

Л.Прандтль



ГИДРОАЭРОМЕХАНИКА



Л. ПРАНДТЛЬ

ГИДРОАЭРОМЕХАНИКА

Перевод со второго немецкого издания
Г. А. Вольперта

Научно-издательский центр
«Регулярная и хаотическая динамика»

2000

УДК 532

Прандтль Л.

Гидроаэромеханика. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000, 576 стр.

Фундаментальный труд крупнейшего немецкого гидромеханика Людвига Прандтля. С его именем связаны крупнейшие достижения XX века в различных областях механики жидкостей, аэродинамики и механики упругого тела. В книге ясно и строго изложены те вопросы гидромеханики, которые необходимы для изучения идей теории воздухоплавания и гидравлики.

Книга предназначена для широкого круга читателей — от студентов-механиков и аспирантов до инженеров и специалистов.

Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
по проекту № 00-01-14002

ISBN 5-93972-015-2

© НИЦ «Регулярная
и хаотическая динамика», 2000

Содержание

Предисловие переводчика	7
Из предисловия автора к первому изданию	8
Из предисловия автора ко второму изданию	9
ГЛАВА 1. Свойства жидкостей и газов. Статика	10
§ 1. Свойства жидкостей.	10
§ 2. Теория напряженного состояния.	11
§ 3. Давление жидкости.	15
§ 4. Распределение давления в невесомой жидкости.	16
§ 5. Свойства газов.	18
§ 6. Равновесие весомой жидкости.	22
§ 7. Равновесие весомого газа.	26
§ 8. Измерение давления. Жидкостные манометры.	30
§ 9. Давление, меньшее атмосферного. Барометр.	34
§ 10. Равновесие жидкости в других силовых полях.	37
§ 11. Поверхностное натяжение (капиллярность).	42
ГЛАВА 2. Кинематика жидкостей. Динамика жидкостей, ли-	
шенных трения	48
§ 1. Предварительные замечания.	48
§ 2. Методы кинематического исследования течения жидкости.	49
§ 3. Неразрывность.	53
§ 4. Силы в движущейся жидкости. Уравнение Бернулли.	56
§ 5. Следствия из уравнения Бернулли.	62
§ 6. Дальнейшие выводы о давлении жидкости.	68
§ 7. Слияние двух потоков. Поверхности раздела. возникнове-	
ние вихрей.	74
§ 8. Поверхности раздела (продолжение). Измерение давления.	78
§ 9. Более точное исследование движения однородной жидкос-	
ти без трения. Потенциальное течение.	82
§ 10. Потенциальное течение (продолжение).	91

§ 11. Потенциальное течение с циркуляцией. Подъемная сила крыла. Эффект Магнуса.	102
§ 12. Движение жидкости, лишенной трения, с вращением частиц. Вихревые нити.	107
§ 13. Теорема о количестве движения и теорема о моменте количества движения для установившихся движений. . . .	113
§ 14. Теорема о количестве движения для потоков с пульсациями скорости.	125
§ 15. Волны на свободной поверхности жидкости.	128
§ 16. Движение воды в открытом русле.	138
ГЛАВА 3. Движение вязких жидкостей	142
§ 1. Вязкость (внутреннее трение).	142
§ 2. Механическое подобие. Число Рейнольдса.	148
§ 3. Движение тел в вязких жидкостях. Формула Стокса. Пограничный слой.	151
§ 4. Турбулентность.	156
§ 5. Особенности турбулентного движения.	167
§ 6. Образование вихрей.	186
§ 7. Способы предотвращения отрыва пограничного слоя. . . .	194
§ 8. Вторичные потоки.	198
§ 9. Течение с преобладающей ролью вязкости.	203
§ 10. Гидродинамическая теория смазки.	207
§ 11. Движение жидкостей в прямых трубах и каналах с постоянным поперечным сечением.	219
§ 12. Движение жидкостей в каналах с переменным поперечным сечением.	231
§ 13. Сопротивление жидкостей движущимся в них телам. . .	239
§ 14. Гидродинамическая теория сопротивления жидкости. . .	246
§ 15. Результаты экспериментального исследования сопротивления жидкостей	257
§ 16. Крыло.	267
§ 17. Теория крыла	282
§ 18. Практические приложения теории крыла. Сравнение с экспериментом.	294
§ 19. Пропеллер.	301
§ 20. Дальнейшие сведения о гребном винте. Ветряк. Другие виды пропеллеров.	310
§ 21. Турбины, насосы и воздуходувки.	324

§ 22. Постановка экспериментальных исследований по гидродинамике и аэродинамике.	334
ГЛАВА 4. Газовая динамика	348
§ 1. Предварительные замечания.	348
§ 2. Распространение возмущений давления. Скорость звука.	349
§ 3. Одномерный установившийся поток газа со значительными изменениями объема.	355
§ 4. Теорема об энергии для сжимаемых потоков при наличии сопротивлений.	363
§ 5. Теория прямого скачка уплотнения.	366
§ 6. Движение газа при наличии сопротивлений.	373
§ 7. Двухмерные и трехмерные сверхзвуковые потоки.	377
§ 8. Приближенный расчет двухмерных сверхзвуковых потоков при помощи диаграммы характеристик.	382
§ 9. Дозвуковые потоки	386
§ 10. Движение тел в газах при сверхзвуковых скоростях. Сопротивление снарядов.	396
§ 11. Двухмерные сверхзвуковые потоки около заостренных тел и крыльев.	399
§ 12. Техника аэродинамического эксперимента при высоких скоростях	405
ГЛАВА 5. Специальные задачи	412
§ 1. Предварительные замечания.	412
А. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ АГРЕГАТНЫХ СОСТОЯНИЙ	412
§ 2. Кавитация.	412
§ 3. Гидравлический удар. Глиссирование.	420
§ 4. Смеси из воды и воздуха.	427
§ 5. Твердые тела в движущемся воздухе.	437
§ 6. Твердые тела в текущей воде.	441
§ 7. Поведение тел в ускоренных потоках. Силы гидродинамического дальнего действия.	451
В. ВРАЩАЮЩИЕСЯ ТЕЛА И ВРАЩАЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА	457
§ 8. Уравнение Бернулли во вращающейся системе отсчета.	457
§ 9. Влияние вращения Земли на движения в атмосфере и в морях.	463
§ 10. Влияние трения.	471

§ 11. Движение жидкости около вращающегося диска. Формулы для сопротивления.	480
С. ТЕЧЕНИЯ В РАССЛОЕННЫХ ВЕСОМЫХ ЖИДКОСТЯХ	486
§ 12. Две жидкости различной плотности.	486
§ 13. Непрерывное изменение плотности.	492
§ 14. Совместное действие расслоения среды и вращения Земли.	508
§ 15. Совместное действие вращения Земли и горизонтальных градиентов плотности и скорости. Общая циркуляция атмосферы.	514
Д. ТЕПЛООБМЕН В ТЕКУЩИХ ЖИДКОСТЯХ. ПОТОКИ, ВЫЗВАННЫЕ НАГРЕВАНИЕМ СРЕДЫ	524
§ 16. Предварительные замечания.	524
§ 17. Общие сведения о теплообмене. Вынужденные потоки. . .	525
§ 18. Естественные конвективные потоки.	545
Предметный указатель	565

Предисловие переводчика

Предлагаемая вниманию читателя книга принадлежит перу одного из виднейших зарубежных гидромехаников и представляет собою широкий обзор современного состояния гидроаэромеханики и ее приложений в самых различных областях техники.

Составляя книгу, автор имел в виду, как он указывает в своем предисловии, дать своеобразный «путеводитель» по гидроаэромеханике, позволяющий читателю наиболее быстрым и легким путем подготовиться к детальному изучению отдельных областей этой науки. Для достижения этой цели автор использует результаты многочисленных специальных исследований, однако при этом обходит молчанием многочисленные и важные работы советских ученых в области гидроаэромеханики и не излагает работ даже основоположников современной аэродинамики — великих русских ученых Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина (только в двух местах он вскользь упоминает о Н. Е. Жуковском). С целью хотя бы частичного исправления такого положения мы дополнили в ряде мест библиографические ссылки автора указаниями на наиболее важные работы советских ученых.

Из предисловия автора к первому изданию

При составлении настоящей книги я включил в нее ряд вопросов, обычно оставляемых вне поля зрения при традиционном изложении гидроаэромеханики. Называя книгу «Führer durch die Strömungslehre» («Путеводитель по гидроаэромеханике»), я имел в виду подчеркнуть этим свое желание провести читателя по наиболее легкому и быстрому пути через различные области гидроаэромеханики.

Для лучшего достижения этой цели текст книги набран двумя шрифтами — крупным и мелким. При первом чтении можно ограничиться изучением только текста, набранного крупным шрифтом. Текст, набранный мелким шрифтом, и указания на литературу предназначены для читателя, уже овладевшего основами предмета. Однако для понимания более трудных глав, IV и V, необходимо усвоить также те части предыдущих глав, которые набраны мелким шрифтом. По поводу многочисленных библиографических ссылок я хочу особенно подчеркнуть, что, давая указания на литературу, я не стремился к исчерпывающей полноте; кроме того, в этих библиографических ссылках историческая точка зрения должна была отойти на задний план (за исключением случаев, относящихся к фундаментальным результатам). Отсылая читателя к специальной литературе, я стремился указывать главным образом те работы, которые наиболее пригодны для дальнейшего изучения затронутого вопроса.

В главе V изложены различные специальные вопросы: кавитация, гидравлический удар, движение смесей из воды и воздуха, пневматический транспорт, движение наносов, силы гидродинамического дальнего действия, законы движения жидкостей во вращающемся пространстве, приложение этих законов к гидравлическим машинам и к течениям в атмосфере и морях на вращающейся Земле, законы движения устойчиво расслоенных масс воздуха и, наконец, теплопередача в потоках жидкости. В различных местах этой главы читатель, уже знакомый с предметом, обнаружит некоторые мысли автора, публикуемые впервые.

Геттинген, 1942

Л. Прандтль

Из предисловия автора ко второму изданию

При подготовке книги ко второму изданию я вынужден был — в целях использования сохранившегося набора — ограничиться только включением библиографических указаний на новые исследования, опубликованные после выхода в свет первого издания книги, и довольно многочисленными улучшениями и дополнениями текста.

Геттинген, 1944

Л. Прандтль

ГЛАВА 1

Свойства жидкостей и газов. Статика

§ 1. Свойства жидкостей. Жидкости отличаются от твердых тел легкой подвижностью своих частиц. Для изменения формы твердого тела к нему необходимо приложить силы конечной, иногда весьма значительной величины. Между тем для медленной деформации жидкости достаточны самые ничтожные силы, которые в предельном случае бесконечно малой деформации делаются равными нулю. Однако при быстрой деформации жидкость, подобно твердому телу, оказывает сопротивление деформации. Но как только движение жидкости прекращается, это сопротивление очень быстро исчезает. Свойство жидкостей оказывать сопротивление деформации называется *вязкостью*. Подробно это свойство будет рассмотрено в § 1 гл. III. Кроме обычных легко подвижных жидкостей существуют очень вязкие жидкости, сопротивление которых деформации весьма значительно, но в состоянии покоя по-прежнему равно нулю. По мере увеличения вязкости жидкость становится все более похожей на твердое тело, однако нельзя провести резкой границы между жидкостью с очень большой вязкостью и твердым телом: некоторые вещества при быстрой деформации ведут себя как твердые тела, а при медленной — как жидкости. К таким веществам принадлежит, например, асфальт. Если опрокинуть бочку с асфальтом, то в зависимости от температуры воздуха весь асфальт вытекает из бочки в течение нескольких дней или недель и принимает форму плоской лепешки. С течением времени такая асфальтовая лепешка все более и более растекается, но, несмотря на это, по ней можно ходить, не оставляя на ее поверхности заметных следов; только в том случае, если постоять на ней некоторое время, такие следы появляются. При ударе молотком разлившаяся масса асфальта разлетается на куски подобно стеклу.

В статике, т. е. в теории равновесия жидкостей, рассматриваются только состояние покоя или очень медленные движения, следовательно, здесь мы должны принять сопротивление деформации равным нулю. На основании этого мы можем дать такое определение жидкости: *жидкостью называется такое тело, в котором в состоянии равновесия всякое сопротивление деформации равно нулю.*

Согласно кинетической теории материи мельчайшие частицы всех тел (атомы и молекулы) находятся в непрерывном движении; кинетическая энергия этого движения проявляется в теплоте. С точки зрения этой теории жидкости отличаются от твердых тел тем, что в них отдельные частицы более или менее часто меняются местами с соседними частицами, в то время как в твердых телах каждая частица занимает в пространстве вполне определенное положение, правда, совершая около него небольшие колебания. Постепенное размягчение аморфных тел при повышении температуры объясняется следующим образом: если тело нагревается, т. е. если увеличивается энергия молекулярного движения, то сначала меняются местами частицы там, где случайно возникли особенно большие колебания; при дальнейшем нагревании такая перемена мест совершается все чаще, причем она распространяется на все тело. В кристаллических твердых телах переход из твердого в жидкое состояние происходит внезапно, в результате расплавления, т. е. вследствие разрушения правильной атомной структуры вещества.

Другим свойством жидкостей является их большое сопротивление изменению объема. Никаким способом невозможно сжать один литр воды так, чтобы он поместился в сосуде емкостью в пол-литра. Обратно, если налить литр воды в сосуд емкостью в два литра и выкачать из последнего воздух, то вода по-прежнему будет занимать только половину сосуда. Однако в некоторой мере вода при больших давлениях сжимается; при давлении около 1000 атм ¹ это сжатие достигает 5% первоначального объема. Аналогичным образом ведут себя и другие жидкости.

§ 2. Теория напряженного состояния. Рассмотрим *напряженное состояние* жидкости, находящейся в равновесии. Прежде чем определить это понятие, заметим, что общие теоремы о равновесии сил применимы также к жидким телам. Это следует из так называемого *принципа отвердевания*, сущность которого заключается в следующем. Если в какой-либо подвижной системе, находящейся в равновесии, сделать отдельные ее части неподвижными, то от этого равновесие всей системы не нарушится. Следовательно, в случае жидкости, находящейся в равновесии, можно всегда вообразить, что некоторая ее часть отвердела; от этого равновесие всей жидкости не нарушится, к отвердевшей же части можно применить теоремы о равновесии твердых тел². Однако для исследования равновесия жидкости не обяза-

¹О единицах для измерения давления см. § 3.

²Применяя принцип отвердевания, следует иметь в виду, конечно, не физическое отвердевание, связываемое с изменением объема, кристаллизацией и т. п., а воображаемое, идеальное отвердевание без всякого перемещения частиц и изменения объема.

тельно прибегать к представлению об отвердевании. Теоремы о равновесии общей механики, хотя и выводятся на примере абсолютно твердых тел, применимы также к системам материальных точек, если только внутренние движения, вообще возможные в таких системах, вследствие равновесия отсутствуют. В случаях действительного покоя оба способа рассмотрения совершенно равноправны. Но в задачах, связанных с движением жидкостей, когда в последних по существу не может быть ничего отвердевшего, принцип отвердевания приводит к затруднениям. Поэтому, имея в виду дальнейшие приложения к динамике, мы изложим здесь вкратце основное содержание общей теории равновесия деформируемой среды, безразлично-жидкой или упругой.

Прежде всего напомним, что любые силы представляют собою взаимодействие между массами. Если, например, масса m_1 притягивает к себе другую массу m_2 с силой P , то с такой же силой масса m_2 притягивает к себе массу m_1 . Следовательно, обе силы направлены прямо противоположно друг другу (закон Ньютона о равенстве действия и противодействия). В системе масс, каким-нибудь образом выделенной среди других масс, следует различать два вида сил: *внутренние силы*, действующие между массами, принадлежащими к системе, и *внешние силы*, действующие между каждой массой системы и массами, находящимися вне системы. Во всей совокупности сил, действующих в рассматриваемой системе масс, внутренние силы входят всегда *попарно* в виде равных и прямо противоположных сил, а внешние силы — всегда в *одиночку*. При суммировании (векторном или координатном) всех сил внутренние силы всегда попарно уничтожаются, и остаются только внешние силы.

Для равновесия системы необходимо, чтобы сумма сил, приложенных к каждой отдельной массе системы, была *равна нулю* (при векторном рассмотрении должна быть равна нулю векторная сумма всех сил, при координатном рассмотрении — суммы проекций сил на три координатные оси). При сложении таких сумм для всех масс системы остается, согласно сказанному выше, только сумма всех внешних сил, а так как каждая отдельная из сложенных сумм при равновесии равна нулю, то *равна нулю и сумма всех внешних сил*. Эта теорема, при выводе которой о системе масс не делается никаких иных предположений, кроме того, что она находится в равновесии, находит широкое применение в самых различных случаях. Если вычисления ведутся в координатах, то эта теорема записывается в виде трех уравнений:

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0,$$



Рис. 1 и 2. Метод сечений.

где X, Y, Z суть проекции внешних сил на оси x, y, z .

Совершенно аналогичная теорема существует и для моментов внешних сил: *сумма всех этих моментов при равновесии равна нулю.*

Как для упругих твердых, так и для жидких тел важно знать *напряженное состояние внутри тела*, т. е. внутренние силы, действующие между мельчайшими частицами тела во всех направлениях и во всех точках тела. Однако в общем случае приходится ограничиваться указанием только среднего напряженного состояния. В самом деле, как бы ни была мала выделенная область около рассматриваемой точки тела, в ней все же содержится очень большое число частиц тела, находящихся к тому же в оживленном тепловом движении, и поэтому картина распределения сил взаимодействия между этими частицами имеет очень запутанный вид. Но как же вообще можно получить представление о внутренних силах, если наши теоремы об условиях равновесия говорят только о внешних силах? Для этого, как мы сейчас увидим, *необходимо сделать внутренние силы внешними*. Это вполне возможно следующим образом. Вообразим некоторое тело, к которому приложены внешние силы (на рис. 1 они обозначены стрелками). Мысленно разрежем его на две части и одну из частей, например, часть I, примем за нашу систему масс. Тогда все силы, с которыми частицы части II действовали на частицы части I и которые раньше были внутренними силами, теперь будут внешними силами. Эти силы определенным образом распределены по площади сечения, и сумма их должна быть такова, чтобы выделенная часть тела продолжала оставаться в равновесии. Следовательно, результирующая этих сил должна быть равна и прямо противоположна результирующей внешних сил, действующих на выделенную часть тела (рис. 2). Таким образом, мы получили вполне определенное и однозначное представление о результирующей внутренних сил в проведенном сечении тела¹.

Такая результирующая внутренних сил, отнесенная к единице площади сечения, называется *напряжением*. В только что рассмотренном

¹Мы получили бы совершенно такой же результат, если бы вместо части I тела рассмотрели часть II, только теперь результирующая внутренних сил была бы приложена к части II и направлена в прямо противоположную сторону.

примере, разделив найденную результирующую внутренних сил на площадь сечения, мы получим, очевидно, среднее напряжение в сечении. Вообще же на различных площадках сечения напряжение может быть разным. Напряжение на площадке, подобно силе, является вектором.

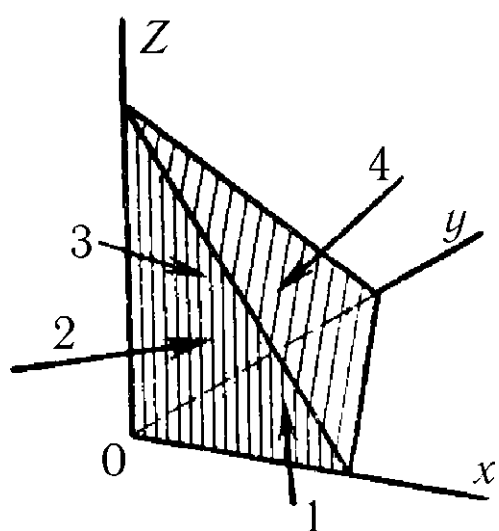


Рис. 3. Равновесие тетраэдра

Таким образом, мысленно рассекая тело на две части, мы превращаем внутренние силы, действующие в проведенном сечении, во внешние. Такой способ определения внутренних сил называется способом сечения. Этот способ допускает широкое применение во всех случаях, когда требуется исследовать напряженное состояние внутри тела. Для этой цели внутри тела вырезается при помощи некоторого числа сечений небольшая частица, например, параллелепипед, призма, тетраэдр, и исследуется ее равновесие. Из многочисленных и важных теорем о напряженном состоянии, которые могут быть

выведены из рассмотрения равновесия таких частиц, приведем следующую: *если в трех сечениях, образующих друг с другом трехгранный угол, напряжения известны, то напряжения во всех других сечениях могут быть определены.* Для доказательства поступим следующим образом. Пересечем трехгранный угол четвертой плоскостью, именно той плоскостью, в которой требуется определить напряжение. Эта плоскость образует вместе с первыми тремя тетраэдр (рис. 3). Силы 1, 2, 3, действующие на грани, напряжения на которых известны, мы получим, умножив заданные напряжения на площади соответствующих граней. Имеется *только одна* сила 4, которая уравнивает сумму сил $1 + 2 + 3$. Эта сила, разделенная на площадь соответствующей грани, и дает искомое напряжение. Для выполнения вычислений удобнее всего совместить заданные сечения с координатными плоскостями (рис. 3).

Теперь, после того как мы разъяснили понятие напряжения, мы можем дать более точное определение напряженному состоянию: *напряженным состоянием в какой-либо точке называется совокупность напряжений во всех сечениях, проходящих через заданную точку.* Не вдаваясь в подробности теории напряженного состояния, упомянем только, что напряженное состояние в точке может быть связано с некоторым эллипсоидом, так называемым *эллипсоидом напряжений*. Следовательно, напряженное состояние представляет собой тензор. Согласно приведенной выше теореме напряженное состояние в точке (а также соот-

ветствующий ему эллипсоид) известно, если заданы напряжения в трех сечениях, образующих друг с другом трехгранный угол. В каждом эллипсоиде имеются три взаимно перпендикулярные оси. Этим осям эллипсоида, называемым главными осями, соответствуют в напряженном теле такие три взаимно перпендикулярных сечения, в которых напряжения нормальны к сечениям. Эти напряжения называются *главными напряжениями*, а соответствующие направления — *главными направлениями напряженного состояния*.

§ 3. Давление жидкости. Напряженное состояние в жидкости, находящейся в равновесии, особенно простое. Сопротивление жидкости деформации, т. е. перемещению ее частей относительно друг друга, имеет некоторое сходство с трением. Если при соприкосновении двух твердых тел трение отсутствует, то давление одного тела на другое в плоскости их соприкосновения должно быть обязательно перпендикулярно к этой плоскости; следовательно, при скольжении вдоль плоскости соприкосновения не должно совершаться никакой работы. Совершенно аналогично проявляет себя и отсутствие в жидкости сопротивления деформации: *в этом случае напряжение внутри жидкости, или, как принято говорить, давление жидкости, должно быть везде перпендикулярно к поверхности того сечения, на которое оно действует.* Это свойство давления жидкости может рассматриваться как *определение жидкости*, совершенно эквивалентное тому определению, которое было сделано в § 1.

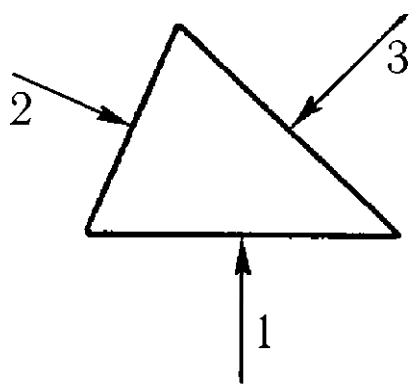


Рис. 4. Силы, действующие на боковые грани призмы

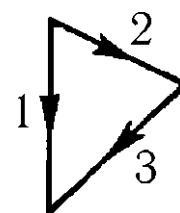


Рис. 5. Треугольник сил, действующих на боковые грани призмы

При помощи простых соображений из указанного свойства давления можно вывести другое важное свойство. Мысленно выделим в жидкости небольшую трехгранную призму с основаниями, перпендикулярными к ребрам призмы (конечно, мы могли бы также вообразить, что выделенная внутри жидкости призма отвердела; в таком случае нам надо было бы исследовать равновесие сил, действующих на призму со

стороны остальной жидкости). Силы давления на основания призмы равны друг другу по абсолютному значению, но прямо противоположны по направлению; следовательно, они уравнивают друг друга, и поэтому в дальнейшем мы можем их не рассматривать. Силы давления на боковые грани перпендикулярны к граням и поэтому лежат в плоскости, перпендикулярной к ребрам призмы. На рис. 4 показано поперечное сечение призмы вместе с силами давления, действующими на ее боковые грани, а на рис. 5 построен треугольник, который должны образовать силы давления для того, чтобы имело место равновесие. Так как стороны треугольника на рис. 5 перпендикулярны к соответствующим сторонам треугольника на рис. 4, то оба треугольника имеют соответственно равные углы и поэтому подобны. Отсюда следует, что силы давления 1, 2, 3 относятся друг к другу, как стороны треугольника на рис. 4, т. е. как числа, измеряющие ширину граней призмы. Для того чтобы перейти от полных давлений на грань к давлениям на единицу площади, мы должны разделить каждую силу давления 1, 2, 3 на площадь соответствующей грани. Но все грани имеют одинаковую высоту, следовательно, их площади относятся друг к другу так же, как стороны треугольника на рис. 4, т. е. так же, как и силы 1, 2, 3. Таким образом, давление на единицу площади, которое мы будем называть просто давлением, одинаково на всех трех гранях. Так как призма была выбрана нами во всем остальном совершенно произвольно, то из полученного результата следует, что *давление в одной и той же точке жидкости одинаково во всех направлениях* (точнее говоря, одинаково во всех сечениях, проведенных через рассматриваемую точку). Поэтому эллипсоид напряжений в жидкости, находящейся в равновесии, принимает форму шара. Для определения такого напряженного состояния, которое принято называть *гидростатическим напряженным состоянием*, достаточно указания одного — единственного числа — давления p . Согласно сказанному выше это число означает силу, действующую на единицу площади сечения. В зависимости от выбора единицы силы и единицы площади возможны самые различные единицы для измерения давления. В технике чаще всего применяется единица $\text{кг}/\text{см}^2$, а также $\text{кг}/\text{м}^2$, причем кг означает килограмм — вес. О некоторых других единицах для измерения давления — см. § 8 и 9.

§ 4. Распределение давления в невесомой жидкости. Каждая жидкость обладает весом. Однако во многих случаях, особенно когда в жидкости имеет место высокое давление, нет никакой нужды учитывать действие силы тяжести, следовательно, в этих случаях можно

считать жидкость невесомой. При таком допущении все расчеты значительно упрощаются. Выделим в жидкости длинную узкую призму с основаниями, перпендикулярными к оси призмы (рис. 6), и рассмотрим ее рав-

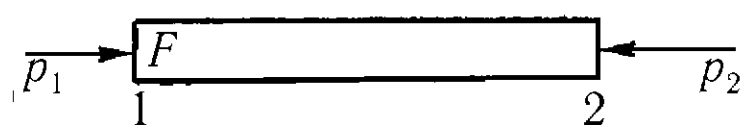


Рис. 6. Равновесие призмы с горизонтальной осью

новесие относительно перемещений вдоль оси. Предположим сначала, что давление в жидкости изменяется при переходе от одной точки пространства к другой. Поперечное сечение призмы возьмем настолько малым, что изменением давления на его площади можно пренебречь. Если на одном конце призмы имеет место давление p_1 , а на другом конце — давление p_2 , то на первое основание призмы действует сила Fp_1 , параллельная оси призмы, а на второе основание — сила Fp_2 , также параллельная оси призмы, но противоположная силе Fp_1 . Что касается боковых поверхностей призмы, то все силы давления, действующие на эти поверхности, направлены, согласно нашему основному допущению, перпендикулярно к ним, следовательно, перпендикулярно и к оси призмы. Поэтому, каково бы ни было распределение давления на боковых поверхностях, силы давления, действующие на них, не дают составляющих в направлении оси призмы. Таким образом, для равновесия призмы необходимо, чтобы

$$Fp_1 = Fp_2,$$

откуда

$$p_1 = p_2.$$

Так как положение призмы внутри жидкости было выбрано нами совершенно произвольно, то из полученного результата следует, что *при отсутствии силы веса* (и других подобного рода активных сил) *давление во всех точках жидкости одинаково*.

Если жидкость заполняет узкое и извилистое пространство и поэтому невозможно выделить призму между двумя произвольными точками жидкости, то для доказательства равенства давления во всех точках жидкости можно поступить следующим образом. Сначала возьмем две близкие между собой точки 1 и 2, затем от точки 2 перейдем в другом направлении к точке 3 и т. д., пока не дойдем до требуемой конечной точки n . Тогда из равенств

$$p_1 = p_2, \quad p_2 = p_3, \dots,$$

мы получим опять, что

$$p_1 = p_n.$$

Другое, более изящное доказательство основано на принципе отвердевания (§ 2). Поместим мысленно наш узкий и извилистый сосуд в другой сосуд большего объема и наполним последний жидкостью. Затем, после того как установится равновесие, вообразим, что в большом сосуде отвердела вся жидкость, кроме той, которая занимает первоначально заданное узкое и извилистое пространство. От этого, согласно принципу отвердевания, равновесие не изменится, следовательно, в невесомой жидкости, заполняющей любое узкое и извилистое пространство, давление при равновесии везде одинаково.

Если жидкость заполняет очень узкое пространство, то после изменения давления жидкости, например, вследствие внешней нагрузки, может пройти весьма значительное время, прежде чем установится равновесие. В пластичной горшечной глине, состоящей из очень мелких твердых частиц, промежутки между которыми заполнены водой, указанное время измеряется целыми днями, а в пластах глины в почве — даже целыми годами¹. В течение этого времени вода перетекает из мест с более высоким давлением в места с более низким давлением.

Итак, мы установили, что *в жидкости, находящейся в равновесии, давление во всех точках направлено перпендикулярно к поверхности, на которую оно действует, и — при отсутствии силы тяжести и других массовых сил — везде и во всех направлениях одинаково.*

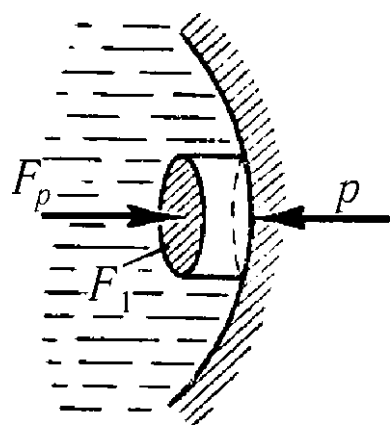


Рис. 7

Все сказанное относительно давления внутри жидкости применимо и к давлению на стенки сосуда, заключающего жидкость. Для того чтобы в этом убедиться, проведем внутри жидкости вплотную около стенки или на небольшом расстоянии от нее плоское сечение и построим на этом сечении небольшой цилиндр с образующей, перпендикулярной к сечению (рис. 7). Из равновесия цилиндра следует, что на участок стенки в направлении, перпендикулярном к проведенному сечению, действует сила p , равная Fp .²

При таком рассуждении, как легко видеть, неровности стенки, даже большие, не влияют на полученный результат.

§ 5. Свойства газов. Газы отличаются от жидкостей тем, что при помощи достаточно большого давления они могут быть сжаты до очень малого объема; с другой стороны, если предоставить любому газу большее пространство, чем то, которое он занимает, то происходит расширение газа: он равномерно заполняет все предоставленное ему про-

¹Terzaghi, Erdbaumechanik, Wien, 1924.

²На рис. 7 показана сила p , с которой стенка действует на рассматриваемый жидкий цилиндр. Сила давления жидкости на стенку направлена в прямо противоположную сторону.

странство, но давление его при этом уменьшается. В остальном поведение газов очень сходно с поведением жидкостей: в состоянии покоя они, подобно жидкостям, не оказывают никакого сопротивления деформации, а при внутренних перемещениях в них, как и в жидкостях, проявляется вязкость¹. Следовательно, до тех пор, пока не происходит изменения объема, поведение газа в качественном отношении ничем не отличается от поведения жидкости, занимающей сплошь — без образования свободной поверхности — такое же пространство, как и газ.

Для техники наиболее важным газом является атмосферный воздух. Другие газы в основном ведут себя так же, как и воздух. Атмосферный воздух находится на поверхности земли приблизительно под постоянным давлением, равным круглым числом 1 кг/см^2 . Поэтому давление в 1 кг/см^2 называется *технической атмосферой*. От технической атмосферы следует отличать *физическую атмосферу*, соответствующую среднему давлению воздуха на уровне моря и равную $1,0332 \text{ кг/см}^2$ (давлению столба ртути высотой 760 мм). С увеличением высоты над поверхностью земли давление воздуха понижается (см. § 7).

Для измерения давления воздуха (газа) служат различные приборы, которые называются *манометрами*, если они показывают разности давлений, и *барометрами*, если они показывают абсолютное давление окружающей среды. Те и другие приборы бывают либо жидкостные, либо пружинные. В жидкостных манометрах и барометрах давление действует на столб жидкости, находящейся в узкой трубке (см. § 8 и 9); в пружинных манометрах и барометрах давление воспринимается какой-либо пружиной. Например, так называемый барометр-анероид для измерения абсолютного давления воздуха представляет собой металлическую коробку с упругой крышкой, соединенной с сильной пружиной, причем из коробки выкачан воздух. При изменении давления внешнего воздуха упругая крышка более или менее сильно прогибается и действует на пружину; стрелка, соединенная с пружиной, показывает на тарированной шкале давление воздуха.

Закон, связывающий между собой давление и объем газа, впервые был открыт сначала в 1612 г. Р. Бойлем (R. Boyle), а затем независимо от Бойля еще раз в 1679 г. Мариоттом (Mariotte). Поэтому его называют *законом Бойля – Мариотта*. Согласно этому закону давления одного и того же количества газа при неизменной температуре обратно пропорциональны объемам, занимаемым этим количеством газа. Например, если некоторое количество газа сжимается до половины своего

¹См. по этому поводу замечание в конце § 4 гл. III.

первоначального объема, то давление в газе увеличивается в два раза, и наоборот, если некоторому количеству газа предоставляется двойной объем, то давление уменьшается в два раза. Математически этот закон выражается уравнением:

$$pV = p_1V_1, \quad (1)$$

где p_1 есть начальное давление, V_1 — начальный объем, а p и V суть соответственные значения давления и объема при любом другом состоянии газа.

Объем газа сильно зависит также от температуры. Гей-Люссак (Gay–Lussak) в 1816 г. нашел, что повышение температуры на 1°C влечет за собой увеличение объема газа на $1/273$ того объема, который этот газ занимает при 0°C , однако при условии, что давление газа при изменении температуры остается постоянным. Такая связь между изменением температуры и изменением объема, если отвлечься от тонкостей, о которых будет упомянуто ниже, одинакова для всех газов и при всех температурах. *Закон Гей-Люссака* математически выражается уравнением:

$$V = V_0(1 + \alpha v),$$

где V_0 есть объем газа при 0°C , v — температура в градусах Цельсия и $\alpha = 1/273$ — коэффициент расширения.

В уравнение (2) давление не входит, так как оно при обоих сравниваемых состояниях газа одинаково. Это дает возможность связать между собой уравнения (1) и (2), что приводит к уравнению

$$pV = p_0V_0(1 + \alpha\theta), \quad (3)$$

справедливому для всех давлений и температур. В уравнении (3) p_0 означает вообще произвольное, но для сравниваемых состояний фиксированное начальное давление, а V_0 — объем, соответствующий начальному давлению p_0 и температуре 0°C . Закон, выражаемый уравнением (3), обычно называют *законом Мариотта–Гей-Люссака*. Уравнение (3) называют также *уравнением состояния* идеальных газов, так как оно связывает друг с другом три величины, определяющие состояние газа: давление, объем и температуру. Реальные газы ведут себя несколько иначе, однако при обычных плотностях отклонения от уравнения (3) очень незначительны. Эти отклонения делаются заметными только при сильном сжатии газа и в особенности тогда, когда температура газа настолько понижена, что начинается сжижение.

Указанные отклонения подробно изучаются в термодинамике. Здесь мы коротко упомянем лишь об одном из таких отклонений. Из уравнения (1)

следует, что при чрезвычайно большом давлении объем газа можно сделать сколь угодно малым; можно было бы, например, подсчитать, что при определенном давлении плотность газа делается равной плотности воды, плотности золота и т. д. Однако это неверно. Существует некоторый предельный объем, до которого может быть сжат газ; в дальнейшем, сколько бы ни увеличивать давление, объем газа не будет уменьшаться, следовательно, в этом предельном объеме имеет место самое тесное из возможных расположений частиц газа. Это обстоятельство можно учесть, если переписать уравнение (3) в следующем, несколько измененном виде:

$$p(V - V') = p_0(V_0 - V')(1 + \alpha\theta),$$

где V' означает упомянутый предельный объем. Вычисляя из этого уравнения для любого давления p соответствующий ему объем V , мы всегда будем получать значения, большие V' . Однако в тех случаях, когда объем V велик по сравнению с V' , результаты подсчета по уравнениям (3) и (4) практически не отличаются друг от друга.

При сжатии газа выделяется теплота. Поэтому закон Бойля–Мариотта, выведенный в предположении постоянной температуры, будет выполняться в действительности только в том случае, если при сжатии или, по крайней мере, после сжатия газу будет предоставлено достаточное время для того, чтобы отдать выделившееся тепло и снова принять температуру окружающей среды. Наоборот, при расширении, когда происходит охлаждение газа, ему должно быть предоставлено достаточное время для того, чтобы возместить потерянное тепло. Если же газ не будет иметь нужного времени для выравнивания разности температур, то при сжатии увеличение давления будет происходить, очевидно, в большем отношении, чем уменьшение объема. В термодинамике доказывается, что в тех случаях, когда при сжатии или расширении газа не происходит никакого теплообмена с окружающей средой, что имеет место, очевидно, при очень быстром сжатии или расширении, уравнение (1) должно быть заменено следующим:

$$pV^\kappa = p_1 V_1^\kappa,$$

где κ равно отношению удельной теплоемкости c_p при постоянном давлении к удельной теплоемкости c_v при постоянном объеме, т. е.

$$\frac{c_p}{c_v}.$$

Для сухого атмосферного воздуха $\kappa = 1,405$. Сжатие и расширение газа, происходящие согласно уравнению (5), называются *адиабатическим*

в отличие от *изотермического* сжатия или расширения, происходящего согласно уравнению (1).

Таким образом, адиабатическое сжатие связано с нагреванием газа, а адиабатическое расширение — с охлаждением газа. Изменение температуры может быть подсчитано из уравнений (3) и (5).

Свойства газов, изложенные в этом параграфе, могут быть очень хорошо объяснены, если предположить, что мельчайшие частицы газа находятся в очень быстром непрерывном движении, причем все время происходят столкновения частиц между собой и со стенкой сосуда, заключающего газ. При таком предположении давление есть не что иное, как суммарное действие ударов частиц, а температура эквивалентна кинетической энергии частиц. В самом деле, температура при сжатии повышается потому, что скорость частиц газа, ударяющихся о двигающуюся им навстречу стенку, после отражения частиц увеличивается.

§ 6. Равновесие весомой жидкости. Действие поля силы тяжести на какую-нибудь массу m состоит в том, что эта масса испытывает силу притяжения к центру Земли¹, равную mg , где g есть ускорение свободного падения; в средних широтах величина g равна круглым числом $9,81 \text{ м/сек}^2$. Сила mg называется весом массы m .

Так как измерение количества жидкости часто производится по объему, то для *массы единицы объема* целесообразно ввести особое наименование: ее называют *плотностью* и обозначают через ρ . Следовательно, если некоторое количество жидкости занимает объем V и имеет плотность ρ , то масса этого количества жидкости равна ρV , а вес равен $g\rho V$. Произведение $g\rho$ есть не что иное, как вес единицы объема; часто, особенно в технической литературе, оно обозначается одной буквой γ и называется *удельным* или *объемным весом*. Численное значение удельного веса зависит от выбора основных единиц для длины и силы; если последние измерять соответственно в метрах и килограммах, то удельным весом, например, воды будет $\gamma=1000 \text{ кг/м}^3$.

Так как напряженность притяжения Земли в разных пунктах Земли не совсем одинакова, то величина удельного веса также изменяется при переходе от одного места к другому. Поэтому физики в своих расчетах предпочитают пользоваться вместо удельного веса плотностью,

¹Строго говоря, это не совсем верно. В действительности линия действия силы притяжения, т. е. вертикаль, пересекает ось Земли не в центре, а несколько южнее для жителей северного полушария, и севернее — для жителей южного полушария. Вертикаль проходила бы точно через центр Земли только в том случае, если бы Земля не была сплюснута и не вращалась.

величина которой не зависит от напряженности Земли. Однако в гидростатических расчетах удобно иметь дело с удельным весом γ .

Основной задачей гидростатики, т. е. учения о равновесии весомых жидкостей, является вычисление распределения давления («поля давления») в однородной весомой жидкости.

Опять выделим в жидкости небольшую призму, причем сначала с горизонтальной осью (рис. 6), и рассмотрим ее равновесие относительно перемещений в направлении оси. Так как ось призмы перпендикулярна к вертикали, т. е. к направлению силы тяжести, то вес призмы не дает составляющей в направлении оси призмы. Поэтому мы можем в рассматриваемом случае повторить все рассуждения § 4 и по-прежнему найдем, что

$$p_1 = p_2,$$

т. е. давление на обоих концах призмы одинаковое. Применяя этот результат к произвольной последовательности примыкающих друг к другу призм с горизонтальной осью, мы найдем, что давление весомой жидкости во всех точках одной и той же горизонтальной плоскости одинаковое.

Для того чтобы найти связь между давлениями весомой жидкости в различных горизонтальных плоскостях, выделим в жидкости призму или цилиндр с вертикальной осью (рис. 8) и рассмотрим равновесие взятого тела относительно перемещений в направлении его оси. Теперь вес цилиндра оказывает существенное влияние на его равновесие. На верхнее основание цилиндра действует сила давления $p_1 F$, направленная вниз, а на нижнее основание — сила давления $p_2 F$, направленная вверх. Кроме того, на массу цилиндра действует сила тяжести $G = \gamma V = \gamma F h$, направленная вниз. Следовательно, для равновесия цилиндра необходимо, чтобы

$$\gamma F h + p_1 F = p_2 F,$$

откуда следует, что

$$p_2 - p_1 = \gamma h. \quad (6)$$

Таким образом, разность между давлениями на взятых горизонтальных плоскостях, находящихся друг от друга на расстоянии h , равна весу вертикального столба жидкости, заключенного между этими плоскостями и имеющего поперечное сечение с площадью, равной единице.

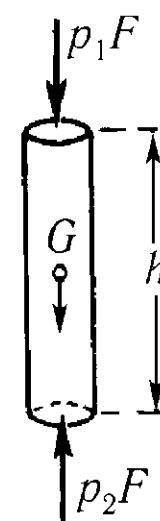


Рис. 8. Равновесие призмы с вертикальной осью

Применяя этот результат к ряду примыкающих друг к другу вертикальных призм, мы найдем, что *давление в весоной жидкости возрастает с увеличением глубины, причем увеличению глубины на единицу длины соответствует увеличение давления на величину γ . Давление в каждой горизонтальной плоскости остается постоянным.*

Введем прямоугольную систему координат x, y, z и направим ось z вертикально вверх. Тогда, если давление в горизонтальной плоскости $z = 0$ обозначить через p_0 , давление в каком-нибудь другом месте будет равно

$$p = p_0 - \gamma z. \quad (7)$$

Из принципа отвердевания (§ 4) следует, что соотношение (7) справедливо не только для больших пространств, сплошь наполненных жидкостью, но также для сообщающихся сосудов, для любой системы труб, для пор между зернами грунта и т. д. Необходимыми условиями для применения уравнения (7) являются однородность и равновесие жидкости, а также связность занимаемого ею объема.

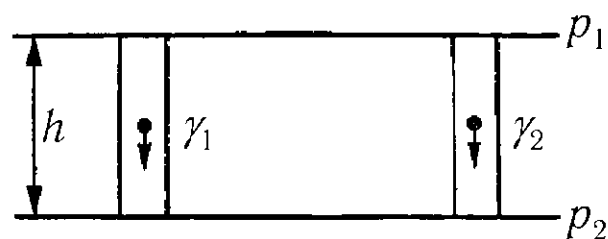


Рис. 9. Равновесие двух призм с вертикальной осью в неоднородной жидкости

Если жидкость неоднородная, например, вследствие неодинаковой температуры или разного содержания соли в разных местах жидкости, то все рассуждения относительно призмы с горизонтальной осью могут быть повторены без всяких изменений. Следовательно, в неоднородной весоной жидкости при равновесии давление во всех точках каждой горизонтальной плоскости одинаковое. Для выяснения условия равновесия в вертикальном направлении проведем в жидкости две горизонтальные плоскости на небольшом расстоянии h друг от друга (рис. 9). Пусть на верхней плоскости давление равно p_1 , а на нижней — p_2 . Выделим между проведенными плоскостями две узкие вертикальные призмы. Пусть средний удельный вес жидкости в левой призме равен γ_1 , а в правой призме — γ_2 . Для равновесия необходимо, чтобы слева соблюдалось равенство

$$p_1 - p_2 = \gamma_1 h,$$

а справа — равенство

$$p_2 - p_1 = \gamma_2 h.$$

Оба эти требования совместимы друг с другом только в том случае, если $\gamma_1 = \gamma_2$. В противном случае равновесие не могло бы установиться,

и жидкость пришла бы в движение. Мы можем уточнить наши рассуждения, если возьмем расстояние h между плоскостями очень малым и повторим рассуждения для любого большого числа пар соседних горизонтальных плоскостей. Таким путем мы придем к выводу: *в неоднородной весомай жидкости равновесие возможно только в том случае, если в каждом горизонтальном слое плотность везде постоянная*. Отсюда, в частности, следует, что при равновесии двух наслоненных друг на друга и между собой не смешивающихся жидкостей различной плотности поверхностью раздела может быть только горизонтальная плоскость. Это следствие можно вывести и непосредственно из наших рассуждений, относящихся к рис. 9. В самом деле, предположив сначала, что поверхность раздела обеих однородных жидкостей, наслоненных друг на друга, проходит произвольным образом между проведенными на рис. 9 горизонтальными плоскостями, мы увидим, что равновесие возможно только в том случае, если поверхность раздела расположена горизонтально.

Заметим, что для устойчивости такого наслонения жидкостей необходимо, чтобы менее плотная жидкость была расположена обязательно над более плотной. При обратном расположении равновесие будет неустойчивым: малейшее возмущение немедленно приводит к опрокидыванию слоев. Для доказательства можно опять воспользоваться рис. 9. Возьмем какое-нибудь возмущенное, например, несколько наклоненное, положение поверхности раздела между обеими горизонтальными плоскостями и вычислим разности давлений, возникающие при таком возмущении. Мы увидим, что при устойчивом расположении слоев эти разности давлений стремятся уменьшить наклон поверхности раздела, а при неустойчивом расположении они стремятся, наоборот, увеличить этот наклон.

Если плотность жидкости изменяется непрерывно, то устойчивое равновесие по-прежнему будет иметь место в том случае, когда плотность везде уменьшается снизу вверх. Равновесие однородной жидкости в отличие от равновесия расслоенной неоднородной жидкости всегда является безразличным. В самом деле, как бы ни перемещать любые части однородной жидкости, находящейся в равновесии, возмущающие силы, нарушающие равновесие, возникать не будут.

Что касается распределения давления в неоднородной жидкости, то для каждого слоя, в котором плотность можно считать приближенно одинаковой, имеет место уравнение (7) в дифференциальной форме:

$$dp = -\gamma dz. \quad (8)$$

Если удельный вес γ задан как функция высоты z , то интегрирование уравнения (8) приводит к соотношению:

$$p = p_0 - \int_0^z \gamma dz. \quad (9)$$

§ 7. Равновесие весомого газа. Условия равновесия весомого газа в основном совпадают с условиями равновесия весомой жидкости. Поэтому уравнения, выведенные в предыдущем параграфе, вполне применимы и для газа. Во многих случаях, например, если пространство, занимаемое газом, имеет умеренную высоту, можно считать удельный вес газа постоянным во всем пространстве. Тогда можно пользоваться уравнениями (6) и (7) предыдущего параграфа, т.е. принимать газ за однородную жидкость. Но если пространство, занимаемое газом, имеет большую высоту, исчисляемую километрами, то тогда принимать газ за однородную жидкость уже недопустимо. В этом случае разности давлений на разных высотах столь велики, что вследствие сжимаемости газа плотность его вверху и внизу имеет значения, сильно отличающиеся друг от друга. Большую роль играют также разности температур на разных высотах. Следовательно, теперь все расчеты надо вести, исходя из уравнения (8) для неоднородной жидкости. Зависимость удельного веса γ от высоты z заранее неизвестна, зависимость же его от давления p может быть найдена на основе определенного допущения о распределении температуры по высоте. Поэтому, прежде чем интегрировать уравнение (8), разделим его на γ ; после интегрирования мы получим:

$$\int_p^{p_0} \frac{dp}{\gamma} = z. \quad (10)$$

Вычислим этот интеграл для простейшего случая, когда *температура постоянна* на любой высоте пространства, занимаемого газом. Удельный вес γ , т.е. вес единицы объема газа, обратно пропорционален объему определенного выделенного количества газа; в то же время удельный вес, на основании закона Бойля–Мариотта, прямо пропорционален давлению. Поэтому

$$\gamma = \gamma_0 \frac{p}{p_0}.$$

Подставив это значение γ в правую часть уравнения (10) и вычислив интеграл, мы получим:

$$\int_p^{p_0} \frac{dp}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma_0} \int_p^{p_0} \frac{dp}{p} = \frac{p_0}{\gamma_0} \ln \frac{p_0}{p}. \quad (11)$$

Как легко видеть из уравнения (7), величина $\frac{p_0}{\gamma_0}$ есть не что иное, как высота столба жидкости постоянного удельного веса γ_0 , причем на нижнем конце этого столба давление равно p_0 , а на верхнем конце — нулю. Эту высоту называют высотой *однородной атмосферы*. Никакого реального значения для действительной атмосферы эта величина не имеет, она вводится только для удобства расчетов. Для примера найдем ее численное значение. Для этого необходимо сначала определить численное значение γ_0 , что можно выполнить следующим образом. Из сосуда, в котором имеется кран, выкачаем воздух и взвесим сосуд на чувствительных весах. Затем, открыв кран, дадим сосуду наполниться воздухом. При этом воздух, входящий в сосуд, нагревается за счет работы, совершаемой внешней атмосферой. Обождав некоторое время, пока не выравняется разность температур, взвесим сосуд еще раз. Разность полученных весов даст нам вес G воздуха в сосуде. Наконец, определим объем V сосуда. Для этого еще раз откачаем из сосуда воздух и, наполнив его водой через кран, открытый под водой, опять взвесим его на весах. Зная вес и объем воздуха, заключенного в сосуде, мы найдем его удельный вес:

$$\gamma_0 = \frac{G}{V}.$$

Это значение γ_0 соответствует давлению у поверхности земли, равному p_0 . Для другого значения этого давления удельный вес γ_0 будет иметь иное значение, которое легко подсчитать из простой пропорции. Для простоты вычислений примем, что $p_0 = 1 \text{ кг/см}^2$. Тогда для воздуха средней влажности при температуре θ мы найдем, что

$$\gamma_0 = \frac{1,245}{1 + \alpha\theta} \text{ кг/м}^3.$$

(Если бы мы приняли давление p_0 равным одной физической атмосфере, т. е. $1,0332 \text{ кг/см}^2$, то в числителе вместо 1,245 мы получили бы 1,286 для воздуха средней влажности и 1,293 для искусственно высушенного воздуха.)

Теперь, определив γ_0 , мы можем подсчитать величину $\frac{p_0}{\gamma_0}$. Для этого надо выразить давление p_0 в той же системе единиц, как и γ_0 . Мы имеем: $1 \text{ кг/см}^2 = 10\,000 \text{ кг/м}^2$, следовательно,

$$\frac{p_0}{\gamma_0} = \frac{10\,000}{1,245}(1 + \alpha\theta) = 8030(1 + \alpha\theta) \text{ м.}$$

По этой формуле мы можем найти высоту однородной атмосферы при любой температуре у поверхности земли. При температуре 0°C она равна 8030 м.

Вернемся к уравнению (10), которое теперь мы можем переписать в следующем виде:

$$z = \frac{p_0}{\gamma_0} \ln \frac{p_0}{p},$$

или, обозначая для краткости высоту $\frac{p_0}{\gamma_0}$ однородной атмосферы через H_0 ,

$$z = H_0 \ln \frac{p_0}{p}.$$

Применяя это уравнение к двум высотам z_1 и z_2 , мы получим:

$$z_1 = H_0 \ln \frac{p_0}{p_1}, \quad z_2 = H_0 \ln \frac{p_0}{p_2},$$

откуда найдем:

$$z_1 - z_2 = H_0 \ln \frac{p_2}{p_1}. \quad (12)$$

Эта формула называется *барометрической формулой для измерения высот* (такое название она получила потому, что она дает возможность измерять высоты при помощи измерения давлений барометром, см. § 9). Из формулы (12) мы получаем следующую зависимость давления от высоты:

$$p = p_1 e^{-\frac{z-z_1}{H_0}}. \quad (13)$$

Выделим в атмосфере вертикальный столб воздуха с поперечным сечением F , простирающийся от высоты z вверх вплоть до границы атмосферы. При помощи рассуждений, аналогичных тем, которые мы провели в предыдущем параграфе в связи с рис. 8, мы найдем, что вес выделенного столба воздуха равен Fp . Следовательно, величина p есть не что иное, как вес столба воздуха, простирающегося от высоты z до верхней границы атмосферы и имеющего поперечное сечение с площадью,

равной единице. На рис. 10 формула (13) изображена графически. Мы видим, что с увеличением высоты давление непрерывно уменьшается, но постепенно все медленнее. На бесконечно большой высоте давление делается равным нулю. Уменьшение давления по мере увеличения высоты легко проследить в свободной атмосфере при подъеме с барометром на башню или гору. Его можно обнаружить даже в многоэтажном доме. Если одновременно с отсчетом разности давлений измерить также температуру воздуха в пунктах отсчета, то при помощи формулы (12) можно с большой точностью определить разности высот обоих пунктов. Этот способ определения высоты используется не только в геодезии, но и при полете самолетов. Наоборот, если известна разность высот, то этот способ дает возможность определить средний удельный вес промежуточного слоя воздуха.

Если температура воздуха не одинакова на разных высотах, то формулой (12) все же можно пользоваться, разбивая для этого всю высоту на ряд таких отрезков, внутри которых разности температуры не очень велики. При этом для каждого отрезка высоты необходимо подсчитать соответствующее ему значение H_0 , исходя из среднего значения температуры в рассматриваемом слое.

Остается исследовать вопрос о том, когда равновесие расслоенной массы газа устойчивое и когда неустойчивое. В отличие от соответствующего случая равновесия жидкости теперь недостаточно, чтобы верхние слои были легче нижних. В самом деле, при подъеме или опускании массы газа на другую высоту изменяется давление, а это влечет за собой изменение плотности. Поэтому устойчивость равновесия будет определяться соотношением между плотностью массы газа, изменившей свою высоту, и плотностью окружающей массы газа, а именно, равновесие будет устойчивым, если при подъеме массы газа плотность ее при новом давлении будет больше плотности окружающей среды, а при опускании, наоборот, меньше плотности окружающей среды. В самом деле, в каждом из этих случаев масса газа, попав в новое положение, будет стремиться вернуться в свое прежнее положение. При определенном распределении температуры существует такое равновесное расслоение массы газа, которое в отношении устойчивости соответствует однородной жидкости, т. е. является безразличным равновесием. Очевидно, это будет иметь место в том случае, когда любая масса газа при

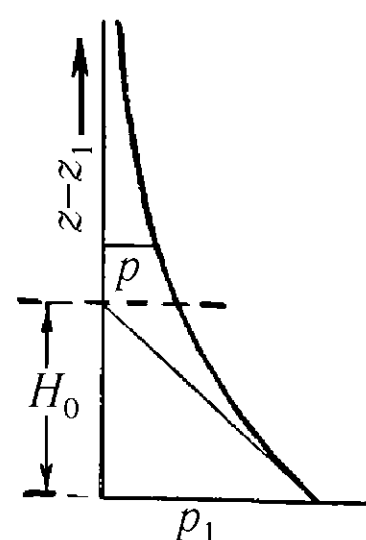


Рис. 10. Распределение давления в атмосфере с постоянной по высоте температурой

перемещении в новое положение, следовательно, при новом давлении, приобретает такое же в точности состояние, как и окружающая среда. Но, как мы знаем, изменение состояния газа при отсутствии теплообмена происходит по адиабатическому закону (§ 5). Поэтому, если давление и плотность изменяются в соответствии с адиабатическим уравнением состояния (5), т. е. давление p изменяется пропорционально γ^γ (это следует из того, что γ обратно пропорциональна объему), то любая масса газа после подъема или опускания попадает в среду с такой же температурой, какую сама масса газа приобрела вследствие адиабатического изменения своего состояния. Следовательно, в новом положении рассматриваемой массы газа исключена возможность какого бы то ни было теплообмена. Можно показать, что такое адиабатическое расслоение газа возникает из какого-либо другого расслоения в результате сильного перемешивания, совершенно подобно тому, как однородная жидкость получается из неоднородного раствора, например, солевого, после разбалтывания.

В атмосферном воздухе при адиабатическом расслоении температура понижается на 1°C при увеличении высоты примерно на 100 м. Если понижение температуры меньше указанного значения, то это означает, что наблюдаемое расслоение устойчивое. Повышение температуры при увеличении высоты означает еще большую устойчивость. Понижения температуры больше чем на 1°C на 100 м высоты в свободной атмосфере вообще не бывает, так как такому распределению температуры соответствует неустойчивое состояние равновесия. Однако вблизи поверхности земли, когда почва теплее, чем воздух, часто наблюдается понижение температуры, большее 1°C на 100 м высоты. Но в таком случае воздух не находится в равновесии, напротив, отдельные его части совершают вертикальные восходящие и нисходящие движения.

§ 8. Измерение давления. Жидкостные манометры. Если разность давлений воздуха в сосуде и во внешней атмосфере не очень велика, то ее легко измерить при помощи U-образной стеклянной трубки, частично наполненной жидкостью (рис. 11). Пренебрегая собственным весом воздуха, мы получим следующие соотношения. В сечении A давление жидкости равно тому давлению p_1 , под которым находится воздух в сосуде. В другом колене U-образной трубки на той же высоте, т. е. в сечении B , давление также равно p_1 (сообщающиеся сосуды!) На свободной поверхности жидкости, т. е. в сечении C , давление жидкости равно атмосферному давлению p_0 . Обозначая превышение уровня жидкости в правом колене над уровнем в левом колене через H , мы

получим на основании уравнения (6), что

$$p_1 = p_0 + \gamma h.$$

Таким образом, U-образная трубка, наполненная жидкостью, позволяет весьма просто измерять разности давлений воздуха, пока эти разности не очень велики. В разных видоизменениях она является основной частью многих манометров. Для того чтобы не надо было отсчитывать уровень жидкости в двух сечениях трубки (в сечениях *A* и *C* на рис. 11), одно из ее колен часто выполняется в виде широкого сосуда (рис. 12); тогда колебания уровня в этом сосуде получаются столь малыми, что ими можно пренебрегать. Для отметки на трубке нулевой точки необходимо соединить с атмосферой оба отверстия манометра. Для измерения очень небольших разностей давления либо применяются уточненные способы отсчета уровня жидкости в трубке, либо трубка манометра делается наклонной. Более точный отсчет уровня достигается при помощи передвижного микроскопа или проектирования на экран шкалы, плавающей в трубке манометра, в увеличенном масштабе (способ Бетца).

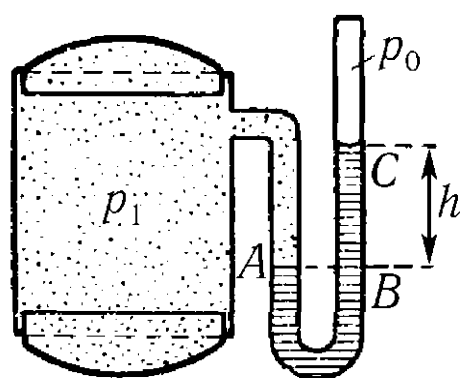


Рис. 11. Гидростатическое измерение давления (U-образная трубка)

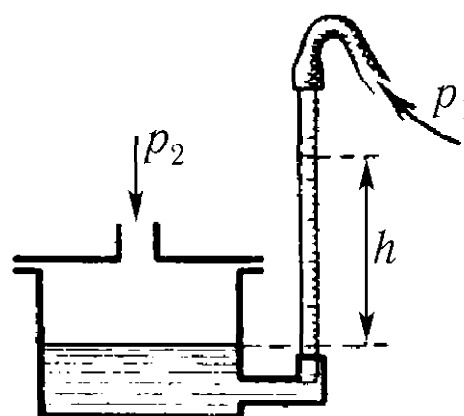


Рис. 12. Жидкостный манометр

Примерами манометра с наклонной трубкой могут служить манометрический уровень Теплера (рис. 13 и 15) и микроманометр Крелля (рис. 14). В обоих этих приборах перемещению столба жидкости в трубке на расстояние x соответствует изменение высоты уровня на величину $h = x \sin \alpha$; следовательно, разность давлений будет равна

$$p_2 - p_1 = \gamma x \sin \alpha.$$

Однако точное измерение малого наклона α трубки представляет некоторые трудности; кроме того, без тщательной проверки нельзя быть уверенным в том, что трубка совершенно прямая. Поэтому для точных

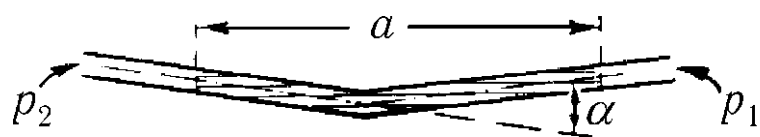


Рис. 13. Манометрический уровень Теплера

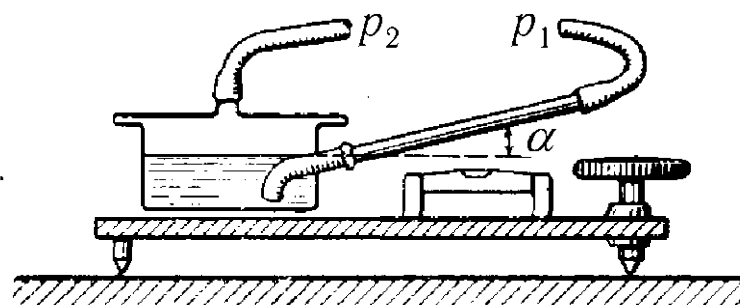


Рис. 14. Микроманометр Крелля

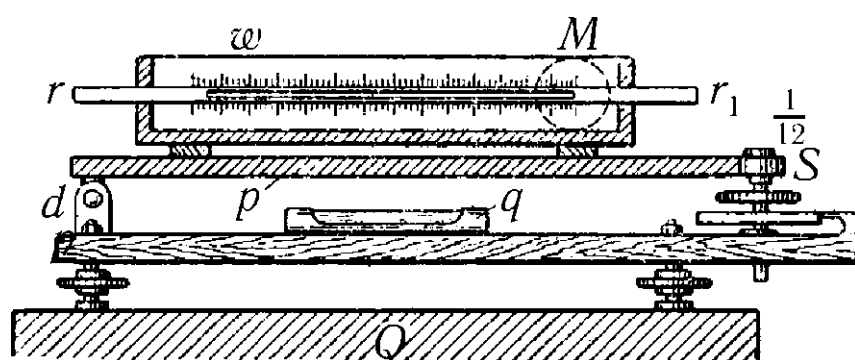


Рис. 15. Манометрический уровень Теплера

измерений при помощи таких приборов производится их предварительная тарировка.

Тарировка микроманометра Крелля производится следующим образом. Измеряют диаметр d широкого цилиндрического сосуда (этот сосуд должен быть выточен очень точно). Затем, пользуясь уровнем, тщательно выравнивают прибор, после чего начинают подливать в широкий сосуд взвешенные порции жидкости и каждый раз отсчитывают по шкале положение жидкости в узкой трубке. Каждая порция жидкости, налитая в широкий сосуд, нагружает первоначальный уровень и приводит к увеличению давления на величину, равную весу порции, деленной на площадь поперечного сечения широкого сосуда $\frac{\pi d^2}{4}$. При этом равновесие первоначальной системы жидкости получается совершенно таким же, как если бы соответствующее увеличение давления было вызвано воздухом. То обстоятельство, что долитая в сосуд жидкость в действительности смешивается с остальной жидкостью, для наших рассуждений значения не имеет. Полученные соответственные значения давления и положения жидкости в узкой трубке позволяют построить необходимую для отсчетов шкалу или составить таблицу.

Манометрический уровень Теплера является в высшей степени чувствительным прибором для измерения самых небольших разностей давлений, если только при работе с ним соблюдать тщательные меры предосторожности, указанные самим Тендером¹. Основная часть прибора представляет собой изогнутую посередине стеклянную трубку (рис. 13), внутри которой находится столбик нелетучей, легко подвижной жидкости (ксилол). Длина

¹Wiedem. Ann., т. 34 (1888), стр. 790; т. 56 (1895), стр. 609.

этого столбика равна около 25 см. Трубка проходит через наполненный водой сосуд ω (рис. 15) со стеклянными стенками, причем непосредственно позади трубки укрепляется шкала с миллиметровыми делениями (на рис. 15 изгиб трубки не показан). Сосуд с водой стоит на металлической доске p , наклон которой может регулироваться при помощи винта s . Угол поворота винта отсчитывается по лимбу. Так как шаг винта известен, то, зная угол его поворота, можно определить наклон доски p . Микроскоп M , укрепленный на доске p , позволяет наблюдать перемещение мениска жидкости в правом конце трубки rr' . Одинаковому давлению на обоих концах трубки rr' соответствует определенное нулевое положение манометрического уровня. Зная это положение, можно определить наблюдаемую разность давлений либо по перемещению мениска жидкости в трубке rr' , либо по углу, на который надо повернуть винт s , чтобы вернуть мениск в прежнее положение. Для тарирования, необходимого при первом способе, наблюдают перемещение мениска, происходящее только вследствие вращения винта s , т. е. при отсутствии разности давлений на обоих концах трубки rr' , и строят кривую или таблицу, связывающую это перемещение с углом поворота φ винта. Чем меньше угол перелома α трубки rr' , тем, очевидно, чувствительнее манометрический уровень. При очень малом угле α Тендеру удавалось измерять разности давлений порядка 10^{-8} кг/см^2 — 10^{-4} кг/м^2 .

Для измерения очень малых разностей давления существуют также манометры без жидкости. Один из таких приборов, сконструированный Рейхардтом¹, обладает особенно большой чувствительностью: он позволяет измерять разности давлений в 10^{-4} мм водяного столба и даже меньшие. Он представляет собой коробку (рис. 16), разделенную на две полости I и II . Эти полости соединены резиновыми трубками с теми пространствами, в которых надо измерить разность давлений. В перегородке между полостями имеется щель, через которую проходит с зазором в 0,1 мм изогнутый по дуге круга легкий поршень K . Этот поршень вместе с присоединенной к нему стрелкой Z подвешен в точке T на платиновой проволоке наподобие гальванометра. Резиновые трубки, подводящие в прибор давления p_1 и p_2 , должны быть широкими, так как иначе неизбежное течение газа или воздуха через зазор между стенками щели и поршнем, может вызвать в трубках заметное понижение давления.

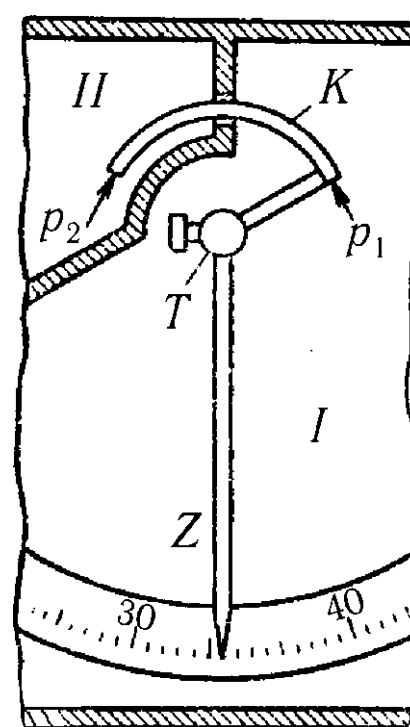


Рис. 16. Прецизионный манометр Рейхардта

Применение жидкостных манометров привело к установлению особого рода единиц для давления, широко распространившихся в практике. В самом деле, давление жидкости можно условиться измерять

¹Reichardt R., Zeitschr. f. Instrumentenkunde, 55 (1935) стр. 24; т. 79 (1935), стр. 1503.

непосредственно высотой того столба жидкости, который уравнивается этим давлением. Так как жидкостные манометры могут наполняться разными жидкостями с разными удельными весами, то при таком способе измерения давления необходимо каждый раз указывать название жидкости. Так, например, говорят о миллиметрах водяного столба, ртутного столба (сокращенно: вод. ст., рт. ст.). Как легко подсчитать, $1 \text{ мм вод. ст.} = 1 \text{ кг/м}^2 = 10^{-4} \text{ кг/см}^2$ (в самом деле, столб воды с площадью основания в 1 м^2 и высотой 1 мм имеет объем в 1 л и весит 1 кг). Первое соотношение ($1 \text{ мм вод. ст.} = 1 \text{ кг/м}^2$) особенно легко запоминается. Это привело к тому, что единица давления 1 кг/м^2 получила очень широкое распространение в технике (в авиационной, вентиляционной и т. д.). В тех случаях, когда требуется высокая точность отсчета высоты столба жидкости, вода как жидкость для измерения давления мало пригодна, так как она легко и неравномерно прилипает к стенкам стеклянной трубки. Значительно удобнее жидкости, растворяющие жир (алкоголь, толуол, ксилол и т. д.). Для измерения значительных разностей давлений удобнее всего применять ртуть, которая в чистом виде даст в не слишком узких трубках очень удобный для отсчета мениск. Удельный вес ртути равен $13,6 \text{ г/см}^3$ (точнее $13,595 \text{ г/см}^3$ при 0°C), поэтому $1 \text{ мм рт. ст.} = 13,6 \text{ кг/м}^2 = 0,00136 \text{ кг/см}^2$. Обратно, $1 \text{ кг/см}^2 = 735,5 \text{ мм рт. ст.}$ Единицей давления в 1 мм рт. ст. обычно пользуются в физике. В последнее время для нее предложено название *тор* (в честь Торичелли, см. § 9).

§ 9. Давление, меньшее атмосферного. Барометр. Если из сосуда, изображенного на рис. 11, выкачать немного воздуха, то давление в нем станет меньше атмосферного, вследствие чего уровень жидкости в колене *A* U-образной трубки поднимется выше уровня жидкости в колене *B*. Произойдет, как говорят, всасывание жидкости на высоту. На рис. 17 изображен такой же опыт в несколько измененном виде.

Возникает вопрос, до какой высоты возможно всасывание жидкости. В старину всасывание объясняли тем, что жидкость «боится пустоты» и поэтому поднимается, если давление над нею уменьшается. В действительности эти слова, конечно, ничего не объясняли, а только устанавливали определенный факт. Является ли «боязнь пустоты» безграничной или же имеет какие-то пределы — об этом не знали. Этим вопросом впервые занялся Галилей (Galilei). К этому его побудила неудача флорентийских мастеров, поставивших в одном из водяных насосов всасывающий клапан на высоте свыше 10 м над уровнем воды. Не-

смотря на все старания мастеров, насос не мог поднять воду на такую высоту. Причину этого впервые объяснил только ученик Галилея Торичелли (Torricelli) на основе опытов с ртутью, произведенных в 1643 г. по его побуждению его другом Вивiani (Viviani).

Правильное объяснение всасывания в настоящее время не представляет никаких затруднений. Всасывание возникает всегда в том случае, когда на столб жидкости действует давление, меньшее атмосферного. Но давление p_1 в сосуде, изображенном на рис. 17, нельзя сделать меньше нулевого значения, которое получается при полном выкачивании воздуха. Следовательно, жидкость в трубке может подняться самое большее на такую высоту h , которая соответствует полному давлению воздуха p_0 , т. е. на высоту, равную

$$h = \frac{p_0}{\gamma}.$$

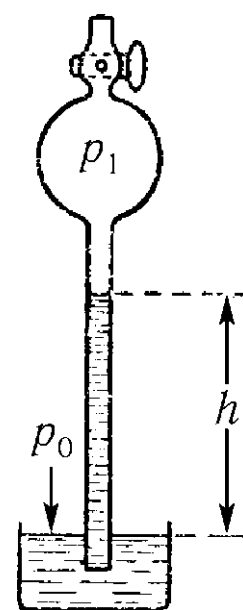


Рис. 17. Всасывание жидкости на высоту

Упомянутый выше опыт Вивiani состоял в следующем. Стеклянная трубка длиной в два локтя (120 см) со стеклянным шаром на одном конце целиком наполнялась через открытый конец до верху ртутью и закрывалась пальцем. Затем трубка переворачивалась шаром вверх и опускалась другим концом, оставаясь закрытой пальцем, в чашку со ртутью. Как только палец отнимался, ртуть сейчас же опускалась до высоты $1 \frac{1}{4}$ локтя (75 см) над уровнем ртути в чашке. Торичелли правильно заключил отсюда, что получающийся столб ртути уравнивается давлением наружного воздуха или, как можно сказать, весом столба воздуха, простирающегося до границ атмосферы и имеющего такое же поперечное сечение, как и столб ртути. Торичелли заметил также, что столб ртути имеет не всегда одинаковую высоту, и вывел отсюда, что давление воздуха подвержено определенным колебаниям. Этот факт оказался чрезвычайно важным для развития метеорологии. Наконец, Торичелли указал, что давление воздуха на вершине горы должно быть меньше, чем у подножия, и поэтому на вершине горы столб ртути должен быть ниже, чем у подножия. Это было доказано спустя несколько лет Перрье (Perrier), который по предложению Паскаля (Pascal) измерил высоту столба ртути у подножия и на вершине горы Пюи-де-Дом, имеющей высоту 975 м. Оказалось, что высота столба ртути на вершине горы была меньше, чем у подножия, на 3 дюйма. По предложению же Паскаля прибор, впервые примененный Вивiani, был назван *барометром*. Это название (от гре-

ческого *barus* — тяжелый) означает, что прибор измеряет вес столба воздуха, расположенного над местом наблюдения.

На применении барометра основана единица давления, называемая *физической атмосферой*. Средняя высота столба ртути в барометре на уровне моря составляет круглым числом 760 мм. Давление воздуха, соответствующее этому показанию барометра при температуре ртути в 0°C, условились считать нормальным и дали ему название физической атмосферы. Прилагательное «физическая» добавлено для того, чтобы устранить смешивание с технической атмосферой, равной 1 кг/см² и обычно применяемой в технике. Удельный вес ртути при 0°C равен 13,595 г/см³, следовательно, 1 см³ ртути весит 13,595 г. Поэтому столбу ртути высотой 76 см соответствует давление воздуха, равное

$$76 \cdot 13,595 = 1033,2 \text{ г/см}^2 = 1,0332 \text{ кг/см}^2.$$

Если наполнить барометр вместо ртути водой, то высота столба, уравновешивающего давление, равное 1,0332 кг/см², т. е. одной физической атмосфере, будет составлять 10,332 м. Следовательно, предельная высота, на которую может поднимать воду всасывающий насос, будет всегда меньше этого значения (практически вследствие наличия вредных пространств и зазоров она не превышает 6–7 м).

Из определения физической атмосферы следует, что ее величина в известной мере зависит от притяжения Земли. Так как последнее не одинаково во всех местах земного шара, то необходимо условиться, какое значение ускорения свободного падения является нормальным при определении физической атмосферы. Таким значением принято считать значение $g = 980,665 \text{ см/сек}^2$, которое имеет место на широте 45° на уровне моря. При всяком другом значении ускорения свободного падения g физическая атмосфера будет равна

$$\frac{1,0332 \cdot 980,665}{g} \text{ кг/см}^2,$$

причем, конечно, имеются в виду килограммы в рассматриваемом пункте наблюдения. Для того чтобы освободиться от этих несколько произвольных требований, в последнее время введена новая единица давления, связанная с системой единиц *CGS* и равная 10⁶ дин/см². Эта единица давления получила название *бар*. Одному бару при нормальной тяжести соответствует ртутный столб высотой 750,06 мм. Миллибар, равный 1/1000 бара, в настоящее время стал обычной единицей для измерения давления в метеорологии. Физическая атмосфера равна 1013,25 миллибара, а техническая атмосфера равна 980,66 миллибара.

§ 10. Равновесие жидкости в других силовых полях. В § 6–9 мы предполагали, что жидкость или газ находится в однородном поле тяжести, т.е. в таком поле, в котором ускорение свободного падения везде одинаково по величине и направлению. Это предположение достаточно хорошо оправдывается в пределах небольшой области и поэтому вполне допустимо для большинства приложений. Но если рассматриваются большие области, линейные размеры которых нельзя считать малыми по сравнению с радиусом Земли, то необходимо учитывать, что ускорение свободного падения не остается постоянным по величине и направлению во всей области. Другим примером, когда поле сил нельзя считать однородным, является равномерное вращение жидкости вместе с заключающим ее сосудом. В этом случае жидкость покоится относительно сосуда, но для того, чтобы рассматривать задачу как статическую, необходимо в каждой точке занимаемого жидкостью пространства прибавить к ускорению свободного падения ускорение, соответствующее центробежной силе. Поэтому рассмотрим в общей форме вопрос о равновесии однородной или неоднородной жидкости в произвольном силовом поле, в котором сила на единицу массы, т.е. ускорение, изменяется от места к месту как по величине, так и по направлению.

Выделим в жидкости маленькую призму с осью, перпендикулярной к направлению силы, и рассмотрим условие ее равновесия относительно перемещений, направленных параллельно оси. При помощи таких же рассуждений, как и в § 6, мы легко установим, что в любом направлении, перпендикулярном к направлению рассматриваемой силовой линии, давление не может изменяться. Далее из рассмотрения равновесия маленькой призмы с осью, параллельной направлению силы, мы найдем, что давление в направлении силы должно возрастать на величину

$$dp = g\rho dh, \quad (14)$$

где dh есть высота призмы, а g — напряженность силового поля. Если взять всю совокупность направлений, перпендикулярных к силовой линии в какой-нибудь ее точке, то она выделит около рассматриваемой точки элементарную площадку, нормальную к силовой линии. Из первого нашего заключения следует, что на каждой такой площадке давление имеет постоянное значение. В том случае, когда такие площадки, примыкающие друг к другу, образуют поверхность конечных размеров, т.е. когда силовое поле обладает так называемыми ортогональными поверхностями, из предыдущего следует, что давление имеет

постоянное значение во всех точках каждой ортогональной поверхности. Если же силовое поле не имеет ортогональных поверхностей, то равновесие жидкости в нем невозможно¹.

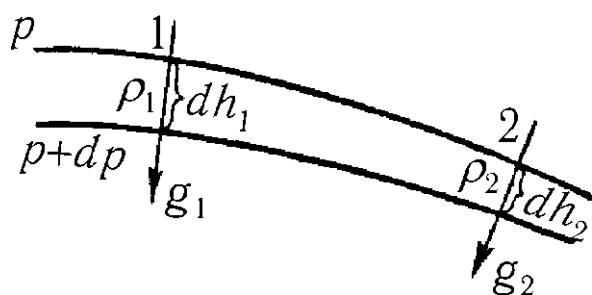


Рис. 18. Неоднородное силовое поле

Предположим, что силовое поле обладает ортогональными поверхностями, и рассмотрим две такие поверхности, давление на которых пусть равно p и $p + dp$ (рис. 18). Выберем на первой ортогональной поверхности две точки 1 и 2, через которые проходят силовые линии g_1 и g_2 . Пусть в точках 1 и 2 плотность равна ρ_1 и ρ_2 . Согласно формуле (14) мы имеем:

$$dp = g_1 \rho_1 dh_1,$$

$$dp = g_2 \rho_2 dh_2.$$

Если мы имеем однородную жидкость (§ 6), то плотность ρ постоянна во всей жидкости и из обоих равенств следует:

$$g_1 dh_1 = g_2 dh_2.$$

Если же мы имеем однородный газ (§ 7), то плотность ρ есть функция давления p ; но так как на ортогональной поверхности $p_1 = p_2 = \text{const}$, то необходимо должно быть, что на этой поверхности $\rho_1 = \rho_2 = \text{const}$, поэтому мы опять получим, что

$$g_1 dh_1 = g_2 dh_2.$$

Произведение gdh есть не что иное, как работа, совершаемая силой поля при переходе от одной ортогональной поверхности к другой. Согласно полученному нами результату эта работа имеет одинаковое значение в любом месте между обеими поверхностями уровня. Это показывает,

¹ В этом случае петлеобразная линия, проведенная перпендикулярно к силовым линиям, при возврате к исходной силовой линии попадает не в ту точку, из которой она была начата, а ниже или выше ее, в зависимости от направления обхода. Такое силовое поле можно построить, например, следующим образом: приведем две параллельные между собой плоскости и соединим их друг с другом при помощи семейства прямых, перпендикулярных к обеим плоскостям, следовательно между собой параллельных. Затем немного повернем одну из плоскостей относительно другой вокруг одной из проведенных прямых. Тогда все остальные прямые примут винтообразное расположение. Рассматривая их как силовые линии, легко убедиться, что полученное силовое поле не имеет ортогональных поверхностей.

что рассматриваемое нами силовое поле обладает потенциалом, следовательно, ортогональные поверхности являются поверхностями равного потенциала. Обозначив потенциал в какой-нибудь точке A через U , мы будем иметь:

$$dU = -gdh. \quad (15)$$

Знак минус взят потому, что в уравнении (14) мы приняли dh положительным в направлении g . Заменяя gdh в уравнении (14) его значением из уравнения (15), мы получим:

$$dp = -\rho dU,$$

или

$$dU = -\frac{dp}{\rho}, \quad (16)$$

откуда после интегрирования следует, что

$$U_A - U_B = \int_A^B \frac{dp}{\rho}. \quad (17)$$

В обоих рассматриваемых случаях (однородная жидкость и однородный газ) правую часть уравнения (17) можно вычислить, и мы получим давление непосредственно как функцию потенциала. Подводя итог полученным результатам, мы можем сказать:

Однородная жидкость или однородный газ может находиться в равновесии только в таком силовом поле, которое обладает потенциалом. Поверхности равного потенциала, ортогональные к силовым линиям поля, одновременно являются поверхностями равного давления. Давление возрастает в том направлении, в котором действует сила поля, причем увеличение давления равно $dp = -\rho dU$.

В неоднородной жидкости возможен такой случай, когда $g_1 dh_1 \neq g_2 dh_2$, но зато плотность распределена так, что везде имеет место равенство

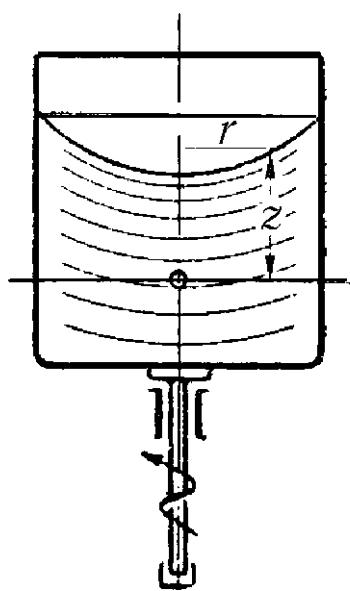
$$\rho_1 g_1 dh_1 = \rho_2 g_2 dh_2.$$

Однако легко видеть, что такое равновесие является неустойчивым. В самом деле, достаточно небольшого перемещения жидкости вдоль ортогональной поверхности (такое перемещение не требует затраты работы), чтобы сейчас же изменить распределение плотности, и следовательно, нарушить равновесие. Для устойчивого равновесия неоднородной жидкости по-прежнему необходимо, чтоб $g_1 dh_1 = g_2 dh_2$, т.е. жид-

кость должна находиться в силовом поле, имеющем потенциал. Но если $g_1 dh_1 = g_2 dh_2$, то для соблюдения равновесия требуется, чтобы соблюдалось также равенство $\rho_1 = \rho_2$. Следовательно, *неоднородная жидкость может находиться в устойчивом равновесии только в силовом поле, имеющем потенциал. Поверхности равного потенциала являются одновременно поверхностями равного давления и равной плотности.*

Таким образом, равенства (16) и (17) применимы и к неоднородной жидкости. Условия равновесия остаются такими же, какими они были выведены в § 6 и 7 для однородного поля тяжести.

Почти все силовые поля, встречающиеся в физике, за исключением магнитных полей, вызванных электрическим током, имеют потенциал, поэтому приведенное выше условие о существовании потенциала практически не вносит никакого ограничения. Но другое условие — постоянство плотности на каждой поверхности равного потенциала — практически весьма важно. Оно может не соблюдаться, например, в том случае, когда жидкость или газ в каком-нибудь месте нагревается. Это приводит к уменьшению плотности в этом месте, вследствие чего равновесие становится невозможным, так как нагретая жидкость приходит в движение и увлекает за собой соседние части жидкости. Только после того, как наиболее нагретые части жидкости расположатся выше других частей, устанавливается состояние покоя.



Свободная поверхность жидкости или поверхность раздела двух между собой несмешивающихся жидкостей разной плотности всегда совпадает с поверхностью равного потенциала. Поэтому поверхности равного потенциала называются также *поверхностями уровня*. В геодезии поверхность моря является основной поверхностью уровня; относительно этой поверхности производится отсчет всех высот.

Рис. 19. Жидкость во вращающемся сосуде

Поясним применение установленных выше законов на простом примере. Рассмотрим равновесие весомой однородной жидкости, покоящейся относительно сосуда, равномерно вращающегося вокруг вертикальной оси (рис. 19). Прежде всего найдем потенциал силового поля. Он, очевидно, складывается из двух потенциалов: потенциала поля тяжести и потенциала поля центробежной силы.

Возьмем цилиндрические координаты r, z , причем ось z направим вертикально вверх. Тогда потенциал поля тяжести будет равен

$$U_1 = U_0 + gz,$$

где g есть ускорение свободного падения, а U_0 — произвольное начальное значение потенциала. Потенциал поля центробежной силы определяется ускорением $\omega^2 r$ где ω есть угловая скорость вращения, общая для сосуда и жидкости. Подставляя это значение ускорения в соотношение (15) и интегрируя в направлении ускорения, т.е. в направлении r , мы найдем потенциал поля центробежной силы:

$$U_2 = - \int \omega^2 r dr = -\frac{\omega^2 r^2}{2}.$$

Следовательно, полный потенциал равен

$$U = U_1 + U_2 = U_0 + gz = -\frac{\omega^2 r^2}{2}. \quad (18)$$

Поверхности равного потенциала мы получим, полагая и $U = \text{const}$:

$$z = \text{const} + \frac{\omega^2 r^2}{2g}.$$

Таким образом, свободная поверхность и все поверхности равного давления представляют собой параболоиды вращения с общим параметром $\frac{g}{\omega^2}$.

Интегрируя соотношение

$$dp = -\rho dU,$$

мы найдем давление p в любой точке жидкости как функцию потенциала U :

$$p - p_0 = -\rho U, \quad (19)$$

где p_0 есть давление на свободной поверхности $U = 0$. Подставляя в равенство (19) вместо U его выражение из равенства (18) и заменяя ρg через γ , мы получим:

$$p = \text{const} + \gamma(-z + \frac{\omega^2 r^2}{2g}).$$

§ 11. Поверхностное натяжение (капиллярность). Как показывают наблюдения, свободная поверхность жидкости стремится уменьшить свою площадь. Это свойство объясняется тем, что свободная поверхность находится в напряженном состоянии, подобном тому, в котором находится равномерно натянутая тонкая пленка. Причиной такого состояния является следующее: каждая частица жидкости, находящаяся вблизи свободной поверхности, притягивается соседними частицами; результирующая всех этих сил притяжения направлена внутрь жидкости, вследствие чего на поверхности остается ровно столько частиц, сколько безусловно необходимо для образования свободной поверхности. Такое же явление наблюдается и на поверхности соприкосновения двух несмешивающихся между собой жидкостей. Указанное выше напряженное состояние называется *поверхностным натяжением*,

а иногда — *капиллярным натяжением*. Последнее название обусловлено тем, что поверхностное натяжение особенно резко наблюдается в тонких, так называемых волосных или капиллярных трубках.

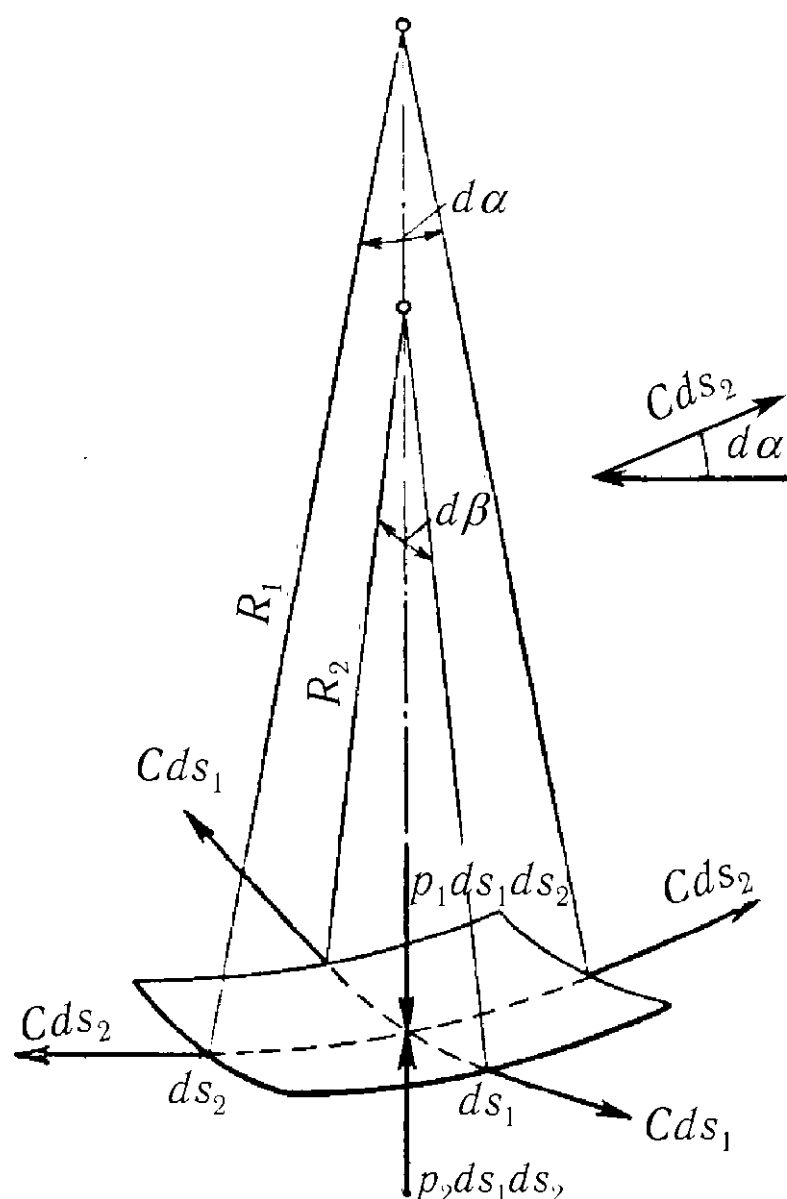


Рис. 20. Равновесие элементарной площадки на поверхности соприкосновения двух весоных жидкостей

нами ds_1 и ds_2 (рис. 20). Тогда вследствие разности давлений $p_1 - p_2$ на площадь прямоугольника будет действовать сила $(p_1 - p_2)ds_1ds_2$. Поверхностное натяжение приводит к тому, что на каждую сторону

На плоских поверхностях соприкосновения поверхностное натяжение не наблюдается, так как на таких поверхностях все силы натяжения сами по себе образуют уравновешенную систему сил. Но на искривленной поверхности силы натяжения сами по себе не могут уравновешиваться, следовательно, должна существовать какая-то сила, которая, уравновешивая силы натяжения, обеспечивает равновесие. Такой силой является разность давлений $p_1 - p_2$, по обе стороны от поверхности соприкосновения. Вырежем на поверхности соприкосновения небольшой криволинейный прямоугольник со сторо-

прямоугольника действует сила натяжения, направленная наружу от прямоугольника.

Пусть величина поверхностного натяжения на единицу длины равна C (так называемая *капиллярная постоянная*). Тогда на стороны прямоугольника будут действовать две силы Cds_1 , образующие между собой угол $d\beta$, и две силы Cds_2 , образующие между собой угол $d\alpha$. Из рис. 20 мы имеем:

$$d\alpha = \frac{ds_1}{R_1}, \quad d\beta = \frac{ds_2}{R_2}.$$

Следовательно, равнодействующая двух сил Cds_1 равна

$$Cds_1 d\beta = \frac{Cds_1 ds_2}{R_2},$$

а равнодействующая двух сил Cds_2 равна

$$Cds_2 d\alpha = \frac{Cds_2 ds_1}{R_1}.$$

Из условия равновесия всех сил, действующих на прямоугольник, мы имеем:

$$p_1 - p_2 = C\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \quad (20)$$

Из наших рассуждений следует, что величины R_1 и R_2 суть не что иное, как радиусы кривизны кривых, образуемых при пересечении свободной поверхности с двумя плоскостями, перпендикулярными друг к другу и к касательной плоскости в центре взятой элементарной площадки¹.

Давление в весоной жидкости с удельным весом γ определяется формулой (7). Применяя эту формулу к поверхности соприкосновения двух весоных жидкостей с удельными весами γ_1 и γ_2 , (на рис. 21 изображены для примера две такие поверхности), мы будем иметь

$$p_1 = p_2 - \gamma_1 z, \quad p_2 = p_0 - \gamma_2 z.$$

Подставляя эти значения p_1 и p_2 в уравнение (20), мы получим:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{C} z. \quad (21)$$

¹Из равенства (20) следует известная геометрическая теорема, согласно которой для любой поверхности сумма $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ зависит от направлений, в которых проведены стороны прямоугольника ds_1 и ds_2 . В самом деле, левая часть этого равенства безусловно не зависит от указанных направлений, следовательно, не может от них зависеть и правая часть.

Эта формула позволяет при помощи измерения радиусов кривизны наблюдаемой поверхности соприкосновения определить величину капиллярной постоянной C . Однако существует более удобный способ определения C , о котором будет сказано ниже.

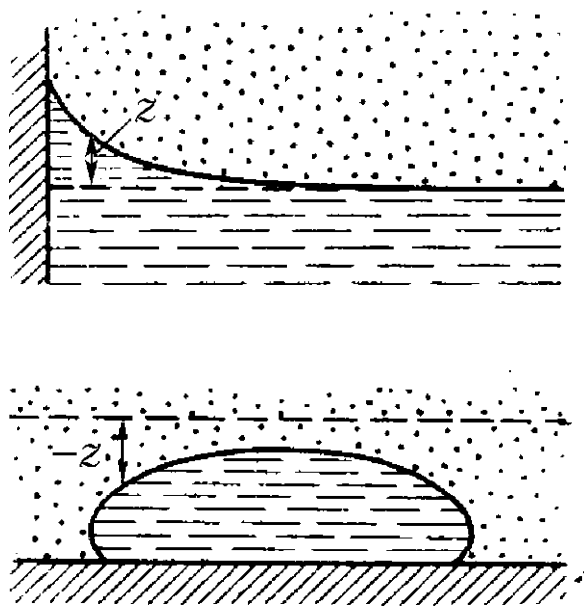


Рис. 21. Поверхности соприкосновения двух весо-
мых жидкостей

Из формулы (21) следует, что если разность удельных весов обеих жидкостей очень мала, то уменьшение величины $\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{C}$ в n^2 раз влечет за собой геометрически подобное увеличение величин R_1 , R_2 и z , определяющих поверхность соприкосновения, в n раз. При $\gamma_2 = \gamma_1$ влияние тяжести исчезает: соответствующие поверхности соприкосновения представляют собой так называемые минимальные поверхности. Если одновременно с приближением разности $\gamma_2 - \gamma_1$ к нулю отодвигать плоскость $z = 0$ в бесконечность, то сумма $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ принимает постоянное значение, что дает минимальную поверхность с заданным объемом, простейшим примером которой является шаровая поверхность. Такие минимальные поверхности очень легко воспроизводятся при помощи мыльных пленок. В сферическом мыльном пузыре давление внутри больше наружного давления на величину

$$p_1 - p_2 = \frac{4C}{R}.$$

Множитель 4 в числителе получается потому, что в мыльном пузыре имеются две поверхности соприкосновения мыльной пленки с воздухом, поэтому в формулу (20) следует подставить $2C$ вместо C .

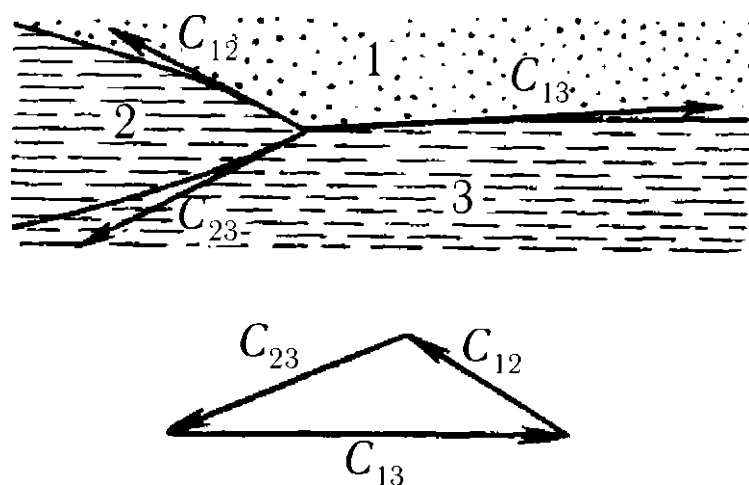


Рис. 22. Равновесие трех сил по-
верхностного натяжения

Если три жидкости 1, 2 и 3 соприкасаются между собой вдоль общей линии, то равновесие возможно только при условии, что силы поверхностного натяжения образуют уравновешенную систему. Следовательно, все три поверхности соприкосновения должны пересекаться между собой под вполне определенными углами (рис. 22). Эти углы легко найти, построив треугольник из сил поверхностного натяжения C_{12} , C_{13} , C_{23} . Если величина C_{13} больше суммы ве-

личин C_{12} и C_{23} , что имеет место, например, тогда, когда веществом 1 является воздух, веществом 2 — минеральное масло и веществом 3 — вода, то равновесие невозможно. В этом случае вещество 2, т.е. минеральное масло, растекается в виде очень тонкой пленки по всей поверхности воды, что можно наблюдать, например, на мокрых асфальтовых мостовых, когда из мотора автомобиля на мостовую падает несколько капель смазочного масла. Если же веществом 2 является расплавленный жир, то между водой и воздухом оно принимает форму плоской линзы (глазки жира в супе). Построение на рис. 22 соответствует именно этому случаю. Если одним из соприкасающихся веществ является твердое тело, то перемещения возможны только в направлении, параллельном поверхности твердого тела, и поэтому достаточно рассмотреть равновесие соответствующих составляющих сил поверхностного натяжения (рис. 23).

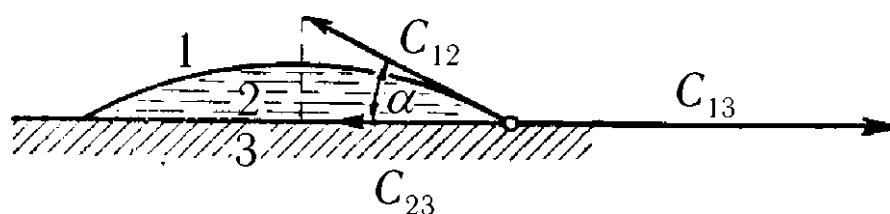


Рис. 23. Краевой угол около поверхности твердого тела

Следовательно, условием равновесия будет:

$$C_{12} \cos \alpha + C_{23} = C_{13},$$

где α есть так называемый *краевой угол*. Отсюда мы имеем:

$$\cos \alpha = \frac{C_{13} - C_{23}}{C_{12}}. \quad (22)$$

Если капиллярная постоянная для поверхности соприкосновения обеих жидкостей 1 и 2 известна, а угол α измерен путем наблюдения, то из равенства (22) можно определить разность $C_{13} - C_{23}$, но каждая из величин C_{13} и C_{23} остается неопределенной. Разность $C_{13} - C_{23}$ может быть и положительной и отрицательной. В последнем случае угол $\alpha > \frac{\pi}{2}$, что имеет место при соприкосновении, например, воздуха, ртути и стекла (см. нижнюю часть рис. 21, где изображена капля ртути на стекле). Наконец, разность $C_{13} - C_{23}$ может оказаться больше C_{12} . В таком случае жидкость 2 покрывает тонкой пленкой всю поверхность твердого тела 3. Так ведет себя, например, керосин.

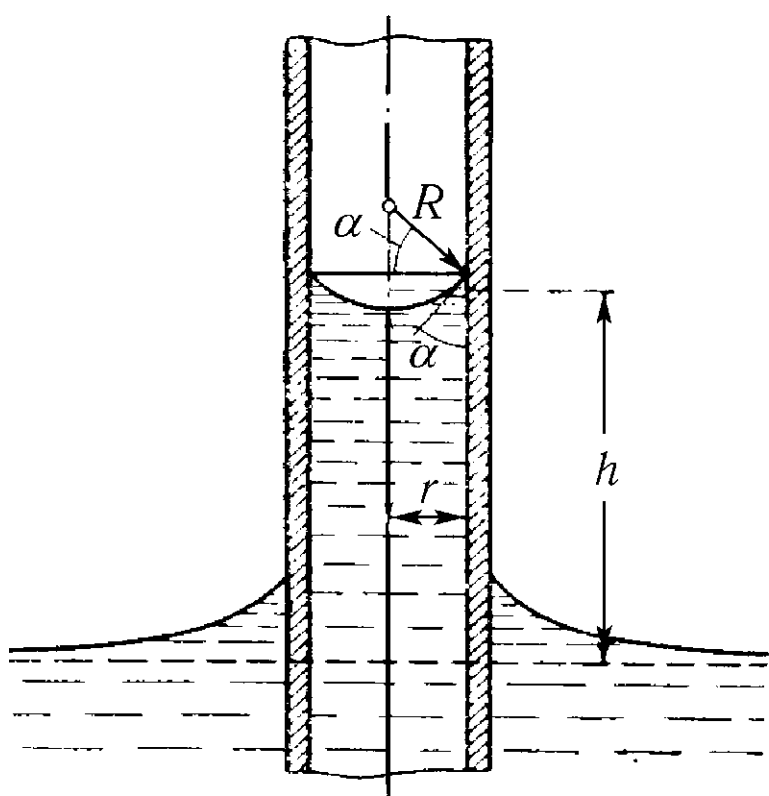


Рис. 24. Подъем жидкости в капиллярной трубке

Если в жидкость опустить узкую трубочку, то в зависимости от величины краевого угла α уровень жидкости в трубочке будет либо выше, либо ниже уровня жидкости вне трубочки (рис. 24). Примем для упрощения расчета, что поверхность жидкости в трубочке имеет форму шарового сегмента; такое допущение тем точнее, чем меньше радиус трубочки r по сравнению с высотой h подъема жидкости. Тогда, согласно рис. 24, мы получим для радиуса шарового сегмента величину

$$R = \frac{r}{\cos \alpha}.$$

Подставляя это значение R в равенство (21), мы найдем высоту подъема жидкости в трубочке:

$$h = \frac{2C_{12}}{\gamma_2 - \gamma_1} \frac{\cos \alpha}{r}. \quad (23)$$

Из этой формулы следует, что в трубочках с очень малым радиусом r высота подъема h может быть очень большой (всасывающее действие промокательной бумаги, мелкопористой глины и т. п.). Подставляя в равенство (23) вместо $\cos \alpha$ его значение из формулы (22) и умножая обе части равенства на πr^2 , мы получим очень наглядное уравнение

$$(\gamma_2 - \gamma_1) \pi r^2 h = (C_{13} - C_{23}) \cdot 2\pi r,$$

согласно которому вес столба жидкости в трубочке за вычетом потери вследствие поддерживающей силы воздуха равен результирующей сил поверхностного натяжения на стенках трубочки.

Если поверхность трубочки предварительно смочена жидкостью, то при составлении уравнения равновесия надо заменить разность $C_{13} - C_{23}$ через C_{12} , что приводит к равенству

$$\cos \alpha = 1.$$

Следовательно, в этом случае $\alpha = 0$, и высота подъема принимает наибольшее значение, равное

$$C_{12} = \frac{1}{2}(\gamma_2 - \gamma_1)hr.$$

Измеряя h и r , мы можем определить при помощи этой формулы величину C_{12} . О другом способе определения капиллярной постоянной, основанном на измерении капиллярных волн, будет сказано в § 16 гл. II.

Для примера приведем некоторые значения капиллярной постоянной C при 20°C:

Вода	относительно	воздуха	$C = 72,5 \text{ дин/см}$
Масло	»	»	$C = 25 \div 30 \text{ дин/см}$
Ртуть	»	»	$C = 472 \text{ дин/см.}$

ГЛАВА 2

Кинематика жидкостей. Динамика жидкостей, лишенных трения

§ 1. Предварительные замечания. Движения жидкостей и движения газов имеют столь много общих свойств, что целесообразно изучать те и другие совместно. Правда, газы обладают значительно большей сжимаемостью, чем жидкости. Однако при движении газа вопрос заключается не в том, в какой мере газ вообще может сжиматься, а в том, насколько он в действительности сжимается при рассматриваемом движении. Для значительного сжатия газа необходимо значительное изменение давления. Между тем при небольших и умеренных скоростях, а также при умеренном протяжении движущейся массы газа в высоту давление изменяется по сравнению со своим средним значением очень немного, и поэтому соответствующие изменения объема настолько малы, что ими в большинстве случаев можно для упрощения расчетов пренебрегать. Тогда течения газа ничем не будут отличаться от течений несжимаемой жидкости.

В самом деле, как мы увидим ниже, в § 5, при движениях атмосферного воздуха со скоростью до 50 м/сек и при условии, что протяжение воздушного потока в высоту не превышает 100 м , изменения объема при обычной температуре не превышают 1% . Только при скорости 150 м/сек они достигают круглым числом 10% . Но при скоростях, близких к скорости звука (около 340 м/сек), изменения объема достигают большой величины и потому заметно влияют на характер течения.

Наконец, при скоростях, больших скорости звука, характер течения становится совершенно иным по сравнению с обычным поведением несжимаемых жидкостей.

В настоящей и следующей главе мы будем рассматривать, главным образом, течения без заметного изменения объема. Для того чтобы при этом не говорить каждый раз, что все сказанное относится в равной мере и к жидкостям, и к газам, мы будем применять во всех случаях только слово *жидкость* как собирательное понятие и для жидкостей,

и для газов. В этом смысле газы следует считать сжимаемыми жидкостями. Особенности движений со значительными изменениями объема будут рассмотрены в гл. IV.

§ 2. Методы кинематического исследования течения жидкости. Для получения исчерпывающей картины течения, необходимо для каждой частицы жидкости знать ее положение в пространстве в каждый момент времени; в самом деле, определяя изменение положения частицы в пространстве при изменении времени, мы нашли бы ее скорость и ускорение. Для составления такой картины необходимо прежде всего как-то обозначить отдельные частицы жидкости, чтобы отличать их друг от друга. Это можно сделать следующим образом. В произвольный момент времени $t = t_0$ отнесем рассматриваемое течение жидкости к произвольной системе координат, например, прямоугольной. Тогда каждой частице жидкости будет соответствовать вполне определенная тройка чисел a, b, c . Эта тройка чисел и будет служить для рассматриваемой частицы ее обозначением при исследовании течения. Пусть в любой другой момент времени t , не совпадающий с t_0 , координаты рассматриваемой частицы жидкости будут x, y, z . Эти координаты будут, очевидно, функциями не только времени t , но и тройки чисел a, b, c , обозначающих частицу. Следовательно, для составления картины течения жидкости необходимо знать функции

$$\begin{cases} x = F_1(a, b, c, t), \\ y = F_2(a, b, c, t), \\ z = F_3(a, b, c, t). \end{cases} \quad (1)$$

Для полной характеристики состояния движущейся жидкости необходимо знать еще давление p , а для жидкости переменной плотности ρ — также и последнюю.

Однако доведение такого метода исследования течения жидкости до конечного численного результата удастся только в немногих, особенно простых случаях. Поэтому обычно предпочитают пользоваться другим, более простым методом, позволяющим указать, что происходит в каждой точке пространства в каждый момент времени. Следовательно, при этом методе исследования индивидуальная судьба отдельных частиц оставляется без внимания. Если рассматриваемое течение — установившееся, т.е. не изменяющееся во времени, то для получения картины движения достаточно указать величину и направление скорости в каждой точке пространства, занятого потоком; кроме того, для полного описания состояния движения необходимо определить также

давление, а при переменной плотности — и последнюю. Если же течение неустановившееся, т. е. изменяющееся во времени, то скорость и давление (в необходимом случае и плотность) должны быть указаны для каждого момента времени. Математически эти указания даются обычно в виде зависимостей, связывающих три проекции скорости u, v, w на прямоугольные оси координат (в необходимом случае также давление p и плотность ρ) с пространственными координатами x, y, z и временем t , т. е. в виде уравнений:

$$\begin{cases} u = f_1(x, y, z, t), \\ v = f_2(x, y, z, t), \\ w = f_3(x, y, z, t). \end{cases} \quad (2)$$

Систему уравнений (1) называют *уравнениями Лагранжа*, а систему уравнений (2) — *уравнениями Эйлера*, хотя Эйлеру были известны обе системы.

Если желательно проследить траекторию какой-нибудь частности, то необходимо проинтегрировать систему из трех дифференциальных уравнений

$$dx = u dt, \quad dy = v dt, \quad dz = w dt.$$

Так как три постоянные интегрирования можно рассматривать как координаты частицы жидкости в некоторый начальный момент времени, то мы опять приходим к уравнениям Лагранжа (1).

Наглядное представление о мгновенной картине течения жидкости дают так называемые *линии тока*, касательные к которым указывают направление вектора скорости в точках касания. Линии тока совершенно аналогичны силовым линиям силовых полей. Линии тока определяются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}.$$

При установившемся течении линии тока совпадают с траекториями частиц. При неустановившемся течении такое совпадение не имеет места. В самом деле, касательные к линии тока дают направления скорости разных частиц жидкости в последовательных точках пространства в *определенный момент времени*, в то время как касательные к траектории дают направления скорости определенных частиц в *последовательные моменты времени*.

Необходимо заметить, что форма линий тока одного и того же потока, а также форма траекторий зависят от системы отсчета. Так, например, при движении тела в жидкости для наблюдателя, покоящегося относительно невозмущенной жидкости, линии тока и траектории будут совсем иными, чем для наблюдателя, движущегося вместе с телом.

Линии тока можно сделать видимыми, если поверхность жидкости посыпать мелкими частицами такого нерастворимого вещества, которое может двигаться вместе с жидкостью. Можно также ввести такие частицы внутрь жидкости. При съемке с короткой выдержкой каждая введенная в жидкость частица оставляет на фотографической пластинке короткую черточку. При достаточно большом числе частиц черточки тесно примыкают друг к другу и дают картину линий тока. Для получения траекторий необходимо уменьшить количество вводимых в жидкость посторонних частиц и производить съемку с длительной выдержкой.

На рис. 25 и 26 изображены фотографические снимки пластинки, движущейся в неподвижной жидкости. Оба снимка сделаны одновременно, но в разных системах отсчета, а именно, снимок на рис. 25 получен при помощи камеры, неподвижной относительно невозмущенной жидкости, и снимок на рис. 26 — при помощи камеры, неподвижной относительно двигавшейся в жидкости пластинки, т. е. двигавшейся вместе с пластинкой. Для получения снимков поверхность жидкости была посыпана ликоподием.

