно $\bar{t}$ соответственно кривым *I* и *II*.

Как и следует ожидать, чисто физически кривая *I* начинается с бесконечно больших значений и асимптотически приближается к постоянной величине $\frac{1}{\ln 5} = 0{,}62$. Эта кривая соответствует установившемуся расходу, который проходит через систему, после того как исчезают переходные явления, представленные рядом уравнения (7) и связанные со сжимаемостью. Беря $k/\mu = 2$ и величину β столь малой, что $\gamma_i - \gamma_w \sim \gamma_0 (p_e - p_w)$, имеем значение $\bar{Q} = 1$ для кривой *I*, соответствующее дебиту, приблизительно 1,21 *л/сек/1 м* песчаника на атмосферу перепада давления ($p_e - p_w = 1$ *am*).



Фиг. 249. Хронологические кривые нефтяного месторождения, которое разрабатывалось при гидравлическом режиме с постоянным давлением:

I — давление в месторождении внезапно упало до p_w и на этой величине поддерживается; $\bar{Q} = Q\mu/\pi k \gamma_0 \Delta p$; $\bar{Q} = 1 \sim 100$ *м³/сутки/1 м* песчаника */am* перепада давления; *II* — давление месторождения беспрерывно снижается так, что плотность жидкости падает при постоянной скорости (ε); $\bar{Q} = Q\mu/2\pi f \varepsilon r_w^2$; $Q = 1 \sim 79\,200$ *м³/сутки/ 1 м* песчаника при падении давления 0,136 *am/сутки*.

Чтобы получить численный эквивалент шкалы $\bar{t}$, следует выбрать значения сжимаемости β и пористости f. Беря $f = 0{,}2$ и $\beta \sim 4{,}5 \cdot 10^{-4}$ *am*$^{-1}$ (в 10 раз больше воды), получаем $\bar{t} \sim 1{,}85 \cdot 10^{-4} t$ (дней), так что $\bar{t} = 0{,}1$

[1] Hayashi K., Tafeln der Besselschen, Theta, Kugel und anderer Funktionen, 1930; Watson, цит. cor.

соответствует приблизительно $1^1/_2$ годам. Такая система будет обладать длительным переходным (неустановившимся) периодом, ибо даже через 6 лет величина расхода будет все же в 2 раза больше по сравнению с расходом при установившемся течении. Для кривой *II* единичный интервал на шкале ординат имеет численный эквивалент $3{,}3 \cdot 4{,}0\varepsilon \cdot 10^{14}$ *м* песчаника или приблизительно 929 *л/сек/м* песчаника на падение давления при $r_w - 0{,}136$ *am/сутки*.

Если начальное давление песчаника составляет 108,8 *am*, то принятый темп падения можно поддерживать в течение только 800 дней или до $\bar{t} = 0{,}15$, при котором $\bar{Q} \sim 0{,}5$. Отсюда текущий дебит к тому времени, когда давление в месторождении упадет до нуля, достигнет 455,4 *л/сек/м* песчаника. В то же самое время для кривой *I*, $\bar{Q} \sim 1{,}9$, так что если $\Delta p \sim 108{,}8$ *am*, то система, в которой давление внезапно упало до нуля, будет эксплоатироваться с отбором приблизительно 222,5 *л/сек/м* песчаника.

Можно заметить, что по отношению к совокупной добыче

$$P(a) = \int_0^t Q(a)\, dt = \frac{\Delta\gamma}{\varepsilon}\, Q(b) \cong \frac{\Delta p}{(dp/dt)}\, Q(b) = \frac{\Delta p}{2}\, Q(b), \qquad (10)$$

где $Q(a)$ и $Q(b)$ представляют собой соответственно выражения уравнений (7) и (8). Отсюда совокупная добыча в случае (a) при $\bar{t} = 0{,}15$ составляет:

$$P(a) = 800\, Q(b) = 6 \cdot 10^7 \cdot 3{,}3 \cdot 0{,}158\ м^3/м \text{ песчаника}$$

С другой стороны, значение $P(b)$ можно легче всего получить из площади, расположенной ниже кривой *II*. Результат подсчета составляет $4 \cdot 10^7 \cdot 3{,}3 \cdot 0{,}158\ м^3/м$ песчаника. Общее изменение $P(b)$ в зависимости от времени будет по существу порядка t^2, так как после первоначального краткого периода неустановившегося состояния $Q(b)$ возрастает с изменением t приблизительно линейно. По этой же самой причине, после того как прошел начальный неустановившийся период, $P(a)$ в силу уравнения (10) будет возрастать приблизительно линейно с ростом t. Фактические постоянные величины, которые были приведены в настоящем рассмотрении на фиг. 249, грубо соответствуют нефтяному месторождению Ист-Тексас [1].

Следует заметить, что кривые, представленные на этой фигуре, не зависят от абсолютных размеров или численных значений физических констант течения. Квадратные скобки уравнений (7), (8) и корни x_n зависят только от отношения $r_e/r_w = \varrho$.

Абсолютные значения r_e и r_w и фактические значения β, f, k, μ, $\Delta\gamma$ входят только в определение физических эквивалентов шкалы абсцисс и ординат на фиг. 249. Если не принять отличного значения для β, то кривые *I* и *II* можно использовать при любой комбинации геометрических или физических констант.

---

[1] Подробный аналитический разбор истории разработки этого месторождения приведен в гл. X, п. 8.

5. Предельный случай нулевого внутреннего радиуса. При выводе уравнения (17), гл. X, п. 3, численные значения r_w и r_e были оставлены совершенно произвольными. Однако из этого не следует делать вывода, что можно принимать крайние пределы $\varrho \sim \infty$, $r_w \sim 0$. Если расход не должен равняться нулю при скважине с нулевым радиусом, то ее следует заменить математическим стоком с отрицательным бесконечным давлением. Поэтому установление конечного фиксированного или переменного давления становится бессмысленным при $r_w \to 0$. Вместе с тем, если не ставится условие расхода, не равного нулю, то давление или плотность на скважине ($r_w \sim 0$) определяются однозначно соответствующими величинами на внешнем контуре. Тогда можно показать путем, аналогичным выводам гл. X, п. 3, что распределение плотности γ дается выражением:

$$\gamma = \frac{2}{r_e^2} \sum \frac{J_0(\alpha_n r)}{J_1^2(\alpha_n r_e)} e^{-\kappa \alpha_n^2 t} \left[\int_0^{r_e} r g(r) J_0(\alpha_n r)\, dr + \right.$$

$$\left. + \kappa r_e \alpha_n J_1(\alpha_n r_e) \int_0^t f_2(\lambda)\, e^{\kappa \alpha_n^2 \lambda}\, d\lambda \right], \qquad (1)$$

где

$$J_0(\alpha_n r_e) = 0;$$

$f_2(t)$ представляет собой значение плотности γ, которое поддерживается на внешнем контуре $r = r_e$ и $g(r)$ является его начальным распределением.

6. Рост забойных давлений в закрытых скважинах. В процессе определения забойных давлений в эксплоатирующемся нефтяном месторождении можно встретиться с приложением уравнения (1), гл. X, п. 5, имеющим некоторый практический интерес. Обычная процедура такого определения заключается в спуске на забой эксплоатационной скважины регистрирующего или максимального забойного манометра. Затем скважину закрывают и после истечения известного периода времени манометр поднимают с забоя и производят регистрацию отсчетов давления. Полученное значение давления принимается равным давлению резервуара в нефтяном месторождении вокруг выбранной скважины. Тогда возникает вопрос относительно величины интервала времени, на которое следует закрыть скважину для того, чтобы давление в ней поднялось до значения, соответствующего зоне, примыкающей к скважине.

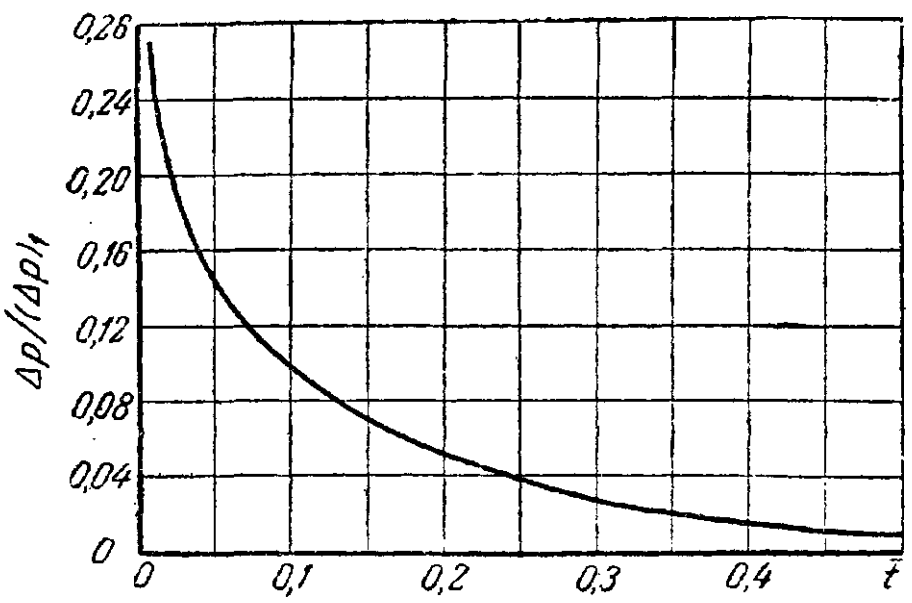
Решение этой задачи, которое мы рассматриваем в настоящем разделе, нельзя приложить полностью к тем случаям, где в песчанике вокруг забоя скважины имеется свободный газ и где по мере нарастания давления и сжатия газа изменяется эффективная проницаемость песчаника. Полученное значение давления будет вполне справедливым только для месторождений, которые работают всецело на гидравлическом режиме, например, в месторождении Ист-Тексас, где газ не выделяется из нефти до тех пор, пока нефть не достигнет забоя скважины. Полученная величина давления дает качественное представление о росте последнего даже в песчаниках, фонтанирующих нефтью и газом. В этом

случае кривая на фиг. 250 падает более круто благодаря росту эффективной проницаемости, по мере того как возрастает давление в стволе скважины.

Допуская, что скважина перед ее закрытием фонтанировала при условиях стационарного течения, имеем, что распределение плотности в начальное мгновение [1] $g(r)$ в уравнении (1), гл. X, п. 5, дается выражением:

$$g(r) = \frac{(\gamma_e - \gamma_{wi}) \ln r/r_w}{\ln r_e/r_w} + \gamma_{wi} \text{ [см. уравнение (13), гл. X, п. 1]}, \quad (1)$$

где γ_e — плотность в резервуаре, которую следует определить, и γ_{wi} — плотность фонтанной струи с забоя скважины перед производством замера глубинного давления; r_w — радиус скважины. Так как месторож-



Фиг. 250. Установление «давления резервуара» закрытием скважины, из которой производится отбор сжимаемой жидкости.

$(\Delta p) / (\Delta p_i)$ — (перепад давления после закрытия) / перепад давления при фонтанировании); $\bar{t} = kt_0/\mu f \beta r_e^2$ безразмерное время;

дение в целом продолжает фонтанировать, можно величине $f_2(t)$ придать значение γ_e. При этих условиях уравнение (1), гл. X, п. 5, принимает вид:

$$\gamma = \gamma_e - \frac{2(\gamma_e - \gamma_{wi})}{r_e^2 \ln r_e/r_w} \sum \frac{J_0(\alpha_n r)\, e^{-k\alpha_n^2 t}}{\alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n r_e)}. \quad (2)$$

Тогда перепад давления между скважиной (при $r = r_w$) и радиусом r дается выражением:

$$\frac{p_e - p_w}{p_e - p_{wi}} \cong \frac{\gamma_e - \gamma_w}{\gamma_e - \gamma_{wi}} = \frac{2}{\ln \varrho} \sum \frac{e^{-x_n^2 \bar{t}}}{x_n^2 J_1^2(x_n)}, \quad (3)$$

где $\varrho = r_e/r_w$, $x_n = \alpha_n r_e$ и $\bar{t} = kt/r_e^2$, со значениями p_e и p_w, соответствующими γ_e и γ_w. Таким образом, частичное повышение перепада давления в любой отрезок времени не будет зависеть от абсолютных значений давления и определяется только безразмерными константами в ряде уравнения (3). На фиг. 250 дается построение уравнения (3) для условия $\varrho = 2000$. За исключением множителя $1/\ln \varrho$, это построе-

[1] Следует понимать, что в начальный момент роста давления ствол скважины заполнен жидкостью.

ние представляет собой универсальную кривую. Так, для $k/\mu = 0{,}2$ $f = 0{,}2$; $\beta = 4{,}5 \cdot 10^{-5}$ am^{-1}; $r_e = 152{,}25$ $м$; $\bar{t} = 0{,}1 \sim t = 0{,}3$ часа. Отсюда 90% первоначальной разности давления будут потеряны в течение $^1/_3$ часа, а 99% — в течение $1^1/_2$ часов. Эти значения имеют тот же самый порядок величин, что наблюдается в месторождении Ист-Техсас, где константы внутри самого месторождения соответствуют приблизительно приведенным выше [1] данным.

7. Радиальные системы с плотностью, заданной на одной границе и расходом на другой. Аналитическое решение для радиальных систем, плотность жидкости которых задана на одной границе (r_1), а величина расхода на другой (r_2), можно выразить условиями, что:

$$\left.\begin{aligned} &\gamma = f_1(t); && r = r_1 \\ &r\frac{\partial \gamma}{\partial r} = f_2(t); && r = r_2 \\ &\gamma = g(r); && t = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $g(r)$ вновь являет собой первоначальное распределение плотности.

---

[1] Можно дать несколько более практическое представление о росте давления в закрытой скважине из аналитической обработки, отличающейся бо́льшими приближениями по сравнению с только что приведенными. Эта обработка получается из допущения, что столб жидкости в скважине нарастает от своего первоначального эксплоатационного значения, увеличивая, таким образом, непрерывно противодавление на обнаженный забой песчаника, пока на скважине не будет достигнуто состояние равновесия (М. Маскет, A. I. M. E., 103, 44, 1937). Таким образом, если A — действительное поперечное сечение ствола скважины, h_w — высота уровня жидкости над кровлей обнаженного продуктивного песчаника, γ_0 — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести, p_e — давление резервуара, h — мощность песчаника, а p_w, μ и r_e имеют свои обычные значения, то, допуская мгновенные условия стационарного течения, получаем непосредственно из выражения:

$$A = \frac{\partial h_w}{\partial t} = \frac{2\pi k h\,(p_e - p_w)}{\mu \ln r_e/r_w}, \qquad p_w = \gamma_0 g h_w$$

с решениями

$$\frac{h_e - h_w}{h_e - h_i} = \frac{p_e - p_w}{p_e - p_{wi}} = e^{-Ct}; \qquad C = \frac{2\pi k h \gamma_0 g}{\mu A \ln r_e/r_w},$$

где p_{wi}, h_i — начальные давления на скважине и столбы жидкости и h_e — столб жидкости, эквивалентный давлению резервуара p_e. Если построение этого уравнения на полулогарифмической бумаге дает прямую линию и, таким образом, подтверждает допущение о течении „инертной“ жидкости в системе, что является основой всего вывода, то наклон этой прямой линии даст постоянную C, а отсюда и возможность определения проницаемости песчаника k. В то же самое время выравнивание константы p_e таким образом, чтобы построение указанной зависимости давало прямую линию, обеспечивает весьма чувствительный метод определения давления в резервуаре, не дожидаясь установления полного равновесия на скважине. При этом определение самой константы C позволяет устанавливать заранее максимальную эксплоатационную производительность скважины.

Следуя аналитической процедуре гл. X, п. 3, синтезируем решение, удовлетворяющее одновременно всем условиям уравнения (1) из более простых решений (γ_1, γ_2, γ_3), которые удовлетворяют условиям:

$$\left.\begin{aligned} (\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3) &= (1,\ 0,\ 0); \quad r = r_1 \\ r_2 \frac{\partial}{\partial r}(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3) &= (0,\ 1,\ 0); \quad r = r_2 \\ (\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3) &= [0,\ 0,\ g(r)]; \quad t = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Тогда аналогично уравнению (3), гл. X, п. 3, можно написать окончательное решение, удовлетворяющее уравнению (1), например:

$$\gamma = \gamma_3(r, t) + \int_0^t \left[f_1(\lambda) \frac{\partial \gamma_1(r,\ t-\lambda)}{\partial t} + f_2(\lambda) \frac{\partial \gamma_2(r,\ t-\lambda)}{\partial t} \right] d\lambda. \tag{3}$$

Теперь введем новую функцию:

$$U(\alpha_n r) = Y_1(\alpha_n r_2) J_0(\alpha_n r) - J_1(\alpha_n r_2) Y_0(\alpha_n r), \tag{4}$$

так что

$$U'(\alpha_n r_2) = 0, \tag{5}$$

и выберем α_n так, чтобы

$$U(\alpha_n r_1) = 0. \tag{6}$$

Тогда, вновь прилагая уравнение (8) к (11), гл. X, п. 2, можно показать, что значения γ_1, γ_2, γ_3 даются следующими разложениями:

$$\gamma_1 = 1 + \pi \sum \frac{J_0(\alpha_n r_1) J_1(\alpha_n r_2) U(\alpha_n r) e^{-\kappa \alpha_n^2 t}}{J_0^2(\alpha_n r_1) - J_1^2(\alpha_n r_2)}, \tag{7}$$

$$\gamma_2 = \ln \frac{r}{r_1} + \frac{\pi}{r_2} \sum \frac{J_0^2(\alpha_n r_1) U(\alpha_n r)\, e^{-\kappa \alpha_n^2 t}}{\alpha_n \left[J_0^2(\alpha_n r_1) - J_1^2(\alpha_n r_2) \right]}, \tag{8}$$

$$\gamma_3 = \frac{\pi^2}{2} \sum \frac{\alpha_n^2 J_0^2(\alpha_n r_1) U(\alpha_n r) e^{-\kappa \alpha_n^2 t}}{J_0^2(\alpha_n r_1) - J_1^2(\alpha_n r_2)} \int_{r_1}^{r_2} r g(r) U(\alpha_n r)\, dr. \tag{9}$$

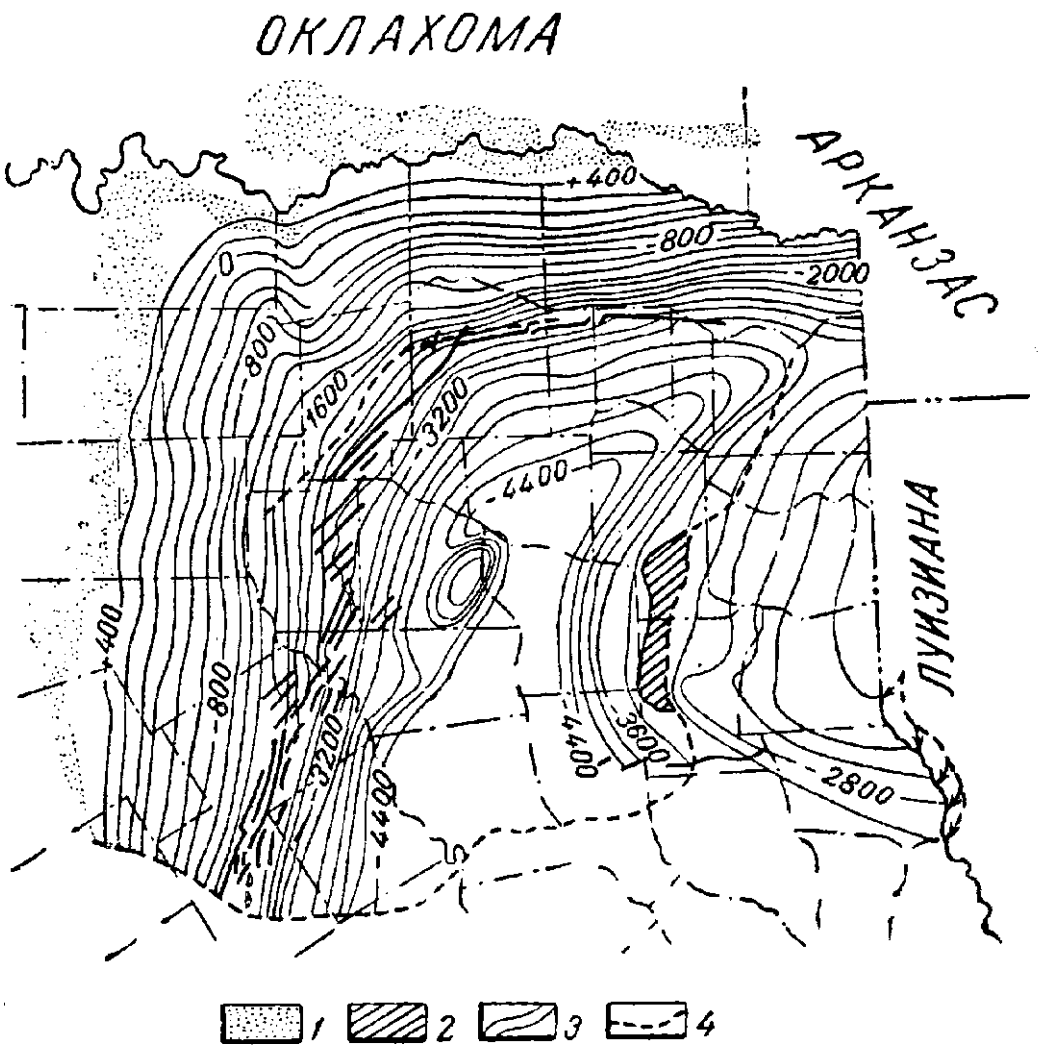
Тогда согласно уравнению (3) имеем окончательное решение:

$$\gamma = \pi \sum \frac{\alpha_n^2 J_0(\alpha_n r_1) U(\alpha_n r) e^{-\kappa \alpha_n^2 t}}{J_0^2(\alpha_n r_1) - J_1^2(\alpha_n r_2)} \left[\frac{\pi}{2} J_0(\alpha_n r_1) \int_{r_1}^{r_2} r g(r) U(\alpha_n r)\, dr - \right.$$

$$\left. - \kappa J_1(\alpha_n r_2) \int_0^t f_1(\lambda) e^{\kappa \alpha_n^2 \lambda}\, d\lambda - \kappa \frac{J_0(\alpha_n r_1)}{\alpha_n r_2} \int_0^t f_2(\lambda) e^{\kappa \alpha_n^2 \lambda}\, d\lambda \right]. \tag{10}$$

8. Падение давления в нефтяном месторождении Ист-Техсас. Наиболее интересным случаем практического приложения теории течения однородных жидкостей в пористой среде и, в частности, неустановившегося течения жидкостей является использование уравнения (10), гл. X, п. 7, к решению вопроса о падении давления в нефтяном место-

рождении Ист-Тексас. Первоначальное давление резервуара в месторождении было 110,12 *am*. Исследования образцов нефти с забоя показали что она насыщена [1] газом только до давления 51,35 *am*. Очевидно, до тех пор, пока давление в пласте не упадет ниже 51,35 *am*, в нем не будет свободного выделения газа, и нефть по необходимости будет перемещаться как однородная „инертная" жидкость. Для того чтобы пористая среда, несущая однородную жидкость, сбрасывала последнюю



Фиг. 251. Структурная карта по кровле песчаника Вудбайн в северо-восточном Тексасе (по Шилзиусу и Херсту).

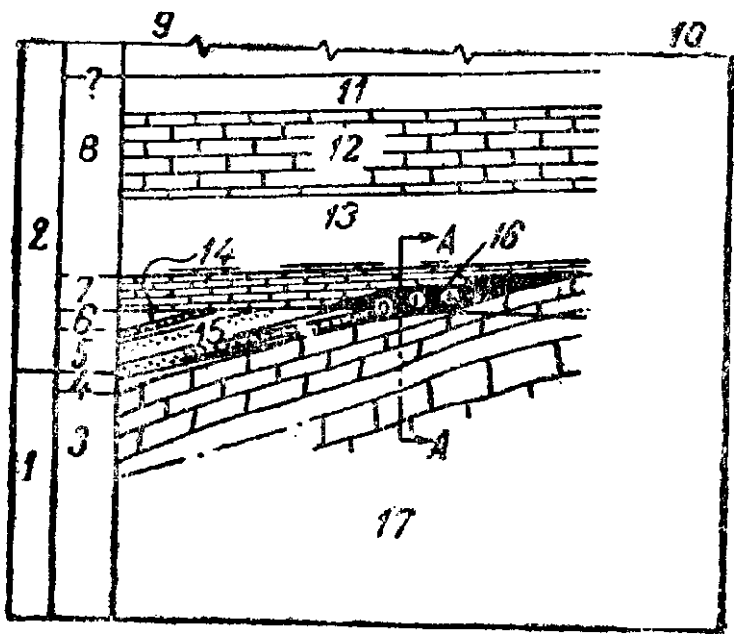
1 — выходы песчаника Вудбайн; *2* — месторождение Ист-Тексас; *3* — контуры на поверхности у Джорджтаун; *4* — приближенное выклинивание песчаника Вудбайн.

в эксплоатационные скважины, необходимо, чтобы сама жидкость расширялась при снижении пластового давления или чтобы она перемещалась в эксплоатационные скважины с помощью какого-либо внешнего рабочего агента. Проведенные в месторождении Ист-Тексас наблюдения показали, что давление в резервуаре упало приблизительно на 25,5 *am* в процессе отбора 71,4 млн. *m* нефти. Замеренное содержание жидкости в месторождении составляет $0{,}158 \times 7 \times 10^9$ $м^3$. Если отнести всю добытую из месторождения нефть к расширению жидкости в пределах самого месторождения, видно, что жидкость, содержащаяся в пласте, должна иметь сжимаемость 0,0028/*am*, что в 20 раз больше по сравнению с фактическими замерами нефти из месторождения Ист-Тексас с растворенным в ней газом [2]. Теоретическое исследование, которое приведено ниже, требует допущения ненормально высокой сжимаемости

[1] Lindsly B. E., U. S. Bur. Mines. Rept. Investigations, 3212, 1933.
[2] Там же.

(фактор —12) жидкости в пределах примыкающего водоносного песчаника. В то же самое время представляется не возможным оправдать высокие коэфициенты сжимаемости и для нефти внутри месторождения, так как известно, что нефть в последнем недонасыщена газом и потому не в состоянии пропустить сквозь себя или диспергировать массы свободного газа в любом количестве.

Поэтому необходимо допустить, что нефть перемещается в эксплоатационные скважины с помощью внешнего движущего агента или напора. Как это можно видеть из карты (фиг. 251), предположение наше подтверждается тем обстоятельством, что западный край месторождения, которое приурочено к песчанику Вудбайн, фланкируется водоносным песчаником, распространяющимся к западу более чем на 160 *км* прежде, чем он выходит на дневную поверхность. На фиг. 252 приведен вертикальный разрез через месторождение с востока на запад. Отсюда вполне естественно отнести добычу нефти из месторождения за счет перемещения краевой воды в песчанике Вудбайн, которая расширяется со снижением давления в пласте. Действительно, рассматривая расширение огромнейших объемов воды в резервуаре, можно пренебречь расширением нефти внутри месторождения, ибо последнее в состоянии обеспечить добычу около 3 млн. *m* при падении давления на 20 *am*.



Фиг. 252. Разрез с востока на запад нефтяного месторождения Ист-Тексас (по Реистле):

1 — нижнемеловой; *2* — верхнемеловой; *3* — известняк Джорджтаун; *4* — глины Дельрио; *5* — Вудбайн; *6* — Игльфорд; *7* — Остин; *8* — Тейлор; *9* — запад; *10* — восток; *11* — мелкозернистые пески с гравием мергеля, известковистые пески — 600 *м*; *12*—мел; *13*—зеленовато-серые глауконитовые глины; *14*— несогласие — 900 *м*; *15* — вода; *16* — нефть — 1000 *м*; *17* — разрез *A*—*A*; эксплоатационный песчаник имеет в этой точке мощность 18—30 *м*.

Все эксплоатационные скважины в пределах месторождения можно свести воедино в эквивалентную единичную большую скважину с расходом, равным сумме расходов индивидуальных скважин. В частности, месторождение будет заменено дугой в 120° вдоль кругового стока или скважиной с радиусом 32 160 *м*. Кроме того, сделаем допущение, что на контуре с радиусом 160 800 *м* давление поддерживается с первоначальным значением, а именно 110,12 *am*. Пласт песчаника между этими двумя контурами имеет среднюю мощность 39,65 *м* [1]. Аналитические условия можно выразить так:

$$\left.\begin{aligned} &\gamma = \gamma_e = \gamma_i; \quad (p_e = p_i); \quad r = r_e\,(r_i) = 160\,800 \ м \\ &\gamma = g\,(r) = \gamma_i; \quad (p = p_i); \quad t = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

[1] Разумеется, эти значения весьма идеализированы. Вместе с тем они являются действительными средними данными, полученными из подробных анализов разрезов скважин из водяного резервуара, примыкающего к месторождению Ист-Тексас.

Если оба эти условия приложить к уравнению (10), гл. X, п. 7, разница в плотности между двумя контурами примет вид:

$$\Delta\gamma = \gamma_i - \gamma_w = -\frac{2\kappa}{r_w^2}\sum \frac{J_0^2(a_n r_e)\, e^{-\kappa a_n^2 t}}{J_0^2(a_n r_e) - J_1^2(a_n r_w)} \int_0^t f_2(\lambda)\, e^{\kappa a_n^2 \lambda}\, d\lambda, \qquad (2)$$

где $f_2(t)$ пропорциональна текущему дебиту из месторождения во времени t. В целом текущий дебит следует рассматривать как функцию, сложенную непрерывно изменяющимися величинами. Для практических целей достаточно принять $f_2(t)$, сложенную величинами, имеющими постоянное значение в течение конечных отрезков времени.

Это можно выразить следующими равенствами:

$$\left.\begin{aligned} f_2(t) &= r_w\left(\frac{\partial\gamma}{\partial r}\right) r_w = a : 0 \leqslant t \leqslant t_1 \\ f_2(t) &= b: \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \\ f_2(t) &= c: \qquad t_2 \leqslant t \leqslant t_3 \text{ и т. д.} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Вводя безразмерное обозначение уравнения (9), гл. X, п. 4, и функцию $F(\bar{t})$, определяемую из

$$F(\bar{t}) = 2\sum \frac{J_0^2(x_n\varrho)\, e^{-x_n^2 t}}{x_n^2\left[J_0^2(x_n\varrho) - J_1^2(x_n)\right]}, \qquad (4)$$

можно написать более точное уравнение (2), например:

$$\left.\begin{aligned} 0 \leqslant \bar{t} \leqslant \bar{t}_1&: \ \Delta\gamma = a\ln\varrho + aF(\bar{t}), \\ \bar{t}_1 \leqslant \bar{t} \leqslant \bar{t}_2&: \ \Delta\gamma = b\ln\varrho + aF(\bar{t}) + (b-a)F(\bar{t}-\bar{t}_1), \\ \bar{t}_2 \leqslant \bar{t} \leqslant \bar{t}_3&: \ \Delta\gamma = c\ln\varrho + aF(\bar{t}) + (b-a)F(\bar{t}-\bar{t}_1) + \\ &\quad + (c-b)F(\bar{t}-\bar{t}_2) \text{ и т. д.} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Чтобы получить числовые значения $\Delta\gamma$, необходимо подобрать особые величины для различных физических констант системы, например,

$$\left.\begin{aligned} \kappa/\mu = 2{,}12; \quad f = 0{,}2; \\ \beta = 5{,}3\times 10^{-4}/am; \ r_w = 32\,160 \ м; \ r_e = 160\,800 \ м, \end{aligned}\right\} \qquad (6)^1$$

так, что $\varrho = 5$; $\bar{t} = 1{,}6686\times 10^{-4}\bar{t}$ суток. Замечая теперь, что

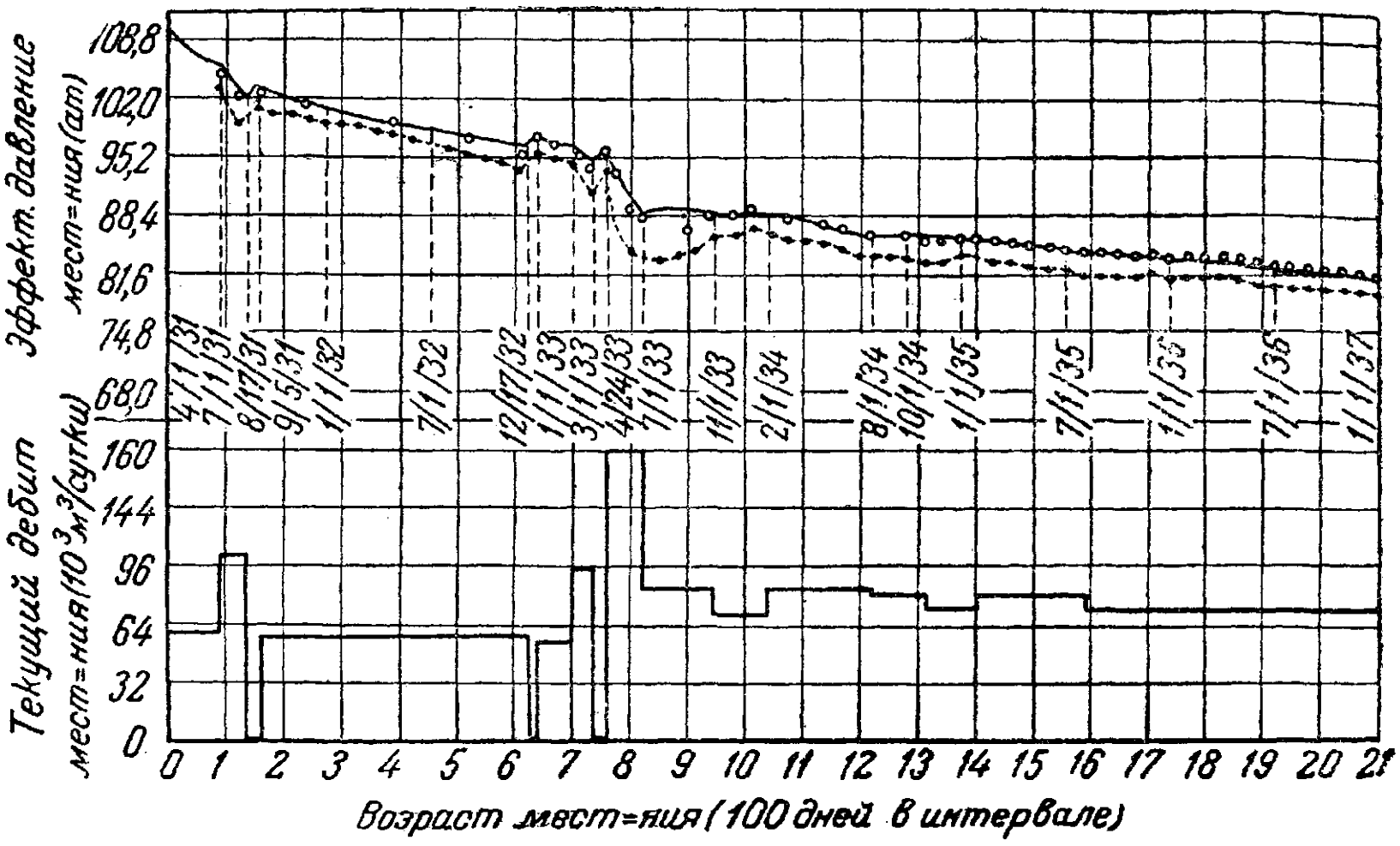
$$\Delta\gamma \cong \gamma_0\varrho\Delta p; \quad a = r_w\left(\frac{\partial\gamma}{\partial r}\right)_{r_w} = \frac{\mu\beta Q}{2\pi\kappa h}, \qquad (7)$$

где h — мощность водяного песчаника (39,65 $м$) и Q — расход, который будет поступать в месторождение, если оно представлено дугой, стяги-

[1] Значение κ/μ, которое принято в данном случае, было получено как среднее значение из величины проницаемости кернов со скважин месторождения Ист-Техсас в сочетании с подсчитанной абсолютной вязкостью воды из песчаника Вудбайн. При этом была принята в расчет ее возможная температура на глубине залегания песчаника.

вающей угол 2π, можно применить уравнение (5) для непосредственного подсчета падения давления в месторождении как функции текущих дебитов a, b и т. д. После нахождения корней уравнения (6), гл. X, п. 7, для $\varrho = 5$, функцию $F(\bar{t})$ можно подсчитать из (4).

На фиг. 253 и 254 дается построение падения давления по отношению к возрасту месторождения и совокупной добыче, подсчитанной с помощью этих уравнений [1]. Взятые для построения эксплоатационные



Фиг. 253. Падение давления в нефтяном месторождении Ист-Тексас.

Сплошные линии — подсчитанные действительные давления; пунктирные линии — наблюденные средние давления; кружочки — наблюденные давления, скорректированные для градиента восток—запад (0,476 *ат*) / (15 800 *м³/сутки*). Нижняя кривая дает средние текущие дебиты по месторождению.

данные являются среднемесячной добычей, опубликованной в нефтяной торгово-промышленной периодике. Они показаны на фигурах нижними прерывистыми кривыми (графиком).

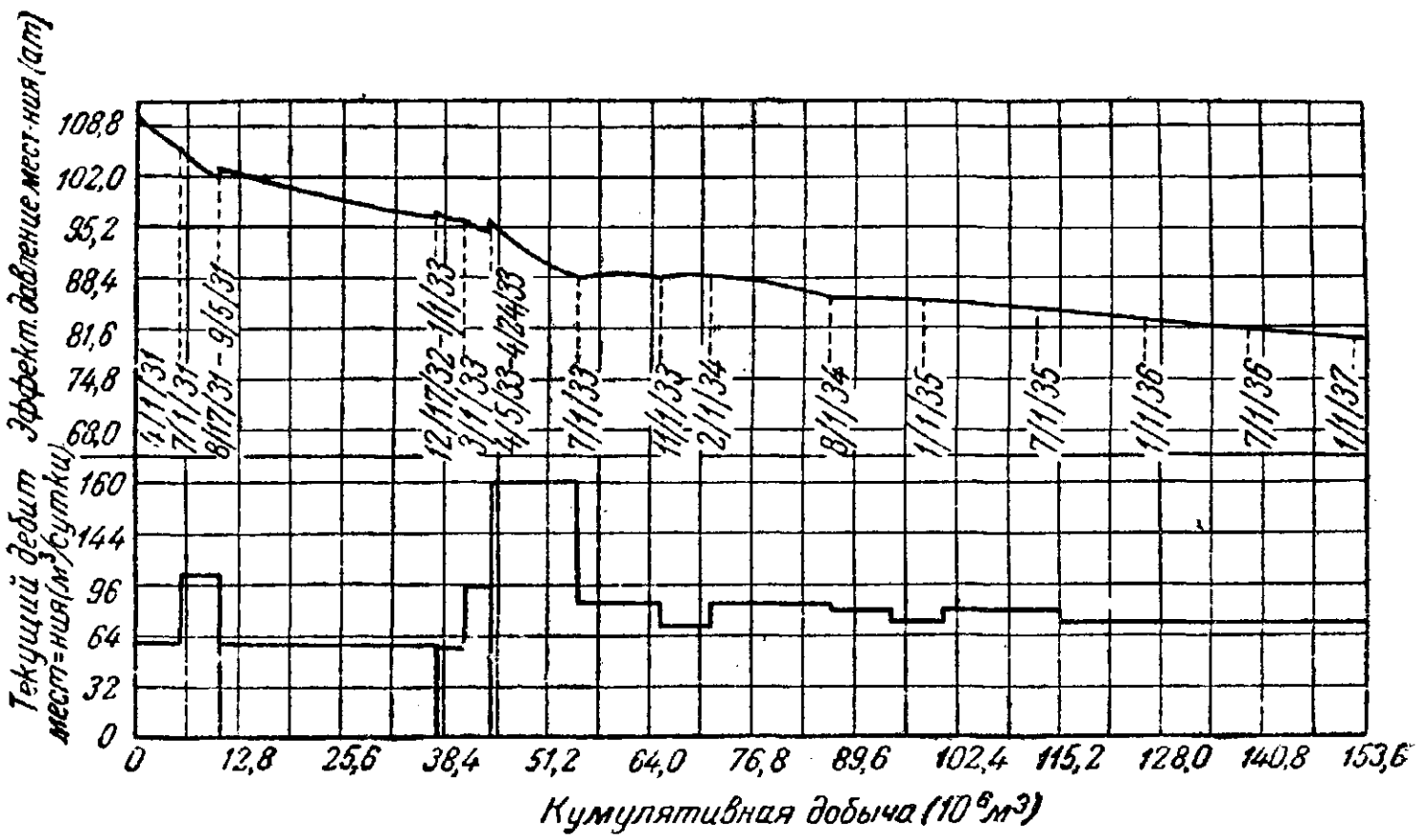
Раньше чем прикладывать уравнение (7), эти эксплоатационные данные следует умножить на 1,18, чтобы принять в расчет усадку нефти от ее первоначального объема в пределах песчаника до замеренного на поверхности, когда из нефти выделился растворенный в ней газ.

Следует заметить, что давления, подсчитанные в настоящем случае, должны рассматриваться как эффективные давления месторождения

---

[1] Совокупная добыча, показанная на фиг. 254 на 1/I 1937 г., на 7,14 млн. *т* меньше того значения, которое принимается обычно в настоящее время. Этот разрыв возник из изменений, которые были установлены уже после того, как было сделано построение кривых на фиг. 253 и 254, на основании подсчетов фактического отбора нефти из месторождения на раннем этапе его разработки. Следует отметить также, что настоящие расчеты и построение кривых были произведены летом 1934 г. и было принято, что текущий дебит месторождения после 1/VIII 1934 г. останется на уровне 64,3 тыс. *т*. Фактический же отбор оказался соответствующим приблизительно тем данным, что показаны на нижней половине фиг. 253 и 254.

