

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
НАУЧНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ГРАЖДАНСКИХ, ПРОМ. И ИНЖЕНЕРНЫХ  
СООРУЖЕНИЙ

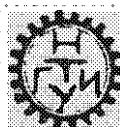
СООБЩЕНИЕ

19

ГИДРОТЕХНИЧЕСКИЙ СЕКТОР. ВЫП. 3

АВГУСТ 1930

НЕРАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ  
ГРУНТОВЫХ ВОД



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКВА

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
НАУЧНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ГРАЖДАНСКИХ, ПРОМ. И ИНЖЕНЕРНЫХ  
СООРУЖЕНИЙ  
СООБЩЕНИЕ

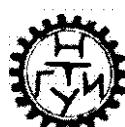
19

ГИДРОТЕХНИЧЕСКИЙ СЕКТОР. ВЫП. 3.

АВГУСТ 1930

Проф Н. Н. ПАВЛОВСКИЙ

НЕРАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ  
ГРУНТОВЫХ ВОД



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКВА

## ПРЕДИСЛОВИЕ.

Старая формула Дююи, являясь основной для гидравлики грунтовых потоков, весьма часто применялась и применяется при рассмотрении различных случаев из этой области; в частности, применялась она и к движению грунтовых потоков по горизонтальному подстилающему слою и по „прямому уклону“. Хотя последние случаи и относятся, собственно, к неравномерному движению, но следует указать, что полученные для них до сего времени решения были не больше, чем примерами на применение формулы Дююи, и ни в какой мере не составляли связной и систематической теории.

Дать основы такой теории неравномерного движения грунтовых вод, хотя бы в гидравлической постановке, и является задачей настоящей работы, в которой я привожу решение вопроса к пользованию таблицами, рассматривая при том не только случай „прямого“, но и случай „обратного“ уклона подстилающего слоя, а также делаю исследование формы кривых депрессии, после чего, отметив в главных чертах возможные практические приложения полученных решений в области гидротехнического строительства, даю ряд типовых примеров. Мне представляется, что в предлагаемом виде эта работа может рассматриваться, как первая попытка оформления особого отдела гидравлики — о неравномерном движении грунтовых вод.

Доклад о необходимости разработки этой темы и о значении ее для практической гидротехники, с сообщением намеченной мною общей схемы решения вопроса, был сделан мною в феврале 1929 г. в гидротехническом секторе государственного института сооружений, после чего соответствующая работа и была включена в план и смету сектора, с заданием разработать как теоретическую часть, так и вопрос о практических приложениях. В соответствии с этим и построено изложение в ныне исполненной моей работе по гидротехническому сектору.

Приношу в заключение искреннюю благодарность сотруднику моему по гидротехническому сектору инж. А. И. Шварц за его работу при составлении чертежей и примеров, а также за принятие им на себя руководства по составлению таблиц, приложенных в конце книги.

Проф. Н. Павловский.

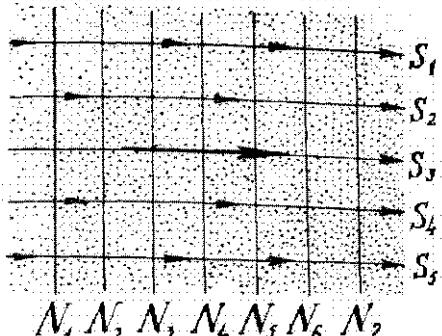
Ноябрь 1929 г.

### § 1. Общие указания.

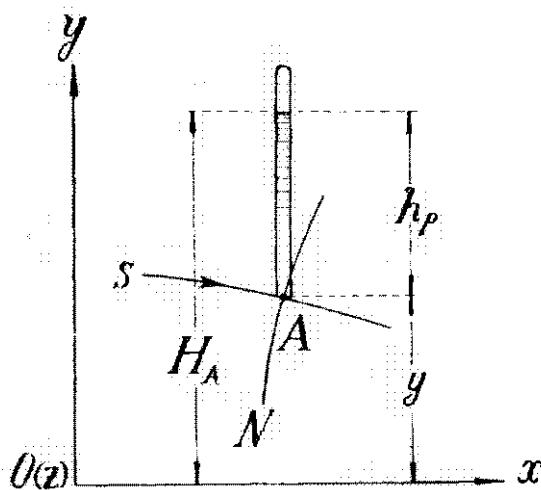
Как известно, движение грунтовых вод, подчиняющееся закону Дарси, происходит по линиям тока, нормальным к эквипотенциальным поверхностям, которые иногда называются также поверхностями равных напоров (этот последний термин, как специально гидромеханический, мы и удержим в дальнейшем изложении). Схема по черт. 1 иллюстрирует только что сказанное, при чем здесь линии  $S_1, S_2, S_3 \dots$  суть линии токов, а линии  $N_1, N_2, N_3 \dots$  изображают на нашем четреже поверхности равного напора, которые, конечно, расположены так, что напоры убывают по направлению течения, т.е.:

$$H_1 > H_2 > H_3 \dots \dots \dots \quad (1)$$

если через  $H$  обозначить напор вообще, а через  $H_1, H_2, H_3$  и так далее — напоры для определенных поверхностей  $N_1, N_2, N_3$  и т. д.



Черт. 1.



Черт. 2.

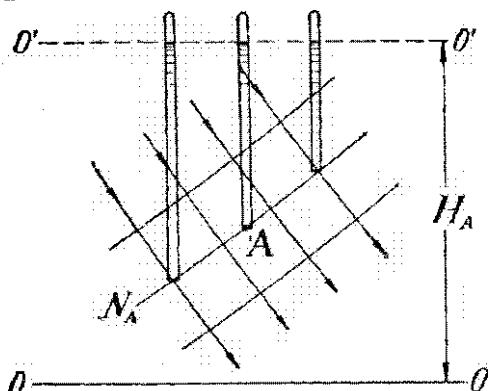
Полагаем полезным напомнить здесь самое определение понятия напора<sup>1</sup>), крайне важное для понимания всего дальнейшего: напором  $H$  в какой-либо точке  $A$  (черт. 2), считая таковой над некоторой заранее выбранной плоскостью сравнения  $Oxz$ , называют сумму пьезометрической высоты в этой точке ( $h_p$ ) и отметки этой же точки ( $y$ ), т.е.:

$$H = h_p + y \dots \dots \dots \quad (2)$$

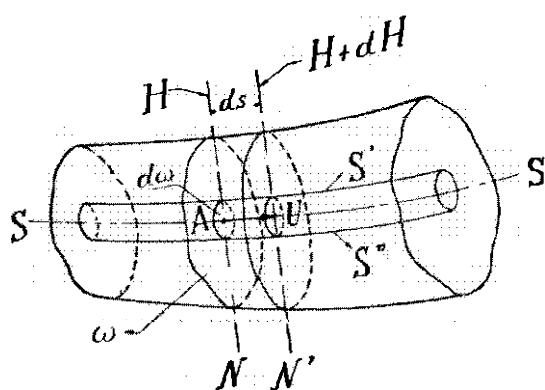
В дополнение к этому следует заметить, что физически поверхность равных напоров характеризуется, очевидно, тем, что вершины столбиков жидкости в пьезометрах, установленных в разных точках такой

<sup>1)</sup> Подробнее о напоре см. в моей книге „Гидравлика“, ч. I, 1928 г., стр. 28—32.

поверхности, лежат в одной горизонтальной плоскости, как и показано, например, на черт. 3. Здесь три пьезометра установлены в разных точках поверхности  $N_A$ , вершины же соответствующих столбиков жидкости лежат в одной общей горизонтальной плоскости  $O' - O'$ , называемой иногда напорной плоскостью, которая над плоскостью сравнения  $O - O$  возвышается на величину напора  $= H_A$ . В связи с тем что указанным свойством поверхностей равных напоров ясно, что по этим поверхностям не может быть движения воды, так как здесь нет причины (нет неравенства напоров), которая бы вызвала такое движение, почему и понятно, что линии токов нормально пересекают поверхности равных напоров. Так как живое сечение потока, по общему определению этого понятия, есть поверхность, нормальная к направлениям скоростей, то мы видим, что для грунтовых вод поверхности живых сечений суть в то же время и поверхности равных напоров.



Черт. 3.



Черт. 4.

Теперь в какой-либо грунтовом потоке возьмем некоторую точку  $A$  (черт. 4), через которую проходит линия тока  $S$ , и вокруг этой „осевой линии“ представим себе элементарную трубку, составленную линиями токов  $S' - S''$ , так что сечение получаемой элементарной струйки будет, положим,  $d\omega$ , а соответствующий расход через это сечение равен

$$dQ = Ud\omega, \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (3)$$

где  $U$  — скорость фильтрации в точке  $A$ . Этую скорость теперь и выразим через напор на основании закона Дарси.

Для этого через точку  $A$  проведем поверхность равных напоров  $N$  и на расстоянии  $ds$  от последней — поверхность  $N'$ . На первой напор  $= H$ , на второй он  $= H + dH$ , так что „приращение“ напора на длине  $ds$  будет  $= dH$ , чему соответствует „убывание“ или падение напора  $= -dH$ . Следовательно, падение напора на единицу длины нашей струйки ( $J$ ) или гидравлический градиент будет

$$J = - \frac{dH}{ds} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (4)$$

Так как по закону Дарси скорость фильтрации  $U$ , как известно, равна

$$U = kJ, \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (5)$$

где  $k$  — коэффициент фильтрации, то по (4) и (5) имеем:

$$U = -k \frac{dH}{ds}, \dots \dots \dots \quad (6)$$

что и дает закон Дарси в дифференциальной форме.

При этом элементарный расход  $dQ$  по (3) будет

$$dQ = -k \frac{dH}{ds} d\omega, \dots \dots \dots \quad (7)$$

а расход через все живое сечение  $\omega$ , определяемое проведенной поверхностью равных напоров  $N$  (черт. 4), получим в виде:

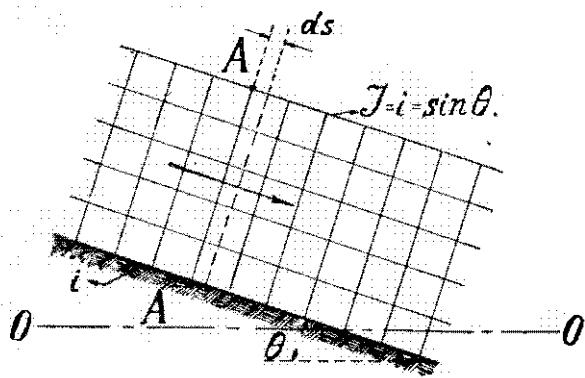
$$Q = - \int_{\omega} k \frac{dH}{ds} d\omega = -k \int_{\omega} \frac{dH}{ds} d\omega \dots \dots \dots \quad (8)$$

Полученные зависимости могут быть дальше развиты двояко: в направлении точных (гидромеханических) методов и в направлении методов упрощенных (гидравлических). При первых методах необходимо выяснить, как выражаются в различных точках потока его гидромеханические элементы (напоры, скорости и т. д.), что требует уже обращения к дифференциальным уравнениям движения грунтовых вод, при чем вопрос должен быть поставлен, как задача математической физики. Такая трактовка весьма плодотворна и, несомненно, может дать чрезвычайно важные практические следствия, но крайняя трудность решения задач в такой постановке, а часто и невозможность получения конкретного решения заставляют обращаться ко второму методу — гидравлическому, при котором дается лишь суммарная оценка главных элементов движения, что нередко можно считать достаточным для практических целей, в особенности для случаев равномерного и медленно-изменяющегося неравномерного движения грунтовых вод. К этим случаям мы здесь и обратимся.

## § 2. Равномерное движение грунтовых вод.

Как равномерное, так и неравномерное движение мы будем в дальнейшем рассматривать для потоков "безнапорных", которые для практической гидротехники являются важнейшими<sup>1)</sup>; они характеризуются тем, что имеют так называемую "свободную поверхность", на которой давление = атмосферному.

Для такого потока, при равномерном его движении, возьмем теперь схему, представленную на черт. 5, где показаны линии токов и поверхности равных напоров, при чем, в виду равномерности движения, первые параллельны "линии дна", а вторые, как нормальные к первым, к этой линии пер-



Черт. 5.

<sup>1)</sup> "Напорных" потоков (например, артезианских) мы в настоящей работе не касаемся.

пендикулярны. Как отмечено в § 1, некоторое живое сечение  $A-A$  будет в то же время и поверхностью равных напоров, а следовательно, во всех точках сечения  $A-A$  напоры между собой одинаковы и равны напору в верхней его точке  $A$ , т.е. равны возвышению этой точки над плоскостью сравнения  $O-O$ .

Ясно, что в рассматриваемом случае и падение напора ( $== -dh$  по § 1) для всех точек сечения  $A-A$  будет одинаково и на элементарном пути  $ds$  (черт. 5) равно:

$$-dH = \sin \Theta \cdot ds, \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (9)$$

где  $\Theta$  — угол наклона дна к горизонту, (а следовательно — и угол наклона всех линий токов). Поэтому по (9) имеем:

При этом для расхода  $Q$  по (8) найдем:

$$Q = -k \int \frac{dH}{ds} d\omega = k \int \sin \Theta \cdot d\omega = k \sin \Theta \omega, \dots \quad (11)$$

где, как обычно, обозначим

$$\sin \Theta = i, \pm \sqrt{1 - i^2}, \pm \sqrt{1 + i^2}, \pm \sqrt{1 - i^2}, \pm \sqrt{1 + i^2}, \dots \quad (12)$$

после чего, вместо (11), будет:

$$Q = k i \omega, \quad (13)$$

откуда находим и выражение для средней скорости фильтрации  $V$ :

$$V = \frac{Q}{e} = ki \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (14)$$

Впрочем, в связи со сказанным в настоящем параграфе относительной формы линий токов и поверхностей равных напоров для равномерного движения (черт. 5) ясно, что скорости  $U$  в отдельных точках какого-либо живого сечения, определяемые по (6), равны между собой и, следовательно, равны средней скорости  $V$ , ибо по (6), (10) и (12) имеем:

$$U = -k \frac{dH}{ds} = k \cdot \sin \Theta = ki = V, \quad \dots \dots \dots \quad (15)$$

чем равномерное движение грунтовых вод существенно отличается от такого же движения надземных потоков, где даже при равномерном движении скорости в отдельных точках живого сечения, как известно, не одинаковы по величине.

Полученные простейшие зависимости для равномерного движения можно было, конечно, вывести и непосредственно из закона Дарси, и мы дали приведенное выше рассмотрение лишь для большей ясности понимания дальнейшего изложения (§ 3).

Формула (14) для грунтовых вод, которую можно назвать формулой Дарси, соответствует по своему значению формуле Шези для открытого русла. Это приводит к мысли о том, что и для грунтовых вод можно ввести в рассмотрение понятие „модуля расхода“. В самом деле, из (13) имеем:

где произведение  $k\omega$ , можно назвать "модулем расхода" и обозначить через  $K$ , т.е.

$$K = k\omega, \quad \ldots, \quad \omega, \quad \omega + k, \quad \omega + 2k, \quad \ldots \quad (17)$$

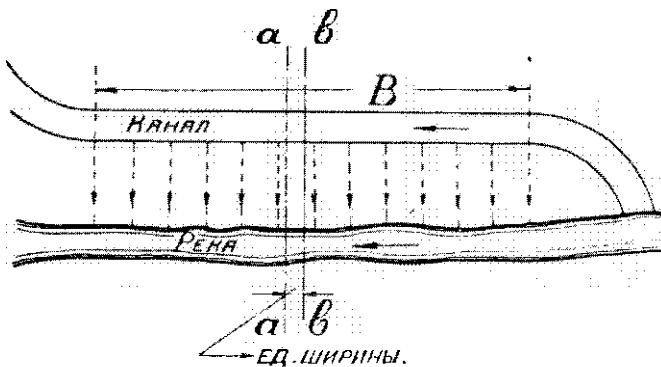
и, следовательно, по (16):

откуда (при равномерном движении)

$$K = \frac{Q}{\epsilon}, \quad \text{where } \epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6. \quad (19)$$

что дает второе выражение для модуля расхода — через уклон  $i$  и расход  $Q$ .

Для грунтовых потоков особенно существенное значение имеет так называемое "плоское движение", о чём теперь и уместно сказать. Движение таких потоков чаще всего происходит весьма "широким фронтом",



Черт. 6.

т.-е. грунтовый поток имеет весьма большую ширину, как, например, представлено в плане на схеме фильтрации из некоторого канала в реку (черт. 6), при чем ширина возникающего здесь грунтового потока =  $B$ . При этом на единицу ширины приходится „удельный расход“  $q$ , равный

что соответствует части потока, положим, между линиями  $a-a$  и  $b-b$ .

Рассматривая вместо всего потока только этот частичный („единичный“) поток, мы и сводим вопрос, как говорят, к плоской задаче, несколько упрощая и облегчая различные формальные зависимости. При этом, вместо (13), получим:

где  $h_0$  — глубина потока при равномерном движении („нормальная глубина“), ибо теперь  $\omega = h_0$ . Для скорости  $V$ , очевидно, можно написать:

$$V = \frac{q}{h_0} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (22)$$

Далее для „плоской задачи“ модуль расхода, вместо (17) и (19), получим в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_0 = kh_0, \\ \vdots \end{array} \right. \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (23)$$

$$\left\{ K_0 = \frac{q}{\ell}, \dots \dots \dots \dots \dots \dots \right. \quad (24)$$

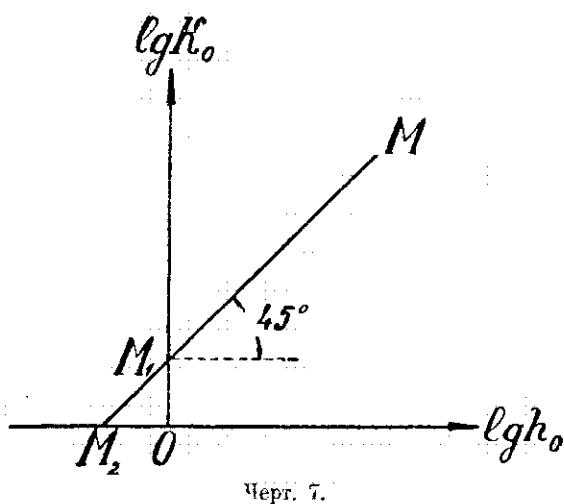
так что

По формуле (23) нами построен график для модуля  $K_0$  в логарифмическом масштабе, для чего на основании зависимости:

$$\lg K_0 = \lg k + \lg h_0 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (26)$$

величины  $\lg h_0$  отложены по абсциссам, а  $\lg K_0$  — по ординатам. Получаемый при этом график № 1 (см. в конце книги) состоит, как ясно

по (26), из системы параллельных прямых, пересекающих ось ординат в соответствующей точке  $M_1$  (схема на черт. 7), при чем



где коэффициент фильтрации  $k$  отвечает определенному грунту, так что для каждого грунта имеется свое значение ординаты  $OM_1$ , определяющей положение линии  $M_1M_2M_3$ .

Наименование некоторых, наиболее характерных, групп указаны в графике № 11). Этот график может быть полезен для различных пред-  
х подсчетов и т. д. При этом  
(25), по которым весьма просто  
движения грунтовых вод.

### 3. Формула Дюпюи.

Обращаясь к неравномерному движению грунтовых вод, надлежит прежде всего выяснить <sup>2)</sup> тот гидравлический прием, который был впервые предложен Дюпюи (Дюриф) еще в 1857 г. и с того времени — правильно и неправильно — применялся при решении различных вопросов из области грунтовых вод. Этот прием можно положить и в основу гидравлического рассмотрения неравномерного медленно изменяющегося движения таких вод.

На черт. 8 показаны типичные схемы грунтовых потоков: I — случай подпора при прямом уклоне подстилающего водонепроницаемого слоя; II — случай спада (также при прямом уклоне); III — случай движения при обратном уклоне подстилающего слоя, при чем во всех случаях имеется в виду медленно изменяющееся движение, характеризуемое следующими условиями: 1) угол расхождения или схождения линий токов в нем весьма мал; 2) кривизна линий токов весьма незначительна, т.-е. радиус кривизны их весьма велик.

Таким образом, для медленно изменяющегося движения линии токов представляются весьма "слабо деформированными", что и усматривается

<sup>1)</sup> Для коэффициента фильтрации принятые, указываемые, например, в моем „Гидравлическом Справочнике“, изд. 1924 г., глава III.

2) Этот гидравлический прием мы выясним и уточним здесь, во избежание возможных ошибок при его применении.

из схем черт. 8<sup>1)</sup> и чем эти схемы существенно отличаются от тех случаев „резкой деформации“ линий токов, примером коих может служить, положим, случай фильтрации под гидротехническими сооружениями (см. черт. 9, представляющий картину линий токов и равных напоров под сооружением с одним низовым шпунтом). В связи со сказанным относительно „слабой деформированности“ линий токов медленно изменяющегося движения, понятно, что две смежные линии равных напоров (напр.,

$A - A'$  и  $B - B'$

на всех схемах черт. 8) можно считать отстоящими друг от друга на одинаковое расстояние (положим  $\delta s$ ).

Если теперь в соответствии с этим, переходя к пределам, проведем в потоке две линии равных напоров на бесконечно малом расстоянии друг от друга (черт. 10), то для всех элементарных струек длина пути между взятыми сечениями будет  $= ds$ , а падение напора  $= - dH$  (ибо приращение напоров  $= dH$ ).

Следовательно, производная  $\frac{dH}{ds}$  в выражении для расхода (11) для всех струек будет при этом одинакова, почему это выражение представится так:

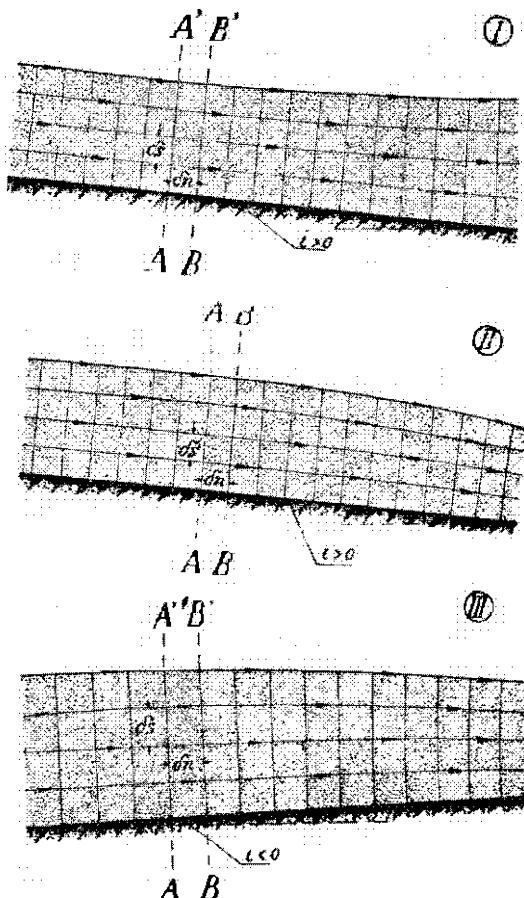
$$Q = -k \int_{\omega} \frac{dH}{ds} d\omega = -k \frac{dH}{ds} \int_{\omega} d\omega = -k \omega \frac{dH}{ds}, \dots \quad (27)$$

а потому соответствующая скорость фильтрации  $V$  будет:

$$V = \frac{Q}{\omega} = -k \frac{dH}{ds}, \dots \quad (28)$$

где производную  $\frac{dH}{ds}$  можно считать, на основании сказанного, по направлению любой линии тока, пронизывающей данное живое сечение.