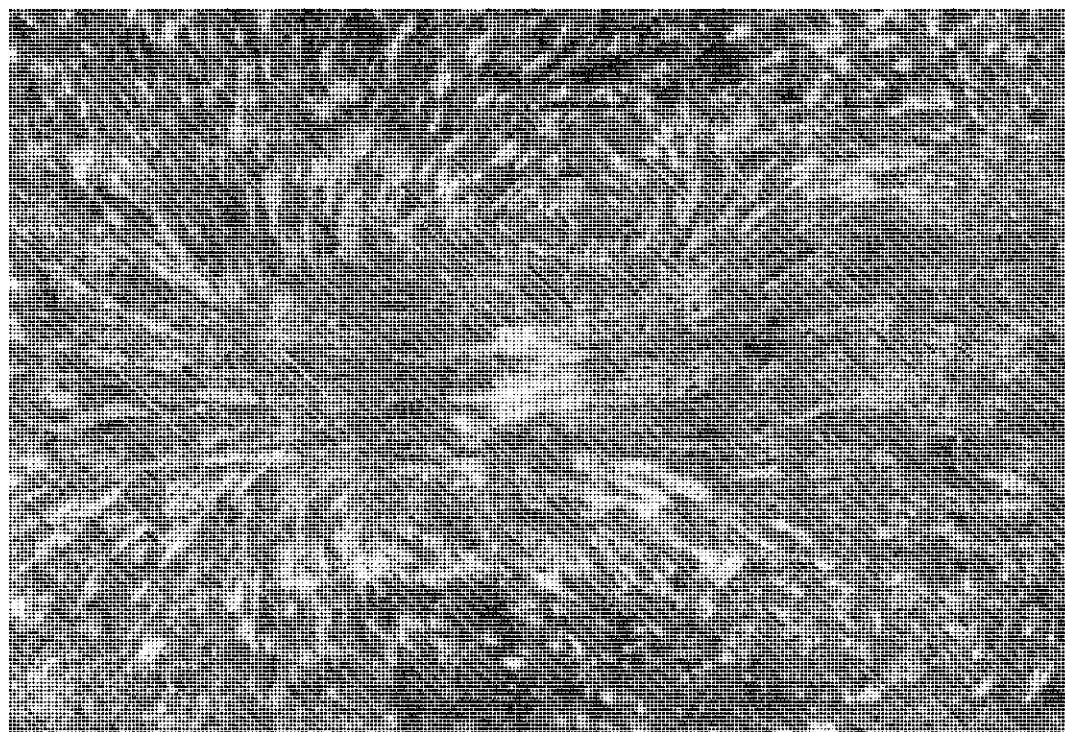


Рис. 25. Течение около движущейся пластинки. Снимок сделан неподвижной фотокамерой. Путь, проделанный пластинкой, заметен по следам ее боковых краев

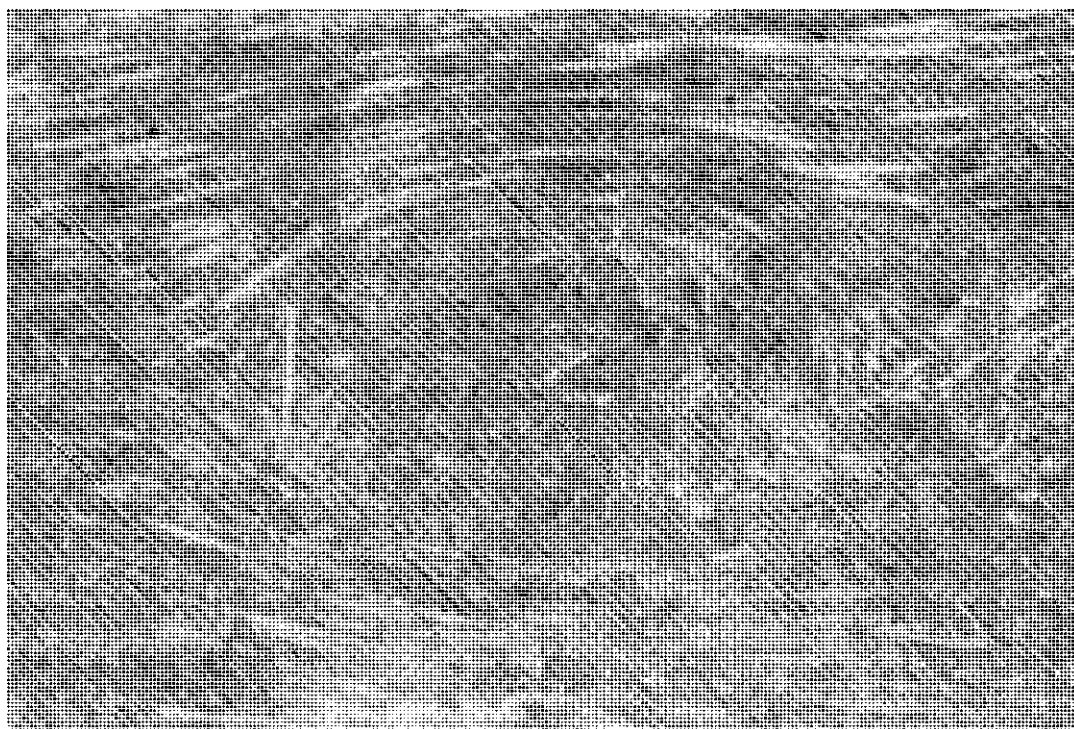


Рис. 26. Течение около движущейся пластинки. Снимок сделан фотокамерой, двигавшейся вместе с пластинкой

Если провести линии тока через все точки какого-нибудь небольшого замкнутого контура, то при условии, что поле скоростей везде непрерывно, эти линии образуют на сколь угодно большом протяжении так называемую *трубку тока*. Такая трубка обладает той особенностью, что жидкость внутри нее в рассматриваемый момент времени течет, как в трубке с твердыми стенками. В самом деле, согласно определению, жидкость течет параллельно линиям тока; если бы жидкость проходила через стенку трубки тока, то это означало бы, что существует составляющая скорости, перпендикулярная к линиям тока, что противоречит определению последних. Жидкость, текущая внутри трубки тока, называется *жидкой струйкой*. При установившихся течениях трубки тока сохраняются неизменными все время и жидкость течет в них все время как в трубках с твердыми стенками. При неустановившихся течениях в трубках тока в каждый следующий момент времени текут иные частицы, чем в предыдущий момент. Мысленно разбивая все пространство, занятое жидкостью, на трубки тока, можно получить очень наглядное представление о течении жидкости. При решении многих простых задач, например, при изучении движения жидкостей в трубках и каналах, допустимо рассматривать все пространство, занятое потоком жидкости, как одну единственную жидкую струйку. При таком способе исследования неодинаковость скоростей в поперечном сечении трубы или канала оставляется без внимания и весь расчет сводится к получению некоторых закономерностей для средней скорости течения.

§ 3. Неразрывность. В действительно существующих потоках жидкостей и газов материя нигде не исчезает и нигде вновь не создается. Поэтому мы можем рассматривать только такие скоростные поля, которые удовлетворяют требованию сохранения материи или массы.

Проще всего математически сформулировать это требование для установившихся движений, для которых форма линий тока достаточно известна. В таком случае очевидно, что через каждое поперечное сечение трубки тока должна протекать в единицу времени одна и та же масса жидкости. В самом деле, если бы эта масса для двух поперечных сечений не была одинакова, то масса жидкой струйки между обоими поперечными сечениями должна была бы неограниченно возрастать или убывать, что противоречит условию установившегося состояния течения. Пусть F есть поперечное сечение трубки тока в каком-либо месте, w — средняя скорость в этом сечении¹, ρ — плотность в этом сечении; тогда объем жидкости, протекающий в единицу времени через рассматриваемое сечение, будет равен Fw , а масса жидкости, протекающая через это же сечение, будет равна ρFw . Таким образом, требование сохранения массы сводится к тому, чтобы во всех поперечных сечениях одной и той же трубки тока величина ρFw имела постоянное значение, т. е. чтобы соблюдалось уравнение

$$\rho Fw = \text{const.} \quad (3)$$

Отсюда следует, что внутри установившегося потока жидкая струйка нигде не может закончиться. Она либо должна простираться от одной границы рассматриваемого пространства до другой, либо должна быть замкнутой.

Для потоков, в которых не происходит изменений объема, т. е. для потоков несжимаемой жидкости, все приведенные выше соображения о массе распространяются и на объем. Но так как теперь через рассматриваемое поперечное сечение трубки тока за данное время не может пройти больший объем, чем через какое-нибудь другое поперечное сечение, то все предыдущие соображения могут быть применены не только к установившимся, но и к неустановившимся потокам. Таким образом, для *несжимаемых потоков*, безразлично, установившихся или

¹Мы применяем для обозначения скорости течения букву w вместо v по следующей причине: при расчетах газовых потоков со значительными изменениями объема, когда наряду с гидродинамическими соотношениями необходимо пользоваться также термодинамическими соотношениями, приходится оперировать с объемом единицы массы, для которого в термодинамике установилось обозначение через букву s .

неустановившихся, всегда имеет место уравнение:

$$Fw = \text{const.} \quad (4)$$

Согласно этому уравнению скорость жидкой струйки обратно пропорциональна ее поперечному сечению. Разделим все пространство, занимаемое потоком жидкости, на такие трубки тока, чтобы через каждую из них в единицу времени протекали равные количества жидкости. Тогда в тех местах потока, где скорость больше и, следовательно, поперечные сечения трубок тока меньше, трубки тока будут расположены гуще и, наоборот, в тех местах потока, где скорость меньше, трубки тока будут расположены реже. Число трубок тока, пронизывающих единицу площади в каком-нибудь месте потока, пропорционально скорости течения в этом месте. Следовательно, картина трубок тока несжимаемого потока дает представление об этом потоке не только направлением линий тока в каждом месте, но и густотой расположения трубок.

Уравнение (4) приобретает особенно простой и наглядный смысл в том случае, когда весь поток можно рассматривать как одну единственную жидкую струйку. В этом случае поперечные сечения жидкой струйки заранее известны, и средняя скорость в каждой точке такого несжимаемого потока определяется из уравнения

$$Fw = Q,$$

где Q есть так называемый *объемный расход* жидкости (или *мощность потока*), т.е. объем, протекающий через поперечное сечение потока в единицу времени.

Для потоков, в которых происходят изменения объема, имеет место аналогичное уравнение

$$\rho Fw = M,$$

где M есть масса, протекающая через поперечное сечение потока в единицу времени. Но так как в сжимаемых потоках плотность ρ зависит от давления, то теперь для определения скорости одного только приведенного уравнения недостаточно (см. по этому поводу гл. IV).

Если поток установившийся и несжимаемый, то при указанном упрощенном представлении потока для его описания достаточно только одной независимой переменной, а именно, расстояния рассматриваемого поперечного сечения от какой-нибудь начальной точки, измеренного вдоль центральной линии трубки тока. В таком случае говорят об *одномерном* представлении потока в отличие от трехмерного представления, когда полностью учитывается пространственное изменение

скорости и других величин. Совокупность задач о движении жидкости, рассматриваемых путем одномерного представления, принято называть *гидравликой*. Задачи же, рассматриваемые путем трехмерного (или двухмерного) представления, составляют предмет гидродинамики. Наконец, совокупность задач о движении воздушных потоков часто называют *аэродинамикой*.

При трехмерном рассмотрении течений математическое выражение условия сохранения массы проще всего получить, если вычислить количества жидкости, втекающей и вытекающей в небольшой параллелепипед со сторонами dx , dy и dz (рис. 27), и приравнять эти количества друг другу. Выполним эти вычисления для несжимаемой жидкости. Обозначим проекции скорости на оси координат через u , v , w . Тогда в направлении оси x в параллелепипед втекает слева в одну секунду количество жидкости $dy dz \cdot u$,

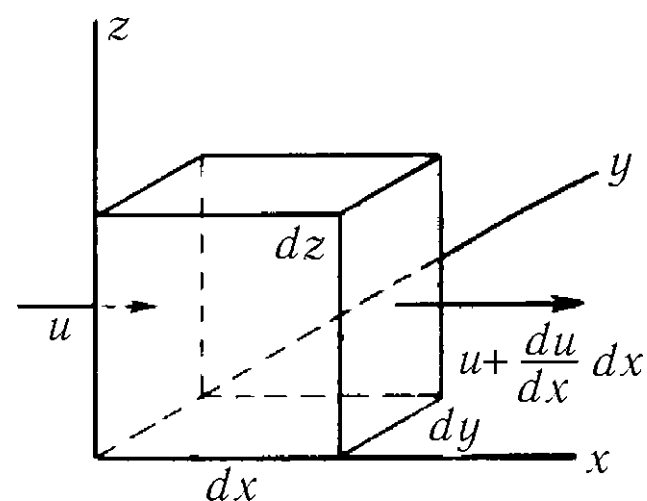


Рис. 27. К выводу уравнения неразрывности

а справа, где скорость u уже изменилась и стала равной $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$, вытекает количество жидкости $dy dz(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx)$. Следовательно, в одну секунду из параллелепипеда вытекает в направлении оси x жидкости больше, чем втекает, на величину

$$dx dy dz \cdot \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Аналогичные выражения получаются и для направлений y и z . Условие сохранения массы требует, чтобы сумма трех полученных приращений была равна нулю, следовательно, мы получаем уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

Это уравнение называется *уравнением неразрывности*.

Пусть жидкость где-либо граничит с твердым телом или с другой жидкостью. Из условия неразрывности потока следует, что нигде не должно возникать ни разрывов жидкости, ни взаимного проникновения обоих веществ. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы составляющие скорости, перпендикулярные к поверхности соприкосновения обоих веществ, были одинаковы с обеих сторон этой поверхности. Если рассматривается неподвижное тело или твердая стенка, обтекаемая

жидкостью, то составляющая скорости жидкости, перпендикулярная к поверхности тела или к стенке, должна быть здесь равна нулю. На составляющую скорости, параллельную стенке, условие неразрывности не налагает никаких ограничений, следовательно, эта составляющая может иметь любые значения.

§ 4. Силы в движущейся жидкости. Уравнение Бернулли. Как мы видели в гл. I, в покоящейся жидкости действуют и дают уравновешенную систему два рода сил: *силы тяжести* (и другие массовые силы) и *разности давлений*. Эти же силы действуют и в движущейся жидкости, но здесь к ним присоединяется еще *трение жидкости*, которое следует рассматривать как сопротивление деформации. Трение жидкости подробно будет рассмотрено в следующей главе, в этой же главе мы будем им пренебрегать. Жидкости, наиболее важные для техники (вода, воздух и др.), обладают очень малой вязкостью, и поэтому во многих случаях сопротивление, возникающее в них вследствие трения, столь мало, что пренебрежение им вполне оправдано. Кроме того, такое пренебрежение трением является и необходимым, так как только в этом случае соотношения между силами получаются достаточно простыми для того, чтобы можно было вывести из них наглядные закономерности. Поэтому обычно принято основные законы движения жидкостей выводить на основе идеализированного представления о *жидкости, лишенной трения*, и только после этого учитывать, какие изменения вносит наличие трения в идеальное поведение жидкости. Мы также будем следовать этому пути, причем предположим, что рассматриваемая нами идеальная жидкость обладает также свойством несжимаемости, следовательно, никаких изменений объема при движении не происходит. Кроме того, такое пренебрежение трением является и необходимым, так как только в этом случае соотношения между силами получаются достаточно простыми для того, чтобы можно было вывести из них наглядные закономерности. Поэтому обычно принято основные законы движения жидкостей выводить на основе идеализированного представления о *жидкости, лишенной трения*, и только после этого учитывать, какие изменения вносит наличие трения в идеальное поведение жидкости. Мы также будем следовать этому пути, причем предположим, что рассматриваемая нами идеальная жидкость обладает также свойством несжимаемости, следовательно, никаких изменений объема при движении не происходит.

Для того чтобы найти соотношение между давлением и массовой силой, с одной стороны, и кинематическими величинами — с другой,

будем исходить из основного закона динамики: сила равна массе, умноженной на ускорение. Выделим в движущейся жидкости частицу в виде небольшого цилиндра с осью, расположенной вдоль линии тока s (рис. 28). Пусть высота цилиндра равна ds , а поперечное сечение равно dF . Тогда масса цилиндра будет $\rho dF ds$.

Если в жидкости трение отсутствует, то на выделенный цилиндр действует прежде всего разность давлений. Пусть давление на основание цилиндра, расположенное выше по течению равно p , тогда сила, действующая на это основание, равна $p dF$. На основании цилиндра, лежащем ниже по течению, давление немного отличается от p и

равно $p + \frac{\partial p}{\partial s} ds$; соответствующая сила по величине равна $\left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds\right) dF$, но направлена она в сторону, противоположную силе $p dF$. Следовательно, вследствие разности давлений на цилиндр действует сила

$$p dF - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds\right) dF = -\frac{\partial p}{\partial s} ds dF.$$

Далее, на жидкость действует массовая сила (например, сила тяжести), величина которой, отнесенная к единице массы, пусть будет g . На выделенный цилиндр действует в направлении течения составляющая этой силы, равная

$$\rho dF ds \cdot g \cos \alpha,$$

где α есть угол между линией действия массовой силы и линией тока.

Теперь нам остается определить составляющую ускорения в направлении течения, т.е. касательное ускорение. Пусть скорость частицы равна w . Величина w зависит от положения частицы на линии тока и от времени, следовательно, она является функцией от s и t ; поэтому для касательного ускорения мы будем иметь выражение:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t},$$

или, принимая во внимание, что $\frac{ds}{dt} = w$,

$$\frac{dw}{dt} = w \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{w^2}{2} \right) + \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (6)$$

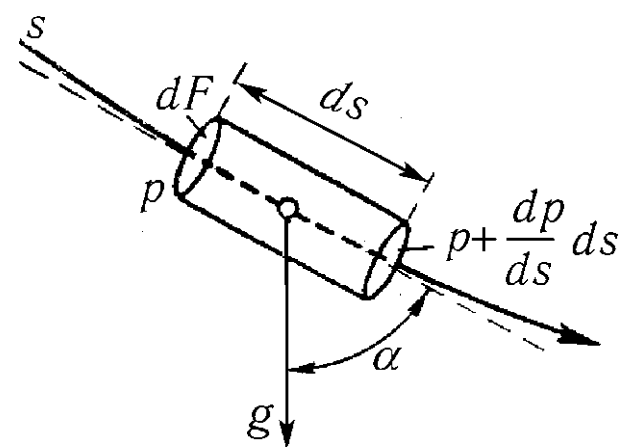


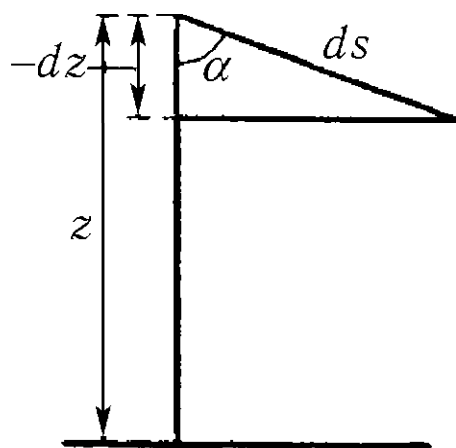
Рис. 28. К выводу уравнения Бернулли

В этом равенстве величина $w \frac{\partial w}{\partial s}$ выражает ту часть ускорения, которая возникает вследствие перемещения частицы в точку потока с другой скоростью течения, а величина $\frac{\partial w}{\partial t}$ — ту часть ускорения, которая зависит от изменения состояния потока в данной точке во времени. При установившемся течении вторая часть, очевидно, равна нулю. Применяя основной закон динамики, мы получим:

$$-\frac{\partial p}{\partial s} ds dF + \rho dF ds g \cos \alpha = \rho dF ds \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{w^2}{2} \right) + \frac{\partial w}{\partial t} \right].$$

Так как все члены уравнения содержат общий множитель $dF ds$, то его можно отбросить (это означает, что конечный результат нашего вывода не зависит от произвольно выбранного объема частицы жидкости). Разделив обе части уравнения на ρ мы окончательно будем иметь:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \cos \alpha = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{w^2}{2} \right) + \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (7)$$



Массовой силой обычно является только одна сила тяжести. Тогда величину g можно считать постоянной по модулю и направлению. Введем систему координат с осью z , направленной вертикально вверх. Из рис. 29 легко видеть, что в этом случае

$$\cos \alpha = -\frac{\partial z}{\partial s},$$

поэтому уравнение (7) можно переписать в виде:

Рис. 29. К выводу уравнения Бернулли

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{w^2}{2} \right) + \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (8)$$

Если рассматриваемое движение — установившееся, следовательно, $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$, а плотность ρ — постоянная, то все члены уравнения (8) представляют собой производные по s , и поэтому его можно интегрировать вдоль линии тока, что приводит к следующему так называемому *уравнению Бернулли*:

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{w^2}{2} = \text{const}. \quad (9)$$

Это уравнение является основным уравнением при одномерном рассмотрении задач о движении жидкостей, но в то же время оно имеет фундаментальное значение для всей гидромеханики. Оно выражает

собой закон сохранения энергии движущейся жидкости. В самом деле, каждый из его членов представляет собой энергию, заключенную в единице массы жидкости, а именно: первый член есть не что иное, как работа сил давления, второй — потенциальная энергия силы тяжести и третий — кинетическая энергия.

Разделим все члены уравнения (9) на g ; тогда все они будут иметь размерность длины и могут быть истолкованы как высоты. Если ввести в уравнение (9) удельный вес $\gamma = \rho g$, то оно примет вид:

$$\frac{p}{\gamma} + z + \frac{w^2}{2g} = \text{const.} \quad (10)$$

В этом уравнении величина $\frac{p}{\gamma}$ означает, согласно § 6 гл. I, высоту столба жидкости, создающего своим весом давление p и поэтому называется *пъезометрической высотой*. Величина z есть высота рассматриваемой точки потока над какой-нибудь начальной горизонтальной плоскостью и поэтому называется *геометрической высотой*. Наконец, величина $\frac{w^2}{2g}$ есть высота, с которой тело должно упасть, чтобы при свободном падении приобрести скорость w , и поэтому называется *скоростной высотой*. Таким образом, согласно уравнению Бернулли, *сумма пъезометрической, геометрической и скоростной высот на всем протяжении линии тока остается постоянной*. При этом значение постоянной на различных линиях тока может быть различным. Однако, если все линии тока начинаются в области прямолинейно, то постоянная одинакова для всех линий тока. Следовательно, в этом случае уравнение Бернулли применимо ко всему потоку в целом.

В § 6 предыдущей главы мы имели для покоящейся жидкости уравнение (7) которое можно переписать в следующем виде:

$$\frac{p}{\gamma} + z = \text{const.}$$

Как легко видеть, оно получается из уравнения Бернулли (10), если в последнем положить $w = 0$ или $w = \text{const.}$

Заметим, что рассмотренный нами частный случай течения идентичен с установившемся потенциальным течением, исследование которого мы займемся ниже.

Интегрирование уравнения (7) возможно и в том случае, когда массовой силой является не сила тяжести, а какая-нибудь другая сила, но при условии, что она обладает потенциалом U . В самом деле, в таком случае можно

положить, что

$$g \cos \alpha = -\frac{\partial U}{\partial s}.$$

Если жидкость сжимаемая, то интегрирование уравнения (7) возможно при условии, что жидкость однородная, следовательно, плотность есть функция только давления. Тогда¹

$$\int \frac{\partial p}{\rho} = P(p)$$

и поэтому можно написать:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial P}{\partial s}.$$

Интегрируя теперь по s , мы получим уравнение Бернулли для установившихся течений в его общем виде:

$$P + U + \frac{w^2}{2} = \text{const.} \quad (11)$$

Математическое дополнение. При трехмерном рассмотрении задач о движении жидкостей вместо одного дифференциального уравнения движения (7) или (8) получаются три дифференциальных уравнения. Выведем эти уравнения, по-прежнему исходя из основного закона динамики: сила равна массе, умноженной на ускорение. Выделим в движущейся жидкости маленький параллелепипед с ребрами dx , dy , dz , параллельными осям прямоугольной системы координат x , y , z . Объем этого параллелепипеда равен $dx dy dz$, а масса равна $\rho dx dy dz$. В направлении оси x разность давлений на грани, перпендикулярные к оси x , дает силу $-\frac{\partial p}{\partial x} \rho dx dy dz$; аналогичным образом для направлений y и z мы получим силы $-\frac{\partial p}{\partial y} \rho dy dx dz$ и $-\frac{\partial p}{\partial z} \rho dz dx dy$. Проекции массовой силы, отнесенной к единице массы, обозначим через X , Y , Z , следовательно, проекции массовой силы, действующей на параллелепипед, будут равны

$$X \rho dx dy dz, \quad Y \rho dx dy dz, \quad Z \rho dx dy dz.$$

Наконец, проекции скорости на оси координат пусть будут u , v , w . Тогда проекция ускорения на ось x будет равна

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt},$$

или, имея в виду, что $\frac{dx}{dt} = u$, $\frac{dy}{dt} = v$, $\frac{dz}{dt} = w$,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w. \quad (12)$$

¹Р есть прописная греческая буква «ро».

Применяя основной закон динамики для направления оси x , мы получим:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz + X \rho dx dy dz = \rho dx dy dz \frac{du}{dt}.$$

Аналогичные уравнения мы получим и для осей y и z . Сокращая на $dx dy dz$, мы будем иметь:

$$\begin{cases} \rho \frac{du}{dt} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \rho \frac{dv}{dt} = \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \rho \frac{dw}{dt} = \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z}, \end{cases} \quad (13)$$

причем вместо $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ и $\frac{dw}{dt}$ следует подставить их развернутые выражения согласно равенству (12). Уравнения (13) называются *уравнениями Эйлера*. Для того чтобы показать, как они могут быть применены, выведем из них уравнение Бернулли для какой-нибудь линии тока.

Умножим уравнения (13) соответственно на dx , dy , dz , разделим каждое из них на ρ и затем сложим. Мы получим

$$\frac{du}{dt} dx + \frac{dv}{dt} dy + \frac{dw}{dt} dz = X dx + Y dy + Z dz - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right). \quad (14)$$

Далее, примем, что величины dx , dy , dz удовлетворяют соотношениям

$$dx : dy : dz = u : v : w. \quad (15)$$

Это означает, что величины dx , dy , dz являются проекциями элемента линии тока ds на оси координат. На основании равенства (12) первый член левой части уравнения (14) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{du}{dt} dx = \frac{\partial u}{\partial t} dx + u \frac{\partial u}{\partial x} dx + v \frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial z} dx,$$

или, на основании соотношений (15), в виде:

$$\frac{du}{dt} dx = \frac{\partial u}{\partial t} dx + u \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right).$$

Выражение в скобках есть не что иное, как изменение величины u при перемещении вдоль линии тока; оно равно du . Поэтому предыдущее равенство принимает вид:

$$\frac{du}{dt} dx = \frac{\partial u}{\partial t} dx + u du.$$

Аналогичный вид будут иметь и второй и третий члены левой части уравнения (14). Предположим для простоты, что рассматриваемое течение — установившееся. Тогда члены с производными $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$ и $\frac{\partial w}{\partial t}$ отпадут, и мы будем иметь:

$$\frac{du}{dt}dx + \frac{dv}{dt}dy + \frac{dw}{dt}dz = u du + v dv + w dw = d \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right).$$

Если массовая сила имеет потенциал U , следовательно, если

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

то сумма первых трех членов в правой части уравнения (14) будет равна

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \right) = -dU.$$

Наконец, выражение в скобках в правой части уравнения 14 можно представить в виде:

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz \right) = \frac{1}{\rho} dp.$$

Таким образом, уравнение (14) принимает следующий окончательный вид:

$$d \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) + dU + \frac{dp}{\rho} = 0.$$

Это уравнение равносильно уравнению (11) и по-прежнему применимо только к определенной линии тока.

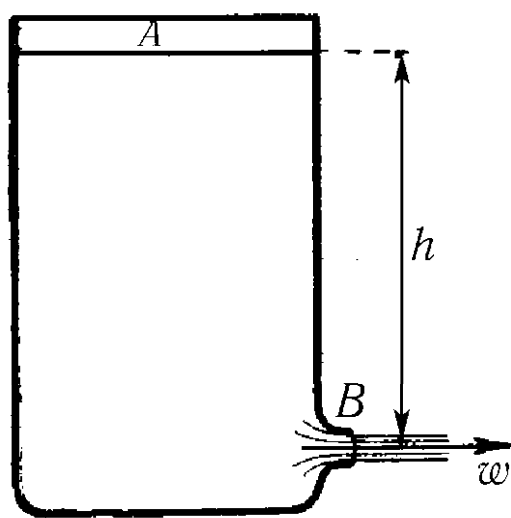


Рис. 30. Истечение из открытого сосуда

§ 5. Следствия из уравнения Бернулли. При помощи уравнения Бернулли очень просто решаются многие задачи о движении жидкости. Приведем три особенно важных примера.

а) *Истечение из открытого сосуда под действием силы тяжести.* В выходном отверстии B (рис. 30) линии тока направлены перпендикулярно к выходному поперечному сечению. Внутри же сосуда все линии тока начинаются, очевидно, на свободной поверхности жидкости A , уровень которой по мере вытекания жидкости постепенно понижается. Частицы жидкости на свободной поверхности A находятся под атмосферным давлением p_0 . Под таким же давлением находятся частицы жидкости и

на свободной поверхности A находятся под атмосферным давлением p_0 . Под таким же давлением находятся частицы жидкости и

в свободной струе B .¹ Если свободная поверхность A велика по сравнению с площадью F выходного отверстия B , то скорость w_A частиц жидкости на свободной поверхности столь мала, что квадрат ее будет ничтожно мал по сравнению с квадратом скорости w_B в выходном отверстии. Следовательно, обозначая через z_A и z_B геометрические высоты в A и B , мы получим на основании уравнения Бернулли:

$$\frac{p_0}{\rho} + gz_B + \frac{w_B^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + gz_A + 0,$$

откуда найдем:

$$\frac{w_B^2}{2g} = z_A - z_B = h,$$

или

$$w_B = \sqrt{2gh}. \quad (16)$$

Таким образом, скорость жидкости в выходном отверстии такова, как если бы вытекающие частицы жидкости свободно падали с высоты h . Равенство (16) выражает собой так называемую *теорему Торичелли*.

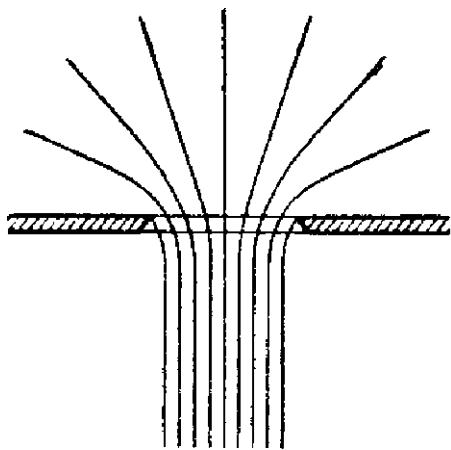


Рис. 31. Истечение из круглого отверстия в тонкой стенке

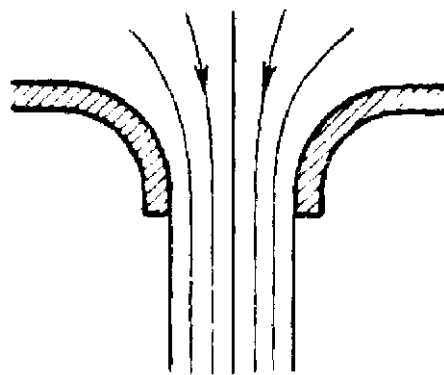


Рис. 32. Истечение из круглого отверстия с закругленными стенками

Поперечное сечение струи, вытекающей из сосуда, вообще не совпадает с поперечным сечением выходного отверстия. Так, например, при истечении через круглое отверстие в тонкой стенке площадь поперечного сечения струи составляет от 0,61 до 0,64 площади отверстия. Это явление, называемое *сжатием струи*, возникает вследствие того, что жидкость внутри сосуда притекает к отверстию в радиальном направлении (рис. 31) и, достигнув края отверстия, не может здесь внезапно

¹Это правильно только при условии, что можно пренебречь весом воздуха, что вполне допустимо, если расчет ведется с точностью до второго десятичного знака.

изменить свое направление. Отношение площади поперечного сечения струи к площади поперечного сечения отверстия называется *коэффициентом сжатия* струи и обозначается буквой α . Если края отверстия закруглены, как на рис. 32, то линии тока перед истечением имеют возможность постепенно изменить свое направление на параллельное оси отверстия. Для такого отверстия коэффициент сжатия равен приблизительно единице. Объем жидкости Q , вытекающей в одну секунду через отверстие площадью F (так называемый *объемный расход*), равен

$$Q = \alpha F \sqrt{2gh}.$$

При истечении из некруглого отверстия в тонкой стенке коэффициент сжатия мало отличается от своего значения для круглого отверстия, но зато форма струи получается, как правило, довольно сложной. Так, например, при истечении из квадратного отверстия получается струя с поперечным сечением в виде тонкого креста, а струя, вытекающая из прямоугольного отверстия, принимает вид ленты, перпендикулярной к длинной стороне прямоугольника.

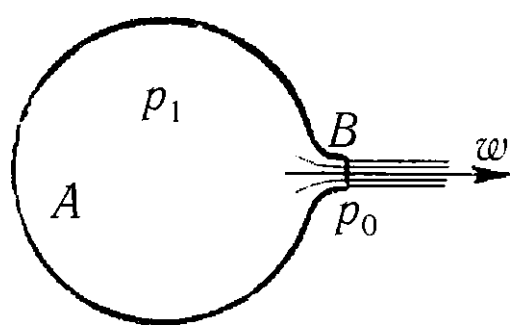


Рис. 33. Истечение из закрытого сосуда под действием внутреннего давления

б) *Истечение из закрытого сосуда под действием внутреннего давления.* Пусть в закрытом сосуде (рис. 33) имеет место давление p_1 , а во внешнем пространстве — атмосферное давление p_0 , причем $p_1 > p_0$. Для линии тока, идущей горизонтально, $z_A = z_B$. Скоростью около стенки в точке A вследствие ее малости можно пренебречь, и на основании уравнения Бернулли мы получим:

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{w^2}{2} = \frac{p_1}{\rho} + 0.$$

Следовательно,

$$w = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_0)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2g(p_1 - p_0)}{\gamma}}. \quad (17)$$

Обозначим высоту $\frac{p_1 - p_0}{\gamma}$, т. е. высоту столба жидкости с удельным весом γ , создающего на своем нижнем основании давление $p_1 - p_0$, через h . Тогда формула (17) примет вид:

$$w = \sqrt{2gh}.$$

Формула (17) позволяет вычислить то наибольшее значение скорости, при движении с которой газ можно рассматривать практически как несжимаемую жидкость. Очевидно, эта предельная скорость w_1 зависит от того, какое изменение плотности принимается за допустимое при оценке несжимаемости газа; следовательно, скорость w_1 тем меньше, чем выше требования к точности. Примем за допустимое изменение плотности величину $\frac{\Delta\rho}{\rho} = 1\%$, т.е. 0,01. При адиабатическом изменении состояния (см. § 5 гл. I) плотность связана с давлением при помощи соотношения

$$pv^\kappa = \text{const},$$

или, так как удельный объем с обратно пропорционален плотности ρ ,

$$p = \text{const} \rho^\kappa.$$

Изменению плотности $\Delta\rho$ соответствует изменение давления

$$\Delta p \approx \text{const} \kappa \rho^{\kappa-1} \Delta\rho,$$

откуда получаем:

$$\frac{\Delta p}{p} \approx \kappa \frac{\Delta\rho}{\rho},$$

или

$$\Delta p \approx \kappa p \frac{\Delta\rho}{\rho}.$$

Подставив сюда $p = 10\,332 \text{ кг/м}^2$ (нормальное давление воздуха), $\kappa = 1,4$ и $\frac{\Delta\rho}{\rho} = 0,01$, мы найдем:

$$\Delta p = 1,4 \cdot 10\,332 \cdot 0,01 = 144,5 \text{ кг/м}^2.$$

Внесем это значение в формулу (17), причем для плотности примем среднее значение $\rho = 0,125 \text{ кгсек}^2/\text{м}^4$; мы получим:

$$w_1 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = \sqrt{2312} \approx 48 \text{ м/сек.}$$

Следовательно, при скоростях движения воздуха, не превышающих 48 м/сек, воздух можно считать практически несжимаемым при условии, что допускается изменение плотности на 1%. Если допускается

изменение плотности на 10%, то, повторяя вычисления, мы найдем для предельной скорости значение

$$w_1 \approx 150 \text{ м/сек.}$$

Таким образом, действие изменения плотности проявляется двояким образом: кинематически оно изменяет поперечное сечение жидких струек, а динамически — величину давления.

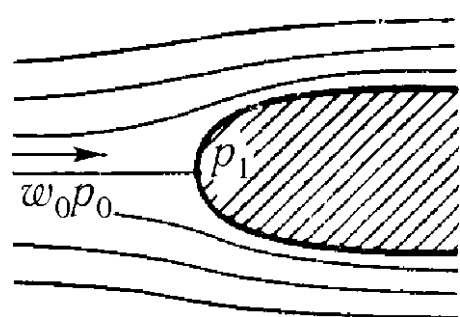


Рис. 34. Обтекание препятствия

с) *Подпор жидкости перед препятствием.*

Когда равномерный поток жидкости встречает на своем пути какое-нибудь препятствие (рис. 34), он расходится во все стороны и обтекает препятствие. При этом непосредственно перед препятствием происходит *подпор*, т. е. замедление потока. В центре области подпора, в так называемой *критической точке*, поток полностью останавливается, скорость его здесь равна нулю. Пусть скорость потока вдали от препятствия равна w_0 . Рассмотрим линию тока, проходящую через критическую точку. Обозначим давление в критической точке через p_1 , а давление в невозмущенной жидкости, т. е. вдали от препятствия, на одинаковой высоте с критической точкой, — через p_0 . Тогда, применяя уравнение Бернулли к рассматриваемой линии тока, мы получим:

$$\frac{p_1}{\rho} + 0 = \frac{p_0}{\rho} + \frac{w_0^2}{2},$$

откуда

$$p_1 = p_0 + \rho \frac{w_0^2}{2}. \quad (18)$$

Приращение давления, возникающее в критической точке и равное

$$p_1 - p_2 = \rho w_0^2 / 2,$$

называется *динамическим*, или *скоростным давлением*. Зная динамическое давление, можно определить скорость течения.

Если тело движется со скоростью v в покоящемся воздухе (или в воде), то в системе отсчета, неподвижной относительно тела, т. е. движущейся вместе с ним, тело будет покоиться, а жидкость — набегать на тело со скоростью w_0 , равной, но противоположной скорости v . Поэтому и в этом случае будет происходить подпор жидкости с приращением давления в критической точке, равным $\frac{\rho v^2}{2}$.

Если в критической точке тела, осуществляющего препятствие, просверлено отверстие, то давление p_1 передается внутрь тела и может быть отсюда подведено к измерительному прибору. Выполняя препятствие в виде изогнутой под прямым углом трубки, обращенной одним концом против течения, мы получим простой прибор для измерения дав-

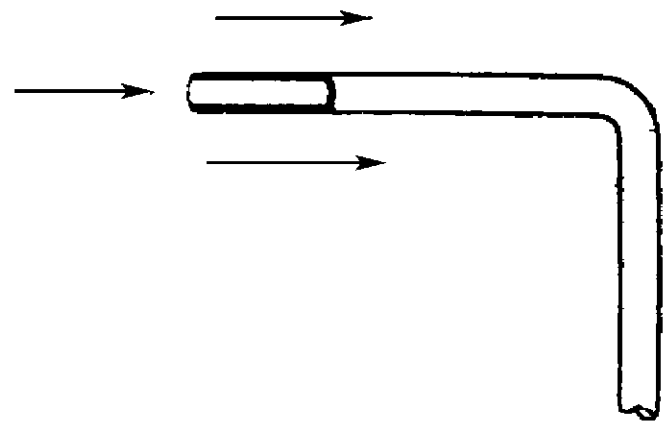


Рис. 35. Трубка Пито

ления $p_1 = p_0 + \frac{\rho w^2}{2}$. Этот прибор называется, по имени изобретателя, *трубкой Пито* (рис. 35).

Пусть давление в какой-либо точке потока жидкости равно p . Это есть то давление жидкости, которое показал бы прибор для измерения давления, движущийся вместе с жидкостью. Давление p принято называть *статическим давлением*. Если мы поместим в рассматриваемую точку потока трубку Пито, то здесь произойдет подпор жидкости, и давление станет равным p_1 , которое будет обнаружено трубкой Пито. Давление p_1 принято называть *полным давлением*. Таким образом, из формулы (18) следует, что *полное давление равно сумме статического и динамического давлений*. Заменяя в уравнении Бернулли

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{w^2}{2} = \text{const}$$

статическое давление p его значением согласно формуле (18), мы получим:

$$\frac{p_1}{\rho} + gz = \text{const},$$

или

$$p_1 + \gamma z = \text{const}.$$

Это равенство показывает, что полное давление p_1 изменяется в потоке жидкости по статическому закону, следовательно, в том случае, когда постоянная в уравнении Бернулли одинакова для всех линий тока, оно постоянно в каждой горизонтальной плоскости.

Для того чтобы использовать формулу (18) для определения скорости течения, необходимо, кроме измерения полного давления p_1 , измерить также статическое давление p . Последняя задача значительно труднее первой, так как введение зонда в поток несколько изменяет статическое давление p именно в той точке, где его желательно измерить. О том, как измеряется статическое давление, будет сказано ниже, в § 8.

§ 6. Дальнейшие выводы о давлении жидкости. Излагаемые ниже замечания касаются не только идеальной жидкости, но — с небольшими изменениями — и жидкостей с умеренной вязкостью. Однако первое замечание относится только к несжимаемой жидкости с постоянной плотностью.

а) В несжимаемой жидкости с постоянной плотностью давление можно разложить на два слагаемых, из которых первое представляет то давление, которое существовало бы в жидкости, если бы она была в покое. Обозначим это *равновесное*, или *весовое* давление через p' . Очевидно, что

$$p' = \text{const} - \gamma z.$$

Второе слагаемое обозначим через p^* , следовательно, действительное давление в движущейся жидкости будет

$$p = p' + p^*.$$

Величина p^* представляет собой разность между давлением при движении и давлением в покое. Пусть к рассматриваемому движению применимо уравнение Бернулли:

$$p + \gamma z + \rho \frac{w^2}{2} = \text{const}.$$

Заменяя p его значением

$$p = \text{const} - \gamma z + p^*,$$

мы получим:

$$p^* + \frac{\rho w^2}{2} = \text{const}. \quad (19)$$

Следовательно, давление p^* распределяется в жидкости так, как если бы она была невесомой и обладала только инертной массой; геометрическая высота не оказывает на p^* никакого влияния. Это объясняется тем, что каждая частица жидкости как бы висит в потоке под действием поддерживающей силы окружающих частиц. Очевидно, полученный результат применим и к жидкостям, обладающим трением. Поэтому в дальнейшем во всех случаях исследования движения под водой или в воздухе мы не будем учитывать действия силы тяжести, следовательно, вместо давления p будем всегда рассматривать давление p^* , однако для сокращения письма будем писать вместо p^* просто p . Давление p^* будем называть *кинетическим давлением*.

Пусть давление и потоке воздуха или воды измеряется при помощи неподвижного прибора, находящегося вне потока и соединенного трубками с подвижным зондом, вставленным в поток. В таком случае вес жидкости в трубках действует так, что давление, показываемое прибором, не зависит от геометрической высоты места измерения. Следовательно, прибор показывает давление такого же вида, как и p^* . Если в качестве зонда взята трубка Пито, то неподвижный прибор покажет одинаковое давление вдоль всей линии тока. В случае, когда для всех линий тока постоянная в уравнении Бернулли имеет одинаковое значение, прибор даст одинаковое показание во всем потоке.

б) Уравнение Бернулли показывает, как изменяется давление вдоль линии тока. Для того чтобы получить представление о том, как изменяется давление в направлении, перпендикулярном к линии тока, следует рассмотреть вместо касательного нормальное ускорение. Это ускорение направлено, как известно, по главной нормали траектории и равно $\frac{w^2}{r}$, где r есть радиус кривизны траектории. Выделим в жидкости небольшую призму, ось которой направлена вдоль главной нормали. Для этой призмы уравнение движения, составленное для направления r , дает:

$$\frac{w^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s'}, \quad (20)$$

где $\partial s'$ есть элемент дуги по направлению главной нормали, а величину p следует понимать в смысле давления p^* . Уравнение (20) показывает, что при криволинейном течении давление увеличивается по направлению от выпуклой стороны линии тока к вогнутой, причем это увеличение составляет $\frac{\rho w^2}{2}$ на единицу длины. Таким образом, уравнение (20) устанавливает связь между соседними линиями тока. Из этого уравнения видно, что *при прямолинейном течении ($r = \infty$) давление не может изменяться в направлении, перпендикулярном к скорости течения.*

При криволинейном течении особенно простой результат получается в том случае, когда постоянная в уравнении Бернулли имеет одинаковое значение для всех линий тока. В этом случае, дифференцируя уравнение (19) по s' , мы получим:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s'} = -w \frac{\partial w}{\partial s'},$$

откуда, сравнивая с уравнением (20), найдем:

$$\frac{\partial w}{\partial s'} + \frac{w}{r} = 0. \quad (21)$$

Ниже, в § 9, мы увидим, что равенство (21) выражает собой условие, при котором так называемая циркуляция вдоль прямоугольника, образованного дугами двух соседних линий тока и отрезками ds' двух радиусов кривизны, равна нулю. Там же мы увидим, что при циркуляции, равной нулю, отдельные частицы жидкости движутся без вращения. Следовательно, равенство (21) показывает, что при нашем криволинейном течении частицы жидкости не совершают вращения.

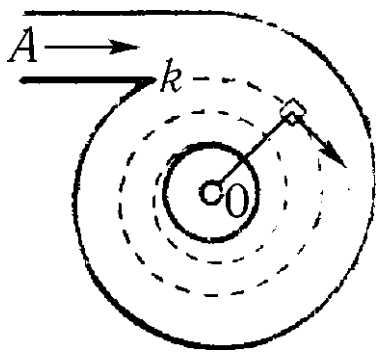


Рис. 36. Течение в спиральной камере

Для примера рассмотрим движение в спиральной камере, изображенной на рис. 36. Все линии тока начинаются в параллельном потоке в области A , в которой скорость и давление везде одинаковы, следовательно, постоянная в уравнении Бернулли, составленного для потока в спиральной камере, одинакова на всех линиях тока. Радиусы кривизны отдельных линий тока можно считать приближенно равными радиусу r , проведенному из центра камеры O , поэтому можно принять, что $ds' = dr$. Тогда уравнение (21) примет вид:

$$\frac{dw}{dr} + \frac{w}{r} = 0,$$

или

$$\frac{dw}{w} = -\frac{dr}{r},$$

откуда после интегрирования мы получим:

$$\ln w = \ln C - \ln r,$$

или

$$w = \frac{C}{r},$$

где C есть постоянная интегрирования. Следовательно, скорость течения по мере приближения к центру камеры сильно возрастает¹. Подставив найденное выражение скорости w в уравнение Бернулли (19), мы найдем давление:

$$p = \text{const} - \frac{\rho C^2}{2r^2}.$$

¹ При постоянной высоте камеры радиальная составляющая скорости вследствие неразрывности потока также обратно пропорциональна радиусу r , поэтому угол, образуемый линиями тока с радиусами, везде одинаковый, следовательно, линиями тока являются логарифмические спирали.

Если поток внутри камеры, достигнув радиуса r_1 , выходит через сделанное здесь отверстие в свободную атмосферу, где давление равно p_0 , то здесь предыдущее уравнение дает нам:

$$p_0 = \text{const} - \frac{\rho C^2}{2r_1^2}.$$

Исключив из обоих уравнений постоянную (const), мы получим

$$p = p_0 + \rho \frac{C^2}{2} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r^2} \right).$$

Следовательно, если выходное отверстие внутри камеры мало, то при входе в камеру давление может сделаться очень большим.

с) При неустановившихся движениях для получения связи между давлением и скоростью вдоль линии тока следует проинтегрировать уравнение (8), не отбрасывая члена $\frac{\partial w}{\partial t}$. Поэтому вместо уравнения Бернулли (9) мы получим:

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{w^2}{2} + \int_0^s \frac{\partial w}{\partial t} ds = \text{const}. \quad (22)$$

В случае движения в трубе с постоянным поперечным сечением скорость течения в каждый определенный момент времени одинакова во всех сечениях; кроме того, она одинакова также во всех точках каждого сечения, поскольку мы предполагаем, что жидкость не обладает трением. В таком случае производная $\frac{\partial p}{\partial t}$ не зависит от s , и интеграл в левой части уравнения (22) будет равен $\frac{dw}{dt}s$.

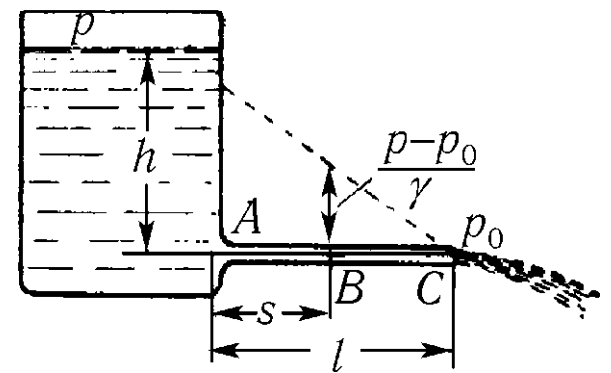


Рис. 37. Истечение из насадка

Для примера рассмотрим начальную стадию истечения из сосуда через насадок длиной l (рис. 37). Применяя уравнение (22) к горизонтальной линии тока, совпадающей с осью насадка, мы получим для точки B , находящейся на расстоянии s от входа в насадок, уравнение

$$\frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} + \frac{dw}{dt}s = \text{const},$$

а для точки A около входа в насадок ($s = 0$) — уравнение

$$\frac{p_A}{\rho} + \frac{w_A^2}{2} + \frac{dw}{dt} \cdot 0 = \text{const.}$$

Приравнивая левые части уравнений и имея в виду, что величиной w_A^2 можно пренебречь как весьма малой по сравнению с w^2 и что

$$p_A = p_0 + g\rho h,$$

где p_0 есть давление на свободной поверхности, мы получим:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} + \frac{dw}{dt}s = \frac{p_0}{\rho} + gh.$$

До тех пор, пока $\frac{dw}{dt}$ не равно нулю, давление уменьшается вдоль насадка пропорционально расстоянию s . Для концевое сечения насадка ($s = l$), в котором давление равно p_0 , уравнение (22) дает:

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{w^2}{2} + \frac{dw}{dt}l = \frac{p_0}{\rho} + gh,$$

откуда

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{l} \left(gh - \frac{w^2}{2} \right).$$

В первый момент истечения $w = 0$, следовательно,

$$\frac{dw}{dt} = g\frac{h}{l}. \quad (23)$$

По мере увеличения w производная $\frac{dw}{dt}$ все более и более уменьшается, пока не делается равной нулю. В этот момент течение превращается в установившееся, и скорость истечения принимает значение

$$w = \sqrt{2gh}.$$

Нетрудно вывести точный закон изменения скорости w в зависимости от времени, однако мы этим заниматься не будем. Для оценки времени, которое требуется для того, чтобы течение сделалось приблизительно установившимся, следует принять что ускорение $\frac{dw}{dt}$ остается

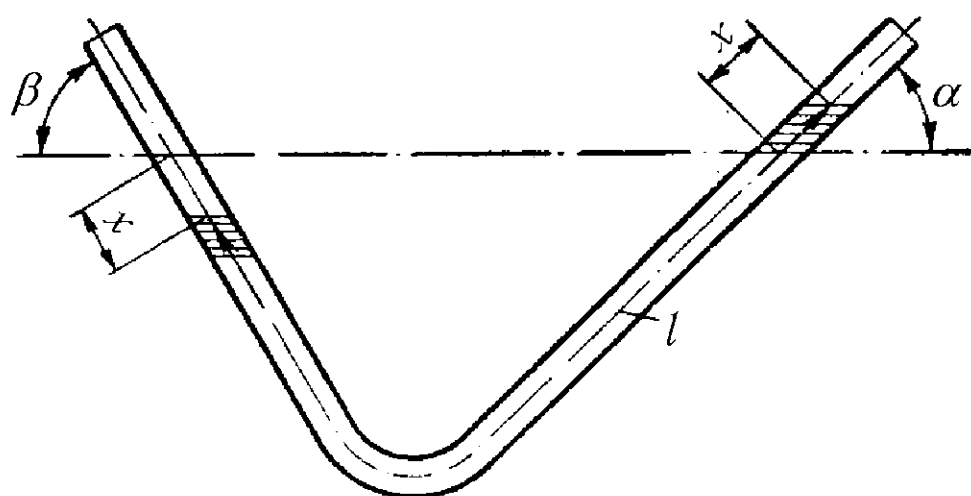


Рис. 38. Колебания столба жидкости

до момента достижения скорости $w_1 = \sqrt{2gh}$ постоянным. Тогда, подставляя в равенство (23) $\frac{w_1}{T}$ вместо $\frac{dw}{dt}$, мы получим:

$$T = \frac{w_1 l}{gh} = \frac{2l}{w_1}.$$

Другим простым примером неустановившегося движения жидкости является колебание столба жидкости в изогнутой трубе под действием силы тяжести (рис. 38). Пусть труба имеет постоянное поперечное сечение и пусть длина столба жидкости, измеренная вдоль оси трубы, равна l . Обозначим отклонение столба жидкости от положения равновесия, измеренное в направлении оси трубы, в какой-либо момент времени через x (вследствие неразрывности это отклонение одинаково на обоих концах столба, а также во всех промежуточных точках). Скорость везде одинакова и равна $w = \frac{dx}{dt}$; следовательно, в равенстве (6) следует положить

$$w = \frac{\partial w}{\partial s} = 0,$$

и поэтому ускорение равно

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

При отклонении столба жидкости из положения равновесия на x один его конец поднимается на высоту $h_1 = x \sin \alpha$, а другой конец опускается на высоту $h_2 = x \sin \beta$, следовательно, разность геометрических высот равна

$$h_1 + h_2 = x(\sin \alpha + \sin \beta).$$

Давление на обоих концах одинаковое; обозначим его через p_0 . Применяя уравнение (22) к обоим концам столба жидкости, мы получим:

$$\frac{p_0}{\rho} - gx \sin \beta + 0 + \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot 0 = \frac{p_0}{\rho} + gx \sin \alpha + 0 + \frac{d^2 x}{dt^2} l,$$

или

$$gx(\sin \alpha + \sin \beta) + l \frac{d^2 x}{dt^2} = 0.$$

Решение этого дифференциального уравнения, совпадающего с дифференциальным уравнением упругих колебаний, имеет вид:

$$x = A \cos(\omega t + \gamma),$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{g(\sin \alpha + \sin \beta)}{l}}.$$

Отсюда для периода колебаний T получаем величину

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g(\sin \alpha + \sin \beta)}}.$$

Для вертикальной U-образной трубки $\sin \alpha = \sin \beta = 1$, и поэтому период колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}},$$

т.е. совпадает с периодом колебаний маятника, длина которого равна половине длины столба жидкости.

§ 7. Слияние двух потоков. Поверхности раздела. Возникновение вихрей. Если два потока жидкости различного происхождения сливаются в один поток позади острого ребра обтекаемого тела (рис. 39), то в общем случае постоянная в уравнениях Бернулли для обоих потоков имеет разные значения. Это означает, что по обе стороны от поверхности раздела обоих потоков, на которой давление, очевидно, должно быть одинаковым, скорости имеют разные значения. Но даже в том случае, когда постоянная в уравнениях Бернулли для обоих потоков имеет одинаковые значения, скорости над и под поверхностью раздела могут отличаться друг от друга своими направлениями. Таким образом, в рассматриваемых случаях на поверхности раздела происходит

прерывное изменение скорости. В первом случае происходит продольный скачок скорости, а во втором — поперечный скачок. Поверхности раздела часто наблюдаются в действительности. Однако вследствие неустойчивости они недолго сохраняют свою первоначальную форму. Достаточно небольшого случайного возмущения, чтобы вызвать быстрое искривление поверхности раздела, нарастание разностей скоростей в одних местах и, наоборот, уменьшение этих разностей в других местах. Это приводит к быстрому, обычно беспорядочному распадению поверхности раздела на большое число вихрей.

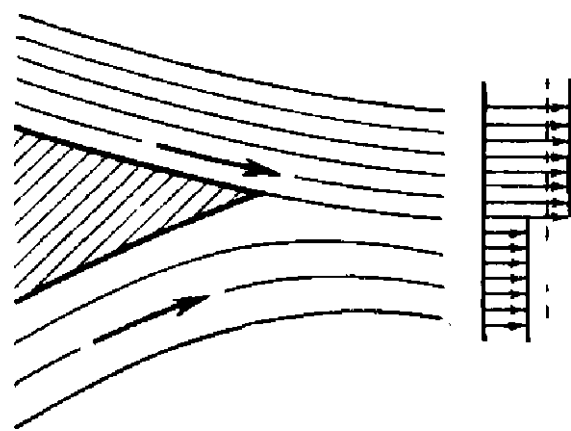


Рис. 39. Слияние двух потоков

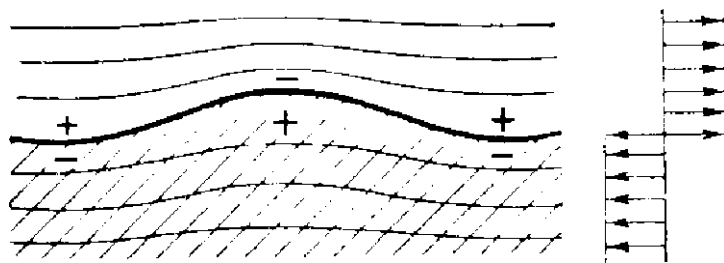


Рис. 40. Возникновение волн на поверхности раздела

Ввиду большой важности этого явления для понимания действительных движений жидкости рассмотрим его подробнее. Пусть вследствие каких-нибудь колебаний в притоке жидкости поверхность раздела на рис. 39 приняла слегка волнообразную форму (рис. 40). Возникшие волны распространяются со скоростью, равной среднему значению первоначальных скоростей над и под поверхностью раздела (на рис. 39 эта средняя скорость отмечена пунктиром). На рис. 40 взята такая система отсчета, которая движется с этой средней скоростью. Следовательно, в этой системе отсчета гребни и впадины волн остаются неподвижными, верхний поток движется вправо, а нижний — влево. Предполагая, что это течение — установившееся, применим к нему результаты предыдущих параграфов. Из уравнения Бернулли (19), а также из уравнения (20) следует, что на гребнях волн каждого отдельного потока давление повышено, а во впадинах, наоборот, оно понижено (на рис. 40 это отмечено при помощи знаков $+$ и $-$). Такое распределение давления показывает, что рассматриваемое течение не может быть установившимся. В самом деле, из тех мест, где давление повышено, жидкость будет перетекать в те места, где давление понижено, но это

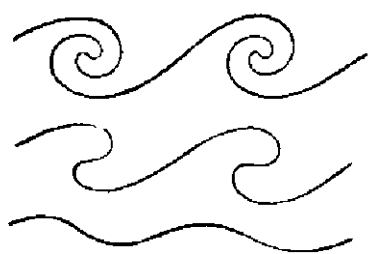


Рис. 41. Возникновение вихрей из волн на поверхности раздела

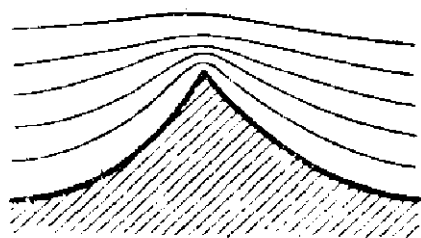


Рис. 42. Обтекание острого ребра

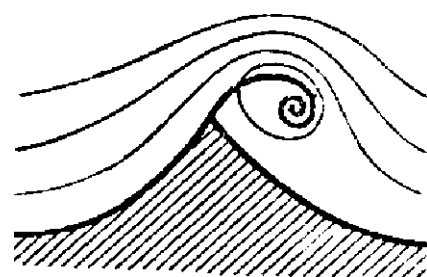


Рис. 43. Возникновение вихря при обтекании острого ребра

означает, что возникшие ранее волны начнут увеличиваться. Дальнейшая судьба поверхности раздела показана на рис. 41. В конце концов она распадается на отдельные вихри. В действительности первоначальные небольшие возмущения искажают поверхность раздела обычно не в виде равномерно следующих друг за другом волн, а совершенно беспорядочно, и поэтому в конечной стадии распада образуется в большинстве случаев беспорядочная последовательность больших и малых вихрей¹.

Наряду с только что рассмотренным видом поверхностей раздела существует еще другой вид, при возникновении которого одновременно образуется вихрь. Пусть поток жидкости встречает на своем пути острое ребро. В первый момент возникает обтекание ребра (рис. 42), причем скорость на ребре очень велика, теоретически для идеальной жидкости она даже равна бесконечности. Однако, как показывают наблюдения, при таком обтекании очень быстро возникает вихрь (рис. 43), и скорость обтекания значительно уменьшается. Для объяснения такого явления можно ввести принцип, согласно которому жидкость стремится избегать бесконечно больших скоростей и вместо этого образует поверхности раздела. В дальнейшем мы увидим, что за этим принципом скрывается трение жидкости, которое, как бы оно ни было мало, всегда проявляет себя вблизи твердых стенок. Наличие вихря позади острого ребра вызывает здесь круговое движение, вследствие которого жидкость притекает к ребру также со стороны, противоположной направлению основного потока. Следовательно, около ребра возникают условия, обеспечивающие возникновение здесь поверхности раз-

¹Заметим, что аналогичной причиной объясняется колебание флагов при ветре. Распределение давления на рис. 40 не изменится, если направление нижнего потока станет противоположным, т. е. будет совпадать с направлением верхнего потока. Следовательно, небольшой изгиб полотнища флага всегда будет стремиться увеличиться. Так как «волны» на полотнище несколько увлекаются ветром, то действительная картина явления получается более сложной.

дела (рис. 43). Под действием вихря эта поверхность закручивается и тем самым усиливает вихрь, который вследствие этого начинает расти. В действительности вихрь и поверхность раздела составляют одно целое и растут вместе из ничтожного начального возмущения (рис. 44). В дальнейшем «начальный» вихрь уплывает вместе с потоком, а поверхность раздела, новые куски которой все время образуются около ребра, распадается на отдельные вихри.

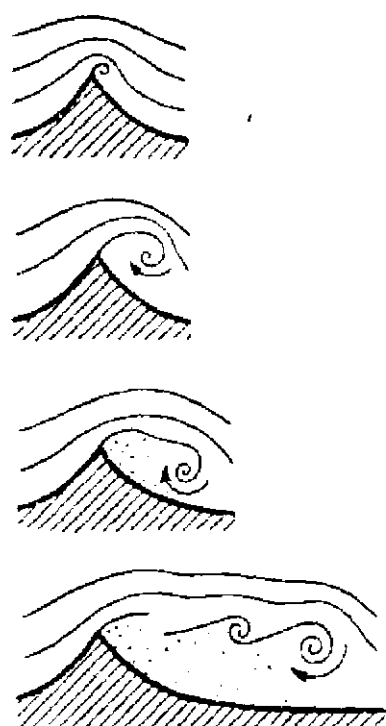


Рис. 44. Возникновение и распад поверхности раздела

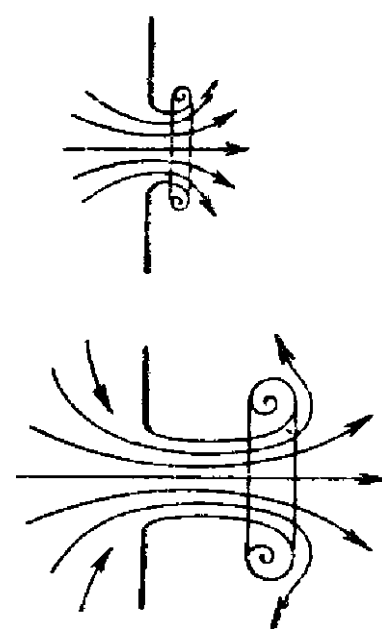


Рис. 45. Возникновение струи

Совершенно аналогичная картина наблюдается и при истечении жидкости через круглое отверстие с острыми краями в плоской стенке (рис. 45). Возникает поверхность раздела, которая начинает закручиваться и образует вихревое кольцо, увлекаемое струей жидкости. Красивые вихревые кольца можно получить следующим простым способом. В стенке небольшого ящика вырезается круглое отверстие с острыми краями; противоположная стенка делается упругой. Ящик наполняется дымом, например, табачным. Если теперь ударить по упругой стенке ящика, то из круглого отверстия вылетит вихревое кольцо. Так как истечение воздуха из коробки очень быстро прекращается, то образования струи не происходит, и вылетевшее кольцо движется самостоятельно. При своем возникновении вихревое кольцо захватывает табачный дым и поэтому резко выделяется среди окружающего воздуха. Такие вихревые кольца очень устойчивы и распадаются только после того, как их энергия почти целиком поглощается трением.

Поперечный скачок скоростей получается, например, при обтекании пластинки, наклоненной под небольшим углом к направлению по-

тока. При таком обтекании на нижней стороне пластинки давление повышается, вследствие чего линии тока расходятся здесь вправо и влево. На верхней стороне пластинки, наоборот, давление понижается, что приводит здесь к загибанию линий тока по направлению к центру пластинки. Поэтому около заднего ребра пластинки поток под пластинкой, если смотреть из центра, движется к боковым ребрам, а над пластинкой, наоборот, — к середине пластинки. Следовательно, здесь должна образоваться поверхность раздела. При установившемся течении абсолютная величина скорости одинакова на обеих сторонах поверхности раздела, так как давление изменяется непрерывно и все линии тока берут свое начало из невозмущенной области далеко перед пластинкой; следовательно, постоянная в уравнении Бернулли одинакова для всех линий тока. Поэтому скачок скорости на поверхности раздела имеет

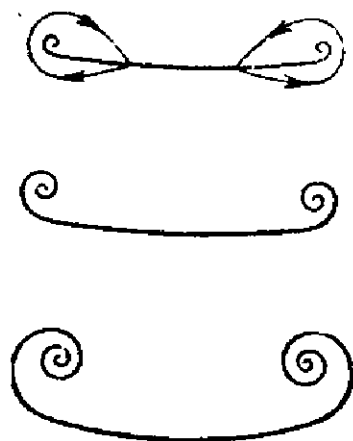


Рис. 46. Поверхность раздела позади наклоненной пластинки

чисто поперечный характер. Как показывают наблюдения, такие поверхности раздела свертываются около боковых ребер пластинки и дают два вихря, которые можно проследить на всем протяжении пути, пройденного пластинкой.

На рис. 46 показана форма поверхности раздела в различных сечениях позади пластинки. Исследование подобного рода явлений имеет очень важное значение для понимания действия крыльев самолета (см. § 16 и 17 гл. III). Поверхности раздела рассмотренного вида можно сделать видимыми, если осторожно выпустить в воздух табачный дым и через его скопление быстро провести концом длинной линейки, установленной к направлению движения под небольшим углом.

§ 8. Поверхности раздела (продолжение). Измерение давления. Из сказанного в предыдущем параграфе следует, что в жидкости с умеренным трением, которым в первом приближении можно пренебречь, при обтекании всякого острого ребра всегда образуется поверхность раздела. Если такое ребро представляет собой края отверстия, через которое жидкость проходит, например, при внезапном расширении трубы, при истечении воды через отверстие сосуда под водой и т. п., то образуется такая же струя, как при истечении в свободную атмосферу из отверстия в стенке сосуда (§ 5). Правда, в том случае, когда струя жидкости попадает в пространство с той же жидкостью (вода в воду или воздух в воздух), вихри, возникающие из поверхности раздела, приводят к тому, что струя быстро смешивает-

ся с окружающей жидкостью. Наконец, если острое ребро представляет собой края пластинки, поставленной поперек потока, то позади пластинки образуется область сравнительно спокойной воды, так называемое мертвое пространство. Это пространство более или менее заполнено вихрями (см. рис. 26), и скорость течения в нем значительно меньше, чем в окружающем потоке.

Первые теоретические исследования движений жидкости с образованием поверхностей раздела принадлежат Гельмгольцу (Helmholtz). В частности, он исследовал форму струи, вытекающей из щели в плоской стенке, предполагая при этом, что сила тяжести отсутствует, причем для исследования применил метод конформного отображения (см. § 10). О расчете, выполненном Кирхгоффом (Kirchhoff) для потока с образованием мертвой зоны, будет сказано в § 14 гл. III.

При некоторых условиях поверхности раздела образуются также при обтекании округленных тел (см. по этому поводу § 6 гл. III). Поэтому во многих случаях характер обтекания сглаженных ребер почти такой же, как и при обтекании острых ребер.

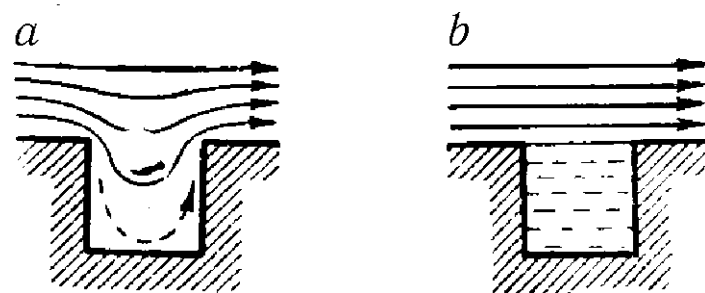


Рис. 47. Обтекание углубления в стенке

Особого интереса заслуживает случай обтекания углубления в стенке, изображенный на рис. 47. В первый момент обтекания линии тока имеют форму, изображенную на рис. 47, *a*. На острых краях углубления сначала образуются вихри и поверхности раздела. Но после того как вихри уплывают вместе с потоком, линии тока принимают вид, показанный на рис. 47, *b*, правда, при условии, что ширина углубления небольшая, так как иначе возникающий поток получается неустойчивым. В углублении жидкость практически находится в покое, поэтому давление здесь во всех точках одинаковое и такое же, как в потоке, протекающем над углублением. В самом деле, если бы при переходе через поверхность раздела давление изменялось, то возникло бы соответствующее движение жидкости, но, как показывают наблюдения, этого не происходит. Если соединить такое углубление при помощи трубки с каким-нибудь прибором для измерения давления, то таким путем можно измерить давление в текущей жидкости. Вместо углубления можно сделать в стенке просто отверстие, например, с круглым поперечным сечением. Края отверстия или углубления должны быть совершенно ровными, без всяких заусениц, так как наличие хотя бы одной заусеницы приводит к изгибанию поверхности раздела и, следователь-

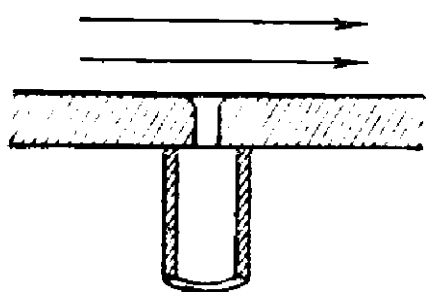


Рис. 48. Отверстие в стенке для измерения статического давления

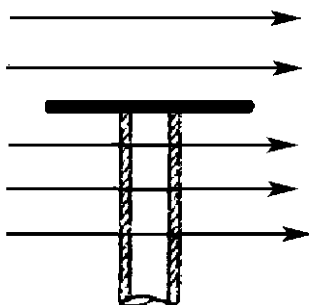


Рис. 49. Шайба Сера

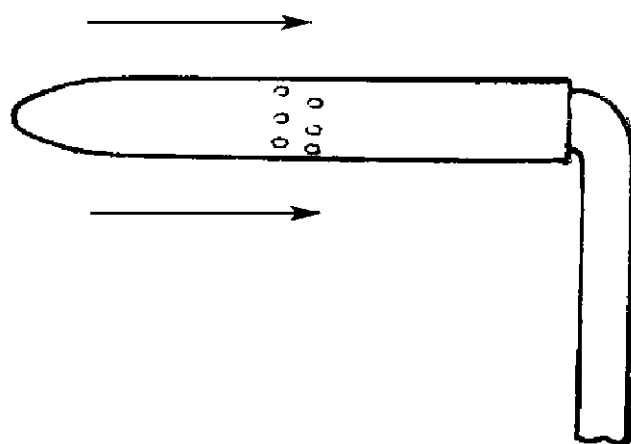


Рис. 50. Зонд для измерения статического давления (нифер)

но, к резкому изменению давления. Допустимо умеренное округление краев отверстия. Правильное устройство отверстия для измерения давления в стенке трубы показано на рис. 48.

Рассмотренная идея может быть применена и для измерения статического давления внутри движущейся жидкости. Для этой цели в жидкость вводится очень тонкий диск, имеющий маленькое отверстие по середине и припаянный к концу тонкой трубки (рис. 49). Однако такой прибор, называемый *шайбой Сера*, очень чувствителен к отклонению плоскости диска от направления потока. Значительно лучше так называемый *нифер*, изображенный на рис. 50. Этот прибор дает более или менее точные показания даже при отклонении оси трубки от направления потока на 5° . При больших углах отклонения показания получаются заниженными.

Если такое измерение статического давления произвести одновременно с измерением полного давления при помощи трубки Пито (рис. 35), то можно определить динамическое давление $p_d = \frac{\rho w^2}{2}$, равное разности полного и статического давлений. Зная же динамическое давление и плотность ρ , можно вычислить скорость течения w . В технической системе единиц (*м, кг, сек*) плотность атмосферного воздуха равна довольно точно $\frac{1}{8} \text{ кгсек}^2/\text{м}^4$, поэтому для связи между динамическим давлением и скоростью мы получаем следующие легко запоминаемые формулы:

$$p_d = \frac{w^2}{16} \text{ кг/м}^2 \quad (24)$$

и

$$w = 4\sqrt{p_d} \text{ м/сек.} \quad (25)$$

Для воды плотность равна $\rho = 102 \text{ кгсек}^2/\text{м}^4$. Однако для воды обычно предпочитают указывать не давление, а высоту, соответствующую давлению. Обозначая эту высоту через h (в метрах), мы по-прежнему получим:

$$w = \sqrt{2gh} \text{ м/сек.}$$

Нифер для измерения статического давления, изображенный на рис. 50, можно соединить с трубкой Пито в один цельный прибор, позволяющий сразу определять динамическое давление, а вместе с ним и скорость течения. На рис. 51 изображена одна из конструкций такого прибора, отличающаяся малой чувствительностью к отклонению своей оси от направления потока. При измерении скорости воздуха такой прибор присоединяется обычно к микроманометру (§ 8 гл. I).

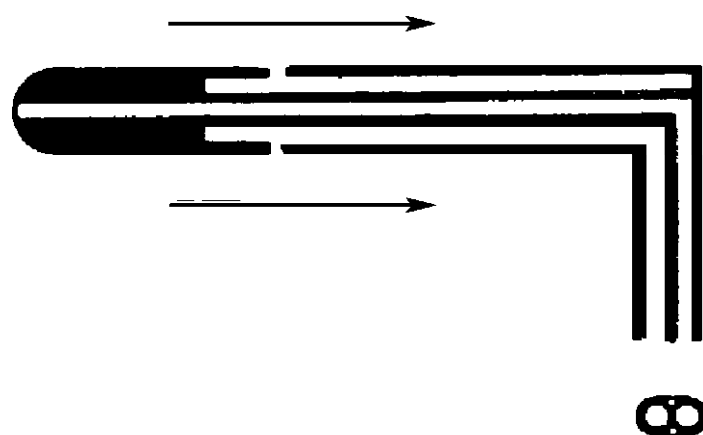


Рис. 51. Трубка Прандтля для измерения скорости

Измерение статического давления через отверстие в стенке применяется не только для измерения скорости, но и для многих других целей. Так, например, часто требуется знать распределение давления вдоль поверхности обтекаемого тела. Для этой цели в модели тела (дирижабля, крыла самолета) делается ряд отверстий, которые последовательно соединяются с одним коленом манометра (при этом противодействие в другом колене, конечно, должно быть все время одинаковым). Можно также все отверстия присоединить одновременно к так называемому *батарейному манометру*, представляющему собой ряд сообщающихся трубок. Расположение уровней жидкости в таком манометре сразу дает наглядное представление о распределении давления вдоль поверхности тела. На рис. 52 изображен хорошо известный опыт, поясняющий уравнение Бернулли для течения в трубе, сначала суживающейся, а затем опять расширяющейся. Дроссельный кран позволяет регулировать скорость, следовательно, и давление в трубе. Если кран открыть полностью, то в самом узком сечении b давление настолько понижается, что становится меньше атмосферного. Это легко продемонстрировать, сделав отверстие в нижней части сечения b и вставив туда трубку, опущенную в чашку со ртутью (рис. 53). Заметим, что при таком опыте давление в расширяющейся части трубы получается меньше, чем это следует из уравнения Бернулли, что объясняется некоторой потерей энергии на трение. В суживающейся части, если только суже-

ние происходит плавно (иначе образуются вихри), совпадение с теорией получается очень хорошее. Измерение разности давлений в широкой и узкой частях трубы переменного сечения может быть использовано для определения количества протекающей по трубе жидкости (см. § 12 гл. III). Примеры распределения давления вдоль поверхности моделей корпуса дирижабля и крыла самолета показаны на рис. 151 и 162.

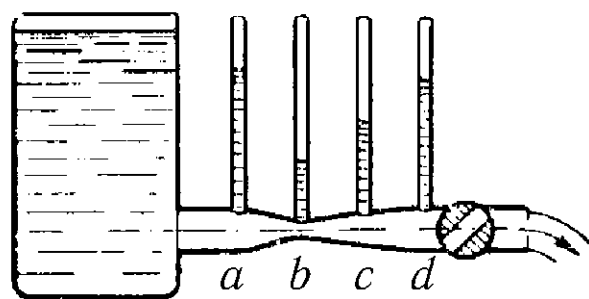


Рис. 52. Распределение давления в трубке с переменным сечением

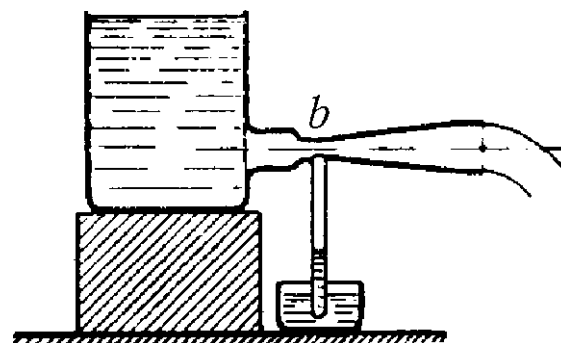


Рис. 53. Понижение давления в самом узком сечении трубы

§ 9. Более точное исследование движения однородной жидкости без трения. Потенциальное течение. До сих пор мы удовлетворялись в большинстве случаев определением только средних значений скорости течения жидкости. Между тем целью математической гидродинамики является определение скорости течения в каждой точке пространства, именно так, как об этом было сказано в § 2. Для однородной жидкости, лишенной трения, в этом направлении достигнуты довольно большие успехи, однако с помощью сложных математических методов, знания которых мы не можем предполагать у читателя настоящей книги. Поэтому мы ограничимся здесь только некоторыми общими рассуждениями о свойствах движения однородной жидкости без трения и некоторыми простыми примерами. Прежде всего мы остановимся на теореме В. Томсона [W. Thomson (Lord Kelvin)], доказательство которой отложим до конца параграфа. Предварительно введем и объясним некоторые понятия.

1. *Жидкими линиями и жидкими поверхностями* называются такие линии и поверхности, которые все время состоят из одних и тех же частиц жидкости.

2. *Криволинейным интегралом скорости* вдоль заданной кривой между точками A и B называется интеграл от произведения линейного элемента ds кривой на составляющую скорости в направлении ds ,

следовательно,

$$\Lambda = \int_A^B w \cos \alpha \, ds = \int_A^B \mathbf{w} \cdot d\mathbf{s},$$

где α есть угол между $\mathbf{w}$ и $d\mathbf{s}$, а $\mathbf{w} \cdot d\mathbf{s}$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{w}$ и $d\mathbf{s}$.

3. Величина криволинейного интеграла скорости, взятого вдоль замкнутой кривой, называется *циркуляцией* и обозначается буквой Γ . Применяя для интеграла вдоль замкнутой кривой знак $\oint$, мы можем написать:

$$\Gamma = \oint \mathbf{w} \cdot d\mathbf{s}. \quad (26)$$

После этих предварительных объяснений мы можем сформулировать теорему Томсона: *В однородной жидкости, лишенной трения, циркуляция вдоль замкнутой жидкой линии остается все время постоянной.* Из этой теоремы можно вывести много важных следствий. Первое из них заключается в следующем.

Если движение начинается из состояния покоя, то вначале, т. е. до возникновения движения, циркуляция вдоль *каждой* замкнутой жидкой линии заведомо равна нулю, поэтому и в дальнейшем она остается все время равной нулю. Но если в какой-нибудь области криволинейный интеграл вдоль любой замкнутой кривой равен нулю, то криволинейный интеграл, взятый от одной точки A до какой-нибудь другой точки B рассматриваемой области, не зависит от пути, по которому производится интегрирование. В самом деле, пройдя из точки A в точку B по какому-нибудь пути, вернемся по этому же пути назад в точку A , а затем пройдем опять в точку B по новому пути. Мы получим сумму трех криволинейных интегралов $\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3$, которая пусть равна a . Из этих интегралов первые два взаимно уничтожаются, так как при прохождении в разные стороны по одному и тому же пути направления всех элементов $d\mathbf{s}$ изменяются на противоположные, следовательно, интеграл Λ_3 , взятый по новому пути из A в B , равен a . С другой стороны сумма интегралов $\Lambda_2 + \Lambda_3$ равна нулю, так как она составлена для замкнутой кривой, поэтому первый интеграл, взятый по старому пути от A к B , равен $\Lambda_1 = a$. Следовательно, $\Lambda_1 = \Lambda_3$, что и требовалось доказать.

Будем рассматривать точку A как неподвижную на жидкой линии

и вычислим криволинейный интеграл

$$\int_A^B \mathbf{w} \cdot d\mathbf{s}$$

для разных точек B . Тем самым мы припишем каждой точке B определенное число. Обозначим его через Φ и назовем *потенциалом* в точке B . Перейдем теперь от точки B к точке C , находящейся от B на расстоянии ds , и вычислим криволинейный интеграл $\int_A^C \mathbf{w} \cdot d\mathbf{s}$. Так как при составлении этого интеграла мы, очевидно, можем следовать от точки A к точке C , проходя через точку B , то мы будем иметь:

$$\int_A^C \mathbf{w} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B \mathbf{w} \cdot d\mathbf{s} + \mathbf{w} \cdot d\mathbf{s},$$

т. е.

$$\Phi_C = \Phi_B + w \cos \alpha ds. \quad (27)$$

Обозначая проекцию элемента ds на направление скорости через dh , мы можем представить равенство (27) в виде:

$$\Phi_C = \Phi_B + w dh. \quad (28)$$

Для $\alpha = 90^\circ$ мы имеем: $\cos \alpha = 0$, и поэтому

$$\Phi_C = \Phi_B.$$

Обратно, если $\Phi_C = \Phi_B$, то отрезок $ds = \overline{BC}$ всегда перпендикулярен к направлению скорости $\mathbf{w}$. Совокупность всех точек, для которых потенциал Φ равен Φ_B , т. е. имеет некоторое постоянное значение, образует поверхность, проходящую через точку B и отделяющую область, в которой $\Phi > \Phi_B$, от области, где $\Phi < \Phi_B$. Плоскость, касательная к этой поверхности в точке B , согласно только что сказанному, перпендикулярна к вектору скорости $\mathbf{w}$ в точке B . Отсюда следует, что *линия тока, направление которых в каждой точке совпадает с направлением вектора скорости, везде ортогональны к поверхностям равного потенциала $\Phi = \text{const}$.*

Обозначая $\Phi_C - \Phi_B$ через $d\Phi$, мы получим из уравнения (27) для произвольных значений угла α соотношение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = w \cos \alpha, \quad (29)$$

а из уравнения (28) — соотношение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h} = w, \quad (30)$$

причем отрезок dh , согласно сказанному выше, перпендикулярен к поверхности $\Phi = \text{const}$. Из равенства (29) следует, что наибольшее изменение потенциала Φ происходит в направлении нормали к поверхности $\Phi = \text{const}$. Это наибольшее изменение, равное $\frac{\partial \Phi}{\partial h}$, называется *градиентом потенциала* Φ и обозначается через $\text{grad } \Phi$. Градиент представляет собой векторную величину. Так как вектор скорости w , согласно сказанному выше, перпендикулярен к поверхности $\Phi = \text{const}$, то из равенства (30) следует, что скорость течения по величине и направлению равна градиенту потенциала Φ . В векторной форме равенство (30) записывается следующим образом:

$$w = \text{grad } \Phi. \quad (31)$$

Введенное нами геометрическим путем понятие потенциала совпадает с понятием потенциала сил, с той только разницей, что градиент потенциала сил равен напряженности силового поля, а градиент нашего потенциала равен скорости течения. Поэтому введенный нами потенциал называют, в отличие от потенциала сил, *потенциалом скоростей*, или *потенциалом течения*. Заметим, что между обоими потенциалами имеется еще одна, чисто условная разница: обычно принимают, что напряженность силового поля равна

$$g = -\text{grad } U,$$

а скорость течения равна

$$w = +\text{grad } \Phi.$$

Можно было бы перед $\text{grad } \Phi$ взять знак минус и тем самым обеспечить более полную аналогию с потенциалом сил. Так иногда и делается, однако для гидродинамических расчетов удобнее брать перед $\text{grad } \Phi$ знак плюс, что мы в дальнейшем и будем делать.

Из всего сказанного следует, что *при всяком движении однородной жидкости без трения, возникающем из состояния покоя, существует функция, называемая потенциалом и обладающая тем свойством, что ее градиент определяет скорость течения в любой точке потока. Движения жидкости, обладающие потенциалом скоростей, называются потенциальными течениями*. При потенциальных течениях частицы жидкости не совершают вращения, что и является отличительным

свойством таких течений. В самом деле, мерой вращения частицы может служить циркуляция вдоль небольшой замкнутой кривой, но эта циркуляция в течениях однородных жидкостей без трения, возникающих из состояния покоя, согласно сказанному выше, равна нулю.

В качестве противоположного примера рассмотрим жидкость, которая вращается как твердое тело с угловой скоростью вокруг некоторой оси. Возьмем в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, площадку в виде окружности радиуса r с центром на оси вращения и вычислим циркуляцию вдоль этой окружности. Так как линейная скорость течения в точках окружности равна wr и направлена по касательной к окружности, то

$$\Gamma = \oint \mathbf{w} \cdot d\mathbf{s} = \oint wr \cdot r d\varphi = w r^2 [\varphi]_0^{2\pi} = 2\pi r^2 w.$$

Если, кроме вращательного движения, жидкость обладает также поступательным движением, то последнее не надо учитывать, так как оно не влияет на циркуляцию. Разделив циркуляцию на площадь окружности $F = \pi r^2$, мы получим:

$$\frac{\Gamma}{F} = 2w.$$

Следовательно, величиной $\frac{\Gamma}{F}$ удобно пользоваться в качестве меры вращения жидкости.

Если площадка расположена в плоскости, образующей с осью вращения угол α , то, как нетрудно видеть,

$$\frac{\Gamma}{F} = 2w \sin \alpha. \quad (32)$$

Таким образом, максимальное значение $\frac{\Gamma}{F}$ получается в плоскости, перпендикулярной к оси вращения.

Итак, при потенциальном течении циркуляция вдоль любой замкнутой линии, проведенной внутри жидкости, равна нулю, следовательно, частицы жидкости движутся без вращения. В прежнее время отсюда пытались вывести как следствие, что при движениях однородной, лишенной трения жидкости, возникших из состояния покоя, никогда не могут возникнуть вихри. Однако, если мы более внимательно рассмотрим процесс движения при образовании поверхности раздела (§ 7), то окажется, что все жидкие линии, проведенные внутри жидкости в состоянии покоя, движутся и деформируются так, что ни одна из них не

пересекает поверхности раздела. Поэтому теорема Томсона не позволяет сделать никаких заключений о взаимоотношении между частями жидкости, лежащими по разные стороны от поверхности раздела. Следовательно, возникновение в жидкости, практически лишенной трения, поверхностей раздела, а вместе с ними и вихрей, нисколько не противоречит теореме Томсона.

В реальных жидкостях, которые всегда обладают вязкостью, вместо поверхностей раздела образуются слои раздела, правда, обычно очень тонкие. Слой раздела всегда образуется из частиц, двигающихся в непосредственной близости от поверхности твердого тела, где влиянием трения нельзя пренебрегать даже при очень малой вязкости. Поэтому точный анализ явлений, происходящих внутри слоя раздела, возможен только на основе учета вязкости. Для изучения явлений, происходящих вне слоя раздела, но связанных с его существованием, обычно достаточно рассматривать вместо слоя раздела поверхность раздела. Влияние трения будет подробно рассмотрено в § 1–6 гл. III.

Рассматривая в § 6 течение, в котором постоянная Бернулли для всех линий тока одинакова, мы нашли, что в направлении, перпендикулярном к линии тока, скорость изменяется согласно уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial s'} + \frac{w}{r} = 0,$$

где r есть радиус кривизны линии тока. Вычислим циркуляцию вдоль небольшого четырехугольника, образованного дугами двух соседних линий тока и отрезками двух смежных нормалей (рис. 54). Мы получим:

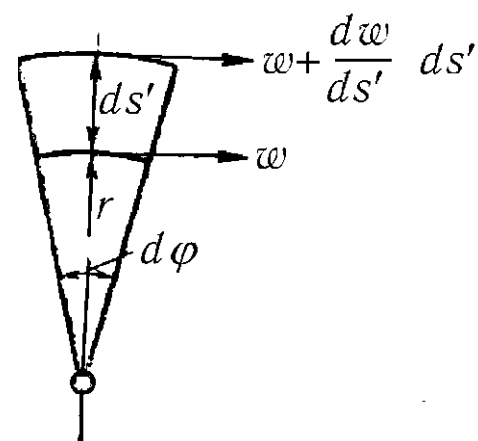


Рис. 54. Четырехугольник, вдоль которого вычисляется циркуляция

$$\begin{aligned} \Gamma &= w \cdot r d\varphi + 0 \cdot ds' - \left(w + \frac{\partial w}{\partial s'} ds' \right) (r + ds') d\varphi - 0 \cdot ds' = \\ &= -ds' \cdot d\varphi \left(r \frac{\partial w}{\partial s'} + w + \frac{\partial w}{\partial s'} ds' \right). \end{aligned}$$

Последний член в скобках можно отбросить как величину более высокого порядка малости по сравнению с первым членом, сумма же первых двух членов равна нулю согласно приведенному выше равенству. Таким образом, при рассмотренном движении циркуляция вдоль любой замкнутой малой кривой равна нулю, следовательно, это движение потенциальное. Обратно, можно доказать (см. ниже), что если течение

потенциальное, то для него обязательно соблюдается уравнение Бернулли.

Математическое дополнение. Докажем теорему Томсона. Криволинейный интеграл скорости можно представить также в следующем виде:

$$\int \mathbf{w} \cdot d\mathbf{s} = \int (u dx + v dy + w dz),$$

где u, v, w суть проекции скорости $\mathbf{w}$ на оси координат x, y, z , а dx, dy, dz — проекции на те же оси линейного элемента $d\mathbf{s}$. Найдем производную от этого интеграла по времени в предположении, что кривая, вдоль которой производится интегрирование, состоит все время из одних и тех же частиц жидкости. Будем обозначать такое дифференцирование символом $\frac{d}{dt}$, (иногда в литературе встречается также обозначение $\frac{D}{Dt}$). Сначала вычислим производную $\frac{d}{dt} \int u dx$, которую можно представить следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \int u dx = \int \frac{du}{dt} dx + \int u \frac{d}{dt}(dx).$$

Первый член правой части на основании уравнений Эйлера [§ 4, уравнения (13)] равен

$$\frac{du}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Что касается второго члена, то, очевидно, для фиксированной частицы

$$\frac{dx}{dt} = u.$$

Но в таком случае

$$\frac{d}{dt}(x + dx) = u + du,$$

следовательно,

$$\frac{d}{dt}(dx) = du,$$

причем под du следует понимать разность одновременных значений составляющей скорости u для двух частиц жидкой линии, находящихся в точках с координатами $x + dx$ и x . Поступая аналогичным образом с остальными двумя членами криволинейного интеграла, мы получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int (u dx + v dy + w dz) &= \int (X dx + Y dy + Z dz) - \\ &- \int \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) + \int (u du + v dv + w dw). \end{aligned} \quad (33)$$

Предположим теперь, что массовая сила обладает потенциалом U , следовательно,

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Далее предположим, что плотность зависит только от давления, иными словами, что жидкость однородная. В таком случае все три подинтегральных выражения в правой части равенства (33) могут быть проинтегрированы. Следовательно, производная от криволинейного интеграла вдоль жидкой линии между точками A и B , которые все время должны совпадать с соответствующими частицами жидкости, равна

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_A^B (u dx + v dy + w dz) = U_A - U_B + \mathbf{P}_A - \mathbf{P}_B + \\ + \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right)_B - \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right)_A, \end{aligned} \quad (34)$$

где, как и в § 4, введено обозначение:

$$\int \frac{dp}{\rho} = \mathbf{P}.$$

Если интегрирование производится вдоль замкнутой кривой, то точки A и B совпадают, и правая часть равенства (34) делается равной нулю. Таким образом, теорема Томсона доказана. По поводу допущений, сделанных при ее доказательстве, заметим следующее. О том, что силовое поле должно иметь потенциал, мы не упомянули в приведенной выше формулировке теоремы, так как исходили из предположения, что массовые силы не проявляют своего действия. Второе, более важное допущение — об однородности жидкости — было указано в формулировке теоремы. Для неоднородной жидкости теорема Томсона не имеет места.

Покажем теперь, что если установившееся течение потенциальное, то для него обязательно соблюдается уравнение Бернулли. Пусть частица жидкости движется со скоростью, составляющие которой равны u, v, w . Составляющие угловой скорости ω вращения связаны со скоростями u, v, w следующими соотношениями:

$$w_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad w_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad w_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (35)$$

Для того чтобы все три составляющие угловой скорости были равны нулю, должны соблюдаться условия:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (36)$$

Но если течение потенциальное, т. е. обладает потенциалом скоростей Φ , то

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Подставляя эти выражения в равенства (36), мы получим:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{и т. д.}$$

Следовательно, равенства (36) тождественно выполняются, так как, если Φ есть функция координат, то всегда

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \quad \text{и т. д.}$$

Умножим теперь уравнения Эйлера (13) соответственно на dx , dy , dz и сложим; мы получим:

$$\frac{du}{dt} dx + \frac{dv}{dt} dy + \frac{dw}{dt} dz = X dx + Y dy + Z dz - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right), \quad (37)$$

где для $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ следует взять их выражения (12). Имея в виду условия (36), выражения (12) можно преобразовать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right), \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right), \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Предполагая, что массовая сила имеет потенциал U и что плотность зависит только от давления, и подставляя значения (38) в уравнение (37), мы получим:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial u}{\partial t} dx + \frac{\partial v}{\partial t} dy + \frac{\partial w}{\partial t} dz \right] + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) dx + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) dy + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) dz \right] + \\ &\quad + \left[\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right] + \left[\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right] = 0. \end{aligned}$$

Все выражения в квадратных скобках можно проинтегрировать, не налагая никаких ограничений на путь интегрирования. В результате мы получим:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \mathbf{P} + \mathbf{U} = \text{const.} \quad (39)$$

Так как интегрирование выполнено нами для определенного момента времени, то постоянная в правой части уравнения (39) в разные моменты времени может принимать, вообще говоря, разные значения (например, в том случае, когда давление в пространстве, занимаемом жидкостью, изменяется путем внешнего воздействия). Поэтому правильнее в правой части написать $f(t)$ вместо const. Если движение установившееся, то $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$, и уравнение (39) переходит в уравнение Бернулли.

§ 10. Потенциальное течение (продолжение). Полагая в уравнении (29) ds последовательно равным dx , dy и dz , мы найдем соотношения, связывающие составляющие скорости u , v , w с потенциалом скоростей Φ :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (40)$$

Подставляя эти выражения u , v , w в уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

мы получим так называемое *уравнение Лапласа*:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (41)$$

Это уравнение встречается также в других областях физики, в частности, в электростатике — в учении об электростатическом потенциале, где оно выполняется в таких местах поля, в которых отсутствуют заряды и диэлектрическая постоянная имеет постоянное значение. Поэтому при решении гидродинамических задач могут быть непосредственно использованы решения уравнения (41), известные из электростатики, например, решения для точечного заряда, для диполя и т. д. Для практических приложений важное значение имеет следующее свойство уравнения Лапласа: сумма или разность двух его решений также является решением, что непосредственно следует из линейности этого уравнения. При таком «наложении» двух потенциалов скорости складываются по закону параллелограмма. Заметим, что уравнение Лапласа выполняется также для течения вязкой жидкости между двумя параллельными

пластинками, поставленными близко друг от друга. Такое течение часто используется для демонстрации линий тока потенциального течения (см. § 9 гл. III). Хотя в действительности оба течения формируются разными силами, тем не менее линии тока того и другого течения при надлежащих условиях опыта весьма точно совпадают.

Рассмотрим несколько примеров потенциального течения.

а) Трехмерный поток перед пластинкой. Одним из самых простых выражений для потенциала скоростей будет следующее:

$$\Phi = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2 + cz^2). \quad (42)$$

Подставляя это выражение Φ в уравнение Лапласа (41), мы получим:

$$a + b + c = 0. \quad (43)$$

Следовательно, для того чтобы функция (42) удовлетворяла уравнению Лапласа, коэффициенты a , b и c должны удовлетворять условию (43). Это условие можно выполнить, приняв

$$b = a, \quad c = -2a.$$

Тогда мы получим:

$$\Phi = \frac{a}{2}(x^2 + y^2 - 2z^2), \quad (44)$$

откуда найдем составляющие скорости течения:

$$u = ax, \quad v = ay, \quad w = -2az.$$

Очевидно, что поток, определяемый этим потенциалом, симметричен относительно оси вращения, совпадающей в осью z . Линии тока в плоскости yz , где $x = 0$, определяются дифференциальным уравнением

$$\frac{dz}{dy} = \frac{w}{v} = -\frac{2z}{y},$$

интегрируя которое, мы получим:

$$\ln z = \text{const} - 2 \ln y,$$

или

$$y^2 z = \text{const}.$$

Это уравнение изображает так называемую кубическую параболу (рис. 55), для которой оси z и y являются асимптотами. Таким образом, потенциал скоростей (44) определяет трехмерный, симметричный относительно оси, поток перед пластинкой.

Если движение установившееся, т.е. если коэффициент a не зависит от времени, то давление в потоке равно

$$\begin{aligned} p &= \text{const} - \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = \\ &= \text{const} - \frac{\rho a^2}{2}(x^2 + y^2 + 4z^2). \end{aligned}$$

Следовательно, максимум давления получается в точке $x = y = z = 0$, т.е. в начале координат. Поверхности равного давления представляют собой эллипсоиды с осями, длины которых относятся как $1 : 2 : 1/2$ (рис. 55).

б) *Источник и сток*. Функция

$$\Phi = \pm \frac{c}{r}. \quad (45)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ означает расстояние от начала координат, удовлетворяет уравнению Лапласа (41), а потому определяет потенциальное течение. Так как поверхности $\Phi = \text{const}$ представляют собой концентрические сферы и так как скорость течения w перпендикулярна к поверхностям $\Phi = \text{const}$, то в потоке, определяемом потенциалом скоростей (45), скорость во всех точках направлена вдоль радиуса и равна

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \mp \frac{c}{r^2}.$$

Поток, определяемый потенциалом скоростей $\Phi = +\frac{c}{r}$, называется *источником*, а поток, определяемый потенциалом $\Phi = -\frac{c}{r}$, — *стоком*. Линиями тока источника являются прямые, исходящие из начала координат, а линиями тока стока — прямые, сходящиеся в начале координат. И в источнике и в стоке скорость в начале координат равна бесконечности.

Количество жидкости, протекающее в источнике или стоке в единицу времени через сферу радиуса r , поверхность которой имеет площадь $4\pi r^2$, равно

$$Q = 4\pi r^2 \cdot \frac{c}{r^2} = 4\pi c. \quad (46)$$

В источнике это количество возникает в центре, а в стоке, наоборот, исчезает в центре. Величина Q называется *мощностью* источника или

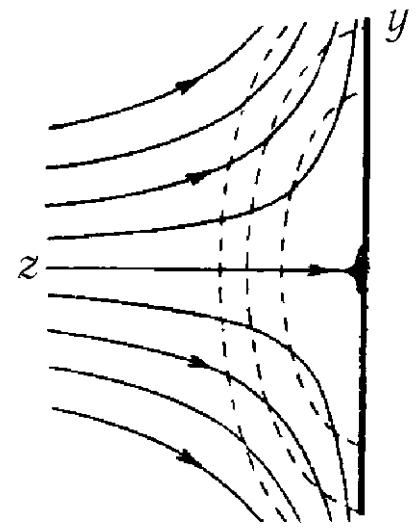


Рис. 55. Трехмерный симметричный относительно оси поток перед пластинкой

стока. Конечно, осуществить такое течение физически нельзя. Однако если в какую-нибудь точку O объема, занятого жидкостью, подвести узкую трубочку и отсасывать через нее жидкость, то в окрестности точки O возникнет поток, приближенно совпадающий со стоком.

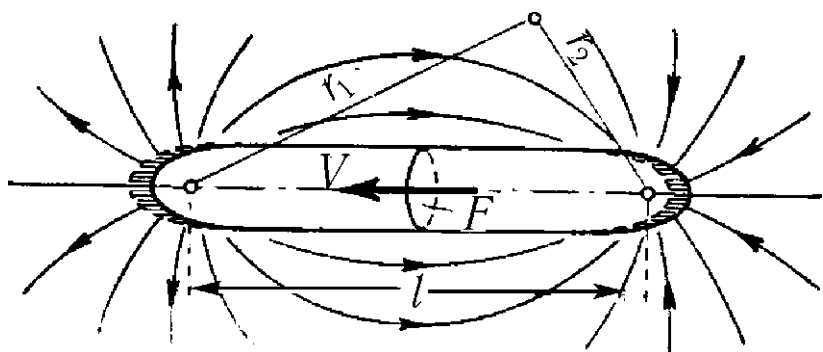


Рис. 56. Потенциальный поток около движущегося тела

жидкость притекает. Следовательно, около концов тела движение жидкости такое, как если бы около переднего конца был источник, а около заднего конца — сток. В самом деле, потенциал скоростей

$$\Phi = c \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right),$$

получаемый наложением источника и стока, дает именно такую картину течения жидкости, правда при условии, что концы тела имеют определенную, хорошо округленную форму. Однако указанный потенциал дает достаточно хорошее приближение и при другой форме концов тела. Если тело движется со скоростью V , а площадь его поперечного сечения равна F , то количество вытесняемой телом и вновь притекающей к телу жидкости можно положить равным $Q = FV$. Подставляя это значение Q в формулу (46), мы найдем постоянную c :

$$c = \frac{FV}{4\pi}.$$

Рассматриваемый поток жидкости, очевидно, неустановившийся, так как вместе с перемещением тела перемещается и поле скоростей в жидкости. Но если это течение рассматривать в системе отсчета, относительно которой тело покоится, т.е. в системе отсчета, движущейся вместе с телом, то в такой системе отсчета жидкость обтекает тело, и поток будет установившимся. Математически такой установившийся поток определяется потенциалом скоростей

$$\Phi' = \Phi + Vx.$$

Источники и стоки играют важную вспомогательную роль при гидродинамических расчетах. Например, если в жидкости движется удлиненное тело в направлении своей продольной оси (рис. 56), то его передний конец вытесняет перед собой жидкость, к заднему же концу, по мере его продвижения вперед, жид-

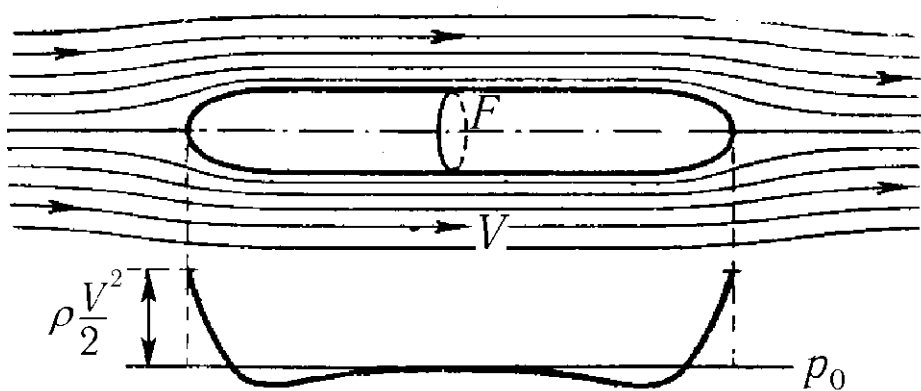


Рис. 57. Поток около движущегося тела. Система отсчета движется вместе с телом

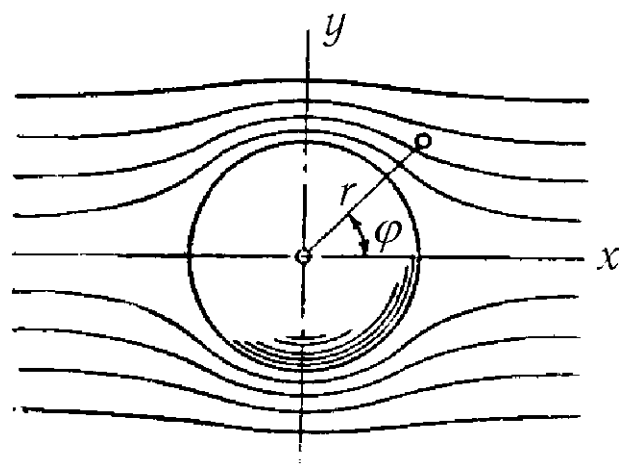


Рис. 58. Потенциальный поток около шара

Его линии тока изображены на рис. 57. Кривая внизу рисунка показывает распределение давления на поверхности, найденное на основании уравнения Бернулли.

Будем сближать между собой источник и сток, причем одновременно будем увеличивать их мощность в таком же отношении, в каком уменьшается их расстояние друг от друга. В пределе мы получим поток, называемый *диполем*. При таком сближении источника и стока поток, изображенный на рис. 57, переходит в поток около шара (рис. 58). Потенциал скоростей для такого потока равен

$$\Phi = Vx \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right),$$

где a есть радиус шара. Картина действительного обтекания шара имеет вследствие влияния трения несколько иной вид.

с) *Плоское движение*. Если при движении жидкости все линии тока представляют собой плоские кривые, расположенные в параллельных плоскостях, и скорость течения во всех точках каждой прямой, перпендикулярной к семейству параллельных плоскостей, одинаковая, то такое движение жидкости называется *плоскопараллельным*, или *плоским движением*. Если совместить одну из параллельных плоскостей с плоскостью xu , то из трех составляющих скорости u , v , w последняя будет равна нулю, а первые две будут функциями только от x и y . В математической гидродинамике теория плоских потоков разработана особенно полно, так как существует мощный математический метод, облегчающий исследование таких потоков. Оказывается, что и вещественная, и мнимая части любой аналитической функции комплексной переменной $x + iy$ всегда удовлетворяют уравнению Лапласа (41) и поэтому могут рассматриваться как потенциалы. В самом деле, пусть функция

$$F(z) = \Phi + i\Psi$$

есть аналитическая функция комплексного переменного $z = x + iy$, причем Φ есть вещественная часть функции, а Ψ — мнимая часть. Мы имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Но

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = i,$$

поэтому

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Подставляя сюда $F = \Phi + i\Psi$, мы получим:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}.$$

Для того чтобы это равенство соблюдалось, должны совпадать между собой отдельно его вещественные части и отдельно мнимые части. Следовательно, если учесть, что

$$\frac{1}{i} = -i,$$

то должны соблюдаться условия:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} (= u), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} (= v). \quad (47)$$

Составляя уравнение Лапласа (41), которое вследствие равенства $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$ состоит теперь только из двух членов, мы получим:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0,$$

т.е. обе функции Φ и Ψ действительно удовлетворяют уравнению Лапласа и, следовательно, могут рассматриваться как потенциалы скоростей некоторых двух потоков.

Из соотношений (47) легко видеть, что оба эти потока в каждой точке ортогональны друг к другу и имеют здесь равные по абсолютной

величине скорости. В самом деле, скорость первого потока образует с осью x угол α , для которого

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial x}} = \frac{v}{u};$$

скорость второго потока образует с осью x угол β , для которого

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial y}}{\frac{\partial \Psi}{\partial x}} = \frac{u}{-v},$$

следовательно,

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Абсолютная величина скорости и в первом и во втором потоке равна $\sqrt{u^2 + v^2}$. Вследствие ортогональности обоих потоков линии равного потенциала одного потока являются линиями тока другого (скорость всегда направлена по нормали к поверхности равного потенциала).

Функция, значения которой остаются постоянными на линиях тока, называется *функцией тока*. Следовательно, если функция Φ выбрана в качестве потенциала скоростей, то Ψ будет функцией тока. Функция тока имеет еще другое наглядное значение: разность ее значений в двух точках равна объему жидкости, протекающему в единицу времени между обеими точками в слое с толщиной, равной единице.

Рассмотрим несколько примеров плоских потоков. Плоский поток перед стенкой определяется функцией

$$F = \frac{a}{2} z^2.$$

В самом деле, мы имеем:

$$\Phi + i\Psi = \frac{a}{2}(x^2 + 2ixy - y^2),$$

следовательно,

$$\Phi = \frac{a}{2}(x^2 - y^2), \quad \Psi = axy.$$

Последнее уравнение показывает, что линиями тока $\Psi = \text{const}$ являются равнобочные гиперболы, асимптотами которых служат оси x и y . Составляющие скорости равны

$$u \frac{\partial \Phi}{\partial x} = ax, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -ay.$$

Плоский источник определяется функцией

$$F = b \ln z.$$

Так как

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi},$$

где r и φ суть полярные координаты, то

$$\ln z = \ln r + i\varphi,$$

следовательно,

$$\Phi = b \ln r, \quad \Psi = b\varphi.$$

Таким образом, линиями тока $\Psi = \text{const}$ действительно являются прямые φ , исходящие из начала координат. Линиями равного потенциала $\Phi = \text{const}$ являются окружности $r = \text{const}$.

В качестве третьего примера рассмотрим поток вдоль двух пересекающихся между собой стенок. Такой поток, если точка пересечения стенок расположена в начале координат, а ось x направлена вдоль одной из стенок, определяется функцией

$$F = \frac{a}{n} z^n,$$

где $n = \frac{\pi}{\alpha}$; α есть угол между обеими стенками. В самом деле, введя полярные координаты, мы получим:

$$\frac{a}{n} z^n = \frac{a}{n} r^n [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n,$$

или, на основании формулы Муавра,

$$\frac{a}{n} z^n = \frac{a}{n} r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Следовательно, функцией тока будет

$$\Psi = \frac{a}{n} r^n \sin \varphi.$$

Она принимает нулевое значение $\Psi = 0$, т.е. совпадает со стенкой, при следующих значениях φ :

$$\varphi = 0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots,$$

или, если заменить n указанным выше его значением, при

$$\varphi = 0, \alpha, 2\alpha, \dots$$

Таким образом, при разных значениях $n = \frac{\pi}{\alpha}$ мы будем иметь потоки вдоль двух стенок, пересекающихся между собой под углами α . На рис. 59 изображены линии тока таких потоков, получающихся для значений $\alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ и 2π . Как легко видеть, для углов $\alpha < \pi$ скорость течения в начале координат равна нулю, а для углов $\alpha > \pi$ она равна бесконечности.

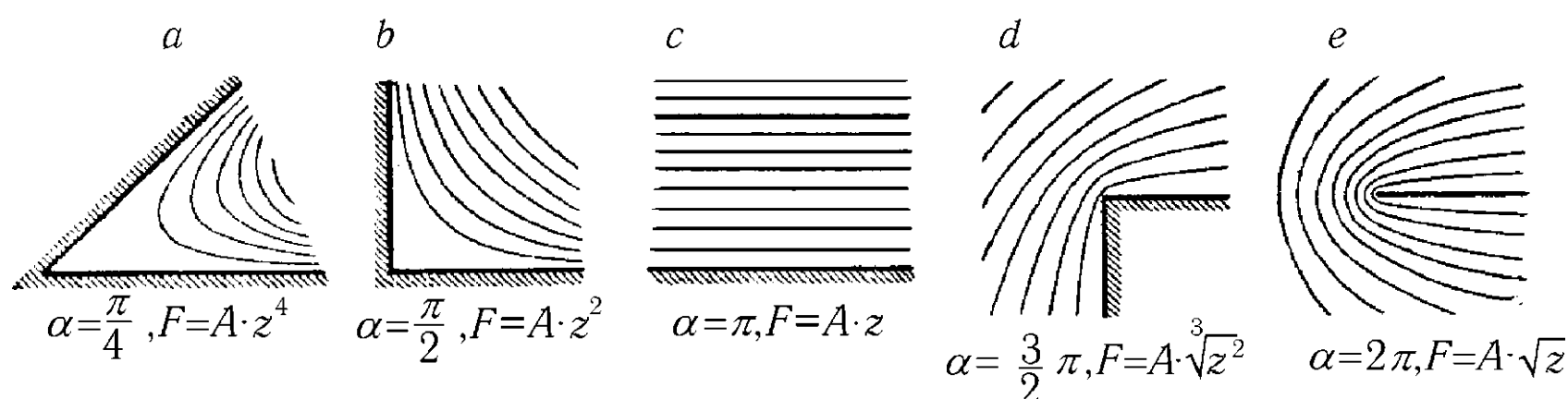


Рис. 59. Потоки, определяемые функцией $F = Az^n$ при разных значениях n

Поток около круглого цилиндра радиуса a в направлении, перпендикулярном к оси цилиндра, определяется функцией

$$F = V \left(z + \frac{a^2}{z} \right).$$

Вычисляя функцию тока Ψ , мы получим:

$$\Psi = V \sin \varphi \left(r - \frac{a^2}{r} \right).$$

Она равна нулю на оси x , где $\sin \varphi = 0$, и на окружности радиуса r , где $r - \frac{a^2}{r} = 0$. Картина линий тока получается очень похожей на картину линий тока при обтекании шара (см. рис. 58).