в связи с тем обстоятельством, что все месторождение, которое занимает в ширину от 6,4 до 9,6 *км*, сведено воедино в круговой источник, сконцентрированный по 120° дуге окружности, имеющей радиус 32 160 *м*. Отдельные стороны фактического распределения расхода в пределах любого кругового контура и проходящего через последний не влияют на изменение давления самого контура или среды, находящейся вне последнего. Это возможно при условии, что изменения расхода во времени остаются одинаковыми с ранее намеченными. Однако теоретически подсчитанные давления можно сравнивать только с наблюденными в непосредственной близости к контуру.



Фиг. 254. Теоретическое падение действительного давления нефтяного месторождения Ист-Тексас по отношению к кумулятивной добыче из месторождения.

Так как восточный склон месторождения Ист-Тексаса получает свою добычу в силу миграции нефти с запада, которая при этом перемещается через все месторождение, то давления, которые наблюдаются внутри последнего, будут уменьшаться, переходя от запада к востоку. В дополнение к градиенту давления через месторождение, связанное с миграцией жидкости с запада на восток, будет иметь место также градиент давления, связанный с тем обстоятельством, что продуктивный песчаник месторождения представляет собой моноклиналь, которая выклинивается по направлению к востоку (фиг. 252). Поэтому в целом действительное сопротивление песчаника по отношению к миграции возрастает по направлению к востоку. Отсюда следует, что подсчитанные давления будут соответствовать только тем величинам последнего,

[1] Эффективный внутренний контур, представляющий собой месторождение, нельзя поместить где-либо внутри последнего, ибо такая система повлечет за собой удаление некоторого количества жидкости в песчанике между обоими контурами на радиусах 32 160 и 160 800 *м*. Теория же, принятая в настоящей работе, налагает полностью условие, чтобы жидкость не уходила из песчаника, пока он не пройдет через внутренний контур.

что наблюдаются на западном склоне месторождения [1]. Они будут гораздо выше давлений, которые усреднены по всему месторождению, но которые повсеместно считаются давлением в месторождении. Когда происходят изменения в темпе отбора, восточный склон месторождения показывает более отчетливое изменение давления по сравнению с западным склоном, так что средние давления, взятые по всему месторождению, покажут большие колебания по сравнению с подсчитанными теоретически.

Это повлечет за собой необходимость иметь отрезок переходного времени для установления и выравнивания распределения давления по всему месторождению, соответствующего изменению суммарного текущего дебита на западной границе, что также не было принято в расчет при построении вышеуказанной теоретической кривой. Наконец, следует заметить, что точные промысловые текущие дебиты неизвестны в основном благодаря тому обстоятельству, что значительное количество нефти было добыто нелегально, в нарушение правил ограниченного отбора со скважин, и потому официально не значится в рапортах. Эта скрытая нефть на указанном месторождении была добыта в различных количествах и в различное время. Данные, которые были приняты для наших кривых, собраны из рапортов, опубликованных в торгово-промышленных журналах, и являются, повидимому, наиболее обоснованными, хотя весьма затруднительно определить совершенно точно их правильность. По этой причине теоретически продиктованная кривая падения давления не совпадает и не следует ожидать от нее, чтобы она полностью совпала с данными падения давления, значащимися по рапортам.

Падение давления, которое дается ломаной линией на фиг. 253, представляет собой усредненные данные, отнесенные ко всему месторождению. Вместе с тем совпадение в пределах 3,4 *ат* большинства точек графического изображения жизни месторождения и близкий параллелизм между подсчитанными и наблюденными давлениями имеет очень большое значение и полностью подтверждает правильность развитой нами теории. Однако для практических целей в значении средних давлений, которые ожидаются для месторождения в будущем, необходимо внести небольшое исправление, вытекающее из рассмотренного выше явления. Допустим, что распределение давления по всему месторождению имеет в основном линейный характер в согласии с суммарным перепадом давления с запада на восток, пропорциональным текущему дебиту месторождения[1]. Тогда предсказанные давления на западном крае должны равняться наблюденным средним давлениям плюс половина перепада давления через месторождение в направлении запад—восток. Примем за среднюю величину разностей, показанных на полевых картах контуров давления, суммарный перепад 0,48 *ат* на 14,3 тыс. *м* нефти.

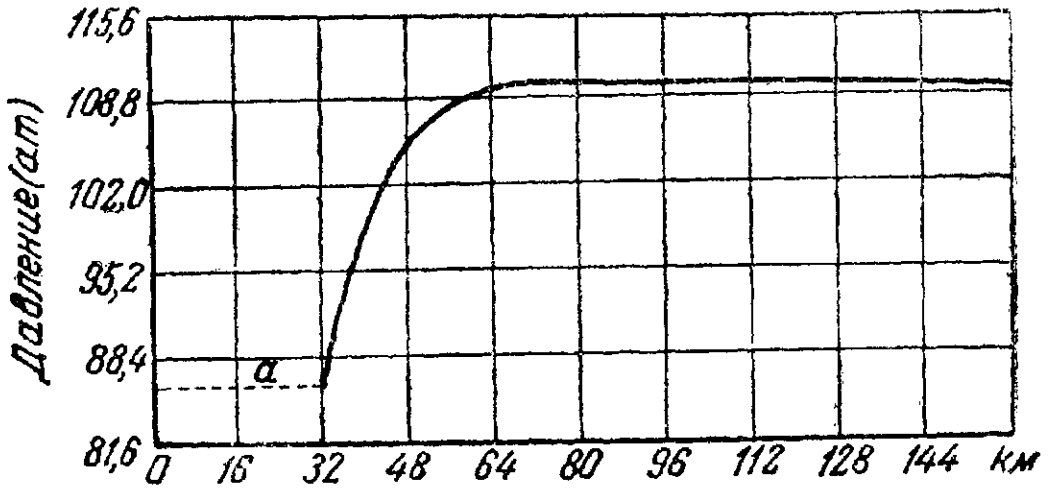
Наблюденные данные с внесенными в них исправлениями показаны

---

[1] В действительности это линейное изменение можно вывести теоретическим путем, если допустить скорость через вертикальное сечение песчаника постоянной и добычу из месторождения равномерно распределенной по всей ее ширине.

кружками на фиг. 253. При этом совпадение получается настолько полным, насколько это можно только вообще пожелать.

Следует заметить, что полученное совпадение достигается исключительно расчетом, который включает в себя единственную по существу произвольную константу — сжимаемость. Значение последней выбирается таким образом, чтобы эффективное давление месторождения, подсчитанное на 1/IV 1933 г., совпадало приблизительно с величиной давления, которое наблюдалось в это время вдоль западного края месторождения. Величина сжимаемости в 12 раз больше по сравнению со свободной от газа водой и в действительности является ненормально высокой. Эту цифру можно объяснить, допуская,



Фиг. 255. Подсчитанное распределение радиального давления на 1 июля 1934 г. в водном подземном резервуаре, примыкающем к нефтяному месторождению Ист-Техсас. Радиальное расстояние от центра дуги 32 *км*, представляющей собой месторождение Ист-Техсас.

что весь водяной горизонт пронизан газовыми карманами, общая величина которых достигает 4,9% всего объема порового пространства песчаника [уравнение (6), гл. X, п. 1].

Хотя в настоящее время нет подтверждения ни за, ни против такого объяснения, следует отметить, что оно кажется вполне возможным в свете того обстоятельства, что существуют другие известные нефтяные месторождения в песчанике Вудбайн к западу от месторождения Ист-Техсас.

Поэтому можно принять, что бассейн песчаника Вудбайн фактически содержит небольшие газовые месторождения, которые еще не были открыты бурением. На фиг. 255 приведено распределение давления в песчанике Вудбайн на 1/VII 1934 г., подсчитанное с помощью уравнения (10), гл. X, п. 7, совместно с уравнениями (1) и (3). Из фиг. 255 видно, что хотя из месторождения было взято 74,3 млн. *т* нефти, которая занимала в резервуаре объем 96,95 млн. $м^3$, давление в водяном резервуаре заметно упало только в пределах радиуса 32 160 *м* от месторождения. Можно считать, что вне пределов досягаемости этого радиуса первоначальное давление 110,12 *ат* является практически не затронутым. Хотя этот вывод на первый взгляд кажется удивительным, но элементарный расчет свободно показывает, что вся полученная добыча может быть подсчитана для равномерного падения давления в 20 *ат*,

распространяющегося всего на 14 150 *м* к западу от края месторождения.

Действительно, точная теория показывает, что такой грубый подсчет довольно близок к истине и что добыча до 1/VII 1934 г. была связана всецело с расширением воды в пределах относительно короткого расстояния от месторождения. Практически оказалось возможным совершенно пренебречь компонентом движения жидкости из отдельных частей разервуара. Распределение давления, которое приведено на фиг. 255, имеет интерес также с точки зрения показа, что для практических целей можно рассматривать песчаник Вудбайн в действительности бесконечным, каковым, возможно, будет и весь период разработки этого месторождения. Фактически такое состояние будет иметь место до тех пор, пока газовый режим, связанный с выделением газа в пределах песчаника, не достигнет значительной величины. Согласно приведенному элементарному подсчету видно, что если распространить падение давления на весь резервуар с радиусом 160 800 *м*, то за счет одного только расширения воды можно получить вытеснение жидкости из пласта на 1 *ат* среднего падения давления 91,64 млн. $м^3$.

9. Единичная скважина в замкнутом резервуаре. Хотя это и не имеет большого практического значения, но уравнение (10), гл. X, п. 7, можно применить для нахождения падения расхода по единичной скважине в замкнутом резервуаре. С этой целью мы выведем кратко соответствующие формулы, опустив численное рассмотрение задачи. Частный случай, разбираемый здесь, заключается в том, что расход на внешнем контуре $r = r_e$ равняется нулю, т. е. резервуар замкнут, а на радиусе внутреннего контура сохраняется фиксированное давление (плотность). Так как уравнение (10), гл. X, п. 7, справедливо для любой задачи, где расход установлен на одном из контуров, а плотность на другом, можно принять это уравнение и для настоящего случая, допуская следующие условия:

$$\left.\begin{aligned} r_2 &= r_e \text{ (радиус резервуара); } f_2(t) = 0 \\ r_1 &= r_w \text{ (радиус скважины); } f_1(t) = \gamma_w \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$g(r) = \gamma_i = \text{const.}$$

Тогда уравнение (10), гл. X, п. 7, принимает следующий вид:

$$\gamma = \gamma_w - \pi(\gamma_1 - \gamma_w) \sum \frac{J_o(\alpha_n r_w) J_1(\alpha_n r_e) U(\alpha_n r) e^{-k\alpha_n^2 t}}{J_o^2(\alpha_n r_w) - J_1^2(\alpha_n r_e)} \qquad (2)$$

при распределении плотности в пределах песчаника для любого времени t.

Падение плотности на внешнем контуре резервуара $\gamma(r_e)$ и падение расхода из скважины будут даны в обозначениях (9), гл. X, п. 4, следующими выражениями:

$$\gamma_e = \gamma_w + 2\,\frac{\gamma_i - \gamma_w}{\varrho} \sum \frac{J_o(x_n) J_1(x_n \varrho) e^{-x_n^2 t}}{x_n [J_0^2(x^n) - J_1^2(x_n \varrho)]} \qquad (3)$$

и

$$Q = \frac{4\pi kh\,(\gamma_i - \gamma_w)}{\mu\beta} \sum \frac{J_1^2(x_n\varrho)\, e^{-x_n^2 \bar{t}}}{J_0^2(x_n) - J_1^2(x_n\varrho)}\,, \tag{4}$$

где значения x_n определяются как корни уравнения

$$Y_1(x_n\varrho)\, J_0(x_n) - J_1(x_n\varrho)\, Y_0(x_n) = 0, \tag{5}$$

где ϱ имеет значение порядка 2000—3000.

10. Скважина с бесконечно малым радиусом. Когда точно установлен расход на скважине, имеющей обычные размеры, можно заменить скважину математическим стоком и, таким образом, упростить весь анализ. Представим себе эту задачу в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{r \to 0} \left(r\,\frac{\partial \gamma}{\partial r}\right) = f_w(t), \\ &\gamma = f_e(t); \qquad r = r_e \\ &\gamma = g(r); \qquad t = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Влияние стока можно представить одним логарифмическим членом в отношении r, так что функции Бесселя второго порядка, которые также изменяются логарифмически, могут быть отброшены при малых значениях r из ряда. Тогда общее решение можно легко получить из следующего выражения:

$$\gamma = \frac{2}{r_e^2} \sum \frac{J_0(\alpha_n r)\, e^{-\kappa\alpha_n^2 t}}{J_1^2(\alpha_n r_e)} \left[\int_0^{r_e} r g(r)\, J_0(\alpha_n r)\, dr - \right.$$

$$\left. - \kappa \int_0^t f_w(\lambda)\, e^{\kappa\alpha_n^2 \lambda}\, d\lambda + \kappa\alpha_n r_e J_1(\alpha_n r_e) \int_0^t f_e(\lambda)\, e^{\kappa\alpha_n^2 \lambda}\, d\lambda, \right. \tag{2}$$

где

$$J_0(\alpha_n r_e) = 0. \tag{3}$$

Для частного случая, где

$$f_w(t) = \text{const} = q_0; \quad f_e(t) = \text{const} = \gamma_i; \quad g(r) = \text{const} = \gamma_i,$$

уравнение (2) приводится к виду:

$$\gamma = \gamma_i + q_0 \ln \frac{r}{r_e} + \frac{2q_0}{r_e^2} \sum \frac{J_0(\alpha_n r)\, e^{-\kappa\alpha_n^2 t}}{\alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n r_e)}\,. \tag{4}$$

Хотя корни уравнения (3) можно легко установить из соответствующих таблиц, рассматриваемый случай не имеет большой практической ценности, а потому не будет рассматриваться здесь численно.

11. Радиальные системы с заданными расходами на обоих границах. Последний тип проблемы радиального течения, который мы будем здесь рассматривать, заключается в том, что величина отбора

(норма расхода) задана на обоих контурах системы. В общем виде это можно определить следующими условиями:

$$\left.\begin{aligned} r\,\frac{\partial\gamma}{\partial r} &= f_1(t); \quad r = r_1 \\ r\,\frac{\partial\gamma}{\partial r} &= f_2(t); \quad r = r_2 \\ r\,\frac{\partial\gamma}{\partial r} &= \gamma = g(r);\ t = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Явится удобным сделать сначала вывод предварительных и более простых решений, соответствующих постоянным граничным условиям. Так, выражая через члены решений γ_1, γ_2, γ_3, удовлетворяющих условиям:

$$\left.\begin{aligned} r\,\frac{\partial}{\partial r}(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3) &= (1,\ 0,\ 0); && r = r_1 \\ r\,\frac{\partial}{\partial r}(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3) &= (0,\ 1,\ 0); && r = r_2 \\ (\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3) &= [0,\ 0,\ g(r)]; && t = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

что соответствует уравнению (1), получим решение из выражения

$$\gamma = \gamma_3(r,\ t) + \int_0^t \left[f_1(\lambda)\,\frac{\partial\gamma_1(r,\ t-\lambda)}{\partial t} + f_2(\lambda)\,\frac{\partial\gamma_2(r,\ t-\lambda)}{\partial t}\right] d\lambda. \tag{3}$$

Для разложения бесселевой функции будут взяты те же самые формы для $U(\alpha_n r)$, что и в уравнении (4), гл. X, п. 7, с условием, чтобы α_n являлись скорее корнями уравнения

$$U'(\alpha_n r_1) = 0, \tag{4}$$

чем корнями уравнения (6), гл. X, п. 7. Применяя это определение и прилагая уравнение (8), гл. X, п. 2, к (11) для того, чтобы еще раз можно было найти коэфициенты разложения, получим их значения:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 = &-\frac{(r^2+4\varkappa t)}{2\,(r_2^2-r_1^2)} + \frac{r_2^2}{r_2^2-r_1^2}\,\ln r + \frac{1}{(r_2^2-r_1^2)^2}\times \\ &\times\left[\frac{(r_2^2-r_1^2)\,(r_1^2+3r_2^2)}{4} + r_2^2\,(r_1^2\ln r_1 - r_2^2\ln r_2)\right] - \\ &-\frac{\pi}{r_1}\sum\frac{J_1(\alpha_n r_1)\,J_1(\alpha_n r_2)\,U(\alpha_n r)\,e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}}{\alpha_n\,[J_1^2(\alpha_n r_1) - J_1^2(\alpha_n r_2)]}; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

[1]

[1] Постоянные члены в уравнениях (5)—(8) и (2) до (6) гл. X, п. 12, входят сюда вследствие исчезающе малых значений $U'(\alpha r)$ на обоих контурах. Для уравнений (2) — (6), гл. X, п. 12, разложения относятся к ряду Дини. Они обращаются в постоянный член для бесселевых функций нулевого порядка, когда производные на предельном радиусе обращаются в нуль. Уравнения (5)–(8) являются обобщением разложения ряда Дини и принимают вид постоянных членов, когда производные бесселевых функций становятся равными нулю на обоих контурах. Это явление аналогично введению постоянного члена в разложения ряда Фурье (см. гл. IV, п. 3 и работу Уотсона „Theory of Bessel Functions“, стр. 597).

$$\left.\begin{aligned}\gamma_2 = {} & \frac{(r^2+4\varkappa t)}{2\,(r_2^2-r_1^2)} - \frac{r_1^2}{r_2^2-r_1^2}\ln r + \frac{1}{(r_2^2-r_1^2)^2}\times \\ & \times\left[\frac{(r_1^2-r_2^2)\,(r_2^2-3r_1^2)}{4} + r_1^2\,(r_2^2\ln r_2 - r_1^2\ln r_1)\right] + \\ & + \frac{\pi}{r_2}\sum \frac{J_1^2(\alpha_n r_1)\,U(\alpha_n r)\,e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}}{\alpha_n\,[J_1^2(\alpha_n r_1) - J_1^2(\alpha_n r_2)]}\,;\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned}\gamma_3 = {} & \frac{2}{(r_2^2-r_1^2)}\int_{r_1}^{r_2} rg(r)\,dr + \\ & + \frac{\pi^2}{2}\sum \frac{\alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n r_1)\,U(\alpha_n r)\,e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}}{J_1^2(\alpha_n r_1) - J_1^2(\alpha_n r_2)}\int_{r_1}^{r_2} rg(r)\,U(\alpha_n r)\,dr,\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

так что окончательно

$$\left.\begin{aligned}\gamma = {} & \frac{2\varkappa}{r_2^2-r_1^2}\int_0^t [f_2(\lambda) - f_1(\lambda)]\,d\lambda + \frac{2}{(r_2^2-r_1^2)}\int_{r_1}^{r_2} rg(r)\,dr + \\ & + \pi\sum \frac{\alpha_n^2 J_1(\alpha_n r_1)\,U(\alpha_n r)\,e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}}{J_1^2(\alpha_n r_1) - J_1^2(\alpha_n r_2)}\left[\frac{\pi}{2}\,J_1(\alpha_n r_1)\int_{r_1}^{r_2} rg(r)\,U(\alpha_n r)\,dr + \right. \\ & \left. + \varkappa\,\frac{J_1(\alpha_n r_2)}{\alpha_n r_1}\int_0^t f_1(\lambda)\,e^{\varkappa\alpha_n^2\lambda}\,d\lambda - \varkappa\,\frac{J_1(\alpha_n r_1)}{\alpha_n r_2}\int_0^t f_2(\lambda)\,e^{\varkappa\alpha_n^2\lambda}\,d\lambda\right].\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

12. Предельный случай исчезающе малого внутреннего радиуса. Уравнение (8), гл. X, п. 11, можно приложить для решения задачи падения давления в месторождении, где добывается артезианская вода, или же в нефтяном месторождении с гидравлическим режимом, где известен или допускается некоторый расход в водяной резервуар, связанный, например, с выпадением атмосферных осадков. Большой практический интерес представляет собой случай, где пласт песчаника раскрыт на внешнем контуре, а внутренний контур представляет собой обычную скважину, радиус которой невелик по сравнению с внешним контуром. В данном случае скважину снова можно заменить математическим стоком, а для более общего случая, где расход на внешнем контуре не принимается равным нулю, т. е. где

$$\lim_{r\to 0}\left(r\,\frac{\partial\gamma}{\partial r}\right) = f_w(t):\left(r\,\frac{\partial\gamma}{\partial r}\right)_{r_e} = f_e(t);\ \gamma = g(r):\ t=0, \quad (1)$$

функции γ_1, γ_2, γ_3 принимают вид:

$$\gamma_1 = \frac{3}{4} - \frac{(r^2+4\varkappa t)}{2r_e^2} + \ln\frac{r}{r_e} + \frac{2}{r_e^2}\sum \frac{J_0(\alpha_n r)\,e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}}{\alpha_n^2 J_0^2(\alpha_n r_e)}\,; \quad (2)$$

$$\gamma_2 = -\frac{1}{4} + \frac{r^2+4\varkappa t}{2r_e^2} - \frac{2}{r_e^2}\sum \frac{J_0(\alpha_n r)\,e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}}{\alpha_n^2 J_0(\alpha_n r_e)}\,, \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}\gamma_3 &= \frac{2}{r_e^2}\int_0^{r_e} rg(r)\,dr + \\ &+ \frac{2}{r_e^2}\sum \frac{J_0(\alpha_n r)\,e^{-\kappa\alpha_n^2 t}}{J_0^2(\alpha_n r_e)}\int_0^{r_e} rg(r)\,J_0(\alpha_n r)\,dr,\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где

$$J_1(\alpha_n r_e) = 0, \tag{5}$$

так что

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{2\kappa}{r_e^2}\int_0^t [f_e(\lambda) - f_w(\lambda)]\,d\lambda + \\ &+ \frac{2}{r_e^2}\int_0^{r_e} rg(r)\,dr + \frac{2}{r_e^2}\sum \frac{J_0(\alpha_n r)\,e^{-\kappa\alpha_n^2 t}}{J_0^2(\alpha_n r_e)} \times \\ &\times\left[\int_0^{r_e} rg(r)\,J_0(\alpha_n r)\,dr - \kappa\int_0^t f_w(\lambda)\,e^{\kappa\alpha_n^2\lambda}\,d\lambda + \right. \\ &\left. + \kappa J_0(\alpha_n r_e)\int_0^t f_e(\lambda)\,e^{\kappa\alpha_n^2\lambda}\,d\lambda\right].\end{aligned} \tag{6}$$

13. Скважина в замкнутом песчанике. Если пласт песчаника замкнут ($f_e = 0$) и давление в нем, а отсюда и плотность были первоначально постоянными [$g(r) = \gamma_i$], уравнение (6), гл. X, п. 12, приводится к форме:

$$\begin{aligned}\gamma &= \gamma_i - \frac{2\kappa}{r_e^2}\left[\int_0^t f_w(\lambda)\,d\lambda + \right. \\ &\left. + \sum \frac{J_0(\alpha_n r)\,e^{-\kappa\alpha_n^2 t}}{J_0^2(\alpha_n r_e)}\int_0^t f_w(\lambda)\,e^{\kappa\alpha_n^2\lambda}\,d\lambda\right].\end{aligned} \tag{1}$$

Если теперь расход на скважине $f_w(t)$ имеет постоянное значение q, то γ дается выражением:

$$\begin{aligned}\gamma &= \gamma_i + q\left[\frac{3}{4} + \ln\bar{r} - \frac{1}{2}(\bar{r}^2 + 4\bar{t}) + \right. \\ &\left. + 2\sum \frac{J_0(x_n\bar{r})\,e^{-x_n^2\bar{t}}}{x_n^2 J_0^2(x_n)}\right],\end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\bar{r} = \frac{r}{r_e}\ ;\quad x_n = \alpha_n r_n;\quad \bar{t} = \frac{\kappa t}{r_e^2}\ . \tag{3}$$

Из этих уравнений ясно видно, без всяких численных выкладок, что уравнение (2) включает два различных типа неустановившегося времени. Первый тип, представленный рядом, исчезает экспоненциально по мере нарастания времени. Второй тип, представленный членом, линейным по отношению к $\bar{t}$, будет существовать неопределенно долго (так как принимается, что q будет поддерживаться бесконечно). Этот член определяет собой постоянный характер изменения плотности во времени, после того как первый переходный период получит пренебрежимо малую величину. Кроме того, линейный член не зависит от r, так что он не будет оказывать никакого отрицательного влияния на плотность, а отсюда и на распределение давления. Это означает, что градиенты плотности будут оставаться фиксированными, за исключением ряда, соответствующего переходному периоду. При этом абсолютное значение γ будет падать линейно с ростом времени.

Следует заметить, что с расчетной точки зрения ряд переходного времени обладает столь малой продолжительностью, что оно не имеет никакой ценности для практических целей. Принимая

$$\frac{k}{\mu} = 1; \quad f = 0{,}2; \quad \beta = 4{,}5 \times 10^{-4}\ am^{-1};$$

$$r_e = 152{,}25\ м, \tag{4}$$

так что

$$\bar{t} = 4{,}133\, t\ \text{(суток)},$$

и прилагая уравнение (2), можно получить падение давления на скважине ($r_w = 0{,}075\ м$) от его первоначального значения и для текущего дебита 0,53 $м^3/сутки/м$ песчаника из следующего выражения:

$$p_i - p_w = 0{,}06805 \cdot 0{,}1412 \left(6{,}8509 + 2\bar{t} - 2 \sum \frac{e^{-x_n^2 \bar{t}}}{x_n^2 J_0^2 (x_n)}\right), \tag{5}$$

где $J_0 (x_n \bar{r}_w)$ заменено через 1 вследствие малого значения $\bar{r}_w$ ($^1/_{2000}$), а $p_i - p_w$ имеет размерность $кг/см^2$.

Для падения давления на внешнем контуре песчаника $r = r_e$ ($r - 1$), уравнение (2) принимает вид:

$$p_i - p_w = 0{,}06805 \times$$

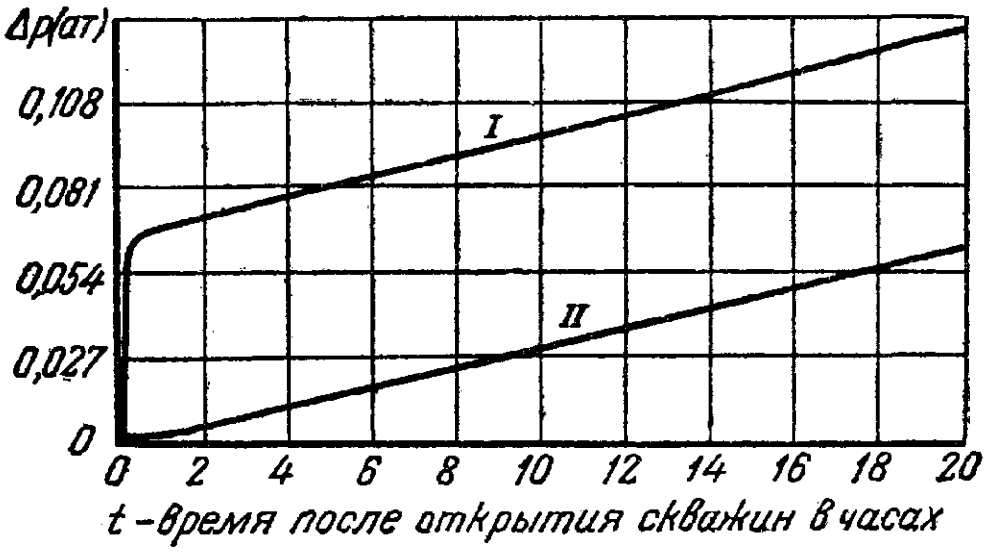
$$\times\, 0{,}1412 \left(-0{,}25 + 2\bar{t} - 2 \sum \frac{e^{-x_n^2 \bar{t}}}{x_n^2 J_0 (x_n)}\right). \tag{6}$$

На фиг. 256 приведено построение уравнений (5) и (6). Вследствие весьма короткой продолжительности переходного времени шкала последнего принимается в часах.

---

[1] В данном случае сжимаемость принимается настолько высокой, чтобы получить явление, которое можно рассматривать как верхний предел продолжительности переходного периода в системах единичной скважины, имеющих сравнительно умеренные размеры. Для жидкости с нормальным коэфициентом сжимаемости этот переходный период будет, повидимому, иметь еще меньшую продолжительность.

Как это видно из полученных кривых, после часового интервала система устанавливается и приходит к действительно стационарному дренированию пласта скважиной, а отсюда и к равномерному падению давления по всему резервуару. При этом все время поддерживается разность давления 0,068 *ат* между границей резервуара и скважиной. Вполне понятно, что следует ожидать на кривых с самого начала очень быстрого падения давления у скважин и отставания в падении у внешнего контура. Ясно, что распределение давления после начального переходного интервала не является строго установившимся распределением. Однако логарифмический член, характеризующий установившееся состояние, занимает преобладающее место повсюду в системе, за



Фиг. 256. Падение давления, связанное с единичной скважиной, расположенной в центре замкнутого резервуара, из которой производится отбор 0,5 $м^3/сутки/м$ песчаника жидкости со сжимаемостью $4{,}5 \cdot 10^{-4}/ат$.

I — падение давления на скважине с радиусом 0,075 *м*; *II* — падение давления на внешнем замкнутом контуре с радиусом 152,5 *м*; $к/\mu = 1$; пористость песчаника—0,20.

исключением позиций, очень близко расположенных к внешнему контуру. Применяя те же самые константы, что и в уравнении (4), можем выразить изменение давления, после того как ряд переходного времени обратится в нуль, следующим образом:

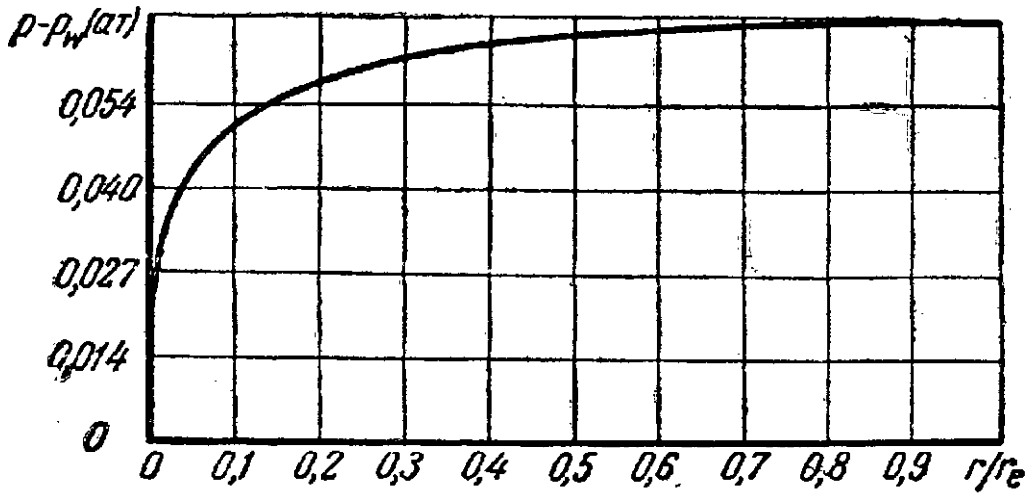
$$p(r) - p_w = 0{,}06805 \cdot 0{,}1412 \left(7{,}6009 - \frac{r^2}{2r_e^2} - \ln \frac{r_e}{r}\right). \qquad (7)$$

На фиг. 257 приведено построение уравнения (7). В общем виде оно являет собой строго логарифмическое распределение установившегося течения и действительно весьма сильно приближается к нему при подходе к самой скважине. Вместе с тем фиг. 257 показывает, что на внешнем контуре градиенты обращаются в нуль, так как резервуар закрыт. В системе установившегося состояния величина градиентов составляет порядок $1/r_e$. В результате этих малых градиентов суммарный перепад давления $p_e - p_w = 0{,}068$ *ат* меньше соответствующей величины 0,072 *ат*, необходимой, чтобы обеспечить тот же самый текущий дебит в строго несжимаемой системе стационарного течения.

Базируясь на этих выводах, можно получить достаточно простое физическое приближение, которое дает представление о падении давления в системе. Как было уже показано в настоящем разделе, после того как прошел ряд неустановившихся состояний, плотность по всему резервуару равномерно уменьшается со скоростью, пропорциональной q. В действительности, если Q представляет собой фактический текущий дебит, то из уравнения (2) непосредственно следует:

$$Q = \frac{2\pi k}{\mu}\left(r\gamma\,\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=0} =$$

$$= \frac{2\pi k q}{\beta\mu} = -f\pi r_e^2\left(\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right) = -f\pi r_e^2\cdot\gamma\beta\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right). \qquad (8)$$

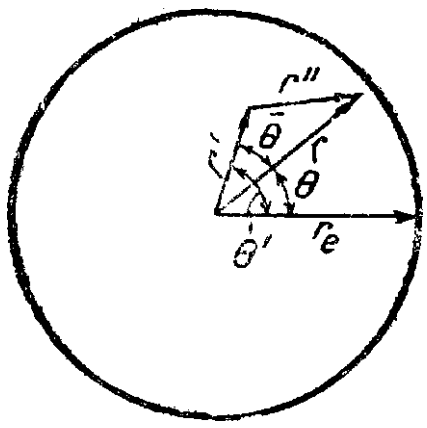


Фиг. 257. Распределение давления относительно скважины в зависимости от кривой падения фиг. 256 после прохождения первоначального переходного этапа.

Таким образом, добыча из резервуара обеспечивается эквивалентным падением плотности или давления, распределенным равномерно по всему резервуару. Мгновенное распределение давления отличается только очень небольшой величиной от типового стационарного течения. Поэтому естественно приходим к представлению о динамическом характере системы как о непрерывной последовательности установившихся состояний. Отсюда мы получаем по крайней мере косвенное аналитическое подтверждение основной гипотезы, на которой покоится вся математическая обработка второй части настоящей работы, а именно, что выведенные здесь решения для непрерывной последовательности установившихся состояний дают очень тесные приближения к реальным величинам изменения времени в нормальных течениях жидкости умеренных размеров (гл. X, п. 1). Кроме того, будет весьма удобным использовать полностью эту гипотезу при разработке теории движения газов, где нельзя получить точные решения в аналитической форме (четвертая часть).

14. Нерадиальное течение. Интерференция скважин. Функция Грина. До сих пор математической обработке подвергались проблемы, которые включали в себя единичные скважины, размещенные в центре соответствующих резервуаров. Вместе с тем на практике обычно

площадь, под которой залегает резервуар, бывает покрыта некоторым количеством скважин. Тогда возникает вопрос о их взаимодействии и интерференционных связях. В данном случае мы подвергнем детальной математической обработке только простой случай такого взаимодействия. В то же самое время мы покажем основу этой обработки, пользуясь которой, можно синтезировать решения для проблем более общего характера.



Фиг. 258.

Основным элементом такого решения является по существу функция Грина для круга, которую можно представить себе для настоящих целей как функцию γ, имеющую единичную логарифмическую особенность при (r', θ') с производной от нормали к окружности $r = r_e$, равной нулю, и которая тождественно обращается в нуль при $t = 0$. С физической стороны функция Грина дает распределение плотности в пределах замкнутого кругового резервуара, первоначально находящегося при „нулевой плотности“ и имеющего скважину с единичным напряжением при (r', θ').

При обозначениях, принятых на фиг. 258, скважину постоянного напряжения или сток можно представить себе членом

$$\gamma_0 = \ln \frac{r''}{r_e} = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{r^2}{r_e^2} - \left(\frac{2r'r}{r_e^2} \right) \cos \bar{\theta} + \frac{r'^2}{r_e^2} \right]. \qquad (1)$$

Легко убедиться в том, что решение уравнения (7), гл. X, п. 1[1], с производной по нормали, равной нулю (при $r = r_e$), можно получить сложением функции

$$\gamma_a = \frac{1}{2} \ln \left[1 - \left(\frac{2r'r}{r_e^2} \right) \cos \bar{\theta} + \frac{r'^2 r^2}{r_e^4} \right] - \left(\frac{1}{2r_e^2} \right) (r^2 + 4\varkappa t). \qquad (2)$$

Поэтому для окончательного решения или нахождения функции Грина можно написать:

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_a + \sum_{n\,m} A_{n\,m} J_n (\alpha_{n\,m} r) \cos n\bar{\theta} e^{-\varkappa \alpha_{n\,m}^2 t} + \text{const}. \qquad (3)$$

где

$$J'_n (\alpha_{n\,m} r_e) = 0, \qquad (4)$$

и

$$\gamma_0 + \gamma_a (t = 0) + \sum_{n\,m} A_{n\,m} J_n (\alpha_{n\,m} r) \cos n\bar{\theta} + \text{const} = 0, \qquad (5)$$

---

[1] Самую величину γ_0 можно рассматривать как решение уравнения (1) гл. X, п. 2, для радиального течения. Между тем проблема, рассматриваемая в данном случае, по существу имеет нерадиальный характер и подчиняется уравнению (7), гл. X, п. 1, элементарные решения которого в полярных координатах представляют собой члены ряда уравнения (3).

так что уравнение (4) определяет собой параметры $\alpha_{n\,m}$, а (5) определяет собой коэфициенты $A_{n\,m}$. Раскладывая γ_0 и γ_a в ряд Фурье и приравнивая сначала коэфициенты при $\cos n\bar{\theta}$, найдем:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_m A_{n\,m} J_n(\alpha_{n\,m} r) = \frac{\left(\frac{r'r}{r_e^2}\right)^n}{n} + b_n \\ &b_n = \frac{\left(\frac{r}{r'}\right)^n}{n} : \qquad r \leqslant r' \\ &b_n = \frac{\left(\frac{r'}{r}\right)^n}{n} : \qquad r \geqslant r' \end{aligned}\right\} \quad n > 0 \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_m A_{0\,m} J_0(\alpha_{0\,m} r) = \frac{r^2}{2r_e^2} + b_0 - \text{const} \\ &b_0 = \ln \frac{r_e}{r'} : \qquad r' \leqslant r' \\ &b_0 = \ln \frac{r_e}{r} : \qquad r \geqslant r'. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Согласно уравнениям (4), Бесселя и реккурентных формул, которым удовлетворяет $J_n(\alpha_{n\,m} r)$, а именно[1]:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 J_n(z)}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dJ_n(z)}{dz} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) J_n(z) = 0 \\ &z^{(n+1)} J_n(z) = \frac{d}{dz}\left[z^{n+1} J_{n+1}(z)\right]; \quad z^{-n} J_{n+1}(z) = \\ &\qquad = -\frac{d}{dz}\left[z^{-n} J_n(z)\right] \\ &J_n'(z) = \frac{n}{z} J_n(z) - J_{n+1}(z) = -\frac{n}{z} J_n(z) + J_{n-1}(z) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

можно показать, что

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{r_e} r J_n^2(\alpha_{n\,m} r)\, dr = \left[\frac{(\alpha_{n\,m}^2 r_e^2 - n^2)}{2\alpha_{n\,m}^2}\right] J_n^2(\alpha_{n\,m} r_e) \\ &\int_0^{r_e} r^{n+1} J_n(\alpha_{nm} r)\, dr = \left(\frac{n r_e^n}{\alpha_{n\,m}^2}\right) J_n(\alpha_{nm} r_e) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

---

[1] Whittaker and Watson, Modern Analysis" Chap. XVIII.

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{r_e} b_n r J_n(\alpha_{nm} r)\, dr = \left(\frac{1}{\alpha_{n\,m}^2}\right)\left[2J_n(\alpha_{nm} r') - \right.\\
&\qquad\qquad \left. - \left(\frac{r'}{r_e}\right)^n J_n(\alpha_{nm} r_e)\right]\\
&\int_0^{r_e} r^3 J_0(\alpha_{0\,m} r)\, dr = \left(\frac{2r_e^2}{\alpha_{0\,m^2}^2}\right) J_0(\alpha_{0\,m} r_e)\\
&\int_0^{r_e} b_0 r J_0(\alpha_{0\,m} r)\, dr = \left[\frac{J_0(\alpha_{0\,m} r') - J_0(\alpha_{0\,m} r_e)}{\alpha_{0\,m}^2}\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Устанавливая, что

$$\alpha_{n\,m} r_e = x_{n\,m}; \qquad \frac{\kappa t}{r_e^2} = \bar{t}; \qquad \frac{r}{r_e} = \bar{r}; \qquad \frac{r'}{r_e} = \varrho, \qquad (10)$$

можно выразить окончательно уравнение (3) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\gamma = {} & \frac{1}{2} \ln\left[\bar{r}^2 - 2\bar{r}\varrho\cos(\theta' - \theta) + \varrho^2\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \varrho^2\right) + \\
& + \frac{1}{2} \ln\left[1 - 2\bar{r}\varrho\cos(\theta' - \theta) + \bar{r}^2\varrho^2\right] - \\
& - \frac{1}{2}(\bar{r}^2 + 4\bar{t}) + 2\sum \frac{J_0(x_{0\,m}\varrho)\, J_0(x_{0\,m}\bar{r})\, e^{-x_{0\,m}^2 \bar{t}}}{x_{0\,m}^2 J_0^2(x_{0\,m})} + \\
& + 4\sum_1^\infty n \sum m \frac{J_n(x_{n\,m}\varrho)\, J_n(x_{n\,m}\bar{r})}{(x_{n\,m}^2 - n^2)\, J_n^2(x_{n\,m})} \cos n(\theta' - \theta)\, e^{-x_{n\,m}^2 \bar{t}}. \qquad (11)
\end{aligned}$$

Это выражение дает распределение плотности в замкнутом резервуаре единичного радиуса [в единицах уравнения (10)] с первоначальной плотностью — нуль. Резервуар дренируется скважиной с единичным напряжением при (ϱ, θ'). Как следует ожидать, эта функция Грина симметрична в $(\bar{r}, \theta)$ и (ϱ, θ'), т. е. плотность в $(\bar{r}, \theta)$ ко времени t, связанная с источником в (ϱ, θ'), одинакова с соответствующей величиной плотности в то же самое время при (ϱ, θ'), связанной с источником, находящимся в точке $(\bar{r}, \theta)$.

