

А. М. ПИРВЕРДЯН

ФИЗИКА И ГИДРАВЛИКА НЕФТЯНОГО ПЛАСТА



МОСКВА «НЕДРА» 1982

Пирвердян А. М. Физика и гидравлика нефтяного пласта.— М., Недра, 1982, 192 с.

Изложены основы физики нефтяного пласта, включая физические и гидродинамические понятия. Особое внимание уделено реологическим характеристикам пластовых жидкостей и моделей. Рассмотрены основные положения классической теории фильтрации несжимаемых, слабосжимаемых и несмешивающихся несжимаемых жидкостей. Изложена теория фильтрации газированной жидкости без учета и с учетом фазовых превращений. Рассмотрены основные положения фильтрации взаиморастворимых жидкостей. Освещены проблемы перемещения водонефтяного контакта и обводнения скважин.

Для широкого круга инженерно-технических и научных работников, занимающихся проблемами нефтяного пласта. Может быть полезна студентам нефтяных вузов.

Табл. 14, ил. 75, список лит.— назв. 83.

Рецензент д-р техн. наук *В. М. Рыжик* (ИГиРГИ)

АЛЕКСАНДР МИХАЙЛОВИЧ ПИРВЕРДЯН

**ФИЗИКА И ГИДРАВЛИКА
НЕФТЯНОГО ПЛАСТА**

Редактор издательства *О. А. Латышева*. Переплет художника *В. У. Полякова*.
Художественный редактор *В. В. Шутько*. Технический редактор *А. Г. Иванова*.
Корректор *К. И. Саенкова*

ИБ № 4358

Сдано в набор 01.06.81. Подписано в печать 04.12.81. Т-29164. Формат 60×90^{1/16}. Бумага типографская № 1. Литературная гарнитура. Печать высокая. Усл. печ. л. 12,0. Усл. кр.-отт. 12,0. Уч.-изд. л. 11,8. Тираж 600 экз. Заказ 283/8463-6. Цена 1 руб.

Ордена «Знак Почета» издательство «Недра», 103633, Москва, К-12,
Третьяковский проезд, 1/19

Ленинградская типография № 8 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгения Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
190000, г. Ленинград. Пранечный переулок, 6.

ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГОРНЫХ ПОРОД

ПОРОДЫ-КОЛЛЕКТОРЫ

Подземный резервуар-коллектор должен обладать способностью вмещать нефть и газ и отдавать их при разработке.

В основном коллекторами являются осадочные породы, из них большей частью песчаные (пески, песчаники) породы, известняки и доломиты. Глинистые породы — коллекторы для газа, но не для нефти, так как из-за большой вязкости нефть не могла бы даже при больших перепадах давления вытекать из нее. Для газа же, вязкость которого во много раз меньше вязкости нефти, проницаемость глины может оказаться вполне достаточной для разработки.

Основной показатель коллектора — емкость порового пространства. Первичными пустотами называются такие пустоты, которые образовались одновременно с формированием самой породы. Они имеют самый различный характер и происхождение.

ГРАНУЛОМЕТРИЧЕСКИЙ СОСТАВ ПОРОД

При определении гранулометрического состава (а также других параметров нефтегазо-водосодержащих пород) породу необходимо освободить от насыщающих ее жидкостей в аппарате Сокслета (рис. I.1).

Таблица I.1

Набор сит для ситового анализа

Показатель	Величина
Диаметр отв., мм	3,36, 1,68, 0,84, 0,59, 0,42, 0,297, 0,210, 0,190, 0,105, 0,074, 0,053
Сито, меш	6, 12, 20, 30, 40, 50, 70, 100, 140, 200, 270

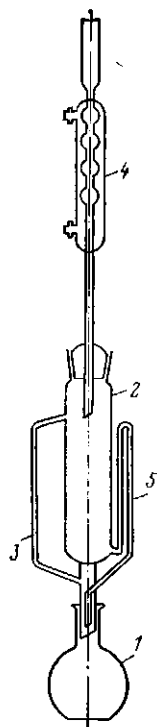


Рис. I.1. Аппарат Сокслета
1 — колбочка; 2 — экстрактор; 3 — трубка; 4 — холодильник; 5 — сифон

По разности масс образца до и после экстракции определяют вес нефти и воды в нем ¹.

Для экстракции образцов большого размера (до 80 мм), необходимых при исследованиях трещиноватости, электрических и акустических свойств пород, а также радиальной газопроницаемости применяются специальные экстракторы, в которых сохранен основной принцип аппарата Сокслета [73].

Данные гранулометрического состава получают при помощи ситового (для частиц размером более 0,05 мм) или седиментационного (для частиц размером меньше 0,05 мм) анализов.

Сущность первого способа заключается в рассеве песка через набор проволочных или шелковых сит (с размерами отверстий от 0,053 до 3,36 мм), причем вверху располагается сито с наибольшими отверстиями, ниже следующее по крупности отверстий сито и т. д. (табл. I.1).

Установлено, что для ситового анализа наилучшие результаты дают механические вибраторы.

Седиментационный анализ основан на использовании известной формулы Стокса, связывающей скорость w равномерного движения сферической частицы диаметра d с силой вязкого сопротивления f :

$$f = 3\pi\mu dw, \quad (I.1)$$

где μ — динамическая вязкость жидкости.

Если приравнять f к весу частицы и вычесть выталкивающую силу, то получим выражение скорости оседания частицы в жидкости

$$w = \frac{d^2 (\rho_{\text{ч}} - \rho_{\text{ж}}) g}{18\mu} \quad (I.2)$$

или

$$d = \left(\frac{18\mu}{(\rho_{\text{ч}} - \rho_{\text{ж}}) g} \right)^{1/2} w^{1/2}, \quad (I.3)$$

где $\rho_{\text{ч}}$ и $\rho_{\text{ж}}$ — соответственно плотности частицы и жидкости.

Формула (I.3) справедлива при свободном движении частиц и малых числах Рейнольдса.

Если h — высота столба жидкости, в которой тщательно перемешаны частицы, то время выпадения всех частиц одного размера определится по формуле

$$t_1 = \frac{h}{w} = \frac{h}{\alpha r^2},$$

где α — коэффициент пропорциональности в формуле Стокса, w — скорость выпадения всех частиц одного размера, r — радиус частиц.

¹ Содержание воды в образце определяется в аппарате Дина—Старка.

Причем, согласно формуле Стокса, скорость пропорциональна квадрату радиуса частицы. Раньше всего выпадут частицы наибольшего размера r_{\max} , при этом время выпадения этой фракции

$$t_0 = \frac{h}{\alpha r_{\max}^2}.$$

Пусть число размеров частиц настолько велико, что можно от дискретной схемы перейти к непрерывной. Обозначим через dQ массу частиц размера r в пробе песка. В момент времени $t \leq t_0$ на дно сосуда выпадет только часть этой фракции, а именно

$$\frac{t dQ}{t_1} = \frac{t dQ}{(h/\alpha r^2)}.$$

Аналогичные зависимости можно получить для всех фракций. Суммируя эти выражения, получим общую массу выпавшей твердой фазы в виде интеграла

$$F(t) = \frac{\alpha t}{h} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} r^2 Q'(r) dr, \quad \left(t \leq t_0 = \frac{h}{\alpha r_{\max}^2} \right), \quad (I.4)$$

где r_{\min} — минимальный размер частиц.

Таким образом, для периода $t \leq t_0$ характерна прямая пропорциональность между величиной осадка и временем.

При $t > t_0$ часть фракций до размера $r = \sqrt{\frac{h}{\alpha t}}$ уже выпадет. Следовательно, для этой массы можно написать выражение в следующем виде:

$$F_1(t) = \int_{\sqrt{\frac{h}{\alpha t}}}^{r_{\max}} Q'(r) dr = Q(r_{\max}) - Q\left(\sqrt{\frac{h}{\alpha t}}\right). \quad (I.5)$$

Для остальной части выпавшей твердой фазы выражение будет иметь тот же вид, что и (I.4), только верхним пределом интегрирования должен быть $\sqrt{\frac{h}{\alpha t}}$:

$$F_2(t) = \frac{\alpha t}{h} \int_{r_{\min}}^{\sqrt{\frac{h}{\alpha t}}} r^2 Q'(r) dr. \quad (I.6)$$

Суммируя (I.5) и (I.6), получим

$$F(t) = Q(r_{\max}) - Q\left(\sqrt{\frac{h}{\alpha t}}\right) + \frac{\alpha t}{h} \int_{r_{\min}}^{\sqrt{\frac{h}{\alpha t}}} r^2 Q'(r) dr, \\ \left(t \geq t_0 = \frac{h}{\alpha r_{\max}^2}\right). \quad (\text{I.7})$$

Уравнение справедливо до тех пор, пока $t \leq \frac{h}{\alpha r_{\max}^2}$.

При $t = \frac{h}{\alpha r_{\max}^2}$ все фракции выпадут, и интеграл в (I.7) будет равен нулю, а поскольку фракций менее r_{\min} нет, то

$$Q\left(\sqrt{\frac{h}{\alpha t_{\min}}}\right) = Q(r_{\min}) = 0$$

и выражение (I.7) примет вид

$$F(t) = Q(r_{\max}) \quad \left(t \geq \frac{h}{\alpha r_{\min}^2}\right). \quad (\text{I.8})$$

Найдем тангенс угла наклона касательной к кривой $F(t)$ в некоторой точке $t \geq t_0$, для чего продифференцируем $F(t)$ по t . Используя правило дифференцирования интеграла по параметру, имеем

$$F'(t) = \frac{\alpha}{h} \int_{r_{\min}}^{\sqrt{\frac{h}{\alpha t}}} r^2 Q'(r) dr. \quad (\text{I.9})$$

Легко показать, что касательная отсекает на оси ординат отрезок, равный

$$Q(r_{\max}) - Q\left(\sqrt{\frac{h}{\alpha t}}\right). \quad (\text{I.10})$$

Но это выражение есть масса фракций, полностью осевших за время t . На этом свойстве основан метод построения интегральной кривой распределения частиц по размерам.

На рис. I.2 показана седиментационная кривая. Проведя в точке t_1 этой кривой касательную, находим отрезок OA_1 , представляющий сумму масс всех фракций размером более $r_1 = \sqrt{\frac{h}{\alpha t_1}}$, выпавших к этому моменту. Сделав несколько таких построений, получим ряд значений $r_1 = \frac{1}{2} d_1$, $r_2 = \frac{1}{2} d_2$, ... и соответствующие им суммы масс фракций.

В нефтепромысловой практике применяются и другие более простые методы и в первую очередь пипеточный (метод Робинсона).

Сущность его заключается в отборе пробы суспензии при помощи пипетки и определении в ней содержания частиц размером менее расчетного.

Существуют и другие методы седиментационного анализа: отмучивание потоком воды, отмучивание сливанием жидкости и др. [10].

После получения описанными способами числовых данных о содержании частиц в породе переходят к составлению соответствующих таблиц. Весь диапазон изменения размеров частиц разбивается на ряд неодинаковых интервалов, причем длины их представляют геометрическую прогрессию. Разумеется, в каждом интервале имеется какое-то число частиц.

Отметим, что не существует строгих методов определения длин интервалов. Решение этой задачи в существенной степени зависит от здравого смысла и интуиции исследователя. При очень дробном делении возможно получение «пустых» промежутков; при больших интервалах могут исчезнуть особенности вида распределения. Каждому интервалу соответствует своя частота значений размеров частиц.

При такой разбивке область, соответствующая мелкозернистым фракциям, будет очень сжата и неудобочитаема. Кроме того, неравенство интервалов усложняет вычисление гранулометрических коэффициентов, характеризующих неоднородность породы. Единственное преимущество шкалы заключается в ее наглядности.

Более целесообразны нелинейные шкалы: шкала, предложенная Крамбейном, или шкала В. П. Батурина.

Согласно Крамбейну вычисляется функция

$$\Phi = -\log_2(d/d_0), \quad (I.11)$$

где d_0 — размер частицы, равный 1 мм, d — размер частицы, мм.

По В. П. Батурину

$$\gamma = -10 \log_{10}(d/d_0). \quad (I.12)$$

При таком разбиении интервалы значений Φ оказываются одинаковыми (табл. I.2).

На рис. I.3 приводятся частотная гистограмма (а) и кумулятивная кривая (б), построенные по данным табл. I.2. Ниже под ось абсцисс Φ нанесены значения d в линейной шкале.

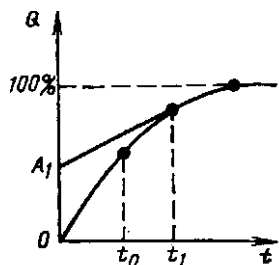


Рис. I.2. Седиментационная кривая

Числовые данные о содержании частиц в породе

Интервал		Середина интервала		Частота, %	Кумулятивная частота, %
d , мкм	Φ	d , мкм	Φ		
0,5—0,25	1—2	0,375	1,5	1	1
0,25—0,125	2—3	0,187	2,5	2	3
0,125—0,0625	3—4	0,094	3,5	6	9
0,0625—0,0312	4—5	0,017	4,5	21	30
0,0312—0,0156	5—6	0,023	5,5	10	70
0,0156—0,0078	6—7	0,012	6,5	25	95
0,0078—0,0039	7—8	0,006	7,5	4	99
0,0039	8	—	—	1	100

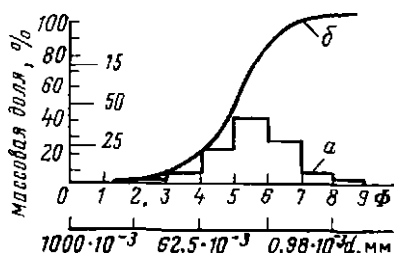


Рис. 1.3. Частотная гистограмма (а) и кумулятивная кривая (б).

Шкалы: 0—100 к а; 35—15 к б

Полученные описанным выше способом функции распределения должны служить основой для составления обобщенной статистической характеристики распределения зерен песка. Все эти характеристики

определяются либо с целью непосредственной генетической интерпретации осадков или для анализа обстановки и условий осадконакопления.

ПОРИСТОСТЬ ГОРНЫХ ПОРОД

Полная (общая) или абсолютная пористость m представляет собой отношение суммарного объема пор $V_{\text{пор}}$ образца породы к видимому его объему V_0 :

$$m = V_{\text{пор}}/V_0. \quad (1.13)$$

В объем порового пространства входят все пустоты и трещины, независимо от того сообщаются или не сообщаются они друг с другом. Однако с гидродинамической точки зрения представляют интерес сообщающиеся между собой поровые объемы $V'_{\text{пор}} < V_{\text{пор}}$. Отношение

$$m' = V'_{\text{пор}}/V_0 \quad (1.14)$$

называется эффективной (открытой) пористостью. По некоторым данным величина m' обычно составляет 0,9—0,95 величины

абсолютной пористости [34]. Однако вряд ли этот вывод справедлив для песков, которые характеризуются практически одинаковыми значениями полной и открытой пористости. Для песчаников же и алевролитов, согласно А. А. Ханину, $m' = 0,94—0,95$, что в общем согласуется с [34].

Анализ фактических данных показывает, что пористость нефтяных пластов (коллекторов) колеблется в широком диапазоне от 0,05 до 0,40, обычно же она равна 0,10—0,20. Пористость не всегда является однозначным показателем, характеризующим промышленное значение коллектора (залежи). И при очень малой пористости (0,01—0,05) коллектор можно отнести к категории промышленных, если в нем имеются трещины, каверны или разломы, которые, однако, не всегда можно обнаружить в образцах породы.

Введем понятие коэффициента просветности. С этой целью рассмотрим параллелепипед малого размера, вырезанный из породы, включающей в себя очень большое число частиц (рис. 1.4). Рассечем плоскостями z , $z+dz$ этот параллелепипед. Отношение суммы площадей просветов ω_1 , ω_2 , ... ко всей площади сечения ab называется коэффициентом просветности:

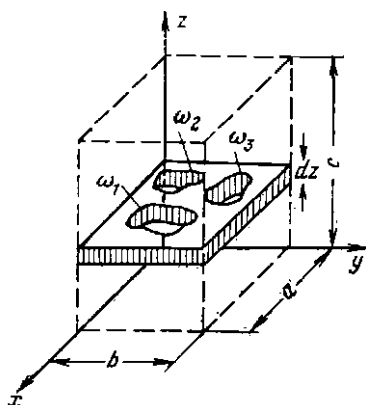


Рис. 1.4. К определению пористости

$$m'' = \frac{\sum \omega_i}{ab}. \quad (I.15)$$

Очевидно, что поскольку толщина слоя есть dz , безразлично, к какой плоскости (нижней, верхней или промежуточной) относится сумма просветов $\sum \omega_i$.

Проведем плоскость, перпендикулярную к оси dy , которая пересечет поры выделенного элементарного слоя dz . Суммируя длины λ_1 , λ_2 , ... просветов вдоль линии пересечения (суммировать можно по любой плоскости элементарного слоя dz) и отнеся эту сумму к длине a параллелепипеда, получим

$$m' = \frac{\sum \lambda_i}{a}. \quad (I.16)$$

Эту величину назовем коэффициентом линейной просветности.

Усредняя величину m' по направлению оси y при $z = \text{const}$, получим

$$\bar{m}' = \int_0^b \frac{m' dy}{b} = \frac{1}{ab} \int_0^b \sum \lambda_i dy = \frac{\sum \omega_i}{ab} = m'', \quad (I.17)$$

т. е. среднее значение линейной просветности равно коэффициенту просветности.

Усреднение m'' по оси z дает величину объемной просветности

$$\bar{m}'' = \int_0^c \frac{m'' dz}{c} = \frac{1}{abc} \int_0^c \sum \omega_i dz = m, \quad (I.18)$$

т. е. среднее значение коэффициента просветности равно объемной пористости. Выведенные соотношения справедливы для всех пористых сред.

Если пористая среда хаотически упорядочена, то m' и m'' одинаковы для всех линий и плоскостей усреднения и равны объемной пористости (при условии, что выделенный объем содержит достаточно большое число твердых частиц). Это положение не относится к пористым средам гетеротропного (анизотропного) характера. Простейший пример такой среды — среда с частым переслаиванием слоев, характеризующихся различной общей пористостью.

ПРОНИЦАЕМОСТЬ ГОРНЫХ ПОРОД

Проницаемость породы — способность ее пропускать через себя жидкость или газ.

Рассмотрим следующий опыт. Через цилиндрическую колонку, заполненную пористой средой и наклоненную под некоторым углом к горизонту, фильтруется снизу вверх вода. Пусть давления на оси трубы при входе и выходе из нее равны соответственно p_1 и p_2 . Согласно закону Дарси, объемный расход воды

$$Q = k_0 F \frac{p_1 - p_2 - \rho g z}{L}, \quad (I.19)$$

где F — площадь поперечного сечения колонки (площадь фильтрации); L — длина колонки; ρ — плотность воды; g — ускорение свободного падения; k_0 — коэффициент пропорциональности; z — превышение выходного сечения над входным (в случае нисходящего потока перед z должен быть поставлен знак плюс).

При этом предполагается, что через среду фильтруется вода при неизменной температуре.

В дальнейшем формула (I.19) была обобщена на случай фильтрации ньютоновской жидкости и приняла вид

$$Q = \frac{k}{\mu} F \frac{p_1 - p_2 - \rho g z}{L}, \quad (I.20)$$

где μ — динамическая вязкость жидкости, k — проницаемость пористой среды, зависящая только от геометрии пористой среды.

В написанном выше виде (I.20) закон фильтрации относится к линейному потоку.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УДЕЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ГОРНЫХ ПОРОД

Наиболее просто удельная поверхность горных пород определяется по гранулометрическому составу и пористости.

К динамическим методам определения удельной поверхности относится метод, основанный на использовании данных по течению воздуха через пористую среду.

При заданном значении расхода воздуха находится перепад давления, и затем по формуле Дарси вычисляется проницаемость¹. Далее по формуле Кармана или ей аналогичной рассчитывается величина удельной поверхности (табл. I.3). Недостатком метода является необходимость делать то или иное предположение о величине извилистости ξ поровых каналов. Однако этот метод пригоден для крупнозернистых структур (грубодисперсные структуры), поперечный линейный размер пор которых во много раз больше свободного пробега молекул воздуха. Поэтому скольжением газа по стенкам пор можно пренебречь.

Т а б л и ц а I.3

Удельная поверхность, определенная различными способами

Радиус шариков, мкм	Удельная поверхность шариков, м ² /кг		
	по методам Козени, Кармана, Товарова	по методике Дерягина	по результатам дисперсионного анализа
10—15	161	269	259
15—20	82	189	178
20—25	58	116	118
40—60	27	48	51

ТРЕЩИНОВАТЫЕ ГОРНЫЕ ПОРОДЫ

Многие коллекторы характеризуются наличием большого числа трещин, являющихся проводниками нефти и иногда емкостями (вместилищами) для нее. Проницаемость блоков настолько мала, что они сами по себе без наличия трещин не могут отдавать нефть. Отдача ее из блоков происходит, как правило, за счет перетоков нефти из них в трещины, по которым

¹ Незначительность величины перепада давления в опытах даст основание пренебречь сжимаемостью воздуха и рассчитывать поток по формуле Дарси для несжимаемой жидкости.

из-за весьма высокой проводимости трещин происходит перемещение нефти к скважинам. Условие такого процесса: существование системы сильно разветвленных, сложно ориентированных в пространстве трещин, обеспечивающих значительную площадь контакта (дренажа) между блоками и проводимыми каналами.

Чтобы иметь представление о проводимости одиночной трещины, приведем следующий пример. Если представить трещину в виде узкой щели, образованной двумя параллельными гладкими плоскостями, то, согласно формуле Буссинеска [42], расход жидкости через нее будет

$$q = \frac{\delta^2}{12\mu} (b\delta) \frac{\Delta p}{L}, \quad (I.21)$$

где $b\delta$ — площадь сечения трещины, равная произведению ширины ее b на раскрытость трещины.

Проведя аналогию между этой формулой и законом Дарси, величину $\delta^2/12$ можно рассматривать как проницаемость трещины:

$$k_{\text{тр}} = \frac{\delta^2}{12}. \quad (I.22)$$

Если n общее число трещин, соответствующее толщине пласта h , то суммарный дебит через все трещины будет

$$Q = \frac{\delta^2}{12\mu} (b\delta) \frac{\Delta p}{L} n. \quad (I.23)$$

Введем понятие пористости трещин

$$m = n\delta/h. \quad (I.24)$$

Подставляя значение n из (I.24) в (I.23), получим

$$Q = \frac{\delta^2 m}{12\mu} (bh) \frac{\Delta p}{L} = \frac{\delta^2 m}{12\mu} F \frac{\Delta p}{L} = \frac{k_{\text{тр}}}{\mu} mF \frac{\Delta p}{L}. \quad (I.25)$$

Сравнивая с формулой Дарси, получим

$$k = k_{\text{тр}} m = \frac{\delta^3 n}{12h}, \quad (I.26)$$

где k — проницаемость породы с трещинами.

Обычно величина раскрытости трещин (табл. I.4) имеет порядок 10—100 мкм [67].

Пусть $h = 10$ м, $n = 10$, тогда для указанного диапазона значений раскрытости (10—100 мкм) согласно (I.26) имеем $k \approx 0,8(10^{-4} \div 10^{-1})$ мкм².

Так как 1 мкм² = 1 Д (дарси), получим окончательно: $k \approx 0,8(10^{-4} \div 10^{-1})$ Д.

Диапазон изменения проницаемости весьма широк и зависит от густоты трещин и особенно от раскрытости их.

Раскрытость трещин различных пород

Породы	Раскрытость трещин, мкм			
	Башкирское Приуралье (нижняя пермь)	Южно-Минусинская впадина (средний девон)	Грозненский район (верхний мел)	Иркутский район (нижний кембрий)
Известняк органогенный	14	18	21--23	—
Известняк тоикозерни- стый доломитовый	—	—	22	—
Известняк органогенный доломитовый	15--18	—	—	—
Доломит разнотерристый	—	—	—	14--18
Доломит неравномерно- зернистый	—	—	—	16--20
Мергели	17	16	—	14
Аргиллиты и сланцы	—	15	—	12--21
Песчано-алевролитовые породы	—	15	—	13--21
Ангидрито-доломитовые породы	—	—	—	17
Соли	—	—	—	25--80

Приведем окончательную формулу Г. М. Ломизе для определения расхода в шероховатой щели при ламинарном режиме:

$$q = \frac{\delta^2}{12\mu [1 + 6(e/\delta)^{1,5}]} (\delta b) \frac{\Delta p}{L}, \quad (1.27)$$

где e — абсолютная шероховатость щели.

Переход ламинарного режима в турбулентный определяется критическим значением числа Рейнольдса:

$$\text{Re}_{\text{кр}} = \frac{\rho \delta v}{\mu} = \frac{\rho \delta q}{\mu \delta b} = \frac{\rho q}{\mu b}, \quad (1.28)$$

которое зависит от относительной шероховатости $\epsilon = e/\delta$.

На рис. 1.5 приводится построенная нами по экспериментальным данным Г. М. Ломизе [67] зависимость между числом $\text{Re}_{\text{кр}}$ и относительной шероховатостью.

Для турбулентного режима формула Г. М. Ломизе имеет вид

$$q = \sqrt{\frac{\delta \Delta p}{\rho L}} (\delta b) \left(2,6 + 5,11 \lg \frac{\delta}{2e} \right). \quad (1.29)$$

Формула соответствует режиму с полным проявлением шероховатости, т. е. течению, описываемому квадратичным законом сопротивления [67]. Поэтому кривая на рис. 1.5 не является границей между ламинарным и квадратичным режимами. Ее следует рассматривать как некоторый практический

предел применимости линейного, ламинарного режима, но отнюдь не как предел, начиная с которого, можно пользоваться формулой (I.29).

Данные непосредственных измерений величины шероховатости в шлифах показывают, что относительная шероховатость ε колеблется в пределах 0,003 и 0,05 [67]. Этот очень важный результат дает возможность оценить влияние шероховатости на величину фильтрационных сопротивлений. Подстановка даже верхнего предела $\varepsilon = 0,05$ в формулу (I.27) ламинарного режима дает

$$q = \frac{\delta^2}{12\mu(1 + 6\varepsilon^{1,5})} (\delta b) \frac{\Delta p}{L} \approx \frac{\delta^2}{12,7\mu} (\delta b) \frac{\Delta p}{L},$$

т. е. эта формула практически не отличается от формулы (I.21) для гладкой щели. Таким образом, при соответствующих гидродинамических расчетах шероховатостью стенок трещин можно пренебрегать.

Без знания параметров трещиноватости невозможно изучение фильтрационных потоков в трещиноватых породах. К этим параметрам относятся: раскрытие трещин, частота (т. е. степень растресканности породы) и ориентированность трещин в пространстве.

Кроме раскрытия трещин

еще показатель, характеризующий растресканность породы

$$P = \Delta l / \Delta S, \quad (I.30)$$

где Δl — сумма следов трещин, выходящих на элементарную площадку образца ΔV .

А также следует учитывать и густоту трещин

$$\Gamma = \Delta n / \Delta L. \quad (I.31)$$

Сущность этого параметра ясна из рис. I.6.

МЕЖФАЗНОЕ НАТЯЖЕНИЕ И КАПИЛЛЯРНОЕ ДАВЛЕНИЕ

Допустим, что на поверхности твердого тела 3 находится капля жидкости 1, покрытая не смешивающейся с ней жидкостью 2 меньшей плотности (рис. I.7).

Мерой смачивания поверхности является контактный угол Θ , отсчитываемый обычно в сторону жидкости с большей плот-

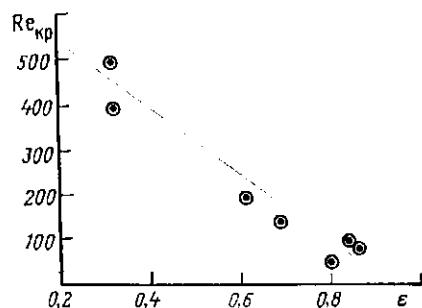


Рис. I.5. Зависимость критического числа Рейнольдса от относительной шероховатости

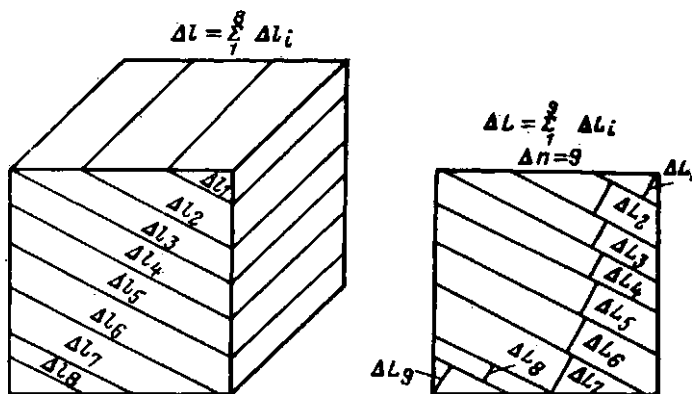


Рис. 1.6. К определению параметров трещиноватой породы

ностью. Величина этого угла определяется по формуле (закон Юнга)

$$\cos \theta = \frac{\sigma_{23} - \sigma_{13}}{\sigma_{12}}. \quad (1.32)$$

Формула (1.32) выводится из выражения баланса энергии, изменяющей поверхность капли, и соответствует минимуму ее в состоянии равновесия. σ_{23} и σ_{13} , входящие в уравнение (1.32), обычно известны и определяются косвенным путем через величины работ когезии (слипания) W_c и адгезии (прилипания) W_a . W_c — работа, необходимая для разрыва однородной объемной фазы, отнесенной к единице площади разрыва. При разрыве жидкой фазы 1 затрачивается работа на преодоление сил сцепления между молекулами этой фазы. Эта работа равна произведению величин двух образовавшихся поверхностей на поверхностное натяжение σ_{12} (имеется в виду, что после разрыва поверхности контактируют с фазой 2). Работа, отнесенная к единице площади, $W_c = 2\sigma_{12}$. W_a — работа разрыва межфазного поверхностного слоя — определяется исходя из следующих простых рассуждений. До разрыва поверхностная энергия, отнесенная к единице площади, равна σ_{13} . После разрыва образуются две поверхности: жидкость 1 — жидкость 2 и жидкость 2 — поверхность 3.

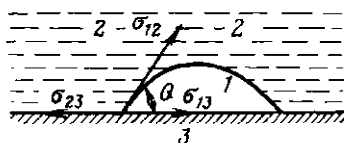


Рис. 1.7. К расчету равновесия капли

Работа, очевидно, равна сумме работ, затраченных на образование этих двух поверхностей, за вычетом исчезнувшей свободной энергии исходной межфазной границы жидкая фаза 1 — поверхность 3:

$$W_a = \sigma_{12} + \sigma_{23} - \sigma_{13}.$$

Из приведенных уравнений имеем:

$$W_a = \sigma_{12}(1 + \cos \theta), \quad W_a - W_c = \sigma_{12}(1 + \cos \theta) - 2\sigma_{12},$$

$$\cos \theta = 2 \frac{W_a}{W_c} - 1.$$

По экспериментально измеренным значениям σ_{12} и контактного угла (θ определяется проецированием увеличенного изображения капли на экран) вычисляются W_a и W_c .

Силы адгезии, характеризующие межфазное взаимодействие, стремятся растянуть каплю, а силы когезии — стянуть ее до полусферы.

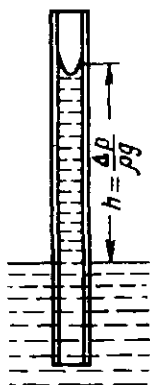
При $\theta = 180^\circ$ $W_a = 0$, что противоречит физическому смыслу, так как не существует фаз, не взаимодействующих друг с другом. Это подтверждается измерениями контактных углов, которые не превышают 150° .

При $\theta = 0$, $W_a = 2\sigma_{12}$, $W_a = W_c$ силы адгезии и когезии равны между собой. Величина $W_a - W_c \geq 0$ является фактором, характеризующим растекание. При $W_a > W_c$ растекание усиливается. Разность давлений внутри и снаружи жидкости

$$\Delta p = \sigma(1/r_1 + 1/r_2), \quad (I.33)$$

где r_1 и r_2 — радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости. При этом предполагается, что участок поверхности бесконечно мал.

Рис. I.8. К расчету высоты подъема жидкости в трубке



Согласно теореме дифференциальной геометрии, средняя кривизна $1/r_1 + 1/r_2$ не зависит от выбора нормальных сечений. При сферической поверхности $r_1 = r_2 = r$, и формула (I.33) примет вид

$$\Delta p = 2\sigma/r. \quad (I.34)$$

Опустим цилиндрическую капиллярную трубку радиуса r в смачивающую жидкость, которая поднимется на некоторую высоту (рис. I.8), причем поверхность жидкости с высокой степенью приближения можно считать сферической с радиусом r_0 в общем случае (т. е. при краевом угле θ , отличным от нуля), равным

$$r_0 = r/\cos \theta. \quad (I.35)$$

Подставляя (I.35) в (I.34), получим окончательно величину разности давлений по обе стороны границы:

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r} \cos \theta = p_k, \quad (I.36)$$

где p_k называются капиллярным давлением, а r — радиусом поры модели пласта.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОР ПО РАЗМЕРАМ И КАПИЛЛЯРНОГО ДАВЛЕНИЯ

Определение распределения размеров пор проводится методом полупроницаемых (малопроницаемых) перегородок или методом вдавливания ртути в образец (рис. 1.9).

Пусть вначале в камере поддерживается давление на некотором минимальном уровне p_1 . Тогда, согласно уравнению (1.36)

$$p_1 = \frac{2\sigma}{r_1} \cos \theta.$$

По идее метода в ловушку поступит только та часть жидкости V_1 , которая находится в порах размера r_1 . Подняв давле-

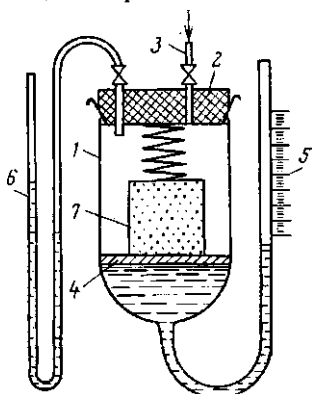


Рис. 1.9. Прибор для изучения распределения пор по размерам методом полупроницаемых перегородок

1 — камера; 2 — крышка; 3 — трубка; 4 — полупроницаемая перегородка; 5 — ловушка; 6 — манометр

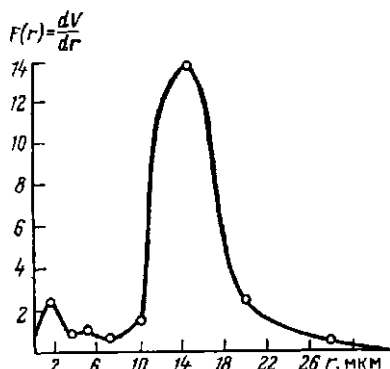


Рис. 1.10. Дифференциальная кривая распределения пор по их размерам (по Ф. Н. Котяхову)

Проницаемость образца $2,57 \text{ мкм}^2$, пористость $23,5 \%$

ние до следующего уровня $p_2(r_2) > p_1(r_1)$, обеспечим вытеснение жидкости объема V_2 из пор размером $r_2 < r_1$. Продолжая этот процесс, получим ряд значений $V_1(r_1)$, $V_2(r_2)$, ..., $V_n(r_n)$, на основе которых строится дифференциальная кривая распределения пор (рис. 1.10).

По известным значениям $V_1(r_1)$, $V_2(r_2)$, ..., $V_n(r_n)$ и отвечающим им величинам $p_{K1}(r_1)$, $p_{K2}(r_2)$, ..., $p_{Kn}(r_n)$ (которые и являются капиллярными давлениями для каждого размера пор) строят зависимость между капиллярным давлением и водонасыщенностью:

$$s = \frac{V_{\text{обп}} - \sum V_i(r_i)}{V_{\text{обп}}},$$

где $V_{\text{обп}}$ — объем пористого пространства образца, первоначально заполненного водой:

При достаточной однородности породы уже небольшое повышение давления p_k должно повлечь за собой значительное заполнение образца несмачивающей фазой V (рис. I.11, кривая 1).

При большой неоднородности образца, т. е. при наличии капиллярных пор, сильно отличающихся друг от друга по своим размерам, кривая капиллярного давления должна круто подниматься. С переходом от кривой 1 к 2 и затем к 3 неоднородность будет возрастать.

Характерной особенностью кривых (см. рис. I.11) является то, что при насыщенности $s = 1$ величина ординаты $p_k(1) \neq 0$. Давление в точке $s = 1$, т. е. при полном насыщении пористой среды смачивающей фазой, называется давлением вытеснения¹.

При этом давлении несмачивающая фаза начинает вытеснять смачивающую. Если же пористая среда частично насыщена также и несмачивающей фазой, то давление, необходимое для ее внедрения, будет ниже давления вытеснения [24, 60].

Выведем общую закономерность изменения капиллярного давления, ограничиваясь одним каким-либо типом коллектора (выводы мы не будем распространять на другие породы). Из приведенного анализа следует, что функция $p_k(s)$ зависит

от ряда размеров пор r и произведения $\sigma \cos \theta$ (пористость не учитывается). Заменим весь ряд значений r_i некоторой средней (эффeктивной) величиной \bar{r} . Таким образом, имеем

$$p_k = f(\sigma \cos \theta, \bar{r}, s). \quad (I.37)$$

Из элементарного анализа размерностей получаем первый вывод:

$$\frac{p_k \bar{r}}{\sigma \cos \theta} = f(s). \quad (I.38)$$

Воспользуемся далее уравнениями Козени, которые отличаются друг от друга величинами коэффициентов (0,5 и 0,4), а также степенью влияния на проницаемость коэффициента извилистости ξ . Учитывая неопределенность величины ξ и бли-

¹ Постоянство величины давления вытеснения для сред с различной неоднородностью, принятое в [60], является допущением, нуждающимся в проверке.

зость между собой множителей, можем объединить обе формулы в одну:

$$k \sim \frac{m^3}{s^2}. \quad (I.39)$$

Из выражений (I.38) и (I.39) для двух моделей пористой среды имеем

$$s \sim \frac{m}{\bar{r}}. \quad (I.40)$$

Как и в предыдущем уравнении, в (I.40) отброшены множители, а гидравлический радиус цилиндрической поры R_h заменен радиусом поры (с точности до множителя).

Подставляя значение s из (I.40) в (I.39), получим

$$k \sim m \bar{r}^2, \quad (I.41)$$

т. е. величина \bar{r} пропорциональна $\sqrt{k/m}$.

Учитывая это, получим

$$\frac{p_k}{\sigma \cos \theta} \sqrt{\frac{k}{m}} = J(s), \quad (I.42)$$

где $J(s)$ — функция Леверетта (рис. I.12).

Увяжем теперь величину капиллярного давления p_k с давлениями p_{nc} и p_c в несмачивающей и смачивающей жидкостях.

Согласно современным представлениям, $p_{nc} \neq p_c$ и разность

$$p_{nc} - p_c = p_k. \quad (I.43)$$

Заменяя p_k его значением из (I.42), получим

$$p_{nc} - p_c = \frac{\sigma \cos \theta}{\sqrt{k/m}} J(s), \quad (I.44)$$

т. е. разность давлений в обеих фазах является функцией насыщенности.

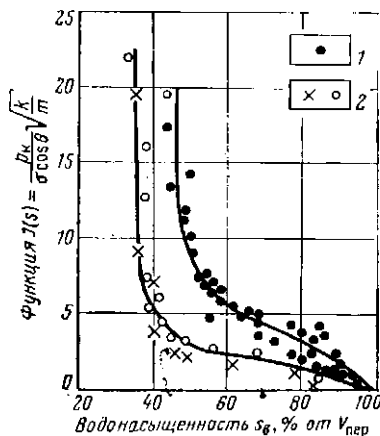


Рис. I.12. Зависимость функции Леверетта $J(s)$ от водонасыщенности пород пластов VIII и IX нижнего мела ме сторожения Зимняя Ставка (получены Н. С. Гудок [12]).

1 — алевролиты; 2 — песчанки (пористость пород $m=20 \div 30\%$, проницаемость $k=0,05-0,3$ мкм²).

ГЛАВА II

ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГАЗА, НЕФТИ И ВОДЫ

В нефтяном пласте содержатся углеводородные жидкая и газообразная фазы, а также пластовая вода.

Нефтегазовая система характеризуется фазовой диаграммой (pT), которая в известной мере определяет тип залежи.

Определенную роль в формировании залежи играют геологические факторы (углы наклона пласта, наличие или отсутствие глинистых прослоев и др.), обуславливающие интенсивность гравитационного разделения пластовых жидкостей и газов.

Значение имеет также и система разработки, определяющая изменение состояния пластовой смеси.

Проблема достаточно сложна и в строгой постановке здесь не будет рассматриваться.

В практике проектирования находят применение чисто инженерные, эмпирические методы расчета параметров пластовых флюидов в условиях их взаимного контакта. На них мы остановимся подробно.

ПЛОТНОСТЬ ГАЗОВ

Относительная плотность газа d представляет собой отношение массы газа в определенном объеме при данных давлении и температуре к массе сухого воздуха в том же объеме при нормальных условиях.

Обозначим через M_1, M_2, \dots, M_n относительные молекулярные массы компонентов газа, а через y_1, y_2, \dots, y_n — их моляр-

Физические свойства компо

Параметры газа	Обозначения	CH_4	C_2H_6	C_3H_8	C_4H_{10}	$n-C_5H_{12}$
Молекулярная масса	M	16,04	30,05	44,06	58,08	58,08
Плотность по воздуху	ρ	0,554	1,038	1,523	2,007	2,007
Плотность при 101 кПа	ρ'	0,717	1,344	1,967	2,598	2,598
Объем 1 кг газа	$\frac{22,4}{M}$	1,4	0,74	0,51	0,39	0,39
Масса 1 м ³ газа	$\frac{M}{22,4}$	0,714	1,35	1,97	2,85	2,85

ные доли. Тогда средняя относительная молекулярная масса определится по формуле

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^n y_i M_i.$$

Относительную плотность газа найдем по формуле

$$d = \frac{\bar{M}}{M_{\text{возд}}} = \frac{\bar{M}}{28,97}.$$

Величину \bar{M} можно определить по плотности газа ρ_0 по формуле

$$\bar{M} = 22,4\rho_0.$$

где 22,4 — грамм-молекулярный или молярный объем газа.

Данные о физических свойствах компонентов, входящих в состав природного газа, приводятся в таблице II.1.

ВЯЗКОСТЬ ГАЗОВ

Вязкость газов, так же как вязкость нефти, — одно из свойств, определяющих фильтрацию в пористой среде.

Дадим вывод формулы для определения динамической вязкости газа.

Согласно закону Ньютона [42], касательное напряжение трения между слоями газа

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}, \quad (\text{II.1})$$

где μ — динамическая вязкость газа, u — скорость газа.

Изменение количества ΔK движения в единицу времени Δt равно силе, действующей между слоями, т. е.

$$\Delta K / \Delta t = \tau \omega, \quad (\text{II.2})$$

где ω — поверхность раздела слоев.

Т а б л и ц а II.1

ентов природного газа

$i\text{-C}_4\text{H}_{12}$	$n\text{-C}_6\text{H}_{12}$	CO_2	CO	H_2S	N_2	Воздух
72,15	72,15	44,01	28,01	34,08	28,02	28,97
2,491	2,491	1,529	0,968	1,191	0,967	1,000
3,046	3,046	1,977	1,250	1,539	1,250	1,293
0,31	0,31	0,51	0,80	0,66	0,80	0,78
3,22	3,22	1,96	1,25	1,52	1,25	1,29

Из (II.1) и (II.2) имеем:

$$\mu = \frac{\Delta K}{\Delta t \omega \frac{du}{dy}}. \quad (\text{II.3})$$

Пусть λ — длина, на которой молекулы полностью обмениваются количеством движения. Ввиду малости величины λ можно принять скорости молекул над и под рассматриваемым слоем равными соответственно (рис. II.1)

$$u + \frac{du}{dy} \lambda, \quad u - \frac{du}{dy} \lambda.$$

Разность этих величин, умноженная на массу m молекулы, есть изменение количества движения

$$m\left(u + \frac{du}{dy} \lambda\right) - m\left(u - \frac{du}{dy} \lambda\right) = 2m \frac{du}{dy} \lambda. \quad (\text{II.4})$$

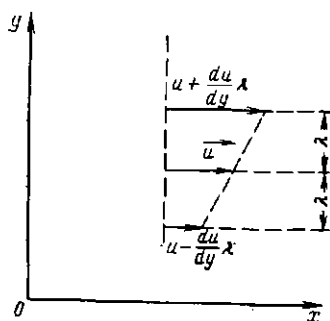


Рис. II.1. К определению динамической вязкости

Молекулы хаотически движутся во всех направлениях.

Если n — число молекул в единице объема, то число молекул, перемещающихся от слоя к слою, будет равно

$$\frac{n}{6} \omega \Delta t \bar{v},$$

где цифра $1/6$ показывает, что из общего числа молекул только одна шестая часть проходит через одну из шести граней параллелепипеда; \bar{v} — средняя скорость движения молекул в одном направлении (в данном случае в направлении, перпендикулярном к слоям газа).

Итак, полное изменение количества движения будет

$$\Delta K = \left(2m \frac{du}{dy} \lambda\right) \left(\frac{n}{6} \omega \Delta t \bar{v}\right), \quad (\text{II.5})$$

а динамическая вязкость, согласно (II.1), равна

$$\mu = \frac{nm\lambda\bar{v}}{3} = \frac{\rho\lambda\bar{v}}{3}, \quad (\text{II.6})$$

где $\rho = nm$ — плотность газа.

Длина λ , на которой молекулы полностью обмениваются количеством движения, оказывается близкой к длине свободного пробега молекулы, т. е. расстоянию между двумя соседними столкновениями молекул. Поэтому не будем делать различие между ними.

Перейдем к определению средней длины λ свободного пробега. Будем считать, что все молекулы одинаковы и радиусы сферы их молекулярного воздействия равны R . Вначале пред-

положим, что все молекулы, кроме одной, неподвижны. При своем движении молекула столкнется с другими, центры которых попадут в сферу молекулярного ее воздействия.

Пусть молекула за время t прошла путь l , который в общем случае является ломаным; но мы условно его выстраиваем, представив таким образом область столкновения движущейся молекулы с остальными в виде цилиндра, радиус которого равен диаметру d молекулы:

$$\pi R^2 l = \pi d^2 l. \quad (\text{II.7})$$

Если число молекул в единице объема равно n , то общее число столкновений будет

$$\pi d^2 l n = \pi d^2 n \bar{u}_0 t, \quad (\text{II.8})$$

где \bar{u}_0 — средняя скорость молекулы.

Разделив это выражение на t , получим число столкновений в единицу времени:

$$\bar{v} = \pi d^2 n \bar{u}_0. \quad (\text{II.9})$$

Среднюю длину свободного пробега $\bar{\lambda}$ определим как отношение \bar{v} к числу столкновений \bar{v} :

$$\bar{\lambda} = \bar{v} / \bar{v}. \quad (\text{II.10})$$

Если теперь учесть, что все молекулы движутся, то среднее значение скорости молекул относительно друг друга будет $\sqrt{2} \bar{v}$.

Вывод основан на анализе распределения молекул по скоростям, полученном Максвеллом.

Учитывая этот вывод, приведем окончательное выражение для величины $\bar{\lambda}$:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi} \cdot \frac{1}{d^2 n}. \quad (\text{II.11})$$

Подставляя значение $\bar{\lambda}$ из (II.11) в формулу (II.6) для вязкости, получим:

$$\mu = \frac{1}{3 \sqrt{2} \pi} \cdot \frac{\rho \bar{v}}{d^2 n} = \frac{m \bar{v}}{3 \sqrt{2} \pi d^2}. \quad (\text{II.12})$$

Согласно кинетической теории, \bar{v} пропорциональна \sqrt{T} , а эффективное сечение молекулы d убывает с возрастанием T согласно формуле Сезерленда:

$$d^2 = d_0^2 \sqrt{1 + \frac{C}{T}}, \quad (\text{II.13})$$

где C — постоянная Сезерленда (своя для каждого газа, меняющаяся в пределах от 50 до 300 K).

Таким образом, с увеличением температуры динамическая вязкость газа возрастает (табл. II.2) по закону

$$\mu = \text{const} \frac{\sqrt{T}}{nd_0^2 \sqrt{1 + \frac{C}{T}}} \sim \frac{T}{\sqrt{T+C}}. \quad (\text{II.14})$$

Однако при общих давлениях это условие нарушается.

Таблица II.2

Вязкость μ метана при различных давлениях и температурах,
мкПа·с

Давле- ние, МПа	Температура, t °C								
	-15	0	25	50	75	100	150	200	250
0,1	9,8	10,3	11,1	11,8	12,6	13,3	14,7	16,0	17,2
1	9,9	10,4	11,2	11,9	12,7	13,4	14,8	16,1	17,3
2	10,1	10,6	11,4	12,1	12,8	13,5	14,9	16,2	17,4
4	10,7	11,2	11,8	12,5	13,1	13,8	15,1	16,3	17,5
6	11,5	11,8	12,4	12,9	13,5	14,2	15,3	16,5	17,7
8	12,5	12,7	13,1	13,5	13,9	14,5	15,6	16,8	17,9
10	13,9	13,8	14,0	14,2	14,5	15,0	15,8	17,0	18,1
15	18,4	17,4	16,5	16,1	16,0	16,3	16,8	17,8	18,7
20	22,6	21,0	19,3	18,3	17,9	17,9	18,1	18,7	19,5
25	26,2	24,2	21,9	20,6	20,0	19,6	19,4	19,8	20,3
30	29,4	27,2	24,6	23,0	22,0	21,4	20,9	20,8	21,2
35	32,3	29,3	27,1	25,3	24,0	23,2	22,3	21,8	22,0
40	34,9	32,3	29,4	27,5	25,9	24,9	23,7	22,9	23,0
50	39,6	36,9	33,6	31,5	29,6	28,2	26,4	25,0	24,7
60	43,8	41,0	37,4	34,8	32,8	31,2	28,9	27,1	26,5
70	47,8	44,7	40,9	38,0	35,5	34,0	31,3	29,1	28,2
80	51,6	48,2	44,1	41,0	38,6	36,6	33,7	31,1	30,0

РАСТВОРИМОСТЬ ГАЗОВ В НЕФТИ

Растворенный в нефти газ изменяет свойства нефти.

Изучение процессов растворения и выделения газа из нефти обычно проводится экспериментальным путем, так как использование для этой цели термодинамических уравнений связано с очень большими трудностями.

Зависимость между количеством растворенного газа и давлением носит линейный характер лишь при небольших величинах давления и температуры, что было установлено экспериментами Генри:

$$V_r = spV_{ж},$$

где V_r — объем растворенного газа при нормальных условиях; $V_{ж}$ — объем нефти в тех же условиях; s — коэффициент растворимости газа.

В общем случае нелинейная зависимость между V_g и p объясняется характером дегазирования, отклонением свойств реальных газов от свойств идеального газа, родом жидкости и газа, неодинаковой растворимостью различных компонентов нефтяного газа, увеличением объема нефти в результате растворов в ней газа, характером процесса дегазирования и др.

Различают два вида дегазирования: контактное и дифференциальное.

При контактном дегазировании весь выделяющийся газ находится в контакте с нефтью, а при дифференциальном дегазировании он непрерывно отводится из системы.

При дифференциальном дегазировании количество газа, остающегося в растворе, больше, чем при контактном, что объясняется преимущественным переходом в паровую фазу метана в начале процесса дегазации и ростом вследствие этого содержания тяжелых углеводородов в составе газов, оставшихся в системе. Эти компоненты, как известно, имеют повышенную растворимость по сравнению с метаном. Указанным объясняется расхождение в результатах определения давления насыщения различными исследователями.

В условиях фильтрации газированной нефтью имеет место промежуточное дегазирование. В начальной стадии разработки, когда содержание выделившегося газа невелико и он неподвижен, все компоненты его находятся в контакте с нефтью, и процесс дегазирования преимущественно контактный. С ростом содержания свободного газа он приобретает подвижность, вследствие чего создаются условия для удаления из пласта легких углеводородов — процесс приближается к дифференциальному дегазированию.

Остановимся подробнее на вопросе о влиянии температуры на растворимость. Пусть имеется равновесная система «насыщенный раствор (нефть) — растворяемое вещество (газ)». В результате нагревания равновесие нарушится, и для восстановления его в системе должны возникнуть процессы, стремящиеся уменьшить это нагревание (принцип Ле Шателье—Брауна). Характер процессов зависит от того, сопровождается ли реакция поглощением или выделением теплоты. Если реакция происходит при постоянном объеме, то величина работы равна нулю и, согласно первому закону термодинамики [см. уравнение (II.1)], количество теплоты

$$Q = U_2 - U_1.$$

Величина $W = -Q = U_1 - U_2$ называется тепловым эффектом.

При $W > 0$ процесс, очевидно, сопровождается поглощением теплоты ($U_1 > U_2$), при $W < 0$ ($U_1 < U_2$), наоборот, выделением его. В подавляющем большинстве случаев растворения газа тепловой эффект положителен, так как слабо взаимодей-

ствующие молекулы, переходя в раствор, подвергаются сильному притяжению со стороны молекул нефти. Отсюда следует, в соответствии с принципом Ле Шателье—Брауна, что часть растворенного вещества (газа) перейдет из раствора (нефти) в свободное состояние, тем самым уменьшив растворимость газа с ростом температуры. Это подтверждается экспериментальными исследованиями [5, 10].

Коэффициент растворимости растет с увеличением молекулярной массы газа и зависит от природы газа и нефти. Для азота этот коэффициент весьма мал.

Растворимость газов растет с повышением содержания в нефтях парафиновых углеводородов и уменьшается с увеличением содержания в них ароматических углеводородов. Вид изотерм растворимости зависит от природы газа.

Малорастворимые газы (азот, метан) характеризуются практически равномерным подъемом их изотерм, которые удовлетворительно аппроксимируются прямыми линиями, т. е. закон Генри для них применим на достаточно широком диапазоне изменения давления.

Г. С. Стенановой и Л. Н. Воронковой [70] на основе корреляционного и регрессионного анализов было получено уравнение регрессии, устанавливающее связь между средним значением коэффициента растворимости газа в нефти \bar{s} и основными факторами:

$$\bar{s} = 12,63 - 5,06N_2 + 0,571c_{2+}/c_1 + \\ + 2,868 \frac{n}{a+H} - 0,382r - 0,029T,$$

где c_{2+}/c_1 — отношение объемных содержаний в газе этана и вышекипящих углеводородов к метану; $n/(a+H)$ — отношение метановых углеводородов (n) к сумме нефтяных (H) и ароматических (a) во фракции нефти, выкипающей до 300 °C; r — суммарное содержание в нефти смол и асфальтенов в весовых процентах.

Величина \bar{s} получена как отношение газового фактора нефти в м³/т к давлению насыщения в МПа.

При получении зависимости использовались данные по 69 месторождениям различных районов Советского Союза.

Диапазон изменения факторов:

N_2 от 1 до 17 %; метана от 12 до 69 %; отношение c_{2+}/c_1 от 0,1 до 4,3 и c_{2+}/c_3 от 0,7 до 2,0; $n/(a+H)$ изменялось в пределах от 1,2 до 2,4, а содержание смол и асфальтенов — от 1 до 17 %; плотность дегазированной нефти изменялась от 0,8 до 0,865; выход фракций, выкипающих до 300 °C — от 42 до 67 %; содержание парафинов — от 3 до 30 %; температура — от 20 до 130 °C.

ДАВЛЕНИЕ НАСЫЩЕНИЯ НЕФТИ ГАЗОМ

Под давлением насыщения пластовой нефти p_n подразумевается давление, при котором газ выделяется из нефти.

Давление насыщения зависит от большого числа факторов. Изучение его встречает большие трудности теоретического и экспериментального характера. Один из распространенных методов исследования — метод, основанный на обработке экспериментов по определению p_n в зависимости от сравнительно небольшого числа факторов. В схеме Стендинга таких факторов четыре: пластовый газовый фактор G ; плотность газа в долях от плотности воздуха ρ_g ; плотность товарной нефти $^1 \rho_n$; температура T .

Формула, предложенная Стендингом, после несложных преобразований имеет вид

$$p_n = 8,725 \left(\frac{G}{\rho_g} \right)^{0,83} 10^{0,0016387 - 1762,5/p_n}. \quad (\text{II.15})$$

Выражение рассчитывается для нефти, полностью насыщенной газом, которого в свободном состоянии нет.

Формула получена путем обработки большого числа экспериментов, соответствующих следующему диапазону изменения параметров: p_n от 1 до 50 МПа, G от 4 до 250 м³/м³, ρ_g от 0,6 до 0,95, ρ_n от 720 до 960 кг/м³.

Отметим, что в газах не содержались азот и сероводород, в нескольких образцах присутствовало небольшое количество углекислоты (до 1 мол. %).

Аналогичные исследования выполнялись Катцем, Борденом и Рзаза, Пенеску, Кодряну и др. Не во всех случаях проводилось сравнение результатов, полученных различными авторами.

Однако обнаружено значительное расхождение в кривых p_n , полученных рядом исследователей (Катц, Стендинг, Пенеску и Кодряну). Расхождение, по-видимому, связано с различными условиями экспериментирования, а также с различной природой нефтей и газов.

В опытах Стендинга данные получены при двухступенчатой контактной сепарации смеси нефти и газа. В опытах Катца имело место дифференциальное отделение. Румынские же исследователи проводили эксперименты в автоклавах типа Хюбеля, в которых реализовался комбинированный процесс отделения газа от нефти.

Приведем еще две формулы для определения давления насыщения.