В дальнейшем для разбираемых нами случаев будем считать эту производную по направлению донной линии тока и, следовательно, расстояние  $s$  будем отсчитывать от некоторой начальной точки  $M$  по



Черт. 8.

<sup>1)</sup> На черт. 8 везде следует надписи  $\delta s$  и  $\delta \omega$  взаимно переставить местами.

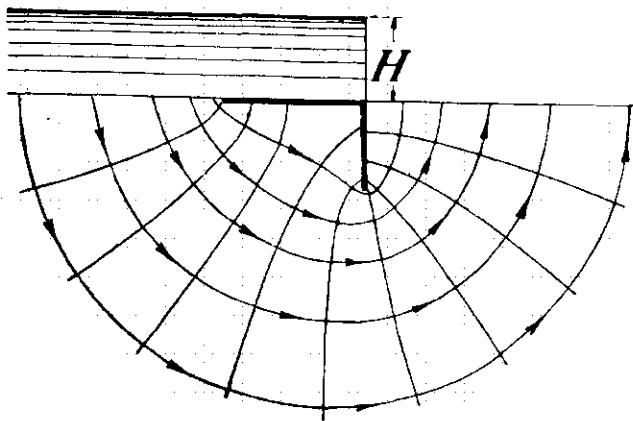
„линии дна“ (см. дальше, черт. 12). В таком понимании и будем рассматривать зависимость (28), как формулу Дюпюи в дифференциальной форме.

Для „плоской задачи“ (см. § 2) площадь  $\omega$  какого-либо живого сечения  $A - A'$  (см. схемы черт. 8), очевидно, будет

$$\omega = n, \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (29)$$

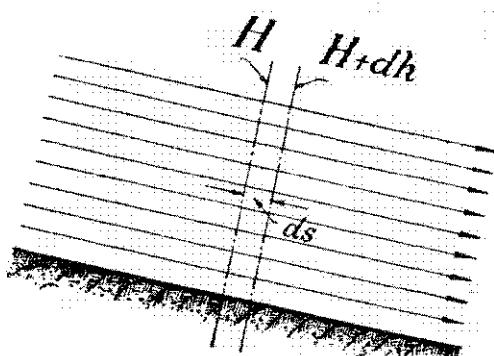
где  $n$  — длина линии  $A - A'$ , и потому „удельный расход“  $q$  на основании (27) получим в виде:

$$q = -kn \frac{dH}{ds} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (30)$$



Черт. 9.

Линии типа  $A - A'$  обладают некоторой кривизной, впрочем весьма незначительной, почему можно заменять такие линии соответствующими прямыми, обозначая длину прямых попрежнему через  $n$ . Однако, для практических целей еще удобнее от прямых  $n$  перейти к более простым прямым, т. е. к более простым живым сечениям (вместо истинных сечений  $A - A'$ ). Посмотрим, какова степень точности таких упрощений.



Черт. 10.

несколько „упрощенные“ живые сечения.

Уклон свободной поверхности в сечении  $A - A'$  обозначим через  $J = \sin \Theta$ , уклон дна — через  $i = \sin \Theta$  (как и выше) и, наконец, уклон „средней“ линии тока, нормальной к прямой  $A - A'$ , — через  $J_0 = \sin \Theta_0$ .

Для этого из точки  $A$  (черт. 11) проведем прямую  $A - A'$ , наиболее отвечающую при плоской задаче истинному живому сечению, и затем еще две линии: 1) нормаль к линии дна  $Aa'$  (длиною  $= h'$ ) и 2) вертикаль  $Aa$ , длину коей будем обозначать через  $h$ . Линии  $h'$  и  $h$  теперь и представляют собой

при чем углы  $\Theta'$ ,  $\Theta$  и  $\Theta_0$  отмечены на черт. 11. Тогда из достаточно очевидных тригонометрических соображений (см. треугольник  $AA'a'$ ) следует прежде всего, что

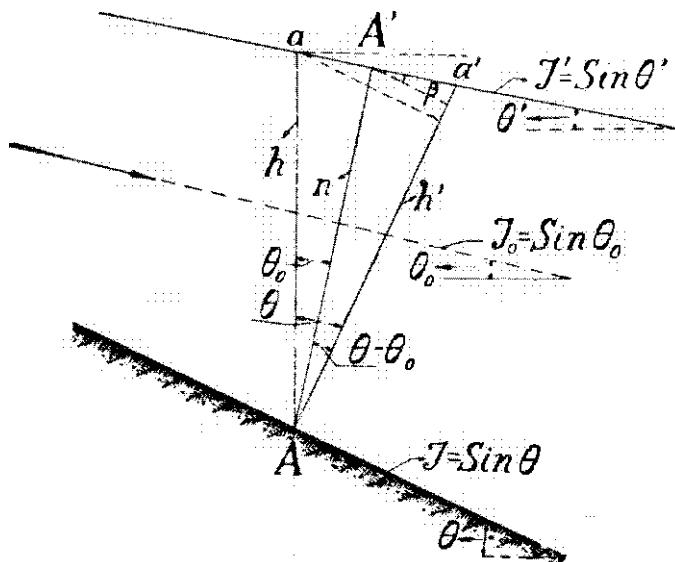
$$h' = n \cos(\Theta - \Theta_0) + n \sin(\Theta - \Theta_0) \cdot \operatorname{tg} \beta, \dots \dots \dots (31)$$

при чем значение угла  $\beta$  отмечено на черт. 11, из которого видим, что

$$\beta = \Theta - \Theta', \dots \dots \dots (32)$$

почему по (31) будет:

$$\begin{aligned} h' &= n [\cos(\Theta - \Theta_0) + \sin(\Theta - \Theta_0) \cdot \operatorname{tg}(\Theta - \Theta')] = \\ &= n [\cos(\Theta - \Theta_0) \cdot \cos(\Theta - \Theta') + \sin(\Theta - \Theta_0) \cdot \sin(\Theta - \Theta')] = \\ &= n \frac{\cos[(\Theta - \Theta_0) - (\Theta - \Theta')]}{\cos(\Theta - \Theta')} = \frac{\cos(\Theta' - \Theta_0)}{\cos(\Theta - \Theta')} n. \dots \dots \dots (33) \end{aligned}$$



Черт. 11.

Далее, из треугольника  $Aaa'$  видим, что

$$h' = h \cos \Theta + h \sin \Theta \operatorname{tg} \beta \dots \dots \dots (34)$$

откуда, имея в виду (32), имеем:

$$\begin{aligned} h' &= h [\cos \Theta + \sin \Theta \cdot \operatorname{tg}(\Theta - \Theta')] = \\ &= h [\cos \Theta \cdot \cos(\Theta - \Theta') + \sin \Theta \cdot \sin(\Theta - \Theta')] = \\ &= h \frac{\cos[\Theta - (\Theta - \Theta')]}{\cos(\Theta - \Theta')} = \frac{\cos \Theta'}{\cos(\Theta - \Theta')} h. \dots \dots \dots (35) \end{aligned}$$

Сопоставляя (33) и (35), найдем:

$$\frac{\cos(\Theta' - \Theta_0)}{\cos(\Theta - \Theta')} n = \frac{\cos \Theta'}{\cos(\Theta - \Theta')} h, \dots \dots \dots (36)$$

откуда имеем связь между  $n$  и  $h$  в виде:

$$h = \frac{\cos(\Theta' - \Theta_0)}{\cos \Theta'} n. \dots \dots \dots (37)$$

Из изложенного видим, что при замене живого сечения  $n$  сечением  $n'$  степень точности можем оценить отношением:

$$\frac{n'}{n} = \frac{\cos(\Theta' - \Theta_0)}{\cos(\Theta - \Theta_0)}, \quad (38)$$

а при замене сечения „ $n$ “ сечением „ $h$ “ отношением:

$$\frac{h}{n} = \frac{\cos(\Theta_0 - \Theta')}{\cos \Theta'}, \quad (39)$$

из каковых выражений следует, что

$$\frac{n'}{n} > 1, \quad \frac{h}{n} \geq 1.$$

Чтобы теперь подойти к численным выражениям для этих степеней точности, будем считать (ср. черт. 11), что

$$\Theta_0 = \frac{\Theta + \Theta'}{2}$$

и, кроме того, введем обозначение:  $\Theta - \Theta' = \xi$ , называя  $\xi$  „углом расходимости“ для данного живого сечения потока.

При этом, вместо (38), найдем:

$$\frac{n'}{n} = \frac{\cos \frac{\xi}{2}}{\cos \xi} \quad (40)$$

а вместо (39), будет:

$$\frac{h}{n} = \frac{\cos \frac{\xi}{2}}{\cos \Theta'} \quad (40')$$

По последним двум формулам составляем две таблички, из которых в одной даем значения  $\frac{n'}{n}$ , а в другой—значения  $\frac{h}{n}$  при разных углах  $\xi$  и  $\Theta'$ :

$\xi$	Значения $\frac{h}{n}$						
	$0^\circ$	$1^\circ$	$5^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$	$20^\circ$	$25^\circ$
$\frac{n'}{n}$	1,000	1,000	1,003	1,012	1,026	1,048	1,047

$\xi$	$\Theta'$	Значения $\frac{h}{n}$					
		$0^\circ$	$1^\circ$	$5^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$	$20^\circ$
$0^\circ$	$1,000$	$1,000$	$1,004$	$1,015$	$1,035$	$1,064$	
$1^\circ$	$1,000$	$1,000$	$1,004$	$1,015$	$1,035$	$1,064$	
$5^\circ$	$0,999$	$0,999$	$1,003$	$1,014$	$1,034$	$1,063$	
$10^\circ$	$0,996$	$0,996$	$1,000$	$1,012$	$1,031$	$1,060$	
$15^\circ$	$0,991$	$0,992$	$0,995$	$1,007$	$1,026$	$1,055$	
$20^\circ$	$0,985$	$0,985$	$0,988$	$1,000$	$1,020$	$1,048$	
$25^\circ$	$0,976$	$0,976$	$0,980$	$0,991$	$1,017$	$1,039$	
$30^\circ$	$0,966$	$0,966$	$0,970$	$0,981$	$1,000$	$1,128$	

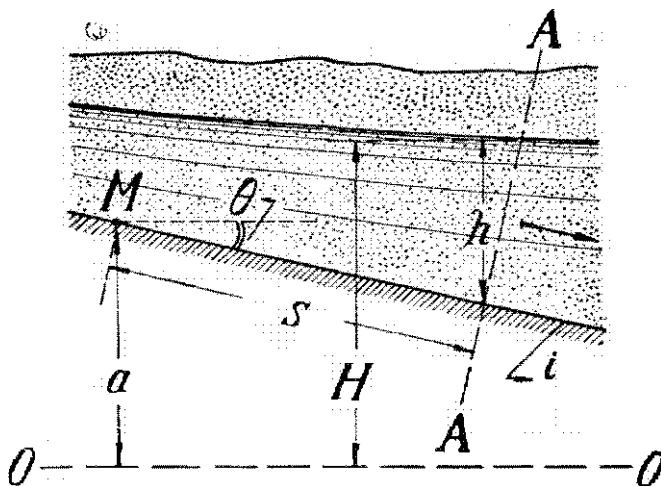
Заметим в заключение, что, пользуясь "упрощенными" живыми сечениями  $h'$  и  $h''$ , вместо (30), будем писать:

$$q = -kh' \frac{dH}{ds}, \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (41)$$

$$q = -kh \frac{dH}{ds} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (41')$$

#### § 4. Дифференциальное уравнение неравномерного движения при прямом уклоне подстилающего слоя.

Принимая во внимание все вышесказанное, обратимся теперь к выводу дифференциального уравнения неравномерного движения при прямом уклоне ( $i > 0$ ) подстилающего слоя, имея здесь в виду, как и дальше, плоскую задачу. Для этого прежде всего выразим напор  $H$  в некотором



Черт. 12.

сечении  $A-A$  (черт. 12) через глубину грунтового потока  $h$  в том же сечении, проводя плоскости сравнения  $O-O$ , как указано на том же чертеже, т.е. на расстоянии  $a$  от начальной точки  $M$  и пользуясь в остальном прежними обозначениями.

Как легко видеть из чертежа, для напора  $H$  в сечении  $A-A$  имеем:

$$H = a - s \cdot \sin \Theta + h \quad \dots \quad (42)$$

ИЛИ

$$H = a - si + h. \quad \dots \quad (42')$$

При этом по формуле Дюпюи (28) найдем:

$$V = -k \frac{dH}{ds} = k \left( i - \frac{dh}{ds} \right), \quad \dots \dots \dots \quad (43)$$

так как  $a$  есть величина постоянная; в связи с этим ясно, что выбор условной плоскости сравнения  $O-O$  не влияет на выражение для скорости  $V$ .

Далее по формуле (41') для расхода  $q$  находим:

$$q = kh \left( i - \frac{dh}{ds} \right), \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (44)$$

где расход  $q$  можем выразить через соответствующую ему глубину  $h_0$  равномерного движения в том же грунте и при том же уклоне  $i$  по формуле (21)

$$q = k i h_0,$$

при чем, вместо (44), будет:

$$i h_0 = h \left( i - \frac{dh}{ds} \right). \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (45)$$

Введем теперь понятие относительной глубины  $\eta$ :

$$\eta = \frac{h}{h_0}, \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (46)$$

как то предложено Брессом (Bresser) для неравномерного движения надземных потоков. При этом по (46)

$$h = \eta h_0, \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (47)$$

откуда, дифференцируя, получаем:

$$dh = h_0 d\eta. \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (48)$$

Уравнение (45) представим в виде:

$$\frac{i h_0}{h} = i - \frac{dh}{ds}, \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (49)$$

что при подстановке (46) и (48) дает:

$$\frac{i}{\eta} = i - h_0 \frac{d\eta}{ds}, \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (50)$$

или

$$i \left( 1 - \frac{1}{\eta} \right) = h_0 \frac{d\eta}{ds} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (50')$$

и далее:

$$\frac{ids}{h_0} = \frac{\eta}{\eta - 1} d\eta \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (51)$$

В этом виде дифференциальное уравнение неравномерного движения весьма легко интегрируется, как сейчас и увидим.

## § 5. Интегрирование полученного дифференциального уравнения неравномерного движения.

Полученное дифференциальное уравнение (51) интегрируем от сечения 1 до сечения 2, расстояние между коими обозначим через  $l$ , как показано на продольном профиле некоторого грунтового потока (черт. 13), при чем, как видим:

$$l = s_2 - s_1 \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (52)$$

При указанном интегрировании уравнения (51) имеем:

$$\frac{i(s_2 - s_1)}{h_0} = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\eta}{\eta - 1} d\eta \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (53)$$

где по общему определению (46)  $\eta_1$  и  $\eta_2$  имеют значения:

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= \frac{h_1}{h_0} \\ \eta_2 &= \frac{h_2}{h_0} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (54)$$

Наконец, имея в виду (52), зависимость (53), несколько короче перепишем в виде:

Полученный здесь весьма простой определенный интеграл следует теперь рассмотреть для двух случаев:

$$1) \quad \eta \geq 1; \quad 2) \quad \eta < 1.$$

1 случай:  $\eta > 1$ . Здесь неопределенный интеграл

$$\int_{\eta_0=1}^{\eta} d\eta$$

сразу же находим, имея в виду, что

$$\frac{r}{r-1} = 1 + \frac{1}{r-1}, \quad \dots \quad (56)$$

Так что

$$\int \frac{d\eta}{\eta-1} d\eta = \int d\eta + \int \frac{d\eta}{\eta-1} =$$

$$= \eta + \log_{\text{const}}(\eta - 1) + \text{const} \quad (57)$$

Sept. 13

При этом для нашего определенного интеграла соответственно имеем:

II случай:  $\eta < 1$ . Переписав здесь <sup>1)</sup> подынтегральную функцию в виде:

находим, что

$$\int \frac{d\eta}{\eta - 1} = \int d\eta - \int \frac{d\eta}{1 - \eta} = \\ = \eta + \log_{\text{nat}}(1 - \eta) + \text{const.} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (60)$$

В соответствии с этим, подобно (58), здесь получим, что

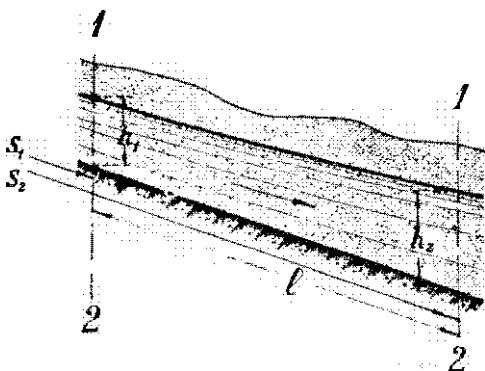
$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{q}{q-1} dq = \eta_2 - \eta_1 + \log_{\text{nat}} \frac{1-\eta_2}{1-\eta_1} \quad \dots \quad (61)$$

Таким образом, пользуясь найденными выражениями (58) и (61), вместо ур-ия (55), окончательно имеем:

1) для случая  $\eta > 1$ :

$$\frac{d}{h_0} = \tau_{12} - \tau_1 + \log_{\text{nat}} \frac{\eta_2 - 1}{\eta_1 - 1}, \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (62)$$

<sup>1)</sup> Наскога рассматривать  $\log$  отрицательных чисел, что потребовало бы введения комплексных чисел.



Sept. 13

2) для случая  $\eta < 1$ :

$$\frac{il}{h_0} = \eta_2 - \eta_1 + \log_{\text{nat}} \frac{1 - \eta_2}{1 - \eta_1} \quad \dots \quad (62')$$

По этим зависимостям мы и можем непосредственно производить различные расчеты, связанные с построением кривых депрессии при неравномерном движении грунтовых вод. Впрочем, можно отметить при этом, что, получив вышеуказанным путем вывод зависимостей (62) и (62'), мы видим, что для обоих случаев ( $\gamma > 1$  и  $\gamma < 1$ ) можно принять лишь какую-либо одну формулу: либо (62) либо (62'), так как в этих окончательных выражениях натуральные логарифмы берутся от положительных дробей. В самом деле, ясно, что как для  $\gamma > 1$ , так и для  $\gamma < 1$  имеем:

$$\frac{r_{12}-1}{r_{11}-1} > 0;$$

равным образом при  $\eta \leq 1$  будет:

$$\frac{1-\eta_2}{1-\eta_1} > 0.$$

Однако, практические расчеты могут быть еще значительно упрощены при пользовании особыми таблицами, к чьему мы теперь и обратимся.

## § 6. Вспомогательная таблица при прямом уклоне подстилающего слоя.

Для того, чтобы было возможно свести практические расчеты по неравномерному движению грунтовых потоков к пользованию таблицами, следует обратиться к вышеприведенному ур-ию (55):

$$\frac{il}{h_0} = \int_{\eta_0}^{\eta_2} \frac{\eta}{\eta-1} d\eta, \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (55)$$

помня, что для неопределенного интеграла

$$\int \frac{1}{\eta-1} \, d\eta$$

мы уже получили решения, представляемые формулой (57) при  $\eta > 1$  и формулой (60) — при  $\eta < 1$ . В этих формулах постоянная интегрирования не имеет для нас значения, так как при переходе к определенному интегралу, входящему в (55), эта постоянная выпадает, почему и в формулках (57) и (60) можем считать, что

const = 0.

Так как, далее, выражения (57) и (60) представляют собой лишь функции от  $\eta$ , то для простоты письма можем обозначить эти функции, положим, через  $\varphi(\eta)$ , т.е. введем обозначения:

1) при  $\eta > 1$

$$\varphi(\eta) = \eta + \log_{\text{pat}}(\eta - 1), \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (63)$$

2) при  $\eta < 1$

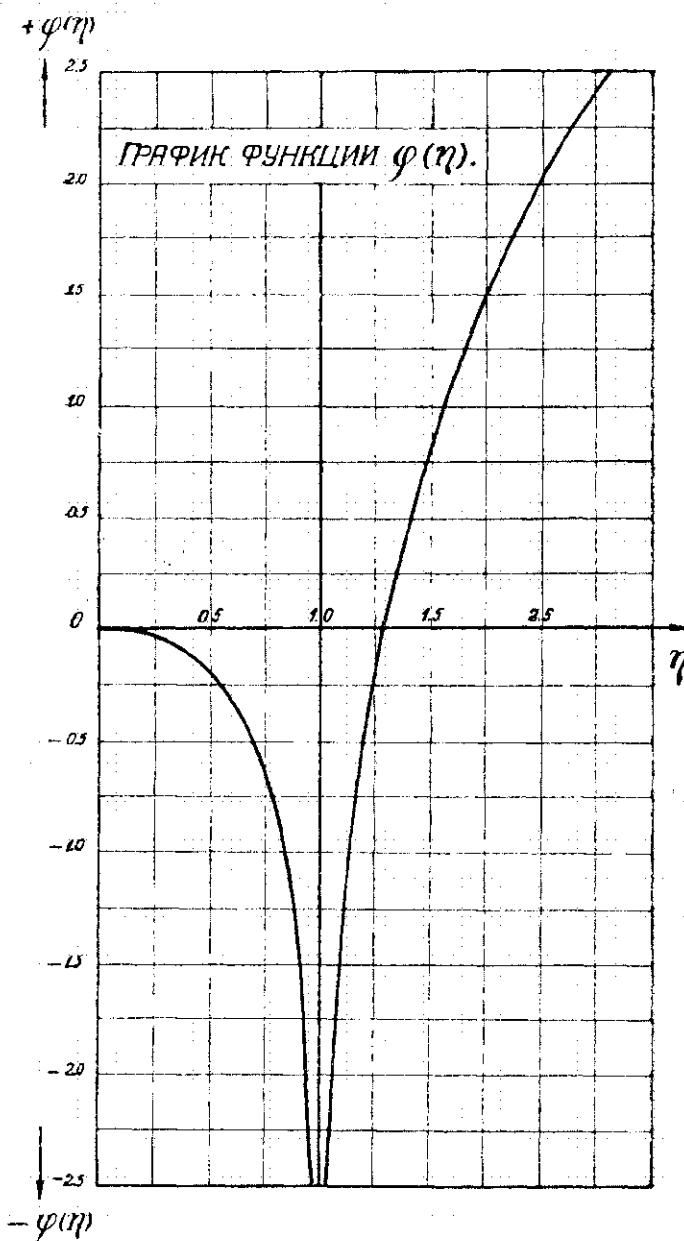
$$\varphi(\eta) = \eta + \log_{\text{nat}}(1-\eta) \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (64)$$

Тогда при переходе к определенному интегралу, входящему в уравнение (55), это последнее представится в виде:

$$\frac{il}{h_0} = \varphi(\eta_2) - \varphi(\eta_1), \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (65)$$

где  $\varphi(\eta_2)$  и  $\varphi(\eta_1)$  суть значения функции  $\varphi(\eta)$  при  $\eta = \eta_2$  и  $\eta = \eta_1$ .

Ур-ие (65) и является основным для практических расчетов. Как видим, оно не зависит явно от коэффициента фильтрации; однако, косвенно этот последний влияет на форму кривой депрессии.



Черт. 14.

сии, поскольку в ур-ие (65) входит величина  $h_0$ , по § 2 зависящая от  $k$ , вместе с чем зависят от  $k$  и относительные глубины  $\eta_2$  и  $\eta_1$ .