Можно было бы привести еще много других примеров плоских потоков, определяемых функциями комплексной переменной, но мы ограничимся разобранными. В теории функций комплексной переменной

существует метод, позволяющий из известного потока около какого-нибудь тела получать новые потоки около других тел. Будем рассматривать две комплексные переменные $z = x + iy$ и $\zeta = \xi + i\eta$. Каждой паре значений x, y соответствует точка в плоскости xy , а каждой паре значений ξ, η — точка в плоскости $\xi\eta$. Всякая функция

$$z = f(\zeta)$$

устанавливает между z и ζ соответствие такого рода, что каждая пара значений ξ, η связывается с парой значений x, y , следовательно, каждая точка плоскости $\xi\eta$ связывается с точкой плоскости xy . Такое соответствие между плоскостями $\xi\eta$ и xy называют отображением. При отображении каждая линия плоскости xy переходит в некоторую линию плоскости $\xi\eta$, точка пересечения двух линий плоскости xy — в точку пересечения соответствующих линий в плоскости $\xi\eta$. Производные от вещественной и мнимой частей функции $f(\zeta)$ удовлетворяют соотношениям такого же вида, как и равенства (47). Прямоугольная сетка одной плоскости отображается также в прямоугольную, но в общем случае криволинейную сетку другой плоскости, причем масштаб отображения в обоих направлениях получается одинаковым. Это означает, что в бесконечно малых частях отображение происходит с соблюдением подобия. Поэтому такого рода отображения называются *конформными отображениями*. Примеры плоских потоков, разобранные выше, одновременно являются и примерами конформных отображений, если только вместо Φ и Ψ написать ξ и η . Последний из примеров показывает, что функция

$$F = V \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$$

отображает полуплоскость $\Phi\Psi$ на область плоскости xy , ограниченную двумя отрезками оси x , простирающимися от $-\infty$ до $-a$ и от $+a$ до $+\infty$, и половиной окружности радиуса a .

Важное значение конформных отображений для гидродинамики состоит в следующем. Если F есть аналитическая функция от z , а z есть аналитическая функция от ζ , то F есть аналитическая функция также и от ζ . Это означает, что в плоскости ζ функция $F = \Phi + i\Psi$ также определяет некоторый поток. Следовательно, если в плоскости xy имеется какой-нибудь поток, что всякое конформное отображение плоскости xy на плоскость $\xi\eta$ дает некоторый новый поток. Такой способ получения новых потоков из заданного потока может быть повторен сколько угодно раз.

Существуют различные методы, позволяющие конформно отобразить область плоскости $\xi\eta$, лежащую вне контура, близкого по форме к профилям современных крыльев самолета, на область плоскости xu , лежащую вне окружности. Картина линий тока и динамические соотношения при обтекании окружности известны, поэтому, зная вид отображающей функции, можно из этой картины легко получить все, что относится к обтеканию профиля крыла¹.

Производная $\frac{dF}{dz}$, как легко видеть, равна

$$\frac{dF}{dz} = u - iv.$$

Эта величина, сопряженная с величиной $u + iv$, называется *комплексной скоростью* и обозначается через $\bar{w}$. Очевидно, что $\bar{w}$ является аналитической функцией от z или от F , следовательно, отображение плоскости $\Phi\Psi$ на плоскость uv также является конформным. Существуют такие случаи, когда, не зная функции $F(z)$, определяющей поток в плоскости xu , можно тем не менее заранее, на основании заданных граничных и других условий, построить картину распределения комплексной скорости $\bar{w}$ в плоскости uv . Так, например, при истечении жидкости через щель между двумя стенками (рис. 60a) заранее известны направления скорости на стенках ab и cd ; далее известно, что на границах свободной струи скорость постоянна (это следует из уравнения Бернулли, так как на границах струи давление одинаковое); наконец, нам известны предположительные направления линий тока до истечения из щели, а также предположительное направление струи после истечения. На основании этих данных мы можем построить в плоскости uv картину распределения скоростей (рис. 60,b) и рассматривать ее как некоторый поток. Если для этого потока функция

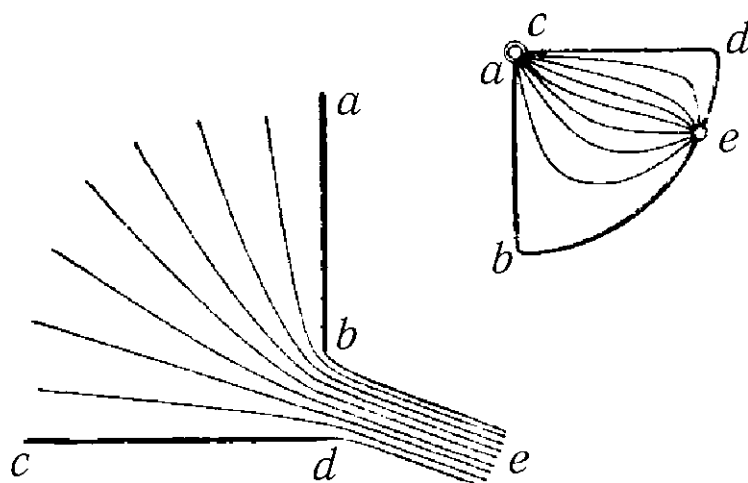


Рис. 60. Истечение через щель

$$F = F(\bar{w}),$$

его определяющая, известна, то можно путем обращения найти функ-

¹Подробности и указания на литературу можно найти в книгах: Schmidt H., Aerodynamik des Fluges, Berlin, 1929; Müller W., Mathematische Strömungslehre, Berlin, 1928. [См. также Лаврентьев М. А., Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики. Москва, 1947. (Прим. перев.)]

цию

$$\overline{w} = \overline{w}(\overline{F}).$$

Тогда, проинтегрировав уравнение

$$\frac{dF}{dz} = \overline{w}(F),$$

мы получим:

$$z = \int \frac{dF}{\overline{w}(F)}.$$

Наконец, отделив вещественную и мнимую части комплексной переменной z , мы найдем для каждого значения Φ и Ψ соответствующие им значения x, y , т.е. построим картину линий тока.

Приведенных примеров достаточно, чтобы дать представление о применении методов теории функции комплексной переменной в гидродинамике.

§ 11. Потенциальное течение с циркуляцией. Подъемная сила крыла. Эффект Магнуса. Хотя при всех потенциальных течениях циркуляция в любой малой области потока равна нулю, тем не менее существуют такие потенциальные потоки, в которых циркуляция для всего потока в целом не равна нулю. Правда, необходимым условием для этого является многосвязность области, в которой происходит течение. Область пространства или плоскости называется *многосвязной*, если в ней можно провести такие замкнутые кривые, которые нельзя стянуть в точку, не разрывая их, т.е. не выходя за пределы области. Примерами двухсвязной области могут служить комната с колонной посередине или область вокруг кольца. Пусть поток занимает многосвязную область, в каждой односвязной части которой частицы движутся без вращения, следовательно, в каждой такой части циркуляция равна нулю. Далее, пусть в рассматриваемой области циркуляция вдоль какой-нибудь кривой, которую нельзя стянуть в точку, равна Γ . Тогда, как легко доказать, циркуляция вдоль любой другой кривой, которую нельзя стянуть в точку и которая получается из первой непрерывной деформацией, также равна Γ . В § 10 мы определили потенциал в заданной точке как значение криволинейного интеграла при интегрировании между фиксированной точкой и заданной точкой. Поскольку теперь в потоке существуют замкнутые кривые, вдоль которых циркуляция не равна нулю, а имеет некоторое значение Γ , то это означает, что потенциал такого потока не является больше однозначным; наоборот,

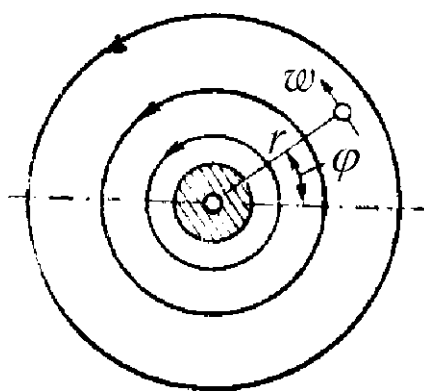


Рис. 61. Потенциальный поток с циркуляцией

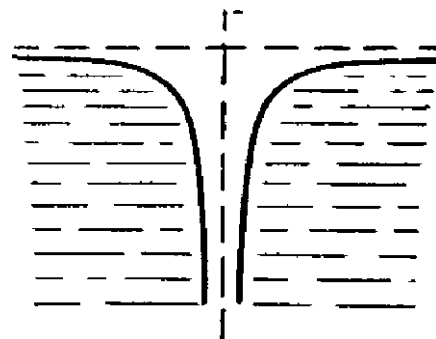


Рис. 62. Полый вихрь

теперь он является *многозначным*, увеличиваясь при каждом обходе нестягиваемой в точку кривой на величину Γ .

Простейший плоский поток такого рода определяется потенциалом скоростей

$$\Phi = c\varphi,$$

где φ есть центральный угол (рис. 61). Этот потенциал, удовлетворяющий, как легко видеть, уравнению (41), возрастает при каждом полном обходе замкнутой нестягиваемой в точку кривой ($\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi$) на величину $2\pi c$, которая, следовательно, и является циркуляцией Γ . Поверхностями равного потенциала являются плоскости, проходящие через начало координат, а линиями тока — окружности. Скорость течения, согласно формуле (29), равна

$$w = \frac{d\Phi}{ds} = \frac{c d\varphi}{r d\varphi} = \frac{c}{r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (48)$$

Для $r = 0$ скорость получается равной бесконечности; поэтому физически такой поток возможен только вне некоторого ядра конечного диаметра (на рис. 61 оно заштриховано). Ядро может быть образовано твердым телом или вращающейся жидкостью (движение которой не является потенциальным), наконец, оно может состоять из другой, более легкой жидкости, не принимающей участия в движении. Примером последнего случая является полый водяной вихрь, в котором вода совершает круговое движение вокруг ядра из воздуха. Под действием силы тяжести свободная поверхность такого полого вихря принимает форму, изображенную на рис. 62. Уравнение этой поверхности получается путем применения уравнения Бернулли к двум линиям тока и имеет вид:

$$z = z_0 - \frac{w^2}{2g} = z_0 - \frac{c^2}{2gr^2}.$$

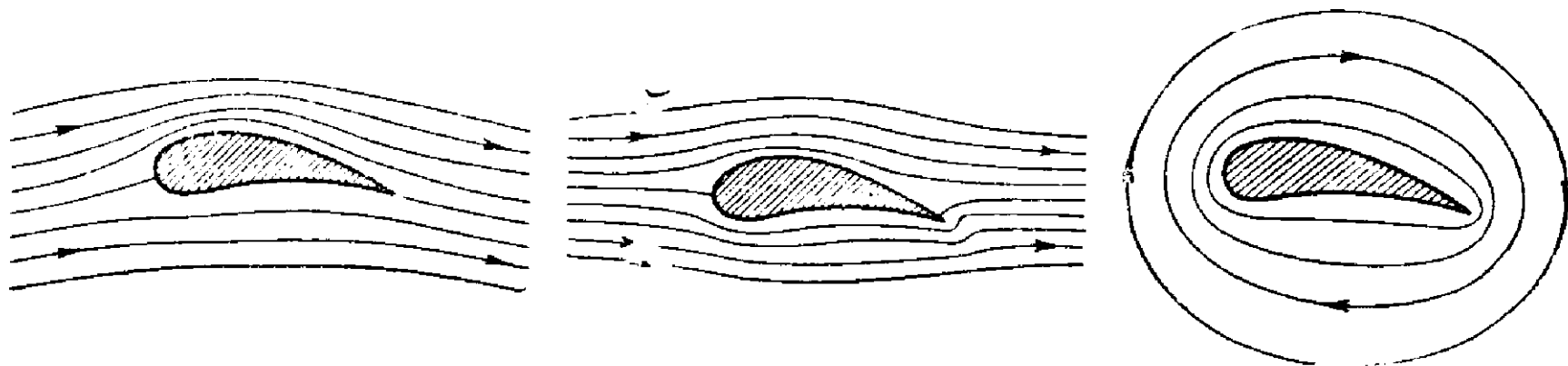


Рис. 63. Поток около крыла

Рис. 64. Обычный потенциальный поток около крыла

Рис. 65. Циркуляционный поток вокруг крыла

Подобного рода воронки часто наблюдаются в реках, в ваннах (при спуске воды) и т. д. Во всех таких случаях мы имеем дело с потоками, в которых циркуляция уже существует и вызвана какими-то посторонними причинами.

Другим примером потенциального потока с циркуляцией является поток около крыла самолета (рис. 63). Этот поток получается из обычного потенциального потока без циркуляции (рис. 64) путем наложения на последний циркуляционного потока, изображенного на рис. 65, вследствие чего при обтекании крыла также возникает циркуляция. С циркуляцией тесно связано возникновение *подъемной силы крыла*. Без всякого расчета легко видеть, что при наложении циркуляционного потока на обычный потенциальный поток (рис. 64) скорость последнего над крылом увеличивается, а под крылом, наоборот, уменьшается. Согласно уравнению Бернулли это означает, что над крылом давление уменьшается, а под крылом увеличивается, следовательно, возникает сила, действующая на крыло снизу вверх, т. е. подъемная сила. Кутта (Kutta) и Н. Е. Жуковский независимо друг от друга¹ нашли путем теоретических расчетов, что подъемная сила на единицу длины крыла равна

$$A = \rho \Gamma V,$$

где ρ есть плотность жидкости, Γ — циркуляция, а V — относительная скорость крыла и жидкости. Следовательно, подъемная сила прямо пропорциональна циркуляции. Вывод указанной формулы будет дан ниже, в § 13.

Если движение начинается из состояния покоя, то, согласно теореме Томсона, в получившемся потоке циркуляция не может возникнуть даже в том случае, когда движение происходит в многосвязной области.

¹См. по этому поводу сноску на стр. 107.

В самом деле, в состоянии покоя циркуляция вдоль всякой замкнутой кривой равна нулю, поэтому она должна остаться равной нулю и после начала движения. В действительности же циркуляция, как правило, возникает, и причиной этого является образование поверхности раздела. Так, например, в спиральной камере, изображенной на рис. 36, в первый момент начала движения образуется на остром ребре k поверхность раздела, из которой возникает вихрь такого же вида, как на рис. 43. В дальнейшем вихрь отрывается от ребра и уплывает вместе с потоком, но вызванная им циркуляция остается в потоке на все время. Совершенно аналогичная картина наблюдается и при движении крыла. В начале движения поток под крылом огибает заднюю кромку крыла снизу вверх (рис. 64), вследствие чего здесь образуется поверхность раздела, превращающаяся в вихрь (рис. 66). В дальнейшем вихрь отрывается от крыла и уплывает вместе с потоком, но оставляет в нем циркуляцию, равную по абсолютной величине своей циркуляции, но противоположно направленную. При этом вдоль жидких линий, заключающих внутри себя крыло и вихрь вместе, циркуляция остается равной нулю, как этого и требует теорема Томсона.



Рис. 66. Вихрь, образующийся при разгоне крыла

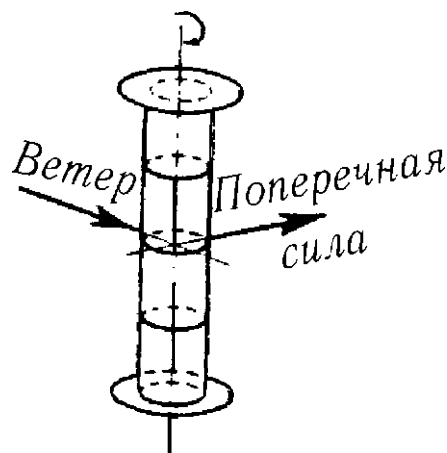


Рис. 67. Вращающийся цилиндр

Для того чтобы от присутствия крыла область пространства сделалась двухсвязной, необходимо, чтобы крыло с боков было ограничено двумя параллельными стенками или чтобы крыло простиралось в обе стороны до бесконечности. Для действительных крыльев ни одно из этих условий не соблюдается. Тем не менее циркуляция, без которой не может получиться подъемная сила, возникает и в этом случае. Она возникает вследствие отрыва вихрей, образующихся из поверхности раздела с поперечным скачком скорости (рис. 46). Подробнее об этом будет сказано в § 15 гл. III.

Если на вращающийся круглый цилиндр набегаёт поток воздуха в направлении, перпендикулярном к оси цилиндра (рис. 67), то вокруг

него возникает циркуляция такого же вида, как и вокруг крыла. В дальнейшем, в § 7 гл. III, мы увидим, что причиной возникновения этой циркуляции является трение. Циркуляция вокруг цилиндра создает силу, действующую на цилиндр в направлении, перпендикулярном к направлению потока, и называемую поэтому поперечной силой. На единицу длины оси цилиндра эта сила равна, как и при циркуляции вокруг крыла, ρGV . Такая же сила возникает и при набегании потока на трехгранную или четырехгранную призму, вращающуюся вокруг продольной оси, на вращающийся шар и т. д. Направлена поперечная сила всегда к той стороне вращающегося тела, на которой направление вращения и направление потока совпадают. Возникновение при указанных условиях поперечной силы называется, по имени ученого Магнуса (Magnus), впервые открывшего (в 1852 г.) это явление, *эффектом Магнуса*.

До изобретения нарезных артиллерийских орудий часто случалось, что шаровые снаряды после вылета из ствола значительно отклонялись в сторону от той траектории, по которой они должны были бы лететь. Магнус показал, что причиной такого поведения снаряда служило вращение вокруг поперечной оси, которое шаровой снаряд получал вследствие случайных причин. На основании сказанного выше это создавало условия, необходимые для возникновения поперечной силы, которая и вызывала нежелательное отклонение снаряда от намеченной траектории. Такие же боковые отклонения, часто очень значительные, наблюдаются и при полете «срезанного» мяча при игре в теннис или гольф. Несколько лет тому назад А. Флеттнер (Flettner) использовал эффект Магнуса для приведения в движение корабля энергией ветра, причем вместо парусов он установил вертикальные быстро вращающиеся цилиндры (роторы). На концах цилиндров помещались выступающие круглые диски (рис. 67), так как иначе воздух, расположенный выше и ниже цилиндра, засасывался в область потока с пониженным давлением и, возмущая поток, уменьшал поперечную силу. Испытания показали техническую пригодность такого роторного корабля, но в экономическом отношении он оказался менее выгодным обычных моторных судов и поэтому не получил дальнейшего применения.

Эффект Магнуса можно продемонстрировать при помощи следующего опыта. Поставим на рельсы легкую тележку с вертикальным цилиндром, приводимым во вращение маленьким электромоторчиком, и начнем обдувать этот цилиндр потоком воздуха, направленным поперек рельсов (для получения такого потока можно воспользоваться настольным вентилятором). Тележка сейчас же начнет двигаться вдоль рельсов. Устанавливая вентилятор так, чтобы поток воздуха набегал

на цилиндр под непрямым углом к направлению рельсов, можно исследовать движение цилиндра-паруса на разных курсах. Можно даже заставить тележку катиться против ветра под острым углом. При перемене направления вращения цилиндра тележка катится в обратную сторону.

Можно произвести также следующий опыт. Приведем в быстрое вращение легкий цилиндр, расположив при этом его ось горизонтально, и предоставим цилиндру падать. Мы увидим, что вместо того, чтобы упасть вертикально вниз, цилиндр начнет планировать по довольно пологой траектории. При таком движении (рис. 68) на цилиндр, кроме подъемной (поперечной) силы A , перпендикулярной к направлению движения, действует еще сопротивление W , направленное против движения, которое, однако, в случае длинного и узкого цилиндра и при наличии боковых дисков значительно меньше, чем подъемная сила. Равнодействующая этих обеих сил уравнивает вес цилиндра и тем самым замедляет его падение.

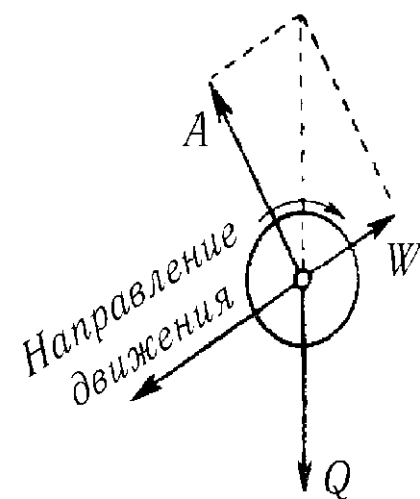


Рис. 68. Силы, действующие на падающий вращающийся цилиндр

§ 12. Движение жидкости, лишенной трения, с вращением частиц. Вихревые нити. Для изучения движений однородной, лишенной трения жидкости с вращением частиц воспользуемся опять теоремой Томсона о постоянстве циркуляции по замкнутому жидкому контуру. Из этой теоремы и из геометрических свойств ротации скорости (называемой также вихревым вектором) можно вывести известные теоремы Гельмгольца о вихревых движениях. Эти теоремы, касающиеся весьма важных геометрических и механических соотношений, имеющих место при движении жидкости с вращением частиц, были выведены самим Гельмгольцем несколько иным путем, а именно — на основе электродинамических представлений¹. Однако следствия, вытекающие из этих теорем, получаются простыми только в том случае, когда частицы жидкости, находящиеся во вращении, занимают область в виде нити, и вне этой области движение происходит без вращении частиц. В таком случае говорят о *вихревых нитях*. Важнейшие теоремы о вихревых нитях можно вывести из свойств окружающего их потенциального течения, не углубляясь при этом в детали движения жидкости с вращением частиц. Таким образом, мы должны вернуться

¹ Helmholtz H., Crelles Journ., т. 55 (1858), стр. 25.

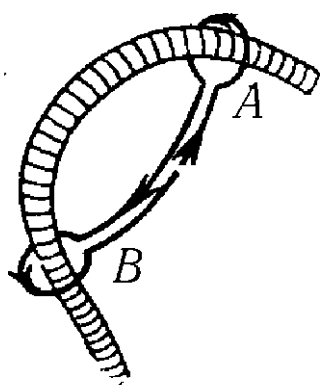


Рис. 69. Вихревая нить

к потенциальному движению с циркуляцией, о котором мы говорили в § 11. Напомним, что область, в которой происходит такое потенциальное движение, является многосвязной и что циркуляция по всем кривым, которые можно перевести друг в друга, не пересекая границ области, одинаковая. Отсюда, как мы сейчас увидим, следует, во-первых, что вихревая нить должна либо иметь форму кольца, т. е. быть замкнутой, либо доходить своими концами до границ жидкости, и, во-вторых, что циркуляция вокруг вихревой нити в один

и тот же момент времени во всех местах должна быть одинаковой. В самом деле, проведем в потоке замкнутую линию, состоящую из двух петель A и B вокруг вихревой нити и двух отрезков AB и BA (рис. 69). Эту линию можно путем непрерывной деформации стянуть в точку, не пересекая вихревой нити. Следовательно, циркуляция вдоль этой линии равна нулю. Но эта циркуляция складывается из четырех частей, две из которых получаются при интегрировании вдоль отрезков AB и BA , а две другие — при интегрировании вдоль петель A и B . Циркуляции вдоль примыкающих друг к другу отрезков AB и BA взаимно уничтожаются, так как эти отрезки при интегрировании обходятся в противоположных направлениях. Следовательно, должны взаимно уничтожаться и циркуляции вдоль петель A и B , так как иначе полная циркуляция по всей жидкой линии не была бы равна нулю. Это означает, что циркуляции вдоль петель A и B равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Но проведенная замкнутая линия огибает вихревую нить около A и около B в противоположных направлениях, поэтому циркуляция около A и B , взятая в одном и том же направлении, должна быть одинаковая. Если бы вихревая нить оканчивалась где-либо внутри жидкости, то мы могли бы одну из петель снять с вихревой нити, в то время как вторая продолжала бы оставаться на вихревой нити. Тогда первая петля потеряла бы свою циркуляцию, а вторая — сохранила. Следовательно, изменилась бы полная циркуляция вдоль проведенной замкнутой линии при перемещении последней в пределах области потенциального движения, что, однако, невозможно. Таким образом, мы приходим к следующей теореме: *Вихревая нить не может оканчиваться нигде внутри жидкости и имеет везде одинаковую циркуляцию.* К этому, чисто геометрическому свойству вихревой нити присоединяется еще динамическое свойство, вытекающее из теоремы Томсона: *Циркуляция вокруг вихревой нити не изменяется с течением времени.*

Рассмотрим теперь, что происходит с очень маленькими замкнутыми жидкими линиями. Если эти линии лежат в области потенциального движения, то циркуляция вокруг них равна нулю. Если же они находятся внутри вихревой нити, то в общем случае циркуляция вокруг них не равна нулю, причем, согласно теореме Томсона, она все время остается постоянной. Отсюда непосредственно следует, что *вихревая нить состоит все время из одних и тех же частиц жидкости*. Так как количество движения и энергия самой вихревой нити малы по сравнению с количеством движения и энергией окружающего потенциального потока, то движение вихревой нити в основном управляется движением потенциального потока (см. ниже, пример первый). Правда, геометрически потенциальное движение можно свести к циркуляции вокруг оси вихревой нити, что для расчетов обычно удобнее. При таком представлении движение каждого элемента вихревой нити обусловливается влиянием всех остальных элементов нити, а все потенциальное движение вызывается вихревой нитью. Однако такое представление следует рассматривать только как геометрическое. С точки зрения энергетической преобладающее влияние на движение вихревой нити оказывает внешнее движение.

Формулы для расчета поля скоростей вокруг вихревых нитей, определенным образом расположенных, полностью совпадают с электродинамическими формулами, выражающими закон Био – Савара. Вихревые нити соответствуют электрическим проводникам, циркуляция — силе тока, поле скоростей — магнитному полю и угловая скорость вращения — плотности тока. Сила тока, подобно циркуляции, одинакова вдоль всего проводника, а плотность тока обратно пропорциональна площади его поперечного сечения. Для вихревой нити, согласно формуле (32) § 9, при $\sin \alpha = 1$ циркуляция равна

$$\Gamma = 2wF.$$

Следовательно, в тех местах, где поперечное сечение вихревой нити меньше, угловая скорость вращения больше, и наоборот. Такая же связь между F и w существует и во времени: если какой-либо отрезок вихревой нити вытягивается, то угловая скорость вращения возрастает обратно пропорционально поперечному сечению. При этом длина отрезка вихревой нити увеличивается также обратно пропорционально поперечному сечению, так как объем нити остается неизменным. Следовательно, *угловая скорость вращения нити изменяется в точности пропорционально изменению длины отрезка нити*.

Указанные факты и составляют основное содержание теорем Гельмгольца. Рассмотрим несколько примеров движения вихревых нитей.

а) Прямолинейные параллельные вихревые нити в жидкости, в остальных местах свободной от вращения. Как уже было сказано в § 11, вихревая нить с циркуляцией (или напряженностью) Γ создает вокруг себя поле скоростей. В каждой точке этого поля скорость перпендикулярна к оси вихря и к радиусу r , соединяющему ось вихря с рассматриваемой точкой поля, а по абсолютной величине, согласно формуле (48), равна

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

Если имеется несколько вихревых нитей, то отдельные поля скоростей налагаются друг на друга, и каждая вихревая нить принимает участие в том движении, которое возникает в занимаемом ею месте под действием других нитей. Так, например, в случае двух параллельных вихревых нитей обе они вращаются вокруг оси, параллельной осям обеих нитей. Для определения положения этой оси следует отложить вдоль осей обеих нитей отрезки, пропорциональные их напряженностям Γ , и, рассматривая эти отрезки как силы, сложить их. Линия действия равнодействующей даст положение искомой оси. Отрезки, пропорциональные напряженностям Γ , следует отложить в одну сторону, если оба вихря имеют циркуляции одного знака, и в разные стороны, если циркуляции вихрей противоположны. В первом случае ось вращения расположена между вихрями, а во втором случае — по одну сторону от них.

Две параллельные прямолинейные вихревые нити равной и противоположной по знаку циркуляции образуют пару вихрей (такое название дано по аналогии с парой сил). Пара вихрей совершает прямолинейное поступательное движение в направлении, перпендикулярном к кратчайшей прямой, соединяющей оба вихря, причем скорость движения равна

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi d},$$

где d есть расстояние между осями вихрей. В системе отсчета, покоящейся относительно невозмущенной жидкости, картина линий тока вихревой пары имеет вид, изображенный на рис. 70. На рис. 71 показана та же картина линий тока в системе отсчета, движущейся вместе с вихревыми нитями. Часть жидкости, отмеченная на рис. 71 штриха-

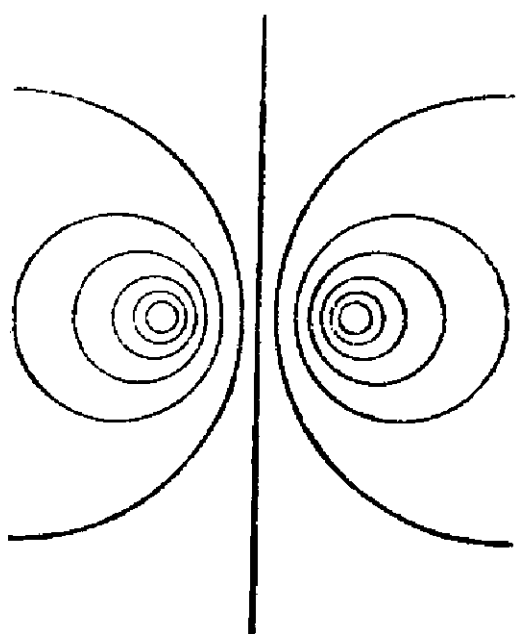


Рис. 70. Линии тока пары вихрей в неподвижной системе отсчета

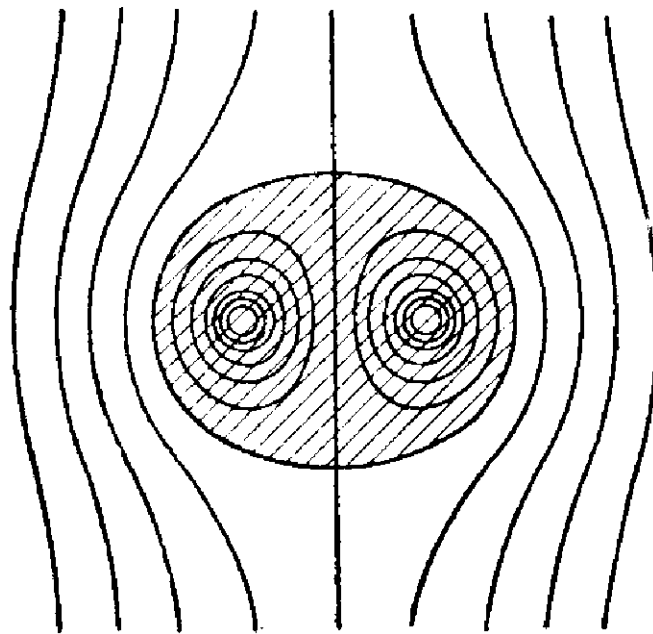


Рис. 71. Линии тока пары вихрей в системе отсчета, движущейся вместе с вихревыми ядрами

ми, остается все время около вихревых нитей. Это легко наблюдать, если окрасить жидкость в том месте, где возникает пара вихрей.

Для того чтобы взаимодействие прямолинейных параллельных вихревых нитей происходило в точности так, как указано выше, эти нити теоретически должны простираться в обе стороны до бесконечности или же они должны быть ограничены двумя параллельными стенками. Однако в последнем случае на движение вихревых нитей влияет трение, возникающее на стенках. Одна из параллельных стенок может быть заменена свободной поверхностью жидкости (следовательно, вторая стенка должна быть дном сосуда).

б) Круговые вихревые кольца. Такие вихревые нити вследствие своей кривизны получают поступательную скорость вдоль оси кольца, которая тем больше, чем тоньше вихревое ядро. Это явление может быть объяснено на основании теорем Гельмгольца как результат взаимодействия соседних элементов вихревой нити. Однако его можно объяснить также динамически как следствие поперечных сил, которые возникают под действием окружающей кольцо вращающейся жидкости (ср. с рассуждениями в § 11 по поводу обтекания крыла). Так как вихревое кольцо движется с довольно большой скоростью, то увлекаемая им жидкость часто также имеет форму кольца (кольца табачного дыма!), а не сплошного тела, как показано на рис. 71. Два вихревых кольца с общей осью, движущихся в одном направлении, взаимодействуют так, что переднее кольцо расширяется, а заднее, наоборот, суживается; вследствие этого поступательная скорость переднего кольца уменьшается, а заднего — увеличивается. Это приводит к тому, что заднее кольцо догоняет переднее и проскакивает сквозь него, после чего роль их меняется, и иг-

ра начинается снова. Два одинаковых вихревых кольца с общей осью, движущихся навстречу друг другу, по мере сближения все больше и больше увеличиваются в диаметре, но в то же время замедляют свое поступательное движение настолько, что друг до друга так и не доходят. Таким образом, центральная плоскость между обоими кольцами ведет себя подобно непроницаемой твердой стенке. По этой причине вихревое кольцо, приближающееся к твердой стенке, никогда ее не достигает.

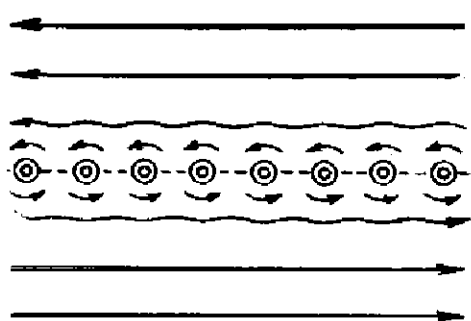


Рис. 72. Вихревой слой

с) Поверхности раздела, о которых шла речь в § 7, можно рассматривать как систему вихревых нитей, распределенных вдоль поверхности, причем оси вихревых нитей расположены перпендикулярно к направлению скачка скорости. В самом деле, из схемы, изображенной на рис. 72, видно, что система параллельных вихревых нитей формирует поток, который на некотором расстоянии от вихревых нитей имеет такое же поле скоростей, как и поток с поверхностью раздела. Наоборот, поверхности раздела, будучи неустойчивыми, легко распадаются на отдельные вихри, как это показано на рис. 41.

d) *Вихри и связанное с ними циркуляционное потенциальное течение* возникают всегда в результате образования поверхностей раздела. Все потенциальные течения являются результатом давления, передаваемого на жидкость ограничивающей ее стенкой или находящимся внутри нее телом. Циркуляционное течение возникает главным образом в том случае, когда внутри жидкости имеется поверхность, одна часть которой испытывает некоторое время давление, а другая, соседняя, часть не подвергается давлению. Примером может служить образование вихревого кольца около отверстия в стенке (рис. 45); стенка испытывает давление слева и отвечает равным противодействием, в то время как отверстие не подвергается давлению. Другим важным примером является движение крыла самолета, когда площадь, находящаяся непосредственно под крылом, некоторое время нагружена весом самолета, а продолжение этой площади за пределами крыла не подвергается в это время никакому давлению. В конце § 7 мы упомянули, что из поверхности раздела, возникающей позади крыла, образуются два вихря, сбегающие с концов крыла (см. рис. 46). Кроме того, в начальный момент движения, при разгоне крыла, образуется вихрь, изображенный на рис. 66. Этот начальный вихрь вместе с боковыми вихрями образует одну общую, обычно несколько размытую вихревую нить. Само

крыло с происходящей вокруг него циркуляцией, в точности равной циркуляции вокруг вихревой нити, замыкает всю систему, вследствие чего образуется своего рода вихревое кольцо, часть которого, правда, состоит из твердого тела (крыла). С кинематической точки зрения это надо понимать так, что часть вихревой нити проходит внутри твердого тела, вызывая снаружи его потенциальное течение с циркуляцией. Однако динамическая теорема Гельмгольца для этой части вихревой нити не имеет места; это вполне понятно, так как эта часть вихревой нити движется вместе с телом, и с концов ее к боковым вихревым нитям притекает все время новая жидкость. Количественное изучение таких вихревых движений дало возможность получить важные выводы, касающиеся поведения крыла в потоке жидкости (см. § 16 и 17 гл. III).

§ 13. Теорема о количестве движения и теорема о моменте количества движения для установившихся движений. Теоремы о количестве движения и о моменте количества движения, хорошо известные из общей механики, находят своеобразное применение к установившимся движениям жидкостей, а также к таким не установившимся движениям, которые во времени могут рассматриваться в среднем как установившиеся. Ценность этих теорем состоит в том, что для их применения требуются только данные о состоянии потока на граничных поверхностях рассматриваемой области, но не внутри области; это позволяет получать из них выводы о таких гидродинамических явлениях, детали которых не могут быть полностью учтены.

Количеством движения массы, как известно из общей механики, называется произведение массы на скорость (количество движения есть векторная величина и имеет, как и всякий вектор, три составляющих). *Согласно теореме о количестве движения изменение количества движения во времени, т. е. его производная по времени равна результирующей всех сил, приложенных к массе.* Согласно теореме о моменте количества движения *производная по времени от момента количества движения относительно какой-либо точки равна главному моменту относительно той же точки всех внешних сил, приложенных к массе.* Применяя эти теоремы к системе материальных точек, необходимо иметь в виду (§ 2 гл. I), что внутренние силы, действующие внутри механической системы, при суммировании по всем массам системы на основании закона о равенстве действия и противодействия взаимно уничтожаются и что остаются только силы, обусловленные массами, не принадлежащими к системе, т. е. внешние силы.

При *установившемся* движении какой-либо ограниченной массы жидкости изменение ее количества движения возникает исключитель-

но вследствие перемещения ее границ. В самом деле, при установившемся движении каждая частица жидкости внутри выделенной массы заменяется на своем месте другой частицей, принимающей здесь скорость первой частицы. Поэтому для определения изменения количества движения достаточно выяснить только то, что происходит на границах выделенной массы жидкости. Для этой цели рассмотрим жидкую струйку, изображенную на рис. 73. Прежде всего заметим, что жидкая

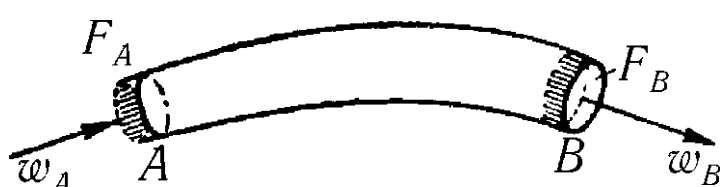


Рис. 73. Пояснение к теореме о количестве движения

струйка должна состоять все время из одних и тех же частиц жидкости, так как иначе нельзя будет основываться на теореме общей механики о количестве движения системы. Следовательно, во все время движения частицы жидкости, принадлежащие к жидкой струйке, не должны ее покидать,

а частицы жидкости, не принадлежащие к ней, не должны в нее проникать. Это означает, что поверхности, ограничивающие выделенную массу жидкости, должны перемещаться вместе с жидкостью, т. е. они должны быть жидкими поверхностями. Таким образом, в нашей жидкой струйке ее концевые поперечные сечения должны перемещаться вместе с жидкостью, первоначально заключенной в жидкой струйке. Перемещение левого сечения A струйки приводит к переносу массы

$$dm_1 = \rho F_A w_A dt,$$

а перемещение правого сечения B — к переносу массы

$$dm_2 = \rho F_B w_B dt.$$

В правых частях этих равенств F_A и F_B обозначают площади концевых поперечных сечений жидкой струйки, а w_A и w_B — скорости течения в этих сечениях. Вследствие неразрывности потока мы имеем:

$$dm_1 = dm_2 = dm.$$

Полное изменение количества движения за время dt около сечения B равно $dm \cdot w_B$, следовательно, в единицу времени оно равно

$$\frac{dm}{dt} w_B = \rho F_B w_B^2.$$

Направление этого изменения количества движения совпадает с направлением скорости w_B . Изменение количества движения в единицу вре-

мени около сечения A равно

$$\frac{dm}{dt} w_A = \rho F_A w_A^2$$

и по направлению противоположно скорости w_A . Векторную сумму этих изменений количеств движения, отнесенных к единице времени, следует приравнять результирующей всех внешних сил, действующих на выделенную массу жидкости. Вместо изменений количеств движения можно рассматривать соответствующие им «реакции», т. е. силы такой же абсолютной величины, но противоположного направления. Векторная сумма этих реакций, очевидно, уравнивается внешними силами, приложенными к выделенной массе жидкости. Следовательно, в случае жидкой струйки, изображенной на рис. 73, реакция в сечении A направлена в сторону скорости w_A , а в сечении B — в сторону, обратную скорости w_B .

Для правильного применения теорем о количестве движения и о моменте количества движения целесообразно ограничивать рассматриваемую массу жидкости замкнутой, так называемой *контрольной поверхностью* (на следующих ниже рис. 77 и 78 эта поверхность отмечена пунктиром). Векторная сумма всех внешних сил, действующих на жидкость, заключенную внутри контрольной поверхности, должна, согласно сказанному выше, уравниваться с векторной суммой реакций, вычисленных для всех жидких струек, проходящих через выделенную область. Следовательно, должны быть равны нулю суммы проекций всех сил и суммы моментов всех сил для всех координатных осей. Однако очень часто можно ограничиться составлением уравнения равновесия только для одного координатного направления.

При неустановившемся движении изменение количества движения выделенной массы жидкости происходит не только вследствие перемещения границ, но и вследствие изменения скоростей внутри выделенной жидкости. Если, как это часто бывает при турбулентных движениях, скорость неустановившегося потока в среднем не изменяется, то сумма изменений количеств движения внутри выделенного объема в среднем получается равной нулю, и тогда можно применять к неустановившимся потокам теоремы о количестве движения и моменте количества движения также, как и к установившимся. Правда, в таких случаях необходимо соблюдать осторожность при составлении средних значений на контрольной поверхности (см. § 14).

Рассмотрим несколько примеров применения теорем о количестве движения и моменте количества движения.

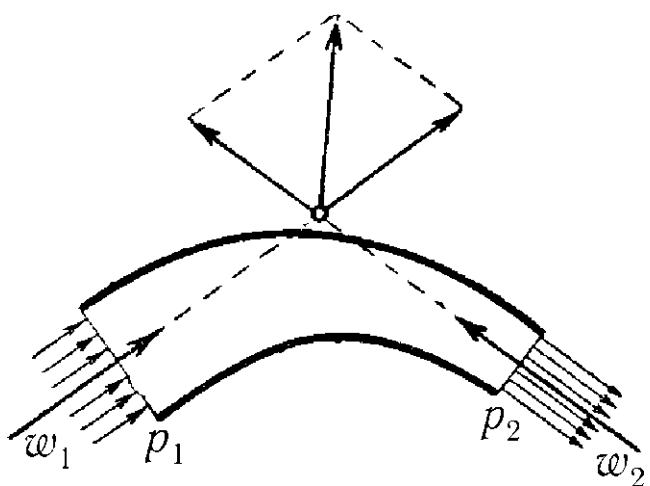


Рис. 74. Движение жидкости в изогнутом канале

а) Сила, с которой жидкость, текущая по изогнутому каналу, действует на его стенки. Пусть жидкость входит в канал со скоростью w_1 (рис. 74) при давлении p_1 и выходит из канала со скоростью w_2 при давлении p_2 . Пусть далее, F_1 есть площадь входного поперечного сечения, а F_2 — площадь выходного поперечного сечения. Тогда изменение количества движения во входном поперечном сечении будет равно $\rho F_1 w_1^2$ и направлено против скорости w_1 . Этому изменению

количества движения соответствует равная по величине, но противоположно направленная сила, с которой текущая жидкость действует на стенки канала. К этой силе прибавляется еще сила давления, равная $p_1 F_1$ и направленная в ту же сторону. Следовательно, жидкость, вступающая в канал, действует на его стенки с силой $F_1(\rho w_1^2 + p_1)$. Аналогичным образом, жидкость при выходе из канала действует на его стенки с силой $F_2(\rho w_2^2 + p_2)$, направленной против скорости w_2 , т.е. опять внутрь контрольной поверхности. Геометрическая сумма сил $F_1(\rho w_1^2 + p_1)$ и $F_2(\rho w_2^2 + p_2)$ представляет собой полную реакцию жидкости, текущей по изогнутому каналу, на его стенки.

б) Реакция вытекающей струи. Пусть струя вытекает через отверстие в стенке из области, давление в которой равно p_1 , в область, давление в которой равно p_2 . Количество движения, переносимое струей, равно

$$J = \rho F_s w^2,$$

где w есть скорость истечения струи, а F_s — площадь поперечного сечения струи. Подставляя вместо w его значение согласно формуле (17), мы получим:

$$J = 2F_s(p_1 - p_2).$$

Следовательно, количество движения, переносимое струей, равно удвоенной силе давления $p_1 - p_2$ на площадь поперечного сечения струи, причем направлено оно в сторону скорости истечения. Этому переносу количества движения соответствует реакция вытекающей струи, равная по величине, но противоположно направленная. Удвоенная величина давления объясняется тем, что в отверстии, кроме исчезновения избыточного статического давления $F_s(p_1 - p_2)$, происходит дополнительное уменьшение давления на такую же величину вследствие притекания

жидкости к отверстию. Реакцию вытекающей струи легко обнаружить, если поместить сосуд, из которого происходит истечение, на легкую тележку. Тогда тележка вместе с сосудом будет двигаться в направлении, противоположном направлению истечения струи. На реакции вытекающей струи основано действие так называемого *сегнерова колеса* (рис. 75). С помощью такого колеса можно поднимать на высоту груз, как это показано на рис. 75, или выполнять другую работу. В прежние времена сегнеровы колеса строились часто больших размеров.

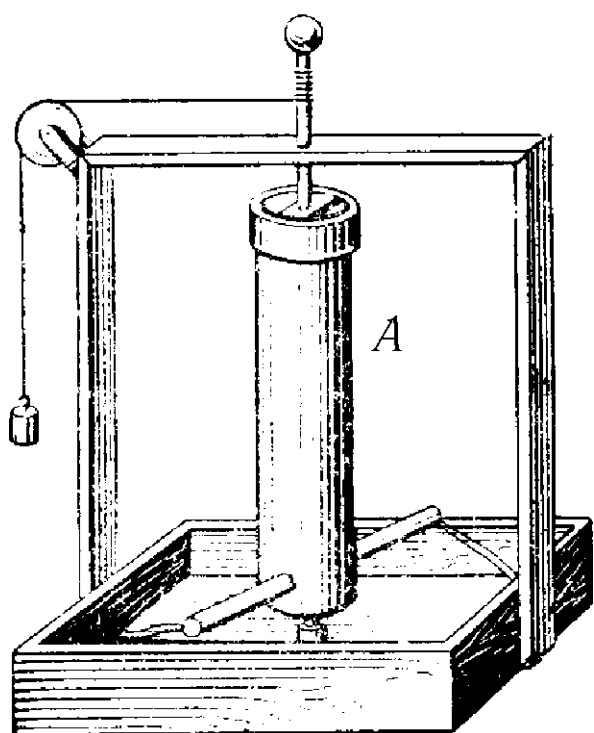


Рис. 75. Колесо Сегнера

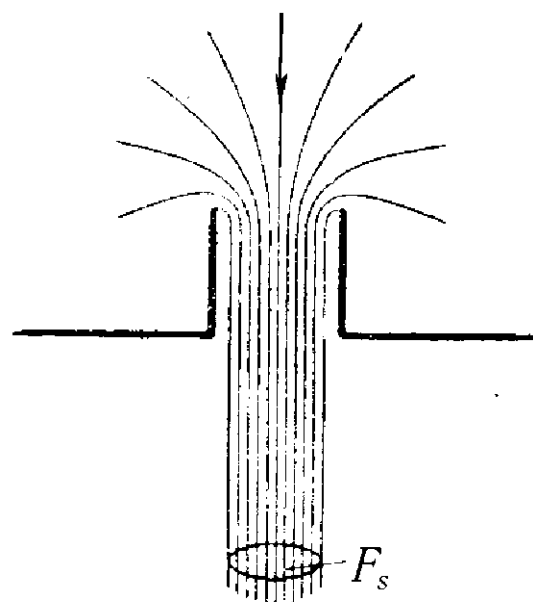


Рис. 76. Насадок Борда

В одном частном случае, а именно при истечении через так называемый *насадок Борда* (рис. 76), теорема о количестве движения позволяет вычислить коэффициент сжатия струи, т. е. отношение поперечного сечения струи F_s к поперечному сечению отверстия F (см. § 5). В самом деле, при истечении через насадок Борда на любую часть стенок сосуда действует в направлении истечения струи полное избыточное давление $p_1 - p_2$. Поэтому количество движения $2F_s(p_1 - p_2)$, переносимое струей, должно уравниваться силой давления $F(p_1 - p_2)$ во входном поперечном сечении, следовательно, должно соблюдаться равенство

$$F(p_1 - p_2) = 2F_s(p_1 - p_2),$$

откуда находим:

$$F_s = \frac{1}{2}F,$$

т. е. коэффициент сжатия равен $1/2$.

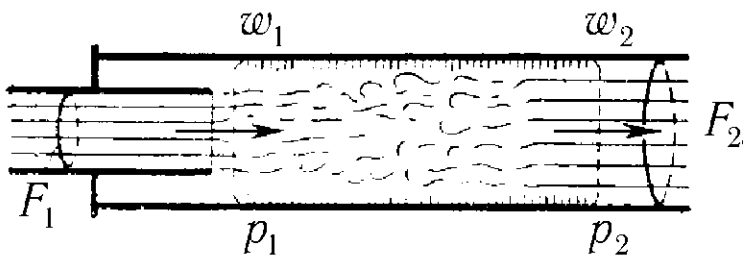


Рис. 77. Внезапное расширение трубы

ствие неустойчивости этой поверхности (§ 7), струя быстро, на коротком участке, смешивается с окружающей жидкостью, и в дальнейшем движение жидкости происходит приблизительно равномерно со средней скоростью w_2 , меньшей w_1 . Скорости w_2 соответствует давление p_2 , большее давления p_1 , отвечающего скорости w_1 . Для вычисления повышения давления $p_2 - p_1$ теорема Бернулли теперь неприменима, так как мы не знаем деталей движения струи в области, в которой происходит смешение. Однако при помощи теоремы о количестве движения это повышение давления можно вычислить, не зная указанных деталей. Проведем контрольную поверхность, ограничивающую область, в которой происходит смешение так, как показано на рис. 77. Внешние силы действуют только на основания этой цилиндрической поверхности, и их равнодействующая равна $F_2(p_2 - p_1)$, где F_2 есть площадь поперечного сечения широкой трубы. Согласно теореме о количестве движения мы имеем:

$$\frac{dm w_1}{dt} - \frac{dm w_2}{dt} = F_2(p_2 - p_1).$$

Изменения количества движения на обоих основаниях контрольной поверхности равны соответственно

$$\frac{dm w_1}{dt} = \rho F_2 w_2 \cdot w_1 \quad \text{и} \quad \frac{dm w_2}{dt} = \rho F_2 w_2 \cdot w_2,$$

следовательно,

$$F_2(p_2 - p_1) = \rho F_2 w_2 (w_1 - w_2),$$

откуда

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho (w_1^2 - w_2^2).$$

Если бы труба расширялась не внезапно, а постепенно, то изменение давления при переходе от узкого к широкому поперечному сечению определялось бы уравнением Бернулли и было бы равно

$$p'_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho (w_1^2 - w_2^2).$$

с) *Внезапное расширение трубы.* Если поток жидкости, текущий по цилиндрической трубе со скоростью w_1 (рис. 77), внезапно переходит в более широкую, также цилиндрическую трубу, то образуется струя, отделенная от остальной жидкости поверхностью раздела. Вслед-

Следовательно, внезапное расширение трубы приводит к тому, что происходит потеря давления, равная, как легко вычислить,

$$p'_2 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(w_1 - w_2)^2.$$

Из общей механики известно, что такой же формулой выражается потеря кинетической энергии при неупругом ударе твердых тел. Поэтому прежде часто говорили, что при внезапном расширении потока происходит потеря давления на удар, хотя в действительности при смешении двух потоков жидкости не происходит никакого удара. Единственная общая черта этих двух явлений состоит в том, что при обоих явлениях происходит некоторая потеря скорости.

d) Парение тяжелого тела в воздухе. Для того чтобы тяжелое тело парило в неподвижном воздухе, необходимо, чтобы оно отбрасывало вниз все время новые массы воздуха, сообщая им определенную скорость w . Примем для простоты расчета, что в потоке воздуха, который тело отбрасывает вниз, устанавливается на некотором расстоянии от тела постоянная скорость. Масса воздуха, приводимая в движение в единицу времени, равна $\rho F w$, где F есть площадь поперечного сечения отбрасываемого потока. Обозначим ту массу через M . Далее предположим, что разностью давлений в движущемся вниз потоке можно пренебречь. Тогда, согласно теореме о количестве движения, мы будем иметь:

$$P = \rho F w \cdot w = M w,$$

где P есть вес тела. Реакция воздуха на покоящееся тело равна

$$P' = -M w,$$

следовательно, направлена вверх, т.е. дает подъемную силу. Из полученного соотношения можно определить скорость w , необходимую для поддержания тяжелого тела в неподвижном воздухе в неподвижном состоянии. Этот расчет с большой степенью точности применим для свободного геликоптерного винта при условии, что винт находится на достаточном расстоянии от поверхности земли. В таком случае образуется направленная вертикально вниз струя воздуха, переносимая количество движения $M w$. Эта струя, смешиваясь на достаточно большом пути с окружающим ее неподвижным воздухом, замедляет свою скорость, однако переносимое ею количество движения остается неизменным, так как по мере уменьшения скорости струи происходит

увеличение увлекаемой ею массы воздуха. В конце концов струя достигает поверхности земли и, теряя при этом свое количество движения, передает вес винта на поверхность земли в виде силы давления.

При движении самолета движущиеся вниз массы воздуха создают вихревой системой, оставляемой позади себя крылом (§ 12). Однако теперь, в отличие от случая геликоптерного винта, разностью давлений в нисходящем потоке воздуха пренебрегать нельзя, и поэтому получаются более сложные соотношения. Следовательно, реакция воздуха на крыло, т. е. подъемная сила крыла будет определяться не только изменением количества движения отбрасываемой массы воздуха, но также разностью давлений в струе, и поэтому от формы контрольной поверхности будет зависеть, какая доля подъемной силы будет возникать за счет изменения количества движения и какая доля — за счет давления. Нисходящий вниз поток воздуха создает на поверхности земли увеличение давления и тем самым передает вес самолета на поверхность земли в виде силы давления.

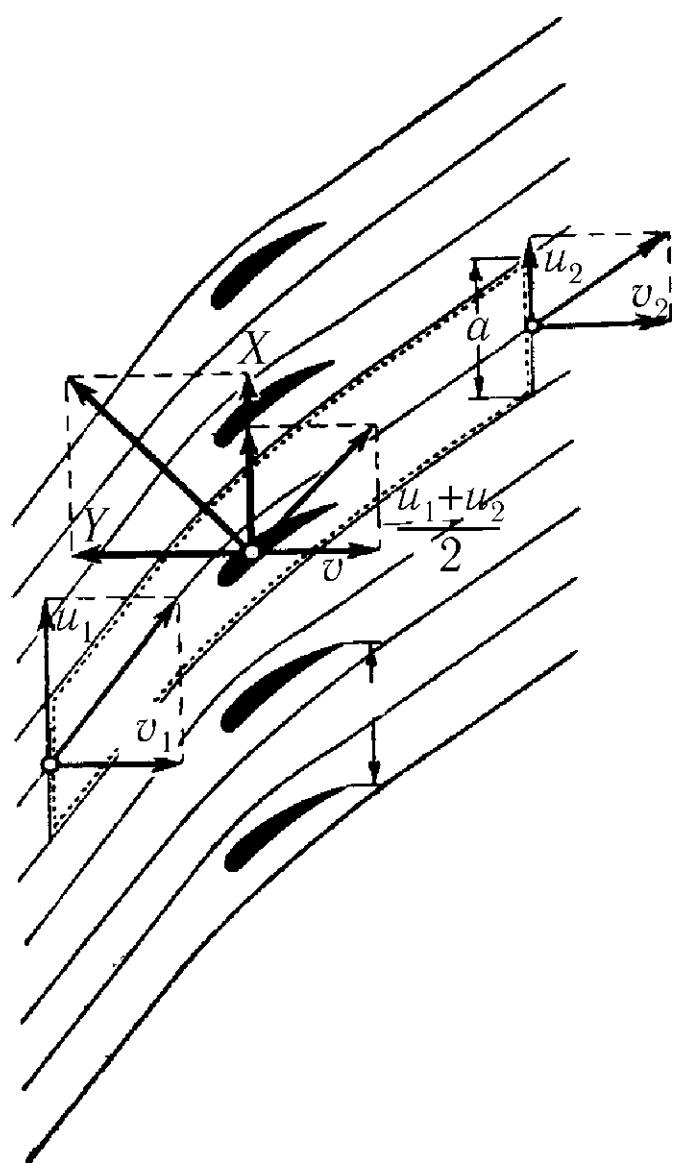


Рис. 78. Решетка из крыльев

е) *Решетка из крыльев. Теорема Жуковского.* Для того чтобы изучить взаимодействие лопаток турбины или лопастей воздушного винта с обтекающим их воздухом, целесообразно сначала рассмотреть более простой случай обтекания решетки из одинаковых бесконечно длинных крыльев или лопаток, установленных на равном расстоянии и параллельно друг другу (рис. 78). Применяя к этому случаю теорему о количестве движения и прибегая одновременно к помощи уравнения Бернулли и уравнения неразрывности, можно получить очень важные соотношения между силами, действующими на крылья, и скоростью течения. На рис. 78, кроме крыльев, изображены также в схематическом виде линии тока в системе отсчета, неподвижной относительно крыльев. Расположение крыльев, показанное на этом рисунке, соответствует случаю винта; в тур-

бине лопатки обращены своей выпуклостью в обратную сторону, и составляющие реакции жидкости на лопатку имеют противоположные

направления. Однако приводимый ниже расчет одинаково применим и к винту и к турбине. Теорему о количестве движения теперь следует применить для двух направлений — параллельного и перпендикулярного к плоскости, проходящей через соответственные точки крыльев (будем называть эту плоскость для краткости плоскостью решетки). Составляющие скорости в направлениях, параллельном и перпендикулярном к плоскости решетки, обозначим через u и v , а соответствующие составляющие силы реакции на единицу длины крыла — через X и Y , считая последние положительными в направлениях, указанных на рис. 78. Индексом 1 будем отмечать скорости и давления перед решеткой, а индексом 2 — позади решетки.

Предположим, что движение жидкости происходит без потерь энергии. Тогда мы будем иметь потенциальное движение с циркуляцией вокруг крыльев решетки. При таком движении скорость течения на некотором расстоянии впереди и позади решетки практически одинаковая. Это обстоятельство и позволяет применить теорему о количестве движения к выяснению связи между реакцией потока и скоростью течения, не прибегая при этом к анализу тех явлений, которые происходят в промежутках между крыльями, правда, при условии, что здесь не возникают большие вихри (это может иметь место при неудачной форме профиля крыльев). Уравнение неразрывности дает нам:

$$Q = v_1 a = v_2 a,$$

где a есть расстояние между соседними крыльями и Q — секундное количество жидкости, протекающее между каждой парой крыльев в слое, параллельном продольной оси крыльев и имеющем толщину, равную единице. Отсюда следует, что

$$v_1 = v_2.$$

Поэтому в дальнейших вычислениях мы будем обе составляющие v_1 и v_2 обозначать просто через v . Так как результирующие скорости w_1 и w_2 перед и позади крыла равны соответственно

$$w_1 = \sqrt{u_1^2 + v^2} \quad \text{и} \quad w_2 = \sqrt{u_2^2 + v^2},$$

то из уравнения Бернулли следует:

$$p_1 + \frac{\rho}{2}(u_1^2 + v^2) = p_2 + \frac{\rho}{2}(u_2^2 + v^2),$$

или

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2}(u_1^2 - u_2^2). \quad (49)$$

Для применения теоремы о количестве движения проведем контрольную поверхность, пересекающую плоскость рис. 78 по двум линиям тока, проходящим над и под крылом и отстоящим друг от друга на расстоянии a , равном расстоянию между крыльями, и по двум прямым длиной a , параллельным плоскости решетки (основания этой поверхности образованы двумя параллельными плоскостями, расстояние между которыми равно единице). Сквозь обе боковые части контрольной поверхности, образованные линиями тока, жидкость не протекает, следовательно, эти поверхности не дают составляющих изменения количества движения. Далее, так как эти поверхности совершенно одинаковые, то распределение давления на них также совершенно одинаковое, а поэтому они не влияют на результирующую сил давления. Таким образом, необходимо вычислить только изменения количества движения и силы давления, возникающие на частях контрольной поверхности, параллельных плоскости решетки. Масса жидкости, протекающая сквозь эти части в одну секунду, равна

$$\rho Q = \rho a v.$$

Применяя теперь теорему о количестве движения к направлениям, параллельным осям x и y , мы получим:

$$X = 0 + \rho a v(u_1 - u_2), \quad (50)$$

$$Y = a(p_2 - p_1) + 0. \quad (51)$$

Введем в эти формулы циркуляцию вокруг крыла. Для ее вычисления воспользуемся опять пунктирной линией на рис. 78. Так как верхняя и нижняя линии тока совершенно одинаковые и при вычислении циркуляции они обходятся в противоположных направлениях, то криволинейные интегралы вдоль них взаимно уничтожаются. Прямые участки контура при составлении циркуляции дают значения au_1 и $-au_2$, следовательно, циркуляция вокруг крыла равна

$$\Gamma = a(u_1 - u_2). \quad (52)$$

Далее, имея в виду, что

$$u_1^2 - u_2^2 = (u_1 - u_2)(u_1 + u_2),$$

из уравнений (49) и (52) мы получим:

$$a(p_2 - p_1) = \rho \Gamma \frac{u_1 + u_2}{2},$$

Таким образом, формулы (50) и (51) могут быть переписаны в следующем виде:

$$X = \rho \Gamma v, \quad (53)$$

$$Y = \rho \Gamma \frac{u_1 + u_2}{2}. \quad (54)$$

Пропорция

$$Y : X = \frac{u_1 + u_2}{2} : v,$$

вытекающая из формул (53) и (54), показывает, что равнодействующая сил X и Y перпендикулярна к результирующей скорости

$$w_m = \sqrt{\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right)^2 + v^2},$$

получающейся при геометрическом сложении скоростей $\frac{u_1 + u_2}{2}$ и v . В этом легко убедиться, рассматривая соответствующие подобные треугольники на рис. 78. Обозначив равнодействующую сил X и Y через R , мы можем вместо формул (53) и (54) написать одну формулу

$$R = q \Gamma w_m. \quad (55)$$

Будем теперь увеличивать расстояние a между каждыми двумя соседними лопатками, сохраняя при этом циркуляцию $\Gamma = a(u_1 - u_2)$ постоянной. Тогда разность скоростей $(u_1 - u_2)$ будет уменьшаться и в пределе, для $a = \infty$ со, она сделается равной нулю. Следовательно, на достаточном расстоянии перед и позади единственной оставшейся лопатки скорости потока будут совпадать, и поэтому среднюю скорость v_m можно принять равной скорости v_∞ невозмущенного потока в бесконечности. Перейдем от системы отсчета, связанной с неподвижной лопаткой, к системе отсчета, связанной с потоком в бесконечности. В этой системе отсчета жидкость в бесконечности будет покоиться, а лопатка будет двигаться со скоростью $-w_\infty$. Обозначив эту скорость через V , мы получим из уравнения (55), что на единицу длины лопатки действует сила

$$R = \rho \Gamma V,$$

перпендикулярная к направлению скорости V . Следовательно, на участок лопатки или крыла длиной l действует сила

$$A = \rho \Gamma V l. \quad (56)$$

Сила A называется *поперечной*, или *подъемной силой*. Соотношение, выражаемое уравнением (56), называется *теоремой Жуковского о подъемной силе*¹. Эта теорема может быть доказана также другим путем. Так, например, Н. Е. Жуковский вывел ее, применив теорему о количестве движения к контрольной поверхности в виде круглого цилиндра очень большого радиуса и с осью, совпадающей с осью крыла. При этом одна половина подъемной силы A получается вследствие переноса количества движения, а другая половина как результирующая сил давления. Теорема Жуковского важна прежде всего потому, что она дает возможность вычислить по заданной подъемной силе соответствующую циркуляцию, определяющую напряженность вихря позади крыла.

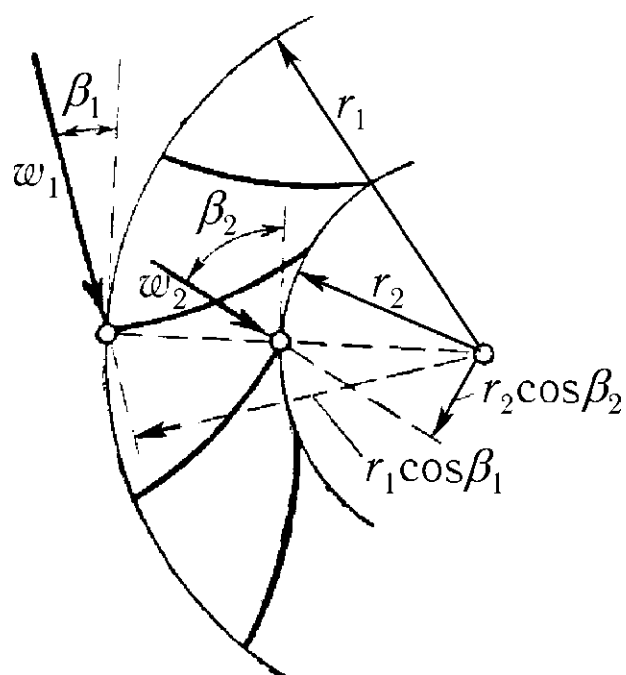


Рис. 79. К выводу теоремы Эйлера о турбине

f) Уравнение Эйлера для турбины.

Пусть в рабочее колесо турбины (рис. 79) на расстоянии r_1 от центра колеса вступает поток воды, абсолютная скорость которого в точке входа равна w_1 , а направление образует с направлением движения колеса угол β_1 ; масса воды, протекающая в одну секунду, пусть равна M . Внутри колеса вода движется в направлении, приблизительно совпадающем с направлением лопаток. На расстоянии r_2 от центра колеса вода стекает с лопатки, имея абсолютную скорость w_2 , направление которой образует с направлением движения колеса угол β_2 .

Абсолютная скорость w_2 получается векторным сложением скорости движения воды вдоль лопатки и окружной скорости той точки лопатки, в которой вода покидает колесо. Применяя к этому движению теорему о моменте количества движения, мы получим независимо от того, что происходит внутри колеса, следующее соотношение:

$$\mathfrak{M} = M(w_1 r_1 \cos \beta_1 - w_2 r_2 \cos \beta_2),$$

¹Автор неправильно называет соотношение (56) теоремой Кутта–Жуковского. В действительности эта теорема впервые была установлена Н. Е. Жуковским в 1904 г., и поэтому здесь и в дальнейшем она нами называется теоремой Жуковского. (Прим. перев.)

называемое *уравнением Эйлера для турбины*. Из этого уравнения видно, что вращающий момент, передаваемый водой на турбину, будет наибольшим, следовательно, условия работ турбины будут наивыгоднейшими в том случае, когда $\cos \beta_2 = 0$, т. е. когда вода покидает лопатку в радиальном направлении (очевидно, что в этом случае потеря кинетической энергии водой, выходящей из колеса, будет наименьшей). Умножая вращающий момент на угловую скорость вращения ω , мы получим мощность. Для указанного наивыгоднейшего случая она равна

$$L = \mathfrak{M} \omega = M r_1 \omega w_1 \cos \beta_1.$$

Применяя уравнение Эйлера к потоку жидкости в неподвижной спиральной камере с отверстием в середине (§ 6), мы получим:

$$\mathfrak{M} = M(w_1 r_1 \cos \beta_1 - w_2 r_2 \cos \beta_2) = 0,$$

откуда

$$w_1 r_1 \cos \beta_1 = w_2 r_2 \cos \beta_2,$$

где через β обозначены углы, образуемые скоростью потока с направлением, перпендикулярным к отрезку, соединяющему центр отверстия с рассматриваемой точкой потока. Если все углы β достаточно малы, следовательно, можно принять, что $\cos \beta = 1$, то мы получим:

$$wr = \text{const},$$

т. е. тот же результат, который мы нашли в § 6 иным путем.

§ 14. Теорема о количестве движения для потоков с пульсациями скорости. Среди неустановившихся течений часто встречаются такие, в которых скорость в каждой точке пространства хотя и изменяется со временем, причем иногда даже значительно и очень неравномерно, тем не менее в среднем она остается постоянной для любого достаточно большого промежутка времени. Совокупность таких средних значений скорости во всех точках пространства определяет собой некоторое установившееся течение. Действительное, т. е. неустановившееся, течение в таких случаях принято называть течением, *в среднем установившимся*. Простой случай такого течения мы рассмотрели в примере с) предыдущего параграфа.

Обозначим для течения, в среднем установившегося, средние значения составляющих скорости вдоль осей координат через $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, а мгновенные отклонения составляющих фактической скорости u , v , w , от соответствующих средних значений — через u' , v' и w' . Тогда мы будем иметь:

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad w = \bar{w} + w',$$

причем, согласно определению, средние значения величин u' , v' , w' , называемых *пульсациями скорости*, или *пульсационными скоростями*, равны нулю.

Применяя теорему о количестве движения к течениям, в среднем установившимся, нельзя оперировать только со средней скоростью. Необходимо, как мы сейчас увидим, учитывать также пульсации скорости, составляя для этого средние значения всех количеств движения, переносимых через неподвижную контрольную поверхность.

Вычислим сначала составляющую количества движения вдоль оси x для участка контрольной поверхности, перпендикулярного к оси x . В промежуток времени dt через единицу площади контрольной поверхности проходит масса ρ и dt ; она переносит с собой количество движения $\rho u^2 dt$. Изменение количества движения за одну секунду равно

$$\frac{1}{T} \int_0^T \rho u^2 dt,$$

где интеграл представляет собой изменение количества движения в течение более или менее длительного промежутка времени T . Обозначая для краткости среднее значение чертой над буквой, мы можем написать:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \rho u^2 dt = \rho \bar{u}^2.$$

Мы имеем:

$$u^2 = (\bar{u} + u')^2 = \bar{u}^2 + 2\bar{u}u' + u'^2.$$

Для того чтобы вычислить среднее значение от u^2 , учтем, что среднее значение от $\bar{u}^2$ равно опять $\bar{u}^2$, так как $\bar{u}$ уже является средним значением от u . Среднее значение от u' равно, согласно определению, нулю. Среднее значение от u'^2 не может быть равно нулю, так как все величины u'^2 положительны. Следовательно,

$$\overline{\rho u^2} = \rho \bar{u}^2 + \overline{\rho u'^2}. \quad (57)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае к количеству движения $\rho \bar{u}^2$ течения, в среднем установившегося, надо прибавить количество движения $\overline{\rho u'^2}$, являющееся средним значением количеств движения пульсации u' . Если вместо количеств движения рассматривать соответствующие им реакции, то количеству движения $\overline{\rho u'^2}$ будет соответствовать,

как всегда, реакция, направленная внутрь контрольной поверхности и действующая как дополнительное давление на стенки, ограничивающие жидкость.

Вычислим теперь составляющую количества движения опять вдоль оси x , но для участка контрольной поверхности, перпендикулярного к оси y . В промежуток времени dt через единицу площади контрольной поверхности проходит масса $\rho v dt$, но так как мы вычисляем составляющую количества движения вдоль оси x , то теперь количество движения, переносимое массой $\rho v dt$ равно $\rho v u dt$. Среднее значение этого количества движения за промежуток времени T будет

$$\frac{1}{T} \int_0^T \rho u v dt = \rho \bar{u} \bar{v}.$$

Для вычисления $\bar{u} \bar{v}$ перемножим $u = \bar{u} + u'$ и $v = \bar{v} + v'$; мы получим:

$$uv = \bar{u} \bar{v} + \bar{u} v' + u' \bar{v} + u' v'.$$

Составляя среднее значение, мы найдем:

$$\overline{uv} = \bar{u} \bar{v} + \bar{u} \bar{v}' + \bar{u}' \bar{v} + \bar{u}' \bar{v}'.$$

Так как $\bar{u}' = \bar{v}' = 0$, то

$$\rho \bar{u} \bar{v} = \rho \overline{uv} + \rho \bar{u}' \bar{v}'. \quad (58)$$

Следовательно, и в этом случае к количеству движения $\rho \bar{u} \bar{v}$ потока в среднем установившегося, необходимо прибавить величину $\rho \bar{u}' \bar{v}'$, представляющую собой среднее от количеств движения пульсаций. Величина $\rho \bar{u}' \bar{v}'$ может не быть равной нулю. В самом деле, если положительным пульсациям u' соответствуют главным образом положительные пульсации v' , а отрицательным пульсациям u' — главным образом отрицательные пульсации v' , то преобладающее число произведений $u' v'$ будет положительным. Если же, наоборот, положительным пульсациям u' соответствуют главным образом отрицательные пульсации v' , а отрицательным пульсациям u' — главным образом положительные пульсации v' , то в этом случае преобладающее число произведений $u' v'$ будут отрицательными. Таким образом, в обоих случаях среднее от произведений $u' v'$ не будет равно нулю. Реакция, соответствующая количеству движения $\rho \bar{u}' \bar{v}'$, направлена вдоль оси x , т. е. по

касательной к взятому участку контрольной поверхности, следовательно, эта реакция представляет собой не что иное, как *касательное напряжение*. Учитывая ее направление, мы можем написать:

$$\tau' = -\rho \bar{u}' \bar{v}'. \quad (59)$$

Остается выяснить еще следующий вопрос: не дает ли масса жидкости, заключенная внутри контрольной поверхности, какую-либо составляющую изменения количества движения. Легко видеть, что если скорость в каждой точке потока в среднем не изменяется, то пульсации этой скорости должны состоять из положительных и отрицательных отклонений, в сумме приводящихся к нулю. Следовательно, при осреднении по времени масса жидкости, заключенная внутри контрольной поверхности, не может дать изменения количества движения.

Таким образом, в потоках, в среднем установившихся, пульсации скорости обуславливают появление касательных напряжений, которые, как мы увидим в § 1 следующей главы, аналогичны касательным напряжениям, возникающим при движении вязких жидкостей. Полученные результаты будут нами использованы при изучении турбулентных течений (§ 4 гл. III).

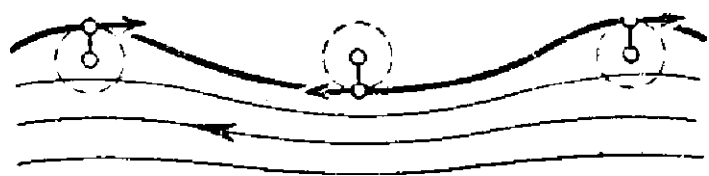


Рис. 80. Волновое движение

§ 15. Волны на свободной поверхности жидкости. Волны, образующиеся на свободной поверхности воды, приводят в движение соприкасающийся с ними воздух. В большинстве случаев массой этого воздуха можно

пренебречь по сравнению с массой жидкости. Тогда давление на свободной поверхности жидкости будет равно атмосферному давлению p_0 . Наблюдения показывают, что при простейшем волновом движении отдельные частицы свободной поверхности воды описывают траектории, приближенно совпадающие с окружностью. В системе отсчета, движущейся вместе с волнами со скоростью их распространения, волновое движение является, очевидно, установившимся движением (рис. 80). Пусть скорость распространения волн равна c , радиус окружности, описываемой частицей воды, расположенной на свободной поверхности, равен r , а период обращения этой частицы по своей траектории равен T . Тогда в указанной системе отсчета скорость течения на гребнях волн будет равна

$$w_1 = c - \frac{2\pi r}{T},$$

а во впадинах волн

$$w_2 = c + \frac{2\pi r}{T}.$$

Так как разность высот между наивысшим и наименьшим положениями точек свободной поверхности равна $h = 2r$, то, применяя уравнение Бернулли к линии тока, расположенной на свободной поверхности, мы получим:

$$w_2^2 - w_1^2 = 2gh = 4gr,$$

или, после подстановки вместо w_2 и w_1 их значений,

$$\frac{8\pi cr}{T} = 4gr,$$

откуда следует, что

$$c = \frac{gT}{2\pi}. \quad (60)$$

Радиус r в эту формулу не входит, следовательно, скорость распространения волн не зависит от высоты волн. При распространении волн гребень волны продвигается за время T на расстояние λ , называемое *длиной волны*, следовательно,

$$\lambda = cT.$$

Исключая из равенств (60) и (61) период T , мы получим:

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \quad (62)$$

Таким образом, для волн на поверхности воды скорость их распространения, в отличие от звуковых волн, сильно зависит от длины волны. Длинные волны распространяются быстрее, чем короткие. Волны с разной длиной могут налагаться друг на друга без заметного взаимного возмущения. При этом короткие волны как бы приподнимаются длинными волнами, но затем длинные волны уходят вперед, а короткие остаются позади них. Линии тока в системе отсчета, неподвижной относительно невозмущенной воды, показаны на рис. 81. Из расположения линий тока видно, что скорость движения воды очень быстро убывает с увеличением глубины, а именно, пропорционально уменьшению

величины $e^{-\frac{2\pi(z_1-z)}{\lambda}}$, следовательно, на глубине, равной длине волны, скорость составляет только $1/500$ скорости на свободной поверхности.

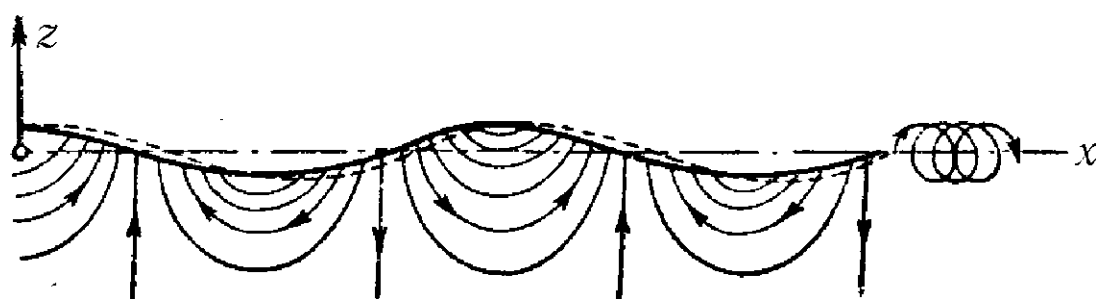


Рис. 81. Линии тока волнового движения

Точная теория показывает, что формула (62) справедлива только для низких волн, причем независимо от их высоты. Для высоких волн скорость c в действительности несколько больше того значения, которое дает формула (62). Кроме того, при высоких волнах траектории частиц воды, расположенных на свободной поверхности, получаются незамкнутыми: вода на гребне волны уходит вперед на большее расстояние, чем на то, на которое она возвращается назад во впадине волны (см. правую часть рис. 81). Следовательно, при высоких волнах происходит перенос воды вперед.

Для волн с небольшой длиной важным фактором является, кроме силы тяжести, также поверхностное натяжение. Оно стремится сгладить волновую поверхность, и поэтому скорость распространения волн увеличивается. Теория показывает, что в этом случае скорость распространения волн равна

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi C}{\rho\lambda}}, \quad (63)$$

где C есть капиллярная постоянная. Для длинных волн преобладающую роль играет первый член под знаком корня, а для коротких волн, наоборот, второй член. Для длины волны

$$\lambda_1 = 2\pi \sqrt{\frac{C}{g\rho}}$$

скорость распространения c имеет минимальное значение, равное

$$c_1 = \sqrt[4]{\frac{4gC}{\rho}}.$$

Для воды $\rho = 1$, $C = 72,5$ дин/см, следовательно,

$$\lambda_1 = 1,72 \text{ см}, \quad c_1 = 23,3 \text{ см/сек.}$$

Волны, длина которых больше λ_1 , называются *гравитационными*, а волны, длина которых меньше λ_1 , — *капиллярными*.

От скорости перемещения гребней волн, называемой *фазовой скоростью* (выше мы ее называли скоростью распространения волн и обозначали через c), следует отличать скорость распространения группы

волн, называемую *групповой скоростью* и обозначаемую через c^* . Проще всего разъяснить смысл этого понятия на примере движения, возникающего в результате наложения двух волн, имеющих равные амплитуды, но немного отличающихся своей длиной. Пусть мы имеем синусоидальную волну

$$y = A \sin(\mu x - \nu t),$$

где A есть амплитуда, t — время, а μ и ν — некоторые коэффициенты. При увеличении x на $\frac{2\pi}{\mu}$ или t на $\frac{2\pi}{\nu}$ синус принимает прежнее значение, следовательно, величина

$$\frac{2\pi}{\mu} = \lambda \quad (64)$$

есть длина волны, а величина

$$\frac{2\pi}{\nu} = T \quad (65)$$

есть период колебаний. Если

$$\mu x - \nu t = \text{const},$$

т. е. если

$$x = \text{const} + \frac{\nu}{\mu}t,$$

то аргумент синуса не зависит от времени, поэтому не зависит от времени и ордината y . Это означает, что вся волна, не изменяя своей формы, перемещается вправо со скоростью

$$c = \frac{\nu}{\mu}. \quad (66)$$

Наложим на эту волну вторую волну

$$y' = A \sin(\mu'x - \nu't),$$

т. е. волну с той же амплитудой A , но с несколько иными значениями μ и ν . Результирующим движением будет

$$y + y' = A[\sin(\mu x - \nu t) + \sin(\mu'x - \nu't)].$$

В тех точках оси x , в которых фазы обоих колебаний совпадают, амплитуда равна $2A$, в тех же точках, в которых фазы обоих колебаний

противоположны, амплитуда равна нулю. Такое явление называется *биением*. Применяв известную формулу

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

мы получим:

$$y + y' = 2A \sin \left(\frac{\mu + \mu'}{2} x - \frac{\nu + \nu'}{2} t \right) \cos \left(\frac{\mu - \mu'}{2} x - \frac{\nu - \nu'}{2} t \right).$$

В этом равенстве член

$$\sin \left(\frac{\mu + \mu'}{2} x - \frac{\nu + \nu'}{2} t \right)$$

представляет собой волну, для которой коэффициенты при x и t равны средним значениям от μ и μ' и соответственно от ν и ν' . Множитель же



$$2A \cos \left(\frac{\mu - \mu'}{2} x - \frac{\nu - \nu'}{2} t \right),$$

Рис. 82. Биение

который при малых значениях разностей $\mu - \mu'$ и $\nu - \nu'$ изменяется

медленно, можно рассматривать как переменную амплитуду (рис. 82). Группа волн кончается в той точке, где косинус делается равным нулю. Скорость перемещения этой точки, называемая *групповой скоростью* c^* , на основании соображений, аналогичных предыдущим, равна

$$c^* = \frac{\nu - \nu'}{\mu - \mu'}.$$

Для длинных групп, т. е. для медленных биений, с достаточной точностью можно принять, что

$$c^* = \frac{d\nu}{d\mu}.$$

Для волн, возникающих под действием силы тяжести, из формулы (60) мы имеем:

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{g}{c}.$$

Но, согласно равенству (65),

$$\frac{2\pi}{T} = \nu,$$

следовательно,

$$\nu = \frac{g}{c}.$$

С другой стороны, подставив в формулу (62) значение λ из равенства (64), мы получим:

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \sqrt{\frac{g}{\mu}}, \quad (68)$$

поэтому

$$\nu = \sqrt{g\mu}.$$

Отсюда, дифференцируя по μ и имея в виду равенство (67), мы найдем:

$$c^* = \frac{d\nu}{d\mu} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{\mu}} = \frac{1}{2}c. \quad (69)$$

Таким образом, группы волн распространяются со скоростью c^* , равной половине фазовой скорости, иными словами, гребни в группе волн перемещаются со скоростью, в два раза большей, чем сама группа волн; на заднем конце группы все время возникают новые волны, а на переднем конце группы они исчезают. Это явление очень легко наблюдать на волнах, вызванных падением камня в неподвижную воду.

Все сказанное относится не только к волнам на поверхности воды, но и к любым другим волнам, фазовая скорость которых зависит от длины волны.

Другим видом групп волн являются волны, возникающие на поверхности воды при движении корабля. Картину волн, очень похожую на корабельные волны, легко получить, если на поверхности покоящейся глубокой воды заставить двигаться с постоянной скоростью точечный очаг возмущения давления. Возникающее при этом движение может быть исследовано математически. Согласно вычислениям В. Томсона (lord Kelvin), Экмана (Ekman) и других, получается система волн, изображенная на рис. 83, на котором наклонными линиями обозначены гребни волн. Эта система волн перемещается вместе с очагом возмущения. Длина поперечных волн на основании формулы (62) равна

$$\lambda = \frac{2\pi c^2}{g},$$

где c есть скорость перемещения очага возмущения. При движении корабля образуются две системы таких волн — одна около носа, другая около кормы корабля, причем волны обеих систем интерферируют друг с другом.

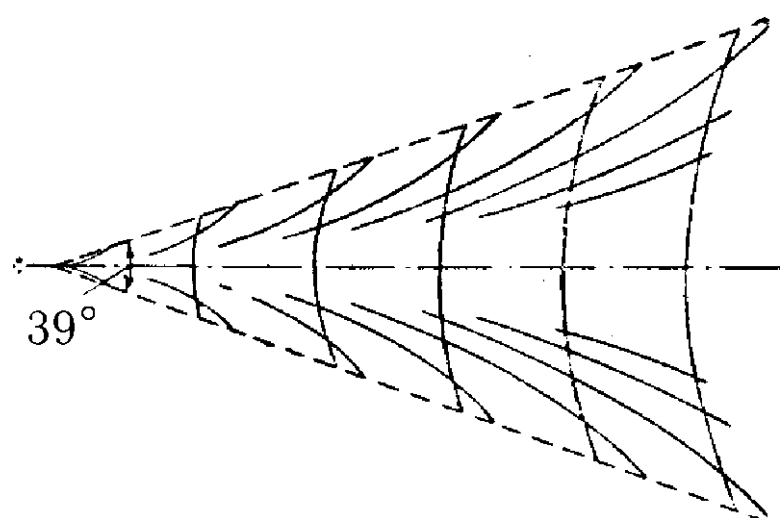


Рис. 83. Система волн, образующихся при равномерном движении на поверхности воды очага возмущения давления

на рис. 83, а первые расходятся вверх по течению в виде дуг окружностей. При скоростях движения очага возмущения, меньших 23,3 см/сек, волны не образуются.

На поверхности соприкосновения двух жидкостей различной плотности, расположенных одна над другой, также могут возникать волны. Если обе жидкости неподвижны и плотности их равны ρ_1 и ρ_2 , то теоретический расчет дает для фазовой скорости волн величину

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} + \frac{2\pi C}{\lambda(\rho_1 + \rho_2)}}. \quad (70)$$

Если верхняя жидкость течет со скоростью w_1 относительно нижней, то теория показывает, что возникающие волны устойчивы только в том случае, если их длина достаточно велика. Короткие же волны, подобно тому, как это было показано в § 7 для движения двух потоков жидкости вдоль поверхности раздела, неустойчивы, что приводит к перемешиванию обеих жидкостей в промежуточной зоне; это перемешивание восстанавливает устойчивость течения. При увеличении скорости w_1 граница между неустойчивостью и устойчивостью перемещается в сторону волн с большей длиной. Волны такого рода могут возникать также в атмосфере на границе двух слоев воздуха разной плотности, движущихся относительно друг друга; иногда эти волны делаются видимыми благодаря образованию так называемых волнистых облаков.

При движении воздуха над поверхностью воды также образуются волны. Однако теория таких волн, основанная на предположении отсутствия трения, приводит к результатам, противоречащим действи-

Групповая скорость капиллярных волн, как нетрудно показать путем расчета, аналогичного сделанному для гравитационных волн, больше фазовой скорости, а именно, в предельном случае очень малых волн, в 1,5 раза. Следовательно, если очаг возмущения движется с постоянной скоростью, то группы волн его опережают. Около лески удочки, опущенной в реку, скорость течения которой больше 23,3 см/сек, образуются вверх по течению капиллярные волны, а вниз по течению — гравитационные волны, причем последние имеют приблизительно такую же форму, как

тельности. Так, например, вычисления В. Томсона¹ показали, что минимальная скорость ветра, необходимая для образования на поверхности воды волн, должна составлять круглым числом $6,4 \text{ м/сек}$, причем возникают волны, обладающие минимальной скоростью распространения $c = 23,3 \text{ см/сек}$ и длиной волны $A = 1,72 \text{ см}$ (при большей скорости ветра получаются, конечно, волны с большей длиной). Между тем в действительности для образования волн достаточно ветра со скоростью 1 м/сек . Согласно исследованию Джеффри² это объясняется тем, что вследствие трения распределение давления на поверхности волны делается несимметричным, и поэтому ветер, если его скорость больше фазовой скорости волн, совершает на гребне каждой волны работу. Мотцфельд³, измерив распределение давления на поверхности моделей водяных волн, нашел, что сопротивление, которое воздух оказывает движению волн, пропорционально полуторной степени наклона поверхности волны в точке перегиба относительно горизонта, а также квадрату разности между скоростью ветра w_B и фазовой скоростью волн. Далее, Мотцфельд путем расчета нашел, что наклон поверхности волны в точке перегиба, зависящий от фазовой скорости c , получается наибольшим при

$$c = \frac{1}{3} w_B.$$

Этой скорости c соответствует, на основании формулы (62), волна длиной

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{9} \frac{w_B^2}{g}. \quad (71)$$

Если принять во внимание поверхностное натяжение, которое Мотцфельд не учитывал, то расчет показывает, что для возникновения легкого волнения на поверхности воды достаточно, в полном соответствии с наблюдениями, ветра со скоростью, немного превышающей $23,3 \text{ см/сек}$.

Формулы, выведенные выше, пригодны только для волн на глубокой воде. Они еще достаточно точны, если глубина воды равна половине длины волны. При меньшей глубине частицы воды на поверхности волны описывают не круговые траектории, а эллиптические, и зависимость между длиной и скоростью распространения волн получается более сложной, чем для волн на глубокой воде. Однако для волн на

¹ Thomson W., Phil. Mag. (4), т. 42 (1871), стр. 368.

² Jeffreys H., Proc. Roy. Soc. (A), т. 107 (1925), стр. 189, и т. 110 (1926), стр. 241.

³ Motzfeld H., ZAMM, т. 17, (1937), стр. 193-212.

очень мелкой воде, а также для очень длинных волн на средней воде только что указанная зависимость принимает опять более простой вид. В обоих последних случаях вертикальные перемещения частиц воды на свободной поверхности весьма незначительны по сравнению с горизонтальными перемещениями. Поэтому можно опять считать, что волны имеют приблизительно синусоидальную форму. Так как (траектории частиц представляют собой очень сплюснутые эллипсы, то влиянием вертикального ускорения на распределение давления можно пренебречь. Тогда на каждой вертикали давление будет изменяться по статическому закону, и разности высот жидкости будут обуславливать практически только горизонтальные ускорения. Мы ограничимся здесь вычислениями лишь для случая движения «вала» воды, изображенного на рис. 84. Эти вычисления очень простые и в дальнейшем будут нами использованы для исследования распространения возмущения давления в сжимаемой среде (см. § 2 гл. IV).

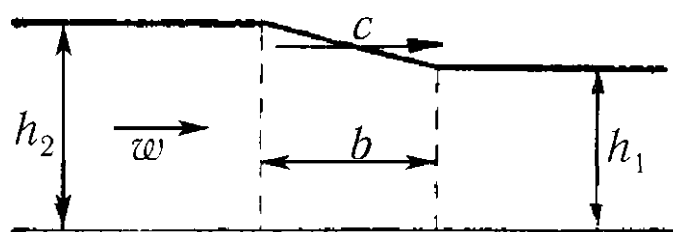


Рис. 84. Вал на поверхности воды

Пусть на поверхности воды над плоским дном распространяется со скоростью c справа налево вал шириной b , повышающий уровень воды от h_1 до h_2 . Предположим, что до прихода вала вода находилась в покое. Скорость ее движения после повышения уровня обозначим через w . Эта скорость, отнюдь не совпадающая со скоростью c распространения вала, необходима для того, чтобы вызвать боковое перемещение объема воды в переходной зоне шириной b вправо и тем самым поднять уровень воды с высоты h_1 до высоты h_2 . Примем для простоты, что наклон вала по всей его ширине постоянен, следовательно, он равен $\frac{h_2 - h_1}{b}$. Тогда, при условии, что скорость w достаточно мала, чтобы ею можно было пренебречь по сравнению со скоростью c распространения вала, вертикальная скорость подъема воды в области вала будет равна

$$v = \frac{c(h_2 - h_1)}{b}.$$

Условие неразрывности, примененное к слою воды толщиной в единицу (в направлении, перпендикулярном к плоскости рис. 84), приводит к уравнению:

$$h_2 w = b v,$$

или

$$h_2 w = c(h_2 - h_1). \quad (72)$$

Мы видим, что из этого уравнения ширина вала b выпала, следовательно, связь между скоростями w и c не зависит от ширины вала. Уравнение (72) остается верным, как нетрудно показать, и для вала с прямолинейным профилем. В самом деле, разбивая такой вал на ряд узких валов с прямолинейными профилями и складывая уравнения неразрывности, составленные для каждого отдельного вала, мы получим справа опять величину $c(h_2 - h_1)$, а слева — опять величину $h_2 w$, правда, при условии, что разностями уровней соседних узких валов можно пренебречь. Из уравнения (72) следует, что при малой величине скорости w должна быть мала также разность высот $h_1 - h_2$, следовательно, это уравнение применимо только к низким валам, и поэтому только что упомянутое условие вполне оправдано.

К кинематическому соотношению (72) следует присоединить динамическое соотношение, которое легко вывести следующим образом. Объем воды шириной b в области вала находится в ускоренном движении, так как частицы, составляющие этот объем, начинают свое движение на правом краю со скоростью нуль, а на левом краю имеют скорости w . Возьмем какую-нибудь частицу воды в области вала. Время, в течение которого над этой частицей проходит вал, очевидно, равно

$$\tau = \frac{b}{c},$$

поэтому ускорение частицы будет

$$\frac{w}{\tau} = \frac{wc}{b}.$$

Объем воды в области вала, если его толщину в направлении, перпендикулярном к плоскости рисунка, принять равной единице, имеет массу $\rho b h_m$, где h_m есть средний уровень воды в области вала. Разность давлений по обе стороны вала на одной и той же высоте составляет $\gamma(h_2 - h_1)$. Следовательно, полная сила давления, действующая на рассматриваемый объем воды в горизонтальном направлении, равна $h_m \gamma(h_2 - h_1)$. Применяя основное уравнение динамики: сила равна массе, умноженной на ускорение, мы получим:

$$h_m \gamma(h_2 - h_1) = \rho b h_m \frac{wc}{b},$$

откуда, имея в виду, что $\gamma = \rho g$, найдем:

$$wc = g(h_2 - h_1). \quad (73)$$

Таким образом, ширина вала b выпала и из этого уравнения. Аналогично тому, как это было сделано для уравнения (72), можно показать, что уравнение (73) применимо также для вала с другим профилем при условии, что разность $h_2 - h_1$ мала по сравнению с высотами h_1 и h_2 .

Для дальнейшего упрощения заменим в левой части уравнения (72) h_2 на h_m , что при малой величине разности $h_2 - h_1$ вполне допустимо, и разделим уравнение (73) на уравнение (72); после сокращений мы получим:

$$c^2 = gh_m. \quad (74)$$

Чередование положительных и отрицательных валов приводит, очевидно, к образованию волн. Скорость распространения таких волн на основании уравнения (74) не зависит от формы волны. Следовательно, длинные волны на мелкой воде распространяются со скоростью

$$c = \sqrt{gh},$$

называемой *критической скоростью*.

Если на воде следуют друг за другом несколько низких валов, из которых каждый несколько повышает уровень воды, то скорость $\sqrt{gh}$ каждого последующего вала несколько больше скорости предыдущего вала, так как последний уже вызвал некоторое увеличение глубины h . Кроме того, каждый последующий вал распространяется не в неподвижной воде, а в воде, уже движущейся вправо со скоростью w . Это приводит к тому, что последующие валы догоняют предыдущие, в результате чего возникает крутой вал конечной высоты.

Исследование распространения вала конечной высоты можно выполнить при помощи теоремы о количестве движения совершенно таким же образом, как это было сделано в § 13 при рассмотрении внезапного расширения потока. Для того чтобы движение воды при распространении вала можно было рассматривать как установившееся, расчет следует вести в системе отсчета, движущейся вместе с валом. Скорость распространения вала конечной высоты больше чем gh .¹

§ 16. Движение воды в открытом русле. Если в русле, на дне которого имеется пологое возвышение (например, донная плотина), вода течет со скоростью, меньшей критической скорости $\sqrt{gh}$, то перед плотиной возникает подпор воды — повышение уровня ее свободной поверхности. Если же скорость течения воды больше критической, то над

¹ Более подробные сведения о волновых движениях можно найти в книгах: С р е т е н с к и й Л. Н., Теория волновых движений жидкости, Москва, 1936; К о ч и н Н. Е., К и б е л ь И. А. и Р о з е Н. В., Теоретическая гидромеханика, ч. 1, изд. 4-е, Москва, 1948. (Прим. перев.)

плотиной или на некотором расстоянии перед ней возникает вал конечной высоты, так называемый *прыжок воды*, причем этот вал ни в какой мере не влияет на движение воды до плотины. В § 2 и 4 гл. IV мы увидим, что сходное явление происходит и при движении газовых потоков, причем там роль критической скорости $\sqrt{gh}$ играет скорость звука. Движение воды в открытом русле со скоростью, меньшей $\sqrt{gh}$, называют спокойным течением, а движение со скоростью, большей $\sqrt{gh}$, — стремительным течением.

Вычислим для заданного расхода воды Q (на единицу ширины русла) значения глубины, соответствующие возрастающим скоростям течения w (рис. 85). Понижение уровня в каком-нибудь сечении относительно уровня неподвижной воды равно

$$h = \frac{w^2}{2g}.$$

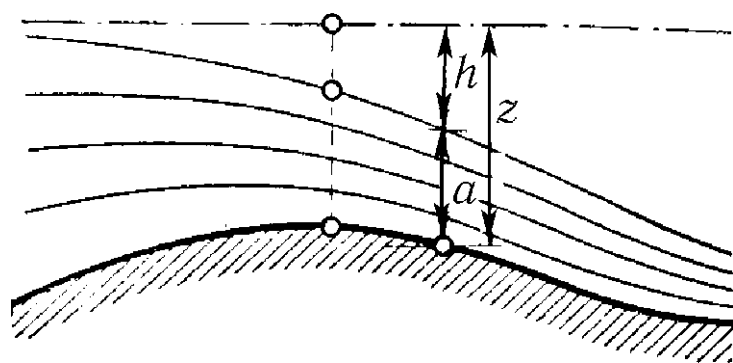


Рис. 85. Перетекание воды через плотину

Глубина воды в этом сечении, обеспечивающая при скорости w расход Q , очевидно, равна

$$a = \frac{Q}{w}.$$

Следовательно, расстояние соответствующей точки дна от уровня неподвижной воды будет

$$z = h + a = \frac{w^2}{2g} + \frac{Q}{w}. \quad (75)$$

При изменении скорости w от 0 до ∞ величина z изменяется от ∞ до ∞ , принимая в промежутке конечные значения; поэтому при определенном w она должна иметь минимальное значение (в § 3 гл. IV мы увидим, что таким же образом изменяется поперечное сечение трубки тока при движении газа). Взяв производную от правой части уравнения (75) и приравняв ее нулю, мы найдем, что указанный минимум имеет место при скорости

$$w_1 = \sqrt[3]{Qg}.$$

Этой скорости соответствуют значения h и a , равные

$$h_1 = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g}}, \quad a_1 = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g}} = 2h_1.$$

Отсюда следует, что

$$w_1 = \sqrt{ga_1},$$

т. е. скорость w_1 равна скорости распространения вала на воде с глубиной a_1 . Произведенный расчет показывает, что при перетекании воды через пологое возвышение на дне глубина воды над наивысшей точкой возвышения равна $\frac{2}{3}$ расстояния z этой точки от уровня неподвижной воды. Скорость течения воды над этой точкой равна

$$w_1 = \sqrt{\frac{2}{3}gz},$$

следовательно, расход Q равен

$$Q = aw = \frac{2}{3}z\sqrt{\frac{2}{3}gz}. \quad (76)$$

Ниже вершины возвышения течение воды стремительное, но затем оно опять делается спокойным, причем переход в спокойное течение происходит обычно резко — путем образования прыжка воды (см. ниже).

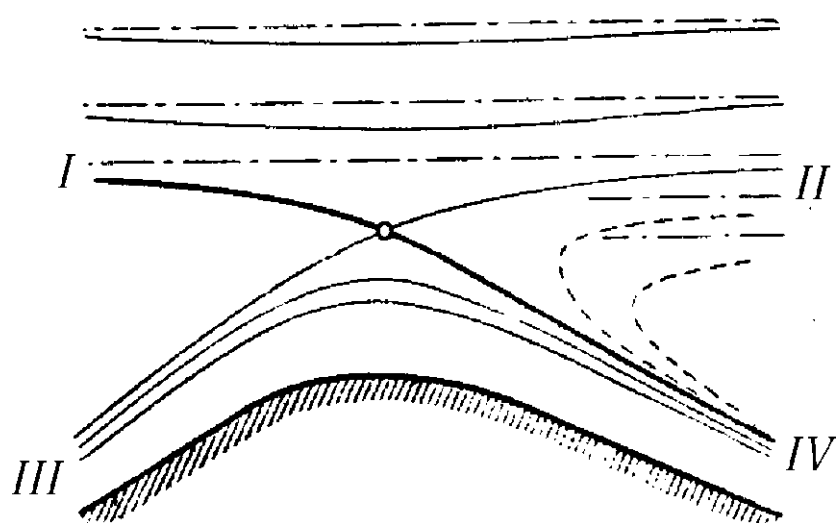


Рис. 86. Профили свободной поверхности воды при перетекании через возвышение на дне русла

Для непологих возвышений нельзя принимать, что скорость течения одинакова во всем поперечном сечении, однако в качественном отношении результаты остаются такими же, как и в рассмотренном случае [ср. с § 12, п. е) следующей главы].

Выведенные формулы могут быть использованы также в более широких целях. Рассмотрим русло, на дне которого имеется пологое возвышение (рис. 86), и для ряда высот уровня неподвижной воды (штрих-пунктирные прямые) вычислим и отложим на рисунке глубины a при определенном значении секундного расхода Q (для каждой точки дна русла и каждой высоты уровня мы получим два значения глубины a). Найденные таким путем профили свободной поверхности воды изображены на рис. 86. Наинижнему возможному положению уровня неподвижной воды соответствует профиль I–IV, проходящий через двойную точку. Для течения, изображенного на рис. 85, возможен только этот профиль. Профили I–II и III–IV, соответствующие более высоким уровням неподвижной воды, также встречаются в практических

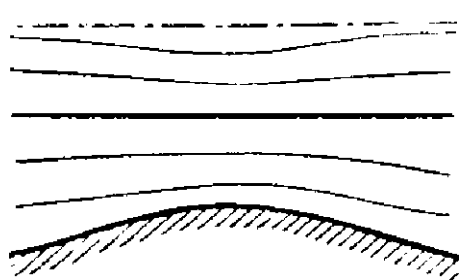


Рис. 87. Профиль свободной поверхности воды при перетекании через возвышение на дне русла. Скорость течения меньше критической скорости $\sqrt{gh}$

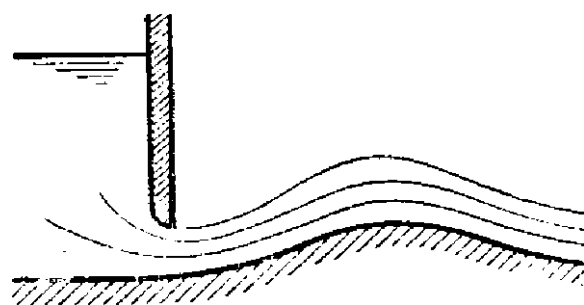


Рис. 88. Профиль свободной поверхности воды при перетекании через возвышение на дне русла. Скорость течения больше критической скорости $\sqrt{gh}$

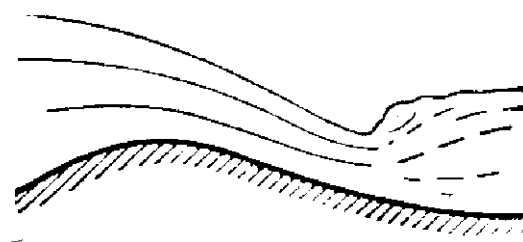


Рис. 89. Профиль свободной поверхности воды при перетекании через возвышение на дне русла с образованием прыжка. До прыжка скорость течения больше, а после прыжка меньше $\sqrt{gh}$

условиях (рис. 87 и 88). Профили II-IV, изображенные на рис. 86 штрихами и построенные для уровней неподвижной воды, более низких, чем наименьший возможный, практически осуществляются только в своей верхней части после прыжка воды, связанного с потерей энергии (рис. 89).

Скорость течения, изображенного на рис. 87, меньше критической скорости $\sqrt{gh}$, и над вершиной возвышения дна получается понижение уровня воды. Наоборот, для случая, изображенного на рис. 88, скорость течения больше критической скорости $\sqrt{gh}$, и уровень воды над возвышением дна поднимается, причем на высоту, большую высоты возвышения. Наконец, для случая, изображенного на рис. 89, скорость течения на участке от возвышения дна до прыжка больше, а после прыжка меньше критической скорости $\sqrt{gh}$.

О роли, которую в рассмотренных явлениях играет трение, будет сказано в § 12, п. f) гл. III.

Еще раз подчеркнем, что в предыдущих рассуждениях мы пренебрегали влиянием вертикального ускорения. Учет этого ускорения при стремительном течении приводит только к незначительным количественным поправкам; при спокойном же течении получается качественное изменение характера движения: вниз по течению от очага возмущения возникают волны¹.

¹Boussinesq J., Essai sur la theorie des eaux courantes. Mem. des Savants Etrangers, т. 23 (1877); см. также Forchheimer Ph., Hydraulik, изд. 3, 1930 [имеется в переводе на русский язык: Форхгеймер Ф., Гидравлика, Москва, 1935 (Прим. перев.)]

ГЛАВА 3

Движение вязких жидкостей

§ 1. Вязкость (внутреннее трение). Все реальные жидкости обладают определенной вязкостью, которая проявляется в виде внутреннего трения при деформации. Некоторые жидкости, например, мед, глицерин, тяжелые масла и др., обладают особенно большой вязкостью. Для того чтобы понять, в чем заключается сущность вязкости, рассмотрим следующий простой пример. Пусть между двумя параллельными пластинками находится жидкость и пусть одна из этих пластинок

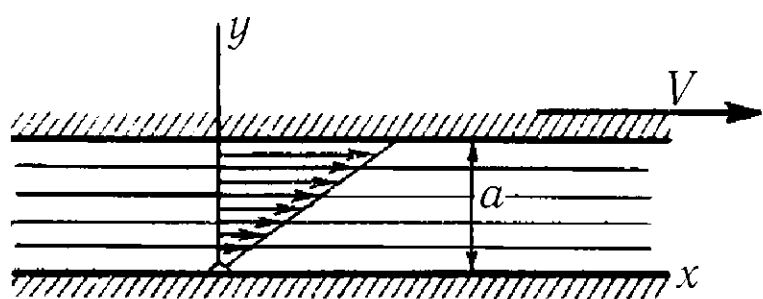


Рис. 90. Движение вязкой жидкости между двумя пластинками

слои скользят друг по другу и обладают скоростями u , пропорциональными расстоянию от неподвижной пластинки. Следовательно, скорость слоя, находящегося на расстоянии y от нижней пластинки, равна

$$u = V \cdot \frac{y}{a},$$

где a есть расстояние между обеими пластинками. Трение жидкости проявляется при этом в виде силы, оказывающей сопротивление движению верхней пластинки. Эта сила пропорциональна градиенту скорости жидкости, т.е. изменению скорости, происходящему на единице длины в направлении, перпендикулярном к плоскости пластинок. Величина силы сопротивления, приходящаяся на единицу площади пластинки, называется *касательным напряжением*. На основании сказанного касательное напряжение равно

$$\tau = \mu \cdot \frac{V}{a},$$

или, в более общей формулировке,

$$\tau = X_y = \frac{du}{dy}. \quad (1)$$

Величина μ называется *коэффициентом внутреннего трения* жидкости, или *коэффициентом вязкости*, или, наконец, просто *вязкостью*¹. На существование соотношения (1) первое указание имеется у Ньютона, и поэтому оно часто называется *законом трения Ньютона*.

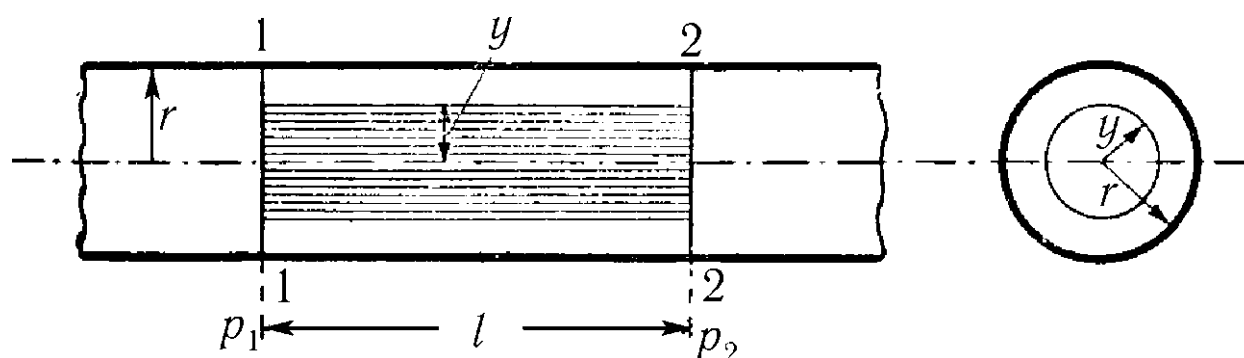


Рис. 91. Движение вязкой жидкости в трубе

При некоторых движениях вязкой жидкости ее слои скользят один по другому, не перемешиваясь между собой. Такие движения называются *ламинарными*². Для исследования нескольких простых случаев ламинарного движения вполне достаточно соотношения (1). Одним из таких случаев является движение в прямолинейной трубе с круглым поперечным сечением. Выделим между сечениями трубы 1 и 2 жидкий цилиндр радиуса y (рис. 91). Пусть давление в сечении 1 равно p_1 , а в сечении 2 оно равно p_2 . Тогда на жидкий цилиндр действует сила $(p_1 - p_2)\pi y^2$.

Этой силе противодействует сила трения на боковой поверхности цилиндра, величину которой на единицу площади, т.е. касательное напряжение, обозначим по-прежнему через τ . Следовательно, на всю боковую поверхность жидкого цилиндра действует сила $2\pi y l \tau$.

Приравнявая обе силы, действующие на цилиндр, мы получим:

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{y}{2}. \quad (2)$$

¹Обозначение вязкости буквой μ , принятое в гидромеханике, введено английскими учеными. Физики обычно обозначают вязкость буквой η . Размерность вязкости есть $ML^{-1}T^{-1}$. Обозначение касательного напряжения символом X_y имеет целью показать, что рассматривается напряжение X , действующее на площадке, нормаль к которой параллельна оси y .

²От латинского слова *lamina* — слой.

Из соотношения (1) мы имеем:

$$\frac{du}{dy} = \frac{\tau}{\mu}.$$

Подставляя сюда вместо τ его выражение из равенства (2) и имея в виду, что теперь, в отличие от случая движения на рис. 90, производная $\frac{du}{dy}$ отрицательна, мы получим:

$$\frac{du}{dy} = -\frac{p_1 - p_2}{\mu l} \cdot \frac{y}{2}.$$

Интегрируя это уравнение и определяя постоянную интегрирования из условия, что самый внешний слой жидкости прилипает к стенке, мы найдем:

$$u = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (r^2 - y^2), \quad (3)$$

где r есть радиус трубы. Количество протекающей через трубу в единицу времени жидкости (так называемый *расход* жидкости) равно

$$Q = \int_0^r 2\pi y dy \cdot u = \frac{\pi r^4}{8\mu} \cdot \frac{p_1 - p_2}{l}. \quad (4)$$

Эта формула может быть проверена путем опыта с очень большой точностью; поэтому она сыграла весьма большую роль при установлении законов движения вязкой жидкости. Между прочим, она позволяет по измеренным значениям расхода Q и разности давлений $p_1 - p_2$ очень точно определить коэффициент вязкости μ . Согласно формуле (4) расход жидкости пропорционален падению давления на единице длины трубы и четвертой степени радиуса трубы. Это соотношение экспериментально было установлено Г. Гагеном¹ в 1839 г., а затем вторично, независимо от Гагена, Пуазейлем². Обычно оно называется законом Пуазейля, так как статья Гагена, который был инженером, по-видимому, осталась незамеченной среди физиков. Правильнее называть соотношение (4) законом Гагена–Пуазейля. Забегая вперед, отметим, что закон Гагена–Пуазейля соблюдается при малых скоростях только в *узких*

¹Hagen G., Poggendorffs Annalen, т. 46 (1839), стр. 423.

²Poiseuille, Comptes Rendus, т. 11 (1840); т. 12 (1841), Mém. des Savants Étrang., т. 9 (1846).

трубках. В широких трубах при больших скоростях имеет место другой закон. Однако несоблюдение закона Пуазейля при движении в широких трубах ни в коей мере не является следствием какой-либо неточности закона трения Ньютона. Напротив, многочисленные опыты над течением в узких трубах со всей точностью подтвердили, что этот закон, а также прилипание жидкости к стенкам имеют место почти для всех жидкостей.

Согласно представлениям кинетической теории газов вязкость газа следует рассматривать как процесс обмена количествами движения между соседними слоями жидкости, движущимися с различными скоростями, и притом как процесс, вызванный собственным движением молекул. Следовательно, на выравнивание скоростей соседних слоев жидкостей надо смотреть как на своего рода диффузию (диффузию количества движения) и применять к ней соотношения такого же вида, как выведенные в § 14 гл. II. Так, например, касательное напряжение и здесь будет равно $\rho \overline{u'v'}$, однако, в противоположность тому, что было раньше, теперь скорости u' и v' представляют собой не турбулентные пульсации, а скорости молекул (см. в связи с этим замечание в конце § 4, п. е).