¹ Товарная нефть — это нефть на дневной поверхности после отделения из нее летучих компонентов.

Формула ТатНИПИ

$$\rho_n = 3,13 + 0,000236 \left(N_{гс1} \frac{Г}{\rho_n} \right),$$

где $N_{г}$ и c_1 — содержание в газе азота и метана, объем %.

Зависимость получена в результате обработки соответствующих данных о нефтях Татарии и Башкирии (с $Г$ от 2 до $31 \text{ м}^3/\text{м}^3$).

Формула В. Г. Безменова, Л. Б. Листенгартена и А. М. Пирвердяна (АзНИПИнефть)

$$\rho_n = 16,83 + 0,000\,028\,1 (LГ) - \frac{105,7}{p_{пл}},$$

где $p_{пл}$ — первоначальное пластовое давление, МПа; L — глубина скважины, м.

Формула соответствует следующему диапазону изменения переменных (приблизительно): p_n от 7 до 37 МПа; $p_{пл}$ от 8 до 58 МПа; $Г$ от 10 до $170 \text{ м}^3/\text{м}^3$; L от 1000 до 5000 м.

Зависимость получена по данным разработки месторождений Азербайджана.

ОБЪЕМНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ ПЛАСТОВОЙ НЕФТИ

Пусть $V_{пл}$ — объем некоторого количества жидкой фазы (нефти) с растворенным в ней газом в пластовых условиях, V_0 — объем нефти, лишенной газа в нормальных атмосферных условиях, т. е. объем товарной нефти.

Отношение $B = V_{пл}/V_0$ является объемным коэффициентом пластовой нефти.

Для этого коэффициента Стендингом получена следующая эмпирическая формула, основанная на обработке большого экспериментального материала:

$$B = 0,972 + 0,000\,147 F^{1,175}, \quad (\text{II.16})$$

где F определяется из формулы

$$F = 5,615 Г \left(\frac{\rho_r}{\rho_n} \right)^{0,5} + 1,25 T. \quad (\text{II.17})$$

Как утверждает автор формулы, средняя погрешность равна 1,17 %. Для определения искомого коэффициента необходимо знание тех же четырех параметров ($Г$, ρ_r , ρ_n и T), что и в рассмотренной задаче о давлении насыщения.

При $Г = 0$ уравнение (II.15) характеризует термическое расширение нефти без газа.

Используя эмпирические зависимости (II.15) и (II.16), можно установить связь между давлением насыщения и объемным коэффициентом. Для этого следует задаться рядом значе-

ний газового фактора $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ при $\rho_g = \text{const}$ и $\rho_n = \text{const}$ и определить по (II.15) давления насыщения p'_n, p''_n, \dots . Далее по (II.16) необходимо найти для тех же значений газовых факторов соответствующие величины B_1, B_2, \dots .

Если в пласте содержится кроме нефти с растворенным в ней газом и газ в свободном состоянии, то в этом случае необходимо определить объемный коэффициент пластовой системы [68].

Удельный объем $v_{уд}$ и плотность ρ пластовой нефти — два взаимосвязанных параметра — определяются по формуле

$$\frac{1}{v_{уд}} = \rho = \frac{\rho_n + 1,226 \cdot 10^{-3} \Gamma \rho_g}{B}.$$

ВЯЗКОСТЬ ПЛАСТОВОЙ НЕФТИ

Известно, что вязкость нефти уменьшается с ростом количества растворенного в ней газа и с повышением температуры.

Количество растворенного газа находится в прямой зависимости от давления (рис. II.2). При увеличении давления в нефти интенсивно растворяется газ, что отражается на уменьшении ординат кривой вязкости (см. участок ab). Но после того как давление достигнет значения давления насыщения p_n , т. е. весь газ растворится, вязкость нефти несколько возрастет (см. участок bc). При отсутствии экспериментальных данных о влиянии растворенного газа и давления на вязкость можно пользоваться специальными графиками, полученными многими исследователями на основе соответствующей обработки экспериментальных данных [5, 68]. Ниже рассматривается табличный метод определения вязкости нефти с растворенным в ней газом, основанный на обработке этих графиков.

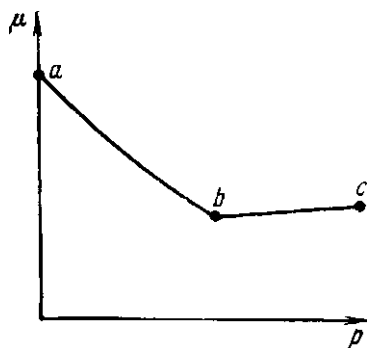


Рис. II.2. Изменение вязкости пластовой нефти в зависимости от давления

По табл. II.3 определяется вязкость пластовой (дегазированной) нефти по известному значению плотности ее при атмосферном давлении и $t = 15,5^\circ\text{C}$. Далее по табл. II.4 при найденной вязкости и заданном газовом факторе Γ определяют вязкость нефти с растворенным в ней газом.

По табл. II.3 определяется вязкость пластовой (дегазированной) нефти по известному значению плотности ее при атмосферном давлении и $t = 15,5^\circ\text{C}$. Далее по табл. II.4 при найденной вязкости и заданном газовом факторе Γ определяют вязкость нефти с растворенным в ней газом.

Пример. В 1 м^3 нефти плотностью $\rho_{н0} = 824 \text{ кг/м}^3$ при абсолютном давлении 14 МПа растворено 120 м^3 газа. Необходимо определить вязкость нефти при пластовой температуре.

По табл. II.3 находим путем интерполяции вязкость нефти при $t = 84^\circ\text{C}$ и атмосферном давлении.

Таблица II.3

Вязкость пластовых нефтей при атмосферном давлении, мПа·с

Плотность нефти при атмосферном давлении, кг/м ³	Температура, °С						
	40	50	60	70	80	90	100
780	1,5	1,15	0,90	0,70	0,57	0,50	0,45
830	3,5	2,7	2,1	1,6	1,2	0,95	0,9
880	11	7,9	5,4	3,9	2,9	2,3	1,8
930	100	63	37	24	17	12	9,0

Таблица II.4

Вязкость нефти с растворенным в ней газом, мПа·с

Газовый фактор, м ³ /м ³	Вязкость товарной нефти, мПа·с								
	0,7	1,0	2,0	5,0	10,0	20,0	40,0	70,0	100
0	0,70	1,0	2,0	5,0	100,0	20,0	40,0	70,0	100
30	0,55	0,70	1,10	5,0	10,0	20,0	40,0	22,0	30
60	0,46	0,58	0,90	2,5	4,8	8,5	15,0	13,0	16
90	0,39	0,48	0,76	1,8	3,1	5,4	8,5	8,5	
120	0,34	0,40	0,65	1,5	2,3	3,6	6,7		
150	0,30	0,34	0,57	1,3	1,8				
180	0,26	0,29	0,52						
210	0,23	0,25							

Вязкость нефти при плотности $\rho_{\text{но}} = 830 \text{ кг/м}^3$ и температуре 84°C $\mu_1 = 1,2 - (1,2 - 0,95)4/10 = 1,1 \text{ мПа} \cdot \text{с}$; вязкость нефти при плотности $\rho_{\text{но}} = 780 \text{ кг/м}^3$ при той же температуре $\mu_2 = 0,57 - (0,57 - 0,50)4/10 = 0,542 \text{ мПа} \cdot \text{с}$. По найденным значениям μ_1 и μ_2 определяем искомую вязкость при $\rho_{\text{но}} = 824 \text{ кг/м}^3$:

$$\mu = 1,1 - (1,1 - 0,542) \frac{830 - 824}{830 - 780} = 1,03 \text{ мПа} \cdot \text{с}.$$

По табл. II.4 находим для $G = 120 \text{ м}^3/\text{м}^3$ и $\mu = 1,03 \text{ мПа} \cdot \text{с}$ $\mu_{\text{нас}} \approx 0,4 \text{ мПа} \cdot \text{с}$.

Если пластовое давление выше давления насыщения, то вязкость нефти можно определить по формуле

$$\mu = \mu_{\text{нас}} + \beta \Delta p,$$

где $\mu_{\text{нас}}$ — вязкость нефти при давлении насыщения, мПа·с; Δp — превышение давления над давлением насыщения, мПа.

Коэффициент β определяется по табл. II.5.

Методики определения вязкости газонасыщенной нефти по специальным графикам и таблицам, основанным на них, а также многочисленным эмпирическим формулам [26] не

обеспечивают требуемой точности (отклонение до 25 % по сравнению с экспериментальными данными). Поэтому указанными методиками следует пользоваться при отсутствии соответствующего экспериментального материала.

ДИНАМИЧЕСКИЕ (РЕОЛОГИЧЕСКИЕ) ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛАСТОВЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Для так называемой ньютоновской жидкости единственным параметром, характеризующим течение, является ее вязкость —

Т а б л и ц а П.5

Значение коэффициента β				
$\mu_{\text{пас}}, \text{ мПа} \cdot \text{с}$	10	30	50	70
β	0,16	0,80	2,0	3,0
Максимальное значение Δp , мПа	30	30	25	10

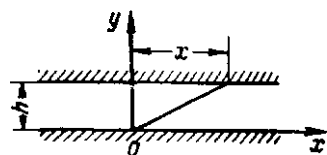


Рис. П.3. Схема течения ньютоновской жидкости

коэффициент пропорциональности в законе вязкого трения Ньютона:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}, \quad (\text{П.18})$$

где τ — касательное напряжение трения; $\frac{du}{dy}$ — градиент скорости — изменение скорости в направлении, перпендикулярном к течению.

Мы вынуждены были несколько нарушить последовательность изложения, введя в рассмотрение параметр μ , так как без этого непонятна была бы природа проницаемости горных пород.

Формуле (П.18) можно придать другой вид (рис. П.3):

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \left(\frac{dx}{dy} \right) \frac{dt}{dt} = \mu \frac{dx}{dt} \left(\frac{dx}{dy} \right). \quad (\text{П.19})$$

Но dx/dy представляет собой сдвиг γ слоев (деформацию). Отсюда следует

$$\frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma} = \frac{\tau}{\mu}, \quad (\text{П.20})$$

т. е. у ньютоновских жидкостей скорость сдвига $\dot{\gamma}$ пропорциональна касательному напряжению и обратно пропорциональна вязкости.

Зависимость между τ и $\dot{\gamma}$, очевидно, является прямой линией, проходящей через начало координат (см. рис. П.3).

Для случая параллельного движения пластинки относительно другой, отстоящей от нее на расстоянии h , формула (II.38) примет вид

$$\tau = \mu \dot{\gamma} / h. \quad (\text{II.21})$$

Жидкости, не подчиняющиеся закону вязкого трения Ньютона, называются аномальными, или неньютоновскими, жидкостями.

Многие нефти, высокомолекулярные соединения и полимеры¹, как естественные, так и искусственные, являются аномальными жидкостями. Отметим, что «полимерное» заводнение постепенно начинает находить применение в практике. По указанным выше причинам изучение свойств неньютоновских жидкостей представляет большой интерес для разработки нефтяных месторождений.

Весь многочисленный класс аномальных жидкостей можно разбить на три группы.

А. Относительно простые системы, для которых реологическая кривая $\tau = f(\dot{\gamma})$ неизменна во времени (стационарно реологические жидкости).

Б. Более сложные системы, реологические характеристики которых зависят от времени (нестационарно реологические жидкости).

В. Вязкоупругие жидкости, т. е. такие системы, которые в зависимости от условий проявляют себя и как твердые тела, как жидкости и частично проявляют упругое восстановление первоначальной формы после снятия напряжения.

А. Стационарно реологические жидкости

На рис. II.4 приводятся три зависимости $\tau = f(\dot{\gamma})$ 2, 3 и 4, относящиеся к первой группе. На этом же рисунке прямая 1 характеризует ньютоновскую жидкость. Рассмотрим подробно каждую из них. Прямая 3, пересекающая ось напряжения сдвига в некоторой точке τ_0 , характеризует бингамовское пластическое тело. Уравнение этой линии

$$\tau = \tau_0 + \mu_p \dot{\gamma}, \quad \tau > \tau_0, \quad (\text{II.22})$$

где τ_0 — предельное максимальное напряжение, начиная с которого возникает вязкое течение (предельное напряжение сдвига); μ_p — пластическая или структурная вязкость. Таким образом, бингамовское пластическое тело характеризуется уже двумя параметрами τ_0 и μ_p . Это тело можно представить в виде достаточно жесткой структуры, сопротивляющейся до тех пор, пока напряжение не превысило некоторую критическую вели-

¹ Термин «полимеры» часто применяют для обозначения всех высокомолекулярных соединений.

чину τ_0 . При достижении величины τ_0 происходит разрушение структуры, и она ведет себя как обычная ньютоновская жидкость с избыточным напряжением $\Delta\tau = \tau - \tau_0$. После того как $\Delta\tau$ стало равно нулю, система вновь восстанавливает свои первоначальные свойства.

Кривая 2, проходящая через начало координат и, следовательно, не имеющая предела текучести, определяет так называемое, псевдопластичное тело.

Введем понятие кажущейся вязкости $\mu_{\text{каж}}$ в точке как отношение напряжения сдвига к соответствующей скорости сдвига (см. рис. II.4). Ясно, что с ростом $\dot{\gamma}$ эта величина уменьшается, и только при больших значениях $\dot{\gamma}$ кривая практически становится линейной.

Одно из возможных объяснений поведения псевдопластичной жидкости заключается в том, что по мере роста скорости сдвига происходит ориентация все большего числа молекул или частиц своими большими осями вдоль потока, сопровождающаяся постепенным снижением усилия для такого упорядоченного движения.

Наиболее простая форма аппроксимации кривой 2 имеет вид

$$\tau = k_0 \dot{\gamma}^n, \quad (n < 1), \quad (\text{II.23})$$

где k_0 — постоянная величина.

Однако в этой формуле есть по крайней мере один логический изъян, заключающийся в том, что кажущаяся вязкость $\mu_{\text{каж}}$ в этом случае

$$\mu_{\text{каж}} = \tau / \dot{\gamma} = k_0 1 / \dot{\gamma}^{1-n}$$

стремится к нулю с возрастанием $\dot{\gamma}$ (поскольку $n < 1$). Это, конечно, противоречит физике явления.

В литературе имеются и другие критические замечания к степенному закону (II.23). Вместе с тем, как справедливо отмечается в [74], эти недостатки не создают серьезных трудностей в инженерных расчетах, поскольку используемое на практике уравнение описывает поведение жидкости в ограниченном диапазоне скоростей сдвига. В этих пределах вполне допустимо брать значение n постоянным.

Как пример логически более правильного эмпирического уравнения приведем уравнение Уильямсона

$$\tau = \frac{A\dot{\gamma}}{B + \dot{\gamma}} + \mu_{\infty}\dot{\gamma}. \quad (\text{II.24})$$

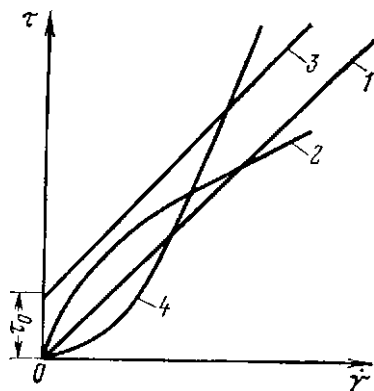


Рис. II.4. Зависимость касательного напряжения τ от скорости сдвига $\dot{\gamma}$

Выражение (II.24) описывает класс кривых, обращенных выпуклостью к оси напряжения сдвига. Действительно, дифференцируя (II.24), имеем уравнение

$$\tau' = \frac{AB}{(B + \dot{\gamma})^2} + \mu_{\infty}, \quad (\text{II.25})$$

из которого следует убывание τ' с возрастанием $\dot{\gamma}$.

Уравнение (II.24) за счет большего числа параметров, определяющих его, удовлетворяет естественному условию на бесконечности:

$$\dot{\gamma} \rightarrow \infty, \quad \mu_{\text{каж}} = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \rightarrow \mu_{\infty}, \quad (\text{II.26})$$

т. е. при беспредельном возрастании скорости сдвига $\dot{\gamma}$ кажущаяся вязкость стремится к постоянному значению μ_{∞} (а не к нулю, как это следует из (II.23)).

Кроме того при $B = 0$ получаем выражение

$$\tau = A + \mu_{\infty} \dot{\gamma}, \quad (\text{II.27})$$

вполне идентичное бингамовскому пластическому телу. Наконец, при $A = 0$ (II.24) переходит в уравнение для ньютоновской жидкости. Таким образом, уравнение (II.24) описывает свойства жидкостей всех трех групп.

Однако такая гибкость результата достигается за счет сложности (II.24). В [74] отмечается, что преимущества зависимости (II.24) не компенсируют возникающих при использовании ее трудностей. Свойства дилатантной жидкости описываются кривой 4 (см. рис. II.4), проходящей через начало координат (отсутствие предела текучести) и обращенной выпуклостью к оси скорости сдвига. Для этой кривой также можно воспользоваться степенной формулой

$$\tau = k_0 \dot{\gamma}^n, \quad (\text{II.28})$$

но с показателем степени $n > 1$.

В противоположность псевдопластикам у дилатантных жидкостей возрастание кажущейся вязкости связано с ростом скорости сдвига. Логическое несоответствие формулы (II.28) физической сущности процесса здесь заключается в том, что при $\dot{\gamma} \rightarrow \infty \quad \mu_{\text{каж}} \rightarrow \infty$.

Предполагается, что кривая 4 характерна и для суспензий с большим содержанием твердой фазы.

Рост величины вязкости с увеличением скорости сдвига объясняется тем, что суспензия в состоянии покоя имеет минимальный объем прослоев между твердыми частицами, который и заполнен жидкостью. Когда скорость сдвига мала, частицы практически мало раздвигаются относительно друг друга и жидкости вполне хватает для смазки между трущимися частицами, что и обуславливает малые напряжения трения.

По мере увеличения скорости происходит «раздвижка» — разбухание смеси и имеющейся жидкости уже недостаточно для обеспечения смазки между частицами — напряжение существенно растет.

Это объяснение, однако, непремлемо для всех дилатантных жидкостей, т. е. существуют жидкости, характеризующиеся кривыми вида 4, которые, однако, не являются суспензиями.

Б. Нестационарно реологические жидкости

Перейдем теперь к аномальным жидкостям, реологические характеристики которых зависят от времени.

Такие жидкости можно разделить на две группы:

тиксотропные жидкости с убывающим во времени напряжением сдвига при деформации с постоянной скоростью сдвига; реопектические жидкости с возрастающим напряжением при том же условии.

Рассмотрим каждую группу.

Пусть кольцевое пространство ротационного соосного цилиндрического вискозиметра заполнено тиксотропной жидкостью [74]. Приведем во вращение один из цилиндров с постоянным числом оборотов, обеспечив тем самым постоянную скорость сдвига.

В результате деформации тиксотропного материала его структура будет постепенно разрушаться, при этом тем интенсивнее, чем больше скорость сдвига. Это скажется на уменьшении кажущейся вязкости со временем. Одновременно должна возрастать скорость восстановления структуры за счет появления новых связей. Ниже приведем математический анализ, ставящий своей целью дать чисто качественное описание происходящего процесса.

Будем считать, что скорость разрушения структуры пропорциональна числу связей N , существующих в данный момент времени, а скорость восстановления ее — числу потерянных связей $N_0 - N$ (где N_0 — число связей в начале вращения). Результирующая скорость, очевидно, равна

$$\frac{dN}{dt} = -\alpha N + \beta (N_0 - N),$$

где α и β — коэффициенты пропорциональности.

Интегрируя, имеем

$$N = N_0 \frac{\beta + \alpha \exp [-(\alpha + \beta) t]}{\alpha + \beta}.$$

При $t \rightarrow \infty$ выражение стремится к

$$N_{\infty} = N_0 \frac{\beta}{\alpha + \beta}.$$

Иными словами, связи полностью не исчезают, что отражается на крутящем моменте, который, хотя и уменьшается со временем, но не становится равным нулю при $t \rightarrow \infty$.

На рис. II.5 показаны кривые изменения крутящего момента, асимптотически стремящиеся к своим предельным значениям. Чем больше обороты вискозиметра n , тем ниже расположена кривая; при этом поведение жидкости становится ньютоновским. Однако тиксотропия является обратимым процессом, т.е. после того как снято возмущение, система постепенно возвращается в свое первоначальное состояние (восстанавливается ее прежняя структура).

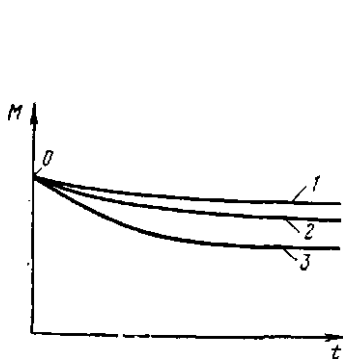


Рис. II.5. Кривые изменения крутящего момента M тиксотропного вещества в соосна-
цилиндрическом вискозиметре при $n_1 < n_2 <$
 $< n_3$.

О — начало движения; 1 — n_1 ; 2 — n_2 ;
3 — n_3

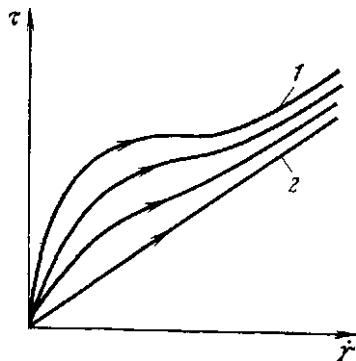


Рис. II.6. Кривые восстановления струк-
туры.

1 — восстановление структуры при длитель-
ном стоянии; 2 — непосредственно после
длительного сдвига

На рис. II.6 прямая характеризует состояние тиксотропной жидкости после длительного сдвига, кривые — восстановленные структуры после различных периодов стояния (чем больше период, тем выше кривая). Указанное обуславливает образование гистерезисной петли.

Чтобы установить, является ли жидкость тиксотропной и получить ее количественные характеристики, используют ротационный вискозиметр [74]. Жидкость помещается в кольцевом пространстве между двумя соосными цилиндрами, один из которых, обычно внешний, приводится во вращение, а по закручиванию другого определяют закручивающее усилие. Вращение можно осуществить с различной угловой скоростью, что определяет взаимосвязь между закручивающим усилием и угловой скоростью. Для жидкостей со стационарной характеристикой возможно определение по этой взаимосвязи их параметров. Для сред с нестационарной характеристикой (и, в частности, тиксотропных) с вопросом определения реологических параметров дело обстоит сложнее. На описанном выше ротационном виско-

симетре при постепенном увеличении числа оборотов n (или, что одно и то же, увеличении скорости сдвига $\dot{\gamma}$) до некоторого максимального значения $n_{\max}(\dot{\gamma}_{\max})$ получают кривую, характеризующую процесс разрушения структуры (кривая AB на рис. II.7). Если сразу по достижении максимальных оборотов n_{\max} начать снижать обороты (т. е. уменьшить скорость сдвига), то для тиксотропной жидкости кривая напряжения сдвига расположится ниже кривой AB (см. BCA , рис. II.7). Поддержание же в течение некоторого времени скорости на максимальном уровне n_{\max} вызовет обусловленное тиксотропным разрушением уменьшение напряжения сдвига до некоторого значения (точка D). В дальнейшем по мере снижения оборотов получим кривую DA изменения напряжения. Затем, поддерживая неограниченно долго режим n_{\max} , придем к предельно-минимальному снижению напряжения (точка E) и далее к кривой EA .

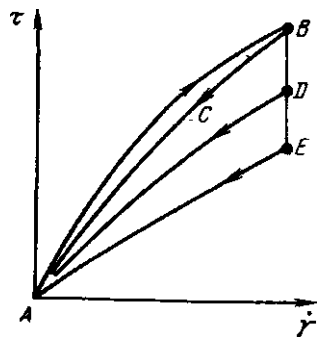


Рис. II.7. Кривые зависимости напряжения от скорости сдвига

Исходя из формы и площади гистерезисной петли, можно получить количественные характеристики тиксотропных материалов [74].

Реопектическим жидкостям свойственно постепенное структурообразование при сдвиге [2]. Однако, по-видимому, существует предельная величины сдвига, выше которой не происходит восстановление структуры.

В. Вязкоупругие жидкости

Существенное значение для вязкоупругих жидкостей имеет процесс перехода системы из неравновесного состояния в равновесное.

Этот процесс называется релаксацией. Релаксация происходит вследствие теплового движения элементов структуры. В системах, состоящих из неполярных атомно-молекулярных групп, характеризующихся малой энергией взаимодействия, равновесное состояние наступает (при прочих равных условиях) быстрее, чем в системах, имеющих полярные атомы и молекулы с большей энергией взаимодействия между ними.

Время перехода в состояние равновесия зависит также от степени разветвленности структуры атомно-молекулярных групп, размеров и громоздкости их. Чем сложнее структура, тем медленнее она придет в состояние равновесия. Для простых жидкостей это время, очевидно, меньше, чем для неньютоновских,

состоящих из элементов с циклической разветвленной структурой.

Повышение температуры приводит к уменьшению энергии взаимодействия n , как следствие,— к уменьшению времени релаксации.

В процессе перехода системы из неравновесного состояния в равновесное происходит изменение таких свойств, как вязкость, напряжение, деформация и др. В тех случаях, когда эти свойства изменяются существенно быстрее, чем время наблюдения или эксплуатации, процессы перестройки можно не учитывать при оценке свойств системы. Если же время релаксации соизмеримо с временем наблюдения, учет переходных процессов обязателен.

Пусть x — тепловое движение элементов структуры, т. е. величина, определяющая изменения в системе. Тогда dx/dt будет скоростью изменения этой величины.

Для простой релаксирующей системы с несложной структурой и с небольшой энергией взаимодействия элементов можно считать скорость пропорциональной величине x , т. е.

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{\tau}, \quad (\text{II.29})$$

где τ — коэффициент пропорциональности, имеющий размерность времени.

Интегрирование дает

$$x = x_0 e^{-t/\tau}, \quad (\text{II.30})$$

где x_0 — начальное значение исследуемой величины. Полагая $t = \tau$, получим

$$x = x_0 e^{-1}. \quad (\text{II.31})$$

Таким образом, τ — время, в течение которого начальное значение исследуемой величины уменьшается в 2,7 раза, τ называется временем релаксации системы.

Из (II.30) следует, что при принятых условиях равновесное состояние, строго говоря, достижимо при $t \rightarrow \infty$.

Величина τ меняется в очень широких пределах: от 10^{-8} — 10^{-10} с (низкомолекулярные жидкости) до суток и даже месяцев (полимерные макромолекулы).

Однако эта модель неправомерна для сложных структур. Для лучшего понимания свойств таких жидкостей обратимся к более сложным реологическим моделям. Описываемые ниже модели релаксационных процессов позволяют понять и математически описать поведение не только вязкоупругих жидкостей при различных режимах работы, но и всех неньютоновских жидкостей [2]. Эти модели представляют собой различные сочетания элементов, каждый из которых имеет только упругие или только вязкие свойства.

Упругим элементом служит стальная пружина, которая при деформации подчиняется закону Гука

$$\sigma = E \varepsilon_{\text{упр}}, \quad \varepsilon_{\text{упр}} = \frac{1}{E} \sigma, \quad (\text{II.32})$$

где σ — напряжение; E — модуль упругости; $\varepsilon_{\text{упр}}$ — относительная деформация.

Вязким элементом служит поршень или шар, свободно перемещающиеся в цилиндре, заполненном вязкой жидкостью.

Согласно закону вязкого трения Ньютона, напряжение σ пропорционально скорости движения u ¹:

$$\sigma = k \mu u, \quad (\text{II.33})$$

где μ — вязкость жидкости; k — коэффициент пропорциональности, зависящий от геометрических размеров элемента.

Учитывая, что $u = d\varepsilon_{\text{вязк}}/dt$, получим из (II.33)

$$\frac{d\varepsilon_{\text{вязк}}}{dt} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\sigma}{\mu}, \quad (\text{II.34})$$

откуда

$$\varepsilon_{\text{вязк}} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\sigma}{\mu} t. \quad (\text{II.35})$$

Рассмотрим развитие деформации для упругого и вязкого элементов (рис. II.8). В первом случае деформация полностью обратима [см. (II.32) при $\sigma = 0$ $\varepsilon_{\text{упр}} = 0$]; во втором случае — она полностью необратима. Действительно, если сила σ действовала в течение времени t_0 , то к концу этого периода

$$\varepsilon_{\text{вязк}} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\sigma}{\mu} t_0. \quad (\text{II.36})$$

После прекращения действия силы ($\sigma = 0$) с $t > t_0$ деформация не исчезнет и останется на уровне значения, даваемого формулой (II.36).

Если последовательно соединить два простейших элемента, получим модель Максвелла (рис. II.9).

Общая деформация системы ε складывается из упругой $\varepsilon_{\text{упр}}$ и вязкой $\varepsilon_{\text{вязк}}$ деформаций. Однако непосредственное сложение выражений (II.32) и (II.35) недопустимо, так как при выводе мы рассматривали их независимо друг от друга, а между тем в рассматриваемом случае они взаимно связаны. Необходимо при выводе выражения для общей деформации воспользоваться дифференциальными уравнениями Гука и Ньютона, а именно

$$\frac{d\varepsilon_{\text{упр}}}{dt} = \frac{1}{E} \cdot \frac{d\sigma}{dt}; \quad \frac{d\varepsilon_{\text{вязк}}}{dt} = \frac{\sigma}{k\mu}. \quad (\text{II.37})$$

¹ Для удобства дальнейших выкладок скорость u отнесена к длине пружины.

Тогда

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{d\epsilon_{\text{упр}}}{dt} + \frac{d\epsilon_{\text{вязк}}}{dt} = \frac{1}{E} \cdot \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{k\mu}. \quad (\text{II.38})$$

Пусть задана скорость деформации $d\epsilon/dt = \epsilon'(t)$. Решение уравнения (II.38), удовлетворяющее начальному условию $\sigma = 0, t = 0$, имеет вид

$$\sigma = E e^{-\frac{E}{k\mu} t} \int_0^t e^{\frac{E}{k\mu} \theta} \epsilon'(\theta) d\theta. \quad (\text{II.39})$$

Допустим, что до некоторого момента $t = t_0$ модель удлинялась ($d\epsilon/dt = \epsilon'(t) \neq 0$), а затем достигнутая деформация была зафиксирована закреплением пружины ($d\epsilon/dt = \epsilon'(t) = 0$).

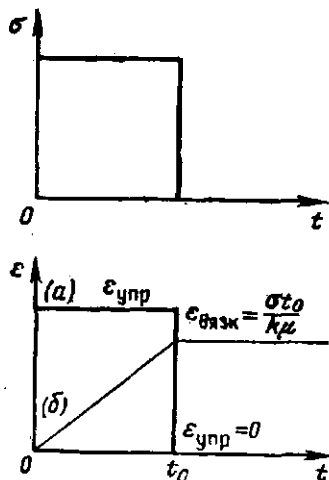


Рис. II.8. Схема развития деформации упругого (а) и вязкого (б) элементов

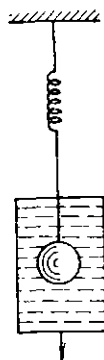


Рис. II.9. Модель упруговязкого тела Максвелла

Деформация в момент времени t_0 будет

$$\sigma_0 = E e^{-\frac{E}{k\mu} t_0} \int_0^{t_0} e^{\frac{E}{k\mu} \theta} \epsilon'(\theta) d\theta. \quad (\text{II.40})$$

Для $t > t_0$ $\epsilon'(t) = 0$, и решение (II.40) примет вид

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E}{k\mu} (t - t_0)}. \quad (\text{II.41})$$

Как видим, оно удовлетворяет условию: в точке перехода $t = t_0$ напряжение равно σ_0 .

Следовательно, достигнутое за период t_0 напряжение уменьшается от значения σ_0 экспоненциально как функция времени, отсчитываемого от момента t_0 (рис. II.10).

Сравнивая (II.41) с (II.40), видим, что $k_{\mu}/E = \tau$ есть время релаксации системы, т. е. время, в течение которого напряжение снижается в 2,7 раза от своей первоначальной величины.

Определим значения производных в точках $t = 0$ и $t = t_0$. Дифференцируя (II.39), имеем

$$\frac{d\sigma}{dt} = E \left\{ -e^{-\frac{E}{k_{\mu}} t} \frac{E}{k_{\mu}} \int_0^t e^{\frac{E\theta}{k_{\mu}}} \epsilon'(\theta) d\theta + \epsilon'(t) \right\}. \quad (\text{II.42})$$

Подставляя в (II.42) $t = 0$ и $t = t_0$, получим значение производных в этих точках:

$$\left. \begin{aligned} \text{tg } \alpha_1 &= \frac{d\sigma}{dt} \Big|_{t=0} = E \epsilon'(0) = E \frac{d\epsilon}{dt} \Big|_{t=0} \\ \text{tg } \alpha_2 &= -\frac{E}{k_{\mu}} \sigma_0 + E \frac{d\epsilon}{dt} \Big|_{t=t_0} = -\frac{\sigma_0}{\tau} + E \frac{d\epsilon}{dt} \Big|_{t=t_0} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{II.43})$$

По значениям производных в точках $t = 0$ и $t = t_0$, а также по отрезку τ (см. рис. II.10) не представит труда найти искомые параметры модели.

Последовательность расчета такова:

1. Ординате второй ветви кривой $\sigma = F(t)$ (на рис. II.10 равной σ_0/e) соответствует аргумент — время релаксации τ .

2. Модуль упругости $E = \text{tg } \alpha_1 / (d\epsilon/dt)_{t=0}$.

3. Если модель выбрана правильно, то должно по крайней мере соблюдаться приближенное равенство

$$-\frac{\sigma_0}{\tau} + \frac{(d\epsilon/dt)_{t=t_0}}{(d\epsilon/dt)_{t=0}} \text{tg } \alpha_1 = \text{tg } \alpha_2.$$

4. По известным значениям модуля E и τ находим величину $k_{\mu} = \tau E$.

Более точно можно определить параметры при обработке всей кривой до точки A по способу наименьших квадратов по формуле (II.39)¹.

Пусть теперь задано напряжение $\sigma = \sigma(t)$. Тогда, согласно (II.38), имеем

$$\epsilon = \frac{1}{E} \sigma(t) + \frac{1}{k_{\mu}} \int_0^t \sigma(\theta) d\theta = \frac{1}{E} \left[\sigma(t) + \int_0^t \frac{\sigma(\theta)}{\tau} d\theta \right], \quad (\text{II.44})$$

¹ Для использования способа необходимо в (II.39) задать $-\epsilon'(t)$.

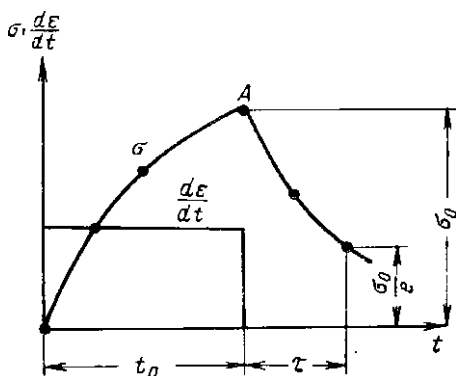


Рис. II.10. Кривая изменения напряжения при заданной скорости деформации (по модели Максвелла)

где $\sigma(t)$ — напряжение, действующее в момент времени t ; θ — «текущее» время.

Для конкретизации задачи примем следующую закономерность изменения $\sigma(t)$:

$$\left. \begin{aligned} \sigma(t) &= \sigma_0 t / t_0 & (0 \leq t \leq t_0) \\ \sigma(t) &= \sigma_0 & (t \geq t_0) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.45})$$

Согласно (II.38), будем иметь следующие значения деформации:

$$\varepsilon(t, t_0) = \frac{\sigma_0}{E} \cdot \frac{t}{t_0} \left[1 + \frac{t}{2\tau} \right] \quad (0 \leq t \leq t_0), \quad (\text{II.46})$$

$$\varepsilon(t, t_0) = \frac{\sigma_0}{E} \left[1 + \frac{t}{\tau} - \frac{t_0}{2\tau} \right] \quad (t \geq t_0). \quad (\text{II.47})$$

При стремлении $t_0 \rightarrow 0$ получим значение деформации $\varepsilon(0)$ в начале времени при внезапном приложении постоянного напряжения:

$$\varepsilon(0) = \sigma_0 / E. \quad (\text{II.48})$$

В дальнейшем постоянное растягивающее напряжение обуславливает согласно (II.47) неограниченное удлинение системы с постоянной скоростью

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 + \frac{t}{\tau} \right), \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma_0}{\tau E} = \frac{\sigma_0}{k\mu} \quad (\text{II.49})$$

тем большей, чем больше приложенное напряжение и меньше вязкость системы.

Это явление называется ползучестью. Как следует из приведенного анализа [см. уравнение (II.46)], в начальный момент времени до достижения постоянного напряжения скорость $d\varepsilon/dt$ удлинения может быть неограниченно большой.

Пусть в момент времени $t = t_1$ снято напряжение. Тогда при $t > t_1$ имеем

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0 t_1}{E\tau} = \frac{\sigma_0 t_1}{k\mu} = \text{const}. \quad (\text{II.50})$$

Иными словами, после снятия напряжения деформация изменяется по сравнению с значением ее $\frac{\sigma_0}{E} \left(1 + \frac{t_1}{\tau} \right)$ в конце периода t_1 (рис. II.11) на величину σ_0/E , а далее эта деформация не изменяется.

Параллельное соединение обоих элементов (упругого и вязкого) дает модель Кельвина—Фойгта (рис. II.12). Уравнение для этого случая выводится следующим образом.

Суммарное напряжение упругого и вязкого элементов

$$\sigma = \sigma_{\text{упр}} + \sigma_{\text{вязк}}. \quad (\text{II.51})$$

Но $\sigma_{упр} = E\varepsilon$, $\sigma_{вязк} = k\mu d\varepsilon/dt$, а потому

$$\sigma = E\varepsilon + k\mu d\varepsilon/dt = E(\varepsilon + \tau d\varepsilon/dt). \quad (\text{II.52})$$

При заданной скорости деформации $d\varepsilon/dt = \varepsilon'(t)$ получим искомое напряжение

$$\begin{aligned} \sigma &= E \left[\tau \varepsilon'(t) + \int_0^t \varepsilon'(\theta) d\theta \right] = E [\tau \varepsilon'(t) + \varepsilon(t) - \varepsilon(0)] = \\ &= E [\tau \varepsilon'(t) + \varepsilon(t)]. \end{aligned} \quad (\text{II.53})$$

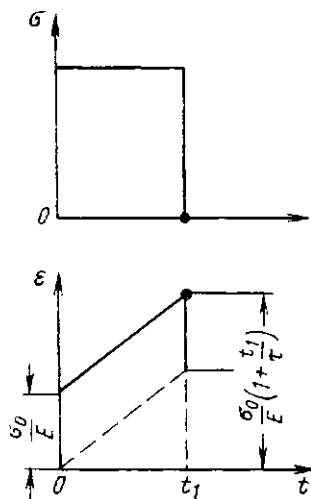


Рис. 11.11. График развития деформации при заданном ступенчатом изменении напряжения

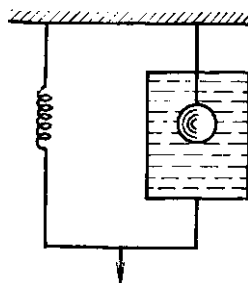


Рис. 11.12. Модель вязкоупругого тела Кельвина—Фойгта

Если скорость деформации с самого начала не равна нулю, то напряжение в начале деформации также отлично от нуля:

$$\sigma(0) = E\tau \varepsilon'(0). \quad (\text{II.54})$$

В дальнейшем монотонный рост напряжения при $\varepsilon'(t) = \varepsilon'(0) = \text{const}$ носит линейный характер:

$$\sigma = E [\tau \varepsilon'(0) + \varepsilon'(0) t]. \quad (\text{II.55})$$

А между тем для модели Максвелла при тех же условиях в начальный момент времени $\sigma(0) = 0$, а рост напряжения, согласно уравнению (II.41), подчиняется закономерности

$$\sigma = E\tau \varepsilon'(0) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \quad (\text{II.56})$$

Пусть в некоторый момент времени t_0 $d\varepsilon/dt = 0$ (что достигается закреплением траверсы модели Кельвина—Фойгта

(см. рис. II.12). Тогда, согласно (II.52), напряжение $\sigma_0 = E\epsilon(t_0) = E\epsilon'(0)t_0$ (предполагается, что до этого скорость деформации была постоянной).

Для модели же Максвелла напряжение будет снижаться по экспоненциальному закону (II.41).

При заданном напряжении $\sigma = \sigma(t)$ решение (II.52) имеет вид

$$\epsilon = \frac{1}{E\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^t e^{\frac{\theta}{\tau}} \sigma(\theta) d\theta. \quad (\text{II.57})$$

При $t = t_0$ удлинение, согласно (II.57), будет

$$\epsilon_0 = \frac{1}{E\tau} e^{-\frac{t_0}{\tau}} \int_0^{t_0} e^{\frac{\theta}{\tau}} \sigma(\theta) d\theta. \quad (\text{II.58})$$

В этот момент напряжение снимается, и далее удлинение будет изменяться по экспоненциальному закону

$$\epsilon = \epsilon_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}. \quad (\text{II.59})$$

При $\sigma = \sigma_0$ имеем из (II.57) и (II.58)

$$\epsilon = \frac{\sigma_0}{E} \left(e^{\frac{t}{\tau}} - 1 \right), \quad t \leq t_0, \quad (\text{II.60})$$

$$\epsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E} \left(e^{\frac{t_0}{\tau}} - 1 \right), \quad t = t_0. \quad (\text{II.61})$$

Математические выражения моделей Максвелла и Кельвина—Фойгта не всегда пригодны для описания реальных нефтей и особенно полимерных растворов.

Оценивая в общих чертах различие этих моделей, необходимо отметить следующее. Модель Максвелла не учитывает вязкую эластичность тела, а способна описывать переход из твердого состояния в необратимое текучее. Модель же Кельвина—Фойгта представляет только обратимый процесс развития высокоэластичной деформации. Разумеется, в обоих случаях речь может идти о чисто качественном описании процессов. При соответствующей комбинации рассмотренных элементов можно построить более сложные модели, лучше описывающие поведение реальных жидкостей. Однако это достигается за счет увеличения числа параметров.

ФИЛЬТРАЦИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ ЖИДКОСТИ

Обобщим задачу фильтрации вязкопластичной жидкости. Рассмотрим стационарное движение вязко-пластичной жидкости в цилиндрической трубе (капилляре).

Распределение скоростей определяется из следующего уравнения [42]:

$$v = \frac{\Delta p}{4L\mu_n} r^2 + \frac{\tau_0}{\mu_n} r + C_1 \ln r + C_2, \quad (\text{II.62})$$

где τ_0 — предельное напряжение сдвига.

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 используем следующие граничные условия: на стенке трубы

$$r = r_1, \quad v = 0; \quad (\text{II.63})$$

на некотором расстоянии r_0 от оси трубы $r = r_0$ касательное напряжение $\tau = \tau_0$, что дает согласно уравнению Бингама—Шведова

$$\tau = \tau_0 + \mu_n \frac{dv}{dr}, \quad (\text{II.64})$$

$$\frac{dv}{dr} = 0 \quad \text{при} \quad r = r_0. \quad (\text{II.65})$$

Искомое расстояние r_0 определим из условия равновесия цилиндрического жидкого слоя

$$2\pi r_0 L \tau_0 = \pi r_0^2 \Delta p, \quad (\text{II.66})$$

откуда

$$r_0 = \frac{2L\tau_0}{\Delta p}. \quad (\text{II.67})$$

Используя граничные условия (II.63) и (II.65), получим

$$v = \frac{\Delta p}{4L\mu_n} (r_1^2 - r^2) - \frac{\tau_0}{\mu_n} (r_1 - r). \quad (\text{II.68})$$

Выражение (II.68) справедливо для $r_1 \geq r > r_0$. При $r = r_0$ имеем из (II.67)

$$v_0 = \frac{\Delta p}{4L\mu_n} (r_1^2 - r_0^2) - \frac{\tau_0}{\mu_n} (r_1 - r_0). \quad (\text{II.69})$$

Для $r_0 \geq r \geq 0$ скорость постоянна и равна v_0 (рис. II.13).

Расход жидкости через трубу

$$Q_1 = \int_{r_0}^{r_1} 2\pi r v dr + \pi r_0^2 v_0. \quad (\text{II.70})$$

Подставляя значение v и v_0 соответственно из (II.68) и (II.69) в уравнение (II.70), получим

$$Q_1 = \frac{\pi r_1^4 \Delta p}{8\mu_n L} \left[1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{r_0}{r_1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{r_0^4}{r_1^4} \right]. \quad (\text{II.71})$$

Предположим, что в уравнении (II.67) $r_0 = r_1$, тогда найдем наибольший перепад давления Δp_0 , при котором вязкопластичная жидкость находится в предельном равновесии:

$$\Delta p_0 = 2L\tau_0/r_1, \quad (\text{II.72})$$

отсюда

$$r_0/r_1 = \Delta p_0/\Delta p. \quad (\text{II.73})$$

Заменяя в уравнении (II.71) r_0/r_1 через $\Delta p_0/\Delta p$, получим формулу Буккингема

$$Q_1 = \frac{\pi r_1^4 \Delta p}{8\mu_n L} \left[1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{\Delta p_0}{\Delta p} + \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta p_0}{\Delta p} \right)^4 \right]. \quad (\text{II.74})$$

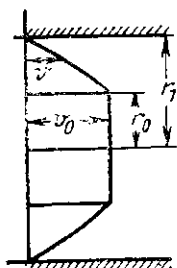


Рис. II.13. К расчету фильтрации вязкопластичной жидкости в пористой среде

Обычно третьим членом этого уравнения можно пренебречь, поэтому окончательно имеем

$$Q_1 = \frac{\pi r_1^4 \Delta p}{8\mu_n L} \left[1 - \frac{4}{3} \frac{\Delta p_0}{\Delta p} \right], \quad \left(\frac{\Delta p_0}{\Delta p} \ll 1 \right). \quad (\text{II.75})$$

В уравнении (II.75) отброшен индекс 1 при r . Используем теперь эту зависимость для получения уравнения фильтрации вязкопластичной жидкости аналогичного уравнению Козени для вязкой жидкости. При этом заменив в (II.75) величину L через ξL (фактическую длину пути фильтрации) и, умножив на n (общее число капилляров), получим

$$Q = \frac{n\pi r^4}{8\mu} \cdot \frac{\Delta p}{(\xi L)} \left[1 - \frac{4}{3} \frac{\Delta p_0}{\Delta p} \right]. \quad (\text{II.76})$$

Далее и для этого случая остаются справедливыми следующие соотношения:

$$m = \frac{n\pi r^2 \xi}{F}, \quad S = \frac{2\pi r n \xi^2}{F}. \quad (\text{II.77})$$

Из (II.75) и (II.77) получим

$$Q = F \left(\frac{m^3}{2S^2 \xi^2} \right) \frac{\Delta p}{\mu_n L} \left[1 - \frac{4}{3} \frac{\Delta p_0}{\Delta p} \right], \quad (\text{II.78})$$

выражение в круглых скобках является так же, как и в задаче Козени, пропицаемостью:

$$k = \frac{m^3}{2S^2 \xi^2}. \quad (\text{II.79})$$

Таким образом,

$$Q = F \frac{k \Delta p}{\mu_n L} \left[1 - \frac{4}{3} \frac{\Delta p_0}{\Delta p} \right]. \quad (\text{II.80})$$

Уравнению (II.80) можно придать другой вид, используя (II.77), (II.78) и (II.79):

$$\Delta p_0 = \frac{2\xi L \tau_0}{r} = \frac{\xi L \tau_0 S}{m} = \frac{m^2 L \tau_0}{2S k \xi}. \quad (\text{II.81})$$

Окончательно имеем следующую формулу для определения расхода вязкопластичной жидкости через пористую среду:

$$Q = F \frac{k \Delta p}{\mu_n L} - \frac{2}{3} \cdot \frac{F m^2 \tau_0}{\mu_n S \xi}. \quad (\text{II.82})$$

Эта зависимость представляется в виде прямой линии, пересекающей ось абсцисс в точке с координатой

$$\Delta p_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{L m^2 \tau_0}{k S \xi}. \quad (\text{II.83})$$

ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТЕЙ, ОПИСЫВАЕМАЯ СТЕПЕННЫМ ЗАКОНОМ

Приведенную выше методику используем для построения реологической модели, соответствующей степенному закону фильтрации (II.23) — (II.28).

(II.23) перепишем так:

$$k_0 \left(\frac{dv}{dr} \right)^{n_1} = \tau. \quad (\text{II.84})$$

Из условия равновесия цилиндрического слоя имеем

$$\tau = \frac{\Delta p}{2L} r.$$

С учетом (II.84) получим

$$-\frac{dv}{dr} = \left(\frac{\Delta p}{2k_0 L} \right)^{1/n_1} r^{1/n_1}. \quad (\text{II.85})$$

Разделяя переменные и учитывая, что при $r = r_1$ $v = 0$, найдем распределение скоростей

$$v = \left(\frac{\Delta p}{2k_0 L} \right)^{1/n_1} \frac{1}{1 + 1/n_1} (r_1^{1 + 1/n_1} - r^{1 + 1/n_1}). \quad (\text{II.86})$$

Далее определим расход

$$Q_1 = \pi \left(\frac{\Delta p}{2k_0 L} \right)^{1/n_1} \frac{r^{3 + 1/n_1}}{3 + 1/n_1}. \quad (\text{II.87})$$

В уравнении (II.87) отброшем индекс 1 при r . При $n_1 = 1$ из (II.87) получим формулу Пуазейля. Умножая величину Q_1 на число капиллярных трубок, заменяя L через ξL , определим общий поток:

$$Q = \frac{n\pi}{3 + \frac{1}{n_1}} r^{3 + 1/n_1} \left(\frac{\Delta p}{2k_0 \xi L} \right)^{1/n_1}. \quad (\text{II.88})$$

Если в уравнении

$$v_{\text{ср}} = \frac{2 \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2n_1} \right)}{\left(3 + \frac{1}{n_1} \right)} m \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n_1} \right) k^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{n_1} \right) \left(\frac{\Delta p}{k_0 L} \right)^{\frac{1}{n_1}} \quad (\text{II.89})$$

для ньютоновских жидкостей $n_1 = 1$, $k_0 = \mu$, то оно превращается в обычный закон Дарси.

Дадим общий вывод для произвольного закона $\dot{\gamma} = f_1(\tau)$. Заменяя $\dot{\gamma}$ через $-dv/dr$, получим

$$-\frac{dv}{dr} = f_1(\tau). \quad (\text{II.90})$$

Напряжения трения на цилиндрическом элементе жидкости радиуса r в цилиндрическом капилляре и на стенке его соответственно равны

$$\tau = \frac{r \Delta p}{2L}, \quad \tau_1 = \frac{r_1 \Delta p}{2L}, \quad \frac{\tau}{\tau_1} = \frac{r}{r_1}, \quad (\text{II.91})$$

где r_1 — радиус капилляра.

Из (II.90) и (II.91) имеем

$$-\frac{dv}{dr} = f_1 \left(\tau_1 \frac{r}{r_1} \right). \quad (\text{II.92})$$

Интегрируя, получим

$$v(r) = \int_r^{r_1} f_1 \left(\tau_1 \frac{r}{r_1} \right) dr. \quad (\text{II.93})$$

Расход жидкости в капилляре

$$Q_1 = \int_0^{r_1} 2\pi r v(r) dr. \quad (\text{II.94})$$

В результате интегрирования по частям получим

$$Q_1 = \pi \int_0^{r_1} r^2 f_1 \left(\tau_1 \frac{r}{r_1} \right) dr. \quad (\text{II.95})$$

Используя (II.91), имеем из (II.95)

$$Q_1 = \frac{8\pi \xi^3 L^3}{\Delta p^3} \int_0^{\frac{r_1 \Delta p}{2\xi L}} \tau^2 f_1(\tau) d\tau. \quad (\text{II.96})$$

При этом, так же как в предыдущих случаях, L заменено ξL .

Расход через n трубок $Q = Q_1 n$.

Используя соотношения теории фильтрации Кармана—Козени, получим после ряда преобразований следующую наиболее общую зависимость для фильтрации:

$$Q = \frac{L^3 m^2 F}{\Delta p^3 k} \int_0^{\frac{\sqrt{2} k^{1/2} \Delta p}{m^{1/2} L}} \tau^2 f_1(\tau) d\tau. \quad (\text{II.97})$$

Проблема аномальных жидкостей вызывает интерес перспективностью применения водорастворимых полимеров для заводнения нефтяных пластов. По некоторым данным «полимерным» заводнением можно увеличить конечный коэффициент нефтеотдачи на 10 %. Поэтому рассмотрение начнем с характеристики полимерных растворов.

Полимерами или высокомолекулярными соединениями называются сложные вещества с очень большими молекулярными массами. Характерная особенность такого соединения — наличие цепных молекул, в которых последовательно связано большое число атомов. Прочные химические связи вдоль цепи и более слабые (физические) в поперечном направлении между цепями при меньшем числе этих связей по сравнению с числом таких вдоль цепи — основные признаки полимеров.

При сильно разбавленном растворе полимера описанная сетчатая (пространственная) структура может быть существенно упрощена, если исключить взаимное влияние полимерных цепей и рассматривать каждую такую цепь изолированно.

Сформулированные выше признаки полимера определяют такие его физические свойства, как гибкость цепи, т. е. способность ее изменять форму под влиянием теплового движения звеньев или внешнего поля; высокоэластичность — способность к очень большим обратимым деформациям; переход из высокоэластичного состояния в вязкотекучее и др.

Представляется возможным использование моделей, описывающих состояние жидкостей для полимеров и их растворов [72] (см. рис. II.9 и 12).

Рассмотрим теперь полимеры, применяемые для загущения закачиваемой в пласт воды.

Наилучшие результаты показал полиакриламид (ПАА). Подвижность раствора этого полимера в пористой среде оказалась меньше рассчитанной стандартными методами. Отношение первого значения подвижности к второму называется фактором сопротивления. Согласно [63], изменение подвижности объясняется не-newтоновским характером течения, а также адсорбцией и механическим улавливанием полимера в пористой среде.

Однако отсутствие необходимой информации об экспериментах исключает возможность оценки роли каждого фактора.

По-видимому, для такой оценки необходимо получение по адекватной методике реологических параметров полимерного раствора.

В работе [63] справедливо отмечается, что для изучения реологической характеристики полимерных растворов необходимы высокоточные вискозиметры, обеспечивающие поддержание постоянного расхода в процессе опыта.

Особенно важно точное значение параметров в области малых градиентов скорости, которые характерны для пластовых условий.

На высокоточном вискозиметре были определены характеристики полимерных растворов. Ниже приводятся некоторые результаты этих исследований.

Анализ механизма течения разбавленных растворов полимеров приводит к выводу об уменьшении эффективной вязкости с увеличением градиента скорости (см. на рис. II.4, кривую 2). Гибкая цепная макромолекула в условиях малого межмолекулярного взаимодействия сильно разбавленных растворов имеет форму статического клубка.

Такие клубки подвергаются воздействию пары сил (вследствие разности скоростей слоев) и перемещаются, вращаясь, вдоль слоев потока. Пока градиент скорости мал, это движение не сопровождается деформацией частиц, при этом в принципе асимметричные клубки ориентируются длинными осями в направлении потока. С ростом градиента скорости происходит деформация полимерной частицы, возрастает ее асимметрия и, как следствие, увеличивается вязкость. Но, с другой стороны, ориентационные эффекты полимерных клубков должны способствовать уменьшению вязкости. В результате влияния этих двух факторов (деформации и ориентации) вязкость может изменяться с ростом градиента скорости в ту или другую сторону. Однако для реальных макромолекул влияние второго фактора сильнее, чем первого, поэтому в большинстве случаев вязкость сильно разбавленного раствора полимера должна уменьшаться при увеличении градиента скорости.

Указанное подтверждается специальными экспериментами, показывающими, что при сдвиговом течении водного раствора полиакриламида (ПАА) течение носило псевдопластический характер (см. на рис. II.4 кривую 2).

В результате проведенных экспериментов в вопросе фильтрации полимеров в пористой среде не сложилось единого мнения. Лабораторные эксперименты промышленного ПАА показали наличие перехода от псевдопластического характера фильтрации к дилатантному. Этот переход особенно заметен при возрастании скоростей фильтрации, причем чем выше проницаемость, тем больше скорость перехода. Отметим также, что рост молекулярной массы способствует появлению дилатансии. Высокая степень полидисперсности может коренным образом

изменить фильтрационную характеристику полимерных растворов, обусловив, в частности, дилатантный режим во всем исследованном (широком) диапазоне скоростей фильтрации.

Отмечено, что вода, закачиваемая вслед за полимерным раствором гидролизованного ПАА, течет как псевдопластическая жидкость.

Это объясняется адсорбцией и механическим удерживанием пористой средой полимера. Кроме того, промышленные образцы ПАА не могут служить моделями для установления общих закономерностей фильтрации растворов полимеров в пористой среде, так как они не свободны от различных примесей и сшитых структур.

ФИЛЬТРАЦИЯ ГАЗА

Рассмотрим ламинарное движение газа в узком капилляре. Расход газа через его сечение определяется из следующей зависимости:

$$Q_a = - \frac{\pi r^4}{8\mu} \cdot \frac{p}{p_a} \cdot \frac{dp}{dx}.$$

Интегрируя и вводя граничные условия: $x = 0, p = p_1$; $x = L, p = p_2$, получим

$$Q_a = - \frac{\pi r^4}{16\mu L} (p_1^2 - p_2^2) = \frac{\pi r^4}{8\mu} \bar{p} \frac{\Delta p}{L}, \quad (\text{II.98})$$

где \bar{p} — среднее давление в капилляре, а Δp — разность давлений концов капилляра.