Если первоначальная плотность имеет распределение, которое дается $g(r, \theta)$, то функция

$$\begin{aligned}
\gamma_i = {} & \frac{1}{\pi}\int_0^1 \bar{r}\, d\bar{r} \int^{2\pi} g(\bar{r}, \theta)\, d\theta + \\
& + \frac{1}{\pi}\sum \frac{J_0(x_{0\,m}\bar{r})\, e^{-x_0^2\, m t}}{J_0^2(x_{0\,m})} \int_0^1 \bar{r} J_0(x_{0\,m}\bar{r})\, d\bar{r} \int_0^{2\pi} g(\bar{r}, \theta)\, d\theta +
\end{aligned}$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n>0} nm\,\frac{x_{n\,m}^2 J_n(x_{n\,m}\bar{r})\cos n\theta e^{-x_{n\,m}^2 \bar{t}}}{(x_{n\,m}^2 - n^2)\,J_n^2(x_{n\,m})}\int_0^1 \bar{r} J_n(x_{n\,m}\bar{r})\,d\bar{r}\int_0^{2\pi} g(\bar{r},\theta)\times$$

$$\times\cos\frac{n\theta}{2}\,d\theta \qquad (12)$$

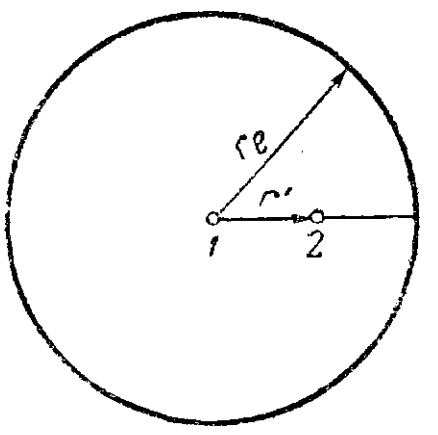
должна быть прибавлена к правой стороне уравнения (11).

Если, наконец, будет допущено, что скважина имеет напряжение расхода [1] $q(t)$ вместо постоянного значения — единица, то результирующее распределение плотности будет:

$$\gamma = \gamma_i(\bar{r},\bar{t}) + \int_0^t q(\lambda)\,\frac{\partial\gamma_1(\bar{r},t-\lambda)}{\partial t}\,\partial\lambda, \qquad (13)$$

где γ_1 — функция уравнения (11).

Складывая вместе функции, представленные в уравнении (13), для различных значений r', θ' и $q(t)$, получим плотность, а отсюда распределение давления, связанное с соответствующей группой или сеткой размещения скважин в замкнутом резервуаре. Изучение такого распределения даст эффект интерференции и взаимодействия среди скважин, связанный с одновременным дренированием ими одного и того же резервуара.



Фиг. 259. Схема интерференции двух скважин.

Такой задачей по интерференции, которая показывает более детально методику математической обработки, является наиболее простой случай интерференции двух скважин в замкнутом круговом резервуаре. На фиг. 259 скважина *1* помещается в центре, а скважина *2* — на радиусе r'. Этот радиус принимается за ось полярных координат. Допустим также, что скв. *1* эксплоатируется при постоянном темпе отбора в q_1 единиц с начального момента.

Скв. *2* открывается через время $\bar{t}_1$ и эксплоатируется с дебитом q_2 единиц. Расход скв. *1* сохраняет свое значение q_1.

Вполне очевидно, что до истечения времени $\bar{t}_1$ давление на скв. *1* будет снижаться без всякой интерференции, согласно кривой *I* (фиг. 256), которая соответствует настоящему случаю. Открытие скв. *2*, несомненно, ускорит это падение. Необходимо подсчитать величину воздействия скв. *2* на скв. *1*. Необходимо также подсчитать влияние положения скв. *2* на ее дебит, т. е. определить эффект нормального снижения в положении скв. *2*, созданный эксплоатацией центральной (№ 1) скважины при бурении скв. *2*. Однако вполне достаточно показать воздействие скв. *2* на скв. *1*

Как уже было замечено, для $\bar{t} < \bar{t}_1$ давление скв. *1* (при $r = r_w$) будет снижаться аналогично радиальной системе. Отсюда согласно

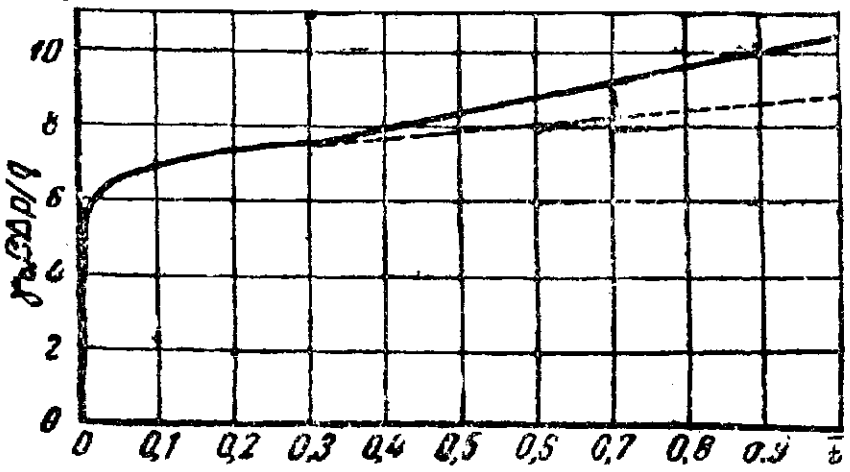
---

[1] Термин „напряжение" берется здесь как значение величины фактического расхода на радиан.

уравнению (2), гл. X, п. 13, к которому в данном случае приводится уравнение (11), плотность (скв. *1*) определится следующим выражением:

$$\bar{t} \leqslant \bar{t}_1 : \gamma\ (1) = \gamma_i + q_1 \left\{ \frac{3}{4} - \ln \frac{r_e}{r_w} - 2\bar{t} + 2 \sum \frac{e^{-x_n^2 \bar{t}}}{x_n^2 J_0^2 (x_n)} \right\}, \qquad (14)$$

где опущен член $\left(\frac{r_w}{r_e}\right)^2$ и $J_0 \left(\frac{x_n r_w}{r_e}\right)$ заменен единицей; γ_i является начальной постоянной плотностью. Такое состояние будет продолжаться до $\bar{t} > \bar{t}_1$. Но в этот момент будет наложен эффект, связанный с вводом



Фиг. 260. Падение давления у скважины, расположенной в центре замкнутого кругового резервуара, которая эксплоатируется с постоянным дебитом, в зависимости от проводки другой скважины при $t = 0{,}3$ и радиусе, составляющем $^1/_2$ радиуса резервуара. Вторая скважина эксплоатируется с тем же самым дебитом, что и первая:

Δp — падение давления центральной скважины от своего первоначального значения; t — безразмерное время $= k\,t/\mu f \beta r_e^2$; q — расход из каждой скважины (на радиан).

в эксплоатацию скв. *2*, который на основании уравнения (11) составляет:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_2\ (1) = q_2 \ln \varrho + \frac{q_2}{2}\left(\frac{3}{2} - \varrho^2\right) - 2q_2 (\bar{t} - \bar{t}_1) + \\ + 2q_2 \sum \frac{J_0 (x_{0\,m} \varrho)\, e^{-x_{0\,m}^2 (\bar{t} - \bar{t}_1)}}{x_{0\,m}^2 J_0^2 (x_{0\,m})}\ . \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Эту величину следует добавить к γ (1) уравнения (14). Для случая, где $q_1 = q_2 = q$, $\varrho = ^1/_2$ и $r_e/r_w = 2000$, падение плотности на скв. *1* можно выразить численно так:

$$\bar{t} \leqslant \bar{t}_1 : \frac{[\gamma_i - \gamma\ (1)]}{q} = 6{,}851 + 2\bar{t} - 2 \sum \frac{e^{-x_n^2 \bar{t}}}{x_n^2 J_0^2 (x_n)}\ , \qquad (16)$$

$$\bar{t} \geqslant \bar{t}_1 : \frac{[\gamma_i - \gamma\ (1)]}{q} = 6{,}919 + 2\ (2\bar{t} - \bar{t}_1) -$$

$$- 2 \sum \left[\frac{e^{-x_n^2 \bar{t}}}{x_n^2 J_0^2 (x_n)} \right] \left[1 + J_0 \left(\frac{x_n}{2}\right) e^{x_n^2 \bar{t}_1} \right]. \qquad (17)$$

На фиг. 260 дается построение этих уравнений с величиной $\bar{t}$, взятой 0,3. Пунктирная кривая показывает снижение давления в системе, если скв. *2* еще не пробурена. Из фиг. 260 видно, что после первоначального переходного этапа, на котором происходит изменение первоначального падения давления, скорость последнего принимает

значение, в два раза большее по сравнению со своим начальным или экстраполированным значением. Разумеется, следует ожидать это явление, так как при $\bar{t} > 0{,}3$ из резервуара извлекается в два раза больше жидкости.

15. Применение источников и стоков к решению проблем нестационарного течения сжимаемых жидкостей в пористой среде. Закончим настоящую главу кратким описанием метода источников и стоков для математического решения задач неустановившегося течения. Этот метод в принципе аналогичен обычно применяемому в части II, когда дается представление о скважинах, как постоянных источниках или стоках. Он имеет особый интерес при математической обработке систем, где можно рассматривать пористую среду распространяющейся бесконечно, по крайней мере в одном направлении. Вместе с тем путем синтеза независимых решений можно приложить этот метод к системам конечных размеров. Так как видоизменения, которые требуют для своих решений одно- и трехразмерные системы, можно внести без всякой трудности, в настоящем разделе будет полностью рассмотрена только двухразмерная система, которая представляет собой наибольший практический интерес.

Основным элементом решения уравнения (1), гл. X, п. 2, является мгновенный „линейный источник", а именно

$$\gamma = \frac{q}{4\pi f \kappa t} e^{-\frac{r^2}{4\kappa t}} \quad \text{[см. уравнение (5), гл. X, п. 2].}$$

Это решение обращается в нуль повсюду при $t = 0$ и представляет собой мгновенный расход q единиц массы жидкости в начале координат $r = 0$ и в начальное мгновение $t = 0$. Если напряжение источника постоянно и обладает величиной $q\,(t)$, то соответствующее решение будет:

$$\gamma = \frac{1}{4\pi f \kappa} \int_0^t \frac{q\,(\tau)}{t-\tau} e^{-\frac{r^2}{4\kappa\,(t-\tau)}} d\tau. \qquad (2)$$

Наконец, если существует первоначальное распределение плотности, которое дается $g\,(x, y)$, то полное решение будет:

$$\gamma = \frac{1}{4\pi\kappa} \left\{ \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta g\,(\xi, \eta)\, e^{-\frac{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]}{4\kappa t}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{f} \int_0^t \frac{q\,(\tau)}{t-\tau} e^{-\frac{r^2}{4\kappa\,(t-\tau)}} d\tau \right\}. \qquad (3)$$

Если начальное распределение плотности (а отсюда и давления) имеет постоянное значение γ_i, первый член приводится к виду γ_i, и уравнение (3) дает распределение плотности в любой последующий отрезок времени, связанное с положением скважины в начале координат

текущим дебитом — $q\ (t)$ единиц. Когда фактический текущий дебит имеет постоянное значение Q, то уравнение (3) приводится к виду:

$$\gamma = \gamma_1 - \frac{Q}{4\pi f\kappa} \int\limits_{\frac{r^2}{4\kappa t}}^{\infty} \frac{e^{-w}\,dw}{w} = \gamma_i + \frac{Q}{4\pi f\kappa}\ Ei\left(\frac{-r^2}{4\kappa t}\right), \qquad (4)$$

где функцию Ei можно найти из таблиц, например, Янке и Эмде [1]. Снижение плотности, а отсюда и давления на скважине можно свободно получить решением уравнения (4), установив $r = r_w$ радиусу скважины.

Разумеется, с физической стороны уравнение (4) становится бессмысленным, если плотность γ падает ниже плотности при „значении нулевого давления“ γ_0. Это означает, что текущий дебит Q не может быть получен в дальнейшем. Поэтому нарушается допущение о постоянстве величины расхода Q.

При стационарном течении несжимаемых жидкостей отдельные логарифмические члены, связанные с некоторым количеством индивидуальных скважин, складываются вместе и дают результирующее распределение давления, присвоенное этим независимым скважинам в группах. Аналогично этому для нахождения распределения плотности в многоскважинной системе необходимо сложить вместе члены, например уравнения (2), с соответствующими значениями Q и r. Так, если скважины с расходами Q_i расположены в точках (x_i, y_i), результативное распределение плотности при первоначальной постоянной величине ее будет:

$$\gamma = \gamma_i - \frac{1}{4\pi f\kappa} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \sum_i Q_i\,(\tau)\ e^{-\frac{[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2]}{4\kappa\,(t-\tau)}}. \qquad (5)$$

Скважины с расходом Q могут быть действительными или их „отображениями“, установленными в соответствующих точках (x_i, y_i), чтобы удовлетворить особые граничные условия. Скважины могут быть также непрерывно размещены по площади или кривой, чтобы получить непрерывное распределение расхода. Так, для конечной линии стока длиной L, вдоль оси x, с плотностью расхода $q\ (t)$ на единицу длины, которая дренирует бесконечный резервуар с первоначальной постоянной плотностью γ_i, распределение последней в любое последующее мгновение дается следующим выражением:

$$\gamma = \gamma_i - \frac{1}{4\pi f\kappa} \int\limits_0^t \frac{q\,(\tau)}{t-\tau}\, e^{-\frac{y^2}{4\kappa\,(t-\tau)}}\, d\tau \int\limits_{\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa\,(t-\tau)}}\, d\xi. \qquad (6)\ [2]$$

---

[1] Jahnke E. und Emde F. „Funktionentafeln“, 1928. Есть русское издание 1948 г.

[2] Этот вывод эквивалентен представлению, использованному Шильзиусом и Херстом (Oil Weekly, 18/X 1934), для подсчета снижения давления месторождения Ист-Техсас. Соответствующие результаты близки к полученным на основании иного метода выводам гл. X, п. 8.

Для получения представления об единичной скважине или о месторождении, собранном воедино как единичная скважина, можно распределить плотность расхода $q(t)$ аналогичным путем по круговому контуру. В этом случае распределение плотности ко времени t и на расстоянии r от центра скважины с радиусом a примет вид:

$$\gamma = \gamma_i - \frac{1}{4\pi f\kappa}\int_0^t \frac{q(\tau)}{t-\tau}\,d\tau \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2+a^2-2ar\cos\theta}{4\kappa(t-\tau)}}\,d\theta =$$

$$= \gamma_i - \frac{1}{2f\kappa}\int_0^t \frac{q(\tau)}{t-\tau}\, e^{-\frac{(r^2+a^2)}{4\kappa(t-\tau)}}\, I_0\left(\frac{ar}{2\kappa(t-\tau)}\right)d\tau, \qquad (7)\ [1]$$

где I_0 — бесселева функция третьего рода нулевого порядка [2].

В настоящей работе мы не будем проводить числовых выкладок полученных уравнений. Однако заметим, что допущение бесконечности течения, на котором они основываются, с практической точки зрения не имеет серьезных последствий, за исключением более поздних этапов снижения давления в системе.

Пока эффективный „радиус дренажа“ фактически отступает к реальным границам системы, последнюю можно подвергнуть математической обработке как действительно бесконечную без заметного воздействия на характер изменения подсчитанной кривой снижения давления. С другой стороны, большинство проблем, которые представляют в настоящее время практическую ценность, можно обрабатывать также легко с помощью теории, развитой в предыдущих разделах. Метод же источников и стоков [3] приведен здесь в основном для полноты показа наиболее известных аналитических процедур решения задач, которые подчиняются уравнению (7), гл. X, п. 1.

16. Заключение. Большая часть всех практических проблем течения однородных жидкостей в пористой среде имеет по существу своему изменяющийся во времени характер, связанный с естественными или искусственными нарушениями граничных условий. Поэтому важно провести тщательное разделение между проблемами, где неустановившиеся отрезки времени играют незначительную роль при определении физического состояния системы и теми проблемами, где изменения последней во времени являются преобладающими по значению факторами.

---

[1] Используя уравнение (7), можно получить также величину снижения давления в таком месторождении, как Ист-Техсас, что будет соответствовать полностью теории (гл. X, п. 8), за исключением допущения, что в действительности резервуар бесконечен. Между тем в гл. X, п. 8, был принят конечный радиус внешнего контура.

[2] Watson, Theory of Bessel Functions, p. 79.

[3] Заметим также, что аналогично применению метода источника или стока для представления значений граничного расхода можно разработать теорию „дублетов“, с помощью которой можно получить распределение плотности на произвольном контуре (см. Byerly, Fourier Series, стр. 94). Для нахождения иных способов решения уравнения (7), гл. X, п. 1, следует обратиться к работе H. S. Carslaw, The conduction of Heat, 1921.

Если представить себе точные пути, по которым происходит физическое изменение времени в рассматриваемой проблеме, то такое разделение проблем можно сделать без особых трудностей. Скорость распространения возмущений внутри жидкой среды, которая, очевидно, определяет собой время, необходимое для того, чтобы изменения граничных условий передались во внутренние точки системы, будет очень высокой в общем случае по сравнению со скоростью частичек жидкости.

Скорость распространения возмущений, будучи равна скорости звука в жидкости, имеет величину порядка 10^5 *см/сек*, между тем как скорость движения частичек жидкости будет обычно ограничена значениями порядка 1 *см/сек*. Поэтому можно рассматривать передачу возмущений давления в пористой среде, несущей жидкость, в действительности мгновенной.

Аналитическая теория стационарного течения в пористой среде подразумевает допущение, что реальная скорость передачи изменений давления бесконечно велика. Вместе с тем гораздо более серьезным вопросом, относящимся к явлениям возмущения давления в пористой среде, несущей жидкость, заключается в определении интервала времени, необходимого внутренним точкам, чтобы приспособиться к новым граничным условиям. Таким образом, если полное перераспределение с выравниванием внутренних давлений потребует конечного изменения содержания жидкости в системе, — это займет, разумеется, конечный интервал времени для выравнивания внутренних условий стационарного режима, соответствующего новым значениям давления или расхода на границах пористой среды. Тогда фактическое изменение содержания жидкости в системе необходимо привести в состояние равновесия с новыми давлениями на ее контурах.

Эти давления будут пропорциональны сжимаемости жидкости и площади пор системы. В то же самое время скорость, при которой эта масса жидкости может быть удалена или поглощена (при уменьшении или росте граничных давлений), прямо пропорциональна проницаемости среды и обратно пропорциональна вязкости жидкости. Поэтому конечные отрезки времени, необходимые для выравнивания давления в пределах пористой среды, будут пропорциональны количеству $f\beta\mu r_e^2/k$, где f — пористость среды; k — проницаемость среды; β и μ — сжимаемость и вязкость жидкости; r_e — является одним из наиболее важных размеров системы [1].

Иное представление о величине запаздывания во времени, которое входит в значение выравнивания распределения внутреннего давления, получается из рассмотрения темпа изменения содержания массы жидкости в резервуаре, связанного с изменением граничных условий по сравнению с транспортирующей производительностью системы при стационарном режиме. Если первая величина невелика по сравнению

---

[1] Эти рассуждения можно интерпретировать, прибегая к явлению затухания волны давления в процессе ее перемещения через систему. Запаздывание времени при выравнивании величины внутренних давлений можно рассматривать как результат затухания волны давления, возникшей на границах. Поэтому амплитуда волны во внутренних точках системы составляет только небольшую долю возникших изменений величины давления на контурах системы.

со второй, ясно, что время выравнивания распределения внутреннего давления так, чтобы оно могло следовать мгновенным условиям на контурах, будет также мало, и наоборот.

Положим, что данная система, которая находится в установившемся состоянии — статическом или динамическом равновесии, — подвергается на своих границах изменению в величине давления. Если время выравнивания внутренних давлений в системе невелико, то в ней очень быстро установится иное установившееся распределение давления, свойственное новым граничным условиям. Тогда можно себе представить развитие такой системы непрерывной последовательностью установившихся распределений, следующих без запаздывания непосредственно за изменениями граничных условий. Это есть тот тип математической обработки, который прилагался нами к разнообразным проблемам, подвергавшимся обсуждению во второй части настоящей работы.

Оправдание этому допущению следует искать в том, что рассматриваемые жидкости были взяты как нормальные жидкости, для которых значение β очень мало (порядка $5 \cdot 10^{-5}\ /am$), и что во всех рассмотренных проблемах, за исключением главы IX [1], принятые системы имели небольшие или умеренные размеры (порядка 150 *м*). Даже в главе IX, где пористая среда принимается больших или бесконечных размеров, предметом особого интереса было взаимодействие отдельных скважин, которые были разделены между собой относительно небольшими расстояниями, так что площади пористой среды, непосредственно связанные с каждой скважиной, в большинстве своем были того же порядка, что и расстояния в системах с единичной скважиной. Поэтому можно рассматривать выводы, полученные во второй части, физически приложимыми к практическим эквивалентам подвергшихся изучению систем, поскольку они несут нормальные жидкости. При этом мы учитываем, что наиболее важные переходные моменты этих систем получаются простой заменой постоянных граничных данных в решениях стационарного режима соответственными переменными значениями.

Когда жидкость имеет особо высокую сжимаемость или когда пористая среда имеет большие размеры, отрезки времени на выравнивание давления примут соответственно высокие значения. Тогда распределение давления внутри среды будет запаздывать по отношению к изменениям, которые могут иметь место на границах системы.

При рассмотрении нормальной жидкости допустить ее высокую сжимаемость — значит не дать резонно обоснованной гипотезы. Однако можно получить эквивалентный результат для далеко распространяющейся среды, если на всем протяжении последней присутствует дисперсия небольшого количества свободного газа в виде газовых масс умеренных размеров. Так, нормальную величину сжимаемости $5 \cdot 10^{-5}/am$ можно поднять до эффективного значения, в 10 раз большего, распределением объема газа, составляющего только $4^1/_2\%$ от всего порового пространства при 100 *am* пластового давления. Кроме того,

---

[1] Вполне понятно, что для двухразмерных систем допущение о том, что они распространяются бесконечно вдоль одного направления, не обесценивает представления о них как о системах с малыми размерами, так как в них не происходит перемещения жидкости через плоскости, ограничивающие движение.

когда площадь системы потока очень велика, время, необходимое для выравнивания давления, даже для жидкости с нормальной сжимаемостью может стать настолько большим, что придаст практическое значение переходным этапам времени в системе, как это дается точной математической обработкой проблем неустановившегося состояния.

Задачи, включающие в себя сжимаемые жидкости при неустановившемся течении, можно подвергнуть классификации согласно их граничным условиям. Для радиального течения это будут такие системы: 1) где давление (аналитическая плотность) установлено на обеих радиальных границах, внешней и внутренней; 2) где на одной границе установлена величина расхода, а на другом — давление; 3) где расходы даны для обоих границ. При этом во всех случаях решения принимают форму бесконечных рядов бесселевых функций с радиальной координатой, как их аргументом, помноженной на члены, экспоненциальные во времени, и постоянные члены, согласованные таким образом, чтобы решение рядов воспроизводило начальное состояние, системы. Первый случай, где давления заданы на обоих границах дает решения, из которых можно получить не только распределение внутреннего давления в любое время после начального момента, но также и расходы, проходящие через систему при данных граничных условиях. В качестве особого примера можно рассмотреть нефтяное месторождение, собранное воедино в эквивалентную единичную скважину, которая эксплоатируется при гидравлическом режиме. При этом можно изучить историю эксплоатации месторождения, какую только следует ожидать для различных типов разнообразных давлений (допускаем, что известны значения давления на эффективном внешнем контуре или поверхности раздела вода — нефть).

В гл. X, п. 4 детально изучены образцы таких систем, где давления месторождения внезапно падают от их первоначально постоянных значений или снижаются приблизительно линейно с изменением времени (плотности снижаются совершенно точно линейным путем). Другим образцом такого типа задач является идеализированное представление последних, где рассматривается подъем давления в сполна закрытой скважине. Так, используя константы, соответствующие месторождению Ист-Тексас, из решения, полученного для этой проблемы (гл. X, п. 6), найдено, что в скважине с этого месторождения останется через полчаса после ее закрытия около 6% первоначальной разности давления. Это составляет величину того же самого порядка, наблюдаемого на практике в месторождении. Такие решения не следует прикладывать к случаям, где присутствует значительное количество свободного газа в песчанике, вблизи забоя скважины, вследствие изменения эффективной проницаемости песчаника одновременно с ростом давления. Однако оно дает все же качественные показатели эффекта сжимаемости даже в том случае, когда свободный газ представлен в песчанике.

Второй тип задачи радиального течения относится к такому случаю, где заранее установлена величина расхода на одной границе, а давление на другой. Так, если песчаник образует замкнутую систему, то расход на внешнем контуре будет равняться нулю, а если известно давление на внутреннем контуре, определяющем, например, ствол скважины, то решение проблемы даст расходы, проходящие через внутренний контур.

Если же предоставляется возможность установить давления на внешней границе совместно с величинами расхода на внутреннем контуре, решение даст изменения давления на последнем во времени.

Весьма интересным практическим приложением последнего типа проблем является интерпретация изменения давления в нефтяном месторождения Ист-Тексас. Анализы нефти из этого месторождения показали, что нефть насыщена здесь только до давления 51,35 *am*. Тогда добыча из этого месторождения, пока давление в нем не упало ниже 51,35 *am*, должна быть, повидимому, отнесена к напору, который оказывает на нефть вода из примыкающего песчаника Вудбайн. Огромная площадь этого водяного резервуара непосредственно наводит на размышления, что переходные этапы времени в системе должны играть значительную роль при определении мгновенных давлений в месторождении. Действительно, самый факт того, что давления в месторождении показывают падение, хотя текущие дебиты сохраняются постоянными, доказывает, что вода в песчанике Вудбайн является в действительности сжимаемой жидкостью. Кроме того, общее падение давления в водяном резервуаре слишком незначительно, чтобы создать течение воды в месторождение, достаточное для замещения отбираемой из последнего нефти, если только распределение давления в резервуаре относится к стационарному режиму.

Если установлена история разработки месторождения, то, собирая воедино индивидуальные скважины месторождения и обращая их в эквивалентную скважину с радиусом 32 160 *м*, который определяет собой приближенно общий контур месторождения, и представляя себе водный резервуар песчаника Вудбайн радиальным сектором в 120°, распространяющимся от первоначального внешнего контура с постоянным давлением на радиус 160 800 *м*, сходящимся в скважину, определим падение давления на внутреннем контуре — западном крае месторождения. Взяв наблюденные текущие дебиты по месторождению с момента его открытия, получим величину подсчитанного падения давления почти полностью параллельной и проведенной на графике гораздо выше по сравнению с зарегистрированными давлениями, усередненными относительно индивидуальных скважин месторождения.

Разницу между подсчитанным и наблюденным давлением можно легко объяснить, если обратить внимание, что теоретический подсчет даст величину давлений, которые встречаются на западном крае месторождения. Зарегистрированные в рапортах давления являются средними величинами, собранными по всей территории месторождения, и включают в себя не только падение давления в пределах последнего, связанное по существу своему с миграцией жидкости, направленной с запада на восток, но искажение этого падения давления, обязанного тому обстоятельству, что эксплоатационная часть песчаника представлена моноклиналью, выклинивающейся в направлении на восток.

Если наблюденные средние давления скорректировать прибавлением члена, пропорционального текущему дебиту месторождения — 0,48 *am* на 14,3 тыс. *т* нефти в сутки, то результирующие давления согласуются с подсчитанными значениями настолько близко, насколько это можно только ожидать в пределах 0,34 — 0,68 *am*. Ввиду неуверенности в реальной величине текущего дебита из месторождения, связанного с неизвестным количеством нелегально извлеченной из месторождения нефти и не ука-

занного в рапортах, — эту сходимость в цифрах следует признать весьма удовлетворительной. Такая согласованность на всем протяжении шестилетнего периода, в течение которого текущие дебиты месторождения колебались от предельно высоких значений до нуля, в процессе принудительного закрытия скважин имеет особое значение, если обратить внимание, что все физические константы, выбранные для расчетного течения, за исключением сжимаемости воды, являются действительными усередненными данными, полученными из разрезов скважин для песчаника Вудбайн. Необходимо было только принять единственную константу, требовавшую своего уточнения, — эффективную сжимаемость воды в 12 раз больше по сравнению с водой, свободной от газа. Хотя на первый взгляд это может казаться удивительным, но такую эффективную величину можно объяснить, допуская наличие газовых карманов, распределенных по всему водоносному горизонту, в размерах, не превышающих 4,9% общего объема пор песчаника.

При современном знании подземного резервуара Вудбайн мы не имеем иного допущения, которое можно было бы противопоставить данному. Основную роль, которую играет неустановившийся характер течения в песчанике Вудбайн, показывает подсчитанное распределение давления в песчанике на 1/VII 1934 г., спустя $3^1/_2$ года после открытия месторождения.

За это время из месторождения было извлечено около 74,3 млн. *т* нефти, но подсчеты показали величину распределения давления еще очень далекой от стационарного режима. Действительно, вместо того чтобы давление в месторождении равномерно и логарифмически возрастало по мере приближения к внешнему контуру, достигая на расстоянии 160 800 *м* первоначального значения 110,12 *ат*, фактическое распределение давления к этому времени быстро поднялось до последней величины всего на расстоянии 40 *км* от месторождения. Таким образом, вся добыча нефти из последнего за этот период времени была фактически получена вследствие расширения воды в песчанике Вудбайн в пределах радиуса 72 *км* и последующего вытеснения нефти водою.

Скорее всего произошло замещение нефти расширившейся водой, чем перемещение массы воды по всему водяному резервуару, как это налагается условием стационарного течения. Пока месторождение не будет полностью истощено, эта концентрация падения давления в пределах небольшого расстояния от него, даже через $3^1/_2$ года разработки последнего, показывает, что установление внешнего контура на 160,8 *км* радиуса не имеет никакой значимости по отношению к величине и характеру падения давления в месторождении. Действительно, полагая падение давления по всему резервуару в пределах 160,8 *км* радиуса всего на 12 *ат*, можно вытеснить весь подсчитанный извлекаемый запас нефти в последнем в 1 млрд. *т*, замещая нефть расширяющей водой (допуская высокую сжимаемость ее).

Можно применить эту аналитическую процедуру, прилагавшуюся нами для подсчета падения давления в месторождении Ист-Техсас, также и к подсчету изменения величины расхода из скважины или месторождения, которые дренируют замкнутый резервуар (гл. X, п. 9) при заранее установленном давлении на скважине или месторождении. Эта задача

не представляет в настоящее время особо большого практического интереса, за исключением случая добычи нефти скважинами, вскрывшими продуктивные линзы с ограниченным объемом, где внутреннее перемещение нефти, связанное с выделением и расширением растворенных газов, является весьма значительным фактором. Однако соответствующая математическая обработка такой системы течения находится вне рамок настоящей работы.

Подвергнем рассмотрению скважину, эксплоатирующую замкнутый резервуар для изучения такого типа задач радиального течения, где величина расхода специфицирована на обоих контурах. Решение задачи, где первоначальное давление в песчанике принимается постоянным, а величина текущего дебита из скважины устанавливается заранее также постоянной, показывает два типа неустановившегося состояния при падении давления на скважине и на внешнем контуре. Первый тип, с кратковременным сроком жизни для параметров, выбранных в численном примере, составляет около одного часа и исчезает экспоненциально с возрастанием времени. После этого следует линейное падение давления на скважине и внешнем контуре. Это соответствует условию, при котором система в действительности становится стационарным дренированием, когда давления падают равномерно по всему резервуару. Фактическое распределение давления почти полностью принимает логарифмический характер, за исключением внешнего контура, где градиенты в связи с замкнутостью резервуара равняются по необходимости нулю. В данном случае, когда расход в эксплоатационной скважине обеспечивается за счет равномерного истощения содержания жидкости во всех точках резервуара, падение давления в последнем естественно принимает непрерывную последовательность установившихся состояний.

В дополнение к радиальным течениям можно подвергнуть аналитической обработке также и нерадиальные течения. Такие задачи возникают при рассмотрении явления интерференции между скважинами, дренирующими один и тот же резервуар. В замкнутых системах падение давления должно, повидимому, приближаться к величине, пропорциональной общему расходу из системы. Специальный подсчет этого эффекта на падение давления в скважине, работающей с постоянным дебитом и расположенной в центре замкнутого песчаника, благодаря проводке другой скважины с тем же самым дебитом и расположенной посередине между центром и внешним круговым контуром показывает, что фактическое падение давления центральной скважины после кратковременного неустановившегося периода удваивается.

С практической точки зрения для большинства реальных целей является достаточным подвергнуть изучению эффект интерференции в нестационарных системах. При этом пренебрегают локальными кратковременными переходными периодами и заменяют распределение давления при нестационарном режиме непрерывной последовательностью установившихся распределений, где плотность по всей системе падает таким равномерным путем, что обеспечивает питание всего расхода из последней. В дополнение к методу прямого решения основного дифференциального уравнения с частными производными [уравнение (7), гл. X, п. 1] для неустановившегося потока жидкостей можно получить также

искомые решения синтезом. Этот синтез из особых решений представляет собой так называемый метод источников или стоков, дающих мгновенные или перманентные расходы, поступающие в систему потока или покидающие ее. Эти решения особенно пригодны при аналитической обработке задач, где размеры подземного резервуара можно принять в действительности бесконечными. Можно применить также метод конформных отображений, кратко описанный нами при рассмотрении систем установившегося течения, для построения решений, соответствующих также областям с конечными размерами

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

ДВИЖЕНИЕ ГАЗОВ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Глава одиннадцатая

ДВИЖЕНИЕ ГАЗОВ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

1. Введение. В главе II было показано, что согласно закону Дарси скорость однородной жидкости в любой точке пористой среды при ламинарном течении пропорциональна градиенту давления в данной точке. Это положение было первоначально установлено для жидкостей, но остается справедливым также и для движения газов. Отсюда можно написать динамический закон движения таким образом:

$$\overline{v} = -\frac{k}{\mu}\nabla p, \tag{1}$$

где k — проницаемость среды и μ — вязкость жидкости. Кроме того, в гл. III, п. 4, было показано, что, прилагая к уравнению (1) уравнение непрерывности, получаем, что плотность γ газа, движущегося в однородной пористой среде, должна подчиняться следующему основному диференциальному уравнению:

$$\nabla^2\gamma\,\frac{1+m}{m} = \frac{(1+m)\,\mu f\gamma_0^{\frac{1}{m}}}{k}\,\frac{\partial\gamma}{\partial t}, \tag{2}$$

где уравнение состояния для газа определяется из выражения:

$$\gamma = \gamma_0 p^m, \tag{3}$$

где f — пористость среды. Показатель степени m определяет собой термодинамический характер расширения газа, так как последний перемещается из области высокого в область низкого давления. В частности, $m = 1$ соответствует изотермическому расширению. В случае адиабатического расширения

$$m = \frac{\text{(удельная теплоемкость при постоянном объеме)}}{\text{(удельная теплоемкость при постоянном давлении)}}.$$

В полной аналогии с уравнением (7), гл. X, п. 1, для случая сжимаемой жидкости уравнение (2) контролирует установившееся и неустановившееся движение газа в однородной пористой среде. Первое уравнение линейное и имеет точное решение, между тем как уравнение (2) включает в себя степенную функциональную зависимость, отличную от первой, и является нелинейным. Кроме того, для типа уравне-

ний, представленных (2), до сих пор невозможно было найти точного решения для общего вида граничных и начальных условий. Это обстоятельство привело к необходимости иметь приближенное аналитическое решение, которое будет нами выведено несколько позднее.

2. Установившееся течение газов. Линейные системы. Для установившегося течения можно выполнить требуемую аналитическую процедуру весьма тщательно. Так, приравнивая правую сторону (2), гл. XI, п. 1, нулю, приводим его к форме уравнений Лапласа при зависимой переменной $\gamma^{\frac{1+m}{m}}$ или p^{1+m}, а именно

$$\Delta^2\gamma^{\frac{1+m}{m}} = \nabla^2 p^{1+m} = 0. \tag{1}$$

Это уравнение является тем же, что и для зависимой переменной p, которому подчиняется течение несжимаемых жидкостей. Поэтому различные решения, выведенные во второй части настоящей книги, могут быть непосредственно приложены к решению соответствующих задач движения газов. В частности, распределение давления в линейной системе дается выражением:

$$p^{1+m} = (p_1^{1+m} - p_2^{1+m})\frac{x}{L} + p_2^{1+m}, \tag{2}$$

где p_2 и p_1 — граничные значения давления при $x = 0$, L. Отсюда скорость течения массы в системе на единицу поперечного сечения ее составит:

$$Q = -\frac{k\gamma}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{k\gamma_0}{(1+m)\mu}\frac{\partial p^{1+m}}{\partial x}. \tag{3}^1$$

Будучи приложено к уравнению (2), оно принимает вид:

$$Q = \frac{k\gamma_0}{\mu(1+m)L}(p_2^{1+m} - p_1^{1+m}). \tag{4}$$

Обозначая через Q_1 значение Q при изотермическом течении ($m = 1$) с такой величиной плотности при давлении p_2, что $\gamma_0 \sim p_2^{-m}$, можно получить следующий вид уравнения (4):

$$Q = \frac{2Q_1}{1+m}\frac{1-(p_1/p_2)^{1+m}}{1-(p_1/p_2)^2}. \tag{5}$$

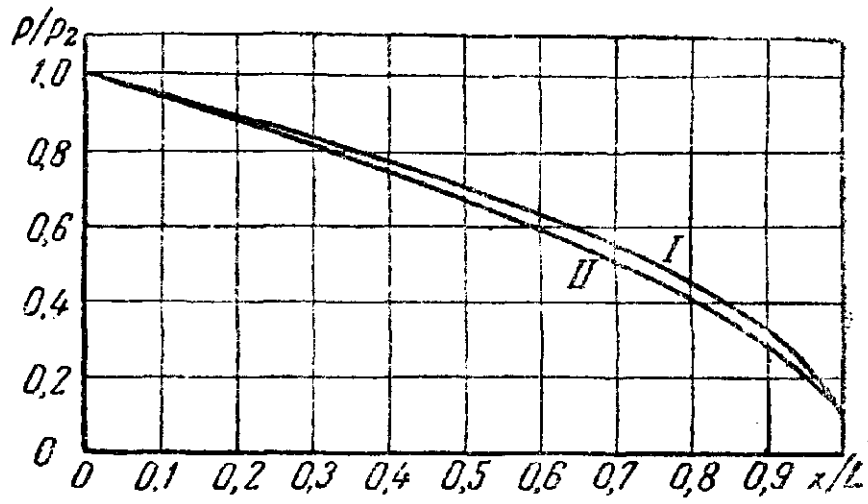
Отсюда следует, что расход при неизотермическом течении ($m < 1$) превосходит соответствующую величину для изотермического течения Q/Q_1, возрастая с уменьшением m. Кроме того, для данного течения с фиксированным значением m отношение Q/Q_1 возрастает с падением p_1/p_2, т. е. по мере увеличения разности давления и скоростей течения.

Возьмем частный случай, где $p_1/p_2 = 0{,}1$ и $m = 0{,}71$, что для воздуха соответствует адиабатическому расширению. Тогда из уравнения (5)

---

[1] Следует заметить, что в данном случае, а также во всех последующих формулах для значения Q величина Q/q_0 будет соответствовать замеренному объемному расходу.

следует, что $Q/Q_1 = 1{,}16$. Отсюда количество воздуха, которое пройдет через линейную систему, будет на 16% больше при адиабатическом расширении (и $p_1/p_2 = 0{,}1$) по сравнению с изотермическим расширением. Следует заметить, что это превышение связано по существу с более высокой плотностью течения при адиабатическом расширении по сравнению с изотермическим расширением на поверхности стока при равной плотности на поверхности поглощения. Фактически разница в плотностях более чем компенсирует пониженные градиенты давления на выходе из системы с неизотермическим течением. Это можно видеть из кривых (фиг. 261) распределения давления, построенных для линейной системы при $m = 1$ и $m = 0{,}71$.



Фиг. 261. Распределение давления в линейном канале, в котором движется идеальный газ при изотермическом режиме (кривая *I*) и адиабатическом режиме (для воздуха, кривая *II*);

x/L — отношение расстояний вдоль канала; p/p_2 — (давление при x) / (давление при x = 0).