В сильно разреженных газах, где длиной свободного пути молекул нельзя пренебрегать по сравнению с размерами сосуда, наблюдается кажущееся скольжение газа вдоль стенки. Это происходит потому, что для молекул газа, подлетающих из потока к стенке, составляющая скорости, параллельная стенке, в среднем не равна нулю, между тем как молекулы, отскакивающие от стенки, разлетаются в разные стороны совершенно беспорядочно, и касательная составляющая их скорости в среднем равна нулю. Поэтому среднее значение касательной скорости всех молекул газа не равно нулю, и наблюдается кажущееся скольжение газа вдоль стенки. В газах, находящихся под обычным давлением, длина свободного пути молекул столь мала, что указанное скольжение остается незаметным.

В капельных жидкостях происхождение вязкости совсем иное. Молекулы здесь расположены настолько тесно друг к другу, что в общем случае они могут совершать только небольшие колебания в очень узких пределах и лишь иногда могут меняться местами друг с другом. Такая перемена мест происходит вообще совершенно беспорядочно, но под действием касательного напряжения (которое можно понимать здесь как упругое напряжение, возникающее в результате сложения молекулярных сил) эта перемена мест чаще совершается в том направлении, в котором действует касательное напряжение, что и приводит к скольжению одного слоя жидкости по другому. Таким образом, вязкость жидкости связана с переменной молекулами своих мест; она тем меньше, чем чаще совершается такая перемена.

Заметим, что наряду с обычными жидкостями, для которых скольжение $\frac{du}{dy}$ строго пропорционально касательному напряжению τ , существуют

так называемые *аномальные жидкости*, для которых эта пропорциональность не соблюдается. К таким жидкостям принадлежат главным образом коллоидные растворы, имеющие очень большие, часто нитеобразные молекулы. В этих жидкостях скольжение обычно увеличивается быстрее касательного напряжения, что, по-видимому, связано с тем, что по мере увеличения скорости все большее и большее количество длинных молекул располагается параллельно направлению движения. В дальнейшем мы не будем заниматься рассмотрением аномальных жидкостей.

В общей теории трения жидкостей показывается, что при деформации отдельных элементов жидкости возникают напряжения такого же рода, как и в упругих телах, с той только разницей, что они пропорциональны не деформациям, а скоростям деформаций. Поэтому известные из теории упругости формулы для девяти компонентов напряженного состояния в случае жидкости принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, & X_y &= Y_x = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ Y_y &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, & Y_z &= Z_y = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ Z_z &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, & Z_x &= X_z = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Если эти компоненты во всех точках области, занятой жидкостью, сохраняют постоянные значения, как это имеет место при аффинной деформации области, то все они взаимно уравниваются. Если же в разных точках области, занятой жидкостью, они имеют разные значения, как это имеет место в общем случае деформации, то это приводит к тому, что в каждой точке жидкости возникает некоторая сила. Пусть составляющие этой силы, отнесенной к единице объема, равны X' , Y' , Z' . В таком случае, аналогично тому, как и в теории упругости, мы будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} X' &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}, \\ Y' &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}, \\ Z' &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Таким образом, в вязких жидкостях к силам, обусловленным разностями давлений, а также к массовым силам (если они вообще учиты-

ваются), присоединяются еще силы, вызванные трением и имеющие своими составляющими X' , Y' , Z' .

Подставляя в равенства (6) вместо X_x , X_y и X_z их значения из равенств (5), мы получим:

$$X' = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (7)$$

и аналогичные уравнения для Y' и Z' . Если при движении жидкости не происходит изменений объема, то второй член в правой части уравнения (7) обращается в нуль.

Присоединяя правые части уравнений (7) к правым частям уравнений Эйлера (13), выведенным в § 4 гл. II, мы получим так называемые *дифференциальные уравнения Навье – Стокса для вязкой жидкости*. Для несжимаемых потоков эти уравнения принимают вид:

$$\rho \frac{du}{dt} = X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u,$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v,$$

$$\rho \frac{dw}{dt} = Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta w,$$

где $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ имеют значения, определяемые равенствами (12), гл. II, а символ Δ введен для сокращенного обозначения операции

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Если, как это было в примерах, разобранных в § 1, составляющая скорости потока в направлении оси x , т.е. величина u , значительно больше двух других составляющих и если эта составляющая сильнее всего изменяется в направлении оси y , то основную роль играет напряжение X_y [в § 1, в уравнении (1), мы его обозначили через τ]. Поэтому в первом из выражений (6), определяющем силу X , наибольшую величину будет иметь член $\frac{\partial X_y}{\partial y}$, причем на основании четвертого из равенств (5) мы будем иметь:

$$\frac{\partial X_y}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

(так как составляющая v мала по сравнению с u). Следовательно, в рассматриваемом случае силами, управляющими потоком, будут: только что указанная сила $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, вызванная трением, перепад давления $-\frac{\partial p}{\partial x}$ и сила инерции¹ $-\rho \frac{du}{dt}$ (ср. § 4 гл. II). Дальнейшими вычислениями мы не будем заниматься, так как их доведение до конечного результата в общем случае наталкивается на очень большие математические трудности. Вместо этого мы остановимся в следующем параграфе на вопросе механического подобия, имеющем важное значение для получения правильного общего представления о гидродинамических явлениях.

§ 2. Механическое подобие. Число Рейнольдса. Если для двух потоков около или внутри геометрически подобных тел картины линий тока также геометрически подобны, то такие потоки называются механически подобными. Весьма важно найти условия, при которых для внешне геометрически подобных потоков осуществляется также и механическое подобие. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы в подобно расположенных точках сравниваемых потоков отношения трех сил: перепада давления, силы трения и силы инерции — были одинаковыми. Так как эти три силы уравнивают друг друга, то в дальнейшем мы можем ограничиться рассмотрением только двух из них; мы выберем силу инерции и силу трения, так как перепад давления, по крайней мере для несжимаемых потоков, не обладает сам по себе какими-либо характерными признаками. Различные геометрически подобные потоки мы будем сравнивать друг с другом при помощи каких-либо характерных длин $l_1, l_2, \dots$ и характерных скоростей $v_1, v_2, \dots$. За характерную длину можно взять, например, диаметр или длину тела, ширину канала и т. п., а за характерную скорость — скорость движения тела или среднюю скорость в определенном сечении канала. Плотность и вязкость в различных потоках также могут иметь различные значения; обозначим их соответственно через $\rho_1, \rho_2, \dots$ и через $\mu_1, \mu_2, \dots$. Составляющие силы инерции, одна из которых (см. конец предыдущего параграфа) равна

$$-\rho \frac{du}{dt} = -\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + \dots \right),$$

¹Под силой инерции следует понимать сопротивление, которое инертная масса оказывает изменению своего движения, т. е. ускорению, вызываемому другой массой. Следовательно,

сила инерции = — масса × ускорение.

в подобных потоках должны относиться друг к другу как выражения $\rho \frac{v^2}{l}$. В самом деле, если два потока подобны, то значения скорости u в соответственных точках обоих потоков, а потому и малые разности du этих значений должны относиться друг к другу как характерные скорости v_1 и v_2 ; длины же x и y , а также их малые разности dx и dy должны относиться друг к другу как характерные длины l_1 и l_2 . На основании аналогичных соображений составляющие силы трения, в соответствии с их выражением $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, относятся друг к другу в подобных потоках как выражения $\mu \frac{v}{l^2}$. В самом деле, величины $\partial^2 u$ суть не что иное, как разности скоростей второго порядка малости и поэтому должны относиться друг к другу как характерные скорости v_1, v_2 , а ∂y^2 суть квадраты малых разностей длин и поэтому должны относиться друг к другу как квадраты характерных длин l_1 и l_2 , т.е. как l_1^2 и l_2^2 . Таким образом, сформулированное выше условие механического подобия сводится к тому, что в геометрически подобных потоках отношение величин $\frac{\rho v^2}{l}$ и $\frac{\mu v}{l^2}$, т.е.

$$\frac{\rho v^2}{l} : \frac{\mu v}{l^2} = \frac{\rho v l}{\mu} = R,$$

должно быть одинаковым в подобно расположенных точках. Поскольку это отношение представляет собой отношение двух сил, отнесенных к единице объема, т.е. двух величин с одинаковой размерностью, оно является отвлеченным, безразмерным числом. Следовательно, два геометрически подобных потока 1 и 2 будут подобны также механически, если для них имеет место равенство:

$$\frac{\rho_1 v_1 l_1}{\mu_1} = \frac{\rho_2 v_2 l_2}{\mu_2}. \quad (8)$$

Число $\frac{\rho v l}{\mu}$ — R характеризующее отношение силы инерции к силе трения, называют *числом Рейнольдса* в честь английского ученого Осборна Рейнольдса¹, открывшего выведенный закон подобия.

Отношение вязкости к плотности, т.е. $\frac{\mu}{\rho}$, называется *кинематической вязкостью* и обозначается буквой ν . Размерность кинематической

¹ Reynolds O., Phil. Trans., 1883, также Papers, т. II, стр. 51.

вязкости, как легко видеть, будет L^2T^{-1} . Таким образом, какое-либо состояние потока вязкой жидкости можно охарактеризовать числом Рейнольдса

$$R = \frac{\rho v l}{\mu} = \frac{v l}{\nu}, \quad (9)$$

соответствующим этому состоянию. Если число Рейнольдса мало, то это означает, что в потоке преобладают силы вязкости. Наоборот, если число Рейнольдса велико, то главную роль в потоке играют силы инерции. Ниже мы увидим, что для обоих этих случаев законы движения жидкостей и законы сопротивления, возникающего при движении, очень сильно отличаются друг от друга. Из равенства (8) видно, что на состояние потока существенное влияние оказывают, наряду с вязкостью, также пространственные размеры, определяющие движение жидкости, и скорости. Если пространственные размеры, определяющие движение жидкости, очень малы, то законы движения, соответствующие малым числам Рейнольдса, имеют место при всех практически возможных скоростях. Если же эти размеры велики, то указанные законы справедливы только при очень малых скоростях или для очень вязких жидкостей. Заметим также, что в подобных потоках разности давлений относятся как ρv^2 или, на основании равенства (8), как $\frac{\mu v}{l}$.¹

Величина вязкости μ , равная 1 г/см·сек, называется в честь Пуазейля — *пуазом*. Для величины кинематической вязкости, равной 1 см²/сек, предложено в честь Стокса название *стокс*.

Кинематическая вязкость ν имеет для указанных ниже жидкостей следующие значения:

Вода при 0°	$\nu = 0,0178$	см ² /сек
» » 20°	$\nu = 0,0100$	»
» » 50°	$\nu = 0,0056$	»
» » 100°	$\nu = 0,0030$	»
Ртуть при 0°	$\nu = 0,00125$	»
» » 100°	$\nu = 0,00091$	»
Глицерин при 20°	$\nu = 6,8$	»
Воздух при 0° и 1 ата (= 760 мм рт. ст.)	$\nu = 0,133$	»
» » 100° и 1 ата	$\nu = 0,245$	»
» » 0° и 0,01 ата	$\nu = 13,3$	»
» » 0° и 100 ата	$\nu = 0,00133$	»

¹Подробности о применении теории подобия в гидроаэромеханике можно найти в книге: Седов Л. И., Методы теории размерностей и теории подобия в механике, Москва, 1944. (Прим. пер.)

§ 3. Движение тел в вязких жидкостях. Формула Стокса. Пограничный слой. Математическое изучение движения тел в вязкой жидкости сопряжено со столь большими трудностями, что до сих пор такому изучению оказались доступными только предельные случаи, а именно, случай очень большой вязкости, т. е. очень малого числа Рейнольдса, и случай очень малой вязкости, т. е. очень большого числа Рейнольдса.

Если в потоке преобладают силы вязкости, что имеет место, с одной стороны, в очень вязких жидкостях (например, в моторном масле), а с другой стороны, также в обычных жидкостях при весьма малых размерах, определяющих движение, то можно пренебречь силами инерции по сравнению с силами вязкости и считать, что перепад давления и силы трения, приложенные к любой части жидкости, уравновешивают друг друга. Согласно сказанному в § 2, в геометрически подобных потоках силы трения, отнесенные к единице объема, пропорциональны $\frac{\mu v}{l^2}$. Так как силы давления уравновешиваются с силами трения, то и они должны быть пропорциональны $\frac{\mu v}{l^2}$. Следовательно, в рассматриваемом случае геометрическое подобие влечет за собой всегда и механическое подобие. Так как сравниваемые объемы относятся как l^3 , то полные силы сопротивления относятся как произведения $\mu v l$.

Для некоторых тел простой формы удалось произвести расчет потока и определить сопротивление при движении тела. Наиболее известным является решение Стокса¹ для движения шара. Для величины сопротивления W Стокс получил формулу

$$W = 6\pi\mu va, \quad (10)$$

где a есть радиус шара, а v — скорость его движения. Эта формула, называемая *формулой Стокса*, имеет важное значение для расчета падения маленьких капель. Так как в этом случае сопротивление следует принять равным весу капли за вычетом поддерживающей силы, то мы можем написать:

$$6\pi\mu va = \frac{4\pi}{3}(\rho_1 - \rho_2)ga^3,$$

где ρ_1 есть плотность падающей капли, а ρ_2 — плотность окружающей среды. Отсюда мы получаем скорость падения:

$$v = \frac{2}{9} \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{\mu} ga^2. \quad (11)$$

¹Stokes G. G., On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums, Trans. Cambridge Phil. Soc., m. 9 (1850), стр. 8; также в Math. and Phys. Papers, т. III, стр. 55.

Эта формула применима только для таких движений, при которых число Рейнольдса мало по сравнению с единицей. Для падения водяных капель в воздухе формула (11) принимает вид:

$$v = 1,3 \cdot 10^6 a^2,$$

причем a следует брать в сантиметрах. Из условия, что $R = \frac{va}{\nu} < 1$, получается, что формула (11) верна только для капель, радиус которых меньше 0,01 мм. Из таких капель состоит туман.

Движения жидкости, при которых число Рейнольдса меньше единицы, называются *ползущими течениями*.

При движениях с очень большими числами Рейнольдса влияние трения делается совершенно ничтожным. Такие движения совпадали бы с движениями жидкости без трения, рассмотренными в § 4–12 гл. II, если бы не было условия прилипания к стенкам, которому жидкость, лишенная трения, не может удовлетворять. Более детальное исследование показывает, что жидкость, обладающая малым трением, при движениях с большими числами Рейнольдса ведет себя вдали от стенок совершенно так же, как жидкость, лишенная трения; но около стенок она образует вследствие трения тонкий *пограничный слой*, в котором скорость изменяется от значения, соответствующего движению без трения, до значения, соответствующего условию прилипания. Пограничный слой тем тоньше, чем меньше вязкость. Так как внутри пограничного слоя в направлении, перпендикулярном к движению, скорость изменяется довольно быстро, то даже при очень малой вязкости здесь получаются такие силы трения, которые сравнимы с силами инерции и поэтому не могут быть отброшены, как вдали от стенок, где они ничтожно малы по сравнению с силами инерции.

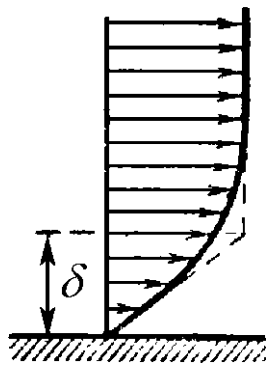


Рис. 92. Распределение скоростей вблизи стенки

На рис. 92 показано распределение скоростей в пограничном слое. Если толщина пограничного слоя представляет собой величину порядка δ , а размер тела в направлении течения — величину порядка l , то сила трения на единицу объема, равная, согласно сказанному в конце § 1, $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (направление y нормально к поверхности тела), будет иметь порядок $\frac{\mu v}{\delta^2}$,

а сила инерции на единицу объема, как и раньше, — порядок $\frac{\rho v^2}{l}$. Так как в пограничном слое обе эти силы представляют собой величины од-

ного и того же порядка, то величины $\frac{\mu v}{\delta^2}$ и $\frac{\rho v^2}{l}$ пропорциональны друг другу, т. е.

$$\frac{\mu v}{\delta^2} \sim \frac{\rho v^2}{l}$$

(знак $\sim$ означает «пропорционально»), откуда получается формула:

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\mu l}{\rho v}},$$

дающая оценку для толщины пограничного слоя.

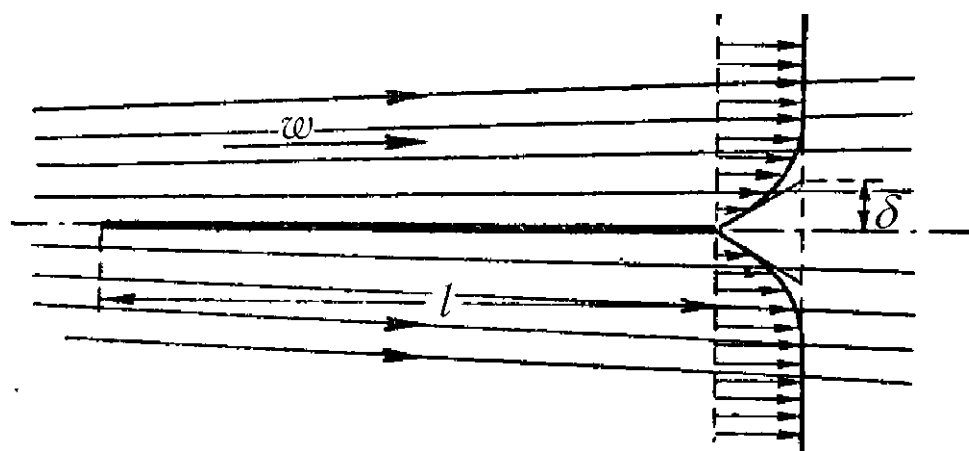


Рис. 93. Течение вдоль пластинки

Этот же результат можно получить, применяя теорему о количестве движения к потоку вдоль плоской пластинки. Пусть пластинка имеет длину l и ширину b ; скорость течения пусть равна w и, наконец, толщина пограничного слоя пусть приближенно равна δ (рис. 93). Тогда масса, входящая за одну секунду в пограничный слой, будет пропорциональна величине $\rho b \delta w$. Эта масса, вступающая в пограничный слой со скоростью w , теряет здесь некоторую долю своей скорости, что приводит к соответствующей потере количества движения, которая будет пропорциональна величине $\rho b \delta w^2$. Изменение количества движения должно быть равно силе, действующей на жидкость вследствие трения около стенки. Эта сила, согласно равенству (1), пропорциональна $l b \cdot \mu \frac{w}{\delta}$, следовательно,

$$\rho b \delta w^2 \sim l b \mu \frac{w}{\delta},$$

откуда по-прежнему получаем:

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\mu l}{\rho w}} = \sqrt{\frac{\nu l}{w}} \quad (12)$$

или

$$\frac{\delta}{l} \sim \sqrt{\frac{\nu}{wl}} = \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

Таким образом, отношение $\frac{\delta}{l}$ является функцией только числа Рейнольдса. Такая зависимость имеет место для всех пограничных слоев с установившимся движением.

В формулу (12) можно ввести время t , которое требуется отдельным частицам жидкости для того, чтобы пройти вдоль тела. Для частиц,двигающихся не слишком близко от поверхности тела, этот промежуток времени пропорционален $\frac{l}{w}$, поэтому формулу (12) можно переписать в следующем виде:

$$\delta \sim \sqrt{\nu t}. \quad (13)$$

Формулу (13) можно применять также к движениям, которые только что начались из состояния покоя. В этом случае из нее следует, что толщина пограничного слоя возрастает в первый период движения пропорционально корню квадратному из времени.

Итак, всякое тело, движущееся в жидкости, обладающей небольшим трением, увлекает за собой тонкий слой жидкости. Такой же тонкий слой образуется и при движении жидкости в коротком канале около его стенок, но теперь этот слой отстает от общего потока жидкости. В длинных каналах пограничный слой постепенно, по мере удаления от входа в канал, увеличивается в толщине [согласно формуле (12) пропорционально корню квадратному из расстояния от входа] и в конце концов заполняет весь просвет канала. Это означает, что в длинных каналах влияние трения распространяется на все поперечное сечение¹. Такое увеличение толщины пограничного слоя во многих случаях происходит значительно быстрее, чем это следует из формулы (12); причиной этого является процесс перемешивания жидкости, называемый *турбулентностью* (см. § 4).

Касательные напряжения, возникающие на стенке при ее обтекании (рис. 92), складываясь по всей поверхности стенки, дают сопротивление трения. Для случая пластинки, обтекаемой жидкостью с двух сторон (рис. 93), легко получить приближенную оценку величины этого сопротивления. В самом деле, касательное напряжение равно

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y},$$

¹См. в связи с этим сказанное на стр. 228.

следовательно, имеет место пропорциональность

$$\tau \sim \mu \frac{w}{\delta},$$

или, на основании формулы (12),

$$\tau \sim \sqrt{\frac{\mu \rho w^3}{l}}.$$

Если ширина пластинки равна b , то полная площадь соприкосновения с потоком будет $F = 2bl$. Умножая эту площадь на τ , мы получим искомое сопротивление:

$$W \sim 2bl \cdot \tau = \text{число} \cdot b \sqrt{\mu \rho l w^3}. \quad (14)$$

Подробнее о сопротивлении пластинок будет сказано в § 5 (стр. 180).

В существовании пограничного слоя можно убедиться при помощи следующего простого опыта. Поместим в не слишком быстрый поток воды какое-нибудь тело (пластинку, цилиндр, шар и т. п.) и подведем через заостренную стеклянную трубочку немного окрашенной жидкости к какому-нибудь месту обтекаемого тела. Убрав трубочку, мы увидим, что около поверхности тела еще долгое время остается тонкий окрашенный слой жидкости. Очевидно, что этот слой возникает вследствие прилипания частиц окрашенной жидкости к поверхности тела.

Математическое дополнение. Движение жидкости в пограничном слое может быть исследовано при помощи точных математических приемов. Как уже было сказано, в жидкости с исчезающе малой вязкостью пограничный слой получается очень тонким. Поэтому вполне допустимо внутри пограничного слоя пренебрегать разностью давлений в различных точках нормалей к стенке. В противоположность этому разности скоростей в отдельных точках нормалей весьма значительны, так как переход от скорости слоя, прилипающего к стенке, к скорости потока за пределами пограничного слоя совершается на очень коротком отрезке. Ввиду этого в выражении (7) для силы трения, отнесенной к единице объема, члены $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ будут значительно меньше члена $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ и, следовательно, могут быть отброшены (мы предполагаем, что ось x проведена в направлении потока, а ось y — в направлении нормали).

Для двухмерного потока можно пренебречь также кривизной пограничного слоя и поэтому считать, что координата x совпадает с длиной дуги линии

тока вдоль стенки. В таком случае для движения жидкости в пограничном слое получается следующая система дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (16)$$

причем давление p следует рассматривать как функцию от x и t , определяемую внешним потоком, т. е. потоком, лежащим вне пограничного слоя. На стенке имеют место граничные условия:

$$u = 0, \quad v = 0.$$

Кроме того, на стенке

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (17)$$

как это следует из уравнения (15) после подстановки в него значений $u = 0$, $v = 0$. Решение этой системы уравнений может быть получено путем разложения в ряд^{1,2}. Для случая пластинки коэффициент пропорциональности в формуле (12) получается равным 3,012, поэтому приближенно можно положить, что

$$\delta = 3\sqrt{\frac{\nu l}{w}}. \quad (18)$$

§ 4. Турбулентность. а) В § 1 мы вывели закон Гагена–Пуазейля, согласно которому при течении вязкой жидкости в круглой трубе падение давления пропорционально расходу жидкости [формула (4)]. Там же мы упомянули, что закон Гагена–Пуазейля имеет место для движения в очень узких трубках при любых практически возможных скоростях, а для движения в широких трубках — только при малых

¹Blasius H., Über Grenzsichten in Flüssigkeiten bei sehr kleiner Reibung, Zeitschr. f. Math. u. Phys., т. 56 (1908), стр. 1; см. также Tollmien, Handb. der Exp.-Phys., т. IV, часть 1 стр. 239; Durand, Aerodynamic. Theory, т. III, стр. 80 [имеется в переводе на русский язык: Аэродинамика под общ. редакцией В. Дюрэнда, 1939. (Прим. пер.)]

²Теория пограничного слоя получила значительное развитие благодаря работам советских ученых; см., например: Дородницын А. А., Пограничный слой в сжимаемом газе. Прикл. мат. и мех., т. VI (1942), № 6; Кочин Н. Е. и Лойцянский Л. Г., Об одном приближенном методе расчета ламинарного пограничного слоя. Докл. АН СССР, т. XXXVI (1942), № 9; Лойцянский Л. Г., Приближенный метод расчета турбулентного пограничного слоя на профиле крыла. Прикл. мат. и мех., т. IX (1945), № 6; см. также Лойцянский Л. Г., Аэродинамика пограничного слоя. Ленинград, 1941. (Прим. пер.)

скоростях. При больших скоростях для широких труб этот закон, как показывают наблюдения, перестает быть верным и заменяется другим законом, согласно которому падение давления приближенно пропорционально второй степени расхода, т. е. значительно больше, чем при законе Гагена – Пуазейля. Кроме того, в тех условиях, когда применим закон Гагена – Пуазейля, частицы жидкости движутся упорядоченно и прямолинейно; при больших же скоростях они начинают двигаться совершенно неупорядоченно и по самым извилистым траекториям.

Такой переход от упорядоченного движения к неупорядоченному очень легко наблюдать в стеклянной трубе, если в основной поток жидкости ввести немного окрашенной жидкости через узенькую трубочку, вставленную в поток. При малых скоростях окрашенная жидкость увлекается основным потоком в виде тонкой прямолинейной нити, при больших же скоростях эта нить на некотором расстоянии от своего начала разрывается, и окрашенная жидкость быстро и почти равномерно перемешивается с основным потоком. Такой опыт впервые был выполнен Рейнольдсом. Упорядоченное движение, наблюдающееся при малых скоростях, называется ламинарным, а неупорядоченное движение, наблюдающееся при больших скоростях, — турбулентным.

Из соображений о подобии (§ 2) Рейнольдс вывел заключение, что переход от ламинарного движения к турбулентному должен происходить — для труб разного диаметра и для жидкостей с различной вязкостью — всегда при одном и том же значении величины $\frac{\bar{w}d}{\nu}$, где $\bar{w}$ есть средняя скорость течения, а d — диаметр трубы¹. Величина $\frac{\bar{w}d}{\nu}$, как мы знаем из § 2, носит теперь название числа Рейнольдса; ее значение, соответствующее переходу ламинарного движения в турбулентное, называется *критическим числом Рейнольдса*. Опыты показали, что установленная Рейнольдсом закономерность действительно наблюдается, если только условия притекания жидкости в разные трубы хорошо совпадают. Так, например, для трубы с острыми краями, вставленной в сосуд с плоской стенкой, критическое число Рейнольдса равно

$$\frac{\bar{w}d}{\nu} = 2800^2.$$

При хорошем округлении входа в трубу и при отсутствии сотрясений критическое число Рейнольдса увеличивается до 40 000 и выше. Наоборот, при необточенных краях трубы оно понижается примерно до 2 320.

¹В физических расчетах в формулы обычно вводится радиус трубы r . В инженерных расчетах предпочитают пользоваться диаметром d .

²Schiller L., Forschungsheft 248 des VDI (1922), стр. 16.

б) Турбулентное движение наблюдается не только в трубах и каналах, но также в пограничных слоях, рассмотренных в § 3. В этом случае для составления числа Рейнольдса, определяющего движение, следует взять вместо диаметра трубы толщину пограничного слоя δ , а вместо средней скорости течения — скорость течения w_1 вне пограничного слоя. Таким образом, теперь числом Рейнольдса будет

$$R = \frac{w_1 \delta}{\nu}.$$

При обтекании пластинок и многих других тел пограничный слой вблизи носовой части тела очень тонок [см. формулу (12)]. Это приводит к тому, что движение в пограничном слое на некотором участке остается ламинарным и только после того, как толщина слоя δ увеличивается настолько, что достигается критическое значение числа R , движение в пограничном слое становится турбулентным.

Наблюдения над движением хорошо заостренных пластинок, буксированных в неподвижной воде, показали, что течение около них может оставаться ламинарным до числа Рейнольдса, равного приблизительно

$$\frac{w_1 l}{\nu} = 500\,000, \quad (19)$$

где l есть длина пластинки.

Для пластинок с хорошо закругленным передним краем, обдувавшихся в аэродинамической трубе американского National Bureau of Standards (Вашингтон), удалось довести критическое значение числа Рейнольдса до

$$\frac{w_1 l}{\nu} = 3\,000\,000, \quad (20)$$

правда, путем принятия особых мер предосторожности против возмущения набегающего потока.

Как показали вычисления Блазиуса, для плоских пластинок толщина пограничного слоя δ связана с длиной пластинки l скоростью потока w_1 вне пограничного слоя и кинематическим коэффициентом вязкости соотношением:

$$\frac{w_1 \delta}{\nu} = 3 \sqrt{\frac{w_1 l}{\nu}},$$

[см. формулу (18)]. Следовательно, указанным выше критическим значениям (19) и (20) числа $\frac{w_1 l}{\nu}$ соответствуют критические значения числа $\frac{w_1 \delta}{\nu}$, равные приблизительно

$$\frac{w_1 \delta}{\nu} = 2\,100 \quad \text{и} \quad \frac{w_1 \delta}{\nu} = 5\,200.$$

Для того чтобы сравнить эти критические значения с соответствующими критическими значениями для движения в трубах, примем, что

$$d = 4\delta, \quad \bar{w} = \frac{1}{2}w_1.$$

Тогда мы получим:

$$\frac{\bar{w}d}{\nu} = 4\,200 \quad \text{и} \quad \frac{\bar{w}d}{\nu} = 10\,400,$$

что хорошо согласуется с результатами, получаемыми для движения в трубах при небольших и средних возмущениях в притекающей к трубе жидкости. Дальнейшие сведения о переходе в пограничном слое ламинарного течения в турбулентное будут даны в конце § 6.

с) При изучении турбулентности мы сталкиваемся с двумя вопросами, с теоретической точки зрения *совершенно различными*. Первый вопрос касается причин *возникновения турбулентности*, а второй — *свойств течения с вполне развившейся турбулентностью*.

Для объяснения возникновения турбулентности предложено много гипотез, часто очень остроумных с математической точки зрения, однако до сих пор этот вопрос удовлетворительно не разрешен.

Рейнольдс показал¹, что при некоторых формах возмущающих движений энергия из главного движения переходит в возмущающее движение, но при этом одновременно происходит затухание возмущающего движения вследствие действия достаточно большой вязкости. С этой точки зрения вполне понятно, почему при малых числах Рейнольдса течение остается ламинарным. Однако, для того чтобы объяснить возникновение турбулентности, необходимо доказать, что в определенном потоке образуются такие формы возмущающих движений, которые в среднем больше отнимают энергии у главного движения, чем, наоборот, ему отдают. Многочисленные расчеты, выполненные различными исследователями, привели к отрицательному результату. Только Толмину² удалось найти пример (для случая обтекания пластинки), когда, по-видимому, происходит нарастание возмущений. Вычисленное отсюда теоретически критическое значение числа Рейнольдса хорошо

¹Reynolds O., Phil. Trans. Roy. Soc., London, 1895, или Papers, т. II, стр. 535; см. также Lorentz H. A., Abhandlungen über Theoretische Physik, т. I, Leipzig, 1907, стр. 43.

²Tollmien W., Über die Entstehung der Turbulenz. I. Mitteilung, Göttinger, Nachr., Math.-Phys. Klasse, 1929, стр. 21; см. также Schlichting H., ZAMM, т. 13 (1928), стр. 171, и Göttinger, Nachr., Math.-Phys. Klasse, 1933, стр. 181 (здесь подробный библиографический указатель).

совпадает с наблюдаемым значением, однако найденное волновое возмущение, имеющее очень большую длину волны, нельзя рассматривать как турбулентность. Настоящая турбулентность, по-видимому, возникает тогда, когда вследствие каких-либо причин, например, вследствие начальных возмущений, в потоке образуются такие распределения скоростей, которые, подобно поверхностям раздела (см. § 7 гл. II), неустойчивы и приводят к появлению многих маленьких вихрей. Согласно последним работам Толмина¹ для возникновения неустойчивости достаточно, чтобы профиль скоростей имел точку перегиба, при условии, что число Рейнольдса $\frac{w\delta}{\nu}$, где δ есть толщина пограничного слоя, достаточно велико, и притом тем больше, чем круче происходит перегиб профиля. Такие профили скоростей действительно получаются в потоках, в которых давление в направлении движения возрастает². Следовательно, такое возрастание давления действует как фактор, обуславливающий возникновение турбулентности.

Наблюдения показывают, что турбулентность, возникшая вследствие какого-нибудь возмущения, начинает сама собой развиваться дальше вниз по течению. Это ясно видно на снимках, изображенных на рис. 94 и полученных при помощи кинокамеры, двигавшейся параллельно потоку со скоростью продвижения вихрей. Для получения первоначального возмущения было произведено кратковременное отсасывание жидкости через отверстие в стенке (слева, на первом — верхнем снимке). Процесс развития турбулентности до сих пор не получил объяснения³.

¹Tollmien W., Ein allgemeines Kriterium der Instabilität laminarer Geschwindigkeitsverteilungen. Göttinger, Nachr., Math.-Phys. Klasse, Fachgruppe I, т. I (1935), стр. 79.

²См. равенство (17), из которого видно, что направление, в котором давление увеличивается, зависит от знака $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

³Большие успехи в деле изучения турбулентности были достигнуты в СССР благодаря работам А. Н. Колмогорова, М. Д. Миллионщикова, А. М. Обухова и других; см., например: Колмогоров А. Н., Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. Доклады Акад. Наук СССР, т. XXX (1941), № 4; Колмогоров А. Н., Вырождение изотропной турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости. Доклады Акад. Наук СССР, т. XXXI (1941); Миллионщиков М. Д., Вырождение однородной изотропной турбулентности в вязкой несжимаемой жидкости. Доклады Акад. Наук СССР, т. XXII (1939), № 5; Обухов А. М., О распределении масштаба турбулентности в потоках произвольного сечения. Прикл. мат. и мех., т. VI (1942), № 2–3; Минский Е. М., О пульсациях скорости при вполне установившемся течении. Журнал техн. физ., 1940, вып. 19; Ландау Л., К проблеме турбулентности. Доклады Акад.

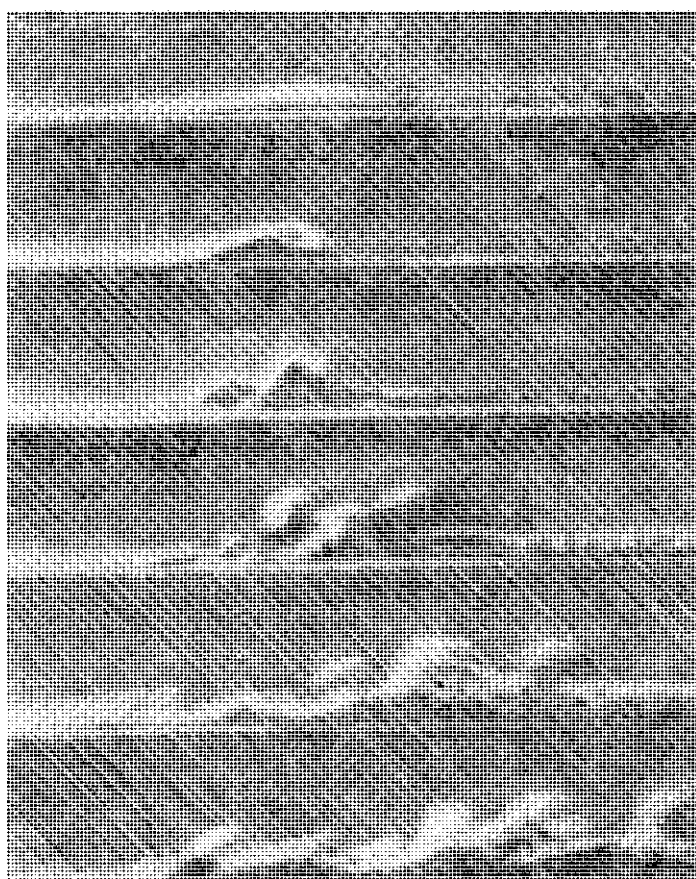


Рис. 94. Распространение турбулентности

d) Что касается состояния течения, при котором турбулентность уже вполне развилась, то по этому поводу ограничимся здесь следующими замечаниями.

В § 14 предыдущей главы было показано, что при течениях пульсациями скорости перенос количеств движения, вызванный пульсациями, создает дополнительные напряжения, например, касательное напряжение

$$\tau' = -\rho \overline{u'v'}, \quad (21)$$

где u' и v' суть пульсационные скорости, т. е. отклонения составляющих скорости u и v от их средних во времени значений $\bar{u}$ и $\bar{v}$. Для того чтобы сделать формулу (21) пригодной для практических вычислений, необходимо заменить в ней пульсационные скорости какими-нибудь другими величинами, связанными с распределением средней скорости. Для этого следует ввести в расчет определенную длину, которую можно понимать либо как диаметр шарообразного скопления частиц жидкости, движущихся как одно целое, либо как путь, который этот шар должен пройти относительно остальной жидкости, чтобы в результате смешения с окружающим турбулентным потоком потерять свою индивидуальность. Заранее нельзя сказать, что обе эти длины в точности равны друг другу, однако можно предполагать, что между ними существует

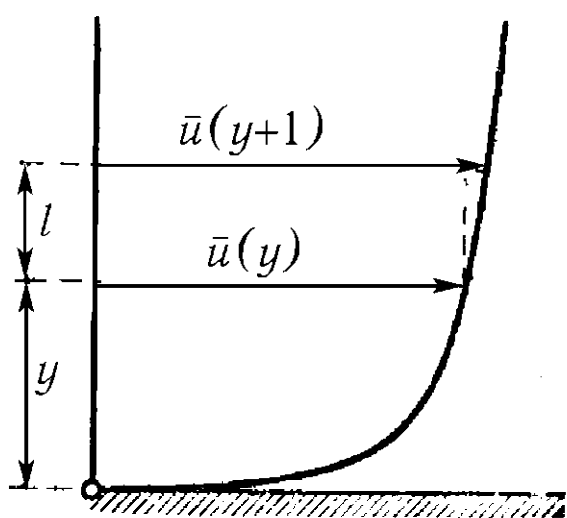


Рис. 95. К выводу формулы для дополнительного касательного напряжения

определенная пропорциональность. Рассмотрим поток, в котором скорость изменяется в направлении, перпендикулярном к линиям тока.

Пусть некоторая масса жидкости из слоя, находящегося от стенки на расстоянии y , перемещается перпендикулярно к направлению потока в слой, находящийся от стенки на расстоянии $y + l$ (рис. 95). Если в первом слое средняя скорость течения равна $\bar{u}(y)$, то вследствие такого перемещения массы жидкости в новое место ее скорость изменится на величину $\bar{u}(y + l) - \bar{u}(y)$, которую в первом приближении можно считать равной $l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$, т. е.

$$\bar{u}(y + l) - \bar{u}(y) = l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}.$$

Эту величину можно рассматривать, если не равной, то по крайней мере пропорциональной пульсационной скорости u' . Что касается пульсационной скорости v' , то для ее оценки предположим, что два жидких шара, попадающих в рассматриваемый слой с разных сторон и движущихся в этом слое друг за другом, сближаются или удаляются друг от друга с относительной скоростью $2l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$. Из этого предположения следует, что пульсационная скорость также должна иметь порядок величины $l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$. Наконец, приступая к составлению среднего значения $\overline{u'v'}$, необходимо установить, какие знаки имеют перемножаемые пары значений u' и v' . Частицы жидкости, переходящие через контрольную поверхность, параллельную стенке, снизу вверх (от стенки), увеличивают свою скорость; наоборот, частицы жидкости, переходящие эту поверхность сверху вниз, уменьшают свою скорость. Отсюда следует, что положительным пульсациям v' соответствуют отрицательные пульсации u' , а отрицательным v' — положительные u' , поэтому в обоих случаях произведение $u'v'$ получается отрицательным. Таким образом, дополнительное напряжение τ' имеет положительный знак и порядок величины $\rho \left(l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2$. Примем неизвестный коэффициент пропорциональности равным единице; такой произвольный выбор этого коэффициента отразится на наших результатах только тем, что величина l останется

пока неопределенной. Следовательно, мы будем иметь:

$$\tau' = \rho \left(l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2.$$

Наконец, для того чтобы эта формула давала для положительного $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ положительное касательное напряжение, а для отрицательного $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ — отрицательное касательное напряжение, перепишем ее в следующем виде:

$$\tau' = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \quad (22)$$

Эта формула, как уже упоминалось, является приближенной. Она показывает, что дополнительные напряжения, возникающие вследствие турбулентного перемешивания, изменяются при изменении скорости пропорционально ее квадрату. Наблюдения показывают, что все гидравлические сопротивления в основном подчиняются этому закону.

Длина l , которую мы будем называть *длиной пути перемешивания*, имеет некоторое родство с длиной l_1 пути свободного пробега молекул в кинетической теории газов. В этой теории перенос количеств движения, вызванный молекулярным движением, рассматривается совершенно так же, как это мы только что сделали для переноса количеств движения, вызванного грубым (молярным) движением жидких шариков. Отклонение скоростей молекул газа, входящих в рассматриваемый слой снизу и сверху, от средней скорости во времени, как и в нашем случае, равно

$$u' = l_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}.$$

Однако скорость v' поперечного переноса молекул газа равна скорости молекулярного движения, а не пропорциональна u' , как в нашем случае. Вследствие этого касательные напряжения, вызываемые молекулярным движением и уже известные нам как напряжения вязкости, пропорциональны первой степени величины $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$. Длина l_1 пути свободного пробега молекул газа обратно пропорциональна плотности, поэтому вязкость газа, величина которой определяется произведением ρl_1 , не зависит от плотности.

По поводу *баланса энергии турбулентного потока* заметим следующее. Система дополнительных напряжений и соответствующих разностей давлений совершает в выделенной области жидкости работу, необходимую для

поддержания внутри этой области (а в случае необходимости — и в соседних областях) турбулентного движения. В рассмотренном простом случае секундная работа, отнесенная к единице объема, равна

$$\tau' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}.$$

Эта работа и делает возможным дальнейшее существование завихренного движения, несмотря на действие вязкости; в конце концов вследствие действия вязкости она превращается в теплоту. Та часть кинетической энергии единицы объема жидкости, которая превращается в единицу времени в теплоту, определяется функцией рассеяния, состоящей из ряда членов вида:

$$\mu \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2}, \quad 2\mu \overline{\frac{\partial u'}{\partial y} \frac{\partial v'}{\partial x}} \quad \text{и т. д.}$$

Следовательно, если ввести в рассмотрение длину λ , являющуюся размером наименьшего вихря, то секундную работу, отнесенную к единице объема, можно принять равной

$$\tau' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \text{число} \cdot \mu \left(\frac{u'}{\lambda}\right)^2,$$

где через u' обозначена для краткости величина $\sqrt{\overline{u'^2}}$. Согласно результатам, полученным выше, можно принять:

$$\tau' \sim \rho u'^2.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda \sim \sqrt{\nu / \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)}.$$

Наконец, полагая

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \sim \frac{u'}{l},$$

мы получим:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\nu l}{u'}}.$$

Эта формула по своей структуре совпадает с соотношением, выведенным ниже в § 5, п. g) для другого турбулентного процесса, с той только разницей, что в то соотношение вместо величины u' входит величина q , а вместо l — величина L .

Обозначив первые три множителя правой части формулы (22) одной буквой A , мы сумеем переписать ее в следующем виде:

$$\tau' = A \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}.$$

Эта формула по своей структуре формально совпадает с формулой

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

для вязкого напряжения. Таким образом, величина

$$A = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (23)$$

имеет размерность вязкости. Однако численное значение величины A превышает численное значение коэффициента вязкости обычно в десятки и даже сотни тысяч раз. Величина A называется *турбулентной вязкостью*¹. Кроме численного значения, она отличается от обычной вязкости еще тем, что она изменяется при переходе от одной точки потока к другой; в частности, при приближении к стенке она стремится к нулю.

е) Турбулентное перемешивание влечет за собой, кроме переноса количеств движения, также перенос всех других «субстанций», содержащихся в движущейся жидкости, например тепла, разных примесей и т. п. Если содержание, например, примеси, не одинаково в различных точках пространства, то части жидкости, движущиеся из мест с более высоким содержанием, уносят отсюда больше примеси; чем сюда поступает с частями жидкости, движущимися из мест с менее высоким содержанием. В результате в среднем получается перенос примеси из мест с высоким ее содержанием в места с низким содержанием. В случае разностей температур такой перенос представляет собой своего рода турбулентную теплопроводность, в случае разности концентраций — своего рода турбулентную диффузию. Так как теплосодержание в единице массы жидкости равно $c_p \vartheta$, где ϑ есть температура, то из сказанного следует, что при турбулентном перемешивании в единицу времени и на единицу площади происходит перенос тепла, равный

$$Q = -c_p \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial y} = -c_p A_Q \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial y}.$$

Величина $c_p A_Q$ называется *коэффициентом турбулентной теплопроводности*. В случае, когда в потоке имеется химическая или механическая примесь с концентрацией c , при турбулентном перемешивании

¹Впервые понятие турбулентной вязкости в виде величины $\rho \epsilon$ встречается у Ж. Б у с с и н е с к а в его работе *Théorie de l'écoulement tourbillonnant* (Paris, 1897).

в единицу времени и на единицу площади возникает перенос массы примеси, равный

$$M = -A_M \frac{\partial \bar{c}}{\partial y}.$$

Так как механизм переноса свойства вещества или примеси к нему, очевидно, отнюдь не тождественен с механизмом переноса количеств движения, то возникает вопрос, совпадают или не совпадают между собой численные значения коэффициентов A_Q (или A_M) и A_τ . При решении этого вопроса выяснилась необходимость различать турбулентность, обусловленную трением около стенок, от турбулентности, возникшей из свободной поверхности раздела. Для последнего вида турбулентности соответствующие опыты были произведены Фэджем (A. Fage) и Фокнером (V. M. Falkner) по предложению Тэйлора¹. Измеряя одновременно профиль скоростей и профиль температур в потоке жидкости позади обтекаемого нагретого стержня², они получили, что

$$\frac{A_Q}{A_\tau} = 2.$$

К тому же результату привели новые измерения Рейхардта³ над смешением струи воздуха с воздухом другой температуры. Что касается турбулентности первого вида, т. е. турбулентности в слоях жидкости, прилегающих к стенке, то до сих пор обычно принимали, что $A_Q = A_\tau$, и это предположение не приводило к противоречиям с измерениями теплопередачи. Однако в последнее время Рейхардт в своем теоретическом исследовании о законах теплопередачи в турбулентных слоях жидкости вблизи стенок⁴ показал, что из одновременных измерений профиля скоростей и профиля температур, произведенных Элиасом (F. Éliás)⁵ около обтекаемых пластинок и Лоренцом (H. Lorenz)⁶ в трубах, следует, что

$$\frac{A_Q}{A_\tau} = \text{от } 1,4 \text{ до } 1,5$$

(см. по этому поводу также стр. 538). Очевидно, что такого же рода соотношения должны иметь место и между A_M и A_τ .

Различие в соотношениях между A_Q и A_τ для турбулентности обоих видов объясняется тем, что в турбулентных потоках около стенок преобладают,

¹ Taylor G. J., Proc. Roy. Soc., т. 135 (1932), стр. 702 [имеется в переводе на русский язык в сборнике «Проблемы турбулентности», Москва, 1936 (Прим. пер.)].

² См. § 14, п. с).

³ Reichardt H., VDI-Forschungsheft 414 (1942) (см. рис. 6).

⁴ ZAMM, т. 20 (1940), стр. 297 (см. стр. 327).

⁵ ZAMM, т. 9 (1929), стр. 434, также в Abh. d. Aerodyn. Inst. Aachen, вып. 9 (1930).

⁶ Z. f. techn.-Physik, т. 15 (1934), стр. 376.

по-видимому, вихри с осями, параллельными направлению потока, а в свободных турбулентных потоках — наоборот, преобладают вихри с осями, перпендикулярными к направлению потока. Вихри первого рода не изменяют средней скорости потока, в то время как вихри второго рода значительно влияют на нее таким образом, что профиль скоростей получается острее, чем профиль средних температур или средней концентрации. Опыты Гран-Ольсона⁷ над распределением температуры и скорости позади нагреваемой решетки из стержней также показали, что теплопередача при свободной турбулентности значительно сильнее переноса количества движения, и поэтому разности температур выравниваются значительно быстрее, чем разности скоростей.

§ 5. Особенности турбулентного движения. Длина пути перемешивания l в разных местах турбулентного потока вообще неодинаковая. До настоящего времени не имеется теории, которая позволяла бы вычислить эту длину в любом случае. Однако в некоторых особых случаях можно найти для нее приближенную оценку, причем получающиеся результаты хорошо подтверждаются наблюдениями. К числу таких случаев принадлежат, во-первых, движения, при которых действительные касательные напряжения, возникающие вследствие вязкости, пренебрежимо малы по сравнению с дополнительными касательными напряжениями, зависящими от турбулентности, и, во-вторых, движения, при которых можно не учитывать влияния вязкости на длину l . Последний случай равносителен предположению, что турбулентность возможна в жидкости, лишенной трения. При больших числах Рейнольдса такое предположение является вполне оправданным.

а) Когда струя, для которой число Рейнольдса достаточно велико, смешивается с окружающей неподвижной жидкостью, можно с большой правдоподобностью считать, что длина пути перемешивания в каждом поперечном сечении струи пропорциональна ширине струи b в этом сечении, т. е.

$$l = \alpha b.$$

Под b можно понимать, например, радиус основания параболического или параболоидального сегмента, изображающего распределение скоростей в рассматриваемом сечении и притом такого, что определяемые им максимальная скорость и расход жидкости совпадают с соответствующими значениями для действительного потока. Такое условие необходимо, так как действительный поток переходит диффузно без заметной границы во внешнюю жидкость. Соответствующие вычисления дают для коэффициента α значение, близкое к 0,125.

⁷Теорию этих явлений дал Тэйлор [Proc. Roy. Soc. A., т. 135 (1932), см. стр. 685].

Наблюдения показывают, что такая свободная струя, вытекающая через отверстие в стенке в достаточно большое пространство, наполненное неподвижной жидкостью, расширяется так, что за исключением ближайшей окрестности отверстия ширина струи увеличивается весьма точно пропорционально расстоянию от отверстия. Скорость струи при ее расширении уменьшается по мере удаления от отверстия, но давление во всей струе остается приблизительно таким же, как и в окружающем ее пространстве¹. Следовательно, уменьшение скорости с удалением от отверстия обуславливается исключительно вязкими напряжениями, причем закон уменьшения отнюдь не таков, что соблюдается равенство расхода во всех поперечных сечениях струи. Такого равенства и не может быть, так как по мере расширения струи она вовлекает в себя все новые и новые массы неподвижной жидкости. Но зато вследствие постоянного давления количество движения струи, равное

$$J = \rho \iint u^2 dF,$$

остается постоянным (ср. с § 13 предыдущей главы). Обозначая максимальную скорость в поперечном сечении струи через u_1 , мы можем написать:

$$J = \text{число} \cdot \rho u_1^2 \cdot \pi b^2 = \text{const},$$

откуда следует, что скорость u_1 изменяется пропорционально $\frac{1}{b}$, а так как ширина струи b пропорциональна расстоянию x от отверстия, то

$$u_1 \sim \frac{1}{x}.$$

Картина течения изображена на рис. 96.

¹ При объяснении принципа действия обычного пульверизатора часто утверждают, что в струе воздуха, вытекающей из горизонтального колена пульверизатора, при уменьшении ее скорости происходит, в соответствии с теоремой Бернулли, увеличение давления; поэтому в том месте, где струя вытекает, образуется пониженное, по сравнению с атмосферным, давление, что и приводит к всасыванию жидкости через вертикальное колено пульверизатора. Однако такое объяснение неверно: теорема Бернулли справедлива только при отсутствии трения, между тем как в струе воздуха, вытекающей из пульверизатора, трение играет существенную роль. В действительности всасывание жидкости происходит потому, что вертикальное колено пульверизатора несколько вдается в струю воздуха, вытекающую из горизонтального колена, следовательно, происходит обтекание этого колена и поэтому здесь скорость струи увеличивается, а давление, наоборот, понижается; это и приводит к всасыванию жидкости. В расширяющейся же части струи давление имеет такую же величину, как и в окружающем неподвижном воздухе.

Такая связь между b и u_1 очень хорошо согласуется с формулой (22), выведенной в предыдущем параграфе для дополнительного касательного напряжения. В самом деле, исходя из этой формулы, можно не только вывести найденную связь между b и u_1 , но и вычислить распределение скоростей, причем остается произвольной только постоянная α или какая-нибудь другая, аналогичная постоянной α . Такого рода вычисление было выполнено Толмином¹. Таким образом, описанное выше поведение расширяющейся струи служит доказательством допустимости применения формулы (22). Не приводя вычислений Толмина, покажем, как можно получить из формулы (22) связь между b и u_1 путем приближенных оценок.

Как и выше, примем, что $l = \alpha b$. Из теоремы о количестве движения мы имеем:

$$u_1 b = \text{const} = C.$$

Полагая приближенно, что

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2 \frac{u_1}{b},$$

и подставляя это значение в формулу (22), мы получим среднее значение дополнительного касательного напряжения по поперечному сечению струи:

$$\tau'_m = -4\rho l^2 \left(\frac{u_1}{b} \right)^2 = -4\alpha^2 \rho u_1^2.$$

Сила на единицу объема равна, согласно равенству (6), $\frac{\partial \tau'}{\partial y}$. Напряжение τ' изменяется от нуля в середине струи до максимума на некотором расстоянии от середины, а затем уменьшается вновь до нуля, следовательно, производная $\frac{\partial \tau'}{\partial y}$ сначала отрицательна, а затем положительна. В первой области происходит замедление главного течения, а во второй области — ускорение увлекаемого струей внешнего воздуха. Для центральной части потока можно принять, что

$$\frac{\partial \tau'}{\partial y} \sim 2 \frac{\tau'_m}{b}.$$

Следовательно, применяя к единице объема этого потока уравнение: масса, умноженная на ускорение, равна силе, мы получим:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \tau'}{\partial y} \sim -8\rho \frac{\alpha^2 u_1^2}{b}.$$

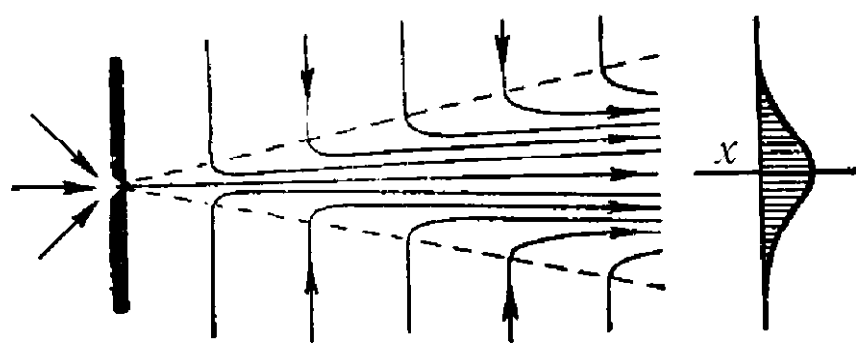


Рис. 96. Центральные линии тока расширяющейся струи воздуха

¹Tollmien W., Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge, ZAMM, т. 6 (1926), стр. 468.

В левой части этого уравнения мы можем заменить u на u_1 ; тогда мы получим

$$\frac{du_1}{dx} \sim -8 \frac{\alpha^2 u_1^2}{b}.$$

Подставляя сюда

$$u_1 = \frac{C}{b}$$

(на основании теоремы о количестве движения) и

$$\frac{du_1}{dx} = -\frac{C}{b^2} \frac{db}{dx},$$

мы найдем:

$$\frac{db}{dx} \sim 8\alpha^2,$$

следовательно,

$$b \sim 8\alpha^2 x,$$

что хорошо согласуется с экспериментальными результатами, согласно которым $b = \frac{x}{8}$.

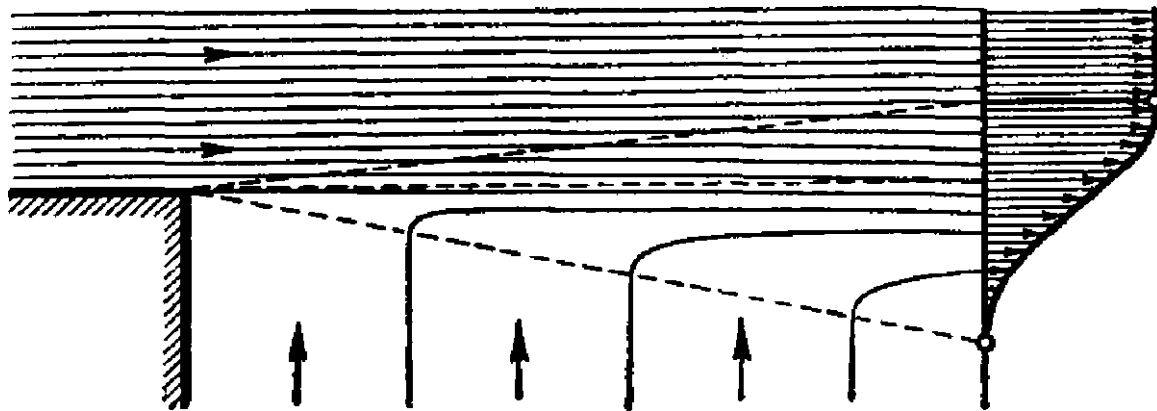


Рис. 97. Размыв края струи

Другим не менее важным случаем, когда можно дать оценку для длины пути перемешивания, является размыв края параллельной струи (рис. 97). В этом случае $u_1 = \text{const}$. По-прежнему полагая, что $l = \alpha b$, мы получим для среднего касательного напряжения значение

$$\tau'_m \sim \alpha^2 \rho u_1^2 = \text{const}.$$

Потеря количества движения струи (на единицу толщины потока в направлении, перпендикулярном к плоскости рисунка) пропорциональна $\rho u_1^2 b$, а соответствующее сопротивление W (также на единицу толщины потока в том же направлении) пропорционально $\tau_m x$. Следовательно, как и в предыдущем случае,

$$b \sim \alpha^2 x.$$

Если струя не выбрасывается, а, наоборот, всасывается из пространства, в котором жидкость неподвижна, то вместо потери количества движения будет иметь место равное по величине приращение количества движения. Практически важно знать наклон края невозмущенной части струи к границе возмущенной области; его можно принять равным $1 : 10$.¹

б) При движении жидкости вдоль стенки длина пути перемешивания при приближении к стенке должна стремиться к нулю; это следует непосредственно из самого определения понятия длины пути перемешивания. Отсюда вытекает, что величина $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ внутри потока очень мала, но вблизи стенки принимает большие значения. На рис. 98 показано распределение скоростей при турбулентном течении, а на рис. 99 — для сравнения — при ламинарном течении.

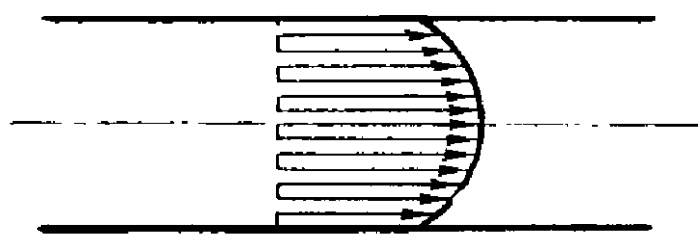


Рис. 98. Распределение скоростей по поперечному сечению трубы при турбулентном течении

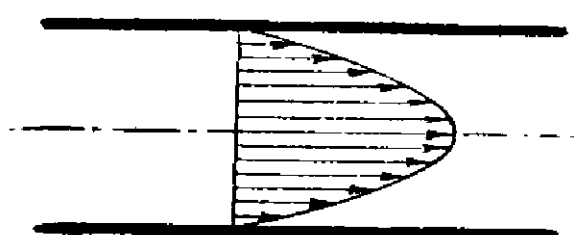


Рис. 99. Распределение скоростей по поперечному сечению трубы при ламинарном течении

Ближайший к стенке слой жидкости прилипает к ней также при турбулентном течении; поэтому вблизи нее сначала образуется тонкий слой, в котором жидкость движется ламинарно, причем так, что при гладких стенках имеет место равенство

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\tau_{ст}}{\mu},$$

¹Этот, а также другие случаи рассмотрены у Толмина [Tollmien W., Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge, ZAMM, т. 6 (1926), стр. 468]; см. также Prandtl L., Über die ausgebildete Turbulenz. Verh. d. 2 internat. Congr. f. techn. Mech. (1926), Zürich 1927, стр. 62. Рейхардт в своей работе [VDI-Forschungsheft № 414 (1942)] ставит перед собой задачу вычислить все важнейшие факторы, определяющие турбулентное движение, из результатов опыта и выполняет ее на основе собственных измерений для случая свободной турбулентности. Полученная таким образом теория свободной турбулентности изложена в ZAMM, т. 21 (1941), стр. 257. Другая предпосылка для развития теории турбулентности предложена Прандтлем и проверена на некоторых примерах Гертлером [Görtler H., ZAMM, т. 22 (1942), стр. 241 и 244].

где $\tau_{\text{ст}}$ есть касательное напряжение на стенке. При более высоких числах Рейнольдса, когда внутри жидкости происходит интенсивное перемешивание, касательное напряжение $\tau_{\text{ст}}$ получается весьма большим, вследствие чего возрастание величины $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ происходит необычайно быстро и, следовательно, ламинарный пограничный слой получается очень тонким. Поэтому при наблюдении турбулентных течений на первый взгляд кажется, что конечная скорость течения имеет место уже на самой стенке.

Для теоретического исследования соотношений, существующих при турбулентном движении вдоль стенки, проще всего принять, что во всем потоке касательное напряжение имеет постоянное значение¹. Если оно положительно, то положительна также величина $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$, поэтому в формуле (22) можно отбросить черточки, обозначающие абсолютное значение. Тогда полное касательное напряжение, получающееся от сложения среднего вязкого напряжения и дополнительного касательного напряжения, возникающего вследствие турбулентности, будет равно

$$\tau = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \rho l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2. \quad (24)$$

Первый член играет роль только на очень малых расстояниях от стенки, на более же далеких расстояниях преобладающую роль играет второй член. Однако при сколько-нибудь значительных числах Рейнольдса второй член во много раз больше первого также вблизи стенки; в этом случае, как уже упоминалось, первым членом можно пренебречь. Отбрасывая его и извлекая квадратный корень из обеих частей уравнения (24), мы получим:

$$\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \quad (25)$$

Из структуры правой части этого уравнения сразу видно, что величина $\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ имеет размерность скорости. Поэтому для сокращения записи

¹ В действительных потоках касательное напряжение τ , как правило, непрерывно уменьшается при удалении от стенки (в трубе на оси $\tau = 0$). Однако формулы, полученные на основе предположения, что $\tau = \text{const} = \tau_{\text{ст}}$ дают все же весьма хорошее приближение к действительности. Это объясняется тем, что основная часть изменения скорости происходит непосредственно около стенки или вблизи нее. Для труб формулы (28) и (32), которые будут выведены ниже, весьма точно оправдываются почти до самой оси трубы, так как длина l пути перемешивания при удалении от стенок становится меньше величины xy (см. ниже).

будем обозначать ее одной буквой v_* и называть *динамической скоростью*. Согласно сказанному в § 4, динамическая скорость v_* имеет порядок величины турбулентных пульсаций u' и v' (точнее, $v_* = \sqrt{|u'v'|}$). При сделанном выше предположении о постоянстве τ величина v_* также является постоянной.

Пусть рассматриваемый поток ограничен двумя гладкими стенками, из которых одна совпадает с плоскостью $y = 0$ и безгранично простирается в обе стороны оси x , а вторая находится на таком расстоянии от первой, что совершенно не влияет на состояние течения вблизи нее, следовательно, вторую стенку можно считать удаленной от первой на бесконечное расстояние. Тогда скорость $\bar{u}$ будет зависеть только от y , поэтому вместо $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ можно писать $\frac{d\bar{u}}{dy}$; кроме того, мы не будем ставить черты над u , так как в дальнейшем о пульсациях не будет речи.

Теперь нам необходимо сделать правильное, с точки зрения размерности, предположение о зависимости длины пути перемешивания l от факторов, определяющих поток. Допустим, что вязкость не оказывает никакого влияния на величину l (это подтверждается результатами наблюдений); тогда единственной правильной, с точки зрения теории размерностей, формулой для l будет

$$l = \kappa y,$$

где κ есть безразмерное число. Для рассматриваемой задачи о турбулентном движении это число является существенной (универсальной) постоянной. Подставляя $l = \kappa y$ в уравнение (25), мы получим:

$$v_* = \kappa y \frac{du}{dy},$$

откуда, принимая во внимание, что $v_* = \text{const}$ и интегрируя, найдем:

$$u = v_* \left(\frac{1}{\kappa} \ln y + C \right). \quad (26)$$

При больших числах Рейнольдса такой закон изменения скорости хорошо согласуется с наблюдениями, которые для числа κ дают значение 0,417. Правда, при $y = 0$ формула (26) дает для u значение $-\infty$ вместо действительного значения 0, однако это вполне понятно, так как в наших приближенных вычислениях мы пренебрегли членом $\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ в уравнении (24), в то время как именно этот член играет преобладающую роль вблизи стенок. Если бы мы сохранили в наших вычислениях

этот член, то, составляя выражение для длины пути перемешивания l , мы должны были бы включить в нее еще второе слагаемое — длину

$$\frac{\mu}{\rho v_*} = \frac{\nu}{v_*}.$$

Постоянную интегрирования C удобнее заменить другой постоянной, учтя при этом то обстоятельство, что в непосредственной близости от стенок играет роль вязкость. Очевидно, что выражение в скобках в правой части формулы (26) должно быть безразмерным числом, и это число не должно зависеть от применяемой системы единиц. Для того чтобы придать этому выражению безразмерный вид, необходимо вычесть из $\ln y$ логарифм упомянутой выше длины $\frac{\nu}{v_*}$, следовательно, необходимо принять, что

$$C = C_1 - \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\nu}{v_*}.$$

Тогда число C_1 будет второй универсальной постоянной. Подставляя найденное значение C в формулу (26), мы получим:

$$u = v_* \left(\frac{1}{\kappa} \ln \frac{yv_*}{\nu} + C_1 \right). \quad (27)$$

Так как скорость быстрее всего изменяется в непосредственной близости от стенок, то, подставляя в формулу (27)

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_{ст}}{\rho}},$$

мы сделаем ее пригодной для приближенных вычислений также в тех случаях, например, при движении в трубах, когда касательное напряжение τ изменяется вместе с расстоянием y от стенки. Как показывают измерения, получающиеся результаты довольно хорошо совпадают с действительными значениями скорости.

Если в этих случаях откладывать измеренные значения $\frac{u}{v_*}$ как ординаты, а значения $\log_{10} \frac{yv_*}{\nu}$ — как абсциссы, то все полученные точки расположатся вдоль или вблизи некоторой прямой. Составляя уравнение этой прямой, можно определить значения κ и C_1 . Никурадзе¹, работав таким путем свои измерения, выполненные в прямых трубах

¹ Nikuradze J., Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Röhren, VDI-Forschungsheft № 356 (1932). [Имеется в переводе на русский язык в сборнике «Проблемы турбулентности», Москва, 1936. (Прим. пер.)]

с гладкими стенками, получил для κ и C_1 значения:

$$\kappa = 0,40, \quad C_1 = 5,5.$$

Следовательно, если перейти от натурального логарифма к десятичному ($\ln x = 2,3026 \lg x$), то получится следующая практическая формула:

$$u = v_* \left(5,75 \lg \frac{yv_*}{\nu} + 5,5 \right). \quad (28)$$

Если использовать результаты измерений только для точек, близких к стенкам, то это даст приближенную формулу для идеального случая, когда $\tau = \text{const}$. В этом случае измерения дают для κ , как уже упоминалось выше, значение 0,417, а для C_1 — значение 5,84, и практическая формула для вычисления скорости u принимает вид:

$$u = v_* \left(5,52 \lg \frac{yv_*}{\nu} + 5,84 \right). \quad (29)$$

с) При небольших значениях отношения длины y к длине $\frac{\nu}{v_*}$ влияние вязкости на распределение скоростей проявляется, во-первых, непосредственно, поскольку она входит в первое слагаемое $\mu \frac{d\bar{u}}{dy}$ уравнения (24), а во-вторых, косвенно, поскольку длина пути перемешивания l зависит от вязкости. Так как при допущении, что $\tau = \text{const}$, единственными безразмерными комбинациями всех остальных величин, от которых зависит распределение скоростей, являются $\frac{u}{v_*}$ и $\frac{yv_*}{\nu}$, то очевидно, что совместное влияние обоих указанных обстоятельств должно выражаться в том, что при $\tau = \text{const}$ отношение $\frac{u}{v_*}$ есть универсальная функция от $\frac{yv_*}{\nu}$. Оказывается, что именно такая зависимость между $\frac{u}{v_*}$ и $\frac{yv_*}{\nu}$ существует в действительности. В непосредственной близости от стенки образуется, как уже упоминалось, ламинарный пограничный слой, в котором

$$\tau = \frac{\mu u}{y}.$$

Так как $\tau = \rho v_*^2$, то отсюда следует, что

$$\frac{u}{v_*} = \frac{yv_*}{\nu}.$$

Для турбулентной области, соответствующей значениям $\frac{yv_*}{\nu}$, равным приблизительно от 40 до 600, получается степенная зависимость

$$\frac{u}{v_*} = 8,7 \left(\frac{yv_*}{\nu} \right)^{1/7}. \quad (30)$$

Следовательно, скорость u пропорциональна корню седьмой степени из y , что для движения в трубах хорошо подтверждается примерно до чисел Рейнольдса $R = 100\,000$. При больших числах Рейнольдса скорость u приближенно пропорциональна сначала корню 8, а затем корням 9 и 10-й степени из $\frac{yv_*}{\nu}$. Однако следует иметь в виду, что эти зависимости являются лишь приближенными выражениями более точной зависимости (29).

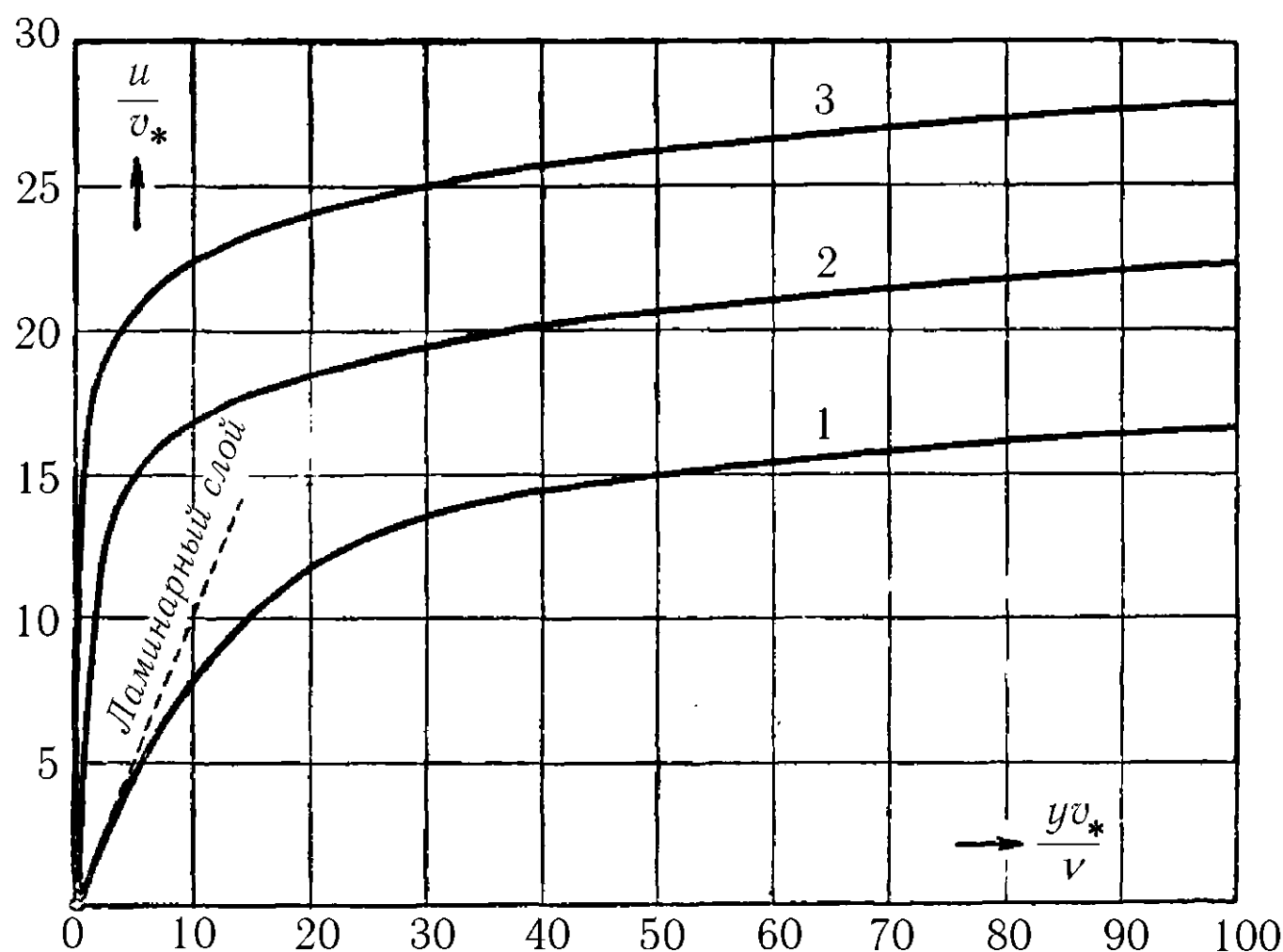


Рис. 100. Универсальный закон распределения скоростей

Результат экспериментального определения универсального распределения скоростей для $\tau = \text{const}$ изображен на рис. 100. Числа, отмеченные вдоль оси абсцисс, относятся только к кривой 1; для кривых 2 и 3 эти числа следует умножить соответственно на 10 и 100. Кривые 2 и 3 можно рассматривать также как такие распределения скоростей, которые соответствуют вязкости, в 10 и 100 раз меньшей, чем для кривой 1, но при условии одинакового касательного напряжения на стенке. Если на оси абсцисс откладывать вместо значений $\frac{yv_*}{\nu}$ их логарифмы, то универсальное распределение скоростей для области, охваченной экспериментом, примет вид, изображенный сплошной кривой на рис. 101. Мы видим, что, начиная примерно от $\frac{yv_*}{\nu} = 50$, эта кривая превращается в прямую линию, которую можно экстраполиро-

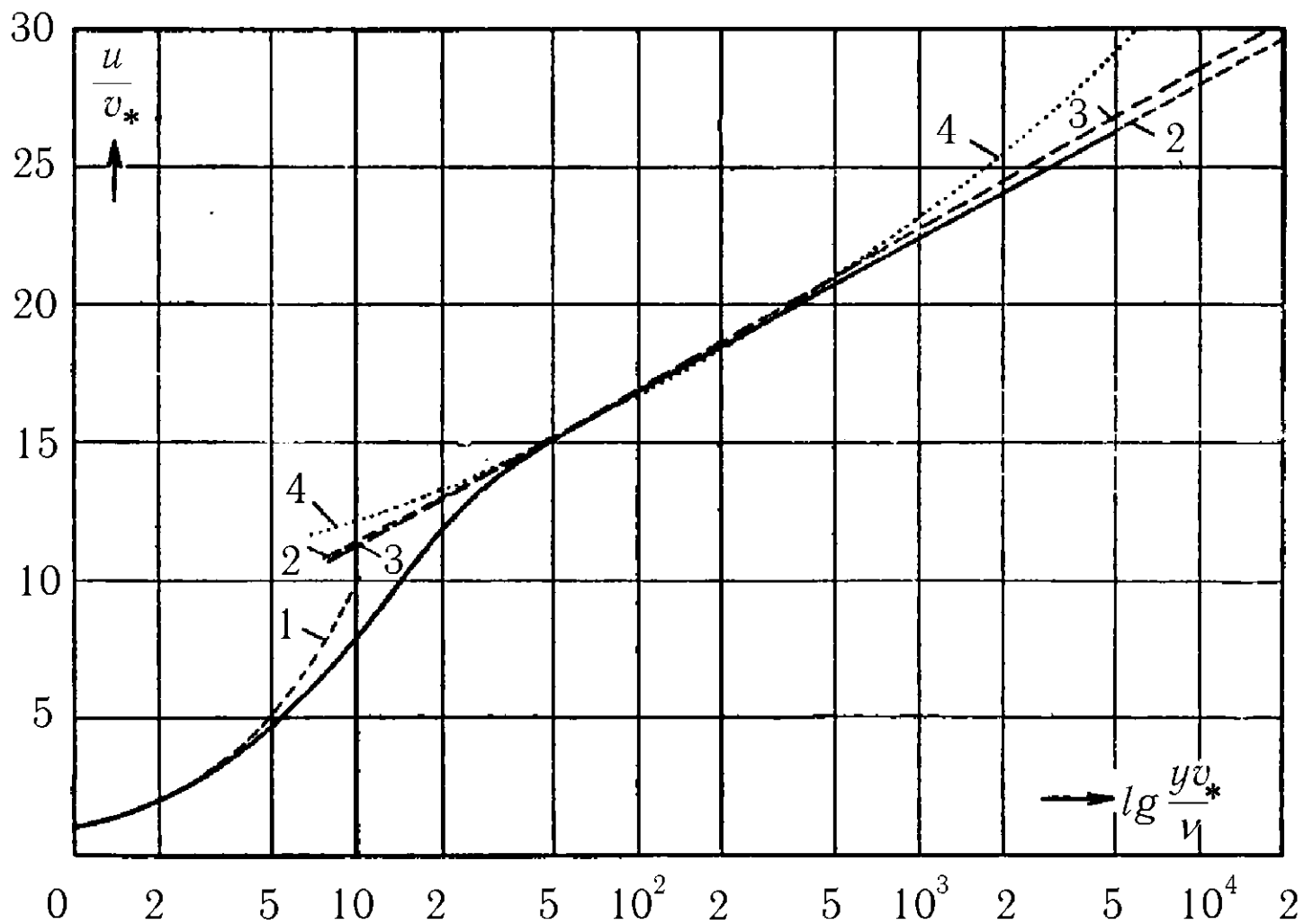


Рис. 101. Универсальный закон распределения скоростей при логарифмическом масштабе вдоль оси x

вать до сколь угодно больших значений $\frac{yv_*}{\nu}$. Штриховая кривая 1 на рис. 101 изображает закон ламинарного движения

$$\frac{u}{v_*} = \frac{yv_*}{\nu},$$

кривая 2 — закон движения согласно уравнению (29), а кривые 3 и 4 — законы движения согласно уравнениям (28) и (30).

Заметим, что уравнения (28), (29) и (30) можно решить относительно v_* и таким путем определить для заданных значений u и y касательное напряжение на стенке. Например, из уравнения (30) мы получим:

$$\tau_{ст} = \rho v_*^2 = (8,7)^{-7/4} \cdot \rho u^{7/4} \cdot \left(\frac{\nu}{y}\right)^{1/4} = 0,0225 \rho u^2 \left(\frac{\nu}{uy}\right)^{1/4}. \quad (31)$$

К такому же соотношению приводит эмпирический закон, найденный Блазиусом для потери давления в гладких трубах [см. уравнение (66) в § 11].

Исторически уравнения (27)–(31) были получены в иной последовательности, чем это сделали мы, из методических соображений, в приведенном

выше изложении. Прежде всего был найден закон Блазиуса, из которого было выведено уравнение (31). Из этого уравнения для $\tau_{ст} = \text{const}$ было получено соотношение, согласно которому u пропорционально $y^{1/7}$.¹ Следующим шагом, который привел к нашему уравнению (27), было исследование Кармана². В этом исследовании Карман, исходя из соображений о подобии, постулирует, что в потоках с числом Рейнольдса, настолько большим, что можно пренебрегать влиянием вязкости, процессы турбулентного перемешивания происходят везде так, что отличаются друг от друга только масштабом длины и масштабом времени (при таком допущении масштаб длины идентичен, с точностью до некоторого множителя, нашей длине пути перемешивания, а масштаб времени — пропорционален величине $1 : \frac{du}{dy}$). Затем из уравнений Эйлера Карман³ выводит соотношение

$$l = \kappa \left| \frac{du}{dy} : \frac{d^2u}{dy^2} \right|,$$

которое позволяет ему решить численно ряд задач. Для случая $\tau = \text{const}$, рассмотренного выше в пункте b), по Карману

$$\frac{du}{dy} = \frac{\text{const}}{y},$$

следовательно,

$$\left| \frac{du}{dy} : \frac{d^2u}{dy^2} \right| = y,$$

т. е. соотношение Кармана совпадает с нашим соотношением $l = \kappa y$.

d) Соображения, которые привели нас к уравнению (26), применимы также к турбулентным потокам вдоль шероховатой стенки, причем получается только другое значение для постоянной интегрирования C . В этом случае к тем длинам, с которыми мы имели дело выше, присоединяется еще одна длина — средняя высота k бугорков шероховатости, так называемая *абсолютная шероховатость*, и поэтому возникает вопрос, какую роль играет по сравнению с этой длиной длина $\frac{\nu}{v_*}$. Очевидно, что сравнительная роль этих длин определяется отношением $\frac{kv_*}{\nu}$,

¹См. v. K á r m á n Th., ZAMM, т. I (1921), стр. 233, а также P r a n d t l – B e t z, Ergebn. d. AVA, т. 3 (1927), стр. 1.

²Göttinger Nachrichten, 1930, стр. 58, и Verhandlungen. d. III Int. Kongr. f. tech. Mechanik in Stockholm (1930), т. I, стр. 85.

³См. D u r e n d, Aerodynamic Theory, т. III, стр. 132. [имеется в переводе на русский язык: Аэродинамика, под общ. редакцией В. Дюренда, т. III, Москва, 1939. (Прим. пер.)]

которое можно рассматривать как число Рейнольдса для отдельного бугорка шероховатости. Если отношение $\frac{kv_*}{\nu}$ достаточно велико, то тогда влияние длины $\frac{\nu}{v_*}$ незначительно по сравнению с влиянием длины k , и таким же путем, как в пункте б) при выводе уравнения (27), мы получим, что

$$C = C_2 - \frac{1}{\varkappa} \ln k;$$

следовательно,

$$u = v_* \left(\frac{1}{\varkappa} \ln \frac{y}{k} + C_2 \right), \quad (32)$$

или, заменяя натуральный логарифм десятичным,

$$u = v_* \left(5,75 \lg \frac{y}{k} + C_2 \right). \quad (33)$$

При небольших значениях отношения $\frac{kv_*}{\nu}$ величина C_2 является уже не постоянной, а функцией от $\frac{kv_*}{\nu}$, которая для очень малых значений $\frac{kv_*}{\nu}$ принимает вид:

$$C_1 + \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{kv_*}{\nu},$$

в связи с чем уравнение (32) переходит в уравнение (27). Это означает, что трубы с слабой шероховатостью можно рассматривать как гидравлически гладкие.

Эти соотношения хорошо подтверждаются измерениями Никурадзе¹, произведенными над движением в трубах, стенки которых были оклеены песчинками различного диаметра. Для значений $\frac{kv_*}{\nu} < 4$ трубы вели себя как практически гладкие; для значений $\frac{kv_*}{\nu} > 80$ кинематическая вязкость не оказывала никакого влияния, следовательно, соблюдалось уравнение (32). Песок, применявшийся для склеивания стенок труб, просеивался через два сита с разной шириной отверстия. Принимая величину k равной ширине отверстий более грубого сита, Никурадзе получил для постоянной C_2 значение 8,5. Из уравнения (32) следует, что для заданного значения $\frac{y}{k}$ динамическая скорость v_* пропорциональна u , следовательно, $\tau_{ст}$ пропорционально u^2 (см. также § 11).

При шероховатости, встречающейся в обычных технических условиях, в отличие от шероховатости, созданной специально для лабораторных исследований, отдельные бугорки имеют очень различную высоту; кроме того,

¹Strömungsgesetze in rauhen Röhren, VDI-Forschungsheft, № 361 (1933).

форма этих бугорков очень различная, и поэтому обычно невозможно указать для абсолютной шероховатости k достаточно надежное значение. В таком случае можно путем измерения определить постоянную C в уравнении (26) и затем из соотношения

$$C = 8,5 - 5,75 \lg k_s$$

вычислить *шероховатость k_s эквивалентного песка*. Опыты Пешке¹ показали, что для естественного ветра над местностью, поросшей растительностью, имеющей высоту k , шероховатость эквивалентного песка равна $k_s = 4k$.² Это означает, что если под k понимать высоту растительного покрова, то в уравнении (32) постоянную C_2 надо уменьшить приблизительно до значения 5,0.

В технических условиях шероховатость стенок, как уже было сказано, состоит обычно из бугорков очень различной высоты и формы. Вследствие этого предельное значение kv_* , при котором такие стенки ведут себя как гидравлически гладкие, ниже, чем для стенок с равномерной шероховатостью; наоборот, предельное значение $\frac{kv_*}{\nu}$, при котором исчезает влияние вязкости, выше, чем при равномерной шероховатости³.

Некоторое сходство с шероховатостью стенок имеет так называемая *волнистость*, состоящая из отдельных пологих возвышений на поверхности стенок. Такие волнистые возвышения не вызывают отрыва потока от них (см. следующие параграфы), но, несмотря на это, все же значительно повышают сопротивление⁴. Закономерности, имеющие место для течений вдоль волнистых стенок, сходны с закономерностями для течений вдоль гладких стенок; в частности, при умеренных числах Рейнольдса касательное напряжение вычисляется по формуле, аналогичной формуле (31), но с несколько большим численным коэффициентом.

е) Опыты показали, что в пограничном слое, образующемся около пластинки, поставленной параллельно направлению потока (см. рис. 93), движение при достаточно больших числах Рейнольдса делается турбулентным. Для оценки толщины пограничного слоя можно воспользо-

¹Paeschke W., Диссертация, Göttingen, 1937, выдержки в Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre, т. 24 (1937), стр. 163.

²При густой растительности (например, хлебные злаки) за абсолютную шероховатость следует принимать разность высот самых высоких и самых низких растений. Однако при определении шероховатости эквивалентного песка k_s была введена, из соображений удобства измерений, не разность, а полная высота зерен песка, точнее, ширина отверстий сита. Этим и объясняется, почему шероховатость эквивалентного песка получается приблизительно в четыре раза большей, чем разность высот растительного покрова.

³О подробностях см., например, Schultz – Grunow, Jahrb. d. Schiffbautechn.-Ges., т. 39 (1938), стр. 176.

⁴См., например, Hopf u. Fromm, ZAMM, т. 3 (1923), стр. 329 и 339, и Hopf, Handb. d. Physik, т. VII, стр. 146.

ваться, как и при ламинарном пограничном слое, теоремой о количестве движения, но при этом следует исходить из закона турбулентного трения, выраженного уравнением (31). Соответствующие вычисления показывают, что толщина пограничного слоя δ пропорциональна $x^{4/5}$, т. е.

$$\delta \sim x^{4/5},$$

где x есть расстояние от переднего края пластинки, а сопротивление пропорционально

$$W \sim \frac{\rho w^2}{2} \left(\frac{wl}{\nu} \right)^{-1/5}.$$

Последнее соотношение, как и исходное уравнение (31), применимо только для ограниченной области чисел Рейнольдса; при больших числах Рейнольдса оно должно быть заменено другими соотношениями (см. § 15). Если на передней части пластинки течение остается ламинарным, что имеет место при заостренном крае пластинки, то сопротивление получается несколько меньше, чем по указанной выше формуле, притом тем меньше, чем больше та часть пластинки, на которой течение остается ламинарным¹.

При входе в трубу потока жидкости с большим числом Рейнольдса возникают явления, сходные с теми, которые происходят при обтекании пластинки, установленной параллельно направлению потока. Если поток жидкости, втекающий в трубу, более или менее свободен от возмущений, то длина l отрезка трубы, на котором течение остается еще ламинарным, определяется из соотношения

$$\frac{wl}{\nu} = 300\,000,$$

или, в иной записи:

$$\frac{l}{d} = \frac{300\,000}{\frac{wd}{\nu}} = \frac{300\,000}{R}.$$

f) Рассмотрим поток, движение которого происходит в основном в горизонтальном направлении, и пусть в этом потоке плотность среды сильно уменьшается снизу вверх. Такое уменьшение плотности имеет место, например, в потоке воздуха, температура которого кверху увеличивается, или в потоке, образованном из слоя раствора сахара над слоем раствора соли. В потоке с таким распределением плотности турбулентное перемешивание приводит к тому, что более тяжелые

¹См., например, Prandtl L., *Ergebn. d. AVA*, т. 3 (1927), стр. 4 и 87, а также т. 4 (1931), стр. 27.

части жидкости поднимаются вверх, а более легкие, наоборот, опускаются вниз, следовательно, совершается определенная работа против силы тяжести. Очевидно, что эта работа производится за счет той части энергии главного движения, которая расходуется на поддержание турбулентности. Следствием этого является ослабление турбулентности потока, иногда даже полное ее затухание. В атмосфере рассмотренное распределение плотности наблюдается по вечерам, когда поверхность земли охлаждается быстрее воздуха. Поэтому, если днем был ветер, то к вечеру его турбулентность вследствие указанной выше причины ослабляется, в результате чего вблизи поверхности земли он почти затихает, оставаясь в то же время неизменным на высоте. Наоборот, нагревание почвы в дневное время, приводящее к противоположному распределению плотности, усиливает турбулентность¹.

Аналогичным образом центробежные силы, возникающие при движении жидкости по криволинейным траекториям, ослабляют турбулентность, если скорость от центра кривизны наружу увеличивается, и, наоборот, усиливают турбулентность, если скорость от центра кривизны наружу уменьшается². В таких потоках центробежные силы, разные по своей величине в разных точках потока, играют такую же роль, как разные по величине силы тяжести в потоках с неодинаковым распределением плотности.

Если жидкость находится между двумя коаксиальными цилиндрами, из которых наружный вращается, а внутренний неподвижен, то, согласно Куэтту³, переход ламинарного течения в турбулентное происходит при такой критической окружной скорости u внешнего цилиндра, для которой число Рейнольдса $\frac{ud}{\nu} = 1900$, при условии, что расстояние $d = r_2 - r_1$ между стенками цилиндров мало по сравнению с r_1 и r_2 . В случае более широкой щели между цилиндрами, начинает проявлять свое действие упомянутая выше стабилизация, и величина критической скорости сильно возрастает. Наоборот, если внутренний цилиндр вращается, а внешний неподвижен, то течение делается неустойчивым еще в стадии ламинарного движения; регулярно возникают вихри с осями, параллельными окружной скорости, вращающиеся попеременно вправо

¹См. например, статью Л. Прандтля в Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandten Gebieten (Aachen, 1929), Berlin 1930, стр. 1.

²Prandtl L., Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandten Gebieten (Aachen, 1929), Berlin 1930, стр. 1; там же, стр. 10; Wilcken H., Ing. Arch, т. I (1930), стр. 357.

³Couette M., Ann. de chim. et phys. (6), т. 21, стр. 433.

и влево. Тэйлор¹ теоретически определил условие возникновения этой неустойчивости; оно имеет следующий вид:

$$\frac{ud}{\nu} > 41,3 \sqrt{\frac{r}{d}},$$

где r есть среднее значение обоих радиусов r_1 и r_2 . Опыты подтвердили правильность этого условия.

На рис. 102 изображены полученные Вендтом² профили скоростей турбулентного течения между стенками одного вращающегося и одного неподвижного цилиндра. Если вращается внешний цилиндр, то перенос количеств движения получается слабым; наоборот, этот перенос получается сильным, если вращается внутренний цилиндр.

В турбулентных пограничных слоях вдоль изогнутых стенок такого рода стабилизация и потеря устойчивости наблюдаются даже при сравнительно малой изогнутости стенок. На выпуклых стенках возникает ослабление, а на вогнутых, наоборот, усиление турбулентного перемешивания³. В последнем случае еще при ламинарном течении могут возникать вихри, аналогичные описанным выше вихрям, возникающим между цилиндрами. Согласно вычислениям Гертлера⁴, условие устойчивости имеет вид:

$$\frac{U\delta}{\nu} < 16 \sqrt{\frac{r}{\delta}},$$

где δ есть толщина пограничного слоя.

г) В последнее время много внимания уделяется *турбулентности в аэродинамических трубах*, описание которых будет Дано ниже, в § 22 гл. III. Так как назначение аэродинамических труб состоит в том, чтобы воспроизводить условия равномерного движения тела в покоящемся воздухе, то турбулентность в них нежелательна. Однако полностью

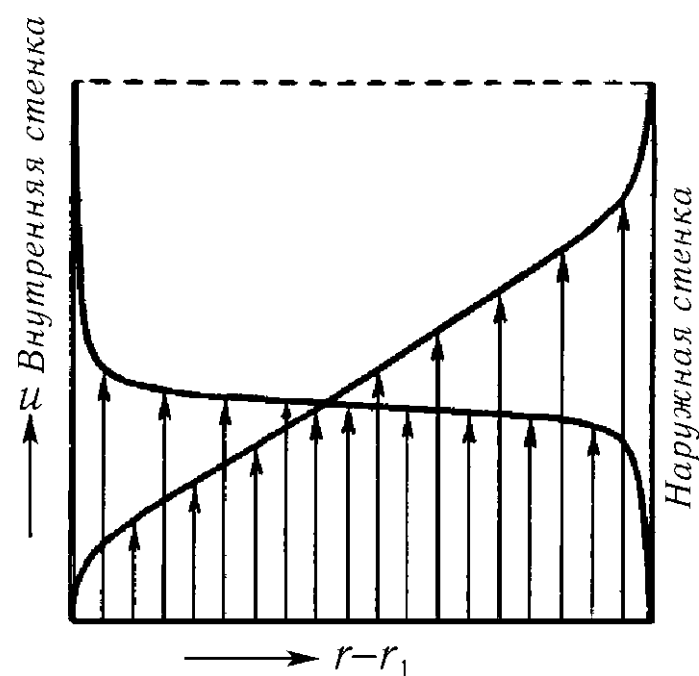


Рис. 102. Распределение скоростей при турбулентном течении между стенками цилиндров, из которых один вращается, а другой неподвижен

¹Taylor G. I., Phil. Trans. (A), т. 123 (1923), стр. 317.

²Wendt F., Ing. Arch., т. 4 (1933), стр. 577; см. также Taylor G. I., Proc. Roy. Soc. (A), т. 151 (1935), стр. 494, и т. 157 (1936), стр. 546 и 565.

³См., например, Wilcken H., Ing. Arch., т. 1 (1930), стр. 351, и Schmidbauer H., Диссертация в Techn. Hochschule München, 1934.

⁴Görtler H., Göttinger Nachrichten, Math.-Phys. Kl., новая серия, т. 2 (1940), стр. 1.

избежать ее невозможно. Даже после того как поток воздуха в аэродинамической трубе проходит через выпрямляющую решетку, некоторая степень турбулентности в нем остается. Это вызывает турбулизацию пограничного слоя около обдуваемого тела, а вместе с тем и отрыв потока от тела (см. § 6 и 7).

Раньше мерой турбулентности потока воздуха в аэродинамической трубе служила степень падения сопротивления шара вследствие турбулизации пограничного слоя (см. § 15). Теперь разработаны более совершенные и надежные методы оценки турбулентности¹, основанные на численном измерении пульсации скорости при помощи термоанемометров (см. § 22, п. б). Эти измерения показали, что турбулентность в аэродинамической трубе, а также турбулентность, возникающая в открытом пространстве после прохождения потока через проволочную решетку, обладает на достаточно большом расстоянии от турбулизующего объекта особенно простым свойством: она изотропна. Это означает, что пульсации скорости здесь одинаковы по величине по всем направлениям. Следовательно, изотропная турбулентность является простейшим случаем турбулентности, наиболее доступным для теоретического исследования статистическими методами^{2, 3}.

Простейшей статистической величиной является средняя энергия пульсации, равная

$$\frac{1}{2}q^2 = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}).$$

Драйден установил, что в случае прохождения воздуха со скоростью U через решетку с шириной отверстия m , эта средняя энергия равна

$$q = \frac{\text{число} \cdot m}{T + t},$$

где t есть время, прошедшее после прохождения потока через решетку, а

$$T = \text{число} \cdot \frac{m}{U},$$

¹ Dryden H. L., NACA-Report № 320, 342, 448 и 581 (1929–1936).

² См., например, Taylor G. I., Proc. V Intern. Congr. f. Applied Mech. Cambridge Mass. 1938, стр. 294 (обзорный доклад).

³ См. также работы А. Н. Колмогорова и др., упомянутые в сноске 3 на стр. 160; более подробные сведения о турбулентности, в частности о переходе ламинарного пограничного слоя в турбулентный, можно найти в книге: Лойцянский Л. Г., Аэродинамика пограничного слоя, Ленинград, 1941, в сборнике статей «Проблемы турбулентности», Москва, 1936, и, наконец, в книге «Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости», т. I и II, Москва, 1948. (Прим. пер.)

т. е. представляет собой некоторый постоянный промежуток времени. Безразмерное «число» в последнем равенстве зависит от отношения $\frac{d}{m}$, где d есть толщина проволоки.

Представление о пространственном распределении пульсации дает изучение корреляции¹ между скоростями в соседних точках A и B потока. При изотропной турбулентности существуют только две коррелятивные связи с не равными нулю коэффициентами, причем оба эти коэффициента являются функциями одного только расстояния $r = \overline{ab}$. Первая из этих связей с коэффициентом корреляции R_1 имеет место между составляющими скоростей в точках A и B , параллельными отрезку AB , а вторая — с коэффициентом корреляции R_2 — между составляющими скоростей в точках A и B , перпендикулярными к отрезку AB и параллельными между собой. Как показал Карман, между R_1 и R_2 существует, вследствие неразрывности потока, соотношение

$$r \frac{dR_1}{dr} = 2(R_2 - R_1).$$

Зависимость коэффициентов корреляции R_1 и R_2 от $\frac{r}{m}$, полученная как среднее ряда различных измерений, показана на рис. 103.

Имея зависимость R_1 (или R_2) от $\frac{r}{m}$, можно найти две характерные длины, из которых одна, равная

$$L = \int_0^{\infty} R_1(r) dr,$$

является мерой величины массы, движущейся как единое целое, следовательно, внутренне связана с длиной пути перемешивания. Вторая длина, обозначаемая по Тэйлору через λ , характеризует размер наименьшего вихря, который содержится в турбулентном потоке и в котором энергия турбулентного движения преобразуется («диссипируется») в теплоту. В выражение для диссипации входят квадраты и произведения производных от u' и т. д. по x и т. д. По Тэйлору среднее значение диссипации равно

$$D = \text{число} \cdot \mu q^2 \left(\frac{d^2 R_1}{dr^2} \right)_{r=0},$$

¹ Корреляционная связь между двумя изменяющимися величинами $x(t)$ и $y(t)$ оценивается коэффициентом корреляции

$$R = \frac{\overline{xy}}{\sqrt{\overline{x^2} \cdot \overline{y^2}}},$$

который равен 1 или -1 , если обе величины пропорциональны друг другу, и равен нулю, если между этими величинами нет никакой связи.

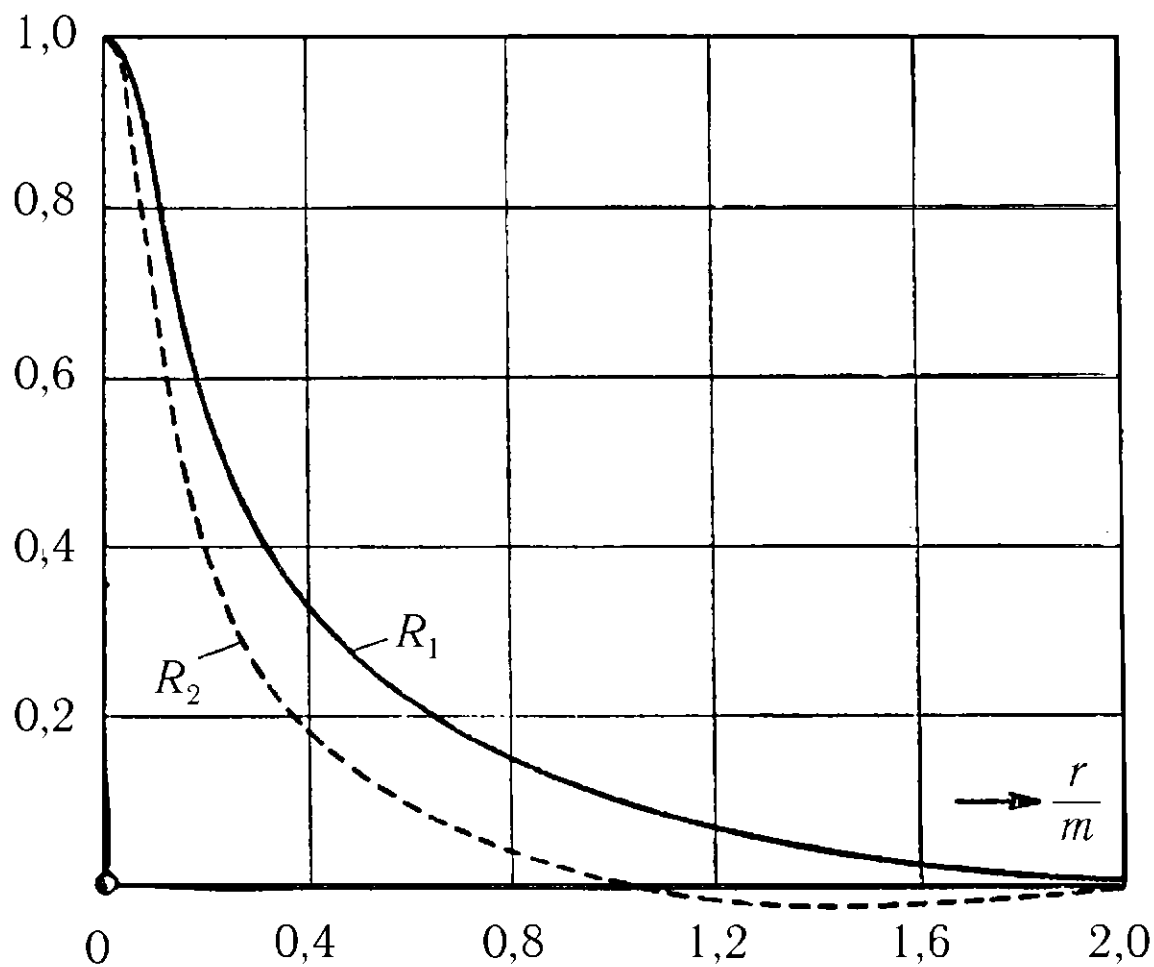


Рис. 103. Зависимость коэффициентов корреляции R_1 и R_2 от $\frac{r}{m}$

причем

$$\left(\frac{d^2 R_1}{dr^2}\right)_{r=0} = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 R_1}{dr^2}\right)_{r=0} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Далее, Тэйлор получает:

$$\lambda = \text{число} \cdot \sqrt{\frac{\nu L}{q}},$$

или, если подставить вместо q его приведенное выше значение и положить $L = \text{число} \cdot m$,

$$\lambda = \text{число} \cdot \sqrt{\nu(T + t)},$$

что и следовало ожидать на основании соображений о размерностях или на основании формулы (13) в § 3. Возрастание длины λ удалось подтвердить кинематографической съемкой¹.

Формулы, выведенные в § 4, не применимы к изотропной, затухающей с течением времени, турбулентности, так как при такой турбулентности $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = 0$, но тем не менее u' и v' не равны нулю. Попытка вывода формул, аналогичных формулам § 4 и пригодных для изотропной турбулентности, была сделана Прандтлем.

§ 6. Образование вихрей. В пограничном слое, образующемся на поверхности обтекаемого тела даже при очень малой вязкости, час-

¹Prandtl L., Beiträge zum Turbulenzsymposium. Proceedings of the V. Intern. Congress of Applied Mechanics, Cambridge Mass. 1938, стр. 340.

тицы жидкости движутся медленнее, чем во внешнем потоке, соприкасающемся с пограничным слоем. При наличии определенных условий это приводит к тому, что из пограничного слоя возникает слой раздела, а из последнего — вихри (ср. § 7 и 12 гл. II). Пусть во внешнем потоке имеется разность давлений, вызывающая ускорение или замедление потока. Очевидно, что эта разность давлений вызывает изменение движения также в пограничном слое. В том случае, когда давление во внешнем потоке уменьшается в направлении движения, следовательно, когда перепад давления ускоряет внешний поток, скорость частиц жидкости в пограничном слое увеличивается, что позволяет им, несмотря на действие трения, продолжать свое движение вдоль поверхности тела. Наоборот, в том случае, когда давление во внешнем потоке увеличивается в направлении движения, следовательно, когда перепад давления замедляет внешний поток, частицы жидкости в пограничном слое, движущиеся медленнее, чем частицы во внешнем потоке, начинают двигаться еще медленнее, а при достаточной степени замедления внешнего потока — даже останавливаются, а вслед затем начинают двигаться в обратную сторону. Таким образом, около поверхности обтекаемого тела возникает возвратное движение жидкости, несмотря на то, что внешний поток продолжает по-прежнему двигаться вперед. Новые порции жидкости, притекающие к тому месту поверхности тела, где начинается возвратное движение, также сначала останавливаются, а затем начинают двигаться назад. Все это приводит к тому, что количество заторможенной жидкости между стенкой и внешним потоком очень быстро увеличивается и возвратное движение становится все шире и шире, пока, наконец, совсем не оттесняет внешний поток от стенки происходит так называемый *отрыв потока* от стенки. Получившийся в результате *слой раздела* быстро свертывается в вихрь так, как это было описано в § 7 гл. II; при этом часть заторможенной жидкости попадает в имеющее конечные размеры ядро вихря. Все эти стадии образования вихря хорошо видны на рис. 104, изображающем шесть последовательных фотографий потока, обтекающего неподвижный цилиндр. Мы видим, что в первый момент вокруг цилиндра возникает потенциальное течение, в котором линии тока, расходящиеся перед цилиндром, вновь смыкаются позади цилиндра. При обтекании передней стороны цилиндра происходит ускорение внешнего потока, и поэтому частицы жидкости в пограничном слое преодолевают трение на всем пути до верхней и нижней точек цилиндра. Но начиная отсюда, скорость внешнего потока уменьшается, а давление увеличивается, что очень быстро приводит к возникновению возвратного движения пограничного слоя

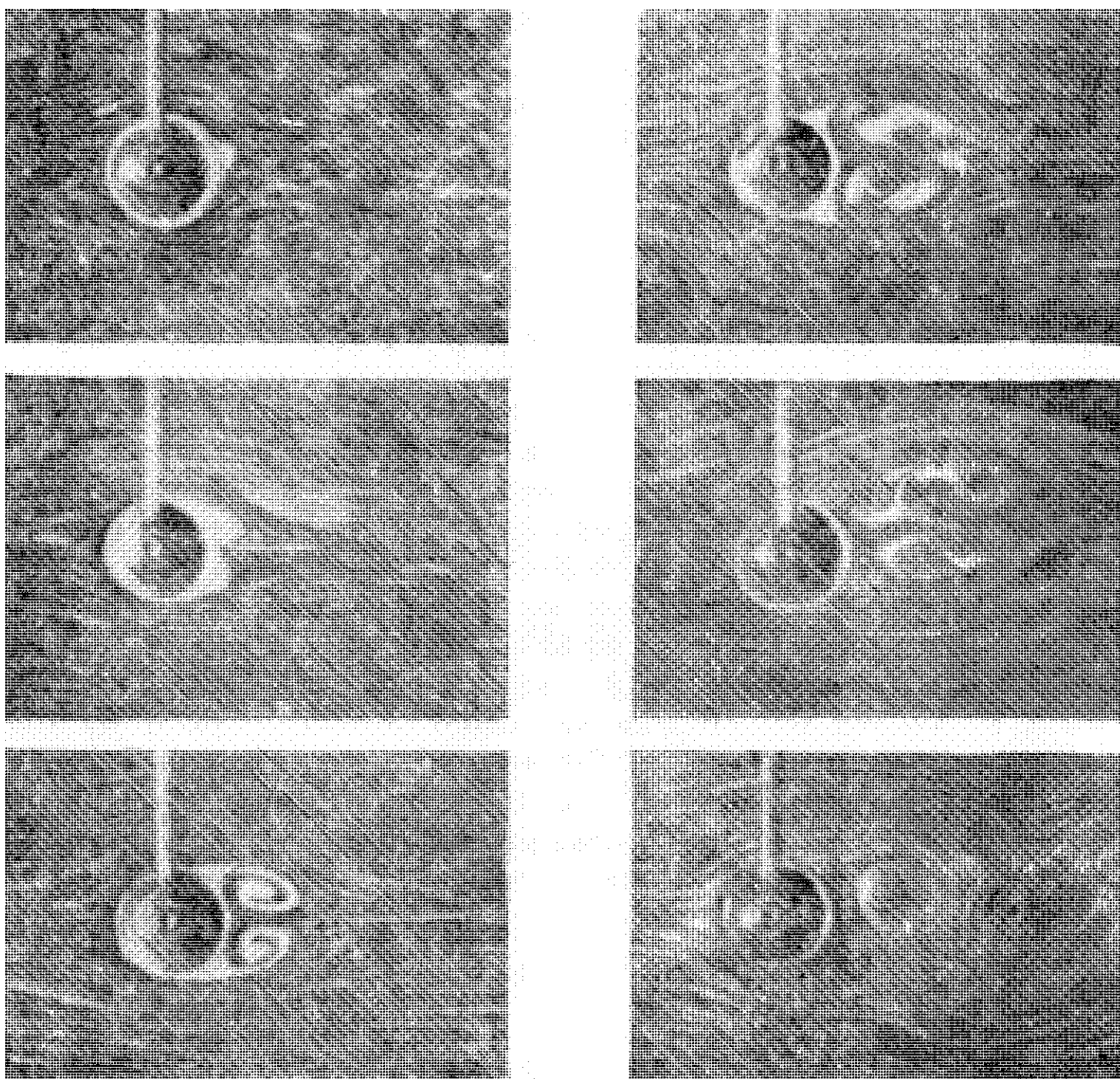


Рис. 104. Образование вихрей при обтекании неподвижного цилиндра (поток направлен слева направо)

и к последующему образованию вихрей. Слой раздела, состоящий из частиц жидкости, первоначально двигавшихся вдоль поверхности цилиндра, очень четко выделяется на первых трех фотографиях благодаря скоплению в нем частиц алюминиевого порошка, которым была обсыпана поверхность потока для придания видимости его движению. Последние три фотографии показывают постепенное развитие обоих вихрей. В конце концов, один вихрь, а вслед за ним и другой отрываются от цилиндра и уплывают вместе с потоком. На смену оторвавшимся вихрям возникают попеременно сверху и снизу новые вихри, которые также отрываются от цилиндра и уплывают вместе с потоком (см. также рис. 143 и 146, d и e).

Таким образом, если при обтекании тела скорость течения увеличивается в направлении потока, то поток движется вперед, все время прилегая к поверхности тела. Если же скорость течения уменьшается

в направлении потока, то при достаточной степени замедления начинается возвратное движение пограничного слоя, которое приводит к отрыву внешнего потока от поверхности тела и к образованию вихрей. При недостаточно сильном замедлении внешнего потока возвратное движение пограничного слоя может не возникнуть (ср. § 7).

Такая связь между изменением скорости течения и образованием вихрей имеет место не только при обтекании тел, но и при течении в каналах, трубах и т. п. Если в направлении потока поперечное сечение канала уменьшается, следовательно, скорость течения увеличивается, то поток заполняет собой все поперечное сечение, прилегая к обеим его стенкам. Если же в направлении потока поперечное сечение канала увеличивается, следовательно, скорость течения уменьшается, то при достаточной степени расширения около стенок возникает возвратное движение пограничного слоя, которое сейчас же приводит к отрыву потока от стенок и к образованию вихрей. При очень быстром расширении поперечного сечения в процессе отрыва потока от стенок образуется такая же свободная струя, как при истечении через отверстие с острыми краями (см. рис. 109 на стр. 196). При менее быстром расширении поперечного сечения образуется струя, более или менее плотно прилегающая к одной из стенок канала.

Если прямолинейный поток, текущий между направляющими стенками, получает отклонение в сторону (рис. 105), то там, где линии тока искривляются, давление в направлении, перпендикулярном к направлению течения, не остается постоянным: оно изменяется, увеличиваясь при переходе от вогнутой стороны линии тока к выпуклой (§ 6 гл. II). Следовательно, давление на внутренней стороне изогнутой части потока будет меньше, чем на внешней стороне. Это означает, в соответствии с уравнением Бернулли, что на внутренней стороне потока скорость течения, при переходе от прямолинейной части потока к изогнутой, уменьшается, а на внешней — наоборот, увеличивается. Такое скоростное поле создает условия, способствующие отрыву потока от внешней стенки, причем совершенно безразлично, является ли внешняя стенка плоской или изогнутой своей выпуклостью наружу.