При очень низких давлениях газа или малых радиусах капилляра, т. е. когда длина свободного пробега молекул существенно превосходит величину r радиуса капилляра, соударения молекул со стенками капилляра становятся более частыми, чем между собой. Процесс течения становится диффузионным. Этот вопрос впервые изучен Кнудсеном и носит название кнудсеновского течения (кнудсеновской диффузии).

Пусть в некотором сечении капилляра число молекул в единице объема равно N . Обозначим через u тепловую скорость молекулы (которая в соответствии с молекулярно-кинетической теорией газов одинакова во всех направлениях).

Число молекул, ударяющихся в единицу времени об единичную поверхность, равно $1/4 u N$. Эти молекулы передадут стенке количество движения, равное $(1/4 u N m) \omega$, где m — масса молекулы; ω — средняя составляющая скорости движения, параллельная стенке капилляра.

Умножая эту величину на элементарную боковую поверхность стенки длины dx , получим количество движения, передаваемое газом на этом участке:

$$(1/4 u N m) \omega 2\pi r dx. \quad (\text{II.99})$$

Полученную величину необходимо приравнять результирующей силе давления на выделенный элемент:

$$-\pi r^2 - (p + dp) \pi r^2 = -\pi r^2 dp = \frac{\pi r}{2} u N m w dx. \quad (\text{II.100})$$

Согласно молекулярно-кинетической теории, давление

$$p = \frac{1}{3} N m u^2, \quad (\text{II.101})$$

а расход газа равен

$$\frac{p_a}{p} Q_a = w \pi r^2. \quad (\text{II.102})$$

Подставив значения $N m u$ и w из (II.101) и (II.100) в (II.102), получим

$$p_a Q_a = -\frac{2}{3} \pi r^3 u \frac{dp}{dx}. \quad (\text{II.103})$$

С другой стороны, известно [46], что

$$u = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

Поэтому окончательно для случая стационарного течения имеем

$$Q_a = \frac{4\pi r^3}{3p_a} \sqrt{\frac{2RT}{\pi M}} \cdot \frac{\Delta p}{L}. \quad (\text{II.104})$$

Из уравнения (II.104) следует, что проницаемость капилляра при молекулярной диффузии не зависит от давления.

Опираясь на теорию Козеи и Кармана, можно от капилляров перейти к пористой среде по аналогичной схеме, рассмотренной в главе I. В сущности на этой теории основан метод Б. В. Дерягина — определения удельной поверхности пористых сред.

Если построить кривую зависимости $Q_a/\Delta p$ от среднего давления \bar{p} по формуле (II.104) для вязкого течения, то эта зависимость должна быть прямолинейной, причем при $\bar{p} \rightarrow 0$ величина $Q_a/\Delta p$ также должна стремиться к нулю. Для молекулярной же диффузии отношение $Q_a/\Delta p$ должно быть постоянным. В действительности, как показывают эксперименты, существует переходная зона между обоими предельными закономерностями с более или менее глубоким минимумом, природа которого недостаточно ясна.

Существуют различные модификации формулы (II.104), учитывающие скольжение газа вдоль стенок капилляров (пор) при малых радиусах капилляров и небольших давлениях.

Так, Кунд и Варбург предлагают формулу

$$Q_a = \frac{\pi r^4}{8\mu p_a} \bar{p} \frac{\Delta p}{L} \left(1 - \frac{4\zeta}{r}\right),$$

где ζ — коэффициент скольжения, который, согласно Мейеру, связан с длиной свободного пути (при течении газа в плоской щели):

$$\zeta = 2/3\lambda.$$

Клинкенберг вводит поправку в формулу для проницаемости в виде

$$k = k_{\infty} \left(1 + \frac{b}{p}\right).$$

где k_{∞} — проницаемость по отношению к несжимаемой жидкости, b — константа, являющаяся характеристикой газа и пористой среды.

Однако следует помнить, что даже с такими поправками формулами нельзя пользоваться при очень низких давлениях, когда характер течения становится молекулярным.

ПЛАСТОВЫЕ ВОДЫ

Как отмечалось в начале главы II, в нефтяном пласте в общем случае содержится пластовая вода. Отсутствие или незначительное количество ее в некоторых породах объясняется тем, что первоначально содержащаяся в них вода частично была вытеснена мигрировавшими углеводородами, а главным образом адсорбировалась глинистыми породами. Однако это пока предположение, нуждающееся в проверке.

По генетическому признаку воды нефтяных месторождений относятся к следующим группам.

Атмосферная вода. Эта вода выделяется из атмосферных осадков, просачиваясь в глубь пласта по проницаемым породам и далее растекаясь по плоскостям напластования. Кислород, содержащийся в воде, в результате взаимодействия с сульфидами образует сульфаты, а с двуокисью углерода — карбонаты и бикарбонаты. Поэтому содержание сульфатов, карбонатов и бикарбонатов в водах нефтяных месторождений служит косвенным показателем того, что по крайней мере часть воды проникает в нефтяные пласты с поверхности.

Погребенная вода. Эта вода проникла с поверхности в образовавшиеся пласты и далее была погребена в них под накопившимися впоследствии толщами осадочных образований.

Связанная вода. Она обволакивает поверхность пор и зерен и заполняет мельчайшие капиллярные каналы в нефтеносном пласте и удерживается в них молекулярно-поверхностными силами от участия в общем движении пластовых жидкостей.

Существует мнение, что связанная вода s_c представляет собой «остатки» воды, ранее насыщавшей пористое пространство и не полностью вытесненной мигрировавшими углеводородами.

При более детальной классификации необходимо выделить гигроскопическую и пленочную воды. Гигроскопическая вода физически наиболее прочно связана с поверхностью частиц молекулярными силами. При ее связывании порода выделяет теплоту, что указывает на огромную силу связи. Пленочная вода, покрывая гигроскопическую воду в виде тонкой пленки, удерживается частицами породы с меньшей силой, чем гигроскопическая. Обе разновидности вод образуют так называемую молекулярную воду.

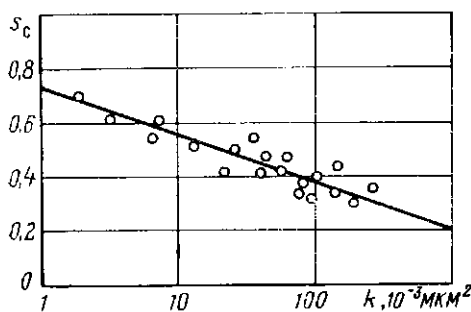


Рис. II.14. Зависимость проницаемости от содержания связанной воды [3]

Таблица II.6

Динамическая вязкость
воды в зависимости
от температуры
(в нормальных условиях)

Температура, °C	Динамическая вязкость, мПа·с
10	1,30
20	1,00
30	0,80
40	0,65
50	0,55

В Советском Союзе и за рубежом имеются многочисленные исследования, устанавливающие зависимость между содержанием связанной воды s_c и проницаемостью. На рис. II.14 приводится одна из них.

Вязкость воды в пластовых условиях зависит в основном от температуры и концентрации растворенных солей. В таблице II.6 приводятся значения динамической вязкости воды в зависимости от температуры (в нормальных условиях).

Из таблицы следует, что температура оказывает значительное влияние на величину вязкости воды.

По данным В. И. Сергеевича и Т. П. Жузе, вязкость минерализованной хлоркальцевой воды при температуре 40 и 80 °C выше вязкости чистой воды соответственно на 35 и 90 %. Влияние давления на вязкость значительно слабее. Вследствие малой растворимости газов в воде вязкость ее уменьшается на незначительную величину при насыщении газом.

ФИЛЬТРАЦИЯ ОДНОРОДНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛАСТЕ

Современная подземная гидродинамика в существенной степени опирается на математическую физику.

Объектами математической физики являются физические поля (тепловые, электрические, гидродинамические и др.), которые описываются, как правило, при помощи дифференциальных уравнений с частными производными.

В нашу задачу входит нахождение фильтрационного поля, т. е. характера распределения потенциала или давления в рассматриваемой области при заданных начальных и граничных условиях.

В этой главе мы рассмотрим установившиеся фильтрационные потоки, соответствующие стационарным полям потенциала (или давления), т. е. таким полям, которые не изменяются с течением времени.

Кроме того, если это специально не оговорено, будем предполагать, что пористая среда изотропна. Для такой среды характерно постоянство проницаемости по всем направлениям в окрестности рассматриваемой точки. Из изотропии среды, однако, не следует, что проницаемость не может изменяться с переходом от точки к точке: пласт может быть изотропен, и вместе с тем для него условие постоянства $k(x, y, z)$ может и не соблюдаться.

В этой главе мы ограничимся случаями $k(x, y, z) = \text{const}$.

Прежде всего, используя закон Дарси дифференциальной формы, которая устанавливает зависимость между вектором скорости фильтрации и совпадающим с ним вектором $\frac{d\varphi}{dl}$, выведем составляющие скоростей фильтрации по осям x, y, z .

С этой целью возьмем в области фильтрации некоторую точку и определим в этой точке скорость фильтрации в каком-либо направлении n .

Воспользовавшись формулой для определения производной сложной функции, получим

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dn} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dn} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dn}. \quad (\text{III.1})$$

Правая часть (III.1) представляет собой скалярное произведение двух векторов:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dn} \vec{i} + \frac{dy}{dn} \vec{j} + \frac{dz}{dn} \vec{k} \right), \quad (\text{III.2})$$

где \vec{i} , \vec{j} и \vec{k} — единичные векторы (орты) по осям x , y и z . В правильности утверждения можно убедиться непосредственным перемножением, помня при этом, что $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$, а скалярные произведения разноименных ортов равны нулю.

Первый множитель (III.2) называется градиентом фильтрационного поля:

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} = \nabla \varphi, \quad (\text{III.3})$$

где ∇ (набла-оператор), обозначающий совокупность операций над функцией φ .

Второй множитель перепишется так:

$$\frac{d}{dn} (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) = \frac{dn}{dn} \vec{\tau} = \vec{\tau}, \quad (\text{III.4})$$

где $\vec{\tau}$ — единичный вектор направления n .

Учитывая это, получим

$$\frac{d\varphi}{dn} = \text{grad } \varphi \cdot \vec{\tau}. \quad (\text{III.5})$$

Выражению (III.5) придадим другой вид, спроектировав вектор $\text{grad } \varphi$ на направление единичного вектора (направление n):

$$\frac{d\varphi}{dn} = |\text{grad } \varphi| \cos(n, \text{grad } \varphi). \quad (\text{III.6})$$

Отсюда ясно, что скорость изменения поля $d\varphi/dn$ (в данном случае скорость фильтрации) имеет наибольшее значение в направлении градиентов φ , так как для него $\cos(n, \text{grad } \varphi) = 1$.

Это направление мы обозначим буквой l , помня, что, согласно закону Дарси, в дифференциальной форме оно совпадает с внешней нормалью к эквипотенциальной поверхности. Отсюда $(d\varphi/dn)_{n=l}$ — градиент фильтрационного поля.

Из анализа следует:

$$\vec{v} = -\text{grad } \varphi, \quad (\text{III.7})$$

$$v_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (\text{III.8})$$

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu} \text{grad } \varphi, \quad (\text{III.9})$$

$$v_x = -\frac{k}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \quad v_y = -\frac{k}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}, \quad v_z = -\frac{k}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (\text{III.10})$$

Выделим из фильтрационного потока параллелепипед бесконечно малого размера, ребра которого параллельны осям x, y, z прямоугольной системы координат. Через левую грань параллелепипеда площадью $dy dz$ вдоль оси x удельный расход массы жидкости составит $\rho v_x (dy dz)$, а через правую

$$-\rho \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) (dy dz).$$

Плотность ρ жидкости не изменится, так как она считается несжимаемой.

Аналогично определим расходы через остальные грани. Через заднюю и переднюю грани $dx dz$ вдоль оси y расходы соответственно будут

$$\rho v_y (dx dz) \text{ и } -\rho \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \right) (dx dz).$$

Через нижнюю и верхнюю грани $dx dy$ расходы вдоль оси z равны соответственно

$$\rho v_z (dx dy) \text{ и } -\rho \left(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \right) (dx dy).$$

Алгебраическая сумма расходов, очевидно, равна нулю, что дает

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (\text{III.11})$$

Полученное выражение представляет собой расходимость (div).

Для сжимаемой жидкости (см. [35]) $\text{div } \vec{v} \neq 0$. Итак, при несжимаемой жидкости

$$\text{div } \vec{v} = 0. \quad (\text{III.12})$$

Заменяя v , получим

$$\text{div} \left(\frac{k}{\mu} \text{grad } p \right) = \nabla^2 p = 0. \quad (\text{III.13})$$

Для однородной среды k является постоянной, тогда предыдущее выражение представим в виде

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{III.14})$$

$$\text{или } \text{div} (\text{grad } p) = 0. \quad (\text{III.15})$$

Выражение (III.14) — уравнение Лапласа — имеет исключительно большое значение в различных приложениях и, в частности, в теории фильтрации.

Остановимся вкратце на некоторых его свойствах.

Уравнение (III.14) описывает стационарное поле давлений¹, т. е. такое поле, которое не изменяется с течением времени. Однако с известными оговорками результаты решений уравнения (III.14) можно распространить и на некоторые нестационарные случаи. Приведем следующий пример. Фильтрация несжимаемой жидкости к системе скважин при заданных, неизменных во времени давлениях на контуре питания и забоях скважин описывается уравнением Лапласа. Предположим, необходимо изучить влияние пуска (остановки) каких-то скважин или изменения дебита их на поведение других скважин (т. е. на дебиты последних или на забойные давления). Эту задачу можно достаточно строго решить, используя другой класс дифференциальных уравнений (см. главу IV). Однако классическая теория интерференций скважин, берущая свое начало с работ М. Маскета и В. Н. Щелкачева, исходит при решении этой задачи (и аналогичных ей) из предположения, что сразу после изменения условий в скважинах устанавливается новое стационарное фильтрационное поле, которое затем сравнивается со старым (эффект интерференции). Разумеется, такая теория является приближенной, поскольку в реальных условиях требуется некоторое время для перераспределения давления². Однако оно во многих случаях дает удовлетворительный ответ на поставленный вопрос при помощи весьма простых математических средств. Можно было бы привести большое число примеров такого рода, иллюстрирующих возможность этого метода в задачах, носящих принципиально неустановившийся характер.

Приведенные соображения необходимы, так как содержащееся в некоторых работах утверждение о том, что уравнение (III.14) справедливо как для установившегося, так и для неустановившегося потока может быть без соответствующих объяснений понято буквально.

Пусть p_1 и p_2 — два решения уравнения Лапласа (III.14). Тогда

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} = 0, \quad (\text{III.16})$$

$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_2}{\partial z^2} = 0. \quad (\text{III.17})$$

¹ Здесь и в дальнейшем рассуждения ведутся в терминах теории фильтрации. Не представит труда обобщить их и на случай других полей, описываемых уравнением Лапласа.

² Это время равно бесконечности, однако, начиная с некоторого момента времени, можно считать «новое» поле стационарным.

Умножим первое уравнение на C_1 , а второе на C_2 и, сложив результаты, получим выражение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (C_1 p_1 + C_2 p_2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (C_1 p_1 + C_2 p_2) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (C_1 p_1 + C_2 p_2) = 0, \quad (\text{III.18})$$

т. е. $p = C_1 p_1 + C_2 p_2$, которое также является решением уравнения (III.14).

Эту операцию можно продолжить много раз и получить

$$p = \sum C_i p_i. \quad (\text{III.19})$$

Такой результат объясняется тем, что уравнение Лапласа однородно и линейно по p .

Указанный закон, или правило суперпозиции, широко используется при решении разнообразных задач подземной гидродинамики, сводящихся к уравнению Лапласа ¹.

ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ В АНИЗОТРОПНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Анизотропия пористой среды — явление более распространенное, чем изотропия. Для анизотропной пористой среды характерна зависимость проницаемости от направления скорости фильтрации.

Если бы пористая среда была изотропной составляющие скорости фильтрации по осям x , y и z

$$v_x = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad v_y = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad v_z = -\frac{\partial p}{\partial z}, \quad (\text{III.20})$$

обозначая оси x , y и z соответственно через x_1 , x_2 и x_3 , получим

$$v_1 = -\frac{k}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad v_2 = -\frac{k}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_2}, \quad v_3 = -\frac{k}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_3}. \quad (\text{III.21})$$

Возможно ли написание для анизотропной пористой среды уравнений вида (III.21) при замене в них значения k проницаемостями k_1 , k_2 и k_3 соответственно по осям x_1 , x_2 и x_3 ? В общем случае такое преобразование недействительно, так как каждая компонента скорости фильтрации в точке является линейной функцией компонентов градиента давления, а именно:

$$\left. \begin{aligned} -v_1 &= \alpha_{11} I_1 + \alpha_{12} I_2 + \alpha_{13} I_3 \\ -v_2 &= \alpha_{21} I_1 + \alpha_{22} I_2 + \alpha_{23} I_3 \\ -v_3 &= \alpha_{31} I_1 + \alpha_{32} I_2 + \alpha_{33} I_3 \end{aligned} \right\}, \quad (\text{III.22})$$

где через α_{ij} обозначено k_{ij}/μ и $I_i = \partial p / \partial x_i$.

При этом $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, т. е. $\alpha_{12} = \alpha_{21}$, $\alpha_{13} = \alpha_{31}$, $\alpha_{23} = \alpha_{32}$.

¹ Принцип суперпозиции в соответствующем виде применим и к другим классам дифференциальных уравнений.

В анизотропной среде вектор скорости фильтрации \vec{v} обычно не параллелен вектору градиента давления \vec{l} . Возможны случаи перпендикулярности их, а это означает, что фильтрация не происходит в направлении градиента давления.

Совокупность величин α_{ij} в (III.22), зависящих от двух индексов i и j и подчиняющихся определенному закону изменения с переходом от одной системы координат к другой, называется тензором второго ранга. Поскольку $\alpha_{ij} = k_{ij}/\mu$, то и проницаемость также является тензором.

Теперь выясним закон изменения α_{ij} , для чего рассмотрим билинейную форму следующего вида:

$$F = \alpha_{11}\xi_1\eta_1 + \alpha_{12}\xi_1\eta_2 + \alpha_{13}\xi_1\eta_3 + \alpha_{21}\xi_2\eta_1 + \alpha_{22}\xi_2\eta_2 + \alpha_{23}\xi_2\eta_3 + \\ + \alpha_{31}\xi_3\eta_1 + \alpha_{32}\xi_3\eta_2 + \alpha_{33}\xi_3\eta_3, \quad (\text{III.23})$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 и η_1, η_2, η_3 — компоненты двух векторов.

С переходом от заданной системы координат к другой составляющие этих векторов и коэффициента α_{ij} в общем случае изменяются. Если, однако, это изменение происходит таким образом, что в новой системе координат билинейная форма F остается инвариантной, то девять чисел α_{ij} действительно являются тензором второго ранга.

При этом формулы, по которым определяются новые значения α'_{ij} , имеют вид

$$\alpha'_{ij} = \sum_{m=1}^3 l_{im} l_{jm} \alpha_{m}, \quad (\text{III.24})$$

где l с соответствующими индексами — косинусы углов осей старой и новой систем координат.

Напомним, что соответствующие ограничения действуют и при определении вектора. Не всякая величина, представленная компонентами ξ_1, ξ_2, ξ_3 , может считаться вектором. Критерием является линейная форма

$$F = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3. \quad (\text{III.25})$$

Если эта форма остается инвариантной при переходе от одной системы координат к другой, то рассматриваемая величина является вектором.

Для инвариантности необходимо, чтобы новые коэффициенты линейной формы определялись по формуле

$$a'_i = \sum_{k=1}^3 l_{ik} a_k. \quad (\text{III.26})$$

В дальнейшем рассмотрим плоскопараллельное поле, т. е. такое поле, которое в некоторой декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 не зависит от одной координаты (например, x_3). Во

всех плоскостях, перпендикулярных к оси x_3 , поля одинаковы, что дает основание считать картину потока не зависящей от этой оси.

Пусть дан вектор

$$\left. \begin{aligned} -v_1 &= \alpha_{11}l_1 + \alpha_{12}l_2 \\ -v_2 &= \alpha_{21}l_1 + \alpha_{22}l_2 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III.27})$$

Составим скалярное произведение $\vec{v} \cdot \vec{l}$, которое как раз и будет равно билинейной форме (III.23), если предположить, что $\xi_i = \eta_i$. Итак, коэффициенты α_{ij} билинейной формы являются коэффициентами этого вектора. Поэтому формула (III.27) дает возможность определить значения этих коэффициентов в новой системе координат.

Представим в табл. III.1 значения косинусов углов для старой (x_1, x_2, x_3) и новой (x'_1, x'_2, x'_3) , повернутой на угол α , системы координат.

Т а б л и ц а III.1

Переход от старой системы координат
к новой

	x_1	x_2
x'_1	$l_{11} = \cos \alpha$	$l_{12} = \sin \alpha$
x'_2	$l_{21} = \sin \alpha$	$l_{22} = \cos \alpha$

Коэффициенты новой системы координат

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_{11} &= l_{11}^2 \alpha_{11} + l_{11} l_{12} \alpha_{12} + l_{12} l_{21} \alpha_{21} + l_{12}^2 \alpha_{22} \\ \alpha'_{12} &= l_{11} l_{21} \alpha_{11} + l_{11} l_{22} \alpha_{12} + l_{12} l_{21} \alpha_{21} + l_{12} l_{22} \alpha_{22} \\ \alpha'_{21} &= l_{21} l_{11} \alpha_{11} + l_{21} l_{12} \alpha_{12} + l_{22} l_{11} \alpha_{21} + l_{22} l_{12} \alpha_{22} \\ \alpha'_{22} &= l_{21}^2 \alpha_{11} + l_{21} l_{22} \alpha_{12} + l_{22} l_{21} \alpha_{21} + l_{22}^2 \alpha_{22} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III.28})$$

Учитывая, что $\alpha_{12} = \alpha_{21}$, получим $\alpha'_{12} = \alpha'_{21}$, т. е. в любой другой системе прямоугольных координат условие $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ соблюдается. Такой тензор называется симметричным.

Можно показать, что существует единственная система прямоугольных координат, для которой коэффициенты со смешанными индексами равны нулю $\alpha_{ij} = 0$. Эти направления называются главными направлениями тензора. Для этих направлений, очевидно, имеем

$$-v_1 = \alpha_{11}l_1, \quad -v_2 = \alpha_{22}l_2.$$

Отметим, что по одному главному направлению величина проницаемости достигает максимального, а по другому — минимального значения.

Если старая система координат (x_1, x_2) соответствовала главным направлениям, то необходимо принять $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$. Тогда для новой системы (x'_1, x'_2) , согласно таблице III.1, имеем

$$\left. \begin{aligned} k'_{11} &= (\cos^2 \alpha) k_1 + (\sin^2 \alpha) k_2 \\ k'_{21} &= k'_{12} = -\left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha\right) k_1 + \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha\right) k_2 \\ k'_{22} &= (\sin^2 \alpha) k_1 + (\cos^2 \alpha) k_2 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III.29})$$

При этом учитывалась зависимость между α и k , $\alpha = k/\mu$. Для главных направлений вторые индексы, очевидно, несущественны, поэтому их не учитывают: $k_{11} = k_1$, $k_{22} = k_2$.

Формулы (III.29) дают возможность определить компоненты тензора проницаемости в любой прямоугольной системе координат по известным компонентам k_1 и k_2 по главным направлениям. Можно решить и обратную задачу, т. е. по известным значениям k'_{11} , k'_{22} , k'_{12} найти k_1 , k_2 и α .

Часто анизотропия выражается повышенной проницаемостью вдоль напластования по сравнению со значениями ее в перпендикулярном направлении. Указанная особенность пластов обусловлена распределением и унаковкой частиц породы в процессе седиментации [34]. При осаждении неса в воде тенденция укладывания зерен такая, что длинные оси их располагаются в плоскости напластования. Это способствует уменьшению сопротивления при движении растворяющих минералы жидкостей в плоскостях напластования и еще большему увеличению проницаемости в этом направлении.

Ограничимся рассмотрением тонкослоистого анизотропного пласта, образованного из чередующихся изотропных слоев толщиной Δh_1 и Δh_2 и проницаемостью k_1^* и k_2^* .

Вначале рассмотрим фильтрацию вдоль слоев. По закону Дарси для каждого слоя получим

$$q_1 = \frac{k_1^* \Delta h_1}{\mu} \cdot \frac{\Delta p}{L}, \quad (\text{III.30})$$

$$q_2 = \frac{k_2^* \Delta h_2}{\mu} \cdot \frac{\Delta p}{L}, \quad (\text{III.31})$$

где q_1 и q_2 — расходы в каждом слое шириной, равной единице, причем градиент давления $\Delta p/L$ в обоих слоях одинаков.

Общий расход будет

$$q = \frac{k_1 \Delta h}{\mu} \cdot \frac{\Delta p}{L}, \quad (\text{III.32})$$

где $\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2$, а

$$k_1 = \frac{k_1^* \Delta h_1 + k_2^* \Delta h_2}{\Delta h_1 + \Delta h_2} = k_1^* \frac{\Delta h_1}{\Delta h} + k_2^* \frac{\Delta h_2}{\Delta h}. \quad (\text{III.33})$$

Рассмотрим теперь фильтрацию в направлении нормали к слоям. Обозначив через Δp_1 падение давления в первом слое, получим расход

$$q = \frac{k_1^* F}{\mu} \cdot \frac{\Delta p_1}{\Delta h_1}. \quad (\text{III.34})$$

Во втором слое расход будет таким же:

$$q = \frac{k_2^* F}{\mu} \cdot \frac{\Delta p_2}{\Delta h_2}. \quad (\text{III.35})$$

Из (III.34) и (III.35) найдем

$$q = \frac{k_2^* F}{\mu} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta h},$$

где $\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2$, а

$$k_2 = \frac{1}{\frac{1}{k_1^*} \cdot \frac{\Delta h_1}{\Delta h} + \frac{1}{k_2^*} \cdot \frac{\Delta h_2}{\Delta h}}. \quad (\text{III.36})$$

Можно показать, что $k_1 > k_2$. Направления вдоль и поперек напластования являются главными, поэтому $k_1 = k_{\max}$ и $k_2 = k_{\min}$.

Рассмотрим более общее, чем (III.11), уравнение. Допустим, найдены главные оси координат, для которых, как известно,

$$v_x = -\frac{k_x}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \quad v_y = -\frac{k_y}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}, \quad v_z = -\frac{k_z}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Подставляя их в уравнение (III.11), получим

$$k_x \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \quad (\text{III.37})$$

Введем новые переменные

$$x_1 = \sqrt{\frac{k_z}{k_x}} x, \quad y_1 = \sqrt{\frac{k_z}{k_y}} y, \quad z_1 = z.$$

Тогда уравнение (III.37) в новых координатах x_1 , y_1 и z_1 будет уравнением Лапласа:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z_1^2} = 0.$$

Имея решение этого уравнения для конкретных граничных условий, переходят к старым переменным x , y и z .

ПРОСТЕЙШИЕ РЕШЕНИЯ, ПОЛУЧАЕМЫЕ НЕПОСРЕДСТВЕННЫМ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ УРАВНЕНИЯ (III.14)

Непосредственному интегрированию поддаются, как правило, так называемые одномерные задачи, которые соответствуют фильтрационному потоку, зависящему от одной координаты.

Самый простой случай — линейный поток, к которому могут быть сведены, с достаточной для практики точностью, многие фильтрационные потоки (рис. III.1, а).

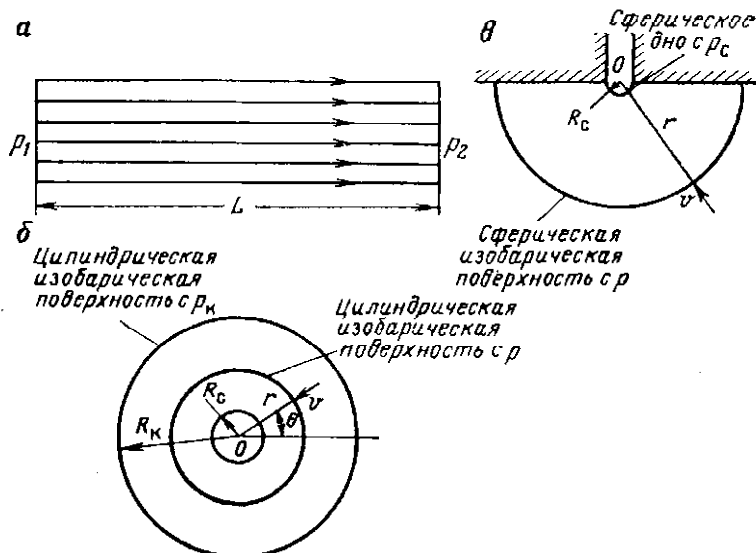


Рис. III.1. Одномерные течения.

а — линейный поток; б — плоскорадиальный поток; в — сферический радиальный поток

Дифференциальное уравнение (III.14) при этом примет вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0. \quad (\text{III.38})$$

Откуда в результате двукратного интегрирования получим

$$p = Cx + C_1. \quad (\text{III.39})$$

Пусть при $x = 0$ $p = p_1$, при $x = L$ $p = p_2 < p_1$.

Подставляя в (III.39), получим линейное распределение давления

$$p = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{L} x. \quad (\text{III.40})$$

Используя (III.40), получим, как и следовало ожидать, закон Дарси:

$$v = \frac{k}{\mu} \frac{p_1 - p_2}{L}. \quad (\text{III.41})$$

Так как поток одинаков для всех линий, перпендикулярных к плоскости yoz , то расход определится по формуле

$$q = \frac{kF}{\mu} \cdot \frac{p_1 - p_2}{L}, \quad (\text{III.42})$$

где F — площадь сечения потока, параллельная плоскости yoz .

Второй случай — плоскорадиальный поток, т. е. поток с осевой симметрией (см. рис. III.1, б).

Такой поток реализуется при работе одной совершенной скважины в однородном изотропном пласте постоянной толщины h неограниченной протяженности во все стороны или имеющем цилиндрическую поверхность питания, с осью цилиндра, совпадающей с осью скважины.

Скважина считается совершенной по степени вскрытия, если она вскрывает полную толщину пласта.

Если жидкость фильтруется в скважину через отверстия в обсадной колонне, то скважину называют совершенной по степени вскрытия, но несовершенной по характеру вскрытия. Скважина — совершенная по обоим признакам или просто совершенная тогда, когда она вскрывает пласт на всю толщину без фильтра. Фильтрационное поле здесь одинаково для всех плоскостей, перпендикулярных к оси z . Поле зависит от двух координат x и y . Однако поскольку расстояние от оси до точки

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

то картина распределения зависит от одной координаты r .

Уравнение Лапласа можно представить в цилиндрических координатах r и θ (см. рис. III.1, б). В данном случае вследствие осевой симметрии поле не зависит от угла θ . Дадим наглядное решение этой задачи, минуя преобразование координат.

Пусть ось цилиндра радиуса $r > R_c$, а R_c — радиус скважины, совпадает с осью z .

Определим скорость фильтрации на этой поверхности через расход жидкости:

$$v = \frac{q}{2\pi rh}. \quad (\text{III.43})$$

Согласно закону Дарси,

$$v = \frac{k}{\mu} \cdot \frac{dp}{dn} = \frac{k}{\mu} \cdot \frac{dp}{dr}. \quad (\text{III.44})$$

Заменяя v его значением из (III.43) и интегрируя, получим

$$p = \frac{\mu q}{2\pi kh} \ln r + C. \quad (\text{III.45})$$

При $r = R_c$ $p = p_c$, откуда

$$C = p_c - \frac{\mu q}{2\pi kh} \ln R_c,$$

$$p - p_c = \frac{\mu q}{2\pi kh} \ln \frac{r}{R_c}. \quad (\text{III.46})$$

Из (III.46) следует, что при $r \rightarrow \infty$ величина p также стремится к бесконечности.

При $r = R_k$ $p = p_k$, где p_k — давление на поверхности питания.

Подставляя в (III.46), получим формулу Дююи для определения дебита скважины

$$q = \frac{2\pi kh}{\mu} \cdot \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{R_c}}. \quad (\text{III.47})$$

Характерной особенностью приведенного решения является слабая зависимость дебита от радиуса R_k (области) для достаточно больших значений R_k/R_c .

Это служит причиной того, что расчеты по формуле Дююи дают удовлетворительные результаты и в тех случаях, когда имеет место существенное смещение оси скважины относительно оси цилиндрической области питания. Пусть c — расстояние между этими осями.

Построим цилиндрическую поверхность радиуса $R = R_k - c$, приняв за ось ось скважины. Будем считать эту поверхность поверхностью питания. Тогда дебит скважины будет

$$q_1 = \frac{2\pi kh}{\mu} \cdot \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k - c}{R_c}}. \quad (\text{III.48})$$

Построим цилиндрическую поверхность радиуса $R = R_k + c$, принимая за ось ту же скважину. Если считать эту цилиндрическую поверхность поверхностью питания, то величина дебита будет равна

$$q_2 = \frac{2\pi kh}{\mu} \cdot \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k + c}{R_c}}. \quad (\text{III.49})$$

Истинная поверхность питания находится между двумя построенными. Поэтому величина действительного дебита должна быть заключена между значениями q_1 и q_2 ($q_2 < q < q_1$).

Ниже, в табл. III.2, приводятся значения q_1/q_2 для ряда величин относительного смещения осей c/R_k при двух значениях $R_k/R_c = 1000$, $R_k/R_c = 10\,000$.

Из табл. III.2 следует, что предельные дебиты, ограничивающие реальный дебит несоосной скважины, отличаются друг от

друга на 30 % ($R_K/R_c = 10^3$) и 22 % ($R_K/R_c = 10^4$) даже при достаточно большом относительном смещении $c/R_K = 0,7$.

Следовательно, если вычислять дебит скважины, несоосно расположенной в круговом пласте (при $c/R_K < 0,7$), по одному из предельных вариантов, то при этом допустим ошибку не более чем на 30 % ($R_K/R_c = 10^3$) или 22 % ($R_K/R_c = 10^4$). По-видимому, более точного результата можно добиться, выбрав средний вариант $q_{cp} = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$ или произведя расчет по формуле Дюпюи для фиктивной залежи среднего радиуса

$$R_{cp} = \frac{1}{2}(R_{min} + R_{max}).$$

Т а б л и ц а III.2

Результаты определения отношения q_1/q_2
в зависимости от величины c/R_K

R_K/R_c	c/R_K				
	0	0,1	0,3	0,5	0,7
10^3	1,0	1,03	1,09	1,18	1,30
10^4	1,0	1,02	1,07	1,13	1,22

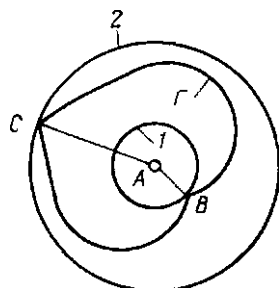


Рис. III.2. Схема для расчета притока жидкости к скважине в пласте неправильной формы

Из рассмотренных выше примеров можно сделать следующие выводы.

1. Точное определение радиуса поверхности питания — необязательное условие получения удовлетворительного решения, что имеет большое практическое значение. В действительных условиях радиус поверхности питания вычисляется с той или иной степенью достоверности. Если при его определении допускается не слишком большая ошибка (например, если вероятное значение этого радиуса заключено между значениями, которые отличаются друг от друга в два раза), то ошибка при нахождении дебита не превосходит нескольких процентов¹. Вообще говоря, ошибка в 5—10 % и даже более не должна считаться значительной, так как геолого-физические параметры (пористость, проницаемость и т. д.) определяются, как правило, с точностью порядка 10—20 %.

2. Для вычисления формулу Дюпюи можно применять не только при круговых цилиндрических поверхностях питания, но и при геометрически правильных цилиндрических поверхностях,

¹ Указанное положение справедливо для достаточно больших R_K/R_c .

а также поверхностях неправильной извилистой формы. Пусть, например, поверхность питания имеет вид кривой Γ , показанной на рис. III.2. Ближайшая к скважине точка B находится на расстоянии $AB = 1$ км, самая далекая точка C находится на расстоянии $AC = 2,5$ км. Используем метод, рассматриваемый в предыдущей задаче. Вся поверхность питания будет заключена между поверхностями 1 и 2.

Определим по формуле Дюпюи дебиты, предполагая, что поверхностью питания является вначале поверхность радиуса $R_{\min} = 1$ км, а затем поверхность $R_{\max} = 2,5$ км; $R_c = 0,1$ м.

$$\text{Тогда } q_1 = \frac{2\pi kh}{\mu} \cdot \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{1000}{0,1}}, \quad q_2 = \frac{2\pi kh}{\mu} \cdot \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{2500}{0,1}},$$

$$\text{откуда } \frac{q_1}{q_2} = \frac{\lg 25000}{\lg 10000} = 1,1,$$

т. е. предельные дебиты отличаются друг от друга на 10 %. Следовательно, при расчете по одному из предельных вариантов допускается ошибка не более чем на 10 %.

Приведенные примеры достаточно ясно иллюстрируют возможности применения формулы Дюпюи.

В дальнейшем читатель сам сумеет рациональным выбором предельных и средних вариантов установить область целесообразного использования этой формулы для различных случаев.

Третий случай — поток точечного источника или стока (сферический радиальный поток) имеет центральную симметрию, так как поле скоростей одинаково во всех направлениях.

Такой поток наблюдается, когда скважина вскрывает только самую кровлю пласта или глубина вскрытия в несколько раз меньше его толщины. В этом случае при известном приближении можно заменить реальный фильтрационный поток в окрестности забоя скважины сферическим радиальным потоком с центром, расположенным на оси скважины в точке пересечения этой оси с кровлей (см. рис. III.1, в).

Скорость фильтрации на расстоянии r от стока или источника будет

$$v = \frac{q}{4\pi r^2}. \quad (\text{III.50})$$

Подставляя это значение в формулу Дарси (III.44), получим после интегрирования

$$p = -\frac{\mu q}{4\pi k} \cdot \frac{1}{r} + C. \quad (\text{III.51})$$

При $r = R_c$ $p = p_c$, следовательно,

$$p - p_c = \frac{\mu q}{4\pi k} \left(\frac{1}{R_c} - \frac{1}{r} \right). \quad (\text{III.52})$$

Отсюда видно, что с ростом r возрастает и p , стремясь к пределу $p \rightarrow p_k$ при $r \rightarrow \infty$. Дебит скважины при этом будет

$$q = \frac{4\pi R_c k}{\mu} (p_k - p_c). \quad (\text{III.53})$$

ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ПОТОКИ В ПЛАСТЕ СО МНОГИМИ СКВАЖИНАМИ

Приведенные в предыдущем параграфе решения можно применять не только в расчетах соответствующих одномерных потоков, но и в более сложных случаях. Один из способов получения расчетных зависимостей для сложных потоков в пласте — применение принципа суперпозиции простейших потоков типа плоскорадиального для плоских задач фильтрации или типа сферически радиального — для пространственных.

Рассмотрим две совершенные скважины с дебитами q_1 и q_2 в пласте постоянной толщины, простирающемся во все стороны неограниченно (рис. III.3).

Решением уравнения Лапласа может быть поле, составленное по закону суперпозиции из двух полей вида (III.45), т. е.

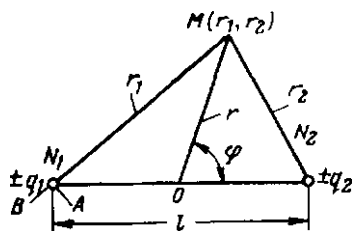


Рис. III.3. К расчету давления в бесконечном пласте

$$p = C_1 \frac{\mu q_1}{2\pi k h} \ln r_1 + C_2 \frac{\mu q_2}{2\pi k h} \ln r_2 + C, \quad (\text{III.54})$$

где C — постоянная интегрирования, r_1 и r_2 — расстояние от рассматриваемой точки M до «центров» скважин¹.

Посмотрим, каким граничным условиям это решение соответствует.

Определим давления в двух точках A и B пересечения линии «центров» скважин с поверхностью скважины № 1:

$$p_A = C_1 \frac{\mu q_1}{2\pi k h} \ln R_c + C_2 \frac{\mu q_2}{2\pi k h} \ln (l - R_c) + C, \quad (\text{III.55})$$

$$p_B = C_1 \frac{\mu q_1}{2\pi k h} \ln R_c + C_2 \frac{\mu q_2}{2\pi k h} \ln (l + R_c) + C, \quad (\text{III.56})$$

$$p_A - p_B = C_2 \frac{\mu q_2}{2\pi k h} \ln \frac{l - R_c}{l + R_c}. \quad (\text{III.57})$$

Расстояние между скважинами, как известно, исчисляется десятками и сотнями метров, в то время как радиус скважины

¹ Под центром подразумевается точка пересечения оси скважины с горизонтальной плоскостью.

равен нескольким сантиметрам ($l \gg R_c$). Отсюда следует, что с очень высокой степенью точности можно принять $p_A \approx p_B$. Поскольку в этих точках давления достигают экстремальных значений, то и во всех точках поверхности скважины (окружности радиуса R_c) давление можно считать одинаковым и равным

$$p_1 = C_1 \frac{\mu q_1}{2\pi k h} \ln R_c + C_2 \frac{\mu q_2}{2\pi k h} \ln l + C. \quad (\text{III.58})$$

Скорости в точках A и B , очевидно, будут

$$v_A = C_1 \frac{q_1}{2\pi R_c h} + C_2 \frac{q_2}{2\pi (l - R_c) h}, \quad (\text{III.59})$$

$$v_B = C_1 \frac{q_1}{2\pi R_c h} + C_2 \frac{q_2}{2\pi (l + R_c) h}. \quad (\text{III.60})$$

При $l \gg R_c$ $v_A \approx v_B$, т. е. можно принять, что скорость во всех точках окружности $r = R_c$ одинакова и равна

$$v = C_1 \frac{q_1}{2\pi R_c h} + C_2 \frac{q_2}{2\pi l h}, \quad (\text{III.61})$$

где коэффициенты $C_1 = C_2 = 1$.

Проводя аналогичные рассуждения относительно поля в окрестности скважины № 1, придем к выводу, что во всех точках окружности r_1 величина p практически постоянна; иными словами, эти окружности можно считать изобарами.

Те же рассуждения, очевидно, имеют силу и для окрестности скважины № 2.

Изучим теперь поле вдали от скважин.

Обозначим через φ угол между радиусом-вектором r , проведенным из середины отрезка l до точки $M(r_1, r_2)$, и направлением этого отрезка. Тогда давление в этой точке будет равно

$$p = \frac{\mu q_1}{4\pi k h} \ln \left(r^2 + \frac{l^2}{4} + r l \cos \varphi \right) + \frac{\mu q_2}{4\pi k h} \ln \left(r^2 + \frac{l^2}{4} - r l \cos \varphi \right) + C. \quad (\text{III.62})$$

При достаточно больших значениях r ($r \gg l$) можно заменить логарифмы их приближенными значениями согласно формуле $\ln(1+x) \approx x - x^2/2$. Тогда

$$p \approx \frac{\mu (q_1 + q_2)}{2\pi k h} \ln r + \frac{\mu (q_1 - q_2)}{2\pi k h} \left(\frac{l}{r} \right) \cos \varphi + C, \quad (\text{III.63})$$

причем члены порядка $(l/r)^2$, $(l/r)^3$, $(l/r)^4$ отброшены.

При $q_1 + q_2 \neq 0$, начиная с некоторого значения r , вклад второго члена мал по сравнению с вкладом первого, поэтому

$$p \approx \frac{\mu (q_1 + q_2)}{2\pi k h} \ln r + C, \quad (\text{III.64})$$

т. е. давление вдали от скважин изменяется по логарифмическому закону, при этом изобары приближенно можно заменить окружностями с общим центром, совпадающим с серединой отрезка l .

При $q_1 + q_2 = 0$, т. е. в случае, когда сток (скважина) поглощает ровно такое же количество жидкости, которое поступает извне в источник (в нагнетательную скважину).

$$p \approx \frac{\mu q}{2\pi kh} \cdot \frac{l}{r} \cos \varphi + C, \quad (\text{III.65})$$

т. е. p вдали от скважин при $\varphi \neq 90^\circ$ изменяется по закону r^{-1} .

Результат можно обобщить на случай любого числа скважин. Пусть имеется N скважин с дебитами q_1, q_2, \dots, q_N . Обозначим через Q алгебраическую сумму дебитов:

$$\sum_{i=1}^N q_i = Q. \quad (\text{III.66})$$

Давление в любой точке пласта определится по следующей формуле:

$$\frac{2\pi kh}{\mu} p = \sum_{i=1}^N q_i \ln r_i + C. \quad (\text{III.67})$$

Используя (III.67), получим

$$\frac{2\pi kh}{\mu} p = \sum_{i=1}^{N-1} q_i \ln \frac{r_i}{r_N} + Q \ln r_N + C. \quad (\text{III.68})$$

Каждый из членов ряда стремится к нулю при удалении точки от грунны скважин по закону $p \sim r^{-1}$ [см. уравнение (III.65)]. Поэтому при больших расстояниях суммой можно пренебречь и принять

$$\frac{2\pi kh}{\mu} p \approx Q \ln r_N + C, \quad (\text{III.69})$$

т. е. получается тот же результат, что и для двух скважин.

В. Н. Щелкачевым было введено понятие укрупненной скважины. Под укрупненной скважиной подразумеваем некую фиктивную скважину, охватывающую область, в которой находятся реальные скважины. Радиус этой «скважины» выбран таким образом, чтобы за пределами этой области можно было бы с достаточной для практики точностью считать движение плоскорадиальным.

Дебит укрупненной скважины равен алгебраической сумме дебитов реальных скважин. При равенстве этой суммы нулю давление за пределами области можно считать практически постоянным и равным первоначальному пластовому давлению.

Ниже будут рассмотрены два наиболее простых и вместе с тем характерных примера применения принципа суперпозиции, из которых будут сделаны соответствующие выводы.

1. Добывающая и нагнетательная скважины в бесконечно большом пласте.

Полагая в (III.54) $q_1 = -q_2 = q$, получим

$$p = \frac{\mu q}{2\pi k h} \ln \frac{r_1}{r_2} + C. \quad (\text{III.70})$$

Определим вид изобар. Из уравнения (III.70) видно, что давление должно быть одинаково во всех тех точках, для которых отношение r_1/r_2 постоянно. Отсюда следует, что изобарой является такая кривая, отношение расстояний каждой точки которой до центров скважин — величина постоянная. Можно по-

казать, что условие постоянства отношения радиусов-векторов r_1 и r_2 характерно для двух семейств окружностей, центры которых лежат на оси абсцисс. Ни один из этих центров не совпадает с центрами скважин A и B .

Чем меньше радиус изобары, т. е. чем ближе она к центру скважины, тем меньше ее относительный

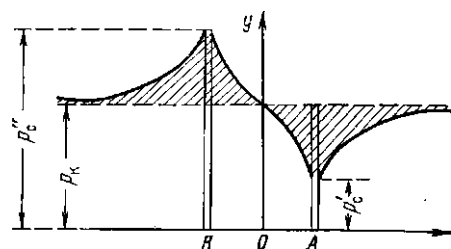


Рис. III.4. Кривая изменения давления по линии, соединяющей забой скважин

эксцентриситет. Это согласуется с выводом о том, что изобара в окрестности скважины приблизительно соответствует условию $r = \text{const}$.

Выясним смысл постоянной интегрирования C .

Будем изучать характер изменения давления вдали от стока A и источника B (рис. III.4). Чем дальше рассматриваемая точка пласта от работающих скважин A и B , тем меньше она подвержена возмущающему действию их. Очевидно, на бесконечно далекую точку эти скважины не влияют и

$$p = p_k. \quad (\text{III.71})$$

С другой стороны, для бесконечно далеких точек отношение $r_1/r_2 = 1$, вследствие чего

$$\ln(r_1/r_2) = 0. \quad (\text{III.72})$$

Подставляя в уравнение (III.70) p и \ln из (III.71) и (III.72), получим

$$p_k = C. \quad (\text{III.73})$$

Уравнение раскрывает смысл постоянной интегрирования C . Эта постоянная, равная давлению в бесконечно далекой (или,

что практически одно и то же,—очень далекой) точке пласта, не подверженной действию (или практически подверженной в весьма слабой степени) возмущающих скважин A и B . Подставляя значение C из (III.73) в уравнение (III.70), получим

$$p = \frac{\mu q}{2\pi k h} \ln \frac{r_1}{r_2} + p_k. \quad (\text{III.74})$$

Пусть давление на забое добывающей скважины A равно p'_c . Подставив в (III.74) $r_1 = R_c$, $r_2 \cong l = 2\sigma$, $p = p'_c$, получим

$$p'_c = \frac{\mu q}{2\pi k h} \ln \frac{R_c}{2\sigma} + p_k. \quad (\text{III.75})$$

Обозначим через p''_c давление в нагнетательной скважине B .

Подставив в (III.74) $r_1 \approx 2\sigma$, $r_2 = R_c$, $p = p''_c$, имеем

$$p''_c = \frac{\mu q}{2\pi k h} \ln \frac{2\sigma}{R_c} + p_k. \quad (\text{III.76})$$

Вычитая из (III.76) уравнение (III.75), имеем

$$p''_c - p'_c = \frac{\mu q}{\pi k h} \ln \frac{2\sigma}{R_c}. \quad (\text{III.77})$$

Складывая (III.75) с (III.76), получим

$$p'_c + p''_c = 2p_k, \quad p_k = \frac{1}{2}(p'_c + p''_c), \quad (\text{III.78})$$

т. е. пластовое (статическое) давление равно среднему арифметическому значению давлений на забоях скважин при одинаковых дебитах, независимо от их величины.

Для линии симметрии y имеем $r_1 = r_2$ и $p = p_k$, т. е. давление на этой линии равно пластовому (статическому) давлению.

Построим кривую изменения давления по линии, соединяющей центры скважин (см. рис. III.4). Из нее видно, что репресссионная «вершина» в области нагнетательной скважины (левая заштрихованная часть) представляет собой как бы перевернутую депрессионную воронку в области добывающей скважины (правая заштрихованная часть).

Решим эту же задачу методом теории функций комплексного переменного. Представим плоскость течения жидкости (x, y) как плоскость комплексного переменного $z = x + iy$. Тогда комплексная функция $F(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, обусловленная действием одного стока, будет

$$F(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = \frac{q}{2\pi h} \ln z + C, \quad (\text{III.79})$$

где $\varphi(x, y) = \frac{k}{\mu} p$ — потенциал течения; $\psi(x, y)$ — функция тока, не изменяющаяся вдоль заданной линии тока. С перехо-

дом к другой линии тока значение ее меняется. Отбросив постоянную C как несущественную величину, получим из (III.79)

$$e^{\frac{2\pi h}{q}(\varphi + i\psi)} = x + iy, \quad (\text{III.80})$$

откуда, отделяя действительную часть от мнимой, получим

$$\varphi = \frac{q}{2\pi h} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{q}{2\pi h} \ln r, \quad \psi = \frac{q}{2\pi h} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{q}{2\pi h} \theta,$$

где θ — угол, образованный вектором r с осью x . Из полученных выражений следует, что окружность $x^2 + y^2 = r^2$ действительно представляет изоповерхность линии $\varphi = \text{const}$ (изобару), а функция тока ψ , постоянная вдоль прямых линий $\theta = y/x = \text{const}$, проходящих через начало координат, действительно является линией тока.

В случае одного стока и одного источника комплексный потенциал равен

$$F(z) = \frac{q}{2\pi h} \ln(z - \sigma) - \frac{q}{2\pi h} \ln(z + \sigma) = \frac{q}{2\pi h} \ln \frac{z - \sigma}{z + \sigma}. \quad (\text{III.81})$$

Отделяя действительную часть от мнимой, получим

$$\varphi = \frac{q}{2\pi h} \ln \frac{r_1}{r_2}, \quad \psi = \frac{q}{2\pi h} (\theta_2 - \theta_1). \quad (\text{III.82})$$

Переходя к давлению, получим формулу (III.70) с точностью до постоянной интегрирования.

Задаваясь различными значениями ψ , получим уравнения линий тока.

2. Две добывающие скважины в напоре бесконечно больших размеров.

Примем $q_1 = q_2 = q$. Уравнение (III.54) при этом имеет вид

$$p = \frac{\mu q}{2\pi kh} \ln r_1 + \frac{\mu q}{2\pi kh} \ln r_2 + C = \frac{\mu q}{2\pi kh} \ln(r_1 r_2) + C. \quad (\text{III.83})$$

Отсюда ясно, что давление будет одинаково во всех точках, для которых $r_1 r_2 = \text{const}$. Кривые, удовлетворяющие этому условию, называются овалами Кассини (кассиноидами), или лемнискатными кривыми. Здесь так же, как и в предыдущей задаче, изобары в окрестности скважин имеют форму, близкую к окружности.

По мере удаления от центров стоков изобары постепенно вытягиваются к оси симметрии, а затем после слияния принимают форму овала, который на больших расстояниях от скважин приближается по своему виду к окружности.

Подставляя в уравнение (III.83) вместо $r_1 = R_c$, $r_2 \approx 2\sigma$ и $p = p_c$, получим

$$p_c = \frac{\mu q}{2\pi kh} \ln 2\sigma R_c + C. \quad (\text{III.84})$$

Исключая C из (III.83) и (III.84), имеем

$$p - p_c = \frac{\mu q}{2\pi kh} \ln \frac{r_1 r_2}{2\sigma R_c}. \quad (\text{III.85})$$

Эту задачу также можно решить методом теории функций комплексного переменного.

ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ В ПЛАСТЕ ОГРАНИЧЕННЫХ РАЗМЕРОВ

Анализируя свойства потоков, рассмотренных в предыдущих разделах, приходим к выводу, что на достаточно большом расстоянии от области расположения стоков и источников, по сравнению с размерами этой области, поток можно считать практически одномерным — плоскорадиальным. Указанная особенность полей позволяет решать в приближенной постановке ряд задач фильтрации в пластах ограниченных размеров. Действительно, если поток вдали от скважины можно заменить плоскорадиальным, то любую из изобар в «далекой» области можно с достаточной для практики точностью аппроксимировать окружностью и давление на этой окружности (изобаре) принять за давление p_k на поверхности питания. Таким образом, вырезая из бесконечной области фильтрации ряд окружностей, охватывающих рассматриваемую группу скважин, и принимая на них постоянное давление, равное среднему давлению на этой окружности, получим ряд решений для круговых пластов различного размера.

Допустимо для упрощения решения принимать за давление на поверхности питания не среднее давление на окружности, а значение его в характерных ее точках. Учитывая близость этой окружности к изобаре, можно предполагать, что такое упрощенное решение будет близко к истинному, точному.

Мы приведем еще один достаточно простой пример, иллюстрирующий метод.

Пусть на бесконечном пласте имеются две равнодебитные добывающие скважины (рис. III.5). Давление в пласте определим по формуле

$$p = \frac{\mu q}{2\pi kh} \ln(r_1 r_2) + C. \quad (\text{III.86})$$

Проведем из середины отрезка $A_1 A_2 = 2\sigma$, как из центра, окружность достаточно большого радиуса R_k . Давление в точке этой окружности, очевидно, будет

$$p_k = \frac{\mu q}{2\pi kh} \ln \sqrt{(R_k^2 + \sigma^2)^2 - 4R_k^2 \sigma^2 \cos^2 \varphi} + C. \quad (\text{III.87})$$

Из (III.87) следует, что p_K достигает экстремальных значений при $\varphi = 90^\circ$ ($\varphi = 270^\circ$) и $\varphi = 0^\circ$ ($\varphi = 180^\circ$), а именно

$$\left. \begin{aligned} p'_{K\varphi=90^\circ} &= \frac{\mu q}{2\pi kh} \ln(R_K^2 + \sigma^2) + C \\ p''_{K\varphi=0^\circ} &= \frac{\mu q}{2\pi kh} \ln(R_K^2 - \sigma^2) + C \end{aligned} \right\} \quad (III.88)$$

Вводя граничные условия на поверхности скважин $r = R_c$ $r_2 \approx 2\sigma$ $p = p_c$ или $r \approx 2\sigma$ $r_2 = R_c$ $p = p_c$ и приняв для простоты выкладок $p_c = 0$, получим из (III.88)

$$C = -\frac{\mu q}{2\pi kh} \ln 2\sigma R_c$$

и

$$\frac{p''_K}{p'_K} = \frac{\ln \frac{R_K^2 - \sigma^2}{2\sigma R_c}}{\ln \frac{R_K^2 + \sigma^2}{2\sigma R_c}} \quad (III.89)$$

В табл. III.3 приводятся результаты определения по формуле (III.89) отношения p''_K/p'_K для $R_c = 0,1$ м.