3. Установившееся состояние двухразмерных (плоских) систем. По аналогии с уравнениями (8), гл. VI, п. 2, и (13), гл. X, п. 1, распределение давления для радиального течения дается выражением:

$$p^{1+m} = \frac{(p_e^{1+m} - p_w^{1+m})\ \ln r/r_w}{\ln r_e/r_w} + p_w^{1+m}, \qquad (1)$$

расход массы жидкости через систему толщиной h, связанной с давлением, будет:

$$Q = \frac{2\pi rhk\gamma}{\mu} \cdot \frac{dp}{dr} = \frac{2\pi rhk\gamma_0}{(1+m)\,\mu} \cdot \frac{dp^{1+m}}{dr} =$$

$$= \frac{2\pi hk\gamma_0 (p_e^{1+m} - p_w^{1+m})}{(1+m)\,\mu \ln r_e/r_w} = \frac{2Q_1}{1+m} \frac{1-(p_w/p_e)^{1+m}}{1-(p_w/p_e)^2}, \qquad (2)$$

где Q_1 — расход при изотермическом течении ($m = 1$), а именно

$$Q_1 = \frac{\pi hk\gamma_0 \Delta p^2}{\mu \ln r_e/r_w}. \qquad (3)^1$$

Аналогичным путем, замещая встречающиеся давления распределением давлений, выраженных через p^{1+m}, можно написать решения остальных задач установившегося течения газов в пористой среде,

---

[1] Это выражение, очевидно, можно написать так:

$$Q_1 = \frac{2\pi hk\bar{\gamma}\Delta p}{\mu \ln r_e/r_w},$$

где $\bar{\gamma}$ — среднеалгебраическая плотность в системе, так что $Q_1/\bar{\gamma}$ — объемный расход при среднем давлении в системе — дается той же самой формулой, что прилагается к течению жидкости.

соответствующих рассмотренным во второй части для несжимаемых жидкостей. Тогда можно получить распределение давления для движения газов, а для выражения расхода необходимо заменить Δp в соответствующих выражениях через $\gamma_0 \Delta p^{1+m}/(1+m)$[1].

Можно показать, что если распределение давления по круговым контурам радиальной системы даже непостоянно, все же удается использовать простую формулу радиального течения для нахождения величины расхода массы при условии, что граничные значения p заменяются усередненными значениями $\overline{p^{1+m}}$.

Поэтому в аналогичном случае будем иметь

$$Q = \frac{2\pi h k \gamma_0 (\overline{p_e^{1+m}} - \overline{p_w^{1+m}})}{(1+m)\,\mu \ln r_e/r_w}, \quad \text{[см. уравнение (12), гл. IV, п. 5]}. \qquad (4)$$

С другой стороны, если внешний контур, замыкающий скважину, не представлен окружностью, величину расхода в общем виде можно выразить так:

$$Q = \frac{2\pi h k \gamma_0 \Delta p^{1+m}}{(1+m)\,\mu \ln c/r_w}, \quad \text{[см. уравнение (6), гл. IV, п. 16]}, \qquad (5)$$

где c — константа, зависящая от формы внешнего контура и которую можно представить себе приближенно средним расстоянием скважины от внешнего контура.

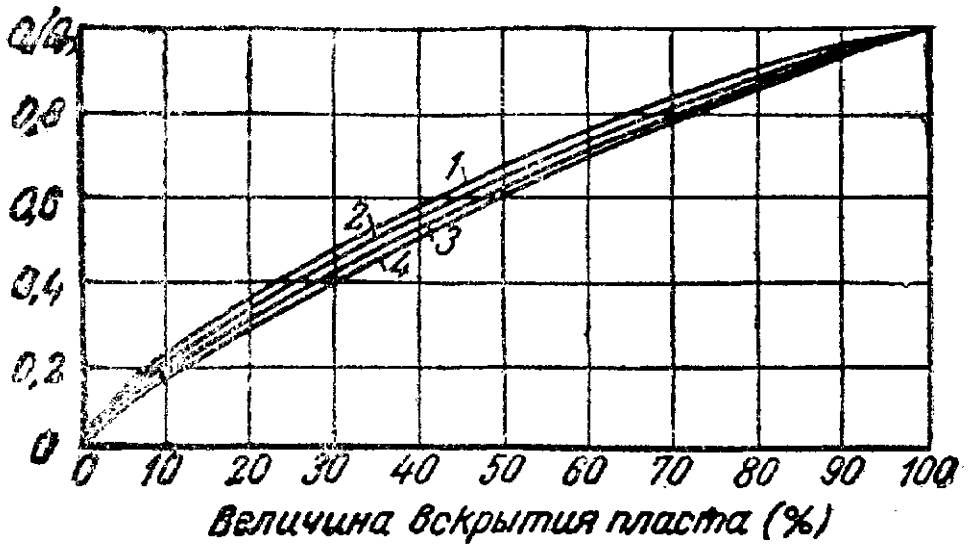
4. Трехразмерные (пространственные) системы в установившемся состоянии. Решения трехразмерных задач, представленные в гл. V, можно приложить без какой бы то ни было дальнейшей аналитической процедуры также и к соответствующим задачам движения газа в пористой среде. Распределение потенциала для несовершенных скважин (фиг. 81 и 82) можно приложить к скважинам с частичным вскрытием газовых горизонтов при условии, что давления или потенциалы принимаются в этом случае, если выражать их через p^{1+m}.

Следует отметить, что зависимость эксплоатационной производительности несовершенных скважин от величины вскрытия и мощности песчаника (фиг. 83 и 84) не может быть использована в настоящем случае непосредственным путем, так как эксплоатационная производительность на этих фигурах выражена в $м^3/сутки$ на 1 $ат$ снижения давления. Отношения эксплоатационной производительности для несовершенных и совершенных скважин при течении жидкостей, так же как и газов, тождественны между собой. Построения этих отношений приведены на фиг. 262 и 263. Абсолютные значения добычи массы газа из скважины, которые можно получить на основании этих фигур, умножая данные отношения на величину абсолютного расхода массы для совершенной скважины [согласно уравнению (2), гл. XI, п. 3], зависят не столько от типа течения, т. е. от значения m, но также и от абсолютных давлений. Так, при изотермическом течении ($m = 1$) метана с атмосферным

---

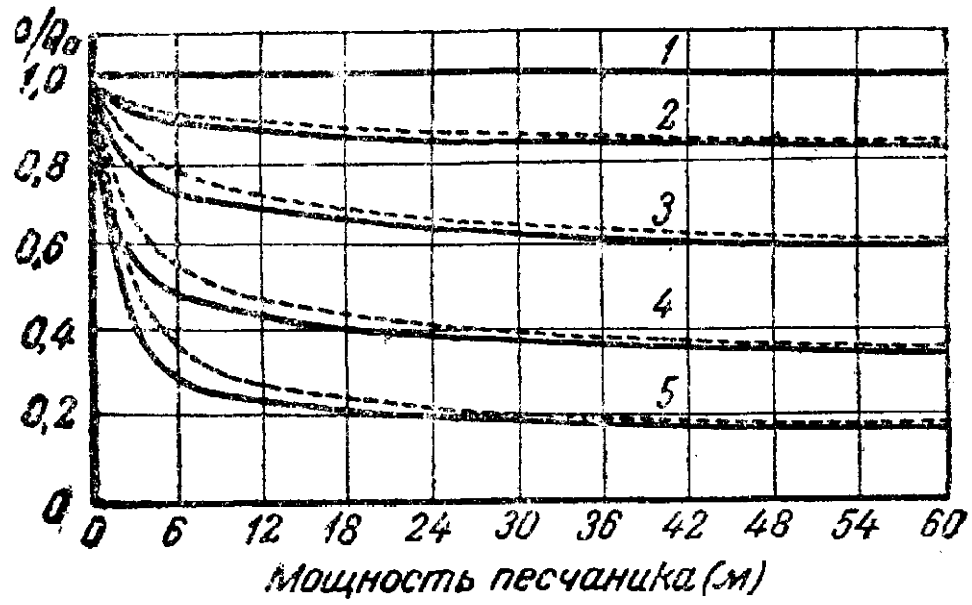
[1] Чтобы найти расход массы при соответствующем изотермическом течении газа, необходимо помножить выражение для расхода (объема), как это дается во второй части, на среднеалгебраическую плотность $\overline{\gamma}$.

давлением ($\mu = 0{,}012$ сантипуаза) в скважину, радиус которой 0,075 *м* из песчаника с мощностью 15,25 *м* и проницаемостью 1 дарси, где давление резервуара составляет 7 *ат* на расстоянии 152,5 *м* от скважин, уравнение (3), гл. XI, п. 3, дает величину расхода $2{,}52 \cdot 10^6$ *см³/сек* (при атмосферном давлении). Из фиг. 262 видно, что при 75% вскрытии песчаника расход будет составлять 87,3% соответствующей величины 100%-ного вскрытия, а при 50%-ном вскрытии только 66,9%. Отсюда абсолютные текущие дебиты для скважин с 75- и 50-%ным вскрытием будут соответственно $\frac{6{,}71 \cdot 10^6}{35{,}3}$ и $\frac{5{,}14 \cdot 10^6}{35{,}3}$ *м³/сутки*.



Фиг. 262. Относительная эксплоатационная производительность несовершенных скважин.

Q/Q_0 — (эксплоатационная производительность несовершенных скважин) / (эксплоатационная производительность совершенных скважин с того же самого песчаника); h — мощность песчаника; радиус скважины — 0,075 *м*; радиус внешнего контура — 152,5 *м*.
1 — $h = 15$ *м*; *2* — $h = 22{,}5$ *м*; *3* — $h = 37{,}5$ *м*
4 — $h = 60$ *м*.



Фиг. 263. Изменение относительной эксплоатационной производительности несовершенных скважин в зависимости от мощности песчаника; Q/Q_0 — (эксплоатационная производительность несовершенной скважины) / (эксплоатационная производительность совершенной скважины с того же самого песчаника):

сплошные линии — радиус скважины — 0,075 *м*; пунктирные линии — радиус скважины — 0,15 *м*; радиус внешнего контура — 152,5 *м*.
1 — величина вскрытия пласта — 100%; *2* — величина вскрытия пласта — 75%; *3* — величина вскрытия пласта — 50%; *4* — величина вскрытия пласта—25%; *5* — величина вскрытия пласта — 10%.

Для несовершенных скважин, проведенных на анизотропный песчаник, можно снова использовать выводы, полученные во второй части для несжимаемых жидкостей (гл. V, п. 5). Так, из фиг. 87 можно непосредственно получить текущие дебиты (объем при атмосферном давлении) из песчаника мощностью 37,5 *м* при различных значениях вскрытия и проницаемости по вертикали последнего, простым умножением ординат на член $\frac{hk\Delta p^{1+m}}{(1+m)\mu}$, h принимаем 37,5 *м*. Фиг. 88 остается строго справедливой без какого бы то ни было изменения.

5. Влияние силы тяжести на течение газов в пористой среде. При рассмотрении течения газов в пористой среде, поскольку речь идет о самом газе, можно совершенно пренебречь эффектом силы тяжести вследствие очень малой плотности газов даже при таких давле-

ниях, которые встречаются в подземных резервуарах. Кроме того, газ обычно заполняет полностью любое пространство, куда он только проникает. Поэтому при течении газа не будет свободных поверхностей, если даже дать возможность силе тяжести свободно воздействовать на газ[1]. Поэтому проблемы гравитационного течения жидкостей не представляют никакого интереса при изучении движения газов в пористой среде.

6. Установившееся течение газов в системах с непостоянной проницаемостью. Если пористая среда, в которой происходит установившееся движение газа, не является полностью однородной, следует видоизменить аналитическую процедуру прямого решения уравнения Лапласа (1), гл. XI, п. 2, принятую в предыдущих разделах. Если проницаемость среды изменяется непрерывно, следует заменить уравнение (1), гл. XI, п. 2, выражением:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial p^{1+m}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\,\frac{\partial p^{1+m}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\,\frac{\partial p^{1+m}}{\partial z}\right)=0, \qquad (1)$$

где пренебрегают гравитационным эффектом. Уравнение (1) можно решить тем же путем, что и соответствующее (2), гл. VII, п. 2, для жидкостей. Если проницаемость среды изменяется прерывно, можно снова прибегнуть к методам, развитым в гл. VII. Тогда уравнение Лапласа, выраженное через p^{1+m} [(1), гл. XI, п. 2], следует решить для каждой области с постоянной проницаемостью. Эти индивидуальные решения объединяются у поверхностей разрыва непрерывности таким образом, что давления и нормали скоростей сохраняются здесь непрерывными.

Чтобы получить действительные решения, необходимо заменить только p в распределении давления, выведенном в главе VII через p^{1+m}. В частности, для газовых скважин влияние местной неоднородности на текущие дебиты полностью соответствует главе VII. Так, для радиальных систем уравнение (11), гл. VII, п. 3, и фиг. 150 остаются справедливыми без всякого изменения. Для систем трещиноватых известняков, из которых добывается газ, можно воспользоваться полностью анализом гл. VII, пп. 4 и 5, заменяя, как уже было отмечено выше, p через p^{1+m}. Теория солянокислотной обработки карбонатных скважин, из которых добывается нефть, развитая в гл. VII, пп. 6 и 8, в равной степени справедлива для карбонатных резервуаров, из которых отбирается газ. Фиг. 157—159 остаются соответствующими истине, без всяких изменений.

Теория несовершенных газовых скважин, проведенных на слоистые горизонты, может быть взята полностью из гл. VII. Фиг. 162 дает

---

[1] Чтобы быть точным, следует отметить, что изменение плотности будет иметь место с изменением высоты, связанной с силой тяжести, как это существует в атмосфере. Вместе с тем это изменение будет иметь бесконечно малую величину по сравнению с изменением плотностей, которые связаны с изменением динамического давления в любой системе, имеющей практическую ценность.

эксплоатационную производительность скважины, только вскрывшей пласт песчаника, под которым на глубине 7,5 *м* залегает другой пласт бесконечной мощности с отличной проницаемостью. Полученную на фиг. 162 кривую производительности можно приложить также и к газовой скважине при установлении текущих дебитов из бесконечно распространяющегося однородного песчаника, если ординаты фиг. 162 привести к такому виду, что $k_2/k_1 = 1$. Наконец, если ствол газовой скважины частично заполняется песком, то относительное влияние песчаной пробки на эксплоатационную производительность скважины будет совершенно одинаковым по сравнению с теми условиями, когда из скважины добывается жидкость. Уравнения (8) и (19), гл. VII, п. 10, а также фиг. 164 остаются справедливыми без всякого изменения. Только ординаты на фиг. 165 следует принимать как $(p^{1+m} - p_w^{1+m})/\Delta p^{1+m}$.

7. Двухжидкостные системы. Водное конусообразование. Газ почти всюду встречается в подземных нефтяных резервуарах одновременно с нефтью. Однако эта связь не накладывает обязательного условия, чтобы течение газа и нефти соответствовало двухжидкостной системе которую мы рассматривали в главе VIII. До тех пор, пока газ находится в растворе, нефть будет двигаться в пористой среде только как однородная жидкость. Единственную роль, которую при этом играет газ, заключается в уменьшении вязкости нефти. В действительности это положение является неявным допущением, которое лежит в основе всей математической обработки, представленной в настоящей работе и посвященной течению жидкостей в пористой среде. Поскольку рассматриваемой жидкостью является нефть, движущаяся через подземный резервуар, ее следует брать как однородную жидкость. С другой стороны, если газ выделяется из раствора и более или менее рассеивается по всему содержащемуся в резервуаре объему нефти, все же нельзя рассматривать их как двухжидкостную систему, о которой шла речь в главе VIII. Скорее всего газ и нефть следует рассматривать при математической обработке как смесь или единую неоднородную жидкость, природа которой, как это определяется уравнением состояния, будет изменяться в общем от точки к точке. Рассмотрение такой задачи находится вне рамок настоящей работы.

Двухжидкостные системы, которые рассматривались нами в гл. VIII, вплоть до п. 10, включали в себя приближенный вертикальный раздел между двумя жидкостями, так что можно было представить себе, что одна жидкость вытесняет другую. Такие условия никогда не могут быть фактически реализованы в изотропной среде, поскольку обе жидкости имеют неодинаковую плотность. Однако мы все же принимаем такое положение в качестве приближения к физическому состоянию, если только разница плотности между обеими жидкостями мала, как это имеет место при продвижении воды в нефтяном песчанике. Если же вода продвигается в газовую зону, ясно, что такое допущение о существовании вертикальной поверхности раздела совершенно недопустимо. Вполне очевидно, что вода будет двигаться по нижнему слою пористой среды и будет образовывать с газом поверхность раздела, которую более правильно следует принять горизонтальной, чем вертикальной.

Если вода проникает в газоносный песчаник вдоль подошвы продуктивного слоя и если эксплоатационная скважина вскрыла последний не полностью, возникает проблема водяного конусообразования совершенно аналогично тому положению, при котором верхняя часть продуктивного горизонта насыщена нефтью. Физический анализ проблемы будет одинаков с аналитической процедурой гл. VIII, п. 10, для водяного конусообразования в нефтяном песчанике. Вместе с тем при аналитической обработке следует принять в расчет то обстоятельство, что ненарушенное распределение потенциала, которое было выведено в гл. V, п. 3, и использовано в гл. VIII, п. 11, в системе газового потока дает скорее значения p^{1+m}, чем p. Поэтому само распределение давления показывает более концентрированные градиенты, в данном случае вблизи скважины, по сравнению с результатами, приведенными в главе VIII.

Поскольку основное условие состояния равновесия [уравнение (1), гл. VIII, п. 10] включает в себя p линейно, ясно, что образование водяного конуса будет более затруднительно для газовой скважины, чем для нефтяной. Величина общей разности давления, необходимой для перемещения воды в скважину, пропорциональна разнице плотностей между обеими жидкостями. Отсюда разности критического давления для образования водяного конуса только по одной этой причине будут в три или четыре раза выше для газовой скважины по сравнению с их эквивалентами в нефтяной скважине. При этом следует, что образование водяного конуса будет гораздо легче подавляться и будет представлять собой меньшие трудности при эксплоатации газовых скважин по сравнению со скважинами, из которых добывается нефть. Если вода образует конус в скважине, то методы подавления последнего путем ограниченного отбора жидкости или же тампонажем забоя, как это уже рассматривалось в гл. VIII, являются одинаково успешными для газовых скважин, как и для нефтяных. Наконец, общий характер кривых фиг. 187, которые дают значения перепадов критического давления при образовании водяного конуса, показывает, что их можно приложить также к проблеме эксплоатации газовых скважин, хотя абсолютные значения перепадов давления в последнем случае, по всей вероятности, будут гораздо больше показанных на фиг. 187 по меньшей мере в четыре раза.

8. Газовые факторы в пористой среде, где газ и нефть движутся как однородные жидкости. При производстве теоретического анализа проблемы газонефтяных факторов, которые можно ожидать в скважинах, откуда отбираются совместно нефть и газ, следует рассматривать в конечном итоге, что в пределах подземного резервуара нефть и газ образуют неоднородную жидкость. На основании законов течения однородных жидкостей приближенно можно рассматривать некоторые предельные случаи, где газовая и нефтяная зоны по существу разделены между собой: по удельному весу углеводородов и миграцией газа в верхние слои продуктивного горизонта или же там, где нефть и газ движутся в двух раздельных, не связанных между собой, но параллельных зонах, вскрытых одной и той же скважиной. Значение газонефтяного фактора, который определяется объемом газа, замеренного при атмосферных

условиях, на единицу объема нефти состоит в том, что он является мерой коэфициента полезного действия эксплоатации и характеризует собой величину суммарной добычи, которую можно ожидать из нефтяного резервуара. Если R_i — первоначальный газовый фактор резервуара, p_i — первоначальное давление резервуара, $\bar{R}$ — средний газовый фактор, существующий до тех пор, пока среднее давление месторождения не упадет до $\bar{p}$, то долевая добыча нефти P из песчаника ко времени, соответствующему $\bar{p}$, дается соотношением:

$$P \geqslant \frac{R_i (p_i - \bar{p})}{\bar{R} p_i} . \qquad (1)$$

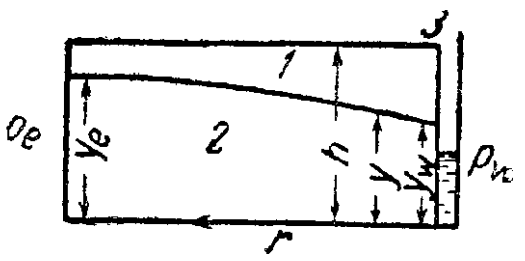
Это равенство применяется в том случае, где отсутствуют песчаники со свободным газом, связанные или не связанные с нефтяным песчаником, который обнажен стволом скважины, и которые участвуют в наблюденном среднем газовом факторе $\bar{R}$. Если в системе представлены песчаники со свободным газом, откуда газ отбирается по трубкам, к ним можно приложить неравенство уравнения (1)[1].

За исключением указанной формулировки, уравнение (1) сохраняет свою справедливость вне зависимости от отдельных методов добычи нефти. При этом не делается никакого допущения относительно присутствия или отсутствия гидравлического режима о том, подчиняется или не подчиняется газ закону Генри, эксплоатируется месторождение в открытую или с регулируемым противодавлением, расстояние между скважинами велико или мало, обладает пласт большой мощностью или малой, велика ли проницаемость его или мала. Высокий газовый фактор в течение длительного времени по необходимости повлечет за собой низкую суммарную отдачу нефти. Поэтому любой метод добычи нефти, который при данных условиях обеспечивает низший газовый фактор, должен явиться для данного случая наиболее эффективным методом эксплоатации. В свете этого обстоятельства становится очевидной важность тщательного наблюдения и контроля за газовым фактором в процессе эксплоатации месторождения. Единственным видом контроля, который можно осуществить на поверхности по отношению к отдельным сторонам течения в пределах резервуара, является изменение забойного давления, регулирующего величину текущих дебитов из скважин. Отсюда основным требованием по отношению к газовому фактору является его зависимость от противодавления или забойного давления, которое поддерживается на обнаженном фасе песчаника в скважину. Эту зависимость мы подвергнем рассмотрению в настоящей главе.

9. Газовые факторы для сообщающихся газовых и нефтяных зон. Допустим, как это показано на диаграмме (фиг. 264), что первоначально газ был отделен или же разделился по гравитационному признаку в процессе эксплоатации и ушел в верхнюю часть продуктивного горизонта, так что газ и нефть движутся раздельно как одно-

[1] Если принять, что R_i включает в себя также газ из любого такого песчаника со свободным газом, то по вполне понятным причинам это равенство должно сохранять свою справедливость.

родные жидкости с общей поверхностью раздела. При этом у газа будет иметься тенденция создавать направленный вниз конус и вводить в систему гравитационный поток, а с ним и вертикальные скорости в обеих зонах — газовой и нефтяной. Однако в качестве первого приближения мы пренебрежем этими вертикальными скоростями и возьмем горизонтальные компоненты скорости постоянными по всему поперечному сечению направления потока. Так как нефть и газ имеют общую поверхность раздела, то давления в обеих фазах с двух сторон поверхности раздела должны быть одинаковыми. Отсюда, согласно принятому допущению, напоры жидкости будут одинаковыми в любом вертикальном цилиндре, проведенном в песчанике, коаксиальном со скважиной и отнесенном к нефтяной или газовой зоне. Тогда, обозначив через $y(r)$ высоту поверхности раздела при r, а через Q_g, Q_0 — величины отбора газа и нефти из обеих зон, получим в результате, согласно законам движения газа и жидкости движение газа изотермическим, что в условиях стационарного потока через пески, принимая



Фиг. 264. Схема нефтяной и чисто газовой зоны соединяющихся вместе в одном и том же стволе скважины.

1 — газ; *2* — нефть; *3* — скважина.

$$Q_g = \frac{\pi k r (h-y)}{\mu_g} \frac{\partial p^2}{\partial r} \quad \text{[уравнение (2), гл. XI, п. 3]}, \tag{1}$$

$$Q_0 = \frac{2\pi k r y}{\mu_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial r}, \tag{2}$$

где h — общая мощность песчаника; μ_g, μ_0 — соответственные вязкости газа и нефти; p — давление в r; Q_g — объем газа при атмосферном давлении. В дополнение к расходу Q_0, связанному с радиальными градиентами давления, в системе будет существовать также компонент силы тяжести. Однако можно показать отдельным подсчетом, что следует совершенно пренебречь влиянием последнего на величину газового фактора. Поэтому можно принять значение Q_g/Q_0 как газовый фактор или

$$R = \frac{Q_g}{Q_0} = \frac{\mu_0 (h-y) p}{\mu_g y}. \tag{3}$$

При условиях стационарного течения это отношение должно оставаться при всех значениях r одинаковым. Отсюда величину R можно подсчитать из значений p и y на внешней границе песчаника, т. е. на большом расстоянии от скважины. Тогда

$$R = \frac{\mu_0 p_e (1 - y_e/h)}{\mu_g y_e/h}, \tag{4}$$

где p_e — давление резервуара, а y_e/h — доля общей мощности песчаника, насыщенная нефтью на значительной дистанции от скважины. Так как уравнение (4) не содержит в себе давления на скважине p_w, ясно, что для настоящего случая газовый фактор прямо пропорционален давлению резервуара, но не зависит от противодавления. По мере того

как песчаник истощается, p_e и y_e уменьшаются и изменяется величина R, хотя в любой данный отрезок времени значение R остается фиксированным вне зависимости от колебаний противодавления или текущих дебитов. Если принять, что y_e уменьшается линейно и даже более резко с падением значения p_e, R будет возрастать с истощением песчаника.

Чтобы закончить физическое описание этого типа эксплоатации, подсчитаем геометрическую форму поверхности раздела газ — нефть, а также распределение давления при уже сделанных допущениях. Так, умножая уравнение (1) на $hy\mu_g$, а уравнение (2) на $\mu_0 p$ и складывая их, найдем, что

$$r\frac{\partial p^2}{\partial r} = \frac{Q_0\mu_0}{\pi kh}p + \frac{Q_g\mu_g}{\pi kh}.$$

Решение этого уравнения будет:

$$\ln\frac{r_e}{r} = \frac{1}{b}\left[p_e - p - \right.$$

$$\left. - \frac{a}{b}\ln\frac{p_e + a/b}{p + a/b}\right], \qquad (5)$$

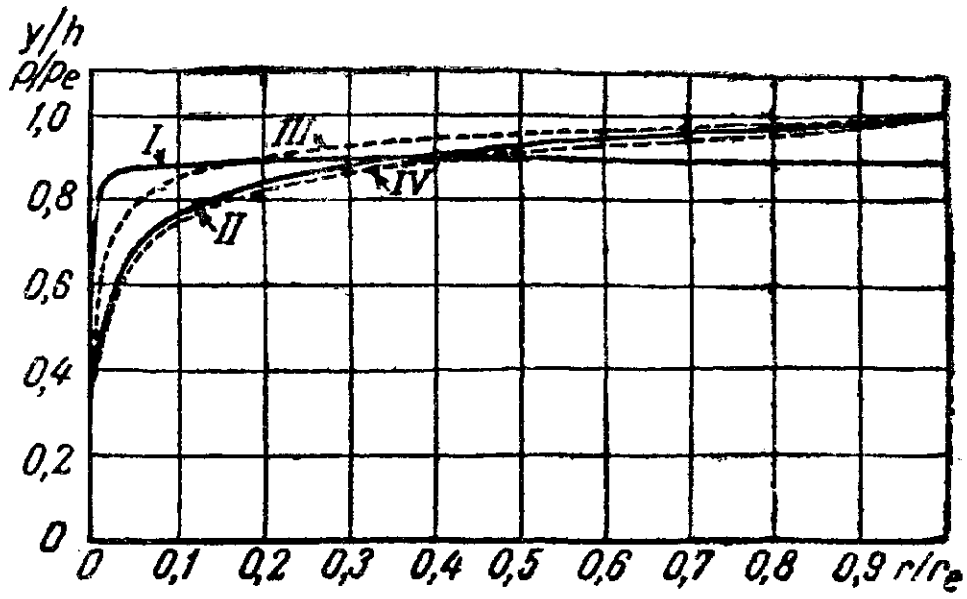
где

$$a = \frac{Q_g\mu_g}{2\pi kh};$$

$$b = \frac{Q_0\mu_0}{2\pi kh}. \qquad (6)$$

Величину a/b можно найти из соотношения

$$\frac{a}{b} = \frac{1 - y_e/h}{y_e/h}\,p_e,$$



Фиг. 265. Геометрическая форма поверхности раздела (y/h) и распределение давления (p/p_e) в соединяющихся между собой нефтяной и чисто газовой зонах:

y — высота поверхности раздела газ—нефть поверх подошвы песчаника; h — общая мощность газового и нефтяного песчаников; I — y/h; II — p/p_e; III — p/p_e — для газовой зоны, если она изолирована; IV — p/p_e — для нефтяной зоны, если она изолирована; p_e — давление резервуара (при r_e) — 70 *am*; $y_e/h = 0{,}9$; давление скважины — 10 *am*.

что вытекает непосредственно из уравнений (4) и (6); b можно подсчитать, принимая $r = r_w$, радиусу скважины (где $p = p_w$) в уравнении (5).

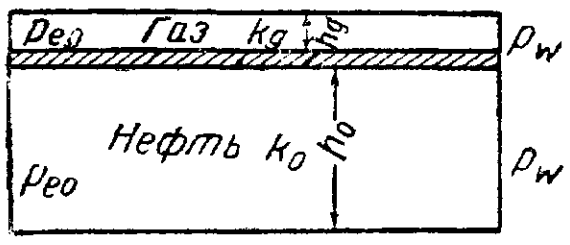
Возьмем пример из практики:

$$y_e/h = 0{,}9; \quad p_e = 70\ am; \quad p_w = 10\ am, \quad \frac{r_e}{r_w} = 2000$$

и подсчитаем, согласно уравнению (5), распределение давления, а на основании (3) примем геометрическую форму поверхности раздела газ — нефть. Результаты этих подсчетов показаны на фиг. 265. Видно, что эффект образования конуса депрессионной воронки у газа сильно локализован вблизи скважины, хотя поверхность нефти на забое скважины имеет депрессию $62^0/_0$ своей высоты стояния на внешней границе песчаника. Распределение давления в этой сложной системе можно сравнить с соответствующими величинами, которые представлены на фиг. 265 пунктирными линиями, показывающими распределение давления, существующее в газовой и нефтяной зонах при условии, что они не соединены между собой. Эти кривые показывают физический смысл

воронкообразной поверхности, когда газовая и нефтяная зоны связаны между собой. Вполне естественно, что если позволить газу свободно реагировать с нефтью, газ будет стремиться благодаря более высоким давлениям в газовой зоне создать депрессию нефтяной поверхности. Как это в действительности показывает кривая *II*, результирующее распределение в состоянии равновесия будет, повидимому, средней величиной между его значениями для изолированной газовой и нефтяной зоны.

10. Газовые факторы несообщающихся между собой газовых и нефтяных песчаников. В этом случае газовые и нефтяные зоны могут залегать в совершенно не связанных между собою песчаниках. Будучи вскрыты одной и той же скважиной, эти зоны могут и не обладать одинаковым давлением резервуара. Обозначая давление резервуара для газа через p_{eg}, а для нефти через p_{eo}, можно произвести выбор между тремя возможными случаями, а именно: $p_{eg} > p_{eo}$; $p_{eg} = p_{eo}$ и $p_{eg} < p_{eo}$. Во всех случаях, разумеется, давления скважин [1] принимаются одинаковыми и обозначаются через p_w. Мощность газовой и нефтяной зоны обозначим через h_g и h_0, а их проницаемости через k_g и k_0 (фиг. 266).



Фиг. 266. Схема несоединяющихся между собою нефтяной и чисто газовой зон, обнаженных в один и тот же ствол скважины.

Тогда, прикладывая формулы стационарного радиального потока для газа и жидкости, получим текущие объемные дебиты газа и жидкости из следующих выражений:

$$Q_g = \frac{\pi k_g h_g (p_{eg}^2 - p_w^2)}{\mu_g \ln r_e/r_w} + R_0 Q_0, \tag{1}$$

$$Q_0 = \frac{2\pi k_0 h_0 (p_{eo} - p_w)}{\mu \ln r_e/r_w}, \tag{2}$$

где R_0 представляет собой газовый фактор, связанный с любым иным газом в системе, за исключением того, что находится в несообщающейся зоне. Допустим, что присутствие этого газа не нарушает справедливости уравнения (2) для течения нефти и что газовый фактор R_0 не зависит от противодавления.

Тогда результирующий газовый фактор будет:

$$R = \frac{Q_g}{Q_0} = R_0 + \frac{c (p_{eg}^2 - p_w^2)}{p_{eo} - p_w}, \tag{3}$$

где c — константа:

$$c = k_g \mu_0 h_g / 2 k_0 \mu_g h_0.$$

---

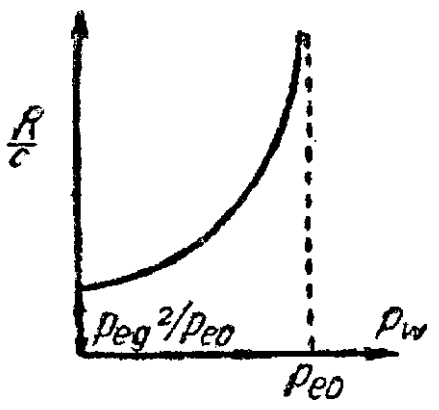
[1] Чтобы быть точным, следует заметить, что давления скважин, за вычетом напоров жидкости от кровли песчаника, будут одинаковыми в обеих зонах. Но так как давления резервуара включают в себя также и эти коррективы, то, очевидно, не будет большой ошибки в простом использовании значения давлений скважин.

Так как было принято, что R_0 не зависит от противодавления, его значение можно опустить из рассмотрения R как функции p_w. Поэтому только последний член следует рассматривать как

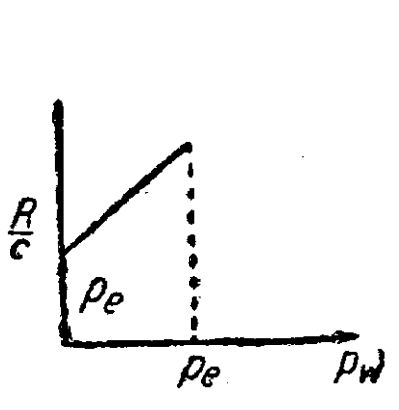
$$R = \frac{c\,(p_{eg}^2 - p_w^2)}{p_{eo} - p_w}. \tag{4}$$

Из наклона кривых R по отношению к p_w можно наблюдать детальное изменение R в зависимости от кривых p_w. Эти кривые получаются построением графика следующего выражения:

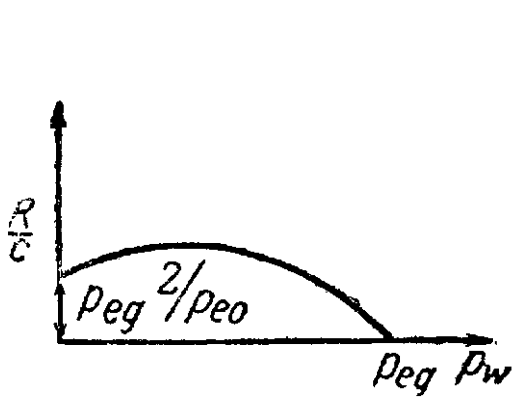
$$\frac{\partial R}{\partial p_w} = c\left[1 + \frac{p_{eg}^2 - p_{eo}^2}{(p_{eo} - p_w)^2}\right]. \tag{5}$$



Фиг. 267. Схема изменения газонефтяного фактора (R) в зависимости от противодавления (p_w), если давление резервуара в чисто газовой зоне (p_{eg}) превосходит величину давления нефтяной зоны (p_{eo}); $c = k_g\mu_0 h_g / 2k_0\mu_g h_0$, где индексы g и o относятся к газовой или нефтяной зонам с соответствующими мощностями.



Фиг. 268. Схема изменения газонефтяного фактора (R) в зависимости от противодавления (p_w), если давление резервуара в чисто газовой зоне (p_{eg}) равняется величине давления в нефтяной зоне (p_{eo}). Обозначения принимаются те же, что и на фиг. 267.



Фиг. 269. Схема изменения газонефтяного фактора (R) в зависимости от противодавления (p_w), если давление резервуара в чисто газовой зоне (p_{eg}) меньше величины давления в нефтяной зоне (p_{eo}). Обозначения принимаются те же, что и на фиг. 267.

Отсюда вытекает, что если

$$\text{a)}\quad p_{eg} > p_{eo},$$

то $\frac{\partial R}{\partial p_w} > 0$ и увеличивается с возрастанием противодавления до значения давления резервуара в нефтяной зоне. Кривые газового фактора будут иметь вид, приведенный на фиг. 267:

$$\text{b)}\quad p_{eg} = p_{eo},$$

$$\frac{\partial R}{\partial p_w} = c = \text{const},$$

$$R = c\,(p_e + p_w).$$

Как это показано на фиг. 268, газовый фактор в данном случае будет возрастать линейно с ростом противодавления

$$\text{c)}\quad p_{eg} < p_{eo},$$

$\partial R/\partial p_w > 0$ для $p_w \approx 0$, но изменяет свой знак раньше, чем p_w возрастет до величины давления газового резервуара. По мере того как достигается значение p_{eg}, газовый фактор, связанный с зоной свободного газа, доходит в конечном итоге до нуля.

Геометрическая форма кривой дается на фиг. 269. В последнем случае ни при каких обстоятельствах не будет существовать минимум газового фактора. В отношении изменения газового фактора в зависимости от величины отбора нефти необходимо только обратить построение для p_w. Тогда полученные выше результаты примут следующий вид.

(*a*) $p_{eg} > p_{eo}$: R возрастает (быстрее, чем линейно) с падением текущего дебита. Значение его становится бесконечно большим в зависимости от роста противодавления и достигает величины давления нефтяного резервуара, соответствующего положению, когда газ выпускается полностью в атмосферу, а нефть совершенно не отбирается из пласта.

(*b*) $p_{eg} = p_{eo}$: R линейно увеличивается с падением текущих дебитов.

(*c*) $p_{eg} < p_{eo}$. По мере того как падают текущие дебиты, газовый фактор медленно возрастает до максимума. Затем он падает в связи с дальнейшим снижением текущего дебита до значения, более низкого по сравнению с соответствующей величиной при фонтанировании в открытую.

Следует понимать, что необходимо добавить к полученным выше величинам газовых факторов допущенное постоянное значение газового фактора R_0, связанное с наличием иного газа в системе. Кроме того, необходимо заметить: так как давления в зонах свободного газа в целом обладают тенденцией к более резкому падению по сравнению с падением в нефтяных зонах, кривые газового фактора, которые первоначально обладают формой, представленной на фиг. 267, по мере того как песчаник подвергнется полностью истощению [1], будут стремиться изменить ее на форму, показанную на фиг. 268, а может быть даже и фиг. 269 Отдельные стороны этого преобразования будут зависеть в основном от величины относительной проницаемости песчаников, содержащих свободный газ или нефть, относительного объема резервуаров и от разности первоначальных давлений в последних. Можно заметить также, что до тех пор, пока уравнение (4) остается справедливым, численное значение газового фактора с падением давления в резервуаре и истощением песчаника будет уменьшаться при условии, что отношение $p_{eg}/p_{eo} \leqslant 1$ остается неизменным или же падает. Это означает, что для соответствующих забойных давлений газовые факторы с продолжительностью разработки месторождения должны в основном снижаться. Так как единственное изменение, которое может существовать для течения в зоне свободного газа, связано с падением давления резервуара, рост газового фактора при снижении кривой добычи нефти следует отнести к изменениям параметров нефтяного песчаника.

Эти изменения включают уменьшение проницаемости для жидкости, связанное с образованием газовых пузырьков в песчанике, или же развитие горизонта свободного газа в пределах нефтяного песчаника,

---

[1] Получению значительной разности между p_{eg} и p_{eo} будет противодействовать тенденция нефтяной зоны к «репрессии» газовой зоны через ствол скважины при условии, что p_{eg} упадет значительно ниже p_{eo}.

а может быть и оба эти явления вместе. Последнее явление, повидимому, будет увеличивать значение той части общего газового фактора, которая связана с нефтяным песчаником. Если этот рост более чем сбалансирует падение части газового фактора, которая связана с чисто газовым песчаником, результирующий газовый фактор будет возрастать по мере истощения песчаников. Действительно, обычные наблюдения показывают, что газовый фактор в нефтяном месторождении возрастает в продолжение всего периода естественного фонтанирования и более позднего глубоконасосного периода. Это явление всецело связано с только что упомянутым наблюдением. Основным фактором при этом условии, без всякого сомнения, является образование чисто газовой зоны, залегающей в верхней части нефтяного горизонта, или зоны прорыва. Для этой зоны характерно неполное истощение нефти и отсутствие течения „сухого" газа [1]. Вернее всего эта зона представлена высоким соотношением свободного газа, которое существует при низких стояниях нефти в пласте. При этом газ получает возможность прорыва, как будто в песчанике имеются свободные каналы для его выпуска.

11. Влияние спуска в скважину фонтанных трубок на величину газового фактора. Анализ последних двух разделов основывался на допущении, что величина газового фактора определяется только по забойному давлению, но отнюдь не аппаратом, установленным в стволе скважины. Кроме того, было совершенно точно принято, что забойные давления p_w остаются всегда одинаковыми для нефтяных и газовых песчаников. Выводы, полученные согласно этому допущению, остаются справедливыми для всех практических целей при условии маломощных песчаников и высоких текущих дебитов. Однако в том случае, когда мощные пласты песчаников эксплоатируются при малых разностях давления и когда фонтанные трубки спущены ниже кровли продуктивного горизонта, эти выводы требуют некоторого видоизменения.

Чтобы рассмотреть природу и величину этих видоизменений, подвергнем вновь, несколько детальнее, обсуждению расчет газового фактора для пласта песчаника, где газ и нефть отбираются из примыкающих друг к другу газовых и нефтяных зон.