Для функций  $\varphi(\eta)$ , определяемых по (63) и (64), нами составлены таблицы I—II, помещенные в конце книги. В этих таблицах значения

Ф-ций  $\varphi(\eta)$  вычислены с переходом от натуральных к десятичным логарифмам, т.-е:

1) для  $\eta \geq 1$  по формуле

$$\varphi(\eta) = \eta + 2,30259 \log(\eta - 1), \dots \dots \dots \quad (63')$$

2) для  $\eta < 1$  по формуле

$$\varphi(\eta) = \eta + 2,30259 \log(1 - \eta), \dots \dots \dots \quad (64')$$

где знаком „log“ обозначен десятичный логарифм. Кстати отметим, что по зависимостям (63') и (64') можно производить и вычисления ф-ций  $\varphi(\eta)$  для значений  $\eta$ , которые не помещены в таблице 1, если в том представится надобность при практических расчетах и если в то же время почему-либо недостаточно брать значения  $\varphi(\eta)$  из таблицы по простой интерполяции.

Таблица I—II построена следующим образом: в первом столбце номечены аргументы  $\eta$ , во втором—соответствующие им численные значения функций  $\varphi(\eta)$  и, наконец, в третьем столбце—первые разности  $\Delta$  этих функций. Что касается аргументов  $\eta$ , то, конечно, они не расположены всюду через равные промежутки, так как при выборе промежутков мы считались, по возможности, с характером изменения величины функций  $\varphi(\eta)$ . Впрочем говоримся, что последующий оцыт применения таблицы I—II (и других) может указать и на необходимость несколько иной группировки аргументов  $\eta$ .

Для наглядности мы приводим на черт. 14 кривую  $\varphi(\eta)$ , а также более подробные графики функции  $\varphi(\eta)$  (см. в конце книги график № 2 и № 2-а). Эти графики могут быть полезны также при эскизных расчетах, а равно при решении тех задач, где приходится прибегать к подбору.

## § 7. Основные задачи, решаемые при помощи вспомогательных таблиц

Скажем теперь несколько слов по поводу основных задач, решаемых при помощи составленных таблиц и графиков, при чем будем исходить из ур-ия (65):

$$\frac{h}{h_0} = \varphi(\eta_2) - \varphi(\eta_1).$$

Первая задача (см. выше черт. 13) состоит в том, чтобы, зная глубину  $h_1$  и  $h_2$  некоторого грунтового потока в сечениях 1 и 2, найти расстояние  $l$  между этими сечениями, при чем уклон подстилающего слоя  $i$  известен, равно как и „нормальная глубина“  $h_0$  (об определении таковой см. § 2). Находим прежде всего относительные глубины

$$\eta_1 = \frac{h_1}{h_0} \text{ и } \eta_2 = \frac{h_2}{h_0},$$

после чего по таблице 1 получаем значения соответствующих функций  $\varphi(\eta_2)$  и  $\varphi(\eta_1)$ , а затем из ур-ия (65) имеем непосредственно:

$$l = \frac{h_0}{i} [\varphi(\eta_2) - \varphi(\eta_1)] \dots \dots \dots \quad (66')$$

Вторая задача ставится так: для некоторого грунтового потока, в котором известны величины  $i$  и  $h_0$ , требуется найти глубину  $h_2$  в сечении 2, которое находится на данном расстоянии от сечения 1,

при чем в этом последнем глубина  $h_1$  известна. Найдя относительную глубину

$$\eta_1 = \frac{h_1}{h_0}$$

и затем по таблице I—II соответствующее численное значение функции  $\varphi(\eta_1)$ , обращаемся к ур-ию (65), из которого видим, что

$$\varphi(\eta_2) = \varphi(\eta_1) + \frac{a}{h_0}, \quad \dots \dots \dots \quad (67)$$

где правая часть известна, т.-е. мы таким образом нашли  $\varphi(\eta_2)$ . Зная эту функцию, по таблице I—II не трудно определить и соответствующее значение аргумента  $\eta_2$ , а затем глубину  $h_2$ :

$$h_2 = h_0 \eta_2 \quad \dots \dots \dots \quad (68)$$

Третья задача является лишь видоизменением второй,—отличие состоит лишь в том, что глубина  $h_2$  известна, глубину же  $h_1$  требуется найти. При этом, вместо (67), приходим к выражению:

$$\varphi(\eta_1) = \varphi(\eta_2) - \frac{a}{h_0}, \quad \dots \dots \dots \quad (69)$$

остальное же не требует пояснений.

Отметим в заключение, что эти три задачи являются лишь основными схемами, которые при практическом проектировании могут в некоторых случаях так или иначе осложняться, но сущность пользования предлагаемыми таблицами (или графиками) достаточно выясняется из выше приведенных указаний.

## § 8. Дифференциальное ур-ие неравномерного движения грунтовых вод при обратном уклоне подстилающего слоя ( $i < 0$ ).

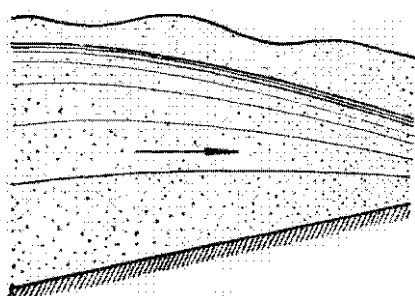
Случай движения грунтовых вод при „обратном уклоне“ подстилающего слоя, т.-е. против падения последнего (схема на черт. 15), встречается в гидрологической и гидротехнической практике, пожалуй, значительно чаще, чем такое же движение в открытых руслах. Поэтому здесь и остановимся на гидравлическом исследовании этого случая, сохраняя уже известные из предыдущего изложения обозначения и не поясняя их вновь. Так как самый способ нашего рассуждения остается при этом не существуя без изменения по сравнению со всем, сказанным выше о прямом уклоне, то изложение вопроса будем теперь вести сокращенно.

Рассмотрим продольный профиль (черт. 16) какого-либо грунтового потока при  $i < 0$ , аналогично тому, как сделали это (см. выше черт. 12) при прямом уклоне ( $i > 0$ ), и напишем выражение для напора  $H$  в каком-либо сечении  $A—A$ :

$$H = a + s \cdot \sin \Theta + h \quad \dots \dots \dots \quad (70)$$

или (обозначая  $\sin \Theta = i$ ):

$$H = a + s \cdot i + h, \quad \dots \dots \dots \quad (71)$$



Черт. 15.

после чего находим среднюю скорость фильтрации  $V$  в названном сечении по формуле Дюпюи (28):

$$V = -k \frac{dH}{ds} = -k \left( i + \frac{dh}{ds} \right). \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (72)$$

Расход воды  $q$  в том же сечении будет по (41'):

$$q = -kh \left( i + \frac{dh}{ds} \right), \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (73)$$

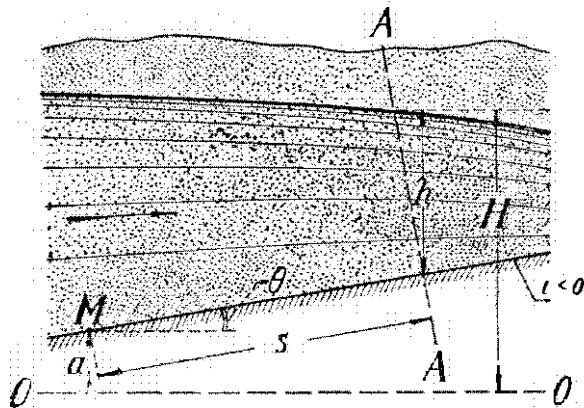
а так как, с другой стороны, этот же расход можно выразить и через соответствующую „нормальную глубину“<sup>1)</sup>  $h_0'$  по формуле:

$$q = kih_0', \dots \quad (74)$$

то из сопоставления (73) и (74) имеем:

$$ih_0' = -h \left( i + \frac{dh}{ds} \right) . \quad (75)$$

Необходимо здесь заметить, что говорить о равномерном движении и в связи с этим о "нормальной глубине" в данном случае можно лишь для обратного направления потока по сравнению с тем, которое он имеет в действительности, т.е. надо представить себе некоторый "вспомогательный по-



Черт. 16.

ток", который при том же расходе движется в данном грунте вниз по подстилающему слою. Именно этому "вспомогательному потоку" и отвечает та "нормальная глубина"  $h_0'$ , которая для удобства вводится в данном случае в наше рассмотрение, почему вместо  $h_0$  (как было для прямого уклона) она обозначена через  $h_0'$ .

В соответствии с этим вводим и понятие относительной глубины:

$$\eta = \frac{h}{h_0}, \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (76)$$

при чём

и далее:

Подставляя (77)–(78) в уравнение (75), получим:

$$\frac{ids}{h\eta'} = -\frac{\eta}{\eta+1} d\eta \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (79)$$

## § 9. Интегрирование дифференциального уравнения для обратного уклона и составление вспомогательной таблицы.

Как и для случая прямого уклона (см. выше, § 5), полученное в предыдущем параграфе дифференциальное уравнение интегрируем теперь от сечения 1 до сечения 2, расстояние между коими =  $l$  (черт. 17). При этом имеем:

$$-\frac{i(s_2 - s_1)}{h_0'} = -\int_{T_1}^{T_2} \frac{\eta}{\eta + 1} d\eta, \quad \dots \dots \dots \quad (80)$$

1) Это обозначение будет сейчас пояснено

где, согласно общему определению (76), относительные глубины  $\eta_1$  и  $\eta_2$  имеют значения:

$$\eta_1 = \frac{h_1}{h_0} \text{ и } \eta_2 = \frac{h_2}{h_0}, \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (81)$$

Так как

$$s_2 - s_1 = l,$$

то вместо (80) будет:

$$\frac{il}{h_0} = - \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\eta}{\eta+1} d\eta, \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (82)$$

$$\text{или } \frac{il}{h_0} = \int_{\eta_2}^{\eta_1} \frac{\eta}{\eta+1} d\eta. \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (83)$$

Для нахождения неопределенного интеграла

$$\int \frac{\eta}{\eta+1} d\eta$$

примем во внимание, что

$$\frac{\eta}{\eta+1} = 1 - \frac{1}{\eta+1}, \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (84)$$

при чем

$$\int \frac{\eta}{\eta+1} d\eta = \int d\eta - \int \frac{d\eta}{\eta+1} + \text{const} = \eta - \log_{\text{nat}}(\eta+1) + \text{const} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (85)$$

В соответствии с этим, переходя к определенным интегралам по (83), получим:

$$\frac{il}{h_0} = \eta_1 - \log_{\text{nat}}(\eta_1 + 1) - [\eta_2 - \log_{\text{nat}}(\eta_2 + 1)] = \eta_1 - \eta_2 + \log_{\text{nat}} \frac{\eta_2 + 1}{\eta_1 + 1}, \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (86)$$

Чтобы было возможно свести вопрос к пользованию вспомогательными таблицами, следует идти тем же путем, что и выше для прямого уклона (§ 6). Опуская подробности, введем обозначение:

$$\psi(\eta) = -\eta + \log_{\text{nat}}(\eta + 1) \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (87)$$

Тогда, переписывая уравнение (86) в виде:

$$\frac{il}{h_0} = -\eta_2 + \log_{\text{nat}}(\eta_2 + 1) - [-\eta_1 + \log_{\text{nat}}(\eta_1 + 1)], \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (88)$$

видим, что оно при обозначении (87) представляется в форме:

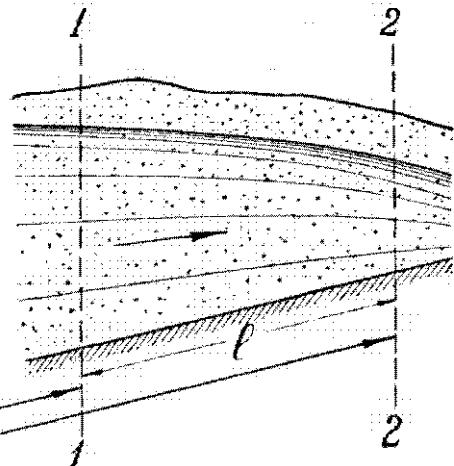
$$\frac{il}{h_0} = \psi(\eta_2) - \psi(\eta_1), \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (89)$$

где  $\psi(\eta_2)$  и  $\psi(\eta_1)$  суть значения функции (87) при  $\eta = \eta_2$  и  $\eta = \eta_1$ .

Для функции  $\psi(\eta)$  нами составлена таблица III (см. в конце книги), при чем и здесь вычисления производились с переходом в десятичным логарифмам, т.е. по формуле:

$$\psi(\eta) = -\eta + 2,30259 \log(\eta + 1), \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (87')$$

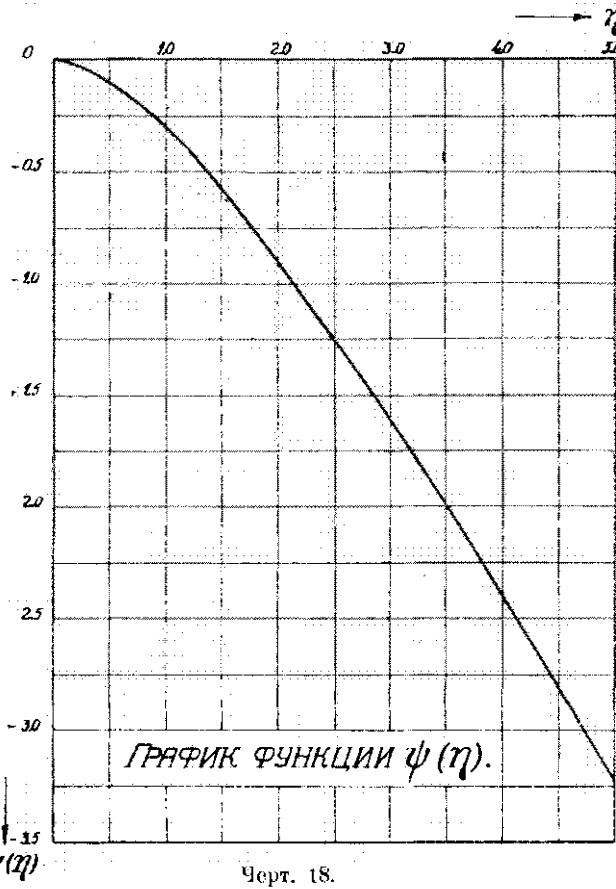
где знак „log“ есть символ десятичных логарифмов.



Черт. 17.

Помимо таблицы, нами приводится на черт. 18 ход функции  $\psi(\eta)$ , а также более подробный график изменения функции  $\psi(\eta)$ , помещенной в конце книги (график № 3).

Что касается основных задач, решаемых при помощи ур-ия (89) в связи с применением таблиц или графиков, то в этом отношении достаточны те замечания, которые выше (§ 7) сделаны по тому же вопросу для случая прямого уклона подстилающего слоя.



Черт. 18.

## § 10. Замечания о неравномерном движении грунтовых вод при горизонтальном подстилающем слое.

Первичное движение грунтовых вод при горизонтальном подстилающим слое (см., напр., черт. 19) представляет лишь частный случай из рассмотренной выше области. К этому частному случаю, положив

$i = 0$

можно перейти как от случая  $i > 0$ , так и от случая  $i < 0$ .

В самом деле, взяв дифференциальное ур-не (44) и положив в нем  $\varepsilon = 0$ , найдем:

к какому уравнению приходим и от уравнения (73) при  $i = 0$ . Из (90) имеем:

$$\frac{q}{k} ds = -h dh \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (91)$$

Интегрируя это уравнение от сечения 1 до сечения 2 (черт. 20), как легко видеть, получим:

$$\frac{q(s_2 - s_1)}{k} = - \frac{1}{2} (h_2^2 - h_1^2), \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (92)$$

или:

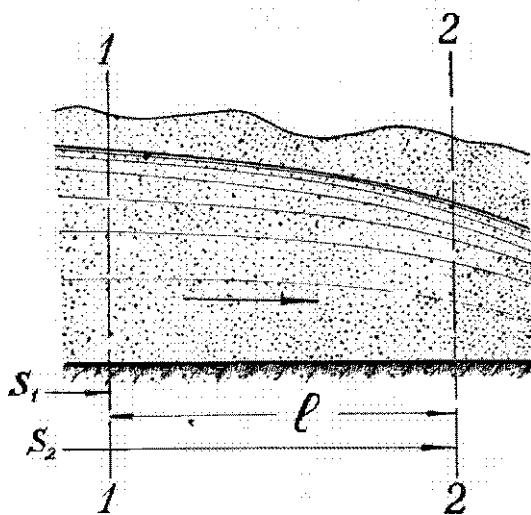
$$\frac{q l}{k} = \frac{1}{2} (h_1^2 - h_2^2) \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (93)$$

или, наконец:

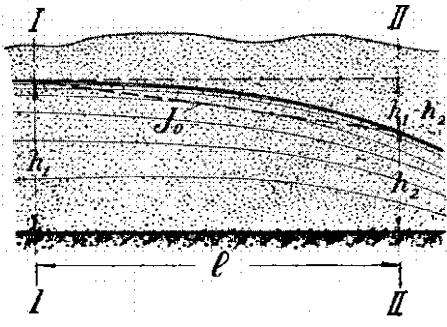
$$\frac{2 q l}{k} = h_1^2 - h_2^2 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (94)$$

В таком виде это уравнение общеизвестно; по своей простоте оно не требует каких-либо вспомогательных таблиц или графиков. Поэтому подробнее останавливаться на нем было бы здесь излишне, и мы привели

эти краткие значения о неравномерном движении грунтовых вод при горизонтальном подстилающем слое единственно лишь для законченности изложения, в дополнение к случаям:  $i > 0$  и  $i < 0$ .



Черт. 19.



Черт. 20.

Здесь, впрочем, было бы полезно отметить несколько иной вид уравнения (93), а именно:

$$\frac{q l}{k} = \frac{1}{2} (h_2^2 - h_1^2) = \frac{1}{2} (h_1 + h_2) (h_1 - h_2), \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (95)$$

откуда

$$q = \frac{k (h_1 + h_2)}{2} \cdot \frac{h_1 - h_2}{l}, \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (96)$$

где, как легко видеть из схемы по черт. 20, вторая дробь в правой части представляет собой падение линий депрессии, разделенное на расстояние между рассматриваемыми сечениями, т.е. уклон пунктирной прямой  $J_0$ .

Обозначая этот „осредненный“ (вернее — упрощенный) уклон через  $J_0$ , т.е. полагая

$$\frac{h_1 - h_2}{l} = J_0, \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (97)$$

вместо (96), получим:

$$q = \frac{1}{2} k J_0 (h_1 + h_2) \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (98)$$

Этот вид уравнения имеет известное практическое значение при некоторых упрощенных расчетах<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Некоторые указания см., напр., в моем „Гидравлическом Справочнике“, изд. 1924 г., стр. 32—33.

## § 11. Предварительные замечания к исследованию формы кривых депрессии при неравномерном движении грунтовых вод.

Исследование формы кривых депрессии при неравномерном движении грунтовых вод, конечно, весьма важно для полноты теоретического освещения вопроса, но здесь, переходя к этому исследованию, мы, помимо того, хотели бы особенно подчеркнуть, что оно чрезвычайно существенно и для практических приложений. В этом отношении вопрос о форме кривых депрессии имеет такое же значение для гидравлики грунтовых вод, как вопрос о форме кривых подпора и спала — для гидравлики открытого русла. При отсутствии ясного понимания этих вопросов как при проектировании, так и при постройке возможен ряд серьезных ошибок.

Предварительно остановимся на некоторых указаниях, необходимых для дальнейшего изложения.

Прежде всего, если вспомнить то важнейшее место, которое в гидравлике открытого русла уделяется понятию о критической глубине при рассмотрении неравномерного движения, то естественно возникает вопрос и о критической глубине при таком же движении грунтовых вод. В связи с этим укажем, что, как известно, удельная энергия сечения  $\mathcal{E}$  для открытого потока представляется выражением:

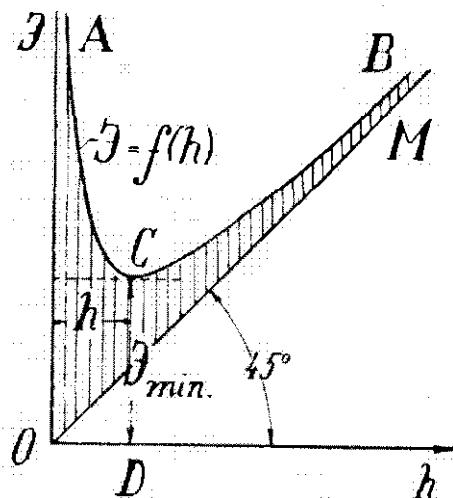
$$\mathcal{E} = h + \frac{\alpha V^2}{2g},$$

где значения букв общезвестны. Графически величина  $\mathcal{E}$  выражается кривой  $ACB$  (черт. 21), при чем здесь полезно отметить, что заштрихованная область графика представляет кинетическую часть удельной энергии  $\mathcal{E}$ , а область между прямой  $OM$  и осью абсцисс — потенциальную часть.

В соответствии с этим ясно, что, так как при движении грунтовых вод скорости течения весьма малы (а тем

более — соответствующие им скоростные напоры), то заштрихованная область графика для  $\mathcal{E}$  при грунтовых потоках, вообще говоря, представляется лишь прямой  $OM$ , т.е. удельная энергия  $\mathcal{E}$  с глубиной потока всегда возрастает, почему понятие о критической глубине для грунтовых потоков утрачивает свое значение (за исключением случаев движения с весьма большими скоростями, когда, впрочем, как самый закон Дарси, так и его дальнейшие следствия не могут уже применяться без специального каждого раз исследования вопроса, но такие исключительные случаи мы здесь и не имеем в виду).

Пояснив, почему в дальнейших наших рассуждениях отсутствует понятие критической глубины, напомним теперь известный математический метод оценки общей формы какой-либо кривой в смежности с данной точкой.



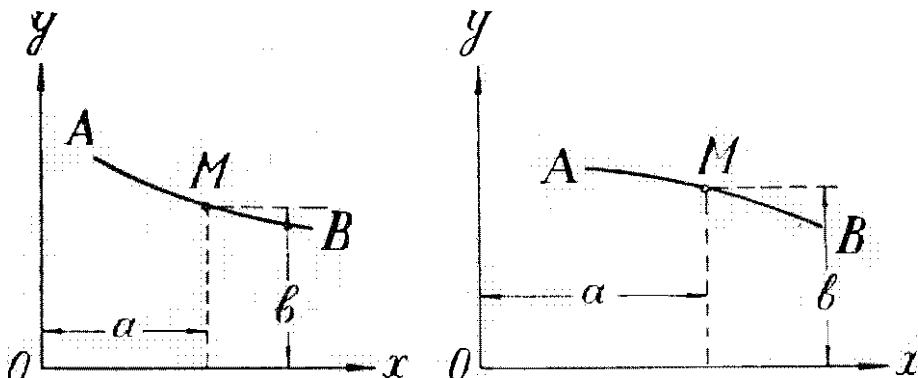
Черт. 21.

Пусть изображенная на черт. 22 кривая  $AB$  аналитически представляется уравнением:

$$y = f(x),$$

при чем первую, вторую и третью производные функции  $f(x)$  по  $x$  обозначим соответственно через

$$f'(x); f''(x); f'''(x).$$



Черт. 22.