Из таблицы следует, что окружности с высокой степенью точности можно рассматривать как изобары. Следовательно, задаваясь любым

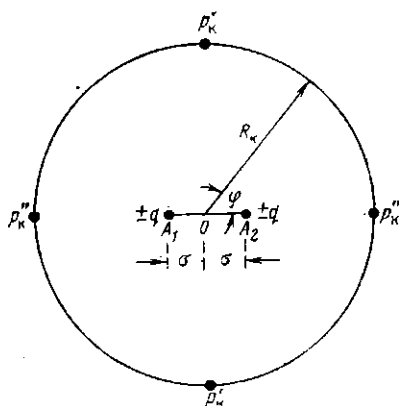


Рис. III.5. К расчету притока жидкости к двум скважинам в круговом пласте

Таблица III.3

Результаты определения p''_K/p'_K в зависимости от величин σ и R_K

$\sigma, \text{ м}$	$R_K, \text{ м}$		
	500	1000	2000
100	0,992	0,999	0,999
200	0,963	0,994	0,999

значением давления p'_K или p''_K , можно очень точно определить дебит скважин, находящихся в аналогичных условиях. Подмеченная особенность фильтрационного поля позволяет применить следующую приближенную подстановку $r_1 \approx r_2 \approx R$ (величина R при этом велика по сравнению с расстоянием между скважинами). Тогда формула (III.86) с учетом граничных условий примет вид

$$p - p_c = \frac{\mu q}{2\pi kh} \ln \frac{R^2}{2\sigma R_c} \quad (III.90)$$

Полагая, что p равно давлению p_k на круговом контуре питания радиуса R_k , получим формулу для расчета дебитов двух равнодебитных скважин, симметрично расположенных в пласте круговой формы:

$$q = \frac{2\pi kh(p_c - p_k)}{\mu \ln \frac{R_k^2}{2\sigma R_c}}. \quad (\text{III.91})$$

Отметим, что выбор центра окружности в середине отрезка A_1A_2 необязательное условие получения приближенной формулы (III.91). Мы могли бы выбрать центр в какой-либо другой точке этого отрезка или даже вне его (но вблизи точек A_1 и A_2). Действительно, поскольку при достаточно большом радиусе R_k логарифмы расстояний от точек контура питания до центров скважин приблизительно одинаковы и их можно принять равными логарифму R_k , то выбор центра окружности не имеет значения. Но раз это так, то полученный вывод остается справедливым для двух несимметрично расположенных по отношению к окружности радиуса R_k равнодебитных скважин.

Конечно, приведенные рассуждения правильны, если R_k значительно больше 2σ и центр окружности находится не слишком далеко от центров скважин A_1 и A_2 .

Приведенные соображения приемлемы и для более сложных условий, например, при двух скважинах разного дебита или большом числе скважин.

Однако в каждом отдельном случае путем оценок, аналогичных приведенным, следует выяснить область применения предложенного приближенного способа.

Задача о фильтрации жидкости к скважинам в круговом пласте имеет точное решение и для небольшого числа скважин, расположенных геометрически правильно. Это решение не намного сложнее приближенного.

Приближенным способом следует пользоваться при нерегулярном расположении большого числа скважин. В этих условиях точный метод оказывается достаточно громоздким.

Точное решение основано на способе зеркальных отображений, сущность которого иллюстрируем на нескольких простых примерах (рис. III.6).

Вначале рассмотрим задачу о фильтрации жидкости к скважине, расположенной у прямолинейного контура питания AB на расстоянии σ . Чтобы линия AB была контуром питания (т. е. изобарой), необходимо зеркально отобразить скважину с дебитом q , поместив за пределами пласта на расстоянии σ фиктивную скважину с таким же дебитом q обратного знака (если реальная скважина — добывающая, фиктивная должна быть нагнетательной и наоборот). Тогда мы получим случай двух равнодебитных скважин разного знака, подробно рассмотренный выше [см. уравнение (III.74)].

Из этого выражения определим дебит скважины. Предположим $r_1 = r_2$, $p = p_K$ и $r_1 = R_c$, $r_2 = 2\sigma$, $p = p_c$, тогда

$$q = \frac{2\pi kh}{\mu} \cdot \frac{p_K - p_c}{\ln \frac{2\sigma}{R_c}}. \quad (\text{III.92})$$

Для нахождения функции тока ψ необходимо воспользоваться комплексным потенциалом (III.81).

Так же просто решается задача, когда линия AB является непроницаемой границей (экраном).

Зеркальная, фиктивная скважина на расстоянии σ от этой линии должна иметь такой же дебит как по величине, так и по знаку. Полученный случай двух равнодебитных скважин одного

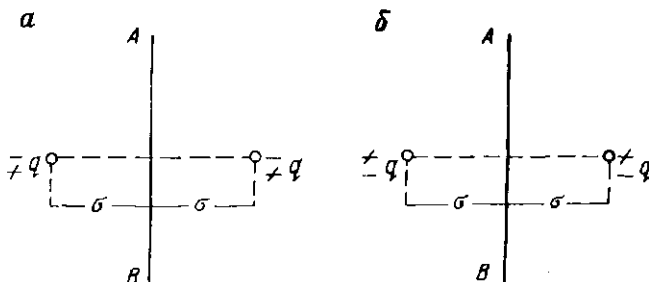


Рис. III.8. Схема расположения скважины у прямолинейного контура питания (а) и у непроницаемого экрана (б)

знака рассмотрен выше [см. уравнение (III.83)]. Поле давлений согласно уравнению (III.85) найдем из следующего выражения:

$$p - p_c = \frac{\mu q}{2\pi kh} \ln \frac{r_1 r_2}{2\sigma R_c}. \quad (\text{III.93})$$

При достаточно большом расстоянии от центра скважины $r_1 \approx r_2 \approx R_K$ дебит скважины будет

$$q = \frac{2\pi kh}{\mu} \cdot \frac{p_K - p_c}{\ln \frac{R_K^2}{2\sigma R_c}}. \quad (\text{III.94})$$

Уравнение совпадает с выражением (III.91) для дебита одной из двух равнодебитных скважин, симметрично расположенных в круговом пласте. Следовательно, непроницаемый экран вызывает такое же снижение дебита единственной скважины (по сравнению с дебитом ее в бесконечном пласте), как и вторая такая же скважина, расположенная в бесконечной области на расстоянии 2σ и находящаяся в таких же условиях.

Рассмотрим теперь более сложный случай, когда скважина расположена эксцентрично в круговом пласте радиуса R_K . За

пределами кругового пласта помещаем фиктивную скважину с дебитом, равным дебиту реальной скважины, но обратного знака (рис. III.7). Расстояние между скважинами —

$$2a = \frac{R_k^2 - e^2}{e}$$

(e — величина эксцентриситета).

Легко показать, что при таком выборе места расположения фиктивной скважины отношение расстояний от каждой скважины до любой точки окружности r_1/r_2 будет постоянной величиной, равной e/R_k . Иными словами, окружность действительно будет изобарой [см. формулу (III.70)].

Для определения дебита воспользуемся формулой

$$p = \frac{\mu q}{2\pi kh} \ln \frac{r_1}{r_2} + C. \quad (\text{III.95})$$

Приняв граничные условия на: контуре питания при $r_1/r_2 = e/R_k$ $p = p_k$; поверхности скважины при $r = R_c$ и

$$r_2 \approx \frac{R_k^2 - e^2}{e}$$

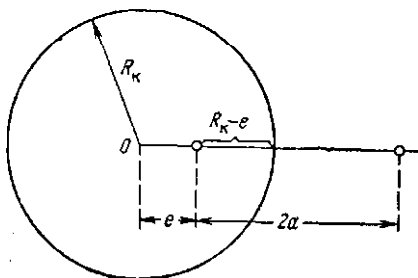


Рис. III.7. К расчету дебита несоосно расположенной скважины в круговом пласте

$p = p_c$ и подставив их в (III.95), получим

$$q = \frac{2\pi kh}{\mu} \cdot \frac{(p_k - p_c)}{\ln \frac{R_k^2 - e^2}{R_k R_c}}. \quad (\text{III.96})$$

При концентрическом расположении скважины в пласте $e = 0$ $2a \rightarrow \infty$ (отображенная скважина должна быть удалена в бесконечность, ее действие на рассматриваемую область равно нулю) формула (III.96) переходит в формулу Дююи.

Комплексный потенциал для этого случая получится из соответствующего выражения для двух равнодебитных скважин разного знака [см. уравнение (III.81)], если принять расстояние между скважинами

$$2a = \frac{R_k^2 - e^2}{e}.$$

Описанным выше методом решим еще одну задачу. Пусть в безграничном пласте имеется одна эксплуатационная скважина A_1 с дебитом q_1 (рис. III.8, а).

Проницаемость правой полуплоскости равна k_1 ; левой — k_2 . Линия AB между этими полуплоскостями является границей

изменения проницаемости пласта. Скважина расположена от этого порога на расстоянии OA_1 , равном a . Необходимо построить изобары и линии токов в таком пласте.

Ввиду различия проницаемостей указанных областей линии токов и изобары должны претерпеть излом на границе изменения проницаемости пласта.

Попытаемся решить задачу методом фиктивных стоков—источников.

Однако в рассматриваемом случае есть одна особенность, которой не было в решенных ранее задачах. При построении поля давлений и линий тока необходимо учитывать не только граничные условия на поверхности скважины A_1 , но также и ус-

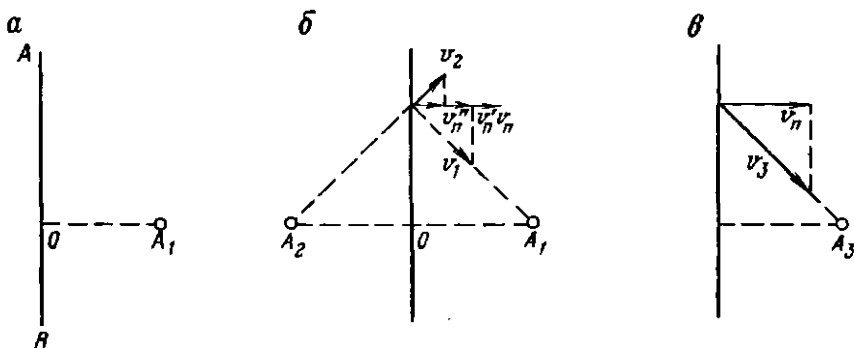


Рис. III.8. К методу фиктивных стоков — источников

ловия на пороге AB , т. е. стыке двух контактируемых областей с различными проницаемостями.

Эти условия представляют следующее:

давление p_r в любой точке порога с правой стороны равняется давлению на нем слева, т. е. p меняется непрерывно без скачка при переходе через порог из одной области в другую;

нормальная составляющая v_n скорости фильтрации в любой точке порога справа равна таковой слева.

После сделанных замечаний перейдем к рассмотрению каждой из областей.

Построим вначале поле давлений и линии токов в правой полуплоскости фильтрации при помощи одного фиктивного стока или источника, расположенного в левой полуплоскости. Поместим в точке A_2 левой полуплоскости на расстоянии $OA_2 = OA_1 = a$ фиктивный источник с дебитом q_2 (см. рис. III.8, б). Величина его нам неизвестна, ее мы должны определить из приведенных выше граничных условий.

Возникает вопрос: почему в точке A_2 помещается источник, а не сток? Тот или иной выбор не должен повлиять на правильность конечных формул. Если выбор сделан неправильно, то

ошибка будет автоматически исправлена тем, что в конечной формуле дебит выбранной фиктивной скважины будет фигурировать со знаком минус.

В результате взаимодействия реальной добывающей скважины (стока) A_1 и фиктивной нагнетательной (источника) A_2 давление в любой точке пласта будет равно

$$p = \frac{\mu q_1}{2\pi k_1 h} \ln r_1 - \frac{\mu q_2}{2\pi k_1 h} \ln r_2 + C_1, \quad (\text{III.97})$$

а на границе изменения проницаемости

$$p_r = \frac{\mu q_1}{2\pi k_1 h} \ln r_r - \frac{\mu q_2}{2\pi k_1 h} \ln r_r + C_1, \quad (\text{III.98})$$

где r_r — расстояние от A_1 и A_2 до любой точки этой границы.

Составляющая скорости фильтрации на границе AB , обусловленная работой добывающей скважины A_1 ,

$$v_1 = \frac{q_1}{2\pi r_r h}, \quad (\text{III.99})$$

а проекция ее на направление, перпендикулярное к порогу AB ,

$$v'_n = \frac{q_1}{2\pi r_r h} \cdot \frac{a}{r_r}. \quad (\text{III.100})$$

Точно таким же способом найдем соответствующую скорость фильтрации, обусловленную действием фиктивного источника A_2 ,

$$v_2 = \frac{q_2}{2\pi r_r h} \quad (\text{III.101})$$

и проекцию

$$v''_n = \frac{q_2}{2\pi r_r h} \cdot \frac{a}{r_r}. \quad (\text{III.102})$$

Сумма v'_n и v''_n будет равна нормальной составляющей скорости фильтрации в точке этой границы (см. рис. III.8, б):

$$v_n = \frac{(q_1 + q_2) a}{2\pi r_r^2 h}. \quad (\text{III.103})$$

Определив давление p_r и нормальную составляющую скорости фильтрации на границе AB в правой полуплоскости, перейдем к определению этих величин для левой полуплоскости.

Для построения фильтрационного потока в этой области поместим фиктивный сток A_3 на расстоянии $OA_3 = a$; дебит фиктивного стока — q_3 , его также определим из граничных условий (см. рис. III.8, в).

Под действием фиктивного стока давление в левой области будет равно

$$p = \frac{\mu q_3}{2\pi k_2 h} \ln r_1 + C_2, \quad (\text{III.104})$$

а на пороге AB

$$p_r = \frac{\mu q_3}{2\pi k_2 h} \ln r_r + C_2. \quad (\text{III.105})$$

Скорость фильтрации на этой границе будет

$$v = \frac{q_3}{2\pi r_r h}, \quad (\text{III.106})$$

а нормальная составляющая ее

$$v_n = \frac{q_3}{2\pi r_r h} \cdot \frac{a}{r_r}. \quad (\text{III.107})$$

Первое условие — равенство давлений на границе AB — получим, приравняв (III.98) к (III.105):

$$\frac{\mu q_1}{2\pi k_1 h} \ln r_r - \frac{\mu q_2}{2\pi k_1 h} \ln r_r + C_1 = \frac{\mu q_3}{2\pi k_2 h} \ln r_r + C_2. \quad (\text{III.108})$$

Правая часть этого уравнения может равняться левой только в том случае, если

$$q_1 - q_2 = \frac{k_1}{k_2} q_3, \quad C_1 = C_2. \quad (\text{III.109})$$

Второе условие — равенство нормальных составляющих скоростей на границе — получится, если приравняем (III.103) и (III.107)

$$\frac{(q_1 + q_2) a}{2\pi h r_r^2} = \frac{q_3 a}{2\pi h r_r^2}$$

или $q_1 + q_2 = q_3.$ (III.110)

Из уравнений (III.109) и (III.110) определим

$$q_2 = \left(\frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} \right) q_1, \quad q_3 = \left(\frac{2k_2}{k_1 + k_2} \right) q_1. \quad (\text{III.111})$$

Величина q_2 может быть положительной и отрицательной. Из (III.111) следует, что выбор в качестве фиктивной скважины A_2 для правой полуплоскости источника правилен при значениях $k_2 > k_1$.

Что же касается выбора фиктивной скважины A_3 для левой полуплоскости, то он был сделан правильно: в этой точке должен помещаться именно сток, а не источник.

Физический смысл этого вполне очевиден. При любых проницаемостях k_1 и k_2 наличие добывающей скважины A_1 должно возбудить движение жидкости от периферии к этой скважине во всей области фильтрации и, в частности, в левой полуплоскости; такое движение, очевидно, можно возбудить стоком, помещенным в правой области, а не источником, находящимся там же.

Из (III.111) и (III.97) получим выражение для давления в правой полуплоскости:

$$p = \frac{\mu q_1}{2\pi k_1 h} \ln r_1 - \left(\frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} \right) \frac{\mu q_1}{2\pi k_1 h} \ln r_2 + C. \quad (\text{III.112})$$

Из (III.111) и (III.104) имеем выражение для давления в левой полуплоскости:

$$p = \left(\frac{2k_2}{k_1 + k_2} \right) \frac{\mu q_1}{2\pi k_2 h} \ln r_2 + C. \quad (\text{III.113})$$

Для определения постоянной интегрирования C используем отмеченное нами ранее свойство фильтрационного потока, заключающееся в том, что на достаточно большом расстоянии от скважины A_1 изобары по своей форме близки к окружностям.

Пусть на некотором расстоянии R_K давление равно p_K . Используя это условие, исключим из (III.112) постоянную интегрирования, а затем определим искомое давление в правой полуплоскости:

$$p = \frac{\mu q_1}{2\pi k_1 h} \ln \frac{r_1}{R_K} - \left(\frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} \right) \frac{\mu q_1}{2\pi k_1 h} \ln \frac{r_2}{R_K} + p_K. \quad (\text{III.114})$$

При $r_1 = R_K$ и $r_2 \approx 2a$ p должно равняться давлению p_c в скважине. Учтя это, получим окончательно формулу для определения дебита [61]:

$$q_1 = \frac{2\pi k_1 h}{\mu} \frac{p_K - p_c}{\ln \frac{R_K}{R_c} - \left(\frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} \right) \ln \frac{R_K}{2a}}. \quad (\text{III.115})$$

По этому методу могут быть решены и другие более сложные случаи [61].

БЕСКОНЕЧНАЯ ЦЕПОЧКА РАВНОУДАЛЕННЫХ СКВАЖИН В БЕСКОНЕЧНОМ ПЛАСТЕ

Существует несколько способов решения этой задачи, но наиболее простым является способ, основанный на теории функций комплексного переменного. Этим способом решим задачу.

Расположим вдоль оси абсцисс на равном расстоянии $a = 2\sigma$ друг от друга $2n+1$ стоков обильностью q . Комплексная функция согласно принципу суперпозиции будет равна

$$F(z) = \frac{q}{2\pi h} [\ln z + \ln(z-a) + \dots + \ln(z-na) + \\ + \ln(z+a) + \dots + \ln(z+na)] = \frac{q}{2\pi h} \ln \times \\ \times \left[\frac{\pi z}{a} \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{2^2 a^2}\right) \dots \left(1 - \frac{z^2}{n^2 a^2}\right) \right] + \\ + \frac{q}{2\pi h} \ln \left[\frac{a}{\pi} \cdot a^2 \cdot 2a^2 \dots n^2 a^2 \right]. \quad (\text{III.116})$$

С другой стороны, известно, что

$$\frac{\sin u}{u} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{u^2}{n^2 \pi^2}\right). \quad (\text{III.117})$$

Устремим n к бесконечности. Чтобы можно было использовать формулу (III.117) для определения бесконечного произведения, примем

$$u = \pi z / a^4.$$

Тогда

$$F(z) = \frac{q}{2\pi} \ln \sin \frac{\pi z}{a}. \quad (\text{III.118})$$

Отделяя действительную часть от мнимой, получим значение потенциала:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi h} \ln \left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma} y - \cos \frac{\pi}{\sigma} x \right] + C. \quad (\text{III.119})$$

Пусть при $z = R_c$ $y = R_c$ $p = p_c$, тогда, учитывая, что $\varphi = \frac{k}{\mu} p$, найдем давление в пласте:

$$p - p_c = \frac{\mu q}{4\pi k h} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma} y - \cos \frac{\pi}{\sigma} x}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma} R_c - \cos \frac{\pi}{\sigma} R_c}. \quad (\text{III.120})$$

При наличии нескольких параллельных цепочек потенциал находится по принципу суперпозиции полей, обусловленных действием каждой из них. Например, для двух цепочек потенциал равен

$$\varphi = \frac{q_1}{4\pi h} \ln \left(\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma_1} y - \cos \frac{\pi}{\sigma_1} x \right) + \frac{q_2}{4\pi h} \ln \left(\operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma_2} (y - H) - \right. \\ \left. - \cos \frac{\pi}{\sigma_2} (x - x_1) \right) + C. \quad (\text{III.121})$$

¹ Второй член в (III.116) как постоянный отброшен.

Легко показать, что уже при значениях $y > 2\sigma$ поток к цепочке скважин будет практически линейным.

Действительно, при

$$\frac{y}{2\sigma} > 1 \quad \operatorname{ch} \frac{\pi}{\sigma} y \approx \frac{1}{2} e^{\pi y/\sigma} \gg 1$$

и

$$\begin{aligned} p - p_c &\approx \frac{\mu q}{4\pi k h} \ln \frac{1}{2} e^{\pi y/\sigma} = \frac{\mu q}{2k(2\sigma h)} \left(y - \frac{\sigma}{\pi} \ln 2 \right) = \\ &= \frac{\mu q}{2kF} \left(y - \frac{\sigma}{\pi} \ln 2 \right). \end{aligned} \quad (\text{III.122})$$

По выражению (III.122) определяют падение давления на отрезке пути

$$l = y - \frac{\sigma}{\pi} \ln 2,$$

перпендикулярном к цепочке скважин, при движении половины потока $\frac{q}{2}$ через нонеречное сечение $F = 2\sigma h$.

ЦЕПОЧКА РАВНОУДАЛЕННЫХ И РАВНОДЕБИТНЫХ СКВАЖИН В БЕСКОНЕЧНОМ ПЛАСТЕ

Если число добывающих скважин в прямолинейной цепочке конечное, то давление в скважинах даже при одинаковых интервалах между ними и одинаковых дебитах будут различны.

Из общих соображений ясно, что чем дальше расположена скважина от середины цепочки, тем больше должно быть давление в ней.

Для нагнетательных скважин должна иметь место обратная тенденция, т. е. уменьшение давления нагнетания с переходом от центральных скважин к периферийным.

Пусть на бесконечно большом пласте имеется прямолинейная цепочка, состоящая из $2n+1$ равнодебитных скважин (рис. III.9).

Давление в v -й скважине определим по принципу суперпозиции

$$\begin{aligned} p_v &= \frac{\mu q}{2\pi k h} [\ln R_c + \ln 2\sigma + \ln 2 \cdot 2\sigma + \dots + \ln (n-v) 2\sigma + \\ &+ \ln 2\sigma + \ln 2 \cdot 2\sigma + \dots + \ln (n+v) 2\sigma] + C \end{aligned} \quad (\text{III.123})$$

или

$$p_v = \frac{\mu q}{2\pi k h} [\ln R_c + 2n \ln 2\sigma + \ln (n-v)! (n+v)!] + C. \quad (\text{III.124})$$

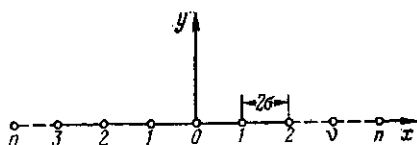


Рис. III.9. К расчету давления в бесконечном пласте (случай цепочки конечной длины)

Используя формулу Стирлинга для приближенного определения факториала при большом числе множителей, получим¹

$$p_v = \frac{\mu q}{2\pi kh} \left[\ln R_c + 2n \ln 2\sigma + \ln 2\pi - 2n + \right. \\ \left. + \ln \frac{(n^2 - v^2)^{n + \frac{1}{2}} (n + v)^v}{(n - v)^v} \right] + C. \quad (\text{III.125})$$

Найдем разность давлений в v -й и центральной ($v = 0$) скважинах

$$p_v - p_0 = \frac{\mu q}{2\pi kh} \ln \frac{(n^2 - v^2)^{n + \frac{1}{2}} (n + v)^v}{(n - v)^v n^{2n+1}}. \quad (\text{III.126})$$

Если принять $v = \text{const}$ и $n \rightarrow \infty$, то, как легко видеть из (III.126), эта разность будет стремиться к нулю, т. е. произойдет полное выравнивание давлений в средней части ряда длинной, соответствующей $2n+1$ скважинам.

Определим разность давлений в самой крайней и центральной скважинах. В этом случае нельзя использовать выражение (III.126), так как формула Стирлинга непригодна для случая $v = n$.

Непосредственное вычисление величины p_n для крайней скважины дает следующий результат:

$$p_n = \frac{\mu q}{2\pi kh} [\ln R_c + \ln 2\sigma + \ln 2 \cdot 2\sigma + \dots + \ln 2n \cdot 2\sigma] + C = \\ = \frac{\mu q}{2\pi kh} [\ln R_c + 2n \ln 2\sigma + \ln (2n)!] + C = \frac{\mu q}{2\pi kh} \left[\ln R_c + \right. \\ \left. + 2n \ln 2\sigma + \ln \sqrt{2\pi} + \left(2n + \frac{1}{2} \right) \ln 2n - 2n \right] + C. \quad (\text{III.127})$$

Для центральной скважины имеем

$$p_0 = \frac{\mu q}{2\pi kh} [\ln R_c + 2(\ln 2\sigma + \ln 2 \cdot 2\sigma + \dots + \ln n 2\sigma)] + C = \\ = \frac{\mu q}{2\pi kh} [\ln R_c + 2n \ln 2\sigma + 2 \ln n!] + C = \frac{\mu q}{2\pi kh} [\ln R_c + \\ + 2n \ln 2\sigma + \ln 2\pi + (2n + 1) \ln n - 2n] + C. \quad (\text{III.128})$$

Откуда

$$p_n - p_0 = \frac{\mu q}{2\pi kh} \left[\left(2n + \frac{1}{2} \right) \ln 2n - 2n \ln n - \ln \sqrt{2\pi} \right]. \quad (\text{III.129})$$

¹ Формула Стирлинга дает удовлетворительные результаты даже при $n = 1 \div 2$.

Описанным выше методом можно решить задачу фильтрации жидкости к одной горизонтальной скважине бесконечной протяженности в однородном горизонтальном пласте конечной толщины h . Эта задача решалась И. А. Чарным в предположении, что расстояния от оси скважины до кровли и подошвы пласта одинаковы, $a = h/2$. Более общее решение, принадлежащее А. М. Пирвердян [53], исходит из условия, что ось смещена в сторону кровли (нодошвы), т. е. $a \neq h/2$ (рис. III.10).

Для решения задачи отобразим скважину зеркально кровле и подошве пласта. Затем отображенные скважины, в свою очередь, отобразим относительно линий 1—1, 2—2 и так далее до бесконечности.

Полученная указанным способом бесконечная цепочка, как легко видеть из рис. III.10, состоит из двух бесконечных цепочек, в каждой из которых интервалы между скважинами одинаковы и равны двойной толщине пласта:

$$2\sigma = 2h \quad (\text{III.130})$$

(для наглядности скважины одной из таких цепочек зачернены).

Нетрудно доказать, что в результате взаимодействия всех скважин выполняется условие непроницаемости кровли и подошвы пласта.

Чтобы получить постоянство давления на контуре нитания AB , отобразим все скважины относительно линии AB и возьмем отображенные скважины с обратным знаком (это отображение показано на рис. III.10 в виде цепочки II).

Итак, задача сводится к суперпозиции полей четырех цепочек скважин: зачерненных справа; зачерненных слева; светлых справа; светлых слева.

Для первой и второй групп скважин распределение давления описывается уравнением

$$p' = \frac{\mu q}{4\pi k} \ln \frac{ch \frac{\pi}{\sigma} (y - H) - \cos \frac{\pi}{\sigma} (x - a)}{ch \frac{\pi}{\sigma} (y + H) - \cos \frac{\pi}{\sigma} (x - a)} + C', \quad (\text{III.131})$$

для третьей и четвертой — уравнением

$$p'' = \frac{\mu q}{4\pi k} \ln \frac{ch \frac{\pi}{\sigma} (y - H) - \cos \frac{\pi}{\sigma} (x + a)}{ch \frac{\pi}{\sigma} (y + H) - \cos \frac{\pi}{\sigma} (x + a)} + C'',$$

где q — дебит 1 м скважины, H — расстояние от цепочки до линии AB .

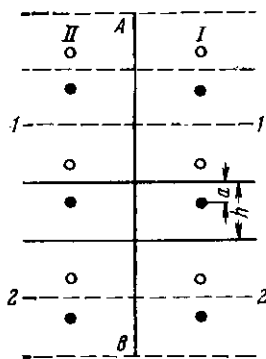


Рис. III.10. К расчету дебита горизонтальной скважины

Результирующее давление $p = p' + p''$. Граничными условиями являются: при $x = a - R_c$, $y = H$, $p = p_c$; при $y = 0$, $p = p_k$. Решение имеет вид [53]

$$q = \frac{2\pi k (p_k - p_c)}{\mu} \times \frac{1}{\frac{2\pi H}{h} + \ln \frac{h}{2\pi R_c} + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{1 - \cos \frac{\pi (2a - R_c)}{h}}} \quad (\text{III.132})$$

Расчеты по формуле показывают, что дебит совершенной горизонтальной скважины практически не зависит от места расположения ее по толщине.

Перейдем к рассмотрению несовершенных горизонтальных скважин. Окружим мысленно скважину цилиндрической поверхностью радиуса $R_0 = R_c + \lambda$, где λ — участок стабилизации, за пределами которого фильтрация имеет плоский характер в вертикальной плоскости. Для всей внешней области расчет будем вести по формуле (III.132), несколько видоизмененной, т. е.

$$q = \frac{2\pi k (p_k - p'_c)}{\mu} \times \frac{1}{\frac{2\pi H}{h} + \ln \frac{h}{2\pi R_0} + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{1 - \cos \frac{\pi (2a - R_0)}{h}}} \quad (\text{III.133})$$

Формула (III.133) получена из (III.132) заменой p_c давлением p'_c на цилиндрической поверхности радиуса R_0 и $R_c \rightarrow R_0$.

Внутри кольцевой области $R_0 > R > R_c$ расчет будем вести по формуле В. И. Щурова

$$q = \frac{2\pi k (p'_c - p_c)}{\mu} \cdot \frac{1}{\ln \frac{R_0}{R_c} + C}, \quad (\text{III.134})$$

где C — коэффициент несовершенства по характеру вскрытия. Исключая из уравнений (III.133) и (III.134) промежуточное давление p'_c , получим формулу для притока жидкости к несовершенной горизонтальной скважине

$$q = \frac{2\pi k (p_k - p_c)}{\mu} \times \frac{1}{\frac{2\pi H}{h} + \ln \frac{h}{2\pi R_c} + C + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{1 - \cos \frac{\pi (2a - R_0)}{h}}} \quad (\text{III.135})$$

Отношение дебитов при $a = h/2$ и $a = 0$ будет

$$\frac{q''}{q'} = \frac{\frac{2\pi H}{h} + \ln \frac{h}{2\pi R_c} + C}{\frac{2\pi H}{h} + \ln \frac{h}{\pi R_c} + \ln \frac{h}{\pi R_0} + C}. \quad (\text{III.136})$$

Из формулы (III.136) видно, что с ростом C различие между дебитами q' и q'' должно уменьшаться.

Исследование [53] показывает, что в анизотронных пластах даже при наличии значительной анизотронии разница между дебитами, соответствующими симметричному и предельно несимметричному положению оси скважины, невелика. Это дает основание при расчете дебита горизонтальной скважины в большинстве случаев не считаться с возможной несимметричностью расположения ее в пласте и считать $a = h/2$.

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Отличительные особенности всех задач фильтрации однородной жидкости, рассмотренных в предыдущих разделах, заключались в следующих не во всех случаях оговоренных положениях:

кровля и подошва пласта принимались за параллельные плоскости;

скважины вскрывали пласт на полную толщину.

Указанные положения позволяли свести все задачи к плоским течениям, при которых процесс течения зависит от двух координат x и y .

В реальных условиях пласт представляет собой структуру, которая в большей или меньшей степени отклоняется от модели, образованной параллельными плоскими границами. Однако важно отметить, что в большинстве случаев протяженность пласта во много десятков раз больше расстояния между его кровлей и подошвой. Это дает основание, как справедливо отмечает В. П. Пилатовский [49], аппроксимировать реальный, в принципе не плоский пласт, моделью «тонкого» пласта, в котором частицы жидкости перемещались бы перпендикулярно к каждому интервалу толщины. На основе этой модели В. П. Пилатовским [49] были разработаны методы решения задачи гидромеханики тонкого пласта.

Эти методы можно использовать для расчетов фильтрации однородной жидкости в пластах, принимающих участие в строении геосинклинальных складок.

Если скважины без фильтра вскрыли пласт не на полную толщину, или же если они при полном вскрытии пласта оборудованы фильтром, то в этих случаях фильтрационный поток является пространственным, даже тогда, когда кровля и подошва пласта — параллельные плоскости.

Для пространственных течений большое значение имеет поток, образованный точечным стоком (источником) в неограниченном пласте (рис. III.11).

Потенциал скорости φ_i для этого случая имеет вид ¹:

$$\varphi_i = \frac{q_i}{2\pi \sqrt{(z - \zeta)^2 + r^2}}, \quad (\text{III.137})$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

При $q < 0$ имеем сток; при $q > 0$ — источник. Уравнение (III.137) — это преобразованное выражение (III.14), в котором давление заменено потенциалом скорости.

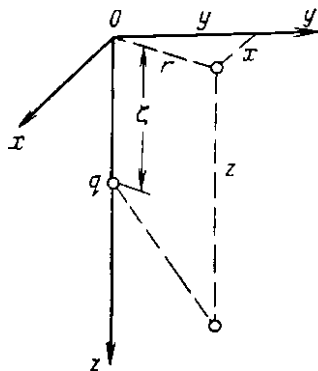


Рис. III.11. Точечный сток (источник) в неограниченном пласте

Возьмем конечное число точечных стоков (источников) на вертикальной оси и применим принцип суперпозиции для определения потенциала скорости, вызванного действием этих источников.

Для конечного числа точечных стоков потенциал скорости выразится суммой

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(z - \zeta_i)^2 + r^2}} + C, \quad (\text{III.138})$$

где $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N$ — координаты стоков.

Обозначим расход всех стоков через

$$Q_0 = 2Q = \sum_{i=1}^N q_i.$$

Увеличивая беспрестанно число стоков ($N \rightarrow \infty$), но сохраняя сумму расходов $2Q$ неизменной, получим выражение

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_{-h}^h \frac{q(\zeta) d\zeta}{\sqrt{(z - \zeta)^2 + r^2}} + C, \quad (\text{III.139})$$

характеризующее «действие» на рассматриваемую точку с координатами z и r всех стоков отрезка $-h, +h$. При переходе от дискретного распределения к непрерывному мы заменим обозначение q_i на $q(\zeta)$.

Задавая той или иной интенсивностью стоков $q(\zeta)$ на отрезке $-h, +h$, получим различные значения потенциала скорости. Однако нас должно интересовать такое распределение $q(\zeta)$, которое обеспечивало бы получение постоянного потенци-

¹ Определение потенциала скорости в главе I.

ала φ на цилиндрической поверхности радиуса R_c . Решение такой задачи является сложным.

Зададимся постоянной интенсивностью q вдоль всей оси скважины ($2hq = Q_0$). Тогда интеграл примет вид

$$\varphi(r, z) = \frac{Q_0}{8\pi h} \ln \frac{\sqrt{(z+h)^2 + r^2} + (z+h)}{\sqrt{(z-h)^2 + r^2} + (z-h)}. \quad (\text{III.140})$$

С удалением от линии стоков (источников) потенциал непрерывно стремится к нулю. В этом заключается отличительная особенность течения к линейному стоку (источнику) в бесконечном пространстве по сравнению с плоскопараллельным течением к такому же стоку (источнику). В последнем случае, как известно, потенциал изменяется по логарифмическому закону, стремясь к $\pm\infty$ в зависимости от знака величины интенсивности q .

Если предположить, что подлогарифмическое выражение равно постоянной величине, то получим уравнение эллипсоида вращения с фокусами в точках $(0, 0, h)$ и $(0, 0, -h)$. Подберем достаточно узкий эллипсоид, соответствующий $l \gg r$, и заменим его цилиндром радиуса R_0 и равновеликого объема (рис. III.12).

Тогда получим формулу Н. К. Гирицкого

$$Q = \frac{2\pi\varphi_0}{\ln \frac{1,6h}{R_0}}, \quad (\text{III.141})$$

где φ_0 — приближенное значение разности потенциалов на поверхности фиктивной скважины радиуса R_c и в бесконечности ($\varphi(\infty) = 0$).

$$\varphi_0 = \varphi(R_0) - \varphi(\infty, \infty) = \varphi(R_c), \quad (\text{III.142})$$

где φ_0 — потенциал на этой поверхности.

Возьмем две точки A и B соответственно на поверхности $z = 0$ и оси линии стоков $r = 0$.

Для этих точек получим следующие значения потенциала из (III.140):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_A &= \frac{Q_0}{8\pi h} \ln \frac{\sqrt{h^2 + r_A^2} + h}{\sqrt{h^2 + r_A^2} - h} \\ \varphi_B &= \frac{Q_0}{8\pi h} \ln \frac{z_B + h}{z_B - h} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{III.143})$$

где r_A и r_B — координаты точек A и B .

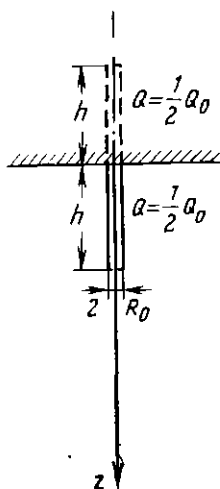


Рис. III.12. Схема к расчету фильтрации жидкости к скважине, вскрывшей пласт бесконечной мощности

Пусть точки A и B настолько далеки от середины линии стоков ($z=0, r=0$), что можно считать $r_A \gg h$ и $r_B \gg h$.

Тогда из (III.142) имеем

$$\varphi_A = \frac{Q}{4\pi h} \ln \frac{r_A \sqrt{1 + \left(\frac{h}{r_A}\right)^2} + h}{r_A} \approx \frac{Q}{4\pi r_A}, \quad (\text{III.144})$$

$$\varphi_B = \frac{Q}{8\pi h} \ln \frac{1 + \frac{h}{z_B}}{1 - \frac{h}{z_B}} \approx \frac{Q}{8\pi h} \left[\frac{h}{z_B} - \left(-\frac{h}{z_B} \right) \right] = \frac{Q}{4\pi z_B}.$$

(III.145)

Но формулы вида $Q/(4\pi rh)$ (III.144) и (III.145) — это выражения для точечного стока (источника).

Следовательно, на достаточно большом расстоянии от линии стоков (источников) распределение потенциала сходно с распределением потенциала, возникающего от точечного стока (источника).

Приведенное выше можно рассматривать как случай фильтрации жидкости к скважине (или от нее), вскрывшей пласт очень большой толщины (теоретически бесконечно большой) на некоторую величину h . При этом плоскость $z=0$ (плоскость симметрии потока) служит кровлей пласта. Дебит этой скважины, очевидно, равен половине дебита Q_0 линейного стока (источника) длины $2h$.

Значительно более сложна задача о фильтрации жидкости к скважине, не полностью вскрывшей пласт конечной толщины h . Не останавливаясь на существующих решениях, изложим лишь в самых общих чертах одну из наиболее простых схем, принадлежащую Маскету [48].

Пусть между двумя непроницаемыми параллельными плоскостями (кровлей и подошвой пласта) расположен в произвольной точке сток (источник). Если бы сток (источник) находился в бесконечном пространстве, то потенциал скорости имел бы вид $\varphi = q(4\pi r)$.

Для одной непроницаемой границы (например, кровли) достаточно было бы одного отображения этой скважины относительно кровли, т. е. такого же стока (источника) на расстоянии ξ от последней (рис. III.13, а). При этом потенциал в любой точке полупространства получился бы путем суперпозиции обоих потоков (реального и фиктивного — «зеркального»).

Если имеется вторая непроницаемая граница (подошва пласта), то необходимо бесконечное множество отображений стоков (источников) как в кровле, так и в подошве. При этом, очевидно, интенсивность потока и его знаки при отображениях дол-

жны быть такими же, как и у действительного стока (источника) (см. рис. III.13, б).

Только при такой системе отображений выполняется условие непроницаемости кровли и подошвы пласта. Таким образом, мы получим потенциал, возбужденный лишь одним точечным стоком (источником) q между двумя непроницаемыми плоскостями. Реальную же скважину следует аппроксимировать некоторой воображаемой линией, каждый элемент которой погло-

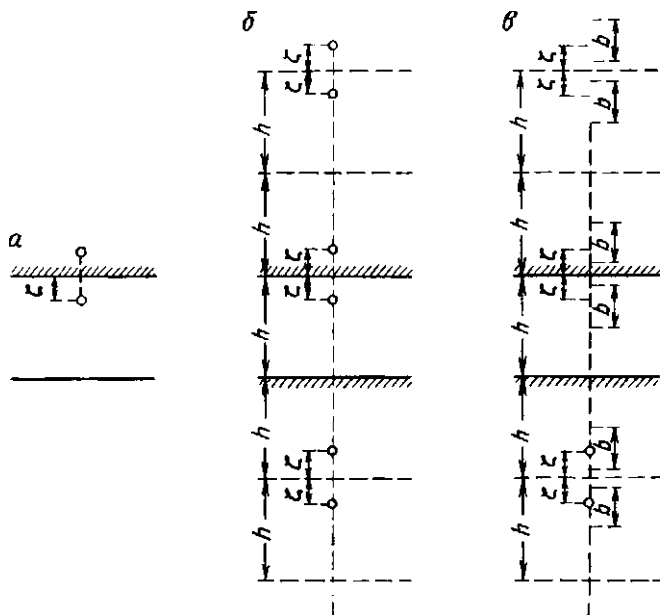


Рис. III.13. Схема бесконечного числа отображений для определения дебита скважины, не полностью вскрывшей пласт

щает (сток) или отдает (источник) поток интенсивностью $qd\xi$. Этот элемент необходимо отобразить бесчисленное множество раз в кровле и подошве (не меняя интенсивности потока и его знака при отображении). Схема отображений здесь такая же, как и в случае лишь одного точечного стока (источника), однако вместо конечного дебита q следует записать бесконечно малый дебит $qd\xi$ (см. рис. III.13, б, в).

В результате этой операции определим потенциалы реального и бесчисленного множества отображенных линейных стоков (источников).

Суперпозиция этих решений дает потенциал, обусловленный действием линейного стока (источника) между непроницаемыми кровлей и подошвой.

Задача, очевидно, не может считаться оконченной, если не задаться видом распределения интенсивности потока $q(\xi)$. Ведь ясно, что один и тот же дебит можно получить при любом распределении $q(\xi)$ по линии стоков, если соблюдается условие

$$Q = \int_0^b q(\xi) d\xi,$$

где b — вскрытая толщина пласта.

Однако не при всяком распределении интенсивности потока $q(\xi)$ выполняется необходимое условие постоянства потенциала на поверхности питания и в скважине.

Соответствующим подбором $q(\xi)$ Маскет получил следующую приближенную формулу для дебита скважины, не полностью вскрывшей пласт:

$$Q = \frac{2\pi h (\Phi_K - \Phi_c)}{\frac{1}{2b} \left[2 \ln \frac{4h}{R_c} - \ln \frac{\Gamma(0,875b) \Gamma(0,125b)}{\Gamma(1-0,875b) \Gamma(1-0,125b)} \right] - \ln \frac{4h}{R_K}}, \quad (\text{III.146})$$

где Φ_K и Φ_c — потенциалы цилиндрических поверхностей питания и скважины соответственно; R_K и R_c — радиусы поверхности питания и скважины $b = h/\delta$; Γ — гамма-функция.

Функция

$$\varphi(\delta) = \ln \frac{\Gamma(0,875b) \Gamma(0,125b)}{\Gamma(1-0,875b) \Gamma(1-0,125b)}. \quad (\text{III.147})$$

Формуле (III.146) можно придать следующий вид:

$$Q = \frac{2\pi h (\Phi_K - \Phi_c)}{\ln \frac{R_K}{R_c} + \left[\frac{1}{2b} \left(2 \ln \frac{4h}{R_c} - \varphi(\delta) \right) - \ln \frac{4h}{R_c} \right]}. \quad (\text{III.148})$$

Второй член в знаменателе называется фильтрационным сопротивлением, которое обусловлено несовершенством скважины по степени вскрытия:

$$C_1 = \frac{1}{2b} \left(2 \ln \frac{4h}{R_c} - \varphi(\delta) \right) - \ln \frac{4h}{R_c}. \quad (\text{III.149})$$

При совершенной скважине $\delta = 1$, $\varphi(\delta) = 0$, $C_1 = 0$ мы приходим к формуле Дюпюи.

Для малых значений аргумента имеем зависимости

$$\ln \Gamma(1+x) \approx \frac{1}{2} \ln \frac{\pi x}{\sin \pi x} - \gamma x, \quad (\gamma = 0,577). \quad (\text{III.150})$$

Кроме того,

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \pi / \sin \pi x, \quad \Gamma(1+x) = x \Gamma(x). \quad (\text{III.151})$$

Используя эти выражения, преобразуем формулу Маскета к следующему виду:

$$Q = \frac{2\pi h (\Phi_k - \Phi_c)}{\frac{1}{\delta} \ln \frac{1,32h\delta}{R_c} + \ln \frac{R_k}{2,25h}} \quad (\text{III.152})$$

или

$$\Phi_k - \Phi_c = \left(\frac{1}{2\pi h} \frac{1}{\delta} \ln \frac{1,32h\delta}{R_c} \right) Q + \left(\frac{1}{2\pi h} \ln \frac{R_k}{2,25h} \right) Q. \quad (\text{III.153})$$

Из (III.153) следует, что фильтрационное сопротивление между поверхностями радиусов R_k и R_c распадается на два последовательно соединенных сопротивления: одно непосредственно в окрестности скважины (первый член правой части уравнения (III.153)); другое — во внешней по отношению к окрестности скважины (второй член). Это и есть формула эквивалентных фильтрационных сопротивлений для указанной пространственной задачи. Структура первого члена уравнения соответствует структуре формулы А. К. Гириинского (III.141), пригодной, как показано в [61], для скважины, которая вскрыла пласт бесконечной толщины. Только в этой формуле вместо коэффициента 1,32 стоит коэффициент 1,6.

Внешнее сопротивление подсчитывается по формуле для плоскорадиального потока между цилиндрическими поверхностями радиусов R_k и $2,25h$ (приблизительно). Формула (III.152) при $\delta = 1$ не приводится к формуле Дюпюи (хотя мало от нее отличается).

Вместе с тем необходимо отметить, что выражение

$$\ln \frac{\Gamma(1 + 0,875\delta) \Gamma(1 + 0,125\delta)}{\Gamma(2 - 0,875\delta) \Gamma(2 - 0,125\delta)}$$

близко к нулю.

Используя это обстоятельство, а также уравнение (III.152), можно получить из формулы Маскета выражение, справедливое для всего диапазона δ :

$$Q = \frac{2\pi h (\Phi_k - \Phi_c)}{\frac{1}{\delta} \ln \frac{1,32h}{\xi R_c} + \ln \frac{R_k}{4h}}, \quad (\text{III.154})$$

где

$$\xi = \sqrt{1 - \delta + \frac{7}{64} \delta^2}. \quad (\text{III.155})$$

При этом предельный переход $\delta \rightarrow 0$ дает для второго члена знаменателя (III.154) значение, мало отличающееся от соответствующего члена выражения (III.152) (вместо коэффициента 2,25 имеем 2,42).

ФИЛЬТРАЦИЯ ОДНОРОДНОЙ СЛАБОСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛАСТЕ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ОБ УПРУГОМ РЕЖИМЕ ФИЛЬТРАЦИИ

Реальные пласты и насыщающие их жидкости (нефть, вода), обладают упругостью, учет которой во многих случаях необходим при гидродинамических расчетах и оценках неустановившихся процессов.

В уравнение упругого режима должны входить параметры, характеризующие упругие свойства пластовой системы, состоящей в общем случае из скелета пласта, нефти, воды и свободного газа. К рассмотрению этих параметров мы и перейдем.

Упругие свойства воды и нефти

Коэффициент сжимаемости жидкости $\beta_{\text{ж}}$ можно определить из следующего соотношения:

$$\beta_{\text{ж}} = \frac{1}{\rho_{\text{ж}}} \left(\frac{\partial \rho_{\text{ж}}}{\partial p} \right), \quad (\text{IV.1})$$

где $\rho_{\text{ж}}$ — плотность жидкости.

Заменяя $\rho_{\text{ж}}$ через $M/V_{\text{ж}}$, где M — масса жидкости, $V_{\text{ж}}$ — объем ее при данном давлении p , из (IV.1) получим

$$dV_{\text{ж}}/V_{\text{ж}} = -\beta_{\text{ж}} dp. \quad (\text{IV.2})$$

Согласно [8], при 20 °С и атмосферном давлении для чистой негазированной воды имеем $\beta_{\text{в}} = 4,69 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$.

Этот коэффициент, как утверждается в [8], практически не зависит от температуры, давления и характера процесса (адиабатического или изотермического).

Однако это утверждение нельзя считать точным. Исследования в литературе [81] показывают явную зависимость $\beta_{\text{в}}$ как от температуры, так и от давления. При очень высоких давлениях ($p \approx 44 \text{ МПа}$ и температурах от 20 до 100 °С) $\beta_{\text{в}}$ составляет $(3,9 - 4,6) \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$, т. е. величины его довольно близки к значению, указанному выше в [8]. С понижением давления $\beta_{\text{в}}$ закономерно увеличивается, достигая при $p = 7 \text{ МПа}$ $(4,9 - 5,10) \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$ в том же интервале температур. Если $\beta_{\text{в}}$ монотонным образом изменяется с изменением давления, то влияние температуры на этот показатель не является монотонным и в «окрестности» температуры 50—60 °С имеет явно выраженные минимумы $3,9 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$ ($p = 44 \text{ МПа}$) и $5,0 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$ ($p = 7 \text{ МПа}$).

Экстраполяция этих данных до $p \approx 0,1$ МПа дает основание считать, что при нормальных атмосферных условиях β_v может находиться в пределах $(4,8 - 5,1) \cdot 10^{-10}$ Па $^{-1}$, т. е. несколько выше цифры из источника [8].

Важно отметить, что при температурах порядка 130—150 °C $\beta_v \approx 6 \cdot 10^{-4}$ МПа $^{-1}$ (рис. IV.1).

До сих пор шла речь о коэффициенте β_v для чистой (неминерализованной) негазированной воды. Проводился ряд опытов по определению влияния степени минерализации и содержания растворенного газа на коэффициент сжимаемости воды и выведены соответствующие эмпирические формулы, учитывающие влияние этих факторов.

Обстоятельный анализ результатов этих исследований выполнен В. Н. Щелкачевым [81]. Отметим лишь, что степень минерализации воды оказывает более существенное влияние на β_v . Из примера, приведенного В. Н. Щелкачевым, следует, что добавление солей в весовых количествах 70—270 мг/л к чистой воде уменьшает β_v соответственно на 12 и 40 %, в то время как насыщение воды газом увеличивает этот показатель всего лишь на 2—4 %.

О распространённости такой концентрации свидетельствуют также данные по ряду месторождений мира, опубликованные в известном труде А. И. Леворсена [34].

Анализ этих материалов показывает, что по крайней мере в 30 % случаях это содержание превосходит то минимальное значение его, которое было принято В. Н. Щелкачевым в расчетах (70 мг/л). Рассмотренные в [81] случаи достаточно характерны и дают основание считаться с фактором минерализации при определении упругих свойств пластовых вод.

Рассмотрим теперь влияние растворенного газа на коэффициент сжимаемости воды. Для расчета этого показателя при содержании растворенного газа в воде предлагается формула следующего вида:

$$\beta_{vr} = \beta_v (1 + aG), \quad (IV.3)$$

где β_{vr} — коэффициент сжимаемости воды, содержащей растворенный газ; G — количество растворенного газа в м 3 /м 3 . По одним

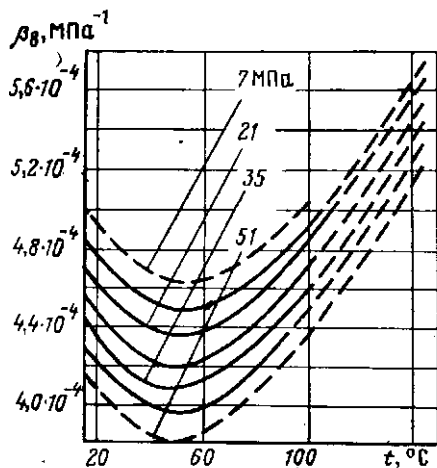


Рис. IV.1. Коэффициент сжимаемости чистой воды

данным [81] $a \approx 0,05$, по другим — значительно меньше. Но в этом или другом случае расчеты показывают, что растворенный газ увеличивает сжимаемость воды на очень небольшую величину (необходимо учесть, что величина Γ по порядку соответствует единице и в редких случаях превышает 2—3. В этом заключается причина незначительной разницы между $\beta_{вг}$ и β_v). Изменение объема воды при растворении в ней газа (метана, азота, углекислого газа) настолько незначительно, что его в расчетах можно не учитывать [81].

В работе Ш. Г. Гиматудинова [10] показано, что с растворимостью углеводородных газов, несмотря на ее небольшую величину, необходимо считаться в случаях газовых залежей с подстилающей водой при значительности их площади контакта и больших давлениях в пласте.

Коэффициент сжимаемости β_n нефти зависит от состава пластовой нефти, количества растворенного газа, абсолютного давления и температуры. Чем больше растворенного в нефти газа, тем больше коэффициент сжимаемости. Для дегазированной нефти β_n колеблется от $4 \cdot 10^{-4}$ до $7 \cdot 10^{-4}$ МПа $^{-1}$, что в общем соответствует коэффициенту сжимаемости для воды. При растворении в нефтях (особенно легких) больших количеств газа происходит увеличение коэффициента сжимаемости нефти до $140 \cdot 10^{-4}$ МПа $^{-1}$, что уже на порядок выше значения β_n дегазированной нефти.

Для расчетов коэффициентов сжимаемости нефти с растворенным в ней газом существуют различные методы [68, 81].

Перейдем к интегрированию уравнения (IV.2). С учетом всего вышесказанного выражение (IV.2) следует переписать так:

$$dV_{ж}/V_{ж} = -\beta(p, T) dp, \quad (IV.4)$$

подчеркивая тем самым, что коэффициент сжимаемости смеси (нефть и вода) — это функция давления и температуры. Количество минерального вещества и растворенного газа мы в эту функциональную зависимость не включаем, так как и количество растворенных минеральных веществ и газа зависит от давления. Что же касается температуры, то мы с самого начала оговоримся, что процесс в пласте является изотермическим. Как справедливо отмечает В. Н. Шелкачев [81], в большинстве задач, связанных с исследованием разработки нефтяных пластов в условиях упругого режима, такое предположение вполне справедливо.

Примем, что при давлении $p = p_0$ $V_{ж} = V_{ж0}$. Тогда, интегрируя (IV.4), получим

$$\ln \frac{V_{ж}}{V_{ж0}} = - \int_{p_0}^p \beta_{ж}(\xi) d\xi \quad (IV.5)$$

или

$$V_{\text{ж}} = V_{\text{ж}0} \exp \left[- \int_{p_0}^p \beta_{\text{ж}}(p) dp \right]. \quad (\text{IV.6})$$

Для раскрытия интеграла необходимо знать аналитический или графический вид зависимости $\beta_{\text{ж}}(p)$. Задачу можно существенно упростить, если учесть, во-первых, малость величины $\beta_{\text{ж}}$ и, во-вторых, диапазон изменения давлений $|p - p_0|$. Действительно, возьмем $\beta_{\text{ж}} = 10 \cdot 10^{-4} \text{ МПа}^{-1}$ и $|p - p_0| = 4 \cdot 10 \text{ МПа}$, тогда

$$\beta_{\text{ж}} |p - p_0| = 4 \cdot 10^{-2}.$$

Иными словами, интеграл существенно меньше единицы. Разлагая экспоненциальную функцию (IV.6) в ряд и пренебрегая в разложении членами второго и высшего порядка малости, получим

$$V_{\text{ж}} = V_{\text{ж}0} \left(1 - \int_{p_0}^p \beta_{\text{ж}}(p) dp \right). \quad (\text{IV.7})$$

А так как величину $\beta_{\text{ж}}(p)$ в рассмотренном диапазоне изменения давления практически можно считать постоянной [равной, например, $\beta_{\text{ж}}(p_0)$], то предыдущее равенство переписется так:

$$\begin{aligned} \beta_{\text{ж}} &= - \frac{1}{V_{\text{ж}0}} \cdot \frac{V_{\text{ж}} - V_{\text{ж}0}}{p - p_0} = \frac{1}{V_{\text{ж}0}} \cdot \frac{|\Delta V_{\text{ж}}|}{|\Delta p|} = \\ &= \frac{1}{\rho_{\text{ж}}} \cdot \frac{\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{ж}0}}{p - p_0} \approx \frac{1}{\rho_{\text{ж}0}} \cdot \frac{\Delta \rho_{\text{ж}}}{\Delta p}. \end{aligned} \quad (\text{IV.8})$$

Здесь мы уже убрали символ (p) при $\beta_{\text{ж}}$, подчеркнув тем самым постоянство (конечно, в приближенном понимании) коэффициента сжимаемости.

Упругие свойства коллекторов нефти

Для установления связи между изменением объема пор ΔV и пластовым давлением p рассмотрим следующую идеализированную модель пласта. Допустим, что кровля и подошва пласта абсолютно непроницаемы и полностью воспринимают нагрузку вышележащих пород — горное давление.

Если p — пластовое давление, то сжимающее скелет пласта давление можно в первом приближении принять равным

$$p_{\text{ск}} = \sigma - p. \quad (\text{IV.9})$$

Отметим, что формула (IV.9) определяет нормальное напряжение в скелете на горизонтальной площадке, мысленно проведенной в любой точке пласта.

Будем считать, что в процессе разработки горное давление σ остается постоянным и изменение $p_{ск}$ происходит за счет изменения пластового давления.

Для определения упругого модуля пористой среды предлагались различные модели. При этом исходили из приведенных выше предположений.

Остановимся на модели В. Н. Щелкачева [81], которая представляет собой идеализированную породу, состоящую из одинаковых упругих шаров диаметра D в кубической упаковке, зажатой двумя горизонтальными плоскостями.

Пусть к горизонтальной плоскости сверху приложено равномерно распределенное давление (горное давление). Усилие, приходящееся на одну вертикальную колонну шаров, равно F . Площадь приложения этой силы, очевидно, равна D^2 . Обозначим через p давление жидкости, заполняющей пористую среду.