Так, если обозначим давления на поверхности раздела между нефтяной и газовой зоной через p_w и p_e, то перепад давления, действующий в нефтяной зоне, будет „$p_e - p_w$", а действующий в газовой зоне будет иметь среднее значение $p_e - \left(p_w - \frac{\gamma g h_g}{2}\right)$, где γ — плотность нефтегазовой смеси, а h_g — мощность газовой зоны (фиг. 270) [2]. Если

---

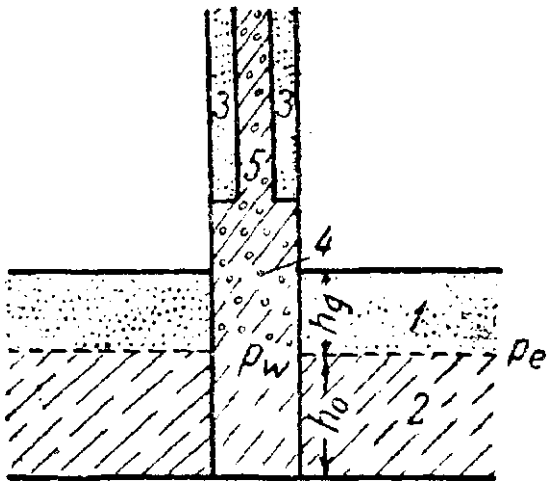
[1] Изучение течения однородных жидкостей в песчаниках (M. Muskat and M. W. Meres, Physics, 7, 346, 1936) показало вполне определенно, что эмпирические наблюденные минимумы газовых факторов относительно кривых текущих дебитов и равномерный рост газовых факторов с возрастом месторождения объясняются последовательностью изменения проницаемости песчаника одновременно с изменением содержания в нем жидкости свободного газа.

[2] В данном случае, так же как и во всех остальных разделах настоящей работы, мы пренебрегаем падением динамического сопротивления вдоль фаса продуктивного песчаника, связанного с течением жидкости внутри фонтанных труб.

сохранить неизменной величину забойного давления, приведенные разности давления, а отсюда текущие дебиты нефти и газа, и также их соотношения не будут зависеть от положения трубок, поскольку они установлены поверх кровли песчаника.

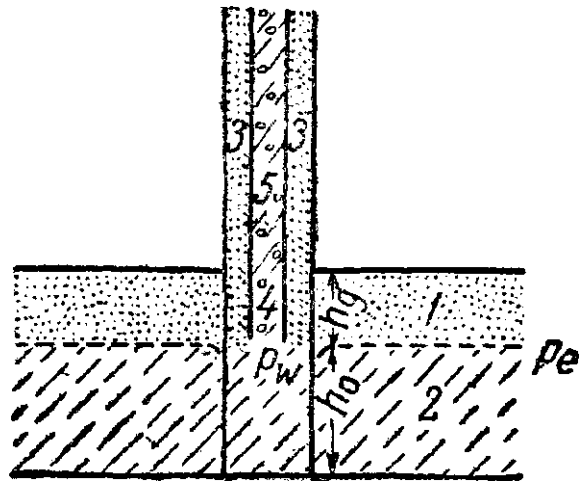
Если трубки спущены ниже кровли песчаника, то даже при неизменном значении p_w будет иметь место изменение в величине относительных разностей давления, действующих в нефтяной и газовой зоне.

Для простоты допустим, что трубки спущены только до кровли нефтяной зоны (фиг. 271). Тогда общий перепад давления, действующий на нефть, будет $p_e - p_w$. Но в газовой зоне существует тот же самый перепад с величиной $p_e - p_w$, так как фас песчаника против газовой



Фиг. 270. Схема примыкающих нефтяной и чисто газовой зон, работающих через фонтанные трубки, установленные поверх кровли газовой зоны:

1 — газовая зона; *2* — нефтяная зона; *3* — газ; *4* — нефть и газ; *5* — колонна фонтанных трубок.



Фиг. 271. Схема примыкающих нефтяной и чисто газовой зон, работающих через фонтанные трубки, установленные в подошве газовой зоны:

1 — газовая зона; *2* — нефтяная зона; *3* — газ; *4* — газ и нефть; *5* — фонтанные трубки.

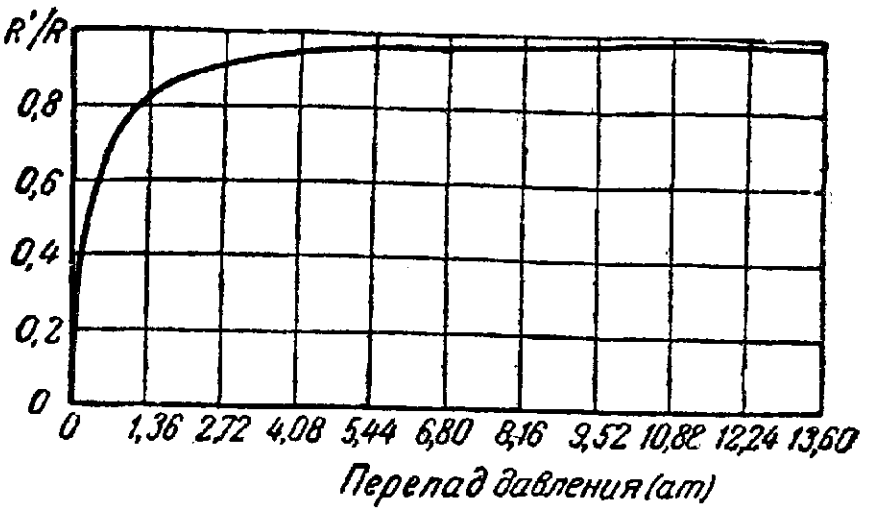
зоны будет теперь открыт для газа (имеющего пренебрежимо малую плотность) при давлении p_w. Поэтому величина расхода газового потока Q_g' при опущенных вниз трубках будет меньше по сравнению с соответственной величиной при более высоком стоянии трубок Q_g. Действительно, отношение обоих расходов будет:

$$\frac{Q_g'}{Q_g} = \frac{p_e^2 - p_w^2}{p_e^2 - \left(p_w - \frac{\gamma g h_g}{2}\right)^2} = \frac{R'}{R} < 1. \qquad (1)$$

Это уравнение выражает также отношение между газовыми факторами до и после спуска фонтанных трубок.

Благодаря эффективному росту противодавления на газовую зону допуск последних будет снижать газовый фактор по сравнению с противодавлением на нефтяную зону. На фиг. 272 показана количественная характеристика эффекта допуска трубок в скважину. Эту характеристику дает построение отношения R'/R из уравнения (1) как функции разности давления. Давление резервуара принимается 68 *ат*, а мощность газовой зоны 7,5 *м*. Как и следует ожидать, с ростом перепада давления этот эффект падает, так как напор жидкости

7,5 *м*, создающий повышение противодавления на газовую зону при опущенных вниз трубках, обращается в малую долю общей разности давления, когда последнее превышает величину порядка 6,8 *ат*. Что же касается влияния абсолютного значения давления резервуара, то величина R'/R остается практически постоянной вплоть до значений p_e около 6,8 *ат*, когда оно начинает значительно увеличиваться соответственно значениям, приведенным на фиг. 272.



Фиг. 272. Влияние допуска фонтанных трубок на изменение газонефтяного фактора в зависимости от перепада динамического давления:

R'/R — (газонефтяной фактор после допуска трубок к подошве чисто газовой зоны) / (газонефтяной фактор при фонтанных трубках, установленных поверх чисто газовой зоны); мощность газовой зоны — 7,5 *м*; давление резервуара — 68 *ат*; плотность нефти принимается 0,8 *г/см*³.

Когда трубки не установлены совершенно точно против поверхности раздела газонефтяной зоны, выражение для R' становится более сложным. Пока трубки не спущены ниже кровли нефтяной зоны, величина противодавления на последнюю не будет затронута. Возрастет только противодавление на газовую зону. Когда же нижний конец трубок находится против нефтяной зоны, действительное противодавление на нефтяную и газовую зону возрастает. Обозначая через h_g и h_o соответственные мощности газовой и нефтяной зон, через $\bar{p}_e$ и $\bar{p}_w$ — давление в резервуаре и на забое скважины, приведенное к уровню поверхности раздела газ — нефть при трубках, установленных над газовой зоной [1], через h_t — общую длину трубок ниже кровли газовой зоны, и пренебрегая падением давления вдоль столба газа в стволе скважины, можно свободно показать, что для $h_t \leqslant h_g$:

$$\frac{R'}{R} = \frac{(h_g \cdot h_t)\left\{\bar{p}_e^2 - \left[-\frac{\gamma g(h_g - h_t)}{2} + \bar{p}_w\right]^2\right\} + h_t\left\{\bar{p}_e^2 - [\bar{p}_w - \gamma g(h_g - h_t)]^2\right\}}{h_g\left[\bar{p}_e^2 - \left(\bar{p}_w - \frac{\gamma g h_g}{2}\right)^2\right]} \qquad (2)$$

для $h_t \geqslant h_g$:

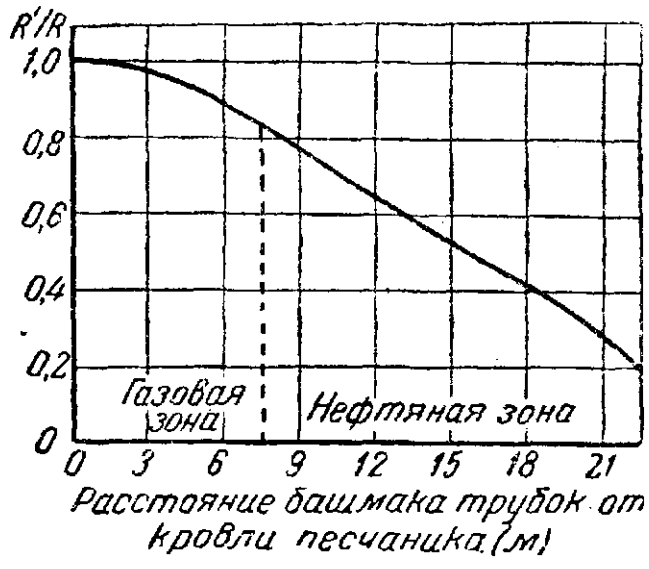
$$\frac{R'}{R} = \frac{h_o(\bar{p}_e - \bar{p}_w)\left\{\bar{p}_e^2 - [\bar{p}_w + \gamma g(h_t - h_g]^2\right\}}{\left[h_o(\bar{p}_e - \bar{p}_w) - \frac{\gamma g}{2}\left(h_t - h_g\right)^2\right]\left[\bar{p}_e^2 - \left(\bar{p}_w - \frac{\gamma g h_g^2}{2}\right)\right]}, \qquad (3)^2$$

[1] На этом основании $\bar{p}_e$ и $\bar{p}_w$ являются истинными давлениями p_e и p_w в подошве нефтяной зоны, за вычетом напора последней $\gamma g h_0$, пренебрегая разностью плотностей жидкости в трубках и нефти в пласте песчаника.

[2] Для случая, где уровень жидкости в стволе скважины снижается к нижнему концу трубок и устанавливается ниже кровли нефтяной зоны, течение в последней будет сложным, радиальным и гравитационным. Подсчет его следует производить строго по формулам гл. VI. Вместе с тем, чтобы показать общий характер этого явления, следует принять равноценную, но более простую формулу—уравнение (3), базирующееся на двухразмерном течении в обеих зонах — нефтяной и газовой.

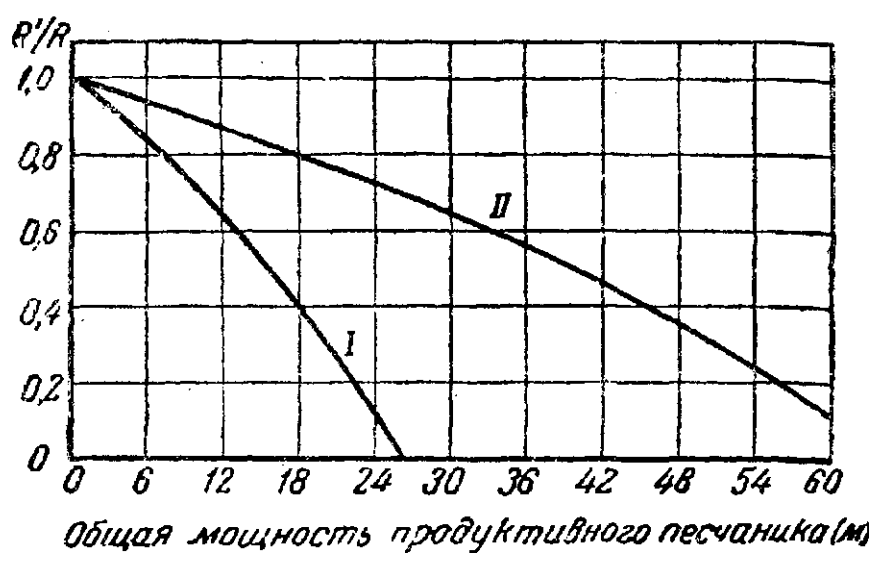
где R' и R являются газовыми факторами до и после допуска вниз трубок. Во всех этих подсчетах принимается, что течение происходит в горизонтальной плоскости.

На фиг. 273 приведено построение влияния допуска труб на величину газового фактора в зависимости от глубины ниже кровли газовой зоны, подсчитанное согласно уравнениям (2) и (3) при следующих параметрах: $\bar{p}_e = 68$ *am*, $\bar{p}_w = 66{,}64$ *am*, $h_g = 7{,}6$ *м*, $h_o = 15{,}25$ *м*, $\gamma = 0{,}8$ *г/см*^{3}. Из фиг. 273 видно, что если опустить трубки к подошве песчаника, то газовый фактор будет снижен при этих условиях до 0,2 своей первоначальной величины. Можно заметить, что для вывода



Фиг. 273. Влияние допуска фонтанных трубок на изменение газового фактора в зависимости от глубины трубок ниже кровли чисто газовой зоны:

R'/R — (газонефтяной фактор после допуска трубок) / (газонефтяной фактор при трубках, установленных выше чисто газовой зоны); давление резервуара — 68 *am*; забойное давление — 66,64 *am*; мощность чисто газовой зоны — 7,5 *м*; мощность нефтяной зоны — 15 *м*; плотность нефти принимается 0,8 *г/см*^{3}.



Фиг. 274. Влияние на величину газонефтяного фактора допуска фонтанных трубок к подошве продуктивного песчаника в зависимости от общей мощности песчаника:

R'/R — (газонефтяной фактор после допуска трубок) / (газонефтяной фактор при трубках, установленных поверх чисто газовой зоны); давление резервуара — 68 *am*; мощность нефтяной зоны — 2 мощности газовой зоны; *I* — перепад динамического давления на уровне поверхности раздела газонефтяной зоны — 1,36 *am*; *II* — перепад динамического давления на уровне поверхности раздела газонефтяной зоны — 3,4 *am*; плотность нефти принимается 0,8 *г/см*^{3}.

уравнений (2) и (3) мы пренебрегаем гравитационным течением в нефтяной зоне, которое создается при допуске трубок ниже кровли нефтяной зоны. Отсюда фактическое снижение газового фактора будет даже несколько выше по сравнению с фиг. 273.

В качестве последнего примера, относящегося к влиянию допуска трубок на величину газового фактора и который можно изучать с помощью уравнений (2) и (3), интересно рассмотреть зависимость R'/R от суммарной мощности газонефтяной зоны. С этой целью допустим, что трубки установлены близко к подошве продуктивного горизонта, т. е. $h_t = h_o + h_g$. Тогда уравнение (3) примет вид:

$$\frac{R'}{R} = \frac{(\bar{p}_e - \bar{p}_w)\left[\bar{p}_e^2 - (\bar{p}_w + \gamma g h_o)^2\right]}{\left(\bar{p}_e - \bar{p}_w - \frac{\gamma g h_o}{2}\right)\left[\bar{p}_e^2 - \left(\bar{p}_w - \frac{\gamma g h_g}{2}\right)^2\right]}. \qquad (4)$$

Принимая $\bar{p}_e = 68$ *am* и допуская, что мощность газовой зоны h_g составляет половину нефтяной зоны h_o, построим уравнение (4) как функцию общей мощности песчаника для перепадов давления 1,36 *am* ($\bar{p}_w = 66{,}64$ *am*, кривая *I*) и 3,4 *am* ($\bar{p}_w = 64{,}6$ *am*, кривая *II*) (фиг. 274). Эти кривые ясно показывают возрастающий эффект допуска трубок на величину газового фактора в более мощных песчаниках. Кривая *I* показывает, что если песчаник настолько мощен, что эквивалентный ему напор жидкости равняется перепаду давления в пласте песчаника, дополнительное противодавление, связанное с этим напором жидкости, может совершенно приостановить течение газа из газовой зоны и свести к нулю значение газового фактора. Разумеется нулевое значение газового фактора, так же как и ординат всех построений настоящего раздела, относится к газу, который поступает из зоны свободного газа, непосредственно расположенной над нефтяной зоной, так как только на этот поток газа может влиять положение спущенных фонтанных трубок.

Следует заметить, что все приведенные рассуждения основывались на допущении, что газ не имеет другого пути для выхода из пласта, за исключением фонтанных трубочек. Поэтому, если последние спущены ниже обнаженного забоя песчаника, уровень жидкости между обсадными и фонтанными трубками оттесняется к нижнему концу последних, как это указано на фиг. 271. Если обсадные трубы не герметичны и позволяют газу улетучиваться, столб жидкости в скважине может и не оттесниться до кровли песчаника. В таком случае не следует ожидать какого-либо изменения на величины газового фактора от допуска вниз фонтанных трубок. Отсюда в качестве конечного вывода следует, что если обсадные трубы герметичны, давление в затрубном пространстве должно всегда равняться давлению у башмака фонтанных трубок, за вычетом веса столба газа и колебаний, связанных с пульсацией. Это давление должно увеличиваться с допуском фонтанных трубок.

Если затрубное давление соответствует столбу жидкости над обнаженным забоем песчаника, даже при трубках, спущенных ниже кровли песчаника, любые изменения при том же текущем дебите нефти, которые можно наблюдать в величине газового фактора, следует рассматривать как недостоверные. Эти изменения следует отнести к перераспределению общего количества газа, выделившегося из газовой зоны, между утечкой через обсадные трубы и выделением из ствола скважины через фонтанные трубки. Повидимому, не существует иного решения этого вопроса, если придерживаться основного положения, что течение нефти или газа из продуктивных песчаников данной геометрии, проницаемости и давления резервуара определяется только величиной противодавления, которое поддерживается на обнаженном забое песчаника, открытого в ствол скважины.

12. Образование газовых конусов в скважинах с фонтанными трубками. Рассмотрение последнего раздела привело к уравнениям (2) и (3), гл. XI, п. 11, которые налагают условие, что если фонтанные трубки установлены ниже подошвы газовой зоны, газ будет двигаться вниз против диференциального действия силы тяжести и ухо-

дить из пласта через башмак фонтанных трубок. Такое состояние течения, очевидно, соответствует случаю образования водяных конусов, который рассматривался нами в гл. VIII, п. 10, и XI, п. 7, где вода поднималась вверх против диференциального действия силы тяжести. Анализ проблемы образования водяного конуса был привлечен сюда вследствие необходимости принять в расчет распределение давления в зоне, окружающей ствол скважины, а также непосредственно находящейся ниже газового пропластка. Поэтому вскрытие забоем газовой зоны, а также зоны, создающей водяной конус, значительно упрощает задачу образования газового конуса. При этом не только возможно получить значения критических условий для подавления конуса, но и приближенные условия течения после того, как конус будет полностью нарушен.

Пренебрегая падением давления вдоль столба газа в стволе скважины, можно рассматривать постоянным давление против газовой зоны по обнаженному забою песчаника. Тогда течение в газовой зоне после нарушения конуса (воронки) будет по существу радиальным, исключая депрессии на поверхности раздела нефть—газ, которая очень тесно локализована у ствола скважины (фиг. 265). Аналогично этому можно довольно приближенно представить себе течение в нефтяной зоне приуроченным к двум примыкающим радиальным системам, за исключением внесения необходимой поправки, указанной в сноске гл. XI, п. 11. Фактически уравнения (2) и (4), гл. XI, п. 11, были выведены на основании этих представлений. Отсюда величина газового фактора (газ принимается только из газовой зоны) при условиях образования газового конуса, согласно уравнению (3), гл. XI, п. 11, выразится так:

$$R' = \frac{\mu_o k_g h_g \{\bar{p}_e^2 - [\bar{p}_w + \gamma_g (h_t - h_g)]^2\}}{2\mu_g k_o \left[h_o (\bar{p}_e - \bar{p}_w) - \frac{\gamma_g}{2}(h_t - h_g)^2\right]}, \qquad (1)$$

в обозначениях уравнения (3), гл. XI, п. 11, k_g и k_o—соответственные проницаемости газовой и нефтяной зоны.

Равенство нулю величины R' обозначает, что в данном случае нет места образованию газового конуса, и уровень жидкости между фонтанными трубками и обнаженным забоем песчаника находится в статическом положении выше башмака трубок. Это условие соответствует выражению:

$$\bar{p}_e - \bar{p}_w = p_e - \bar{p}_w \leqslant \gamma g (h_t - h_g). \qquad (2)$$

Равенство в этом выражении устанавливает критическое условие, а неравенство налагает условие существования устойчивых газовых конусов, находящихся в статическом положении выше нефтяной зоны. Так как p_e и p_w являются соответственно давлениями резервуара и скважины, замеренными у подошвы нефтяной зоны, видно, что образования газового конуса не будет до тех пор, пока общая разность давления в системе не превзойдет по величине напора жидкости между кровлей нефтяной зоны и башмаком фонтанных трубок. Когда этот напор жидкости будет превышен, газовая зона будет участво-

зать в общей величине газового фактора скважины в количестве, которое дается приближенно уравнением (1).

Так как расстояние между башмаком фонтанных трубок и забоем ствола скважины ($h_o + h_g - h_t$) представляет собой эффективную величину вскрытия пласта по отношению к добыче газа из верхней газовой зоны, уравнение (2) показывает, что разность критического давления при образовании конуса уменьшается линейно с ростом эффективного вскрытия пласта скважиной, допуская, что реальная величина вскрытия нефтяной зоны совершенна. Это условие можно сравнить со случаем образования водяных конусов, где разность давления падает более резко при высокой и малой величине вскрытия пласта по сравнению с умеренным значением последнего (см. фиг. 187). Разности критического давления при образовании водяного конуса могут оказаться в 10 раз больше напора жидкости, соответствующего столбу нефти высотой, равной мощности нефтяной зоны, т. е. максимальной разности, возможной без образования газовой воронки. Разность будет более чувствительна по отношению к эффективной величине вскрытия пласта скважиной при образовании конуса воды, чем при образовании воронки газа.

Эта разница связана всецело с различием в деталях распределения давления в непосредственной близости к стволу скважины. В реальной несовершенной скважине, под забоем которой залегает вода, распределение давления по отношению к последнему является приближенно сферическим. Градиенты давления очень сильно сконцентрированы у ствола скважины, оставляя только небольшую долю общей разности давления для подъема воды в скважину. В настоящем случае, где скважина вскрывает обе зоны, газовую и нефтяную, распределение давления почти полностью радиально. Отсюда, исключая напор жидкости, соответствующий столбу нефти в скважине, имеем одинаковую общую разность давления, действующую в газовой и нефтяной зонах. Необходимо только, чтобы общая разность давления превзошла напор жидкости.

Тогда газ образовывает воронку и проникает через башмак фонтанных трубок в скважину. Если обнаженный забой песчаника перекрыт паккером до башмака фонтанных трубок [1], так что газ из газовой зоны должен пробиться через нефтяную зону, чтобы попасть в трубки, задача становится по существу своему идентичной с образованием водяного конуса, которое рассматривалось в главе VIII. Все выводы, которые относятся к последней задаче, можно приложить также к случаю образования газовой воронки, с единственным замечанием, что разности критического давления и текущие дебиты (см. фиг. 187 и 188) следует помножить на плотность нефти, деленную на 0,3.

13. Многоскважинные системы. При изучении скважин, из которых производится отбор газа, нельзя ограничиться только рассмотрением системы единичной скважины. Как это было сделано ранее для нефтяных и артезианских скважин, следует принять в расчет также влия-

---

[1] Если паккер установлен только против поверхности раздела газ — нефть, получится весьма небольшой эффект при подавлении воронки, так как короткий паккер не сумеет сконцентрировать заметным образом градиенты давления относительно ствола скважины.

ние взаимодействия между различными скважинами, распределенными на данной площади. При установившемся состоянии это взаимодействие будет иметь то же самое влияние на эксплоатационную производительность отдельных скважин, что и при эксплоатации водоносных или нефтеносных песчаников. Так, теоретические выводы для небольших групп скважин, полученные в гл. IX, пп. 2 и 6, остаются справедливыми для настоящего случая. Относительные эксплоатационные производительности, которые даются уравнениями (7), (11) или (15), гл. IX, п. 3, полностью приложимы к газовым скважинам, а распределение давления, как это дается уравнением (1) или (5), гл. IX, п. 2, должно быть видоизменено путем подстановки вместо p соответствующих значений p^{1+m}.

Аналогичным образом можно применять выводы, полученные в главе IX для задач линейного размещения скважин, включая сюда теорию расстановки внешних рядов последних. Заметим снова, что, принимая условия давления согласно гл. IX, п. 14, необходимо заменить величину давлений соответствующими значениями p^{1+m}. Теорию нормальных сеток размещения скважин, развитую в гл. IX, можно приложить к разработке газовых месторождений, аналогично практике эксплоатации жидкостей. Однако проблема водной репрессии по вполне понятным причинам не имеет практического интереса для газовых пластов. Так, падение давления в нефтяном песчанике может снизиться до атмосферного после отбора из пласта песчаника 15—35% первоначального содержания нефти. Полное истощение давления в газоносном песчанике обозначает извлечение всего количества газа, первоначально заключенного в резервуаре, за исключением $1/p$, где p — первоначальное давление резервуара в атмосферах. Если первоначальное давление резервуара составляет 50 *ат*, соответствующее глубине около 510 *м*, результирующая отдача при полном истощении давления в песчанике составит 98%. Поэтому вторичные методы добычи, например, водная репрессия, не представляют собой никакого интереса при эксплоатации газовых месторождений.

14. Неустановившееся течение газов в пористой среде. Строго говоря, при реальной разработке газовых месторождений, по всей вероятности, отсутствуют условия течения, соответствующие установившемуся состоянию. Если газовый резервуар ограничен размерами, отбор газа через эксплоатационные скважины истощит давление песчаника так, что дебиты газа будут беспрерывно уменьшаться при условии поддержания давления на скважинах постоянным. Если газоносный резервуар окружен водоносным песчаником, вряд ли оказывается возможным в большинстве случаев, чтобы продвижение краевой воды было достаточным для поддержания давления в резервуаре. Допуская добычу газа на скважину $0{,}158 \cdot 10^5$ *м*^{3}/*сутки* (при атмосферном давлении) при количестве скважин в месторождении 100, потребуется для поддержания давления в 100 *ат* продвижение краевой воды в количестве около 16 000 *м*^{3} воды в сутки. Такие скорости продвижения газоводяного контура, по всей вероятности, гораздо выше по сравнению с наблюденными на практике. Обычные наблюдения показывают, что давления в большинстве газовых месторождений падают достаточно резко.

Вполне понятно, что аналогичные рассуждения можно приложить в принципе и к добыче жидкостей из пористых резервуаров. Однако в последнем случае неустановившиеся переходы в системе (связанные со сжимаемостью жидкости) в силу самой природы жидкости обладают большей длительностью. Кроме того, темпы истощения жидкости в резервуаре гораздо медленнее, по сравнению с газовыми скважинами, вследствие небольших эксплоатационных производительностей, порядка 160 $м^3/сутки$. Относительные скорости падения давления при неустановившихся переходах в системах газа и жидкости можно получить совершенно свободно таким путем.

Принимая, в частном случае, изотермическое газовое течение ($m = 1$), [из уравнения (2), гл. XI, п. 1], видно, что время входит в основном в выражение для γ^2, как $kt/f\gamma_0\mu$. Тогда для данного пласта песчаника f и k не будут зависеть от жидкости и для идеальных газов $\gamma_0 = \omega/RT$, где R — газовая константа на моль, ω — молекулярный вес и I — абсолютная температура. Отсюда для изотермического газового течения t будет входить по существу в γ^2 как $tRT/\omega\mu$. Таким образом, скорость изменения во времени для системы будет пропорциональна величине $\frac{RT}{\omega\mu}$. Для сжимаемых жидкостей, согласно уравнению (7), гл. X, п. 1, следует аналогичным путем, что скорость изменения во времени будет пропорциональна $1/\beta\mu$ [см. также уравнение (5), гл. X, п. 1].

Для метана $RT/w \simeq 1500$, между тем как β имеет для воды и искусственного минерального масла величину порядка $5 \cdot 10^{-5}$. Вместе с тем вязкость воды или минеральных масел составляет величину 10^2—10^3 по отношению к метану. Исходя из произведения этих двух факторов, следует, что темп падения давления в газовом резервуаре при изотермическом течении будет иметь величину в 10—100 раз больше по сравнению с резервуаром, в котором заключена свободная от газа, но сжимаемая жидкость. Малая вязкость газов, очевидно, более чем уравновешивает их высокую упругость, дающую начало образованию очень резких неустановившихся переходов[1]. Большинство проблем течения жидкости можно вполне оправданно рассматривать в первом приближении как стационарные. Для газового течения такое допущение будет в целом несправедливым. Отсюда во всех практических случаях неустановившееся состояние будет преобладающим фактором. Однако, к несчастью, для полной математической обработки таких неустановившихся переходных состояний необходимо иметь решение нелинейного уравнения (2), гл. XI, п. 1, для которого невозможно построить аналитические решения. Поэтому мы введем в рассматриваемую задачу некоторые физические допущения, которые упростят аналитическую задачу и сделают ее вполне трактуемой.

Возвращаясь к гл. X, п. 13, вспомним, что если замкнутый пласт песчаника содержит в себе сжимаемую жидкость и вскрыт скважиной

---

[1] То обстоятельство, что уравнение (2), гл. XI, п. 1, включает в себя γ^2 (для $m = 1$), между тем как (7), гл. X, п. 1, линейно по отношению к γ не нарушает справедливости сравнения. Если в уравнении (8), гл. X., п. 1, допустить, что $\gamma = \gamma_0(1 + \beta p)$, найдем, что выражение для γ при сжимаемых жидкостях имеет полностью ту же форму, что и для газов, т. е. оно включает в себя скорее величину $\nabla^2\gamma^2$, чем $\nabla^2\gamma$.

с данным (постоянным) расходом, то распределение давления в системе проходит сначала через весьма ограниченный неустановившийся интервал времени, в течение которого давление у скважины показывает в основном логарифмическое распределение, а на внешнем контуре принимает линейный характкер падения (см. фиг. 256). По истечении этого периода, что составляет приблизительно один час для построения фиг. 256, где параметры подобраны таким образом, чтобы получить длительные переходы, система вступает в неустановившееся состояние, где давление падает равномерно по всему пласту со скоростью, пропорциональной величине расхода из скважины. Для практических целей распределение давления внутри песчаника идентично с состоянием установившегося распределения, за исключением области, весьма близкой к внешнему контуру. Общее падение давления между замкнутым внешним контуром и скважиной в данном случае на 7% меньше по сравнению с системой стационарного потока, имеющей одинаковую величину расхода. Как это показано в гл. X, п. 13, можно рассматривать добычу из резервуара по истечении первого неустановившегося перехода, что она обеспечивается эквивалентным снижением плотности, равномерно распределенным по всему резервуару.

Мгновенное распределение давления при этом отличается слегка от соответствующей величины при установившемся состоянии. Более точная формулировка показывает, что реальная система может быть представлена приближенно проходящей непрерывную последовательность установившихся состояний. Время входит в граничные условия как параметр. При этом изменение граничных условий принимается так, чтобы получить заранее установленный расход в системе.

Отсутствие точного решения нелинейного уравнения (2), гл. XI, п. 1, для проверки возможной применимости сделанного допущения к системам газового потока не может явиться, повидимому, основанием, почему допущение о непрерывной последовательности установившихся состояний не должно давать такого же хорошего представления реальных условий потока при движении газа, как и при течении сжимаемой жидкости. Наоборот, благодаря более высоким градиентам давления в системе газового потока у эксплоатационной скважины и соответственно более низким градиентам на внешнем контуре, по сравнению с системой сжимаемой жидкости, при равных общих перепадах давления ошибка, связанная с экстраполяцией логарифмического распределения давления, при стационарном режиме до замкнутого внешнего контура должна быть меньше на этом основании для первого случая по сравнению со вторым[1]. Кроме того, длительный период основного переходного этапа при последовательности стационарных состояний для систем газового потока устанавливается гораздо быстрее. Кратко-

[1] Если это было даже так, то принятое допущение оказалось бы неудовлетворительным в применении к линейным системам, так как в последнем случае градиенты стационарного режима снижаются гораздо медленнее с ростом удаления от поверхностей стока. Это обстоятельство давало бы плохое приближение на внешнем замкнутом контуре, где реальное граничное условие требует нулевого градиента. Вместе с тем в большинстве практических задач поверхности стока по сравнению с внешними контурами имеют значительно меньшие площади. Поэтому системы течения можно представить себе геометрически скорее радиальными, чем линейными системами.

временный интервал перехода, непосредственно следующий за изменением граничных условий, угасает быстрее по сравнению с системами сжимаемой жидкости, давая при этом сравнительно небольшие ошибки, если пренебречь мелкими особенностями, присущими раннему кратковременному переходному этапу.

В свете этих рассуждений задача нестационарного потока газов через пористую среду может быть сведена приближенно к нахождению установившегося распределения давления, а затем изменений граничных условий во времени, дополнительно к тем величинам последних, которые были первоначально установлены и которые необходимо удовлетворить полностью. Благодаря уменьшению точности решения задачи раскрытием уравнения (2), гл. IX, п. 1, мы сумели дать в предыдущих разделах настоящей главы общий способ решений установившегося состояния, соответствующих различным типам задач, подвергшихся обработке во второй части, несмотря на то, что эти решения установившегося течения не представляют большого интереса. Когда эти решения являются для нас более или менее доступными, остающаяся задача заключается в том, чтобы создать соответствующую непрерывную последовательность решений стационарного потока таким образом, чтобы они соответствовали особо интересующей нас проблеме неустановившегося перехода.

Ввиду того, что все проблемы газового потока, имеющие практическое значение, обладают неустановившимся режимом, единственным практически ценным граничным условием на внешнем контуре является нулевое значение расхода, соответствующее замкнутому резервуару. Это условие по отношению к эксплоатационным скважинам выражается в заранее установленном расходе или же величине давления. В последующих разделах мы представим решение задачи о газоносном резервуаре, который дренируется единичной скважиной при постоянном давлении или при постоянном текущем дебите. Методику, которая дается для решения этих задач, можно приложить к более комплексным примерам, которые включают решение вопроса стационарного состояния, уже рассмотренное в гл. XI, пп. 2 и 13.

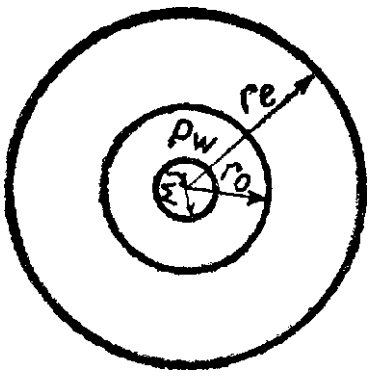
15. Замкнутый газоносный резервуар, дренируемый скважиной, которая работает при постоянном давлении. Как уже отмечалось выше, первоначальный переходный этап, на протяжении которого система приспособляется к равномерному темпу отбора при непрерывной последовательности установившихся состояний, имеет весьма ограниченную продолжительность. Этот интервал составляет менее одного часа для следующего примера, который будет подвергнут числовому решению. В настоящем разделе мы покажем, что этот переходный этап можно рассматривать по существу с той же самой величиной приближения, как более поздний и основной неустановившийся интервал падения давления системы. С этой целью является весьма удобным ввести понятие „радиуса дренирования“, который удаляется к контуру резервуара с установлением в системе условий стационарного состояния. Радиус дренирования дает расстояние от скважины до точки, где установилось приблизительно стационарное состояние распределения давления. Добыча на протяжении первоначального переходного этапа соответствует величине дебита, при которой

газ отбирается из системы в связи с установлением в последней стационарного распределения давления. При этом допускается, что пока радиус дренирования не пройдет через какую-либо точку, из нее не происходит отбора газа. Рассмотрим задачу о замкнутом резервуаре радиусом r_e и центральную скважину с радиусом r_w. Допустим, что первоначальное давление резервуара p_i и давление скважины поддерживаются перманентно при значении p_w. Текущий дебит на единицу мощности песчаника во время t, когда радиус дренирования отошел к точке r_0, будет иметь значение [см. уравнение (2), гл. XI, п. 3, и (3), гл. XI, п. 1 и фиг. 275):

$$Q=\frac{\pi k\Delta\gamma^2}{\mu\gamma_0\ln r_0/r_w}=-2\pi f\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_{r_w}^{r_0}\gamma r dr+\int_{r_0}^{r_e}\gamma_i r dr\right], \qquad (1)$$

где

$$\gamma_0=\gamma(p=1);\ \Delta\gamma^2=\gamma_i^2-\gamma_w^2;\ \gamma_i=\gamma(t=0). \qquad (2)$$



Фиг. 275.

Для простоты принимаем m-1, т. е. значение, соответствующее изотермическому течению. Вводя обозначение:

$$2\ln\frac{r_0}{r_w}=z;\ 2\ln\frac{r}{r_w}=y \qquad (3)$$

и прилагая уравнение (1), гл. XI, п. 3, и (3), гл. XI, п. 1, можно переписать (1) таким образом:

$$t=\frac{\gamma_0\mu f r_w^2}{4k}\int_0^z\frac{dz}{z}\int_0^z\frac{ye^y dy}{[(\Delta\gamma^2/z)y+\gamma_w^2]^{1/2}}. \qquad (4)$$

Принципиально уравнение (4) позволяет определить значение t как функцию z, или r_0 как функцию t, а отсюда, прилагая его к уравнению (1), найдем изменение Q во времени, соответствующее диапазону, пока r_0 не достигнет величины радиуса резервуара r_e. Чтобы показать характер процесса, будет вполне достаточным принять тот случай, где $p_w=0\,(=\gamma_w)$, когда уравнение (4) приводится интегрированием по частям к виду:

$$t=\frac{\mu\gamma_0 f r_w^2}{2\gamma_e k}\int_0^z(e^y-e^{y^2/z})\,dy, \qquad (5)$$

что является достаточно удобным для графического интегрирования. При графическом решении получаем следующее выражение:

$$e^{z/2}=\frac{r_0}{r_w}\cong 1+1{,}068\left(\frac{4kp_e t}{fr_w^2\mu}\right)^{0{,}4967}\cong\frac{2}{r_w}\left(\frac{kp_e t}{\mu f}\right)^{1/2}, \qquad (6)$$

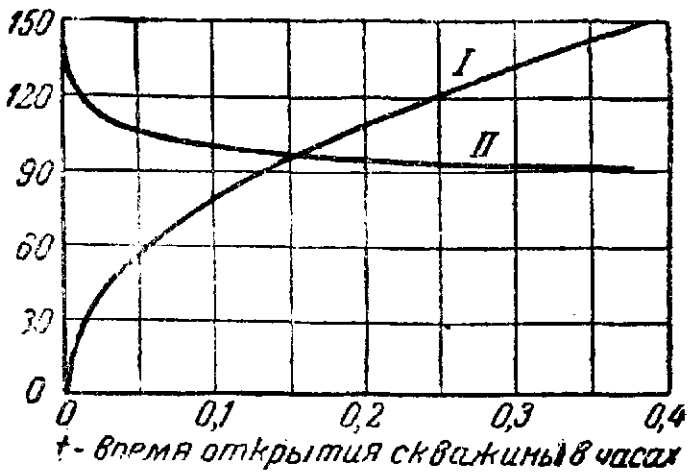
за исключением того случая, где $t\simeq 0$.

На фиг. 276 дано построение уравнения (6) в виде кривой I, при следующих параметрах:

$$f=0{,}2;\ k=1 \text{ дарси};\ \mu=0{,}012 \text{ сантипуаза};\ p_e=100\ am;$$
$$r_w=0{,}075\ м. \qquad (7)$$

Из этого построения видно, что радиус дренирования расходится очень быстро, увеличиваясь до 30,5 *м* приблизительно в 1 мин. и достигая эффективного контура резервуара ($r_e \sim 152{,}5$ *м*) менее чем за полчаса. Это подтверждает вывод, сделанный в последнем разделе, о том, что первоначальный переходный этап занимает очень малую продолжительность. Текущий дебит, который получается за этот интервал времени, дается выражением:

$$Q = \frac{2\pi k \gamma_0 p_e^2}{\mu z} = \frac{3{,}50 \cdot 10^3}{z} \; г/сек/см. \qquad (8)$$



Фиг. 276. Текущие дебиты и отступление «радиуса дренирования» в продолжение первоначального переходного этапа у газовой скважины при условиях изотермического течения:

I — распространение «радиуса дренирования» в *м*; *II* — текущий дебит в 10^5 $м^3/сутки/м$ песчаника; $k = 1$ дарси; $\mu = 0{,}012$ сантипуаза; $f = 0{,}20$; первоначальное давление резервуара — 100 *ат*; радиус скважины — 0,075 *м*.

Кривая *II* на фиг. 276 дает построение этого выражения при константах, взятых для уравнения (7). γ принимается $6{,}68 \cdot 10^{-4}$ $г/см^3$, что соответствует плотности метана при 20° С. Суммарная добыча в продолжение этого периода дается, повидимому, разницей между величиной первоначальной массы газа в резервуаре и остающейся в последнем, когда радиус дренирования r_0 отступил к внешнему контуру r_e.