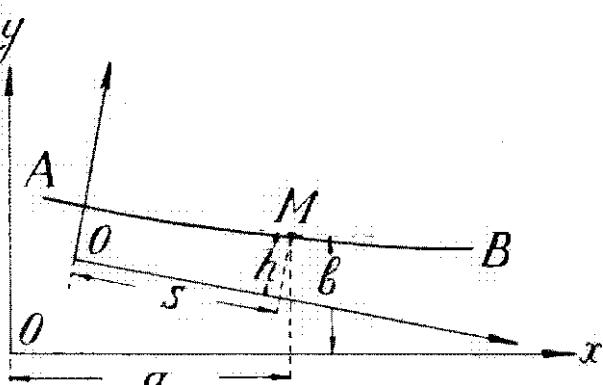
Тогда, как известно, можем судить о форме нашей кривой в смежности с точкою  $M$  по следующим признакам (достаточным для дальнейшего изложения):

1) Если  $f''(x) > 0$  при  $x = a$ , то вогнутость кривой в точке  $M$  обращена в сторону положительных  $y$ -ов, каковую форму кривой назовем для краткости типом I;

2) Если  $f''(x) < 0$  при  $x = a$ , то вогнутость кривой в точке  $M$  (см. чертеж справа) обращена в сторону отрицательных  $y$ -ов (тип II);

3) Наконец, если в точке  $M$  имеем, что  $f''(x) = 0$ , но  $f'''(x) \neq 0$ , то точка  $M$  есть точка перегиба.

Кривые депрессии при неравномерном движении грунтовых вод будем в дальнейшем рассматривать в Декартовых координатах, выражая глубину  $h$  грунтового потока, как функцию расстояния  $s$  (черт. 23), т.-е. откладывая при этом глубины  $h$  по нормали к линии непроницаемого подстилающего слоя,—что вполне возможно сделать для общего исследования вопроса о форме кривых депрессии (в соответствии со сказанным выше в § 3 по поводу живых сечений). При этом, вместо осей  $x$ -ов и  $y$ -ов, каковые были показаны на черт. 22, в данном случае получим оси  $s$  и  $h$ , как и отмечено на черт. 23.



Черт. 23.

Тогда для суждения о форме кривых депрессии будем иметь следующие кратко формулируемые, на основании предыдущих указаний, условия:

1) Кривая депрессии принадлежит к типу I (по вышеуказанному условному обозначению), если в данной точке ее

$$\frac{d^2h}{ds^2} > 0 \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (99)$$

2) Кривая депрессии типа II будет иметь место при

$$\frac{d^2h}{ds^2} < 0 \quad \dots \dots \dots \quad (100)$$

3) Точка перегиба требовала бы условия:

$$\frac{d^3h}{dx^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^3h}{dx^3} \neq 0 \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (101)$$

## § 12. Исследование формы кривых депрессии при прямом уклоне.

Проведя для определенного расхода  $q$  линию "нормальных глубин"  $N-N$  (черт. 24), получаем две зоны в области грунтового потока: зону  $A$  при глубинах  $h > h_0$  и зону  $B$  при  $h < h_0$ . Для каждой из этих зон и произведем теперь исследование, исходя из дифференциального уравнения движения грунтового потока (45).

$$ih_0 = h \left( i - \frac{dh}{ds} \right), \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (45)$$

откуда

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i(h - h_0)}{h}, \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (102)$$

ИЛИ

$$\frac{dh}{ds} = i \left( 1 - \frac{h_0}{h} \right) \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (103)$$

### 1<sup>2</sup>. Зона $A$ (при $h > h_0$ )

В этом случае, очевидно,

$$\frac{h_0}{h} < 1$$

и, следовательно,

$$1 - \frac{h_a}{h} > 0, \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (104)$$

вместе с чём по (103) видим, что и

$$\frac{dh}{ds} > 0, \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (105)$$

т.е. глубина вдоль потока возрастает, и кривая депрессии может быть названа кривой подпора.

Составляя вторую производную от  $h$  по  $s$  на основании (103), видим, что

$$\frac{d^2h}{ds^2} = \frac{ih_0}{h_0^2} \cdot \frac{dh}{ds} = \frac{i^2h_0}{h_0^2} \left(1 - \frac{h_0}{h}\right), \quad \dots, \quad (106)$$

Что в данном случае  $\geq 0$ :

$$\frac{d^2h}{dx^2} > 0,$$

т.-е. мы получили выполнение условия (99) для кривой типа I, почему наклон кривой депрессии в зоне A обращена вогнутостью вверх (черт. 24).

Рассмотрим теперь „условия по концам“ этой кривой.

1) Вверх от какого-либо сечения  $x-x$  (черт. 24) глубина  $h$  постепенно уменьшается. Посмотрим, на каком расстоянии от начала координат находится сечение, в котором  $h$ , уменьшаясь, достигает значения  $h_0$ , для чего воспользуемся уравнением кривой депрессии в виде (65):

$$\frac{ih}{h_0} = \varphi(\eta_2) - \varphi(\eta_1).$$

При этом обозначим глубину в начале координат через  $h_0$ , а соответствующую относительную глубину — через  $\eta_a = \frac{h_0}{h_0}$ , при чем уравнение (65) представится в виде:

$$\frac{ih}{h_0} = \varphi(1) - \varphi(\eta_a), \quad (107)$$

так как в том сечении, где  $h = h_0$ , соответствующая относительная глубина  $= \frac{h_0}{h_0} = 1$ . Подставляя теперь в (107) вместо функций  $\varphi$  их развернутые выражения по (63), имеем:

$$-\frac{ih}{h_0} = \eta_a + \log_{nat}(1 - \eta_a) - [1 + \log_{nat}(0)] = \infty \quad \dots \quad (108)$$

Таким образом, видим, что сечение с глубиной грунтового потока  $h = h_0$  уходит на бесконечность вверх по потоку (влево на черт. 24). Добавляя к этому, что при  $h = h_0$  зависимость (103) дает:

$$\frac{dh}{ds} = 0 \quad \dots \quad (109)$$

видим, что на бесконечности (т.-е. при  $h = h_0$ ) прямая равномерного режима  $N-N$  является касательной к кривой депрессии (черт. 24, левый конец).

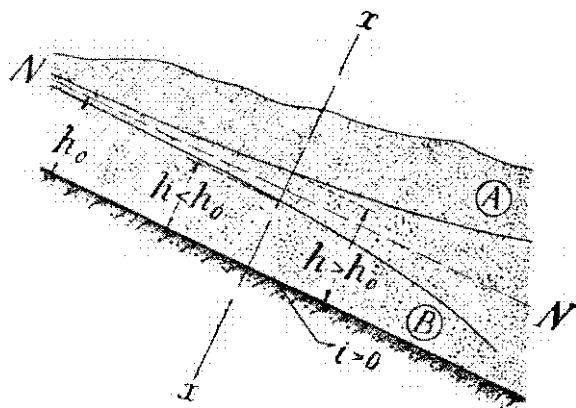
В виду сказанного, приходим к заключению, что линия  $N-N$  является асимптотой кривой депрессии, т.-е. эта последняя вверх против течения асимптотически приближается к линии нормальных глубин.

2) Посмотрим, что будет на бесконечности вниз по течению. Ответ можно получить, напр., таким путем.

Определим, какова глубина на бесконечности вниз по течению, для чего вновь возьмем уравнение (65), подставляя в него значения:

$\eta_1 = \eta_a$  (относительная глубина в начале координат),

$\eta_2 = \eta$  (относительная глубина на бесконечности),



Черт. 24.

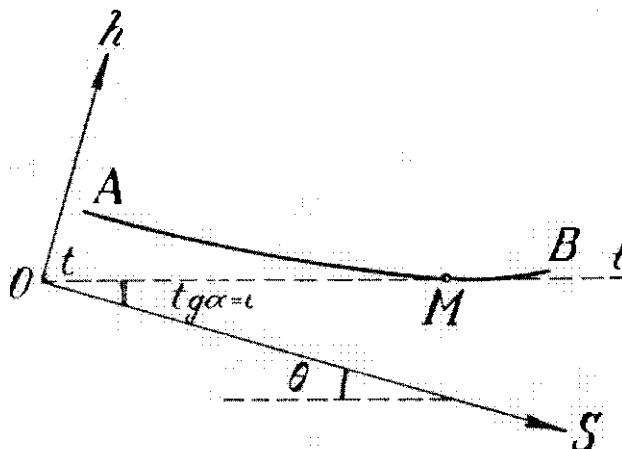
при чём и получим:

$$\frac{d}{d\eta} = \varphi(\eta_\infty) - \varphi(\eta_a), \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (110)$$

откуда, при  $l = \infty$  и в виду  $\varphi(\tau_0) \neq \infty$ , будет:

$$\varphi(r_{\infty}) = \infty.$$

По бесконечно большому значению функции  $\varphi$  соответствует и бесконечно большое значение аргумента  $\eta$ , что не трудно получить из



Jenr. 25.

С другой стороны, имеем, что первая производная от  $h$  по  $s$  на основании (103), при  $h = h_1 = \infty$ , будет равна

$$\frac{dh}{ds} = i, \quad \dots \quad (112)$$

при чем геометрический смысл этой зависимости необходимо пояснить.

Если при осиях  $Oh$  и  $Os$  (черт. 25) имеем вообще какую-либо кривую, изображающую  $h$  в функции от  $s$ , то при исполнении условия (112) в некоторой точке  $M$  можем сказать, что касательная  $t-t$  к кривой в этой точке наклонена к оси  $s$ -ов под углом  $\alpha$ , тангенс которого равен  $i$ . Но мы знаем, что уклон подстилающего слоя также равен  $i$ , при чем  $i = \sin \Theta \cong \operatorname{tg} \Theta$ , так что при этом  $\Theta = \alpha$ , т.е. при условии (112) касательная  $t-t$  горизонтальна.

В частности зависимость (112) показывает, что и наша кривая депрессии в бесконечно далекой точке (вниз по течению) имеет горизонтальную касательную, т.е. горизонтальную асимптоту. Таким образом, мы пришли к выводу, что кривая депрессии вниз по течению асимптотически приближается к горизонтальной прямой.

Всем сказанным вполне определяется форма кривой пэдиора грунтового потока в зоне  $A$ , а именно: эта кривая имеет вогнутость, обращенную вверх, и обладает двумя асимптотами, из коих одна (вверх против течения) есть прямая нормальных глубин, а вторая (вниз по течению) — горизонтальная прямая.

Отметим здесь, что грунтовый подпор распространяется вверх по потоку на бесконечную длину, но, как и при открытых потоках, подпор можно считать практически прекратившимся в том сечении, где подщетная глубина превосходит нормальную, напр., на  $1\%$  от величины этой последней (или, положим, на несколько сантиметров, напр., на 2—3 см). Теперь переходим к исследованию формы кривых депрессии в зоне *B*.

2°. Зона  $B$  ( $h < h_0$ ).

При исследовании вновь будем исходить из уравнения (103):

$$\frac{dh}{ds} = i \left( 1 - \frac{h_0}{h} \right),$$

где в данном случае  $h < h_0$ , а потому

т.-е. глубина грунтового потока вниз по течению уменьшается, мы получаем здесь кривую спада (см. выше черт. 24).

Вторая производная от  $h$  по  $s$  выше уже найдена по (106), из которой зависимости при  $h < h_0$  видим, что в данном случае

$$\frac{d^2h}{ds^2} < 0, \quad \dots \quad (114)$$

т.е. мы получили выполнение условия (100) для кривой типа II; это показывает, что рассматриваемая кривая спада обрещена вогнутостью вниз.

Что касается „условий по концам“, то теперь мы можем рассмотреть их лишь вкратце. Прежде всего, тем же путем, как и для зоны  $A$ , убеждаемся, что вверх против течения напа-  
кривая спада асимптоти-  
чески приближается к  
прямой нормальных глу-  
бин, на чем не будем здесь  
останавливаться подробнее.

Следя за кривой спада вниз по течению, видим, конечно, что глубина грунтового потока постепенно уменьшается. Для целей нашего исследования необходимо формально определить, на каком расстоянии от начала координат глубина потока упадет до нуля, для чего возьмем уравнение (65), подставляя в него значения (черт. 26)

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_1 = \frac{h_1}{h_0} = \frac{h_a}{h_0} = (\text{обознач.}) \eta_a; \\ \eta_2 = \frac{h_2}{h_0} = 0 \end{array} \right. \quad . . . . . \quad (115)$$

При этом будет:

$$\frac{il}{h_0} = \varphi(0) - \varphi(\eta_0), \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (117)$$

где по (64) имеем, что  $\varphi(0) = 0$ , а по табл. I видим, что  $\varphi(\eta_0) < 0$ .

Поэтому из (117) найдем:

$$l = -\frac{h_0}{i} \cdot \Phi(\eta_a), \quad \dots \quad (118)$$

что дает конечную величину и притом  $> 0$ .

В том сечении, где  $h = 0$ , первая производная от  $h$  по  $s$ , как видим из (103), будет:

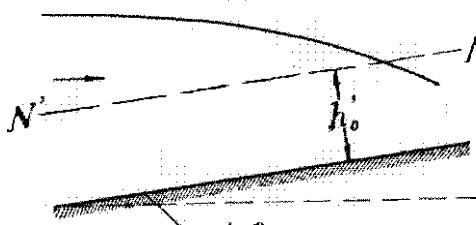
$$\frac{dh}{ds} = i \left(1 - \frac{h_0}{0}\right) = -\infty, \dots \dots \dots \quad (119)$$

т.е. здесь кривая депрессии, при формальном рассмотрении вопроса, получает касательную, составляющую угол  $270^\circ$  с направлением оси  $s$ -ов (черт. 26), т.е. направленную вниз, нормально к „линии дна“. Этим рассуждением, разумеется, мы имеем в виду лишь выяснить условия для „низового конца“ кривой спада, для установления общей формы ее, но гидравлически в области столь больших поверхностных уклонов наши уравнения, выведенные для медленно изменяющего движения грунтовых вод, уже теряют свое значение.

Этим мы и закончим исследование общей формы кривой спада (в зоне  $B$ ). Эта кривая, таким образом, характеризуется вогнутостью, обращеною вниз, и имеет одну асимптоту (вверх против течения) — прямую нормальных глубин; вниз же по течению глубины постепенно уменьшаются, доходя до нуля на конечном расстоянии (практически — до тех малых глубин и, следовательно, до тех больших скоростей, при коих еще приложим закон Дарси).

### § 13. Исследование формы кривых депрессии при обратном уклоне.

Как уже указано в § 8, для случая обратного уклона подстилающего слоя в рассмотрение входит глубина  $h'_0$ , т.е. нормальная глубина того „вспомогательного потока“, который мы представляем себе движущимся в направлении падения подстилающего слоя при расходе  $q$ . Эта глубина  $h'_0$  (линия  $N' - N'$ ) показана и на черт. 27, изображающем случай кривой депрессии при обратном уклоне.



Черт. 27.

При исследовании будем исходить из основного дифференциального уравнения (75) для этого случая:

$$ih'_0 = -h \left(i + \frac{dh}{ds}\right),$$

$$\text{откуда } \frac{dh}{ds} = -\frac{i(h + h'_0)}{h}, \quad (120)$$

$$\text{или } \frac{dh}{ds} = -i \left(1 + \frac{h'_0}{h}\right), \quad (121)$$

что сразу же указывает нам на признак кривой спада, ибо для всех значений  $h$  (как больше, так и меньше  $h'_0$ ), как видим из (121),

$$\frac{dh}{ds} < 0, \dots \dots \dots \quad (122)$$

т.е. глубина вдоль потока уменьшается, как и показано на чертеже.

Составляя теперь вторую производную от  $h$  по  $s$  на основании (121), имеем:

$$\frac{d^2h}{ds^2} = \frac{ih'_0}{h^2} \cdot \frac{dh}{ds}, \dots \dots \dots \quad (123)$$

где  $\frac{dh}{ds}$  выразим по (121), при чем получим:

$$\frac{d^2h}{ds^2} = -\frac{h^2 h_0'}{h^2} \left(1 + \frac{h_0'}{h}\right), \quad \dots \dots \dots \quad (124)$$

т.е. для всех значений  $h$

$$\frac{d^2h}{ds^2} < 0, \quad \dots \dots \dots \quad (125)$$

и, следовательно, мы получили здесь выполнение условия (100) для кривой типа II (см. об этом § 11), и потому на всем протяжении кривая спада обращена вогнутостью вниз (черт. 27).

В дополнение к этому покажем, что для случая обратного уклона линии  $N' - N'$  отнюдь не является характерной для какого-либо разделения грунтового потока на две зоны, т.е. не имеет того существенного значения, которое присуще линии  $N - N$  при прямом уклоне (в связи с этим при обратном уклоне мы и рассматриваем лишь одну зону — всю область, занятую грунтовым потоком). В самом деле, для нашей кривой спада глубина потока вниз по течению постепенно уменьшается, при чем и при пересечении с линией  $N' - N'$  в точке  $M$  (черт. 28) в характере кривой спада никаких особенностей не обнаруживается, в чем можно убедиться, выясняя здесь условия (99) — (101); в частности, условие (101) здесь не выполняется, т.е. в названной точке кривая не имеет перегиба.

Можно отметить, что в этой точке кривая депрессии обладает одним (может быть интересным, но не существенным) свойством, а именно: здесь градиент глубины  $\frac{dh}{ds}$  по величине = двойному уклону подстилающего слоя. Это свойство легко доказывается путем подстановки в зависимость (121) значения  $h = h_0'$ , при чем и будет:

$$\frac{dh}{ds} = -2i, \quad \dots \dots \dots \quad (126)$$

где знак „минус“ учитывает направление касательной к кривой депрессии в рассматриваемой точке  $M$  (черт. 28), ибо угол между положительным направлением оси  $s$ -ов и направлением касательной следует рассматривать, как отрицательный; абсолютная же величина угла  $\alpha$  (см. чертеж) характеризуется по (126) тем, что

$$\operatorname{tg} \alpha = 2i.$$

Что касается „условий по концам“ кривой депрессий, то вверх против течения глубина постепенно увеличивается, при чем (рассуждая лишь геометрически) легко видеть, что такое увеличение глубин — безгранично. В самом деле, общее уравнение (89) для сечения, бесконечно удаленного вверх против течения, может быть написано в виде:

$$\frac{h}{h_0} = \psi(\eta_\infty) - \psi(\eta_a), \quad \dots \dots \dots \quad (127)$$

где обозначения понятны из сказанного в § 12 по поводу уравнения (110). Уравнение (127) при  $l = -\infty$  и  $\psi(\eta_a) \neq \infty$  дает:

$$\psi(\eta_\infty) = \infty,$$

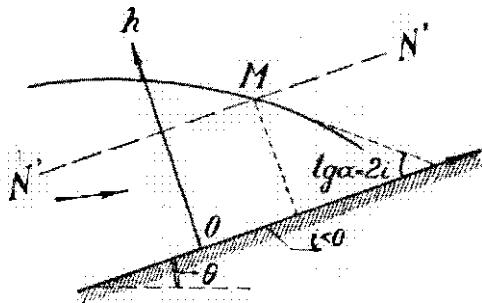
откуда по выражению (87) следует, что

$$\eta_\infty = \infty; \quad h_\infty = \infty.$$

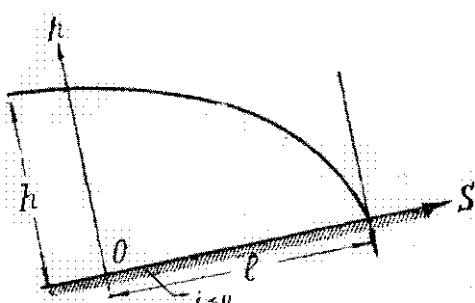
Обращаясь к „низовому концу“ кривой депрессии, видим, что, при постепенном уменьшении глубины, мы подойдем к весьма малым глубинам (черт. 28) и, рассуждая формально, при  $h=0$  из (121) получим, что здесь

$$\frac{dh}{ds} = -\infty, \dots \dots \dots \quad (128)$$

как мы уже имели это по (119) для кривой спада при прямом уклоне (§ 12), почему и здесь можем сказать, что при  $h=0$ <sup>1)</sup> кривая депрессии имеет касательную, направленную вниз, нормально к линии дна (черт. 29).



Черт. 28.



Черт. 29.

Сечение, в котором глубина падает до нуля, находится на конечном расстоянии  $l$  от начала координат (черт. 29), в чем убеждаемся по общему уравнению (89), которое в данном случае будет иметь вид:

$$\frac{u}{h_0} = \psi(0) - \psi(\eta_a), \dots \dots \dots \quad (129)$$

где  $\eta_a = \frac{h_a}{h_0}$ , при чем по выражению (87) функция  $\psi(\eta_a) < 0$ ; функция же  $\psi(0) = 0$ , как видно по тому же выражению. В виду этого из уравнения (129) найдем:

$$l = -\frac{h_0}{i} \psi(\eta_a), \dots \dots \dots \quad (130)$$

где  $l$  — конечная величина ( $> 0$ ).

Итак, при обратном уклоне подстилающего слоя имеет место только кривая спада, которая характеризуется вогнутостью, обращенной вниз, при чем вверх против течения глубина потока растет безгранично, вниз же по течению — постепенно уменьшается, доходя до нуля (практически — до весьма малых глубин) на конечном расстоянии от начального сечения.

Закончив исследование для кривых депрессии при обратном уклоне, скажем лишь несколько слов по поводу формы потока при горизонтальном подстилающем слое (черт. 30).

Как мы видели выше (§ 10), для этого случая дифференциальное уравнение кривой депрессии при каких-либо осиях типа  $Os$  и  $Oh$  имеет вид (91):

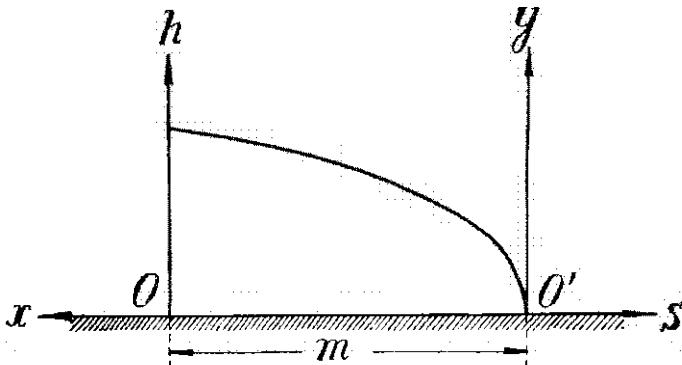
$$\frac{q}{k} ds = -h dh.$$

<sup>1)</sup> См. соответствующие пояснения в § 12.

Для простоты перейдем к осям  $O'x$  и  $O'y$ , имеющим начало в той точке подстилающего слоя, где глубина грунтового потока падает до нуля, при чем надо положить (черт. 30):

где  $m$  — расстояние между точками  $O$  и  $O'$ ; далее:

$$ds = -dx, \quad dh = dy \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (132)$$



Черт. 30.

Тогда, вместо указанного дифференциального уравнения, имеем:

$$\frac{q}{k} dx = y dy, \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (133)$$

или, интегрируя:

$$\frac{q}{k} x = \frac{1}{2} y^2 + \text{const}, \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (134)$$

где при  $x=0$ , также и  $y=0$ , а потому постоянная интегрирования = 0, и вместо (134) получим окончательно:

$$y^2 = \frac{2q}{k} x, \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (135)$$

так что мы пришли к уравнению параболы в простейшем виде, причем параметр ее

$$p = -\frac{q}{\kappa} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (136)$$

Этот известный вид уравнения кривой депрессии при нулевом уклоне подстилающего слоя нами здесь дается лишь для того, чтобы дать ясное представление о самой форме грунтового потока для этого случая. Так как форма эта вполне определяется каноническим уравнением параболы, то в дальнейших замечаниях по этому поводу нет надобности

## § 14. О практических приложениях теории неравномерного движения грунтовых вод.

Развитые выше соображения относительно неравномерного движения грунтовых вод применимы при разрешении весьма различных и многочисленных вопросов практического проектирования в области гидротехнического строительства. Для иллюстрации этой мысли мы и назовем здесь несколько примеров.