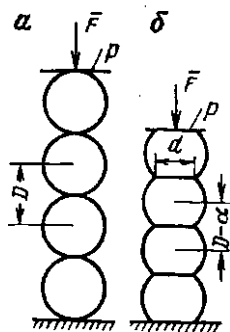


Рис. IV.2. Колонна недеформированных (а) и сжатых (б) упругих шаров

При этом происходит деформация шаров (рис. IV.2). Вычислим величину силы, действующей на одну вертикальную колонну шаров. Если бы давление в пористой среде равнялось нулю, то усилие на колонну равнялось бы F . Давление p в пористой среде должно противодействовать сжимающему усилию и действует снизу не на всю сжимающую горизонтальную плоскость, а только на часть ее, а именно на площадь $D^2 - \pi d^2/4$ (d — диаметр отпечатка — контура да-

вления, переменная величина, зависящая от результирующего усилия).

Однако в области упругих деформаций $d \ll D$, поэтому можно считать, что давление действует на всю площадку D^2 и результирующее сжимающее усилие будет приближенно равно

$$F_0 = F - pD^2 = D^2(\sigma - p). \quad (IV.10)$$

Согласно разработанной Г. Гертцем теории сжатия двух соприкасающихся упругих шаров, сближение α двух соседних шаров определяется из следующего уравнения:

$$\frac{\alpha}{D} = \sqrt[3]{\frac{9F_0^2(1-\nu^2)^2}{D^4E^2}}, \quad (IV.11)$$

где D — диаметр шара; F_0 — усилие; E — модуль упругости материала шаров; ν — коэффициент Пуассона для материала шаров.

Используя эту зависимость, не представит труда определить изменение объема пористого пространства $\Delta V'_n$ в долях от первоначального объема модели V_0 при $p_{с к} = \sigma - p - 0$:

$$\frac{\Delta V'_n}{V_0} = \left[\frac{3(1-\nu^2)}{E} \right]^{2/3} (\sigma - p)^{2/3}, \quad (IV.12)$$

Расчеты показывают, что для достаточно широкого диапазона значений $p_{с к} = \sigma - p$ эту зависимость можно аппроксимировать прямой

$$\Delta V'_n/V_0 = \alpha + \beta_c(\sigma - p). \quad (IV.13)$$

Пусть при некотором давлении p_0 (в промежутке аппроксимации) изменение объема, отсчитываемое, очевидно, от точки с $p_{с к} = 0$, равно $\Delta V_{п 0}$. Тогда, согласно (IV.13),

$$\Delta V_{п 0}/V_0 = \alpha + \beta_c(\sigma - p_0). \quad (IV.14)$$

Из (IV.13) и (IV.14) имеем

$$\frac{\Delta V'_n}{V_0} - \frac{\Delta V_{п 0}}{V_0} = \beta_c(p - p_0). \quad (IV.15)$$

Но $\Delta V'_n/V_0 - \Delta V_{п 0}/V_0$ — изменение пористости при изменении давления, поэтому предыдущее уравнение можно переписать так:

$$m - m_0 = \beta_c(p - p_0) = \beta_c \Delta p. \quad (IV.16)$$

Величина β_c в этой зависимости, называемая коэффициентом сжимаемости, равна

$$\beta_c = \Delta V_n/V_0 \Delta p, \quad (IV.17)$$

где $\Delta V_n = \Delta V'_n - \Delta V_{п 0}$ — изменение объема пор, отсчитываемое от точки с $p = p_0$.

Более сложной является модель, предложенная Г. Брандтом [14]. В его модели рассматривается упругая деформация беспорядочно уложенных одинаковых упругих шаров. Пустоты между ними заняты шарами меньшего диаметра, также беспорядочно уложенными. В промежутках между последними расположены также беспорядочно шары еще меньшего диаметра и т. д. Г. Брандт получил, основываясь на экспериментальных данных, уравнение, устанавливающее зависимость между изменением объема и результирующим давлением $\sigma - p$. Это давление определялось как разность между внешним всесторонним давлением, действующим на систему, и внутренним давлением жидкости в пористом пространстве.

В модели Брандта шары всех размеров имеют одну и ту же упругую характеристику (одни и тот же модуль упругости).

Поэтому предложенная им формула для коэффициента сжимаемости не учитывает влияние на величину этого коэффициента содержания более пластичных, чем кварцевый песок, включений.

Более усовершенствованной является модель И. Фетта [14], которая представляет систему из двух групп шаров одинакового размера, но отличающихся своими упругими характеристиками. Но и эта модель имеет свои недостатки, она представляет коллекторы, в которых глинистый материал не является минеральным включением в пористом пространстве и воспринимает нагрузку в процессе деформации так же, как и зерна, имеющие большие упругие свойства.

Общим недостатком теоретических исследований сжимаемости гранулярных коллекторов является то, что они основываются на простейших моделях, которые не характеризуют всего многообразия литологических свойств осадочных гранулярных коллекторов. Сопоставление экспериментальных кривых сжимаемости с теоретическими показывает, что расхождения между ними значительные. Поэтому предложенные формулы нельзя использовать для теоретического определения коэффициента сжимаемости.

Тем не менее необходимо учитывать методологическое значение теоретических исследований сжимаемости, так как именно из этих работ вытекает следствие о зависимости коэффициента β от эффективного напряжения. На наш взгляд, полученные зависимости можно использовать при обработке экспериментальных данных о коэффициенте сжимаемости, если учесть, что в этих теоретических уравнениях фигурирует в качестве существенной составляющей параметр

$$P = \frac{m\beta_n (\sigma - p)^{1/3} E_1^{2/3}}{(1 - \nu_1^2)^{1/3}}. \quad (\text{IV.18})$$

Давление $p_{с.к.}$, передающееся от вышележащих горных пород скелету пласта, не является единственным фактором его деформации, каждое из зерен пористой среды испытывает, кроме того, всестороннее давление жидкости, насыщающей пласт. Теория упругости устанавливает следующую зависимость между объемной деформацией ΔV и напряжением σ для сплошных идеально упругих сред:

$$-\frac{\Delta V}{V} = \frac{3(1 - 2\nu)}{E} \sigma, \quad (\text{IV.19})$$

где V — объем упругого твердого тела; σ — среднее нормальное напряжение.

Обозначив через $\beta = -\Delta V/\sigma V$ коэффициент сжимаемости, получим

$$\beta = 3(1 - 2\nu)/E. \quad (\text{IV.20})$$

Изменение объема зерен скелета пласта $V_{ск}$ при изменении давления на Δp

$$\Delta V = \beta V_{ск} \Delta p. \quad (IV.21)$$

Оценим величину β , приняв $E = 6 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0,20$ (для кварца). По формуле (IV.20) имеем

$$\beta = \frac{3(1-0,4)}{6 \cdot 10^4} = 0,30 \cdot 10^{-4} \text{ МПа}^{-1},$$

что согласуется со значениями β , полученными различными авторами.

Согласно (IV.17), коэффициент сжимаемости $\beta_c = \Delta V_{п} / (V_0 \times \Delta p)$, где V_0 — объем образца, равный $V_{ск} / (1 - m)$, $\beta_c = \beta (1 - m)$. Если принять $m = 0,25$, то для решенного выше примера $\beta_c = 0,225 \cdot 10^{-4} \text{ МПа}^{-1}$. Сравним полученное выше β_c со значениями этого коэффициента при сжатии пласта под действием вышележащих горных пород, используя модель В. Н. Щелкачева (см. формулу (IV.12) и график на рис. IV.3).

Учитывая, что коэффициент сжатия — переменная величина, найдем значение его для некоторого интервала изменения давления от $p'_{ск}$ до $p''_{ск}$. При этом получим по формуле (IV.12)

$$\beta_c = \sqrt[3]{\frac{9(1-\nu^2)^2}{E^2}} \frac{\sqrt[3]{(p''_{ск})^2} - \sqrt[3]{(p'_{ск})^2}}{p''_{ск} - p'_{ск}}. \quad (IV.22)$$

Приняв те же значения параметров E , ν , что и в предыдущем примере, получим

$$\beta_c = 0,132 \cdot 10^{-2} \frac{\sqrt[3]{(p''_{ск})^2} - \sqrt[3]{(p'_{ск})^2}}{p''_{ск} - p'_{ск}}.$$

Далее, задавшись $p''_{ск} = 40$ МПа, $p'_{ск} = 30$ МПа, найдем окончательно $\beta_c \approx 2,7 \cdot 10^{-4} \text{ МПа}^{-1}$.

Эта величина хорошо согласуется со значениями β_c , полученными другими авторами [81].

Сравнивая это значение с предыдущим, видим, что оно на один порядок больше. Следовательно, влияние унругости отдельных зерен скелета грунта на величину изменения порового объема существенно мало по сравнению с упругостью, вызванной действием на пласт вышележащих пород¹. Отметим, что оба фактора действуют в одном направлении, т. е. уменьшают поровый объем при снижении давления и увеличивают при повышении его.

Обратимся теперь к экспериментальному методу определения сжимаемости горной породы.

¹ Вывод правилен не только для кварцевых песчаников, песков, но и для многих других пород.

Ниже приводится описание установки, на которой возможно раздельно замерять изменения объемов исследуемого образца горной породы, пористого пространства и жидкости, насыщающей его.

Образец заключается в гибкую (свинцовую) оболочку, плотно облегающую его. Он подвергается всестороннему сжатию гидравлическим способом, не полностью имитирующим горное давление σ . (Полная имитация была бы возможна, если бы на образец действовала только осевая нагрузка.) Внутри также создается давление p , которое как бы является пластовым давлением. Поддерживая на оболочке постоянное давление, в первом приближении сохраняем неизменным горное давление σ .

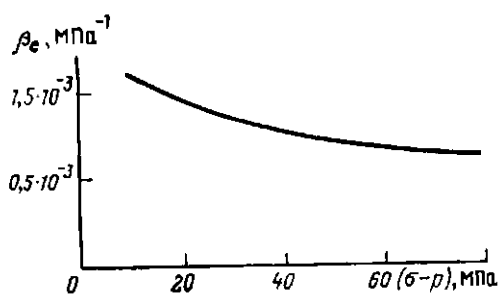


Рис. IV.3. Кривая изменения β_c в зависимости от $(\sigma - p)$ (модель В. Н. Щелкачева)

Изменение же порового давления p обуславливает соответствующее изменение объемов образца ΔV и пористого пространства ΔV_p .

Экспериментальное определение коэффициента сжимаемости твердой фазы проводится по относительной объемной деформации образца породы,

помещенного в камеру с жесткими стенками (без эластичной оболочки).

В твердых телах и, в частности, зернистых средах наряду с обратимой упругой деформацией может иметь место необратимая деформация (упругий гистерезис кривых сжимаемости).

Это явление выражается в несовпадении физических свойств при увеличении и уменьшении давления. Эффект упругого гистерезиса уменьшается с увеличением продолжительности исследования. Чем менее проницаема пористая среда, тем сильнее выражен этот эффект.

Подробные исследования сжимаемости коллекторов приводятся в специальной литературе [14].

Коэффициент упругости пласта

При известных коэффициентах $\beta_{ж}$ и β_c можно вывести простую и очень важную формулу, характеризующую упругость пласта. Вывод ее принадлежит В. Н. Щелкачеву [81].

Обозначим через V_0 объем пласта с заданным распределением пластового давления. Пусть произошло изменение его, вообще говоря, не одинаковое по объему пласта. Каждый элемент

пласта V'_0 «отдал» некоторое количество жидкости $\Delta V'_3$, которое складывается из двух составляющих:

$$\Delta V'_3 = \beta_{\text{ж}} V'_{\text{ж}0} \Delta p' + \beta_{\text{с}} V'_0 \Delta p', \quad (\text{IV.23})$$

где $\Delta p'$ и $V'_{\text{ж}0}$ — соответственно изменение пластового давления в элементе и объем жидкости в нем. Первый член этого уравнения определяет количество выделившейся из элемента пласта жидкости за счет ее объемного упругого расширения, второй член — количество выделившейся жидкости за счет упругого уменьшения объема пор.

Первая составляющая вычисляется по формуле (IV.8). Для вычисления второй надежнее всего использовать соответствующие экспериментальные данные, обработанные по формуле (IV.17), чем пользоваться теоретической моделью. Заменяя в (IV.23) $V'_{\text{ж}0}$ через V'_0 по формуле $V'_{\text{ж}0} = m V'_0$, получим

$$\Delta V'_3 = (m\beta_{\text{ж}} + \beta_{\text{с}}) V'_0 \Delta p.$$

Произведя аналогичные расчеты для всех элементов пласта и суммируя результаты, получим

$$\Delta V_3 = (m\beta_{\text{ж}} + \beta_{\text{с}}) V_0 \Delta p, \quad (\text{IV.24})$$

где ΔV_3 — общая отдача пласта, а Δp — изменение средневзвешенного давления (чтобы не усложнять запись, не делается различия в обозначениях локального и средневзвешенного изменений давления, при этом величины всех элементов $\Delta V'_0$ одинаковы).

Отметим, что при выводе (IV.24) делалось вполне приемлемое допущение о неизменности пористости, $m(p) \approx m(p_0) = m$. Выражение

$$\beta^* = m\beta_{\text{ж}} + \beta_{\text{с}} \quad (\text{IV.25})$$

по предложению В. Н. Щелкачева называется коэффициентом упругоэластичности пласта.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Приведенное ниже дифференциальное уравнение представляет собой обобщение полученного в главе III уравнения теории фильтрации несжимаемой жидкости.

Обычно в курсах по подземной гидрогазодинамике дается вначале самый общий вывод дифференциальных уравнений и из него, как частные случаи, получаются уравнения, соответствующие течению несжимаемой и сжимаемой жидкостей.

Такой общепринятый путь, являющийся более строгим и при этом наиболее экономным (в смысле объема изложения), нам

представляется в данном случае менее доступным для понимания, особенно для тех читателей, которых интересуют в большей степени физическая, чем математическая сторона проблемы. Кроме того, последовательный строгий дедуктивный подход требует составления общего дифференциального уравнения для многокомпонентной смеси.

Обычно же в курсах гидрогазодинамики выписывается общее уравнение для однокомпонентной системы. Такой подход объясняется в основном традицией, обусловленной тем, что дифференциальные уравнения однокомпонентной системы (несжимаемая и слабосжимаемая жидкость) относятся к хорошо изученным классам уравнений математической физики и при их решении в общем используется один и тот же математический аппарат.

Вспомним, как выводилось дифференциальное уравнение для несжимаемой жидкости.

Вывод предполагал, что количество жидкости (масса), поступающей в выделенный бесконечно малый элемент пласта, равно количеству (массе) жидкости, покидающей его. Такое положение следует из условия несжимаемости жидкости: в элементе масса жидкости неизменна.

В рассматриваемом случае жидкость уже нельзя считать несжимаемой, кроме того, за счет изменения порового объема, вызванного упругими свойствами скелета, должно произойти изменение объема пор пласта. Поэтому уравнение неразрывности в этом случае необходимо представить в виде трех составляющих: массы жидкости d^3M_1 , поступающей в рассматриваемый параллелепипед через его грани (эту величину мы возьмем со знаком плюс); массы d^3M_2 , покидающей параллелепипед через соответствующие грани (со знаком минус); наконец, массы d^3M_3 , накопившейся в параллелепипеде за счет сжимаемости жидкости и изменения порового объема (этот компонент следует взять со знаком минус).

Правило знаков становится ясным из следующего:

$$d^3M_1 - d^3M_2 - d^3M_3 = 0$$

или

$$d^3M_1 = d^3M_2 + d^3M_3. \quad (\text{IV.26})$$

Количество поступающей в элемент жидкости d^3M_1 равно количеству ее d^3M_2 , покинувшей элемент, плюс количество d^3M_3 , накопившейся в элементе:

$$d^3M_1 = \rho v_x (dy dz) dt + \rho v_y (dx dz) dt + \rho v_z (dx dy) dt. \quad (\text{IV.27})$$

$$d^3M_2 = \left(\rho v_x + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) dx \right) (dy dz) dt + \left(\rho v_y + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) dy \right) (dx dz) dt + \left(\rho v_z + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) dz \right) (dx dy) dt. \quad (\text{IV.28})$$

Первое, второе и третье слагаемые этих двух уравнений представляют массовые расходы через грани $(dy dz)$, $(dx dz)$ и $(dx dy)$.

Величину $d^3 M_3$ представим как

$$d^3 M_3 = (dx dy dz) \frac{\partial (m\rho)}{\partial t}. \quad (\text{IV.29})$$

Суммируя $d^3 M_1$, $-d^3 M_2$ и $-d^3 M_3$, получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial (m\rho)}{\partial t}. \quad (\text{IV.30})$$

Учитывая, что плотность жидкости изменяется незначительно с изменением давления, можно в левой части уравнения (IV.30) величину ρ вынести из-под знака дифференцирования.

Далее в соответствии с уравнениями (IV.8) и (IV.16) запишем величины m и ρ следующим образом:

$$m = m_0 + \beta_c (p - p_0), \quad \rho = \rho_0 [1 + \beta_k (p - p_0)].$$

Иными словами, реальные кривые изменения пористости и плотности аппроксимируются прямыми, где через p_0 и ρ_0 обозначаются некоторые характерные значения давления и плотности.

Произведение $m\rho$ можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} m\rho &= [m_0 + \beta_c (p - p_0)] \rho_0 [1 + \beta_k (p - p_0)] \approx \\ &\approx m_0 \rho_0 \left[1 + (p - p_0) \left(\beta_k + \frac{\beta_c}{m_0} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{IV.31})$$

Подставляя $m\rho$ из (IV.27) в дифференциальное уравнение (IV.26) и учитывая закон Дарси, получим основное дифференциальное уравнение фильтрации жидкости при упругом режиме¹:

$$\kappa \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (\text{IV.32})$$

где

$$\kappa = \frac{k}{\mu (m_0 \beta_k + \beta_c)}. \quad (\text{IV.33})$$

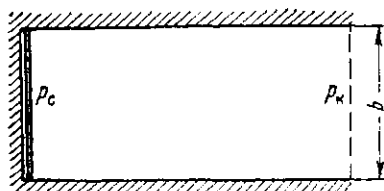
По предложению В. Н. Щелкачева κ называется коэффициентом пьезопроводности.

¹ При выводе уравнения (IV.32) делается ряд вполне допустимых упрощений.

ПРОСТЕЙШИЕ РЕШЕНИЯ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ПРИТОКУ ЖИДКОСТИ К ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ГАЛЕРЕЕ В БЕСКОНЕЧНОМ ПОЛОСООБРАЗНОМ ПЛАСТЕ

Пусть на плоском пласте, бесконечно протяженном в одну сторону, находится эксплуатационная галерея, на которой все время поддерживается давление p_c .

Начальное давление примем равным p_k (рис. IV.4).



Ясно, что в этом случае дифференциальное уравнение (IV.32) примет вид

$$x \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (IV.34)$$

Введем так называемую функцию ошибок

$$\operatorname{erf} \xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-u^2} du, \quad (IV.35)$$

где

$$\xi = \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}. \quad (IV.36)$$

Легко подстановкой (IV.35) в дифференциальное уравнение (IV.32) убедиться, что (IV.35) удовлетворяет этому уравнению. Поэтому выражение вида

$$p = C_1 \operatorname{erf} \xi + C_2 \quad (IV.37)$$

также должно удовлетворять дифференциальному уравнению.

Постоянные C_1 и C_2 определяются из следующих условий.

В начальный момент времени $t=0$, т. е. до начала эксплуатации галереи, давление во всей области равно первоначальному p_k .

Это дает первое условие

$$t=0, \quad p(x) = p_k = \text{const.} \quad (IV.38)$$

Из (IV.36) следует, что при $t=0$ $\xi = \infty$, а так как

$$\operatorname{erf} \infty = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = 1, \quad (IV.39)$$

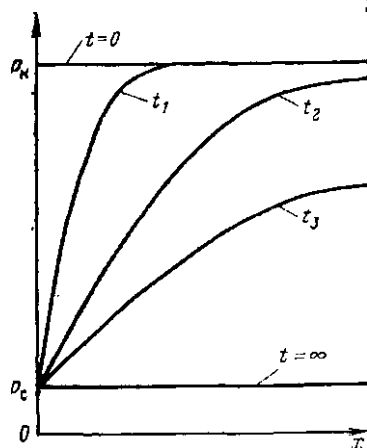


Рис. IV.4. Кривые распределения давления по пласту в моменты $t_1 < t_2 < t_3 \dots$

то из решения (IV.37) при подстановке в него условия (IV.39) вытекает

$$p_k = C_1 \operatorname{erf} \infty + C_2 = C_1 + C_2. \quad (\text{IV.40})$$

Второе условие, соответствующее эксплуатационной галерее, напишется так:

$$x = 0, \quad p(t) = p_c = \text{const}. \quad (\text{IV.41})$$

Из (IV.36) вытекает, что для $x = 0$ и при $t > 0$ (т. е. эксплуатация галереи началась в момент, весьма близкий к нулю) $\xi = 0$.

Подставляя это условие в решение (IV.37), получим

$$p_c = C_1 \operatorname{erf} 0 + C_2 = C_2. \quad (\text{IV.42})$$

Отсюда с учетом (IV.40) вытекает окончательный результат:

$$p = (p_k - p_c) \operatorname{erf} \xi + p_c$$

или

$$\frac{p_k - p}{p_k - p_c} = 1 - \operatorname{erf} \xi. \quad (\text{IV.43})$$

Для весьма близкого к нулю момента времени $t = \Delta t$ кривая характеризуется резким возрастанием давления в окрестности галереи. Это и понятно: ведь до пуска галереи в эксплуатацию давление во всей области (включая и галерею) равнялось величине p_k , а затем в галерее оно резко (за время $\Delta t = 0$) упало до p_c . А так как дебит галереи пропорционален градиенту давления в точке $x = 0$, то следует ожидать, что при $t = 0$ градиент давления $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta p / \Delta x)$ и, следовательно, и дебит будут равны

бесконечности. Конечно, эти рассуждения справедливы в теоретическом плане, так как основаны на недопустимой экстраполяции положений теории упругого режима в область больших скоростей фильтрации.

Для нахождения дебита воспользуемся формулой

$$\begin{aligned} Q &= \frac{k h b}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{k h b}{\mu} (p_k - p_c) \frac{d}{dx} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-u^2} du = \\ &= \frac{k h b}{\mu} (p_k - p_c) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(e^{-\frac{x^2}{4xt}} \frac{1}{2\sqrt{x t}} \right)_{x=0} = \frac{k h b}{\mu} \frac{(p_k - p_c)}{\sqrt{\pi x t}}. \end{aligned} \quad (\text{IV.44})$$

Из этой формулы следует, что при $t = 0$ дебит равен бесконечности.

Отметим еще одну особенность полученного решения, которую мы используем при анализе процессов перераспределения давления в полосообразных залежах большой протяженности.

Изучим характер изменения давления вдали от галереи по показанию в ньеометрической скважине. Если время, в течение которого изучается изменение давления, невелико (значение этого времени будет оценено ниже), то согласно формуле (IV.36) ξ должно быть значительным. Существует асимптотические формулы для определения функции ошибок $\operatorname{erf} \xi$ при больших значениях аргумента ξ . Одна из формул имеет вид

$$\operatorname{erf} \xi = 1 - \frac{e^{-\xi^2}}{\xi \sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{2\xi^2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \xi^4} - \dots \right). \quad (\text{IV.45})$$

Проведем следующие оценки. Согласно В. Н. Щелкачеву [81], встречающиеся значения коэффициента пьезопроводности κ заключены в пределах 10^{-1} — $5 \text{ м}^2/\text{с}$. Примем расстояние между галереями и пьезометрической скважиной $x = 10^4 \text{ м}$. Тогда согласно (IV.36) при $t = 31,5 \cdot 10^6 \text{ с}$ (около одного года), $\kappa = 10^{-1} \text{ м}^2/\text{с}$ ξ будет равна 2,83. Расчет по асимптотической формуле (IV.44) дает следующее значение $\operatorname{erf} \xi$: $\operatorname{erf} 2,83 \approx 0,99993$.

Это означает, что согласно (IV.43) $(p - p_c)/(p_k - p_c) \approx 0,99993$, т. е. по истечении года со времени пуска в работу галерей для нижнего предела пьезопроводности $\kappa = 10^{-1} \text{ м}^2/\text{с}$ перепад между давлениями в рассматриваемой точке и галерее примерно на 0,01 % меньше первоначального перепада. При $p_k = 20,0 \text{ МПа}$ и $p_c = 5,0 \text{ МПа}$, это составит малоощутимую величину в 0,0015 МПа.

Если же принять верхний предел пьезопроводности $\kappa = 5 \text{ м}^2/\text{с}$, то такое же изменение давления в рассматриваемой точке наступит по истечении примерно одной недели.

Приведем еще формулу для определения функции ошибок при малых ξ :

$$\operatorname{erf} \xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\xi - \frac{1}{3} \xi^3 + \dots \right). \quad (\text{IV.46})$$

Рассмотрим теперь случай, когда задан постоянный расход (дебит) на галерее. Преобразуем вначале дифференциальное уравнение (IV.34), умножив его на k/μ :

$$-\frac{k}{\mu} \kappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\frac{k}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (\text{IV.47})$$

Продифференцируем полученное уравнение по x :

$$-\frac{k}{\mu} \kappa \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} = -\frac{k}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x}.$$

Преобразуем его так:

$$\kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-\frac{k}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{k}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad (\text{IV.48})$$

но $-\frac{k}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = v$, где v — скорость фильтрации.

Поэтому выражение (IV.48) будет:

$$x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (\text{IV.49})$$

т. е. полученное дифференциальное уравнение имеет такой же вид, как и (IV.34). Граничные и начальные условия следующие: при $x = 0$

$$v_c = \text{const}, \quad (\text{IV.50})$$

при $t = 0$, поскольку давление всюду постоянно ($\partial p / \partial x = 0$), скорость равна нулю. Это дает

$$v_c = v(0, t), \quad v(x, 0) = 0. \quad (\text{IV.51})$$

Сравнивая дифференциальное уравнение (IV.49) и условия (IV.50) и (IV.51) с соответствующим дифференциальным уравнением (IV.34) и условиями (IV.38) и (IV.41), видим: $p \rightarrow v$, $p_c \rightarrow v_c$, $p_k \rightarrow 0$.

Поэтому, заменив в решении (IV.43) дифференциального уравнения (IV.34) p через v , p_c через v_c и p_k через нуль, получим решение рассматриваемой задачи:

$$v = v_c (1 - \text{erf } \xi). \quad (\text{IV.52})$$

Очевидно, что вдали от галереи ($\xi \rightarrow \infty$) и $v \rightarrow 0$. Учитывая $v = -\frac{k}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}$, получим

$$-\frac{k}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = v_c (1 - \text{erf } \xi). \quad (\text{IV.53})$$

Интегрируя (IV.53) в пределах от нуля до x , имеем:

$$\int_0^x \frac{\partial p}{\partial x} dx = p(x, t) - p(0, t) = -\frac{\mu v_c}{k} \int_0^x \left[1 - \text{erf} \left(\frac{u}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \right] du. \quad (\text{IV.54})$$

В подынтегральном выражении x заменено через u , чтобы подчеркнуть различие между обозначениями предела интеграла и аргументом.

Интеграл (IV.54) можно представить в виде безразмерной формы:

$$-\frac{k[p(x, t) - p(0, t)]}{2\mu\sqrt{\kappa t}v_c} = \int_0^\xi (1 - \text{erf } u) du. \quad (\text{IV.55})$$

Интегрируя (IV.55) по частям, получим окончательно:

$$-\frac{k[p(x, t) - p(0, t)]}{2\mu\sqrt{\kappa t}v_c} = \xi(1 - \text{erf } \xi) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}(1 - e^{-\xi^2}). \quad (\text{IV.56})$$

Вычислим максимальный перепад давления:

$$p(\infty, t) - p(0, t) = p_k - p_c. \quad (\text{IV.57})$$

При $x \rightarrow \infty$ (т. е. $\xi \rightarrow \infty$) первый член правой части выражения (IV.57) стремится к нулю, поэтому полный перепад давления будет

$$-\frac{k(p_k - p_c)}{\mu \sqrt{x t} v_c} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad (\text{IV.58})$$

или

$$-(p_k - p_c) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\mu \sqrt{x t}}{k} v_c. \quad (\text{IV.59})$$

ПРОСТЕЙШЕЕ РЕШЕНИЕ, СООТВЕТСТВУЮЩЕЕ ПРИТОКУ ЖИДКОСТИ К ТОЧЕЧНОМУ СТОКУ НА ПЛАСТЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ПРОТЯЖЕННОСТИ

Пусть на плоском пласте бесконечной протяженности имеется точечный сток.

Для этого случая дифференциальное уравнение имеет следующий вид:

$$x \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (\text{IV.60})$$

С помощью простой подстановки можно показать, что решением (IV.60) является

$$p = p(r, t) = C_1 \int_0^{\xi} \frac{1}{u} e^{-u^2/4} du + C_2, \quad \xi = \frac{r}{\sqrt{x t}}. \quad (\text{IV.61})$$

Примем, что в начальный $t=0$ давление всюду равно p_k , т. е. что при

$$\xi = \infty \quad t=0, \quad p = p_k. \quad (\text{IV.62})$$

Это дает

$$p_k = C_1 \int_0^{\infty} \frac{1}{u} e^{-u^2/4} du + C_2. \quad (\text{IV.63})$$

Продифференцируем (IV.61):

$$\frac{\partial p}{\partial r} = C_1 \frac{1}{\xi} e^{-\xi^2/4} \frac{1}{\sqrt{x t}} = C_1 \frac{1}{r} e^{-\xi^2/4}. \quad (\text{IV.64})$$

Дебит стока, очевидно, равен

$$Q_0 = \frac{2\pi k h}{\mu} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=0} = \frac{2\pi k h}{\mu} C_1 \left(r \frac{1}{r} e^{-\xi^2/4} \right)_{r=0} = \frac{2\pi k h}{\mu} C_1. \quad (\text{IV.65})$$

Подставив значение C_1 из уравнения (IV.65) в (IV.63), найдем C_2 . Далее из (IV.61) получим распределение давления в пласте в следующем виде:

$$\rho_k - p = \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \int_{\xi = \frac{r}{\sqrt{xt}}}^{\infty} \frac{1}{u} e^{-u^2/4} du. \quad (\text{IV.66})$$

Введем новую переменную $w = u^2/4$. Тогда уравнение (IV.66) преобразуется к следующему виду:

$$\rho_k - p = \frac{\mu Q_0}{4\pi kh} \int_{\frac{r^2}{4xt}}^{\infty} \frac{e^{-w}}{w} dw. \quad (\text{IV.67})$$

Интервал в (IV.67) называется экспоненциальной функцией и обозначается так:

$$-Ei(-x) = -Ei\left(-\frac{r^2}{4xt}\right). \quad (\text{IV.68})$$

Итак, окончательно имеем

$$\rho_k - p = \frac{\mu Q_0}{4\pi kh} Ei\left(-\frac{r^2}{4xt}\right). \quad (\text{IV.69})$$

Для малых значений аргумента $x = r^2/(4xt)$ можно пользоваться приближенной формулой

$$-Ei(-x) = -\gamma - \ln x + x - \frac{1}{4}x^2 + O(x^3), \quad (\text{IV.70})$$

где $\gamma = 0,5772 \dots$ — постоянная Эйлера.

Предыдущую формулу можно перенести в виде

$$-Ei\left(-\frac{r^2}{4xt}\right) = \ln \frac{2,25xt}{r^2} + \frac{r^2}{4xt} - \frac{r^4}{64(xt)^2} + O\left(\frac{r^6}{64(xt)^3}\right). \quad (\text{IV.71})$$

С очень высокой степенью точности при $r^2/(4xt) < 0,1$ можно пользоваться приближенной формулой

$$\rho_k - p = \frac{\mu Q_0}{4\pi kh} \ln \frac{2,25xt}{r^2} = \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \ln \frac{1,5\sqrt{xt}}{r}. \quad (\text{IV.72})$$

Эту формулу можно интерпретировать как формулу Дююнга, в которой числитель $1,5\sqrt{xt}$ — условный радиус $r_1(t)$, зависящий от времени:

$$\rho_k - p = \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \ln \frac{r_1(t)}{r}. \quad (\text{IV.73})$$

Для точечного стока (или источника) не существует давления на стоке (источнике). В самом деле, примем в формуле (IV.69) $r=0$, получим, что $-Ei(-x)$ равна бесконечно большой величине.

От точечного стока мы перейдем к реальной скважине весьма малого радиуса R_c и будем считать давление на этой окружности равным p_c . Итак, имеем

$$p_k - p_c = -\frac{\mu Q_0}{4\pi kh} \text{Ei}\left(-\frac{R_c^2}{4\kappa t}\right) \quad (\text{IV.74})$$

или

$$p_k - p_c = \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \ln \frac{1,5 \sqrt{\kappa t}}{R_c} \quad (\text{IV.75})$$

при условии, что $(\sqrt{\kappa t})/R_c$ велико.

РЕШЕНИЕ, СООТВЕТСТВУЮЩЕЕ ПРИТОКУ ЖИДКОСТИ К ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ГАЛЕРЕЕ В ПОЛОСООБРАЗНОМ ПЛАСТЕ ОГРАНИЧЕННОЙ ПРОТЯЖЕННОСТИ

Поместим начало координат на галерее и рассмотрим две модели пласта ограниченной протяженности:

в пласт длины L отсутствует приток жидкости со стороны внешней границы $\left(\frac{dp}{dx} = 0\right)$;

на внешней границе (контуре нитания) задано постоянное давление.

Пусть давление на галерее все время постоянно и равно p , начальное пластовое давление равно p_k .

Начальные и граничные условия будут:

$$p(x, 0) = p_k, \quad p(0, t) = p_c, \quad \frac{\partial p(L, t)}{\partial x} = 0. \quad (\text{IV.76})$$

Решить первую задачу можно как классическим методом Фурье, так и операционным. Решение имеет вид [36]

$$\begin{aligned} \frac{p_k - p}{p_k - p_c} = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cos(2n-1) \frac{\pi(L-x)}{2L} \times \\ \times \exp\left(-\frac{(2n-1)^2}{4} \pi^2 \text{Fo}\right), \end{aligned} \quad (\text{IV.77})$$

где критерий Фурье $\text{Fo} = \kappa t/L^2$.

Для малых значений Fo (t мало) приведенная формула неудобна, так как ряд сходится очень медленно. Операционный метод дает возможность получить другую форму решения, пригодную для малых значений критерия Fo :

$$\frac{p_k - p}{p_k - p_c} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left\{ \text{erfc} \frac{2n - \frac{x}{L}}{2\sqrt{\text{Fo}}} + \text{erfc} \frac{2(n-1) + \frac{x}{L}}{2\sqrt{\text{Fo}}} \right\}, \quad (\text{IV.78})$$

где $\text{erfc } u = 1 - \text{erf } u$.

Изучим характер изменения давления на непроницаемой границе пласта $x = L$ при малых значениях Fo , т. е. в начале эксплуатации галереи.

На этой границе имеем

$$\frac{p_k - p(L)}{p_k - p_c} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{erfc} \frac{2n-1}{2\sqrt{Fo}}. \quad (\text{IV.79})$$

При малых значениях Fo можно воспользоваться приближенной формулой (IV.79), которая в данном случае при условии сохранения одного члена ряда (IV.79) имеет вид

$$\alpha = \frac{p_k - p(L)}{p_k - p_c} \approx \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Fo} e^{-\frac{1}{4Fo}} \quad (\text{IV.80})$$

или

$$\alpha = \frac{p(L) - p_c}{p_k - p_c} \approx 1 - \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Fo} e^{-\frac{1}{4Fo}}. \quad (\text{IV.81})$$

При определении давления на непроницаемой границе приближенная формула дает вполне приемлемые результаты до $Fo < 0,1$ (точность до $\sim 10\%$). Отметим вместе с тем, что при определении изменения давления на этой границе необходимо пользоваться точной формулой (IV.77), взяв достаточно большое число членов ряда.

Расчеты показывают, что до значения $Fo < 0,08$ α практически мало отличается от первоначального значения $\alpha = 1$. Однако из этого не следует заключение о малости изменения давления на этой границе. Действительно, примем $p_k = 20$ МПа, $p_c = 5$ МПа, $p_k - p_c = 15$ МПа; тогда при $Fo = 0,08$, $\alpha = 0,97$ и $p(L) = p_c + \alpha(p_k - p_c) = 5 + 0,97 \cdot 15 = 19,55$ МПа, т. е. давление изменилось на вполне ощутимую величину 0,45 МПа.

Для определения дебита галереи продифференцируем выражение (IV.77). Объемный дебит при этом будет

$$Q = hb \frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=0} = 2 \frac{khb}{\mu} \cdot \frac{(p_k - p_c)}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \times \\ \times (-1)^{2n} \exp \left[-\frac{(2n-1)^2}{4} \pi^2 Fo \right]. \quad (\text{IV.82})$$

При малых значениях Fo ($Fo < 0,1$) эта формула неудобна, так как ряд сходится очень медленно.

В этих случаях можно воспользоваться формулой (IV.78). Объемный дебит, определенный по этой формуле, будет

$$Q = hb \frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{khb}{\mu} \cdot \frac{(p_k - p_c)}{L} \frac{1}{\sqrt{\pi Fo}} \sum_{n=1}^{\infty} \times \\ \times (-1)^{n+1} \left(e^{-\frac{(n-1)^2}{Fo}} - e^{-\frac{n^2}{Fo}} \right). \quad (\text{IV.83})$$

В случае больших значений Fo ($Fo > 0,1$) в уравнении (IV.82) можно сохранить лишь первый член ряда, и тогда оно примет более простой вид

$$\bar{Q} = 2 \exp \left(-\frac{\pi^2}{4} Fo \right). \quad (IV.84)$$

При малых значениях Fo ($Fo < 0,1$) также можно ограничиться первым членом ряда (IV.83) ($n = 1$) и получим для этого члена $1 - e^{-1/Fo} \approx 1$.

Тогда окончательно имеем

$$\bar{Q} = \frac{1}{\sqrt{\pi Fo}}, \quad (IV.85)$$

где \bar{Q} — безразмерный дебит, определяемый

$$\bar{Q} = \frac{\mu L Q}{k h b (p_k - p_c)}. \quad (IV.86)$$

Из уравнения (IV.85) видно, что в начальные периоды эксплуатации дебит не зависит от длины пласта. Действительно, преобразуем уравнение (IV.85) следующим образом:

$$\bar{Q} \sqrt{Fo} = \frac{\mu L Q \sqrt{\pi t}}{k h b (p_k - p_c) L} = \frac{\mu Q \sqrt{\pi t}}{k h b (p_k - p_c)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}. \quad (IV.87)$$

Это уравнение в точности совпадает с уравнением для объемного дебита пласта бесконечной протяженности [см. уравнение (IV.44)].

Таким образом, приходим к очень важному выводу: когда время мало, процесс фильтрации не зависит от условий на противоположном конце пласта. Этот вывод согласуется с выводом, сделанным нами выше в отношении характера распределения давления.

Если построить кривые распределения давления для пластов конечной и бесконечной протяженности, то они должны практически совпадать при малых Fo (особенно в окрестности галереи). При малых Fo мы имеем основание пользоваться для расчета дебита формулой (IV.87) как более простой.

Перейдем к решению второй из рассматриваемых задач. Пусть по-прежнему давление на галерее все время постоянно и равно p_c , начальное пластовое давление равно p_k .

Начальное и граничное условия в этой задаче следующие:

$$p(x, 0) = p_k, \quad p(0, t) = p_c, \quad p(L, t) = p_k. \quad (IV.88)$$

Решение задачи методом Фурье или операционным имеет вид

$$\frac{p_k - p}{p_k - p_c} = \frac{L - x}{L} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-n^2 \pi^2 Fo} \sin \frac{n\pi(L-x)}{L}. \quad (IV.89)$$

Для малых значений $Fo (Fo < 0,1)$ существует другая формула:

$$\frac{p_K - p}{p_K - p_c} = \operatorname{erfc} \frac{\frac{x}{L}}{2\sqrt{Fo}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{erfc} \frac{2n + \frac{x}{L}}{2\sqrt{Fo}} - \operatorname{erfc} \frac{2n - \frac{x}{L}}{2\sqrt{Fo}} \right). \quad (\text{IV.90})$$

Найдем объемный дебит \bar{Q} по общей формуле (IV.89)

$$\bar{Q} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 Fo}. \quad (\text{IV.91})$$

По приближенной формуле (IV.90) для малых Fo имеем

$$\bar{Q} = \frac{1}{\sqrt{\pi Fo}} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 / Fo} \right]. \quad (\text{IV.92})$$

Так как Fo мало, то в последней формуле можно пренебречь вторым членом, и тогда мы получим формулу (IV.87) для случая непроницаемой границы. Приходим к аналогичному выводу: при малых Fo порядка до 0,1 условия на внешней границе не оказывают заметного влияния на характер изменения дебита галереи (дебит можно рассчитывать по формулам для бесконечного пласта).

Из общей формулы (IV.91) следует, что с возрастанием Fo Q стремится к единице, т. е. наблюдается беспредельное приближение к стационарному состоянию

$$Q = \frac{k h b}{\mu} \frac{p_K - p_c}{L}. \quad (\text{IV.93})$$

Пусть $\pi^2 Fo = 3$, что соответствует $Fo \approx 0,3$. Тогда по формуле (IV.91) имеем

$$\bar{Q} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 Fo} \approx 1 + 2 \cdot 0,0498 \approx 1,1,$$

т. е. текущий дебит всего на 10 % отличается от стационарного значения.

На рис. IV.5 приводится примерное распределение давления по пласту для ряда значений Fo .

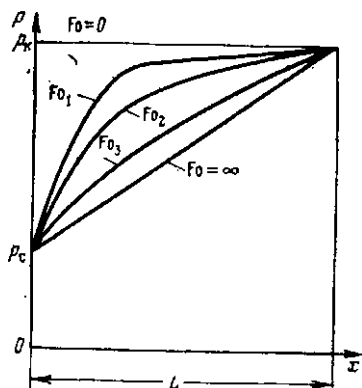


Рис. IV.5. Кривые распределения давления в пласообразном пласте при заданных давлениях на контуре и галерее

ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ. ТЕОРЕМА ДЮГАМЕЛЯ

До сих пор речь шла о задачах, в которых условие на галерее или скважине задавалось в виде или постоянного давления или постоянного расхода. Теперь перейдем к более сложным случаям, когда это условие не соблюдается. Вначале рассмотрим следующие две простые задачи.

Пусть в течение некоторого времени t_1 давление на галерее постоянно и равно p_{c1} . Тогда мы можем воспользоваться уравнением (IV.43) для определения давления p_1 в любой точке пласта, заменив в нем erf через erfc :

$$p_k - p_1 = (p_k - p_{c1}) \text{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}. \quad (\text{IV.94})$$

В некоторый момент времени t_1 давление на галерее изменилось и стало p_{c2} .

Задача решается в два этапа. Вначале подбирается такое решение, чтобы оно при сложении с (IV.94) обеспечивало бы при $t > t_1$ на галерее нулевой перепад давления. Таким решением, очевидно, будет

$$-(p_k - p_{c1}) \text{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\kappa(t-t_1)}}. \quad (\text{IV.95})$$

На рис. IV.6, а кривая соответствует распределению давления по формуле (IV.94) для момента времени $t = t_1 + \Delta t$, где Δt — малая величина; кривая б построена по формуле (IV.95) для этого же момента времени. Сложение решений, очевидно, обеспечит нулевой перепад

давления на галерее, которой сохраняется для любого $t > t_1$.

Для того чтобы получить окончательный результат, необходимо подобрать решение, соответствующее новому граничному условию, а именно:

$$(p_k - p_{c2}) \text{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\kappa(t-t_1)}}. \quad (\text{IV.96})$$

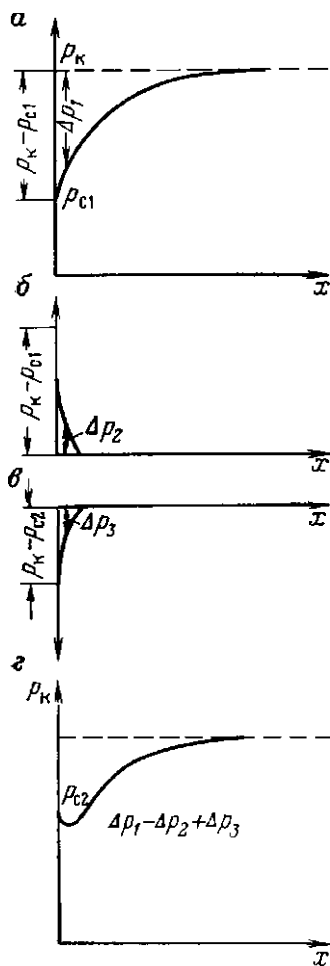


Рис. IV.6. К выводу формулы (IV.97)

Кривая рис. IV.6, б построена по формуле для момента времени $t = t_1 + \Delta t$.

При сложении всех трех решений распределение давления p_2 после того, как давление на галерее изменилось с p_{c1} до p_{c2} , будет:

$$p_k - p = (p_k - p_{c1}) \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\pi k t}} + [(p_k - p_{c2}) - (p_k - p_{c1})] \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\pi k (t - t_1)}}, \quad (\text{IV.97})$$

где индекс 2 при p опущен (см. рис. IV в, з).

Первый член уравнения (IV.97) характеризует давление, обусловленное предшествующим перепадом давления $p_k - p_{c1}$, влияние которого, очевидно, сохраняется и после того, как на галерее установилось новое давление p_{c2} . Второе слагаемое по своей структуре идентично первому, однако в качестве множителя здесь фигурирует приращение перепада давления на галерее (разность между новым и старым его значениями). По аналогичной методике можно рассчитать любые случаи ступенчатого изменения давления на галерее, причем с каждым новым значением перепада (ступени) число членов ряда растет на единицу. Для i -й ступени имеем член ряда в виде

$$[(p_k - p_{ci}) - (p_k - p_{ci-1})] \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\pi k (t - t_{i-1})}}. \quad (\text{IV.98})$$

Вычислим объемный дебит для $t > t_1$ по формуле (IV.97)

$$Q = hb \frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{khb}{\mu} \left\{ \frac{p_k - p_{c1}}{\sqrt{\pi k t}} + \frac{(p_k - p_{c2}) - (p_k - p_{c1})}{\sqrt{\pi k (t - t_1)}} \right\}. \quad (\text{IV.99})$$

Аналогичным способом решается задача для случая стока (источника).

Рассмотрим линейный сток. Пусть при $t < t_1$ дебит стока был Q_1 , тогда давление будет

$$p_k - p_1 = -\frac{\mu Q_1}{4\pi kh} \operatorname{Ei} \left(-\frac{r^2}{4kt} \right). \quad (\text{IV.100})$$

При $t > t_1$ дебит изменился до Q_2 . Начиная с этого момента, в соответствии с принципом суперпозиции давление станет

$$p_k - p_1 = -\frac{\mu Q_1}{4\pi kh} \operatorname{Ei} \left(-\frac{r^2}{4kt} \right) - \frac{Q_2 - Q_1}{4\pi kh} \operatorname{Ei} \left(-\frac{r^2}{4k(t - t_1)} \right). \quad (\text{IV.101})$$

Для малых значений $r^2/(4kt)$ будем иметь

$$p_k - p = \frac{\mu Q_1}{4\pi kh} \ln \frac{2.25kt}{r^2} + \frac{\mu (Q_2 - Q_1)}{4\pi kh} \ln \frac{2.25k(t - t_1)}{r^2}. \quad (\text{IV.102})$$

Очевидно, формулой (IV.102) нельзя пользоваться при t , близком к t_1 (тем более при $t = t_1$), так как условие малости аргумента $\frac{r^2}{4\kappa(t - t_1)}$ при этом не соблюдается.

При многоступенчатом изменении Q задача решается таким же способом, как и рассмотренная выше.

Использование описанного выше расчетного приема неудобно в тех случаях, когда число ступеней изменения давления или расхода велико.

Для решения задач с многоступенчатым изменением входных параметров или при непрерывном изменении их применяют теорему (формулу) Дюгамеля, к выводу которой мы сейчас перейдем.

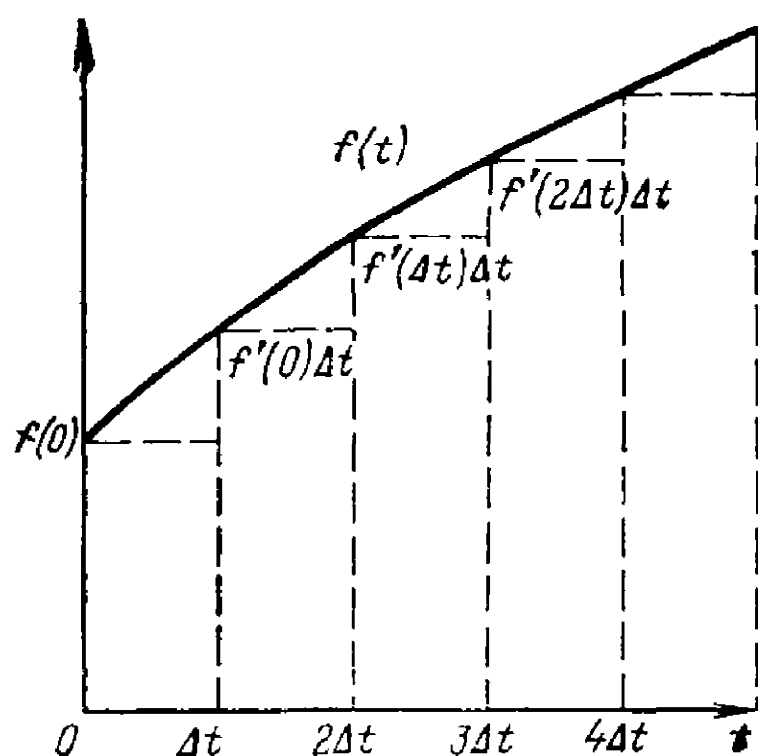


Рис. IV.7. Кривая изменения перепада давления на галерее

Обозначим через $\varphi(t)$ функцию erfc в уравнении (IV.94) или Ei в уравнении (IV.100). $\varphi(t)$ можно рассматривать как единичную функцию, т. е. как распределение давления, соответствующее единичному перепаду давления $p_k - p_c = 1$, в задаче с заданным постоянным давлением на галерее или единичному расходу $\mu Q_0 / (4\pi kh) = 1$ в задаче с заданным постоянным расходом.

Для определенности рассмотрим случай, когда перепад давления на галерее изменяется по некоторому закону $f(t)$. Разобьем кривую на ряд малых интервалов времени Δt и представим его в виде большого числа ступеней (рис. IV.7).

Высота этих ступеней будет

$$f'(0)\Delta t, \quad f'(\Delta t)\Delta t, \quad f'(2\Delta t)\Delta t, \dots \quad (\text{IV.103})$$

На первом этапе $t = \Delta t + 0$ процесс можно представить в виде

$$f(0)\varphi(\Delta t) + f'(0)\Delta t\varphi(0). \quad (\text{IV.104})$$

Первый член обусловлен действием постоянного перепада давления $f(0)$, он аналогичен первому слагаемому уравнения (IV.97). Второй член соответствует изменению перепада $f'(0) \times \Delta t$ (первая ступень) и вполне аналогичен второму слагаемому этого же уравнения.

На второй ступени $(\Delta t + \Delta t + 0)$ действие постоянного перепада давления сохраняется, но аргумент единичной функции уже вдвое больше, он равен $\varphi(2\Delta t)$. Продолжительность пере-

пада давления на первой ступени $f'(0) \Delta t$ будет равна Δt и соответствующая единичная функция — $\varphi(\Delta t)$.

Перепаду на второй ступени $f'(\Delta t) \Delta t$ соответствует единичная функция $\varphi(0)$ («опоздание» на величину Δt).

Таким образом, решение на втором этапе $2\Delta t + 0$ выразится так:

$$f(0) \varphi(2\Delta t) + [f'(0) \Delta t] \varphi(\Delta t) + [f'(\Delta t) \Delta t] \varphi(0). \quad (\text{IV.105})$$

Легко получить таким же способом решение на третьем этапе $(\Delta t + \Delta t + \Delta t + 0)$:

$$f(0) \varphi(3\Delta t) + [f'(0) \Delta t] \varphi(2\Delta t) + [f'(\Delta t) \Delta t] \varphi(\Delta t) + [f'(2\Delta t) \Delta t] \varphi(0). \quad (\text{IV.106})$$

Таким образом, решение можно представить в виде ряда

$$f(0) \varphi(v\Delta t) + \sum_{i=1}^v f'((i-1)\Delta t) \Delta t \varphi((v-i)\Delta t) \Delta t \quad (\text{IV.107})$$

или

$$f(0) \varphi(t) + \sum_{i=1}^v f'((i-1)\Delta t) \Delta t \varphi(t-i\Delta t) \Delta t, \quad (\text{IV.108})$$

где t — время, соответствующее числу шагов ($t = v\Delta t$).

Увеличивая число интервалов до бесконечности ($v \rightarrow \infty$, $\Delta t \rightarrow 0$) и обозначая через $\tau = i\Delta t$, получим по правилам математического анализа формулу Дюгамеля

$$p_k - p = f(0) \varphi(t) + \int_0^t f'(\tau) \varphi(t-\tau) d\tau. \quad (\text{IV.109})$$

При расчете по этой формуле необходимо помнить, что единичная функция $\varphi(t)$ — это функция не только времени t , но и координат x, y, z . А так как рассматриваемая задача одномерна (напомним, что в ней φ равно $\text{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}$), то предыдущую формулу для определения перепада давления можно переписать так:

$$p_k - p = f(0) \varphi(x, t) + \int_0^t f'(\tau) \varphi(x, t-\tau) d\tau.$$

Аналогичным способом можно вывести формулу для переменного дебита. В этом случае в выражении (IV.109) в правой части под $f(t)$ подразумевается закономерность изменения дебита, а под $\varphi(x, t)$ — соответствующая единичная функция. Так, для радиальной задачи при $\mu Q_0 / 4\pi k h = 1$

$$\varphi(x, t) = \varphi(r, t) = -\text{Ei} \left(-\frac{r^2}{4\kappa t} \right) = \int_{\frac{r^2}{4\kappa t}}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

При помощи уравнения (IV.109), в частности, выводится формула для определения давления в скважине при произвольном изменении дебита, которая лежит в основе гидродинамического метода исследования скважин и пластов.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СКВАЖИН И ПЛАСТОВ

Одно из важных приложений теории упругого режима фильтрации — определение параметров скважин и пластов методом восстановления давления.

Начнем рассмотрение с простейшего случая восстановления давления при мгновенном прекращении притока жидкости в скважину.

В действительных условиях такой случай нельзя реализовать. Его можно только представить себе, вообразив, что забой скважины оборудован отсекающим, мгновенно перекрывающим поток в скважину. Тем не менее такая задача представляет методологический интерес, так как из ее решения можно сделать вывод о влиянии притока на характер изменения давления на забое скважины, а также с известным приближением определить параметры пласта.

Пусть в течение некоторого достаточно длительного времени скважина работала с постоянным дебитом Q . В момент T она остановлена (рис. IV.8). Отсчет времени t будем вести с этого момента.

Тогда, согласно принципу суперпозиции, давление в скважине можно определить по формуле

$$p_{пл} - p_c(t) = -\frac{\mu Q}{4\pi kh} \operatorname{Ei}\left(-\frac{R_c^2}{4\kappa(T+t)}\right) + \frac{\mu Q}{4\pi kh} \operatorname{Ei}\left(-\frac{R_c^2}{4\kappa t}\right). \quad (\text{IV.110})$$

Первый член представляет собой то изменение давления, которое было бы в скважине, если бы она продолжала работать сверх времени T еще время t , второй член — изменение давления, вызванное действием воображаемой нагнетательной скважины с производительностью Q , расположенной на оси добывающей и пущенной в начальный момент времени исследования (момент остановки $t=0$).

При таком наложении, очевидно, обеспечивается получение «нулевого» расхода с момента остановки скважины. Указанное наглядно видно из рисунка.

Если период работы скважины T намного больше периода восстановления $t(T \gg t)$, то в выражении (IV.110) $\operatorname{Ei}\left(-\frac{R_c^2}{4\kappa(T+t)}\right)$ можно заменить на $\operatorname{Ei}\left(-\frac{R_c^2}{4\kappa T}\right)$. Тогда (IV.110) перепишется

так:

$$p_{пл} - p_c(t) = \frac{\mu Q}{4\pi kh} \left[\text{Ei} \left(-\frac{R_c^2}{4\pi t} \right) - \text{Ei} \left(-\frac{R_c^2}{4\pi T} \right) \right]. \quad (\text{IV.111})$$

С другой стороны,

$$p_{пл} - p_c(T) = -\frac{\mu Q}{4\pi kh} \text{Ei} \left(-\frac{R_c^2}{4\pi T} \right), \quad (\text{IV.112})$$

где $p(T)$ — давление в скважине в момент T .

Из уравнений (IV.111) и (IV.112) имеем

$$\begin{aligned} \Delta p_1 = p_c(t) - p_c(T) &= -\frac{\mu Q}{4\pi kh} \text{Ei} \left(-\frac{R_c^2}{4\pi t} \right) \approx \\ &\approx \frac{\mu Q}{4\pi kh} \ln \frac{2,25\pi t}{R_c^2}. \end{aligned} \quad (\text{IV.113})$$

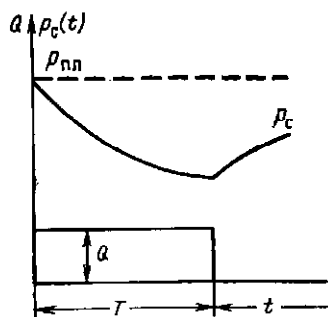


Рис. IV.8. Кривая изменения давления в скважине в результате остановки ее в момент T

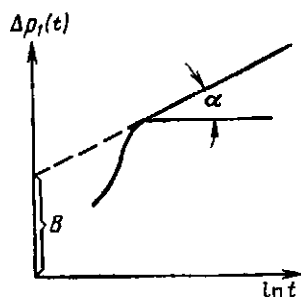


Рис. IV.9. График обработки кривой восстановления давления методом касательной

Уравнение (IV.113) можно записать в виде

$$\Delta p_1(t) = \left(\frac{\mu Q}{4\pi kh} \ln \frac{2,25\pi}{R_c^2} \right) + \left(\frac{\mu Q}{4\pi kh} \right) \ln t. \quad (\text{IV.114})$$

Откладывая по оси абсцисс $\ln t$, а по оси ординат $\Delta p_1(t)$, мы должны получить прямую линию (рис. IV.9).