Обозначая совокупную добычу на единицу мощности песчаника через $\bar{Q}$, получим:

$$\bar{Q} = \pi\gamma_i (r_e^2 - r_w^2) - 2\pi\gamma_i \int_{r_w}^{r_e} r \left\{ \frac{\ln r/r_w}{\ln r_e/r_w} \right\}^{1/2} dr. \qquad (9)$$

Если Q_i — первоначальная величина содержания массы газа в резервуаре, то $\bar{Q}/\bar{Q}_i$ можно получить из выражения:

$$\frac{\bar{Q}}{\bar{Q}_i} = \frac{e^{-z}}{2\sqrt{z}} \int_0^z \frac{e^y}{\sqrt{y}} dy = 0{,}0338; \qquad (10)$$

где в данном случае, а также в дальнейшем, $z = \ln r_e^2/r_w^2$ и $r_e/r_w = 2000$. Последнее выражение (10) показывает, что первоначальные неустановившиеся периоды, которые вытекают из непосредственного прерывистого изменения граничных условий, представляют собой очень малую часть всего интервала падения давления в резервуаре в процессе его разработки. После того как прошел первоначальный переходный этап, т. е. после того, как радиус дренирования достиг внешнего контура резервуара, примем согласно гл. XI, п. 14, что давление последнего падает повсюду равномерно и мгновенные значения давления следуют

стационарному распределению. Отсюда Q можно выразить следующим выражением:

$$Q = \frac{2\pi k \Delta\gamma^2}{\mu z \gamma_0} = -2\pi f \frac{\partial}{\partial t} \int_{r_w}^{r_e} \gamma r dr \simeq$$

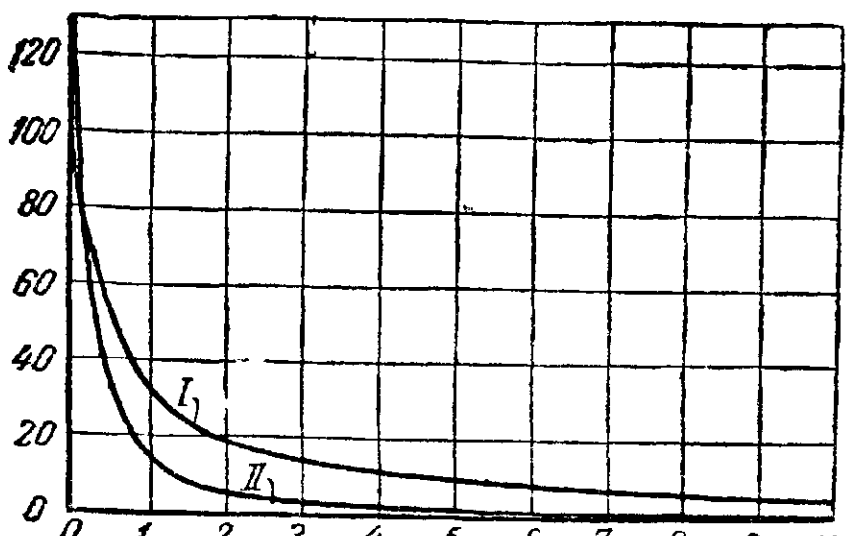
$$= \frac{-\pi r_w^2 f \gamma_e}{z} \frac{\partial \gamma_e}{\partial t} \int_0^z \frac{y e^y dy}{[\Delta\gamma^2 y/z + \gamma_w^2]^{1/2}}. \qquad (11)$$

Возьмем снова случай, где $\gamma_w = 0 = p_w$. Это дает:

$$\frac{1}{\gamma_e^2} \frac{\partial \gamma_e}{\partial t} = \frac{-2kz^{-1/2}}{\mu f r_w^2 \gamma_0 \int_0^z y^{1/2} e^y dy} \simeq \frac{-2\kappa}{f\mu\gamma_0 z r_e^2}; \quad r_e/r_w = 2000. \qquad (12)$$

Тогда при константах уравнения (7) и вспоминая, что $\gamma = \gamma_0 p$, имеем:

$$p_e = \frac{1}{\left[2{,}039 \cdot 10^{-2} (t - t_0) + \frac{1}{p_i}\right]}, \qquad (13)$$



Фиг. 277. Падение давления и текущего дебита в замкнутом газовом (метан) резервуаре, который дренируется единичной скважиной:

I — давление (*am*) на контуре резервуара (152,5 *м*); *II* — текущий дебит в 0,25 × × 10^5 $м^3/сутки/м$ песчаника. Первоначальное давление резервуара — 68 *am*; проницаемость песчаника — 1 дарси.

где $t = t_0$ — время в днях, когда радиус дренирования достигает контура резервуара.

Текущий дебит для данного случая ($p_w = 0$) получается из выражения:

$$Q = \frac{\pi k \gamma_0 p_e^2}{\mu \ln r_e/r_w} =$$

$$= 2{,}301 \cdot 10^{-2} p_e^2 \; г/сек/см. \qquad (14)$$

На фиг. 277 дается построение уравнений (13) и (14). В этом случае снова заметно, что падение давления происходит очень резко. Давление падает приблизительно за $4^1/_2$ дня на 0,1 своего первоначального значения. Что же касается связи построенных кривых с кривыми падения, которые получаются на основании промысловых данных, следует помнить, что принятая здесь величина проницаемости, равная 1 дарси, не только гораздо выше соответствующей ей величине большинства газоносных песчаников, но и размеры фактических резервуаров, которые дренируются единичной скважиной в реальных месторождениях,

будут в общем значительно выше принятых здесь 152,5 *м*[1]. Оба эти фактора будут увеличивать срок разработки газовых скважин по сравнению с результатами, приведенными на фиг. 277.

16. Замкнутый газоносный резервуар, дренируемый скважиной, работающей с постоянным отбором. Пренебрежем первоначальным переходным этапом, который создается непосредственно после открытия скважины, когда нарушается первоначальное постоянство распределения давления.

Допустим, что радиус дренирования уже переместился к внешнему контуру системы так, что распределение давления начинает принимать непрерывную последовательность установившихся состояний. Каждое из этих состояний будет соответствовать различной величине давления на скважине и внешнем контуре. Решение задачи будет заключаться в нахождении падения этих граничных давлений, соответствующих постоянной величине расхода скважины.

Обозначая расход последней через Q, можно получить значение его согласно гл. XI, п. 15, из выражения:

$$Q = \frac{2\pi k \Delta \gamma^2}{\mu z \gamma_0} = -2\pi f \frac{\partial}{\partial t} \int_{r_w}^{r_e} r\gamma dr; \qquad (1)$$

в данном случае для простоты рассуждения снова принимается условие изотермического течения ($m = 1$). Обозначения, принятые в уравнении (1), соответствуют гл. XI, п. 15. Интегрируя его, замечаем:

$$\int_0^z (\gamma_a - \gamma) e^y dy = \frac{Qt}{\pi f r_w^2}, \qquad (2)^2$$

где γ_a — распределение плотности в первоначальный момент после прохождения начального переходного этапа. Значение γ_a дается выражением

$$\gamma_a^2 = \frac{(\gamma_i^2 - \gamma_w^2)\, y}{z} + \gamma_{wa}^2; \quad Q = \frac{2\pi k\, (\gamma_i^2 - \gamma_{wa}^2)}{\mu z \gamma_0}, \qquad (3)$$

γ_i — начальная постоянная плотность до открытия скважины с целью отбора газа, γ_{wa} — плотность на скважине в интервал времени $t = 0$. Выражая тогда γ через отношение:

$$\gamma^2 = \frac{\mu \gamma_0 Q y}{2\pi k} + \gamma_w^2, \qquad (4)$$

можем графически проинтегрировать уравнение (2) для различных значений γ_w, что в случае обратимости дает величину γ_w как функцию t.

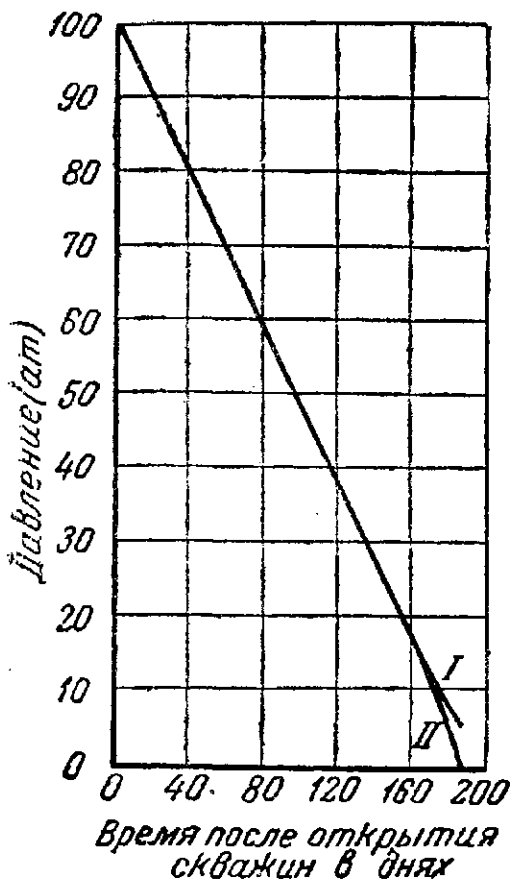
---

[1] Средняя величина размещения скважин в Аппалачских газовых месторождениях составляет порядок 1 скважина на 32 *га*, что соответствует площади дренирования в 4,4 раза выше по сравнению с площадью, принятой в настоящем примере.

[2] Если значение Q непостоянно, необходимо только заменить Qt через $\int_0^t Q dt$. Последний член можно рассматривать как известную функцию времени.

Принимая $y=z$ в уравнении (4), можем получить соответствующие значения γ_e.

Если эту процедуру выполнить при следующих параметрах: $f=0{,}2$; $k=1$ дарси; $\mu=0{,}012$ сантипуаза; $r_w=0{,}075$ *м*; $r_e=152{,}5$ *м*; $p_i=100$ *am*; $\gamma_0=6{,}68\cdot10^{-4}$ *г/см³*; $Q=5\cdot10^4$ *г/сутки/см* песчаника (5) и полученные результаты обратить в эквивалентное падение давления, можно получить кривые, приведенные на фиг. 278, из которой видно, что практически падение давления линейно во времени. Следует заметить, что этот вывод связан не только с принятым постоянством значения Q, но также и с высокими значениями p_w на протяжении всего срока жизни скважины. Отсюда общее падение давления в системе невелико, и внутреннее давление в последней по существу равняется p_w плюс небольшой поправочный член. По этой причине обе кривые (*I* и *II*) для давления на внешнем контуре p_e и на скважине p_w практически совпадают между собой, пока не наступит последний этап падения давления в жизни скважины. Так как расход в системе газового течения пропорционален разности квадратов граничных давлений, величина разности давления, необходимого для создания данного расхода, будет обратно пропорциональна среднему давлению в системе.



Фиг. 278. Падение давления в замкнутом газовом резервуаре (метан), который дренируется единичной скважиной при постоянном дебите $0{,}754\times10^4$ *м³/сутки/м* песчаника.

I — давление на внешнем контуре (радиус 152,5 *м*); *II* — давление на скважине (радиус 0,075 *м*); первоначальное давление резервуара — 100 *am*; проницаемость песчаника — 1 дарси

Можно подвергнуть аналогичным путем аналитической обработке более сложные случаи падения давления для заранее принятой величины расхода, а также (согласно гл. XI, п. 15) для падения текущего дебита при заранее принятом падении давления.

17. Заключение. С физической точки зрения все задачи газового потока в пористой среде, имеющие практический интерес, относятся в основном к неустановившемуся состоянию. При этом содержание газа в замкнутом резервуаре и давление в нем непрерывно снижаются по мере отбора газа из скважин, дренирующих данный резервуар. Строго математическая обработка газового течения будет включать решение нелинейного дифференциального уравнения в частных производных, которому подчиняется снижение плотности в таких системах [уравнение (2), гл. XI, п. 1] и которое является аналогом линейному уравнению для неустановившегося течения жидкостей, выраженному через плотность [уравнение (7), гл. X, п. 7].

Последнее уравнение было решено в третьей части для некоторого количества частных случаев. К счастью, эту процедуру можно свести к более трактуемому виду, подвергая глубокому анализу физическую природу неустановившихся переходов в системах газового

течения. В противном случае это потребовало бы числового решения нелинейного уравнения, так как до сих пор мы еще не имеем общего аналитического решения последнего.

По аналогии с выводами, полученными при точном анализе падения давления в замкнутом резервуаре, несущем жидкость, который дренируется единичной скважиной (гл. X, п.13), можно ожидать, что неустановившиеся переходы в системе газового течения будут состоять из двух типов. Первый будет заключаться в весьма кратковременном периоде, который возникает немедленно после любого искусственного изменения граничных условий, например, открытия скважины или изменения ее текущего дебита. Такие переходные этапы предшествуют или накладываются на второй тип неустановившегося состояния, который дает в целом падение давления в резервуаре или добычи из него, связанной с истощением последнего. Первый тип перехода обладает весьма короткой продолжительностью.

Рассматриваемое явление связано с относительно низкой вязкостью газов и благодаря этому темп изменения состояния в системах газового течения будет в целом во много раз выше, чем в песчаниках, в которых движется жидкость. В последнем случае было установлено, что продолжительность первоначального кратковременного периода будет составлять порядок одного часа. Кроме того, изменение содержания жидкости в резервуаре, связанное с этим переходом, будет в целом не более 3%, если даже внезапно открыть скважину полностью и снизить давление в ней до атмосферного, при условии, что первоначальное давление резервуара составляет 100 *ат*. Поэтому с практической стороны можно полностью пренебречь кратковременными переходными этапами.

Второй тип переходного состояния представляет собой основное развитие падения давления в системе газового течения. По аналогии с выводом, найденным точным подсчетом для течения жидкости, вполне резонно допустить, что этот переход можно представить себе непрерывной последовательностью установившихся состояний, где плотность повсюду равномерно снижается с такой скоростью, чтобы обеспечить мгновенность общего потока из системы. Фактически, следует ожидать, что такое приближенное решение систем газового течения должно быть более точным по сравнению с системами, где происходит отбор жидкости. В газосодержащей среде произойдет более быстрое выравнивание состояния до приближенно стационарного. В системах газового течения фактическое приближение к установившемуся распределению давления по истечении первоначальных переходных этапов должно включать в себя более мелкие ошибки вследствие естественно меньших градиентов в точках, удаленных от поверхностей стока, и которые (градиенты) должны строго обращаться в нуль на внешних замкнутых контурах системы.

Поэтому можно разделить аналитическую обработку систем газового течения на предварительный анализ стационарного режима системы, а затем вывод непрерывной последовательности установившихся состояний, соответствующих заранее установленным особым граничным условиям. Таким образом, характеристика установившегося состояния входит сюда как предварительный этап анализа. Однако она должна дать по существу ясное представление об основных свойствах течения,

особенно, если резервуар велик и общая величина расхода из него не велика. Поэтому общее падение давления в системе будет не так резко выражено. Кроме того, эта характеристика должна обеспечить хорошую степень приближения при сравнительном изучении различных течений.

Установившийся поток газов контролируется уравнением Лапласа в зависимой переменной p^{1+m} [уравнение (1), гл. XI п. 2], где m определяет собой термодинамический характер потока. Отсюда можно принять для решений различных задач аналитические выражения, уже выведенные для соответствующих систем стационарного течения жидкости, которые также контролируются уравнением Лапласа (часть вторая). Единственное изменение, которое необходимо сделать по отношению к распределению давления, заключается в подстановке вместо давления p, в выражениях для стационарного потока жидкости p^{1+m}. Значения расходов массы для стационарных решений проблем течения газов получаются из соответствующих величин объемных расходов для систем стационарного движения жидкостей при замене в последних $p_e - p_w$ через $\frac{\gamma_0 (p_e^{1+m} - p_w^{1+m})}{1+m}$, где γ_0 — плотность газа при единичном давлении. Чтобы получить расход массы при течении газа для наиболее интересного случая, что соответствует изотермическому течению ($m = 1$), сделанное изменение эквивалентно произведению объемных расходов при стационарном течении жидкости и средней плотности газового течения.

Давая краткий обзор различных типов систем стационарного потока жидкости, рассмотренный в первой и второй частях настоящей работы в свете приведенных рассуждений, можно заметить, что для линейного газового потока распределение давления дается непосредственно линейным изменением значения p^{1+m}. Что касается влияния термодинамического фактора на характер течения, т. е. значения m на движение газа, было установлено, что изотермический поток ($m = 1$) дает наименьший расход. Величина расхода увеличивается с уменьшением значения m. Так, например, при адиабатическом потоке ($m = 0{,}71$) через линейную систему пройдет на 16% больше воздуха (если $p_1/p_2 = 0{,}1$) по сравнению с изотермическим потоком. Этот вывод связан с более высокими плотностями на поверхностях стока, где $m < 1$, и более чем компенсирует пониженные градиенты давления на стоке, получающиеся в случае изотермического потока.

Для систем радиального течения количество p^{1+m} изменяется логарифмически с изменением радиального расстояния [уравнение (1), гл. XI, п. 3].

Когда течение радиально не полностью, соответствующий ему расход определяется из выражения для радиального потока при условии, что количество $(p_e^{1+m} - p_w^{1+m})$ в последнем, где p_e и p_w представляют собой давления внешнего контура и скважины, заменяется усередненной величиной $(\bar{p}_e^{1+m} - \bar{p}_w^{1+m})$ [уравнение (4), гл. XI, п. 3].

Можно так же скорректировать влияние некруговой формы внешнего контура на поток в системе, как и в случае течения жидкости, беря непосредственно в качестве радиуса внешнего контура в выраже-

нии для расхода соответственное среднее расстояние скважины от внешнего контура.

Чтобы получить выводы для систем трехразмерного потока газа при стационарном режиме, можно приложить те же самые замены к результатам, полученным в гл. V, для жидкостей. Так, распределение давления для частично совершенных скважин, выведенное в гл. V, п. 3, можно приложить непосредственно к частично совершенным скважинам, вскрывшим газоносные резервуары, заменив повсюду p через p^{1+m}. Отношения текущих дебитов для различных интервалов величины вскрытия пласта скважинами остаются полностью теми же, что и для скважин, эксплоатирующих жидкости в установившемся состоянии.

Влияние анизотропности на проницаемость песчаника для газовых скважин можно принять непосредственно из выводов, полученных в гл. V, п. 5, для скважин, откуда производится отбор жидкости. Вследствие малой плотности газов, а также потому, что газы всегда заполняют полностью любое имеющееся пространство, влияние силы тяжести не имеет практического значения в системах газового течения.

Поведение газовых скважин, которые дренируют песчаники с непостоянной проницаемостью, будет с внешней стороны идентичным с соответствующим режимом скважин, из которых производится отбор жидкостей. Методику гл. VII можно приложить к газовым скважинам в обоих случаях, когда проницаемость песчаника изменяется непрерывно и когда изменения ее прерывисты. Системы трещиноватых известняков, содержащих газ, контролируются той же самой теорией, что и несущие жидкость, и будут аналогичным образом реагировать на кислотную обработку. Соответственно этому влияние песчаной пробки в стволе газовой скважины на эксплоатационную производительность последней будет одинаковым с подсчитанной величиной в гл. VII, п. 10, для скважин, из которых производится отбор жидкостей. Двухжидкостные системы могут с известным допущением включать в себя в основном вертикальную или горизонтальную поверхности раздела. Газ в контакте с жидкостью, находясь в той же пористой среде и двигаясь как однородная жидкость, будет всегда разделен от жидкости эффективной горизонтальной поверхностью раздела. При этом газ всегда будет занимать верхние прослойки песчаника[1].

Когда жидкостью, которая залегает ниже газовой зоны, является вода, а забой скважины только частично вскрывает газовую зону, может возникнуть проблема образования водяного конуса. При этом вода из нижних слоев по мере отбора газа может подниматься в верхние слои продуктивного горизонта в виде статического конуса. Формальная теория этой проблемы конусообразования будет полностью соответствовать развитой нами для случая образования водяного конуса при нефтедобыче (гл. VIII, п. 10). Единственным изменением при этом будет пересчет распределения давления относительно частично совершенных скважин, которое было принято для песчаников, несущих в себе жидкость, заменяя повсюду давления через p^{1+m}, а также внося

---

[1] Следует сделать исключение для случая региональной миграции газа в большом масштабе вверх и вниз по крыльям нефтеносной структуры, в газовую шапку или же из последней.

корректив в систему газового потока на больший разрыв в значении плотности. Результаты этих исправлений будут заключаться в том, что перепады критического давления при образовании водяного конуса для газовых скважин будут в 3—4 раза больше по сравнению с соответствующими величинами для нефтяных скважин (см. фиг. 187). Поэтому водяной конус в газовых скважинах легче подавить, чем в нефтяных. Вместе с тем общая характеристика проблемы конусообразования будет аналогичной скважинам, откуда производится отбор нефти.

Двухжидкостная проблема течения газов, которая не имеет практической аналогии в системах, транспортирующих только жидкости, возникает при математической обработке задачи газонефтяных факторов, т. е. объема газа, замеренного при атмосферных условиях, который добывается на единицу объема нефти и который получается со скважин, отбирающих нефть из песчаников с залегающей над последними газовой зоной. Если идеализировать поставленную задачу так, чтобы пренебречь диспергированным в нефти и движущимся совместно с ней газом, можно без всякой трудности получить характеристику потока комбинированной системы газ — нефть.

При этом следует рассматривать течение нефти движением однородной жидкости, как и поток газа в газовой зоне. Когда последняя непосредственно примыкает к нефтяной зоне так, что обе они имеют общую поверхность раздела, то результирующий газонефтяной фактор будет прямо пропорционален давлению резервуара и независим от противодавления на обнаженной поверхности песчаника. Если газовая и нефтяная зоны не соединяются между собой и залегают в различных слоях[1], то газонефтяные факторы будут зависеть от относительного давления резервуара в обеих зонах. Так, если давление резервуара в газовой зоне превосходит соответствующую величину в нефтяной зоне, то при снижении текущего дебита нефти газонефтяной фактор будет возрастать более резко по сравнению с линейным ростом. Когда противодавление станет равным давлению резервуара в нефтяной зоне, в скважину прорвется чистый газ. Когда обе зоны имеют одинаковое пластовое давление, то с уменьшением текущего дебита нефти газонефтяной фактор будет увеличиваться линейно. Когда же пластовое давление газовой зоны меньше по сравнению с нефтяной зоной, газонефтяной фактор будет возрастать до максимума, а затем будет падать с уменьшением текущего дебита нефти[2].

Для определения влияния места установки башмака фонтанных трубок на величину газонефтяного фактора, можно воспользоваться тем же

---

[1] В данном случае газовая зона может залегать, разумеется, между двумя нефтеносными слоями.

[2] Входить в отдельные детали этого явления не является задачей, которая находится в рамках настоящего исследования. Однако можно упомянуть, что, сравнивая полученные выводы с фактическими наблюдениями в промысловых условиях, следует учесть не только выделение газа из нефти, но и из выше залегающих газовых зон, а отсюда и связанный с последними рост газонефтяного фактора по мере истощения нефтяного песчаника. Дополнительно следует учесть влияние изменения скорости течения нефти (текущего дебита) на количество газа, который прорывается вместе с нефтью. Если наложить все эти факторы на полученные выводы для движения однородных жидкостей, то они могут полностью замаскировать явления, имеющие место в последнем случае.

самым аналитическим методом. На протяжении предыдущих глав основным являлось положение, что режим жидкостей в песчанике определяется однозначно давлениями и расходами, которые поддерживаются на поверхности песчаника, открытого в скважину, и совершенно не зависит от оборудования, спущенного в последнюю. В данном случае мы сталкиваемся с вопросом о влиянии этого оборудования на давления у забоя скважины. Ответ на этот вопрос заключается в следующем. До тех пор, пока башмак труб установлен поверх кровли газовой зоны, истинное местоположение его не влияет на величину забойного давления, и газонефтяные факторы контролируются рассмотренными выше положениями. Если же башмак трубок установлен ниже кровли газовой зоны, то забойные давления против газовой зоны и над башмаком фонтанных трубок будут возрастать до соответствующей величины у башмака последних. Это приведет к уменьшению потока из газовой зоны, а отсюда к пониженному газонефтяному фактору.

Этот эффект будет возрастать с ростом глубины спуска трубок и может принять весьма большое значение, если перепад давления в пласте песчаника невелик, а сам песчаник имеет большую мощность. Если мощность газовой зоны составляет 7,5 *м*, нефтяной 15,25 *м*, а скважина эксплоатируется с перепадом давления 1,36 *ат* при пластовом давлении 68 *ат*, то установка башмака трубок в кровле нефтяной зоны уменьшит величину газонефтяного фактора до 83% значения, соответствующего установке башмака трубок над газовой зоной. Если допустить трубки к подошве нефтяной зоны, то газонефтяной фактор снизится до 20% своего первоначального значения. Поэтому, если обсадная колонна герметична, так что газ может выделяться из газовой зоны, двигаясь вниз к башмаку фонтанных трубок и через последние, можно весьма эффективно изменять величину газонефтяного фактора, регулируя глубину спуска трубок.

Предельным случаем влияния спущенных трубок на величину газонефтяного фактора является равенство его нулю (той части его, которая поступает из зоны свободного газа). Это условие достигается, когда трубы установлены ниже кровли нефтяной зоны и общий перепад давления в системе не превосходит эквивалентного напора жидкости между кровлей нефтяной зоны и башмаком фонтанных трубок. Тогда газ, повидимому, будет образовывать обращенный статический конус, залегающий поверх нефтяной зоны. Когда трубки установлены ниже кровли нефтяной зоны, положительные газонефтяные факторы соответствуют явлению разрушения статического газового конуса. Это происходит на том же самом основании, что мы наблюдаем у статического водяного конуса, равновесие которого нарушается и который поднимается в ствол нефтяной или газовой скважины, когда перепад давления в песчанике превосходит критическое значение, дающееся теорией конусообразования. Вследствие различия в распределении давления, которое имеет место в зоне, непосредственно примыкающей к стволу скважины, отдельные стороны явления образования газового конуса будут отличаться от соответствующих величин, свойственных образованию водяных конусов. Общий физический базис проблемы остается одним и тем же в обоих случаях.

Взаимодействие газовых скважин устанавливается непосредственно

из интерпретации соответствующих выводов для скважин, из которых производится отбор жидкостей (глава IX). В отношении практического значения таких проблем следует заметить, что обычные сетки размещения газовых скважин, которые нами принимались в проектах водной репрессии, в данном случае не представляют собой никакого практического интереса, так как газовые резервуары обычно приходят к полному истощению без вмешательства извне. Таким образом, искусственные (вторичные) методы добычи не имеют никакой значимости при отборе из скважин газа.

Как это было отмечено в начале настоящего раздела, чтобы получить развитие падения давления в соответствующей системе потока газа, необходимо синтезировать различные решения стационарного режима в ряды, свойственные действительным граничным условиям. Так, в частности, следует принять во внимание, что не только падают расходы или давления на скважинах (или оба фактора вместе), но в то же самое время давления внешнего контура, встречающиеся в формулах стационарного режима, будут также снижаться вследствие замкнутости резервуара на его внешних контурах и его истощения. Как было показано ранее, последовательность установившихся состояний получается накладыванием снижения плотности, распределяющимся равномерно по всему резервуару. Падение расхода или давления происходит с такой скоростью, чтобы обеспечить добычу из эксплоатационных скважин[1].

Этот процесс можно продемонстрировать на примере замкнутого резервуара, который дренируется единичной скважиной, эксплоатирующейся при постоянном давлении или при постоянном расходе. В таких задачах можно представить себе первоначальный переходный этап, который следует за открытием скважины, как интервал времени, в течение которого установившееся состояние потока распространяется от ствола скважины и отступает к внешнему контуру. Такой подсчет для изотермического потока, где падение давления в скважине внезапно снижается от 100 *ат* до нуля, приводит к продолжительности переходного этапа, длительность которого составляет 0,4 часа, а общий расход в течение этого периода составляет 3,3% содержания газа в резервуаре. Это подтверждает заключение, сделанное нами в начале настоящего раздела, что для практических целей можно совершенно пренебречь кратковременным неустановившимся переходом в системах газового потока. Основное переходное состояние, определяющее большую часть развития падения давления в резервуаре, включает в себя гиперболическое падение давления резервуара во времени, а вместе с тем и соответствующее падение величины расхода. В том случае, где расход поддерживается постоянным, аналогичный анализ приводит по существу к линейному снижению давления на скважине, и на внешнем контуре, пока резервуар не будет полностью истощен.

---

[1] Если рассматриваемая система является многоскважинной, причем скважины эксплоатируются с различными дебитами, то падение плотности должно быть локально выравнено относительно отдельных скважин со скоростью, пропорциональной соответствующим расходам.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

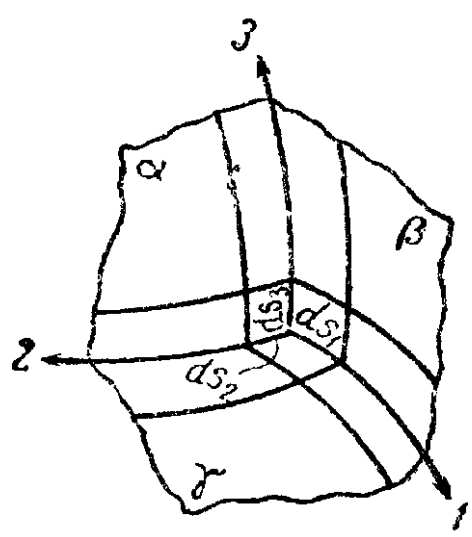
Вследствие основной роли, которую играет уравнение Лапласа при изучении течения однородных жидкостей в пористой среде, дадим вывод этого уравнения в обобщенных криволинейных координатах. Более точные выводы этого уравнения можно получить на основании процедуры прямого преобразования частных производных [1], $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ приложением вариационного исчисления [2], а также прибегая к теореме интеграла дивергенции [3]. В данном случае ему могло бы лучше соответствовать физическое решение [4], которое базируется на выводе выражений для дивергенции вектора в криволинейных координатах, аналогично использованному в гл. III, п. 1.

С этой целью примем ортогональные криволинейные координаты:

$$\alpha(x, y, z) = \text{const};$$

$$\beta(x, y, z) = \text{const}; \ \gamma(x, y, z) = \text{const},$$

которые определены для каждой точки интересующей нас области. Как это показано на фиг. 279, их пересечения можно рассматривать определяющими три взаимно ортогональных направления. Тогда можно показать методами гл. III, п. 1, что чистый расход, соответствующий вектору скорости $\bar{v}$ из диференциала элемента объема со сторонами ds_1, ds_2, ds_3 или дивергенция вектора $\bar{v}$, будет:



Фиг. 279.

$$ds_1 ds_2 ds_3 \operatorname{div} \bar{v} = \frac{\partial}{\partial s_1}(v_1 ds_2 ds_3)\, ds_1 + \frac{\partial}{\partial s_2}(v_2 ds_3 ds_1)\, ds_2 + \frac{\partial}{\partial s_3}(v_3 ds_1 ds_2)\, ds_3,$$

где v_1, v_2, v_3 — компоненты $\bar{v}$, параллельные направлениям 1, 2, 3. Обозначая отношения изменений диференциала в координатах α, β, γ к фактическим диференциалам элементов длин ds_1, ds_2, ds_3 через h_1, h_2, h_3, так что

$$d\alpha = h_1 ds_1; \ d\beta = h_2 ds_2; \ d\gamma = h_3 ds_3,$$

и деля на элемент объема $ds_1 ds_2 ds_3$, получаем, что указанное выражение дивергенции принимает вид:

$$\operatorname{div} \bar{v} = h_1 h_2 h_3 \left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{v_1}{h_2 h_3}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{v_2}{h_3 h_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{v_3}{h_1 h_2}\right) \right].$$

---

[1] Гурса, Курс матем. анализа, т. I, 1927.

[2] Курант и Гильберт, Методы матем. физики, т. I, 1924.

[3] Вебстер, Диференц. уравнения в частных произв. матем. физики, 1927.

[4] Этот вывод непосредственно вытекает из работы Риман-Вебера „Differential—Gleichungen der Physik", vol. I, p. 74, 1925.

Если теперь рассматривать $\bar{v}$ как градиент потенциальной функции Φ, так что $\bar{v}=\nabla\Phi$, получаем:

$$\operatorname{div}\bar{v}=\nabla^2\Phi=h_1h_2h_3\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{h_1}{h_2h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{h_2}{h_3h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial\beta}\right)+\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{h_3}{h_1h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}\right)\right].$$

Это выражение, будучи приравнено нулю, представляет собой преобразование уравнения Лапласа в криволинейных координатах $\nabla^2\Phi=0$. Таким образом, для декартовой системы координат (x, y, z) ясно, что $h_1=h_2=h_3=1$. Отсюда получается нормальный вид уравнения Лапласа (4), гл. III, п. 4. Для системы цилиндрических координат (r, θ, z), (см. фиг. 22), $(h_1, h_2, h_3)=(1, 1/r, 1)$ приводит к уравнению (3), гл. III, п. 7. Для системы сферических координат (r, θ, χ), (см. фиг. 23), $(h_1, h_2, h_3)=(1, 1/r, 1/r\sin\theta)$, откуда непосредственно вытекает уравнение (6), гл. III, п. 7. Аналогичным путем можно получить вывод соответствующего уравнения в любой другой системе координат, поскольку были определены присвоенные им значения (h_1, h_2, h_3).

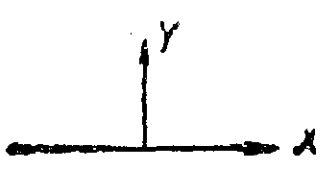
ПРИЛОЖЕНИЕ II

НЕКОТОРЫЕ ДВУХРАЗМЕРНЫЕ ФУНКЦИИ ГРИНА

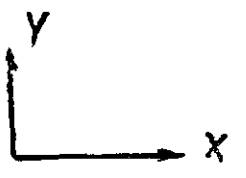
Чтобы облегчить приложение метода функции Грина к двухразмерным задачам, помимо тех, что были подвергнуты рассмотрению в гл. IV, п. 6, приведем следующие дополнительные функции Грина.

Бесконечная полуплоскость $-y\geqslant 0$ (фиг. 280):

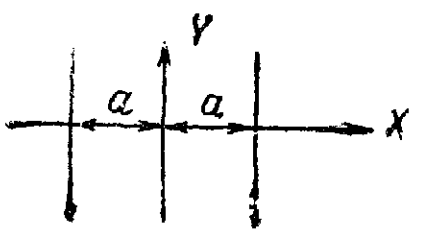
$$G(x, y; x', y')=\frac{1}{2}\ln\frac{(x-x')^2+(y+y')^2}{(x-x')^2+(y-y')^2}.$$



Фиг. 280.



Фиг. 281.



Фиг. 282.

Бесконечный квадрант $-y\geqslant 0;\ x\geqslant 0$ (фиг. 281):

$$G(x, y; x', y')=\frac{1}{2}\ln\times$$

$$\times\frac{[(x-x')^2+(y+y')^2]\,[(x+x')^2+(y-y')^2]}{[(x-x')^2+(y-y')^2][(x+x')^2+(y+y')^2]}.$$

Бесконечная полоса: (фиг. 282) $-\infty<y<+\infty;\ -a\leqslant x+a$

$$G(x, y; x', y')=\frac{1}{2}\ln\frac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi(y-y')}{2a}+\cos\dfrac{\pi(x+x')}{2a}}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi(y-y')}{2a}-\cos\dfrac{\pi(x+x')}{2a}}.$$

Бесконечная полуполоса $-y\geqslant 0;-a\leqslant x\leqslant+a$ (фиг. 283)

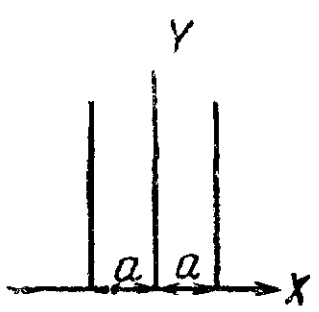
$$G(x, y; x', y')={}^1/_2\ln\times$$

$$\times\frac{\left[\operatorname{ch}\dfrac{\pi(y-y')}{2a}+\cos\dfrac{\pi(x+x')}{2a}\right]\left[\operatorname{ch}\dfrac{\pi(y+y')}{2a}-\cos\dfrac{\pi(x-x')}{2a}\right]}{\left[\operatorname{ch}\dfrac{\pi(y-y')}{2a}-\cos\dfrac{\pi(x-x')}{2a}\right]\left[\operatorname{ch}\dfrac{\pi(y+y')}{2a}+\cos\dfrac{\pi(x+x')}{2a}\right]}.$$

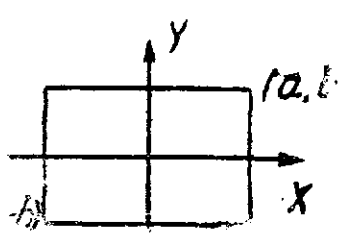
Прямоугольник $-b \leqslant y \leqslant +b$; $-a \leqslant x \leqslant +a$ (фиг. 284):

$$G(x, y; x', y') = \frac{8}{\pi ab} \sum_{nm=1}^{\infty} \frac{1}{k_{nm}} \sin \frac{n\pi (x+a)}{2a} \times$$

$$\times \sin \frac{n\pi (x'+a)}{2a} \sin \frac{m\pi (y+b)}{2b} \sin \frac{m\pi (y'+b)}{2b},$$



Фиг. 283.



Фиг. 284.

где

$$k_{nm} = \frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ III

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ МОДУЛЯРНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ $\theta(q) = k^{*2}$

В пп. 33 и 54 „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der Elliptishen Funktionen", H. A. Schwarz показано, что если модулярная эллиптическая функция $\theta(q) = k^{*2}$ с модулем k^* ($\leqslant 1$) определяется через $\theta(0) = 1$, $\theta(1) = \infty$, $\theta(i\infty) = 0$, $\theta(1 + i\infty) = 0$, то функция $\theta\left(\frac{m' + n'q}{m + nq}\right)$ будет иметь значения:

I	II	III	IV	V	VI
$\theta(q)$	$\frac{\theta(q)}{\theta(q) - 1}$	$\frac{1}{\theta(q)}$	$\frac{1}{1 - \theta(q)}$	$\frac{\theta(q) - 1}{\theta(q)}$	$1 - \theta(q)$

когда $(m, n; m', n')$ даются таблицей

	m	n	m'	n'
I	1	0	0	1
II	1	0	1	1
III	1	1	0	1
VI	1	1	1	0
V	0	1	1	1
VI	0	1	1	0

Значения m, n; m', n' выражены по отношению к модулю 2 так, чтобы равняться 1, если истинные значения представлены нечетным числом, и нулю, если истинные значения представлены четным числом. Функция, обратная $\theta(q) = k^{*2}$, дается уравнением (15), гл. VI, п. 5.

Применение этих таблиц можно показать на примере их приложения к функции $\lambda(q)$, определяемой согласно уравнения (14), гл. VI, п. 4. Из последнего следует, что

$$\lambda(q)=\frac{\theta(q)-1}{\theta(q)}=\theta\left(\frac{q+1}{q}\right);\quad \frac{1}{\lambda(q)}=\frac{\theta(q)}{\theta(q)-1}=\theta(q+1);$$

$$1-\lambda(q)=\frac{1}{\theta(q)}=\theta\left(\frac{q}{q+1}\right);\quad \frac{1}{1-\lambda(q)}=\theta(q);$$

$$\frac{\lambda(q)}{\lambda(q)-1}=1-\theta(q)=\theta\left(\frac{1}{q}\right);\quad \frac{\lambda(q)-1}{\lambda(q)}=\frac{1}{1-\theta(q)}=\theta\left(\frac{1}{q+1}\right).$$

Тогда, чтобы найти аргументы q, для которых

$$-\infty<\lambda\leqslant 0,$$

можно принять следующие выражения, так как $k^{*2}\leqslant 1$:

$$k^{*2}=\theta(q)=\frac{1}{1-\lambda},\quad \text{или}\quad k^{*2}=\theta\left(\frac{-1}{q}\right)=\frac{\lambda}{\lambda-1},$$

откуда

$$iq=-\frac{K'}{K}\left(\frac{1}{1-\lambda}\right),\ \text{или}\ \frac{i}{q}=\frac{K'}{K}\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right),$$

где аргументы K'/K представляют собой значения k^{*2}.

Соответственно этому для

$$0\leqslant\lambda\leqslant 1$$

можно принять

$$k^{*2}=\theta\left(\frac{q}{1-q}\right)=1-\lambda,\ \text{или}\ k^{*2}=\theta\left(\frac{q-1}{q}\right)=\lambda.$$

Отсюда

$$\frac{iq}{1-q}=-\frac{K'}{K}(1-\lambda),\ \text{или}\ i\left(\frac{q-1}{q}\right)=-\frac{K'}{K}(\lambda),$$

а для

$$1\leqslant\lambda<\infty,$$

можно принять

$$k^{*2}=\theta(q-1)=\frac{1}{\lambda},\ \text{или}\ k^{*2}=\theta\left(\frac{1}{1-q}\right)=\frac{\lambda-1}{\lambda},$$

откуда

$$i(q-1)=-\frac{K'}{K}\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ \text{или}\ \frac{i}{1-q}=-\frac{K'}{K}\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right).$$

Значения K'/K как функции k^{*2} можно найти в таблицах K. Hayashi, Tafeln der Besselschen, Theta, Kugel — und anderer Functionen", 1930.

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОБОБЩЕННОЙ ФОРМУЛЫ ПУАССОНА
[уравнение (15), гл. VI, п. 4]

Эта формула гласит, что комплексная потенциальная функция $\theta-i\tau$ (θ, τ— являются сопряженными функциями), которая удовлетворяет условию $\theta(x,\ y=0)=\theta(x)$, дается выражением

$$\theta(x,\ y)-i\tau(x,\ y)=-i\tau_0+\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1+z\varepsilon)\,\theta(\varepsilon)}{(\varepsilon-z)(1+\varepsilon^2)}\,d\varepsilon,$$

где $z=x+iy$.