Прежде всего вспомним следующий случай, весьма обычный в практике гидротехнического строительства: в естественном состоянии к какой-либо реке установился некоторый приток грунтовых вод, при устройстве же на этой реке плотины глубина воды в реке увеличивается и тем самым создается подпор грунтового потока. Распространение этого подпора и получаемые новые глубины грунтового потока должны быть учтены для выяснения вопроса о возможности заболачивания прибрежных земель и в некоторых случаях для установления тех мер, которые необходимы для борьбы с вредным влиянием этого обстоятельства. Эта задача нередко возникает при сооружении гидростанций.

Затем нельзя не отметить случая, имеющего место, например, на сооружаемой ныне Днепровской установке. В общем виде случай этот сводится к следующему: при наличии проницаемых грунтов близ плотины, здесь возможна фильтрация из верхнего бьефа в близлежащие небольшие долины, балки, овраги и т. д., а также и в некоторые части нижнего бьефа при известных очертаниях его в плане близ плотины<sup>1</sup>). В таких случаях как при предварительной разработке вопроса, так и при обработке гидрогеологических изысканий приложение теории неравномерного движения грунтовых вод может дать весьма полезные указания.

Далее столь ответственные объекты гидротехнического строительства, как судоходные и магистральные ирригационные каналы, несущие в себе большие массы воды, тем самым часто радикально изменяют существовавший ранее режим грунтовых вод, создавая грунтовый поток в прилежащих проницаемых слоях; иногда же, наоборот, такие каналы могут обусловить по направлению к себе появление кривых спада грунтовых вод. В подобных случаях, хотя общее и полное решение задачи далеко не исчерпывается уравнением неравномерного движения, это уравнение все же может послужить для некоторых направляющих соображений.

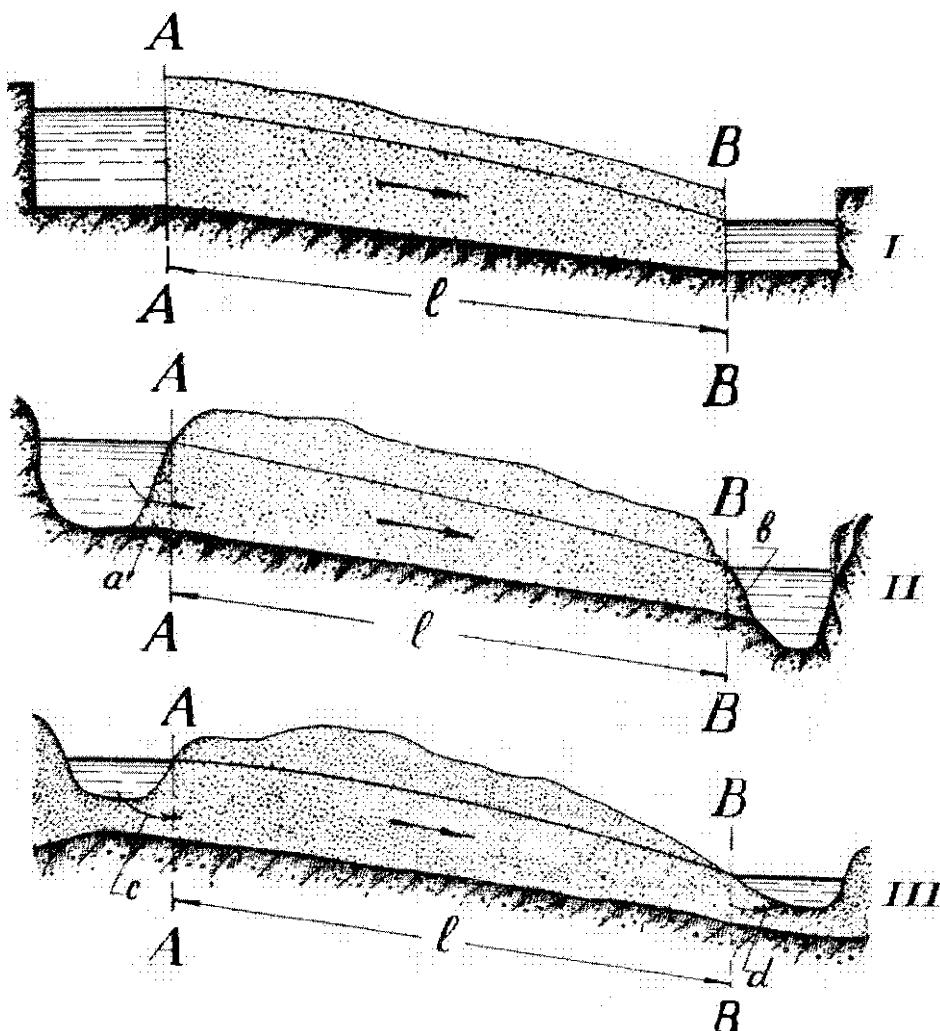
Еще пример: при устройстве водосборных галлерей, с наличием наклонных водонепроницаемых слоев, подстилающих водоносные грунты, построение кривых спада, получающихся здесь, совершенно необходимо при проектировании для освещения ряда вопросов. То же самое можно сказать и относительно случая линии колодцев (т.-е. сравнительно весьма частого их расположения по некоторой прямой), а равно и относительно вопросов проектирования так называемого грунтового водоотлива, т.-е. искусственного понижения уровня грунтовых вод при устройстве колоданов различных сооружений.

Наконец, вспомним еще такой случай: если две водоносные долины или два каких-либо длинных водоема расположены так, что между ними возможен ток грунтовых вод, то, при колебаниях уровня в одном или в обоих водоемах, соответственные колебания испытывают и кривые депрессии между этими водоемами. Изменение формы поверхности таких грунтовых потоков приходится учитывать, решая практические вопросы, связанные с названными водоемами.

Число таких иллюстрирующих примеров было бы возможно еще значительно увеличить, но и сказанного достаточно для подтверждения мысли, высказанной в начале настоящего параграфа. Мы хотели бы еще лишь отметить, что рассмотренная здесь теория неравномерного движения грунтовых вод, казалось бы, может быть полезна при постановке и исследовании также и некоторых гидрогеологических проблем. По нашему глу-

<sup>1</sup>) Фильтрация „в обход плотины“, непосредственно в месте сопряжения ее с берегами, составляет особый случай, и уравнения неравномерного медленно изменяющегося движения к этому случаю вообще неприменимы.

бокому убеждению, основанному на опыте участия в разрешении различных технических вопросов, так или иначе связанных с гидрогеологией, эта последняя лишь тогда может оказать инженерам-гидротехникам максимально возможное содействие, когда твердо станет на путь гидравлических методов при разрешении некоторых из своих проблем и при постановке и обработке результатов соответственных гидрогеологических изысканий.



Черт. 31.

Теперь, прежде чем обратиться к нескольким конкретным примерам расчетов, сделаем здесь одно замечание по поводу гидравлических условий в начале и конце кривых подпора или спада (см. три схемы по черт. 31, где показаны разные условия входа и выхода грунтового потока).

На схеме I штриховкой показано водонепроницаемое очертание, ограничивающее как оба водоема, так и самый грунтовый поток между ними. Эта схема—правда, почти лишь теоретическая—не требует дальнейших

пояснений при применении к ней данных выше зависимостей для неравномерного движения.

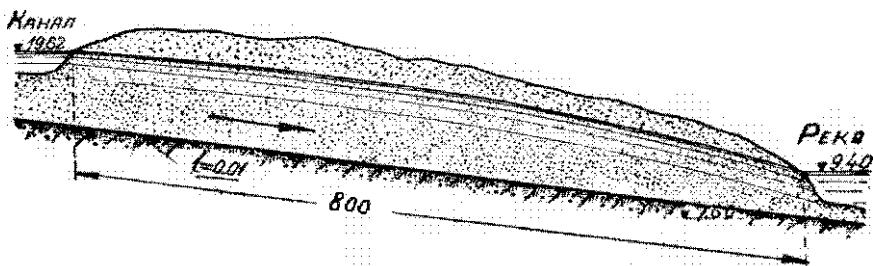
В схеме II мы видим уже некоторое усложнение, а именно—в отношении условий „входа“ и „выхода“ грунтового потока: здесь при расчете приходится за начальное сечение потока считать сечение  $A-A$ , а за конечное—сечение  $B-B$ , пренебрегая таким образом „клиньями“ грунта  $a$  и  $b$  (см. схему II), хотя в пределах их, конечно, будет некоторая потеря напора, вызываемая необходимостью преодоления известного сопротивления при прохождении потоком частей  $a$  и  $b$ , каковые сопротивления, однако, не учитываются данными выше уравнениями. Но дело в том, что самый объем этих „клиньев“ весьма невелик по сравнению с объемом грунта на всей длине  $l$ , и потому соответствующими потерями напора „на вход“ и „выход“, действительно, можно пренебречь, как то всегда с полным основанием делается и в гидравлике открытого русла при расчете длиных лотков.

То же самое, вообще говоря, можно повторить и о схеме III, где входное и выходное сечение также обозначены через  $A-A$  и  $B-B$ . Здесь потери „на вход“ и „выход“ несколько больше, чем в предыдущем случае, так как при входе поток должен преодолеть сопротивление некоторой области грунта  $c$ , а при выходе—области  $d$ , каковые области соответственно вообще несколько больше „клиньев“  $a$  и  $b$  схемы II, но все же незначительны по сравнению с объемом грунта на протяжении  $l$ .

В связи с этим заметим, что при весьма малых длинах  $l$ , т.-е. при коротких грунтовых потоках (как и при коротких лотках для надземных потоков), следует учитывать все потери напора<sup>1)</sup> как по длине  $l$ , так и по концам потока. Однако, это ведет уже к особым случаям, не составляющим предмета нашего, предлагаемого здесь, рассмотрения вопроса о неравномерном движении грунтовых вод.

### § 15. Простейшие примеры на построение кривых подпора и спада грунтовых вод.

В настоящем параграфе мы рассмотрим несколько простейших случаев построения кривых подпора и спада грунтовых вод, с целью показать самый способ пользования предлагаемыми таблицами и несколько осветить те отдельные вопросы, которые могут возникнуть при применении этих таблиц.



Черт. 32.

**Пример 1.** Берег реки, изображенный в поперечном разрезе на черт. 32, слагается из водонепроницаемого пласта, имеющего уклон в сторону

<sup>1)</sup> Этот случай имеет место, например, в земляных плотинах (см. мой доклад по вопросу „О фильтрации через тело земляных плотин“, сделанный на Всесоюзном Гидротехническом Совещании в Москве, в мае 1929 г.).

реки  $i = 0,01$ , и лежащего поверх него водопроницаемого песчаного слоя, имеющего коэффициент фильтрации  $k = 0,008 \text{ см/сек}$ .

В водопроницаемом слое, параллельно берегу реки и в расстоянии от нее 800 м, проходит магистральный канал оросительной системы. Расход грунтового потока, протекающего со стороны канала к реке, равен  $q = 0,032 \text{ см}^3/\text{сек}$  на один сантиметр<sup>1)</sup>. Отметка водопроницаемого слоя у выхода его в реку равна 7,60 м. Отметка горизонта воды в реке = 9,40 м. Отметка горизонта воды в канале = 19,42 м.

Построить кривую депрессии грунтового потока.

Определим нормальную глубину грунтового потока. Модуль расхода  $K_0$  грунтового потока будет равен

$$K_0 = \frac{q}{i} = \frac{0,032}{0,01} = 3,2 \text{ см}^3/\text{сек}.$$

По графику № 1 при  $k = 0,008 \text{ см/сек}$  и  $K_0 = 3,2 \text{ см}^3/\text{сек}$  находим нормальную глубину грунтового потока

$$h_0 = 4,0 \text{ м.}$$

Глубина грунтового потока у выхода его в реку равна

$$h_p = 9,40 - 7,60 = 1,80 \text{ м.}$$

Глубина грунтового потока у выхода из канала

$$h_{\text{кан}} = 19,42 - (7,60 + 800 \times 0,01) = 3,82 \text{ м.}$$

Так как  $h_p < h_{\text{кан}}$  и, следовательно, глубины потока убывают по направлению его движения, то в данном случае кривая поверхности грунтового потока будет кривой спада.

Для построения этой кривой будем поступать следующим образом. Задаваясь различными значениями глубины потока  $h_n$ <sup>2)</sup> в пределах от  $h_n = h_p = 1,80 \text{ м}$  до  $h_n = h_{\text{кан}} = 3,82 \text{ м}$ , будем вычислять расстояния между сечениями с заданной глубиной и сечением, в коем грунтовый поток входит в реку. С этой целью в общем уравнении кривой поверхности грунтового потока.

$$\frac{i \cdot l}{h_0} = \varphi(\eta_2) - \varphi(\eta_1) \dots \dots \dots \quad (137)$$

изменим обозначения и перепишем его в следующем виде

$$\frac{i \cdot l_n}{h_0} = \varphi(\eta) - \varphi(\eta_n) \dots \dots \dots \quad (138)$$

В уравнении (138) мы будем понимать под  $\eta$  отношение глубины грунтового потока в сечении при выходе его в реку к нормальной глубине потока. В данном случае

$$\eta = \frac{1,80}{4,00} = 0,45.$$

Таким образом,  $\eta$  в пределах каждого рассматриваемого случая будет величиной постоянной, а следовательно, постоянной величиной будет и  $\varphi(\eta)$  в уравнении (138).

<sup>1)</sup> В этом примере для простоты расход считается известным; об определении его см. ниже в примере 5.

<sup>2)</sup> Под  $h_n$  будем понимать глубину потока в рассматриваемом сечении; при этом  $n = 1, 2, 3$  и т. д.

Так как все возможные значения глубины потока  $h_n$ , заключенные в пределах от 1,80 м до 3,82 м, меньше нормальной глубины потока  $h_0 = 4,00$  м и, следовательно, все значения

$$\eta_n = \frac{h_n}{h_0} < 1,$$

то значения  $\varphi(\eta_n)$  определяются выражением (см. § 6):

$$\varphi(\eta_n) = \eta_n + \log_{\text{nat}}(1 - \eta_n) \dots \dots \dots \quad (139)$$

По выражению (139) и составлена таблица I, которой мы и будем пользоваться для определения значений  $\varphi(\eta_n)$  при различных  $\eta_n$ . Прежде всего по таблице I находим, что значению  $\eta = 0,45$  соответствует значение  $\varphi(\eta) = -0,1478$ .

Дадим значение  $h_n = h_1 = 2,00$  м. Тогда

$$\eta_1 = \frac{h_1}{h_0} = \frac{2,0}{4,0} = 0,50.$$

По таблице I находим, что при  $\eta_1 = 0,50$  значение  $\varphi(\eta_1) = -0,1932$ .

Подставляя в левую часть уравнения (138) значения:  $i = 0,01$  и  $h_0 = 4,00$  м, а в правую часть найденные значения  $\varphi(\eta)$  и  $\varphi(\eta_1)$ , находим

$$\frac{0,01 \times l_1}{4,0} = -0,1478 - (-0,1932) = 0,0454.$$

откуда

$$l_1 = \frac{0,0454 \times 4,0}{0,01} = 18,16 \text{ м.}$$

Дадим значение  $h_n = h_2 = 2,40$  м.

Тогда  $\eta_2 = \frac{2,40}{4,00} = 0,60$ . Соответствующее значение  $\varphi(\eta_2) = -0,3162$ .

Подставляя это значение в уравнение (138), получим

$$\frac{0,01 \times l_2}{4,0} = -0,1478 + 0,3162 = 0,1686,$$

откуда

$$l_2 = \frac{0,1686 \times 4,0}{0,01} = 67,40 \text{ м.}$$

Продолжая давать  $h_n$  различные значения в пределах до  $h_n = h_p = 3,82$  м и определяя, как только-что было показано, соответствующие значения  $l_n$ , находим, что

глубине 2,80 м соответствует расстояние 142,48 м

$$\begin{array}{llll} " & 3,20 & " & 264,64 \\ " & 3,60 & " & 501,92 \end{array} \text{ "}$$

Полученные данные дают возможность построить ряд точек, принадлежащих поверхности грунтового потока, а по ним и самую кривую депрессии.

**Пример 2.** Для условий примера 1 определить глубину грунтового потока в расстоянии  $L = 520$  м от сечения, в коем грунтовый поток входит в реку.

По условиям примера 1,  $i = 0,01$ ,  $q = 0,032 \text{ см}^3/\text{сек}$  и  $k = 0,008 \text{ см}/\text{сек}$ . Напомним также, что при решении примера 1 были определены: значение

нормальной глубины потока  $h_0 = 4,0 \text{ м}$ , глубины потока при выходе его в реку  $h_p = 1,80 \text{ м}$  и были найдены значения  $\eta$  и  $\varphi(\eta)$  в уравнении (138), которые оказались равными

$$\eta = 0,45 \text{ и } \varphi(\eta) = -0,1478.$$

Подставляя эти значения в уравнение (138) и обозначая через  $\varphi(\eta_L)$  значение  $\varphi(\eta)$  в сечении, отстоящем от места выхода грунтового потока в реку на расстоянии  $L = 520 \text{ м}$ , находим

$$\frac{0,01 \times 520,0}{4,0} = -0,1478 - \varphi(\eta_L),$$

откуда

$$1,55 + 0,1478 = -\varphi(\eta_L)$$

или

$$\varphi(\eta_L) = -1,6978.$$

Имея теперь значение  $\varphi(\eta_L)$ , можем определить соответствующее значение  $\eta_L$ . Пользуясь с этой целью таблицей I, находим из нее, что

значению  $\varphi(\eta) = -1,6653$  соответствует значение  $\eta = 0,925$ ,  
 $\varphi(\eta) = -1,7293$  " "  $\eta = 0,930$ .

Интерполируя в этих пределах, находим при значении

$$\varphi(\eta_L) = -1,6978,$$

соответствующее значение  $\eta_L$  равное

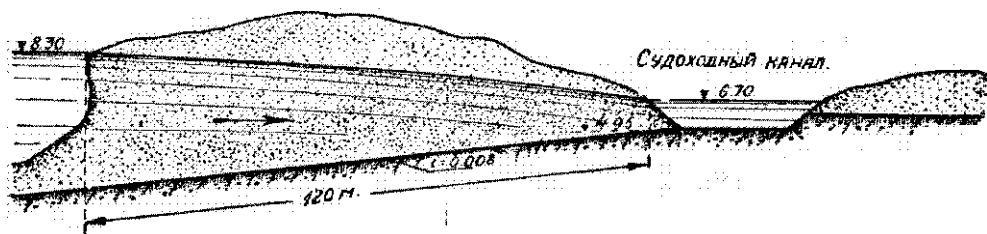
$$\eta_L = 0,925 - \frac{0,005 \times 0,0325}{0,0640} \cong 0,928.$$

Имея же в виду, что  $\eta_L = \frac{h_L}{h_0}$ , можем написать, что

$$h_L = \eta_L \cdot h_0 = 0,928 \times 4,0 \cong 3,71 \text{ м.}$$

Таким образом, мы нашли, что в расстоянии 520 м от выхода грунтового потока в реку глубина его будет равна 3,71 м.

**Пример 3.** На черт. 33 показан геологический профиль для судоходного канала. Как видно из чертежа, водонепроницаемый слой имеет уклон  $i = 0,008$ , направленный в сторону от канала. С левой стороны канала



Черт. 33.

лежит болото (см. слева на черт. 33). Коэффициент грунта  $k = 0,01 \text{ см/сек.}$ . Расстояние между болотом и каналом 120 м. Отметка водонепроницаемого слоя у выхода его в судоходном канале — 4,9 м<sup>1)</sup>. Отметка поверхности воды в канале — 6,7 м. Отметка поверхности грунтовой воды на болоте — 8,3 м. Вследствие разности отметок горизонтов воды в канале и на

<sup>1)</sup> На черт. 33 ошибочно показано 4,95.

болоте, грунтовой поток движется в сторону судоходного канала, при чем расход потока равен  $q = 0,04 \text{ см}^3/\text{сек}$  на погонный сантиметр длины канала<sup>1)</sup>.

Построить кривую депрессии грунтового потока.

В данном примере мы имеем случай движения грунтового потока по обратному уклону. Для решения такого рода задач вводится, как указывалось выше, в рассмотрение глубина  $h_0'$ , отвечающая движению в обратном направлении при сохранении прочих условий движения, т.е. при том же расходе  $q$ , той же величине уклона  $i$  и том же значении коэффициента фильтрации  $k$ . Определим значение величины  $h_0'$ , поступая с этой целью совершенно так же, как мы поступали в примере 1 для определения нормальной глубины грунтового потока на прямом уклоне.

Модуль расхода  $K_0 = \frac{q}{i} = \frac{0,04}{0,008} = 5,0 \text{ см}^3/\text{сек}$ .

По графику при  $K_0 = 5,0 \text{ см}^3/\text{сек}$  и  $k = 0,01 \text{ см}/\text{сек}$  находим

$$h_0' = 5,0 \text{ м.}$$

Глубина потока при выходе его в судоходный канал будет равна

$$h_{\text{кан}} = 6,70 - 4,90 = 1,80 \text{ м.}$$

Глубина потока у болота будет равна

$$h_0 = 8,30 - (4,9 - 120 \times 0,008) = 4,36 \text{ м.}$$

Очевидно, что все возможные значения глубин грунтового потока заключены между значениями  $h_{\text{кан}} = 1,80 \text{ м}$  и  $h_0 = 4,36 \text{ м}$ .

Для построения кривой депрессии грунтового потока в этом случае будем поступать так же, как в примере 1 при прямом уклоне. Задаваясь значениями глубин потока  $h_n$ , будем вычислять расстояния между сечениями с данной глубиной  $h_n$  и сечением выхода грунтового потока в судоходный канал. Общий вид уравнения (138) кривой депрессии грунтового потока остается при этом без изменения, но под  $\eta$  здесь следует понимать отношение глубины потока в данном сечении к величине  $h_0'$ , а не к величине нормальной глубины грунтового потока  $h_0$ , как на прямом уклоне, в связи с чем вводится новое обозначение функции от  $\eta$ , в виде  $\psi(\eta)$ .

При этом вместо уравнения (138) напишем:

$$\frac{h_n}{h_0'} = \psi(\eta) - \psi(\eta_n), \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (140)$$

где функции  $\psi$  находятся по таблице III.

Прежде всего определим значения  $\eta$  и  $\psi(\eta)$ .

$$\eta = \frac{h_{\text{кан}}}{h_0'} = \frac{1,80}{5,00} = 0,36.$$

По таблице III для  $\eta = 0,36$  находим значение  $\psi(\eta) = -0,0525$ .

Дадим значение  $h_n = h_1 = 2,20 \text{ м.}$

$$\text{Тогда } \eta_1 = \frac{h_1}{h_0'} = \frac{2,20}{5,00} = 0,44.$$

Соответствующее значение  $\psi(\eta) = -0,0754$ .

<sup>1)</sup> См. замечание о расходе в примере 1.