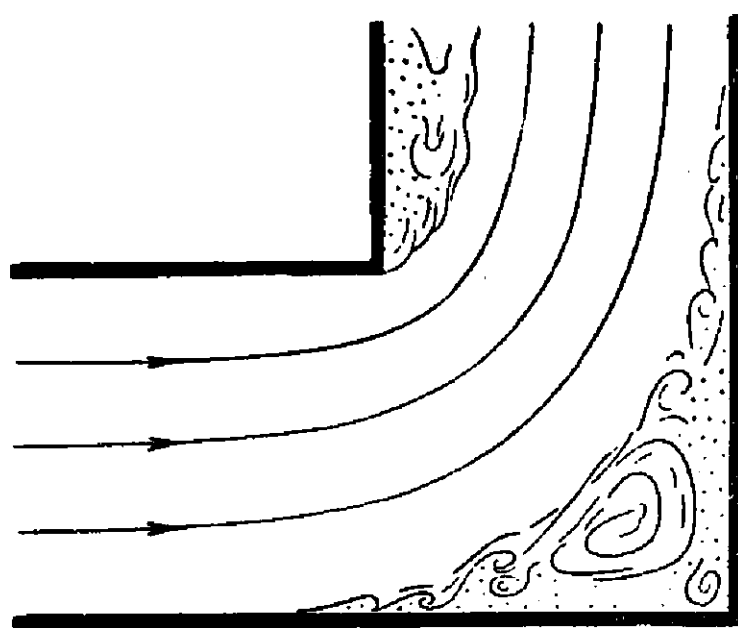


Рис. 105. Поток в прямоугольном колене

Следовательно, старое представление о том, что отрыв потока может происходить только на стенке, изогнутой выпуклостью наружу, является неправильным. Правда, отрыв, возникающий при повороте потока между направляющими стенками, отличается от обычного отрыва тем, что поток после поворота опять прилегает к стенке. Подобного же рода отрыв возникает при входе потока в колено трубы, а также при внезапном сужении канала, когда линии тока также поворачиваются к стенке своей выпуклой стороной. В атмосфере такой отрыв и связанные с ним вихри наблюдаются перед строениями при ветре (рис. 106).

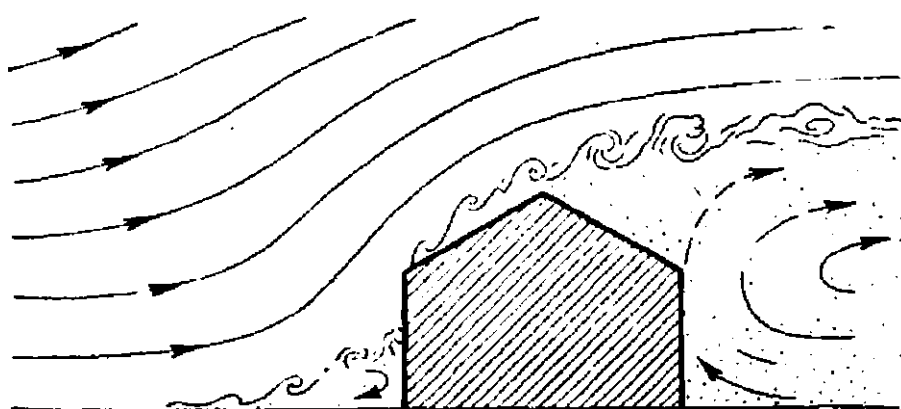


Рис. 106. Обтекание здания

В § 7 гл. II мы рассмотрели образование поверхности раздела при обтекании острого ребра. Теперь мы можем объяснить это явление с новой точки зрения. Для этого сначала рассмотрим обтекание закругленного ребра. Скорость внешнего по отношению к пограничному слою потока будет наибольшей в верхней точке закругления. Начиная отсюда, она быстро убывает вниз по течению, следовательно, здесь имеется необходимое условие для возникновения возвратного движения пограничного слоя и образования поверхности раздела. Последняя будет начинаться всегда на закруглении ребра. Будем теперь мысленно все более и более уменьшать радиус закругления. Это повлечет за собой более резкое изменение скорости при обтекании закругления, и поэтому возникновение возвратного движения и связанное с ним образование поверхности раздела будут происходить все быстрее и быстрее. Переходя в пределе к острому ребру, мы придем к заключению, что на таком ребре поверхность раздела должна возникать чрезвычайно быстро, следовательно, допущения, сделанные в § 7 гл. II, были совершенно правильными.

Выше мы несколько раз подчеркивали, что возвратное движение пограничного слоя может возникать только при достаточной степени замедления внешнего потока. Это объясняется тем, что стенка,

вдоль которой образуется пограничный слой, тормозит соприкасающиеся с нею частицы жидкости, а внешний поток, наоборот, увлекает за собой соприкасающиеся с ним частицы пограничного слоя. Поэтому, если скорость обтекающей стенку потока уменьшается очень постепенно, то увлечение частиц пограничного слоя внешним потоком оказывается все же достаточным, чтобы предупредить возникновение возвратного движения. Такое увлечение пограничного слоя внешним потоком получается сильнее в том случае, когда движение в пограничном слое турбулентное, а не ламинарное. Это объясняется тем, что при турбулентном движении в пограничном слое вследствие перемешивания происходит более интенсивный перенос количеств движения. Рассмотренным обстоятельством объясняется следующий факт: при обтекании тела, имеющего сзади закругленную форму (например, шара), место отрыва потока лежит значительно ниже по течению и поэтому вихревая область значительно меньше в том случае, когда движение в пограничном слое турбулентное, а не ламинарное (см. о сопротивлении шара в § 15).

Отрыв потока от стенок влечет за собой определенную потерю энергии. Поэтому в технических сооружениях чрезвычайно важно предупредить возможность отрыва в тех случаях, когда такая возможность создается характером изменения давления в направлении течения. Для этой цели каналы и другие направляющие сооружения устраиваются с очень постепенным расширением (если расширение вообще необходимо), а обтекаемые тела делаются достаточно удлиненными, чтобы таким путем обеспечить перевес увлекающего действия внешнего потока над тормозящим действием повышения давления. Однако такое решение задачи приводит к удовлетворительному результату обычно только при турбулентном движении в пограничном слое, на том его участке, который соприкасается с областью замедленного движения внешнего потока.

Ввиду указанной связи между отрывом потока от стенки и характером движения пограничного слоя важно выяснить условия, при которых в потоке с возрастающим вниз по течению давлением ламинарное движение в пограничном слое переходит в турбулентное движение. Большое влияние на такой переход оказывает турбулентность набегающего потока; наличие ее в значительной мере благоприятствует этому переходу. Однако в том случае, когда набегающий поток почти свободен от турбулентности (как это имеет место, например, при полете на большой высоте), пограничный слой может оставаться ламинарным вплоть до точки отрыва. Возникновение турбулентности немного позади (или немного впереди) этой точки приводит либо к тому, что оторвавшийся

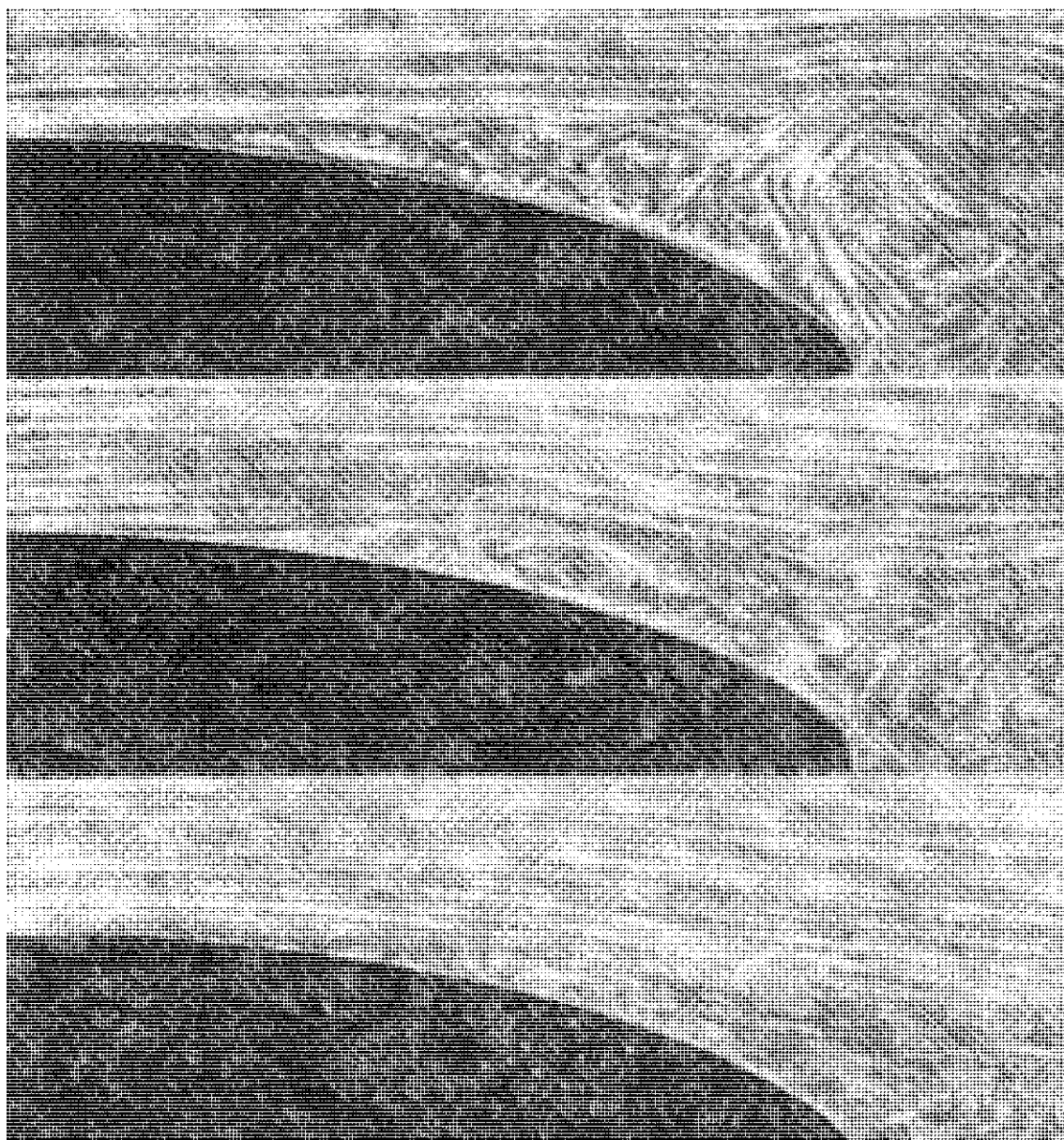


Рис. 107. Обтекание кормовой части тела; на верхнем снимке — отрыв ламинарного пограничного слоя, на нижних снимках — обратное прилегание пограничного слоя к стенке после того, как он сделался турбулентным

поток опять прижимается к обтекаемому телу, либо к полному предупреждению отрыва. Будет ли в каждом отдельном случае происходить отрыв потока (при ламинарном пограничном слое) или же переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный — зависит не только от числа Рейнольдса, но, в весьма значительной степени, также от формы обтекаемой стенки позади точки отрыва. Однако точного правила до сих пор не удалось установить. Наряду с числом Рейнольдса, в которое в качестве длины входит радиус кривизны стенки в точке отрыва, существенную роль, по-видимому, играет также уменьшение или увеличение кривизны стенки в направлении течения. Фотографии на рис. 107 показывают, как поток с малым числом Рейнольдса и с отрывом ламинарного пограничного слоя вновь прижимается к стенке при повышении числа R . Числа Рейнольдса, соответствующие отдельным снимкам (сверху вниз), равны соответственно $\frac{wr}{\nu} \approx 2 \cdot 10^4; 5 \cdot 10^4$ и $6 \cdot 10^4$.

Тэйлор¹ теоретическим путем вывел интересное соотношение, устана-

¹Proc. Roy Soc. (A), т. 156 (1936), стр. 307.

вливающее связь между положением точки перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный и степенью турбулентности потока. Опыты хорошо подтвердили это соотношение. Пусть u' есть средняя величина пульсации в потоке, движущемся со средней скоростью U , и s — расстояние от критической точки на контуре тела до точки перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный. В таком случае, как показал Тэйлор, критическое число Рейнольдса $\frac{Us}{\nu}$ есть функция от

$$\frac{u'}{U} \left(\frac{s}{L} \right)^{1/5},$$

где L есть упомянутая на стр. 185 длина, определенная через коэффициент корреляции R_1 . В случае турбулентности, вызванной проволоочной решеткой или сходным устройством, эта длина приближенно совпадает с шириной отверстия решетки. Аналогичным образом, критическое число Рейнольдса $\frac{Ud}{\nu}$ для геометрически подобных тел (например, для шаров диаметром d , см. § 15) есть функция от

$$\frac{u'}{U} \left(\frac{d}{L} \right)^{1/5}.$$

В основе вычислений Тэйлора лежит допущение, что для возникновения турбулентности в пограничном слое решающую роль играет величина средней пульсации давления вследствие начальной турбулентности, уже имевшейся в потоке. Более коротким путем соотношение Тэйлора вывел Вигардт¹.

Если известно распределение давления, то положение точки отрыва ламинарного пограничного слоя можно вычислить при помощи уравнений (15) и (16) (см. § 3). Первое такое вычисление было выполнено Блазиусом². Однако предложенный им способ расчета, основанный на разложении в ряды, дает лишь ограниченные возможности. В приближенном способе расчета Кармана³ и Польгаузена⁴ используется вместо дифференциального уравнения теорема о количестве движения, выведенная из этого уравнения; кроме того, профиль скоростей в пограничном слое аппроксимируется некоторым конечным многочленом. Это дает возможность выполнить расчет для каждого заданного распределения давления. Более точный способ расчета, основанный на использовании дифференциального уравнения, но зато очень кропотливый, предложен Гертлером⁵.

¹Wiegardt K., ZAMM, т. 20, (1940), стр. 58.

²Blasius H., Диссертация (Göttingen, 1907), Z. f. Math. u. Phys., т. 56 (1908), стр. 1; см. также Durend, Aerodynamik Theory, т. III или Handb. d. Exp.-Phys., т. IV, стр. 263; там же имеется подробный список литературы.

³ZAMM, т. I, (1921), стр. 235; см. также Durend, Aerodyn. Theory, т. III.

⁴ZAMM, т. I, (1921), стр. 252; см. также Durend, Aerodyn. Theory, т. III.

⁵Görtler H., ZAMM, т. 19, (1939), стр. 129.

Расчет турбулентного пограничного слоя на плоской стенке дан Грушвитцем¹. При применении этого расчета к случаю выпуклых стенок следует вводить поправку, предложенную Шмидбауэром² [см. конец пункта е) в § 5].

В тех случаях, когда распределение давления находится из опыта, теоретическое определение точки отрыва пограничного слоя, особенно когда он ламинарный, дает хорошее совпадение с результатами наблюдений.

§ 7. Способы предотвращения отрыва пограничного слоя.

Существуют различные способы управления пограничным слоем, позволяющие предотвратить или затянуть его отрыв от обтекаемого тела. Рассмотрим, например, цилиндр, обтекаемый потоком в направлении, перпендикулярном к оси. Будем вращать цилиндр так, чтобы его окружная скорость была равна или больше максимальной скорости течения на окружности цилиндра. Тогда на той стороне цилиндра, на которой жидкость и стенка движутся в одну сторону, пограничный слой будет не тормозиться, а наоборот, увлекаться вперед движущейся стенкой. Это позволяет пограничному слою легче, чем внешнему потоку, преодолеть возрастание давления в направлении течения. Поэтому на рассматриваемой стороне цилиндра возвратное движение в пограничном слое не возникает, следовательно, не происходит и отрыва потока. На противоположной стороне цилиндра, где стенка и жидкость движутся в противоположные стороны, пограничный слой испытывает резкое торможение, и поэтому здесь сначала возникает возвратное движение, а затем происходит отрыв мощного вихря. Одновременно с вихрем возникает, как об этом было сказано в § 11 предыдущей главы, циркуляция вокруг цилиндра, направленная в сторону, противоположную вращению вихря.

Возникновение циркуляции влечет за собой эффект Магнуса, т. е. появление поперечной силы. Пусть скорость потока вдали от цилиндра равна v ; тогда наибольшая скорость жидкости на окружности цилиндра при его обтекании обычным потенциальным потоком равна $2v$. Если к потенциальному течению присоединяется еще циркуляционное течение со скоростью $2v$, то тогда на одной стороне цилиндра скорость будет равна нулю, а на другой $4v$. Опыты с вращающимися цилиндрами показали, что максимальный эффект Магнуса получается в том случае, когда окружная скорость цилиндра u равна круглым числом $4v$. Развитие течения около цилиндра, вращающегося с окружной скоростью $u = 4v$, показано на рис. 108.

¹Gruschwitz E., Ing. Arch., т. 2, (1931), стр. 321.

²Schmidbauer H., Диссертация, München, 1934.

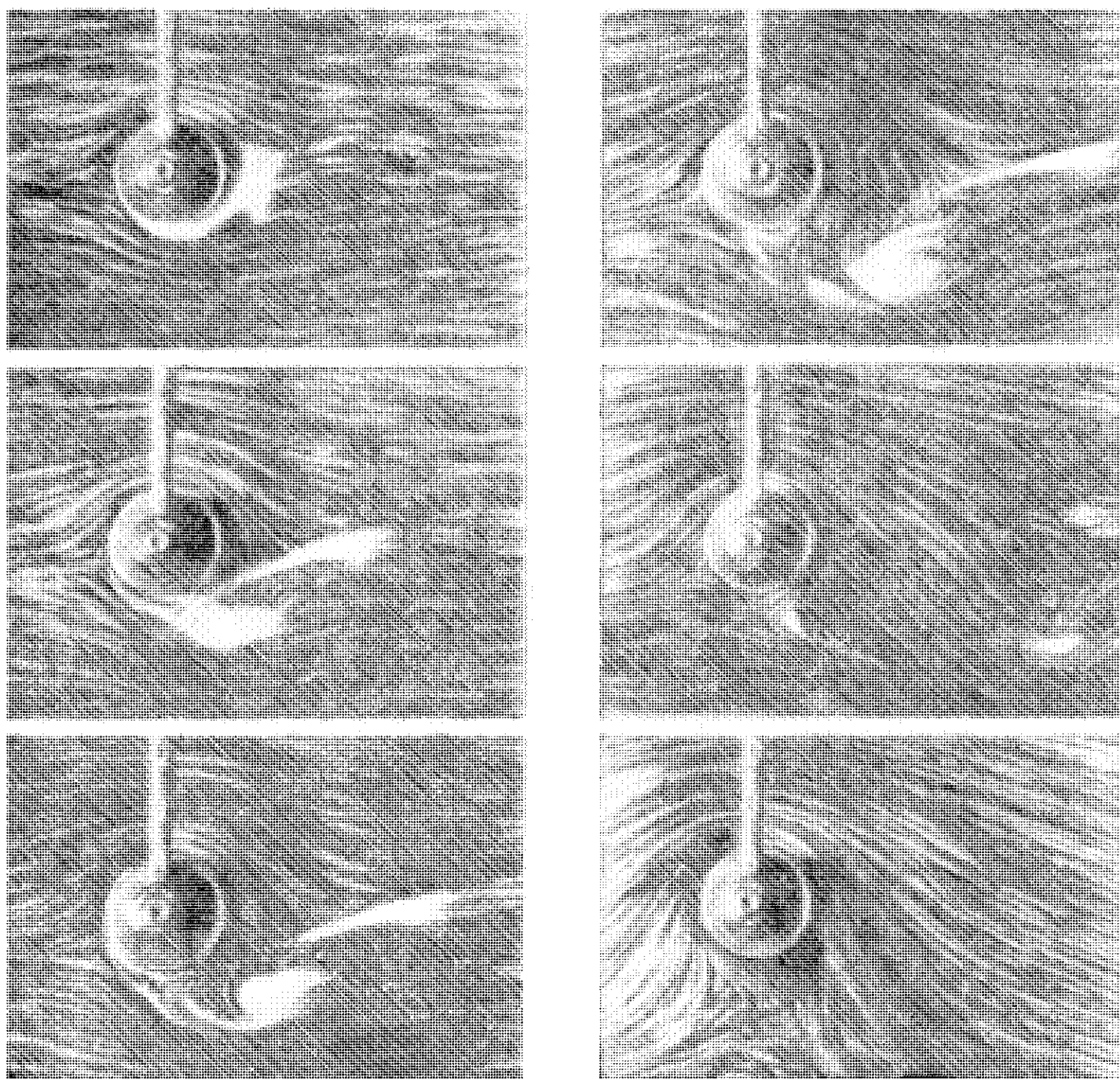


Рис. 108. Развитие течения около цилиндра, вращающегося с окружной скоростью $u = 4v$

Другой способ управления пограничным слоем состоит в следующем: в том месте стенки, около которого при возвратном движении пограничного слоя должна накапливаться жидкость, устраивается отверстие, например щель, и через эту щель производится отсасывание жидкости внутрь обтекаемого тела. Таким путем предотвращается накопление жидкости в пограничном слое и тем самым устраняется причина для отрыва потока. Действие отсасывания усиливается еще тем, что непосредственно около щели создается понижение давления, что также препятствует отрыву потока. Правда, такой способ предотвращения отрыва потока не уменьшает сопротивления, но зато он позволяет получить обтекание очень коротких или совсем неудобнообтекаемых тел почти без всякого образования вихрей.

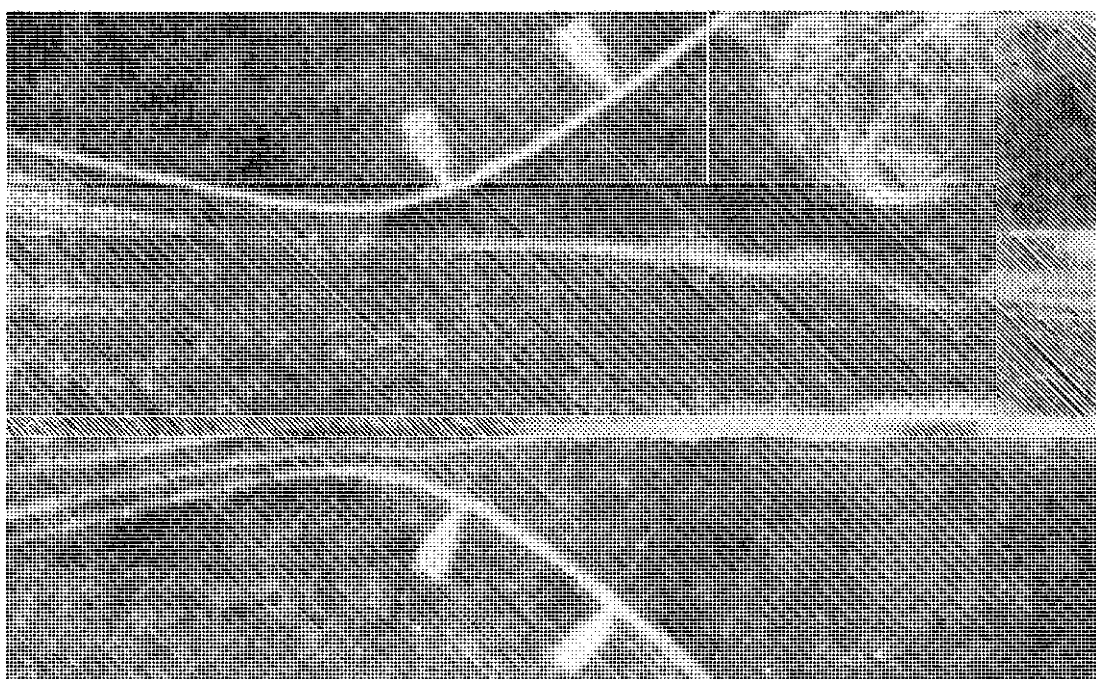


Рис. 109. Обычное течение в сильно расширяющемся канале

На рис. 109 изображена фотография потока в сильно расширяющемся канале; мы видим, что уже в самом начале расширяющейся части поток отрывается от стенок, и образуется струя. На рис. 110 изображена фотография того же потока после отсасывания пограничного слоя; теперь поток прилегает к обеим стенкам.

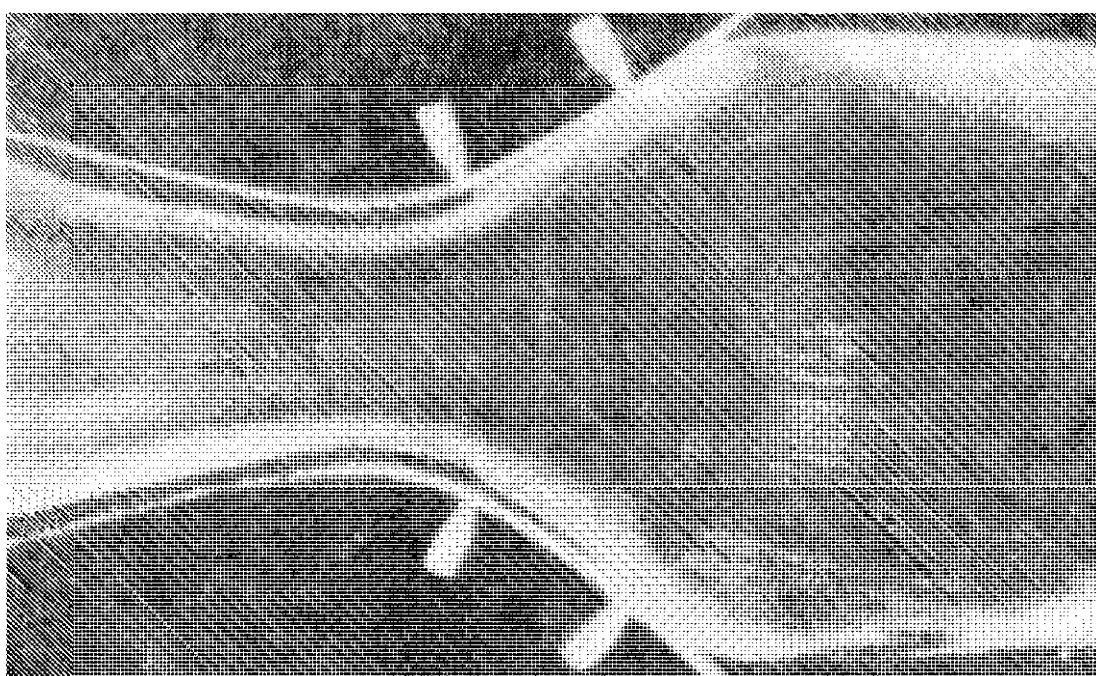


Рис. 110. Течение в сильно расширяющемся канале при отсасывании пограничного слоя через щели, положение которых отмечено белыми метками

Третий способ управления пограничным слоем состоит в том, что ему сообщается дополнительная скорость путем ускорения внешнего потока. Такой способ практически осуществлен в разрезном крыле Хэндли Пэйджа – Лахмана (рис. 111). Пограничный слой, образующийся на первой части крыла, вливается во внешний поток и таким путем как бы обезвреживается. Пограничный же слой, образующийся на второй

части крыла, должен преодолеть только часть приращения давления на верхней, под-сасывающей поверхности крыла; в то же время увлечение его внешним потоком, благодаря большой скорости струи воздуха, вырывающейся из щели, значительно сильнее, чем при отсутствии щели. К разрезному крылу поток прилегает при обтекании его на углах атаки, значительно больших предельного угла, еще обеспечивающего безотрывное обтекание обычных крыльев. Благодаря этому разрезное крыло обладает значительно большей подъемной силой, но в то же время и значительно большим лобовым сопротивлением.



Рис. 111. Разрезное крыло

Наконец, возможно управление пограничным слоем путем вдувания в него с большой скоростью струи сжатого воздуха изнутри крыла. Однако такой способ для практического осуществления весьма труден, так как количество выбрасываемого сжатого воздуха должно быть весьма значительным. Наоборот, при отсасывании пограничного слоя достаточно удалить из него сравнительно небольшое количество жидкости.

С разрезным крылом сходны добавочные крылья, применяемые для улучшения обтекания тел, форма которых благоприятствует отрыву потока и образованию вихрей. Давно известным примером таких добавочных крыльев могут служить поворотные лопатки, применяемые в аэродинамических трубах (см. рис. 201, на стр. 338). В настоящее время добавочные крылья применяются во всех тех случаях, когда надо обеспечивать резкий поворот потока без заметной потери напора¹. Один из таких случаев изображен на рис. 112. Действие добавочных крыльев состоит в следующем. Каждое крыло обращено к стенке канала той стороной, на которой давление повышено; следовательно, поле давлений,

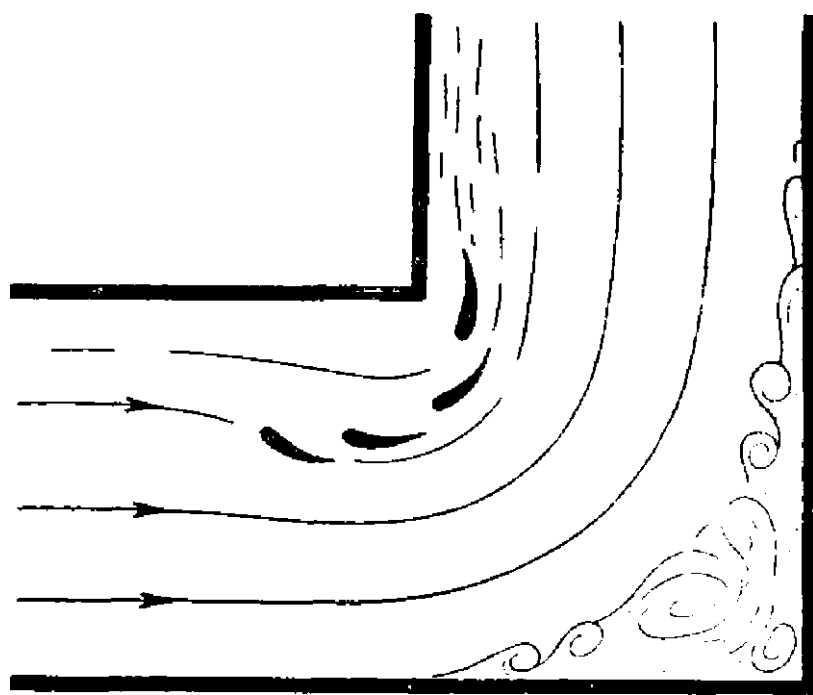


Рис. 112. Поворотные лопатки в канале.

¹ Flügel G., Jahrb. d. Schiffbautechn. Ges., т. 19 (1918), стр. 385. Результаты многочисленных сравнительных измерений в потоках с поворотными лопатками и без них имеются в работах Frey K., Forschung, т. 4 (1933), стр. 67 и т. 5 (1934), стр. 105.

создаваемое в потоке крыльями, обуславливает около стенки появление давления, большего по сравнению с тем, которое было бы здесь при отсутствии крыльев. В целом давление около стенки увеличивается так, что разность давлений, которую необходимо преодолеть пограничному слою, либо значительно уменьшается, либо даже совсем исчезает¹.

§ 8. Вторичные потоки. Если жидкость, текущая вдоль стенки, под действием бокового градиента давления оттесняется наружу, то слои жидкости, близкие к стенке, получают вследствие своей меньшей скорости большее отклонение, чем слои, более далекие от стенки. При отсутствии трения радиусы кривизны траектории относились бы как квадраты соответствующих скоростей (см. § 6, п. в), гл. II]. Но в действительности при рассматриваемом процессе трение играет определенную роль. В результате совокупного действия трения на стенке, увлекающего действия внешнего потока и указанного оттеснения потока от стенки пограничный слой получает отклонение в сторону пониженного давления. Это отклонение не превышает при ламинарном течении 45° , а при турбулентном — примерно $25\text{--}30^\circ$. Такое явление можно рассматривать как наложение на главный поток другого, *вторичного потока*, направленного перпендикулярно к главному потоку. Вследствие неразрывности течения этот вторичный поток вовлекает в себя не только пограничный слой, но и ядро главного потока, и оказывает на последнее иногда существенное влияние.

Если, например, жидкость движется в изогнутой горизонтальной трубе, то ядро основного потока, обладая наибольшей скоростью, стремится двигаться по инерции прямолинейно; вследствие этого более медленные слои, прилегающие к верхней и нижней стенкам, сильно отклоняются в сторону внутренней боковой стенки. В результате возникают два вторичных потока (рис. 113), которые около верхней и нижней стенок направлены внутрь закругления, а в центре трубы — наружу. Эти вторичные потоки налагаются на главный поток, параллельный оси трубы, и приводят к тому, что точки потока с наибольшей скоростью

¹Вопросу управления пограничным слоем посвящены работы советских авторов: Л о й ц я н с к и й Л. Г., Об изменении сопротивления тел путем заполнения пограничного слоя жидкостями с другими физическими константами, Прикл. мат. и мех., т. VI (1942), № 1; Ф е д я е в с к и й К. К., Уменьшение сопротивления трения путем изменения физических констант жидкости у стенки, Изв. Акад. Наук СССР, 1913, № 9–10: см. также статью: З а к с Н. А., Критический обзор работ по управлению пограничным слоем крыла и перспективы его применения в самолетостроении. Техника Возд. Флота, 1940, № 2. (Прим. пер.)

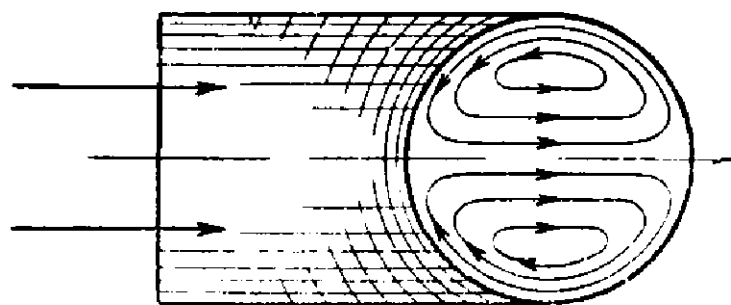


Рис. 113. Вторичные потоки в округлой изогнутой трубе

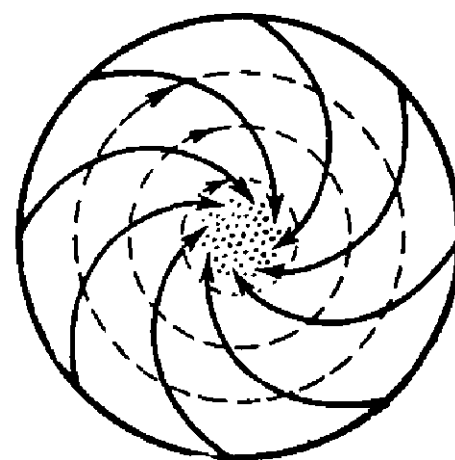


Рис. 114. Вторичный поток на дне круглого цилиндра

перемещаются далеко наружу (см. также текст, набранный петитом в конце § 11).

Другим интересным примером вторичного потока является поток, возникающий вблизи плоского дна круглого цилиндрического сосуда, вращающегося вместе с заключенной в нем жидкостью. Так как слои жидкости, лежащие над придонным слоем и не испытывающие трения о дно сосуда, оттесняются наружу сильнее пограничного слоя, то в последнем возникает движение, направленное от периферии к центру сосуда (рис. 114). Существование такого вторичного потока легко обнаружить, если бросить в сосуд горсть мелких камешков так, чтобы они разместились по всему дну; увлекаемые вторичным потоком, они постепенно собираются в маленькую кучку в середине дна.

Вторичные потоки, возникающие в излучинах рек, вызывают такой же эффект: они переносят песок, гравий и другие частицы, увлекаемые донным течением, от внешней стороны излучины к внутренней, вследствие чего русло снаружи излучины углубляется; а внутри делается более мелким. В сочетании с разрушением внешней стороны излучины (вследствие особенно быстрого здесь течения) это приводит к тому, что русло реки все более и более искривляется. Именно по этой причине реки всюду, где только условия местности позволяют, образуют сильно искривленные излучины, называемые меандрами.

Направление течения в слое жидкости, близком к стенке, можно сделать видимым, покрывая стенку слоем масляной краски (в случае движения воды), или смесью ламповой копоти, или другой краски с керосином (в случае движения воздуха). Движущаяся жидкость в течение довольно короткого времени (для воды около пяти минут) прочерчивает на окрашенном дне картину линий тока, указывающих направление

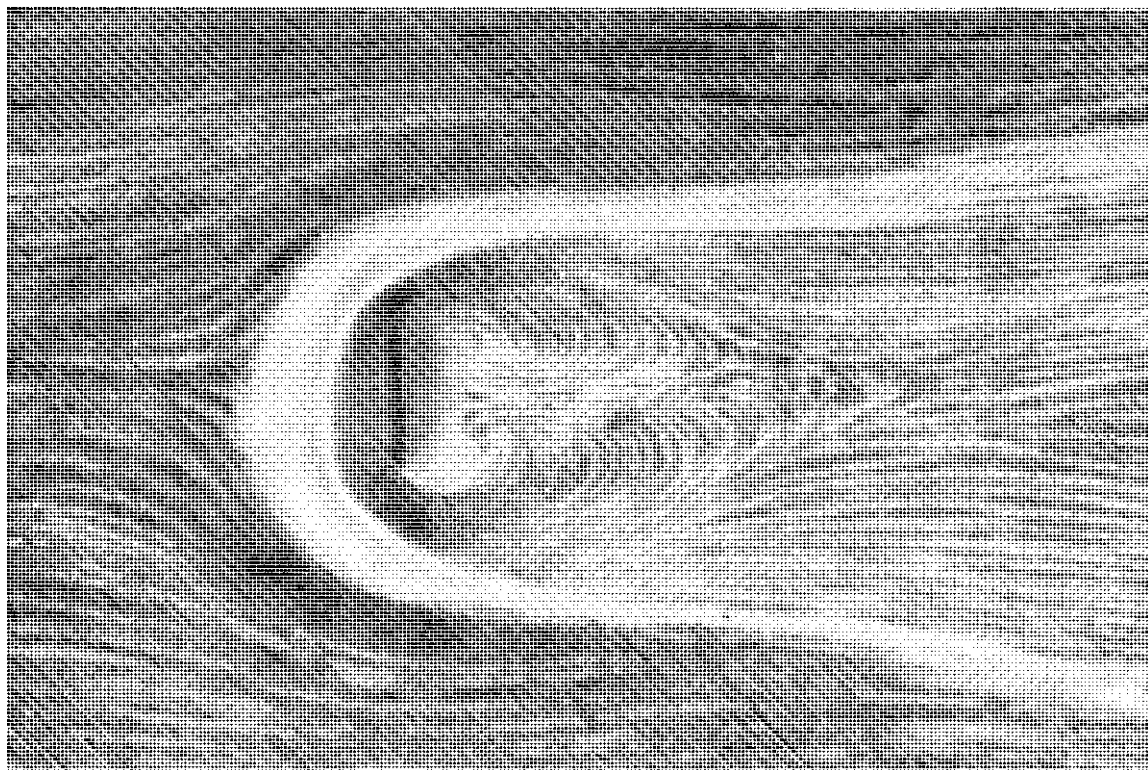


Рис. 115. Вторичный поток на дне круглого цилиндра

средних скоростей близкого к стенке слоя жидкости. Такая картина линий тока, получающаяся особенно четкой в турбулентных потоках, позволяет получать ценные выводы о характере течения, о точках отрыва и т. п.

Необходимо, впрочем, подчеркнуть, что эти картины линий тока позволяют судить только о движении слоев жидкости, близких к стенкам, и не дают никакого представления о движении основной массы жидкости. На рис. 115 показана фотография придонной картины линий тока в прямолинейном русле, перегородженном поперек плоской пластинкой. Широкая белая полоса, огибающая пластинку спереди, показывает, что придонный слой жидкости, встречая область повышенного давления перед пластинкой, отрывается от дна уже на значительном расстоянии перед пластинкой. В обоих вихрях позади пластинки ясно видно спиральное, направленное внутрь, движение такого же вида, как на рис. 114, что в данном случае и следовало ожидать. Примечательно, что в этой области, где турбулентность особенно сильна, система прочерченных линий получилась более четкой, чем в других местах. Каким образом возникает такое прочерчивание линий тока, до сих пор объяснить не удалось. На рис. 116 изображена фотография придонного течения в изогнутом канале прямоугольного поперечного сечения. На этой фотографии отклонение придонного слоя внутрь изгиба, а также отрыв от внутренней боковой стенки после поворота выделяются особенно четко.

При турбулентном течении в прямых каналах некруглого поперечного сечения наблюдаются вторичные потоки иного рода (так называемые *вторич-*

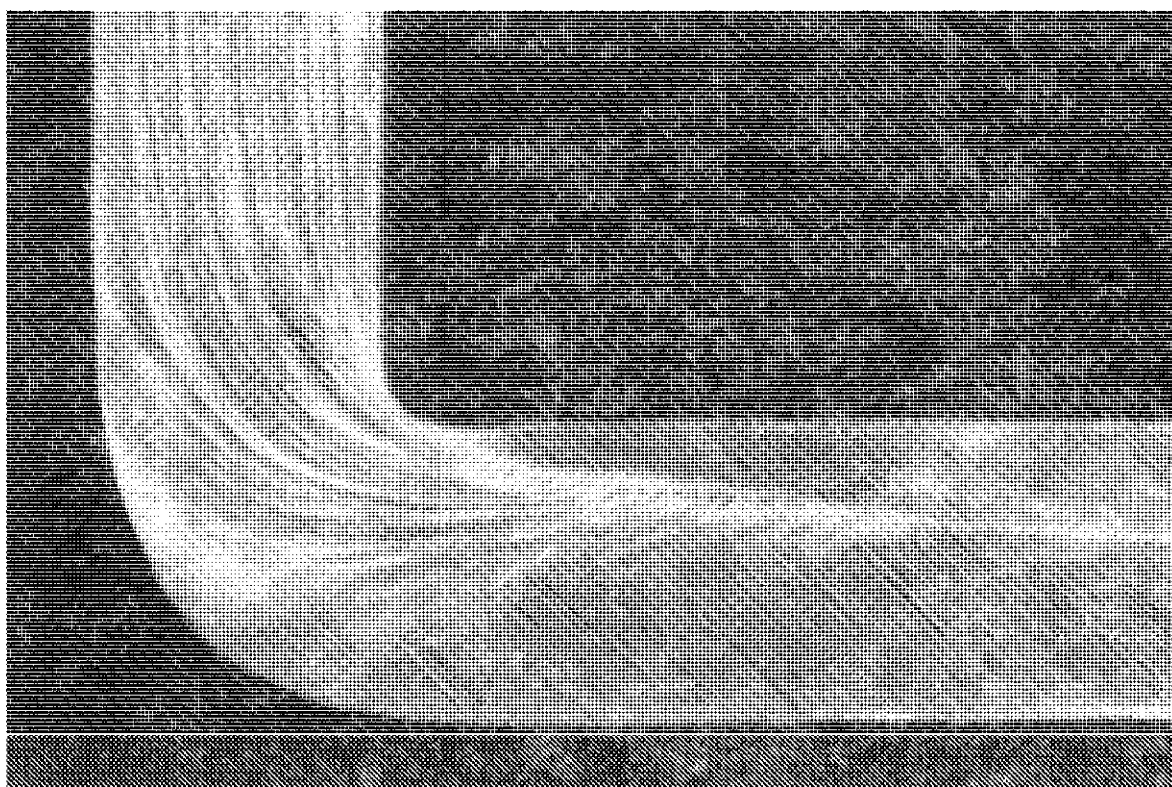


Рис. 116. Линии тока в приданном слое изогнутого канала прямоугольного поперечного сечения

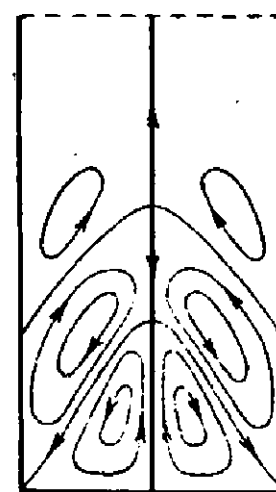
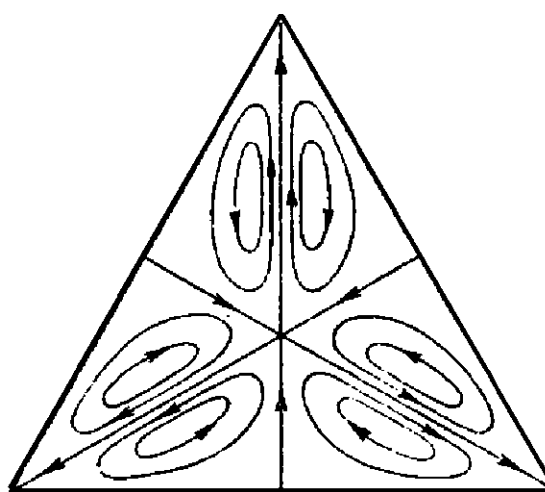
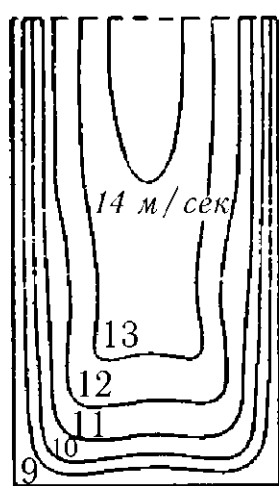
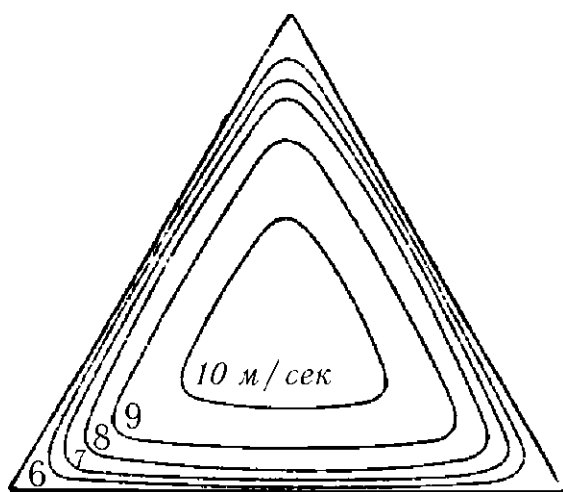


Рис. 117. Изотакхи в треугольном и прямоугольном каналах

Рис. 118. Вторичные потоки в треугольном и прямоугольном каналах

ные потоки второго рода). Распределение скоростей в таких каналах обладает своеобразной особенностью, заставляющей предполагать, что в канале возникают поперечные потоки, направленные в углы профиля канала и отсюда опять движущиеся внутрь профиля. Так, например, форму изотакх, т. е. линии равных скоростей в каналах треугольного и прямоугольного поперечного сечения (рис. 117), легко объяснить, если допустить, что существуют вторичные потоки вида, изображенного на рис. 118. Существование таких вторичных потоков удалось доказать также непосредственно, во-первых, путем введения в основной поток краски¹, а во-вторых, при помощи прочерчивания придонных линий тока. Наблюдения над движением плавающих мелких предметов в реках также подтверждают существование вторичных потоков. В самом деле, плавающие мелкие предметы всегда уносятся на середину ре-

¹Nikuradse J. Ing. Arch., т. 1 (1930), стр. 306.

ки, что можно объяснить только тем, что имеется поверхностное течение, направленное от берега к середине реки. Причина возникновения вторичных потоков второго рода до сих пор не вскрыта. Можно предполагать, что из тех мест, где касательное напряжение на стенке больше, жидкость вследствие механизма турбулентности переносится в середину канала, а отсюда она оттекает к мостам с меньшим касательным напряжением, например, в углы профиля. Это приводит к тому, что в местах с большим касательным напряжением скорость несколько уменьшается, а в мостах с меньшим касательным напряжением, наоборот, несколько увеличивается. Таким путем достигается значительное выравнивание касательного напряжения на стенках. Это обстоятельство, между прочим, является внутренним обоснованием формул сопротивления, основанных на понятии гидравлического радиуса (см. § 11).

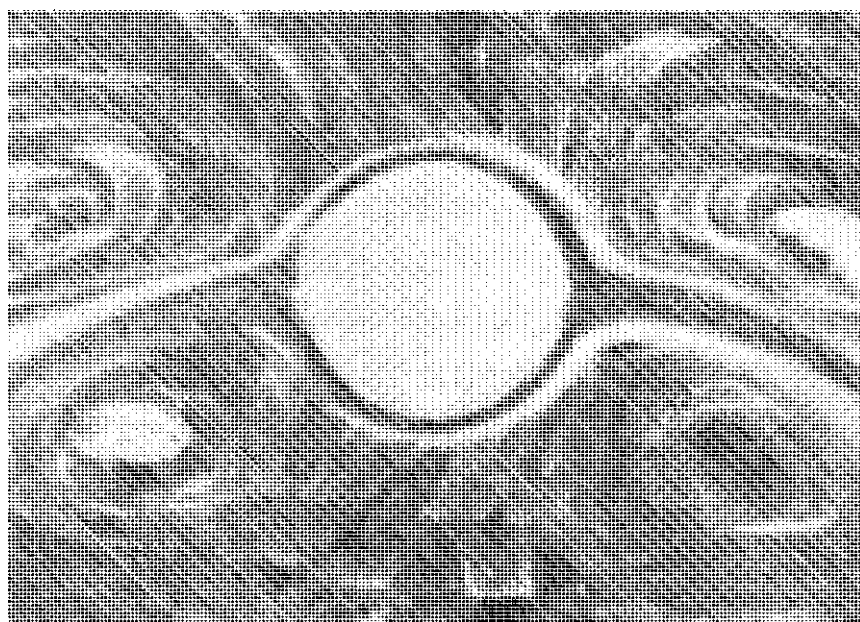


Рис. 119. Вторичный поток около круглого цилиндра, совершающего колебания в направлении, перпендикулярном к оси

Упомянем, наконец, о вторичных потоках третьего рода. Так называются своеобразные потоки, возникающие вследствие малых колебаний твердых тел, находящихся в жидкости. Такие потоки получаются особенно заметными в опытах с ультразвуком. Они наблюдаются также вблизи стенок канала при наличии в жидкости стоячих волн. Как показал Шлихтинг¹, возникновение вторичных потоков третьего рода обуславливается явлениями, происходящими в пограничном слое на поверхности колеблющегося тела или на стенке канала. На рис. 119 изображена фотография движения, возникающего в сосуде с водой вокруг колеблющегося в горизонтальном направлении круглого цилиндра. Фотография получена при помощи камеры, двигавшейся вместе с цилиндром. Металлические блески, делающие видимым движение воды и принимающие участие в этом движении, описывают при очень длитель-

¹Schlichting H., Berechnung ebener periodischer Grenzschichtströmungen. Phys. Zeitschr., т. 33 (1932), стр. 327.

ной выдержке широкие полосы. Вторичный поток направлен сверху и снизу к цилиндру и удаляется от него влево и вправо по направлению колебаний. Несимметричность полученной на фотографии картины объясняется слабым собственным движением воды.

Возникновение движения около тел, находящихся в стоячих воздушных волнах¹, а также возникновение фигур Кундта хорошо объясняется существованием вторичных потоков третьего рода.

§ 9. Течение с преобладающей ролью вязкости. Как уже было показано в § 3, в тех случаях, когда при движении жидкости преобладающую роль играет вязкость, можно пренебречь силами инерции по сравнению с силами трения. Такого рода движения, называемые *ползущими*, обладают тем общим свойством, что для них сопротивление пропорционально первой степени скорости. Признаком того, что в потоке преобладающую роль играет вязкость, является очень малое число Рейнольдса, что получается вследствие либо очень большой вязкости, либо очень малой скорости, либо очень малых пространственных размеров (необходимо упомянуть также случай очень малой плотности, имеющий место, например, при движении сильно разреженного газа в трубе). В этом параграфе мы рассмотрим два примера течения с преобладающей ролью вязкости; третьему примеру мы посвятим следующий параграф.

а) Практически важным примером ползущего течения является движение воды или воздуха через песок и другие пористые среды. Такое сложное движение через промежутки между отдельными песчинками можно тем не менее проследить в целом, если ввести в расчет объем жидкости, протекающей в одну секунду через единицу площади сечения, мысленно проведенного в пористой среде. Эта величина имеет размерность скорости и называется скоростью фильтрации. Согласно сказанному выше или по аналогии с законом Гагена–Пуазейля для ламинарного движения в трубах, скорость фильтрации при ползущем течении можно принять пропорциональной градиенту давления. Следовательно, обозначая составляющие скорости фильтрации по осям x, y, z через u, v, w , мы можем написать:

$$u = -k \frac{dp}{dx}, \quad v = -k \frac{dp}{dy}, \quad w = -k \frac{dp}{dz}. \quad (34)$$

Эти уравнения выражают собой так называемый *закон фильтрации*

¹См., например, Andrade. Proc. Roy. Soc. (A), т. 134 (1931), стр. 445.

Дарси¹. Подставляя значения u, v, w в уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

(см. § 3 гл. II), мы получим:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \quad (35)$$

Следовательно, давление p , подобно потенциалу скоростей Φ потенциального течения, удовлетворяет уравнению Лапласа, и составляющие скорости фильтрации u, v, w могут быть получены из давления совершенно так же, как скорости потенциального движения жидкости без трения из потенциала скоростей Φ [при условии, если не обращать внимание на знак минус в уравнениях (34), не имеющий, впрочем, существенного значения]. Таким образом, движение подпочвенных вод является потенциальным течением такого же рода, как и потенциальные течения, рассмотренные в § 10 гл. 2. Однако в одном отношении оно существенно отличается от последних течений: в то время как потенциал скоростей Φ на поверхностях раздела претерпевает разрыв, а при течениях с циркуляцией даже многозначен, давление p в соответствии со своей физической природой везде должно быть однозначно и непрерывно.

Уравнения (34) и (35) позволяют проследить движение подпочвенных вод в различных типичных случаях, например, при откачивании воды из колодца. Пользуясь этими уравнениями, можно найти вблизи колодца распределение скоростей и понижение уровня подпочвенных вод.

Линейная зависимость (34) между скоростью фильтрации и градиентом давления имеет место только до тех пор, пока число Рейнольдса, составленное по диаметру песчинок, остается достаточно малым. Клинг², на основе обработки опытов разных авторов, наблюдавших течение через искусственный грунт из шаровых частиц, нашел, что предельное значение указанного числа Рейнольдса равно

$$R = \frac{ud}{\nu} = 10.$$

¹Darcy H., Les fontaines publiques de la ville de Dijon (1856), стр. 590.

²Kling G., VDI-Zeitschr., т. 84 (1940) стр. 85; см. также Barth W. G. und Esser W., Forschung, т. 4 (1933), стр. 82, и Kayser H. G., Forschung, т. 6 (1935), стр. 81.

Для области чисел Рейнольдса, меньших этого значения, градиент давления оказался равным

$$-\frac{dp}{dx} = 1000 \frac{\mu u}{d^2},$$

а для области чисел Рейнольдса свыше $R = 200$ и до $R = 5000$ (наибольшее значение, имевшее место в опытах)

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\zeta}{d} \rho \frac{u^2}{2},$$

где $\zeta = 94 \cdot R^{-0,16}$.

В промежуточной области (от $R = 10$ до $R = 200$) имеет место постепенный переход от линейной зависимости к квадратичной¹.

б) С движением подпочвенных вод в известной мере сходно движение жидкости между двумя пластинками, поставленными на очень небольшом расстоянии друг от друга. В частности, при таком течении получается, как и при ламинарном течении в трубе, параболическое распределение скоростей (см. рис. 99 на стр. 171). Однако при достаточно малой скорости движения среднюю по ширине щели скорость можно принять опять пропорциональной градиенту давления, следовательно, положить, что

$$u = -k \frac{\partial p}{\partial x}, \quad v = -k \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (36)$$

Подставляя эти значения составляющих u и v в уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

мы получим опять уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0,$$

¹Теория движения природных жидкостей (воды, нефти) и газов в пористой среде получила широкое развитие благодаря работам советских ученых; см., например, Жуковский Н. Е., Теоритическое исследование о движении подпочвенных вод. Журнал русского физикохимич. общества, ч. физич., т. 21 (1889), отд. 1, вып. 1, стр. 1 (или Избранные сочинения, т. 1. Москва, 1948, стр. 153); Щелкачев В. Н., Подземная гидравлика, Москва, 1944; Лейбензон Л. С., Движение природных жидкостей и газов в пористой среде, Москва, 1947. Чарный И. А., Подземная гидромеханика, Москва, 1948. (Прим. перев.)

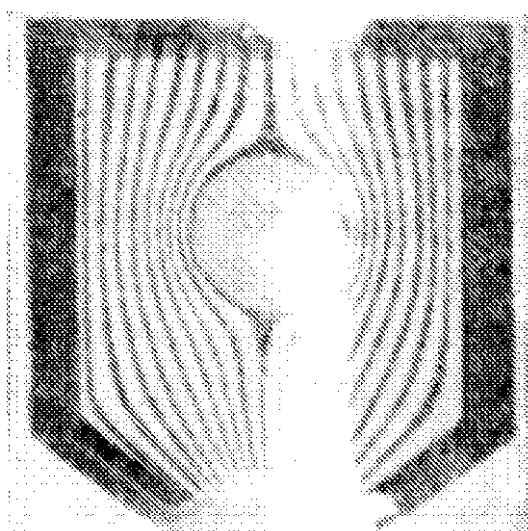


Рис. 120. Обтекание цилиндра в приборе Поля

обтекая вставленный между стеклянными пластинками контур, давали красивую и четкую картину линий тока. Более современный прибор такого рода, работающий с водой и чернилами, сконструирован Полем (R. Pohl). Картина линий тока, изображенная на рис. 120, получена при помощи этого прибора.

аналогичное уравнению, определяющему потенциал скоростей Φ плоского потенциального движения жидкости без трения. Это обстоятельство позволяет определить линии тока потенциального движения жидкости без трения (при условии, что потенциал скоростей однозначен и непрерывен) путем эксперимента с таким движением жидкости, при котором преобладающую роль играет вязкость. Впервые это было сделано Хеле Шоу¹. Он пропускал между двумя стеклянными пластинками бесцветную жидкость (воду, глицерин) и вводил в нее струйки окрашенной жидкости. Эти струйки,

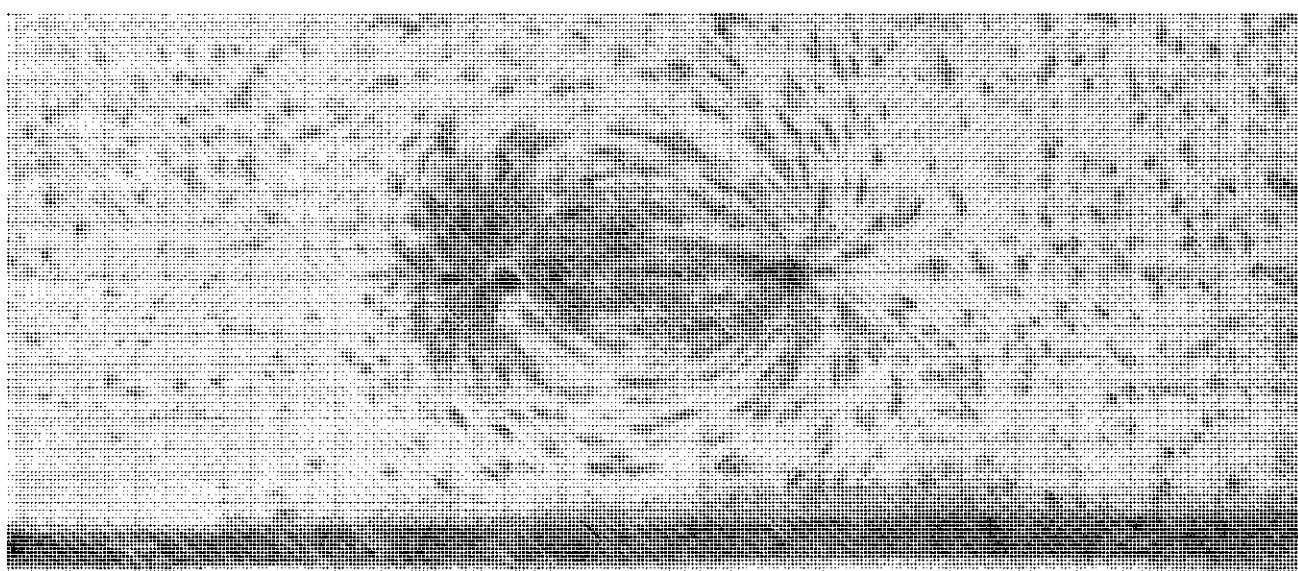


Рис. 121. Движение жидкости около источника и стока

Пражиль (F. Pražil) осуществлял течения, в которых преобладающую роль играет вязкость, в большом плоском баке, наполнявшемся до высоты в несколько миллиметров водой, поверхность которой обсыпалась маленькими кристаллами марганцево-кислого калия. На рис. 121 изображена полученная таким путем картина линий тока совокупности источника и стока (жидкость поступает в бак через левое отверстие и вытекает из бака через правое отверстие).

¹Hele Show, Nature, т. 58 (1898), стр. 34; Roy. Inst. Proc., т. 16 (1899), стр. 49.

В потоках, в которых преобладающую роль играет вязкость, распределение давления имеет совсем другой характер, чем в потоках со слабым проявлением вязкости, а именно, в них падение давления происходит всегда в направлении потока¹ и поэтому, в них нигде не могут наблюдаться возвратные движения жидкости. В связи с этим необходимо особо подчеркнуть, что картины линий тока, полученные указанными способами, не могут дать всестороннего представления о движениях жидкости, в которых вязкость играет небольшую роль, подобно тому как картины линий тока, вычисленные для потенциальных потоков из формул, не могут дать исчерпывающего представления о действительных движениях жидкости при больших числах Рейнольдса. Однако потоки с поверхностями раздела в приборе Поля могут быть осуществлены; для этого между стенкам следует вставить, кроме обтекаемого тела, еще перегородку и соответствующим образом регулировать приток жидкости к обеим сторонам перегородки. Возможность осуществления отрыва потока, конечно, совершенно исключена.

Заметим, что если в только что рассмотренных потоках слой жидкости слишком толстый или скорость течения слишком велика, то внутренние и внешние слои жидкости движутся не одинаково, а именно, в слоях, близких к стенкам, траектории частиц изогнуты больше, чем во внутренних слоях (возникают вторичные потоки, см. § 8). Это обстоятельство необходимо всегда иметь в виду при опытах².

Гюнтер³, заставляя протекать очень вязкие жидкости между стенками, установленными на сравнительно большом расстоянии друг от друга, воспроизводил таким путем двухмерные движения подпочвенных вод, например, просачивание воды под плотиной. Широкие щели были необходимы для того, чтобы исключить влияние капиллярных сил.

§ 10. Гидродинамическая теория смазки. Третьим, технически очень важным примером течения, при котором вязкость играет преобладающую роль, является движение масла в слое смазки между цапфой и подшипником или между ползуном (башмаком) и направляющей опорной поверхностью. Тщательные наблюдения показывают,

¹ Наоборот, при потенциальном движении жидкости без трения падение давления происходит в направлении градиента от $\frac{w^2}{2}$.

² Теорию отклонения траекторий частиц жидкости вследствие ее инерции можно найти в статье Riegels F., ZAMM, т. 18 (1938), стр. 95.

³ Günther E., VDI Zeischr., т. 84 (1940), стр. 942; в этой статье имеется список литературы о движении подпочвенных вод.

что при вращении смазанной цапфы в подшипнике или при скольжении смазанного башмака по опорной поверхности образуется тонкий слой масла, полностью предохраняющий движущуюся часть машины от соприкосновения с опорной поверхностью, и что сам этот слой находится в определенном движении. Способность смазанного подшипника воспринимать большие нагрузки при незначительном трении следует рассматривать именно как результат течения, происходящего в слое смазки¹.

Рассмотрим сначала случай движения ползуна на плоской поверхности, причем для упрощения исследования предположим, что обе скользящие поверхности простираются в направлении, перпендикулярном к движению, столь далеко, что течение жидкости в слое смазки можно рассматривать, по крайней мере в центральной зоне, как плоско-параллельное². Для того чтобы получить установившееся движение, будем рассматривать движение в системе отсчета, в которой ползун покоится, а опорная поверхность (значительно более длинная) движется со скоростью v вправо. Предварительно исследуем течение через щель высотой h , верхнюю стенку которой образует неподвижный ползун, а нижнюю стенку, параллельную верхней, — движущаяся со скоростью v и опорная поверхность. Пусть в направлении движения давление повышается или понижается. Ось x направим в сторону движения опорной поверхности, а ось y — перпендикулярно к стенкам. Тогда градиент давления в направлении движения будет равен $\frac{dp}{dx}$. Для сокращения записи будем обозначать его через p' . Вследствие малой толщины h

¹Автор книги, излагая в этом параграфе гидродинамическую теорию смазки и упоминая о работах ряда иностранных ученых, обходит полным молчанием подлинного творца этой теории — выдающегося русского ученого Н. П. Петрова, классической работа которого «Трение в машинах и влияние на него смазывающей жидкости» была опубликована в Инженерном журнале в 1883 г., т. е. на три года раньше опубликования упомянутой ниже работы О. Рейнольдса. Указанная работа Н. П. Петрова переиздана в 1934 г. в сборнике статей «Гидродинамическая теория смазки» (избранные работы), Москва, 1948. Автор не упоминает также о классической работе крупнейших русских ученых Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина «О трении смазочного слоя между шипом и подшипником», впервые опубликованную в Трудах отделения физич. наук Общества любителей естествознания, т. XIII, вып. 1 (1906), и переизданную в сборнике «Гидродинамическая теория смазки», Москва, 1934, в «Избранных сочинениях» Н. Е. Жуковского, т. I, Москва, 1948, и в «Собрании сочинений С. А. Чаплыгина», т. II, Москва, 1948. (Прим. перев.)

²Теория такого двухмерного движения слоя смазки была разработана Рейнольдсом (не только для ползуна, но и для цапфы в подшипнике); см. Reynolds O., *Phil. Tran. Roy. Soc.* 1886, часть I, или *Papes*, т. II, стр. 228 имеется в переводе на русский язык в сборнике «Гидродинамическая теория смазки», Москва, 1934 (Прим. перев.)

слоя смазки следует считать, что градиент p' не зависит от y . Скорость течения, направление которого в рассматриваемом случае совпадает с осью x , обозначим через u (в более общем случае, когда стенки не совсем параллельны, для характеристики движения также вполне достаточно одной только составляющей скорости u ; составляющая скорости по оси y нужна только для составления уравнения неразрывности). Пренебрежем инерцией и допустим, что состояние движения в направлении оси x изменяется медленно, точнее, медленнее по сравнению с более быстрым изменением в направлении оси y (такое допущение означает, что можно пренебречь величиной $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ по сравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$).

Тогда, имея в виду сказанное в конце § 1, мы можем написать:

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = p',$$

откуда после интегрирования получим:

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = p' y + C_1.$$

Интегрируя еще раз, найдем:

$$\mu = p' \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2. \quad (38)$$

Для $y = 0$ скорость u должна быть равна скорости v ; опорной поверхности относительно ползуна; этому требованию мы удовлетворим, приняв $C_2 = \mu v$. Для $y = h$ должно быть $u = 0$, следовательно,

$$C_1 = - \left(\frac{\mu v}{h} + \frac{p' h}{2} \right).$$

Подставляя эти значения постоянных C_1 и C_2 в уравнение (38), мы получим:

$$u = \frac{p'}{2\mu} (y^2 - hy) + \frac{v}{h} (h - y). \quad (39)$$

Сила трения на единицу площади, считаемая положительной, равна на нижней стенке:

$$\tau_0 = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 = -C_1 = \mu \frac{v}{h} + \frac{p' h}{2}, \quad (40)$$

а на верхней стенке:

$$\tau_1 = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_h = \mu \frac{v}{h} - p' \frac{h}{2}. \quad (41)$$

При использовании полученного результата необходимо иметь в виду, что повышению давления в положительном направлении оси x соответствует положительное значение p' ; следовательно, отрицательное значение p' означает, что в положительном направлении оси x происходит падение давления.

Определим теперь количество жидкости Q , протекающей в единицу времени через щель. Знание этого количества нам потребуется для формулирования условия неразрывности. Через поперечное сечение высотой h протекает на единицу длины, в направлении, перпендикулярном к осям x и y , количество жидкости

$$Q = \int_0^h u \, du.$$

Выполняя интегрирование, мы получим:

$$Q = \frac{vh}{2} - \frac{p'h^3}{12\mu}. \quad (42)$$

После этих предварительных вычислений мы можем приступить к решению поставленной задачи. Найдем такое ее решение, при котором давление под ползуном p , начинаясь от атмосферного давления p_0 около края ползуна, сначала сильно возрастает вместе с x , а затем опять уменьшается до атмосферного давления p_0 . Только при таком распределении давления ползун, несмотря на большую нагрузку, не будет соприкасаться с опорной поверхностью. При постоянной высоте h щели такое распределение давления невозможно. В самом деле, вследствие неразрывности движения должно быть $Q = \text{const}$; но v есть скорость ползуна, следовательно, также есть постоянная величина, поэтому при постоянном h градиент давления p' не может изменяться. Следовательно, мы должны принять, что высота h изменяется вместе с x . Решая уравнение (42) относительно p' , мы получим:

$$p' = \frac{dp}{dx} = 12\mu \left(\frac{v}{2h^2} - \frac{Q}{h^3} \right). \quad (43)$$

Интегрируя это уравнение, мы найдем p как функцию от x :

$$p = 12\mu \left(\frac{v}{2} \int \frac{dx}{h^2} - Q \int \frac{dx}{h^3} \right) + C. \quad (44)$$

Постоянную интегрирования C и пока неизвестное значение Q мы определим из условия, что на обоих концах ползуна должно быть $p = p_0$. Зная Q , мы будем знать распределение давления под ползуном, после чего сумеем вычислить путем еще одного интегрирования результирующую сил давления на ползун, равную на единицу длины в направлении, перпендикулярном к осям x и y , интегралу $\int_0^l p dx$, и момент

этих сил, равный $\int_0^l px dx$. Отношение момента к результирующей силе даст нам расстояние точки пересечения результирующей сил давления с осью x от точки $x = 0$. Полная сила трения, на основании уравнения (40), равна $\int_0^l \tau_0 dx$. Складывая ее с силой $\int_0^l p dx$, мы найдем результирующую силу, действующую на ползун, по величине, направлению и положению для каждого заданного закона $h = h(x)$ изменения высоты щели. Так как обычно результирующая сил давления задана, то выполнение указанных вычислений дает возможность определить высоту щели.

Можно было бы вычислить полную силу трения, исходя из выражения для касательного напряжения τ_h на верхней стенке щели, т. е. на нижней поверхности ползуна. Однако при таком вычислении необходимо иметь в виду, что на нижней поверхности ползуна, наклоненной к оси x на угол, тангенс которого равен

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{dh}{dx},$$

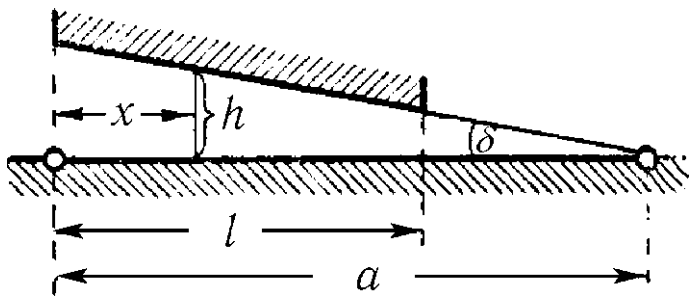
давление p дает составляющую в направлении движения. Так как на верхней поверхности ползуна имеет место атмосферное давление p_0 , эта составляющая равна

$$- \int_0^l (p - p_0) \frac{dh}{dx} dx.$$

Интегрируя по частям и имея в виду, что $p = p_0$ для $x = 0$ и $x = l$, мы получим:

$$+ \int p' h dx.$$

Используя теперь уравнения (40) и (41), мы найдем для полной силы трения такое же выражение, как и в том случае, когда расчет ведется, исходя из выражения для касательного напряжения τ_0 на опорной поверхности.



Простейший случай переменной высоты щели мы получим, если примем ползун и опорную поверхность плоскими, но наклоненными друг относительно друга на малый угол δ (рис. 122). Пусть абсциссы концов ползуна равны $x = 0$ и $x = l$, а высота щели пусть равна

Рис. 122. Щель переменной высоты

$$h = (a - x)\delta, \quad (45)$$

что означает, что прямая пересечения обеих плоскостей находится на расстоянии a от левого края башмака ($x = 0$). Подставим выражение h в уравнение (44) и вычислим оба интеграла; мы получим:

$$\int_0^x \frac{dx}{h^3} = \frac{1}{2\delta^3} \left[\frac{1}{(a-x)^2} - \frac{1}{a^2} \right] = \frac{2ax - x^2}{2\delta^3 a^2 (a-x)^2},$$

$$\int_0^x \frac{dx}{h^2} = \frac{1}{\delta^2} \left[\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a} \right] = \frac{x}{\delta^2 a (a-x)},$$

следовательно,

$$p = \frac{6\mu x}{\delta^2 a (a-x)} \left[v - \frac{Q(2a-x)}{\delta a (a-x)} \right] + C.$$

Из условия, что для $x = 0$ должно быть $p = p_0$, находим:

$$C = p_0,$$

поэтому

$$p = p_0 + \frac{6\mu x}{\delta^2 a (a-x)} \left[v - \frac{Q(2a-x)}{\delta a (a-x)} \right]. \quad (46)$$

Для того чтобы $p = p_0$ также при $x = l$, выражение в квадратных скобках в правой части уравнения (46) должно быть равно нулю, следовательно,

$$Q = \frac{v\delta a(a-l)}{2a-l}. \quad (47)$$

Подставляя это значение Q в уравнение (46) и заменяя $\delta(a - x)$ опять на h , после легких преобразований мы получим:

$$p = p_0 + \frac{6\mu vx(l - x)}{h^2(2a - l)}. \quad (48)$$

Для оценки среднего давления вычислим сначала давление p_1 под серединой ползуна ($x = \frac{l}{2}$). Давление p_1 не совпадает с максимальным давлением под ползуном, так как высота h щели, согласно уравнению (45), изменяется вместе с x ; однако, если это изменение происходит не слишком быстро, то величина p_1 будет близка к максимальному давлению. Подставляя в уравнение (48)

$$h = \delta \left(a - \frac{l}{2} \right) = h_m,$$

мы получим:

$$p_1 - p_0 = \frac{3}{2} \frac{\mu vl^2}{h_m^2(2a - l)}. \quad (49)$$

Предположим, что давление под ползуном распределяется приближенно по параболе; тогда среднее избыточное давление под ползуном следует принять равным

$$p_m = \frac{2}{3}(p_1 - p_0),$$

или, на основании уравнения (49),

$$p_m = \frac{\mu vl^2}{h_m^2(2a - l)}. \quad (50)$$

Эта формула ясно показывает, что очень малая толщина h_m слоя смазки обеспечивает очень большое давление под ползуном даже при сравнительно малой вязкости μ смазочного вещества. Так как высота щели h уменьшается в направлении течения, то максимум давления на основании уравнения (48) лежит за серединой ползуна в направлении течения, поэтому там же проходит и результирующая сила. В верхней части рис. 123 показано распределение давления согласно уравнению (48), а в нижней части — распределение скоростей в нескольких сечениях щели. Различная кривизна кривых распределения

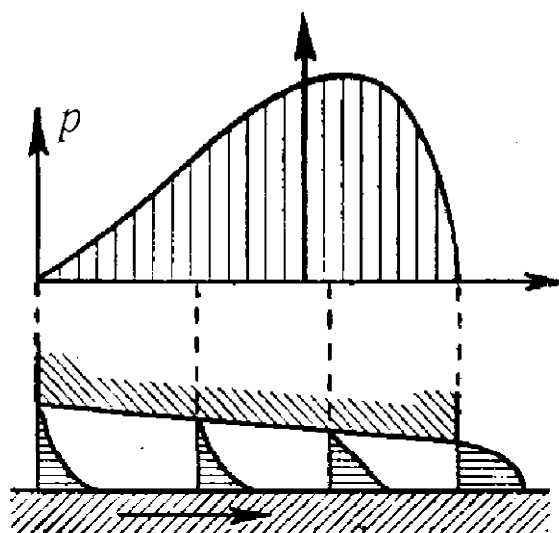


Рис. 123. Распределение давления под башмаком

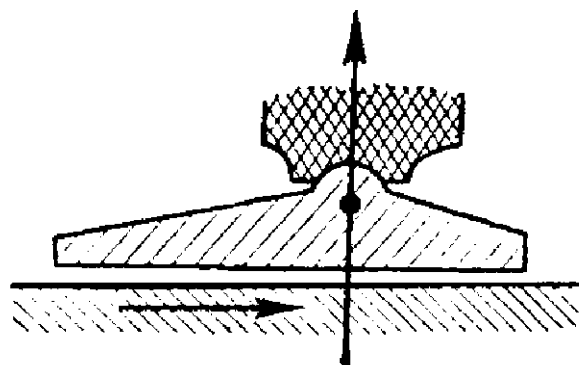


Рис. 124. Башмак с шарниром

скоростей ясно показывает, что давление в разных сечениях — разное. Распределение давления зависит также от отношения $\frac{l}{a}$; положение же результирующей силы давления зависит только от этого отношения. Мичел (E. Michell) снабдил башмак подшипника, названного его именем, шарнирным соединением, расположенным немного дальше середины башмака по направлению движения (рис. 124), и достиг таким путем хорошей работы подшипника при любой нагрузке. Башмак такого подшипника автоматически устанавливается под определенным углом наклона к опорной поверхности.

В действительности в подшипнике Мичела часть масла, попадающая под башмак во входном сечении щели, вытекает с боков башмака. Это приводит к довольно значительному уменьшению давления под башмаком, но в качественном отношении все остается по-прежнему¹.

Характер поля давления под башмаком приводит к тому, что касательные напряжения на поверхности башмака около входного сечения меньше, а около выходного сечения больше обычного трения; на опорной поверхности имеет место обратное соотношение. Значения этих касательных напряжений легко найти при помощи уравнений (40), (41), (43) и (47).

Вместо определения этих значений мы ограничимся нахождением оценки для силы трения, которая будет тем точнее, чем больше отношение $\frac{a}{l}$. Для этой цели примем, что распределение касательных напряжений изображается трапецией, поэтому среднее значение силы

¹Michell A. G. H., Zeitschr. f. Math. u. Physik, т. 52 (1905), стр. 123 [имеется в переводе на русский язык в сборнике «Гидродинамическая теория смазки», Москва, 1934 (Прим. перев.)]. В статье Мичела исследован также случай башмака конечной ширины с боковым выходом масла.

трения на единицу площади можно считать приближенно равным силе трения на средней линии трапеции. Так как на этой линии величина p' очень мала, то, на основании равенства (40), мы имеем:

$$\tau_m \approx \frac{\mu v}{h_m}. \quad (51)$$

Определим из уравнения (50) толщину h_m слоя смазки:

$$h_m = \sqrt{\frac{\mu v l^2}{p_m(2a - l)}}. \quad (52)$$

Подставляя это значение h_m в уравнение (51), мы получим:

$$\tau_m = \sqrt{\frac{\mu v p_m}{l}} \sqrt{\frac{2a - l}{l}}. \quad (53)$$

Величина $\frac{\mu v}{l}$ есть не что иное, как то напряжение трения (очень малое), которое возникло бы в том случае, если толщина слоя смазки была бы равна l (!). Следовательно, действительное напряжение трения по порядку своей величины равно среднему геометрическому из только что указанного малого напряжения трения и среднего значения нагрузки. Таким образом, при заданных значениях l и a сопротивление скольжению изменяется пропорционально корню квадратному из вязкости, из нагрузки и из скорости. При точном вычислении касательных напряжений получилась бы совершенно такая же зависимость, но, конечно, с другим коэффициентом, чем в формуле (53).

В теории трения скольжения твердых тел вводится, как известно, коэффициент трения скольжения, равный отношению силы трения к нормальной силе давления. В рассматриваемом случае этот коэффициент равен

$$f = \frac{\tau_m}{p_m}.$$

Следовательно, при заданных значениях l и a , т. е. при заданных длине и наклоне башмака, коэффициент f пропорционален величине $\sqrt{\frac{\mu v}{p_m l}}$.

Рассмотрим числовой пример. Пусть $\mu = 1$ г/см сек, $v = 100$ см/сек, $p_m = 10$ кг/см² $\approx 10^7$ дин/см², $l = 10$ см. В таком случае

$$\sqrt{\frac{\mu v}{p_m l}} = 10^{-3}.$$

Далее, пусть $a = 2l$; тогда числовой множитель в равенстве (53) будет равен $\sqrt{3} = 1,732$, следовательно,

$$f = \frac{1}{577}.$$

Переписав равенство (52) в виде

$$h_m = l \sqrt{\frac{\mu v}{p_m l}} \cdot \sqrt{\frac{l}{2a - l}},$$

мы найдем, что средняя толщина слоя смазки равна

$$h_m = 10 \text{ см} \cdot 10^{-3} \sqrt{\frac{1}{3}} = 0,0577 \text{ мм}.$$

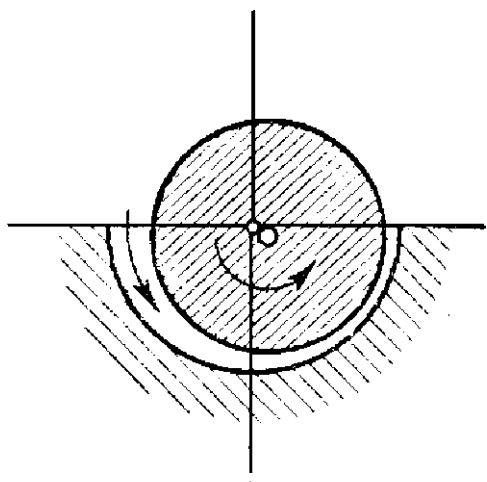


Рис. 125. Вращение цапфы в подшипнике

Для смазанной цапфы, вращающейся в подшипнике, соотношения получаются не столь простыми, как для ползуна. Это вполне понятно, так как теперь в расчет должна быть введена новая постоянная величина — так называемый зазор, т.е. ширина s щели при центральном положении цапфы в подшипнике (разность между радиусом подшипника $r + s$ и радиусом цапфы r и, кроме того, две неизвестные величины — горизонтальное и вертикальное перемещение центра цапфы относительно центра подшипника. Общая картина явления получается

такая же, как и при движении ползуна: под цапфой образуется клинообразная прослойка масла, увлекаемая вращающейся цапфой от широкой стороны щели к узкой (рис. 125). Вычисления получаются очень сложными, но они упрощаются, если эксцентриситет цапфы e мал по сравнению с зазором s . Такой случай имеет место при быстром вращении хорошо смазанной и умеренно нагруженной цапфы в полностью закрытом подшипнике. В этом случае можно принять, что

$$h = s + e \cos(\phi + \alpha),$$

где ϕ есть центральный угол, и развернуть квадрат величины h , который входит в вычисления, в ряд по биному Ньютона. Эти вычисления выполняются совершенно так же, как и в случае ползуна, причем по-прежнему принимается, что ширина цапфы — бесконечная. В результате получается, что

$$\frac{e}{s} \sim \frac{p_m s^2}{\mu v r}, \quad (54)$$

где p_m есть среднее давление в слое смазки, r — радиус цапфы и v — окружная скорость. Обе части этого соотношения представляют собой безразмерные величины. Структуру правой части этого соотношения можно было бы предвидеть на основании формулы (50). В самом деле, формулу (50) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{l}{2a - l} = \frac{p_m h_m^2}{\mu v l}.$$

Левая часть этого равенства имеет чисто геометрический характер и по своему смыслу аналогична отношению $\frac{e}{s}$; правая же часть отличается от правой части соотношения (54) только тем, что в нее вместо s входит h_m , а вместо радиуса r — величина l .

В более общем случае¹, когда эксцентриситет цапфы e нельзя считать малым по сравнению с зазором s , отношение $\frac{e}{s}$ является функцией числа

$$\frac{p_m \cdot s^2}{\mu v r} = L.$$

Функцией этого же числа является и угол α , образуемый направлением результирующей силы с прямой, соединяющей центры цапфы и подшипника. Угол α в большинстве случаев близок к 90° . Результирующая сила пересекает окружность подшипника в определенной точке, впереди которой по направлению вращения расположена та точка, которая ближе всего отстоит от цапфы.

Безразмерное число L учитывает влияние на работу подшипника его нагрузки, зазора, вязкости масла и окружной скорости. Поэтому результаты опытов целесообразно относить к определенным значениям этого числа².

Для коэффициента трения подшипника, т. е. для отношения силы трения, действующей вдоль окружности подшипника, к нагрузке на подшипник, получается такое же выражение, как и для коэффициента трения ползуна, а именно:

$$f_1 = \text{число} \cdot \sqrt{\frac{\mu v}{p_m r}} = \text{число} \cdot \frac{s}{r} \sqrt{L}.$$

¹Reinolds O. — см. сноску на стр. 208; Sommerfeld A., Zeitcher. f. Math. u. Phys., т. 50 (1904) [имеется в переводе на русский язык в сборнике «Гидродинамическая теория смазки», Москва, 1934. (Прим. перев.)].

²О подробностях см., например, G ü m b e l – E v e r l i n g, Reibung und Schmierung im Maschinenbau, Berlin, 1925.

Вальгер¹, производивший опыты с подшипником, охватывавшим цапфу примерно наполовину (длина его по окружности составляла $1,23d$), получил для последнего числа значение 2,4.

В предыдущих рассуждениях мы молча предполагали, что достаточный приток масла и не слишком малая скорость вращения цапфы (или не слишком большая нагрузка на нее) обеспечивают существование масляной пленки, покрывающей всю поверхность подшипника и предупреждающей соприкосновение металлических поверхностей цапфы и подшипника. Так как точность обработки этих поверхностей имеет некоторый предел, то при слишком малой ширине h щели нельзя избежать соприкосновения цапфы и подшипника. В таком случае возникают явления, которые лучше объясняются обычной теорией трения твердых тел. При пользовании выведенными формулами необходимо исключить также случай возникновения в масляной пленке давлений, значительно меньших атмосферного. Возникновение таких давлений сразу приводит к разрыву масляной пленки. Тщательные измерения, выполненные Фресселем² для подшипника, целиком погруженного в масло, показали, что в месте разрыва отнюдь не образуется вакуум, как этого можно было бы ожидать по аналогии с таким движением воды, при котором возникает кавитация (см. гл.V). Наоборот, давление здесь только незначительно отличается от атмосферного, что объясняется сильным выделением газов из масла. Разрыв пленки наблюдается, как правило, при большой нагрузке цапфы; в результате разрыва создаются условия, сходные с условиями работы подшипника, лишь частично закрывающего цапфу. На теории такого подшипника мы не можем здесь останавливаться.

Выведенные здесь соотношения хорошо подтверждаются опытом для случая умеренной нагрузки цапфы или ползуна³. При большой нагрузке происходит нагревание смазки, что приводит к значительному уменьшению ее вязкости, в результате чего возникают значительные отклонения от выведенных формул. Фогельполь показал⁴, что получающиеся в этом случае весьма сложные зависимости доступны точному теоретическому исследованию. Из полученных им результатов упомянем лишь о следующем: более выгодны для смазки те масла, вязкость которых уменьшается с температурой незначительно. В частности, Фо-

¹ Walger, Schmiertechnische Untersuchungen. VDI-Zeitschrift 1932, стр. 205.

² Frössel W., Forschung, т. 9, № 6 (1938), стр. 261.

³ Frössel W., Forschung, т. 9, № 6 (1938), стр. 261.

⁴ Vogelpohl G., Beiträge zur Kenntnis der Gleitlagerreibung VDI-Forschungsheft № 386, (1938).

гельполь указал также на то, что при так называемом полужидкостном или смешанном трении преобладающая часть нагрузки воспринимается «гидродинамически» тем небольшим количеством масла, которое содержится между неровностями обеих соприкасающихся поверхностей.

Вязкость масел довольно значительно возрастает с увеличением давления. Это несколько улучшает условия работы подшипника при больших нагрузках, правда, при условии, что окружная скорость вращения остается небольшой. Согласно опытам Кискальта¹ при нагрузке в 600 кг вязкость от двух до четырех раз больше, чем при нагрузке в 1 кг.

§ 11. Движение жидкостей в прямых трубах и каналах с постоянным поперечным сечением. Выведенный в § 1 закон Гагена–Пуазейля, согласно которому падение давления увеличивается пропорционально скорости, применим только для скоростей, меньших критической (см. § 4). Для скоростей, больших критической (т. е. для турбулентных движений), падение давления, как об этом уже было упомянуто в § 4 более или менее точно пропорционально второй степени скорости. В этом случае касательное напряжение на стенке $\tau_{ст}$ (для некруглых поперечных сечений — среднее значение касательных напряжений на стенке) может быть принято равным

$$\tau_{ст} = \lambda' \rho \frac{w^2}{2},$$

где λ' есть число, зависящее от ряда обстоятельств, в первую очередь — от шероховатости стенок, а w — средняя скорость. Падение давления на участке трубы или канала длиной l должно уравниваться касательными напряжениями на поверхности стенок (см. рис. 91 и относящиеся к нему вычисления в § 1). Следовательно, обозначая через F площадь поперечного сечения и через U — смоченный периметр², мы будем иметь:

$$(p_1 - p_2)F = \tau_{ст}lU = \lambda' \rho \frac{w^2}{2}lU, \quad (55)$$

откуда

$$\frac{p_1 - p_2}{l} = \lambda' \frac{U}{F} \rho \frac{w^2}{2}. \quad (56)$$

Величина

$$\frac{F}{U} = r_h \quad (57)$$

¹Kiesskalt S., VDI-Forschungsheft № 291 (1927).

²В открытом русле (река или канал) свободная поверхность воды не причисляется к смоченному периметру.

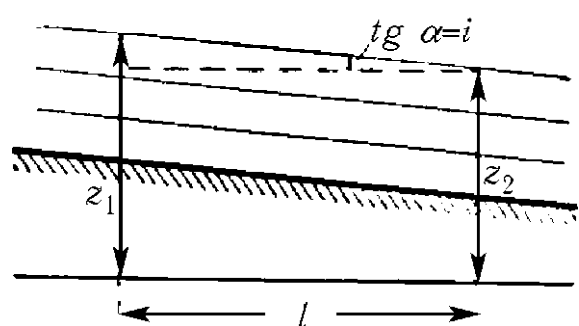


Рис. 126. Течение в русле с уклоном

называется *гидравлическим радиусом*. Для потока, движущегося под действием силы тяжести (примером такого потока является река), обычно задается уклон его свободной поверхности

$$i = \frac{z_1 - z_2}{l} \quad (58)$$

(рис. 126), связанный с падением давления вдоль горизонтальной линии соотношением:

$$p_1 - p_2 = g\rho(z_1 - z_2) = g\rho l i \quad (59)$$

(см. § 6 гл. 1). Используя соотношения (57), (58) и (59), мы получим из уравнения (55):

$$\tau_{ст} = g\rho r_h i, \quad (60)$$

а из уравнения (56):

$$i = \frac{1}{g\rho} \frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{\lambda'}{r_h} \frac{w^2}{2g}. \quad (61)$$

Решая последнее уравнение относительно w , мы найдем:

$$w = \sqrt{\frac{2g}{\lambda'} r_h i}. \quad (62)$$

В приложениях к рекам и каналам эта формула обычно записывается в следующем виде:

$$w = C \sqrt{r_h i}. \quad (63)$$

Формула (63) называется *формулой Шези* (Chézy). Коэффициент C является функцией только гидравлического радиуса и шероховатости. При глубине воды от 0,5 до 3 м этот коэффициент равен $80 \text{ м}^{1/2} \text{ сек}^{-1}$ для стенок из гладкого дерева или гладкой оштукатуренной каменной кладки, от 30 до $50 \text{ м}^{1/2} \text{ сек}^{-1}$ для земляных стенок и от 24 до $40 \text{ м}^{1/2} \text{ сек}^{-1}$ для стенок из гальки.

Было предложено большое количество формул для коэффициента C , более точно передающих результаты наблюдений¹. Среди формул разной структуры имеются и степенные. При равной шероховатости

¹См. например, Forchheimer Ph., Hydraulik [имеется в переводе на русский язык: Форхгеймер Ф., Гидравлика, Москва, 1935 (Прим. перев.)]

стенок коэффициент C может быть принят пропорциональным корню от 6 до 8 степени из гидравлического радиуса. Однако для определения коэффициента пропорциональности необходимо правильно оценить шероховатость стенок, а это именно и является наиболее трудным. Для широких рек с естественным дном из гравия и песка можно принять по Штриклеру¹, что

$$C = 21,1 \sqrt[6]{\frac{t}{d_G}} m^{1/2} сек^{-1}, \quad (64)$$

где t есть глубина воды, а (d_G — средний диаметр зерен гравия и песка).

Влияние различных форм поперечного сечения удовлетворительно учитывается величиной гидравлического радиуса. Это указывает на то, что касательное напряжение во всех точках стенок приблизительно одинаковое [заметим, что при выводе формулы (63) мы это подразумевали].

В § 16 предыдущей главы мы упомянули, что скорость $\sqrt{gh}$, с которой распространяется низкий вал, является граничной между спокойным и стремительным течением. Полагая $h = r_h$, что для широких рек вполне допустимо, мы получим для граничного случая:

$$w = C \sqrt{r_h i_1} = \sqrt{g r_h},$$

следовательно,

$$i_1 = \frac{g}{C^2}.$$

Таким образом, для $C = 50 m^{1/2} сек^{-1}$ мы имеем: $i_1 = 1/250$. Если для указанного значения C уклон $i < i_1$, то имеет место покойное течение, если же $i > i_1$, то течение в реке стремительное.

Для труб с круглым поперечным сечением радиуса r диаметра $d = 2r$ гидравлический радиус равен

$$r_h = \frac{F}{U} = \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2} = \frac{d}{4}.$$

Подставляя в уравнение (56) $\frac{4}{d}$ вместо $\frac{U}{F}$ и обозначая $4\lambda'$ через λ , мы получим:

$$\frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{\lambda}{d} \frac{\rho w^2}{2}. \quad (65)$$

¹ Strickler, Mitteilung 16 des Eidgen. Amtes für Wasserwirtschaft, Bern 1923.

Величина λ называется *коэффициентом сопротивления*. Вводя такое определение коэффициента сопротивления, т.е. полагая $\lambda = 4\lambda'$, мы следуем практике инженеров, предпочитающих пользоваться в своих расчетах диаметром d вместо радиуса r . В физической литературе, наоборот, пользуются чаще радиусом r , а не диаметром d , поэтому соответствующим коэффициентом сопротивления будет

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\lambda.$$

Наглядный смысл коэффициента сопротивления λ состоит в следующем: величина

$$l = \frac{d}{\lambda}$$

есть тот отрезок трубы, на протяжении которого теряется динамическое давление, соответствующее средней скорости w .

Из соображений о подобии следует, что для двух *шероховатых труб* различного диаметра коэффициент сопротивления λ будет одинаковым в том случае, если размеры выступов шероховатости в обеих трубах относятся так же, как диаметры труб. Гопф и Фромм¹ нашли, что для геометрически подобных шероховатостей коэффициент сопротивления λ пропорционален величине

$$\left(\frac{k}{r_h}\right)^{0,314},$$

где k есть линейный размер шероховатости, например, высота выступов, образующих шероховатость. Такое соотношение между λ и гидравлическим радиусом r_h хорошо согласуется с указанным выше правилом, устанавливающим связь между коэффициентом C и r_h .

Сравнивая равенство (65) с равенством (61) и имея в виду, что

$$C = \sqrt{\frac{2g}{\lambda'}} \quad \text{и} \quad r_h = \frac{d}{4}$$

мы получим:

$$\lambda = \frac{8g}{C^2}.$$

Отсюда следует, что указанным выше значениям C соответствуют значения λ от 0,012 до 0,136.

¹ H o p f und F r o m m, ZAMM, т. 3, (1923), стр. 329 и 339.

Турбулентное течение в *гладких* трубах служило предметом многочисленных опытных исследований, некоторые из которых выполнены с очень большой точностью. Относительно такого течения с точки зрения теории можно заранее утверждать только то, что коэффициент сопротивления λ имеет одинаковое значение во всех случаях, когда остается постоянным число Рейнольдса $R = \frac{wd}{\nu}$ § 2. Следовательно, λ может быть функцией только от R . В самом деле, наблюдения показывают, что при увеличении R коэффициент сопротивления λ , уменьшается. Блазиус¹ в результате обработки опытов Сафа (Saph) и Шодера (Schoder) показал, что примерно до $R = 80\,000$,² можно принять следующую зависимость между λ и R :

$$\lambda = \frac{0,3164}{R^{1/4}}. \quad (66)$$

Несколько позже Лис³, обработав опыты Стантона (Stanton) и Паннела (Pannel), а также Якоб и Эрк⁴ на основе собственных опытов нашли, что зависимость между λ и R вплоть до $R = 400\,000$ лучше передается формулой

$$\lambda = 0,0072 + \frac{0,611}{R^{0,35}}. \quad (67)$$

В дальнейшем Герман⁵ провел опыты почти до числа Рейнольдса $R = 2 \cdot 10^8$ и получил формулу:

$$\lambda = 0,0054 + \frac{0,396}{R^{0,3}} \quad (68)$$

К теоретическому изучению проблемы сопротивления при движении в трубах впервые удалось подойти Карману⁶. Исходя из соображений о подобии, он установил, что имеет место следующее соотношение:

$$u_{\max} - u(y) = v_* f\left(\frac{y}{r}\right), \quad (69)$$

¹Blasius, Forschungsarbeiten des Ver. Deutsch. Ing., 1913, № 131.

²Напоминаем, что при составлении числа Рейнольдса для движений в трубах можно пользоваться в качестве характерной длины радиусом, диаметром и гидравлическим радиусом. В соответствии с принятой в этой книге установкой на инженерные расчеты мы пользуемся диаметром.

³Lees, Phil. Trans. Roy. Soc. London (A) т. 214 (1914), стр. 199; Proc. Roy. Soc. London (A), т. 91 (1915), стр. 40.

⁴Jakob und Erk, Forschungsarbeiten des Ver. Deutsch. Ing. 1924, № 267.

⁵Hermann R., Диссертация, Leipzig, 1930.

⁶v.Kármán, ZAMM., т. 1 (1921), стр. 233.

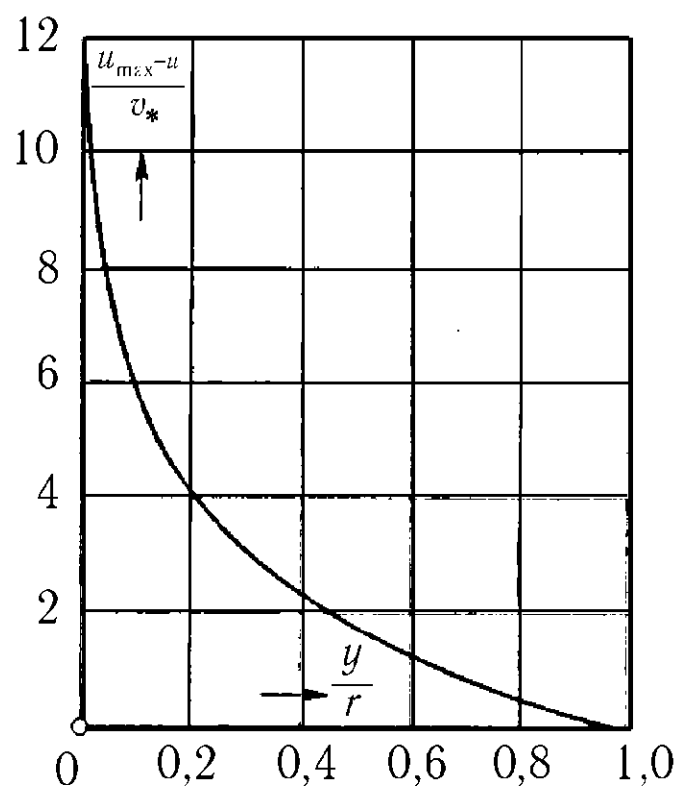


Рис. 127. График функции $f\left(\frac{y}{r}\right) = \frac{u_{\max} - u}{v_*}$, построенный на основании результатов опыта

т. е. разность между наибольшей скоростью в середине трубы и скоростью на расстоянии y от стенки равна динамической скорости $v_* = \sqrt{\frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho}}$, умноженной на некоторую универсальную функцию от отношения $\frac{y}{r}$. Это соотношение одинаково применимо и к гладким, и к шероховатым трубам, однако вполне строго только для очень больших чисел Рейнольдса, т. е. для случая, когда вязкостью можно пренебрегать. Карман теоретически вывел для функции f формулу, которая дает хорошее совпадение с опытом. В этой формуле только один коэффициент, именно коэффициент κ , упоминавшийся уже в § 5, должен быть определен из опыта.

На рис. 127 изображен график функции $f\left(\frac{y}{r}\right)$, построенный на основании результатов опыта.

Пользуясь рис. 127 и уравнением (69), легко вывести формулу для средней скорости w :

$$w = u_{\max} - 4,07v_*. \quad (70)$$

Имея в виду, что падение давления $-\frac{dp}{dx}$ можно выразить через $\tau = \rho v_*^2$, а $u_{\max}$, на основании формулы (70), — через w , мы можем из уравнения (69) и из одного из уравнений (28), (29) и (33) вывести соотношение между $\lambda = \frac{8v_*^2}{w^2}$ и $R = \frac{wd}{\nu}$ для гладких и шероховатых труб. Не приводя здесь вычислений¹, укажем лишь окончательные результаты. Для гладких труб, если взять в основу уравнение (28), получается соотношение:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,0 \lg(R\sqrt{\lambda}) - 0,8, \quad (71)$$

практически применимое для всех чисел Рейнольдса в турбулентной области.

¹Эти вычисления можно найти, например, у Prandtl–Betz, *Ergebn. d. AVA*, т. 4 (1932), или у Durend, *Aerodynamik Theory*, т. 111; см. также Prandtl, *VDI–Zeitschr.*, т. 77 (1933), стр. 109.

Если же взять в основу уравнение (29), то получается более точное для больших R соотношение:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,95 \lg(R\sqrt{\lambda}) - 0,55. \quad (72)$$

В обоих уравнениях (71) и (72) λ входит и в левую, и в правую части. Однако это обстоятельство не вносит каких-либо трудностей в вычисление λ . В самом деле, достаточно в правую часть подставить какое-нибудь предположительно верное значение λ , а затем, в случае необходимости, повторить вычисление еще раз.

Для шероховатых труб, если взять за основу уравнение (33) и для C_2 принять значение 8,5 (шероховатость, создаваемая зернами песка), то при течении, когда шероховатость проявляет себя в полной мере, получается следующее соотношение:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,0 \lg \frac{r}{k} = 1,74. \quad (73)$$

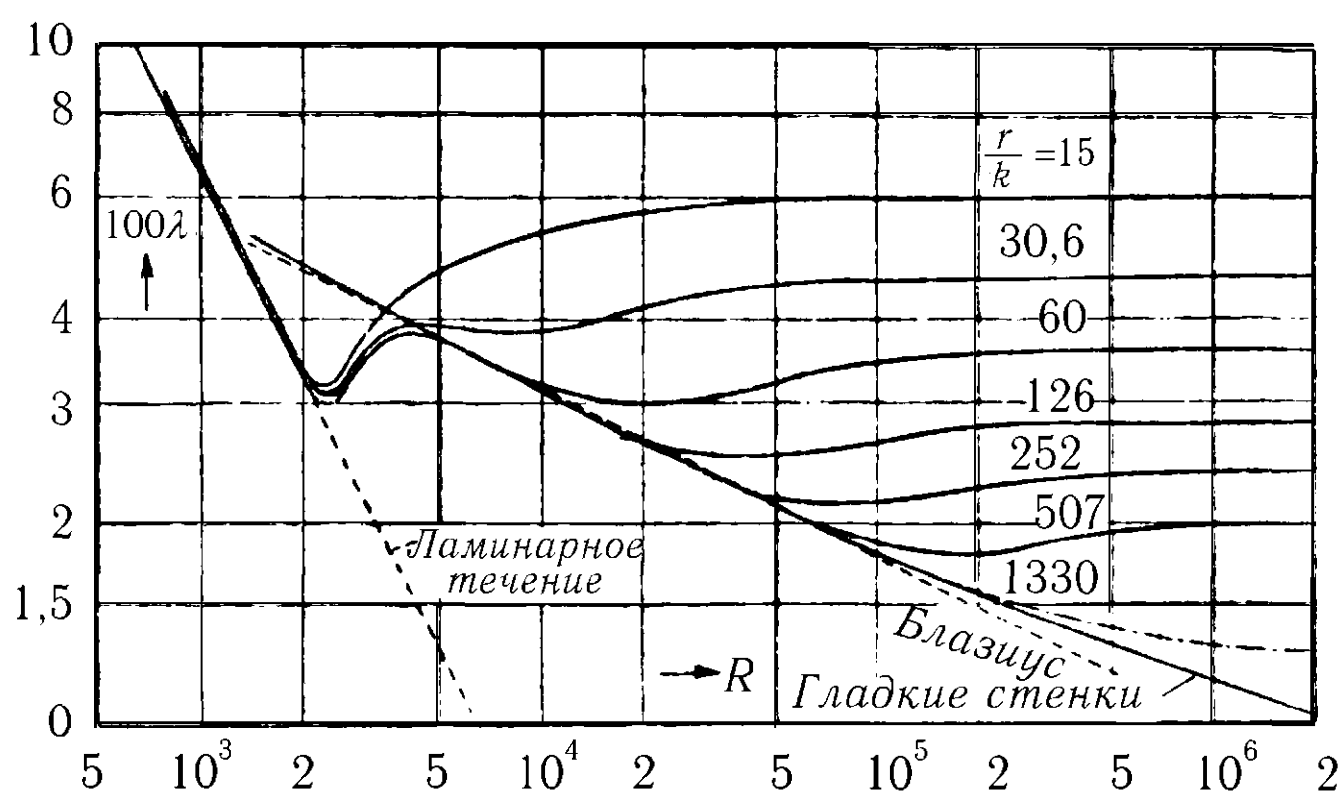


Рис. 128. Зависимость коэффициента сопротивления λ от числа Рейнольдса (сплошные кривые — по измерениям Никурадзе, штрихпунктирная кривая — по измерениям Бауэра и Галавича)

На рис. 128 зависимость λ от числа Рейнольдса для гладких и шероховатых труб изображена в логарифмическом масштабе. Кривые для шероховатых труб (вплоть до самой нижней) получены, путем изме-

рений, Никурадзе¹. В его опытах шероховатость стенок была создана путем наклейки на них песчинок определенного диаметра. Все эти кривые показывают, что переход от «гидравлически» гладкого состояния течения при малых числах Рейнольдса к состоянию, когда влияние шероховатости проявляет себя в полной мере, совершается очень быстро². Это обстоятельство является характерным для шероховатости, образованной близко лежащими друг к другу выступами одинакового размера.

Шероховатость, возникающая в технических условиях, обычно состоит из слоя небольших бугорков, среди которых распределены бугорки большей высоты. В этом случае переход от «гидравлически гладкого» состояния к состоянию развившегося влияния шероховатости совершается значительно постепеннее. Примером может служить кривая, изображенная на рис. 128 штрихпунктиром и полученная Бауэром и Галавичем³ путем измерений для движения горячей воды в «технически гладкой» железной трубе.

Ориентировочное представление о зависимости λ от R в гладких трубах дает следующая табличка (числа округлены):

$R =$	4000	12 000	60 000	240 000	2 500 000
$\lambda =$	0,040	0,030	0,020	0,015	0,010

Подставив в уравнение (4), выражающее закон Гагена–Пуазейля, $Q = w\pi r^2$, можно переписать его в следующем виде:

$$\frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{8\mu w}{r^2} = \frac{32\mu w}{d^2}. \quad (74)$$

Сравнивая уравнение (74) с уравнением (65), мы видим, что они формально совпадают, если ввести в уравнение (74) коэффициент сопротивления

$$\lambda = \frac{64\mu}{\rho w d} = \frac{64}{R}.$$

¹Nikuradse, Strömungsgesetze in rauhen Rohren. VDI-Forschungsheft № 361 (1933)

²Согласно сказанному в § 5, п. d) при таком переходном состоянии величина C_2 должна быть функцией от $\frac{kv_*}{\nu}$, что очень хорошо подтверждается измерениями Никурадзе. См. его работу, упомянутую в сноске на стр. 226, или Prandtl, VDI-Zeitschr., т. 77 (1933), стр. 108.

³Bauer B. und Galavics F., Mitteilung des Fernheiz-Kraftwerks d. ETH. Zürich, 1936

Кривая, соответствующая этой зависимости λ от R , изображена на рис. 128 штрихами¹.

Уравнения (66)–(68) и (71)–(74), а также рис. 128 передают падение давления в трубе правильно только в том случае, когда отрезок трубы, в начале и конце которого измеряются давления (см. § 8 гл. II), находится на достаточном расстоянии от входа, например, на расстоянии, равном 60 диаметрам трубы. Но даже при соблюдении этого условия могут быть отклонения от указанных уравнений, если состояние течения — ламинарное. В том же случае, когда давление измеряется вблизи от входа в трубу или когда измеряется разность давлений между началом и концом трубы, уравнения (66)–(68) и (71)–(74) неприменимы. Объясняется это тем, что течение в трубе принимает свою окончательную форму не сразу, а только после *разгона* на протяжении некоторого так называемого *начального участка*. Если жидкость поступает в трубу из резервуара через *закугленный вход*, то при входе происходит падение давления, равное $\frac{\rho w^2}{2}$; за счет этого падения давления жидкость получает во входном поперечном сечении скорость w . В этом сечении скорость во всех точках практически одинакова, так как перемещению каждой частицы соответствует одинаковое падение давления. Однако трение жидкости о стенки сейчас же приводит к тому, что в возникающем потоке, сначала ламинарном, образуется растущий слой заторможенной жидкости (рис. 129). Вследствие этого скорость ядра течения в середине трубы должна возрастать в такой мере, чтобы через каждое поперечное сечение протекало одно и то же количество жидкости. Увеличение скорости ядра течения влечет за собой падение давления вдоль оси трубы в соответствии с уравнением Бернулли (составленным для ядра течения). Это падение давления, отражающееся также на скорости пограничного слоя (оно увеличивает эту скорость), больше, чем при течении по закону Гагена–Пуазейля. По мере удаления от входа в трубу пограничный слой расширяется и постепенно устанавливается состояние те-

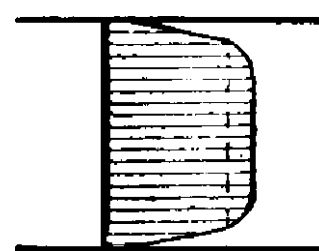


Рис. 129. Профиль скоростей в начальном участке трубы

¹Из новых работ о движении жидкостей в трубах следует упомянуть следующие: Конаков П. К., Новая формула для коэффициента сопротивления гладких труб. Доклады Акад. Наук СССР, т. LI (1946), № 7; Невзглядов В. Г., О турбулентном движении жидкостей в круглых трубах. Изв. Акад. Наук СССР, Отд. техн. наук, 1445, № 9; Невзглядов В. Г., О турбулентном потоке в шероховатых трубах. Доклады Акад. Наук СССР, т. LV (1947), № 2; Якимов Л. К., Новый закон турбулентного движения вязкой жидкости. Доклады Акад. Наук СССР, т. L. (1945). (Прим. перев.)

чения, соответствующее закону Гагена–Пуазейля, если только в этот период времени не возникает турбулентность (см. ниже). Переход от разгонного течения к нормальному, вполне развившемуся течению Гагена–Пуазейля, происходит, согласно расчетам и наблюдениям Шиллера¹, на протяжении начального участка длиной

$$l_1 = 0,03 \frac{d^2 w}{\nu} = 0,03 dR.$$

Следовательно, для чисел Рейнольдса R от 200 до 20000 длина начального участка l_1 составляет от 6 до 600 диаметров трубы.

Это означает, что в коротких трубах с закругленным входом распределение скоростей по поперечному сечению не может изображаться уравнением (3), за исключением того случая, когда число Рейнольдса имеет очень малое значение. Если жидкость поступает в короткую трубу из большого резервуара, то обычно скорость распределяется по поперечному сечению равномерно, за исключением пограничного слоя, где вследствие трения происходит торможение. Аналитическая теория для соответствующей плоской задачи (разгон в широком прямоугольном канале) развита Шлихтингом².

Разгон турбулентного течения происходит на сравнительно более коротком участке, чем разгон ламинарного течения, если только условия входа в трубу обеспечивают быструю турбулизацию течения (для этой цели вход в трубу должен иметь острые края или жидкость должна поступать в трубу через колено). Если же вход в трубу имеет закругленные края, то на некотором участке трубы течение остается ламинарным и только в конце этого участка делается турбулентным. При больших числах Рейнольдса и при отсутствии возмущений у входа длина ламинарного начального участка может достигать величины

$$l_2 = 500\,000 \frac{\nu}{w} = 500\,000 \frac{d}{R}$$

(см. о сопротивлении пластинок в § 15).

Подчеркнем, что все сказанное выше справедливо только для прямых труб. В криволинейной трубе сопротивление всегда больше, чем в прямой трубе. При ламинарном течении даже небольшая кривизна трубы значительно увеличивает сопротивление, если только число Рейнольдса не очень мало. При движении по закруглению центральная часть потока, движущаяся более

¹ Schiller L., Forschungsarbeiten des Ver. Deutsch. Ing. № 248; ZAMM, т. 2 (1922), стр. 96.

² Schlichting H., ZAMM., т. 14 (1934), стр. 368.

быстро, отбрасывается, как уже было упомянуто в § 8, вследствие центробежной силы наружу и вытесняет более медленную часть потока, прилегающую к внешней стороне закругления, внутрь трубы, т. е. по направлению к центру кривизны. Теория этого явления дана Дином¹.