Отрезок, отсекаемый на оси ординат, равен

$$B = \frac{\mu Q}{4\pi kh} \ln \frac{2,25\pi}{R_c^2}, \quad (\text{IV.115})$$

а тангенс угла наклона прямой

$$\text{tg } \alpha = \frac{\mu Q}{4\pi kh}. \quad (\text{IV.116})$$

В действительности прямолинейный характер зависимости $\Delta p_1(t) = f(\ln t)$ имеет только, начиная с какого-то значения $\ln t$. При малых значениях аргумента фактическое $\Delta p_1(t)$ отличается от значения, предсказываемого уравнения (IV.114). Это объясняется допущениями, принятыми при построении модели процесса.

Если процесс исследования обеспечивает получение прямолинейного участка достаточной протяженности на рис. IV.9, то по формулам (IV.115) и (IV.116) не представит труда вычислить пьезопроводность κ и проницаемость пласта (или, если неизвестны h и μ , — гидропроводность kh/μ):

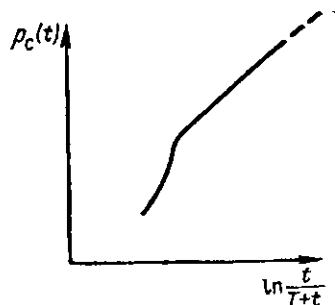


Рис. IV.10. К обработке кривой восстановления давления по методу Хорнера

$$\kappa = 0,44 R_c^2 e^{\frac{B}{\lg \alpha}}, \quad (\text{IV.117})$$

$$\frac{kh}{\mu} = \frac{Q}{4\pi \lg \alpha}. \quad (\text{IV.118})$$

Выше было сделано допущение, что $T \gg t$. Это дало основание заменить аргумент интегрального экспоненциала

$$\frac{R_c^2}{4\kappa(T+t)} \text{ на } \frac{R_c^2}{4\kappa T}.$$

Однако указанное упрощение недопустимо в тех случаях, когда период T соизмерим с временем наблюдения. Приведем более точный вывод.

Заменяя в (IV.111) интегральный экспоненциал его выражением для малого аргумента, получим

$$\Delta p_2 = p_{\text{пл}} - p_c(t) = \frac{\mu Q}{4\pi kh} \left[-\ln \frac{2,25\kappa t}{R_c^2} + \ln \frac{2,25\kappa (T+t)}{R_c^2} \right] \quad (\text{IV.119})$$

или

$$p_c(t) = p_{\text{пл}} + \frac{\mu Q}{4\pi kh} \ln \frac{t}{T+t}. \quad (\text{IV.120})$$

В координатах $\Delta p_c(t)$ и $\ln t/(T+t)$ зависимость (IV.120) прямолинейна (рис. IV.10), и на ней представляется возможным определение гидропроводности kh/μ пласта (метод Хорнера).

Если t стремится к бесконечности, что равносильно бесконечно длительному наблюдению, то $\ln t/(T+t) \rightarrow 0$ и $p_c(t)$ будет стремиться к $p_{\text{пл}}$.

На рис. IV.10 показан способ определения пластового давления, основанный на экстраполяции прямолинейной части кривой восстановления давления до пересечения ее с вертикальной

прямой, проходящей через абсциссу $\ln t/(T+t) = 0$. Точка пересечения дает величину пластового давления.

В работе [7] на основе анализа обоих рассмотренных методов сделано заключение, что первый из них можно применять до момента $t < 0,05T$, участки же, соответствующие $t > 0,05T$, следует обрабатывать по методу Хорнера.

Основным недостатком предложенных методов является то, что они не учитывают притока жидкости в скважину после ее остановки. Первые попытки учета этого фактора принадлежат А. М. Пирвердян [52], Ф. А. Требину, Ю. П. Борисову [7] и др.

В литературе [77] приведена формула для определения давления в скважине, отсчитываемого от начального давления, одинакового во всей области при произвольном изменении дебита ¹:

$$p_c(\theta) = \frac{\mu}{4\pi kh} \int_0^{\theta} Q(\theta - \tau) \frac{e^{-R_c^2/(4\pi\tau)}}{\tau} d\tau. \quad (\text{IV.121})$$

Анализ этой формулы показывает [77], что с высокой степенью точности ее можно заменить следующей:

$$p_c(\theta) = \frac{\mu}{4\pi kh} \left[Q(\theta) \ln \frac{2,25\pi}{R_c^2} + \int_0^{\theta-1} \frac{Q(\tau)}{\theta - \tau} d\tau \right]. \quad (\text{IV.122})$$

В дальнейшем в литературе [16] используется следующая расчетная схема. Предполагается, что время θ отсчитывается с момента начала исследования. Если исследование начинается с момента ввода скважины в эксплуатацию, то $p_c(\theta)$ является снижением давления от начального пластового давления, одинакового во всей бесконечной области. В этом случае формула (IV.122) точна (конечно, при тех вполне допустимых упрощениях, которые были описаны выше). Однако такое предположение весьма частно, так как до исследования скважина в большинстве случаев работает некоторое время, причем это время, как правило, превышает продолжительность исследования. Авторы метода все же предлагают использовать формулу (IV.122), только под $p_c(\theta)$ подразумевать повышенное давления от постоянного его значения до исследования, а под $Q(\theta)$ — дебит скважины, также отсчитываемый от постоянного его значения.

С учетом выказанного формулу (IV.122) можно преобразовать так:

$$\Delta p = p_c(T+t) - p_c(t) = \frac{\mu}{4\pi kh} \left\{ [Q(T) - Q(T+t)] \ln \frac{2,25\pi}{R_c^2} + \int_0^{t-1} \frac{Q(T) - Q(\tau)}{t - \tau} d\tau \right\}. \quad (\text{IV.123})$$

¹ Формулу (IV.121) легко получить при помощи теоремы Дюгамеля.

При написании этой формулы мы несколько отклонились от общепринятой записи [7], обозначив через $Q(T)$ постоянный дебит.

Из изложенного становится очевидным, что предлагаемый метод [7] — приближенный. Действительно, для схемы бесконечного пласта не может быть стационарного распределения. При таком распределении давление растет пропорционально логарифму расстояния, т. е. стремится к бесконечности, что лишено физического смысла. По предлагаемому в [58] методу отсчет времени θ проводится не с момента начала исследования, а с момента ввода скважины в эксплуатацию, что соответствует строгой постановке задачи. Обозначая по-прежнему через T время работы скважины, имеем $\theta = T + t$, где t — время исследования скважины.

В результате преобразования (IV.123) получим следующее уравнение для определения $\Delta p(t)$ [58]:

$$\frac{\Delta p(t)}{Q(T) - Q(T+t)} = \frac{\mu}{4\pi kh} \left[\ln \frac{2,25x}{R_c^2} + \psi(t) \right] \quad (\text{IV.124})$$

где $\Delta p(t)$ — приращение давления в скважине после ее остановки, $\Delta p(t) = p_c(T+t) - p_c(T)$, а

$$\psi(t) = \frac{\left[\int_0^{T-1} \frac{Q(\tau) d\tau}{T-\tau} - \int_0^T \frac{Q(\tau) d\tau}{T+t-\tau} \right] - \int_0^{t-1} \frac{Q(\tau') d\tau'}{t-\tau'}}{Q(T) - Q(T+t)}. \quad (\text{IV.125})$$

Если по оси абсцисс откладывать $\psi(t)$, а по оси ординат —

$$\frac{\Delta p(t)}{Q(T) - Q(T+t)},$$

то согласно (IV.124) получим прямую (рис. IV.11), по наклону которой к оси абсцисс и отрезку, отсекаемому на оси ординат, найдем параметры

$$x/R_c^2 \text{ и } kh/\mu.$$

Величины $Q(\tau')$ и $Q(T+t) = Q(t)$ (приток жидкости из пласта в скважину после остановки) определяются дебитомером или косвенным путем вычисления [7].

Можно показать, что

$$\psi(\infty) = \frac{1}{Q(T)} \int_0^{T-1} \frac{Q(\tau) d\tau}{T-\tau}. \quad (\text{IV.126})$$

Ордината (см. рис. IV.11), соответствующая $\psi(\infty)$ согласно (IV.126), дает величину предельно-максимального значения $\Delta p(t)/Q(T)$. По этой ординате определяется пластовое давление $p_c(\infty)$, устанавливающееся при бесконечном наблюдении ($t = \infty$, $\psi(\infty)$), а именно:

$$\frac{\Delta p(\infty)}{Q(T)} = \frac{p_c(\infty) - p_c(T)}{Q(T)} = \frac{\mu}{4\pi kh} \left[\ln \frac{2,25x}{R_c^2} + \psi(\infty) \right]. \quad (\text{IV.127})$$

Таким образом, предлагаемым методом можно определить не только параметры пласта kh/μ и x/R_c^2 , но и пластовое давление.

А между тем по методу [7] не определяется пластовое давление, так как при $t \rightarrow \infty$ величина $\Delta p/Q$ беспрестанно растет. Обычно для решения задачи о пластовом давлении используют метод Хорнера, основанный на двух допущениях: дебит скважины до остановки был постоянен; приток жидкости из пласта в скважину мгновенно прекращается.

Итак, при комплексном решении вопроса исследования скважин допускается непоследовательность: задача о параметрах kh/μ и x/R_c^2 решается с учетом притока жидкости после остановки, но без рассмотрения предыстории процесса, т. е. условий работы скважины до исследования. При расчете же пластового давления первый из указанных факторов не учитывается, второй же рассматривается в упрощенном виде $Q = \text{const}$. Однако необходимо отметить, что в методе Хорнера не обязательно учитывать приток жидкости из пласта, так как, начиная с некоторого t , этот приток равен нулю.

В частном случае при постоянном дебите до остановки скважины ($Q(\tau) = Q(T) = Q$) два первых интеграла в выражении (IV.125) равны $Q \left(\ln t - \ln \frac{T+t}{T} \right)$, причем второй член при $t \ll T$ мал, и его можно не учитывать. В результате этого получим известное выражение, используемое в методе [7].

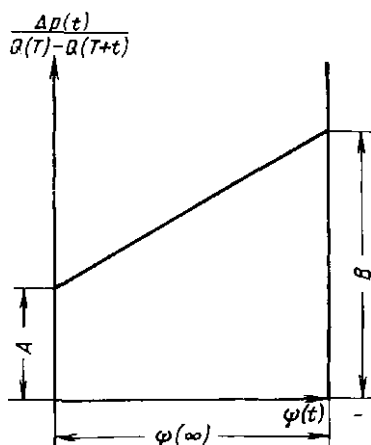


Рис. IV.11. Зависимость

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta p(t)}{Q(T) - Q(T+t)} \text{ от } \psi(t). \\ A = \frac{\mu}{4\pi kh} \ln \frac{2,25x}{R_c^2}; \quad B = p_{\text{пл}} - p_c(T) = \\ & = \frac{\mu}{4\pi kh} \left[\ln \frac{2,25x}{R_c^2} + \psi(\infty) \right] \end{aligned}$$

Однако это не означает, что при расчетах параметров пласта вторым членом во всех случаях можно пренебречь [58]. Изложенным, естественно, не исчерпываются все вопросы, связанные с применением теории упругого режима фильтрации к исследованиям скважин и пластов. Данной проблеме посвящена монография [7], в которой приводятся описание других методов исследования, в частности, эффективных операционных методов обработки кривых восстановления давления с учетом притока, предложенных Г. И. Баренблаттом, Ю. П. Борисовым, С. Г. Каменецким и А. П. Крыловым.

ФИЛЬТРАЦИЯ СМЕСИ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

ФАЗОВЫЕ И ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Законы совместного движения двух—трех жидкостей более сложны, чем законы фильтрации однофазной жидкости. В этой главе будут рассматриваться течения жидкостей без фазовых переходов, что представляет первый шаг на пути решения этой сложной проблемы.

Законы фильтрации для двух фаз (смачивающей и несмачивающей) обычно представляют в виде двух уравнений следующего вида:

$$v_c = \frac{k_c}{\mu_c} \frac{\Delta p}{L}, \quad (V.1)$$

$$v_{nc} = \frac{k_{nc}}{\mu_{nc}} \frac{\Delta p}{L}, \quad (V.2)$$

где k_c и k_{nc} — фазовые проницаемости.

Перейдем от фазовых проницаемостей к относительным

$$f_c = k_c/k, \quad (V.3)$$

$$f_{nc} = k_{nc}/k, \quad (V.4)$$

где k — проницаемость пористой среды при 100 %-ном насыщении ее любой из фаз. Предположим таким образом, что фазовые проницаемости для обеих фаз, полностью заполняющих пористую среду, равны между собой.

Относительные проницаемости в общем случае — это функции ряда факторов и в первую очередь насыщенности пористой среды каждой фазой (рис. V.1). Если в пористой среде нет третьей фазы, то сумма насыщенностей $s_c + s_{nc} = 1$. В дальнейшем через s будем обозначать насыщенность смачивающей фазой.

Две пары кривых относительных проницаемостей (рис. V.1), соответствующие несцементированному и сцементированному пескам, резко отличаются друг от друга. Это свидетельствует о влиянии структуры пористой среды на величину относительной проницаемости. Сумма ординат кривых каждой пары

$$f_c + f_{nc} < 1, \quad (0 < s < 1). \quad (V.5)$$

Если примем $\mu_c = \mu_{nc}$, то из (V.5) получим:

$$v_c(s) + v_{nc}(s) < v_c(1), \quad v_c(s) + v_{nc}(s) < v_{nc}(0), \quad (V.6)$$

т. е. расход двухфазного потока при этих условиях меньше расхода каждой фазы при отсутствии другой.

Кривые f_c и f_{nc} на рис. V.1 и V.2 несимметричны. Проследим за ходом этих кривых при увеличении насыщенности. Как видно, s не может быть ниже некоторого значения $s = s_c$ (см. рис. V.2, точка 1). С увеличением насыщенности относительная проницаемость для смачивающей фазы f_c растет медленно; относительная же проницаемость для несмачивающей фазы f_{nc} медленно убывает от максимального значения, находясь на уровне, близком к нему, при довольно значительном содержании противоположной фазы (особенно это заметно для цементированного песка). При s , близких к единице, ветвь кривой f_c существенно

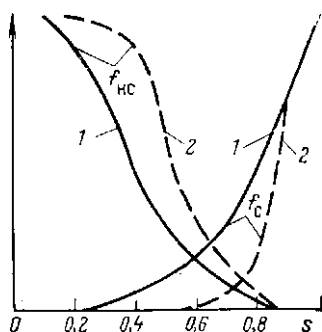


Рис. V.1. Кривые зависимости относительных проницаемостей от насыщенности пористой среды.

1 — несцементированный песок; 2 — цементированный песок

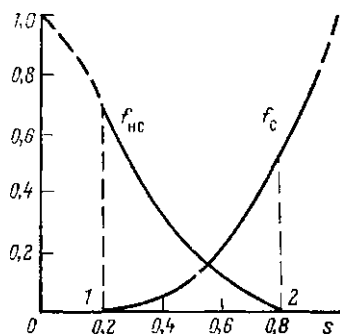


Рис. V.2. Асимметрия кривых относительных проницаемостей

отлична от кривой f_{nc} при малых значениях насыщенности s . Даже небольшое содержание несмачивающей фазы приводит к резкому убыванию относительной проницаемости для смачивающей фазы. При этом же содержании несмачивающей фазы последняя практически неподвижна ($f_{nc} \approx 0$).

Асимметрию кривых фазовых проницаемостей можно объяснить тем, что при больших значениях насыщенности s несмачивающая фаза заполняет больше норы пористой среды, снижая тем самым средний размер пор, заполненных смачивающей фазой. В области же малой насыщенности $s f_{nc}$ сохраняет значение, близкое к единице, так как часть порового пространства заполнена практически неподвижной несмачивающей фазой.

АНАЛИЗ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДВИЖЕНИЯ СМЕСИ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Теоретические модели, не противоречащие экспериментальным фактам, позволяют понять физическую сущность процесса

фильтрации. При построении модели необходимо исходить из определенного режима течения фаз в пористой среде.

В настоящее время наиболее распространена точка зрения, согласно которой каждая из фаз движется независимо от соседней (другой) по своим собственным извилистым каналам (шнурковый режим). Противоположная точка зрения исходит из предположения о «сосуществовании» обеих фаз в каждом пористом канале, причем наиболее простой схемой в этом случае является кольцевая схема течения, при которой смачивающая жидкость движется по стенкам пористого канала, а несмачивающая фаза (в частности, газ) перемещается в центре этого канала. Эта схема отвергается большинством исследователей по косвенным соображениям: если бы в пористой среде реализовался такой режим течения, то относительные проницаемости зависели бы от отношения вязкостей. В действительности, однако, большинством экспериментов такое влияние не обнаруживается. Рассмотрим этот вопрос подробнее, представив пористую среду в виде пучка цилиндрических капилляров одного и того же диаметра, внутри которых реализуется кольцевой режим течения. Такая модель течения применительно к фильтрации газированной жидкости была предложена С. Ф. Аверьяновым [61]. Им же была сделана попытка теоретического решения задачи кольцевого течения с использованием известного уравнения для скорости течения вязкой жидкости в цилиндрической трубе:

$$v_{\text{ж}} = \frac{\Delta p}{4\mu_{\text{ж}}L} r^2 + a_1 \ln r + b_1. \quad (\text{V.7})$$

Постоянные интегрирования a_1 и b_1 С. Ф. Аверьянов определяет из следующих граничных условий: при $r=R_0$, где R_0 — граница между связанной и гравитационной водой, $v_{\text{ж}} = 0$; при $r=R_1$, где R_1 — граница между водой и воздухом, $\frac{dv_{\text{ж}}}{dr} = 0$.

По уравнению (V.7) не представит труда определить объемный расход жидкости:

$$Q = \frac{\pi \Delta p}{8\mu_{\text{ж}}L} \left[(R_0^2 - R_1^2)(R_0^2 - 3R_1^2) + 4R_1^4 \ln \frac{R_0}{R_1} \right]. \quad (\text{V.8})$$

Выражая R_1/R_0 через относительную влажность s , получим из (V.8) после некоторых упрощений формулу для относительной проницаемости воды:

$$f_{\text{ж}}(s) = s^{3,5}. \quad (\text{V.9})$$

Сопоставление опытных результатов [61] с расчетами по формуле (V.9) дало хорошие результаты. Однако задачу следует решить иначе [50].

Напишем уравнение для скорости течения газа:

$$v_{\text{г}} = \frac{\Delta p}{4\mu_{\text{г}}L} r^2 + a_2 \ln r + b_2. \quad (\text{V.10})$$

Для определения постоянных интегрирования примем следующие граничные условия: при $r = R_0$, $v_{ж} = 0$; при $r = R_1$ касательные напряжения трения со стороны жидкости и газа равны между собой:

$$\mu_{ж} \frac{dv_{ж}}{dr} = \mu_{г} \frac{dv_{г}}{dr}, \quad (V.11)$$

причем выполняется условие непрерывного перехода скоростей на этой границе. На оси трубы, т. е. при

$$r = 0, \quad \frac{dv_{г}}{dr} = 0. \quad (V.12)$$

Подставляя граничные условия в формулы (V.7) и (V.10), получим

$$v_{ж} = \frac{\Delta p}{4\mu_{ж}L} (R_0^2 - r^2), \quad (V.13)$$

$$v_{г} = \frac{\Delta p}{4\mu_{г}L} \left[(R_1^2 - r^2) + \frac{\mu_{г}}{\mu_{ж}} (R_0^2 - R_1^2) \right]. \quad (V.14)$$

Определим расходы жидкости и газа по формулам

$$Q_{ж} = \int_{R_1}^{R_0} 2\pi r v_{ж} dr, \quad Q_{г} = \int_0^{R_1} 2\pi r v_{г} dr. \quad (V.15)$$

Перейдем к определению относительных проницаемостей

$$\left. \begin{aligned} f_{ж}(s) &= s^2 \\ f_{г}(s) &= (1-s)^2 + 2 \frac{\mu_{г}}{\mu_{ж}} s(1-s) \end{aligned} \right\}, \quad (V.16)$$

где s — водонасыщенность.

При предельном переходе $\mu_{г}/\mu_{ж} \rightarrow 0$ формула (V.16) не преобразуется в (V.9). Отсюда следует, что для получения решения, имеющего физический смысл, необходим предельный переход не в граничном условии, как это было выполнено С. Ф. Аверьяновым ($dv_{ж}/dr = 0$), а в самом полном решении дифференциального уравнения.

Сопоставление формулы $f_{ж}(s) = s^2$ с зависимостью $k_{ж} = f_{ж}(s)$, полученной на основании экспериментов с газированной жидкостью, показывают довольно значительное несоответствие между ними. Так, при экспериментальной зависимости показателя степени $n = 3,67$, в то время как по теоретической формуле $n = 2$.

Однако полностью модель кольцевого течения отвергнуть нельзя. Дело в том, что в некоторых исследованиях [25] указывалось, что при большой величине отношения несмачивающей фазы к смачивающей относительная проницаемость первой может существенно повыситься. Действительно, заменяя в (V.16)

$\mu_r = \mu_{ж}$ и $\mu_{ж} = \mu_c$, получим именно указанную выше тенденцию роста $f_{rc}(s) = f_{nc}(s)$ с увеличением μ_{nc}/μ_c .

Из (V.16) следует, что при больших значениях $\mu_r/\mu_{ж} = \mu_{nc}/\mu_c$ $f_{ж}(s)$ может в некотором диапазоне значений насыщенности превзойти единицу. В связи с указанным остановимся на экспериментальной работе А. Е. Евгеньева [16], в которой изучался процесс вытеснения из образца воды с 2 %-ным раствором поверхностно-активного вещества ОП-7, высоковязким маслом.

После того как через образец было прокачано масло в объеме, равном $1,5V_{пор}$, фазовая проницаемость оказалась практически одинаковой для всех сечений при наименьшей остаточной водонасыщенности.

В табл. V.1 приводятся определения $f_{nc}(s)$ по трем опытам А. Е. Евгеньева и рассчитанные по формуле (V.16) значения этой функции¹.

Таблица V.1

Сопоставление теоретических и экспериментальных значений f_{nc}

$\frac{\mu_{nc}}{\mu_c}$	$f_{nc}(s)$		Остаточная водонасыщенность, %
	по А. Е. Евгеньеву	по формуле (V.16)	
145	4,78	22,1	8,2
68,2	2,05	13,0	9,8
25,3	1,71	5,6	10,6

Расхождение, как видим, весьма значительное, хотя как из опытов так и из теории вытекает, что $f_{nc}(s) \gg 1$ при $\mu_{nc}/\mu_c \gg 1$. Для соответствия между опытными данными и результатами расчета необходимо в формуле (V.16) принять $s = 0,02$ практически для всех трех случаев (нористая среда в опытах практически одна и та же). Именно этот сравнительно небольшой объем воды должен быть включен в зону преимущественно кольцевого течения. Остальной объем (от 6 до 8 % в зависимости от опыта) сосредоточен в промежутках между зернами. С учетом сказанного формулы для относительных проницаемостей примут вид

$$\left. \begin{aligned} f_c(s) &= \left(\frac{s - s_0}{1 - s_0} \right)^2 \\ f_{nc}(s) &= \left(\frac{1 - s}{1 - s_0} \right)^2 + 2 \frac{\mu_{nc}}{\mu_c} \cdot \frac{(s - s_0)(1 - s)}{(1 - s_0)^2} \end{aligned} \right\}, \quad (V.17)$$

¹ При расчете f_{nc} по формуле (V.16) значения s принимались равными 0,082, 0,098 и 0,106 соответственно.

где s_0 — содержание воды в промежутках между зернами, зависящее главным образом от структуры пористой среды.

Рассмотрим теперь некоторые работы, основанные на предположении независимого движения каждой из фаз по своим собственным каналам [1].

Расход жидкости через капилляр определим по формуле Пуазейля

$$Q = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8\mu L} = \frac{\Delta V r^2 \Delta p}{8\mu L}, \quad (\text{V.18})$$

где $\Delta V = \pi r^2 L$ — объем капилляра (V.19).

С другой стороны, капиллярное давление

$$p_k = \frac{2\sigma \cos \theta}{r}. \quad (\text{V.20})$$

Подставляя значение r из (V.20) в (V.18), получим

$$Q = \frac{(\sigma \cos \theta)^2 \Delta V \Delta p}{2\mu L^2 p_k^2}. \quad (\text{V.21})$$

Написав аналогичные выражения для каждого капилляра и просуммировав расходы, получим формулу для определения общего расхода:

$$Q_0 = \frac{(\sigma \cos \theta)^2}{2\mu L^2} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Delta V_i}{p_{ki}^2} = \frac{(\sigma \cos \theta)^2 V}{2\mu L^2} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Delta s_i}{p_{ki}^2}, \quad (\text{V.22})$$

где V — общий объем пор; Δs_i — доля объема пор, соответствующая капиллярному давлению p_{ki} .

Заменяя величину объема пор через общий объем породы FL и пористость m ($m = V/(FL)$), получим

$$Q_0 = \frac{(\sigma \cos \theta)^2 m F}{2\mu L} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Delta s_i}{p_{ki}}. \quad (\text{V.23})$$

Сумму в уравнении (V.23) можно заменить интегралом, тогда

$$Q_0 = \frac{(\sigma \cos \theta)^2 m F}{2\mu L} \int_{s=0}^{s=1} \frac{ds}{p_k^2}. \quad (\text{V.24})$$

Сравнивая это выражение с формулой Дарси

$$Q_0 = \frac{k F \Delta p}{\mu L}, \quad (\text{V.25})$$

получим формулу для коэффициента проницаемости:

$$k = \frac{(\sigma \cos \theta)^2 m}{2} \lambda \int_{s=0}^{s=1} \frac{ds}{p_k^2}, \quad (\text{V.26})$$

причем коэффициент λ , согласно [1], представляет собой поправку на извилистость пути фильтрации.

По формуле (V.26) были обработаны данные измерений проницаемости k 27 образцов [1]. Для каждого образца методом нагнетания ртути была получена кривая капиллярного давления. По известным углу смачивания ртутью твердой поверхности и поверхностному натяжению для нее были пересчитаны капиллярные давления p_k для системы вода—воздух. Далее не представляло труда вычислить интеграл, входящий в выражение (V.25), а затем и величину коэффициента λ . Среднее значение λ оказалось равным 0,216. На рис. V.3 построена зависимость между проницаемостью, рассчитанной по формуле (V.26) при $\lambda = 0,216$, и фактическими ее значениями. Как видим, соответствие между измеренными и вычисленными проницаемостями вполне удовлетворительно.

В главе II, посвященной теоретической модели пористой среды Кармана—Козени, извилистость, т. е. отношение среднестатистического пути фильтрации к длине образца, была принята равной 2. Установим связь между λ в формуле и величиной ξ . Для этого необходимо в формулах Пуазейля (V.18) и (V.19) L заменить на ξL . Тогда легко получить выражение для $\lambda = \xi^{-2} = 0,25$.

Эта величина довольно близка к экспериментальной $\lambda = 0,216$. Обращаем внимание на то, что сопоставление, строго говоря, неправомерно, так как формула Кармана—Козени относится к несцементированной породе, для которой приемлема модель из сферических частиц, а рассматриваемая модель из набора капиллярных трубок соответствует сцементированной породе. По приведенной выше формуле (V.26) можно рассчитать относительную проницаемость как смачивающей, так и несмачивающей фаз.

Пусть s — содержание смачивающей фазы в пористой среде. Тогда смачивающей фазой в первую очередь должны быть заняты поры большего размера, так как в них давления p_c меньше, чем в соседних порах меньшего диаметра, занятых несмачивающей жидкостью. В этом случае будет соблюдаться условие

$$p_{nc} - p_c = p_k. \quad (V.27)$$

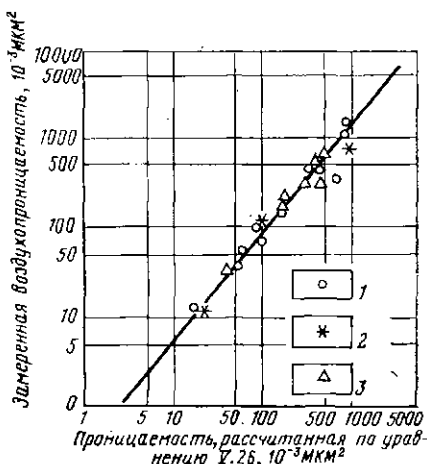


Рис. V.3. График сравнения проницаемости, рассчитанной по данным капиллярного давления, полученными с помощью нагнетания ртути, и замеренной.

1 — керны верхнего Вилкокса; 2 — шлам верхнего Вилкокса; 3 — керны Палакен (Пурцелл [1])

Опираясь на это соображение, получим из (V.26) выражение для проницаемости смачивающей фазы

$$k_c = \frac{(\sigma \cos \theta)^2 m}{2} \lambda \int_{s=0}^s \frac{ds}{p_K^2}. \quad (\text{V.28})$$

Разделив (V.28) на (V.26), имеем формулу для относительной проницаемости смачивающей фазы

$$f_c(s) = \frac{\int_0^s (ds/p_K^2)}{\int_0^1 (ds/p_K^2)}. \quad (\text{V.29})$$

Аналогичным способом получим выражение для относительной проницаемости несмачивающей фазы

$$f_{nc}(s) = \frac{\int_s^1 (ds/p_K^2)}{\int_0^1 (ds/p_K^2)}. \quad (\text{V.30})$$

Из приведенных формул следует, что сумма относительных проницаемостей равна единице, однако это противоречит всем экспериментальным данным.

Положение можно было бы исправить, если принять различные коэффициенты пористой среды λ для каждой фазы или же считать, как это предположили Фатт и Декстра, величину λ зависящей от размера r в виде $\lambda = a/r^b$ ($b > 0$).

По Фатту и Декстру, коэффициент λ представляет главным образом поправку на отклонение действительной длины пути движения от длины образца пористой среды. Чем меньше размер частиц, тем более извилист путь фильтрации. Однако уравнение для λ противоречит однородности размерностей, поэтому в перечень параметров, от которых может зависеть коэффициент λ , следует включить кроме r и другие размерные величины. Более естественно, по-видимому, предположение о зависимости λ от каких-то характерных значений насыщенности, например, минимальной насыщенности смачивающей фазы, как это было предложено Бурдайнном [1]. Однако и это предположение не устраняет указанное противоречие.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ СМЕСИ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Для вывода дифференциальных уравнений обобщим уравнение (V.1), введя понятия давлений p_c , p_{nc} в смачивающей и несмачивающей фазах:

$$\left. \begin{aligned} v_c &= -\frac{k}{\mu_c} f_c \frac{\partial p_c}{\partial x} \\ v_{nc} &= -\frac{k}{\mu_{nc}} f_{nc} \frac{\partial p_{nc}}{\partial x} \end{aligned} \right\}. \quad (V.31)$$

Предпосылкой для записи исходных соотношений в указанном виде является правдоподобное допущение, что каждая фаза течет по своим каналам, соприкасаясь, однако, друг с другом через промежутки между зернами пористой среды или через поперечные капилляры. Эта особенность геометрически изолированных друг от друга, но динамически взаимодействующих потоков позволяет предположить, что связь между давлениями в фазах должна существовать. Здесь важно отметить несуществование абсолютных давлений p_c и p_{nc} . Иначе говоря, при выводе этой связи мы должны включить не эти давления, а разность их $p_{nc} - p_c$, причем, очевидно, эта разность — всегда отрицательная величина.

Анализ размерностей приводит к следующему выводу.

$$\sqrt{k} \frac{p_{nc} - p_c}{\sigma} = f\left(\frac{\mu_c v}{\sigma}, \frac{\mu_{nc}}{\mu_c}, s, m\right). \quad (V.32)$$

Данное выражение содержит слишком мало информации для полученных количественных выводов. В качестве гипотезы предполагается упрощенная связь для $p_{nc} - p_c$ в следующем виде.

$$p_{nc} - p_c = \frac{\sigma \cos \theta}{\sqrt{k/m}} J(s), \quad (V.33)$$

где $J(s)$ — функция Леверетта. Таким образом, предполагается, что в процессе фильтрации двух фаз разность давлений в них в каждом сечении равна разности давления неподвижных жидкостей, т. е. капиллярному давлению p_k . В дальнейшем эта гипотеза нуждается в серьезном рассмотрении.

Выведем основные дифференциальные уравнения фильтрации смеси жидкостей.

Напишем уравнения неразрывности для каждой фазы

$$\frac{\partial v_c}{\partial x} = -m \frac{\partial s}{\partial t}, \quad \frac{\partial v_{nc}}{\partial x} = m \frac{\partial s}{\partial t}. \quad (V.34)$$

Используя (V.31) и (V.33), получим

$$\frac{k}{\mu_c} \frac{\partial}{\partial x} \left(f_c \frac{\partial p_c}{\partial x} \right) = m \frac{\partial s}{\partial t}, \quad (V.35)$$

$$\frac{k}{\mu_{nc}} \frac{\partial}{\partial x} \left[f_{nc} \left(-\frac{\partial p_c}{\partial x} + \frac{\sigma \cos \vartheta}{\sqrt{\frac{k}{m}}} J'(s) \frac{\partial s}{\partial x} \right) \right] = -m \frac{\partial s}{\partial t}. \quad (V.36)$$

Пусть вытеснение происходит при заданных давлениях на концах пласта. В пласт поступает лишь одна смачивающая фаза (вода).

Будем предполагать, что до процесса нагнетания насыщенность смачивающей фазой по всему пласту одинакова и равна $s = s_c$.

Таким образом, при $t = 0$

$$s(x, 0) = s_c. \quad (V.37)$$

Обозначим через $p_c = p_c(0) = p_1$ давление в нулевом сечении пласта. Отсутствие притока v_{nc} несмачивающей фазы в этом сечении равносильно согласно выражению (V.31) равенству $f_{nc}(\partial p_{nc}/\partial x) = 0$.

Последнее равенство возможно с формально математической точки зрения при $f_{nc} = 0$ или $\partial p_{nc}/\partial x = 0$ или же, наконец, при одновременном равенстве нулю обоих компонентов. Однако условие $f_{nc} = 0$ должно быть отброшено, так как в начальный момент времени вся область заполнена несмачивающей фазой (насыщенность ею $1 - s$ не равна нулю), в дальнейшем в течение некоторого времени (возможно, даже бесконечно долгого) насыщенность этой фазой, непрерывно убывая, будет отлична от нуля.

Отметим, что в известной работе Пирсона [60] содержится неточность в граничном условии $x = 0$, а именно: принято допущение, что с самого начала процесса вытеснения во входном сечении сразу устанавливается предельно-максимальная насыщенность смачивающей фазы [60]. А между тем численное интегрирование, правда, относящееся к случаю, когда задан расход смачивающей фазы, показывает, что в сечении $x = 0$ насыщенность смачивающей фазой растет постепенно [78].

Таким образом, единственно реальным условием на входе является условие, вытекающее из $\partial p_{nc}/\partial x = 0$:

$$p_c = p_1; \quad \frac{\partial p_c}{\partial x} + \frac{\sigma \cos \vartheta}{\sqrt{k/m}} J'(s) \frac{\partial s}{\partial x} = 0; \quad x = 0. \quad (V.38)$$

Переходим к формулировке условий на выходе. Здесь определяющим является давление в несмачивающей фазе, так как область, куда вытекает жидкость, заполнена именно этой фазой. Пусть давление на выходе есть p_2 . Тогда при $x = l$

$$s = s_c, \quad p_{nc}(l) = p_c. \quad (V.39)$$

При

$$s = s_c \quad p_k = \frac{\sigma \cos \vartheta}{\sqrt{k/m}} J(s_c) = p_{nc} - p_c > 0,$$

т. е. давление в смачивающей фазе меньше давления $p_{nc}(l) = p_2$ и смачивающая фаза не будет вытекать из пласта в резервуар с большим давлением и станет накатываться в окрестности $x = l$. С ростом насыщенности s капиллярное давление p_k будет падать, и при $s = s_{\max}$ оно станет равным нулю. С этого момента давление в смачивающей фазе $p_c(l)$ сравняется с давлением $p_{nc}(l) = p_2$ в резервуаре, и начнется истечение этой фазы в резервуар. В дальнейшем процесс истечения смачивающей фазы должен происходить уже при постоянной насыщенности на выходе.

Таким образом, граничное условие при $x = l$ должно иметь следующий вид.

$$\left. \begin{aligned} s_c < s < s_{\max}, \quad p_c &= p_2 - \frac{\sigma \cos \theta}{\sqrt{k/m}} J(s) \\ s &= s_{\max}, \quad p_c = p_2 \end{aligned} \right\} x = l. \quad (V.40)$$

Перейдем к случаю вытеснения при заданном расходе. Вследствие несжимаемости фаз

$$v = v_c + v_{nc}. \quad (V.41)$$

Используя (V.41) и (V.1), получим,

$$\frac{k}{\mu_c} f_c \frac{\partial p_c}{\partial x} + \frac{k}{\mu_{nc}} f_{nc} \frac{\partial p_{nc}}{\partial x} = v. \quad (V.42)$$

Используя далее (V.33), (V.42), определим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p_c}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial p_{nc}}{\partial x} : \\ & v + \frac{k}{\mu_{nc}} \cdot \frac{\sigma \cos \theta}{\sqrt{\frac{k}{m}}} f_{nc} J'(s) \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial p_c}{\partial x} &= - \frac{\quad}{\frac{k}{\mu_c} f_c + \frac{k}{\mu_{nc}} f_{nc}}, \end{aligned} \quad (V.43)$$

$$\begin{aligned} & v - \frac{k}{\mu} \cdot \frac{\sigma \cos \theta}{\sqrt{\frac{k}{m}}} f_c J'(s) \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial p_{nc}}{\partial x} &= - \frac{\quad}{\frac{k}{\mu_c} f_c + \frac{k}{\mu_{nc}} f_{nc}}. \end{aligned} \quad (V.44)$$

Подстановка значения $\frac{\partial p_c}{\partial x}$ в любое из уравнений системы (V.34) дает дифференциальное уравнение, удобное для использования при заданном суммарном расходе обеих фаз:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[f_c \frac{v + \frac{k}{\mu_{nc}} \cdot \frac{\sigma \cos \theta}{\sqrt{\frac{k}{m}}} f_{nc} J'(s) \frac{\partial s}{\partial x}}{f_c + \mu_0^{-1} f_{nc}} \right] = -m \frac{\partial s}{\partial t}, \quad (V.45)$$

$$\left(\mu_0 = \frac{\mu_{nc}}{\mu_c} \right).$$

Уравнение (V.45) упрощается, если пренебречь капиллярными эффектами, т. е. отбросить второй член в числителе левой части этого уравнения:

$$v \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{f_c}{f_c + \mu_0^{-1} f_{nc}} \right] = -m \frac{\partial s}{\partial t}. \quad (V.46)$$

Уравнение (V.46) является квазилинейным уравнением в частных производных первого порядка и легко интегрируется.

Решение задачи без учета капиллярного давления впервые дано Баклеем и Левереттом в 1942 году (оно обычно называется случаем Баклея и Леверетта), а также независимо от них А. М. Пирвердяном в 1952 году [51].

Уже значительно позже в работах Раппопорта, Лиса и др. был исследован более общий случай вытеснения смеси жидкостей, учитывающий капиллярное давление и представленный уравнением (V.45).

Сформируем граничные условия. Пусть в пласт с одного конца $x = 0$ нагнетается только смачивающая порода жидкость. Расход несмачивающей фазы в этом сечении, естественно, равен нулю. Это означает, что

$$f_{nc} \frac{\partial p_{nc}}{\partial x} = 0. \quad (V.47)$$

Так как $f_{nc} \neq 0$ (см. разъяснения к задаче при заданном перепаде давления), то из предыдущего следует

$$\frac{\partial p_{nc}}{\partial x} = 0, \quad x = 0 \quad (V.48)$$

или же

$$v = -\frac{k}{\mu_c} f_c \frac{\partial p_c}{\partial x}, \quad x = 0. \quad (V.49)$$

Оба условия, очевидно, должны дать один и тот же результат.

Подставляя условие в формулу (V.44) для $\partial p_{nc}/\partial x$ [или же в формулу (V.43) для $\partial p_c/\partial x$], получим граничное условие на входе

$$v = \frac{k}{\mu_c} \cdot \frac{\sigma \cos \theta}{\sqrt{k/m}} f_c(s) f'(s) \frac{\partial s}{\partial x}, \quad x = 0. \quad (V.50)$$

Будем предполагать, так же как и в предыдущей задаче, $s(x, 0) = s_c$. При $x = l$ пока $s < s_{\max}$ капиллярное давление $p_{nc} > 0$ (см. предыдущий случай), и смачивающая жидкость не

будет вытекать из пористой среды. Следовательно, при $s < s_{\max}$, $\partial p_c / \partial x = 0$, что дает, согласно (V.43),

$$v = - \frac{k}{\mu_n c} \frac{\sigma \cos \theta}{\sqrt{k/m}} f_{nc}(s) J'(s) \frac{\partial s}{\partial x}, \quad x=l, \quad s < s_{\max}. \quad (\text{V.51})$$

Со значения $s = s_{\max}$ смачивающая фаза начнет вытекать.

В результате численного решения на ЭВМ уравнения (V.45) при сформулированных выше граничных условиях получены распределения насыщенности, которые не во всех случаях являются монотонными. При этом величина безводной нефтеотдачи $\eta_{\text{бв}}$ представляется в виде [78]

$$\eta_{\text{бв}} = f \left(\frac{\mu_n c}{\mu_c}, \frac{\mu_n c l v}{\sigma \cos \theta \sqrt{k m}} \right).$$

При значениях $\mu_n c / \mu_c < 10$ (приблизительно) зависимость безводной нефтеотдачи от комплекса $\mu_n c l v / \sigma \cos \theta \sqrt{k m}$ имеет минимум.

Как следует из идеи метода, проницаемость для несмачивающей фазы и функции Леверетта равны нулю при $s = s_{\max}$. Такое условие было принято в [78], а также в аналогичном исследовании [24]. При принятых граничных условиях несмачивающая жидкость вместе со смачивающей вытекать не будет, что, как известно, противоречит действительности. Одно из объяснений заключается в том, что для однородного пласта при капиллярном скачке нефтеотдача за водный период равняется нулю, а реально наблюдающиеся отборы нефти за этот период обусловлены неоднородностью пласта по толщине (слонстая неоднородность). Возможно также и то, что условие образования капиллярного скачка не во всех случаях имеет место вследствие истечения продукции в среду, содержащую нефть с водой.

Так или иначе современная капиллярная модель нуждается в существенном усовершенствовании.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ СМЕСИ НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Начнем рассмотрение со случая Баклея—Леверетта (V.46), представляющего большое значение для всей проблемы.

Уравнение (V.46) можно проинтегрировать методом характеристик, как это было выполнено в литературе [51], или же более наглядным способом, предусматривающим определение движения плоскости, на которой насыщенность сохраняет постоянное значение [24].

Приведем оба вывода.

Уравнение (V.46), преобразованное к виду

$$v F(s) \frac{\partial s}{\partial x} + m \frac{\partial s}{\partial t} = 0, \quad (\text{V.52})$$

где

$$F(s) = \frac{d}{ds} \left[\frac{f_c}{f_c + \mu_0^{-1} f_{nc}} \right] = - \frac{d\Phi(s)}{ds}, \quad \Phi(s) = \frac{f_c}{f_c + \mu_0^{-1} f_{nc}}, \quad (\text{V.53})$$

эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{vF(s)} = \frac{dt}{m} = \frac{ds}{0}. \quad (\text{V.54})$$

Из (V.54) имеем:

$$s = C_1, \quad x - \frac{V}{m} F(s) = C_2, \quad \left(V = \int_0^t v d\tau \right). \quad (\text{V.55})$$

Откуда

$$x = x(s, 0) + \frac{V}{m} F(s), \quad (\text{V.56})$$

где $x(s, 0)$ — начальное распределение насыщенности при $t = 0$. Если в начальный момент времени вся рассматриваемая область заполнена равномерно несмачивающей и смачивающей фазами, то, приняв в уравнении (V.56) $x(s, 0) = 0$, преобразуем его к следующему виду:

$$x = \frac{V}{m} F(s). \quad (\text{V.57})$$

Приведем теперь второй вывод. Составим выражение для полного дифференциала насыщенности

$$ds = \frac{\partial s}{\partial x} dx + \frac{\partial s}{\partial t} dt. \quad (\text{V.58})$$

Если изучается движение вдоль плоскости с постоянной насыщенностью, то для нее $ds = 0$. Полагая в (V.58) $ds = 0$, найдем

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{s=\text{const}} = - \frac{\frac{\partial s}{\partial t}}{\frac{\partial s}{\partial x}}. \quad (\text{V.59})$$

Подставляя значение $\frac{\partial s}{\partial t}$ из дифференциального уравнения (V.52) в (V.59), получим

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{s=\text{const}} = \frac{v}{m} F(s) \Big|_{s=\text{const}}. \quad (\text{V.60})$$

Интегрируя (V.60), получим окончательно

$$x(s, t) - x(s, 0) = \frac{\int_0^t v d\tau}{m} F(s) = \frac{V}{m} F(s), \quad (\text{V.61})$$

что совпадает с уравнением (V.56)

На рис. V.4 кривая 1 построена по формуле

$$\Phi(s) = \frac{f_c}{f_c + \mu_0^{-1} f_{nc}}. \quad (V.62)$$

Дифференцируя ее, получим искомую функцию $F(s)$:

$$\Phi'(s) = F(s), \quad (V.63)$$

входящую в решение уравнения (V.56). Эта функция представлена кривой 2 на рис. V.4. Из этого рисунка видно, что кривая 2 немонотонна, т. е. для каждого x существуют два значения насыщенности. Это, как увидим ниже, может привести к физически невозможной неоднозначности решения.

Рассмотрим случай, когда начальное распределение насыщенности $x(s, 0)$ дано графиком 1, который для простоты рассуждений принят монотонно убывающим. Согласно решению (V.56), для определения текущего распределения насыщенности необходимо к значению $x(s, 0)$ прибавить величину $V/mF(s)$.

На рис. V.5 кривая 1 представляет результат указанного суммирования для случая, когда в пласт закачано некоторое количество жидкости V_1 . При этом решение получается однозначным.

Однако можно представить себе и такие случаи, соответствующие достаточно большим значениям V , при которых решение перестает быть однозначным. Кривая 2 на рис. V.5, построенная для значения $V_2 > V_1$ (принято $V_2 = 2V_1$), иллюстрирует этот случай. Для линии AB получаются три пересечения s_1 , s_2 и s_3 , т. е. три значения насыщенности.

Легко видеть, что, когда $x(s, 0) = 0$, уже с самого начала нагнетания имеет место двузначность решения.

Для устранения многозначности Баклей и Леверетт предложили считать реальной лишь ту часть кривой $F(s)$, которая берет свое начало в точке с максимальной насыщенностью смачивающей фазы (рис. V.6, точка s_0 — входное сечение) до некоторого сечения, которое определяется из условия материального баланса.

Объем смачивающей фазы, поступившей в пласт к некоторому моменту времени, на единицу ширины пласта

$$V(t) = \int_0^{x_\Phi} m [s(x, t) - s_c] dx, \quad (V.64)$$

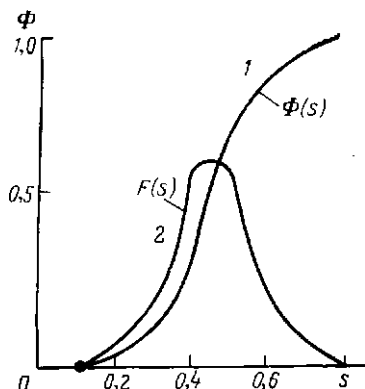


Рис. V.4. К построению функции $F(s)$ по известной функции $\Phi(s)$

где x_ϕ — координата фронта вытеснения, s_c — содержание связанной смачивающей фазы (связанная вода). Сечение пласта принимается единичным. В начальный момент времени $t = 0$ вся область равномерно заполнена несмачивающей и связанной фазами [$x(s, 0) = 0$].

Согласно (V.56),

$$dx = \frac{V(t)}{m} F'(s) ds. \quad (\text{V.65})$$

Подставляя dx из (V.65) в (V.64), получим

$$V(t) = \int_{s_c}^{s_\phi} V(t) F'(s) [s - s_c] ds, \quad (\text{V.66})$$

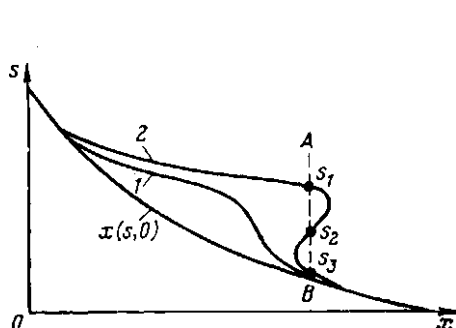


Рис. V.5. Мнозначность решения уравнения V.56 при больших значениях V

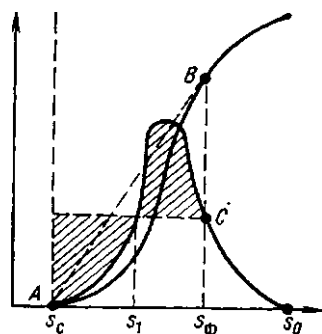


Рис. V.6. Графический метод определения насыщенности на фронте вытеснения

где s_ϕ — насыщенность на фронте вытеснения; s_0 — насыщенность во входном сечении.

Интегрируя по частям, получим

$$1 = \int_{s_0}^{s_\phi} s F'(s) ds - s_c \int_{s_0}^{s_\phi} F'(s) ds = s_\phi F(s_\phi) - s_0 F(s_0) - \Phi(s_\phi) + \Phi(s_0) - s_c [F(s_\phi) - F(s_0)]. \quad (\text{V.67})$$

Учитывая далее, что $\Phi(s_0) = 1$ и $F(s_0) = 0$ (см. рис. V.6), получим окончательно

$$\Phi(s_\phi) = (s_\phi - s_c) F(s_\phi). \quad (\text{V.68})$$

По формуле (V.68) определим насыщенность s_ϕ на фронте вытеснения.

Для определения s_ϕ (см. рис. V.6) проводим из точки A, соответствующей $s = s_c$, касательную к кривой $\Phi(s)$. Абсцисса

точки касания B и есть s_Φ . Опуская далее из этой точки перпендикуляр на ось абсцисс, находим точку пересечения C перпендикуляра с кривой $F(s_\Phi) = \Phi'(s_\Phi)$.

Умножая $F(s_\Phi)$ на $V(t)/m$, найдем координату фронта насыщенности:

$$x_\Phi = \frac{V(t)}{m} F(s_\Phi). \quad (\text{V.69})$$

Таким образом, вся ветвь кривой от точки с максимальной насыщенностью s_0 до s_Φ является реальной. Таким образом устраняется неоднозначность решения.

Тот же самый результат можно получить другим путем. Для этого следует провести из точки C прямую, параллельную оси абсцисс (см. рис. V.6), на расстоянии, определяемом из условия равенства заштрихованных площадей A_1 и A_2 .

Докажем, что результат получится такой же.

Заштрихованная площадь над прямой

$$\begin{aligned} A_1 = \int_{s_1}^{s_\Phi} F(s) ds - (s'_\Phi - s_1) F(s'_\Phi) &= \Phi(s'_\Phi) - \Phi(s_1) - \\ &- (s'_\Phi - s_1) F(s'_\Phi). \end{aligned} \quad (\text{V.70})$$

Заштрихованная площадь под прямой

$$\begin{aligned} A_2 = (s_1 - s_c) F(s'_\Phi) - \int_{s_c}^{s_1} F(s) ds &= (s_1 - s_c) F(s'_\Phi) - \\ &- \Phi(s_1) + \Phi(s_c). \end{aligned} \quad (\text{V.71})$$

Принимая $A_1 = A_2$ и учитывая, что $\Phi(s_c) = 0$, получим

$$\Phi(s'_\Phi) = (s'_\Phi - s_c) F(s'_\Phi). \quad (\text{V.72})$$

Сравнивая (V.68) с (V.72), имеем $s'_\Phi = s_\Phi$.

Пусть при некотором значении $t_{0\text{ в}}$ фронт насыщенности достигает выходного сечения $x_\Phi = l$. Тогда

$$ml = V(t_{0\text{ в}}) F(s_\Phi). \quad (\text{V.73})$$

Но отношение

$$V(t_{0\text{ в}})/ml = 1/F(s_\Phi) \quad (\text{V.74})$$

представляет безводную добычу нефти в долях от порового объема.

Учтем теперь в решении Баклея и Лаверетта эффект силы тяжести. В этом случае вместо уравнений (V.1) необходимо написать

$$\begin{aligned} v_c &= -\frac{k}{\mu_c} f_c \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho_c g \sin \alpha \right), \\ v_{nc} &= -\frac{k}{\mu_{nc}} f_{nc} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho_{nc} g \sin \alpha \right), \end{aligned} \quad (\text{V.75})$$

где ρ_c и ρ_{nc} — плотности смачивающей и несмачивающей фаз; α — угол наклона оси x к горизонту.

Используя условие $v = v_c + v_{nc}$, получим

$$v_c = \Phi(s) \left(v - f_{nc} \frac{k \Delta \rho g \sin \alpha}{\mu_{nc}} \right); \quad \Delta \rho = \rho_c - \rho_{nc}. \quad (\text{V.76})$$

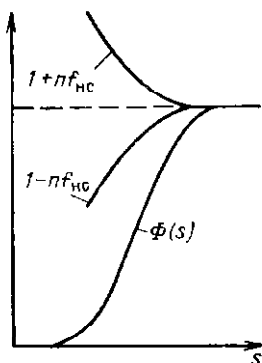


Рис. V.7. К построению функции $\Phi(s)$

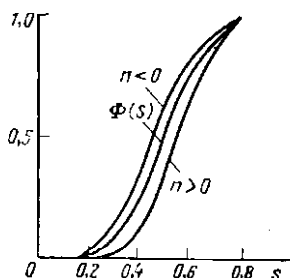


Рис. V.8. Зависимость функции $\Phi(s)$ от насыщенности s

Подставляя (V.76) в дифференциальное уравнение неразрывности для v_c (V.34), получим

$$v F_1(s) \frac{\partial s}{\partial x} + m \frac{\partial s}{\partial t} = 0, \quad (\text{V.77})$$

где

$$F_1(s) = \frac{d}{ds} \left[\Phi(s) \left(1 - f_{nc} \frac{k \Delta \rho g \sin \alpha}{\mu_{nc} v} t \right) \right] = \frac{d\Phi_1(s)}{ds}. \quad (\text{V.78})$$

Интегрирование (V.77), выполненное по предыдущей схеме при $x(s, 0) = 0$, имеет вид

$$\frac{mx}{V} = \left[\Phi(s) \left(1 - f_{nc} \frac{k \Delta \rho g \sin \alpha}{\mu_{nc} v} t \right) \right]', \quad (\text{V.79})$$

где штрих означает дифференцирование по s .

Рассмотрим частный случай $v = \text{const}$. Тогда $V = vt$, и предыдущее уравнение преобразуется к виду

$$\frac{mx}{vt} = \left[\Phi(s) \left(1 - f_{nc} \frac{k \Delta \rho g \sin \alpha}{v} \right) \right]' = \Phi_1'(s) = F_1(s), \quad (\text{V.80})$$

в котором величина

$$n = \frac{k \Delta \rho g \sin \alpha}{\nu} \quad (\text{V.81})$$

уже постоянная величина.

Для решения этой задачи построим зависимости $\Phi(s)$ и $(1 - n f_{nc})$ (рис. V.7) и определим произведение $\Phi_1(s) = \Phi(s) \times (1 - n f_{nc})$.

На рис. V.8 приведены кривая $\Phi(s)$ и для сопоставления две кривые Φ_1 , соответствующие $n > 0$ и $n < 0$, $n > 0$ отвечает вытеснению снизу вверх ($\alpha > 0$), $n < 0$ — вытеснению сверху вниз ($\alpha < 0$).

Пусть вытеснение происходит снизу вверх ($\alpha > 0$, $n > 0$). На рис. V.9 кривые 1 и 2 представляют соответственно функции $\Phi(s)$ и $\Phi_1(s)$, построенные описанным способом. Проведем из точки a касательные к кривым $\Phi(s)$ и $\Phi_1(s)$. Расстояния от точек касания A и A_1 до оси ординат равны величинам насыщенности s_Φ и s'_Φ на фронте вытеснения соответственно для случаев горизонтального вытеснения и вытекания снизу. На рисунке кривые 3 и 4 являются функциями $F(s)$ и $F_1(s)$. Для определения значения этих функций на фронте вытеснения из точек A и A_1 опустим перпендикуляры на кривые F и F_1 .