Подставляя в уравнение (140)  $i = 0,008$ ,  $h_0' = 5,0$  м,  $\psi(\eta) = -0,0525$  и  $\psi(\eta_1) = -0,0754$ , получаем:

$$\frac{0,008 \times l_1}{5,0} = -0,0525 - (-0,0754) = 0,0229,$$

откуда

$$l_1 = \frac{0,0229 \times 5,0}{0,008} = 14,31 \text{ м.}$$

Дадим значение  $h_n = h_2 = 2,60$  м.

$$\text{Тогда } \eta_2 = \frac{h_2}{h_0} = \frac{2,60}{5,00} = 0,52.$$

Соответствующее значение  $\psi(\eta_2)$  по таблице III

$$\psi(\eta_2) = -0,1013.$$

Подставляя его в уравнение (140), получим:

$$\frac{0,008 \times l_2}{5,00} = -0,0525 + 0,1013 = 0,0488,$$

откуда

$$l_2 = \frac{0,0488 \times 5,0}{0,008} = 30,50 \text{ м.}$$

Продолжая давать  $h_n$  различные значения и определяя соответствующие значения  $l_n$ , находим, что

глубине 3,0	м	соответствует	расстояние	48,44	м
" 3,40	"	"	"	67,94	"
" 3,80	"	"	"	88,88	"
" 4,20	"	"	"	111,63	"

Пользуясь полученными данными, строим ряд точек, принадлежащих кривой депрессии грунтового потока, а по ним и самую кривую (черт. 33).

**Пример 4.** Для условий примера 3 найти глубину грунтового потока в расстоянии 40 м от сечения, в коем он входит в канал.

Из решения примера 3 нам известно, что  $i = 0,008$ ,  $h_0' = 5,00$  м,  $\eta = 0,36$  и  $\psi(\eta) = -0,0525$ . Подставляя эти значения в уравнение (140), получаем:

$$\frac{0,008 \times 40,0}{5,0} = -0,0525 - \psi(\eta_L),$$

откуда находим, что

$$\psi(\eta_L) = -0,1165.$$

При решении аналогичного примера для случая прямого уклона (пример 2), мы путем подбора определяли из таблицы II значение  $\eta_L$ , соответствующее найденному значению  $\psi(\eta_L)$ .

Укажем, что то же действие может быть произведено путем непосредственного пользования графиками  $\psi(\eta)$ . Так, например, в рассматриваемом случае путем непосредственного чтения по графику № 3 для

$$\psi(\eta) = -\eta + \log_{10}(1 + \eta)$$

находим, что значению  $\psi(\eta_L) = -0,1165$  соответствует значение  $\eta_L = 0,56$ .

Определив значение  $\eta_L$ , по соотношению  $h_L = \eta_L \cdot h_0'$  легко определяем  $h_L$ :

$$h_L = 0,56 \times 5,0 = 2,80 \text{ м.}$$

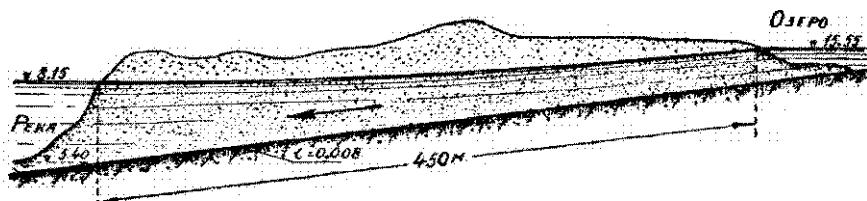
Таким образом, в расстоянии 40 м от сечения, в коем грунтовый поток входит в канал, глубина потока равна 2,80 м.

### § 16. Более сложные примеры.

В предыдущих примерах величина расхода грунтового потока входила в число заданных величин. Однако в практике весьма часто возможны случаи, когда расход грунтового потока является величиной искомой. Дадим теперь путем решения примера иллюстрацию одного из таких случаев.

**Пример 5.** На черт. 34 показан геологический разрез местности, проходящий через озеро и реку. Из чертежа видно, что берег реки состоит из водонепроницаемого слоя, имеющего уклон в сторону реки  $i = 0,008$  и лежащего поверх него водонапорного песчано-глинистого слоя с коэффициентом фильтрации  $k = 0,004 \text{ см/сек}$ . Озеро расположено с правой стороны реки в расстоянии 450 м от нее. Отметка выхода водонапорного пласта в реку = 5,40 м. Отметка горизонта воды в реке 8,15 м. Отметка горизонта воды в озере = 15,55 м.

Требуется найти величину расхода грунтового потока и построить кривую депрессии грунтового потока.



Черт. 34.

Для решения поставленных вопросов выясним прежде всего вид кривой поверхности грунтового потока.

Глубина грунтового потока при выходе его в реку:

$$h_p = 8,15 - 5,40 = 2,75 \text{ м.}$$

Глубина грунтового потока у озера

$$h_{oz} = 15,55 - (5,40 + 750 \times 0,012) = 1,15 \text{ м.}$$

Вследствие разности отметок горизонтов воды в озере и реке грунтовый поток движется по прямому уклону в сторону реки. Вследствие же того, что глубина грунтового потока у реки больше глубины грунтового потока у озера, движение происходит с возрастающими глубинами; иными словами, кривая депрессии грунтового потока будет в данном случае кривой подиора. Поэтому в написанном выше уравнении (138) кривой депрессии грунтового потока для отыскания значений  $\varphi(\eta)$  следует пользоваться уравнением (63), § 6:

$$\varphi(\eta) = \eta + \log_{10}(\eta - 1) \dots \dots \dots \quad (141)$$

Значения  $\varphi(\eta)$  для различных  $\eta$  по этому уравнению приведены в таблице II, коей мы и будем в дальнейшем пользоваться.

Перейдем теперь к решению поставленных вопросов.

а) Определение величины расхода.

Напишем уравнение кривой поверхности грунтового потока между сечениями входа его в реку и выхода его из озера. Подставим с этой целью в уравнение (138):  $i = 0,008$  и  $l = 450,0 \text{ м}$  и, памятуя, что через  $\eta$  мы

обозначили отношение глубины потока в некотором сечении к нормальной глубине потока, получаем:

$$\frac{0,008 \times 450,0}{h_0} = \varphi\left(\frac{h_p}{h_0}\right) - \varphi\left(\frac{h_{03}}{h_0}\right) \quad \dots \dots \dots \quad (142)$$

или

$$h_0 \left[ \varphi\left(\frac{h_p}{h_0}\right) - \varphi\left(\frac{h_{03}}{h_0}\right) \right] = 3,60 \quad \dots \dots \dots \quad (142')$$

Так как величины  $h_p$  и  $h_{03}$  были нами выше определены, то легко видеть, что левая часть уравнения (142') представляет собой функцию одного лишь  $h_0$ , почему уравнение (142') может быть кратко переписано в следующем виде:

$$f(h_0) = 3,60 \quad \dots \dots \dots \quad (142'')$$

Решение уравнения (142') или (142'') удобнее всего произвести графически. С этой целью, задаваясь различными значениями величины  $h_0$ , будем вычислять соответствующие значения  $f(h_0)$ , пользуясь при этом для определения значений  $\varphi\left(\frac{h_p}{h_0}\right)$  и  $\varphi\left(\frac{h_{03}}{h_0}\right)$  таблицей II.

Результаты вычислений сведены в нижеследующую таблицу.

$h_0$	$\frac{h_p}{h_0}$	$\varphi\left(\frac{h_p}{h_0}\right)$	$\frac{h_{03}}{h_0}$	$\varphi\left(\frac{h_{03}}{h_0}\right)$	$f(h_0)$
1,00	2,75	3,3092	1,15	0,7471	4,0563
0,80	3,44	4,3318	1,44	0,6190	2,9702
0,60	4,56	5,8295	1,92	1,8357	2,3063
0,40	6,88	8,7450	2,88	3,5110	2,0936

Откладывая по оси абсцисс значения  $h_0$ , а по оси ординат соответствующие им значения  $f(h_0)$ , полученные в таблице, построим (черт. 35) график  $f(h_0)$ , по которому при  $f(h_0) = 3,6$  находим  $h_0 = 0,93$  м.

Таким образом, мы установили, что нормальная глубина потока, удовлетворяющего изложенным в задании к настоящему примеру условиям, должна равняться  $h_0 = 0,93$  м; но нормальная глубина связана с расходом потока следующей зависимостью по § 2:

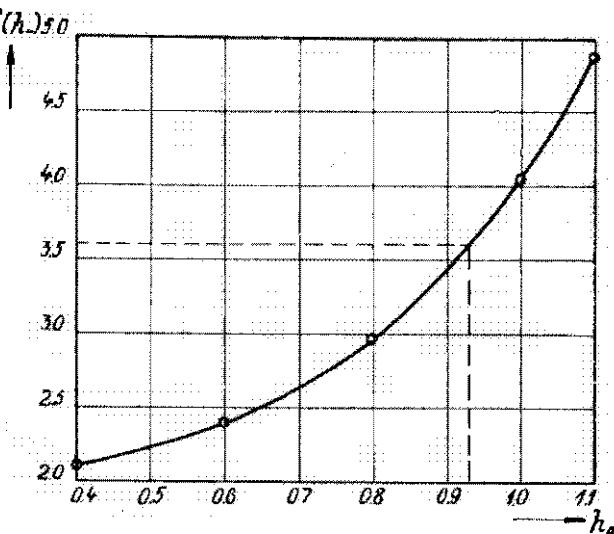
$$q = k_i h_0 \quad \dots \quad (143)$$

Подставляя в уравнение (143)  $i = 0,008$ ,  $k = -0,004$  см/сек и  $h_0 = 93$  см, получаем:

$$q = 0,008 \times 0,004 \times 93 = 0,002976 \approx 0,003 \text{ см}^3/\text{сек}$$

на один сантиметр ширины потока.

Таким образом, ответ на первый вопрос нами найден. Переходим к решению второго вопроса настоящего примера.



Черт. 35.

### 6) Построение кривой депрессии потока.

Для построения кривой депрессии грунтового потока мы попрежнему будем пользоваться уравнением (138), памятуя, что для разбираемого случая движения с возрастающими глубинами по прямому уклону значения  $\varphi(\eta)$  определяются таблицей II. Метод построения кривой подпора остается тем же, что и в примерах 1 и 3.

Нормальная глубина потока была определена при решении первого вопроса и оказалась равной  $h_0 = 0,93 \text{ м}$ .

Определим значение  $\varphi(\eta)$  в уравнении (138). Выше было найдено, что глубина потока в сечении при выходе его в реку равна  $h_p = 2,75 \text{ м}$ .

Тогда

$$\eta = \frac{2,75}{0,93} = 2,957.$$

По таблице II находим:

$$\begin{aligned} \text{при } \eta = 2,9, \text{ значение } \varphi(\eta) = 3,5420 \\ \text{, } \eta = 3,0, \text{, } \varphi(\eta) = 3,6934. \end{aligned}$$

Интерполируя в указанных пределах, находим при  $\eta = 2,957$ , значение

$$\varphi(\eta) = 3,5420 + \frac{0,1514 \times 0,057}{0,100} = 3,6283.$$

Дадим значение  $h_n = h_1 = 2,50 \text{ м}$ .

Тогда

$$h_1 = \frac{h_1}{h_0} = \frac{2,50}{0,93} = 2,688.$$

Пользуясь таблицами, как только что было показано, находим

$$\varphi(\eta_1) = 3,0700 + \frac{0,1606 \times 0,088}{0,100} = 3,2113.$$

Подставляя в уравнение (138)  $i = 0,008$ ,  $h_0 = 0,93 \text{ м}$ , а также найденные значения  $\varphi(\eta)$  и  $\varphi(\eta_1)$ , получаем

$$\frac{0,008 \times l_1}{0,93} = 3,6283 - 3,2113 = 0,4170,$$

откуда

$$l_1 = \frac{0,4170 \times 0,93}{0,008} \approx 48,5 \text{ м.}$$

Продолжая давать различные значения  $h_n$  и определяя соответствующие значения  $l_n$ , находим, что

глубине 2,25 м	соответствует расстояние	99,9 м
2,00 м	"	155,5 м
1,75 м	"	217,7 м
1,50 м	"	291,6 м
1,25 м	"	369,6 м

Полученные данные дают возможность построить ряд точек, принадлежащих кривой, а по ним и самую кривую депрессии.

### § 17. Задача о сопряжении грунтовым потоком двух водоемов.

Как указано выше (§ 14), в практических приложениях может иметь место важный случай фильтрации из одного водотока в другой, что и составляет задачу, которую можно назвать „задачей о сопряжении грунтовым потоком двух водоемов“. Здесь мы дадим конкретный пример по этому вопросу.

**Пример 6.** Полагая в условиях примера 5 величину уклона равной  $i = 0,004$ , построить график изменения величины расхода грунтового потока из озера в зависимости от колебания горизонта воды в реке, считая горизонт воды в озере постоянным.

При решении примера 5 было указано, что глубина грунтового потока при выходе его из озера равна  $h_{o3} = 1,15 \text{ м}$ . Определим максимальное значение глубины грунтового потока, при котором возможно движение его со стороны озера к реке. Движение такого рода будет очевидно существовать вперед до установления равенства отметки горизонтов воды в реке и озере. При дальнейшем повышении горизонта воды в реке, начнется обратное движение грунтового потока со стороны реки к озеру, по обратному уклону.

Таким образом, максимальное значение глубины грунтового потока у входа его в реку, будет

$$h_p = 1,15 + (450,0 \times 0,004) = 2,95 \text{ м.}$$

Минимальное значение  $h_p$ , которое нам следует рассмотреть, будет

$$h_p = 0.$$

Следовательно, для построения графика изменения расхода грунтового потока, движущегося со стороны озера к реке, в зависимости от изменения горизонта воды в реке, нам следует определить ряд значений  $q$  при различных значениях  $h_p$ , в пределах

$$0 < h_p < 2,95 \text{ м.}$$

Определение  $q$  при различных значениях  $h_p$  будем производить так, как мы это делали в примере 5. Подставляя в уравнение (138) вместо  $\eta$  его выражение через  $\frac{h_p}{h_0}$ , а вместо  $\eta_n$  — через  $\frac{h_{o3}}{h_0}$ , получаем:

$$\frac{il}{h_0} = \varphi\left(\frac{h_p}{h_0}\right) - \varphi\left(\frac{h_{o3}}{h_0}\right) \dots \dots \dots \quad (144)$$

откуда

$$il = h_0 \left[ \varphi\left(\frac{h_p}{h_0}\right) - \varphi\left(\frac{h_{o3}}{h_0}\right) \right] = f(h_0).$$

Задаваясь в последнем уравнении различными значениями  $h_p$  ( $h_{o3}$  сохраняет по условиям примера постоянное значение  $h_{o3} = 1,15$ ), будем определять значения его правой части при различных  $h_p$ .

Строя затем график  $f(h_0)$ , при  $f(h_0) = il$  находим по нему значение  $h_0$ , соответствующее принятому значению  $h_p$  и по формуле (21)

$$q = ki h_0$$

соответствующее значение  $q$ .

Однако, для производства указанной работы необходимо знать, каким из уравнений (63) или (64) следует пользоваться для отыскания значений  $\varphi\left(\frac{h_p}{h_0}\right)$  и  $\varphi\left(\frac{h_{o3}}{h_0}\right)$ . Поэтому определим предварительно тип поверхности грунтового потока при увеличении  $h_p$  от нуля до 2,95 м.

При  $h_p < 1,15 \text{ м}$  движение грунтового потока будет происходить с уменьшающимися глубинами. Следовательно, при  $h_p < 1,15 \text{ м}$  мы будем

иметь кривую спада, и для определения  $\varphi\left(\frac{h_p}{h_0}\right)$  и  $\varphi\left(\frac{h_{03}}{h_0}\right)$  следует пользоваться уравнением (64) или таблицей I.

При  $h_p > 1,15$  м движение будет происходить с увеличивающимися глубинами. Кривая депрессии грунтового потока будет кривой подпора, и для определения значения  $\varphi\left(\frac{h_p}{h_0}\right)$  и  $\varphi\left(\frac{h_{03}}{h_0}\right)$  надо пользоваться уравнением (63) или таблицей II.

При  $h_p = h_{03} = 1,15$  м кривая депрессии грунтового потока обращается в прямую параллельную линию водонепроницаемого слоя. Движение происходит с постоянными глубинами и  $h_0 = h_{03} = h_p = 1,15$  м.

После этих предварительных замечаний перейдем к определению  $h_0$  при различных  $h_p$ .

В трех нижеследующих таблицах приведены значения  $f(h_0)$  для  $h_p = 0$ ,  $h_p = 0,60$  м и  $h_p = 1,00$  м.

При вычислении значений  $f(h_0)$  мы согласно сделанных замечаний пользовались таблицей I.

Таблица значений  $f(h_0)$  при  $h_p = 0$ .

$h_0$	$\left(\frac{h_p}{h_0}\right)$	$\varphi\left(\frac{h_p}{h_0}\right)$	$f(h_0)$
3,00	0,383	— 0,0999	0,2997
2,50	0,460	— 0,1562	0,3905
2,00	0,575	— 0,2808	0,5616
1,50	0,767	— 0,6899	1,0349
1,25	0,920	— 1,6057	2,0071
1,20	0,9583	— 2,2205	2,6646
1,17	0,9829	— 3,0880	3,6130
1,16	0,9914	— 3,7700	4,3732

Таблица значений  $f(h_0)$  при  $h_p = 0,60$  м.

$h_0$	$\frac{h_p}{h_0}$	$\varphi\left(\frac{h_p}{h_0}\right)$	$\left(\frac{h_{03}}{h_0}\right)$	$\varphi\left(\frac{h_{03}}{h_0}\right)$	$f(h_0)$
3,00	0,20	— 0,0231	0,383	— 0,0999	0,2304
2,50	0,24	— 0,0345	0,460	— 0,1562	0,3043
2,00	0,30	— 0,0567	0,575	— 0,2808	0,4482
1,50	0,40	— 0,1108	0,767	— 0,6899	0,8687
1,25	0,48	— 0,1738	0,920	— 1,6057	1,7899
1,20	0,50	— 0,1932	0,9583	— 2,2205	2,4328
1,17	0,513	— 0,2065	0,9829	— 3,0880	3,3714
1,16	0,517	— 0,2108	0,9914	— 3,7700	4,1287

Таблица значений  $f(h_0)$  при  $h_p = 1,00 \text{ м.}$ 

$h_0$	$\left(\frac{h_p}{h_0}\right)$	$\varphi\left(\frac{h_p}{h_0}\right)$	$\left(\frac{h_{03}}{h_0}\right)$	$\varphi\left(\frac{h_{03}}{h_0}\right)$	$f(h_0)$
3,00	0,333	— 0,0720	0,383	— 0,0991	0,0837
2,50	0,400	— 0,1108	0,460	— 0,1562	0,1135
2,00	0,500	— 0,1932	0,575	— 0,2808	0,1752
1,50	0,667	— 0,4328	0,767	— 0,6899	0,3857
1,25	0,800	— 0,8094	0,920	— 1,6057	0,9954
1,20	0,833	— 0,9572	0,9583	— 2,2205	1,5160
1,17	0,855	— 1,0766	0,9829	— 3,0880	2,3533
1,16	0,862	— 1,1189	0,9914	— 3,7700	3,0753

Откладывая по оси абсцисс значения  $f(h_0)$ , а по оси ординат значения  $h_0$ , получаем (черт. 36) графики  $f(h_0)$  для трех различных значений  $h_p$ :

$$h_p = 0; h_p = 0,60 \text{ м.}; h_p = 1,00 \text{ м.}$$

Так как при  $i = 0,004$  и  $l = 450 \text{ м}$  значение

$$f(h_0) = i \times l = 0,004 \times 450,0 = 1,80,$$

то, проводя на графике (36) прямую  $f(h_0) = 1,80 \text{ м.}$ , получаем на оси ординат три значения  $h_0$ , соответствующие трем значениям  $h_p$ , для которых строились графики  $f(h_0)$ :  $h_0 = 1,19 \text{ м.}$ ;  $h_0 = 1,25 \text{ м.}$ ;  $h_0 = 1,285 \text{ м.}$

В следующих трех таблицах приведены значения  $f(h_0)$  для  $h_p = 1,50 \text{ м.}$ ;  $h_p = 2,00 \text{ м.}$ ;  $h_p = 2,50 \text{ м.}$ . Так как все перечисленные значения  $h_p > 1,15 \text{ м.}$ , при вычислении значений  $f(h_0)$  мы пользовались таблицей II.

Таблица значений  $f(h_0)$  при  $h_p = 1,50 \text{ м.}$ 

$h_0$	$\frac{h_p}{h_0}$	$\varphi\left(\frac{h_p}{h_0}\right)$	$\frac{h_{03}}{h_0}$	$\varphi\left(\frac{h_{03}}{h_0}\right)$	$f(h_0)$
1,10	1,364	0,3520	1,045	— 2,0561	2,6499
1,00	1,500	0,8069	1,15	— 0,7471	1,5540
0,80	1,875	1,7402	1,44	0,6190	0,8974
0,60	2,50	2,9055	1,92	1,8357	0,6419
0,40	3,75	4,7978	2,88	3,5110	0,5147

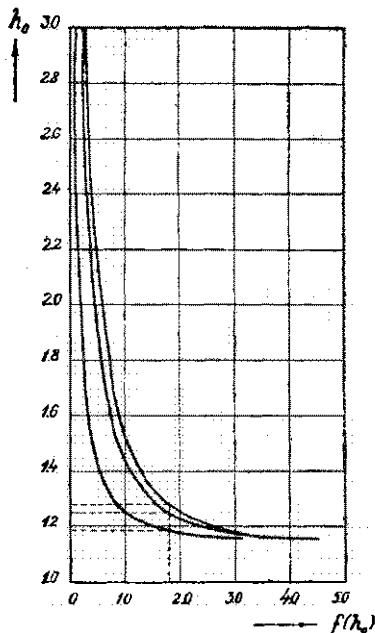
Таблица значений  $f(h_0)$  при  $h_p = 2,0 \text{ м.}$ 

$h_0$	$\frac{h_p}{h_0}$	$\varphi\left(\frac{h_p}{h_0}\right)$	$\frac{h_{03}}{h_0}$	$\varphi\left(\frac{h_{03}}{h_0}\right)$	$f(h_0)$
1,10	1,818	1,6161	1,045	— 2,0561	4,0394
1,00	2,00	2,0000	1,15	— 0,7471	2,7471
0,80	2,50	2,9055	1,44	0,6190	1,8292
0,60	3,333	4,1804	1,92	1,8357	1,4068
0,40	5,000	6,3863	2,88	3,5110	1,1501

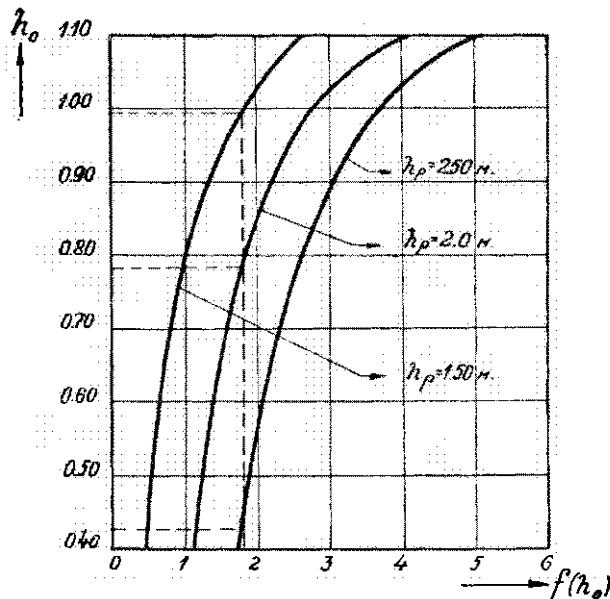
Таблица значений  $f(h_0)$  при  $h_p = 2,50 \text{ м}$ .