Мы начнем решение задачи потенциала с помощью интеграла Фурье, что относится только к $\theta(x, y)$, и может быть выражено таким образом [1]:

$$\theta(x, y)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha y}\,\theta(\varepsilon)\cos\alpha(\varepsilon-x)\,d\varepsilon=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y\,\theta(\varepsilon)\,d\varepsilon}{y^2+(x-\varepsilon)^2}.$$

Разбивая интегрируемое выражение на два сопряженных члена так, что

$$\theta(x, y)=\frac{-i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(\varepsilon)\,d\varepsilon\left[\frac{1}{\varepsilon-z}-\frac{1}{\varepsilon-\bar{z}}\right],$$

где вектор обозначает комплексное сопряжение и, замечая из теории сопряженных функций, что

$$\tau=-\int\frac{\partial\theta}{\partial x}\,dy,$$

в результате получаем:

$$r=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(\varepsilon)\,d\varepsilon\int\left[\frac{1}{(\varepsilon-z)^2}-\frac{1}{(\varepsilon-\bar{z})^2}\right]dy=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(\varepsilon)\,d\varepsilon\left[\frac{1}{\varepsilon-z}+\frac{1}{\varepsilon-\bar{z}}-C\right],$$

где постоянная интегрирования C, чтобы сделать интегралы сходящимися может быть принята равной $2\varepsilon/(1+\varepsilon^2)$. Добавляя к указанному значению θ член $-i\tau$, получим в результате формулу Пуассона.

ПРИЛОЖЕНИЕ V

СВОДКА ОСОБЫХ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ВЫВОДОВ, РАЗВИТЫХ В НАСТОЯЩЕЙ РАБОТЕ В ВИДЕ ФОРМУЛ ИЛИ ГРАФИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ

1. Закон Дарси [(3), гл. II, п. 3]:

$v=\frac{k}{\mu}\frac{dp}{dx}$ — объемная скорость жидкости на единицу площади пористой среды;

k — проницаемость среды;

μ — вязкость жидкости;

dp/dx — градиент давления, где давление обозначено через p, а скорость через v.

2. Течение жидкости через горизонтальный линейный канал и формула проницаемости для экспериментов с горизонтальным линейным потоком жидкости [(4), гл. II, п. 5]:

$$Q=\frac{Ak(P_1-P_2)}{\mu L};\quad k=\frac{\mu QL}{A(P_1-P_2)};$$

Q — расход жидкости (объем/время) через линейный канал с площадью A и длиной L, на обоих концах которого соответствующие давления будут P_1 и P_2.

3. Течение газа через линейный канал и формула проницаемости для экспериментов с линейным газовым течением [(7) и (8), гл. II, п. 5]:

$$Q_m=\frac{\gamma_0 Ak(P_1^2-P_2^2)}{2\mu L};\ \bar{Q}=\frac{Ak(P_1-P_2)}{\mu L};\ k=\frac{2\mu Q_m L}{\gamma_0 A(P_1^2-P_2^2)};$$

$$k=\frac{\mu\bar{Q}L}{A(P_1-P_2)};$$

---

[1] W. E. Byerly, „Fourier Series and Spherical Harmonics“ pp. 70, 73.

Q_m — расход массы газа с плотностью γ_0 при атмосферном давлении;

$\bar{Q}$ — расход объема газа, приведенный к среднеалгебраическому давлению в колонне $(P_1+P_2)/2$.

4. Формула проницаемости для полевых экспериментов на скважине, из которой происходит отбор жидкости при артезианском режиме [(1), гл. II, п. 11]:

$$k=\frac{\mu Q \ln r_e/r_w}{2\pi h (P_e-P_w)};$$

r_e — радиус „внешнего контура" (152,5 *м*), где давление составляет P_e;

r_w — радиус скважины, где давление составляет P_w;

h — мощность песчаника.

5. Формулы проницаемости для полевых экспериментов с газовой скважиной [(2), гл. II, п. 11]:

$$k=\frac{\mu Q \ln r_e/r_w}{2\pi h (P_e-P_w)}=\frac{\mu Q_m \ln r_e/r_w}{\pi h \gamma_0 (P_e^2-P_w^2)}.$$

6. Корректирующие множители в зависимости от величины вскрытия для скважины с напорным и гравитационным течением (см. фиг. 17).

7. Формула проницаемости для полевых экспериментов со скважиной, работающей под действием силы тяжести [(3), гл. II, п. 11]:

$$k=\frac{\mu Q \ln r_e/r_w}{\pi \gamma g (h_e^2-h_w^2)};$$

γ — плотность жидкости;

g — ускорение силы тяжести (980 *см/сек*^{2});

h_e — напор жидкости в песчанике при r_e;

h_w — напор жидкости в скважине при r_w.

8. Формула проницаемости для полевых экспериментов со скважиной, работающей при комбинированном влиянии силы тяжести и напорного режима [(4), гл. II, п. 11]:

$$k=\frac{\mu Q \ln r_e/r_w}{\pi \gamma g (2hh_e-h^2-h_w^2)};$$

h_e — напор жидкости ($> h$) при r_e в песчанике мощностью h;

h_w — напор жидкости ($< h$) в скважине на расстоянии r_w.

9. Формула проницаемости для полевых экспериментов с артезианскими скважинами, где забойные давления подвержены изменению [(5), гл. II, п. 11]:

$$k=\frac{\mu \Delta Q \ln r_e/r_w}{2\pi h \Delta P_w};$$

ΔQ — изменение в расходе жидкости, обязанное изменению ΔP_w в величине забойного давления.

10. Формула проницаемости для полевых экспериментов с газовыми скважинами, где имеет место изменение забойных давлений [(6), гл. II, п. 11]:

$$k=\frac{\mu \Delta \bar{Q} \ln r_e/r_w}{2\pi h \Delta P_w}.$$

11. Формула проницаемости для полевых экспериментов со скважинами, работающими на простом гравитационном или комбинированном гравитационном и напорном режиме, где происходит изменение уровня жидкости в скважине [(7), гл. II, п. 11]:

$$k=\frac{\mu \Delta Q \ln r_e/r_w}{\pi \gamma g \Delta h_w^2}.$$

Если в формулах (1) — (11) выразить различные длины в сантиметрах, площади в квадратных сантиметрах, объемные расходы в кубических сантиметрах в секунду, плотности в граммах на кубические сантиметры, μ — в сантипуазах, g — в сантиметрах, деленных на секунды в квадрате (980), а давления в атмосферах, то k получится в единицах дарси.

12. Формула для определения общей пористости по объемному или гравиметрическому методу [(1), гл. II, п. 13]:

$$f = 100\left(1 - \frac{V_g}{V_b}\right) = 100\left(1 - \frac{\gamma_b}{\gamma_g}\right) \text{ — пористость в процентах;}$$

V_g, γ_g — объем и плотность зерен образца песчаника;
V_b, γ_b — объем и плотность всего образца.

13. Обобщенный вид закона Дарси [(3) и (5), гл. III, п. 3]:

$$\bar{v} = -\nabla\Phi;\ v_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial x};\ v_y = -\frac{\partial\Phi}{\partial y};\ v_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z};\ \Phi = \frac{k}{\mu}(p - V);$$

$\bar{v}$ — вектор макроскопической скорости жидкости (с компонентами v_x, v_y, v_z);

∇ — диференциальный вектор-оператор компонентов $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$;

Φ — потенциал скорости;

V — потенциал внешних сил, действующих на жидкость, $= \pm\gamma gz$, если внешняя сила представляет собой силу тяжести, и вертикальная координата $+z$ направлена вверх (+) или вниз (—).

14. Основное диференциальное уравнение, контролирующее поток несжимаемых жидкостей [(4), гл. III, п. 4]:

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 = \nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}.$$

15. Основное диференциальное уравнение, контролирующее поток сжимаемых жидкостей [(6), гл. III, п. 4]:

$$\nabla^2\gamma = \frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\gamma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\gamma}{\partial z^2} = \frac{f\beta\mu}{k} \cdot \frac{\partial\gamma}{\partial t};$$

t — переменная времени;

β — сжимаемость жидкости, определяемая выражением $\gamma = \gamma_0 e^{\beta p}$ или

$$\beta = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial p}.$$

16. Основное диференциальное уравнение, контролирующее поток газов [(7), гл. III, п. 4]:

$$\nabla^2\gamma^{\frac{1+m}{m}} = \frac{\partial^2\gamma^{\frac{1+m}{m}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\gamma^{\frac{1+m}{m}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\gamma^{\frac{1+m}{m}}}{\partial z^2} = \frac{(1+m)f\mu\gamma_0^{\frac{1}{m}}}{k}\frac{\partial\gamma}{\partial f};$$

природа газа и характер его течения определяются выражением $\gamma = \gamma_0 p^m$.

17. Аналогии течения жидкости через пористую среду с остальными физическими проблемами, табл. 10.

Стационарное течение жидкости

18. Строго радиальное течение в скважину [(10), гл. IV, п. 2]:

$$Q = \frac{2\pi kh(p_e - p_w)}{\mu \ln r_e/r_w};$$

обозначения согласно п. 4.

19. Течение в скважину с переменными граничными давлениями [(12), гл. IV, п. 5]:

$$Q = \frac{2\pi kh\,(\bar{p}_e - \bar{p}_w)}{\mu \ln r_e/r_w};$$

$\bar{p}_e$ — среднее давление на внешнем контуре (радиуса r_e);

$\bar{p}_w$ — среднее давление на контуре скважины (радиуса r_w).

20. Течение в скважину, смещенную от центра внешнего контура [(10), гл. IV, п. 6; см. фиг. 34]:

$$Q = \frac{2\pi kh\,(p_e - p_w^1)}{\mu \ln \dfrac{r_e^2 - \delta^2}{r_e\, r_w}};$$

δ — смещение центра скважины от центра внешнего контура.

21. Течение из бесконечного линейного источника (фронтальное продвижение) в скважину [(8), гл. IV, п. 7]:

$$Q = \frac{2\pi kh\,(p_e - p_w)}{\mu \ln 2d/r_w};$$

d — расстояние скважины от линейного источника.

22. Течение из конечного линейного источника в скважину [(16), гл. IV, п. 9]:

$$Q = \frac{2\pi kh\,(p_e - p_w)}{\mu \ln \dfrac{4y_0}{r_w} \sqrt{\dfrac{(c^2 - r_0^2)^2 + 4y_0^2c^2}{c^2 - r_0^2 + \sqrt{(c^2 - r_0^2)^2 + 4y_0^2c^2}}}}$$

$2c$ — ширина конечного линейного источника;

r_0 — расстояние скважины от центра линейного источника;

y_0 — расстояние от скважины до линейного источника, считая по перпендикуляру.

23. Распределение давления под плотиной, не имеющей забивной крепи [(1), гл. IV, п. 10; см. фиг. 44]:

$$p = \frac{p_2 - p_1}{\pi} \cos^{-1} \frac{2x}{w} + p_1;$$

p_2, p_1 — давления со стороны верхнего и нижнего бьефа;

x — расстояние вдоль основания плотины, замеренное от его центра;

w — ширина основания.

24. Выпирающая сила, действующая на плотину, не имеющую забивной крепи [(2), гл. IV, п. 10]:

$F = \dfrac{(p_2 + p_1)\,w}{2}$ — общая величина выпирающей силы на единицу длины плотины.

25. Суммарный опрокидывающий момент относительно пяты плотины, не имеющей забивной крепи [(3), гл. IV, п. 10]:

$M = \dfrac{w^2\,(3p_2 + 5p_1)}{16}$ — суммарный опрокидывающий момент на единицу длины плотины.

26. Распределение давления под плотиной, не имеющей забивной крепи [(11), гл. IV, п. 11; см. фиг. 50 и 51]:

$$p = \frac{p_2 - p_1}{\pi} \cos^{-1} \times$$

$$\times \left[\frac{2\sqrt{d^2 + (x' - \bar{x})^2} - \sqrt{d^2 + (w - \bar{x})^2} + \sqrt{d^2 + \bar{x}^2}}{\sqrt{d^2 + (w - \bar{x}_1)^2} + \sqrt{d^2 + \bar{x}_1^2}} \right] + p_1;$$

d — глубина свайной крепи; x' — расстояние вдоль основания от пяты; $\overline{x}$ — расстояние свайной крепи от пяты; знак первого радикала — плюс для $x' > \overline{x}$ и минус для $x' < \overline{x}$.

27. Значения суммарных опрокидывающих сил на плотины с забивной крепью (см. фиг. 52).

28. Общие опрокидывающие моменты относительно пяты плотины, имеющей забивную крепь (см. фиг. 53).

29. Падение давления через забивную крепь [(17), гл. IV, п. 11]:

$$\delta p = \frac{p_2 - p_1}{\pi} \cos^{-1} \frac{1}{\left[\sqrt{d^2 + (w - \overline{x})^2} + \sqrt{d^2 + \overline{x}^2}\right]^2} \times$$

$$\times \left[\left\{\sqrt{d^2 + (w - \overline{x})^2} - \sqrt{d^2 + \overline{x}^2}\right\}^2 - 4 + 4\overline{x}(w - \overline{x}).\right]$$

30. Расход фильтрации под плотинами, не имеющими забивной крепи [(10), гл. IV, п. 12; см. фиг. 61].

31. Расход фильтрации под плотинами, имеющими забивную крепь [(5), гл. IV, п. 13; см. фиг. 66 и 67].

32. Падение давления через забивную свайную крепь, если проницаемое ложе имеет конечную мощность [(7), гл. IV, п. 13; см. фиг. 68].

33. Расход фильтрации под коффердамами [(9), гл. IV, п. 14; см. фиг. 71].

34. Диференциальное уравнение, дающее распределение давления в однородной анизотропной среде [(2), гл. IV, п. 15]:

$$k_x \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0.$$

35. Обобщенная формула для течения жидкости в скважину [(6), гл. IV, п. 16]

$$Q = \frac{2\pi k h \Delta p}{\mu \ln c/r_w},$$

c — „эффективное" среднее расстояние от центра скважины до внешнего контура.

36. Формула для величины расхода в системе потока, как это дается графическим построением квадратной сетки эквипотенциалов и линий тока [(9), гл. IV, п. 17]:

$$Q = \frac{m}{n} \Delta\Phi;$$

m — число квадратов, лежащих между двумя соседними эквипотенциалами и распространяющихся от одной граничной поверхности линии тока до другой;

n — число квадратов, лежащих между двумя соседними линиями тока, распространяющихся от контура высокого потенциала к контуру низкого потенциала;

$\Delta\Phi$ — общий перепад потенциала в системе.

37. Течение в сферическую поверхность (несовершенная скважина), [(8), гл. V, п. 2]:

$$Q = \frac{4\pi(\Phi_e - \Phi_w)}{\frac{1}{r_w} - \frac{1}{r_e}};$$

Φ_e, Φ_w — потенциалы $\left[\frac{k}{\mu}(p - \gamma g z)\right]$ на сферических граничных поверхностях с радиусами r_e и r_w.

38. Эксплоатационные производительности частично совершенных скважин (6), гл. V, п. 4; см. фиг. 83—85]:

$$Q = \frac{2\pi k h \Delta p/\mu}{\frac{1}{2\bar{h}}\left[2\ln\frac{4h}{r_w} - \ln\frac{\Gamma(0{,}875\,\bar{h})\,\Gamma(0{,}125\,\bar{h})}{\Gamma(1-0{,}875\,\bar{h})\,\Gamma(1-0{,}125\,\bar{h})}\right] - \ln\frac{4h}{r_e}};$$

$$Q = \frac{2\pi k h \bar{h} \Delta p/\mu}{\ln r_e/r_w}\left(1 + 7\sqrt{\frac{r_w}{2h\bar{h}}}\cos\frac{\pi\bar{h}}{2}\right);$$

h — мощность песчаника;

$\bar{h}$ — величина вскрытия пласта забоем скважины, выраженная в долях мощности песчаника;

Γ — гамма функции.

39. Эксплоатационные производительности частично совершенных скважин в анизотропных песчаниках (см. фиг. 87).

40. Канава, дренирующая жидкость в наклонном песчанике [(8), гл. VI, п. 2]:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{H}{h_1};$$

Q — количество жидкости, попадающей в канаву;

Q_0 — нормальное течение через песчаник (исключая канаву);

H — снижение уровня свободной водной поверхности в канаве;

h_1 — мощность ненарушенного слоя водонасыщенного песчаника.

41. Расход фильтрации через плотину с вертикальными фасами [(16), гл. VI, 5]:

$Q = \frac{k\gamma g\,(h_e^2 - h_w^2)}{2\mu L}$ — расход фильтрации на единицу длины плотины;

h_e — напор жидкости на фасе верхнего бьефа;

h_w — напор жидкости на фасе нижнего бьефа;

L — ширина плотины.

42. Фильтрация воды из канав или каналов, когда фильтрационное течение не сливается с водяным зеркалом [(20), гл. VI, п. 7; (6), гл. VI, п. 8; (5), гл. VI, п. 9; см. фиг. 120 и 124]:

$Q = \frac{k\gamma g}{\mu}\left[B + \frac{2HK(k^*)}{K'(k^*)}\right]$ — расход фильтрации на единицу длины канавы или канала;

B — общая ширина профиля канавы или канала по верхней кромке свободной поверхности воды;

H — глубина чистой воды в ее наиболее глубокой точке;

K, K' — полные эллиптические интегралы первого порядка с модулями k^* и $\sqrt{1-k^{*2}}$, значение k^* определяется точной геометрической формой канавы (см. фиг. 121) и глубиной высоко проницаемого слоя, несущего водяное зеркало.

43. Распространение бокового дренирования из канала в грубозернистый песок перед тем, как вода просочится в нижележащий слой [(2), гл. VI, п. 13]:

$x_1 = \sqrt{\frac{2h\overline{h_0 k_g}}{k_c}}$ — длина бокового дренирования;

h_0 — напор жидкости у лицевой поверхности канала на уровне грубозернистого песка (гравия);

h — мощность грубозернистого песка с проницаемостью k_g;

k_c — проницаемость уплотненных слоев (глина), залегающих ниже грубозернистого песка.

44. Угол падения верхнего слоя почвы на склоне холма, необходимый для того, чтобы отвести выпавший дождевой поток без эрозии почвы [(4), гл. VI, п. 15; см. фиг. 137]:

$$\cos\theta_1 = \frac{\cos\theta_2}{1 - \frac{q\mu}{k\gamma g}};$$

θ_1 — наклон верхнего слоя почвы;
θ_2 — угол склона холма;
q — интенсивность дождевого потока на единицу горизонтальной площади.

45. Интервалы дренирования, необходимые для того, чтобы избежать водозатопления [(6), гл. VI, п. 16; см. фиг. 139].

46. Артезианское течение в скважину под действием силы тяжести [(6), гл. VI, п. 18]:

$$Q = \frac{\pi k\gamma g\,(h_e^2 - h_w^2)}{\mu \ln \frac{r_e}{r_w}};$$

обозначения приняты согласно п. 7.

47. Течение в скважину, из которой происходит отбор жидкости под объединенным воздействием силы тяжести и напорного давления [(2), гл. VI, п. 19]:

$$Q = \frac{\pi k\gamma g\,(2hh_e - h^2 - h_w^2)}{\mu \ln \frac{r_e}{r_w}};$$

обозначения приняты согласно п. 8.

48. Эквивалент негравитационного падения потенциала через песчаник, работающий на гравитационном режиме [(9), гл. VI, п. 20]:

$$\Delta\bar{\Phi} = \frac{k\gamma g\,(h_e^2 - h_w^2)}{2\mu h_e};$$

h_e — фактический напор жидкости на контуре поглощения (внешнем);
h_w — фактический напор жидкости на поверхности стока (внутреннем).

49. Эквивалент негравитационного падения потенциала через песчаник, работающий под объединенным воздействием силы тяжести и напорного давления [(10), гл. VI, п. 20]:

$$\Delta\bar{\Phi} = \frac{k\gamma g\,(2hh_e - h^2 - h_w^2)}{2\mu h};$$

h — мощность песчаника;
h_e — напор жидкости ($> h$) на контуре поглощения (внешнем);
h_w — напор жидкости ($< h$) на поверхности стока (внутреннем — скважина).

50. Эксплоатационная производительность скважины в неоднородном песчанике [(10), гл. VII, п. 3; см. фиг. 150]:

$$Q = \frac{2\pi h k_1\,(p_e - p_w)/\mu}{\ln \frac{r_0}{r_w} + \frac{k_1}{k_2} \ln \frac{r_e}{r_0}};$$

k_1 — проницаемость в кольцевом пространстве с радиусом r_0, окружающим ствол скважины (r_w);
k_2 — проницаемость остаточной части песчаника (вплоть до r_e).

51. Эффект солянокислотной обработки на системы радиального течения (см. фиг. 157 и 158).

52. Эффективная проницаемость трещины [(2), гл. VI, п. 8]: $k = \frac{10^8 w^2}{12}$ дарси;

w — ширина трещины в сантиметрах.

53. Эффект от солянокислотной обработки высокотрещиноватых известняков (см. фиг. 159).

54. Эксплоатационная производительность скважин в слоистых горизонтах (см. фиг. 162).

55. Эксплоатационная производительность скважин с лайнерами, забитыми песчаной пробкой [(1), (7) и (17), гл. VII, п. 10; см. фиг. 164].

56. Развитие продвижения воды в линейную систему [(5), гл. VIII, п. 3; см. фиг. 169].

57. Развитие продвижения воды в радиальную систему [(5), гл. VIII, п. 4; см. фиг. 172].

58. Развитие фронтального продвижения воды в единичную скважину [(9), гл. VIII, п. 6; см. фиг. 174].

59. Максимальные перепады давления в песчанике, не создающие водяных конусов (см. фиг. 187).

60. Максимальные текущие дебиты из скважин с частичным вскрытием пласта, не создающие водяных конусов (см. фиг. 188).

61. Эксплоатационная производительность в каждой из двух скважин на данной площади [(3), гл. IX, п. 3]:

$Q = \frac{2\pi kh\,(p_e - p_w)}{\mu \ln R^2/r_w d}$ — эксплоатационная производительность на скважину;

R — радиус внешнего контура; d — интервал между скважинами ($< R$).

62. Эксплоатационная производительность скважин в группе из трех скважин, размещенных по вершинам равностороннего треугольника [(4), гл. IX, п. 3]:

$$Q = \frac{2\pi kh\,(p_e - p_w)}{\mu \ln R^3/r_w d^3}.$$

64. Эксплоатационная производительность скважин в круговой батарее [(18), гл. IX, п. 3; см. фиг. 198]:

$$Q = \frac{2\pi kh\,(p_e - p_w)}{\mu \left[\ln \frac{R^n}{r^{n-1} r^w} - \sum_1^{n-1} \ln 2 \sin \frac{\pi m}{n}\right]}$$ — эксплоатационная производительность на скважину;

n — число скважин в батарее с радиусом r.

65. Эксплоатационная производительность линейных групп скважин, которые питаются от бесконечного напорного линейного контура [(2), гл. IX, п. 6].

66. Эксплоатационная производительность скважин, размещенных на бесконечном линейном ряду, который питается от параллельно расположенного напорного линейного контура [(9), гл. IX, п. 8]:

$Q = \frac{2\pi kh\Delta p}{\mu \ln \operatorname{sh} \frac{2\pi d/a}{\pi r_w/a}}$ — эксплоатационная производительность на скважину;

Δp — перепад давления между напорной линией и поверхностью скважины;

d — интервал между напорной линией движения и линейным рядом скважин;

a — расстояние между скважинами внутри ряда размещения скважин.

67. Относительная эксплоатационная производительность скважин в двух бесконечных параллельных рядах размещения скважин, которые питаются от напорного линейного контура [(2), гл. IX, п. 9]:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\ln \frac{\operatorname{sh} \pi r_w/a \operatorname{sh} \pi (d_2 + d_1)/a}{\operatorname{sh} 2\pi d_2/a \operatorname{sh} \pi (d_2 - d_1)/a}}{\ln \frac{\operatorname{sh} \pi r_w/a \operatorname{sh} \pi (d_2 + d_1)/a}{\operatorname{sh} 2\pi d_1/a \operatorname{sh} \pi (d_2 - d_1)/a}};$$

Q_1 — эксплоатационная производительность на скважину в линейном ряду размещения на интервале d_1 от напорной линии;
Q_2 — эксплоатационная производительность на скважину в линейном ряду размещения на интервале d_2 ($> d_1$) от напорной линии;
a — расстояние между скважинами внутри линейных рядов размещения.

68. Характеристика эффекта заслона и утечки в двухлинейном ряду размещения (см. фиг. 205, 206, 207).

69. Характеристика эффекта заслона и утечки в трехлинейном ряду размещения (см. фиг. 210).

70. Условие распределения давления для единичного ряда внешних скважин [(9), гл. IX, п. 13]:

$p_{w_1} - p_{w_2} = p_2 - p_1$;
p_{w_1} — забойные давления во внешних скважинах первой линии;
p_{w_2} — забойные давления во внешних скважинах второй линии;
p_1 — среднее „давление участка“ первой линии;
p_2 — среднее „давление участка“ второй линии.

71. Условия распределения давления для многолинейных рядов размещения внешних скважин (гл. IX, п. 14).

72. Развитие водной репрессии при заводнении непосредственным фронтальным продвижением (см. фиг. 223).

73. Развитие водной репрессии при пятискважинном размещении (см. фиг. 225).

74. Развитие водной репрессии при семискважинном размещении (см. фиг. 228 и 230).

75. Проводимость сеток размещения водной репрессии при линейном фронтальном продвижении контура, в зависимости от расстояния между рядами скажин и интервалом между скважинами [(7), гл. IX, п. 23; см. фиг. 241]:

$$Q = \frac{2\pi k h \Delta p}{\mu \ln \dfrac{\operatorname{sh}^4 \pi d/a \operatorname{sh} 3\pi d/a}{\operatorname{sh}^2 \pi r_w/a \operatorname{sh}^3 2\pi d/a}};$$

Q — эксплоатационная производительность на скважину или элемент сетки размещения;
d — расстояние между рядами инжекционных и эксплоатационных скважин;
a — расстояние между скважинами внутри рядов.

76. Проводимость пятискважинной сетки размещения при водной репрессии [(4), гл. IX, п. 24; см. фиг. 243]:

$Q = \dfrac{\pi k h \Delta p}{\mu \left(\ln \dfrac{d}{r_w} - 0{,}6190 \right)}$ — эксплоатационная производительность на элемент сетки размещения; d — интервал между соседними рядами инжекционных и эксплоатационных скважин.

77. Проводимость семискважинной сетки размещения скважин при водной репрессии [(4), гл. IX, п. 25; см. фиг. 243]:

$Q = \dfrac{4\pi k h \Delta p}{\mu \left(3 \ln \dfrac{d}{r_w} - 1{,}7073 \right)}$ — эксплоатационная производительность на элемент сетки размещения; d — длина сторон шестиугольника.

78. Проводимость сетки размещения скважин при шахматном расположении [(3), гл. IX, п. 26; см. фиг. 241]:

$Q = \dfrac{2\pi k h \Delta p}{\mu \ln \dfrac{\operatorname{ch}^4 \pi d/a \operatorname{ch}^3 3\pi d/a}{\operatorname{sh}^2 \pi r_w/a \operatorname{sh}^4 2\pi d/a \operatorname{sh} 4\pi d/a}}$ — эксплоатационная производительность на элемент сетки размещения; d — расстояние между рядами инжекционных и эксплоатационных скважин; a — расстояние между скважинами внутри рядов.

79. Производительность (к. п. д.) линейной водной репрессии [(5), гл. IX, п. 28; см. фиг. 246]:

к. п. д. $= \dfrac{1}{\pi \dfrac{d}{a}\left(\mathrm{ch}^2 \dfrac{\pi d}{a} - 2\right)} \left(\mathrm{ch}^2 \dfrac{\pi d}{a} \ln \mathrm{ch} \dfrac{\pi d}{a} - 0{,}6932\, \mathrm{sh}^2 \dfrac{\pi d}{a}\right)$ — доля площади элемента сетки размещения, затопленная водой к моменту, когда вода впервые достигнет эксплоатационных скважин.

80. Производительность пятискважинного размещения водной репрессии [(3), гл. IX, п. 29]:

$$\text{к. п. д.} = 0{,}723.$$

81. Производительность семискважинного размещения водной репрессии [(3), гл. IX, п. 30]:

$$\text{к. п. д.} = 0{,}740.$$

82. Производительность смещенной в шахматном порядке системы водной репрессии (см. фиг. 246).

Течение сжимаемых жидкостей

83. Установившееся течение сжимаемых жидкостей [(12) и (15), гл. X, п. 1]: $Q = Q_0\,[1 + \beta\bar{p} + 0\,(\beta^2)]$ — расход массы в системе сжимаемой жидкости; Q_0 — расход массы в той же самой системе при условии несжимаемой жидкости; β — сжимаемость жидкости;

$\bar{p}$ — среднеалгебраическое давление — $(p_1 + p_2)/2$.

84. Распределение плотности (и давления) в радиальной системе, где плотность заранее установлена на обоих контурах [(17), гл. X, п. 3]:

$$\gamma\,(r,\ t) =$$

$$= \pi \sum_n \frac{a_n^2 J_0\,(a_n r_1)\, U\,(a_n r)\, e^{-\kappa a_n^2 t}}{J_0^2\,(a_n r_1) - J_0^2\,(a_n r_2)} \left[\frac{\pi}{2} J_0\,(a_n r_1) \int_{r_1}^{r_2} r g\,(r)\, U\,(a_n r)\, dr - \right.$$

$$\left. - \kappa J_0\,(a_n r_2) \int_0^t f_1\,(\lambda)\, e^{\kappa a_n^2 \lambda}\, d\lambda + \kappa J_0\,(a_n r_1) \int_0^t f_2\,(\lambda)\, e^{\kappa a_n^2 \lambda}\, d\lambda\right];$$

γ — плотность жидкости (п. 15);

$$U\,(a_n r) = Y_0\,(a_n r_2)\, J_0\,(a_n r) - J_0\,(a_n r_2)\, Y_0\,(a_n r);$$

J_0, Y_0 — бесселевы функции нулевого порядка первого и второго рода;

a_n — являются корнями выражения: $U\,(a_n r_1) = 0$; $\kappa = \dfrac{k}{f\beta\mu}$; $f_1\,(t)$, $f_2\,(t)$ — значения γ, поддерживаемые на контурах $r = r_1,\ r_2$; $g\,(r)$ — первоначальное распределение $\gamma = \gamma\,(r,\ 0)$.

85. Рост давления в скважине, из которой происходит отбор сжимаемой жидкости, после ее закрытия [(3), гл. X, п. 6; см. фиг. 250]:

$$\frac{p_e - p_w}{p_e - p_{wi}} = \frac{2}{\ln \varrho} \sum_n \frac{e^{-x_n^2 \bar{t}}}{x_n^2 J_1^2\,(x_n)};$$

p_e — давление „резервуара“ — давление при r_e;

p_w — забойное давление ко времени $\bar{t}$; его первоначальное значение в момент закрытия скважины обозначим через p_{wi};

$$\varrho = r_e/r_w; \quad \bar{t} = \kappa t/r_e^2;$$

J_1 — бесселева функция первого порядка и первого рода.

x_n — корни выражения $J_0\,(x_n) = 0$.

Более простая приближенная формула представлена следующим выражением (см. примечание гл. X, п. 6):

$$\frac{h_e - h_w}{h_e - h_i} = \frac{p_e - p_w}{p_e - p_{wi}} = e^{-Ct}; \qquad C = \frac{2\pi k h \gamma_0 g}{\mu A \ln r_e/r_w};$$

h_e, h_w, h_i — высоты жидкости в стволе скважины, соответствующие

$$p_e,\ p_w,\ p_{wi},$$

h — мощность песчаника;
γ_0 — плотность жидкости с вязкостью μ;
A — площадь эксплоатационной колонны труб.

86. Распределение плотности (и давления) в радиальной системе, где значение плотности установлено на одном из контуров, а значение расхода на другом [(10), гл. X, п. 7]:

$$\gamma = \pi \sum_n \frac{a_n^2 J_0(a_n r_1)\, U(a_n r)\, e^{-\kappa a_n^2 t}}{J_0^2(a_n r_1) - J_1^2(a_n r_2)} \left[\frac{\pi}{2} J_0(a_n r_1) \int_{r_1}^{r_2} r g(r)\, U(a_n r)\, dr - \right.$$

$$\left. - \kappa J_1(a_n r_2) \int_0^t f_1(\lambda)\, e^{\kappa a_n^2 \lambda}\, d\lambda - \frac{\kappa J_0(a_n r_1)}{a_n r_2} \int_0^t f_2(\lambda)\, e^{\kappa a_n^2 \lambda}\, d\lambda \right];$$

$$U(a_n r) = Y_1(a_n r_2)\, J_0(a_n r) - J_1(a_n r_2)\, Y_0(a_n r);$$

a_n — корни выражения $U(a_n r_1) = 0$;
$f_1(t)$ — значение γ, поддерживаемое при r_1;
$f_2(t)$ — значение $r \frac{\partial \gamma}{\partial r}$, поддерживаемое при r_2.

87. Теория снижения давления в нефтяном месторождении Ист-Техсас (см. фиг. 253 и 254).

88. Распределение плотности (и давления) в радиальной системе, где расход установлен на обоих контурах [(8), гл. 10, п. 11]:

$$\gamma = \frac{2\kappa}{r_2^2 - r_1^2} \int_0^t [f_2(\lambda) - f_1(\lambda)]\, d\lambda + \frac{2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} r g(r)\, dr +$$

$$+ \pi \sum \frac{a_n^2 J_1(a_n r_1)\, U(a_n r)\, e^{-\kappa a_n^2 t}}{J_1^2(a_n r_1) - J_1^2(a_n r_2)} \left[\frac{\pi}{2} J_1(a_n r_1) \int_{r_1}^{r_2} r g(r)\, U(a_n r)\, dr + \right.$$

$$\left. + \frac{\kappa J_1(a_n r_2)}{a_n r_1} \int_0^t f_1(\lambda)\, e^{\kappa a_n^2 \lambda}\, d\lambda - \frac{\kappa J_1(a_n r_1)}{a_n r_2} \int_0^t f_2(\lambda)\, e^{\kappa a_n^2 \lambda}\, d\lambda \right];$$

$U(a_n r)$ — то же, что и в п. 86;
a_n — корни выражения $U'(a_n r_1) = 0$.

89. Падение давления в замкнутых линзах, которые эксплоатируются единичной скважиной (см. фиг. 256 и 257).

Течение газов

90. Расход газа через линейную колонку песка [(4), гл. XI, п. 2]:

$Q = \frac{k\gamma_0}{\mu\,(1+m)\,L}\,\{\bar{p}_2^{\,1+m} - p_1^{1+m}\}$ — расход массы через единицу площади; γ_0 — плотность газа при единичном давлении; m — характеристика типа потока; определяется уравнением $\gamma = \gamma_0 p^m$; $m = 1$ для изотермического потока; p_2, p_1 — давления на концах колонки, имеющей длину L.

91. Строго радиальное (изотермическое) течение газа (массы) в скважину [(3), гл. XI, п. 3]:

$$Q = \frac{\pi k h \gamma_0\,(p_e^2 - p_w^2)}{\mu \ln r_e/r_w}\,.$$

92. Течение газа в скважину с произвольными давлениями на контурах системы [(4), гл. XI, п. 3]:

$$Q = \frac{2\pi k \gamma_0 h\,(\overline{p_e^{1+m}} - \overline{p_w^{1+m}})}{(1+m)\,\mu \ln r_e/r_w}\,;$$

$\overline{p_e^{1+m}}$, $\overline{p_w^{1+m}}$ — средние от p_e^{1+m}, p_w^{1+m} на контурах с радиусами r_e, r_w (скважина).

93. Общая формула для течения газа в скважину [(5), гл. XI, п. 3 и (35)]:

$$Q = \frac{2\pi k h \gamma_0\,(p_e^{1+m} - p_w^{1+m})}{(1+m)\,\mu \ln c/r_w}\,.$$

94. Эксплоатационная производительность газовых скважин с частичным вскрытием забоя (см. фиг. 262 и 263).

95. Отношение среднего газонефтяного фактора в месторождении к величине истощения содержащейся в нем нефти [(1), гл. XI, п. 8]:

$$P \geqslant \frac{R_i\,(p_i - \bar{p})}{p_i \bar{R}}\,;$$

P — доля извлеченной нефти вплоть до того момента, пока среднее давление резервуара не упадет до $\bar{p}$;

p_i — первоначальное давление резервуара;

R_i — первоначальный газонефтяной фактор в резервуаре;

$\bar{R}$ — средний газонефтяной фактор в процессе падения давления от p_i до $\bar{p}$. Равенство имеет место, когда в месторождении отсутствуют чисто газовые пески; неравенство относится к добыче нефти, которая сопровождается истощением чисто газовой зоны.

96. Газонефтяной фактор для соединяющихся между собой нефтяной и газовой зон [(4), гл. XI, п. 9]:

$R = \frac{\mu_o p_e\,(1 - y_e/h)}{\mu_g y_e/h}$ — масса газа на единицу объема добытой нефти; μ_o, μ_g — вязкость нефти и газа, движущихся как однородные жидкости; p_e — давление резервуара; y_e — мощность нефтяной зоны на большом расстоянии от скважины; h — общая мощность песчаника.

97. Газонефтяные факторы для несообщающихся между собой газовой и нефтяной зоны [(3), гл. XI, п. 10; см. фиг. 267, 268 и 269]:

$$R = R_0 + \frac{k_g \mu_o h_g\,(p_{eg}^2 - p_w^2)}{2k_o \mu_g h_o\,(p_{eo} - p_w)}\,;$$

R_0 — газонефтяной фактор, связанный с газом, первоначально растворенным в нефти;

k_g, k_o — проницаемости газовой и нефтяной зон;

h_g, h_o — мощности газовой и нефтяной зон;

p_{eg}, p_{eo} — давления резервуара в газовой и нефтяной зонах.

98. Влияние спущенных фонтанных трубок на газонефтяной фактор из скважин, где открыта газовая зона, залегающая поверх нефтяной зоны [(2) и (3), гл. XI, п. 11; см. фиг. 273 и 274]:

$$\underline{h_t \geqslant h_g}$$

$$\frac{R'}{R} = \frac{h_o\,(\bar{p}_e - \bar{p}_w)\,\{\bar{p}_e^2 - [\bar{p}_w + \gamma g\,(h_t - h_g)]^2\}}{\left[h_o\,(\bar{p}_e - \bar{p}_w) - \frac{\gamma g\,(h_t - h_g)^2}{2}\right]\left[\bar{p}_e^2 - \left(\bar{p}_w - \frac{\gamma g h_g}{2}\right)^2\right]};$$

$$\underline{h_t \leqslant h_g}$$

$$\frac{R'}{R} = \frac{(h_g - h_t)\left\{\bar{p}_e^2 - \left[\bar{p}_w - \frac{\gamma_g\,(h_g - h_t)}{2}\right]^2\right\} + h_t\,\{\bar{p}_e^2 - [-\bar{p}_w - \gamma g\,(h_g - h_t)]^2\}}{h_g\left\{\bar{p}_e^2 - \left(\bar{p}_w - \frac{\gamma g h_g}{2}\right)^2\right\}};$$

R — газонефтяной фактор при трубках, установленных поверх газовой зоны;

R' — газонефтяной фактор после допуска трубок до глубины h_t — ниже кровли газовой зоны;

h_g, h_o — мощности газовой и нефтяной зоны;

$\bar{p}_e$, $\bar{p}_w$ — давление резервуара и динамическое давление на забое скважины, приведенные к уровню поверхности раздела газ — нефть при фонтанных трубках, установленных поверх газовой зоны;

γ — плотность нефтегазовых смесей в стволе скважины против продуктивных горизонтов.

99. Падение добычи в замкнутом газовом резервуаре, дренируемом скважиной, в которой поддерживается постоянное динамическое забойное давление (см. фиг. 277).

100. Падение добычи в замкнутом газовом резервуаре, дренируемом скважиной, в которой поддерживается отбор с постоянной скоростью (см. фиг. 278).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ РУССКИХ ИССЛЕДОВАТЕЛЕЙ ПО ВОПРОСУ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ПОРИСТУЮ СРЕДУ

1. Авдусин П. П., Грязевые вулканы Крымско-Кавказской провинции (петрографические исследования). Тр. И Г И Акад. наук СССР, 1947.

2. Авдусин П. П., Коллекторы нефти в отложениях визе Урало-Волжской области. Докл. Акад. наук СССР, т. 42, № 1, 1944.

3. Авдусин П. П., Отложения уфимской свиты как коллекторы нефти. — Изв. Акад. наук. Техн. отд., 1947.

4. Авдусин П. П., Сравнительная характеристика коллекторов нефти в визейских отложениях, II Баку, Советская геология № 3, 1944.

5. Авдусин П. П., Строение коллекторов нефти. Изв. Акад. наук Азерб. ССР, № 6, 1947.

6. Авдусин П. П., Фации коллектирующих нефтеотложений продуктов толщи восточной части Азерб. ССР. Докл. Акад. наук СССР, т. 57 № 8, 1947.

7. Авдусин П. П., Батурин В. П. и Варова З. В., Опыты определения влияния минералогического состава песков на фильтрацию через них нефти. Нефт. хоз. № 1, 1937.

8. Авдусин П. П. и Цветкова М. А., Зависимость между структурой коллекторов нефти и их фильтрующей способностью. Докл. Акад. наук № 7, 1947.

9. Авдусин П. П. и Цветкова М. А., О классификации пород коллекторов нефти. Докл. Акад. наук СССР, т. 41, № 2, 1943.