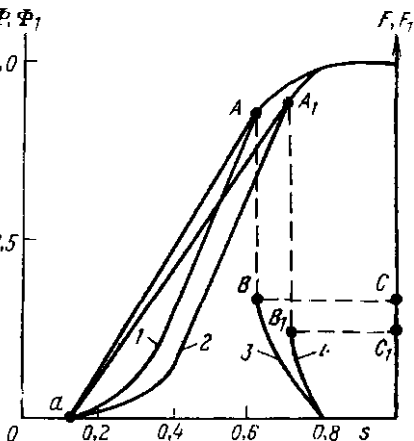


Рис. V.9. Графический метод определения безводной добычи нефти при $n=0$ и $n>0$

На рис. V.9 видно, что $F(s'_\Phi) < F(s_\Phi)$.

Напишем выражение для безводной добычи в обоих случаях:

$$n=0, \quad V(t_{6в}) = \frac{ml}{F(s_\Phi)} \quad n>0 \quad V(t'_{6в}) = \frac{ml}{F_1(s'_\Phi)}.$$

Так как $F_1(s'_\Phi) < F(s_\Phi)$, то $V_1(t'_{6в}) > V(t_{6в})$.

Таким образом, при вытеснении снизу вверх создаются более благоприятные условия для получения большого суммарного отбора нефти за безводный период, чем в случае горизонтального вытеснения ($\alpha = 0$, $n = 0$).

Аналогичные рассуждения приводят к выводу, что при вытеснении сверху вниз ($\alpha < 0$, $n < 0$) процесс будет менее эффективен, чем при $\alpha = 0$.

Из уравнения (V.80) следует, что в отличие от случая Баклея и Леверетта, распределение насыщенности в рассматриваемой

задаче зависит от комплекса $(k \Delta \rho g \sin \alpha)/v$, с возрастанием которого условия вытеснения улучшаются [кривая $\Phi_1(s)$ смещается вправо от кривой $\Phi(s)$]. Отсюда ясно, что для получения высоких коэффициентов нефтеотдачи за безводный период необходимо поддерживать малые скорости вытеснения. Вместе с тем беспредельное уменьшение скорости приводит к удлинению срока разработки залежи.

АНАЛИЗ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИИ СМЕСИ ЖИДКОСТЕЙ С УЧЕТОМ КАПИЛЛЯРНОГО ДАВЛЕНИЯ

Строгое аналитическое решение системы уравнений (V.35), (V.36) при соответствующих им граничных условиях (V.38), (V.40) и даже одного уравнения (V.45) при граничных условиях (V.50), (V.51) представляет в общем случае чрезвычайно сложную задачу. Поэтому в основном приходится прибегать к приближенным методам решения с использованием ЭВМ или же к экспериментальным методам на моделях пористых сред. Модельные опыты должны удовлетворять определенным условиям, обеспечивающим возможность непосредственного использования результатов эксперимента для вычисления (определения) соответствующих характеристик натуральных процессов.

Вывод этих уравнений, называемых условиями подобия, можно получить путем преобразования дифференциальных уравнений (V.35), (V.36) и (V.45) и граничных условий к безразмерной форме.

Введем следующие безразмерные величины:

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \theta = \frac{t}{t_0}, \quad \bar{p}_c = \frac{p_c}{\Delta p_0}, \quad (V.82)$$

где t_0 — характерное время; $\Delta p_0 = p_1 - p_2$.

Замена переменных в системе (V.35), (V.36) приводит к следующему:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(f_c \frac{\partial \bar{p}_c}{\partial \xi} \right) = \frac{\mu_c m l^2}{t_0 \Delta p_0 k} \cdot \frac{\partial s}{\partial \theta} \quad (V.83)$$

$$- \frac{\partial}{\partial \xi} \left[f_n c \left(\frac{\partial \bar{p}_c}{\partial \xi} + \frac{\sigma \cos \theta}{\sqrt{k/m} \Delta p_0} J'(s) \frac{\partial s}{\partial \xi} \right) \right] = \frac{\mu_n c m l^2}{t_0 \Delta p_0 k} \cdot \frac{\partial s}{\partial \theta}. \quad (V.84)$$

Граничные условия для периода, когда истечения вытесняющей фазы нет, согласно (V.38), имеют вид:

$$\xi = 0, \quad \bar{p}_c = \bar{p}_1, \quad \frac{\partial \bar{p}_c}{\partial \xi} = - \frac{\sigma \cos \theta}{\sqrt{k/m} \Delta p_0} J'(s) \frac{\partial s}{\partial \xi}, \quad (V.85)$$

$$\xi = 1, \quad \bar{p}_c = \bar{p}_2 - \frac{\sigma \cos \theta}{\sqrt{k/m} \Delta p_0} J(s), \quad s_c < s < s_{\max} \quad (V.86)$$

Граничные условия для периода истечения смачивающей фазы, согласно (V.40), будут:

$$\xi = 0, \quad \bar{p}_c = \bar{p}_1, \quad \frac{\partial p_c}{\partial \xi} = -\frac{\sigma \cos \theta}{\sqrt{k/m} \Delta p_0} J'(s) \frac{\partial s}{\partial \xi}, \quad (\text{V.87})$$

$$\xi = 1, \quad \bar{p}_c = \bar{p}_2, \quad s = s_{\max}. \quad (\text{V.88})$$

Процессы будут подобны на модели и натуре при тождественности дифференциальных уравнений и граничных условий. Из написанных выше уравнений следует, что для соблюдения их тождественности необходимо равенство следующих безразмерных параметров, входящих в эти зависимости:

$$\frac{\sigma \cos \theta}{\sqrt{k/m} \Delta p_0} J'(s) \Big|_{\text{нат}} = \frac{\sigma \cos \theta}{\sqrt{k/m} \Delta p_0} J'(s) \Big|_{\text{мод}}, \quad (\text{V.89})$$

$$\frac{\mu_c m l}{t_0 \Delta p_0 k} \Big|_{\text{нат}} = \frac{\mu_c m l}{t_0 \Delta p_0 k} \Big|_{\text{мод}}, \quad (\text{V.90})$$

$$\frac{\mu_n c m l}{t_0 \Delta p_0 k} \Big|_{\text{нат}} = \frac{\mu_n c m l}{t_0 \Delta p_0 k} \Big|_{\text{мод}}, \quad (\text{V.91})$$

$$\hat{f}_c \Big|_{\text{нат}} = \hat{f}_c \Big|_{\text{мод}}, \quad (\text{V.92})$$

$$\hat{f}_{n \ c} \Big|_{\text{нат}} = \hat{f}_{n \ c} \Big|_{\text{мод}}, \quad (\text{V.93})$$

$$\frac{\sigma \cos \theta}{\sqrt{k/m} \Delta p_0} J(s) \Big|_{\text{нат}} = \frac{\sigma \cos \theta}{\sqrt{k/m} \Delta p_0} J(s) \Big|_{\text{мод}}, \quad (\text{V.94})$$

где индексы «нат» и «мод» — соответственно натура и модель.

Сравнение условий (V.89) и (V.94) показывает, что необходимо совпадение кривых Леверетта $I(s)$ в натуре и модели.

Из соотношений (V.90) и (V.91) следует, что отношения величин вязкостей в натуре и модели должны быть одинаковы:

$$\frac{\mu_c}{\mu_n \ c} \Big|_{\text{нат}} = \frac{\mu_c}{\mu_n \ c} \Big|_{\text{мод}}.$$

Иными словами, одно из этих соотношений можно заменить только что написанным.

Обратимся теперь к относительным проницаемостям. При выводе функциональных соотношений для относительных проницаемостей будем исходить из положения, что проницаемости — локальные характеристики пористой среды и потоков, т. е. что условия на границах области фильтрации не оказывают влияние на эти характеристики.

Из общих соображений ясно, что такое допущение возможно для достаточно большой области течения, позволяющей выделить внутри себя подобласть, не зависящую от граничных условий (или слабо зависящую от них), для которой приемлемо указанное выше положение.

С учетом высказанного перечислим величины, от которых предположительно могут зависеть относительные проницаемости: m , k , μ_c , μ_{nc} , σ , $|\text{grad } p|$ — модуль градиента давления в одной из фаз, например в смачивающей, и s .

Имеем

$$\left. \begin{aligned} f_c &= f_c(k, \mu_c, \mu_{nc}, \sigma \cos \theta, |\text{grad } p_c|, m, s) \\ f_{nc} &= f_{nc}(k, \mu_c, \mu_{nc}, \sigma \cos \theta, |\text{grad } p_c|, m, s) \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.95})$$

При помощи анализа размерностей можно показать, что относительные проницаемости могут зависеть от следующих безразмерных параметров:

$$\left. \begin{aligned} f_c &= f_c\left(\frac{k(\partial p_c / \partial x)}{\sigma \cos \theta}, \frac{\mu_c}{\mu_{nc}}, m, s\right) \\ f_{nc} &= f_{nc}\left(\frac{k(\partial p_c / \partial x)}{\sigma \cos \theta}, \frac{\mu_c}{\mu_{nc}}, m, s\right) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{V.96})$$

Здесь и в дальнейшем речь будет идти об одномерных потоках, поэтому везде дается запись $\partial p_c / \partial x$ вместо $|\text{grad } p_c|$.

Вводя постановки $x = \xi l$ и $p_c = \bar{p}_c \Delta p_0$, получим из (V.96)

$$f_c = f_c\left(\frac{k \Delta p_0}{l \sigma \cos \theta}, \frac{\partial \bar{p}_c}{\partial \xi}, \frac{\mu_c}{\mu_{nc}}, m, s\right) \quad (\text{V.97})$$

$$f_{nc} = f_{nc}\left(\frac{k \Delta p_0}{l \sigma \cos \theta}, \frac{\partial \bar{p}_c}{\partial \xi}, \frac{\mu_c}{\mu_{nc}}, m, s\right) \quad (\text{V.98})$$

Для выполнения условий (V.92) и (V.93) необходимо, чтобы

$$\frac{k \Delta p_0}{l \sigma \cos \theta} \Big|_{\text{нат}} = \frac{k \Delta p_0}{l \sigma \cos \theta} \Big|_{\text{мод}} \quad (\text{V.99})$$

Комбинируя (V.94) с (V.99), получим вместо одного из этих условий следующее:

$$\frac{l}{\sqrt{k}} \Big|_{\text{нат}} = \frac{l}{\sqrt{k}} \Big|_{\text{мод}} \quad (\text{V.100})$$

При этом принимаем пористость в обоих случаях одинаковой.

ПРИБЛИЖЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Рассмотрим теперь вопрос о практическом выполнении предложенных выше условий подобия (V.89)—(V.94) и (V.100). Наибольшую трудность представляет выполнение условия (V.100)

При точном его выполнении проницаемость модели оказывается очень малой. Поэтому приходится осуществлять приближенное моделирование.

Методика приближенного моделирования принадлежит Д. А. Эфросу и В. П. Онопрненко [82], которые вывели условия (V.89)—(V.94) на основе анализа дифференциальных уравнений

(V.83) и (V.84). Необходимо вместе с тем отметить, что в работе [82] граничные условия были сформулированы менее подробно, чем это было сделано в предыдущем разделе.

Прежде всего рассмотрим следующую вспомогательную задачу нестационарной фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости. Пусть задан постоянный расход жидкости, что равносильно

$$v_{nc} + v_c = v = \text{const.} \quad (\text{V.101})$$

Из уравнения (V.45) легко получить

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + v \Phi'(s) + \frac{k\sigma \cos \theta}{\mu_{nc} \sqrt{k/m}} \frac{\partial}{\partial x} \left[f_{nc} \Phi(s) J'(s) \frac{\partial s}{\partial x} \right] = 0. \quad (\text{V.102})$$

Это уравнение получено Рапопортом и Лисом [9].

Исследование [4, 9] показало, что при постоянной скорости вытеснения вблизи фронта вытеснения всем значениям насыщенности соответствует одна и та же скорость распространения. Зона, в которой соблюдается (естественно, приближенно) указанное свойство течения, была названа стабилизированной. Из этого свойства вытекает неизменность размера ее. Следовательно, в системе координат \bar{x} , связанной с движущимся фронтом, распределение насыщенности не должно зависеть от времени.

Обозначим через U скорость движущегося фронта. Тогда связь между старой x и новой \bar{x} системами координат запишется так:

$$\bar{x} = x - Ut. \quad (\text{V.103})$$

Найдем решение вида

$$s = s(x - Ut) = s(\bar{x}). \quad (\text{V.104})$$

Из (V.104) имеем:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{ds}{d\bar{x}} U, \quad \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{ds}{d\bar{x}} \quad (\text{V.105})$$

в уравнение (V.102) примет вид

$$\begin{aligned} -mU \frac{ds}{d\bar{x}} + v \Phi'(s) \frac{ds}{d\bar{x}} + \frac{k\sigma \cos \theta}{\mu_{nc} \sqrt{\frac{k}{m}}} \times \\ \times \frac{d}{d\bar{x}} \left[f_{nc} \Phi(s) J'(s) \frac{ds}{d\bar{x}} \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{V.106})$$

Интегрируя (V.106) по \bar{x} , получим

$$v \Phi(s) - mUs + \frac{k\sigma \cos \theta}{\mu_{nc} \sqrt{\frac{k}{m}}} f_{nc} \Phi(s) J'(s) \frac{ds}{d\bar{x}} = C, \quad (\text{V.107})$$

где C — постоянная интегрирования.

Используя особенность выражения (V.107), заключающуюся в том, что при $x \rightarrow \pm \infty$ $ds/d\bar{x}$ стремится к нулю, а также смыкание искомого решения с решением Баклея и Леверетта, описывающим распределение, получим после ряда преобразований решение (V.107) в виде ¹

$$\bar{x} - \bar{x}_0 = \frac{\sigma \cos \theta \sqrt{km}}{\mu_n c v} \int_{s_0}^s \frac{f_n c \Phi'(s) (s) ds}{\Phi(s_\Phi) - \Phi(s) - \Phi'(s_\Phi)(s_\Phi - s)}, \quad (\text{V.108})$$

где s_0 и соответствующее ему значение x_0 определяют начало отсчета.

Скорость U определяется из решения Баклея и Леверетта. Она является скоростью скачка (фронта) и вычисляется из формулы (V.69) при $s = s_\Phi$:

$$U = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{s=s_\Phi} = \frac{v}{m} F(s_\Phi). \quad (\text{V.109})$$

с другой стороны, равенство (V.109) преобразуется следующим образом:

$$U = \frac{v}{m} \frac{\Phi(s_\Phi)}{s_\Phi - s_c}. \quad (\text{V.110})$$

Из решения (V.110) следует, что полученное распределение охватывает бесконечно большую область фильтрации. Иными словами, размер стабилизированной зоны бесконечен, и точки смыкания полученного решения с решением распределения Баклея и Леверетта нет.

Перейдем теперь к рассмотрению предпосылок приближенного моделирования. Сущность их сводится к следующему:

1. Авторы [92] считают, что фактически стабилизированная зона образуется очень быстро и с некоторой точки можно распределение описывать решением Баклея и Леверетта.

2. При выводе зависимости между длиной стабилизированной зоны x^* и величиной критерия $\pi_1 = \frac{\sigma}{\Delta p_0} \sqrt{\frac{m}{k}}$ используется приведенное выше решение (V.108), которое соответствует случаю заданной суммарной скорости v обеих фаз. При этом перепад давления Δp_0 соответствует концу безводного периода t_0 вытеснения и в общем случае может существенно отличаться от его значения для $t < t_0$. А между тем большинство опытов на моделях проводится при заданном перепаде давления — такая постановка опытов представляется более удобной и простой [82]. С другой стороны, нет априорных оснований предполагать, что распределения насыщенности при $\Delta p = \text{const}$ и $v = \text{const}$ совпадут или по крайней мере будут близки друг к другу.

¹ За подробностями решения отсылаем к работам [4] и [9].

3. Один из возможных источников погрешностей приближенного метода моделирования содержится в способе смыкания кривых распределения. Достаточно произвольно и условно [82], в котором предполагается, что с самого начала процесса вытеснения во входном сечении ($x = 0$) сразу устанавливается предельно-максимальная насыщенность вытесняющей фазой.

Численное решение на ЭВМ задачи вытеснения при заданном (постоянном) суммарном расходе показывает, что в нулевом сечении насыщенность смачивающей фазой действительно растет с известной постепенностью [78].

Все сказанное вызывает необходимость проверки положений приближенной теории моделирования путем сопоставления приближенного распределения с решением, полученным на ЭВМ.

Существуют две группы решений на ЭВМ. Одна группа соответствует упрощенной постановке, при которой не учитывается конечной эффект на выходе из пласта [32]; вторая — точному граничному условию, из которого вытекает, что насыщенность s увеличивается с приближением к выходному сечению [78].

Ниже приводится оценка приближенного моделирования на основе сравнения с первой группой решений [32].

Из уравнений для течения обеих фаз

$$v_c = - \frac{k}{\mu_c} f_c \frac{\partial p_c}{\partial x}, \quad (V.111)$$

$$v_{nc} = - \frac{k}{\mu_{nc}} f_{nc} \left(\frac{\partial p_c}{\partial x} + \frac{\sigma \cos \theta}{\sqrt{\frac{k}{m}}} J'(s) \frac{\partial s}{\partial x} \right) \quad (V.112)$$

получим выражение для общего перепада Δp_0 к концу безводного периода:

$$\Delta p_0 = - \int_0^l \frac{\partial p_c}{\partial x} dx = \frac{\mu_c v}{k} \int_0^l \frac{1 + \frac{\sqrt{km} \sigma \cos \theta}{\mu_{nc} v} f_{nc} J'(s) \frac{\partial s}{\partial x}}{f_c + \mu_0^{-1} f_{nc}} dx. \quad (V.113)$$

Вводя, согласно [29],

$$\bar{x}' = \frac{\mu_c v x}{\sqrt{km} \sigma \cos \theta}, \quad \bar{l} = \frac{\mu_c v l}{\sqrt{km} \sigma \cos \theta},$$

получим

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \frac{\Delta p_0}{\sigma} = \cos \theta \int_0^{\bar{l}} \frac{1 + \mu_0^{-1} f_{nc} J'(s) \frac{\partial s}{\partial x'}}{f_c + \mu_0^{-1} f_{nc}} dx' = \frac{1}{\pi_1}, \quad (V.114)$$

где π_1 — безразмерный критерий Эфроса—Онопrienко [82].

По формуле (V.114) были обработаны результаты исследования [82] для случая $\mu_0 = 2$. Длина стабилизированной зоны

x^* при этом оказалась приблизительно пропорциональна величине $\pi_1: x^* \approx 50\pi_1$ ($0,005 < \pi_1 < 0,02$).

А между тем по приближенной теории моделирования [82] x^* — существенно меньшая величина. Это означает, что действительная область автомодельности по критерию π_1 должна быть существенно меньше (по крайней мере на порядок) той, которая вытекает из приближенной теории.

МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФАЗОВЫХ ПРОНИЦАЕМОСТЕЙ

Процесс вытеснения нефти водой описывается системой сложных дифференциальных уравнений в частных производных, точное (аналитическое) решение которых в общем случае невозможно. Такое решение можно получить только при ряде допущений, не во всех случаях оправданных.

Представляются два пути решения проблемы вытеснения: применение физических моделей; применение математических моделей.

Физические модели воспроизводят на уменьшенных образцах процесс, физически подобный процессу, происходящему в пласте.

Существуют также и другие типы физических моделей, воспроизводящие процессы, физически подобные оригиналу, но подчиняющиеся другим физическим законам (например, электролитические модели). Однако эти типы моделей непригодны для решения задач вытеснения.

Вовсе не умаляя ценности физического моделирования применительно к изучаемому процессу вытеснения, вместе с тем отметим, что на современном уровне его разработки этот путь решения характеризуется существенными недостатками.

Сущность математического моделирования процесса вытеснения заключается в решении соответствующих дифференциальных уравнений при помощи вычислительной техники. Однако математические модели содержат ряд параметров и функций, которые необходимо определять из специальных экспериментов.

Из них большое значение имеют функция Леверетта $I(s)$ и фазовые проницаемости f_c и f_{nc} . По-видимому, следует считать приемлемым определение функции $I(s)$ по методу полупроницаемой перегородки (см. главу 1). Что же касается фазовых проницаемостей, то здесь существующие методы не дают однозначного обоснованного способа определения этих показателей. Весьма характерно в этом отношении сравнение шести различных методов определения относительных проницаемостей, приведенное А. Э. Шейдеггером, из которого следуют сомнительность по крайней мере трех и сложность двух методов [79]. Следует также учитывать и метод определения f_c и f_{nc} по кривым капиллярного давления, описанный в этой главе.

В работе [1] приведено сравнение кривых f_c , полученных двумя модификациями этого метода (Пурцелл—Бурдайн), с экспериментальными данными. Сравнение показывает большое расхождение между модельными результатами Пурцелла и Бурдайна и экспериментами.

Остается спорным предположение о возможности использования этих методов для расчета фазовых проницаемостей при вытеснении одной фазы другой. На этом замечании следует остановиться подробнее.

В методе штата Пенсильвания (в одном из шести рассмотренных А. Э. Шейдеггером и высоко оцененном им) в образец, первоначально насыщенный одной фазой, вводится вторая фаза (газ) с очень малой скоростью; при этом первая фаза (жидкость) продолжает прокачиваться. Опыт проводится при постоянном перепаде давления. После установления динамического равновесия определяют насыщенность в образце. Процедуру повторяют несколько раз при все увеличивающейся скорости газа, но при том же постоянном перепаде давления. Ясно, что в этом методе не моделируется действительный процесс вытеснения в пласте.

Остальные методы (Особа, Лис, Хасслер, Хаффорд, Ричардсон) основаны на одновременном вводе обеих фаз.

Ниже предлагается метод определения фазовых проницаемостей, основанный на анализе граничных при вытеснении одной фазы другой [59].

Пусть образец пористой среды со стороны входа присоединен к сосуду со смачивающей фазой, а с противоположной стороны — к сосуду с несмачивающей. Образец насыщен несмачивающей фазой и смачивающей в количестве, соответствующем связанному ее объему.

Из уравнений (V.43) и (V.44) следует

$$v_c = -\frac{k}{\mu_c} f_c \frac{\partial p_c}{\partial x} = f_c \frac{v + \frac{k}{\mu_{nc}} \frac{\sigma \cos \theta}{\sqrt{k/m}} f_{nc} J'(s)}{f_c + \mu_0^{-1} f_{nc}} \frac{\partial s}{\partial x}, \quad (\text{V.115})$$

$$v_{nc} = -\frac{k}{\mu_{nc}} f_{nc} \frac{\partial p_{nc}}{\partial x} = f_{nc} \mu_0^{-1} \frac{v - \frac{k}{\mu_c} \frac{\sigma \cos \theta}{\sqrt{k/m}} f_c J'(s)}{f_c + \mu_0^{-1} f_{nc}} \frac{\partial s}{\partial x}, \quad (\text{V.116})$$

У входа в образец, т. е. при $x=0$, скорость фильтрации несмачивающей фазы v_{nc} , очевидно, равна нулю. Для этого сечения, согласно (V.116), имеем

$$f_c = \frac{\mu_c v}{\sqrt{k m} \sigma \cos \theta} \cdot \frac{1}{J'(s) \frac{\partial s}{\partial x}}. \quad (\text{V.117})$$

На выходе из образца т. е. при $x = l$, пока насыщенность смачивающей фазой не достигла максимального значения, соответствующего $J(s) = 0$, скорость смачивающей фазы v_c равна нулю. Для этого сечения, согласно (V.115), имеем

$$\dot{f}_{nc} = - \frac{\mu_n c v}{\sqrt{k/m} \sigma \cos \theta} \cdot \frac{1}{J'(s)} \frac{\partial s}{\partial x}. \quad (\text{V.118})$$

Таким образом, для определения фазовых проницаемостей по данным вытеснения одной фазы другой достаточно знать функцию Леверетта $J(s)$ и распределение насыщенности в окрестностях входа и выхода образца для различных моментов времени. Функцию $J(s)$ находим по известному методу полупроницаемой перегородки, насыщенность — методом электропроводности (или радиационным); при этом расстояние между электродами с приближением к концам образца должно уменьшаться таким образом, чтобы получить по крайней мере 3—4 точки в непосредственной окрестности торцов¹.

Можно применить и другой метод, если воспользоваться изменением давлений p_c и p_{nc} в обеих фазах, в непосредственной области торцов¹ [1].

Тогда согласно формуле Леверетта

$$\frac{\partial p_{nc}}{\partial x} - \frac{\partial p_c}{\partial x} = \frac{\partial p_k}{\partial x} = \frac{\sigma \cos \theta}{\sqrt{k/m}} J'(s) \frac{\partial s}{\partial x}, \quad (\text{V.119})$$

где p_k — капиллярное давление.

Отсюда найдем значение $J'(s) \frac{\partial s}{\partial x}$ и далее по формулам (V.117) и (V.118) — искомые фазовые проницаемости.

Однако и этот прием требует особой точности измерений давлений у концов образца, если учесть что в формуле (V.119) фигурирует разность давлений, которая при близких друг другу значениях p_{nc} и p_c может быть малоощутимой.

Учитывая, что фазовая проницаемость в общем случае — функция насыщенности s и безразмерного комплекса $\frac{\sigma}{k |\text{grad } p|}$ необходима большая серия опытов, чтобы получить зависимости для ряда значений этого комплекса.

Более удобен эксперимент, при котором фазовая проницаемость записывается в виде $f = f\left(s, \frac{\mu v}{\sigma}\right)$.

Это обеспечивает получение кривых $f(s)$ при строго постоянном значении критерия $\mu v / \sigma$. Для этого необходимо проводить все опыты при заданных величинах суммарной скорости $v = v_1, v_2, \dots$

¹ Более подробная регламентация возможна только после апробации метода в лаборатории.

Измерения насыщенности вдоль образца, полученные в ряде исследований [1, 24], дают основание считать, что при графическом дифференцировании $s(x)$ можно получить по приведенным формулам достаточно точное значение фазовых проницаемостей.

Для того, чтобы исключить переток несмачивающей фазы из образца в резервуар, из которого подается смачивающая фаза, следует у входа в образец установить пористый диск из гидрофильного материала.

ВЫТЕСНЕНИЕ НЕФТИ ИЗ НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТОВ

При неоднородном пласте вытеснение нефти водой в существенной степени усложняется по сравнению с процессом в однородной среде. В этом случае сказывается влияние капиллярных сил. По-видимому, роль их особенно значительна при заводнении трещиноватых пластов.

Задача чрезвычайно сложна и пока не найдено ее удовлетворительное решение. В настоящее время получено решение следующей простейшей задачи [9]. Плохо проницаемые блоки окружены породой с трещинами, заполненными первоначально водой. Порода гидрофильна. Предполагается, что пласт сложен из большого числа таких блоков. Поступательное движение потока воды в блоках отсутствует (или пренебрежимо мало). Вытеснение из них нефти происходит за счет пропитки блоков водой. Можно предполагать, что вода впитывается в породу через мелкие поры, а нефть вытесняется в трещины через крупные.

Хотя такая модель довольно далека от адекватной модели, тем не менее изучение процесса в «чистом» виде представляет определенный интерес.

Экспериментальные исследования, а также анализ разработки ряда залежей, сложенных неоднородными гидрофильными породами, показывают возможность такого механизма; при этом в ряде случаев роль капиллярной пропитки является решающей.

Рассмотрим призматический образец пористой гидрофильной среды бесконечной длины, боковые грани которого и бесконечно удаленный торец изолированы. Образец заполнен несмачивающей жидкостью. Через открытый конец образца ($x=0$) происходит впитывание смачивающей фазы в образец и вытеснение несмачивающей из него. Это явление носит название противоточной капиллярной пропитки.

Пусть смачивающая фаза — вода, несмачивающая — нефть. Впитывание воды происходит по мелким порам, а вытеснение нефти — по крупным.

Во время пропитки суммарный расход жидкости через образец равен нулю, т. е. $v(t) = v_c + v_n = 0$.

Подставляя в уравнение (V.102) $v(t) = 0$, получим

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\sigma \cos \theta \sqrt{k m}}{\mu_n c} \frac{\partial}{\partial x} \left(f_n c \Phi(s) J'(s) \frac{\partial s}{\partial x} \right) = 0. \quad (\text{V.120})$$

Это уравнение необходимо решить при следующих условиях:
 1. При $t = 0$ задано начальное распределение насыщенности $s = s_0(x)$.
 2. В сечении $x = 0$, т. е. на открытом конце блока, капиллярное давление равно нулю, $J(s) = 0$; это условие, очевидно, имеет место при $s = s_{\max}$.
 3. При $x = l$, т. е. закрытом конце блока, обе скорости $v_c(l)$ и $v_n(l)$ равны нулю.

Примем в (V.116) $v(t) = 0$ и $v_n c(l) = 0$, получим

$$f_n c(s) \Phi(s) J'(s) \frac{\partial s}{\partial x} = 0. \quad (\text{V.121})$$

Так как $s = 0$, то из (V.121) следует $\partial s / \partial x = 0$.

Задачу в указанной постановке можно решить только численным способом. Упростим задачу, приняв $l = \infty$. Иными словами, будем считать, что блок имеет бесконечную протяженность. В этом случае можно получить автомодельное решение [9]. Остановимся на некоторых следствиях, вытекающих из этого решения.

В работе [9] результаты представлены в виде кривых зависимости насыщенности s от безразмерной переменной

$$\xi = x / (at)^{1/2}, \text{ где } a^2 = \frac{\sigma \cos \theta}{\mu_n c} \sqrt{k/m}.$$

Пусть s^* — насыщенность, при которой фазовая проницаемость для смачивающей фазы равна нулю.

Допустим, что начальная насыщенность больше неподвижной насыщенности $s_0 \leq s^*$. Тогда из решения вытекает существование фронта насыщенности (пропитки). Но если первоначальная насыщенность s_0 больше неподвижной насыщенности s^* , то $s = s_0$ при $\xi \rightarrow \infty$.

На рис. V.10, а каждая кривая соответствует определенному значению s_{\max} при $s_0 = 0$.

На рис. V.10, б показаны кривые s при постоянной насыщенности на входе $s_{\max} = 0,75$ и различных начальных насыщенностях s_0 ; s обращается в s_0 (см. рис. V.10, б) не при $\xi \rightarrow \infty$, а при некотором конечном значении $\xi = c$, разном для каждой величины s_{\max} и s_0 .

Отсюда можно сделать следующий вывод. Если длина фронта пропитки конечна, и за пределами его распределение насыщенности постоянно ($s = s_0$), то приведенное решение можно использовать и для блока конечной длины l . Длину фронта пропитки x определим по кривой $s = f(\xi)$.

На соответствующей кривой $s = f(\xi)$ найдем точку $\xi = c$ и далее длину фронта пропитки

$$x_\phi = ac \sqrt{t}.$$

При $x_0 = l$ найдем продолжительность первой фазы пропитки: $t_0 = l^2 / (a^2 c^2)$.

Начиная с $t = t_0$, водонасыщенность в сечении $x = l$ будет расти (см. рис. V.10). Точного решения для второй фазы ($t \geq t_0$) не существует. В работе [9] приводится приближенный метод расчета изменения водонасыщенности для этой фазы, основанный на аппроксимации кривой $s(x)$ параболой, параметры которой определяются из соответствующих граничных условий. Отметим, что граничные условия для $t > t_0$ такие же, как и для $t < t_0$.

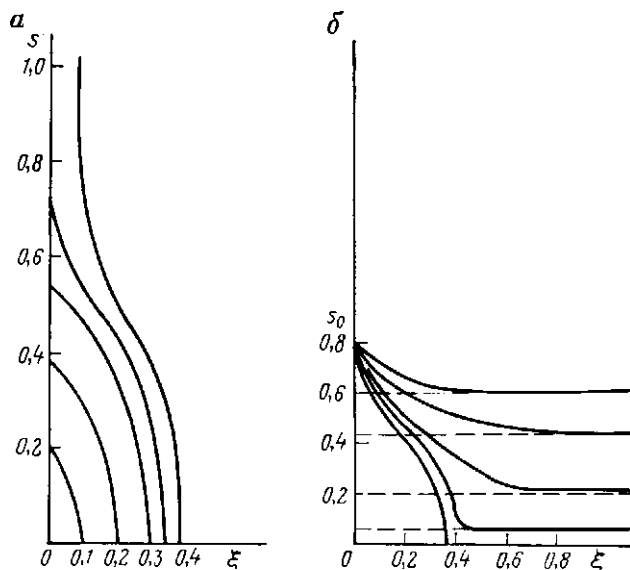


Рис. V.10. Кривые распределения насыщенности при пропитке

Посмотрим теперь, как использовать полученные результаты для решения задачи, более близкой к реальным условиям.

Представим трещиноватый пласт, состоящий из блоков (матриц) одинакового размера, сильно вытянутых в одном направлении. Границами блоков являются трещины, емкость которых существенно меньше порового объема блоков (рис. V.11).

Пусть трещиноватый пласт заводняется в направлении оси y . Вследствие весьма малой проницаемости блоков и малой их ширины эффект фронтального вытеснения нефти из блоков незначителен. В основном нефть будет поступать в трещины в результате капиллярной пропитки блоков водой, а далее, влекомая водой, направляться по трещинам к добывающей галерее. Так как длина блока L существенно больше ширины $2l$ ($L \gg 2l$), то можно пренебречь фильтрацией воды в направлении, перпенди-

кулярном к малым площадкам блока. При таком допущении процесс пропитки можно приближенно считать одномерным, в направлении оси x , т. е. через площадки a_1b_1 , a_2b_2 ... и использовать приведенную выше методику. Вследствие симметрии процесса относительно оси AB блока и указанных особенностей границу AB можно считать непроницаемой. Следовательно, к области ABb_1a_1 можно применить изложенную выше методику.

Анализ этого решения показывает, что процесс нефтеотдачи каждого блока зависит от критерия

$$T = \frac{Lc^2\sigma \cos \theta \sqrt{km}}{l^2w\mu_n},$$

где w — удельный расход, равный произведению скорости движения фронта на пористость блока.

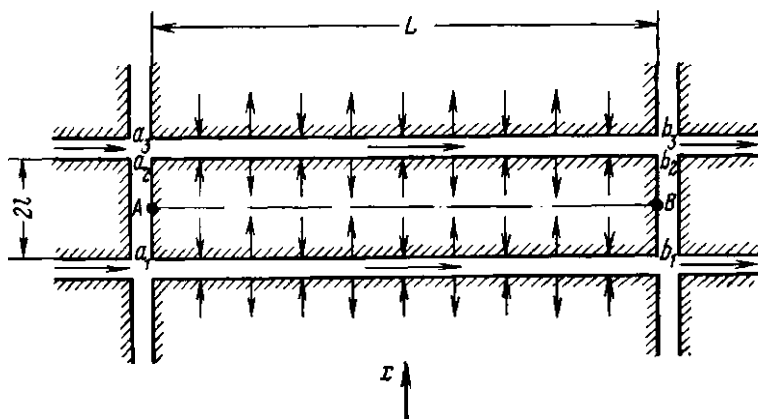


Рис. V.11. Схема механизма пропитки

Для принятых в [9] исходных данных (фазовые проницаемости, каниллярная характеристика) при $T > 20$ нефтеотдача блока мало отличается от предельной.

ФИЛЬТРАЦИЯ ТРЕХФАЗНОЙ СМЕСИ

Фильтрация смеси подчиняется следующей системе дифференциальных уравнений (имеется в виду линейный случай):

$$v_i = - \frac{k}{\mu_i} f_i(s_1, s_2, s_3) \frac{\partial p}{\partial x}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (V.122)$$

где s_1 , s_2 и s_3 — насыщенности фаз, подчиняющиеся очевидному условию

$$s_1 + s_2 + s_3 = 1. \quad (V.123)$$

Проницаемости определяются из треугольных диаграмм (рис. V.12 и V.13). На рис. V.12 линии 1—50 % соответствуют постоянным относительным проницаемостям для газа при движении трехфазной смеси (нефть, газ, вода), а на рис. V.13 такие же линии относятся к нефти [1]. Зависимости построены для гидрофильного неск.

Отметим, что проницаемость для воды практически не зависит от соотношения насыщенностей двух других фаз [71].

Приближенное решение задачи применительно к случаю вытеснения газированной нефти водой принадлежит Д. А. Эфросу [82]. Модель его такова. При вытеснении водой нефти, содержа-

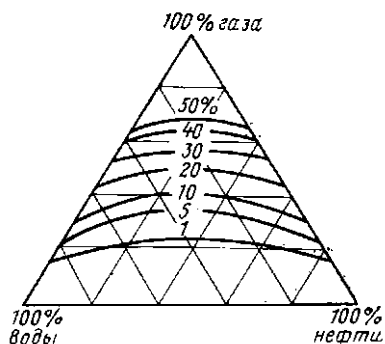


Рис. V.12. Диаграмма относительной проницаемости для газа как функция насыщенности

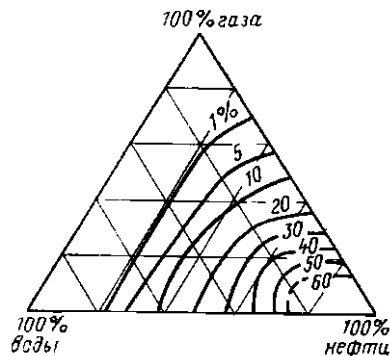


Рис. V.13. Диаграмма относительной проницаемости для нефти как функция насыщенности

щей окклюдированный газ, образуются два фронта — газонефтяной и водонефтяной. Это обусловлено тем, что вследствие большой подвижности газ обгоняет нефть и воду, поэтому водонефтяная зона практически не содержит подвижного газа (кроме зашумленного). В первом приближении применяется схема Баклея—Левретта с учетом того, что в каждой зоне (водонефтяной и газонефтяной) присутствует неподвижный третий компонент — остаточный газ в порах.

ДИНАМИКА ВЫТЕСНЕНИЯ НЕФТИ ВОДОЙ (ОДНОМЕРНЫЙ, ЛИНЕЙНЫЙ СЛУЧАЙ)

На основании теории Баклея—Левретта определим динамику обводнения продукции в простейшем случае одновременно линейного вытеснения [40].

Для определения безводной добычи нефти $V(t_{бв})$ воспользуемся формулой (V.57), примем в ней $x = l$ (l — длина пласта), тогда $l = V(t_{бв})/mF(s_f)$.

Для момента времени $t > t_0$ в насыщенность на выходе из пласта s_1 определим по формуле

$$l = \frac{V(t)}{m} F(s_1), \quad (s_1 > s_\phi). \quad (\text{V.124})$$

По известной насыщенности найдем расходы обеих фаз на выходе:

$$\left. \begin{aligned} v_{nc} &= v(1 - \Phi(s_1)) \\ v_c &= v\Phi(s_1), \quad v = dV/dt \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.125})$$

Если фронт вытеснения не достиг выхода, общая потеря давления Δp складывается из двух составляющих

$$\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2, \quad (\text{V.126})$$

где Δp_1 и Δp_2 — компоненты потерь в зоне вытеснения и в остальной области, в которой движется одна нефть.

Первая компонента определяется из следующей формулы:

$$\Delta p_1 = - \int_0^{x_\phi} \frac{\partial p}{\partial x} dx, \quad (\text{V.127})$$

где через $x_\phi < l$ обозначена координата фронта вытеснения,

$$x_\phi = \frac{V(t)}{m} F(s_\phi) \quad (\text{V.128})$$

или, используя выражения (V.43) и (V.57), получим

$$\Delta p_1 = \frac{\mu_c v V}{km} \int_{s_0}^{s_\phi} \frac{F'(s) ds}{f_c + \mu_0^{-1} f_{nc}} = \frac{\mu_c v V}{km} \psi. \quad (\text{V.129})$$

Так как s_ϕ для заданных фазовых проницаемостей — вполне определенная, постоянная величина¹, то интеграл в (V.129) является также постоянным.

Вторая компонента

$$\Delta p_2 = \frac{\mu_{nc}(l - x_\phi)v}{kf_{nc}(s_c)} = \frac{\mu_{nc} \left(l - \frac{V}{m} F(s_\phi) \right) v}{kf_{nc}(s_c)}. \quad (\text{V.130})$$

Суммируя (V.127) и (V.130) и учитывая, что $v = dV/dt$, получим

$$\Delta p = \frac{\mu_c}{k} \cdot \frac{dV}{dt} \left[\frac{\mu_0 l}{f_{nc}(s_c)} + \left(\psi - \frac{\mu_0 F(s_\phi)}{f_{nc}(s_c)} \right) \frac{V}{m} \right]. \quad (\text{V.131})$$

¹ Имеется в виду задача вытеснения при отсутствии различия плотностей фаз.

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\frac{1}{2} \left(\psi - \frac{\mu_0 F(s_\Phi)}{f_{nc}(s_c)} \right) \frac{V^2}{m} + \left(\frac{\mu_0 l}{f_{nc}(s_c)} \right) V = \frac{k}{\mu_c} P, \quad (V.132)$$

где P — импульс,

$$P = \int_0^t \Delta p \, d\tau. \quad (V.133)$$

При решении квадратного уравнения необходимо иметь в виду, что множитель перед V^2 в (V.132) может быть как положительным, так и отрицательным¹.

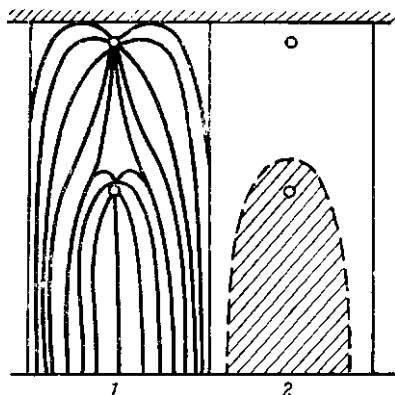


Рис. V.14. Схема выделенного элемента.
1 — линии тока; 2 — зона отбора скважины первого ряда

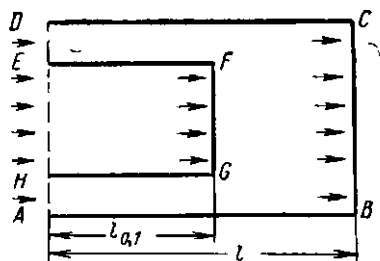


Рис. V.15. Схема расположения галерей

В работе [40] уравнение Баклея—Левверетта было использовано для расчета фильтрации жидкости в полосообразной залежи к двухрядной системе скважин. На рис. V.14 показана схема выделенного элемента залежи, включающая в себя две скважины (по одной из каждого ряда). На достаточно большом расстоянии от нервного ряда обе границы зоны отбора практически параллельны непроницаемым границам залежи. Заменим криволинейную границу залежи прямолинейной $EFGH$ (рис. V.15), причем одна из сторон ее обязательно должна проходить через скважину нервного ряда. Суммируя условия эти области для всех скважин, получим схему течения для всей залежи в целом. Таким образом, зона отбора первого ряда представляется в виде прямоугольника $EFGH$, зона отбора второго ряда — в виде ступенчатой прямоугольной фигуры $ABCDEFGH$. Для каждой из этих зон используется описанная выше методика. Подробно вопрос рассматривается в [40].

¹ В конце безводного периода в (V.132) следует принять $V = ml/F(s_\Phi)$, а верхним пределом интеграла в (V.129) — s_1 , при этом $\Delta p_2 = 0$.

ВЫТЕСНЕНИЕ НЕФТИ ИЗ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ ВОДНЫМИ РАСТВОРАМИ ПОВЕРХНОСТНО-АКТИВНЫХ ВЕЩЕСТВ (ПАВ) И ПОЛИМЕРОВ

Высокая подвижность воды обуславливает прорыв ее через наиболее проницаемые пропластки к добывающим скважинам. При этом за фронтом вытеснения остается более или менее значительное количество нефти, которое полностью нельзя извлечь из пласта в течение «водного» периода работы скважин.

Добавки полимеров к нагнетаемой воде увеличивают ее вязкость, снижают проводимость пористой среды и обуславливают выравнивание фронта вытеснения. Добавки же ПАВ способствуют более полному вытеснению, достигаемому за счет благоприятного изменения капиллярной характеристики системы.

Математические модели вытеснения нефти такими растворами представляют обобщение рассмотренных в главе V моделей, относящихся к вытеснению нефти обычной водой.

С помощью соответствующим образом построенных обобщенных моделей в настоящее время изучается эффективность применения растворов ПАВ и полимеров при заводнении [3, 32].

Вместе с тем проблема построения адекватных моделей далека от совершенства. В этой главе излагаются некоторые соображения, относящиеся к таким моделям.

Ниже приводятся общие понятия и определения физико-химического характера, которые необходимы для понимания трактуемого вопроса.

АДСОРБЦИЯ

Концентрирование какого-либо вещества на поверхности жидкого или твердого тела в результате самопроизвольного перехода его из объема фазы называется адсорбцией. Адсорбция измеряется числом киломолей вещества, приходящихся на единицу поверхности.

Адсорбция может иметь место на поверхностях раздела: твердое тело—жидкость, твердое тело—газ, жидкость—жидкость, жидкость—газ.

Адсорбентом называется твердое вещество, на поверхности которого происходит адсорбция. Адсорбтивом (адсорбатом) называется вещество, концентрирующееся на поверхности раздела обеих фаз.

Адсорбция на однородной плоской поверхности определяется термодинамическим уравнением адсорбции Гиббса ¹

$$\Gamma = - \frac{d\sigma}{dc} \cdot \frac{c}{RT}, \quad (\text{VI.1})$$

где Γ — отношение избытка вещества в поверхностном слое к площади, разделяющей поверхности, т. е. адсорбция; σ — поверхностное натяжение; c — концентрация растворенного в объеме вещества; R — газовая постоянная; T — абсолютная температура.

Из уравнения Гиббса (VI.1) следует, что концентрирование вещества в поверхностном слое, соответствующее, очевидно, $\Gamma > 0$, должно иметь место при $\frac{d\sigma}{dc} < 0$ (положительная адсорбция); при $\frac{d\sigma}{dc} > 0$ величина $\Gamma < 0$ и процесс должен сопровождаться убыванием вещества в этом слое (отрицательная адсорбция).

По известной кривой зависимости поверхностного натяжения от концентрации водного раствора $\sigma = \sigma(c)$ можно с помощью графического дифференцирования ее определить величину адсорбции.

На рис. VI.1 схематически показаны три изотермы поверхностного натяжения $\sigma = \sigma(c)$. Изотерма 1 характеризует вещество, снижающее поверхностное натяжение σ ; изотерма 2 — вещество с постоянным значением σ ; изотерма 3 — вещество, способствующее увеличению σ . Все кривые берут свое начало с одной и той же точки $c = 0$, при этом ордината в этой точке равна поверхностному натяжению чистой воды.

Вещества, характеризующиеся изотермами типа 1, называются поверхностно-активными веществами; вещества, соответствующие кривым 2, — поверхностно-неактивными (поверхностно-инактивными).

Для построения кривой зависимости адсорбции от концентрации необходимо воспользоваться изотермой поверхностного натяжения $\sigma(c)$, проведя касательную к кривой в рассматриваемой точке (см. рис. VI.1). Тогда

$$\Gamma = \frac{c}{RT} \operatorname{tg} \varphi, \quad (\text{VI.2})$$

где φ — тангенс угла наклона касательной в рассматриваемой точке.

¹ Уравнение (VI.1) представляет собой частный случай более общего уравнения, полученного Гиббсом; в этом уравнении необходимо заменить величину c активностью второго компонента a для достаточно разбавленных растворов, которые мы будем использовать, $c \approx a$.

На рис. VI.2 показана кривая зависимости адсорбции от концентрации ПАВ, построенная указанным выше способом.

Для построения математических моделей необходимо знать изотермы адсорбции ПАВ и поверхностного натяжения в зависимости от концентрации c в закачиваемой воде.

Напишем эти зависимости в общем виде: $g = g(c)$ — изотерма адсорбции; $\sigma = \sigma(c)$ — изотерма поверхностного натяжения.

Существуют теоретические и эмпирические методы определения $g(c)$ и $\sigma(c)$.

Укажем некоторые из них.

Эмпирическое уравнение Шишковского

$$\sigma = \sigma_0 - a \ln(bc + 1), \quad (\text{VI.3})$$

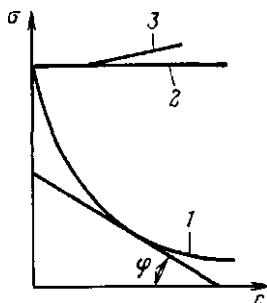


Рис. VI.1. Зависимость поверхностного натяжения от концентрации водных растворов

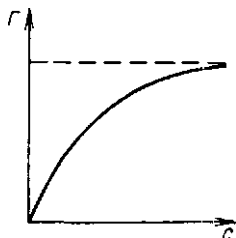


Рис. VI.2. Изотерма адсорбции поверхностно-активного вещества

где σ_0 — поверхностное натяжение растворителя; a и b — константы.

Продифференцировав σ по c и подставив в уравнение адсорбции Гиббса, получим

$$\Gamma = \Gamma_{\infty} \frac{bc}{1 + bc}, \quad (\text{VI.4})$$

где Γ_{∞} — предельное значение адсорбции, достигаемое при

$$c \rightarrow \infty \left(\Gamma_{\infty} = \frac{a}{RT} \right).$$

На основе кинетических соображений и допущения об образовании только мономолекулярного слоя на поверхности адсорбента Лэнгмюр вывел формулу (VI.4), которая используется для любой границы раздела.

В этом уравнении константа b , называемая удельной поверхностной активностью, характеризует степень снижения поверхностного натяжения.

Приведенные зависимости соответствуют условию адсорбционного равновесия, устанавливающемуся в течение определенного времени, которое колеблется от долей секунды при адсорбции газа до нескольких часов при адсорбции из раствора.

Из теории, основанной на мономолекулярной адсорбции, можно вывести формулу, характеризующую процесс адсорбции во времени:

$$a = a_{\infty} (1 - e^{-kt}),$$

где a_{∞} — равновесная величина адсорбции.

Отсюда легко получить выражение для потока вещества фазы:

$$\frac{da}{dt} = k(a_{\infty} - a).$$

На практике, однако, более надежным является способ непосредственного определения изотерм для конкретных ПАВ.

Как следует из вышеизложенного, уравнение Лэнгмюра (VI.4) основано на допущении образования только мономолекулярного слоя на поверхности адсорбента. Однако в действительности адсорбция полимолекулярна, так как молекулы пара адсорбируются не только на «чистой» поверхности адсорбента, но и на поверхности уже образовавшихся слоев. Особенно большая погрешность теории имеет место с приближением давления к давлению насыщения, когда число двойных, тройных и т. д. слоев увеличивается. Брунауэр, Эммет и Теллер разработали теорию, учитывающую полимолекулярный характер процесса.

Основные предпосылки этой теории, названной БЭТ по имени ее авторов, таковы:

адсорбция многослойна;

образование первого слоя адсорбата происходит в результате действия вандерваальсовых сил между адсорбатом и адсорбентом; последующие слои образуются главным образом при конденсации наиболее «холодных» молекул пара;

условия конденсации и испарения, а также свойства жидкости одинаковы для всех слоев, кроме первого;

вторые, третьи и т. д. слои образуются еще до завершения образования первого слоя.

На основе этих предпосылок была выведена следующая формула для изотермы адсорбции:

$$\frac{p}{V} \cdot \frac{p_0}{p_0 - p} = \frac{p_0}{V_m C_0} + \frac{c_0 - 1}{V_m C_0} p \quad (\text{VI.5})$$

с двумя константами V_m (предельный объем монослоя) и c_0 (p_0 — упругость насыщенного пара).

Из уравнения (VI.5) видно, что зависимость между $\frac{p}{V} \times \frac{p_0}{p_0 - p}$ и p носит линейный характер. Отрезок, отсекаемый от

оси ординат, очевидно, равен $\frac{p_0}{V_m C_0}$, а тангенс угла наклона — $\frac{C_0 - 1}{V_m C_0}$.

Построив по экспериментальным данным изотерму и аппроксимировав ее прямой, получим значения этого отрезка и тангенса. Далее определим искомые величины C_0 и V_m .

По найденному значению V_m , исходя из представления о плотном монослое, найдем площадь адсорбции S по формуле

$$S = V_m N \omega_0, \quad (\text{VI.6})$$

где N — число Авогадро; ω_0 — эффективная площадь, покрываемая одной молекулой. Для азота $\omega_0 = 1,54 \text{ нм}^2$, для аргона $\omega_0 = 1,36 \text{ нм}^2$.

Указанная методика была применена для определения удельной поверхности сцементированных горных пород [22, 73]. Описание результатов этой работы дано в главе I.

Один из авторов метода Брунауэр выдвинул следующие требования для оценки метода: теоретическое уравнение изотермы должно правильно отражать характер зависимости, полученной из опытов; вычисленные константы должны иметь правдоподобные значения; теория должна правильно отражать температурную зависимость адсорбции.

Для ответа на первое требование заметим, что уравнение БЭТ правильно отражает ход изотермы, которая имеет в указанных координатах вид прямой, тогда как изотерма Лэнгмюра даже при $p/p_0 \ll 1$ не может быть описана прямой линией.

Были получены оценки константы C_0 по теоретической формуле, а также рассчитаны значения V_m по формуле (VI.6) для пористых сред с известной поверхностью адсорбции S . Эти C_0 и V_m , как правило, хорошо согласуются с экспериментальными значениями указанных констант, полученными по методу БЭТ (второе требование).

То обстоятельство, что найденные значения V_m практически не зависят от температуры, служит ответом на третье требование.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Перейдем теперь к описанию математических моделей для вытеснения нефти раствором ПАВ.

Хронологически первой такой моделью была модель, предложенная А. К. Курбановым [31]. Она учитывает влияние гидродинамических сил по схеме Баклея и Леверетта, а также сорбционных эффектов, основанных на описанных выше математических соотношениях.

В первоначальном виде эта модель не учитывала эффект неравновесности адсорбции. В дальнейшем это ограничение автором модели было снято [32]. Однако в обеих моделях не учи-

тывались капиллярные силы. Более совершенной является модель Г. А. Бабалаяна, Б. И. Леви, Ю. В. Суркова [3], учитывающая также влияние капиллярных сил. На ней мы остановимся несколько подробнее.

Авторами метода выписывается система дифференциальных уравнений в форме Раннопорта и Лиса (два уравнения). Однако в ней учитывается эффект уменьшения поверхностного натяжения с ростом концентрации ПАВ.

Приведем уравнение для определения капиллярного давления

$$p_k - p_v = p_k(s, c) = \sigma \cos \theta \sqrt{\frac{n}{k}} J(s) \beta(c), \quad (\text{VI.7})$$

где $\beta(c)$ — функция, учитывающая влияние ПАВ на капиллярные силы; σ — поверхностное натяжение при $c = 0$.

Следовательно, $\sigma \beta(c)$ представляет изотерму поверхностного натяжения, $\beta(c)$ — убывающая функция.

Более подробно рассмотрим третье уравнение полной системы [62, 3], учитывающее сорбционные процессы¹:

$$\frac{\partial}{\partial x} (v_v c) = -m \frac{\partial}{\partial t} \left[sc + \frac{b(s)g(c)}{m} \right]. \quad (\text{VI.8})$$

В этом уравнении v_v — скорость фильтрации воды, а v_{vc} — объемная скорость поверхностно-активного вещества.

Выражение

$$\frac{\partial}{\partial x} (v_v c) dx$$

является изменением скорости этого вещества (или расхода, соответствующего единичной площади сечения потока) на элементарном пути dx .

Эту величину необходимо приравнять накоплению ПАВ в рассматриваемом отсеке dx (правая часть уравнения (VI.5)). Величина накопленного ПАВ состоит из двух следующих частей:

$$m \frac{\partial (sc)}{\partial t} dx,$$

являющейся величиной изменения sc ПАВ в растворе в рассматриваемом отсеке, и

$$\frac{\partial}{\partial t} [b(s)g(c)] dx,$$

равной «осадку» (адсорбции) в пористой среде².

Функция $b(s)$ введена в это выражение из следующих соображений. Если $g(c)$ — количество вещества, адсорбированного объемом пористой среды при полиом насыщении ее раствором ($s = 1$), то при частичном насыщении адсорбция вещества должна быть меньше, так как только некоторая часть удельной по-

¹ Уравнение описывает линейное вытеснение.

² В исследованиях [62, 3] авторами модели допущена неточность: вместо $b(s)g(s)$ записано $b(s)g(c)c$.

верхности породы находится в контакте с раствором. Переменный безразмерный множитель $0 \leq b(s) \leq 1$ характеризует степень уменьшения адсорбции по сравнению с значением ее при $s = 1$. Функция $b(s)$ подлелит экспериментальному определению; значения ее при $s = 0$ и $s = 1$ соответственно равны 0 и 1. В модели [7] принят линейный вид функции $b(s) = s$.

Основываясь на описанной расчетной схеме вытеснения нефти водным раствором ПАВ, авторы работ [62, 3] провели расчеты на ЭВМ технологических показателей разработки нефтяных месторождений с воздействием водой и водным раствором ПАВ. Моделировались два пласта. Один из них состоит из изолированных прослоев, слои другого пласта не изолированы, — т. е. учитываются капиллярные перетоки [62, 4].

Хотя результаты расчета показывают, что применение ПАВ может дать существенный прирост конечного коэффициента нефтеотдачи (в среднем на 5 % по одиннадцати месторождениям [4]), тем не менее к цифрам прироста следует относиться сугубо осторожно. Основанием для такого утверждения служат следующие соображения, некоторые из которых следуют из вышеизложенного.

Фазовые проницаемости определялись по обычной методике, т. е. в условиях, адекватность которых действительным не доказана (см. гл. V). С другой стороны, из работы [25] следует, что даже решение задачи Баклея и Леверетта является неустойчивым по отношению к входным данным (фазовым проницаемостям и начальному положению водонефтяного контакта). В работе [25] приводится серия кривых распределения водонасыщенности, построенная по Баклею и Леверетту для двух достаточно близких значений входных параметров [25]. Несмотря на близость их значений, распределения существенно отличаются друг от друга. Если такая тенденция имеет место для простого случая, то тем более следует ожидать появления фактора неустойчивости в рассматриваемой здесь более сложной задаче.