В качественном отношении это явление можно, проследить следующим образом. Пусть радиус кривизны R велик по сравнению с радиусом поперечного сечения трубы. Скорость в центре при параболическом распределении скоростей равна удвоенной средней скорости, т. е. $2w$. Следовательно, в центре сечения градиент давления, обусловленный центробежной силой, равен $\frac{\rho(2w)^2}{R}$ (на единицу длины). В точках, близких к краям поперечного сечения, центробежная сила невелика. Поэтому разность давлений Δp между внутренней и внешней стенками приближенно равна

$$\Delta p \approx \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \frac{4\rho w^2}{R} = 4\rho w^2 \frac{r}{R}.$$

Эта разность давлений обуславливает возникновение вторичных потоков, о которых шла речь в § 8. Оценку для скорости вторичного потока в случае очень слабой кривизны можно получить следующим образом. Пусть центральная полоса имеет в середине трубы скорость v , направленную наружу, а две внешние полосы — такую же скорость, но направленную внутрь закругления (см. рис. 113). Если касательное напряжение на границе обеих полос равно τ_1 , то сила, действующая на центральную полосу на единицу длины в направлении оси, равна приблизительно $2\tau_1 \cdot 2r$. Эта сила должна уравновешиваться с результирующей сил давления $\Delta p \cdot b$, где b есть толщина центральной полосы. Для упрощения расчетов примем, что $b = r$. С другой стороны, можно принять, что

$$\tau_1 \approx \frac{2\mu v}{b/2}$$

(см. вычисления в § 1). Следовательно,

$$16\mu v = 4\rho w^2 \frac{r^2}{R},$$

откуда

$$\frac{v}{w} = \frac{1}{4} \cdot \frac{wr}{\nu} \cdot \frac{r}{R} = \frac{1}{8} R \cdot \frac{r}{R}.$$

Мы получили безразмерную характеристику рассматриваемой задачи. Конечно, эту характеристику можно было бы получить также из соображений о размерностях.

¹Dean W. R., Phil. Mag. (7), т. 4 (1927), стр. 208; т. 5 (1928), стр. 673.

Если кривизна закругления не мала, то тогда вторичный поток полностью изменяет профиль скоростей; наибольшая скорость теперь имеет место вблизи внешней стенки, и вторичное течение происходит главным образом только в своего рода пограничном слое вблизи стенок. Уайт¹ на основе опытов нашел, что сопротивление при ламинарном течении в криволинейной трубе равно сопротивлению при таком же течении в прямой трубе, умноженному на некоторую функцию $f(\mathfrak{D})$, где $\mathfrak{D}$ есть половина среднего геометрического из числа Рейнольдса и указанной выше безразмерной величины $R \cdot \frac{r}{R}$, т. е.

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2}R\sqrt{\frac{r}{R}} = \frac{wr}{\nu}\sqrt{\frac{r}{R}}. \quad (75)$$

Для $\mathfrak{D} < 20$ функция $f(\mathfrak{D})$ лишь немного отличается от единицы; в области $20 < \mathfrak{D} < 1000$ можно пользоваться для определения $\mathfrak{D}$ приближенной формулой²

$$f(\mathfrak{D}) = 0,37\mathfrak{D}^{0,36}. \quad (76)$$

При турбулентном течении влияние небольшой кривизны на сопротивление не столь велико, однако резкие закругления значительно повышают сопротивление.

Если вслед за коленом, поворачивающим течение на определенный угол, следует прямолинейный участок трубы, то в последнем сопротивление также увеличивается. Это связано с тем, что при входе жидкости в прямую трубу под углом профиль скоростей имеет иную форму, чем при прямом входе. Полное добавочное сопротивление при повороте течения, например, на 90° , сравнительно мало зависит от радиуса кривизны закругления, так как короткое закругление с большой кривизной увеличивает сопротивление в целом приблизительно на столько же, на сколько его увеличивает более длинное закругление с малой кривизной.

Потеря давления в закруглениях определяется по формуле:

$$p_2 - p_1 = \frac{\zeta \rho u^2}{2} + \text{обычное трение в трубе,}$$

где ζ есть коэффициент сопротивления закругления. Для ориентировочных расчетов потерь в закруглениях с гладкими стенками и с радиусом кривизны от $R = 4d$ до $R = 10d$ можно пользоваться следующими значениями коэффициента ζ :

угол поворота закругления:	$22\frac{1}{2}^\circ$	45°	60°	90°
коэффициент сопротивления ζ :	0,045	0,075	0,09	0,10.

Для закруглений с шероховатыми стенками коэффициент ζ несколько выше³.

¹ Withe C M., Proc. Roy. Soc. (A), т. 123 (1929), стр. 645.

² См. Adler M., ZAMM., т. 5 (1934), стр. 257.

³ См. Thoma D., Transactions Tokyo Sectional Meeting, Worlds Power Conference 1929, т. II, стр. 446.

§ 12. Движение жидкостей в каналах с переменным поперечным сечением. а) Простейшим примером течения в канале с переменным сечением является истечение жидкости из сосуда через насадок. Случай истечения без гидравлических потерь был рассмотрен нами в § 5, гл. II. Напомним, что вследствие сжатия струи ее поперечное сечение обычно меньше поперечного сечения отверстия F , а именно, оно равно αF , где α есть коэффициент сжатия струи (при истечении через отверстие с острыми краями $\alpha \approx 0,61$). Скорость в середине струи при истечении из сосуда, поперечное сечение которого велико по сравнению с поперечным сечением насадка, обычно очень точно равна $\sqrt{2gh}$. Однако ближе к краям струи скорость вследствие трения притекающей жидкости о стенки насадка меньше указанной величины; при истечении из насадка, изображенного на рис. 32, это уменьшение значительнее, чем при истечении через отверстие в стенке (рис. 31). Таким образом, средняя скорость истечения несколько меньше теоретической и может быть принята равной

$$w = \varphi \sqrt{2gh},$$

где φ есть коэффициент уменьшения скорости. Для малых отверстий и небольших скоростей истечения (т. е. для малых чисел Рейнольдса) этот коэффициент значительно меньше единицы; для больших же отверстий и больших скоростей он почти всегда очень близок к единице (при условии, что поперечное сечение сосуда значительно больше поперечного сечения отверстия). Процесс истечения может быть использован для измерения количества вытекающей жидкости. Для этого надо измерить площадь поперечного сечения F отверстия и высоту уровня жидкости в сосуде и подсчитать секундный расход жидкости по формуле

$$Q = \alpha \varphi F \sqrt{2gh}.$$

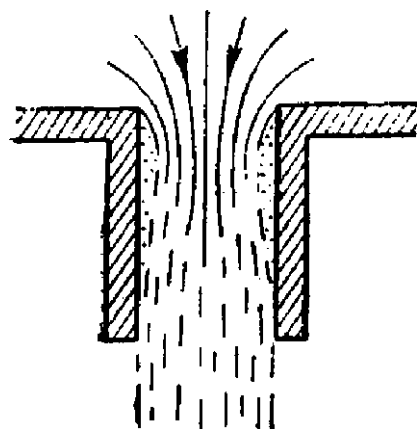
Произведение $\alpha \varphi$ обычно обозначается одной буквой μ и называется *коэффициентом расхода*. Для определения этого коэффициента достаточно взвесить количество жидкости, вытекшее из насадка за определенный промежуток времени.

б) При истечении через насадок с острыми краями (рис. 130) гидравлические потери довольно велики. При входе в насадок происходит такое же сжатие струи, как при истечении из отверстия в стенке, но затем струя опять расширяется и при этом перемешивается с жидкостью из мертвой зоны, окружающей струю (на рис. 130 эта зона зачернена точками). Для истечения через такой насадок теория, изло-

женная в § 1–3 п.с) предыдущей главы, приводит к следующему результату. Если w есть средняя скорость истечения в концевом сечении насадка, то скоростью в самом узком сечении струи будет $\frac{w}{\alpha}$,

где α есть коэффициент сжатия струи. Следовательно, кроме напора $\frac{w^2}{2g}$, теряется еще на-

пор $\frac{w^2}{2g} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right)^2$. Сумму обоих этих напоров следует приравнять высоте уровня жидкости в сосуде. Решив полученное уравнение относительно скорости, мы найдем коэффициент уменьшения скорости:



$$\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - 2\alpha + 2\alpha^2}}.$$

Рис. 130. Насадок с острыми краями

Если $\alpha = 0,61$, то $\varphi = 0,84$.

с) При *внезапном сужении* в трубе (рис. 131), кроме падения давления в соответствии с уравнением Бернулли, возникает еще потеря давления, аналогичная рассмотренной в предыдущем пункте.

В самом деле, при переходе жидкости в суженную часть трубы происходит такое же сжатие струи, как и при истечении через насадок с острыми краями. Коэффициент сжатия струи, согласно Вейсбаху (Weisbach), равен

$$\alpha = 0,63 + 0,37 \left(\frac{F_1}{F_0} \right)^3,$$

где F_1 есть площадь поперечного сечения трубы до сужения, а F_0 после сужения.

Если вслед за сужением поперечное сечение трубы опять расширяется (рис. 132), то происходит потеря давления

$$p_0 - p_2 = \frac{\rho w_0^2}{2} \left(\frac{F_0}{\alpha F_1} - 1 \right)^2.$$

Измеряя разность давлений $p_0 - p_1$, которая больше, чем разность $p_0 - p_2$, можно определить количество жидкости, протекающей через трубу. Если отвлечься от небольших потерь, то согласно уравнению Бернулли,

$$p_0 - p_1 = \frac{\rho w_0^2}{2} \left[\left(\frac{F_0}{\alpha F_1} \right)^2 - 1 \right].$$

Если давления p_0 и p_1 измерены через отверстия, сделанные в стенке трубы до и после сужения, а коэффициент сжатия известен из других

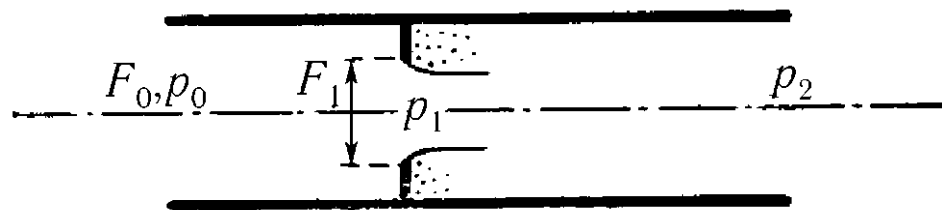
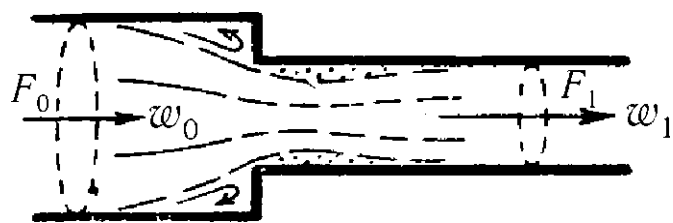


Рис. 131. Внезапное сужение трубы Рис. 132. Дроссельная шайба (диафрагма)

опытов, то из только что составленного уравнения можно вычислить скорость w_0 до сужения. Зная же скорость w_0 , мы можем определить секундный расход:

$$Q = F_0 w_0.$$

Согласно Букингему (E. Buckingham¹) в пределах между $\frac{F_1}{F_0} = 0,05$ и $\frac{F_1}{F_0} = 0,55$ для определения α можно пользоваться формулой:

$$\alpha = 0,598 + 0,395 \left(\frac{F_1}{F_0} \right)^2.$$

При движении жидкости через короткие колена также происходит сжатие струи с последующим выравниванием скоростей. Потеря напора принимается равной $\zeta \frac{w^2}{2g}$, где ζ есть коэффициент сопротивления, определяемый для каждого отдельного случая опытным путем. Значение этого коэффициента для типичных случаев можно найти в инженерных справочниках или специальных курсах.

d) Постепенное сужение трубы влечет за собой очень незначительную потерю напора. Наоборот, при постепенном расширении потеря напора может оказаться много большей, так как при расширении потока возникают благоприятные условия для его отрыва от стенок. Восстановление давления, связанное с расширением трубы, всегда значительно больше при постепенном расширении, чем при внезапном. В случае так называемой *трубки Вентури* (рис. 133) потеря давления равна

$$p_0 - p_2 = \zeta \frac{\rho}{2} (w_1^2 - w_2^2),$$

где коэффициент ζ равен от 0,15 до 0,2. Трубка Вентури также используется для определения количества протекающей жидкости. Для этой

¹Сообщено Букингемом лично автору книги.

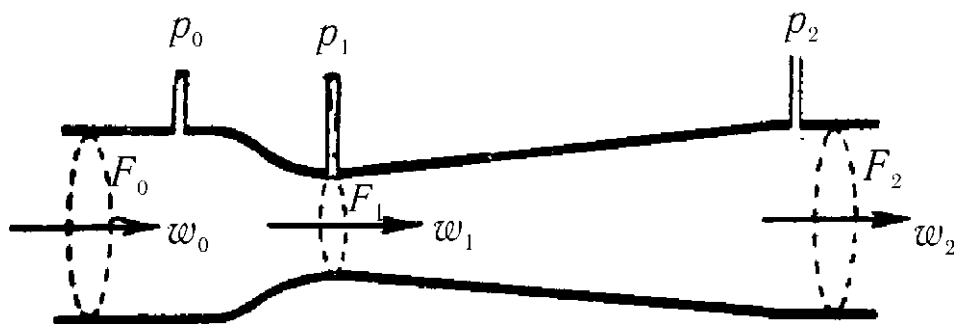


Рис. 133. Трубка Вентури

цели измеряются давление p_0 до сужения и давление p_1 в самом узком месте трубки. Вычисления ведутся так же, как и в случае диафрагмы, только теперь, при хорошей форме трубки коэффициент сжатия α может быть принят равным единице. Что касается коэффициента уменьшения скорости, то он не равен точно единице и, кроме того, зависит от степени равномерности притока. Поэтому в тех случаях, когда к трубке Вентури предъявляются высокие требования точности, рекомендуется ее предварительная тарировка. То же самое относится к дроссельной шайбе, изображенной на рис. 132¹.

Повышение давления $p_2 - p_1$, возникающее при движении жидкости во внезапно или постепенно расширяющейся трубе, используется в так называемых струйных приборах (рис. 134) для всасывания или перекачки других жидкостей. В качестве примера укажем на водоструйный насос, позволяющий откачивать воздух до весьма значительного разрежения (для того чтобы разность $p_2 - p_1$ сделалась равной одной атмосфере, необходима скорость $w_1 \approx 20 \text{ м/сек}$), далее на горелку Бунзена, в которой струя газа, вытекающая из специального насадка, засасывает воздух и смешивается с ним. Другим применением увлекающего действия расширяющейся струи является тяговая труба паровоза, в которой пар, вытекающий из цилиндров, засасывает продукты сгорания из дымовой камеры и таким путем поддерживает горение. Интересным примером струйного прибора является так называемый

¹ Подробные сведения об измерении расхода можно найти в Handbuch der Experimentalphysik, т. IV, часть I, стр. 553 и далее (статья Müller H. und Peters H., Geschwindigkeits und Mengenmessung von Flüssigkeiten, см. также VDI — Durchflussmessregeln (DIN 1952, 4 изд., 1937). В случае вязких жидкостей влияние числа Рейнольдса делается очень заметным. Рациональные формы трубок для $R \leq 1000$ приводятся в 5-м издании указанных «Правил»; см. также Witte R., VDI-Zeitschr., т. 87 (1943), стр. 289.

В советской литературе подробные сведения об измерении скоростей и давлений в воздушных потоках приводятся в книге: Попов С. Г., Измерение воздушных потоков, Москва, 1947. (Прим. перев.)

инжектор, в котором пар, вытекающий из котла, засасывает холодную воду из колодца и перекачивает ее в котел (действие инжектора объясняется увеличением плотности пара при его конденсации в воду; из котла берется большой объем пара, а взамен него подается значительно меньший объем воды). Мы не можем здесь более подробно заниматься теорией струйных приборов; упомянем только, что в основе этой теории лежат такие же соотношения, как и для дроссельной шайбы и трубки Вентури.

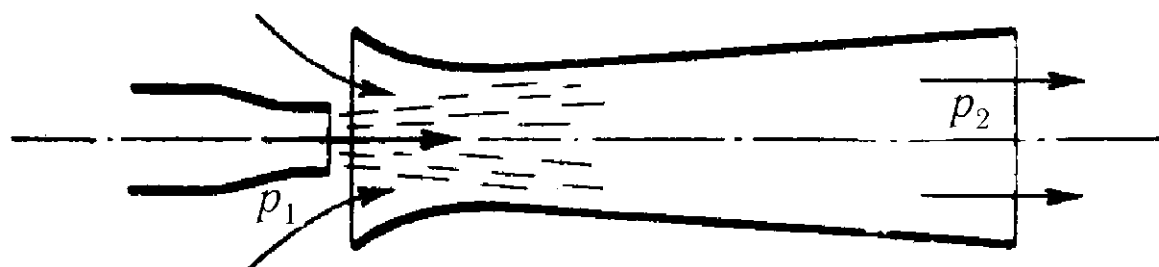


Рис. 134. Струйный насос

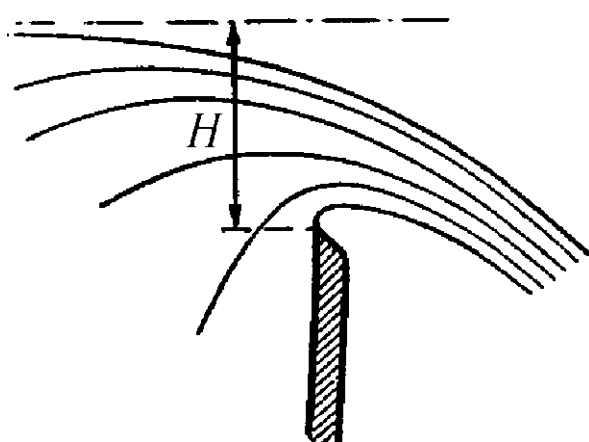


Рис. 135. Водослив через плотину с острой вершиной

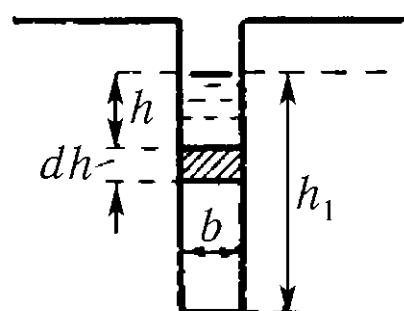


Рис. 136. Истечение через узкую щель

е) В открытых руслах водослив через плотину (рис. 135) позволяет легко измерить расход воды. Для оценки расхода воды, поскольку речь идет о структуре формулы, можно воспользоваться формулой (75), выведенной в § 16 предыдущей главы. Такую же формулу можно получить из решения совсем другой задачи, на первый взгляд имеющей лишь отдаленное отношение к водосливу. Рассмотрим истечение через узкую вертикальную щель в стенке открытого бассейна (рис. 136). В этом случае можно разбить поперечное сечение щели на узкие элементы $b dh$. Через каждый такой элемент вытекает количество жидкости

$$dQ = \alpha b dh \sqrt{2gh}.$$

Интегрируя от 0 до h_1 , мы получим полный расход:

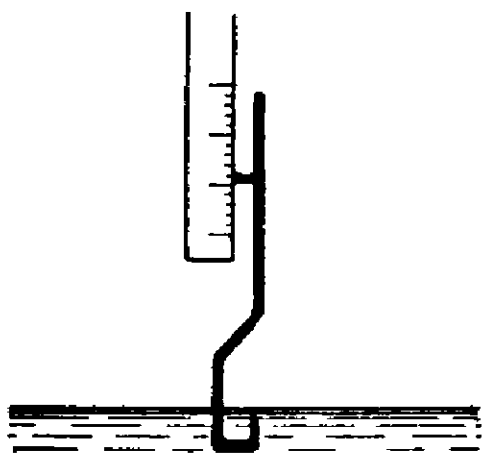
$$Q = \frac{2}{3} \alpha b h_1^{3/2} \sqrt{2g}. \quad (77)$$

Эта формула совпадает с формулой (75) § 16 предыдущей главы, если принять, что

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

и заменить h_1 на z . Такое формальное совпадение обеих формул связано с тем, что размеры, определяющие водослив, из соображений размерности никаким иным образом не могут войти в формулу (77). Более того, опыт показывает, что для вертикального водослива через плотину с острой вершиной (рис. 135) и через щель, изображенную на рис. 136, числовые коэффициенты в формулах для расхода почти совпадают. Особенно тщательные измерения выполнены для водосливов между параллельными стенками (без бокового сжатия струи) через вертикальную плотину с острой вершиной и с доступом воздуха под падающую струю.

Согласно Рэбоку¹,



$$\alpha = 0,605 + \frac{h'}{3(h_1 - h')} + \frac{0,08h_1}{a},$$

где a есть высота вершины плотины над основанием бассейна, h' — небольшая высота, равная 2,85 мм и, по-видимому, связанная с поверхностным натяжением, а h_1 — высота водослива, т. е. высота над вершиной плотины уровня свободной поверхности воды, измеренная на некотором расстоянии от плотины. Измерение уровня воды производится с хорошей точностью, например, при помощи прибора, изображенного на рис. 137. Острие, фиксирующее уровень воды, обращено кверху потому, что гораздо легче заметить, когда оно появляется из-под воды, чем когда оно погружается в воду.

Рис. 137. Приспособление для отсчета уровня свободной поверхности воды

Для плотин с пологой вершиной опыты хорошо подтверждают теоретическое значение коэффициента $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577$.

¹См., например, статью Рэбока (Rehbock) в книге De Thierry und Matschoss, Die Wasserkraftlaboratorien Europas, стр. 104. Berlin, 1926.

f) Сооружения, возводимые в открытых руслах, нарушают равномерное течение. Связанные с этим явления очень подробно изучены гидравликами. Если эти явления развиваются на очень коротком участке реки, то в первом приближении можно пренебречь действием трения; тогда мы получим соотношения, уже рассмотренные в п. 16 предыдущей главы. Однако во многих случаях сопротивление вследствие трения играет столь существенную роль, что его необходимо учитывать. Если вертикальным ускорением всюду можно пренебречь (следовательно, если кривизна свободной поверхности всюду мала), то достаточно рассмотреть только среднее продольное ускорение $w \frac{dw}{dx}$. Тогда уклон свободной поверхности $-\frac{dz}{dx}$ в каждой точке будет складываться, во-первых, из уклона, обусловленного трением и соответствующего значениям скорости w и глубины воды h во взятой точке, и во-вторых, из уклона $\frac{w}{g} \frac{dw}{dx}$, обусловленного продольным ускорением. Если i есть уклон дна русла, то очевидно, что

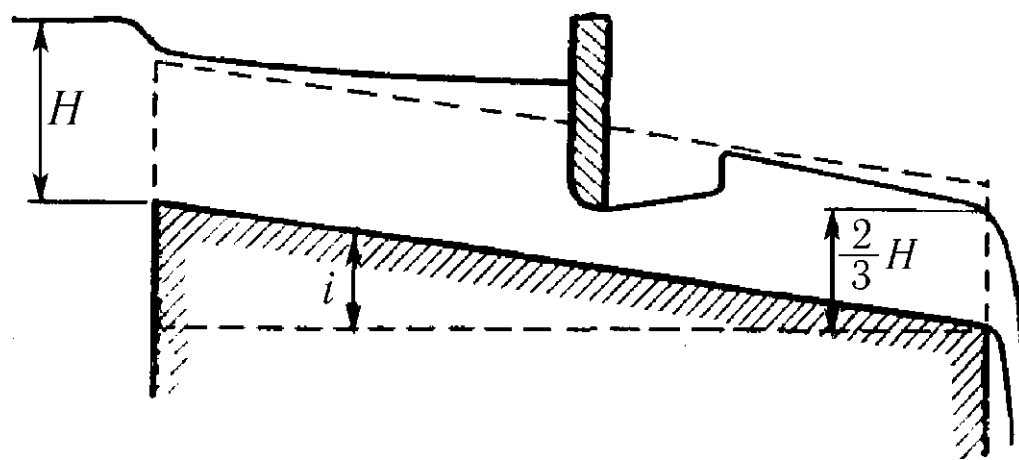
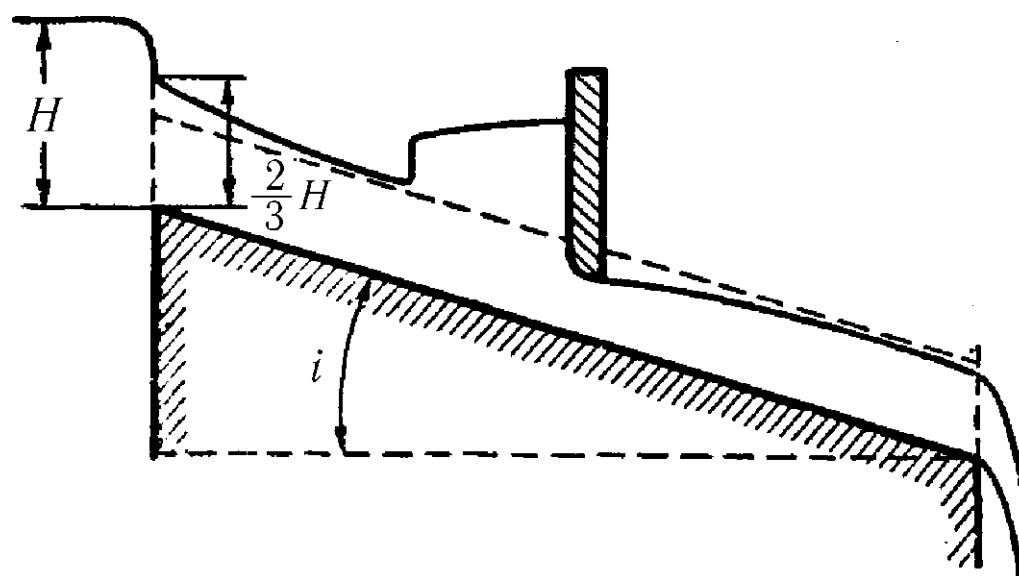
$$-\frac{dz}{dx} = -\frac{dh}{dx} + i.$$

Уравнением неразрывности в простейшем случае, когда русло очень широко, а глубина постоянна по всей ширине русла, будет

$$wh = \text{const.}$$

После исключения скорости w мы получим для определения h при заданном уклоне $i(x)$ дифференциальное уравнение первого порядка. Для $i = \text{const}$ его решение будет, конечно, наиболее простым. По своему характеру это решение будет различным в зависимости от того, является ли невозмущенное течение при заданном уклоне спокойным или стремительным (см. § 16 гл. II и § 11 гл. III). Не производя вычислений¹, укажем лишь на важнейший их результат: при спокойном течении всякого рода возмущения равновесного состояния распространяются, постепенно затухая, и вниз, и вверх по течению, при стремительном же течении только вниз по течению. Если в последнем случае путем какого-либо насильственного вмешательства, например, путем установки поперек русла щита, возмущения течения вынуждаются распространяться вверх по течению, то это происходит всегда в виде прыжка воды, причем течение между прыжком и препятствием приобретает спокойный характер. На рис. 138 и 139 изображены для двух

¹Эти вычисления можно найти, например, в книге Forchheimer Ph., цитированной на стр. 220.

Рис. 138. Кривая подпора для $i < i'$ Рис. 139. Кривая подпора для $i > i'$

потоков в преувеличенном масштабе кривые, получаемые при пересечении свободной поверхности с вертикальной плоскостью, параллельной направлению течения. Оба потока начинаются из озера, посередине рассматриваемого участка преграждаются щитом, опущенным в воду, и заканчиваются сбросом с уступа. Разница между обоими потоками состоит только в их уклоне i . Для потока, изображенного на рис. 138, этот уклон меньше уклона i_1 , соответствующего критической скорости $\sqrt{gh_1}$, поэтому течение в потоке спокойное. Для второго потока уклон i больше i_1 , следовательно, течение в потоке стремительное. Мы видим, что в первом случае прыжок воды образуется после щита, а во втором, наоборот, до щита. Кривая пересечения свободной поверхности с вертикальной плоскостью называется *кривой подпора*, если глубина воды вниз по течению увеличивается, и *кривой спада*, если глубина потока вниз по течению уменьшается¹.

¹Подробные сведения о движении воды в открытых руслах, в том числе и в руслах, перегороженных различными сооружениями, можно найти на русском языке

§ 13. Сопротивление жидкостей движущимся в них телам.

а) *Предварительные общие замечания о формуле сопротивления.* Уже Ньютон вывел заключение, что сопротивление, которое жидкость оказывает движущемуся в ней телу *вследствие своей инерции*, должно быть пропорционально площади F проекции тела на плоскость, перпендикулярную к направлению движения, плотности жидкости ρ и квадрату скорости v . В правильности этого результата можно убедиться путем простого рассуждения. Тело при своем движении должно каждую секунду вытеснять со своего пути массу жидкости

$$M = \rho F v;$$

при этом оно сообщает каждой частице жидкости скорость, которую можно считать пропорциональной скорости тела. Сопротивление равно количеству движения, сообщаемому жидкости в течение одной секунды, следовательно, оно пропорционально величине

$$Mv = \rho F v^2.$$

Ньютон представлял себе, что среда, в которой движется тело, состоит из свободно «парящих», *неподвижных* частиц, которые при столкновении с телом отражаются от него по законам упругого удара, что и приводит к возникновению сопротивления. Однако теперь мы знаем, что такая теория неверна. Согласно современной теории сопротивления, называемой часто *гидродинамической*, сопротивление жидкости движущемуся в ней телу является результатом разностей давлений и касательных напряжений, возникающих при обтекании тела. Принципиальная разница между новой и старой теориями состоит в следующем: старая теория учитывает только форму той части поверхности тела, которая обращена в сторону движения, между тем как новая теория показывает, что причиной сопротивления являются главным образом процессы, происходящие позади движущегося тела, и что поэтому форма кормовой части тела имеет очень большое влияние на величину сопротивления. Необходимо также подчеркнуть, что, согласно старой теории,

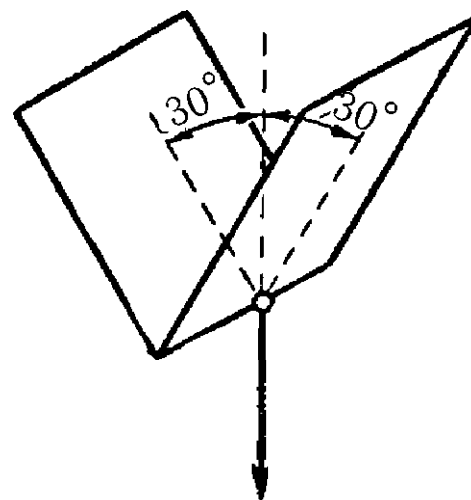


Рис. 140. Двугранник

в многочисленных курсах гидравлики, например в книге: Маккавеев В. М. и Коновалов И. М., Гидравлика, Ленинград, 1940. (Примеч. перев.)

сопротивление какого-нибудь тела следует определять суммированием по всем элементам поверхности (на основе закона, полученного для плоской пластинки), в то время как из современной гидродинамической теории сразу видно, что это недопустимо. Для пояснения приведем следующий простой пример. Обтекание двугранника (рис. 140) происходит, очевидно, совершенно по-иному, чем обтекание двух пластинок, наклоненных друг к другу под таким же углом, но удаленных друг от друга. В самом деле, во втором случае жидкость протекает между пластинками, в первом же случае она этого не может делать. Согласно измерениям Эйфеля¹ сопротивление двугранника, образованного из двух квадратных пластинок, поставленных под углом в 30° к направлению потока, составляет только около 60% от сопротивления обеих пластинок, установленных в жидкости отдельно друг от друга и под тем же углом к потоку. Согласно же старой теории сопротивление в обоих случаях должно было бы быть одинаковым. Другим наглядным примером является следующий. Как показали измерения Эйфеля², подтвержденные затем в Геттингенской аэродинамической лаборатории, круглый диск, круглый цилиндр с таким же диаметром и высотой, равной диаметру, и, наконец, круглый цилиндр опять с таким же диаметром, но высотой, равной полутора диаметрам, движущиеся все в направлении, перпендикулярном к плоскости круга, имеют коэффициенты сопротивления, равные соответственно 1,12; 1,10 и 0,80. Меньшее сопротивление более длинного цилиндра можно объяснить только тем, что при его обтекании вихревая система получается вследствие лучшего прилегания потока к боковой поверхности менее мощной, чем при обтекании более короткого цилиндра, и поэтому подсасывающее действие на заднем основании получается также значительно меньшим.

Относительно общей формы закона сопротивления, которым должны обладать тела определенного вида, с современной, гидродинамической точки зрения можно заранее сказать только следующее: это сопротивление вызывается разностью давлений и напряжениями трения, причем влияние разности давлений в общем случае преобладает. Эта разность может быть принята пропорциональной динамическому давлению $\frac{\rho v^2}{2}$, соответствующему скорости v [см. § 5, п. с) предыдущей главы], следовательно, сопротивление W пропорционально произведе-

¹Eiffel. Recherches expérimentales sur la résistance de l'air exécutées à la tour Eiffel, стр. 78 и 54, Paris, 1907.

²Eiffel. Recherches expérimentales sur la résistance de l'air exécutées à la tour Eiffel, стр. 78 и 54, Paris, 1907.

нию разности давлений и площади, на которую эта разность давлений действует, т. е.

$$W \sim F \cdot \frac{\rho v^2}{2}.$$

Динамическое давление, измеряемое при помощи специальных трубок (см. § 8 предыдущей главы), обозначается либо через q , либо через p_d ; мы будем пользоваться последним обозначением. Так как скорость v определяется обычно путем измерения динамического давления, то в экспериментальных исследованиях основной величиной является именно это давление, а не скорость. Для наглядности очень удобно представлять сопротивление как действие давления на площадь:

$$W = \text{число} \cdot F \cdot p_d.$$

Поэтому, вместо того чтобы подсчитывать сопротивление, как это делали раньше, по формуле.

$$W = \text{число} \cdot F \rho v^2,$$

в настоящее время в большинстве стран принято пользоваться формулой

$$W = \text{число} \cdot F \frac{\rho v^2}{2}.$$

Следовательно, новые коэффициенты сопротивления в два раза больше старых. Они обозначаются обычно буквой c , в случае необходимости — с индексами для составляющих сопротивления.

Что касается величины коэффициента сопротивления, то соображения о механическом подобии позволяют сказать следующее. До тех пор, пока сравниваются только геометрически и механически подобные случаи, при которых число Рейнольдса $R = \frac{vl}{\nu}$ (l есть какая-нибудь характерная длина) сохраняет постоянное значение, отношение разностей давлений к напряжениям трения остается постоянным; поэтому касательные напряжения изменяются в сравниваемых случаях пропорционально разностям давлений, которые, в свою очередь, могут быть приняты пропорциональными динамическому давлению. Таким образом, приведенная выше форма закона сопротивления, т. е.

$$W = c F p_d = c F \frac{\rho v^2}{2}, \quad (78)$$

является в рассматриваемом случае вполне точным законом. Конечно, коэффициент сопротивления c сохраняет свое значение только до тех

пор, пока остается неизменным число Рейнольдса. При изменении же числа Рейнольдса коэффициент сопротивления в общем случае изменяется, следовательно, он является функцией числа Рейнольдса:

$$c = f(R).$$

Если в каком-нибудь определенном случае можно предполагать, что трение не оказывает заметного действия, то согласно сказанному имеет место практически точная пропорциональность сопротивления величине $\frac{F\rho v^2}{2}$ для всех возможных условий, т. е. функция $f(R)$ является постоянной. Примером такого случая может служить движение пластинки в направлении, перпендикулярном к ее плоскости, а также других подобного рода тел с острыми краями. Для круглых пластинок коэффициент сопротивления c равен приблизительно 1,12.

Напротив, если при движении тела в жидкости трение играет основную роль, как, например, при движении пластинок в своей плоскости, то следует ожидать значительного отклонения от указанной выше пропорциональности (см. § 15). При очень небольших скоростях, когда R мало по сравнению с единицей, приходится учитывать только влияние вязкости. В этом случае имеет место уже упомянутый в § 3 закон Стокса (сопротивление пропорционально скорости v). Закону Стокса также можно придать форму уравнения (78), если ввести коэффициент сопротивления c , пропорциональный $\frac{1}{R}$.

б) *Разложение сопротивления.* Сопротивление тела, движущегося в жидкости, всегда можно разложить на две части: на сопротивление, обусловленное разностью давлений, и на сопротивление, обусловленное трением. Будем называть для краткости эти сопротивления *сопротивлением давления* и *сопротивлением трения*.

Разложим силу, с которой жидкость действует на каждый элемент поверхности движущегося тела, на нормальную и касательную составляющие, т. е. на силу давления и на силу трения.

Результирующая всех сил давления и будет сопротивлением давления, а результирующая всех сил трения — сопротивлением трения. (В случае шероховатой поверхности разложение следует производить — из практических соображений — относительно фиктивной гладкой поверхности, в целом правильно передающей форму шероховатой поверхности; это приводит к тому, что сопротивление давления, действующее на отдельные выступы шероховатости, включается в состав сопротивления трения.) Разделение полного сопротивления на сопротивление

давления и на сопротивление трения экспериментально производится следующим образом. На поверхности тела просверливаются отверстия и через них измеряются давления, действующие на соответствующие элементы поверхности. Затем суммированием вычисляется результирующая всех сил давления, т.е. сопротивление давления. Если полное сопротивление тела каким-нибудь способом измерено (см. § 22, п. с)), то, вычитая из него только что вычисленное сопротивление давления, мы найдем сопротивление трения. О непосредственном измерении сопротивления трения см. § 22, п. с). В прежние годы предполагали, что только сопротивление давления сильно зависит от формы тела; о сопротивлении же трения думали, что оно в основном зависит от величины поверхности тела и очень мало зависит от формы тела. В связи с этим тогда разделяли полное сопротивление на *сопротивление формы* и на *сопротивление поверхности*. Однако новые опыты показали, что сопротивление трения также довольно заметно зависит от формы тела, и поэтому разделение полного сопротивления на только что указанные две части нельзя считать правильным.

При движении тела на свободной поверхности жидкости возникает особый вид сопротивления давления — так называемое *волновое сопротивление*, причиной которого является система волн, вызванная движением тела. Так как волновое движение происходит под действием силы тяжести (капиллярные силы мы не учитываем), то теперь имеет место закон подобия иной, чем при движении, в котором основную роль играет трение. Из скорости v , длины l и ускорения силы тяжести g можно составить только одно безразмерное число $\frac{v^2}{gl}$. Системы волн, образующиеся при движении двух геометрических подобных тел, например, корабля в натуральном размере и его уменьшенной модели, будут геометрически подобны только в том случае, если число $\frac{v^2}{gl}$ в обоих движениях имеет одинаковое значение, следовательно, если скорости обоих движений относятся как корни квадратные из длин корабля в натуре и модели. Этот закон подобия называется *законом Фруда*, а число $\frac{v^2}{gl}$ — *числом Фруда*.

Небольшие изменения формы корабля и его скорости очень сильно отражаются на волновом сопротивлении; при удлинении корпуса корабля оно может и увеличиться, и уменьшиться, смотря по тому, будет ли кормовая волна, интерферирующая с системой носовых волн, усиливать или ослаблять эту систему. Сопротивление увеличивается, если корма попадает в одну из впадин носовой системы волн, и, наоборот,

уменьшается, если корма попадает на один из гребней носовой системы волн¹. На мелкой воде система волн, вызываемых движением корабля, может претерпевать весьма значительные изменения. Волновое сопротивление очень сильно увеличивается, когда корабль движется со скоростью, равной критической скорости $\sqrt{gh}$ движения вала для данной глубины (см. § 15 предыдущей главы). При скоростях движения корабля, больших критической, волновое сопротивление опять делается меньше.

Работа, производимая кораблем для преодоления волнового сопротивления, преобразуется в кинетическую энергию волн, возникающих при движении корабля. Другая часть сопротивления давления, соответствующая обычному сопротивлению давления тела, окруженного жидкостью со всех сторон, вместе с сопротивлением трения имеет своим эквивалентом количество движения вихрей, образующихся в кильватерном потоке; поэтому указанная вторая часть сопротивления давления часто называется *кильватерным сопротивлением*. Работа, затрачиваемая на преодоление кильватерного сопротивления, преобразуется частично в теплоту, а частично в кинетическую энергию кильватерных вихрей, которая затем постепенно также преобразуется в теплоту.

Сопротивление трения и кильватерное сопротивление следуют закону подобия Рейнольдса (если не принимать во внимание возмущений, вносимых волнами); волновое же сопротивление следует закону Фруда. Создать условия при испытании модели корабля, удовлетворяющие одновременно этим двум законам, невозможно. Так как для кораблей основную роль играет волновое сопротивление, то при испытании моделей кораблей соблюдают закон Фруда, зависимость же других сопротивлений от масштаба модели учитывают путем внесения поправок, устанавливаемых опытным путем.

Кинетическая энергия, в которую преобразуется работа, затрачиваемая на преодоление волнового сопротивления, еще долгое время сохраняется после прохождения корабля в оставшейся за ним системе волн. То же самое происходит и при движении крыла самолета. Как мы знаем из § 7 предыдущей главы, крыло самолета оставляет позади себя мощное и очень правильное вихревое движение. И в этом случае сопротивление давления можно разложить на две части. Работа, производимая для преодоления одной из этих частей, преобразуется в кинетическую энергию вихревого движения, распределенного во всей жидкости. Работа же, производимая для преодоления второй части сопро-

¹О теоретическом расчете волнового сопротивления см., например, статью Weinblum G., ZAMM, т. 10 (1930), стр. 453, а также статьи в книге Hydromechanische Probleme des Schiffsantriebs, Hamburg. 1932.

тивления давления, вместе с работой, производимой для преодоления сопротивления трения, преобразуется частично в теплоту, а частично в кинетическую энергию вихрей кильватерного потока. Поэтому соответствующая часть сопротивления давления называется также кильватерным сопротивлением. Его можно вычислить, применяя теорему о количестве движения к кильватерному потоку (см. § 14, п. с)).

с) *Движущееся тело и движущаяся жидкость*. Весьма важным является следующий вопрос: какая численная связь существует между сопротивлением, которое встречает тело при своем движении в покоящейся жидкости, и силой, с которой движущаяся жидкость действует на покоящееся тело. Если жидкость движется во всех своих частях совершенно равномерно, то на основании принципа относительности классической механики между обоими указанными случаями не может быть никакой разницы. В самом деле, характер механических явлений не зависит от скорости движений системы отсчета, в которой наблюдаются изучаемые явления; поэтому, налагая на систему, связанную с движущимся телом, скорость, равную, но противоположную скорости тела, т.е. останавливая тело и сообщая движение жидкости, мы не изменили механических закономерностей. Однако, если движение жидкости не является совершенно равномерным *во всех ее частях*, как это имеет место при *турбулентном течении*, то разница между обоими указанными случаями все же получается. Как правило, во втором случае, т.е. при обтекании неподвижного тела, сопротивление больше, чем при движении тела в покоящейся жидкости, но бывают и исключения (обтекание шара в критической области, см. § 15). Так как в природных условиях движение жидкостей, в том числе и воздуха, при больших протяжениях пространства, в котором происходит движение, всегда турбулентное, то всегда будет получаться разница между сопротивлением движущегося тела и сопротивлением неподвижного тела.

Экспериментальное определение сопротивления тел, движущихся в воздухе, удобнее производить на неподвижных моделях, обтекаемых потоком воздуха. Для этой цели устраиваются специальные аэродинамические трубы (см. § 22). Для того чтобы результаты, полученные в таких трубах, можно было с уверенностью переносить на движущиеся тела, необходимо принимать тщательные меры для обеспечения возможно большей равномерности воздушного потока. О турбулентности в аэродинамических трубах см. также § 5, п. g).

В заключение остановимся на одном интересном явлении, которое, строго говоря, не имеет прямого отношения к только что сказанному. Наблюдения показывают, что баржа, плывущая по реке, всегда опережает течение, при-

том настолько, что ею возможно управлять при помощи руля. Объясняется это следующим образом. Движущей силой является, очевидно, сила тяжести, точнее, ее составляющая Gi , соответствующая уклону i реки, т. е. баржа как бы находится на наклонной плоскости. Баржа, будучи частично погружена в воду, вытесняет некоторый объем воды, вес которого равен G . Если бы баржи не было, то масса этого объема двигалась бы под действием той же силы Gi , но при этом испытывала бы очень большое сопротивление вследствие турбулентного перемешивания с окружающей жидкостью. Жесткая же форма баржи исключает возможность такого перемешивания; вместо него образуется только турбулентный пограничный слой со значительно меньшим сопротивлением. Это и приводит к тому, что баржа опережает течение.

§ 14. Гидродинамическая теория сопротивления жидкости. а) Если тело движется равномерно в жидкости, лишенной трения и простирающейся во все стороны до бесконечности, то при обычном потенциальном обтекании тела не возникает ни сопротивления движению, ни подъемной силы, перпендикулярной к направлению движения, какова бы ни была форма тела. Этот, на первый взгляд, парадоксальный результат легко объяснить, если применить теорему о количестве движения для контрольной поверхности, проведенной вокруг тела на некотором расстоянии от него. Более подробное исследование показывает, что добавочные скорости, а также разности давлений, вызванные движением тела, очень быстро уменьшаются по всем направлениям по мере удаления от тела — по крайней мере пропорционально третьей степени расстояния. Если мы будем увеличивать контрольную поверхность, например, сферу, отодвигая ее в бесконечность, то площадь ее будет возрастать пропорционально квадрату радиуса, и поэтому составляющие количества движения, а вместе с ними и составляющие сопротивления будут стремиться к нулю. Такой же результат мы получим для любой другой контрольной поверхности, следовательно, сопротивление тела может быть равно только нулю.

Если мы составим моменты количества движения относительно осей, т. е. введем в вычисления расстояние в виде плеча, то увидим, что эти моменты не должны обязательно обращаться в нуль. В самом деле, наблюдение показывает, что пластинка, установленная в набегающем потоке под углом к его направлению, поворачивается так, что в конце концов устанавливается перпендикулярно к потоку, следовательно, набегающий поток передаст ей определенный вращающий момент.

На тело, равномерно движущееся вблизи стенки или вблизи другого тела, жидкость действует с вполне определенной силой. Так, например, шар, движущийся параллельно стенке, «притягивается» к ней пропорционально квадрату своей скорости и обратно пропорционально четвертой степени расстоя-

ния от нее. Это ни в какой мере не противоречит сказанному выше, так как теперь нельзя отодвинуть контрольную поверхность в бесконечность.

Более подробное исследование показывает, что при движении очень удлиненного тела (см. рис. 57) равно нулю не только сопротивление в целом, но также результирующие силы давления и на переднем, и на заднем конце тела.

При ускоренном движении тела в жидкости без трения сопротивление возникает, однако это сопротивление такого рода, как если бы масса тела увеличилась на величину массы жидкости, увлекаемой телом при своем движении. Для шара величина такой *присоединенной массы* равна половине массы жидкости, вытесняемой шаром. Так как при возникновении движения из состояния покоя вначале образуется всегда приближенно потенциальное течение, то понятие о присоединенной массе имеет значение и для реальных жидкостей.

Равенство нулю сопротивления тела, равномерно движущегося в жидкости без трения, можно вывести также из энергетических соображений. В самом деле, при отсутствии трения работа, необходимая для преодоления сопротивления, может накапливаться в жидкости только в виде кинетической энергии. Между тем при потенциальном течении, когда жидкость позади равномерно движущегося тела так же смыкается, как расступается впереди него, за телом не остается никакого возмущения течения, в котором могла бы накапливаться кинетическая энергия. Следовательно, при таком движении не может быть и сопротивления. Однако могут быть и такие случаи движения в жидкости без трения, когда позади тела в жидкости остается кинетическая энергия и, следовательно, возникает сопротивление. Одним из таких случаев является движение крыла самолета, упомянутое в § 13, п. б); подробно это движение будет рассмотрено в § 17 и 18 при изложении теории крыла самолета. Возникновение подъемной силы без продолжающегося накопления в жидкости кинетической энергии не противоречит закону сохранения энергии, так как подъемная сила перпендикулярна к пути тела в жидкости и поэтому при установившемся движении для ее сохранения не требуется никакой затраты работы. Вопрос о возникновении подъемной силы был нами уже рассмотрен в § 11 предыдущей главы.

Другим примером, когда в жидкости без трения позади движущегося тела остается кинетическая энергия, является движение корабля на свободной поверхности жидкости. Как уже было сказано в § 13, п. б), в этом случае позади корабля образуется расширяющаяся система волн, в которой происходит рассеяние энергии. Этому рассеянию энергии соответствует волновое сопротивление.

Возникновение сопротивления при ускоренном движении также легко понять с точки зрения закона сохранения энергии. В самом деле, если бы сопротивление при таком движении не возникало и, следовательно, не требовалось бы силы для преодоления этого сопротивления, то присоединенная масса не могла бы накапливать кинетическую энергию.

В действительности полное сопротивление почти всех тел значительно больше всегда неизбежного сопротивления трения (см. § 3 и 5). Причина этого заключается в том, что при движении таких тел образуются поверхности раздела и вихри, описанные в § 6. Именно эти вихри и являются основной причиной сопротивления. Они препятствуют смыканию потока позади обтекаемого тела и обуславливают несимметричное распределение давления на поверхности тела; кроме того, для их образования требуется постоянная затрата энергии.

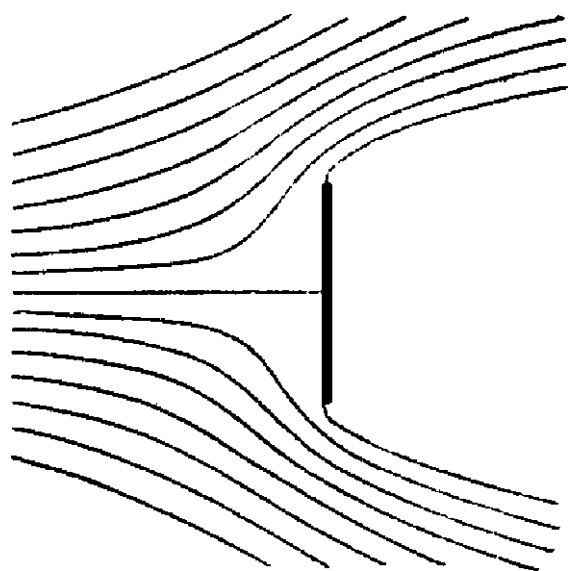


Рис. 141. Обтекание плоской пластинки с образованием поверхностей раздела

б) Из различных попыток определить сопротивление тел, *не выходя из рамок теории идеальной жидкости*, рассмотрим две, наиболее типичные, предпринятые Кирхгофом и Карманом.

Кирхгоф¹ исследовал обтекание плоской пластинки, поставленной перпендикулярно к потоку (рис. 141). Перед пластинкой поток разделяется и затем сбегает с ее краев, образуя поверхности раздела. Позади пластинки пространство между поверхностями раздела заполнено покоящейся жидкостью. Так как давление в этом пространстве, если пренебрегать силой тяжести, везде одинаковое, то должно быть одинаковым также давление во всех точках поверхностей раздела, следовательно, на основании теоремы Бернулли, должна быть одинаковой и скорость. Вычисления показывают, что при соблюдении этого условия возможны только такие решения задачи, при которых поверхности раздела простираются до бесконечности, а скорость на поверхностях раздела равна скорости невозмущенного потока, т. е. скорости жидкости в бесконечности. Что касается распределения давления, то перед пластинкой в ее центре мы имеем динамическое давление $\frac{\rho w^2}{2}$; по мере

¹ Kirchhoff, Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen. Crelle's Journ., т. 70 (1869).

приближения к краям пластинки давление уменьшается и на краях делается равным давлению в невозмущенном потоке; на задней стороне пластинки имеет место постоянное давление, равное давлению в невозмущенном потоке. Отсюда следует, что сопротивление пластинки пропорционально ее площади и динамическому давлению, и поэтому коэффициент сопротивления c должен иметь постоянное значение. Согласно вычислениям Кирхгофа, это значение равно

$$c = \frac{2\pi}{4 + \pi} = 0,880.$$

Однако в действительности, как уже неоднократно подчеркивалось, поверхности раздела очень неустойчивы и быстро распадаются, образуя большие и малые вихри. Поэтому зона мертвой воды за пластинкой не доходит до бесконечности, и поток на некотором расстоянии за пластинкой опять смыкается. В связи с этим давление позади пластинки значительно ниже, чем в невозмущенном потоке. Таким образом, задняя поверхность пластинки оказывает подсасывающее действие, и сопротивление получается значительно больше, чем по расчетам Кирхгофа. Для бесконечно широкой пластинки (т.е. практически для пластинки, ограниченной параллельными боковыми стенками) измерения показывают, что $c = 2,0$. При обтекании прямоугольных пластинок с конечным отношением сторон жидкость огибает узкие стороны и попадая в подсасывающее пространство, значительно уменьшает существующее в нем разрежение. Для различных отношений сторон прямоугольника эксперимент дает следующие значения коэффициента сопротивления:

отношение сторон =	1 : 20	1 : 10	1 : 4	1 : 1
$c =$	1,45	1,29	1,19	1,10

Расчет Кирхгофа относится к бесконечно длинной пластинке, следовательно, он очень плохо согласуется с результатом опыта. Наоборот, хорошее совпадение расчета с опытом получается в том случае, когда при обтекании водой пластинки пространство позади пластинки заполняется воздухом (или парами жидкости, как это имеет место при очень высоких скоростях). В этом случае поверхности раздела совсем или почти не распадаются, и поэтому условия, положенные в основу теории, хорошо удовлетворяются. На рис. 142 изображена такая устойчивая поверхность раздела, получившаяся в результате выстрела в воду через стенку стеклянного сосуда.

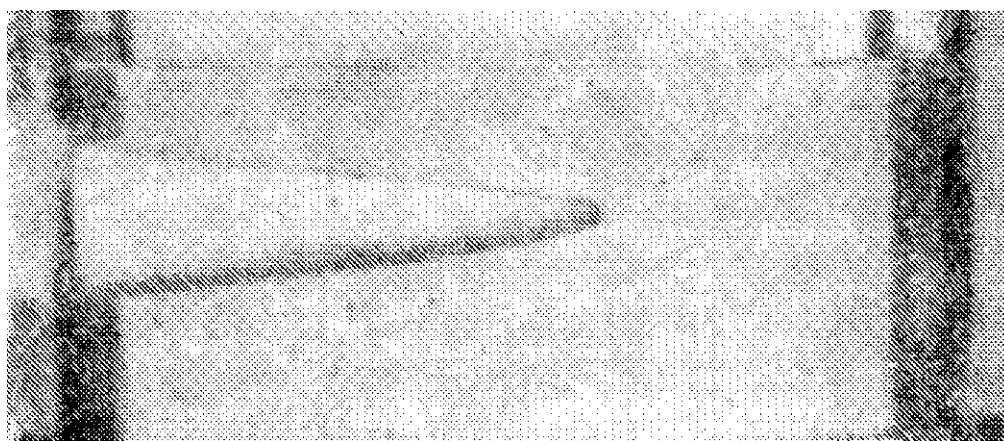


Рис. 142. Выстрел через воду

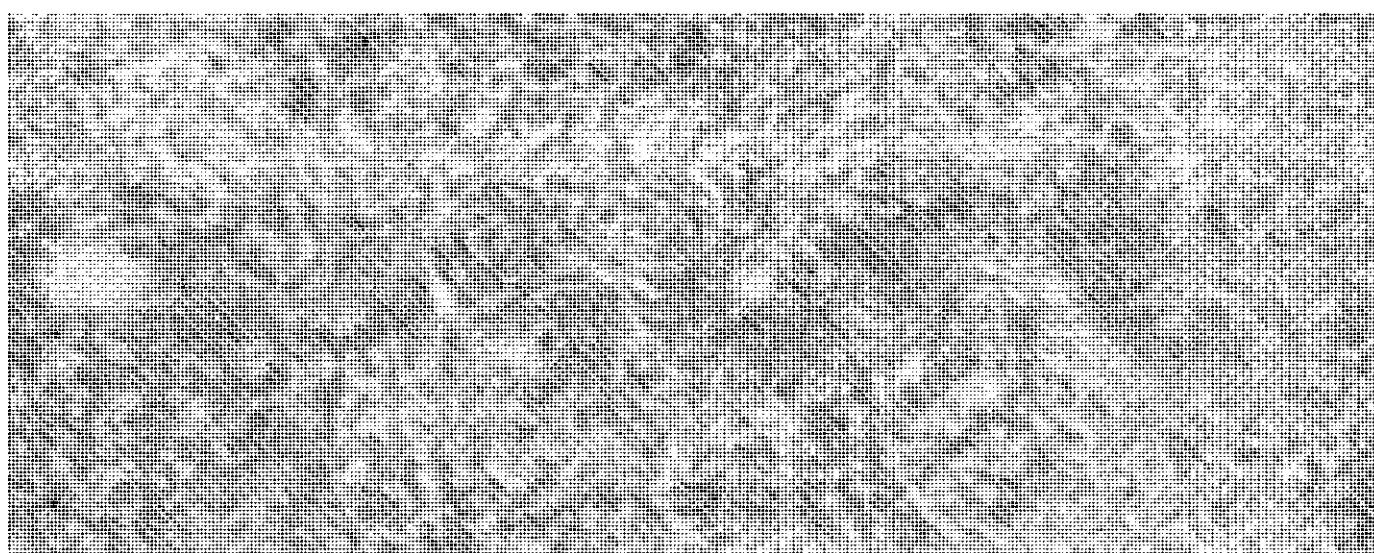


Рис. 143. Вихревая дорожка позади узкой пластинки (при фотографировании неподвижной камерой)

При обтекании узких пластинок или других подобного рода препятствий, когда поток жидкости перед телом не разделяется на две части, так как это было в только что рассмотренном случае, иногда образуется позади тела довольно правильная последовательность вихрей, попеременно срывающихся то с одного, то с другого края тела (рис. 143). Такая последовательность вихрей называется вихревой дорожкой. Наблюдения над вихревыми дорожками побудили Кармана¹ исследовать устойчивость различных двухрядных систем параллельных и прямолинейных вихревых нитей. Вычисления показали, что все такие системы, за исключением одной, либо совсем, либо почти совсем неустойчивы. Единственная устойчивая система изображена на рис. 144². Для нее

¹ K á r m á n und R u b a c h, Phys. Zeitschr., т. 13 (1912), стр. 49 [см, также работу: Кочин Н.Е., О неустойчивости вихревых цепочек. Доклады Акад. Наук СССР, т. XXIV (1939). (Прим. перев.)].

²Точнее говоря, эта система устойчива относительно всех малых отклонений вихревых нитей из начального положения, за исключением одного особого возмущения, при котором вихри, расположенные друг от друга на расстоянии l , перемещаются в прямо противоположные стороны. Относительно таких возмущений вихревая до-

отношение расстояния h между обоими рядами вихрей к расстоянию l между вихрями в каждом ряду равно 0,283. Вихревые дорожки, наблюдающиеся в действительности, обладают расположением, очень близким к этому (при условии, что вихри имеют более или менее четко выраженные ядра). Однако по мере того, как форма вихрей вследствие трения расплывается, расстояние между ними постепенно увеличивается, как это ясно видно из рис. 143.

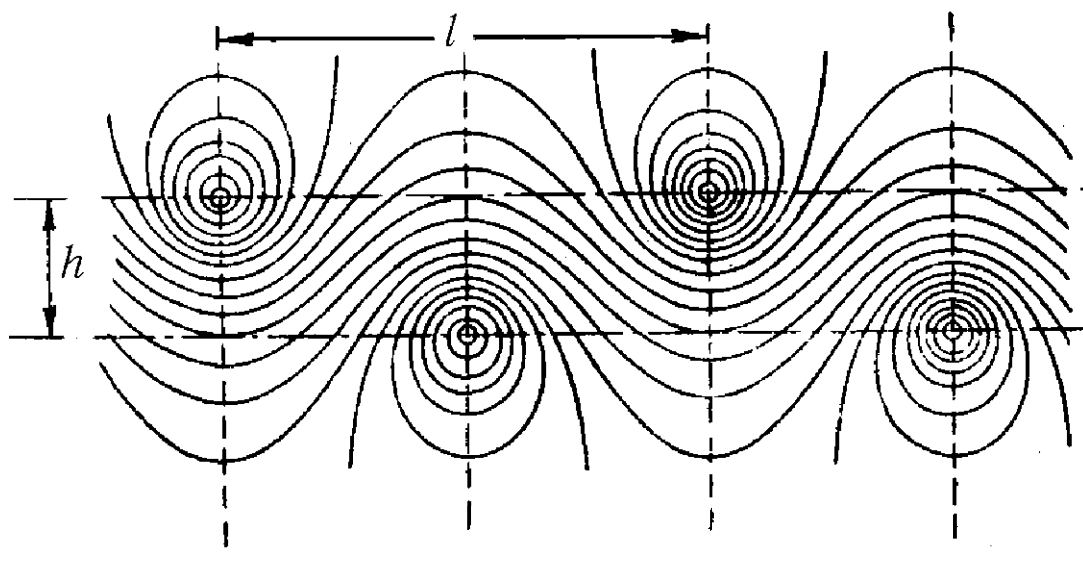


Рис. 144. Линии тока в вихревой дорожке

Постоянное образование за обтекаемым телом новых вихрей означает, что тело испытывает определенное сопротивление, так как иначе не соблюдался бы закон сохранения энергии. Для вычисления сопротивления можно было бы воспользоваться законом сохранения энергии, но для этого надо знать диаметр ядра вихрей. Другой способ вычисления сопротивления, основанный на теореме о количестве движения, не требует знания указанного диаметра. Такое вычисление было выполнено Карманом. Измеряя фотографический снимок вихревой дорожки и скорость вихрей относительно тела, Карман в результате своих вычислений получил для коэффициента сопротивления значения, хорошо совпадающие со значениями, определенными экспериментальным путем. Опыт показывает, что размеры вихревой дорожки зависят от размеров тела, однако установить эту зависимость теоретическим путем до сих пор не удалось.

с) Сопротивление движущегося тела определенным образом связано с состоянием кильватерного потока на большом расстоянии от тела. Выясним прежде всего, какой вид имеет поле скоростей кильватерного потока на большом расстоянии от тела. Кильватерный поток представ-

рожка ведет себя безразлично, следовательно, эти возмущения могут с течением времени равномерно нарастать.

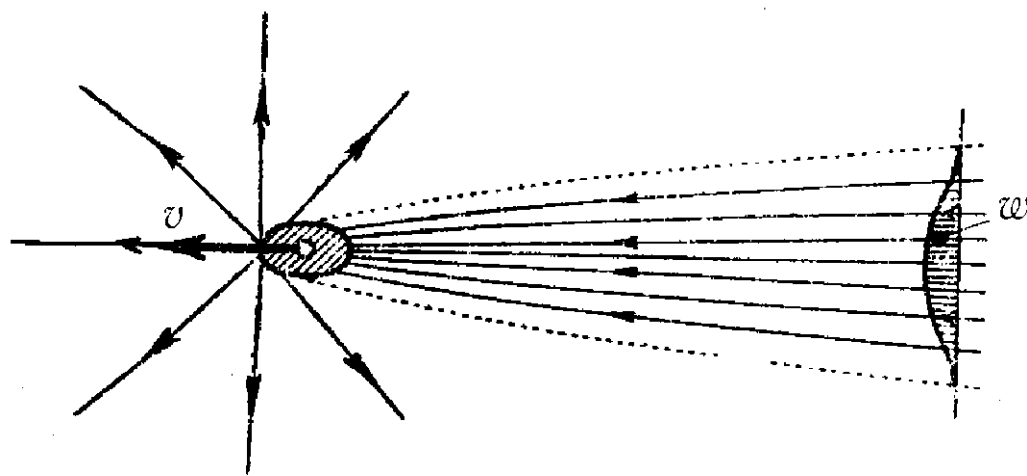


Рис. 145. Источник и кильватерный поток

ляет собой жидкость, увлекаемую движущимся телом. При движении тела жидкость впереди него расходится во все стороны в виде источника [см. § 10, п. б) гл. II]. Следовательно, в системе отсчета, в которой невозмущенная жидкость покоится, картина течения должна иметь вид, схематически изображенный на рис. 145. Мощность источника Q , т. е. количество жидкости, вытекающей из него в течение одной секунды, совпадает с количеством жидкости, протекающей в кильватерном потоке, и тесно связана с сопротивлением. Пусть скорость кильватерного потока относительно неподвижной жидкости равна w . Тогда на достаточно большом расстоянии от тела, где скорость источника уже ничтожно мала, количество жидкости, протекающей в кильватерном потоке, будет равно

$$Q = \iint_K w dF, \quad (79)$$

где буква K означает, что интеграл следует распространить только на область кильватерного потока. Применяя теорему о количестве движения к области источника и кильватерного потока на большом расстоянии от тела¹, мы получим соотношение

$$W = \rho Q v, \quad (80)$$

где v есть скорость тела. Из равенств (79) и (80) следует, что сопротивление тела можно определить, если измерить распределение скоростей в кильватерном потоке. Ниже мы увидим, что скорость кильватерного потока по мере удаления от тела уменьшается значительно медленнее,

¹См., например, Prandtl-Tietjens, Hydro- und Aeromechanik, т. II [имеется в переводе на русский язык: Прандтль-Титъенс, Гидроаэромеханика, т. II, Москва, 1936, стр. 139. (Прим. перев.)], см. также § 2 настоящей книги.

чем быстро затухающее возмущение давления. Это обстоятельство позволяет очень просто осуществить измерения скорости в кильватерном потоке, необходимые для определения сопротивления. В самом деле, скорость движения жидкости в кильватерном потоке относительно тела равна $v - w$. При помощи трубки Пито [см. § 5, п. с) гл. II], покоящейся относительно тела, измеряется полное давление в кильватерном потоке, равное

$$g = p + \frac{\rho}{2}(v - w)^2.$$

Если полное давление в невозмущенной жидкости равно

$$g_0 = p_0 + \frac{\rho}{2}v^2,$$

то на достаточно большом расстоянии от тела, где $p_0 = p$, мы будем иметь:

$$g - g_0 = \rho vw - \frac{\rho w^2}{2},$$

откуда

$$\rho vw = g_0 - g + \frac{\rho w^2}{2}.$$

Но из уравнений (79) и (80) мы имеем:

$$W = \rho v \iint^K w dF.$$

Подставляя сюда значение ρvw и имея в виду, что на большом расстоянии от тела величина $\frac{\rho w^2}{2}$ очень мала, мы получаем:

$$W = \iint^K (g_0 - g) dF.$$

А. Бетц¹, впервые указавший на возможность такого способа вычисления сопротивления, развил этот способ также для случая небольших расстояний от тела (см. § 22, п. с)).

¹Betz A., Ein Verfahren zur direkten Ermittlung des Profilwiderstandes. f. Flugtechn. u. Motorluftschiffahrt, т. 16 (1925), стр. 42; также Prandtl-Tietjens, Hydro- und Aeromechanik, т. II.

Только что рассмотренные свойства потока, создаваемого движущимся телом, позволяют получить представление о поле давлений вокруг тела. Это поле давлений определяется полем скоростей источника. В случае точечного источника его радиальная скорость равна

$$w_r = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

При плоском течении, когда вместо точечного источника рассматривается линейно распределенный источник, радиальной скоростью будет

$$w_r = \frac{Q_1}{4\pi r},$$

где Q_1 есть мощность источника на единицу длины. При составлении квадрата результирующей скорости, на большом расстоянии от центра источника играет роль только составляющая радиальной скорости в направлении движения тела, равная

$$u = w_r \cos \varphi.$$

Применяя уравнение Бернулли, мы получим:

$$p - p_0 = \frac{\rho}{2}u_0^2 - \frac{\rho}{2}(u_0 + u)^2 = -\frac{\rho}{2}(2u_0u + u^2),$$

откуда, принимая скорость u_0 равной скорости тела v и отбрасывая член с u^2 как весьма малую величину, мы найдем:

$$p - p_0 = -\rho v u.$$

Подставляя сюда значение u и имея в виду уравнение (80), мы получим для точечного источника:

$$p - p_0 = -\frac{W \cos \varphi}{4\pi r^2}, \quad (81)$$

а для линейно распределенного источника:

$$p - p_0 = \frac{W_1 \cos \varphi}{2\pi r}. \quad (82)$$

Отсюда видно, что в случае линейно распределенного источника возмущения давления на большом расстоянии от тела могут быть довольно значительными. Это обстоятельство всегда необходимо учитывать

при измерениях в потоке, в котором имеется поставленный поперек него стержень (например, рукоятка измерительного прибора). Из формул (81) и (82) следует, что впереди движущегося тела давление повышено по сравнению с давлением в невозмущенном потоке, а позади — понижено. В кильватерном потоке, к которому уравнение Бернулли вследствие трения неприменимо, давление почти везде одинаково.

Относительно закона изменения скорости в кильватерном потоке заметим следующее. Периодический отрыв вихрей с кормовой части тела начинается только после того, как число Рейнольдса достигает некоторого, для каждого тела вполне определенного, значения. Для цилиндра, движущегося в направлении, перпендикулярном к своей образующей, это значение равно $\frac{vd}{\nu} = 50$. Пока число Рейнольдса меньше этого значения, ширина b кильватерного потока на большом расстоянии от тела возрастает пропорционально величине

$$\sqrt{\nu t} = \sqrt{\frac{\nu x}{v}},$$

т. е.

$$b \sim \sqrt{\frac{\nu x}{v}}. \quad (82a)$$

Следовательно, ширина кильватерного потока изменяется по такому же закону, как и толщина пограничного слоя при обтекании пластинки [см. формулы (12) и (13) в § 3]. Соотношение (79) показывает, что скорость w кильватерного потока обратно пропорциональна площади его поперечного сечения; но последнее в свою очередь пропорционально b при плоском течении и пропорционально b^2 при течении, симметричном относительно оси вращения. Следовательно, на основании соотношения (82a), скорость w кильватерного потока пропорциональна $\frac{1}{\sqrt{x}}$ при плоском течении и пропорциональна $\frac{1}{x}$ при течении, симметричном относительно оси вращения. Что касается распределения скорости w по поперечному сечению, то оно изображается функцией

$$w = w_1 e^{-\left(\frac{y}{b}\right)^2}.$$

Поле скоростей и поле напряжений, возникающие при движении шара при числе Рейнольдса $R < 1$, математически определил Озин¹. Аналогичную задачу для движения круглого цилиндра решил Ламб². Полученные ими результаты хорошо совпадают, с картиной течения, изображенной на рис. 145.

¹Oseen C. W., Arkiv för mat., astr. och fis. т. VI, № 29 (1910), см. изложение его работы в книге Lamb H., Hydrodynamics, § 340 [имеется в переводе на русский язык: Ламб Г., Гидродинамика, Москва, 1947 (Прим. перев.)], а также в книге Durend. W., Aerodynamics, т. III.

²Lamb H., Phil. Mag. (5), т. 21 (1911), стр. 20, или Lamb H., Hydrodynamics, § 343.

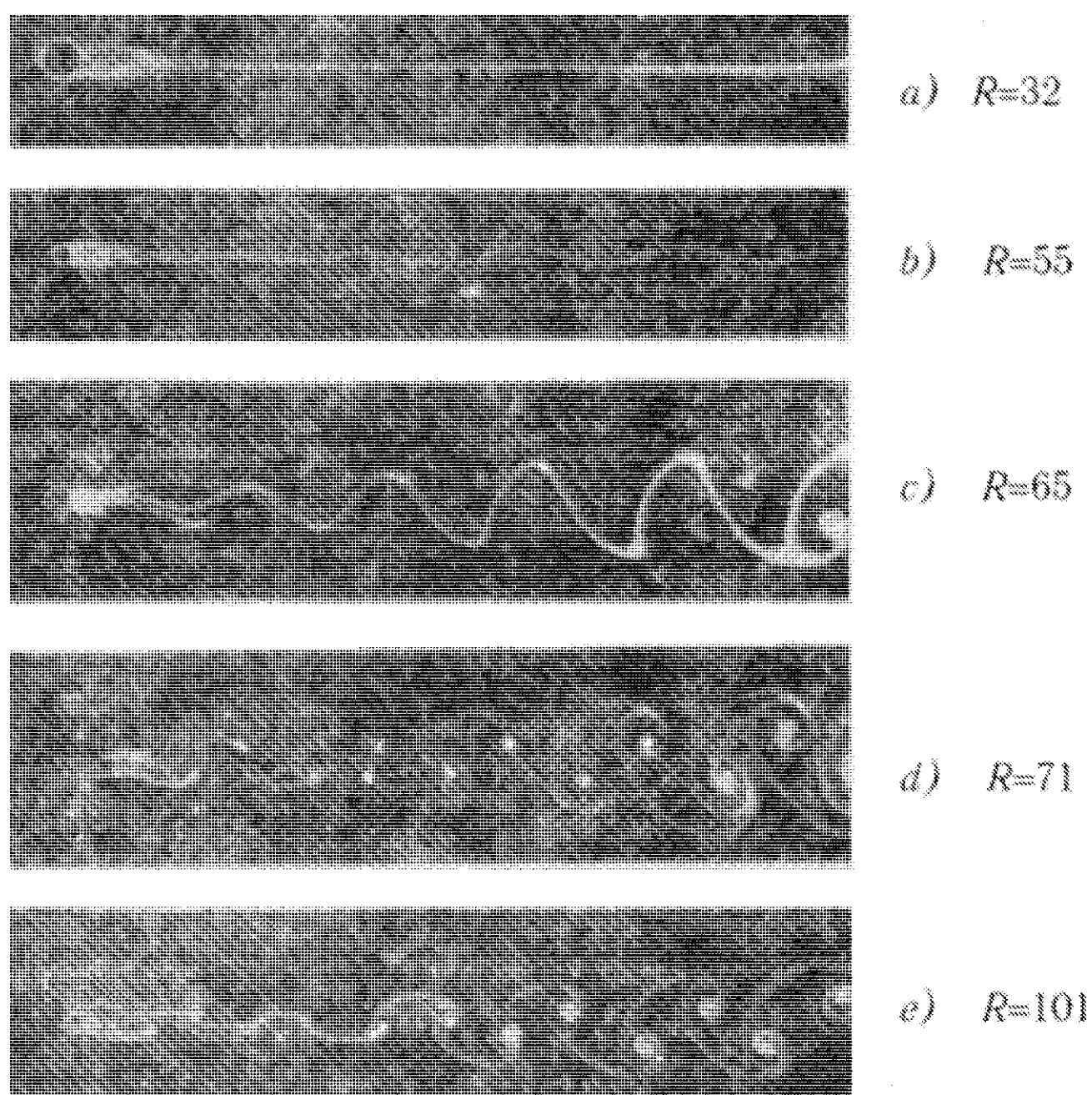


Рис. 146. Движение масла позади круглого цилиндра

Особенностью движения при числах Рейнольдса, меньших единицы, является «мешок» вязкой жидкости, окружающий со всех сторон движущееся тело и увлекаемый последним вместе с собою¹. В этом случае источник и кильватерный поток начинаются не от тела, а от мешка. Как известно, в области применимости закона Стокса сопротивление пропорционально не площади поперечного сечения тела, а его поперечнику (диаметру), и поэтому при уменьшении тела его коэффициент сопротивления возрастает. Это обстоятельство тесно связано с только что указанной особенностью движения при числах Рейнольдса, меньших единицы.

Как происходит переход от рассмотренного «ламинарного» обтекания к вихревой дорожке, ясно видно из фотоснимков движения круглого цилиндра в масле², изображенных на рис. 146.

¹Заметим, что это не следует понимать буквально, так как скорость жидкости в мешке не совсем постоянная; по мере удаления от тела она непрерывно уменьшается. При возрастании числа Рейнольдса мешок постепенно превращается в пограничный слой.

²Н o m a n n F., Forschung auf d. Geb. d. Ing.-Wes., т. 7 (1936), стр. 1.

При возрастании числа Рейнольдса вихревая дорожка теряет свой правильный характер и движение в кильватерном потоке делается турбулентным. Зависимость скорости w кильватерного потока от расстояния x от тела теперь получается иной, чем прежде. Эту зависимость можно определить следующим образом. Длина пути перемешивания, очевидно, пропорциональна ширине кильватерного потока, поэтому, согласно сказанному в § 4, пульсационные скорости u' и v' пропорциональны средней скорости w_1 кильватерного потока. Возрастание ширины кильватерного потока можно принять пропорциональным v' , следовательно, пропорциональным w_1 . Таким образом,

$$\frac{db}{dt} = v \frac{db}{dx} \sim w_1.$$

Но на основании уравнения (79) мы имеем, что $w_1 \sim \frac{Q}{b}$ в случае плоского течения и $w_1 \sim \frac{Q}{b^2}$ в случае течения, симметричного относительно оси вращения. Отсюда, интегрируя выражение $\frac{db}{dx}$, можно легко найти, что при плоском течении ширина b пропорциональна $\sqrt{x}$, а при течении, симметричном относительно оси вращения, пропорциональна $\sqrt[3]{x}$, следовательно, средняя скорость w_1 пропорциональна соответственно $\frac{1}{\sqrt{x}}$ и $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Более строгое исследование обоих случаев течения имеется в работах Шлихтинга¹ и Свен². Результаты, полученные для плоского течения, очень хорошо подтверждены опытом³.

§ 15. Результаты экспериментального исследования сопротивления жидкостей⁴. Для тел со сравнительно большим сопротивлением основную роль в возникновении сопротивления играет, как уже упоминалось, образование поверхностей раздела, т.е. отрыв потока от тела. У некоторых тел этот отрыв начинается во вполне определенных местах их поверхности. В частности, если тело имеет острые ребра, то отрыв потока начинается именно на этих ребрах. Опыт показывает, что для таких тел коэффициент сопротивления остается постоянным в весьма широкой области чисел Рейнольдса. Так, например, в Геттингенской лаборатории была произведена продувка⁵ круглых пластинок различной величины, поставленных поперек воздушного потока, при числах

¹Schlichting H., Ing.-Arch., т. 1 (1930), стр. 533.

²Swain L. M., Proc. Roy. Soc., London (A) т. 125 (1929), стр. 647.

³Schlichting H., Ing.-Arch., т. 1 (1930), стр. 533.

⁴См. также Handb. d. Exp.-Phys., т. IV, часть 2, стр. 235 (статья Н. Muttray).

⁵См. Ergebnisse der AVA, т. 2, стр. 28, München, 1923.

Рейнольдса от $R = \frac{vd}{\nu} = 4\,000$ до $1\,000\,000$. Найденные значения коэффициента сопротивления c лежат все в пределах от 1,10 до 1,12. Столь незначительные колебания полученных чисел дают основание предполагать, что коэффициент сопротивления круглых пластинок остается таким же и при еще больших числах Рейнольдса. Для чисел Рейнольдса, меньших $R = \frac{vd}{\nu} = 4\,000$, опыты производились только над пластинками, свободно падающими в жидкости. При этом выяснилось, что при числах Рейнольдса от 3 000 до 80 пластинки при своем падении начинают довольно сильно колебаться, и поэтому их сопротивление почти на 50% больше, чем можно было бы ожидать в случае спокойного падения. При числах Рейнольдса, меньших 80, пластинки падают спокойно, без колебаний, и измерения опять пригодны для определения коэффициента сопротивления. По мере уменьшения числа Рейнольдса закон сопротивления постепенно приближается к закону сопротивления Стокса, который для круглых пластинок имеет вид:

$$c = \frac{20,4}{R}$$

и достаточно точно оправдывается при числах Рейнольдса, меньших 0,5. Опыты Шмиделя¹ дали следующие значения для коэффициента сопротивления:

при $R =$	80	20	5	2
	$c = 1,5$	$2,4$	$5,6$	$11,5$

Распределение давления около тел с острыми ребрами также не зависит от числа Рейнольдса. Эйфель² измерил распределение давления на поверхности трех геометрически подобных моделей здания, обдуваемых потоком воздуха. Длина этих моделей была равна 0,8; 5 и 40 см. Несмотря на столь большое различие в размерах моделей, полученные распределения давления очень хороши совпадают друг с другом; они изображены на рис. 147. Впрочем, необходимо заметить, что распределение давления ветра на поверхности здания может сильно зависеть от формы местности, лежащей впереди дома³. В основном эта форма вли-

¹Schmiedel J., Experimentelle Untersuchungen über die Fallbewegung von Kugeln und Scheiben. Диссертация, Leipzig, 1928; см. также Physik. Zeitschr, т. 29 (1928), стр. 593.

²Eiffel G., Nouvelles recherches sur la résistance de l'air et l'aviation, стр. 286, Paris, 1914.

³Gran Olsson R., Versuche über Winddruck auf Bauwerke, Der Bauingenieur, т. 15 (1934), 49–50.

лет на положение места отрыва воздушного потока перед домом (см. рис. 106).

Совершенно иначе ведут себя тела округленной формы. На поверхности таких тел нельзя заранее указать вполне определенные места, в которых обязательно, при всех условиях, происходил бы отрыв потока. Для таких тел положение места отрыва определяется явлениями, происходящими в обычно тонком пограничном слое (см. § 6 и 7), следовательно, оно очень сильно зависит от таких, казалось бы, второстепенных обстоятельств, как, например, легкая шероховатость поверхности тела, большая или меньшая завихренность притекающей жидкости и т. п.

Все эти обстоятельства, влияя на положение места отрыва потока, тем самым влияют на размеры и мощность вихревой системы, образующейся позади тела, следовательно, и на величину сопротивления тела. Больше всего величина сопротивления зависит от того, является ли течение в пограничном слое до самого места отрыва ламинарным или же оно, не доходя до места отрыва или в самом месте ламинарного отрыва, делается турбулентным. Как уже было упомянуто в § 6, в последнем случае место окончательного отрыва потока отодвигается далеко назад — к кормовой части тела, вследствие чего сопротивление значительно уменьшается.

Впервые это явление было установлено при исследовании сопротивления шаров¹. Выяснилось, что коэффициент сопротивления s , равный в области чисел Рейнольдса между $\frac{vd}{\nu} = 1000$ и $300\,000$ от 0,45 до 0,48, при числе Рейнольдса $R \approx 300\,000$ резко уменьшается, достигая при особо тщательных условиях опыта значений, меньших 0,10. При еще больших значениях числа Рейнольдса, порядка $2 \cdot 10^6$, коэффициент s опять увеличивается, но только примерно до 0,18 (для шероховатых поверхностей — значительно выше). При большой завихренности воздушного потока критическая область чисел Рейнольдса перемеща-

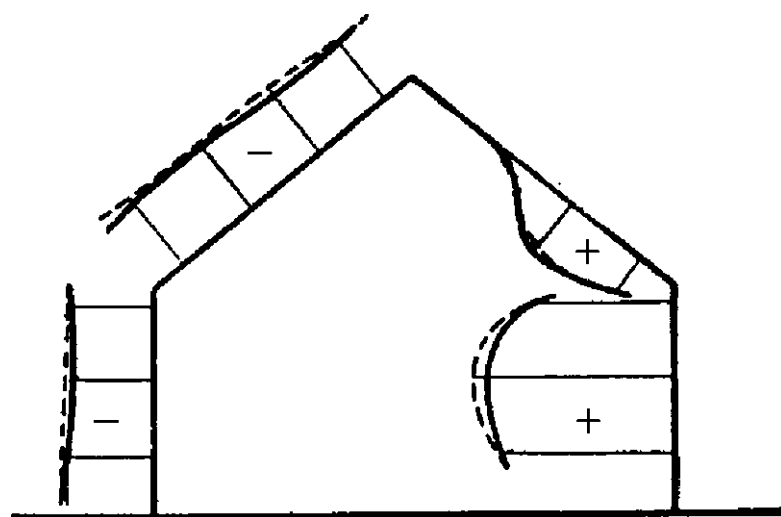


Рис. 147. Давление ветра на стены и крышу здания

¹Eiffel G., Compt. Rend., т. 155 (1912), стр. 1957; Prandtl L., Göttinger Nachr., Math.-Phys. Kl. 1914, стр. 177 (в этой статье имеется подробная библиография); см. также Wieselsberger C., Zeitschr. f. Flugtech. und Motorluftschiffahrt, т. 5 (1914), стр. 140.

ется к меньшим значениям¹. В том, что турбулизация пограничного слоя действительно уменьшает сопротивление, можно убедиться при помощи следующего опыта. Укрепим на поверхности большого шара, несколько впереди того места, где при ламинарном пограничном слое должен происходить отрыв потока, тонкое кольцо из проволоки толщиной, равной примерно $\frac{1}{300}$ диаметра шара. Такое кольцо вызывает турбулизацию пограничного слоя, и измерение показывает, что теперь сопротивление шара меньше, чем при отсутствии кольца. При этом точка отрыва потока, которая при ламинарном пограничном слое лежит на расстоянии 80° от передней точки шара, перемещается назад, достигая расстояния от 110 до 120° от передней точки шара.

Сопротивление шаров исследовано для очень широкой области чисел Рейнольдса², начиная от самых малых значений вплоть до $R = \frac{vd}{\nu} = 3 \cdot 10^6$. Для чисел Рейнольдса, меньших $0,4$, довольно точно удовлетворяется закон Стокса, который в нашей записи выражается уравнением:

$$c = \frac{24}{R}.$$

При других числах Рейнольдса коэффициент сопротивления c равен:

при $\frac{vd}{\nu}$	=	0,1	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
c	$\approx$	245	28	4,4	1,10	0,46	0,42	0,49	0,14

Совершенно аналогичная картина получается и для круглых цилиндров. Очень длинные цилиндры ($l \geq 100$ диаметрам) или цилиндры, с обоих концов ограниченные параллельными стенками, имеют следующие коэффициенты сопротивления³:

при $\frac{vd}{\nu}$	=	0,1	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
c	=	58	10	2,6	1,45	0,98	1,12	1,23	0,35

¹Это привело к тому, что в качестве эмпирической меры турбулентности в аэродинамической трубе было введено число Рейнольдса, при котором коэффициент сопротивления шара равен $c = 0,30$. Для хороших аэродинамических труб максимальное число Рейнольдса, соответствующее этому коэффициенту, равно приблизительно $3,9 \cdot 10^5$, для труб более худшего качества — приблизительно $1,5 \cdot 10^5$. Об уточнении критерия турбулентности было упомянуто в конце § 6.

²Алланом — от $R = 0,2$ до $8 \cdot 10^3$ [Allen, Phil. Mag, (5), т. 50, стр. 323]; в Геттингенской лаборатории — от $R = 8 \cdot 10^2$ до $8 \cdot 10^5$ (Ergebnisse der AVA, вып. 2, стр. 28); Бэконом и Рейдом — от $R = 2 \cdot 10^5$ до $3,6 \cdot 10^6$ [Bacon und Reid, NACA-Report, вып. 185 (1923)].

³Ergebnisse der AVA, вып. 2, стр. 23, и Relf, Technical Report of the Advisory Comm. f. Aeronautics, 1913/14, стр. 47, London, 1914.

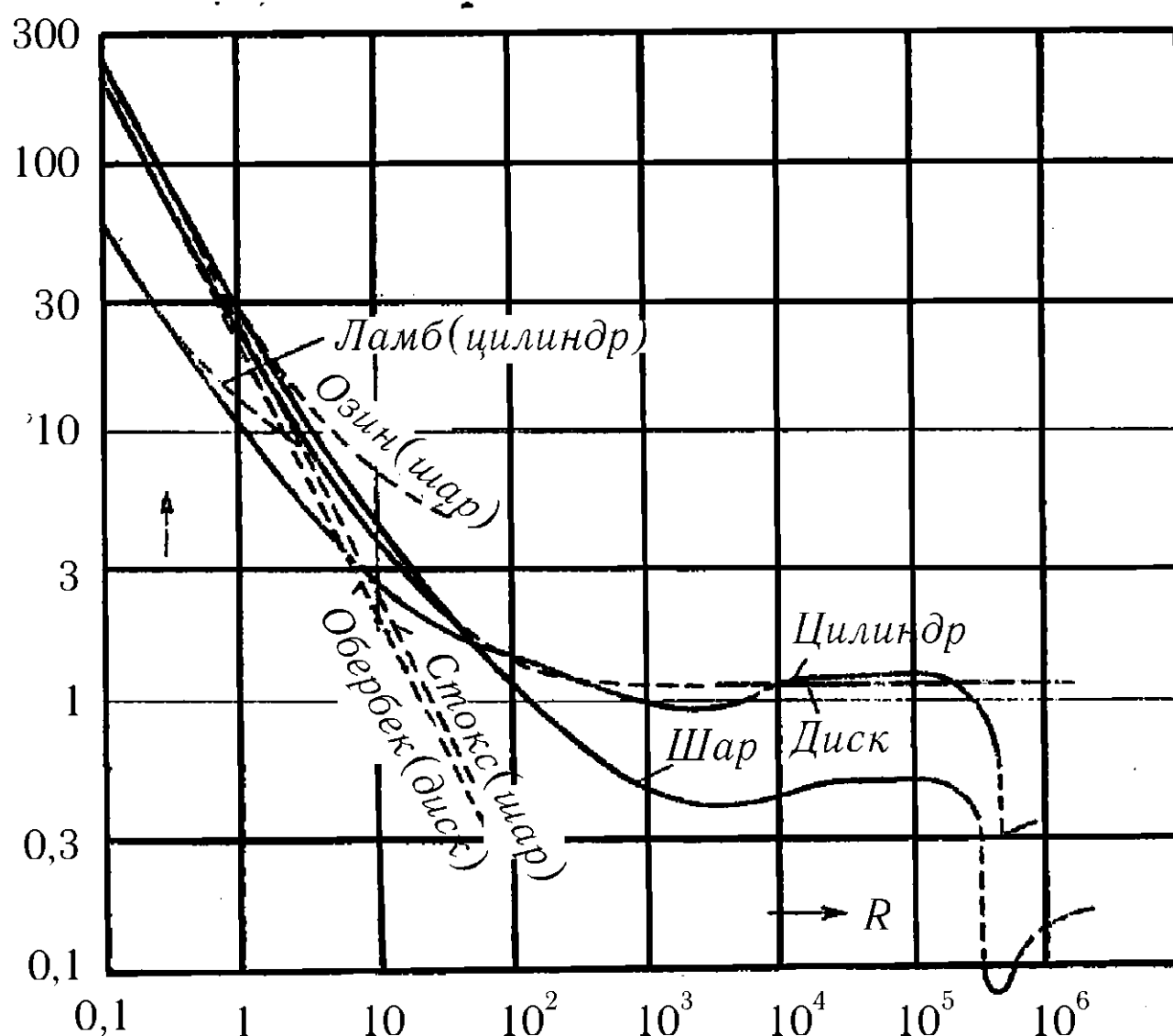


Рис. 148. Зависимость коэффициентов сопротивления шара, цилиндра и диска от числа Рейнольдса

Переход от больших значений сопротивления к малым лежит в области между $\frac{vd}{\nu} = 1,8 \cdot 10^5$ и $5 \cdot 10^5$; здесь коэффициент c резко уменьшается от 1,2 до 0,3. Для очень малых чисел Рейнольдса вместо закона Стокса имеет место более сложный закон Ламба¹:

$$c = \frac{8\pi}{R(2,002 - \ln R)}.$$

Зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса для круглых пластинок, шаров и цилиндров графически изображена на рис. 148.

Для цилиндров небольшой длины коэффициенты сопротивления значительно меньше, чем для очень длинных цилиндров. Причина этого такая же, как и при обтекании пластинок с небольшой длиной: жидкость, обтекая концы цилиндра, значительно суживает мертвую зону позади цилиндра, вследствие чего давление там увеличивается по сравнению со случаем очень длинного цилиндра, и поэтому подсасывающее

¹Lamb H., Phil. Mag., (5), т. 21 (1911), стр. 120; см. также Lamb H., Hydrodynamics, § 343.

действие задней стороны цилиндра уменьшается. Согласно измерениям, произведенным в Геттингенской лаборатории для цилиндров с отношением $\frac{l}{d} = 5$, коэффициент сопротивления для них равен:

$$\begin{array}{rcccl} \text{при } \frac{vd}{\nu} & = & 10^3 & 10^4 & 10^5 & 10^6 \\ c & = & 0,67 & 0,73 & 0,75 & 0,37.^1 \end{array}$$

Свободно падающие тела при больших числах Рейнольдса часто совершают неравномерные вторичные движения, что значительно увеличивает их сопротивление².

В авиационной технике особую важность приобрела задача об отыскании такой формы тела, которая обладает наименьшим сопротивлением при движении в воздухе. Мы знаем, что в жидкости без трения тело любой формы, движущееся равномерно, не встречает никакого сопротивления, так как поток жидкости, обтекающий тело, так же замыкается позади него, как расступается перед ним, и поэтому в жидкости не остается никакого возмущения. Это обстоятельство позволяет сформулировать указанную задачу следующим образом: какую форму следует придать телу, чтобы при его движении в реальной жидкости не происходило отрыва потока от его поверхности. Если такая форма найдена, то на основании сказанного можно предполагать, что ее сопротивление практически состоит только из сопротивления трения. Опыты вполне подтверждают это предположение. Все тела, обтекание которых происходит без отрыва потока, имеют более или менее удлиненную форму, спереди закругленную, а сзади — суживающуюся, постепенно переходящую в немного притупленное острие или ребро. Спереди тела, где можно не опасаться отрыва потока, заострение излишне и здесь вполне пригодна форма удлиненного эллипсоида. Примеры тел с очень небольшим сопротивлением изображены на рис. 149 (корпус дирижабля) и на рис. 150 (профиль стойки). (Нос корабля, плавающего на воде, имеет, как известно, совершенно иную форму: в своей надводной части он сильно заострен; это необходимо для того, чтобы предупредить образование высокой носовой волны.)

Распределение давления на поверхности тел с малым сопротивлением, определенное путем измерений, как правило, очень хорошо совпадает с теоретическим распределением, соответствующим потенциально-

¹Это значение получено экстраполированием.

²Подробности можно найти в статье Л. Шиллера, помещенной в Handb. der Exp-Physik, т. IV, часть 2, стр. 368.

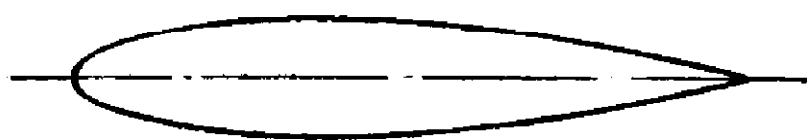


Рис. 149. Хорошая форма дирижабля

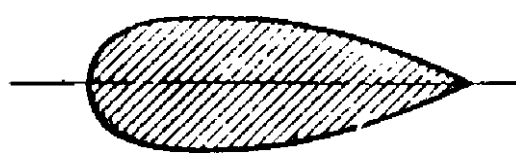


Рис. 150. Хорошая форма стойки

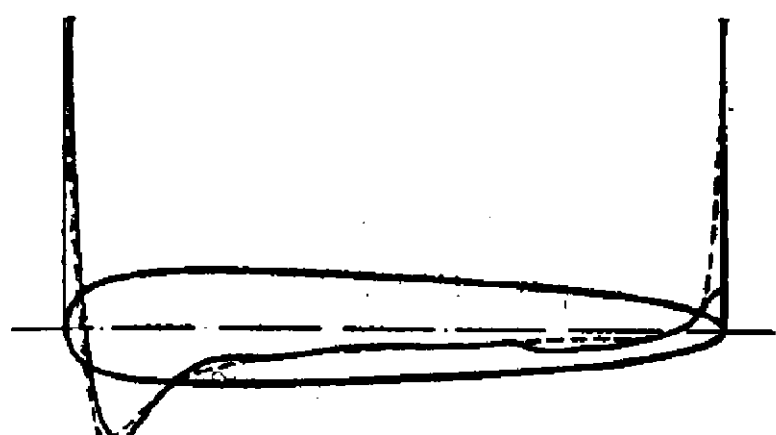


Рис. 151. Распределение давления на поверхности моделей дирижабля. Штрихами изображены вычисленные, а сплошными линиями — наблюдаемые распределения давления

му течению. Исключение составляет задний конец тела, где наблюдаемые значения давления не достигают теоретического значения, равного динамическому давлению в передней точке тела. Причиной этого является потеря скорости в пограничном слое, облегающем тело. Два характерных примера распределения давления изображены на рис. 151¹.

Для тела вращения, изображенного на рис. 149, коэффициент сопротивления равен, согласно опытам, $c = 0,04$, следовательно, сопротивление этого тела в 28 раз меньше сопротивления круглой пластинки с таким же диаметром. Для стержня, поставленного своей осью поперек потока и имеющего поперечное сечение, изображенное на рис. 150, коэффициент сопротивления равен от $c = 0,06$ до $0,08$ (при числе Рейнольдса $\frac{vd}{\nu} \approx 50\,000$).

Что касается *сопротивления трения*, то мы ограничимся здесь следующими указаниями² (см. также § 5, п. е)). Для его подсчета обычно берется полная поверхность тела O ; в случае прямоугольной пластинки, обтекаемой с двух сторон, эта поверхность равна $O = 2bl$. В общем случае сопротивление может быть принято пропорциональным размеру

¹По измерениям и вычислениям Фурмана (Fuhmann G, Диссертация, Göttingen, 1910, опубликована в Jahrb. d. Motorluftschiff-Studienges., 1911/12, стр. 63).

²Подробности см. в Hydromech. Probl. d. Schiffsantriebs, Hamburg, 1932, стр. 1–98.

пластинки, перпендикулярному к направлению движения, т. е. ширине пластинки b . Но так как ширина пластинки уже содержится в выражении полной поверхности O , то коэффициент сопротивления c_f можно считать независимым от b . Иначе получается для размера пластинки, совпадающего с направлением движения, т. е. для длины l . Задняя половина пластинки находится в потоке, уже отчасти заторможенном передней половиной пластинки, поэтому при удвоении длины пластинки ее сопротивление увеличивается меньше, чем вдвое. При ламинарном течении в пограничном слое коэффициент сопротивления пропорционален $\sqrt{l}$, при турбулентном течении для достаточно больших чисел Рейнольдса и для гладкой поверхности — пропорционален от $l^{0,8}$ до $l^{0,85}$, для шероховатой поверхности — от $l^{0,65}$ до $l^{0,75}$.

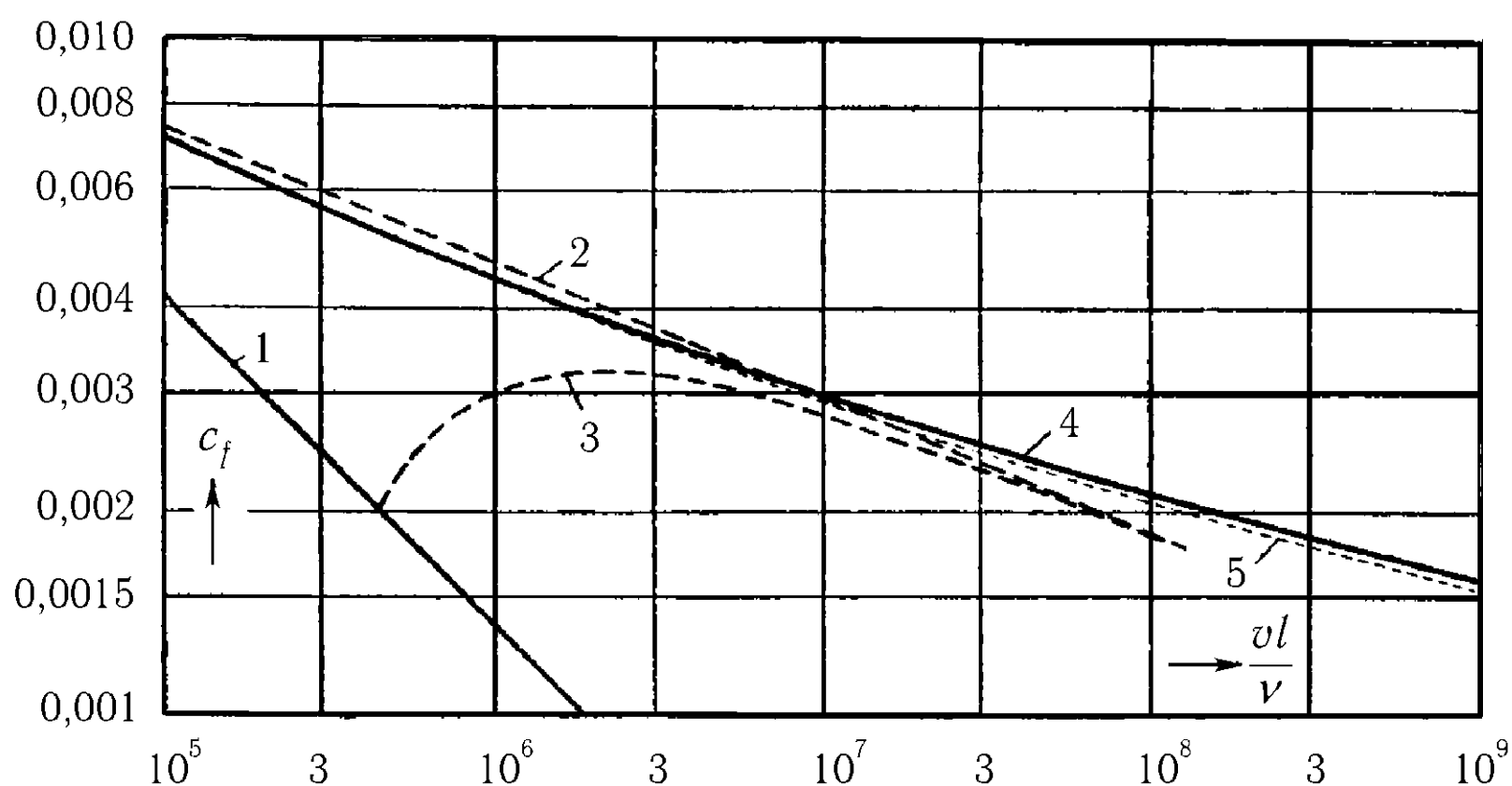


Рис. 152. Зависимость коэффициента сопротивления трения c_f гладких пластинок от числа Рейнольдса

На рис. 152 даны кривые, изображающие зависимость коэффициента сопротивления c_f от числа Рейнольдса R , составленного по длине l , для пластинок с гладкой поверхностью. Из этих кривых первая, вторая и третья получены путем экспериментального определения сопротивления, а четвертая и пятая — теоретическим путем. При построении кривых значения c_f и R отложены в логарифмическом масштабе. Кривая 1 относится к ламинарному течению; в соответствии с формулой (14) (см. § 3) получается, что

$$c_f = \frac{1,328}{\sqrt{R}}. \quad (83)$$

Кривая 2 относится к турбулентному течению в пограничном слое, причем для случая, когда турбулентность начинается около переднего ребра пластинки; в соответствии со сказанным в § 5, п. е) получается, что

$$c_f = \frac{0,074}{R^{0,2}}. \quad (84)$$

Этот закон сопротивления находится в тесной внутренней связи с законом сопротивления Блазиуса¹ [уравнение (66)]. Если пограничный слой около переднего ребра пластинки ламинарный и только потом делается турбулентным, то для коэффициента c_f при условии, что критическое число R равно 500 000, получается формула

$$c_f = \frac{0,074}{R^{0,2}} - \frac{1700}{R} \quad (85)$$

(кривая 3). Эта формула пригодна до числа Рейнольдса $R \approx 5 \cdot 10^6$. При очень больших числах Рейнольдса сопротивление пластинки увеличивается несколько быстрее, чем по формуле (85), в полном соответствии с отступлением сопротивления при движении в трубе от закона Блазиуса.

Из логарифмических формул (28) и (29), приведенных в § 5 для турбулентного распределения скоростей, можно вывести теоретические формулы для сопротивления пластинок, пригодные для очень большого диапазона чисел Рейнольдса². При больших числах Рейнольдса полученные формулы хорошо согласуются с результатами опытов Кемпфа³. Однако эти формулы неудобны для вычислений, поэтому Шлихтинг предложил вместо них интерполяционную формулу, достаточно хорошо передающую найденные зависимости. Формула Шлихтинга имеет вид:

$$c_f = \frac{0,0455}{(\lg R)^{2,58}}. \quad (86)$$

Шёнгер⁴, исходя из аналогичных исследований Т. Кармана, вывел формулу:

$$\sqrt{c_f} = \frac{0,242}{\lg(Rc_f)}, \quad (87)$$

¹См. также Prandtl L., Ergebnisse der AVA, вып. 3 (1927), стр. 3.

²Prandtl L., Ergebnisse der AVA, вып. 4 (1932), стр. 24.

³Kempf G., Werft, Reederei, Hafen, 1929, стр. 234 и 237.

⁴Schönherr K., Trans. Soc. Nav. Arch. and Marine Eng., т. 40 (1932).

сходную с формулой (71) (см. § 11) и очень хорошо передающую результаты старых и новых опытов.

Формулам (86) и (87) на рис. 152 соответствуют кривые, обозначенные цифрами 4 и 5. Если при обтекании пластинки пограничный слой остается на некотором протяжении ламинарным, то правые части формул (86) и (87) следует уменьшить, как и выше, на величину $\frac{1700}{R}$ (при другом критическом числе Рейнольдса вместо числителя 1 700 будет другое число!).

Для скоростных самолетов чрезвычайно важно, чтобы сопротивление трения крыльев было возможно меньше. Из рис. 152 ясно, что это сопротивление можно очень сильно понизить, если добиться сохранения ламинарного течения на значительном протяжении крыла. Решение этой задачи облегчается тем, что сохранить ламинарным поток, в котором скорость увеличивается, легче, чем поток, в котором скорость уменьшается. Следовательно, профиль крыла должен иметь такую форму, чтобы максимальная скорость обтекающего потока получалась возможно дальше от передней точки профиля. Для этого, в свою очередь, необходимо, чтобы место наибольшей толщины профиля лежало возможно ближе к его концу. Всякого рода выступы и неровности, даже небольшие, впереди этого места недопустимы. При помощи такого рода *ламиниризованных профилей* удалось сохранить пограничный слой ламинарным до чисел Рейнольдса около $3 \cdot 10^6$.

Вычисление сопротивления трения для *шероховатых пластинок* можно выполнить, исходя из закономерностей, полученных в § 5 п. d) для турбулентного течения около шероховатых стенок (см. по этому поводу также сказанное в § 11 о сопротивлении в трубах). Можно предполагать, что для течения, в котором влияние шероховатости уже вполне выявилось, сопротивление при заданной длине пластинки l и заданной шероховатости k пропорционально квадрату скорости, причем коэффициент пропорциональности тем больше, чем больше отношение $k : l$. Так как это отношение при заданном k уменьшается при увеличении l , то при увеличении длины, следовательно, при увеличении числа Рейнольдса $R = \frac{vl}{\nu}$, коэффициент сопротивления c_f при постоянной скорости v уменьшается. Результаты соответствующих вычислений, выполненных Шлихтингом¹ на основе измерений, произведенных Никурадзе для шероховатых труб, изображены на рис. 153. На этом рисунке мы опять видим довольно четкие переходы от гидравлически гладкого состояния течения к состоянию, при котором влияние шероховатости проявляется в полной мере (ср. рис. 128 на стр. 225). Штриховая кривая дает

¹ Schlichting H., Werft, Reederei., Hafen, т. 15 (1934), стр. 1.

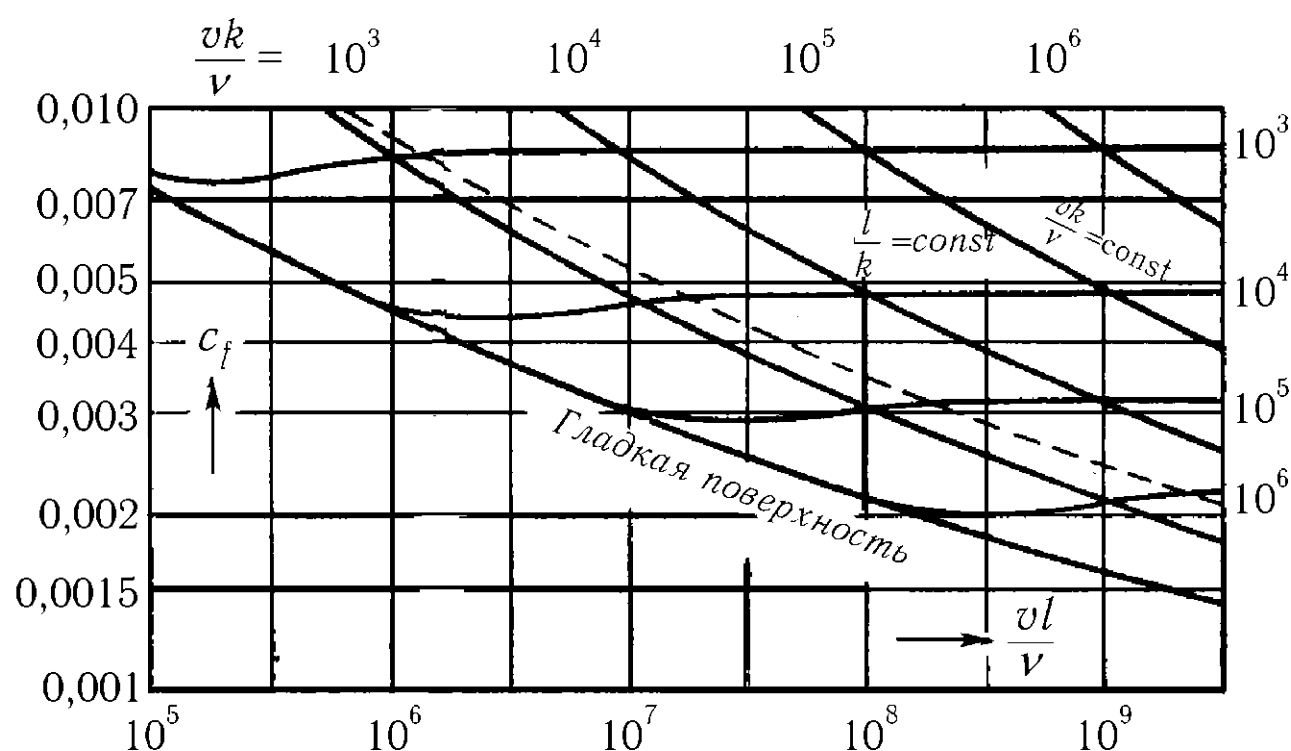


Рис. 153. Зависимость коэффициента сопротивления трения c_f шероховатых пластинок от числа Рейнольдса

те значения длины пластинки, после превышения которых имеет место состояние течения с вполне развившимся влиянием шероховатости.

Сопротивление трения круглых пластинок, вращающихся в своей плоскости, будет рассмотрено в § 11 гл. V.

§ 16. Крыло. До сих пор мы рассматривали только такие случаи движения тел в жидкости, когда вследствие симметрии обтекания сила сопротивления жидкости была направлена прямо противоположно направлению движения. Между тем в общем случае сила сопротивления образует некоторый угол с направлением движения, причем иногда в сочетании с вращающим моментом относительно некоторой оси. На возникновении силы сопротивления, направленной под углом к направлению движения тела, основано действие крыла самолета, а на возникновении момента сопротивления — действие колеса ветряка. В обоих случаях, кроме полезного действия сопротивления, имеет место также вредное действие, обусловленное той составляющей сопротивления, которая направлена в сторону, прямо противоположную движению крыла. Эта составляющая полного сопротивления носит название *лобового сопротивления*. Другая составляющая, перпендикулярная к направлению движения, называется *подъемной силой*.

Очевидно, что крыло будет тем лучше, чем больше его подъемная сила и чем меньше лобовое сопротивление. Довольно хорошо удовлетворяют этому требованию плоские пластинки, установленные под небольшим углом к направлению движения (этот угол принято называть *уг-*

лом атаки). Однако, как доказал в 1873 г. опытным путем Лилиенталь¹, значительно лучше в этом отношении немного изогнутые пластинки. Тонкие пластинки с успехом могут быть заменены довольно толстыми пластинками с профилем, напоминающим рыбу (рис. 149). Вполне пригодны даже очень толстые крылья, как это доказал в 1917 г. Юнкерс (H. Junkers), построивший цельнометаллический самолет с крыльями, воспринимавшими нагрузку только при помощи системы внутренних подпорок (лонжеронов и нервюр), скрытых внутри крыла. Некоторые профили крыльев старых типов изображены на рис. 154; они очень похожи на профили крыльев хорошо летающих птиц.

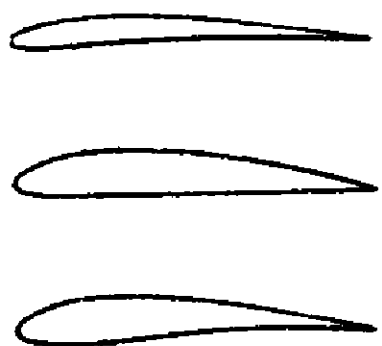


Рис. 154. Старые профили крыльев

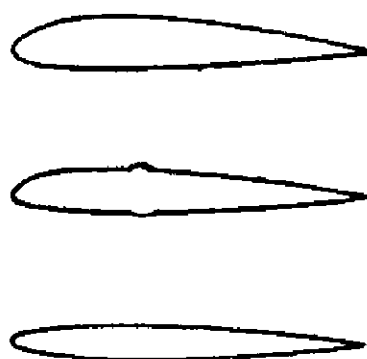


Рис. 155. Современные профили крыльев

В прежние годы при конструировании самолетов обычно стремились получить возможно большую подъемную силу. В настоящее время главными требованиями, предъявляемыми к самолету, являются высокая скорость полета и легкая управляемость. Эти требования привели к разработке новых типов профилей, некоторые из которых изображены на рис. 155. Самый нижний из них имеет особенно малое лобовое сопротивление, следовательно, он особенно пригоден для скоростных самолетов.

Отличительной особенностью профилей, удовлетворяющих требованию легкой управляемости самолета, является неизменное положение центра давления на крыле (см. ниже, стр. 272).