$h_0$	$\frac{h_p}{h_0}$	$\varphi\left(\frac{h_p}{h_0}\right)$	$\frac{h_{03}}{h_0}$	$\varphi\left(\frac{h_{03}}{h_0}\right)$	$f(h_0)$
1,10	2,273	2,5138	1,045	— 2,0561	5,0269
1,00	2,500	2,9055	1,15	— 0,7471	3,6526
0,80	3,125	3,8786	1,44	0,6190	2,6077
0,60	4,167	5,3197	1,92	1,8357	2,0904
0,40	6,250	7,9081	2,88	3,5110	1,7588

По данным этих таблиц построены графики  $f(h_0)$  для  $h_p = 1,50 \text{ м}$ ,  $h_p = 2,0 \text{ м}$  и  $h_p = 2,50 \text{ м}$  (черт. 37), аналогичные графикам на черт. 36.



Черт. 36.



Черт. 37.

По этим графикам при  $f(h_0) = 1,80$  находим значения  $h_0$ , соответствующие принятым при построении графиков значениям  $h_p$ :  $h_p = 0,995 \text{ м}$ ,  $h_0 = 0,786 \text{ м}$ ;  $h_p = 0,424 \text{ м}$ .

Для перехода от нормальных глубин потока к его расходу, надо лишь согласно формуле (21):

$$q = k_2 h_0$$

умножить полученные значения  $h_0$  на произведение

$$k \cdot i = 0,004 \times 0,004 = 0,000016.$$

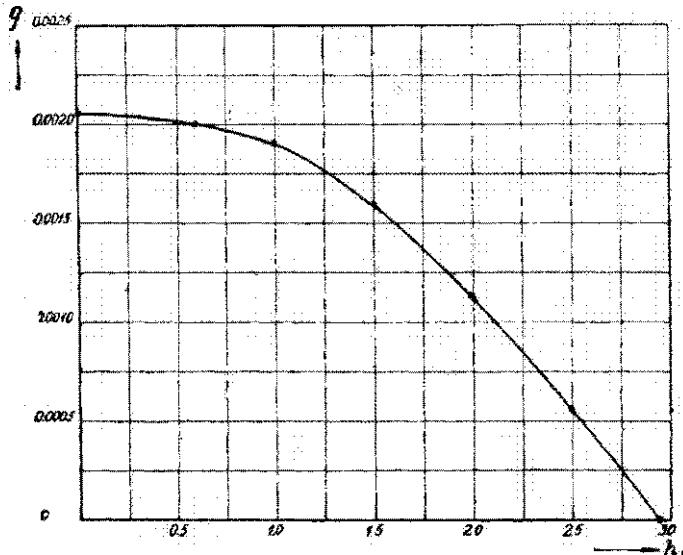
В следующей таблице дана сводка полученных величин расходов в  $cm^3/сек.$  на один сантиметр ширины потока, при различных значениях глубины потока при выходе его в реку:

$h_p$ с.я.	$q$ $cm^3/сек.$
0	0,002056
60	0,002000
100	0,001904
150	0,001592
200	0,001258
250	0,000678
295	0

Откладывая по оси абсцисс значения  $h_p$ , а по оси ординат значения  $q$ , получаем (черт. 38) искомый график зависимости

$$q = f(h_p).$$

В случае, если бы и горизонт воды в озере подвергался колебаниям, то следовало бы аналогично вышеуказанному способу поступать так.

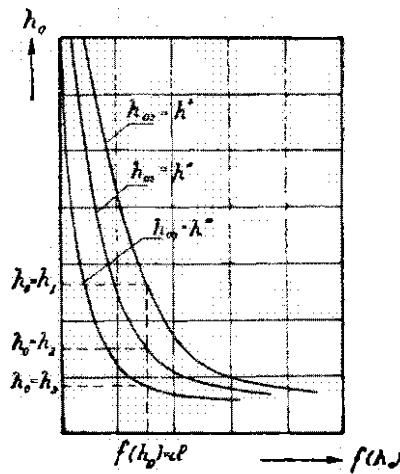


Черт. 38.

Задаваясь рядом значений глубины грунтового потока при выходе его из озера, в соответствии с различными горизонтами воды в последнем, строим график значений  $f(h_0)$  для некоторого  $h_p$  при различных значениях  $h_{o3} = h_{o3}', h_{o3}'', h_{o3}''' \dots$ . Из этого графика при  $f(h_0) = il$  определяем ряд значений  $h_0$ , соответствующих каждой паре значений  $(h_p, h_{o3}')$ ,  $(h_p, h_{o3}'')$ ,  $(h_p, h_{o3}''')$ ,  $\dots$ .

Схематически такой график показан на черт. (39). Отметим, что при составлении таблиц для построения черт. 39 следует каждый раз

выяснить общий характер движения грунтового потока, как это было сделано выше, чтобы знать, какое из уравнений, (68) или (64), применять для определения значений  $\varphi\left(\frac{h_p}{h_0}\right)$  и  $\varphi\left(\frac{h_{os}}{h_0}\right)$ .



Черт. 39.

Повторяя составление таких графиков для тех же значений  $h_{os}$ , но для ряда других значений  $h_p$ , и определяя каждый раз соответствующие значения  $h_0$ , а следовательно, по уравнению (143) и значения  $q$ , мы получаем достаточное количество данных, для составления графика  $q$  при различных значениях  $h_{os}$  и  $h_p$ .

## Таблицы и графики.



Таблица I.  
Прямой уклон ( $i > 0$ ). Спад.

$\eta$	$\varphi(\eta)$	$ \Delta $	$\eta$	$\varphi(\eta)$	$ \Delta $	$\eta$	$\varphi(\eta)$	$ \Delta $
0,01	— 0,00004	0,00016	0,36	— 0,0863	0,0057	0,71	— 0,5279	0,0251
0,02	— 0,0002	0,0002	0,37	— 0,0920	0,0060	0,72	— 0,5530	0,0264
0,03	— 0,0004	0,0004	0,38	— 0,0980	0,0063	0,73	— 0,5794	0,0277
0,04	— 0,0008	0,0005	0,39	— 0,1043	0,0065	0,74	— 0,6071	0,0292
0,05	— 0,0013	0,0006	0,40	— 0,1108	0,0068	0,75	— 0,6363	0,0308
0,06	— 0,0019	0,0007	0,41	— 0,1176	0,0071	0,76	— 0,6671	0,0326
0,07	— 0,0026	0,0008	0,42	— 0,1247	0,0074	0,77	— 0,6997	0,0345
0,08	— 0,0034	0,0009	0,43	— 0,1321	0,0077	0,78	— 0,7342	0,0365
0,09	— 0,0043	0,0010	0,44	— 0,1398	0,0080	0,79	— 0,7707	0,0387
0,10	— 0,0053	0,0012	0,45	— 0,1478	0,0083	0,80	— 0,8094	0,0413
0,11	— 0,0065	0,0013	0,46	— 0,1562	0,0086	0,81	— 0,8507	0,0441
0,12	— 0,0078	0,0014	0,47	— 0,1648	0,0090	0,82	— 0,8948	0,0472
0,13	— 0,0092	0,0016	0,48	— 0,1738	0,0095	0,83	— 0,9420	0,0506
0,14	— 0,0108	0,0017	0,49	— 0,1833	0,0099	0,84	— 0,9926	0,0545
0,15	— 0,0125	0,0019	0,50	— 0,1932	0,0102	0,85	— 1,0471	0,0596
0,16	— 0,0144	0,0020	0,51	— 0,2034	0,0106	0,86	— 1,1061	0,0641
0,17	— 0,0164	0,0021	0,52	— 0,2140	0,0110	0,87	— 1,1702	0,0700
0,18	— 0,0185	0,0022	0,53	— 0,2250	0,0115	0,88	— 1,2402	0,0771
0,19	— 0,0207	0,0024	0,54	— 0,2365	0,0120	0,89	— 1,3173	0,0853
0,20	— 0,0231	0,0026	0,55	— 0,2485	0,0125	0,90	— 1,4026	0,0463
0,21	— 0,0257	0,0028	0,56	— 0,2610	0,0130	0,905	— 1,4489	0,0491
0,22	— 0,0285	0,0029	0,57	— 0,2740	0,0135	0,910	— 1,4980	0,0521
0,23	— 0,0314	0,0031	0,58	— 0,2875	0,0140	0,915	— 1,5501	0,0556
0,24	— 0,0345	0,0032	0,59	— 0,3015	0,0147	0,920	— 1,6057	0,0596
0,25	— 0,0377	0,0034	0,60	— 0,3162	0,0153	0,925	— 1,6653	0,0640
0,26	— 0,0411	0,0036	0,61	— 0,3315	0,0160	0,930	— 1,7293	0,0691
0,27	— 0,0447	0,0038	0,62	— 0,3475	0,0167	0,935	— 1,7984	0,0750
0,28	— 0,0485	0,0040	0,63	— 0,3642	0,0174	0,940	— 1,8734	0,0820
0,29	— 0,0525	0,0042	0,64	— 0,3816	0,0182	0,945	— 1,9554	0,0903
0,30	— 0,0567	0,0044	0,65	— 0,3998	0,0190	0,950	— 2,0457	0,1004
0,31	— 0,0611	0,0046	0,66	— 0,4188	0,0199	0,955	— 2,1461	0,1128
0,32	— 0,0657	0,0048	0,67	— 0,4387	0,0208	0,960	— 2,2589	0,1285
0,33	— 0,0703	0,0050	0,68	— 0,4595	0,0217	0,965	— 2,3874	0,1492
0,34	— 0,0755	0,0053	0,69	— 0,4812	0,0228	0,970	— 2,5386	0,0670
0,35	— 0,0808	0,0055	0,70	— 0,5040	0,0239	0,972	— 2,656	0,0721

Продолжение.

$\eta$	$\varphi(\eta)$	$ \Delta $	$\eta$	$\varphi(\eta)$	$ \Delta $	$\eta$	$\varphi(\eta)$	$ \Delta $
0,974	— 2,6757	0,0780	0,984	— 3,1512	0,1315	0,994	— 4,1220	0,4035
0,976	— 2,7537	0,0850	0,986	— 3,2827	0,1521	0,996	— 4,5255	0,6912
0,978	— 2,8387	0,0938	0,988	— 3,4348	0,1804	0,998	— 5,2167	0,6921
0,980	— 2,9320	0,1034	0,990	— 3,6152	0,2211	0,999	— 5,9088	
0,982	— 3,0354	0,1158	0,992	— 3,8363	0,2857			

Таблица II.  
Прямой уклон ( $i > 0$ ). Подпор.

$\eta$	$\varphi(\eta)$	$ \Delta $	$\eta$	$\varphi(\eta)$	$ \Delta $	$\eta$	$\varphi(\eta)$	$ \Delta $
100,0	104,5951	10,1065	32,0	35,4340	1,0328	13,5	16,0257	0,5408
90,0	94,4886	10,1191	31,0	34,4012	1,0330	13,0	15,4849	0,5425
80,0	84,3695	10,1354	30,0	33,3673	1,0351	12,5	14,9424	0,5445
70,0	74,2341	5,0752	29,0	32,3322	1,0364	12,0	14,3979	0,5465
65,0	69,1589	5,0814	28,0	31,2958	1,0377	11,5	13,8514	0,5488
60,0	64,0775	5,0885	27,0	30,2581	1,0392	11,0	13,3026	0,5513
55,0	58,9890	5,0972	26,0	29,2189	1,0408	10,5	12,7513	0,5541
50,0	53,8918	1,0206	25,0	28,1781	1,0426	10,0	12,1972	0,2224
49,0	52,8712	1,0210	24,0	27,1352	1,0445	9,8	11,9748	0,2230
48,0	51,8502	1,0215	23,0	26,0910	1,0465	9,6	11,7518	0,2235
47,0	50,8287	1,0220	22,0	25,0445	1,0488	9,4	11,5283	0,2242
46,0	49,8067	1,0225	21,0	23,9957	1,0513	9,2	11,3041	0,2247
45,0	48,7842	1,0230	20,0	22,9444	0,5266	9,0	11,0794	0,2253
44,0	47,7612	1,0235	19,5	22,4178	0,5274	8,8	10,8541	0,2260
43,0	46,7377	1,0241	19,0	21,8904	0,5282	8,6	10,6281	0,2266
42,0	45,7136	1,0247	18,5	21,3622	0,5290	8,4	10,4015	0,2274
41,0	44,6889	1,0253	18,0	20,8332	0,5298	8,2	10,1741	0,2282
40,0	43,6636	1,0260	17,5	20,3034	0,5308	8,0	9,9459	0,2290
39,0	42,6376	1,0267	17,0	19,7726	0,5318	7,8	9,7169	0,2298
38,0	41,6109	1,0274	16,5	19,2408	0,5327	7,6	9,4871	0,2308
37,0	40,5835	1,0281	16,0	18,7081	0,5339	7,4	9,2563	0,2317
36,0	39,5554	1,0290	15,5	18,1742	0,5341	7,2	9,0246	0,2328
35,0	38,5264	1,0299	15,0	17,6391	0,5364	7,0	8,7918	0,2339
34,0	37,4969	1,0308	14,5	17,1027	0,5378	6,8	8,5579	0,2351
33,0	36,4657	1,0317	14,0	16,5649	0,5392	6,6	8,3228	0,2365

Продолжение.

$\eta$	$\varphi(\eta)$	$ \Delta $	$\eta$	$\varphi(\eta)$	$ \Delta $	$\eta$	$\varphi(\eta)$	$ \Delta $
6,4	8,0863	0,2376	2,2	2,3823	0,1870	1,23	— 0,2397	0,0544
6,2	7,8487	0,2393	2,1	2,1053	0,1953	1,22	— 0,2941	0,0565
6,0	7,6094	0,2408	2,0	2,0000	0,2054	1,21	— 0,3506	0,0588
5,8	7,3686	0,2425	1,9	1,7946	0,2177	1,20	— 0,4094	0,0613
5,6	7,1261	0,2445	1,8	1,5760	0,2336	1,19	— 0,4707	0,0641
5,4	6,8816	0,2465	1,7	1,3433	0,2541	1,18	— 0,5348	0,0672
5,2	6,6351	0,2488	1,6	1,0892	0,2823	1,17	— 0,6020	0,0706
5,0	6,3863	0,1253	1,50	0,8069	0,0303	1,16	— 0,6726	0,0745
4,9	6,2610	0,1260	1,49	0,7766	0,0306	1,15	— 0,7471	0,0790
4,8	6,1350	0,1267	1,48	0,7460	0,0310	1,14	— 0,8201	0,0841
4,7	6,0083	0,1274	1,47	0,7150	0,0315	1,13	— 0,9102	0,0901
4,6	5,8800	0,1281	1,46	0,6835	0,0320	1,12	— 1,0003	0,0970
4,5	5,7528	0,1290	1,45	0,6515	0,0325	1,11	— 1,0973	0,1053
4,4	5,6238	0,1299	1,44	0,6190	0,0330	1,100	— 1,2026	0,0563
4,3	5,4939	0,1307	1,43	0,5860	0,0335	1,095	— 1,2589	0,0591
4,2	5,3632	0,1318	1,42	0,5525	0,0341	1,090	— 1,3180	0,0621
4,1	5,2314	0,1328	1,41	0,5184	0,0347	1,085	— 1,3801	0,0656
4,0	5,0986	0,1339	1,40	0,4837	0,0353	1,080	— 1,4457	0,0696
3,9	4,9647	0,1351	1,39	0,4484	0,0360	1,075	— 1,5153	0,0740
3,8	4,8296	0,1364	1,38	0,4124	0,0367	1,070	— 1,5893	0,0791
3,7	4,6932	0,1377	1,37	0,3757	0,0374	1,065	— 1,6684	0,0850
3,6	4,5555	0,1392	1,36	0,3383	0,0381	1,060	— 1,7534	0,0920
3,5	4,4163	0,1408	1,35	0,3002	0,0390	1,055	— 1,8454	0,1003
3,4	4,2755	0,1426	1,34	0,2612	0,0399	1,050	— 1,9457	0,1104
3,3	4,1320	0,1444	1,33	0,2213	0,0408	1,045	— 2,0561	0,1228
3,2	3,9885	0,1466	1,32	0,1805	0,0418	1,040	— 2,1789	0,1385
3,1	3,8419	0,1485	1,31	0,1387	0,0428	1,035	— 2,3174	0,1592
3,0	3,6934	0,1514	1,30	0,0959	0,0439	1,030	— 2,4766	0,0710
2,9	3,5420	0,1542	1,29	0,0520	0,0451	1,028	— 2,5476	0,0761
2,8	3,3978	0,1572	1,28	0,0039	0,0069	1,026	— 2,6297	0,0820
2,7	3,2306	0,1606	1,27846	0	0,0303	1,024	— 2,7057	0,0890
2,6	3,0700	0,1645	1,27	— 0,0393	0,0478	1,022	— 2,7947	0,0973
2,5	2,9055	0,1690	1,26	— 0,0871	0,0492	1,020	— 2,8920	0,1074
2,4	2,7365	0,1741	1,25	— 0,1363	0,0508	1,018	— 2,9994	0,1198
2,3	2,5624	0,1801	1,24	— 0,1871	0,0526	1,016	— 3,1192	0,1355

$\eta$	$\varphi(\eta)$	$ \Delta $	$\eta$	$\varphi(\eta)$	$ \Delta $	$\eta$	$\varphi(\eta)$
1,014	— 3,2547	0,1564	1,007	— 3,9548	0,1552	1,002	— 5,2126
1,012	— 3,4111	0,1841	1,006	— 4,1100	0,1833	1,001	— 5,9068
1,010	— 3,5952	0,1063	1,005	— 4,2933	0,2242		
1,009	— 3,7015	0,1188	1,004	— 4,5175	0,2887		
1,008	— 3,8203	0,1345	1,003	— 4,8062	0,4064		

Таблица III.  
Обратный уклон ( $i < 0$ ).

$\eta$	$\psi(\eta)$	$ \Delta $	$\eta$	$\psi(\eta)$	$ \Delta $	$\eta$	$\psi(\eta)$
0,010	— 0,00005	0,00005	0,17	— 0,0130	0,0014	0,42	— 0,0693
0,015	— 0,0001	0,0001	0,18	— 0,0144	0,0016	0,43	— 0,0728
0,020	— 0,0002	0,0001	0,19	— 0,0160	0,0017	0,44	— 0,0754
0,025	— 0,0003	0,0001	0,20	— 0,0177	0,0017	0,45	— 0,0785
0,030	— 0,0004	0,0002	0,21	— 0,0194	0,0018	0,46	— 0,0816
0,035	— 0,0006	0,0002	0,22	— 0,0212	0,0018	0,47	— 0,0847
0,040	— 0,0008	0,0002	0,23	— 0,0230	0,0019	0,48	— 0,0879
0,045	— 0,0010	0,0002	0,24	— 0,0249	0,0020	0,49	— 0,0912
0,050	— 0,0012	0,0002	0,25	— 0,0269	0,0020	0,50	— 0,0945
0,055	— 0,0014	0,0003	0,26	— 0,0289	0,0021	0,51	— 0,0979
0,060	— 0,0017	0,0003	0,27	— 0,0310	0,0021	0,52	— 0,1013
0,065	— 0,0020	0,0004	0,28	— 0,0331	0,0022	0,53	— 0,1047
0,070	— 0,0024	0,0003	0,29	— 0,0353	0,0023	0,54	— 0,1082
0,075	— 0,0027	0,0003	0,30	— 0,0376	0,0024	0,55	— 0,1117
0,080	— 0,0030	0,0004	0,31	— 0,0400	0,0024	0,56	— 0,1153
0,085	— 0,0034	0,0004	0,32	— 0,0424	0,0024	0,57	— 0,1189
0,090	— 0,0038	0,0004	0,33	— 0,0448	0,0025	0,58	— 0,1226
0,095	— 0,0042	0,0005	0,34	— 0,0473	0,0026	0,59	— 0,1263
0,10	— 0,0047	0,0010	0,35	— 0,0499	0,0026	0,60	— 0,1300
0,11	— 0,0057	0,0010	0,36	— 0,0525	0,0027	0,61	— 0,1338
0,12	— 0,0067	0,0011	0,37	— 0,0552	0,0027	0,62	— 0,1376
0,13	— 0,0078	0,0012	0,38	— 0,0579	0,0028	0,63	— 0,1414
0,14	— 0,0090	0,0012	0,39	— 0,0607	0,0028	0,64	— 0,1453
0,15	— 0,0102	0,0014	0,40	— 0,0635	0,0029	0,65	— 0,1492
0,16	— 0,0116	0,0014	0,41	— 0,0664	0,0029	0,66	— 0,1532

## Продолжение.

$\eta$	$\psi(\eta)$	$\Delta$	$\eta$	$\psi(\eta)$	$\Delta$	$\eta$	$\psi(\eta)$	$\Delta$
0,67	— 0,1572	0,0040	1,2	— 0,4116	0,0555	11,5	— 8,9743	0,4608
0,68	— 0,1612	0,0041	1,3	— 0,4671	0,0574	12,0	— 9,4351	0,4622
0,69	— 0,1653	0,0041	1,4	— 0,5245	0,0592	12,5	— 9,8973	0,4636
0,70	— 0,1694	0,0041	1,5	— 0,5837	0,0608	13,0	— 10,3609	0,4650
0,71	— 0,1735	0,0042	1,6	— 0,6445	0,0623	13,5	— 10,8259	0,4661
0,72	— 0,1777	0,0042	1,7	— 0,7068	0,0636	14,0	— 11,2920	0,4672
0,73	— 0,1819	0,0042	1,8	— 0,7704	0,0649	14,5	— 11,7592	0,4682
0,74	— 0,1861	0,0043	1,9	— 0,8353	0,0661	15,0	— 12,2274	0,4692
0,75	— 0,1904	0,0043	2,0	— 0,9014	0,0672	15,5	— 12,6966	0,4702
0,76	— 0,1947	0,0043	2,1	— 0,9686	0,0683	16,0	— 13,1668	0,4710
0,77	— 0,1990	0,0044	2,2	— 1,0369	0,0692	16,5	— 13,6378	0,4718
0,78	— 0,2034	0,0044	2,3	— 1,1061	0,0701	17,0	— 14,1086	0,4762
0,79	— 0,2078	0,0044	2,4	— 1,1762	0,0710	17,5	— 14,5822	0,4734
0,80	— 0,2122	0,0045	2,5	— 1,2472	0,0719	18,0	— 15,0556	0,4741
0,81	— 0,2167	0,0045	2,6	— 1,3191	0,0726	18,5	— 15,5297	0,4726
0,82	— 0,2212	0,0045	2,7	— 1,3917	0,0733	19,0	— 16,0043	0,4753
0,83	— 0,2257	0,0045	2,8	— 1,4650	0,0740	19,5	— 16,4796	0,4759
0,84	— 0,2302	0,0046	2,9	— 1,5390	0,0747	20,0	— 16,9555	0,9535
0,85	— 0,2348	0,0046	3,0	— 1,6137	0,0752	21,0	— 17,9090	0,9555
0,86	— 0,2394	0,0046	3,5	— 1,9959	0,3947	22,0	— 18,8645	0,9575
0,87	— 0,2440	0,0047	4,0	— 2,3906	0,4047	23,0	— 19,8220	0,9591
0,88	— 0,2487	0,0047	4,5	— 2,7953	0,4120	24,0	— 20,7811	0,9608
0,89	— 0,2534	0,0047	5,0	— 3,2082	0,4200	25,0	— 21,7419	0,9623
0,90	— 0,2581	0,0048	5,5	— 3,6282	0,4259	26,0	— 22,7042	0,9636
0,91	— 0,2629	0,0048	6,0	— 4,0541	0,4310	27,0	— 23,6678	0,9649
0,92	— 0,2677	0,0048	6,5	— 4,4851	0,4355	28,0	— 24,6327	0,9661
0,93	— 0,2725	0,0048	7,0	— 4,9206	0,4393	29,0	— 25,5988	0,9672
0,94	— 0,2773	0,0049	7,5	— 5,3599	0,4429	30,0	— 26,5660	0,9682
0,95	— 0,2822	0,0049	8,0	— 5,8028	0,4459	31,0	— 27,5342	0,9693
0,96	— 0,2871	0,0049	8,5	— 6,2487	0,4487	32,0	— 28,5035	0,9702
0,97	— 0,2920	0,0049	9,0	— 6,6974	0,4512	33,0	— 29,4737	0,9710
0,98	— 0,2969	0,0050	9,5	— 7,1486	0,4535	34,0	— 30,4447	0,9718
0,99	— 0,3019	0,0050	10,0	— 7,6021	0,4556	35,0	— 31,4165	0,9726
1,0	— 0,3069	0,0512	10,5	— 8,0577	0,4574	36,0	— 32,3891	0,9734
1,1	— 0,3581	0,0535	11,0	— 8,5151	0,4592	37,0	— 33,3625	0,9740

Продолжение.