10. Авдусин П. П. и Цветкова М. А., О структуре поровых пространств песчаных коллекторов нефти. Докл. Акад. наук СССР, т. 20, № 2—3, 1938.

11. Агаджанов А. М., Расчет дебитов взаимодействующих в артезианском бассейне скважин. Азерб. нефт. хоз. № 1, 1938.

12. Агроскин И. И., Гидравлика каналов, ОНТИ, 1940.

13. Александров В. Л., Техническая гидромеханика. Гостехиздат, 1946.

14. Альтовский М. Е., Временная инструкция по расчету взаимодействующих скважин. Госгеолиздат, М., 1940.

15. Альтовский М. Е., Расчет дебита по откачкам из одиночных скважин. Госгеолиздат, М., 1940.

16. Альтовский, Сборник трудов института — Водгео, № 1, 1941.

17. Антипов-Каратаев И. Н., Современные методы исследования физико-химических свойств почв. Акад. наук СССР, т. IV, вып. 1, 1945.

18. Аравин В. И., Приток грунтовых вод к водосборам. Изв. Ин-та гидротехники, вып. 18, 1936.

19. Арутюнов А. И., Опыт математического анализа кривых турбулентной фильтрации. Азерб. нефт. хоз., № 1, стр. 42—47, 1938.

20. Арутюнов С. А., Барышев В. М. и др., Исследование режима пластов нефтяных месторождений Апшерона. ОНТИ, 1937.

21. Архангельский А. Р. и Жиркевич М. А., К познанию свойств нефтяных песков, Нефт. хоз., № 2, 1929.

22. Астапов С. В., Очерки по изучению физических свойств почв. Изд. Ин-та сель.-хоз. мелиорации, 1928.

23. Барышев В. М., Пропускная способность пласта при фильтрации негазированной жидкости. В кн. Принципы разработки нефтяного пласта. М. — Баку, Азгостоптехиздат, стр. 13—27, 1942.

24. Барышев В. М. и Снарский А. Н., Гидравлические мо-

дели пластов. В кн. Принципы разработки нефтяного пласта. М. — Баку, Азгостоптехиздат, стр. 5—13, 6 илл., 1942.

25. Биндеман Н. Н., Некоторые соображения по вопросу о фильтрации из водохранилищ. Разведка недр, № 13, 1937.

26. Биндеман Н. Н., Определение коэфициента водопроводимости методом искусственной инфильтрации. Рязань, Гидротехгео, вып. 5, 1932.

27. Богомолов Г. В., К методике определения производительности водоносных пластов откачкой. М., Гидпотехгео, вып. 18, 1933.

28. Болдырев А. К., Опыты над фильтрацией в горных породах в связи с проектом водохранилища по р. Чу в Туркестане. Изд. Геолкома, 1926.

29. Брудастов А. Д., Осушение минеральных и болотистых земель. Сельхозгиз, 1934.

30. Васильев А. М., Исследование грунтов для инженерных целей. ОНТИ, 1935.

31. Васильев В. Г., Физические константы нефтеносных коллекторов Бугуруслана и Сызрани. Журн. Вост. нефть № 7—8, 1940.

32. Ведерников В. В., Теория фильтрации и ее применение в области дренажа. ОНТИ, 1939.

33. Ведерников В. В., Фильтрация из каналов. ОНТИ, 1934.

34. Великанов М. А., Динамика русловых потоков. Гидрометеоиздат, 1946.

35. Вилькер Д. С., Истечение воздуха из пористой среды. Сб. Природные газы, № 9, 1935.

36. Владычанский В. И., Гидрометрия, Ташкент, 1922.

37. Воскресенский С. В., Новые методы гидрогеологических исследований. Сб. Ред. изд. отдел ЦУЕТ МС, 1936.

38. Галин Л. А., Неустановившаяся фильтрация со свободной поверхностью. Докл. Акад. наук СССР, т. 47, № 4, стр. 250—253, 1945 Библиогр. 4 назв.

39. Гальперн Г. Д., Об изменчивости газов Южного массива Ишимбая. Докл. Акад. наук СССР, т. 41, стр. 225, 1943.

40. Гальперн Г. Д., Об изменчивости нефтей Ишимбая. Докл. Акад. наук СССР, т. 41, стр. 175, 1943; изв. Акад. наук СССР, ОТН, № 5—6, стр. 5, 1943.

41. Гальперн Г. Д., Об изменчивости состава газов в пределах Южного массива Ишимбая. Изв. Акад. наук СССР, ОТН, № 8, стр. 26, 1943.

42. Гальперн Г. Д., Сравнительное исследование индивидуальных нефтей СССР. Изв. Акад. наук СССР, ОТН, № 4, стр. 45, 1941.

43. Гальперн Г. Д., Сравнительное исследование индивидуальных нефтей СССР. Изв. Акад. наук СССР, ОТН, № 7—8, стр. 41, 1941.

44. Гальперн Г. Д., Сравнительное исследование индивидуальных нефтей СССР. Сообщ. 4. Бензинолигроиновые фракции нефтей из верейских отложений Молотовского (Пермского) Прикамья. Изв. Акад. наук СССР, ОТН, 1941, № 9, стр. 46.

45. Гальперн Г. Д. и Мусаев И. А., Сравнительное исследование индивидуальных нефтей СССР. Жур. Прикл. химии, № 12, стр. 563, 1939.

46. Гейман М. А., Определение физических констант нефтяного пласта. Труды Всесоюзного технического совещания Наркомнефти, Гостоптехиздат, 1946.

47. Гейман М. А. Методика выбора объекта для вторичной эксплоатации. Труды ИГИ АН СССР, т. III.

48. Гиринский Н. К., Обобщение некоторых решений для скважин на более сложные естественные условия. Докл. Акад. наук СССР, т. 54, № 3, стр. 209—210, 1946.

49. Гиринский Н. К., Основы теории движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями в неоднородных грунтах. — Научн. Зап. Моск. гидромелиоративного ин-та. Изд. МГМИ, М., 1938.

50. Гиринский Н. К., Расчет фильтрации под гидромеханическими сооружениями на неоднородных грунтах. М. —Л., Гос. изд. строит. лит. 1941, 160 стр.

51. Глушков В. Г., Новые методы механического анализа Акад. наук. Труды Почвенного института им. Докучаева, вып. 3—4. Л., 1929.

52. Губанов А. И., Ефремов К. И. и Милютин В. Н., Методика определения физических констант нефтяного пласта. ЦНИЛ Куйбышевнефтекомбината, 1943.

53. Губкин И. М., Учение о нефти. ОНТИ, 459 стр. с илл., 1937.
54. Губкин И. М. и Федоров С. Ф., Грязевые вулканы Советского Союза и их связь с нефтяными месторождениями Крымско-Кавказской геологической провинции. Изв. Акад. наук СССР 1938.
55. Давидович В. И., Метод электро-гидродинамических аналогий. Л., 1932.
56. Девисон Б. Б., Движение грунтовых вод. Сборник «Некоторые новые задачи механики сплошной среды», АН СССР 1939.
57. Девисон Б. Б., Движение грунтовых вод через земляную перемычку с вертикальными стенками. Тр. Гос. гидрол. ин-та, т. 6, 1932.
58. Девисон Б. Б., Некоторые случаи движения грунтовых вод при наличии испарения со свободной поверхности. Тр. Гос. Гидрол. ин-та, вып. 5, 1937.
59. Девисон Б. Б., Плоское установившееся движение грунтовых вод со свободной поверхностью. Тр. IV Международной гидролог. конференции Балтийских стран. Докл. № 49.
60. Добровольский К. П., Теоретическое основание методов исследования на водопроницаемость. Тифлис, 1932.
61. Жуковский Н. Е., Просачивание воды через земляные плотины. Изд. НКЗ, 1923.
62. Жуковский Н. Е., Теоретическое исследование о движении подпочвенных вод. Журн. Физико-хим. об-ва, т. 21, 1889.
63. Закс С. Л., Влияние температуры на отдачу нефти несцементированными песками при гравитационном истечении. Изв. Акад. наук СССР, ОТН, № 10—11, 1944.
64. Закс С. Л., Остаточная вода нефтяных коллекторов. Изв. Акад. наук СССР, ОТН, № 7, 1947.
65. Закс С. Л., Отбор и исследование кернов на водо- и нефтенасыщенность, Нефт. хоз. № 6, 1947.
66. Закс С. Л., Погребенная вода и ее значение для нефтедобычи. Нефт. хоз. № 4, 1947.
67. Закс С. Л., Установка ЛП-1 для определения проницаемости горных пород. Разведка недр № 5, 1941.
68. Замарин Е. А., Гидродинамические сетки движения жидкости. Институт Водгео, вып. IV, 1937.
69. Замарин Е. А., Гидротехнический расчет сооружений. Москва—Ташкент, 1933.
70. Замарин Е., Движение грунтовых вод под гидротехническими сооружениями. Тр. НИХИ, вып. 2, 33, 1931.
71. Замарин Е. А. и др., Курс гидротехнических сооружений. М., Сельхозгиз, 1940.
72. Замарин Е. А., Проектирование гидротехнических сооружений. Сельхозгиз, 1944.
73. Замарин Е. А., Расчет движения грунтовых вод. Ташкент, Изд. отд. ИВХ, 1928.
74. Зегжда А. П., Теория подобия и методика расчета гидротехнических моделей, 1938.
75. Зильберминц В. А. и Крестовников В. Н., К вопросу о методике определения пористости горных пород. Изд. НТУ ВСНХ, 1928.
76. Иванов Н. Н. и Охотин В. В., Дорожное почвоведение и механика грунтов, 1934.
77. Иванова М. В., Методы исследования грунтов. М., 1933.
78. Казарновская Б. Э. и Полубаринова-Кочина П. Я., О движении подошвенных вод в нефтяных пластах. — Прикл. математика и механика, т. 7, № 6, стр. 439—454, рис. 20, библиогр. 2 назв., 1943.
79. Каменский Г. Н., Определение водопроницаемости с сохранением структуры. Вопросы инженерн. гидрогеологии, вып. 1, 1932.
80. Каменский Г. Н., Основы динамики подземных вод. ч. I и II, 1935.
81. Каменский Г. Н., Основы динамики подземных вод. Госгеолиздат, 1943.

82. Каменский Г. Н., Биндеман Н. Н., Альтовский М. Е. и Вевиоровская М. А., Режим подземных вод, Водгео, 1939.
83. Каменский Г. Н. и Богомолов Г. В., Подсчет коэфициента фильтрации для случая асимметричной воронки депрессии. Гидротехн. ст-во, № 2—3, 1932.
84. Каменский Г. Н., Корчебоков Н. А. и Розин К. И., Движение подземных вод в неоднородных пластах. М., 1935.
85. Карпинский А. А., Методы определения физико-механических свойств грунтов. М., Геол.-разв. ин-т, 1932.
86. Керкис Е. Е., Методика опытных работ на фильтрацию в трещиноватых породах. ОНТИ, 1936.
87. Козлов В. С., Расчет дренажных сооружений. Стройиздат, 1940.
88. Котяхов Ф. И., Ремнев Б. Ф. и Буторин Н. П., Анализ кернов нефтяных месторождений. Гостоптехиздат, 1948.
89. Кочин Н. Е., Теоретическая гидромеханика, 1938.
90. Кочина П. Я., Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод. Изв. Акад. наук СССР, 1942.
91. Кочина-Полубаринова П. Я., К вопросу о перемещении контура нефтеносности. ДАН СССР, т. XLVIII, № 4, 1945.
92. Кочина-Полубаринова П. Я., О прямой и обратной задаче гидравлики нефтяного пласта. Прикладная математика и механика, т. VII, 1943.
93. Краснопольский А. А., Грунтовые и артезианские колодцы. Горн. журн., т. 1, 2, 3, 1912.
94. Крестовников В. Н., Пористость и механический состав песчаников и песков Грозненского нефтеносного района. Нефт. хоз. № 9, 1929.
95. Крылов А. П., Принципы рационального размещения скважин. Вопросы техники добычи нефти и бурения на промыслах Второго Баку. Гостоптехиздат, 1943.
96. Крылов А. П. Принципы и методы проектирования рационального размещения скважин. Труды МНИ, вып. 5 (юбилейный), 1947.
97. Кусакин И. П., Искусственное понижение уровня грунтовых вод, ОНТИ, 1935.
98. Кусаков М. М. и Зинченко К. Е., Молекулярно-поверхностные свойства нефтей, Изв. Акад. наук СССР, Отд. техн. наук, № 4, стр. 19, 1940,
99. Кусаков М. М., Ребиндер П. А. и Зинченко К. Е., Поверхностные явления в процессах фильтрации нефти. Докл. Акад. наук СССР, т. 28, № 5, стр. 432, 1940.
100. Ланге О. К., Геофизические исследования глубины залегания подземных вод. Вестник ирригации, № 7, 1925.
101. Ландау Л. и Лифшиц Е., Механика сплошных сред. Ч. 1, Гостехиздат, 1944.
102. Лапук Б. Б., Газодинамические основы разработки месторождений природных газов. Докторская диссертация, МНИ, 1946.
103. Лапук Б. Б. О распределении давления в газовых залежах. Нефт. хоз., 1947.
104. Лапук Б. Б., О термодинамических процессах при движении газа в пористых пластах. Нефт. хоз. № 3, 1940.
105. Лапук Б. Б., Приближенное решение задач о неустановившейся радиальной фильтрации газового закона Дарси. ДАН СССР, т. LVIII, 1947.
106. Лапук Б. Б. Об установившемся движении газированной жидкости в пористой среде, Нефт. пром. СССР, № 5, 1941.
107. Лебедев А. Ф., Почвенные и грунтовые воды, 1914.
108. Лейбензон Л. С., Движение газа в пористой среде. Нефт. хоз., 1929, 1930.
109. Лейбензон Л. С., Движение газированной жидкости в пористой среде. Изв. Акад. наук СССР, Сер. геогр и геофиз., 1941.
110. Лейбензон Л. С., Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М., Гостехиздат, 1947.
111. Лейбензон Л. С., Основной закон движения газа в пористой среде. Докл. Акад. наук СССР, 1945.

112. Лейбензон Л. С., Подземная гидравлика воды, нефти и газа. М., 1934.
113. Лейбензон Л. С., Подземная гидрогазодинамика. Юбилейн. сборник, М., Акад. наук. СССР, 1947.
114. Лейбензон Л. С., Вилькер, Шумилов и Яблонский, Гидравлика. М., Нефтеиздат, 1932.
115. Лейбензон Л. С. и Москальков И. П., Современное состояние гидромеханического исследования нефтяных и газовых пластов. Плановая разработка, вып. II, Горгеонефтеиздат, 1934.
116. Лиогенький С. Я., Определение направления и скорости подземного потока методом прослеживания электроизолиний. Горный журнал, № 4—5, стр. 3—4, 2 фиг., 1946.
117. Маккавеев В. М. и Коновалов И. М., Гидравлика, Л.-М., Речиздат, 1940.
118. Малый Ф. А., Определение пористости и величина горных пород в порозиметре. Нефт. хоз., № 8, 1934.
119. Методы и указания по исследованию грунтов Исследовательского дор-бюро ЦУМТА, Л., 1928.
120. Милович А. Я., Основы гидромеханики. М.-Л., Госэнергоиздат, 1946.
121. Мирчинк М. Ф., Нефтепромысловая геология. Гостоптехиздат, 1946.
122. Москальков И. П., К вопросу об изучении законов движения газов в пористой среде. Нефт. хоз., № 3, 1930.
123. Нельсон-Скорняков Ф. Б., Движение грунтовой воды через земляные плотины. Гидротехн. строит-во, 1937, №№ 2, 7—8.
124. Нельсон-Скорняков Ф. Б., Притекание грунтовой воды к дренажным каналам на водоупоре. Докл. Акад. наук СССР, т. 28, № 6, 1940.
125. Нельсон-Скорняков Ф. Б., Расчет движения грунтовых вод через земляные плотины. Изд. ВАС ХНИЛ, 1936.
126. Нельсон-Скорняков Ф. Б., Фильтрация в однородной среде. Советская наука, М., 1947.
127. Нифанов А. П. и Каменский Г. Н., Гидрогеологические исследования в связи с устройством водоподпорных сооружений и водохранилищ. М., Изд. «Новая деревня», 1929.
128. Новые расчетные данные по фильтрации через земляные перемычки. Тр. Гос. гидрол. ин-та, вып. 5, 1937.
129. Павловский Н. Н., Гидравлика, ч. 1, Л., Изд. Упр. вод. хозяйства Средней Азии и Гос. научн. мелиор. института, 1928.
130. Павловский Н. Н., Гидравлический справочник, 1936.
131. Павловский Н. Н., Неравномерное движение грунтовых вод. Гос. институт сооружений, Сообщение 19, М., 1930.
132. Павловский Н. Н., Неравномерное движение грунтовых вод. Дальнейшее развитие вопроса, Л., 1930.
133. Павловский Н. Н., О притоке воды к горизонтальным фильтрам и другие статьи. Изв. научно-исслед. ин-та гидротехники,№ 19, 1936, № 20 и 21, 1937.
134. Павловский Н. Н., Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и ее основные приложения, Л., 1922.
135. Победоносцев., Гидрогеологическое исследование притоков и утечек жидкости в скважинах при помощи пробных откачек. Азерб. нефт. хоз. № 5 и 9, 1926.
136. Победоносцев Н., Метод определения коэфициента фильтрации водоносных грунтов при помощи пробных откачек воды из отдельных скважин. Вопросы гидрогеологии и инженерной геологии, ч. I и II, Гидротехгеоинститут, вып. 8, 1933.
137. Полубаринова-Кочина П. Я., К вопросу перемещений контура нефтеносности. Докл. Акад. наук СССР, т. 47, № 4, стр. 254—257. Библиограф. 2 назв., 1945.
138. Преображенский И., Определение пористости несыпучих пород. Азерб. нефт. хоз. № 1, 1931.
139. Прозарович Э. А., Пористость и механический состав песков

и песчаников продуктивной толщи промысловых площадей Апшеронского полуострова. Тр. АзНИИ, вып. XXVIII, 1935.

140. Расширение области применения электродинамических аналогий. Изв. гос. гидрор. ин-та. № 66, 1936.

141. Саваренский Ф. П., Гидрогеология. Москва—Ленинград—Новосибирск, Гос. научно-техн. изд., 1934.

142. Саваренский Ф. П., Механический состав как показатель водопроницаемости и зависимость его от дисперсных свойств грунтов (по данным исследований на Мугани). Мат. по опер.-строит. работам на Мугани, 1929.

143. Саваренский Ф. П., Определение коэфициента водопроницаемости, Л., Геолиздат, ГОНТИ НКТП, 1931.

144. Саваренский Ф. П., Определение коэфициента водопроницаемости. Сборник по опробованию полезных ископаемых, вып. 2, Моск. геол.-разв. ин-т, 1932.

145. Сельский В. А., Опыт исследования третичных отложений Грозненского района, 1932.

146. Сергеев Л. А., Моделирование посредством электрического тока промышленных процессов фильтрации нефти и газа в пластах, (В кн. Академия наук СССР. Азербайд. филиал. Сектор физики. Вып. 1, стр. 3—16).

147. Сечал Б. И., Некоторые пространственные задачи теории потенциала и их приложения. Известия АН СССР, серия математическая, т. 10, № 4.

148. Советов С. А., Общая гидрогеология. ОНТИ, 1935.

149. Сулин В. А., Воды нефтяных месторождений СССР, ОНТИ, 1936.

150. Сулин В. А., Условия образования и основы классификации природных вод, в частности, вод нефтяных месторождений. Изд. Акад. наук СССР печатается.

151. Сулин В. А., Варов А. А. и Гуляева Л. А., Материалы по геологии и гидрохимии В.-Чусовских Городков, ОНТИ, 1933.

152. Сухарев Т. М., Воды нефтяных месторождений Восточного Предкавказья, Грозный, 1946.

153. Танасевич М. и Лисицин П., К характеристике чокракско-спириалисовых слоев в Ново-Грозненском районе. Азерб. нефт. хоз. № 11, 1930.

154. Тихов М. Н., Несколько замечаний о перемещении контура нефтеносности. Тр. Грозн. нефт. н.-и. ин-та, вып. II, стр. 12—20., 3 рис. Библиогр. 2 назв., 1947.

155. Тихомиров Н. К. и Бутов П. И., Наблюдения над уровнем подземных вод. Л., 1931.

156. Требин Ф. А., Методика исследования газо-, водо- и нефтепроницаемости горных пород. Нефт. хоз. № 4, 5, 1939.

157. Требин Ф. А., Некоторые особенности движения нефти в песчаных породах. Тр. XXII Междунар. геол. конг., т. IV.

158. Требин Ф. А., Нефтепроницаемость песчаных коллекторов. Гостоптехиздат, 1945.

159. Требин Ф. А. и Муравьев И. М., Курс эксплоатации нефтяных месторождений, ч. 1, Гостоптехиздат, 1938.

160. Трояновский С. В. и Беляев Д. Д., Методика проектирования осушения на шахтах Подмосковного угольного бассейна. ОНТИ, 1939.

161. Устинов Н., Методика определения проницаемости рыхлых пород. Азерб. нефт. хоз., № 12, 1939.

162. Угинчус А. А., Гидравлика нижнего бьефа гидротехнических сооружений, М., 1938.

163. Федоров С. Ф., Взгляды И. М. Губкина на генезис нефтяных месторождений. Акад. наук СССР. Юбилейный сборн., посвящ. 30-летию Октябрьской социалистической революции, т. II, 1947.

164. Федоров С. Ф., Классификация форм нефтяных месторождений. Реф. сборн. работ отд. техн. наук Акад. наук СССР за 1946 г.

165. Федоров С. Ф., Методика составления карт прогноза нефтеносности. Вестн. Акад. наук СССР, № 3, 1940.

166. Федоров С. Ф., Некоторые закономерности геологического строения и условий формирования нефтяных и газовых месторождений Урало-Поволжья. Изв. Акад. наук СССР, Сер. геологич. № 5, 1947.

167. Федоров С. Ф., Основные типы нефтяных месторождений Урало-Поволжья. Реф. сборн. работ отд. техн. наук Акад. наук СССР за 1944 г.

168. Федоров С. Ф., Условия формирования нефтяных месторождений Второго Баку и методы их поисков. Изд. Акад. наук СССР, Отчет о работах Акад. наук, 1944.

169. Храмушев А. С., Исследование водоносности пластов одиночными выработками., М., Госгеолиздат, 1940.

170. Храмушев А. С., Теоретические основы графоаналитического метода определения коэфициента водопроводимости трещиноватых и грубообломочных пород. Сб. Гидрогеология и инж. геология, № 8, 1941.

171. Христианович С. А., Движение грунтовых вод, не следующих закону Дарси. Прикл. матем. и мех., т. 4, 1940.

172. Христианович С. А., Михалин С. Г. и Девисон Б. Б., Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. Изд. Акад. наук СССР, 1938.

173. Чарный И. А., Об интерференции несовершенных скважин. Изв. Акад. наук СССР, ОТН, № 11, стр. 15—19, 8 илл., библиогр. 4 назв., 1946.

174. Чарный И., О притоке нефти к скважинам в месторождениях овальной или серповидной формы. Докл. Акад. наук. Нов. сер., т. 42, № 5, стр. 209—211, 1944.

175. Чарный И. А., О наивыгоднейшей расстановке рядов скважин в нефтяных пластах с водонапорным режимом. Изв. Акад. наук СССР, ОТН, № 1—2, 1945.

176. Чарный И. А. Подземная гидравлика. ОГИЗ—Гостехиздат, 1948.

177. Чертоусов И., Специальный курс гидравлики, М., 1937.

178. Чугаев П. Р., Приток грунтовых вод к горизонтальным водосборам. НИИГИ, № 22, 1938.

179. Шипенко П. Н., Определение коэфициента фильтрации способом откачки, Л.-М., Госэнергоиздат, 1933.

180. Шульгин С. В., К вопросу изучения геолого-физических свойств нефтяных песков и песчаников. Нефт. хоз. № 7, 1935.

181. Щелкачев В. Н., Анализ существующих методов исследования скважин. Грозный, научно-исслед. сектор ГНИ и Грозн. обл. изд-во, 84 стр., 1945.

182. Щелкачев В. Н., Видоизменение метода обработки результатов прослеживания движения динамического уровня в (нефт.) скважинах. Азерб. нефт. хоз., № 9, стр. 16—19, 1940.

183. Щелкачев В. Н., Влияние проницаемости при забойной области и диаметра скважины на дебит. Нефт. хоз. № 10, стр. 21—27. Библиогр. 15 назв., 1946.

184. Щелкачев В. Н., Влияние упругих свойств жидкости на режим месторождения и поведение скважин. Грозный. Грозн. обл. изд-во, 31 стр., 1945.

185. Щелкачев В. Н., Гидродинамический анализ одного из методов определения потенциальных и оптимальных возможностей скважины. Нефт. пром. СССР. № 6, стр. 52—56, 1940.

186. Щелкачев В. Н., Гидромеханическая теория флюдинга и репрессии. Нефт. хоз. № 4, стр. 44—48; № 6, стр. 28—32, 1936.

187. Щелкачев В. Н., Дополнение к статье «Об одном случае движения нефти к скважине при гидравлическом режиме». Нефт. хоз. № 12, стр. 33—35, 1935.

188. Щелкачев В. Н., Зависимость суммарного дебита (нефт.) скважин от их числа и степени уплотнения. Нефт. пром. СССР, № 2, стр. 64—70, 1940.

189. Щелкачев В. Н., Замечания о некоторых факторах, влияющих на форму индикаторных кривых. Азерб. нефт. хоз., № 6, стр. 23—25, 1941.

190. Щелкачев В. Н., Интерференция скважин и теория пластовых водонапорных систем. Баку, АзГОНТИ, 286 стр., 1939.

191. Щелкачев В. Н., Исследование одноразмерного движения упругой жидкости в упругой пористой среде. Докл. Акад. наук СССР, т. 52, № 3, стр. 203—206. Библиогр. 3 назв., 1946.

192. Щелкачев В. Н., Исследовательские работы в области нефте-

добычи. В сб. Методы интенсификации добычи нефти. (Тр. Всес. техн. совещания, т. I). М.-Л., Гостоптехиздат, стр. 13—21, 1946.

193. Щелкачев В. Н., Некоторые приложения теории упругого режима водонефтеносных пластов. Докл. Акад. наук СССР, т. 52, № 5, стр. 399—402. Библиогр. 4 назв., 1946.

194. Щелкачев В. Н., Об одном случае движения нефти к скважине при гидравлическом режиме. Нефт. хоз. № 10, стр. 57—59, 1935.

195. Щелкачев В. Н., О режимах фильтрации. Нефт. пром. СССР, № 7, стр. 45—49, 1940.

196. Щелкачев В. Н., Основные уравнения движения упругой жидкости в упругой пористой среде. Докл. Акад. наук СССР, т. 52, № 2, стр. 103—106. Библиогр. 5 назв., 1946.

197. Щелкачев В. Н., Основы подземной нефтяной гидравлики. М.—Л., Гостоптехиздат, 159 стр., 1945.

198. Щелкачев В. Н. и Донцов К. М., Сопротивление исследований скважин различными методами. Нефт. хоз., № 2—3, стр. 30—35. Библиогр. 6 назв., 1945.

199. Щелкачев В. Н. и Кондратьев В. Ф., Неустановившийся процесс интерференции скважин, Нефт. хоз. № 6—7, стр. 23—25, 2 илл. 1946.

200. Щелкачев В. Н. и Пыхачев Г. Б., Интерференция скважин и теория пластовых водонапорных системе. Баку АзГОНТИ, 1939.

201. Щелкачев В. Н., Упругий режим пластовых водонапорных систем, Гостоптехиздат, 1948.

202. Яковлев В. П., Исследование скважин аппаратом Яковлева. Грозный—Москва, ОНТИ, 48 стр., 1936.

203. Яковлев В. П., О размещении скважин при водонапорных режимах. Нефт. хоз., № 30, 1940.

204. Царевич К. А. Приближенный способ расчета притока нефти и газа к скважинам при режиме растворенного газа. Труды МНИ, вып. 5, 1947.

ОСНОВНЫЕ ПОСОБИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

(на русском языке)

1. Ветчинкин В. П., Новые формулы и таблицы эллиптических интегралов и функций.

2. Гельфонд А. О., Уравнения в конечных разностях, ОНТИ НКТП СССР, 1935.

3. Журавский А. М., Справочник по эллиптическим функциям, 1941.

4. Канторович Л. В., Определенные интегралы и ряды Фурье, изд. Лен. Университета, 1940.

5. Кузьмин Р. О., Бесселевы функции, ОНТИ, 1935.

7. Курош А. Г., Курс высшей алгебры, Гостехиздат, 1946.

6. Лаврентьев М. А., Конформные отображения, ОГИЗ — Гостехиздат, 1946.

8. Маркушевич А. И., Элементы теории аналитических функций, Учпедгиз, 1944.

9. Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, ОГИЗ, 1946.

10. Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, Гостехиздат, 1945.

11. Привалов И. И., Ряды Фурье, ОГИЗ, 1930.

12. Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Гостехизд, 1943.

13. Сафронов, Конформные преобразования и применение их в гидротехнике, Гостехиздат, 1945.

14. Смирнов В. И., Курс высшей математики для техников и физиков, Гостехиздат, т. I, II, III и IV.

15. Таблицы эллиптических интегралов. Зап. Гос. гидрол. ин-та, т. VI, 1932.

16. Янчевский С., Теория функций комплексного переменного, изд. КУБУЧ.

17. Франк Ф. и Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ОНТИ, 1937.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие 3
Краткая история развития подземной гидравлики в СССР 6

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ОСНОВЫ

Глава I. Введение

1. Предмет изучения 15
2. Однородные жидкости 16
3. Пористая среда 18
4. Общие положения аналитической теории 19
5. Природа пористой среды 21
6. Систематическая укладка шаров 21
7. Укладка естественных материалов 24
8. Сжимаемость песка и гравия 24
9. Сжимаемость глин 25
10. Влияние уплотнения и деформации отложений на проницаемость . . 26
11. Классификация пород и их свойства по накоплению жидкостей . . . 26
12. Связь структуры горных пород и подземных жидкостей 31
13. Подземные жидкости, их залегание и миграция 34
14. Залегание грунтовых вод 36
15. Содержание воды в несцементированных поверхностных отложениях 37
16. Движение жидкости в капиллярной зоне 37
17. Движение жидкости ниже водного зеркала. Поверхностная зона . . . 40
18. Движение жидкости под уровнем грунтовых вод. Глубокие зоны . . . 44
19. Залегание погребенных вод 46
20. Миграция погребенных вод 48
21. Влияние уплотнения осадков на миграцию жидкостей 49
22. Залегание газа и нефти 52
23. Происхождение газа и нефти 52
24. Миграция и скопление газа и нефти 54

Глава II. Закон Дарси и измерение проницаемости пористой среды

1. Закон Дарси 58
2. Степень обоснованности закона Дарси 59
3. Постоянная в законе Дарси. Проницаемость пористой среды 70
4. Единицы проницаемости и номенклатура 74
5. Основы методики измерения и вычисления проницаемости пористой среды 76
6. Измерение проницаемости несцементированных песков 79
7. Общая техника определений проницаемости сцементированной пористой среды 83
8. Дальнейшие подробности измерений проницаемости с помощью жидкостей 86
9. Дальнейшие подробности измерений проницаемости с помощью газов 87
10. Сравнение газа и жидкостей при измерениях проницаемости 88
11. Измерения проницаемости в полевых условиях 90
12. Типовые значения проницаемости 96
13. Измерения пористости 100

Глава III. **Общие гидродинамические уравнения для течения жидкостей в пористой среде**

Стр.

1. Основные гидродинамические соотношения 107
2. Классическая гидродинамика 110
3. Обобщенная форма закона Дарси 112
4. Уравнения движения 115
5. Граничные и начальные условия 119
6. Аналогия с остальными физическими проблемами 122
7. Недекартовы системы координат 123
8. Заключение 125

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

УСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ

Глава IV. **Проблемы плоского течения и методы теории потенциала**

1. Введение 128
2. Радиальное течение в скважину 129
3. Ряд Фурье 134
4. Несимметричное течение в скважину 139
5. Произвольное распределение давления на контуре 139
6. Течение между неконцентричными круговыми границами. Функция Грина 144
7. Течение из бесконечного линейного источника питания в скважину. Фронтальное продвижение. Метод отражений 149
8. Течение из конечного линейного источника питания в песчаник бесконечной величины. Метод сопряженных функций 154
9. Течение из конечного линейного источника питания в скважину. Преобразования сопряженной функции. Бесконечный ряд отображений . . 158
10. Противодавление на плотину с расширенным основанием. Забивная крепь отсутствует 163
11. Противодавление на плотину с забивной крепью. Теорема Шварца-Кристоффеля 165
12. Фильтрационный расход под плотинами с удлиненной шириной основания. Отсутствие забивной крепи. Преобразование эллиптической функции 175
13. Фильтрационный расход под плотинами с удлиненной шириной основания при наличии забивной крепи 181
14. Фильтрационный расход под коффердамом 185
15. Анизотропная среда 189
16. Выводы из общей теории потенциала. Теорема Грина 190
17. Приближенные и неаналитические методы решения задач плоского течения 195
18. Заключение 204

Глава V. **Пространственные (трехразмерные) задачи**

1. Введение 216
2. Сферическое течение 217
3. Несовершенные скважины. Распределение потенциала 220
4. Текущие дебиты несовершенных скважин 227
5. Несовершенные скважины в анизотропных песчаниках 231
6. Заключение 234

Глава VI. **Гравитационное течение**

1. Введение 240
2. Дренирование наклонного пласта песчаника. Задача Гопфа и Трефтца 244
3. Решение задачи двухразмерного гравитационного течения методом годографа. Отображение границ 251
4. Фильтрация через плотину с вертикальными фасами. Аналитическая теория 253

Стр.

5. Численные приложения 258
6. Изучение гравитационного течения с помощью электрических моделей 266
7. Соответствие некоторых точных решений уравнения Лапласа для гравитационного течения 269
8. Фильтрация воды из каналов и канав в песчаники с глубоко залегающим водяным зеркалом 276
9. Фильтрация воды из каналов или канав в песчаники, которые подстилаются высокопроницаемыми гравийными ложами на малых глубинах 270
10. Приближенная теория фильтрации воды через плотины с наклонными фасами 281
11. Фильтрационные струи из каналов и канав, поглощаемые неглубоко залегающим зеркалом воды 286
12. Приближенное решение некоторых проблем ирригации и дренирования 292
13. Субирригация 293
14. Проблема водонасыщения 294
15. Проблема эрозии 294
16. Дренирование гончарными трубами 295
17. Теория гравитационного течения Дюпюи-Форхгеймера 297
18. Эксперименты на песчаных моделях с трехразмерными гравитационными течениями 302
19. Составной напор при гравитационном течении 310
20. Приближенная потенциальная теория расхода при гравитационном течении 312
21. Заключение 318

Глава VII. **Системы с непостоянной проницаемостью**

1. Введение. Поверхности разрыва непрерывности 331
2. Непрерывное изменение величины проницаемости 332
3. Прерывное радиальное изменение проницаемости 333
4. Прилегающие слои с различной проницаемостью. Течение жидкости в трещиноватых известняках 338
5. Системы с ограниченными трещинами в известняках 345
6. Теория солянокислотной обработки скважин из карбонатных коллекторов 347
7. Эффект от солянокислотной обработки в радиальной системе 349
8. Эффект от солянокислотной обработки высокотрещиноватых известняков 351
9. Несовершенные скважины в переслаивающихся горизонтах 354
10. Эффективность заиленного лайнера на эксплоатационную производительность скважины 362
11. Заключение 369

Глава VIII. **Системы двух жидкостей**

1. Введение 374
2. Продвижение краевой воды. Общая природа и формулировка проблемы 374
3. Линейное продвижение 380
4. Двухразмерное радиальное продвижение 382
5. Линия частиц жидкости в однородной системе 385
6. Движение линейного контура в единичную скважину 387
7. Прямое перемещение воды между двумя скважинами 390
8. Влияние силы тяжести на геометрическую форму продвигающейся поверхности раздела 393
9. Влияние разницы в величине вязкости между жидкостями с обеих сторон поверхности раздела 395
10. Образование водяных конусов. Физические основы теории 397
11. Аналитические выводы 402
12. Подавление водяного конусообразования прослоями глин 409
13. Заключение 411

Глава IX. **Многоскважинные системы**

Стр.

1. Введение 418
2. Малые группы скважин. Общая теория 420
3. Примеры 421
4. Зависимость эксплоатационной производительности от числа скважин в группе 428
5. Распределение давления на внешнем контуре 429
6. Небольшие группы скважин, питающиеся бесконечным линейным контуром 431
7. Бесконечные линейные ряды скважин 432
8. Распределение давления у бесконечного ряда скважин. Напорная линия 433
9. Двухлинейное расположение скважин. Эффект заслона 439
10. Размещение скважин тремя рядами 446
11. Размещение скважин в шахматном порядке 450
12. Теория размещения отстоящих (внешних) скважин. Формулировка проблемы 451
13. Однорядное размещение внешних скважин 452
14. Многорядное размещение внешних скважин 456
15. Числовой пример 460
16. Проблема водной репрессии (флюдинг) 463
17. Процесс образования поверхности раздела вода—нефть. Эксперименты на электролитических моделях 464
18. Эксперименты на модели с линейным контуром заводнения . . . 466
19. Эксперименты, соответствующие искусственному методу водной репрессии 469
20. Эффект барьеров в системе водной репрессии 473
21. Модели с листовыми проводниками и распределение потенциала . . . 475
22. Аналитические расчеты проводимости сеток скважин при водной репрессии. Общий метод 480
23. Проводимость при прямолинейном заводнении 481
24. Проводимость среды с пятью скважинами при водной репрессии . 483
25. Проводимость среды с семью скважинами при водной репрессии . . . 485
26. Проводимость при шахматном размещении скважин 488
27. Расчет коэфициента полезного действия водной репрессии 490
28. Коэфициент полезного действия при водной репрессии с последовательным питанием от линейного контура 491
29. Коэфициент полезного действия пятискважинного размещения . . 492
30. Коэфициент полезного действия семискважинного размещения при водной репрессии 493
31. Коэфициент полезного действия шахматной расстановки при водной репрессии с питанием от линейного контура 494
32. Общие наблюдения над сетками размещения при водной репрессии . . 495
33. Сравнение сеток размещения при водной репрессии 496
34. Заключение 502

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ

Глава X. **Течение сжимаемых жидкостей в пористой среде**

1. Введение 513
2. Радиальное течение. Некоторые предварительные аналитические формулировки 520
3. Радиальные системы, в которых плотности заданы на обоих границах 522
4. Падение добычи в месторождении, которое эксплоатируется при гидравлическом режиме с переменным давлением 525
5. Предельный случай нулевого внутреннего радиуса 529
6. Рост забойных давлений в закрытых скважинах 529
7. Радиальные системы с плотностью, заданной на одной границе и расходом на другой 531

Стр.

8. Падение давления в нефтяном месторождении Ист-Техсас 532
9. Единичная скважина в замкнутом резервуаре 540
10. Скважина с бесконечно малым радиусом 541
11. Радиальные системы с заданными расходами на обоих границах . . . 541
12. Предельный случай исчезающе малого внутреннего радиуса 543
13. Скважина в замкнутом песчанике 544
14. Нерадиальное течение. Интерференция скважин. Функция Грина. . . 547
15. Применение источников и стоков к решению проблем нестационарного течения сжимаемых жидкостей в пористой среде 553
16. Заключение 555

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

ДВИЖЕНИЕ ГАЗОВ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Глава XI. **Движение газов в пористой среде**

1. Введение 563
2. Установившееся течение газов. Линейные системы 564
3. Установившееся состояние двухразмерных (плоских) систем . . . 565
4. Трехразмерные (пространственные) системы в установившемся состоянии 566
5. Влияние силы тяжести на течение газов в пористой среде 567
6. Установившееся течение газов в системах с непостоянной проницаемостью 568
7. Двухжидкостные системы. Водное конусообразование 569
8. Газовые факторы в пористой среде, где газ и нефть движутся как однородные жидкости 570
9. Газовые факторы для сообщающихся газовых и нефтяных зон . . 571
10. Газовые факторы несообщающихся между собой газовых и нефтяных песчаников 574
11. Влияние спуска в скважину фонтанных трубок на величину газового фактора 577
12. Образование газовых конусов в скважинах с фонтанными трубками . . 581
13. Многоскважинные системы 583
14. Неустановившееся течение газов в пористой среде 584
15. Замкнутый газоносный резервуар, дренируемый скважиной, которая работает при постоянном давлении 587
16. Замкнутый газоносный резервуар, дренируемый скважиной, работающей с постоянным отбором 591
17. Заключение 592

Приложение I. Уравнение Лапласа в криволинейных координатах . . . 599
Приложение II. Некоторые двухразмерные функции Грина 600
Приложение III. Преобразования с помощью модулярной эллиптической функции $\theta(q) = k^{*2}$ 601
Приложение IV. Доказательство обобщенной формулы Пуассона . . . 602
Приложение V. Сводка особых количественных выводов, развитых в настоящей работе в виде формул или графических построений 603
Список литературы русских исследователей по вопросу движения жидкости через пористую среду 616
Основные пособия по математическому анализу (на русском языке). . . 623

Редактор И. И. Гольберг *Технический редактор А. С. Полосина*

Подписано в печать 20.02.04. Формат $60 \times 84^{1}/_{32}$.
Печать офсетная. Бумага офсетная №1.
Усл. печ. л. 50,12. Уч. изд. л. 50,86. Гарнитура Таймс.
Институт компьютерных исследований
Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов в ГИПП «Вятка».
610033, г. Киров, ул. Московская, 122.