Как уже было упомянуто в предыдущем параграфе, можно сохранить пограничный слой около крыла на значительном протяжении ламинарным и тем самым уменьшить сопротивление трения, если переместить место наибольшей толщины профиля возможно дальше назад — к концу профиля². Самый нижний профиль на рис. 155, а также профиль *b* на рис. 156 имеют именно такую форму. В верхней части рис. 156 изображено распределение

¹Lilienthal O., Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst, 1889.

²Lewis G. W., Journ. of the Roy. Aeron. Soc. 1939 (май),

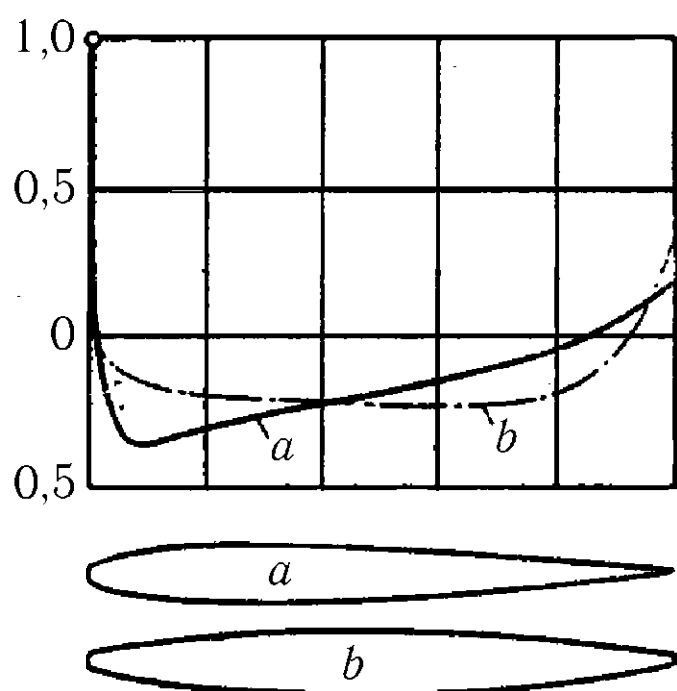


Рис. 156. Теоретическое распределение давления на поверхности двух симметричных профилей при угле атаки в 0°

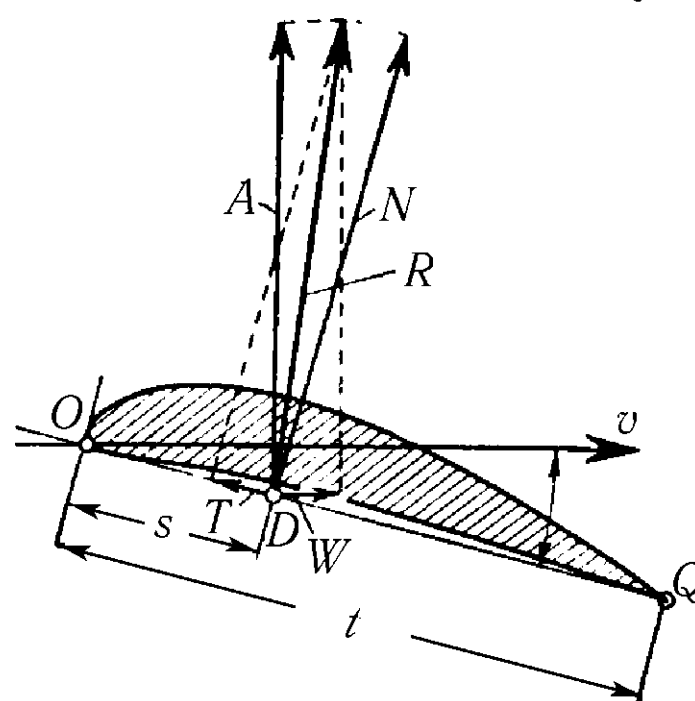


Рис. 157. Разложение полной силы сопротивления R на подъемную силу A и лобовое сопротивление W , а также на нормальную и касательную силы N и T

давления, вычисленное Тани и Митуизи¹ для двух профилей: для профиля a старого типа и для современного скоростного профиля b , имеющего только что указанную форму. Оба эти распределения, полученные путем теоретических вычислений, хорошо согласуются с экспериментом. Измерения сопротивления, выполненные при угле атаки в 0° и при числе Рейнольдса $R = 3 \cdot 10^6$, дали следующие значения коэффициента сопротивления c_w : для профиля (a) $c_w = 0,0063$, для профиля (b) $c_w = 0,0030$.

Для получения численных характеристик свойств крыла результирующая сила сопротивления R разлагается на две составляющие (рис. 157): либо на уже упомянутые подъемную силу A и лобовое сопротивление W , действующие в направлениях, перпендикулярном и параллельном направлению движения, либо на нормальную силу N и касательную силу T , действующие в направлениях, перпендикулярном и параллельном какой-нибудь линии профиля, например, его хорде, т. е. прямой, соединяющей переднюю и заднюю точки профиля. Так как площадь проекции крыла на плоскость, перпендикулярную к направлению движения, зависит от угла атаки, то для удобства вычислений принято относить безразмерные коэффициенты указанных выше сил не к этой переменной площади, а к постоянной площади F наибольшей проекции

¹Tani and Mituisi, Report Aeronaut Research Institute, Tokio Imp. Univ., т. 4 (Zürich, 1942), стр. 179, в которой приводятся результаты швейцарских исследований.

крыла. В случае прямоугольного крыла эта площадь равна $F = lb$, где l есть размах крыла (размер в направлении, перпендикулярном к движению), а b — ширина крыла (размер в направлении движения). По-прежнему обозначая динамическое давление $\frac{\rho v^2}{2}$ через p_d , мы можем написать:

$$\begin{cases} A = c_a F p_d; & W = c_w F p_d, \\ N = c_n F p_d; & T = c_t F p_d, \end{cases} \quad (88)$$

где c_a , c_w , c_n и c_t суть коэффициенты подъемной силы, лобового сопротивления, нормальной силы и касательной силы. Силы A и W , с одной стороны, и силы N и T , с другой, представляют собой составляющие одного и того же вектора R по осям двух прямоугольных систем координат, повернутых одна относительно другой на угол α , образуемый хордой крыла с направлением движения; поэтому для перехода от сил A и W к силам N и T и обратно применимы формулы преобразования координат, известные из аналитической геометрии. Разделив эти формулы на $F p_d$, мы получим формулы для пересчета коэффициентов c_a и c_w в коэффициенты c_n и c_t , и обратно. Первые формулы имеют вид:

$$\begin{cases} c_n = c_a \cos \alpha + c_w \sin \alpha, \\ c_t = -c_a \sin \alpha + c_w \cos \alpha. \end{cases} \quad (89)$$

Картина течения вокруг крыла зависит от угла атаки α , поэтому коэффициенты c_a и c_w , а следовательно, на основании формул (89), также коэффициенты c_n и c_t являются функциями угла атаки α . На рис. 158 показано типичное изменение этих функций для самого верхнего из профилей, изображенных на рис. 155, причем для случая, когда отношение размаха крыла к его ширине равно 5 : 1. В области углов атаки от A до B обтекание крыла происходит плавно, т.е. поток на всем протяжении крыла прилегает к нему (рис. 159). Наоборот, в области углов атаки, лежащих слева от A и справа от B , обтекание крыла происходит с отрывом потока на нижней или верхней его поверхности (рис. 160). Пространство между оторвавшимся потоком и поверхностью крыла заполняется вихрями, поэтому, как только возникает отрыв, лобовое сопротивление значительно повышается, а подъемная сила, наоборот, значительно понижается.

Кривые, изображающие зависимость коэффициентов c_a и c_w от угла атаки (рис. 158), можно объединить в одну кривую следующим образом: значения c_a и c_w , соответствующие общему значению угла атаки α , откладываются в прямоугольной системе осей как абсциссы

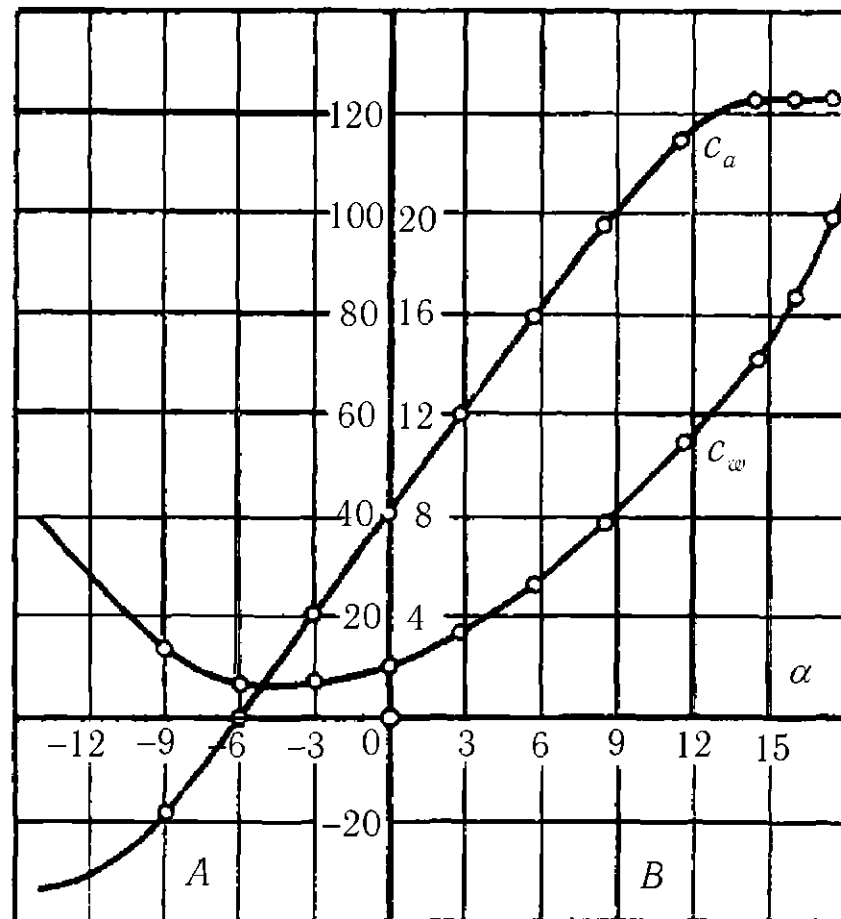


Рис. 158. Зависимость коэффициентов подъемной силы (c_a) и лобового сопротивления (c_w) от угла атаки α . Для облегчения отсчета на оси ординат поставлены числа, в сто раз большие действительных значений c_a и c_w

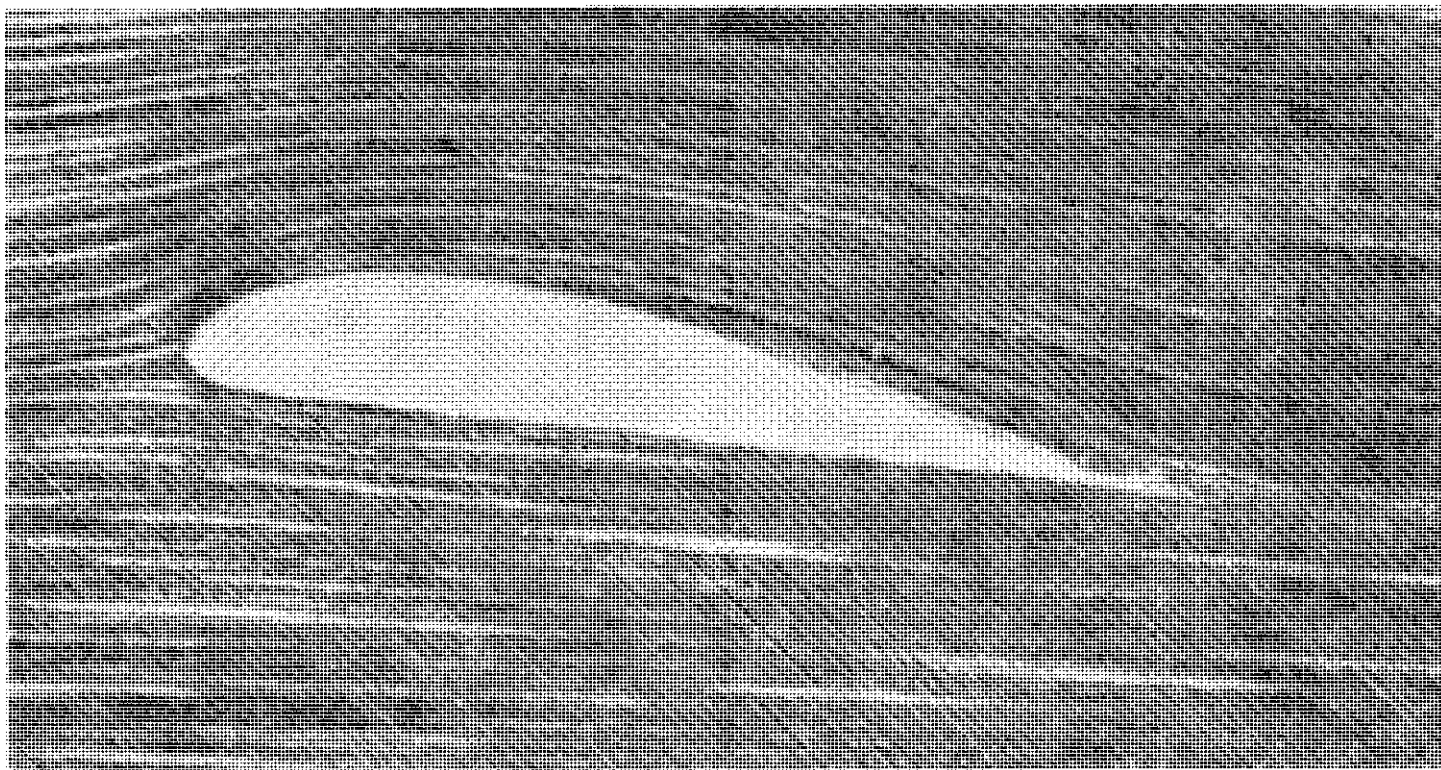


Рис. 159. Плавное обтекание крыла

и ординаты, и таким путем получается кривая, называемая *полярой* (рис. 161). Около отдельных точек поляры надписываются соответствующие значения угла атаки. Так как подъемная сила A и лобовое сопротивление W представляют собой прямоугольные составляющие полной

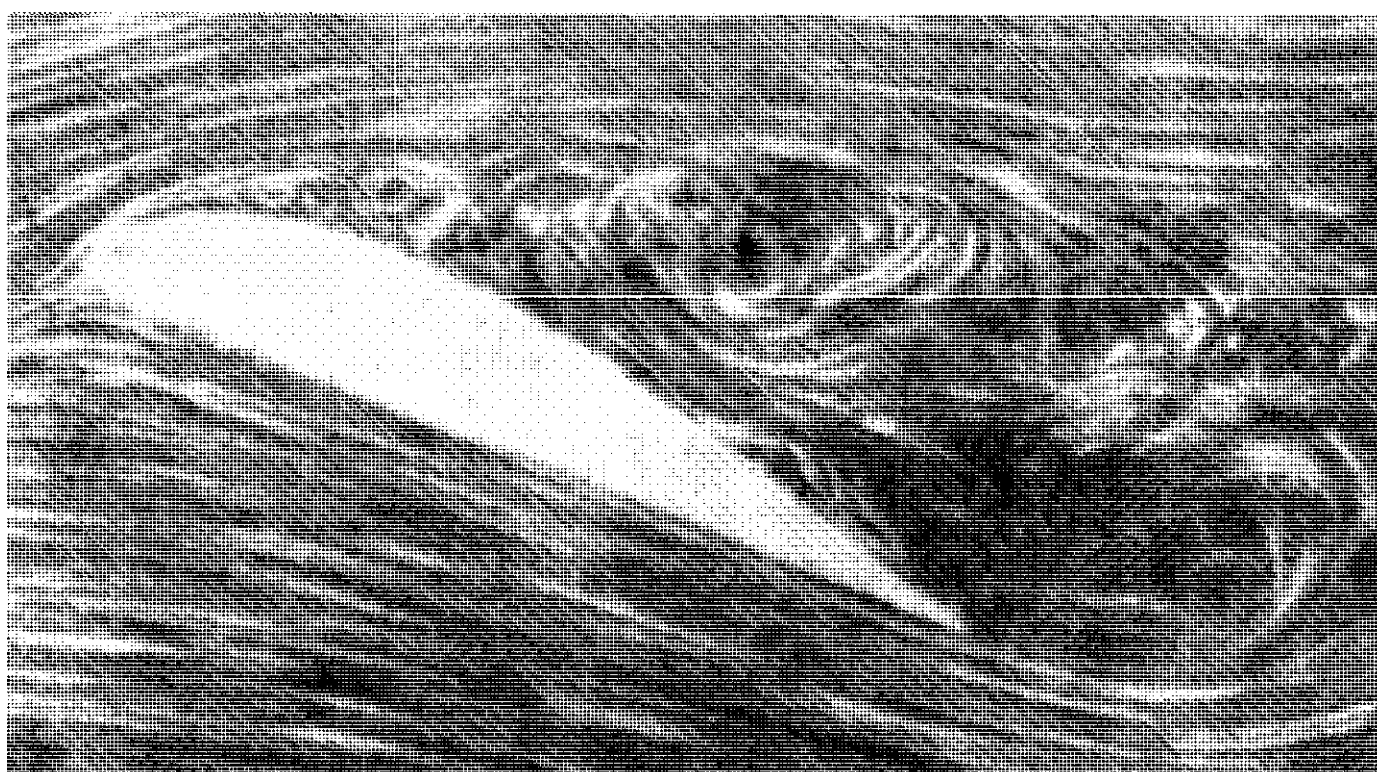


Рис. 160. Обтекание крыла с отрывом потока

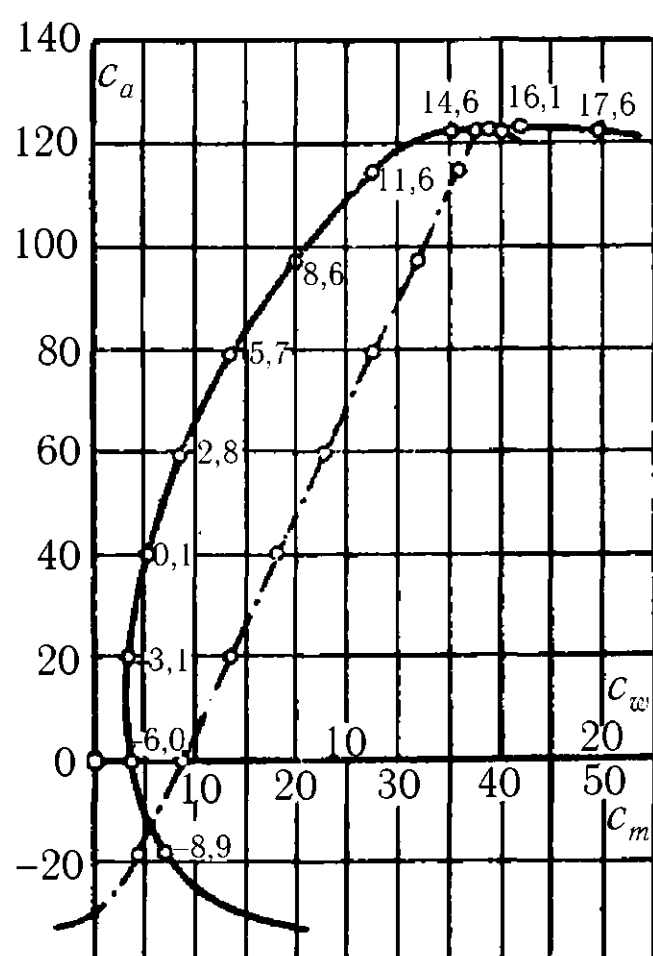


Рис. 161. Поляра (изображена сплошной линией) и моментная кривая (изображена штрихпунктиром). Для облегчения отсчета на осях абсцисс и ординат поставлены числа, в сто раз большие действительных значений C_a , C_w , и C_m

силы сопротивления, то отрезок прямой, соединяющей начало координат с какой-нибудь точкой поляры, представляет собой не что иное, как коэффициент полного сопротивления R и указывает своим направлением направление полного сопротивления R . Такой способ графического

изображения связи между c_a и c_w впервые был применен, по-видимому, О. Лилиенталем. Эйфель¹ улучшил этот способ тем, что стал откладывать значения коэффициента сопротивления, обычно очень малые, в масштабе в пять раз большем масштаба коэффициента подъемной силы. Изображение аэродинамических свойств крыла при помощи поляры оказалось очень удобным для целой авиационной техники и поэтому получило очень широкое распространение.

Следующей важной характеристикой аэродинамических свойств крыла является положение полной силы сопротивления R относительно крыла для каждого угла атаки. Это положение может быть задано расстоянием s точки D , в которой сила R пересекает хорду крыла OQ , от передней точки профиля O (см. рис. 157). Точка D называется *центром давления* крыла. Однако такой способ задания положения силы R неудобен для графического изображения, а также для целей интерполяции, так как для угла атаки, соответствующего нормальной силе $N = 0$, расстояние s почти всегда делается равным бесконечности. Значительно удобнее вместо расстояния s указывать момент M полного сопротивления R относительно точки O , который изменяется при изменении угла атаки α очень постепенно. Этот момент, как легко видеть, равен $M = Ns$, следовательно, зная M и N , можно всегда найти s . Для того чтобы коэффициент пропорциональности c_m , связывающий момент M с произведением Fp_d , был безразмерным числом, необходимо умножить произведение Fp_d на некоторую длину. В качестве такой длины удобнее всего взять ширину профиля $OQ = b$. Тогда мы будем иметь:

$$M = c_m Fp_d b. \quad (90)$$

Коэффициент c_m называется *коэффициентом момента*. Зависимость его от коэффициента подъемной силы c_a изображена на рис. 161 штрихпунктирной кривой (значения c_m отложены по оси абсцисс). Представление коэффициента c_m в виде функции от c_a удобно потому, что коэффициент c_a в технически важной области углов атаки, при которых обтекание крыла происходит плавно, увеличивается с возрастанием угла атаки очень равномерно. Вторая причина, почему в качестве независимой переменной берутся значения c_a , выяснится в дальнейшем, в § 17.

Линия, соединяющая переднюю и заднюю точки профиля и проведенная так, что каждая ее точка лежит на одинаковом расстоянии от верхнего и нижнего обвода профиля, называется *скелетной линией*

¹Ei l l e r G ., Nouvelles recherches sur la résistance de l'air et l'aviation, Paris, 1914.

профиля. Для симметричных профилей, скелетная линия которых представляет собой, очевидно, прямую линию, центр давления лежит при всех углах атаки довольно точно на расстоянии $1/4$ ширины профиля от его передней точки. Для профилей со скелетной линией в виде дуги круга центр давления при нулевом угле атаки (относительно хорды скелетной линии) лежит в середине профиля. При других углах атаки центр давления таких профилей перемещается в ту или другую сторону от указанного положения. Кроме симметричных профилей свойством неизменности положения центра давления обладают также некоторые профили со скелетной линией в виде слабо изогнутой буквы *S*, причем расстояние центра давления от передней точки профиля для них равно также $1/4$ ширины профиля.

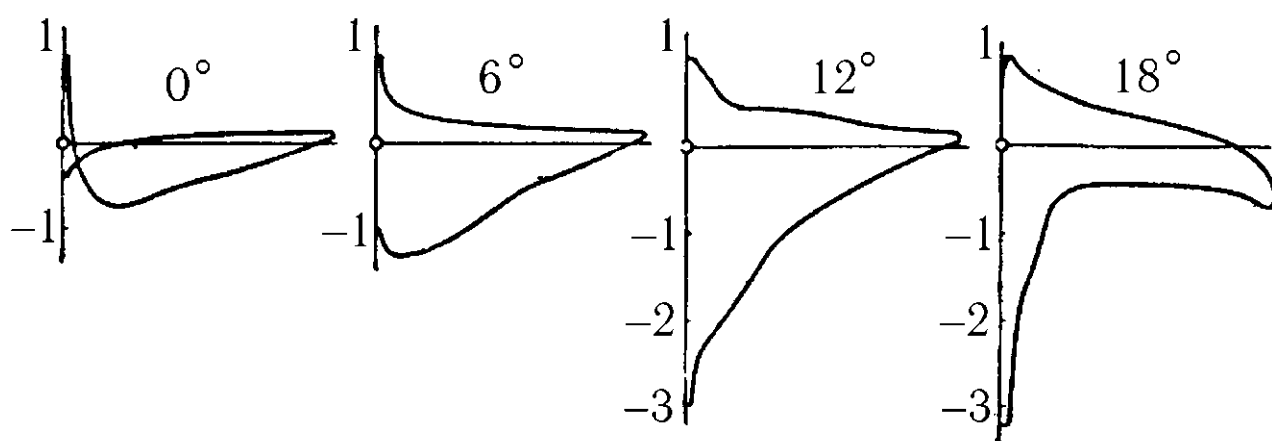


Рис. 162. Распределение давления на нижней и верхней сторонах профиля при различных углах атаки

На рис. 162 показано распределение давления на нижней и верхней сторонах профиля, сходного со средним из профилей, изображенных на рис. 154, при обтекании под углами атаки в 0° ; 6° ; 12° и 18° . При обтекании под углом атаки в 18° происходит отрыв потока на верхней стороне профиля. На этой стороне вблизи передней точки давление понижается на величину, примерно в три раза большую динамического давления в передней точке. На нижней стороне профиля максимальное увеличение давления не превышает, как это следует из уравнения Бернулли, однократной величины динамического давления в передней точке.

Как уже было упомянуто, максимальная подъемная сила крыла имеет место при том угле атаки, после превышения которого происходит отрыв потока на верхней стороне профиля. При возрастании числа Рейнольдса (а также при возрастании турбулентности воздушного потока при продувке в аэродинамической трубе) подъемная сила увеличивается незначительно. Однако при малых числах Рейнольдса, меньших 100 000, возникают условия, которые легко могут привести к резкому

уменьшению подъемной силы (см. стр. 191). Это обстоятельство следует учитывать при постройке моделей самолетов. Именно поэтому лучшие профили для моделей имеют несколько иную форму, чем профили для настоящих самолетов. Согласно исследованиям Шмитца¹ для моделей особенно пригодны профили с острым передним концом. Шмитц установил также, что хорошие профили для настоящих самолетов могут быть сделаны пригодными для моделей, если перед передней кромкой крыла модели натянуть тонкую проволоку или нитку (благодаря этому набегающий поток воздуха делается турбулентным).

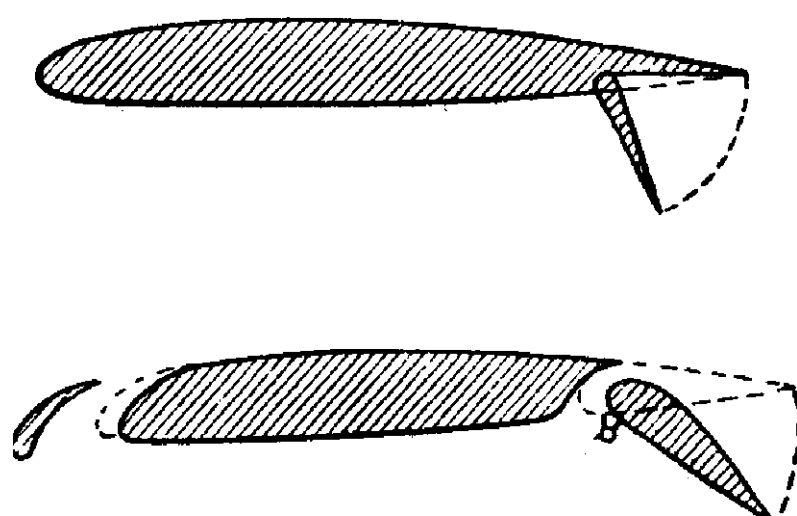


Рис. 163. Крыло со щитком (наверху) и крыло с щелевым закрылком и предкрылком (внизу)

При взлете и посадке самолета, когда скорость полета сравнительно невелика, крылья самолетов, рассчитанных на высокие скорости полета, не могут дать достаточной подъемной силы. В таких случаях для повышения подъемной силы применяются различного рода специальные приспособления, из которых лучше всего оправдали себя щитки и щелевые закрылки (рис. 163). Щиток представляет собой пластинку, вплотную примыкающую к нижней поверхности крыла около его задней кромки и отгибаемую вниз при взлете и посадке. При опущенном щитке в пространстве между ним и задней кромкой крыла возникает очень сильное понижение давления, распространяющееся затем и на верхнюю поверхность крыла. Это понижение давления и приводит к увеличению подъемной силы. Щелевой закрылок представляет собой небольшое крыло, при нормальном полете вплотную прилегающее к основному крылу. При взлете и посадке закрылок опускается, вследствие чего резко увеличивается кривизна крыла и, кроме того, создается щель

¹ Schmits F. W., Aerodynamik des Flugmodells, Tragflügelmessungen, I, Berlin, 1941.

между ним и основным крылом, что и приводит к увеличению подъемной силы. Часто закрылок применяется в сочетании с предкрылком (см. рис. 111). Ширина щитка и закрылка обычно составляет от $1/5$ до $1/4$ части ширины всего крыла. Максимальный коэффициент подъемной силы $c_{a_{\max}}$ для профилей, изображенных на рис. 154, равен от 1,2 до 1,5, а для профилей, изображенных на рис. 155, — от 1,0 до 1,1. При помощи щитка эти коэффициенты могут быть повышены до 2,3–2,5, при помощи закрылка — до 2,5–2,7, а при помощи закрылка в сочетании с предкрылком — примерно до 3,0.

Заслуживает упоминания следующее обстоятельство, связанное с отрывом потока от крыла: процесс отрыва требует известного времени. Именно поэтому, как впервые экспериментально обнаружил Крамер¹ при внезапном увеличении угла атаки до значения, большего критического, поток в течение короткого промежутка времени еще продолжает прилегать к поверхности крыла, вследствие чего достигается подъемная сила, значительно большая ее значения на предкритическом угле атаки. Только по прошествии определенного времени подъемная сила понижается до своего критического значения. Внезапное резкое увеличение угла атаки наблюдается в условиях действительного полета при вертикальных порывах ветра; обусловленное этим резкое увеличение подъемной силы приводит к большому вертикальному ускорению, которое вызывает неприятное ощущение у пассажиров самолета. Подробности рассмотренного явления и других, связанных с ним явлений, очень тщательно изучены Фарреном².

Аэродинамические свойства крыла, так же как и плоской пластинки, сильно зависят от отношения размаха крыла l к его ширине b (это отношение $l : b$ называется *относительным размахом*, или *удлинением*); а именно, коэффициент лобового сопротивления c_w , соответствующий определенному значению коэффициента подъемной силы c_a , тем меньше, чем больше относительный размах. Наоборот, коэффициент подъемной силы, соответствующий определенному значению угла атаки, тем больше, чем больше относительный размах. До тех пор, пока обтекание крыла происходит плавно, без отрыва потока, такое поведение указанных коэффициентов легко объяснить на основе теоретических соображений относительно движения жидкости без трения. При этом сопротивление трения, а также сопротивление давления (если имеет место отрыв потока) остаются, конечно, неучтенными, что

¹ Kramer M., Zeitschr. f. Flugt. u. Motorl., т. 23 (1932), стр. 185.

² Farren W. S., Rep. a. Mem., № 1561 (1933) и № 1648 (1935), см. также Haller, Mitt. a. d. Inst. f. Aerodynamik Eidg. Techn. Hochschule Zürich № 4/5 (1936): в этой работе рассматривается влияние внезапного увеличения подъемной силы на вибрации крыла.

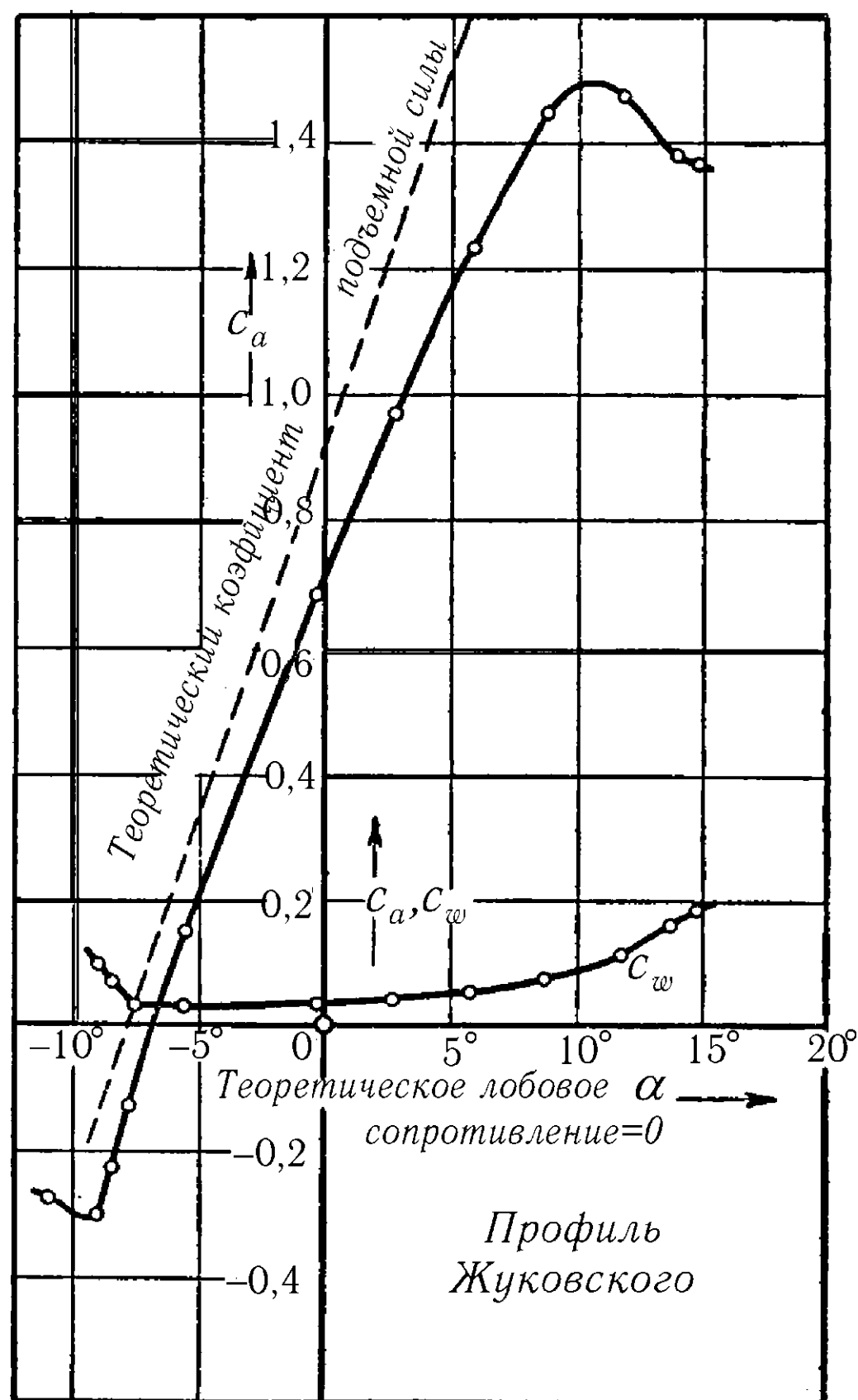


Рис. 164. Коэффициенты подъемной силы и лобового сопротивления при плоском обтекании крыла

всегда следует иметь в виду, когда сравниваются результаты теории с результатами опыта.

С точки зрения теории наиболее простым случаем является обтекание крыла бесконечного размаха. Практически условия обтекания такого крыла осуществляются на крыле конечного размаха, вплотную прилегающего своими боковыми концами к двум параллельным стенкам. Установившееся движение жидкости без трения около такого крыла представляет собой *потенциальное течение с циркуляцией* (см. § 11

гл. II). Насколько хорошо эта теория, развитая Кутта¹ и Жуковским², согласуется с опытом, показывает рис. 164. На этом рисунке даны для профиля Жуковского (нижний из профилей, изображенных на рис. 154) теоретические и экспериментальные значения коэффициентов подъемной силы и лобового сопротивления. Теоретическое лобовое сопротивление равно нулю, действительное лобовое сопротивление в основном состоит из сопротивления трения. Действительная подъемная сила несколько меньше теоретической, что также объясняется трением, влияние которого равносильно небольшому уменьшению угла атаки (пограничный слой на верхней стороне крыла по мере приближения к его задней кромке утолщается; это уменьшает циркуляцию, что равносильно уменьшению угла атаки). В области углов атаки, соответствующих безотрывному обтеканию, теоретическое распределение давления вдоль профиля Жуковского хорошо совпадает с практически измеренным распределением давления, если только учесть упомянутое уменьшение угла атаки³.

¹ K u t t a W. M., Sitzungsber. d. Bayr. Akad. d. Wiss., M.-Ph. Kl. 1910 и 1911.

² Жуковский Н. Е., Z. f. Flugt. u. Motor., т. I (1910), стр. 281; см. также Жуковский Н. Е., Aerodynamique, Paris, 1916 [перевод на французский язык книги Н. Е. Жуковского, «Теоретические основы воздухоплавания», Москва, 1911 (*Прим. перев.*)].

³Здесь, а также в следующем параграфе, дана совершенно неверная историческая картина развития теории крыла. Ссылаясь всего только на две работы великого русского ученого Н. Е. Жуковского, автор обходит полным молчанием другие работы Н. Е. Жуковского, а также С. А. Чаплыгина. Между тем развитие современной теории крыла началось именно с замечательных работ Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина и было продолжено трудами многочисленных советских ученых. Наиболее важными работами Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина являются следующие: Жуковский Н. Е., О присоединенных вихрях (1906); Жуковский Н. Е., О контурах, поддерживающих поверхности аэроплана (1910) (на эту работу ссылается Л. Прандтль); Жуковский Н. Е., Геометрическое исследование о течении Кутта (1910); Жуковский Н. Е., О поддерживающих планах типа «Антуанетт» (1911) (все эти работы переизданы в «Избранных сочинениях» Н. Е. Жуковского, т. II, Москва, 1948), Чаплыгин С. А., О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела (1910); Чаплыгин С. А., Результаты теоретических исследований о движении аэропланов (1910–1911); Чаплыгин С. А., К общей теории крыла аэроплана (1922); Чаплыгин С. А., О влиянии плоскопараллельного потока воздуха на движущееся в нем цилиндрическое крыло (1926); Чаплыгин С. А., Теория решетчатого крыла (1911); (в этой работе были предугаданы свойства разрезного крыла, осуществленного только в 1918 г., см. стр. 197); Чаплыгин С. А., Схематическая теория разрезного крыла аэроплана (1921); Чаплыгин С. А. и Голубев В. В., К теории подкрылка и закрылка (1935) (все эти работы переизданы в «Собрании сочинений» С. А. Чаплыгина, т. II, Москва, 1948). См. также следующие работы: Голубев В. В., Исследования по

Кутта и Жуковский изучили профили, получавшиеся следующим образом: окружность, обтекаемая жидкостью в плоскости ζ , конформно отображалась на плоскость z таким образом, что другая окружность, пересекавшая в плоскости ζ первую (или касавшаяся ее), переходила в прямолинейный отрезок на плоскости z . Однако таким путем удавалось получить профили только вполне определенного вида. Карман и Треффц¹, используя конформное отображение кругового двуугольника, получили ряд других профилей. Мизес² указал отображения, которые дают многие другие профили, в том числе и профили с постоянным центром давления. В результате многочисленных дальнейших работ³, из которых особо следует упомянуть работы Теодореса и Гаррика⁴, были разработаны методы, позволяющие рассчитать потенциальное течение с циркуляцией около любого заданного профиля, следовательно, позволяющие вычислить также распределение давления вдоль профиля. Был найден способ приближенного решения и обратной задачи: отыскания профиля, на котором имеет место заданное распределение давления⁵. Далее были разработаны теоретические методы для расчета двухмерного обтекания биплана. В этой области фундаментальное значение имеет работа Гаррика⁶; полученные им результаты применимы также к разрезному крылу и к крылу с подвесным закрылком.

Наряду с перечисленными способами расчета обтекания крыла, основанными на применении конформного отображения, разработан приближенный способ, основанный на замене крыла системой вихрей, расположенных в горизонтальной плоскости (вообще говоря, крыло следует заменять системой вихрей, расположенных на поверхности, проходящей через скелетные линии профилей, образующих крыло, но это вносит очень большие математические трудности). Этот способ, который может быть применен также к трехмерным задачам, для двухмерных задач дает особенно простые соотношения. Так, например, для зависимостей коэффициентов подъемной силы и момен-

теории разрезного крыла (Труды ЦАГИ, вып. 147, 1933); Голубев В. В., О влиянии надстроек на подъемную силу крыла (Труды ЦАГИ, вып. 342, 1938); Голубев В. В., Теория крыла аэроплана в плоскопараллельном потоке, изд. второе, Москва, 1938. О советских работах по теории крыла при полете при близзвукowych и сверхзвукowych скоростях см. сноску на стр. 394 и 405. (Прим. перев.)

¹Kármán und Trefftz, Zeitschr. f. Flugt und Motorl. т. 9 (1918), стр. 111.

²Mises R., Zeitschr. f. Flugt und Motorl. т. 8 (1917), стр. 157; т. II (1920), стр. 68 и 87.

³Более старые из них перечислены в книге Fuchs, Hopf und Seewald, Aerodynamik, т. 2, изд. 2-е, стр. 67–82.

⁴Theodorsen Th., NACA-Report № 411 (1931); Theodorsen Th. and Garrick J. E., NACA-Report № 452 (1933).

⁵Betz A., Luftfahrtforschung, т. 11 (1934), № 6; далее Mangler W., Jahrb. f. D. Luftfahrtforschung, т. I (1938), стр. 46.

⁶Garrick J. E., NACA-Report № 542 (1936).

та от угла атаки α получаются следующие формулы¹:

$$c_a = 2\pi \left(\alpha + \frac{2f}{b} \right),$$

$$c_m = \frac{\pi}{2} \left(\alpha + \frac{4f}{b} \right),$$

где b есть ширина крыла, а f — высота сегмента, образуемого скелетной линией, принимаемой за дугу окружности². Способ замены крыла системой вихрей позволяет вычислить также распределение подъемной силы на профилях с точкой излома (такой профиль имеет, например, хвостовое оперение при отклоненном положении руля³).

Применение расчета обтекания, основанного на конформном отображении, к плоской пластинке, наклоненной к потоку под углом α , приводит к своеобразному парадоксу. Так как принимается, что трение в жидкости отсутствует, то результирующая сила, действующая на пластинку, складывается только из разностей давлений на отдельных площадках пластинки. Но так как давление везде направлено перпендикулярно к плоскости пластинки, то все указанные разности давлений образуют один и тот же угол $90^\circ + \alpha$ с направлением потока. Следовательно, такой же угол с направлением потока образует результирующая сила R и поэтому наряду с подъемной силой $A = R \cos \alpha$ должно существовать и лобовое сопротивление $W = R \sin \alpha$. Между тем из теории циркуляции (§ 11 гл. II), а также на основании теоремы о количестве движения (§ 13 гл. II) следует, что при обтекании пластинки жидкостью, лишенной трения, может возникнуть только подъемная сила, которая при потенциальном течении равна

$$A = \pi \rho v^2 b \sin \alpha.$$

Более подробный анализ потенциального течения около пластинки приводит к разъяснению этого парадокса⁴. С заднего ребра пластинки поток стекает гладко (рис. 63, стр. 104). Переднее же ребро обтекается потоком, и линии тока здесь резко загибаются (рис. 59, е, стр. 99); при этом на самом ребре

¹Birnbaum, ZAMM, т. 3 (1923), стр. 290; Glauert, Rep. and Men., № 910 (1924); см. также Glauert H., The elements of aerofoil and airscrew theory [имеется в переводе на русский язык: Глауэрт Г., Теория крыла и винта, Москва, 1931. (Прим. перев.)].

²Данные, приведенные на стр. 274 относительно положения на крыле центра давления, являются следствием из этих формул.

³Более подробные сведения о расчете обтекания крыла бесконечного размаха можно найти в книге: Голубев В. В., Теория крыла аэроплана в плоскопараллельном потоке, изд. второе, Москва, 1938. (Прим. перев.).

⁴Это разъяснение дано Кутта: см. его статью в Sitzungsber. d. bayr. Akad. d. Wiss., Math.-Phys. Kl., 1910, стр. 25 и 42.

получается бесконечно большая скорость обтекания, которой соответствует бесконечно большое отрицательное давление, что физически невозможно. Поэтому рассмотрим вместо бесконечно тонкой пластинки пластинку конечной, но небольшой толщины и с закругленным передним ребром (закругление должно иметь форму одной из линий тока, изображенных на рис. 59, *e*). В таком случае мы будем иметь дело только с конечными по величине скоростями и с конечным понижением давления на переднем ребре пластинки. Это понижение давления приводит к возникновению подсасывающей силы, которая уравнивает направленную против течения составляющую результирующей силы давления на остальной, основной части поверхности пластинки. Более подробные вычисления показывают, что подсасывающая сила на переднем ребре практически не зависит от толщины пластинки, в то время как давление здесь понижается тем сильнее, чем меньше радиус кривизны ребра. В связи с этим можно предположить, что величина подсасывающей силы сохраняет свое значение также в предельном случае бесконечно тонкой пластинки. На основании сказанного выше подсасывающая сила равна

$$S = A \sin \alpha = \pi \rho v^2 b \sin \alpha$$

и лежит в плоскости пластинки. Результирующая остальных сил давления, направленная перпендикулярно к плоскости пластинки, будет

$$R = A \cos \alpha.$$

Горизонтальная составляющая силы R равна

$$R \sin \alpha = A \cos \alpha \sin \alpha$$

и направлена против течения, а горизонтальная составляющая подсасывающей силы S равна

$$S \cos \alpha = A \sin \alpha \cos \alpha$$

и направлена в сторону течения. Таким образом, результирующая горизонтальная сила равна нулю, что и разъясняет парадокс.

Однако полученный результат справедлив только для потенциального течения идеальной жидкости с циркуляцией. При действительном же течении около заостренного переднего ребра пластинки никакого бесконечно большого отрицательного давления, конечно, не возникает; вместо этого происходит отрыв потока от ребра пластинки. Правда, при небольших углах атаки турбулизация пограничного слоя приводит к тому, что поток вновь прижимается к подсасывающей поверхности пластинки, в результате чего получается картина течения, в целом довольно сходная с теоретической картиной, причем возникает такая же большая подъемная сила. Так как теперь подсасывающая сила отсутствует, то результирующая сил давления дает лобовое сопротивление, равное $A \tan \alpha$ (заметим, что теперь, в противоположность предыдущему, $A = R \cos \alpha W = R \sin \alpha$). Возникновение этого лобового сопротивления

(в состав которого сопротивление трения не входит) связано, очевидно, с потерей скорости, обусловленной турбулентным процессом на подсасывающей поверхности пластинки.

Теоретическое исследование подсасывающей силы важно, с одной стороны, для разъяснения рассмотренного парадокса, а, с другой стороны, для правильного понимания роли, которую играет закругление переднего конца профиля. У хорошо закругленных профилей подсасывающая сила всегда дает заметный эффект: так, например, часто наблюдается, что при продувке профиля под углом атаки в 6° результирующая сила сопротивления отклонена от вертикали только на 2° .

§ 17. Теория крыла¹. Если крыло имеет конечный размах, то на задней его кромке образуется, как об этом уже было рассказано в § 7 гл. II (см. рис. 46), поверхность раздела. Края этой поверхности свертываются, вследствие чего возникают два вихри, простирающиеся позади крыла на протяжении всего его пути. В каждый промежуток времени длина этих вихрей увеличивается на длину пути, пройденного крылом, поэтому кинетическая энергия вихрей должна все время возрастать. Но для этого, на основании закона сохранения энергии, необходимо, чтобы крыло все время совершало работу. Очевидно, что эта работа может состоять только в преодолении сопротивления. Таким образом, *крыло конечного размаха испытывает сопротивление даже при движении в жидкости, лишенной трения*. Приближенное вычисление этого сопротивления возможно следующим образом.

Из § 11 гл. II мы знаем, что в жидкости, лишенной трения, подъемная сила всегда перпендикулярна к направлению скорости v набегающего потока. При движении крыла конечного размаха жидкость около той его поверхности, на которой давление повышено, отклоняется к концам крыла и перетекает здесь на подсасывающую поверхность. Такое движение жидкости можно рассматривать как результат ее выдавливания под действием веса крыла; скорость этого движения определяется двумя составляющими, совпадающими по направлению с вертикальной и боковой составляющими градиента давления.

Поэтому результирующая скорость течения около крыла складывается геометрически из скорости набегающего потока v и из скорости только что указанного движения, вызванного самим крылом. Из обеих составляющих этого движения основную роль играет вертикальная со-

¹См. Prandtl L., Götting. Nachr. 1918, стр. 451, и 1919, стр. 107; вновь напечатано в книге Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik, Göttingen 1927; далее Kármán – Levi-Civita, Hydrodynamische Vorträge (Innsbruck 1922), Berlin 1924 (доклады Trefftz'a и Wieselsberger'a)

ставляющая w , направленная вниз перпендикулярно к скорости v и измеренная непосредственно около крыла (заметим, что величина этой составляющей различна около различных точек крыла, поэтому в дальнейшем мы будем иметь в виду ее среднее значение). Вследствие наличия скорости w (рис. 165) поток около крыла отклоняется вниз в среднем на угол, определяемый из соотношения

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{w}{v}.$$

Результирующая сила сопротивления, согласно сказанному выше, перпендикулярна к направлению отклоненного потока и поэтому при разложении дает две составляющие: подъемную силу A , перпендикулярную к направлению движения крыла, и сопротивление

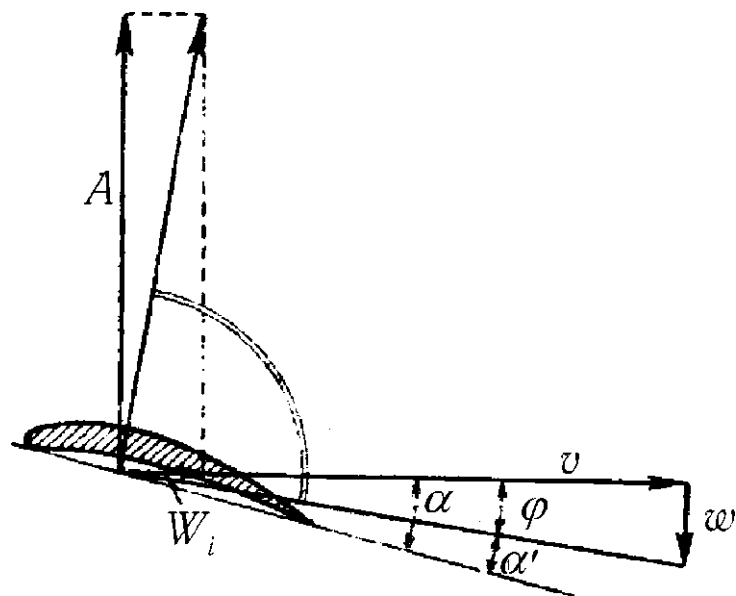


Рис. 165. Возникновение индуктивного сопротивления

$$W_i = A \operatorname{tg} \varphi = A \frac{w}{v}, \quad (91)$$

направленное против движения крыла. Задача теории крыла состоит в том, чтобы определить вызванную крылом скорость w .

Мы решим здесь эту задачу в предположении, что подъемная сила A достаточно мала, и поэтому отклонение набегающего потока от первоначального направления также невелико. Такое предположение значительно упрощает задачу, так как позволяет во всех вычислениях сохранить только величины самого низкого порядка малости. В частности, при рассмотрении углов, образуемых линиями тока относительно течения с направлением движения, можно вместо синуса и тангенса брать дугу, а косинус считать равным единице.

Для определения поля скоростей, вызванных крылом, заменим последнее и сбегавшую с него поверхность раздела системой вихрей. Подъемная сила всегда связана с циркуляцией, а именно, согласно теореме Жуковского, которая применима и здесь, подъемная сила на единицу длины равна

$$A = \rho \Gamma v,$$

где Γ есть циркуляция (см. § 11 и 13 гл. II; другой вывод этого соотношения будет дан на стр. 289). Следовательно, крыло действует на

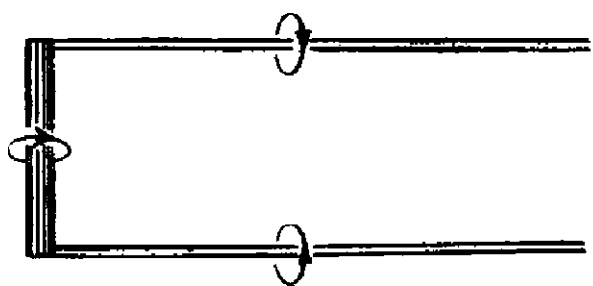


Рис. 166. Упрощенная система вихрей, заменяющих крыло

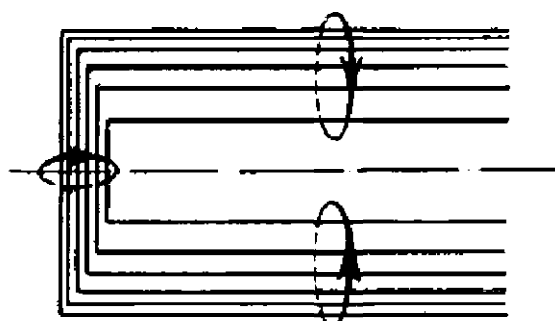


Рис. 167. Уточненная система вихрей, заменяющих крыло

части жидкости, более или менее удаленные от него, как отрезок вихревой нити с напряженностью (циркуляцией) Γ . Однако к этому вихрю, заменяющему собой крыло, теорема Гельмгольца о том, что вихрь состоит все время из одних и тех же частиц жидкости, неприменима. Поэтому такой вихрь принято называть *несущим вихрем*, в отличие от свободного вихря, удовлетворяющего теореме Гельмгольца.

Наиболее простой вихревой системой, заменяющей крыло конечного размаха, будет система, состоящая из одного несущего вихря с напряженностью Γ (рис. 166) и двух параллельных свободных вихрей с такой же напряженностью, сбегаящих с концов крыла и простирающихся до бесконечности (необходимость последнего обстоятельства вытекает из теоремы о том, что вихревая нить нигде внутри жидкости не может окончиться и должна состоять все время из одних и тех же частиц; эта теорема имеет чисто кинематический характер и поэтому одинаково приложима как к свободному вихрю, так и к системе, состоящей из несущего и свободных вихрей). Однако в действительности подъемная сила отдельных элементов (профилей) крыла по мере приближения к концам крыла уменьшается, поэтому указанная вихревая система является лишь первым приближением. Для получения системы вихрей, более точно заменяющей крыло конечного размаха, следует наложить друг на друга очень большое число упрощенных систем, каждая из которых имеет бесконечно малую напряженность и свой размах (рис. 167). Такая система вихрей дает приближенную картину поверхности раздела, сбегаящей с задней кромки крыла, однако без учета тех изменений, которые эта поверхность испытывает по мере удаления от крыла вследствие возрастающего свертывания. Чем меньше подъемная сила, тем медленнее происходит свертывание поверхности раздела, и в предельном случае очень малой подъемной силы этим свертыванием при определении поля скоростей вблизи крыла можно полностью пренебрегать.

Для решения нашей задачи в ее упрощенной постановке надо определить около самого крыла только ту составляющую скорости, вызванную крылом, которая параллельна подъемной силе. Заменяв крыло упрощенной системой вихрей, изображенной на рис. 166, мы получим для середины крыла следующий результат. Вихревая нить с напряженностью Γ , простирающаяся вперед и назад от крыла до бесконечности, вызывает на расстоянии a от себя скорость

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi a}$$

(см. § 12 гл. II). Вихрь, простирающийся только назад от вертикальной плоскости, проведенной через крыло, вызывает в этой плоскости на расстоянии a от себя скорость, равную, из соображений симметрии, половине только что указанного значения, т. е.

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi a}.$$

В середине крыла скорости, вызванные вихрями, сбегаящими с правого и левого концов крыла, складываются; так как здесь $a = \frac{l}{2}$, где l есть размах крыла, то после сложения мы получим:

$$w_0 = 2 \cdot \frac{\Gamma}{4\pi \frac{l}{2}} = \frac{\Gamma}{\pi l}.$$

На основании теоремы Жуковского мы имеем:

$$\Gamma = \frac{A}{\rho l v},$$

поэтому

$$w_0 = \frac{A}{\pi \rho v l^2}.$$

Начиная от середины крыла к его концам, скорость w_0 , как легко убедиться, возрастает, достигая на концах крыла бесконечно большого значения. Такой результат означает не что иное, как недопустимость предположения о сохранении подъемной силой постоянного значения на протяжении всего размаха. Более точная теория, исходящая из рассмотрения уточненной системы вихрей, изображенной на рис. 167, показывает, что скорость w_0 получается постоянной по всему размаху

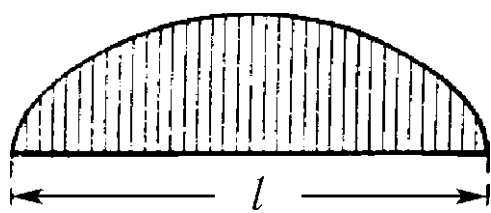


Рис. 168. Эллиптическое распределение подъемной силы

только в том случае, если распределение подъемной силы вдоль размаха изображается половиной эллипса (рис. 168). Так как при таком распределении подъемной силы циркуляция в середине крыла в $\frac{\pi}{4}$ раз больше своего среднего значения и, кроме того, отдельные вихревые нити в среднем лежат ближе к середине крыла, чем в случае упрощенной системы вихрей, то скорость w должна быть больше полученного выше значения w_0 . Выполнение интегрирования для всех вихревых нитей¹ дает для скорости w значение:

$$w = 2w_0 = \frac{2A}{\pi \rho v l^2}. \quad (92)$$

Эта скорость, складываясь со скоростью v набегающего потока, приводит к отклонению его от первоначального направления на угол φ , определяемый из соотношения

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{w}{v} = \frac{2A}{\pi \rho v^2 l^2} = \frac{A}{\pi p_d l^2}. \quad (93)$$

Так как скорость w при эллиптическом распределении подъемной силы остается, как было сказано, постоянной по всему размаху, то остается постоянным и угол φ . Поэтому в данном случае непосредственно применимо соотношение (91), которое теперь принимает вид:

$$W_i = \frac{A^2}{\pi p_d l^2}. \quad (94)$$

Это сопротивление, возникающее при движении крыла конечного размаха в жидкости без трения, называется *индуктивным сопротивлением* (такое название дано ввиду формальной аналогии рассматриваемого явления с электромагнитной индукцией). Скорость w , вызванная крылом, называется *индуктивной скоростью*. Более подробное исследование показывает, что индуктивное сопротивление, определяемое формулой (94) в виде функции от подъемной силы A , является минимальным при заданном размахе l . При всех других распределениях подъемной силы,

¹См. стр. 290 и 291.

отличающихся от эллиптического, индуктивное сопротивление получается больше¹.

Минимальное свойство формулы (94) связано с постоянством индуктивной скорости вдоль размаха. Так как функция вблизи своего минимума изменяется обычно незначительно, то формулу (94) можно применять как приближенную формулу также для других распределений подъемной силы, при условии, что они не очень отличаются от эллиптического распределения. В частности, это вполне допустимо для прямоугольного крыла с не очень малым относительным размахом².

Формула (94) показывает, что индуктивное сопротивление, связанное с возникновением подъемной силы, тем меньше, чем на большем размахе распределена подъемная сила. Именно по этой причине крылья всех самолетов имеют размах, значительно больший, чем ширина крыла. Последняя не входит в формулу (94), что означает следующее: величина индуктивного сопротивления зависит от состояния потока позади крыла, но не от того, как это состояние создается: на малой ли ширине большими разностями давлений или на несколько большей ширине малыми разностями давлений.

Исследование возмущения, остающегося позади крыла при его движении, приводит к другому, весьма наглядному выводу формулы (94). Быстро движущееся крыло, встречая на своем пути s все новые и новые массы воздуха, в течение очень короткого времени давит последовательно на каждую из этих масс. Вместо этого можно представить себе, что крыло давит мгновенно на массу воздуха на протяжении s всего своего пути подобно доске, имеющей размах l и ширину s и получающей резкое ускорение вниз. При таком мгновенном давлении возникает плоское потенциальное течение (см. § 10 п. с) гл. II), причем поверхность, на которую действует давление, превращается в поверхность раздела. Картина такого течения изображена на рис. 169. Ударные

¹Подчеркнем еще раз, что здесь имеется в виду минимум для заданного размаха. Увеличение размаха при сохранении распределения подъемной силы ведет к дальнейшему уменьшению индуктивного сопротивления. Конечно, на практике размах крыла не может быть сделан особенно большим (главным образом вследствие ограниченной прочности материалов).

²Подробные сведения об индуктивном сопротивлении для простых (монопланых) и сложных (бипланых) крыльев можно найти в книге: Ю р ь е в Б . Н . , Экспериментальная аэродинамика, ч. 2, Москва 1938; см. также книгу: Г о л у б е в В . В . , Теория крыла аэроплана конечного размаха. Труды ЦАГИ, вып. 108, Москва 1931. (Прим. перев.)

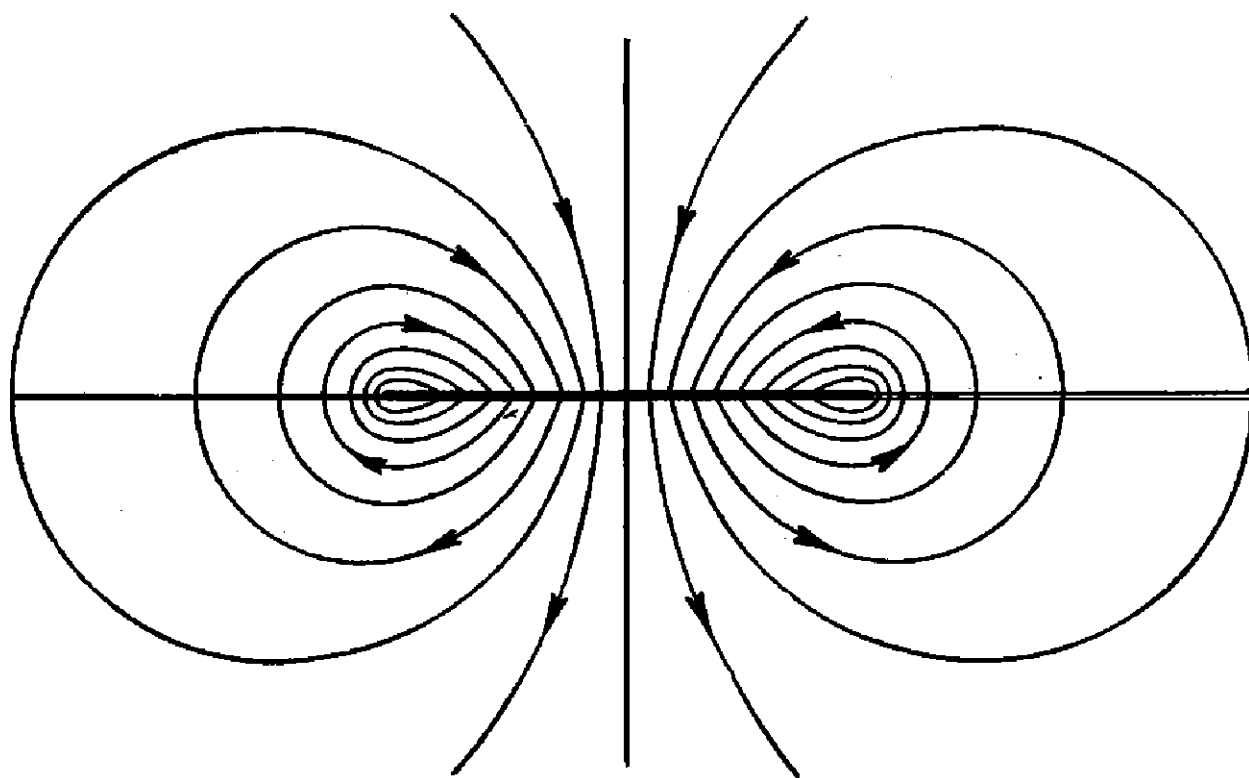


Рис. 169. Течение позади крыла

давления

$$\int_0^{t_1} p \, dt,$$

определяющие это течение, можно связать, с одной стороны, с потенциалом скоростей, а с другой стороны — с распределением подъемной силы. Выполняя вычисления, мы придем опять к соотношению (94).

Вычисления производятся следующим образом. Если пренебречь квадратами скоростей, вызванных возмущением течения, то уравнение (39) гл. II примет вид:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} = \text{const} = \frac{p_\infty}{\rho},$$

где p_∞ есть невозмущенное давление в бесконечности. Интегрируя по времени от начала удара до его конца и принимая, что до удара везде было $\Phi = 0$, мы получим:

$$\rho \Phi + \int_0^{t_1} (p - p_\infty) dt = 0.$$

Обозначим давление под поверхностью раздела во время удара через p_n , а над поверхностью раздела — через p_v ; тогда мы будем иметь:

$$\int_0^{t_1} (p_n - p_v) dt = \rho(\Phi_v - \Phi_n) = \rho \Gamma.$$

Ударная сила на участке поверхности раздела длиной λ или, другими словами, количество движения на отрезке пути длиной λ равно

$$\int_{y_1}^{y_2} \lambda dy \left[\int_0^{t_1} (p_H - p_B) dt \right] = \rho \lambda \int_{y_1}^{y_2} \Gamma dy.$$

Подъемная сила представляет собой приращение во времени этого количества движения. Следовательно, имея в виду, что $\frac{d\lambda}{dt} = v$, мы получим:

$$A = \rho v \int_{y_1}^{y_2} \Gamma dy. \quad (95)$$

Это соотношение выражает собой не что иное, как теорему Жуковского в применении к крылу конечного размаха.

Скорость w_1 , с которой поверхность раздела опускается вниз после удара, примем для простоты постоянной, т. е., согласно сказанному по поводу формулы (94), поставим задачу об отыскании минимального индуктивного сопротивления. Эта скорость равна удвоенной индуктивной скорости w (см. приближенный расчет, сделанный на стр. 285 для случая, изображенного на рис. 165). Связь между циркуляцией Γ на поверхности раздела и скоростью w_1 определяется однозначно из второй краевой задачи теории потенциала, а именно, циркуляция Γ пропорциональна скорости w_1 . Из соображений о размерностях можно принять, что

$$\int_{y_1}^{y_2} \Gamma dy = F_1 w_1, \quad (96)$$

где F_1 есть некоторая площадь. Подставляя это значение интеграла в равенство (95), мы получим:

$$A = \rho F_1 v w_1. \quad (97)$$

Для определения индуктивного сопротивления W_i воспользуемся законом сохранения энергии. Работа индуктивного сопротивления в единицу времени равна $W_i v$, а работа, совершаемая в эту же единицу времени подъемной силой для перемещения поверхности раздела, равна $Aw = A \frac{w_1}{2}$. Приравнивая обе эти работы и подставляя для скорости w_1 ее значение, определяемое из соотношения (97), мы получим:

$$W_i = \frac{A^2}{2\rho v^2 F_1} = \frac{A^2}{4\rho_d F_1}. \quad (98)$$

В случае прямоугольного крыла, для которого распределение циркуляции Γ вдоль y имеет вид полуэллипса, величина F_1 равна площади окружности, описанной на размахе l как на диаметре, т. е. $\frac{\pi}{4} l^2$. Внося это значение F_1

в формулу (98), мы приведем ее к прежнему виду (94). Заметим, что при условии $w_1 = \text{const}$ формула (98) применима к любой системе прямолинейно движущихся крыльев (к одиночному крылу, к биплану, к крылу с концевыми шайбами, а также к крылу в аэродинамической трубе). Необходимо только в каждом отдельном случае определять соответствующее значение площади F_1 .

Для лучшего уяснения формул (97) и (98) выведем их еще раз упрощенным способом. Примем, что масса воздуха с поперечным сечением F_1 , над которой пролетело крыло, движется с постоянной скоростью w_1 в направлении действовавшей на нее силы, остальная же масса воздуха остается в покое. В каждую секунду крыло приводит в движение массу, равную

$$M = \rho F_1 v.$$

Следовательно, изменение количества движения в направлении w_1 , эквивалентное действию подъемной силы A в течение одной секунды, равно

$$M w_1 = \rho F_1 v w_1;$$

при этом масса воздуха приобретает кинетическую энергию,

$$M \frac{w_1^2}{2} = \rho F_1 v \frac{w_1^2}{2},$$

которая, очевидно, должна быть равна работе $W_i v$, производимой индуктивным сопротивлением W_i на крыле в одну секунду. Таким образом, мы получаем:

$$\rho F_1 v \frac{w_1^2}{2} = W_i v.$$

Отсюда, имея в виду, что

$$\rho F_1 v w_1 = A,$$

мы получим опять формулу (98).

Индуктивное сопротивление можно вычислить также для таких распределений циркуляции $\Gamma(y)$, которые не приводят к постоянной индуктивной скорости w . Учитывая, что индуктивная скорость w получается наложением скоростных полей отдельных бесконечно малых вихрей с напряженностью $-\frac{d\Gamma}{dy'} dy'$ (y' есть переменная интегрирования), мы легко найдем, на основании сказанного на стр. 286, что¹

$$w(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{y_1}^{y_2} \frac{d\Gamma}{dy'} \frac{dy'}{y - y'}. \quad (99)$$

¹ При вычислении этого интеграла необходимо особо исследовать его поведение около значения $y' = y$, при котором он делается равным бесконечности. Следует взять так называемое главное значение этого интеграла.

Из рис. 165 видно, что индуктивная скорость вызывает скос потока, набегающего на крыло, вследствие чего *действительный угол атаки* равен

$$\alpha' = \alpha - \varphi,$$

где α есть *геометрический угол атаки*. Циркуляция $\Gamma(y)$ определенным образом связана с углом атаки α' , а именно, при надлежащем определении этого угла ($\alpha' = 0$ для того положения профиля, в котором подъемная сила равна нулю) она пропорциональна углу α' , т. е.

$$\Gamma(y) = C v b \alpha'. \quad (100)$$

Отсюда, имея в виду равенство (95), нетрудно найти, что

$$C = \frac{1}{2} \frac{dc_\alpha}{d\alpha'},$$

причем здесь α' означает угол атаки при плоском обтекании (приближенное теоретическое значение коэффициента C равно π , см. стр. 280). Для исключения угла α' воспользуемся соотношением

$$\alpha' = \alpha - \varphi = \alpha - \frac{w(y)}{v}. \quad (101)$$

В результате исключения мы получим для $\Gamma(y)$ интегрально-дифференциальное уравнение, решение которого должно дать зависимость $\Gamma(y)$ от геометрического угла атаки α и ширины крыла $b(y)$. Так как это уравнение линейно относительно $\Gamma(y)$, то решение его возможно путем разложения $\Gamma(y)$ в ряд. Были предложены многочисленные способы выполнения такого решения¹. Впервые это сделал Бетц² для простого прямоугольного крыла, воспользовавшись следующим разложением в ряд:

$$\Gamma = \sqrt{1 - \eta^2} \sum A_n \eta^n,$$

где

$$\eta = y : \frac{l}{2}.$$

При таком способе решения индуктивная скорость $w(\eta)$ получается как сумма целых функций n -й степени от η . Однако определение коэффициентов A_n этого ряда требует утомительных вычислений.

Трефти³ воспользовался рядом

$$\Gamma = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\vartheta,$$

¹См., например, Fuchs, Hopf und Seewald, Aerodynamik, т. 2, стр. 139–180.

²Betz A., Диссертация, Göttingen 1919; Ber. u. Abhandl. d. Wiss. Ges. f. Luftfahrt (Beihefte der ZFM), № 2 (1920), стр. 1.

³Treffitz E., Math. Ann., т. 82 (1921) № 3/4.

сходным с предыдущим и получающимся путем введения вспомогательного угла ϑ при помощи соотношения

$$\eta = \cos \vartheta \quad (0 < \vartheta < \pi).$$

Индуктивная скорость при таком способе решения получается в виде ряда

$$w = \sum_1^{\infty} \frac{n B_n}{2l} \frac{\sin n\vartheta}{\sin \vartheta}. \quad (102)$$

Для прямоугольного крыла Трефтцу удалось свести решаемую задачу к краевой задаче теории потенциала. Однако вычисление коэффициентов B_n в общем случае оказалось очень затруднительным. Значительно улучшила этот способ решения Ирмагд Лотц¹, предложившая разлагать функции $\alpha(\vartheta) \sin \vartheta$ и $\frac{\sin \vartheta}{b(\vartheta)}$ в ряды Фурье. При таком способе определение коэффициентов B_n возможно путем итерации, начиная с коэффициента B_1 .

Новый и решительный успех в рассматриваемый вопрос внес Мультгопп². Его метод получил сейчас всеобщее распространение.

В случае двойного крыла (биплана) каждое крыло индуцирует свое поле скоростей, а каждое из этих полей, в свою очередь, влияет на другое поле (самоиндукция и взаимная индукция). Если подъемная сила невелика, то все отдельные действия налагаются друг на друга, следовательно, полное индуктивное сопротивление будет равно:

$$W_i = W_{11} + W_{12} + W_{21} + W_{22},$$

где W_{11} есть индуктивное сопротивление первого крыла под своим собственным действием, W_{12} — индуктивное сопротивление первого крыла под действием второго крыла и т. д. Полное индуктивное сопротивление биплана меньше, чем индуктивное сопротивление отдельного крыла с той же подъемной силой и с тем же размахом, так как поперечное сечение F_1 массы воздуха, отбрасываемой вниз бипланом, больше, чем такое сечение для отдельного крыла. Подробное исследование показывает³, что в результате взаимного влияния обоих крыльев подъемная

¹ Lotz I., ZFM, т. 22 (1931), стр. 189.

² Multhopp H., Luftf.-Forsch., т. 15 (1938), стр. 153; Jahrb. d. Deutsch. Luftf.-Forschung, 1938, часть 1, стр. 101.

³ См., например, Prandtl L., Gött. Nachr. 1919, стр. 107–123 (вновь отпечатано в Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik, стр. 36–52); см. также Ergebn. d. AVA, вып. 2 (1923), стр. 9, и т. 3 (1927), стр. 9 [см. также Голубев В. В., Теория крыла аэроплана конечного размаха, Труды ЦАГИ, вып. 108, Москва 1931, Юрьев Б. Н., Экспериментальная аэродинамика, ч. 2, Москва 1938 (Прим. перев.)].

сила верхнего крыла увеличивается, а подъемная сила нижнего крыла, наоборот, уменьшается; кроме того, около каждого крыла происходит такое изменение кривизны потока, которое равносильно уменьшению кривизны скелетной линии профиля. Опыты хорошо подтверждают эти результаты¹.

Для численного определения индуктивного сопротивления биплана заданной формы разработаны эффективные методы. Ограничимся здесь только ссылкой на работы Фукса² и Кюхемана³.

С задачей об определении индуктивного сопротивления биплана родственна задача о поведении крыла вблизи поверхности земли. Эту задачу можно свести к задаче о биплане в неограниченном пространстве, если ввести в рассмотрение зеркальное отражение крыла относительно поверхности земли. При таком решении поверхность земли играет роль плоскости симметрии; скорости всех частиц воздуха, лежащих в этой плоскости, направлены параллельно этой плоскости. Нетрудно видеть, что действие отраженного крыла сводится к уменьшению индуктивной скорости w , следовательно, к понижению индуктивного сопротивления и к уменьшению скорости натекания. Эти теоретические выводы подтверждаются опытами⁴.

Исследование обтекания крыла способом зеркального отражения может быть применено в несколько измененном виде также к случаю крыла, помещенного в замкнутой трубе или в свободной струе. Таким путем можно определить порядок поправки, которые необходимо сделать при пересчете результатов измерений, полученных в аэродинамической трубе, к неограниченному воздушному пространству⁵. Теория этих поправок⁶ для аэродинамических труб с круглым поперечным сечением хорошо согласуется с результатами опыта⁷. Поправки для труб прямоугольного поперечного сечения, а также для свободных струй даны Глауэртом⁸.

¹Ergebn. d. AVA, вып. 2 (1923), стр. 35.

²Fuchs R., Hopf L. und Seewald Fr., Aerodynamik, т. 2, стр. 188.

³Küchemann D., Luftf.-Forschung, т. 15 (1938), стр. 543, а также в Jahrb. d. Deutsch. Luftf.-Forschung, 1938, часть 1, стр. 136.

⁴Betz A., ZFM, т. 13 (1912), стр. 86; Wieselsberger C., ZFM, т. 22 (1921), стр. 145; Ergebn. d. AVA, вып. 2 (1923) стр. 41.

⁵Более подробные сведения о влиянии границ потока на величину подъемной силы и лобового сопротивления можно найти в книгах: Голубев В. В., Теория крыла аэроплана конечного размаха, Труды ЦАГИ, вып. 103, Москва 1931; Юрьев Б. Н., Экспериментальная аэродинамика, ч. 2, Москва 1933. (Прим. перев.)

⁶См. например, Prandtl L., Gött. Nachr., 1919, стр. 123, (помещено также в Veir Abhandlungen, стр. 52).

⁷Ergebn. d. AVA, вып. 2 (1923), стр. 17.

⁸Glauert H., The elements of aerofoil and airscrew theory; см. также Glauert H., Rep. and Mem. № 867 (1923); № 1566 (1933); Durend. Aerodynamics theory, т. III, статья Туссена.

§ 18. Практические приложения теории крыла. Сравнение с экспериментом. При практическом применении теории крыла, вкратце изложенной в предыдущем параграфе, необходимо иметь в виду, что в реальных жидкостях всегда имеет место сопротивление трения, а также сопротивление вследствие отрыва потока от поверхности крыла. Сумма этих сопротивлений, называемая *профильным сопротивлением*, может наблюдаться изолированно от индуктивного сопротивления в закрытой аэродинамической трубе при продувке крыльев, концы которых вплотную примыкают к стенкам трубы. В самом деле, в этом случае индуктивное сопротивление равно нулю. [В свободной струе между параллельными боковыми стенками, открытой сверху и снизу, крыло всегда испытывает индуктивное сопротивление; вычисление этого сопротивления производится по формуле (98), причем для F_1 берется площадь поперечного сечения струи.] Другой способ определения сопротивления трения отдельно от индуктивного сопротивления состоит в применении теоремы о количестве движения к области малых скоростей в кильватерном потоке (см. § 22, п. с).

Крыло конечного размаха, обтекаемое воздухом со всех сторон, обладает кроме профильного сопротивления W_p также индуктивным сопротивлением W_i . Сумма этих сопротивлений образует лобовое сопротивление, которое, таким образом, равно

$$W = W_p + W_i. \quad (103)$$

Так как

$$W = c_w \cdot F p_d, \quad W_p = c_{wp} \cdot F p_d, \quad W_i = c_{wi} \cdot F p_d,$$

где c_w , c_{wp} , c_{wi} суть коэффициенты лобового, профильного и индуктивного сопротивлений, то равенство (103) можно переписать в следующем виде:

$$c_w = c_{wp} + c_{wi}. \quad (104)$$

Однако, для того чтобы такое сложение сопротивлений было возможно, необходимо, чтобы оба они были взяты для одного и того же состояния потока около элемента крыла, а отнюдь не для одного и того же угла атаки этого элемента; только при соблюдении этого условия интенсивность подъемной силы на элементе крыла, один раз ограниченного боковыми стенками, а другой раз — не ограниченного, будет одинакова (если пренебречь малыми величинами). Отсюда следует, что при применении формул теории крыла целесообразнее брать за аргумент не

угол атаки, а интенсивность подъемной силы, определяемую, например, коэффициентом подъемной силы c_a . (Правда, этот коэффициент представляет собой не что иное, как среднее значение интенсивности подъемной силы, изменяющейся от середины крыла к его концам; однако использование этого среднего значения не должно внушать никаких опасений, так как в области безотрывного обтекания коэффициент c_a связан с углом атаки α приблизительно линейной зависимостью, а коэффициент профильного сопротивления c_{wp} изменяется не очень сильно.) Из формулы (94) мы имеем:

$$c_{wi} = \frac{c_a^2 F}{\pi l^2}.$$

Подставляя это значение c_{wi} в равенство (104), мы получим:

$$c_w = c_{wp} + c_{wi} = c_{wp} + \frac{c_a^2 F}{\pi l^2}. \quad (105)$$

Это соотношение может быть использовано для определения коэффициента лобового сопротивления крыла конечного размаха, если известен из опыта коэффициент лобового сопротивления бесконечнодлинного крыла или другого конечного крыла с другим отношением $\frac{F}{l^2}$. В последнем случае получается более точный результат, так как распределение подъемной силы вдоль размаха для обоих крыльев приблизительно одинаковое, и упомянутое выше составление среднего значения коэффициента подъемной силы производится для обоих крыльев. Применяя соотношение (105) один раз к крылу 1 (размах l_1 , площадь F_1), а другой раз — к крылу 2 (размах l_2 , площадь F_2) и имея в виду, что, согласно сказанному выше, $c_{a2} = c_{a1}$, мы получим:

$$c_{w2} = c_{w1} + \frac{c_a^2}{\pi} \left(\frac{F_2}{l_2^2} - \frac{F_1}{l_1^2} \right). \quad (106)$$

Для прямоугольного крыла $F = lb$, следовательно, отношение $\frac{F}{l^2}$ равно $\frac{b}{l}$, т. е. обратной величине относительного размаха $l : b$. Хотя формула (106) для пересчета коэффициента лобового сопротивления выведена в предположении, что подъемная сила крыла исчезающе мала, однако она дает для крыльев с относительным размахом от 3:1 до 7:1 очень

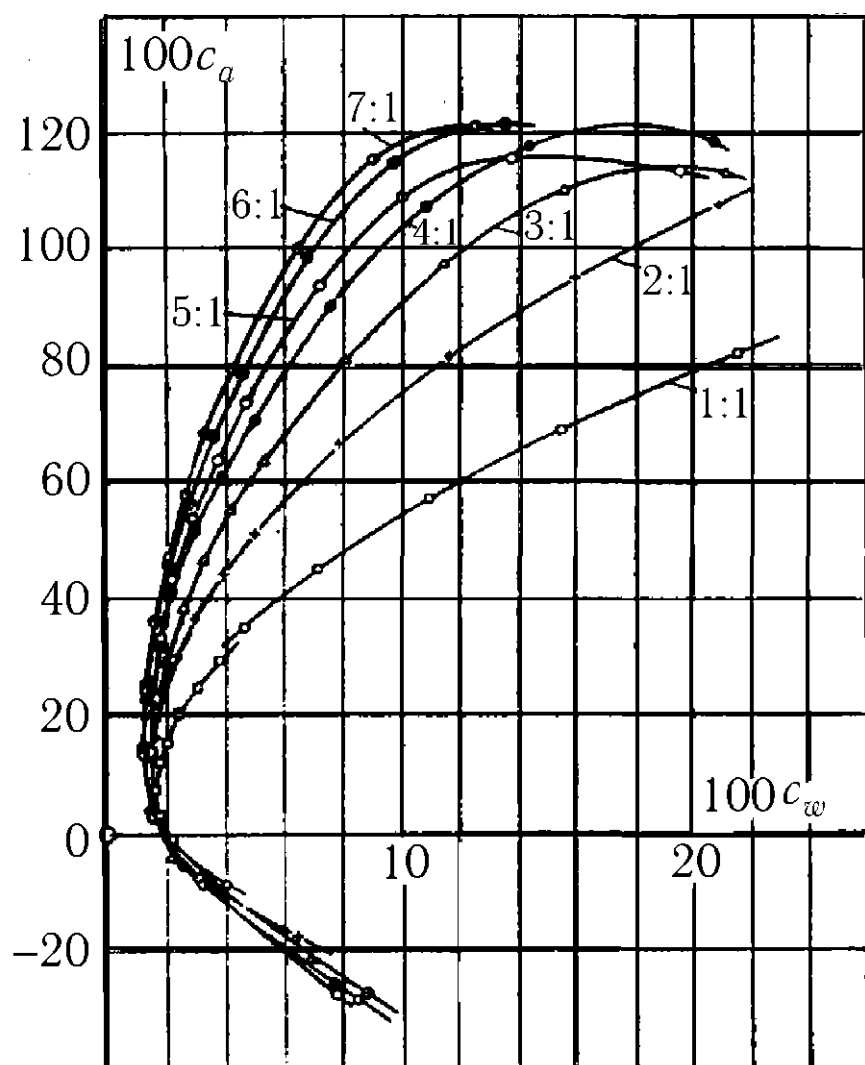


Рис. 170. Поляры для семи прямоугольных крыльев с различными относительными размахами. Числа для c_a и c_w увеличены в 100 раз

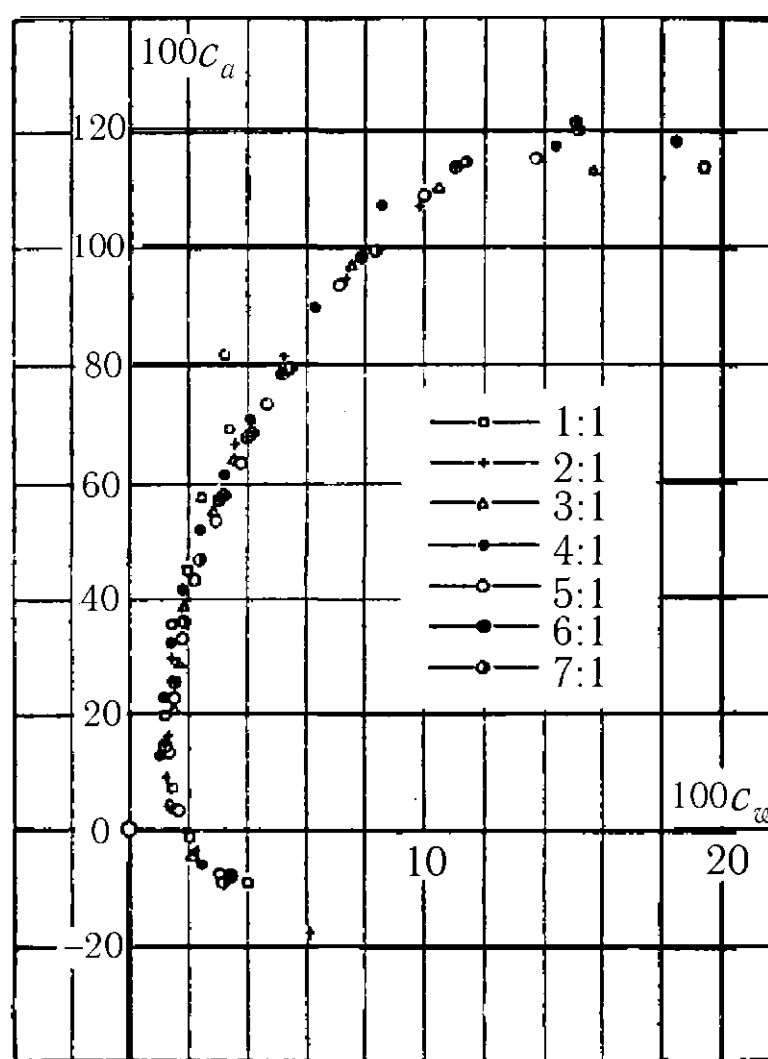


Рис. 171. Пересчет экспериментальных результатов, изображенных на рис. 170, к относительному размаху 5:1. Числа для c_a и c_w увеличены в 100 раз

хорошие результаты при всех значениях подъемной силы. При безотрывном обтекании таких крыльев линии тока отклоняются от своей невозмущенной (т. е. прямолинейной) формы, если не считать непосредственной близости к крылу, очень незначительно. Крылья с относительным размахом 2:1 или тем более 1:1 заменять несущим вихрем можно только с очень большой натяжкой, и поэтому для них нельзя требовать, чтобы результаты опыта совпадали с теоретическим подсчетом; тем не менее, и в этих случаях формула (106) дает довольно хорошие результаты. О степени точности формулы (106) дают представление результаты экспериментов, изображенные на рис. 170 и 171. На рис. 170 построены на основании данных опыта поляры для семи прямоугольных крыльев с одним и тем же профилем, но с разными относительными размахами (от 1:1 до 7:1). На рис. 171 все экспериментальные значения коэффициента c_w пересчитаны по формуле (106) к относительному размаху 5:1. Мы видим, что преобладающая часть точек после пересчета располага-

ется очень тесно около поляры, полученной в результате эксперимента для относительного размаха 5:1. Наибольшее несовпадение с этой полярой дают точки, соответствующие квадратному крылу.

Индуктивному сопротивлению в системе координат c_a, c_w соответствует парабола, называемая *параболой индуктивного сопротивления*. Если провести такую параболу на одном чертеже с полярой, полученной из опыта (рис. 172), то отрезки прямых, соединяющих точки обеих кривых параллельно оси c_w , будут, на основании уравнения (105), численно равны значениям коэффициента профильного сопротивления.

Аналогичным образом производится пересчет углов атаки при переходе от одного относительного размаха к другому. Углу атаки α бесконечно длинного крыла в горизонтальном потоке соответствует угол атаки α' крыла конечного крыла (см. рис. 165). Угол α' меньше угла α на величину φ , так как конечное крыло вызывает скос потока на угол φ , зависящий от относительного размаха. Поэтому можно предполагать, что зависимости между коэффициентом подъемной силы c_a и истинным углом атаки $\alpha' = \alpha - \varphi$ должна быть одинаковой при всех значениях относительного размаха. Согласно равенству (93) мы имеем:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A}{\pi p_d l^2} = \frac{c_a F}{\pi l^2},$$

следовательно, вводя обозначение

$$\alpha' = f(c_a),$$

и имея в виду, что можно принять $\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$, мы можем написать:

$$\alpha = \alpha' + \varphi = f(c_a) + \frac{c_a}{\pi} \cdot \frac{F}{b^2}. \quad (107)$$

Применяя это уравнение один раз к крылу 1 с размахом l_1 и площадью F_1 , а другой раз к крылу 2 с размахом l_2 и площадью F_2 , мы

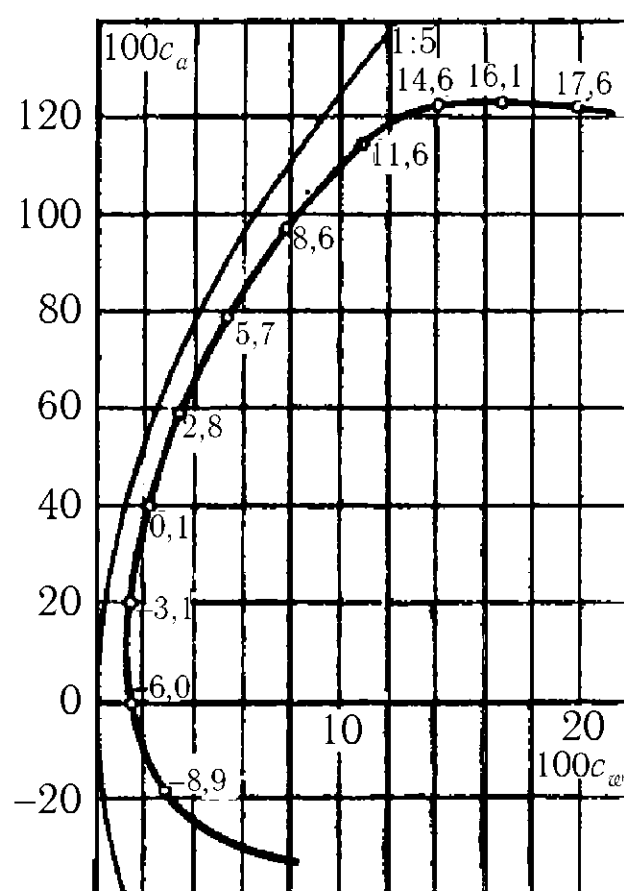


Рис. 172. Парабола индуктивного сопротивления

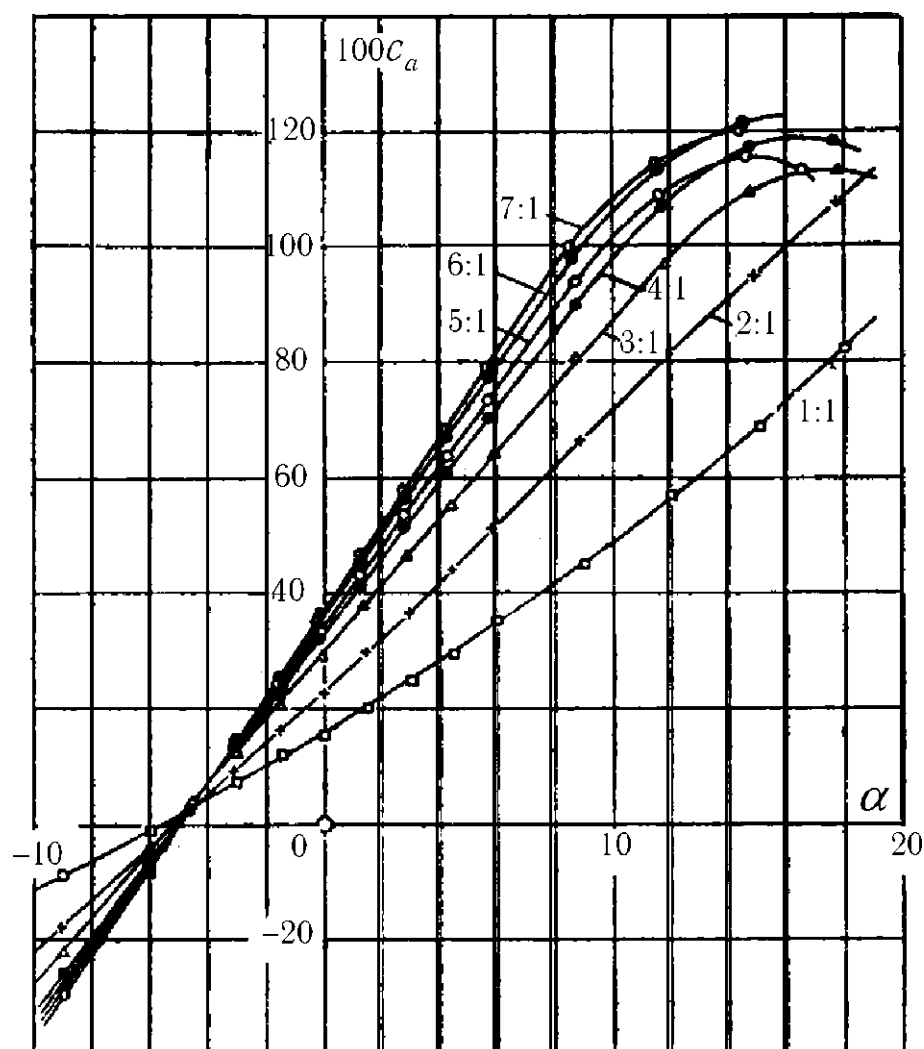


Рис. 173. Зависимость коэффициента подъемной силы прямоугольного крыла от угла атаки при различных относительных размахах. Числа для c_a на оси ординат увеличены в 100 раз

получим:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{c_a}{\pi} \left(\frac{F_2}{l_2^2} - \frac{F_1}{l_1^2} \right). \quad (108)$$

Эта формула позволяет вычислить для крыла 2 угол атаки α_2 , соответствующий коэффициенту подъемной силы c_a , если известен угол атаки α_1 , соответствующий тому же коэффициенту c_a , для крыла 1. Опыты хорошо подтверждают правильность формулы (108). На рис. 173 изображена зависимость коэффициента подъемной силы c_a от угла атаки для крыльев с одним и тем же профилем, но с разными относительными размахами (для тех же крыльев, для которых построены поляры на рис. 170). На рис. 174 показан результат пересчета углов атаки к относительному размаху 5:1. Мы видим, что и здесь все точки располагаются тесно около кривой c_a , полученной в результате эксперимента для относительного размаха 5:1.

Зависимость $\alpha' = f(c_a)$ между действительным углом атаки α' и коэффициентом подъемной силы c_a определяется из уравнения (107):

$$f(c_a) = \alpha - \frac{c_a}{\pi} \frac{F}{l^2}. \quad (109)$$

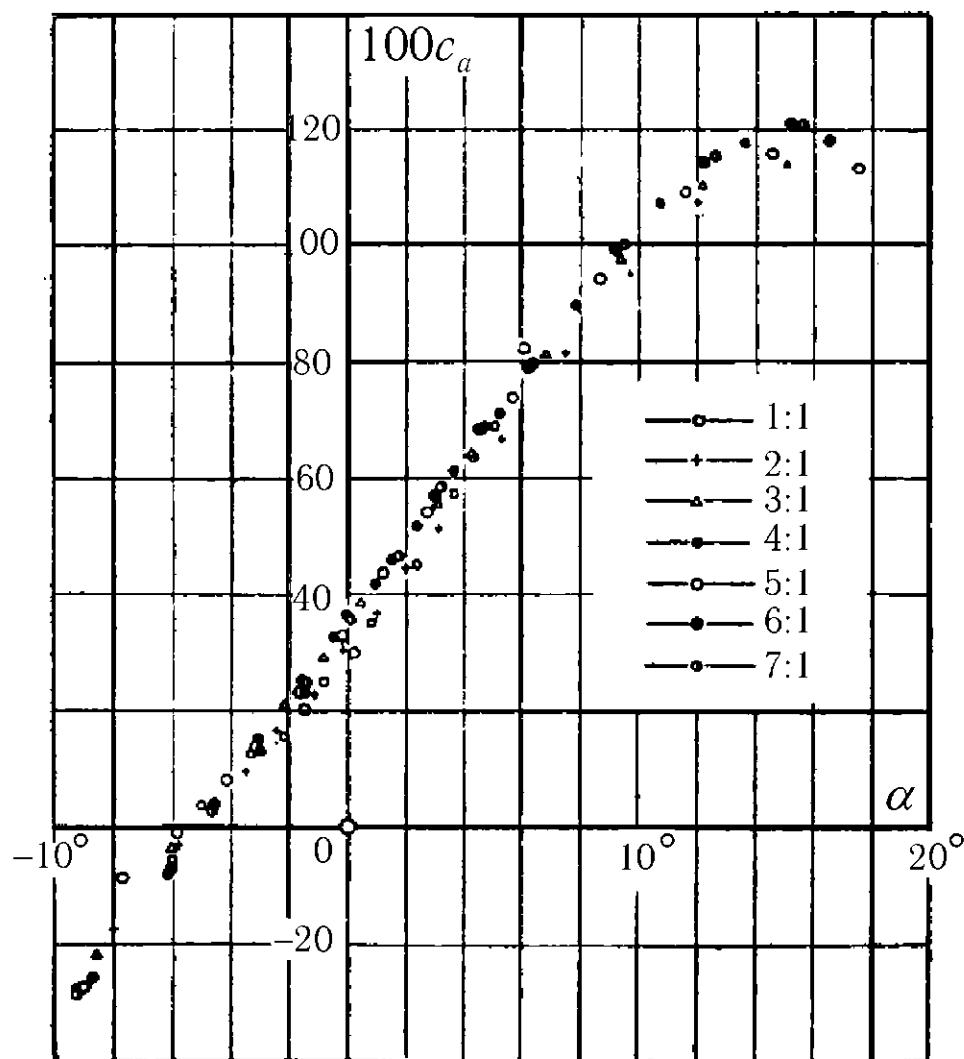


Рис. 174. Пересчет экспериментальных результатов, изображенных на рис. 173, к относительному размаху 5 : 1

Значения α и c_a получаются из опыта путем продувки крыла в аэродинамической трубе. Вейниг¹ обратил внимание на то, что формула (109) верна только в том случае, когда продувка в аэродинамической трубе выполнена для крыла эллиптической формы, ширина которого связана с расстоянием y от середины крыла уравнением

$$b = b_0 \sqrt{1 - \left(\frac{y}{l/2}\right)^2}.$$

В самом деле, формула (109) выведена в предположении, что интенсивность подъемной силы, а также скорость $w(y)$ нисходящего потока воздуха постоянны вдоль всего размаха, а таким свойством обладает только эллиптическое крыло. В случае же прямоугольного крыла ни интенсивность подъемной силы, ни скорость нисходящего потока воздуха не постоянны вдоль размаха: распределение подъемной силы вдоль размаха получается более равномерным, чем для эллиптического крыла, а скорость нисходящего потока возду-

¹Weinig F., VDI-Zetschr., т. 80 (1936), стр. 299. Я весьма обязан Ф. Ригелю (F. Riegel), указавшему мне, что исследование, аналогичное исследованию Вейнига, было выполнено еще в 1926 г. Г. Глауэртом; см., например, его книгу, цитированную на стр. 280). Такого же рода расчеты для крыла в форме трапеции выполнил Гюбер, см. Hüder J., ZFM, т. 26 (1933), стр. 209.

ха — меньшей в середине крыла, но зато большей на концах его. Поэтому возникает вопрос, каким образом, имея результат продувки для эллиптического крыла конечного размаха, можно определить коэффициент подъемной силы для бесконечно длинного крыла с тем же профилем или, иными словами, для исследуемого профиля при его плоском обтекании. Для этой цели следует найти для какого-нибудь сечения крыла, например, центрального, зависимость местной интенсивности подъемной силы, выраженной через местный коэффициент подъемной силы c_a^* , а также местного скоса потока — от коэффициента подъемной силы c_a крыла конечного размаха. Для продувки обычно применяются крылья с относительным размахом 5 : 1. Для такого относительного размаха Вейниг получил следующие зависимости:

$$c_a^* = 1,17 c_a, \quad \frac{w^*}{v} = 0,855 \frac{c_a F}{\pi l^2},$$

или, так как $\frac{F}{l^2} = \frac{1}{5}$,

$$c_a^* = 1,17 c_a, \quad a^* = \alpha - 0,0545 c_a.$$

Отсюда, имея экспериментальные значения α и c_a , можно найти зависимость $\alpha^*(c_a^*)$, характеризующую бесконечно длинное крыло.

Значительно проще производится определение коэффициента профильного сопротивления c_{wp} из уравнения (105), если значения c_w и c_a известны по результатам продувки. Вследствие небольшого отклонения распределения подъемной силы от эллиптического распределения коэффициент индуктивного сопротивления c_{wi} получается примерно на 4% больше своего значения $\frac{c_a^2 F}{\pi l^2}$ при эллиптическом распределении подъемной силы. Следовательно, для относительного размаха $l : b = 5 : 1$ мы имеем:

$$c_{wp} = c_w - 1,04 \frac{c_a^2}{5\pi} = c_w - 0,0662 c_a^2.$$

Для составных крыльев, например, для бипланов, могут быть выведены формулы, сходные с полученными выше для одиночного крыла. В частности, для пересчета индуктивного сопротивления получаются формулы, отличающиеся от формул (105) и (106) только тем, что в них вместо величины $\frac{F}{l^2}$ входит величина $\varkappa \frac{F}{l^2}$, где $\varkappa$ есть численный коэффициент, зависящий только от характера расположения крыльев, причем при правильном расположении $\varkappa$ всегда меньше единицы. Для биплана, в котором оба крыла имеют одинаковый размах, приближенно

можно считать, что

$$\kappa = \frac{0,975 + 1,44 \frac{h}{l}}{1 + 3,5 \frac{h}{l}},$$

где l есть размах, а h — расстояние между обоими крыльями. Эта формула применима для значений l от $2h$ до $15h$. Вместо формул (107) и (108) получаются аналогичные формулы с множителем κ' при членах $\frac{F}{l^2}$, причем κ' больше, чем κ (вследствие искривления линий тока, вызванного присутствием второго крыла¹).

§ 19. Пропеллер. В противоположность крылу, создающему силу, перпендикулярную к направлению движения, пропеллер создает *силу тяги*, т. е. силу, направленную в сторону движения и поэтому выполняющую полезную работу. Если сила тяги равна S , а скорость самолета (или другого средства передвижения) относительно среды равна v , то полезной работой, совершаемой в одну секунду, т. е. полезной мощностью, будет

$$L_0 = Sv.$$

На основании теоремы о количестве движения, тяга возникает вследствие того, что пропеллер приводит в движение все новые и новые массы жидкости. Если в течение одной секунды приводится в движение масса M , а скорость, сообщаемая ей, равна w , то тяга пропеллера S численно равна количеству движения Mw . Для того чтобы сообщить массе M скорость w , необходима дополнительная мощность, равная, очевидно,

$$L' = M \frac{w^2}{2}.$$

Если тяга пропеллера, т. е. произведение Mw , задана, то мощность L' , как легко видеть, будет тем меньше, чем меньше w и чем больше M . Следовательно, для того чтобы по возможности уменьшить потребную мощность $L_0 + L'$, необходимо, чтобы пропеллер приводил в движение возможно большую массу M и сообщал ей возможно меньшую скорость. Однако мощность $L_0 + L'$ не является полной потребной мощностью: необходима еще затрата мощности L'' для преодоления сопротивления, вызванного трением и завихрениями. *Коэффициентом полезного действия η пропеллера* называется отношение полезной мощности L_0

¹См. Ergebn. d. AVA, вып. 3 (1924), стр. 9.

к потребной мощности $L_0 + L' + L''$, т. е.

$$\eta = \frac{L_0}{L_0 + L' + L''}.$$

Кроме этого общего коэффициента полезного действия различают еще *теоретический коэффициент полезного действия*

$$\eta_T = \frac{L_0}{L_0 + L'} \quad (110)$$

и *гидравлический коэффициент полезного действия*

$$\eta_\Gamma = \frac{L_0 + L'}{L_0 + L' + L''}. \quad (111)$$

Как легко видеть,

$$\eta = \eta_T \cdot \eta_\Gamma.$$

Так как

$$L' = M \frac{w^2}{2} = S \frac{w}{2},$$

то теоретический коэффициент полезного действия равен

$$\eta_T = \frac{S_v}{S_v + \frac{S w}{2}} = \frac{v}{v + \frac{w}{2}}. \quad (112)$$

Отсюда видно, что η_T можно сделать близким к единице, если добиться того, чтобы скорость w была мала по сравнению с v . Для этого, согласно сказанному выше, пропеллер должен отбрасывать назад возможно большую массу жидкости, или, иными словами, поперечное сечение потока жидкости, создаваемого пропеллером, должно быть возможно большим. Однако слишком большие пропеллеры невозможно практически осуществить, во-первых, вследствие ряда технических требований, а во-вторых, из-за недопустимости достижения звуковой скорости на концах лопастей пропеллера (см. конец § 9 гл. IV). Кроме того, слишком большие пропеллеры имеют малый гидравлический коэффициент полезного действия, что сводит на нет выигрыш, получаемый вследствие увеличения теоретического коэффициента полезного действия.

Важнейшими разновидностями пропеллера являются *гребное колесо* и *гребной винт*. Гребное колесо применяется в качестве движителя

на пароходах. Лопатки, насаженные на окружность колеса, погружаются одна за другой в воду и отталкивают назад воду, находящуюся между двумя последовательными лопатками, причем на ребрах лопаток образуются поверхности раздела. Вода между лопатками получает скорость, приблизительно равную скорости лопаток, и сохраняет ее некоторое время и после выхода из пространства между лопатками; затем, конечно, происходит перемешивание с окружающей водой. Пусть v есть скорость движения парохода, а w — скорость отброшенной назад воды; тогда окружная скорость колеса приближенно равна $v + w$. Пусть, далее, сила на окружности колеса равна S (строго говоря, S есть только горизонтальная составляющая результирующей сил давления лопаток на воду; эта результирующая в общем случае отнюдь не горизонтальна). В таком случае потребная мощность равна $S(v + w)$, следовательно, коэффициент полезного действия гребного колеса равен:

$$\eta = \frac{S_v}{S(v + w)} = \frac{v}{v + w}.$$

Сравнивая с предыдущим результатом, мы видим, что теперь потребная мощность равна $L_0 + 2L'$; появление второго слагаемого L' следует отнести за счет вихрей, вызванных лопатками. Всегда неизбежные дополнительные обстоятельства влекут за собой дальнейшую потерю мощности. Тем не менее, всегда можно получить весьма хороший коэффициент полезного действия, если сделать скорость w достаточно малой. Этого можно достигнуть устройством больших широких лопаток. Такого рода гребные колеса располагаются позади парохода, причем ширина лопаток делается равной ширине корпуса парохода. Однако большие и медленно вращающиеся колеса весьма нежелательны с машиностроительной точки зрения; поэтому их применяют главным образом на пароходах, плавающих на сравнительно мелкой воде, исключающей возможность установки гребного винта. Там же, где глубина воды достаточна, всегда выгоднее гребные винты, так как их меньший диаметр и большее число оборотов позволяют пользоваться более легким судовым двигателем. Для самолетов практически пригодны только гребные винты.

Тяга гребного винта возникает совершенно таким же путем, как и подъемная сила крыла; разница между крылом и винтом состоит только в том, что крыло движется поступательно, а лопасти винта, представляющие собой те же крылья, вращаются и в то же время движутся вперед, так что отдельные точки лопастей описывают винтовые

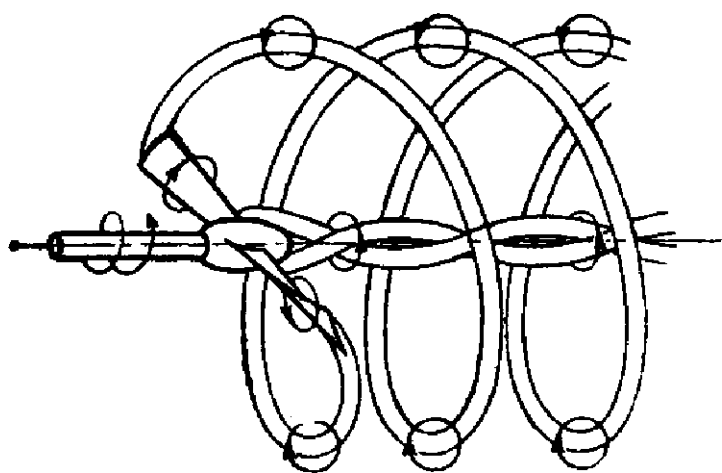


Рис. 175. Вихревая система воздушного гребного винта

линии. С задних кромок лопастей срываются, как и в случае гребного колеса, вихри (рис. 175). Вихри, срывающиеся с отдельных лопастей вблизи втулки и имеющие все одинаковое направление вращения, соединяются в один общий осевой вихрь. Внешние вихри охватывают в виде винтовых линий всю массу жидкости, пройденную винтом¹. Если винт имеет очень большое число лопастей, то тогда внешние вихри образуют почти замкнутую струю

[тесная последовательность вихрей приближенно эквивалентна поверхности раздела, см. § 12, п. с) гл. II]. Эта струя движется вперед относительно окружающей ее жидкости и в то же время вращается. Движение струи вперед связано непосредственно с задачей пропеллера — создавать силу тяги. Вращательное же движение является неизбежным недостатком; в некоторых случаях кинетическая энергия этого движения сравнительно невелика.

При движении гребного винта происходят очень сложные явления, для объяснения которых до сих пор не существует вполне удовлетворительной теории. До тех пор, пока добавочные скорости, вызываемые пропеллером, могут считаться малыми по сравнению со скоростью движения самолета или корабля (случай слабой нагрузки пропеллера), можно пользоваться выводами теории крыла². Однако практически применяемые пропеллеры часто несут отнюдь не слабую нагрузку. Мы ограничимся здесь кратким изложением двух способов, позволяющих получить теоретическое представление о работе пропеллера³.

¹См. Fö t t e n g e r H., Vortrag auf der flugwissenschaftl. Versammlung zu Göttingen 1911 (München 1912, стр. 40). Вихревая система, изображенная на рис. 175, впервые была обнаружена фотографическим путем О. Фламмом (Flamm O., Jahrb. d. Schiffbautechn. Gesellsch., т. 9 (1908), стр. 427; см. также его книгу: Die Schiffsschraube und ihre Wirkung auf das Wasser München 1909). В своих опытах Фламм подводил к концам лопастей водяного винта воздух, который увлекался вихрями и собирался внутри ядра вихрей. Именно благодаря этому вихри делались видимыми. В воздухе такие вихри можно сделать видимыми при помощи дыма, выпускаемого с концов лопастей; см. Valensi J., Science Aérienne, т. 4 (1935), стр. 97, а также Verhandl. d. V. Mechanik.-Kongresses 1938, стр. 520.

²См., например, Betz A., Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust, Göttinger Nachr., 1919, стр. 193 (помещено также в Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik, стр. 68).

³Выдающаяся роль в создании теории гребного винта принадлежит великому

Первый способ состоит в применении теоремы о количестве движения и закона сохранения энергии к идеализированному винту, относительно которого предполагается, что он повышает давление в потоке, проходящем через площадь сметаемого им круга, во всех точках этого круга. Почему система лопастей вызывает такое повышение давления, ясно следует из сказанного в § 13, п. е) предыдущей главы. Для упрощения примем, что указанное повышение давления в точности одинаково во всех точках ометаемого винтом круга. Такое предположение при надлежащем выборе ширины лопасти и угла атаки вполне оправдывается для преобладающей части ометаемого винтом круга; исключения составляют только область вблизи втулки, где линейная скорость лопастей невелика, и вблизи концов лопастей, где жидкость может отклоняться в сторону от винта. Однако оба последние обстоятельства легко учесть, если ввести в расчет идеальную ометаемую винтом площадь F , получаемую вычитанием из площади круга тех его частей, для которых указанное выше предположение не оправдывается.