$\eta$	$\psi(\eta)$	$ \Delta $	$\eta$	$\psi(\eta)$	$ \Delta $	$\eta$	$\psi(\eta)$	$ \Delta $
38,0	— 34,3365	0,9746	48,0	— 44,1082	0,9798	100,0	— 95,3840	
39,0	— 35,3111	0,9753	49,0	— 45,0880	0,9802			
40,0	— 36,2864	0,9759	50,0	— 46,0682	4,9064			
41,0	— 37,2623	0,9765	55,0	— 50,9746	4,9145			
42,0	— 38,2388	0,9770	60,0	— 55,8891	4,9213			
43,0	— 39,2158	0,9775	65,0	— 60,8104	4,9270			
44,0	— 40,1933	0,9780	70,0	— 65,7374	4,9319			
45,0	— 41,1713	0,9785	75,0	— 70,6693	4,9362			
46,0	— 42,1498	0,9790	80,0	— 75,6055	4,9376			
47,0	— 43,1288	0,9794	90,0	— 85,4891	9,8958			

## СОДЕРЖАНИЕ.

	Стр.
§ 1. Общие указания . . . . .	3
§ 2. Равномерное движение грунтовых вод . . . . .	5
§ 3. Формула Дюпюи . . . . .	8
§ 4. Дифференциальное уравнение неравномерного движения при прямом уклоне подстилающего слоя . . . . .	13
§ 5. Интегрирование полученного дифференциального уравнения неравномерного движения . . . . .	14
§ 6. Вспомогательная таблица при прямом уклоне подстилающего слоя . . . . .	16
§ 7. Основные задачи, решаемые при помощи вспомогательных таблиц . . . . .	18
§ 8. Дифференциальное уравнение неравномерного движения грунтовых вод при обратном уклоне подстилающего слоя ( $i < 0$ ) . . . . .	19
§ 9. Интегрирование дифференциального уравнения для обратного уклона и составление вспомогательной таблицы . . . . .	20
§ 10. Замечания о неравномерном движении грунтовых вод при горизонтальном подстилающем слое . . . . .	22
§ 11. Предварительные замечания к исследованию форм кривых депрессии при неравномерном движении грунтовых вод . . . . .	24
§ 12. Исследование формы кривых депрессии при прямом уклоне . . . . .	26
§ 13. Исследование формы кривых депрессии при обратном уклоне . . . . .	30
§ 14. О практических приложениях теории неравномерного движения грунтовых вод . . . . .	33
§ 15. Простейшие примеры на построение кривых подпора и спада грунтовых вод . . . . .	36
§ 16. Более сложные примеры . . . . .	42
§ 17. Задача о сопряжении грунтовым потоком двух водоемов . . . . .	44

### Таблицы.

Таблица I. Прямой уклон ( $i > 0$ ). Спад . . . . .	53
"    II. Прямой уклон ( $i > 0$ ). Подпор . . . . .	54
"    III. Обратный уклон ( $i < 0$ ) . . . . .	56

### Графики.

График № 1. Определение нормальной глубины грунтового потока.	
"    № 2. Определение значений $\varphi(\eta)$ при $0 < \eta < 1$ .	
"    № 2а. Определение значений $\varphi(\eta)$ при $1 < \eta < 5,5$ .	
"    № 3. Определение значений $\psi(\eta)$ при $0 < \eta < 6,0$ .	

**Исправления в чертежах,**

На черт. 21 глубину для точки *C* обозначить через  $h_k$ .

На черт. 29 выше линии *OS* поставить стрелку —————→

На черт. 30 выше линии *OO'* поставить стрелку —————→

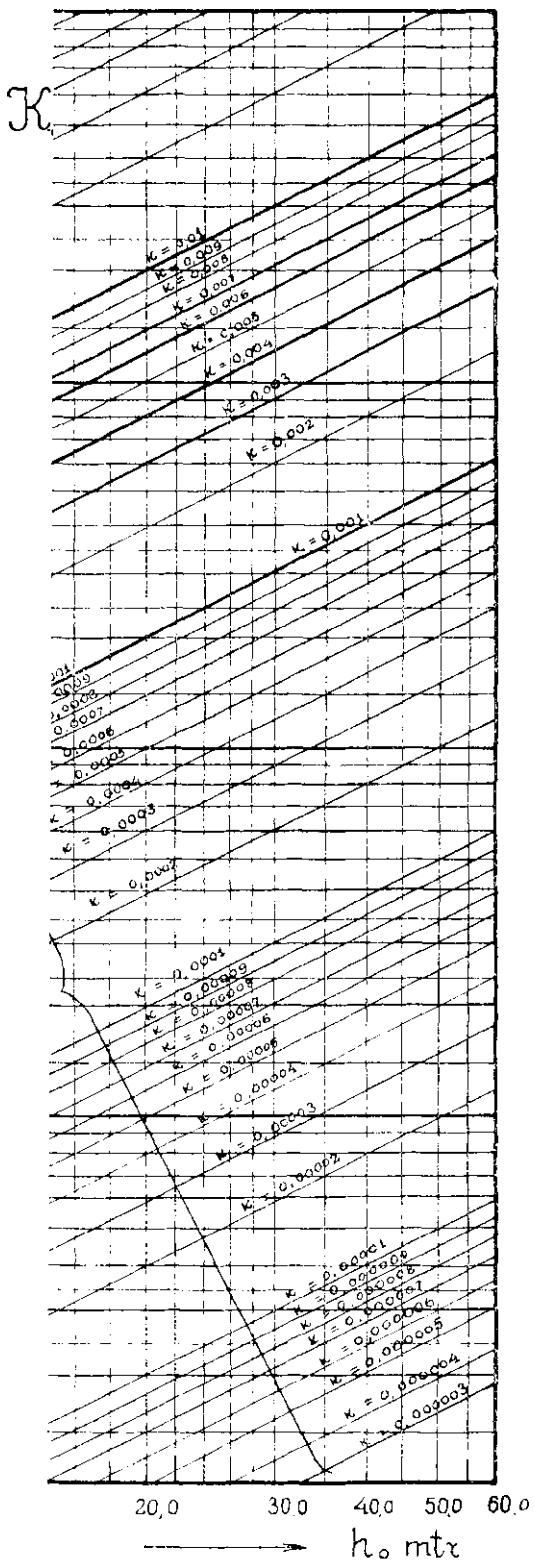
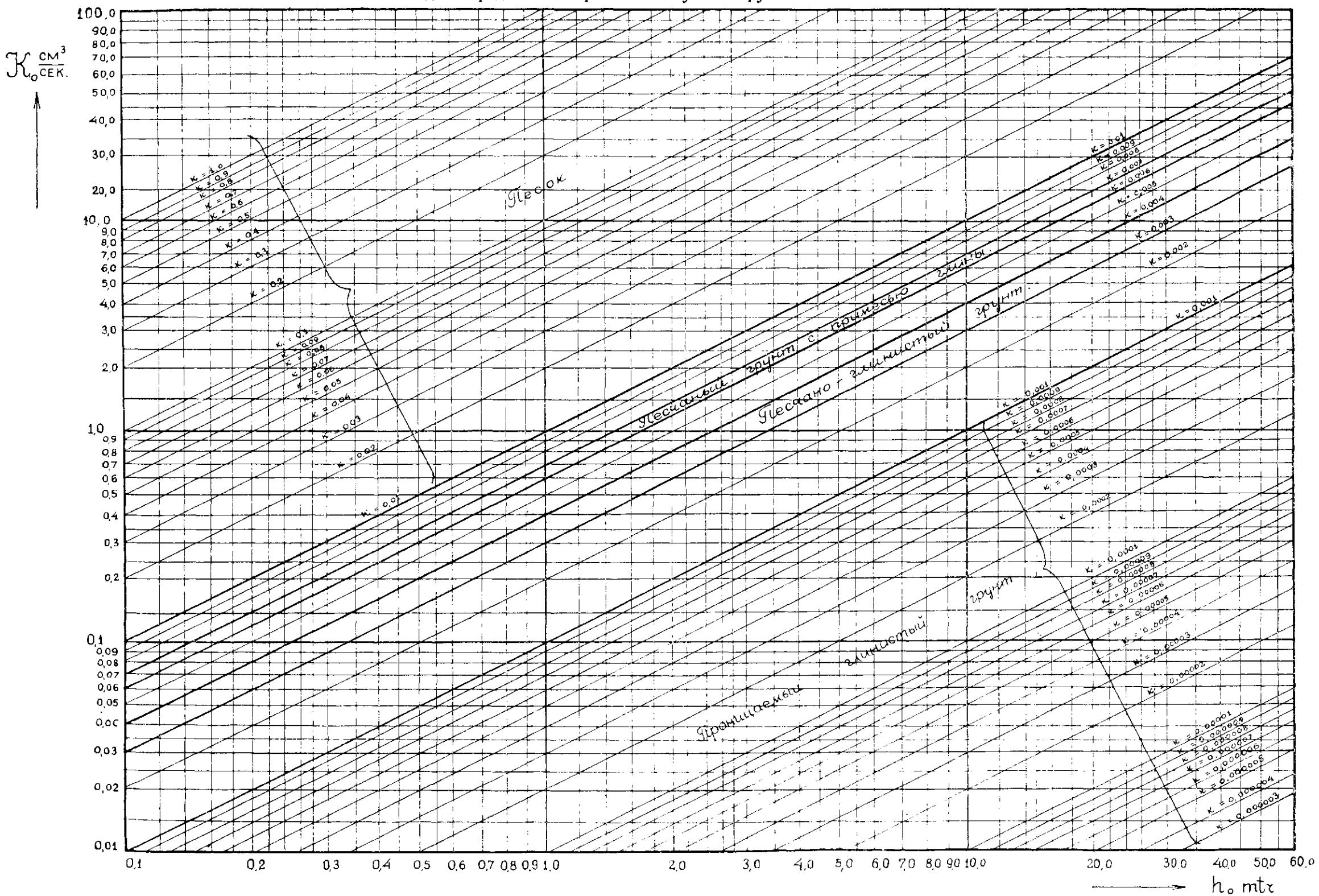
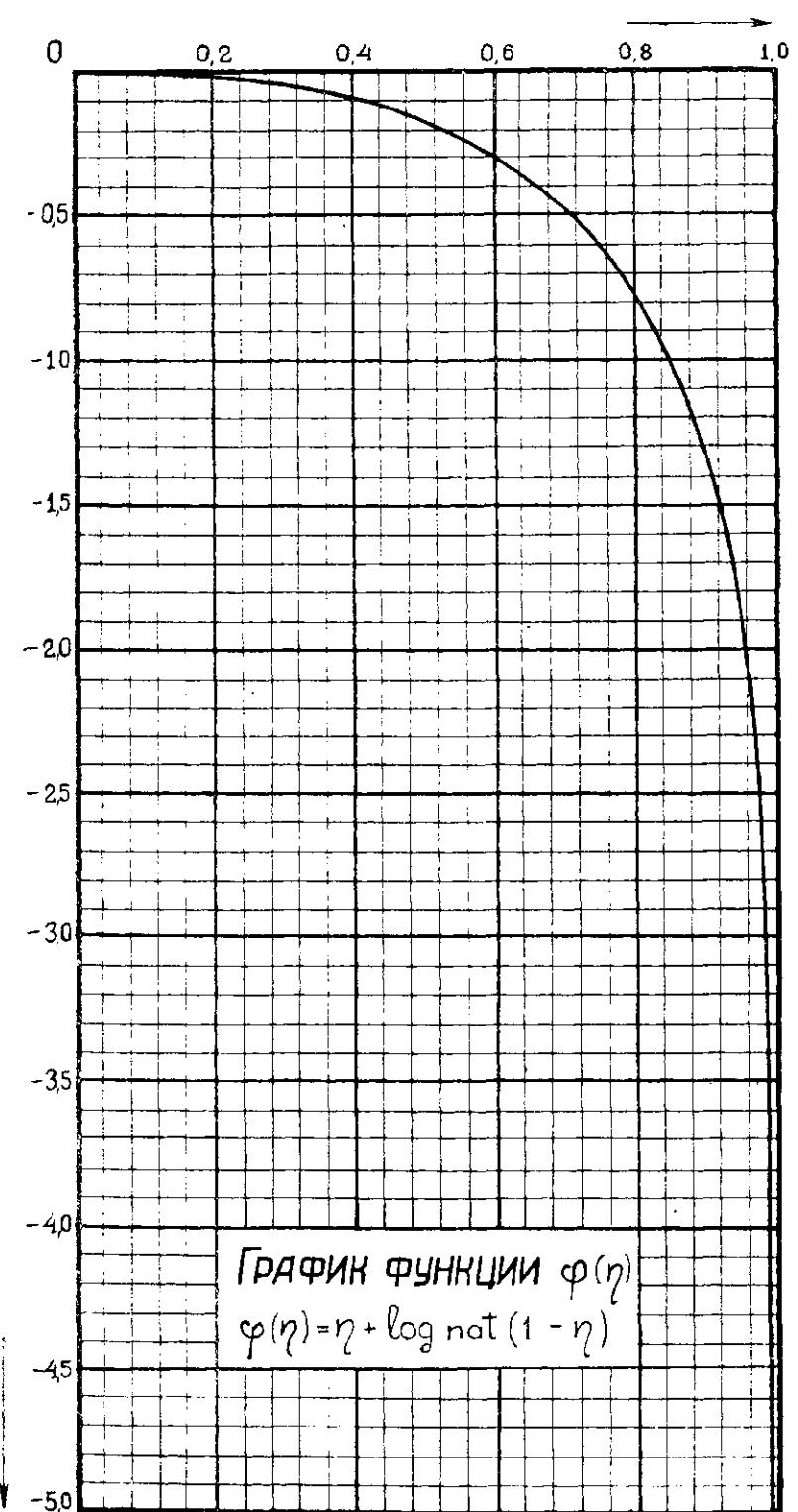


ГРАФИК  
для определения нормальной глубины грунтового потока.



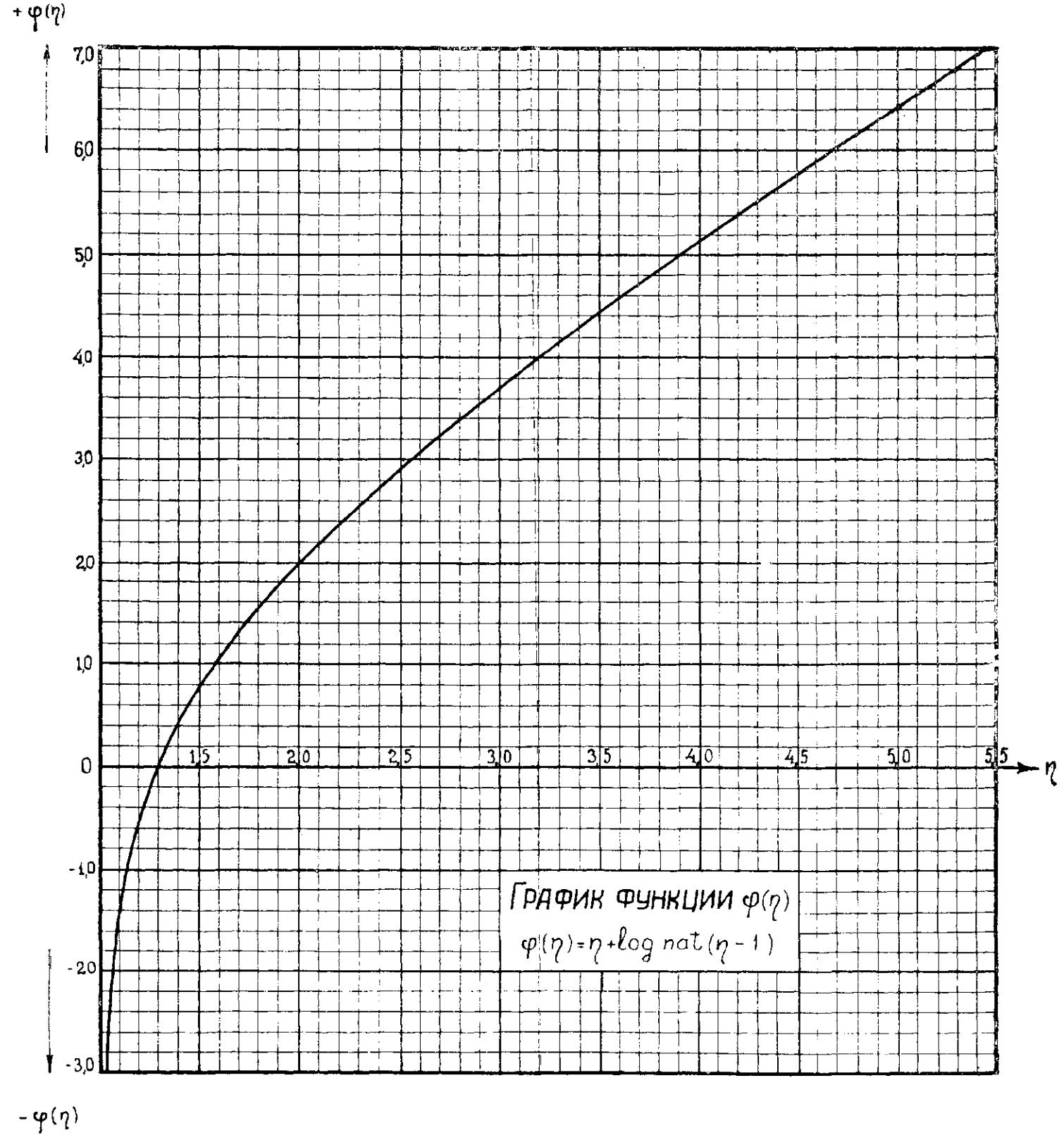
II. Замечание: Коэф.  $k$  выражен в  $\text{см}/\text{сек.}$

График № 1.



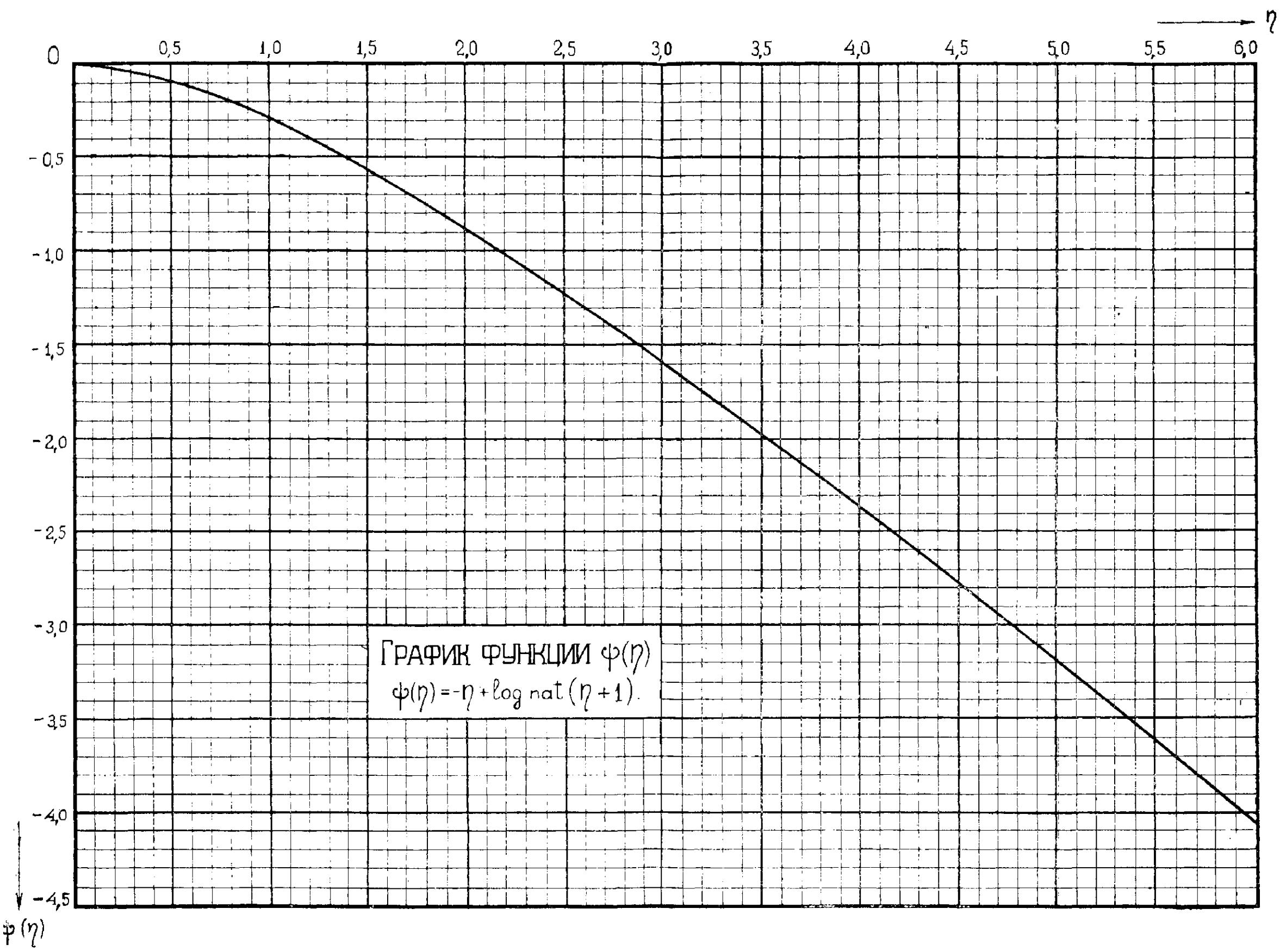
$-\varphi(\eta)$

График № 2.



$-\varphi(\eta)$

График № 2-а.



U. d. S. S.

STAATLICHES  
FORSCHUNGSIINSTITUT  
FÜR BAUWESEN

MITTEILUNG 19

---

Wasserbauabteilung. № 3

AUGUST 1930

---

Prof. N. N. PAVLOVSKY

UNGLEIFÖRMIGE BEWEGUNG  
DES GRUNDWASSERS

STAATLICHER TECHNISCHER VERLAG  
MOCKAU