Другой пример неустойчивости решения по отношению к входным данным: линейное вытеснение в пласте бесконечной протяженности при постоянном расходе, рассмотренное в главе V. Уравнение (V.108) при помощи соотношения (V.68) можно привести к виду

$$\bar{x} - \bar{x}_0 = \frac{\sigma \cos \theta \sqrt{km}}{\mu_n c v} \int_{s_0}^s \frac{f_n c \Phi(s) J'(s) ds}{\Phi(s_\Phi) \frac{s - s_c}{s_\Phi - s_c} - \Phi(s)}. \quad (\text{VI.9})$$

При малых значениях s (s , близких к s_c) величина

$$\Phi(s) = \frac{f_c}{f_c + \mu_0^{-1} f_{nc}} \approx \mu_0 \frac{f_c}{f_{nc}}.$$

В окрестности s_c функцию f_c можно аппроксимировать так:

$$f_c = B(s - s_c)^2, \quad (\beta > 1).$$

Для этой же окрестности

$$\Phi(s_{\Phi}) \frac{s - s_c}{s_{\Phi} - s_c} - \Phi(s) \approx \Phi(s_{\Phi}) \frac{s - s_c}{s_{\Phi} - s_c}.$$

Учитывая эти равенства, из VI.9 получим

$$\bar{x} - \bar{x}_0 = B \frac{\mu_0 \alpha \cos \theta \sqrt{km} (s_{\Phi} - s_c)}{\mu_n c v \Phi(s_{\Phi})} \int_{s_0}^s (s - s_c)^{\beta-1} J'(s) ds.$$

Обычно капиллярную кривую $J(s)$ аппроксимируют таким образом, что абсолютная величина ее производной $J'(s)$ оказывается обратно пропорциональной величине $s - s_c$:

$$J'(s) = - \frac{A}{(s - s_c)^{\alpha}}.$$

Подставляя это значение J' в предыдущее уравнение, получим

$$\begin{aligned} \bar{x} - \bar{x}_0 = & -AB \frac{\mu_0 \alpha \cos \theta \sqrt{km} (s_{\Phi} - s_c)}{\mu_n c v \Phi(s_{\Phi})} \times \\ & \times \frac{[(s - s_c)^{\beta-\alpha} - (s_0 - s_c)^{\beta-\alpha}]}{\beta - \alpha}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при значении показателя $\alpha = \beta - n$, близком к нулю, и малом изменении его происходит существенное изменение $\bar{x} - \bar{x}_0$. Это обусловлено неточностью в определении показателей β и n вблизи s_c . В ряде случаев возможны большие ошибки в расчете распределения насыщенности при неточном определении входных параметров f_c , f_{nc} и $J(s)$.

Естественно, что аналогичные замечания приемлемы и для полимерного заводнения. Здесь также возникают дополнительные трудности, вызванные тем, что при фильтрации полимерных растворов через пористую среду она снижает свою пропускную способность для полимерного раствора в большей степени, чем происходит возрастание вязкости его по сравнению с водой. Указанное явление оценивается с помощью фактора сопротивления R , представляющего собой отношение подвижности воды к подвижности полимерного раствора. Пренебрежением изменением величины R полимерного раствора от скорости фильтрации v в математических моделях на основе наблюдаемых фактов о слабой зависимости $R = f(v)$ в области реальных скоростей является в достаточной степени произвольным.

В дальнейшем при разработке математических моделей необходимо выяснить следующие вопросы: в какой мере закономерны предположки, основанные на равновесной адсорбции; насколько целесообразна модель, учитывающая неравновесность процесса адсорбции; оправдано ли усложнение модели за счет учета неравновесности; к каким ошибкам может привести линейная аппроксимация функции, учитывающей двухфазность процесса при расчетах адсорбционных потерь.

ГЛАВА VII

ФИЛЬТРАЦИЯ ГАЗИРОВАННОЙ НЕФТИ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РЕЖИМА РАСТВОРЕННОГО ГАЗА

В процессе фильтрации нефти, газа и воды в пласте возникают явления, сопровождающиеся фазовыми превращениями, изменением физических свойств флюидов. Учет всех этих факторов представляет собой весьма сложную задачу.

Большим шагом явилась предложенная М. Маскетом [38] модель течения, позволившая достаточно удовлетворительно решать ряд инженерных задач разработки нефтяных месторождений.

В основу этой модели было положено предположение, что углеводородная система состоит из двух компонентов: тяжелой фракции нефти и газа.

В работе [75] показано, что уравнения фильтрации газированной жидкости Маскета можно получить из уравнений многофазной и многокомпонентной фильтрации. Действительно, если, согласно [75], принять число компонентов равным двум (нефть и газ) и не учитывать наличие нефти в газовой фазе, то из общих уравнений путем простых преобразований получаются уравнения Маскета, которые являются частным случаем общих уравнений фильтрации многофазной и многокомпонентной системы.

Приведем более наглядный вывод уравнений Маскета.

Если s_n — насыщенность пористой среды нефтью; m — пористость; ρ_{n0} — плотность нефти в нормальных условиях; β_n — объемный коэффициент нефти, то массовое содержание нефти в единице объема будет

$$m \left(\frac{\rho_{n0}}{\beta_n} \right) s_n, \quad (\text{VII.1})$$

где ρ_{n0}/β_n — согласно определению величины β есть плотность нефти в пластовых условиях.

Определим растворимость газа s в нефти как отношение объема растворенного в ней газа $V_{г0}$ при нормальных атмосферных условиях к объему нефти V_{n0} при тех же условиях:

$$s = \frac{V_{г0}}{V_{n0}}, \quad V_{г0} = sV_{n0} = s \frac{ms_n}{\beta_n}. \quad (\text{VII.2})$$

Умножая величину $V_{г0}$ на плотность газа при нормальных условиях, определим массу растворенного в нефти газа:

$$\frac{ms\rho_{г0}s_n}{\beta_n}. \quad (\text{VII.3})$$

Массовое содержание газа в единице объема будет

$$m\rho_r s_r. \quad (\text{VII.4})$$

При отсутствии третьей фазы (воды) $s_r = 1 - s_n$. Отметим, что в (VII.4) плотность соответствует плотности в пластовых условиях.

Таким образом, массовые содержания жидкой и газообразной фаз в единице объема соответственно равны

$$G_n = \frac{m\rho_n s_n}{\beta_n}, \quad G_r = m\rho_r s_r + \frac{ms\rho_r s_n}{\beta_n}. \quad (\text{VII.5})$$

Будем считать, что фильтрация фаз подчиняется обобщенному закону Дарси (см. гл. V), т. е.

$$\vec{w}_n = -\frac{k}{\mu_n} f_n \text{grad } p, \quad \vec{w}_r = -\frac{k}{\mu_r} f_r \text{grad } p, \quad (\text{VII.6})$$

где f_n и f_r — фазовые проницаемости нефти и газа.

При составлении уравнений неразрывности необходимо учесть, что нефть движется только в жидком состоянии, а газ — как в газообразном, так и в жидком.

Выделим из общей массы элементарный параллелепипед и составим уравнение неразрывности, приняв декартовую систему координат. По оси x разность массовых расходов нефти через перпендикулярные к этой оси грани единичной площади равна

$$\left(-\frac{k}{\mu_n} \rho_n f_n \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \left[\left(-\frac{k}{\mu_n} \rho_n f_n \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{k}{\mu_n} \rho_n f_n \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{\mu_n} \rho_n f_n \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx. \quad (\text{VII.7})$$

Аналогичным образом получим выражения по осям y и z :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k}{\mu_n} \rho_n f_n \frac{\partial p}{\partial y} \right) dy, \quad (\text{VII.8})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k}{\mu_n} \rho_n f_n \frac{\partial p}{\partial z} \right) dz. \quad (\text{VII.9})$$

Приравняв сумму (VII.7), (VII.8) и (VII.9) к изменению во времени массы нефти и учитывая, что $\rho_n = \rho_{no}/\beta_n$, получим уравнение неразрывности для нефти:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{\mu_n} \cdot \frac{f_n}{\beta_n} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k}{\mu_n} \cdot \frac{f_n}{\beta_n} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k}{\mu_n} \cdot \frac{f_n}{\beta_n} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{ms_n}{\beta_n} \right), \quad (\text{VII.10})$$

При составлении уравнения для газа необходимо учесть, что газ движется как в газообразном, так и в жидком состоянии.

Массовый расход чисто газового потока через единичную площадь, перпендикулярную к оси, равен

$$-\frac{k}{\mu_r} \rho_r f_r \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Поток же газа в жидком виде зависит от объемного расхода нефти

$$-\frac{k}{\mu_n} f_n \frac{\partial p}{\partial x},$$

в единице объема которого содержится растворенный газ в количестве

$$\frac{s \rho_r o}{\beta_n}.$$

Эта составляющая расхода равна

$$-\frac{s \rho_r o}{\beta_n} \cdot \frac{k}{\mu_n} f_n \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Поэтому общий массовый расход газа вдоль оси x равен

$$-\frac{k}{\mu_r} \rho_r f_r \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{k}{\mu_n} \cdot \frac{s \rho_r o}{\beta_n} f_n \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (\text{VII.11})$$

Переходя к составлению уравнения неразрывности для газа по схеме, в точности совпадающей с схемой вывода для нефти, получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{k}{\mu_r} \rho_r f_r + \frac{k}{\mu_n} \cdot \frac{s \rho_r o}{\beta_n} f_n \right) \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{k}{\mu_r} \rho_r f_r + \frac{k}{\mu_n} \cdot \frac{s \rho_r o}{\beta_n} f_n \right) \frac{\partial p}{\partial y} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{k}{\mu_r} \rho_r f_r + \frac{k}{\mu_n} \cdot \frac{s \rho_r o}{\beta_n} f_n \right) \frac{\partial p}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left(m \rho_r o s_r + m \frac{s \rho_r o s_n}{\beta_n} \right). \end{aligned} \quad (\text{VII.12})$$

В векторной записи уравнения для обоих компонентов имеют вид:

$$\operatorname{div} \left(\frac{f_n}{\mu_n \beta_n} \operatorname{grad} p \right) = \frac{m}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{s_n}{\beta_n} \right), \quad (\text{VII.13})$$

$$\operatorname{div} \left[\left(\frac{f_r \rho_r}{\mu_r} + \frac{f_n s \rho_r o}{\mu_n \beta_n} \right) \operatorname{grad} p \right] = \frac{m}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_r s_r + \frac{s \rho_r o s_n}{\beta_n} \right). \quad (\text{VII.14})$$

К этим двум уравнениям необходимо присоединить уравнение для воды

$$\operatorname{div} \left(\frac{f_w}{\mu_w \beta_w} \operatorname{grad} p \right) = \frac{m}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{s_w}{\beta_w} \right). \quad (\text{VII.15})$$

Кроме этих трех уравнений имеем очевидное условие

$$s_n + s_r + s_g = 1. \quad (\text{VII.16})$$

(VII.13), (VII.14) и (VII.15) впервые предложены Маскетом [56], однако без подробного приведенного здесь вывода.

Фазовые проницаемости f_n , f_r и f_g можно определить из тройных диаграмм, а при отсутствии подвижной воды — по кривым фазовых проницаемостей.

Как следует из приведенного вывода, Маскет пренебрегает различием давлений в нефти и газе.

Этот факт можно учесть при помощи соотношения Леверетта (см. главу II). Однако даже и без поправки на различие давлений уравнения Маскета очень сложны и требуют для своего решения использование ЭВМ.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИСТОЩЕНИЯ ЗАЛЕЖИ ПРИ РЕЖИМЕ РАСТВОРЕННОГО ГАЗА

Трудности, связанные с решением уравнений Маскета, вынуждают искать приближенные методы решения задач о фильтрации газированной жидкости.

Среди многочисленных приближенных способов решения проблемы движения газированной жидкости рассмотрим метод, основанный на материальном балансе, полученном в результате преобразования уравнений Маскета.

Рассмотрим простейший случай круговой залежи, не имеющей внешнего источника питания («запечатанная» залежь). В такой залежи при условии, что начальное пластовое давление равно давлению насыщения, с самого начала должен развиться режим растворенного газа. Из условия радиальной симметрии можно получить следующие модификации уравнения Маскета для этого случая:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{f_n}{\mu_n \beta_n} r \frac{\partial p}{\partial r} \right) &= \frac{m}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{s_n}{\beta_n} \right) \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{f_r \rho_r}{\mu_r} + \frac{f_n s \rho_r o}{\mu_n \beta_n} \right) r \frac{\partial p}{\partial r} \right] &= \frac{m}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_r s_r + \frac{s \rho_r o s_n}{\beta_n} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VII.17})$$

Выполняя операции, указанные в левых частях уравнения (VII.17), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{f_n}{\mu_n \beta_n} \right) r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{f_n}{\mu_n \beta_n} \left(\frac{\partial p}{\partial r} + r \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \right) \right] &= \\ &= \frac{m}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{s_n}{\beta_n} \right), \end{aligned} \quad (\text{VII.18})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{f_r \rho_r}{\mu_r} + \frac{f_n s \rho_r o}{\mu_n \beta_n} \right) r \frac{\partial p}{\partial r} + \left(\frac{f_r \rho_r}{\mu_r} + \frac{f_n s \rho_r o}{\mu_n \beta_n} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\partial p}{\partial r} + r \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \right) \right] &= \frac{m}{k} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_r s_r + \frac{s \rho_r o s_n}{\beta_n} \right). \end{aligned} \quad (\text{VII.19})$$

На границе залежи $r = R_K$ должно быть $\partial p / \partial r = 0$. Учитывая это, получим из (VII.18) и (VII.19) условия на границе

$$\left. \begin{aligned} \frac{f_H}{\mu_H \beta_H} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} &= \frac{m}{k} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{s_H}{\beta_H} \right) \\ \left(\frac{f_r \rho_r}{\mu_r} + \frac{f_H s \rho_{r \circ}}{\mu_H \beta_H} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} &= \frac{m}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_r s_r + \frac{s \rho_{r \circ} s_H}{\beta_H} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VII.20})$$

Все величины здесь соответствуют их значениям на границе пласта R_K . Далее представим правые части уравнений так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{s_H}{\beta_H} \right) &= \left[\frac{1}{\beta_H} \cdot \frac{ds_H}{dp} + s_H \left(\frac{1}{\beta_H} \right)' \right] \frac{dp}{dt} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_r s_r + \frac{s \rho_{r \circ} s_H}{\beta_H} \right) &= \left[s_r \rho_r' + \rho_r \frac{ds_r}{dp} + \rho_{r \circ} \left(\frac{s}{\beta_H} \right)' s_H + \right. \\ &\quad \left. + \frac{s \rho_{r \circ}}{\beta_H} \cdot \frac{ds_H}{dp} \right] \frac{dp}{dt} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{VII.21})$$

где штрих — дифференцирование по p .

Очевидно, что ρ_r' , $\left(\frac{1}{\beta_H} \right)'$ и $\left(\frac{s}{\beta_H} \right)'$ — известные функции давления. Подставив значения правых частей из (VII.21) в (VII.20) и учтя, что $s_r = 1 - s_H$, получим

$$\begin{aligned} &\frac{\frac{f_r \rho_r}{\mu_r} + \frac{f_H s \rho_{r \circ}}{\mu_H \beta_H}}{\frac{f_H}{\mu_H \beta_H}} = \\ &= \frac{\rho_r' (1 - s_H) - \rho_r \frac{ds_H}{dp} + \rho_{r \circ} \left(\frac{s}{\beta_H} \right)' s_H + \frac{s \rho_{r \circ}}{\beta_H} \cdot \frac{ds_H}{dp}}{\left[\frac{1}{\beta_H} \frac{ds_H}{dp} + s_H \left(\frac{1}{\beta_H} \right)' \right]}. \end{aligned} \quad (\text{VII.22})$$

Разрешая это уравнение относительно ds_H/dp , имеем

$$\frac{ds_H}{dp} = \frac{\rho_r' (1 - s_H) + \left(\frac{s}{\beta_H} \right)' \rho_{r \circ} s_H + \frac{\rho_r \psi \mu_H \beta_H'}{\mu_r \beta_H} s_H - s \rho_{r \circ} \left(\frac{1}{\beta_H} \right)' s_H}{\rho_r \left(\psi \frac{\mu_H}{\mu_r} + 1 \right)}, \quad (\text{VII.23})$$

где

$$\psi = f_r / f_H. \quad (\text{VII.24})$$

Уравнение (VII.23) устанавливает в дифференциальной форме зависимость между давлением и насыщенностью на контуре круговой залежи. Это уравнение в общем виде не интегрируется в квадратурах. Однако с помощью ЭВМ можно разрешить уравнение (VII.23) для всех случаев, представляющих практический интерес.

Существует ряд приближенных способов решения уравнения (VII.23), подробно описанных в монографиях [38, 13, 60].

Рассмотренный нами пример круговой залежи представляет большой практический интерес, так как к этой задаче при определенной схематизации процесса фильтрации можно свести многие практические важные случаи. Эти случаи объединяются следующими условиями: залежь должна быть «занятая» или по крайней мере проницаемость внешней приконтурной области залежи настолько мала, что можно пренебречь ее влиянием; скважины вводятся в эксплуатацию практически одновременно и притом по равномерной сетке. Если приближенно соблюдаются указанные условия, то работу каждой скважины можно рассматривать независимо от работы других.

Область дренирования каждой скважины для схемы, показанной на рис. VII.1, определяется площадью квадрата, сторона которого равна расстоянию между скважинами. Исследования показывают, что форма области дренирования не оказывает существенного влияния на условия дренирования [17]. Поэтому представляется вполне допустимым заменить квадратную область круговой с эквивалентной площадью. Для расчета истощения этой области можно использовать формулу (VII.23).

Допустим, найдено одним из известных способов [38] решение уравнения (VII.23)

$$p = \Phi(s_n). \quad (\text{VII.25})$$

При этом под величиной p подразумеваем среднее давление в рассматриваемой области дренирования, приближенно равное контурному p_k [65].

Перейдем от величины нефтенасыщенности к нефтеотдаче η по следующей очевидной формуле:

$$\eta = \frac{s_{n0}/\beta_{n0} - s_n/\beta_n}{s_{n0}/\beta_{n0}}, \quad (\text{VII.26})$$

где s_{n0} и β_{n0} — соответственно начальная нефтенасыщенность и объемный коэффициент. При отсутствии связанной воды $s_{n0} = 1$.

Заменяя в (VII.25) s_n через η , получим

$$p = \Phi_1(\eta). \quad (\text{VII.27})$$

Под газовым фактором Γ будем понимать отношение объемного расхода газа, приведенного к атмосферному давлению, к объемному расходу нефти.

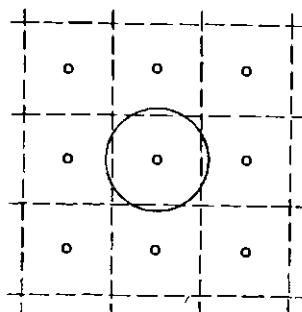


Рис. VII.1. Схема замены квадратной области дренирования скважины круговой

В условиях рассматриваемой задачи

$$\Gamma = \left(\frac{\rho_r \vec{w}_r}{\rho_{r0}} + \frac{s \vec{w}_n}{\beta_n} \right) / \frac{\vec{w}_n}{\beta_n}. \quad (\text{VII.28})$$

Первый член числителя представляет объемный расход свободного газа, второй — растворенного газа, приведенные к нормальным условиям; знаменатель — расход нефти.

Из (VII.28) следует

$$\Gamma = \frac{\rho_r}{\rho_{r0}} \cdot \frac{\vec{w}_r}{\vec{w}_n} \beta_n + s = \frac{\rho_r}{\rho_{r0}} \cdot \frac{\mu_n}{\mu_r} \cdot \frac{f_r}{f_n} + s. \quad (\text{VII.29})$$

Для определения газового фактора на контуре пласта необходимо подставить в формулу (VII.29) значения μ_n , μ_r , ρ_r , f_r и f_n на этом контуре. Отношение μ_r/μ_n изменяется сравнительно слабо с изменением давления; ρ_r/ρ_{r0} убывает с возрастанием давления; f_r/f_n , наоборот, возрастает.

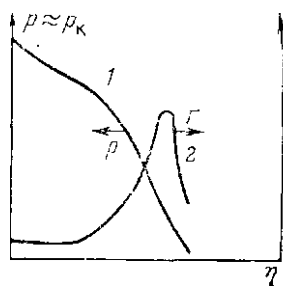


Рис. VII.2. Кривые зависимости p и Γ от нефтестадии

Расчеты показывают, что произведение $\rho_r \mu_n f_r / (\rho_{r0} \mu_r f_n)$ имеет максимум при некотором значении давления. На рис. VII.2 приведена кривая 2 газового фактора, построенная по формуле (VII.29) с учетом зависимости (VII.25).

Наличие одной зависимости (VII.27), очевидно, недостаточно для получения динамики добычи нефти и газа. Для замыкания системы необходимо задаться видом уравнения, устанавливающим зависимость между дебитом и перепадом давления (депрессией). Под перепадом давления обычно понимается разность между давлениями на контуре питания и в скважине.

В ряду приближенных зависимостей для определения дебита, на наш взгляд, наиболее простым и приемлемым для практических целей является уравнение вида [38]

$$q_n = \frac{2\pi k h}{\mu_n} f_n \frac{p_K - p_c}{\ln \frac{R_K}{R_c}} \cdot \frac{1}{\beta_n}, \quad (\text{VII.30})$$

где q_n — дебит в объемных единицах, приведенный к нормальным условиям.

Согласно этой зависимости, снижение дебита обусловлено уменьшением множителей f_n и $p_K - p_c$, первого — за счет возрастания газосодержания $1 - s_n$, и второго — за счет уменьшения p_K при постоянном забойном давлении. Ясно, что за счет соответствующего снижения p_c можно несколько ослабить темп

уменьшения дебита скважин, а в отдельных случаях, на каком-то этапе разработки, приостановить¹.

Далее имеем

$$q_n = \frac{dQ_n}{dt} = \frac{A(s_n)}{\mu_n \beta_n} (p_k - p_c), \quad (\text{VII.31})$$

где Q_n — объем накопленной добычи нефти в нормальных условиях, а

$$A(s_n) = \frac{2\pi k h}{l_n \frac{R_k}{R_c}} f_n. \quad (\text{VII.32})$$

Вопрос о выборе величин μ_n и β_n требует специального исследования. Некоторые исследователи считают возможным определять эти параметры по среднему значению пластового (переменного) давления \bar{p} ; при этом \bar{p} можно считать средним арифметическим или средним логарифмическим. Возможно, что более правильным является нуть, избранный Маскетом [38].

Будем считать в соответствии с [38] весь множитель, стоящий перед величиной депрессии в уравнении (VII.31), функцией насыщенности s_n :

$$B(s_n) = \frac{A(s_n)}{\mu_n \beta_n}. \quad (\text{VII.33})$$

А поскольку s_n в свою очередь, согласно (VII.25), является функцией пластового (контурного) давления $p = p_k$, то дебит скважины имеет сложную зависимость от этого давления:

$$q_n = \frac{dQ_n}{dt} = C(p_k)(p_k - p_c), \quad (\text{VII.34})$$

где $C(p_k)$ — функция $B(s_n)$, если аргумент ее заменять на p_k из зависимости (VII.25).

Таким образом, для решения поставленной задачи имеем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} p_k \Phi_1(\eta) \\ \eta = \frac{Q_n}{V/\beta_n o} \\ q_n = \frac{dQ_n}{dt} = C(p_k)(p_k - p_c) \end{aligned} \right\}, \quad (\text{VII.35})$$

где V — первоначальный запас нефти в пласте.

Пусть задано давление на забое добывающей скважины $p_c = \text{const}$. Из системы (VII.35) легко получить

$$t = \frac{\beta_n o}{V} \int_{p_{k o}}^{p_k} \frac{\psi'_0(p_k) dp_k}{C(p_k)(p_k - p_c)}, \quad (\text{VII.36})$$

¹ Для простоты пренебрегаем изменением β_n и μ_n с уменьшением давления. Учет этих факторов не оказывает влияния на ход приведенных здесь рассуждений.

где $\Psi'_0(p_k)$ — функция, обратная $\Phi_1(\eta)$, а p_{k0} — пластовое давление в начальный момент времени.

Зная вид кривой $p_k = \Phi_1(\eta)$ или $\eta = \Psi'_0(p_k)$ (см. кривую 1 на рис. VII.2), не представит труда вычислить величину интеграла в (VII.36) и установить тем самым динамику давления $p_k(t)$. Далее, обращаясь к третьему уравнению (VII.36) системы, определим динамику $q_n(t)$ и $Q_n(t)$, а затем из второго уравнения найдем $\eta(t)$. Как видим, метод дает возможность определить динамику показателей разработки при любом виде изменения забойного давления.

Все эти вычисления, естественно, следует проводить приближенным (графическим или численным) способом.

При заданном дебите скважины процедура вычисления проще. Из второго и третьего уравнений системы (VII.35) имеем

$$\eta = \frac{p_{k0}}{V} \int_0^t q_n d\tau.$$

Далее по известному значению $\eta(t)$ находим из первого уравнения системы (VII.35) динамику $p_k(t)$.

Более реалистичным, но-видимому, является случай, когда в течение некоторого времени t^* дебит скважины постоянен. Далее при $t > t^*$ поддерживается на забое постоянное давление p_c^* , величину которого определим по формуле

$$p_c^* = p_k^* - \frac{q}{C(p_k^*)} = \text{const}, \quad (\text{VII.37})$$

где p_k^* — предельно минимальное допустимое давление; p_k^* — пластовое давление, соответствующее моменту t^* .

В этом более сложном случае задача решается следующим образом. Из уравнения (VII.37) определяем пластовое давление p_k^* . По кривой $p_k = \Phi_1(\eta)$ (см. рис. VII.2, кривая 1) находим отвечающее p_k^* значение коэффициента нефтеотдачи $\eta^* = \Psi_0(p_k^*)$.

Далее по формуле

$$\eta^* = \frac{p_{k0}}{V} \int_0^{t^*} q_n d\tau = \frac{p_{k0}}{V} q_n t^*$$

определяем искомое значение t^* .

Начиная с этого момента, расчет ведем по схеме заданного забойного давления p_c^* , описанной в первом примере.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ О ДВИЖЕНИИ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СМЕСЕЙ С УЧЕТОМ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ

Теория движения газированной жидкости, некоторые положения которой были изложены выше, оказалась удовлетворительной при рассмотрении традиционных вопросов разработки месторождений при режимах растворенного газа и смешанном, соответствующем частичному замещению объема добытой нефти водой.

Однако технология добычи нефти ставит перед наукой ряд более сложных задач, решение которых не представляется возможным на базе теории фильтрации газированной нефти. Перечислим некоторые из этих задач:

- разработка газоконденсатных месторождений;
- вытеснение растворителем нефти из обводненного пласта;
- фильтрация нафенистой нефти, сопровождающаяся выделением из нефти твердой фазы (нафина);
- вытеснение нефти газом высокого давления.

В связи с указанными обстоятельствами возникла необходимость создания более совершенной теории фильтрации многофазных жидкостей, учитывающей массообмен между фазами, существенно проявляющий себя при явлениях, характерных в указанных выше технологических процессах (а также других, не перечисленных здесь).

Такая теория была создана трудами советских и зарубежных исследователей [75]. В настоящем разделе приводятся некоторые основные положения этой теории.

За подробностями мы отсылаем читателя к ряду монографий, в которых дано более или менее систематическое изложение основ этой теории [75].

Для облегчения понимания основного текста этой главы приведем некоторые необходимые сведения из общей термодинамики и термодинамики многокомпонентных систем (в дополнение к тем сведениям, которые были приведены в главе II).

Фазой пазывается макроскопическая физически однородная часть вещества, отделенная от остальных частей системы границами раздела. Простейший пример: вода и смесь воздуха с водяными парами. Система в данном случае является двухфазной, так как состоит из жидкости (воды) и газообразной смеси (воздуха и пара воды). Если бы не было паров воды, то система также была бы двухфазной (вода и воздух без водяных паров).

Ясно, что при добавлении к воде легкорастворимого в ней вещества, например, соли, система также осталась бы двухфазной.

Рассмотрим термодинамическую систему, состоящую из нескольких фаз. В общем случае каждая фаза состоит из какого-то количества химически однородных веществ, которые могут

где l_1, l_2, \dots, l_k — массовые доли соответственно первого, второго и k -го компонентов, характеризующие состав фазы.

Сумма долей $\sum_{i=1}^k l_i = 1$, поэтому состав фазы определяется не k , а $(k-1)$ — независимыми аргументами. Так как фаз n , то общее число независимых аргументов во всех фазах будет $n(k-1)$. К этой сумме необходимо добавить еще два независимых аргумента — давление и температуру. Таким образом, независимых аргументов должно быть $n(k-1) + 2$.

Но общее число уравнений, как следует из (VII.41), равно произведению числа строк на число столбцов т. е. nk . Очевидно, число уравнений не должно превышать числа неизвестных, т. е. $k(n-1) \leq n(k-1) + 2$. Отсюда следует, что

$$n \leq k + 2. \quad (\text{VII.43})$$

Это неравенство установлено Гиббсом и называется правилом Гиббса.

Число независимых параметров (число степеней свободы или вариантиность термодинамической системы) равно разности между правой и левой частями предыдущего неравенства:

$$f = k + 2 - n \geq 0. \quad (\text{VII.44})$$

Состояние каждой фазы характеризуется температурой, давлением и $(k-1)$ — концентрациями компонентов, т. е.

$$1(T) + 1(p) + k - 1 = k + 1. \quad (\text{VII.45})$$

Геометрически физическое состояние можно представить «точкой» в пространстве $k+1$ измерений (изображающее пространство). Из формулы (VII.44) следует, что совокупность точек этого пространства, соответствующих равновесию n фаз, образует подпространство.

Рассмотрим простейшие примеры.

Пусть число компонентов $k=1$, система трехфазная, $n=3$, $f=2+1-3=0$.

Подпространство состояний равновесия превращается в точку (нулевая степень свободы). Примером служит тройная точка, в которой находятся в равновесии твердая, жидкая и газообразная фазы (рис. VII.3). Такие системы называются инвариантными или инвариантными.

При $k=1$ и двухфазной системе $n=2$ $f=1+2-2=1$.

Подпространство представляется линией. Можно изменять один параметр (одну степень свободы). Примером служит давление пара.

Для $k=2$, $n=2$ (двухфазная двухкомпонентная система) $f=2+2-2=2$. Можно варьировать два параметра: давление пара жидкости, состоящей из двух компонентов.

Области изменения состава углеводородных систем обычно изображаются графически. Эти системы являются многокомпо-

нентными, и изображение их сопряжено с очень большими трудностями: графики при этом получаются неудобными и ненаглядными.

Так, для систем с четырьмя компонентами необходимо пользоваться трехмерным пространством. Поэтому в большинстве случаев приходится прибегать к некоторым упрощениям и ограничиваться рассмотрением бинарных и тройных систем. Таким образом, сложная углеводородная система заменяется системой с $k=2$ или $k=3$.

Рассмотрим вначале однокомпонентную систему (газ). На рис. VII.4 приведены изотермы такого газа. Изотерма, пе-

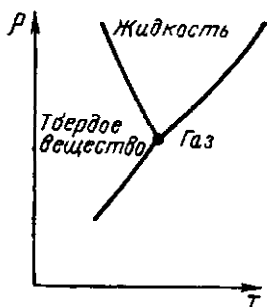


Рис. VII.3. Тройная точка

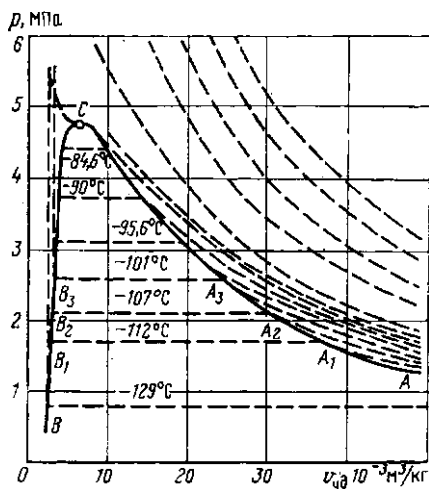


Рис. VII.4. Фазовая диаграмма для метана

ресекающая кривую ACB , состоит из трех участков. Ветвь ее правее точки A соответствует газообразной фазе. В точке A (точка росы или конденсации) при сжатии происходит переход в двухфазное состояние, причем изотерма параллельна оси абсцисс — процесс сжатия не приводит к росту давления. В точке B (точка парообразования или кипения) газовая фаза исчезает, и в дальнейшем, левее этой точки, вещество находится в жидком состоянии. Кривая ACB ограничивает область двухфазного состояния. Критическая точка C разбивает всю кривую ACB на две ветви, соответствующие точкам росы $A_1, A_2, A_3 \dots$ и парообразования $B_1, B_2, B_3 \dots$. Отметим, что критическая точка C является наивысшей на кривой ACB .

Критическая точка C характеризуется рядом особых свойств. На некоторых из них остановимся.

В этой точке исчезают различия между жидкостью и газом. Так как с приближением по кривой $T = \text{const}$ к этой точке величина $(\partial p / \partial V)_T$ стремится к нулю, то следствием этого дол-

жно быть неограниченное возрастание сжимаемости вещества в состоянии, соответствующем ей.

С приближением к этому состоянию при $p = \text{const}$ должна стремиться к бесконечности величина $(\partial V / \partial T)_p$, что приводит к неограниченному возрастанию и коэффициента термического расширения. Стремление величины $(\partial V / \partial T)_p$ к бесконечности в точке C приводит также к неограниченному возрастанию теплоемкости, что следует из формулы

$$c_p = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_p + p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p, \quad (\text{VII.46})$$

где E — энтальпия вещества.

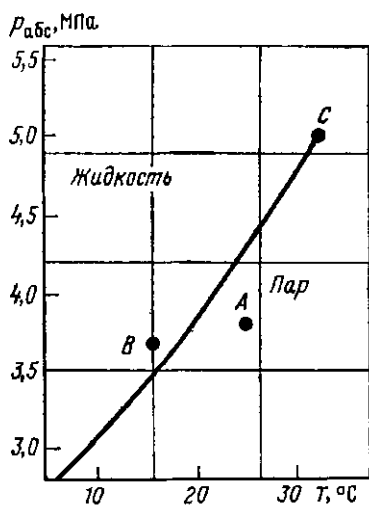


Рис. VII.5. Диаграмма давление—температура

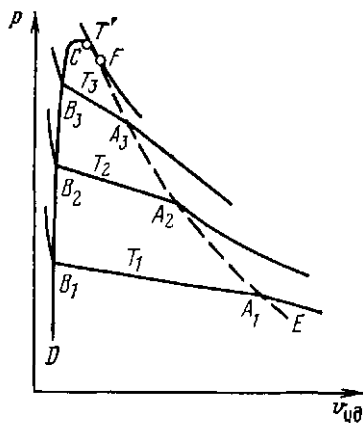


Рис. VII.8. Диаграмма фазового состояния двухкомпонентной системы

A_1, A_2, A_3 — точки росы; B_1, B_2, B_3 — точки парообразования; C — критическая точка; T^* — наивысшая температура, при которой жидкость и пар находятся в равновесии

На основе серии изотер построим кривую испарения—конденсации, разграничивающую плоскость p — T на две области: нижнюю, в которой компонент находится в газообразном (парообразном) состоянии, верхнюю, которая соответствует жидкому его состоянию (рис. VII.5). Точки на этой кривой соответствуют состояниям, при которых обе фазы присутствуют одновременно, находясь в равновесии. Кривая не уходит в бесконечность, а заканчивается в критической точке C .

Рассмотрим процесс от точки A (пар) до точки B (жидкость) в обход кривой испарения—конденсации (см. рис. VII.5). При любом процессе, удовлетворяющем этому условию, систему можно перевести из парообразного состояния в жидкое, минуя область двухфазного состояния.

Указанное имеет место и при обратном процессе (от B до A).

На рис. VII.6 показан примерный вид изотерм для бинарной системы. Линии T_1 , T_2 , T_3 , ... представляют изотермы такого вещества. В двухфазной области они характеризуются ростом давления с переходом от точек росы (линия CE) к точкам нарообразования (линия CD). При этом давление в критической точке C не является наивысшим на кривой, ограничивающей двухфазную область.

Указанные особенности изотерм бинарных смесей обуславливают необычное состояние этих систем в критической точке (рис. VII.7).

От точки B вправо от низких температур к более высоким происходит постепенный рост газовой фазы от нуля (точка B), который, однако, не может происходить на всей соединительной изобаре BA . Действительно, если бы газовая фаза непрерывно возрастала до точки A , то ей соответствовал бы максимальный объем свободного газа. А между тем эта точка, поскольку она лежит выше критической C , является точкой начала парообразования, и ей должно соответствовать начало образования газовой фазы. Противоречие устраняется, если принять, что возрастание газовой фазы с ростом температуры (при $p = \text{const}$) происходит до некоторой точки G , а в дальнейшем имеет место постепенное убывание ее вплоть до нуля в крайней точке A соединительного отрезка — изобары. Процесс от точки G до конца A отрезка называется ретроградным, и в зависимости от направления процесса он должен называться процессом ретроградной конденсации или ретроградного испарения. Это название обусловлено тем, что такой процесс обратен (ретрограден) обычному «нормально» протекающему явлению роста газовой фазы с возрастанием температуры.

Ретроградный характер процесса также возможен при температуре выше критической. Пусть происходит изотермическое расширение при $T = T_k > T_c$ от точки M до N , находящихся на линии точек конденсации (см. рис. VII.7). По мере удаления от точки M происходит рост жидкой фазы до максимума в некоторой точке, а затем убывание ее до нуля в точке N . Отметим, что процессы при $p = \text{const}$ и $T = \text{const}$ не являются обязательными условиями необычного фазового превращения. Это явление можно наблюдать в соответствующих областях $p - v_{\text{уд}}$ при осуществлении процессов и по другим кривым.

По изотермам (см. рис. VII.6) построим соответствующую диаграмму фазового состояния (рис. VII.8). В отличие от диаграммы для однокомпонентной системы (см. рис. VII.5) эта диаграмма имеет вид петли, ширина которой обусловлена разностью давлений нарообразования и конденсации, изменяющейся с температурой.

Имея серию изотерм для различных соотношений двух компонентов, получим ряд диаграмм, которые приведены на

рис. VII.8. На этом же рисунке даны крайние кривые, соответствующие наиболее и наименее летучим («чистым») компонентам. Пунктирной кривой показана огибающая критических точек.

Рассмотрим многокомпонентную систему. Фазовое состояние такой системы схематично представлено на рис. VII.9. На этом рисунке каждая пунктирная линия соответствует постоянной доле объема жидкости в двухфазной области *DAMCNE*. Штриховкой обозначены подобласти, в которых конденсация или парообразование происходит в направлении, обратном обычному

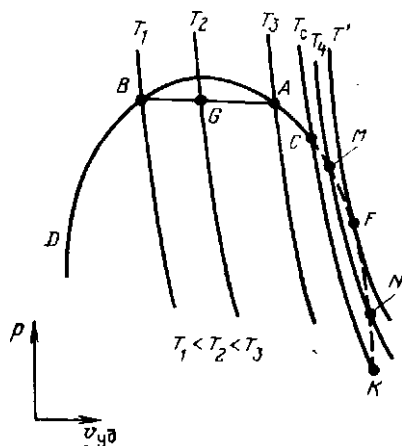


Рис. VII.7. Диаграмма бинарной системы в критической области.
SMFNK — линия точек конденсации (росы);
DBAC — линия точек парообразования (кипения); C — критическая точка

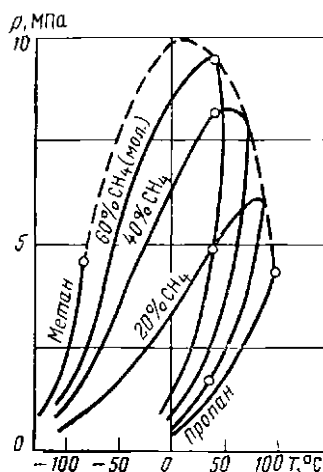


Рис. VII.8. Фазовая характеристика системы метан-пропан

фазовым изменениям. Критическая точка C определяется как точка, в которой свойства паровой и жидкой фаз тождественны.

На кривой выделяются две характерные точки M и N, соответствующие максимальным давлению p_M и температуре T_N , при которых могут существовать две фазы.

При рассуждениях, аналогичных приведенному выше рассмотрению бинарных систем, можно получить изотермы конденсации $V_K = f(p)$.

Пусть начальное пластовое давление $p_{пл}$ соответствует точке F на кривой точек росы при $T < T_N$.

Разработка происходит при постоянной температуре, что практически соответствует реальному процессу. Легко показать, что с уменьшением давления величина V_K вначале будет возрастать и достигнет максимума на границе G ретроградной подобласти, и далее произойдет постепенное уменьшение жидкой фазы до полного исчезновения ее в точке H.

Приведенная выше фазовая диаграмма многокомпонентных систем дает лишь упрощенное описание состояния, так как она

не содержит информации о соотношении входящих в них компонентов и об изменении их при эксплуатации.

Такие диаграммы, в частности, можно построить на основе замеров продукции скважин [68].

Более детальное описание фазового поведения многокомпонентных углеводородных смесей можно получить следующими методами.

Один из методов предполагает применение модифицированного уравнения состояния Бенедикта, Вебба и Рубина (БВР)

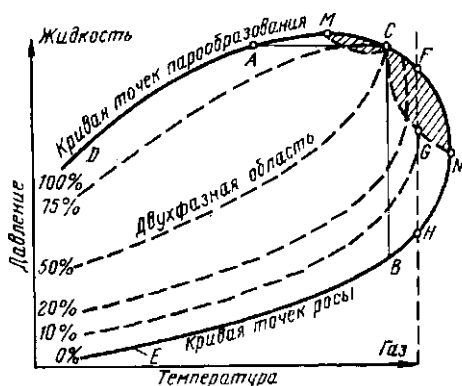


Рис. VII.9. Фазовая диаграмма многокомпонентной смеси

(или ему аналогичных), содержащего ряд параметров, которые определяются из экспериментов. Бенедикт, Вебб и Рубин рассчитали значения этих параметров для двенадцати углеводородов (метан, этан, этилен, пропан, пропилен, изобутилен, изобутан, н-бутан, изопентан, н-пентан, н-гексан и н-гептан).

В принципе применение метода БВР позволяет составить уравнение состояния для любой смеси из этих углеводородов.

Однако метод пригоден в основном для смесей легких углеводородов.

Следующее направление основано на определении констант фазового равновесия по экспериментальным данным. Константой фазового равновесия называется отношение молярной концентрации данного компонента в газовой фазе к его молярной концентрации в жидкой фазе. В соответствии с методом устанавливается зависимость между этой константой и давлением схождения, т. е. тем значением его, при котором константы равновесия всех компонентов смеси равны единице.

В последнее время появились работы, частично сочетающие оба метода.

Следует также отметить исследования, сущность которых заключается в том, что многокомпонентную смесь разбивают на ряд сложных компонентов и рассматривают ее как бинарную или тройную смесь. Такая аппроксимация позволяет учесть общие закономерности, присущие углеводородным смесям, и взаимное влияние отдельных групп компонентов.

Эти методы подробно описаны в ряде работ по термодинамике многокомпонентных систем [69].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амикс Д., Басс Д., Уайтинг Р. Физика нефтяного пласта. М., Гостехиздат, 1962.
2. Аскадский А. А. Деформация полимеров. М., Химия, 1973.
3. Бабалян Г. А., Леви Б. И., Сурков Ю. В. О вытеснении нефти водными растворами ПАВ из слоисто-неоднородных пластов.— Изв. вузов. Сер. Нефть и газ, 1974, № 8, с. 41—45.
4. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М., Недра, 1972.
5. Берчик Э. Дж. Свойства пластовых жидкостей. М., Гостехиздат, 1960.
6. Борисов Ю. П., Воинов В. В., Рябинина Э. К. Влияние неоднородности пластов на разработку нефтяных месторождений. М., Недра, 1970.
7. Бузинов С. Н., Умрихин И. Д. Гидродинамические методы исследования скважин и пластов. М., Недра, 1973.
8. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. М., Мир, 1971.
9. Влияние свойств горных пород на движение в них жидкостей/А. Баи, А. Ф. Богомоллова, В. А. Максимов и др. М., Гостехиздат, 1962.
10. Гиматулинов Ш. К. Физика нефтяного пласта. М., Недра, 1971.
11. Гриффитс Дж. Научные методы исследования осадочных пород. М., Мир, 1971.
12. Гудок Н. С. Изучение физических свойств пористых пород. М., Недра, 1970.
13. Гусейнов Г. П. Некоторые вопросы гидродинамики нефтяного пласта. Баку, Азгосиздат, 1961.
14. Добрынин В. М. Деформации и изменения физических свойств коллекторов нефти и газа. М., Недра, 1970.
15. Добрынин В. М., Серебряков В. А. Методы прогнозирования anomalously высоких пластовых давлений. М., Недра, 1979.
16. Евгеньев А. Е. Об относительных фазовых проницаемостях при фильтрации двухкомпонентных смесей.— Изв. вузов. Сер. Нефть и газ, 1965, № 1, с. 83—86.
17. Желтов Ю. П. Механика нефтеносного пласта. М., Недра, 1975.
18. Захарченко В. Н. Коллоидная химия. М., Высшая школа, 1974.
19. Иванов В. А., Храмова В. Г., Дзярова Д. О. Структура порового пространства коллекторов нефти и газа. М., Недра, 1974.
20. Карапетян М. Х. Химическая термодинамика. М., Химия, 1975.
21. Карслоу Х. и Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., Наука, 1964.
22. Козловцева З. И. К изучению удельной поверхности сцементированных горных пород.— Труды ВНИИГаза, 1964, вып. 20/28, с. 83—88.
23. Колоскова М. И. Сравнительные данные определения пористости различными методами.— Труды ВНИИГаза, 1964, вып. 20/28, с. 72—82.
24. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы. М., Мир, 1964.
25. Коновалов А. Н., Смирнова Э. В. О модели Баклея—Левверетта фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости.— ДАН СССР, 216, 1974, № 2, с. 282—284.
26. Коршак А. А., Тугунов П. И. Определение физических свойств газонасыщенных нефтей.— Нефтяное хозяйство, 1980, № 4, с. 49—51.
27. Котяхов Ф. И. Физика нефтяных и газовых коллекторов. М., Недра, 1977.
28. Ксенжек О. С. Капиллярное равновесие в пористых средах с пересекающимися пора́ми.— Журнал физической химии, т. 37, 1963, № 6, с. 1297—1303.

29. Курбанов А. К., Куранов И. Ф. Влияние смачиваемости на процесс вытеснения нефти водой.— НТС по добыче нефти (ВНИИ), № 24, 1964, с. 47—54.
30. Курбанов А. К., Куранов И. Ф. К вопросу о влиянии капиллярных сил на процесс вытеснения нефти водой.— НТС по добыче нефти (ВНИИ) № 25, 1969, с. 43—46.
31. Курбанов А. К. К вопросу о вытеснении нефти водными растворами ПАВ.— НТС по добыче нефти (ВНИИ), № 26, 1965, с. 70—73.
32. Курбанов А. К., Юсупова З. С. Распределения поверхностно-активного вещества при вытеснении нефти химически обработанной водой.— НТС по добыче нефти (ВНИИ), № 37, 1970, с. 19—23.
33. Кусаков М. М., Лубман Н. М., Кочешков А. А. Влияние давления на скорость капиллярного пропитывания пористой среды.— Труды Института нефти АН СССР, т. 11, Нефтепромысловое дело, 1958, с. 271—282.
34. Леворсен А. И. Геология нефти и газа, М., Мир, 1970.
35. Лойцянский Л. С. Механика жидкости и газа, М., Наука, 1973.
36. Лыков А. В. Теория теплопроводности, М., Высшая школа, 1967.
37. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде, М., Госгостехиздат, 1949.
38. Маскет М. Физические основы технологии добычи нефти, М., Госгостехиздат, 1953.
39. Майдебор В. Н. Разработка нефтяных месторождений с трещиноватыми коллекторами, М., Недра, 1979.
40. Методика проектирования разработки морских нефтяных месторождений/А. М. Пирвердян, П. И. Никитин, Л. Б. Листенгартен и др. М., Недра, 1975.
41. Механика насыщенных пористых сред/В. Н. Николаевский, К. С. Басниев, А. Т. Горбунов, Г. А. Зотов, М., Недра, 1970.
42. Мирзаджанзаде А. Х. Вопросы гидродинамики вязкопластичных и вязких жидкостей в нефтедобыче, Баку, Азнефтеиздат, 1959.
43. Миронов Т. П., Орлов В. С. Нефтеотдача неоднородных пластов при заводнении, М., Недра, 1977.
44. Намиот А. Б., Бондарев М. М. Растворимость газа в воде под давлением, М., Госгостехиздат, 1963.
45. Насруллаев П. А. Приток упругой жидкости к прямолинейной цепочке скважин с заданными забойными давлениями при наличии контура питания.— Труды АзНИИ по добыче нефти, вып. 23, 1972, с. 314—319.
46. Ноздрев В. Ф., Сенкевич А. А. Курс статической физики, М., Высшая школа, 1969.
47. Огibalов П. М., Мирзаджанзаде А. Х. Нестационарные движения вязкопластичных сред. Изд-во Московского университета, 1970.
48. Определение удельной поверхности порошкообразных тел по сопротивлению фильтрации разреженного воздуха/Б. В. Дерягин, Н. Н. Захаваева, М. В. Талаев, В. В. Филипповский. Изд. АН СССР, 1957.
49. Пилатовский В. П. Основы гидромеханики тонкого пласта, М., Недра, 1967.
50. Пирвердян А. М. К теории движения газированной жидкости в пористой среде.— Нефтяное хозяйство, 1950, № 7, с. 21—22.
51. Пирвердян А. М. Движение двухфазной несжимаемой смеси в пористой среде.— Прикладная математика и механика, т. 16, вып. 6, 1952, с. 711—714.
52. Пирвердян А. М. Нефтяная подземная гидравлика. Баку, Азнефтеиздат, 1956.
53. Пирвердян А. М. О фильтрации жидкости к горизонтальной скважине.— Труды АзНИИ по добыче нефти, вып. 3, 1956, с. 97—104.
54. Пирвердян А. М. О перетоках жидкости из одного горизонта в другой.— Изв. вузов. Сер. Нефть и газ, 1958, № 18, с. 59—61.
55. Пирвердян А. М., Никитин П. И., Гукасов Н. А. Опыт построения теории фильтрации жидкости в неоднородных пористых средах.— Изв. вузов. Сер. Нефть и газ, 1959, № 12, с. 63—68.

56. Пирвердян А. М. Расчет суммарной добычи нефти и попутной воды в системе скважин.— Труды АзНИИ по добыче нефти, вып. 23, 1972, с. 486—493.
57. Пирвердян А. М. О притоке жидкости к несовершенной скважине.— Нефтяное хозяйство, 1974, № 10, с. 49—51.
58. Пирвердян А. М. О методике исследования скважин и пластов.— Азерб. нефтяное хозяйство, 1977, № 9, с. 68—70.
59. Пирвердян А. М. Определение фазовых проницаемостей при совместной фильтрации несмешивающихся жидкостей.— Нефтяное хозяйство, 1977, № 12, с. 44—46.
60. Пирсон Д. С. Учение о нефтяном пласте. М., Гостоптехиздат, 1961.
61. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., Недра, 1977.
62. Применение ПАВ для увеличения нефтеотдачи пластов/Г. А. Бабалян, А. Б. Тумасян, Б. И. Леви, Э. М. Халимов.— Нефтяное хозяйство, 1976, № 7, с. 7—16.
63. Применение полимеров в добыче нефти/Г. И. Григоращенко, Ю. В. Зайцев, В. В. Кукин и др. М., Недра, 1978.
64. Разработка и эксплуатация нефтегазоконденсатных месторождений/Ю. В. Желтов, В. Н. Мартос, А. Х. Мирзаджанзаде, Г. С. Степанова. М., Недра, 1979.
65. Розенберг М. Д., Кундин С. А. Многофазная многокомпонентная фильтрация при добыче нефти и газа. М., Недра, 1976.
66. Романовский С. И. Седиментационные основы литологии. Л., Недра, 1977.
67. Ромм Е. С. Фильтрационные свойства трещиноватых пород. М., Недра, 1966.
68. Справочник по эксплуатации нефтяных месторождений, т. 2, М., Недра, 1965.
69. Степанова Г. С. Фазовые превращения углеводородных смесей газоконденсатных месторождений. М., Недра, 1974.
70. Степанова Г. С., Воронкова Л. Н. Влияние различных факторов на растворимость газа в нефти.— В кн.: Сборник научных трудов ВНИИнефтегаза, 1979, вып. 51, с. 169—177.
71. Стелянин Ю. И., Чарный И. А. Движение трехкомпонентной жидкости в пористой среде.— НТС по добыче нефти (ВНИИ), № 9, 1960, с. 17—22.
72. Султанов Б. И. О фильтрации вязкопластичных жидкостей в пористой среде.— Изв. АН АзССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1960, № 5, с. 125—130.
73. Тульбович Б. И. Методы изучения пород — коллекторов нефти и газа. М., Недра, 1979.
74. Уилкинсон У. Л. Неньютоновские жидкости. М., Мир, 1964.
75. Фильтрация газированной жидкости и других многокомпонентных смесей в нефтяных пластах/М. Д. Розенберг, С. А. Кундин, А. К. Курбанов и др. М., Недра, 1969.
76. Царевич К. А. Гидромеханические приемы приближенного расчета дебитов нефти и газа из скважин при сплошной и сгущающейся системах разработки для нефтяных месторождений с газовым режимом.— Труды ВНИИ, вып. 6, 1954, с. 153—189.
77. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.
78. Швидлер М. И., Леви Б. И. Одномерная фильтрация несмешивающихся жидкостей. М., Недра, 1970.
79. Шейдеггер А. Э. Физика течения жидкостей через пористые среды. М., Гостоптехиздат, 1960.
80. Щелкачев В. Н. и Лалук Б. Б. Подземная гидравлика. М., Гостоптехиздат, 1949.
81. Щелкачев В. Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. М., Гостоптехиздат, 1959.
82. Эфрос Д. А. Исследование фильтрации неоднородных систем. М., Гостоптехиздат, 1963.
83. Thomeer I. Introduction of a pore geometrical factor defined by the capillary pressure curve.— Petrol. Technol., 1960, 12, No. 3, pp. 73—77.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I. Физические свойства горных пород	3
Породы-коллекторы	3
Гранулометрический состав пород	3
Пористость горных пород	8
Проницаемость горных пород	10
Определение удельной поверхности горных пород	11
Трещиноватые горные породы	11
Межфазное натяжение и капиллярное давление	14
Определение распределения пор по размерам и капиллярного давления	17
Глава II. Физические свойства газа, нефти и воды	20
Плотность газов	20
Вязкость газов	21
Растворимость газов в нефти	24
Давление насыщения нефти газом	27
Объемный коэффициент пластовой нефти	28
Вязкость пластовой нефти	29
Динамические (реологические) характеристики пластовых жидкостей	31
Фильтрация вязкопластичной жидкости	44
Фильтрация жидкостей, описываемая степенным законом	47
Фильтрация газа	51
Пластовые воды	53
Глава III. Фильтрация однородной несжимаемой жидкости в пласте	55
Фильтрация жидкости в анизотропной пористой среде	59
Простейшие решения, получаемые непосредственным интегрированием уравнения (III.14)	64
Фильтрационные потоки в пласте со многими скважинами	69
Фильтрация жидкости в пласте ограниченных размеров	75
Бесконечная цепочка равноудаленных скважин в бесконечном пласте	83
Цепочка равноудаленных и равнодебитных скважин в бесконечном пласте	85
Пространственные течения	89
Глава IV. Фильтрация однородной слабосжимаемой жидкости в пласте	96
Основные понятия об упругом режиме фильтрации	96
Дифференциальные уравнения	105
Простейшие решения, соответствующие притоку жидкости к прямолинейной галерее в бесконечном полосообразном пласте	108
Простейшее решение, соответствующее притоку жидкости к точечному стоку на пласте бесконечной протяженности	112
Решение, соответствующее притоку жидкости к прямолинейной галерее в полосообразном пласте ограниченной протяженности	114
Принцип суперпозиции. Теорема Дюгамеля	118
Гидродинамические методы исследования скважин и пластов	122
Глава V. Фильтрация смеси жидкостей в пористой среде	129
Фазовые и относительные проницаемости	129
Анализ теоретических моделей движения смеси жидкостей в пористой среде	130
Дифференциальные уравнения фильтрации смеси жидкостей в пористой среде	137
Интегрирование дифференциального уравнения фильтрации смеси несжимаемых жидкостей	141
Анализ системы дифференциальных уравнений фильтрации смеси жидкостей с учетом капиллярного давления	148
Приближенное моделирование	150
Методы определения фазовых проницаемостей	154
Вытеснение нефти из неоднородных пластов	157
Фильтрация трехфазной смеси	160
Динамика вытеснения нефти водой (одномерный, линейный случай)	161
Глава VI. Вытеснение нефти из пористой среды водными растворами поверхностно-активных веществ (ПАВ) и полимеров	164
Адсорбция	164
Математические модели	168
Глава VII. Фильтрация газированной нефти	172
Дифференциальные уравнения режима растворенного газа	172
Приближенный метод решения задачи истощения залежи при режиме растворенного газа	175
Основные понятия о движении многокомпонентных смесей с учетом фазовых превращений	181
Список литературы	189