Далее, пренебрежем вращательным движением, которое винт сообщает жидкости¹. Таким путем мы приходим к представлению *идеального пропеллера*, обладающего следующим свойством: при переходе потока через круг с площадью F , давление в потоке увеличивается во всех точках этого круга на одинаковую величину Δp (иными словами, происходит увеличение константы в уравнении Бернулли); в точках же, лежащих вне круга с площадью F , никакого изменения давления не происходит. Следовательно, позади пропеллера образуется струя, границу которой образуют линии тока, проходящие через контур круга с площадью F (рис. 176). Так называемая

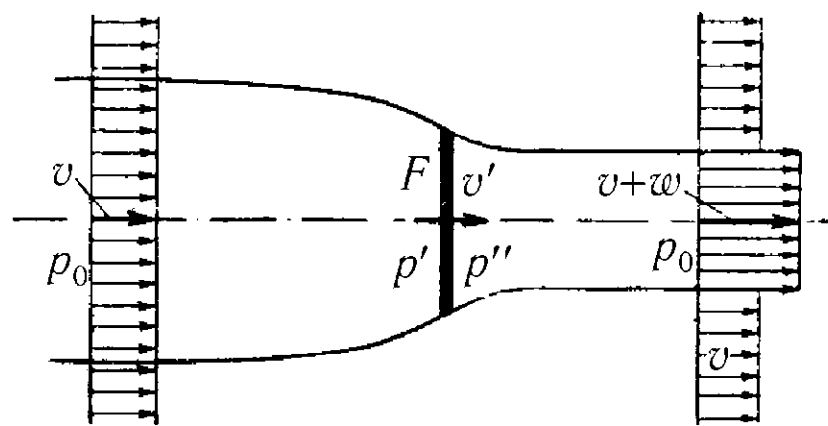


Рис. 176. Поле скоростей впереди и позади пропеллера

русскому ученому Н. Е. Жуковскому и его ученикам В. П. Ветчинкину, Б. Н. Юрьеву и Т. Х. Сабину; см., например, Жуковский Н. Е., Вихревая теория гребного винта, статьи: первая (1912 г.), вторая (1914 г.), третья (1915 г.) и четвертая (1918 г.), переизданные в «Избранных сочинениях», т. II, Москва) 1948. (Прим. пер.)

¹Об уточнении рассматриваемой здесь струйной теории винта путем учета вращательного движения струи, отбрасываемой винтом, см. Betz A., ZFM, т. 11 (1920), стр. 105.

струйная теория, основанная на таком представлении о работе пропеллера, приводит к следующим выводам.

В системе отсчета, в которой центр винта покоится, жидкость налетает на винт со скоростью v , равной скорости движения самолета (или корабля). По другую сторону винта жидкость движется со скоростью $v + w$. Обе указанные скорости, конечно, имеют место на таких расстояниях от винта, на которых поле давления, созданное винтом, уже не дает себя знать; следовательно, там, где в жидкости имеется невозмущенное давление p_0 . Скорость, с которой жидкость проходит через площадь, сметаемую винтом, вследствие влияния поля давления винта не равна v ; она заключается между v и $v + w$ (рис. 176). Сделаем теперь еще один шаг к идеализации винта: будем считать его протяжение в направлении потока ничтожно малым. В таком случае из соображений о неразрывности течения следует, что скорость непосредственно позади винта совпадает со скоростью непосредственно перед винтом; обозначим эту скорость через v' . Скачок давления Δp возникает потому, что давление p' непосредственно до винта ниже, чем невозмущенное давление, а давление p'' позади винта — выше, чем невозмущенное давление. Применяя уравнение Бернулли к точкам какой-нибудь линии тока, расположенным далеко впереди и непосредственно впереди винта, мы получим:

$$p_0 + \frac{\rho v^2}{2} = p' + \frac{\rho v'^2}{2};$$

аналогичным образом для точек, расположенных далеко позади и непосредственно позади винта, мы найдем:

$$p_0 + \frac{\rho(v + w)^2}{2} = p'' + \frac{\rho v'^2}{2}.$$

Вычитая первое уравнение из второго, мы получим для скачка давления $\Delta p = p'' - p'$ следующее выражение:

$$\Delta p = \frac{\rho(v + w)^2}{2} - \frac{\rho v^2}{2} = \rho w \left(v + \frac{w}{2} \right). \quad (113)$$

Применим теорему о количестве движения к контрольной поверхности, возможно ближе примыкающей к ометаемой винтом плоскости. Скорость на границах этой поверхности впереди и позади винта одинакова и равна v' , поэтому она не обуславливает никакого изменения количества движения. Но зато скачок давления Δp , происходящий на

площади F , влечет за собой появление силы, равной тяге винта S :

$$S = F \Delta p = \rho F w \left(v + \frac{w}{2} \right). \quad (114)$$

Применим теперь теорему о количестве движения к контрольной поверхности, образованной линиями тока, проходящими через контур ометаемого винтом круга и двумя плоскостями, параллельными плоскости этого круга, одной — расположенной далеко впереди винта, а другой — далеко позади винта. Количество жидкости, протекающей в одну секунду внутри этой контрольной поверхности, равно $\rho F v'$; при вступлении внутрь контрольной поверхности скорость жидкости равна v , а при выходе из нее она равна $v + w$. Интеграл от сил давления в этом случае, как показывает более подробное исследование¹, равен нулю, следовательно, силой тяги S будет

$$S = \rho F v' \cdot w. \quad (115)$$

Сравнивая формулы (114) и (115), мы получим замечательное соотношение:

$$v' = v + \frac{w}{2}. \quad (116)$$

Потребную мощность идеального струйного пропеллера можно вычислить, пользуясь либо первой, либо второй из упомянутых контрольных поверхностей. В первом случае мы получим:

$$L = F v' \cdot \Delta p = S v', \quad (117)$$

а во втором случае —

$$L = \rho F v' \left[\frac{(v + w)^2}{2} - \frac{v^2}{2} \right] = S v',$$

т. е. тот же результат. Полезная мощность, как и прежде, равна

$$L_0 = S v,$$

поэтому коэффициент полезного действия равен

$$\eta = \frac{S v}{S v'} = \frac{v}{v'} = \frac{v}{v + \frac{w}{2}}, \quad (118)$$

¹См., например, Prandtl-Tietjens, Hydro- und Aerodynamik, т. II, или Durand, Aerodynamic Theory, т. III.

т.е. совпадает с теоретическим коэффициентом полезного действия η_T [уравнение (112)]. Следовательно, идеальный струйный пропеллер является одновременно идеальным образцом для всякого вида пропеллеров и поэтому может служить в качестве эталона для сравнения.

Определим из уравнения (114) скорость w , мы получим:

$$w = -v + \sqrt{v^2 + \frac{2S}{\rho F}} \quad (119)$$

(другой знак перед корнем не имеет физического смысла). Введем величину

$$c_s = \frac{S}{\frac{1}{2}F\rho v^2},$$

называемую *коэффициентом нагрузки винта*. Тогда уравнение (119) можно будет переписать в следующем виде:

$$\frac{w}{v} = -1 + \sqrt{1 + c_s}. \quad (120)$$

Подставляя это значение $\frac{w}{v}$ в уравнение (112), мы получим важное соотношение:

$$\eta_T = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + c_s}}. \quad (121)$$

Мы видим, что чем меньше коэффициент нагрузки c_s , тем ближе η_T к единице; наоборот, чем больше коэффициент нагрузки c_s , тем меньше η_T . Формула (121) дает верхнюю границу для коэффициента полезного действия винта, который должен создавать требуемую тягу S при помощи заданной ометаемой площади F при заданной скорости v движения самолета или корабля. Кроме того, формула (121) является очень удобным базисом для сравнения результатов опытов. Отношение измеренного коэффициента полезного действия η к теоретическому коэффициенту полезного действия η_T дает величину упомянутого выше гидравлического коэффициента полезного действия η_H .

Полученные результаты неприменимы к геликоптерному винту, основной задачей которого является поддержание нагрузки в состоянии парения. В этом случае все время должна затрачиваться определенная мощность, между тем как полезная мощность, если только не происходит подъема, равна нулю. Поэтому оценка качества геликоптерного винта возможна только путем сравнения действительной затраты

мощности с теоретической мощностью, необходимой для поднятия заданного груза.

Так как теперь $v = 0$, то из формулы (116) мы получаем, что

$$v' = \frac{w}{2},$$

следовательно, на основании формулы (117) теоретическая потребная мощность равна

$$L_T = \frac{1}{2}Sw, \quad (122)$$

где S есть груз, который должен быть поднят геликоптерным винтом. Уравнение (114) после подстановки в него $v = 0$ принимает вид:

$$S = \frac{1}{2}\rho F w^2,$$

откуда находим w :

$$w = \sqrt{\frac{2S}{\rho F}}.$$

Подставляя это значение w в равенство (122), мы получим:

$$L_T = \sqrt{\frac{S^3}{2\rho F}}. \quad (123)$$

Наконец, составляя отношение $\frac{L_T}{L}$, мы найдем гидравлический коэффициент полезного действия¹.

Таким образом для геликоптерного винта потребная мощность при постоянном гидравлическом коэффициенте полезного действия тем меньше, чем больше площадь F . Однако в действительности с увеличением размеров геликоптерного винта возрастает его собственный вес, следовательно, и груз S , который винт должен поднимать.

Пусть геликоптерный винт движется горизонтально со скоростью v , которая велика по сравнению с вертикальной скоростью w потока, проходящего через сметаемую винтом площадь. В таком случае получается картина течения, сходная с картиной течения вокруг плоского круглого диска, работающего как крыло и наклоненного относительно горизонта на угол $\alpha = \arctg \frac{w}{v}$.

¹Уравнением (123) можно пользоваться и для обычного воздушного винта в случае его работы на месте; в таком случае, решая это уравнение относительно S , мы получим удобную приближенную формулу для вычисления тяги винта при его работе на месте, если только известен гидравлический коэффициент полезного действия.

Однако скорость w определяется теперь не формулой (119), а формулой (92) (см. § 17). Потребная теоретическая мощность равна

$$L_T = W_i v,$$

где W_i определяется по формуле (94). Для того чтобы такое движение геликоптерного винта было возможно, его ось должна быть наклонена вперед на угол

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{W}{S},$$

где S есть тяга винта, а W — полное сопротивление.

§ 20. Дальнейшие сведения о гребном винте. Ветряк. Другие виды пропеллеров. а) Для того чтобы получить более точное представление о способе действия пропеллера, исследуем подробнее явления, возникающие при обтекании его отдельных лопастей.

Будем рассматривать элемент лопасти, заключенный между радиусами r и $r + dr$, как отрезок бесконечно длинного крыла; такое представление вполне возможно при условии, что в вычислениях мы будем оперировать относительной скоростью между элементом крыла и жидкостью на месте этого элемента. На эту скорость влияет весь пропеллер в целом, следовательно, мы должны провести расчет, который в основной своей идее сходен с расчетами теории крыла. Опять для упрощения вычислений пренебрежем вращательным движением жидкости, вызванным пропеллером. Осеваая скорость жидкости при прохождении через плоскость винта определяется формулой (116), которая после подстановки в нее значения w из формулы (120) принимает вид:

$$v' = \frac{v}{2} (1 + \sqrt{1 + c_s}).$$

Линейная скорость элемента лопасти равна $r\omega$, где ω есть угловая скорость вращения пропеллера. Следовательно, скорость элемента лопасти относительно жидкости равна

$$V = \sqrt{v'^2 + r^2\omega^2},$$

а направление ее определяется (рис. 177) соотношением:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v'}{r\omega}$$

Если профиль крыла наклонен относительно этого направления на малый угол α , то на единицу длины лопасти возникает подъемная сила A ,

перпендикулярная к направлению относительной скорости V , и лобовое сопротивление W , прямо противоположное направлению относительной скорости V . На элемент лопасти dr будут действовать подъемная сила $A dr$ и лобовое сопротивление $W dr$. Величина подъемной силы A определяется, конечно, относительной скоростью V .

Для дальнейших вычислений целесообразно разложить полное сопротивление на составляющую N , перпендикулярную к ометаемой винтом плоскости, и на составляющую T , касательную к этой плоскости (рис. 177). Составляющая N совпадает с направлением скорости v' , а составляющая T противоположна направлению скорости $r\omega$. Как легко видеть, составляющие N и T связаны с подъемной силой A и лобовым сопротивлением W соотношениями:

$$\begin{cases} N = A \cos \varphi - W \sin \varphi, \\ T = A \sin \varphi + W \cos \varphi. \end{cases} \quad (124)$$

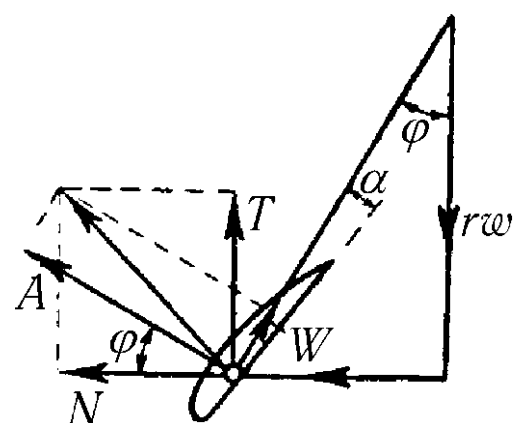


Рис. 177. Силы, действующие на элемент лопасти

Складывая составляющие N для всех элементов лопасти, мы получим тягу S лопасти; складывая моменты касательной составляющей T относительно центра лопасти, мы найдем вращающий момент D . Если число лопастей равно z , то мы будем иметь:

$$\begin{cases} S = z \int_0^r N dr, \\ D = z \int_0^r T r dr. \end{cases} \quad (125)$$

Работа, совершаемая силой $N dr$, действующей на элемент лопасти, равна $N dr \cdot v'$, работа, совершаемая силой $T dr$, равна $T dr \cdot r\omega$. Интегрируя эти выражения, мы получим полезную мощность Sv' и мощность $D\omega$, которую должен развивать мотор для поддержания вращательного движения.

Отношение работы $N dr \cdot v'$ к работе $T dr \cdot \omega$ определяет собой коэффициент полезного действия элемента лопасти :

$$\eta_{эл} = \frac{N dr \cdot v'}{T dr \cdot r\omega}. \quad (126)$$

Подставляя сюда значения N и T , определяемые формулами (124), имея в виду, что $v' = r\omega \operatorname{tg} \varphi$, и вводя так называемый *коэффициент планирования*

$$\varepsilon = \frac{W}{A},$$

мы получим:

$$\eta_{\text{эл}} = \frac{1 - \varepsilon \operatorname{tg} \varphi}{1 + \varepsilon \operatorname{ctg} \varphi}. \quad (127)$$

Максимальное значение $\eta_{\text{эл}}$ получается для угла установки элемента лопасти φ , равного приблизительно

$$\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Этот максимум выражен очень слабо, так как коэффициент планирования ε профиля лопасти весьма мал (он равен от $1/20$ до $1/50$): поэтому углы установки φ , даже далекие от указанного значения, дают весьма хороший коэффициент полезного действия элемента лопасти. Этот коэффициент делается недопустимо малым только при очень малых углах φ . Однако при больших значениях $\operatorname{tg} \varphi$ винт сообщает жидкости сильное вращательное движение, что невыгодно, так как для этого требуется непроизводительная затрата мощности. Поэтому на практике углы установки для внешних элементов лопасти, играющих вследствие своей большой скорости вращения основную роль, обычно выбираются значительно меньше указанного оптимального значения, например, от $\operatorname{arctg} 1/3$, до $\operatorname{arctg} 1/5$. Однако для пропеллеров скоростных самолетов угол установки элементов лопастей берется значительно выше (до $\operatorname{tg} \varphi \approx 1$), так как иначе скорость концов лопастей относительно воздуха будет получаться больше скорости звука. Для того, чтобы при помощи таких винтов можно было получить тягу, достаточную для взлета, а также хороший коэффициент полезного действия при подъеме, их лопасти устраиваются так, что в полете они могут поворачиваться, т.е. изменять угол установки и определяемый этим углом шаг винта. Такие винты называются *винтами с изменяемым шагом*¹.

Связь между подъемной силой A элемента лопасти и соответствующим динамическим давлением позволяет найти зависимость необходимой ширины лопасти и ее угла атаки α от радиуса r . Однако при расчете быстро вращающихся водяных винтов необходимо учитывать,

¹Об аэродинамических свойствах винтов с изменяемым шагом см., например, Dirksen B., Abhandl. aus Aerodyn. Institut d. T. H. Aachen, № 16.

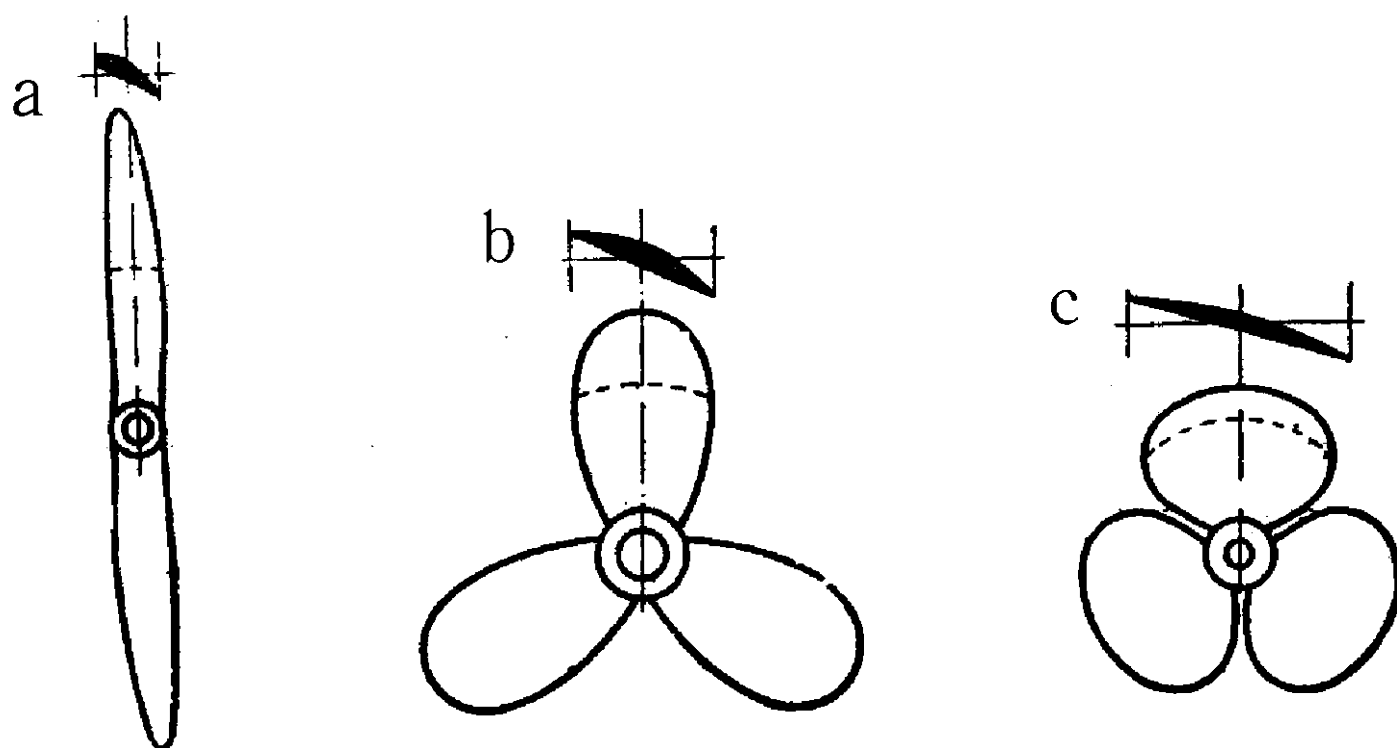


Рис. 178. а) воздушный винт; б) тихоходный водяной винт; с) быстроходный водяной винт

что при приближении абсолютного давления в воде к нулю в последней начинается выделение пузырьков воздуха и образование пара. Это явление называется *кавитацией* (см. § 2 гл. V). Для предупреждения слишком сильного понижения давления на подсасывающей стороне быстро вращающегося профиля толщина последнего, а также его угол атаки должны быть очень небольшими, поэтому лопасти быстро вращающихся водяных винтов делаются очень широкими. На рис. 178 показаны воздушный винт (а), тихоходный водяной винт (б) и быстроходный водяной винт (с) для быстроходного теплохода. Профили воздушных винтов, окружные скорости которых приближаются к скорости звука, также выполняются очень тонкими, но обычно с очень узкими лопастями (вследствие высокого динамического давления).

Имеются также винты, окружная скорость которых превышает скорость звука; однако при работе такие винты, вследствие появления изображенных на рис. 252 (см. стр. 401) звуковых волн, издают очень громкий звук, похожий на звук тромбона и распространяющийся особенно сильно в направлении, перпендикулярном к направлению полета.

На основе представлений теории крыла можно развить более точную теорию гребного винта, хорошо отражающую действительные соотношения. Эта теория, начало которой положено в работе Бетца¹, в настоящее вре-

¹Betz A., Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust с добавлением Л. Прандтля. Gött. Nachr. 1919, стр. 193 (помещено также в Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik, стр. 68).

мя широко применяется для расчета воздушных винтов. Более строгое вычисление распределения циркуляции вдоль радиуса лопасти было выполнено

С. Гольдштейном¹. На рис. 179 показано распределение циркуляции для многолопастного винта; изображенная кривая дает представление также о распределении тяги на единицу площади сменяемого винтом круга в различных его зонах. Распределение тяги вдоль отдельных лопастей получается отсюда умножением на $\frac{2\pi r}{z}$, где z есть число лопастей. Вычисление распределения циркуляции

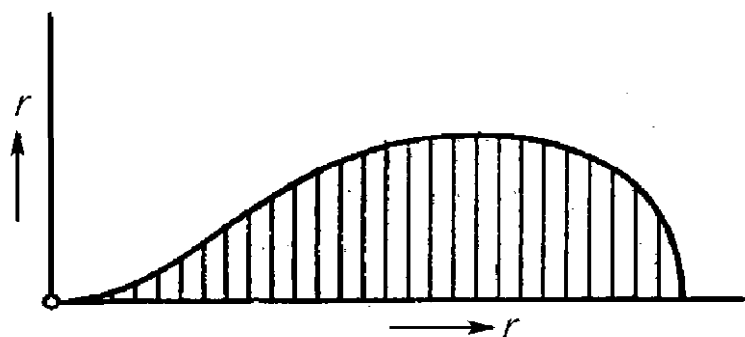


Рис. 179. Распределение циркуляции вдоль радиуса лопасти

получается особенно простым для случая узких лопастей и малой относительной поступи².

Действительные свойства водяных и воздушных гребных винтов устанавливаются путем опыта. Здесь мы остановимся только на таких опытах, при которых винт исследуется в изолированном состоянии в невозмущенной жидкости, а не в сочетании с самолетом или кораблем. При испытании вместе с самолетом (или кораблем) последний вносит значительные возмущения в движение жидкости, кроме того, винт и самолет определенным образом взаимодействуют друг с другом, что в конечном итоге делает общую картину движения очень сложной³. Наиболее удобной величиной, к которой следует относить все результаты опытов, является, очевидно, отношение скорости продвижения винта $v = \lambda$ к его окружной скорости u , т. е. величина

$$\frac{v}{u} = \frac{v}{r\omega} = \lambda,$$

называемая *относительной поступью* (r есть радиус винта, а ω — угловая скорость вращения). Для гребного винта, лопасти которого имеют постоянный шаг h , существует такая относительная поступь λ_1 , при которой винт движется в жидкости, испытывая только сопротивление трения. Как легко видеть,

$$\lambda_1 = \frac{h}{2\pi r}.$$

Только для значений $\lambda < \lambda_1$ лопасти винта имеют относительно направления потока угол атаки, создающий положительную силу тяги.

¹Goldstein S., Proc. Roy. Soc. London (A), т. 123 (1929), стр. 440.

²Walchner O., Luftf.-Forsch., т. 13 (1936), стр. 103.

³См., например, Betz A., ZAMM, т. 7 (1927), стр. 431.

Для значений $\lambda > \lambda_1$ винт начинает работать как ветряк (см. ниже, п. б). Для практически выполняемых винтов, у которых шаг лопасти вдоль радиуса переменный, имеют место аналогичные соотношения, только отпадает простая геометрическая интерпретация величины λ_1 .

Величинами, которые измеряются при опытах, являются тяга винта S и вращающий момент мотора D , необходимый для вращения винта. Потребная мощность равна

$$L = D\omega,$$

а полезной мощностью по-прежнему будет

$$L_0 = Sv,$$

следовательно, коэффициент полезного действия равен

$$\eta = \frac{Sv}{D\omega}. \quad (128)$$

Для представления результатов опыта в форме, не зависящей от размеров исследуемого винта, применяются безразмерные величины, составляемые таким же образом, как аналогичные величины в теории крыла. В Германии наиболее употребительными являются следующие величины:

$$k_s = \frac{S}{\frac{1}{2}\rho u^2 \pi r^2} = \frac{S}{\frac{1}{2}\rho \omega^2 \pi r^4}, \quad (129)$$

$$k_d = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho u^2 \pi r^3} = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho \omega^2 \pi r^5} = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho \omega^3 \pi r^5}. \quad (130)$$

В том случае, когда тяга и вращающий момент относятся к динамическому давлению, вычисленному не для скорости u , а для скорости v , вводятся аналогичным образом составленные коэффициенты c_s и c_d . Так как $v = \lambda r\omega$, то при использовании коэффициентов k_s и k_d равенство (128) принимает вид:

$$\eta = \frac{\lambda k_s}{k_d}. \quad (131)$$

На рис. 180 построены кривые, изображающие зависимость k_s , k_d и η от λ для воздушного винта, показанного на рис. 178, а. Мы видим, что кривые k_s и k_d вблизи значения $\lambda = 0,35$ пересекают ось λ ,

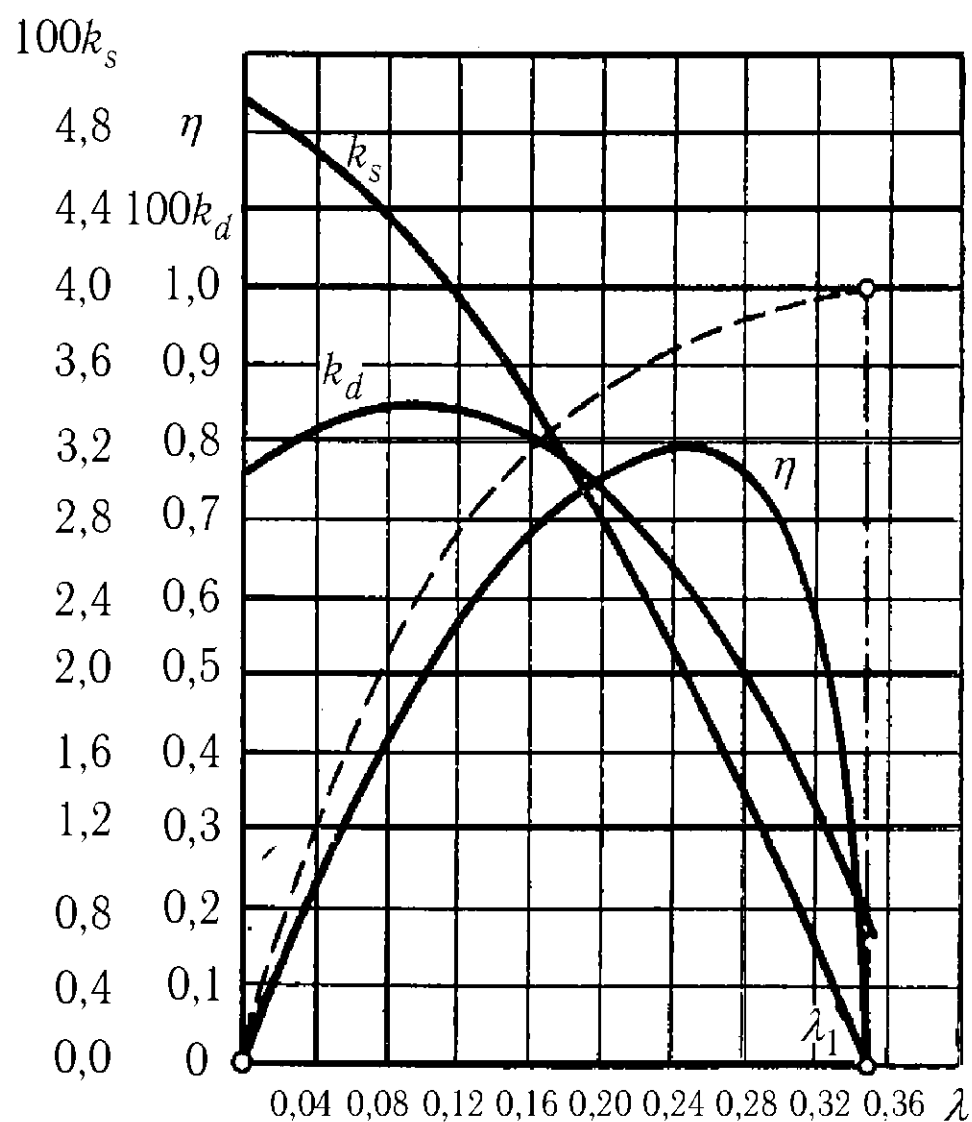


Рис. 180. Характеристики воздушного гребного винта

т.е. коэффициенты k_s и k_d принимают вблизи $\lambda = 0,35$ нулевое значение. Коэффициент полезного действия, согласно формуле (131), равен нулю для $\lambda = 0$ и для $k_s = 0$, следовательно, между значениями $\lambda = 0$ и $\lambda = 0,35$ он имеет максимум. Для того чтобы сравнить экспериментальную кривую (η, λ) с теоретическим коэффициентом полезного действия η_T [формула (121)], следует сначала выразить коэффициент нагрузки c_s через k_s и λ . Как нетрудно видеть,

$$c_s = \frac{k_s}{\lambda^2}.$$

Подставляя это значение в формулу (121), мы можем вычислить значения η_T , соответствующие отдельным значениям λ , и таким путем построить теоретическую кривую (η_T, λ) . Эта кривая показана на рис. 180 штрихами. Мы видим, что действительные значения η довольно близки к теоретическим значениям η_T всюду, за исключением области значений λ , близких к λ_1 , где η_T приближается к единице, а η — к нулю¹.

¹Более подробные сведения о воздушных гребных винтах можно найти в кни-

б) К *ветрякам* применимы такие же рассуждения, как и к воздушным винтам¹. Ветер, т. е. поток воздуха, проходя через ометаемый лопастями ветряка круг, изменяет свое состояние: давление в нем уменьшается на некоторую величину Δp . Этому уменьшению давления соответствует возникновение мощности

$$L_1 = \pi r^2 \cdot v' \cdot \Delta p; \quad (132)$$

некоторая часть этой мощности, зависящая от величины коэффициента полезного действия лопастей, передается на вал ветряка. В формуле (132) v' по-прежнему означает осевую скорость, с которой поток проходит через сметаемый ветряком круг. Для дальнейших вычислений применимы формулы § 19 с той только разницей, что теперь скорость позади ветряка меньше, чем до ветряка. Следовательно, теперь величина w имеет отрицательное значение. Для того чтобы иметь дело с положительными величинами, будем писать $-w$ вместо w ; тогда формула (113) примет вид:

$$\Delta p = \rho w \left(v - \frac{w}{2} \right),$$

а скорость v' , определяемая формулой (116), будет равна

$$v' = v - \frac{w}{2}.$$

Подставляя эти значения Δp и v' в равенство (132), мы получим:

$$L_1 = \pi r^2 \cdot v' \cdot \Delta p = \pi r^2 \rho w \left(v - \frac{w}{2} \right)^2. \quad (133)$$

Легко доказать, что эта мощность имеет при заданных значениях v и r максимальное значение тогда, когда позади ветряка разность $v - w$ равна

$$v - w = \frac{v}{3},$$

гах: Юрьев Б. Н., Воздушные гребные винты, Москва 1934; Ветчинкин В. П. и Поляхов Н. Н., Теория и расчет воздушного гребного винта, Москва, 1940. (Прим. перев.)

¹См., например, Betz A., Windenergie und ihre Ausnuzuhg durch Windmühlen. Göttingen, 1926; помещено также в Naturwiss. т. 15 (1927), стр. 905; далее Noetzlin U., Die strömungstechnische Grundlagen der Windkraftmaschinen, Denkschrift 2 der Reichsarbeitsgemeinschaft «Windt», Berlin-Steglitz, 1941.

следовательно, при

$$v' = \frac{2}{3}v.$$

Это максимальное значение мощности равно¹

$$L_{1\max} = \frac{8}{27}\pi r^2 \rho v^3.$$

Для того чтобы получить представление, в какой мере ветряк использует мощность ветра L_0 , может служить коэффициент использования

$$c_l = \frac{L}{L_0}.$$

Мощность L_0 легко подсчитать. Предположим, что ветряк не оказывает никакого сопротивления движению ветра. Тогда через площадь круга, сметаемого ветряком, в одну секунду протекает масса воздуха $\rho\pi r^2 v$. Так как кинетическая энергия единицы массы равна $\frac{1}{2}v^2$, то мощность

$$L_0 = \frac{1}{2}\rho\pi r^2 v^3.$$

Следовательно, максимальное теоретическое значение коэффициента использования равно:

$$c_{l\max} = \frac{L_{1\max}}{L_0} = \frac{16}{27} = 0,5926.$$

Понятие коэффициента полезного действия для обычных ветряков не имеет никакого смысла, так как энергия ветра имеется в неограниченном количестве. Об экономичности ветряка можно судить только по произведенным затратам на единицу получаемой мощности. Иногда несовершенная конструкция, но зато дешевая, может быть выгоднее конструкции аэродинамически совершенной, но дорогой по своей стоимости. Однако по-иному обстоит дело с ветряками, устанавливаемыми на самолетах для приведения в движение каких-либо вспомогательных механизмов энергией встречного ветра. В этом случае тяга ветряка S уменьшает мощность пропеллера самолета на величину Sv , следовательно, теперь понятие коэффициента полезного действия имеет вполне определенный смысл. Этот коэффициент равен

$$\eta = \frac{L}{Sv}.$$

¹ Betz A., Z. f. d. gesamte Turbinenwesen, т. 17 (1920), стр. 307.

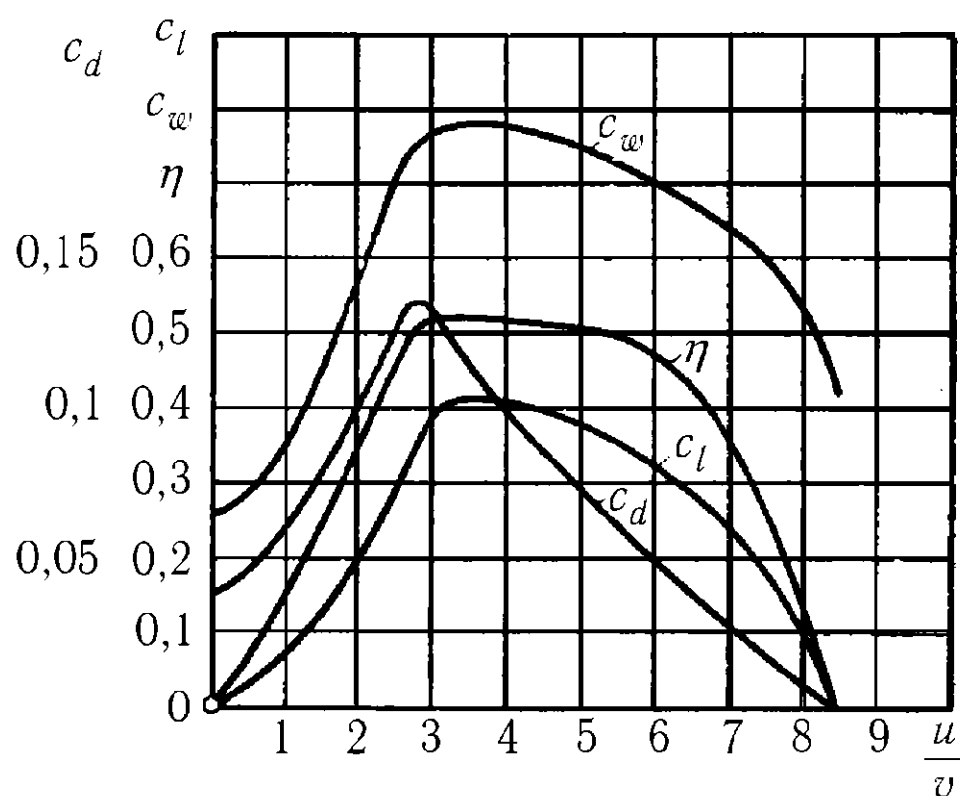


Рис. 181. Характеристики ветряка

При испытании моделей ветряков строятся такие же характеристические кривые, как и при испытании винтов^{1,2}. Быстроходность ветряка зависит от шага его лопастей. На рис. 181 показаны характеристики быстроходного ветряка.

Согласно уравнению (114) тяга, передаваемая ветром на ось ветряка, равна

$$S = F \cdot \Delta p = \rho F w \left(v - \frac{w}{2} \right),$$

где F есть площадь круга, ометаемого ветряком. Таким образом, ветряк представляет собой особенно наглядный случай гидродинамического сопротивления (при условии, что можно удовлетвориться струйной теорией пропеллера). Пусть F_s есть поперечное сечение струи на таком расстоянии от ветряка, на котором поле давлений уже исчезло и скорость кильватерного потока сделалась равной w . Тогда мощность Q кильватерного потока, равная мощности источника, создаваемого ветряком (§ 14, п. с), очевидно, равна

$$Q = F_s w.$$

Условие неразрывности потока дает соотношение:

$$F \left(v - \frac{w}{2} \right) = F_s (v - w),$$

¹Более подробные сведения о ветряках можно найти в Ergebnisse d. AVA, вып. III, стр. 139, и вып. IV, стр. 118.

²Теория ветряков получила значительное развитие в СССР благодаря работам В. П. Вотчинкина, Г. Х. Сабина и других исследователей. См., например, С а б и н и н Г. Х., Теория идеального ветряка. Труды ЦАГИ, вып. 63 (1930). (Прим. перев.)

следовательно,

$$S = W = \rho F w \left(v - \frac{w}{2} \right) = \rho F_s w (v - w) = \rho Q (v - w).$$

В § 14, п. с) мы вывели для сопротивления W менее точную формулу:

$$W = \rho Q v.$$

Так получилось потому, что в § 14 мы рассматривали кильватерный поток на таком расстоянии от тела, на котором скоростью w можно было пренебречь по сравнению с v .

Известное сходство с ветряком имеет *автожир* — самолет, у которого крылья заменены самовращающимися лопастями с вертикальной осью. В самом деле, мощность, необходимую для поддержания вращения лопастей автожира, дает встречный ветер. Несущие свойства самовращающихся лопастей проявляются в полной мере только при одновременном движении всего автожира вперед. Поэтому общая картина течения вокруг автожира сходна с картиной течения вокруг летящего вперед геликоптера (см. текст, набранный петитом, на стр. 309). Однако, в противоположность геликоптеру, ось автожира при полете должна быть отклонена назад. Лобовое сопротивление при полете автожира преодолевается, как и при полете обычного самолета, при помощи воздушного винта.

с) Из других видов пропеллеров следует упомянуть прежде всего *пропеллер Фохта–Шнейдера*, применяемый для таких кораблей, которые должны иметь особенно хорошую маневренность (речные и озерные суда, быстроходные катеры и т. п.). Этот пропеллер состоит из нескольких крыльев, расположенных вдоль горизонтальной окружности. При каждом обороте пропеллера угол атаки крыльев изменяется от некоторого отрицательного значения к некоторому положительному и обратно. Положение диаметра окружности, на котором угол атаки крыльев проходит через нуль, а также диапазон изменения угла атаки могут изменяться произвольно. Это позволяет при неизменном числе оборотов двигателя (что особенно удобно для двигателя внутреннего сгорания) изменять направление и величину тяги пропеллера. Если судно снабжено двумя пропеллерами Фохта–Шнейдера, то его можно даже поворачивать вокруг оси, а также передвигать в поперечном направлении параллельно самому себе.

На рис. 182 изображена схема установки пропеллера Фохта–Шнейдера. Крылья расположены вдоль окружности так, что перпендикуляры к их хордам все время проходят через неподвижный центр M , находящийся на некотором расстоянии AM от центра окружности. Тяга пропеллера приблизительно пропорциональна расстоянию Am и направлена перпендикулярно к направлению AM .

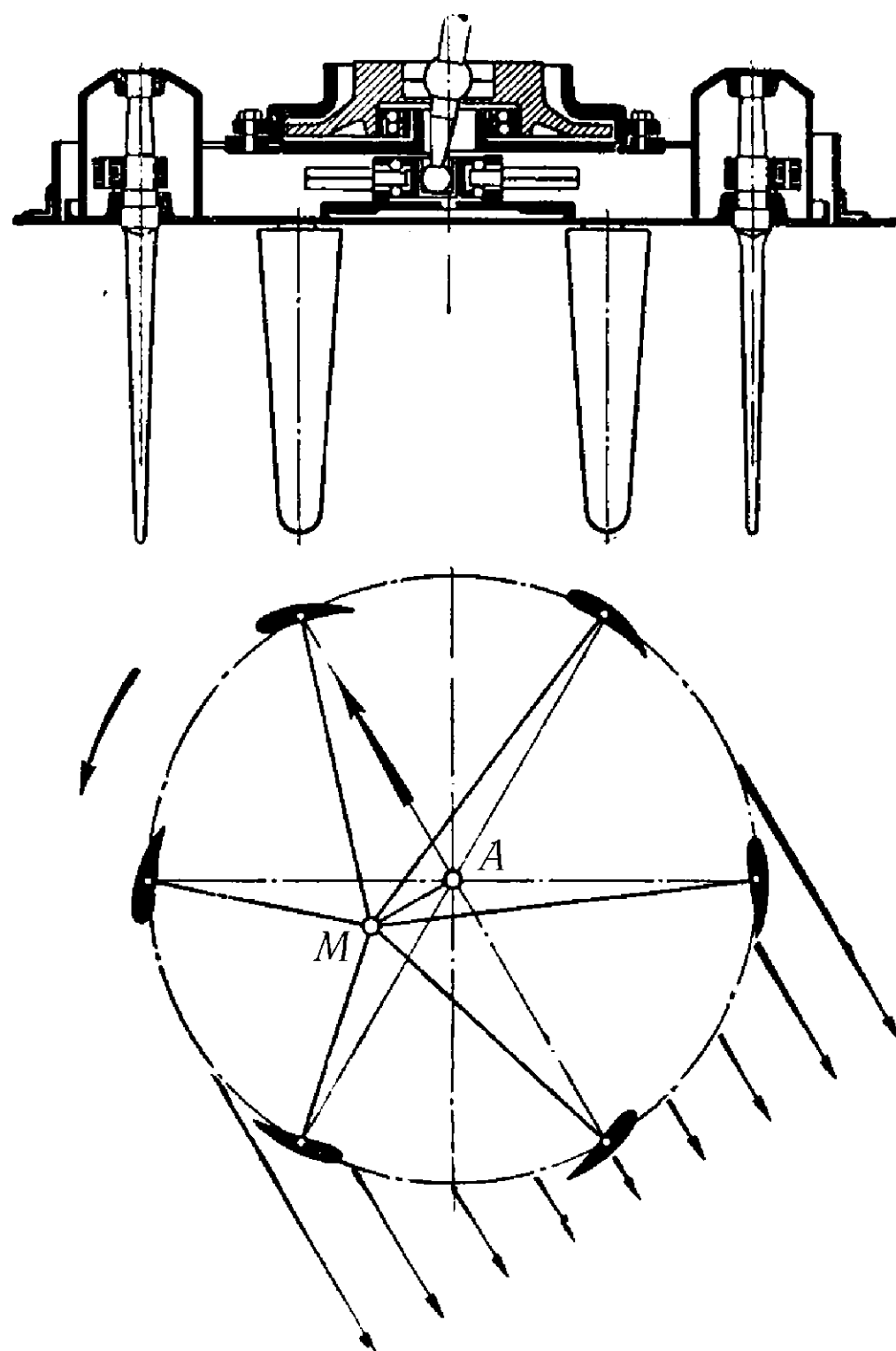


Рис. 182. Пропеллер Фохта – Шнейдера

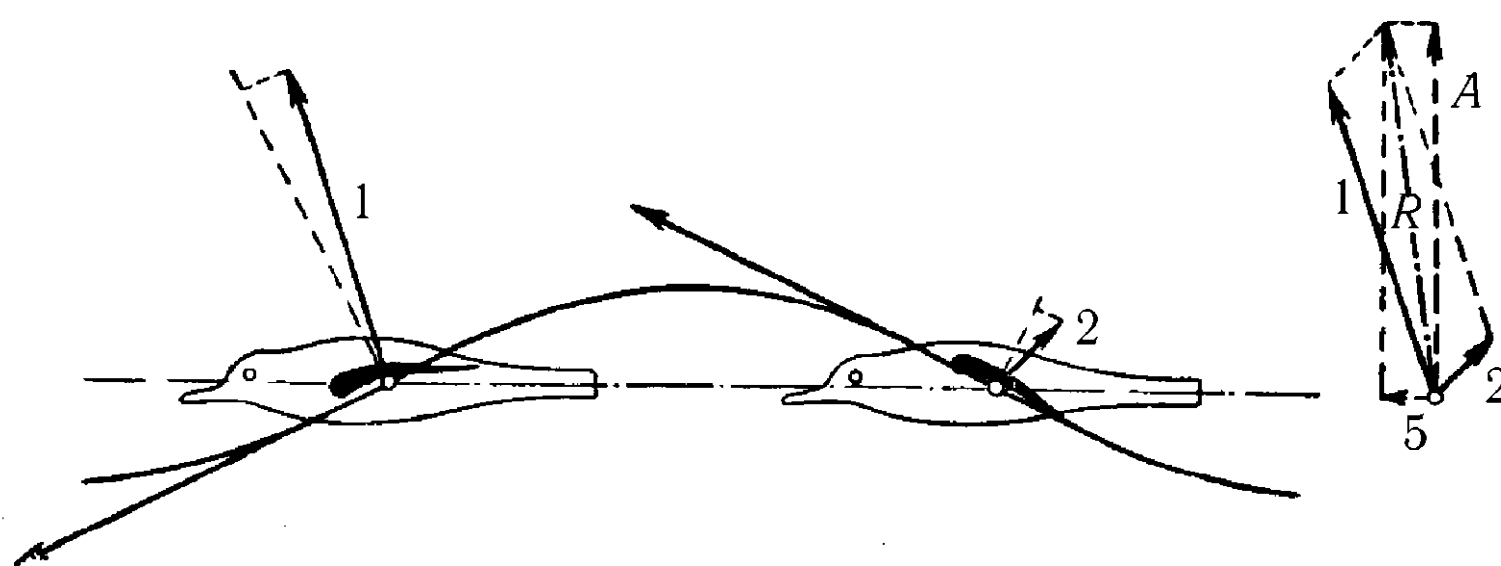


Рис. 183. Схема полета птиц, использующих свои крылья как весла

d) Небезынтересен вопрос о том, каким способом создают необходимую для движения тягу плавающие и летающие живые существа. В их распоряжении для получения тяги имеются органы, способные перемещаться только взад и вперед или вверх и вниз, но не вращаться (при помощи такого же движения перемещаются примитивные надводные суда — весельные лодки). В зависимости от того, происходит ли движение органа, создающего тягу, параллельно или перпендикулярно к направлению движения корпуса, получаются соотношения, сходные с работой гребного колеса или гребного винта. Полет птиц особенно интересен тем, что при нем и подъемная сила и тяга получаются при помощи одного и того же органа — крыльев. У больших птиц движение крыльев подобно движению весел (рис. 183). Тяга возникает потому, что движение крыльев вниз выполняется очень резко, с большой силой, движение же вверх выполняется, наоборот, пассивно и притом так, чтобы получалось возможно меньшее сопротивление. Наибольшую долю тяги дают внешние части крыльев, описывающие самый большой путь по вертикали. Коэффициент полезного действия такого рода механизма в благоприятных случаях довольно высокий. Лобовое сопротивление складывается в основном из индуктивного сопротивления и из сопротивления, обусловленного вихрями, возникающими при взмахе крыльев. Эти вихри, оси которых расположены перпендикулярно к направлению полета, при спокойных взмахах крыльев не очень интенсивны. Многие маленькие птицы обладают способностью быстро вибрировать крыльями, что позволяет им взлетать почти вертикально, а также висеть в воздухе неподвижно. Действие крыльев этих птиц сходно с действием геликоптера. Крылья при своем движении вниз широко раскрываются, и птица получает резкий толчок вперед; при обратном движении крылья прижимаются возможно ближе к телу. Принцип геликоптера еще лучше используется маленькими птичками колибри и многими насекомыми. Их крылья при движении вверх переворачиваются относительно своей продольной оси (рис. 184), благодаря чему тяга возникает при движении крыльев не только вниз, но и вверх. Это позволяет колибри и насекомым совершенно свободно парить в воздухе, двигаться не только вперед, но и назад, а также поворачиваться в полете на месте¹.

Водяные животные создают тягу, необходимую для движения, или при помощи органов, сходных с крыльями летающих птиц (например,

¹Экспериментальные исследования сил, действующих на такого рода крылья, выполнены Гольстом [Holst E., Luftwissen, т. 10 (1943), стр. 146].

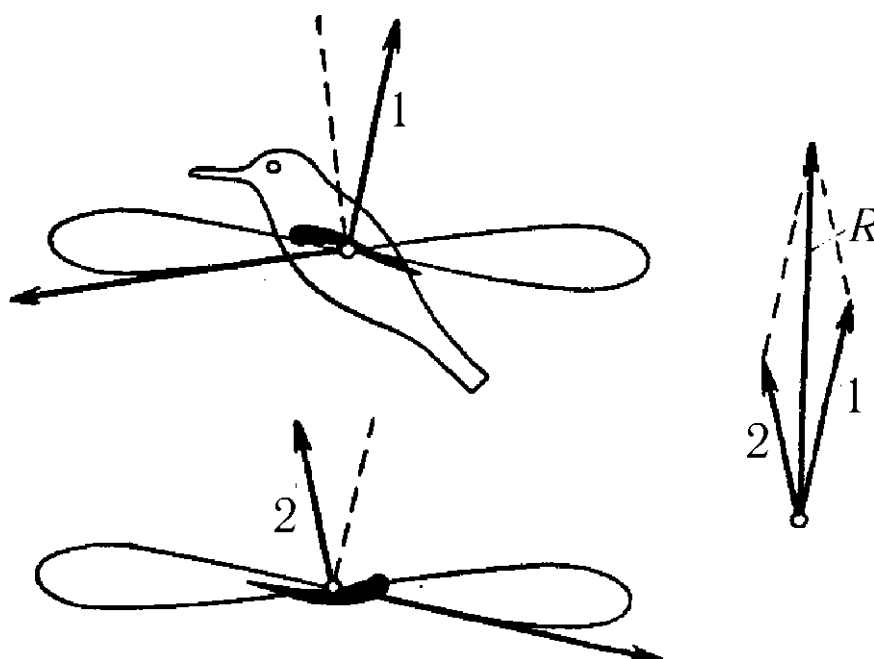


Рис. 184. Схема полета птиц, использующих свои крылья как геликоптер ныряющие птицы Арктики и некоторые черепахи), или при помощи хвоста, действие которого основано на гибкости его тонкой поверхности. Хвост рыбы при поворотах ее тела в ту и другую сторону всегда устанавливается в таком косом относительно тела положении, что возникает сила тяги. У скатов и угрей роль хвоста играет все тело, которым при движении они извиваются подобно змее.

Своеобразный способ создания тяги наблюдается у каракатиц. Они втягивают воду внутрь своего тела, имеющего форму мешка, а затем, сильно стягивая тело, выталкивают воду назад. Таким путем, используя реакцию вытекающей струи, они движутся с довольно большой скоростью. Аналогичным образом движутся медузы, только вместо струи они выбрасывают вихревое кольцо. Заметим, кстати, что реактивный принцип движения был применен на кораблях: вода при помощи насоса засасывалась спереди и затем выталкивалась сзади. При большом расходе воды и малой скорости выталкивания коэффициент полезного действия получался весьма хорошим (§ 19). Однако такой же результат значительно проще достигается при помощи гребного винта¹.

¹Упомянем в связи с этим о пропеллере Корта, представляющем собой винтовое колесо, помещенное в самом узком поперечном сечении расширяющегося сопла. Тяга, создаваемая таким винтом, равна тяге обычного винта с диаметром, равным диаметру выходного сечения сопла. Преимущество же пропеллера Корта заключается в том, что для приведения его во вращение применимы более быстроходные двигатели и, кроме того, его можно устанавливать на более выгодном шаге. Эти обстоятельства делают удобным его применение на буксирных пароходах, особенно при плавании в каналах, где обычные гребные винты, создавая сильно завихренную струю, разминают дно.

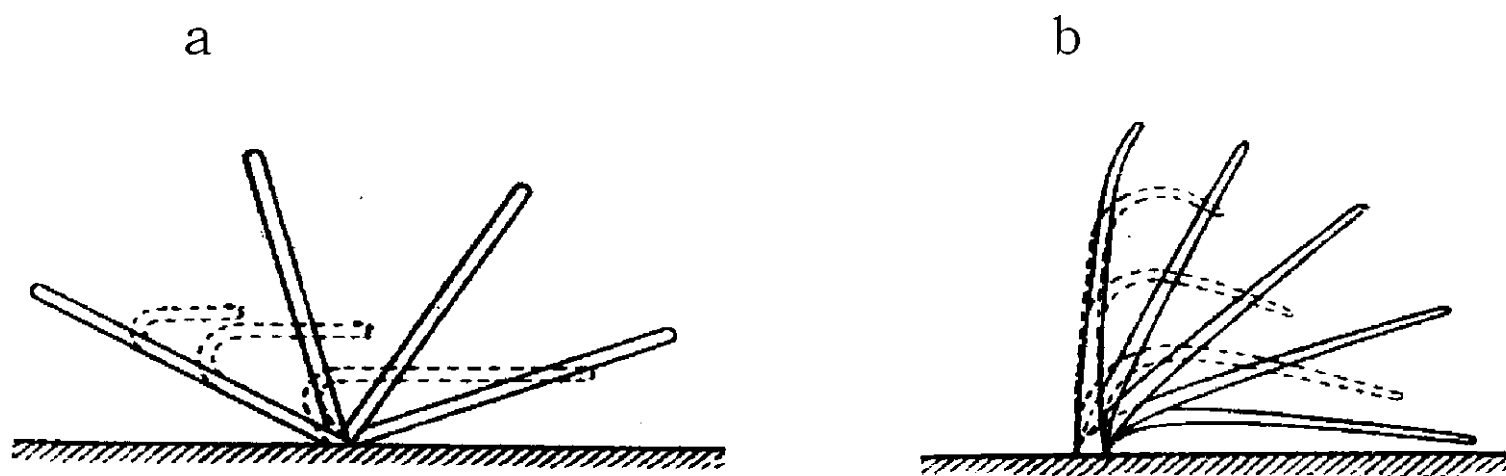


Рис. 185. Движение ресниц инфузорий

В заключение упомянем о создании тяги путем движения ресниц у микроскопических живых существ, например у инфузорий. Числа Рейнольдса при движении инфузорий ничтожно малы по сравнению с единицей, следовательно, влияние инерции здесь совершенно исключается, и поэтому попытка объяснения движения инфузорий на основе механизма движения птиц и рыб недопустима. Правильное объяснение возможно только с точки зрения явлений, происходящих при медленных движениях в очень вязкой жидкости. Как показывает микроскопическая киносъемка¹, инфузории при движении сгибают свои ресницы, приближая их к поверхности тела, выносят их в таком положении вперед, затем распрямляют их и оттягивают в выпрямленном состоянии назад (рис. 185, а). Это приводит к тому, что при движении ресниц назад перемещается больше жидкости, чем при движении ресниц вперед. Несколько иная форма движения ресниц показана на рис. 185, б.

§ 21. Турбины, насосы и воздуходувки. *Водяные турбины* преобразуют мощность воды, падающей с некоторой высоты H , в мощность на вращающемся вале турбины. Насосы, наоборот, преобразуют мощность, имеющуюся на вале, в работу, необходимую для перемещения воды. *Воздуходувки* выполняют аналогичную задачу для воздуха. Воздуходувки, при работе которых создается небольшая разность давлений, называются также *вентиляторами*.

Если объемное количество жидкости, поступающее в турбину в одну секунду, равно Q , а удельный вес жидкости равен γ , то располагаемой мощностью будет

$$L_0 = \gamma Q H.$$

Кроме турбин для использования мощности падающей воды применяются *водяные колеса*. Характерным признаком водяных колес яв-

¹ Gray J., Giliary movement. Gamdridge, 1928.

ляется следующее: вода, попадающая в пространство между лопатками колеса, практически приходит здесь в состояние покоя. В турбинах же вода в пространстве между лопатками рабочего колеса движется относительно лопаток. В водяных колесах используется главным образом весовое действие падающей воды, а также ударное действие воды, вступающей в пространство между лопатками. На дальнейших подробностях мы не будем останавливаться, так как в настоящее время водяные колеса следует рассматривать как совершенно устаревшие машины, к тому же не представляющие особого интереса с точки зрения гидродинамики.

Работа турбин основана на совершенно ином принципе — они преобразуют в полезную мощность кинетическую энергию движущейся воды. При помощи специального направляющего приспособления вода, движущаяся с большой скоростью, вводится без удара в пространство между лопатками рабочего колеса; эти лопатки отклоняют поток воды от своего первоначального направления так, что он покидает рабочее колесо с возможно меньшей абсолютной скоростью. При такого рода движении воды вредные потери энергии получаются небольшими, следовательно, почти вся разность между кинетической энергией воды, поступающей в рабочее колесо, и кинетической энергией воды, выходящей из рабочего колеса, преобразуется в мощность на рабочем вале турбины.

Преобразование мощности падающей воды в мощность на вале турбины возможно двумя способами. При первом способе вся мощность напора воды еще до входа в рабочее колесо преобразуется целиком в кинетическую энергию струи, направляемой при помощи специального приспособления в рабочее колесо. Такие турбины называются *турбинами равного давления*. Обозначим абсолютную скорость воды, поступающей в рабочее колесо, через c_1 , а окружную скорость вращения рабочего колеса — через u_1 ; тогда скорость воды относительно колеса w будет равна геометрической разности скоростей c_1 и u_1 (рис. 186). Входные кромки лопаток имеют направление, приближенно совпадающее с направлением скорости w_1 . Войдя в пространство между двумя лопатками, поток воды отклоняется от своего первоначального направления и выходит с другой стороны лопатки в направлении w_2 . Относительная скорость w_2 по своей величине может быть принята равной скорости w_1 , так как

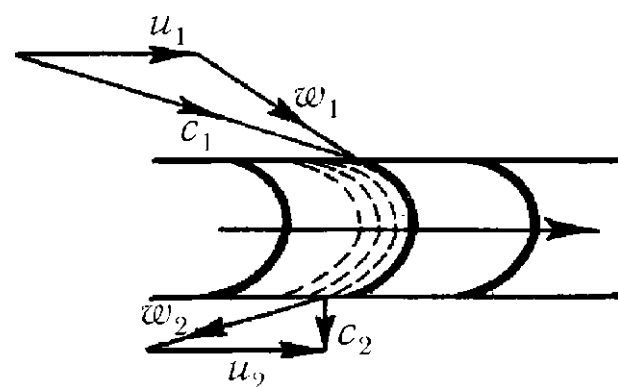


Рис. 186. План скоростей турбины равного давления

потеря энергии на трение о поверхность лопатки весьма мала. Абсолютная скорость c_2 потока при выходе из лопатки получается построением треугольника скоростей по известным w_2 и u_2 ; при наиболее выгодном режиме работы турбины она очень мала и направлена почти перпендикулярно к системе лопаток.

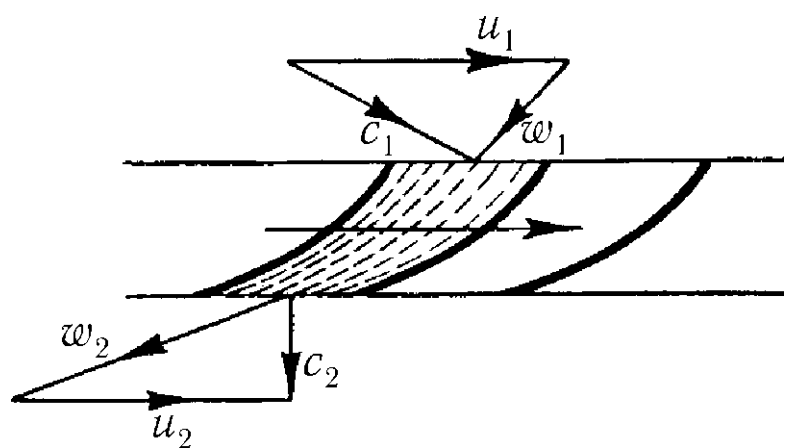


Рис. 187. План скоростей турбины избыточного давления

При втором способе использования мощности напора только незначительная ее часть преобразуется в кинетическую энергию до входа в рабочее колесо турбины, следовательно, вода поступает в рабочее колесо, имея значительное избыточное давление. Поэтому такие турбины называются *турбинами избыточного давления*. Относительная скорость воды w_1 при ее движении в суживающемся пространстве между лопатками

значительно увеличивается, на что и расходуется оставшаяся часть мощности напора. На наиболее выгодном режиме работы турбины абсолютная скорость c_2 воды при выходе из рабочего колеса также очень мала и направлена почти перпендикулярно к системе лопаток (рис. 187).

В турбинах избыточного давления пространство между лопатками по необходимости заполняется водой целиком. В турбинах же равного давления лопаткам рабочего колеса придают такую форму, чтобы поток воды, протекающей между ними, имел свободную, граничащую с воздухом, поверхность. Следовательно, лопатки соприкасаются с водой только с одной стороны, что приводит к значительному уменьшению трения по сравнению со случаем двустороннего соприкосновения.

Если не учитывать трения и центробежного действия в рабочем колесе, то для связи между напором H и скоростями c и w получается соотношение:

$$H = \frac{1}{2g}(c_1^2 + w_2^2 - w_1^2). \quad (134)$$

Величина $\frac{c_1^2}{2g}$ представляет собой часть напора H , используемую в направляющем приспособлении, а величина $\frac{1}{2g}(w_2^2 - w_1^2)$ — часть напора H , используемую в рабочем колесе (для $w_2 = w_1$, т. е. для турбины равного давления последняя часть равна нулю).

Теория турбин, основанная на предположении, что все частицы воды получают в рабочем колесе одинаковые отклонения, исходит от

Эйлера. Им же дан вывод так называемого *турбинного уравнения*, являющегося следствием теоремы о моменте количества движения (см. § 13 предыдущей главы). Обозначим составляющие абсолютных скоростей, перпендикулярные к радиусу вращения, при входе в рабочее колесо и при выходе из него через c_{u_1} и c_{u_2} , как это принято в теории турбин (вместо $w_1 \cos \beta_1$ и $w_2 \cos \beta_2$, как это было сделано в § 13 предыдущей главы). Тогда вращающий момент на вале турбины будет

$$D = \rho Q (r_1 c_{u_1} - r_2 c_{u_2}). \quad (135)$$

Полезная мощность равна

$$L = D\omega,$$

или, так как $r_1\omega = u_1$ и $r_2\omega = u_2$,

$$L = \rho Q (u_1 c_{u_1} - u_2 c_{u_2}). \quad (136)$$

С другой стороны, полезная мощность равна

$$L = \eta L_0 = \eta \gamma Q H, \quad (137)$$

где η есть гидравлический коэффициент полезного действия. Приравняв правые части равенств (136) и (137) и имея в виду, что $\gamma = \rho g$, мы получим:

$$\eta = \frac{u_1 c_{u_1} - u_2 c_{u_2}}{gH}. \quad (138)$$

Если вода выходит из пространства между лопатками точно в направлении радиуса вращения, то составляющая c_{u_2} равна нулю, следовательно, в этом случае

$$u_1 c_{u_1} = \eta gH.$$

Из этого уравнения и из построений, сделанных на рис. 186 и 187, следует, что при равных напорах окружная скорость турбины избыточного давления значительно больше, чем у турбины равного давления. По этой причине при небольших и средних напорах устанавливаются всегда турбины избыточного давления, а при больших напорах — турбины равного давления.

С точки зрения современной гидродинамики предположение об одинаковом отклонении всех частиц воды в рабочем колесе турбины является неправильным. В настоящее время пространство между лопатками рабочего колеса турбины избыточного давления не рассматривают больше как канал, в котором течет жидкость; вместо этого

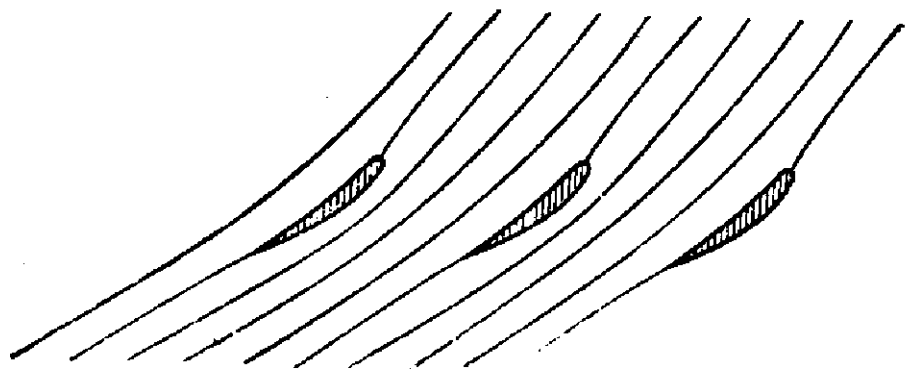


Рис. 188. Течение около лопаток

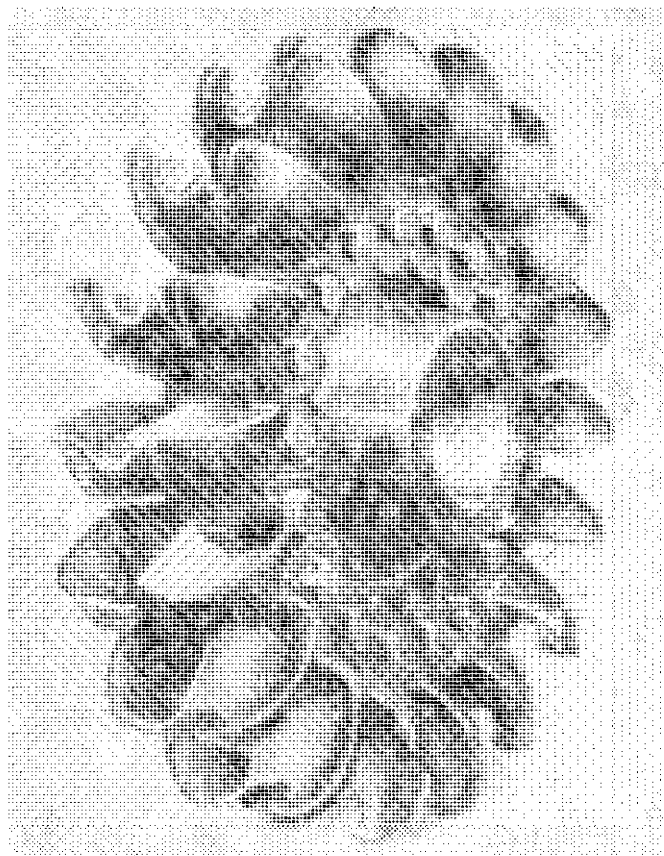


Рис. 189. Колесо Пельтона

каждая лопатка принимается за крыло, обтекаемое потоком жидкости, причем считается, что крыло и поток влияют друг на друга¹. Правильное представление о работе современных быстроходных турбин, в которых расстояние между отдельными лопатками весьма большое, можно получить только на основе гидродинамической теории. Однако даже и в тех случаях, когда движение воды между лопатками можно рассматривать как движение в каналах, средние направления движения частиц воды при входе в рабочее колесо и выходе из него отнюдь не совпадают с направлениями касательных к контуру лопаток при входе и выходе, как это принимается в старой теории. Только те частицы воды, которые движутся непосредственно около поверхности лопаток, получают отклонение, равное углу между направлениями указанных касательных. Остальные же частицы отклоняются на меньшие углы. Точные закономерности движения воды между лопатками исследованы в настоящее время для случая плоского течения². На рис. 188 изображена картина плоского течения около системы лопаток. Из этой картины ясно видно, что линии тока в промежутках между лопатками откло-

¹См. Bauersfeld, Zeitschr. d. Ver. Deutsch. Ing., т. 66 (1922), стр. 461 и 514, или Prandtl, там же, т. 65 (1921), стр. 959; далее Weinig F., Die Strömung um die Schaufeln von Turbomaschinen, Leipzig 1935; см. также пример е) в §13 гл. II настоящей книги.

²См. Busemann, ZAMM, т. 18 (1928), стр. 372 (в этой статье имеется подробная библиография); далее Betz A. u. I. Flüge – Lotz, Ing.-Arch., т. 9 (1938), стр. 499.

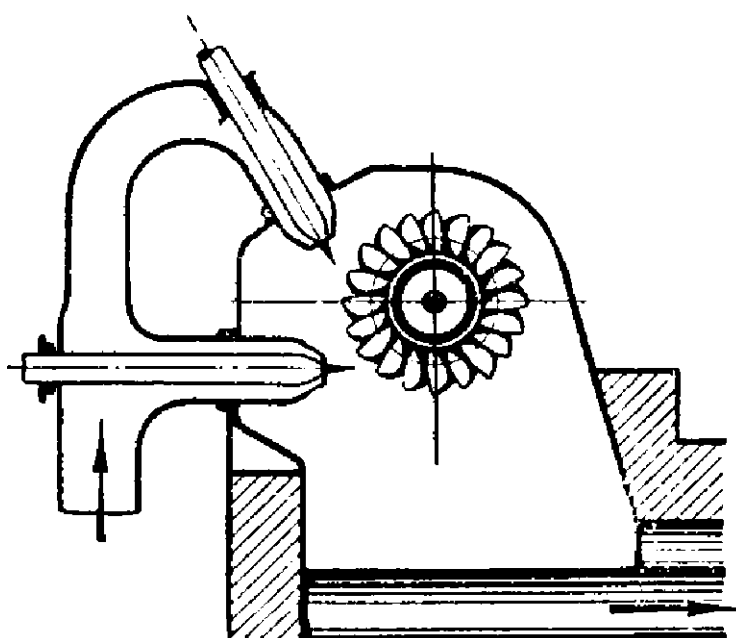


Рис. 190. Схема установки колеса Пельтона; слева — два сопла

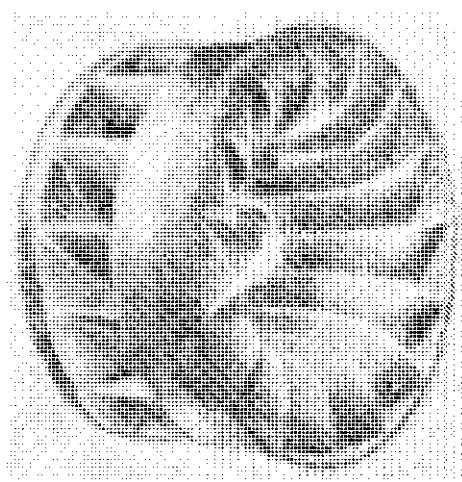


Рис. 191. Колесо Фрэнсиса

няются на углы, меньшие угла между направлениями входа и выхода потока непосредственно около лопаток.

Какой вид в действительности имеют рабочие колеса современных турбин, показывают рис. 189, 191 и 192. На рис. 189 изображена современная конструкция так называемого *колеса Пельтона*, применяемого в качестве рабочего колеса в турбинах равного давления. Одна или несколько струй воды с круглым поперечным сечением направляются на острые выступы в середине лопаток, хорошо заметные на рис. 189 слева внизу. Попав на такой выступ, поток воды разделяется и попадает в правую и левую впадины лопатки, из которых он затем выходит, отклонившись почти на 180° . Наивыгоднейший эффект получается при скорости движения колеса, равной приблизительно половине скорости струи воды, падающей на колесо. На рис. 190 показана упрощенная схема установки колеса Пельтона и направляющего аппарата в виде двух сопел. На рис. 191 изображена обычная форма так называемого *колеса Фрэнсиса*, применяемого в качестве рабочего колеса в турбинах избыточного давления. Вода из направляющего аппарата, охватывающего рабочее колесо, поступает в отверстия, заметные на рисунке слева, и выходит через другие концы каналов, заметные на рисунке справа. Движение частиц воды внутри колеса происходит по траекториям, изогнутым в пространстве (на рис. 188 эти траектории изображены для случая плоского течения). Третьим видом рабочего колеса является *колесо Каплана* (рис. 192), позволяющее получить большую скорость вращения турбины при сравнительно небольшом напоре. Направляющий аппарат в турбине Каплана такой же, как и у турбины

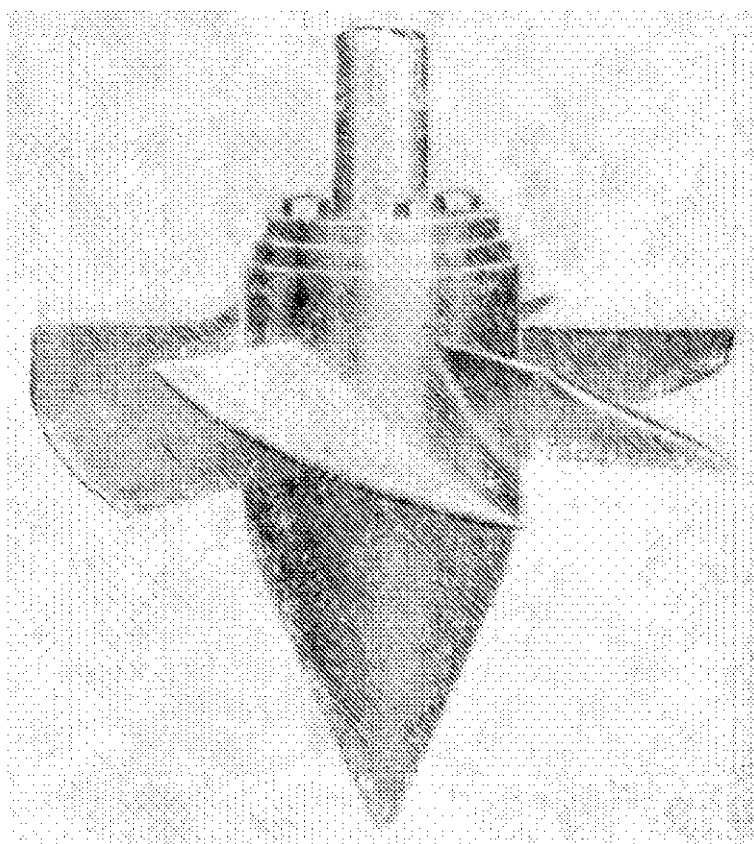


Рис. 192. Колесо Каплапа

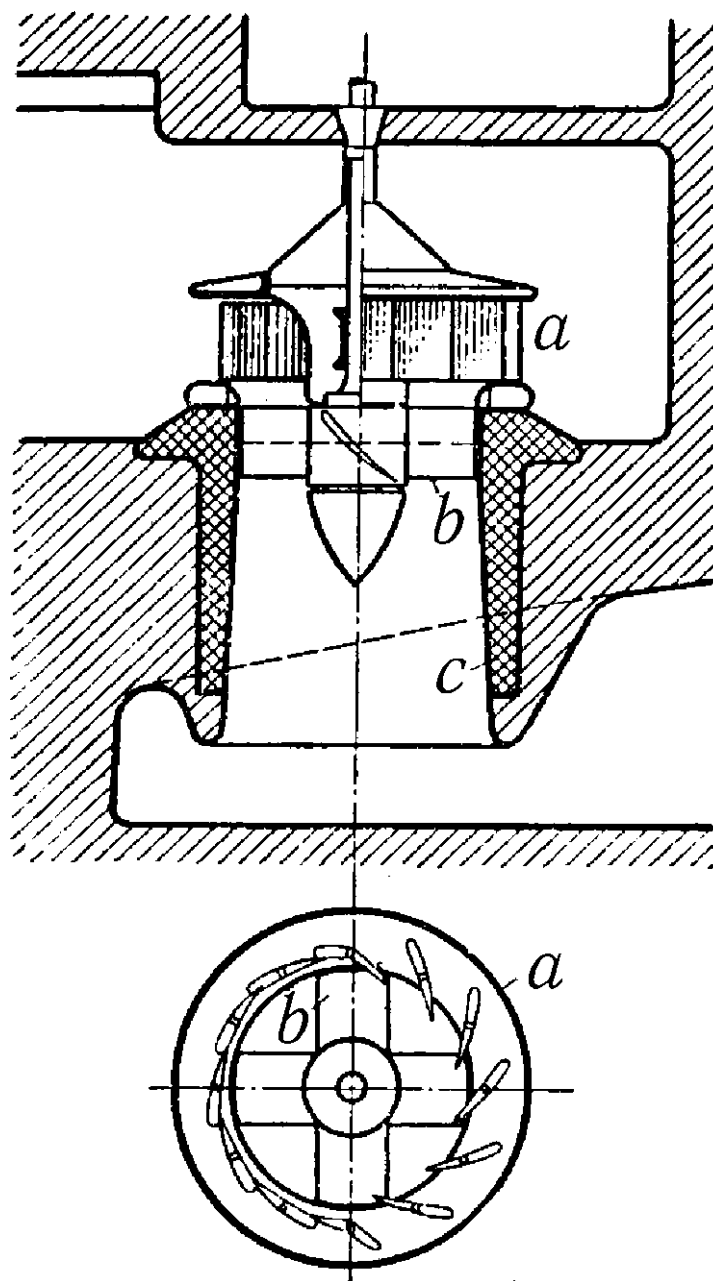


Рис. 193. Турбина Каплана. а — направляющее колесо; б — рабочее колесо; с — всасывающая труба, направляющие лопатки в правой половине горизонтальной проекции изображены полностью в открытом состоянии, а в левой половине — в закрытом состоянии

Фрэнсиса; он создает спиральное движение воды, направленное снаружи внутрь. Вода проходит через колесо Каплана в осевом направлении. Колесо Каплана является видоизменением колеса Фрэнсиса. В самом деле, если в последнем сохранить только крайние внешние части лопаток (на рис. 191 они хорошо видны справа), а все остальное отбросить, то получится колесо Каплана. Схема турбины Каплана изображена на рис. 193.

В турбинах избыточного давления для уменьшения энергии выходящей из турбины воды всегда устраивается всасывающая труба (см. рис. 193), обычно немного расширяющаяся книзу. Нижнее отвер-

стие этой трубы погружается в воду; этим достигается наиболее полное использование напора.

Часто полезная мощность, развиваемая турбиной, больше той мощности, которая необходима в данный момент в установках, связанных с турбиной. Для регулирования полезной мощности изменяется количество воды, поступающей в рабочее колесо. Обычно это выполняется при помощи автоматического устройства и притом так, что число оборотов турбины остается постоянным. В турбинах равного давления регулирование притока воды производится при помощи игольчатого клапана, автоматически увеличивающего или уменьшающего поперечное сечение сопла (рис. 190). В турбинах избыточного давления поступление воды в рабочее колесо изменяется путем поворота лопаток направляющего аппарата (рис. 193). В турбинах Каплана регулирование производится иногда при помощи изменения угла установки лопаток рабочего колеса.

Коэффициенты полезного действия хороших современных турбин колеблются в пределах от 0,85 до 0,90. Заметим, кстати, что паровые турбины используют подаваемый пар также либо при равном давлении, либо при избыточном давлении. Конечно, вследствие сжимаемости пара картина явлений, происходящих внутри рабочего колеса паровой турбины, более сложная, чем в водяной турбине.

Крыльчатые колеса, подобные колесам Фрэнсиса и Каплана, используются также в насосах, которые в известной степени являются обращением турбин избыточного давления. Насосы, в которых жидкость проходит через колесо в осевом направлении, называются *винтовыми*; насосы с радиальным движением жидкости называются *центробежными*. Для подачи воздуха существуют *винтовые* и *центробежные* *воздуходувки*. Винтовые насосы и воздуходувки по способу своего действия сходны с гребным винтом; наиболее простые из них отличаются от гребного винта только тем, что они помещаются внутри трубы или в стенке, разделяющей два пространства. При помощи направляющего колеса кинетическая энергия вращательного движения, созданного пропеллером насоса, может быть в значительной своей части опять преобразована в давление (рис. 194).

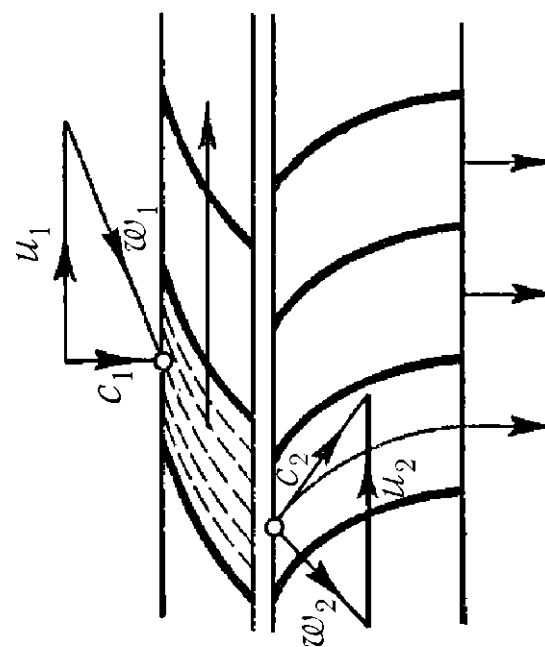


Рис. 194. План скоростей винтового насоса. Слева — рабочее колесо, справа — направляющее колесо

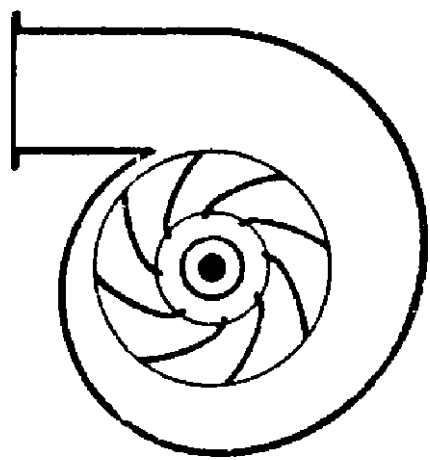


Рис. 195. Центробежный насос со спиральной камерой

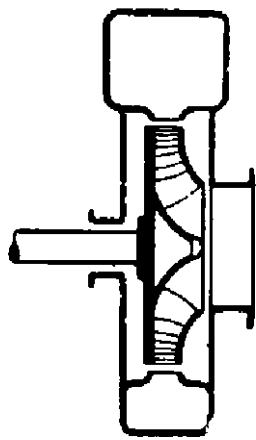


Рис. 196. Центробежный насос высокого давления

В центробежных насосах и воздуходувках обычное действие лопаток колеса усиливается центробежным действием во вращающихся каналах между лопатками. В самом деле, если система каналов вращается с угловой скоростью ω , то возникающая при этом центробежная сила действует как массовая сила и влечет за собой увеличение давления на величину $\frac{\rho\omega^2}{2}(r_2^2 - r_1^2)$ как в состоянии относительного покоя, так и при установившемся движении [в последнем случае — вдоль линии тока (см. § 10 гл. I или § 8 гл. V)]. Лопатки колеса центробежного насоса могут быть направлены вдоль радиуса, а также загнуты вперед или назад относительно направления вращения. Насосы с лопатками, загнутыми назад, обладают наилучшим коэффициентом полезного действия, зато остальные дают несколько большее давление. В простых конструкциях центробежных насосов и воздуходувок система направляющих лопаток заменяется спиральной камерой (рис. 195). В более совершенных конструкциях, особенно в насосах высокого давления и турбокомпрессорах, в которых имеется несколько колес, поставленных одно за другим, устраивается специальная система направляющих лопаток (рис. 196).

Если насос подает жидкость на высоту h в количестве Q в одну секунду, то его полезная мощность равна

$$L_0 = \gamma Qh, \quad (139)$$

где γ есть удельный вес жидкости. В случае воздуходувки должна быть учтена работа, расходуемая на сжатие воздуха; если эта работа мала, так что ею можно пренебречь, то для определения полезной мощности можно воспользоваться формулой (139), заменив в ней величину γh

разностью $p_2 - p_1$ статических давлений до и после воздуходувки; тогда мы получим:

$$L_0 = Q(p_2 - p_1). \quad (140)$$

Если воздух засасывается в воздуходувку из пространства с давлением p_0 через короткую трубу или совсем без трубы, то можно принять, что

$$p_1 = p_0 - \frac{\rho}{2}w^2,$$

где w есть средняя скорость во всасывающем отверстии. Кинетическая энергия массы воздуха, выбрасываемой из воздуходувки, может быть частично уловлена при помощи диффузора (расширяющейся трубы), так как таким путем, при условии, что противодействие постоянное, давление p_2 позади воздуходувки уменьшается. В воздуходувках для больших разностей давлений работой сжатия пренебрегать уже нельзя и для подсчета полезной мощности следует пользоваться такими же формулами, как и для поршневых воздуходувок.

Мощность L , необходимая для работы насоса или воздуходувки, больше полезной мощности L_0 , так как часть энергии расходуется на преодоление гидродинамического сопротивления и трения в подшипниках. Отношение

$$\eta = \frac{L_0}{L} \quad (140)$$

называется *коэффициентом полезного действия насоса или воздуходувки*. Если пренебречь трением в подшипниках, то потребной мощностью будет

$$L = D\omega,$$

где D есть вращающий момент на вале насоса или воздуходувки. Его вычисление и для винтовых и для центробежных машин можно выполнить при помощи формулы (135). В большинстве случаев $c_{u_1} = 0$, поэтому

$$D = \rho Q r_2 c_{u_2}, \quad (142)$$

и так как $r_2 \omega = u_2$, то

$$L = \rho Q u_2 c_{u_2}. \quad (143)$$

Подставляя это значение L , а также значение L_0 , определяемое формулой (139), в равенство (141), мы получим формулу для определения h :

$$h = \frac{\eta u_2 c_{u_2}}{g}. \quad (144)$$

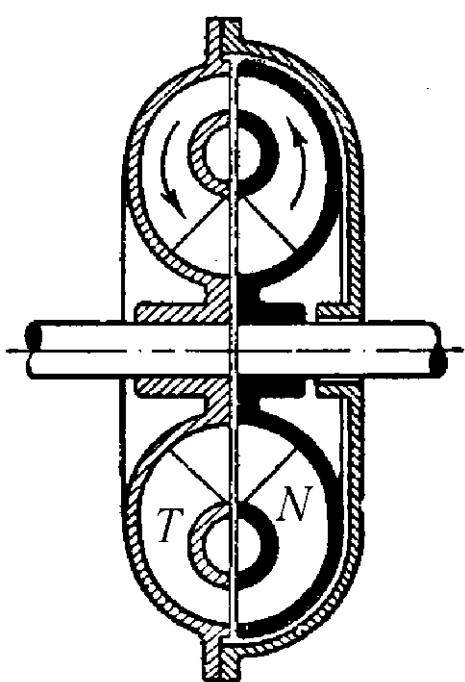


Рис. 197. Гидравлический привод: N — насос; T — турбина

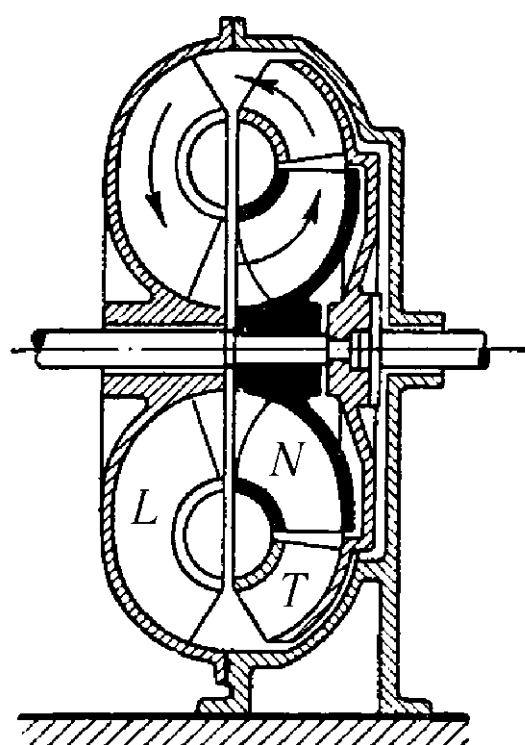


Рис. 198. Гидравлический привод: N — насос; T — турбина; L — неподвижное направляющее колесо

Скорость c_{u2} , необходимая для подсчета по этой формуле, определяется непосредственно из треугольника скоростей, а для коэффициента полезного действия берется ориентировочное значение.

С турбинами и насосами известное сходство имеют *гидравлические приводы*, впервые введенные в практику Фёттингером¹. Они состоят из насоса и турбины, помещенных в одном и том же корпусе, и служат для переключения мощности с одного вала на другой. Переключение производится при помощи наполнения или, наоборот, освобождения корпуса от жидкости; в качестве рабочей жидкости применяется обычно жидкое масло. На рис. 197 и 198 изображены два типа гидравлических приводов.

В первом из них (рис. 197) вращающий момент передается с одного вала на другой непосредственно, во втором же (рис. 198) между быстро работающим насосом и медленно вращающейся турбиной помещена система неподвижных лопаток, воспринимающая разность обоих моментов. Коэффициент полезного действия гидравлических приводов весьма высокий, так как в них отсутствует обычная потеря энергии при выходе потока из направляющего канала.

§ 22. Постановка экспериментальных исследований по гидродинамике и аэродинамике. а) *Создание безупречных условий*

¹Föttinger H., Jahrb. d. Schiffbautechn. Ger., т. 11 (1910), стр. 157.

опыта. Экспериментальное исследование движения какого-нибудь тела относительно покоящейся жидкости возможно двумя способами: можно заставить тело двигаться в покоящейся жидкости или, наоборот, можно заставить набегать на неподвижное тело равномерный поток жидкости. Первый способ особенно пригоден для исследования движения тел в воде и используется при испытании моделей судов в специальных гидродинамических каналах.

Модель судна, изготавливаемая обычно из парафина, прикрепляется к тележке, установленной на рельсах над каналом. Затем тележка приводится в движение вдоль канала с той или иной скоростью. Движущаяся тележка буксирует за собой модель, причем возникает определенное сопротивление, измеряемое при помощи специального прибора. Гидродинамический канал должен быть достаточно широким и глубоким, так как в противном случае на результаты измерений будут сильно влиять возмущения, обусловленные близостью стенок. При более точной постановке опытов делаются самоходные модели судов, приводимые в движение винтами.

При исследовании моделей судов особое значение имеет сохранение подобия волн, вызываемых движением модели и судна в натуре. Для этой цели скорости движения модели и судна в натуре должны относиться друг к другу как корни квадратные из длин модели и судна в натуре (так называемый *закон подобия Фруда*; согласно § 13 гл. III длины волн пропорциональны длинам модели и судна в натуре). Одновременное соблюдение подобия в отношении трения невозможно, так как для этого необходимо, чтобы для обоих движений были одинаковы числа Рейнольдса, что несовместимо с соблюдением закона подобия в отношении волн. Поэтому от соблюдения подобия в отношении трения при испытании моделей судов приходится отказываться. Для того чтобы обусловленные этим ошибки были малы, применяются возможно большие по размерам модели.

Для применения в воздухе метод буксировки непригоден по следующей причине: исследуемая модель всегда значительно тяжелее вытесняемой ею массы воздуха, вследствие чего массовые силы, возникающие при случайных небольших возмущениях модели, настолько превышают силы, подлежащие измерению, что результаты измерения получаются очень неточными. Кроме того, случайные отклонения весов, измеряющих аэродинамические силы и движущихся в той же среде, что и модель, искажают результаты измерений значительно сильнее, чем при гидродинамических исследованиях, когда весы движутся в воздухе, а модель — в воде. Поэтому для аэродинамических исследований всегда применяется второй из указанных выше способов: исследуемое

тело оставляется неподвижным и обдувается струей воздуха, создаваемой мощным вентилятором. Эта струя должна быть очень однородной в пространстве и равномерной во времени и должна иметь настолько большое поперечное сечение, чтобы исследуемое тело не только умещалось целиком внутри нее, но и оставалось при этом на достаточном расстоянии от ее границ. При несоблюдении последнего условия возмущения, исходящие от тела, доходят до границ струи недостаточно ослабленными, и результаты измерения получаются иными, чем в неограниченном воздушном пространстве.

Поток воздуха, набегающий на исследуемое тело, может быть осуществлен либо в виде струи, движущейся в закрытой трубе, либо в виде свободной струи, пронизывающей пространство, в котором воздух неподвижен. В первом случае, если стенки трубы параллельны, трение потока о стенки приводит к падению давления в направлении течения. Действие этого падения давления на тело со сравнительно большим объемом V (например, на модель дирижабля) сходно с действием поддерживающей силы в воде, возникающей вследствие уменьшения давления кверху, следовательно, оно приводит к появлению горизонтальной силы, равной $V \frac{\partial p}{\partial x}$ и увеличивающей сопротивление. Можно избежать этого явления, если сделать трубу не с параллельными стенками, а немного расширяющимися; тогда давление вдоль оси трубы будет оставаться постоянным (строго говоря, только для одной определенной скорости). В случае свободной струи давление на границах струи постоянное, поэтому только что указанная трудность отпадает, но зато возможная для использования часть свободной струи меньше, чем в закрытой трубе. Это объясняется тем, что свободная струя на своих границах постепенно смешивается с окружающим неподвижным воздухом; правда, пограничный слой, образующийся на стенках закрытой трубы, также постепенно проникает внутрь трубы, но это происходит значительно медленнее, чем смешение струи с неподвижным воздухом. Так как открытая струя легко доступна для установки в ней исследуемых тел, то работа в ней, конечно, удобнее, чем в закрытой трубе. Установки, создающие закрытую или свободную струю воздуха для аэродинамических экспериментов, носят название *аэродинамических труб*.

Для того чтобы получить свободную струю воздуха, возможно более однородную и свободную от завихрений, проще всего производить разгон воздуха от очень малой скорости до скорости, необходимой для эксперимента, на коротком участке. Это легко достигается при помощи

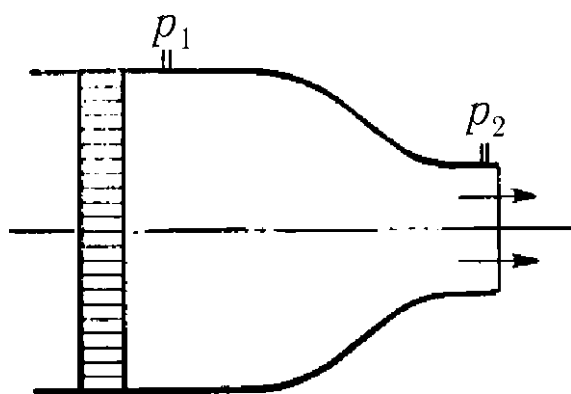


Рис. 199. Конфузор

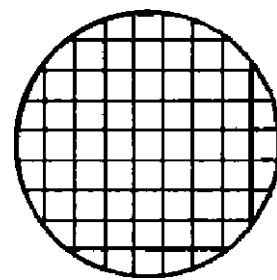


Рис. 200. Выпрямляющая решетка

суживающейся круглой трубы — *конфузора* (рис. 199). При переходе от широкого входного сечения конфузора к узкому выходному сечению происходит падение давления на величину $p_1 - p_2$, что приводит к соответствующему увеличению кинетической энергии движущихся частиц воздуха. При этом весьма важно, чтобы та небольшая кинетическая энергия, с которой воздух приходит в широкое поперечное сечение конфузора, распределялась между отдельными частицами не слишком неравномерно. Если, например, отношение скоростей во входном и выходном поперечном сечениях равно 1:5, то отношение динамических давлений (и кинетических энергий) будет 1:25, следовательно, каждая частица воздуха благодаря падению давления получает $24/25$ своей окончательной кинетической энергии. Это означает, что колебания начальной энергии в размере 25% влекут за собой колебания окончательной энергии в размере 1%, а колебания относительной скорости — в размере $1/2\%$. Кроме того, весьма важно, чтобы поток, вступающий в конфузор, был свободен от вращений; для этой цели во входном сечении устанавливается выпрямляющая решетка, т.е. система коротких труб с параллельными стенками (рис. 200). Роль этой решетки ясна из следующих соображений. Угловая скорость массы воздуха, вращающейся вокруг оси, параллельной направлению потока, при сужении поперечного сечения потока в n раз увеличивается также в n раз¹. Так как при этом диаметр потока уменьшается в $\sqrt{n}$ раз, то поперечная скорость, равная $r\omega$, увеличивается в $\sqrt{n}$ раз, в то время как продольная скорость увеличивается в n раз. Напротив, угловая скорость вращения вокруг оси, перпендикулярной к направлению потока, при уменьшении поперечного размера вращающейся массы в $\sqrt{n}$ раз, также уменьшается в $\sqrt{n}$ раз, следовательно, в этом случае возмущающая скорость $r\omega$ уменьшается в n раз. Для выравнивания продольных разностей ско-

¹На основании теоремы Гельмгольца, см. § 12 гл. II.

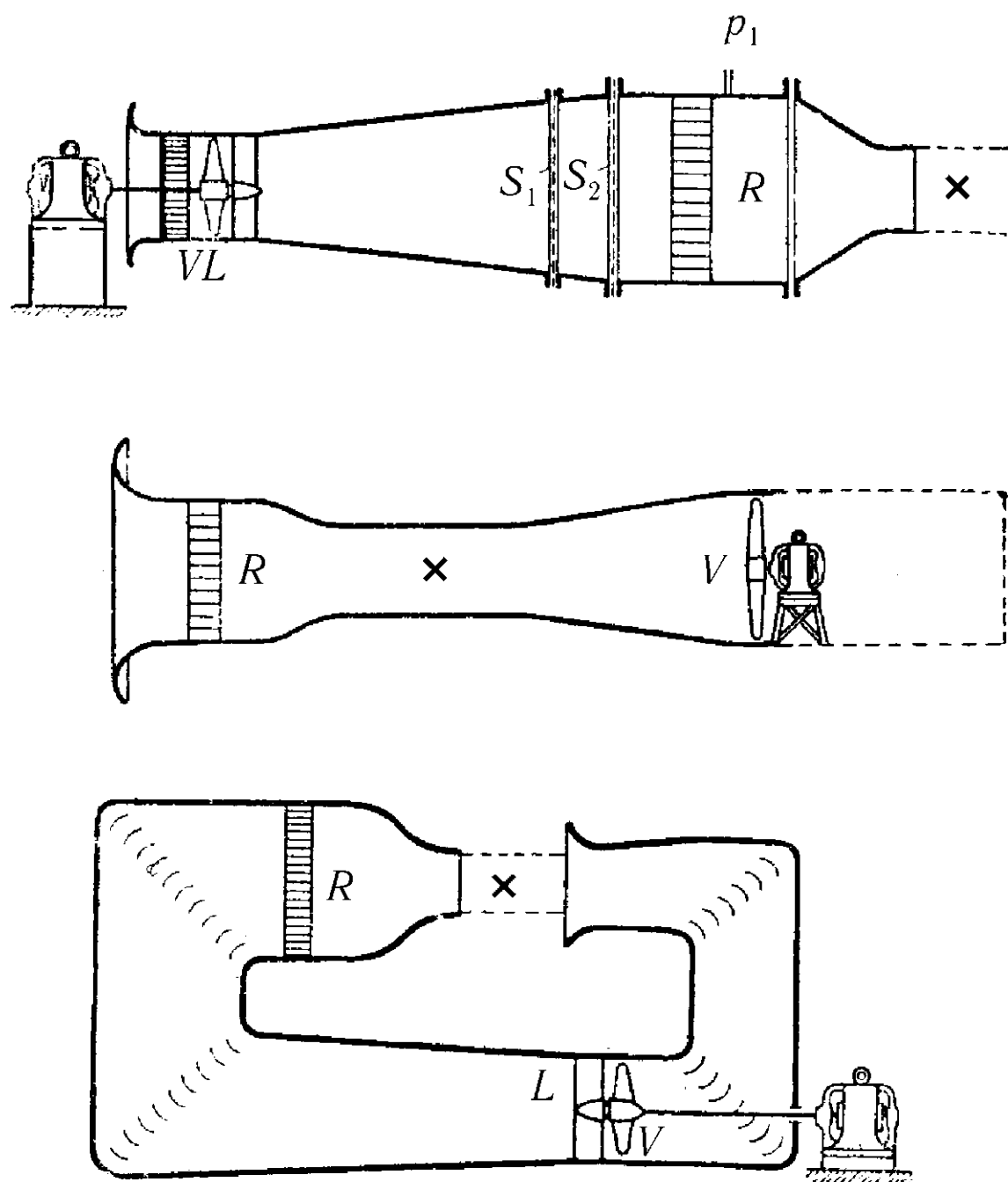


Рис. 201. Различные типы аэродинамических труб. V — вентилятор; L — направляющее колесо, R — выпрямляющая решетка; S — проволочное сито; $\times$ — рабочая часть трубы

ростей применяются также проволочные сита, устанавливаемые перед выпрямляющей решеткой; в необходимых случаях плотность сита делается в разных местах разной.

На рис. 201 изображены три различного типа аэродинамические трубы. Крестиком ($\times$) отмечено то место трубы, в котором подвешиваются исследуемые тела, так называемая *рабочая часть трубы*. Первая из труб (самая верхняя) является трубой открытого типа; струя воздуха, выбрасываемая из этой трубы, после некоторого числа поворотов в том помещении, где установлена труба, опять попадает в сильно завихренном состоянии во входное отверстие, причем отдельные вихри могут иметь разное направление вращения. Вентилятор, засасывая вихрь, имеющий одинаковое с ним направление вращения, усиливает его; наоборот, засасывая вихрь, имеющий противоположное с ним направление вращения, ослабляет его, и в результате в трубе возникают

сильные колебания давления. Во избежание этого перед вентилятором устанавливается выпрямляющая решетка. В трубе закрытого типа (вторая сверху на рис. 201) позади вентилятора установлен специальный обтекатель, обеспечивающий спокойное оттекание воздуха от вентилятора. В трубе открытого типа, но с замкнутым потоком воздуха (нижняя труба на рис. 201), свободная струя, выйдя из конфузора, сразу же всасывается в продолжение трубы, что значительно облегчает работу наблюдателей, освобождая их от сквозняка.

При продувке в аэродинамической трубе, в отличие от случая буксировки в гидродинамическом канале, не существует правила, устанавливающего связь между скоростью и масштабом модели. Строго говоря, следовало бы соблюдать равенство чисел Рейнольдса для модели и тела в натуре. Однако почти во всех случаях это невозможно. В самом деле, если модель в 10 раз меньше тела в натуре, то ее надо было бы продувать со скоростью в 10 раз большей, чем в натуре. Не говоря уже о том, что такие скорости обычно вообще недостижимы, их осуществление привело бы в область сжимаемых потоков (см. гл. IV), для которых критерий подобия совсем иной, чем для сжимаемых потоков. Поэтому и в аэродинамических трубах приходится отказываться от точного соблюдения подобия в отношении трения.

б) *Измерение скоростей и давлений; определение направления потока.* В аэродинамических трубах скорость потока определяется на основании измерения разности давлений $p_1 - p_2$ в двух сечениях трубы (рис. 199) и последующего применения уравнения Бернулли. Можно пользоваться также специальными трубками для измерения скорости (см. рис. 51 на стр. 81).

На практике для измерения скоростей применяются также *крыльчатый анемометр* (рис. 202) и *анемометр с полушариями* (рис. 203), но оба они дают менее точные результаты, чем способ, основанный на измерении разности давлений. Для измерения скорости течения воды применяется *гидрометрическая вертушка* (рис. 204). При пользовании анемометрами или гидрометрической вертушкой наблюдают либо число оборотов счетчика, соединенного с прибором, в течение определенного промежутка времени, например в одну минуту, либо промежуток времени, в течение которого счетчик совершает определенное число оборотов, например, пятьсот. Все эти приборы требуют предварительной тарировки. Для анемометров тарировка производилась раньше на так называемом ротативном станке, т. е. на длинном стержне, вращающемся вокруг вертикальной оси. Анемометр прикреплялся к внешнему концу стержня, который вращался с определенной скоростью. Однако при таком способе тарировки возникали трудно учитываемые не-

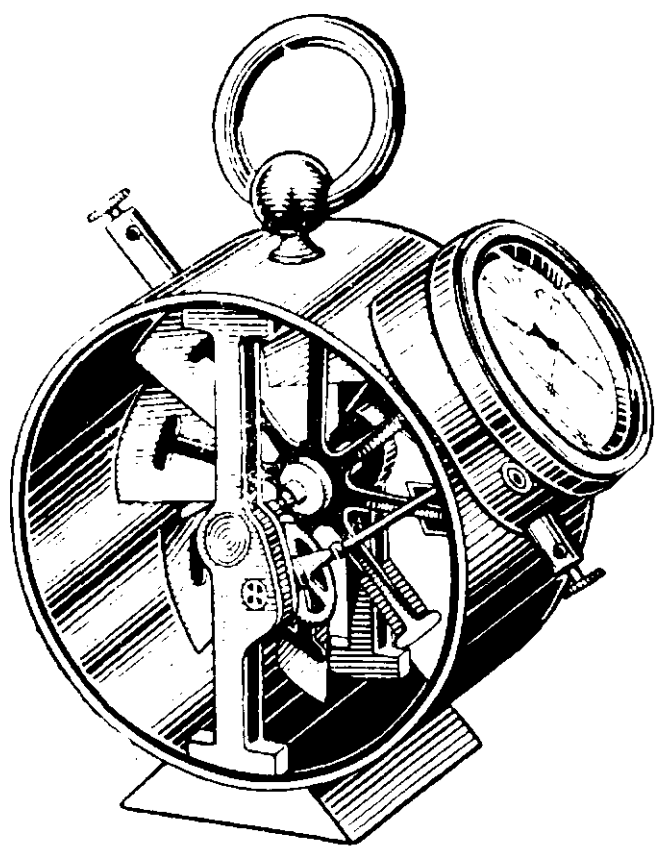


Рис. 202. Крыльчатый анемометр

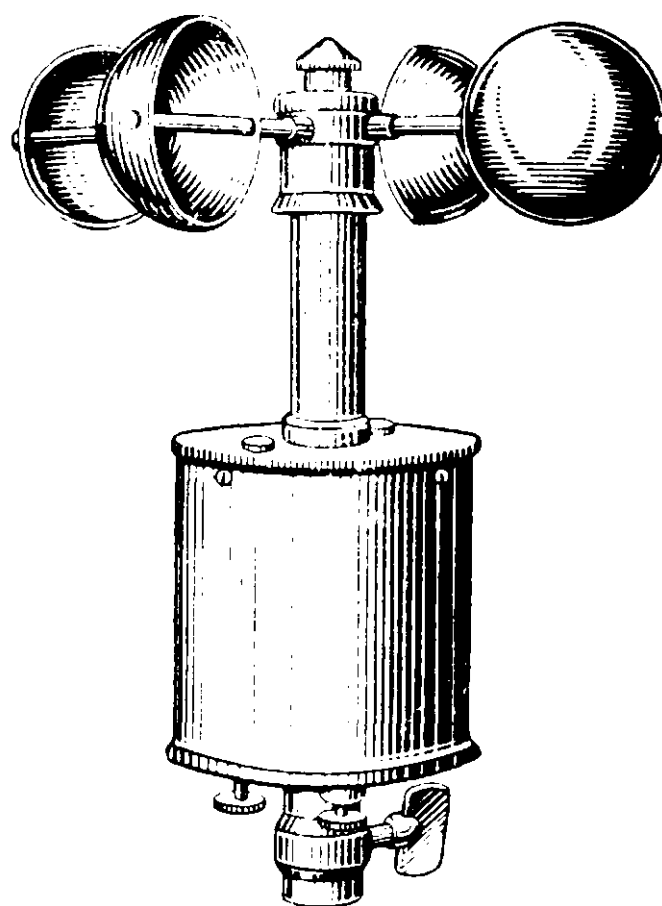


Рис. 203. Анемометр с полушариями

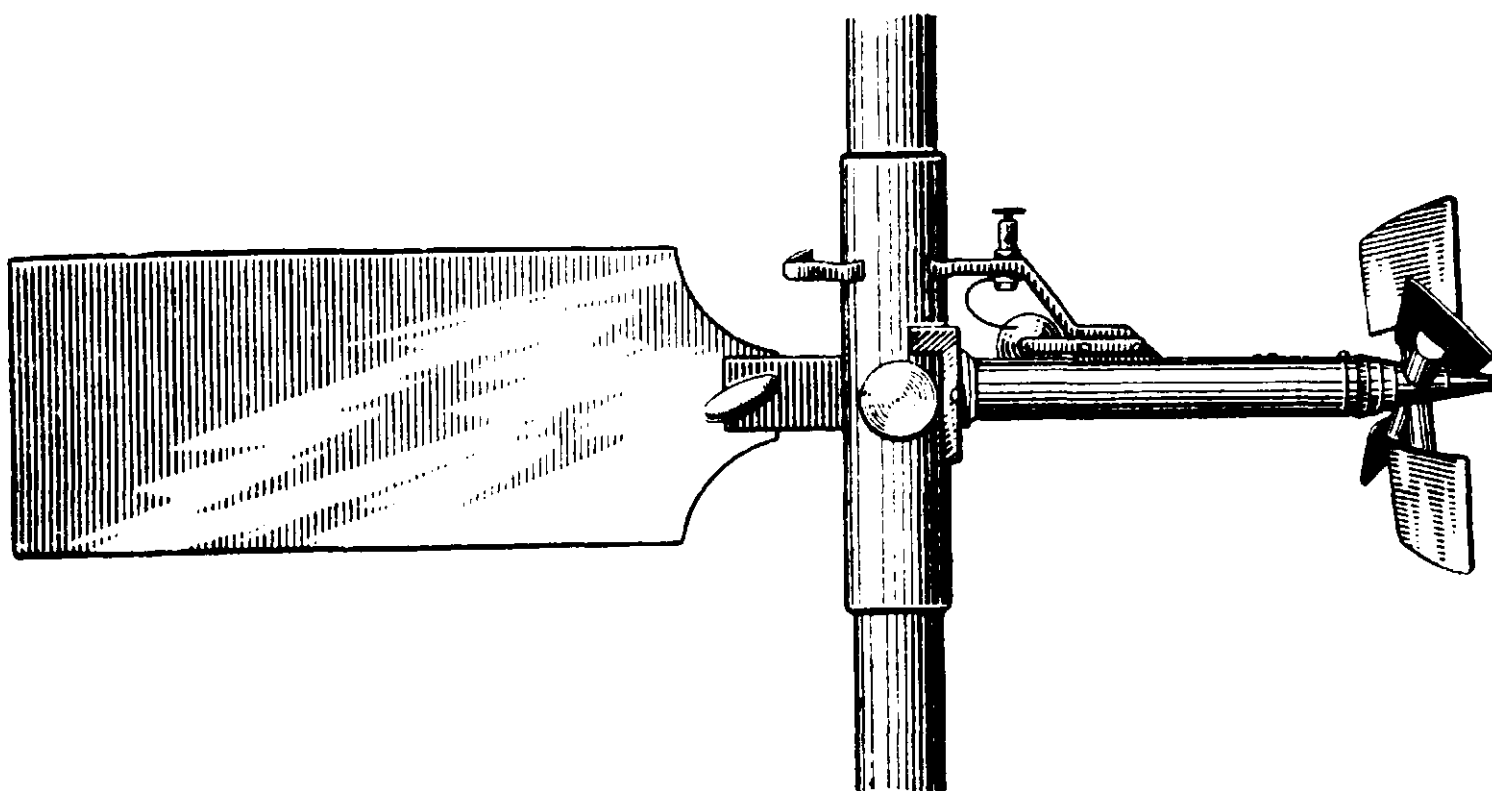


Рис. 204. Гидрометрическая вертушка

точности: во-первых, вследствие центробежных сил, влиявших на вращение крыльчатки или полушарий, а во-вторых, вследствие образования кругового потока воздуха, увлекавшегося прикрепленным к стержню анемометром. Поэтому в настоящее время анемометры тарируются в аэродинамической трубе. Тарировка гидрометрических вертушек

производится в гидродинамических каналах. Для этой цели вертушка прикрепляется к тележке и буксируется ею вдоль канала. Этот способ тарировки значительно надежнее, чем тарировка на ротативном станке.

В настоящее время для измерения скорости воздушных потоков применяются также *термоанемометры*, представляющие собой кусок проволоки, нагреваемой электрическим током. Принцип действия термоанемометра основан на изменении электрического сопротивления проволоки в зависимости от температуры. Набегающий поток воздуха охлаждает накалившуюся проволоку и тем самым изменяет ее электрическое сопротивление. Измерение скорости при помощи термоанемометра возможно двумя способами: при первом способе температура проволоки при помощи регулируемого сопротивления поддерживается на постоянном уровне, и измеряется расход электрической энергии, возмещающий потерю тепла; для тонких проволок этот расход приблизительно пропорционален корню третьей степени из скорости¹; при втором способе наблюдение ведется при постоянной силе тока и падающей температуре проволоки, причем зависимость между сопротивлением проволоки и скоростью воздуха устанавливается путем тарировки. Электрический способ особенно пригоден для измерения малых скоростей воздуха, когда другие способы неприменимы. Кроме того, электрический способ позволяет легко производить измерения скорости воздуха в непосредственной близости от поверхности обтекаемых тел². При применении весьма тонких проволок можно проследить явления, очень быстро протекающие во времени³. Таким путем в недавнее время были детально изучены свойства турбулентных пульсаций (см. § 5, п. g). Для техники экспериментирования в аэродинамических трубах особое значение имеют работы Драйдена и его сотрудников⁴.

Измерение давления производится при помощи манометров и микроманометров (см. § 8 гл. I). Единственная трудность, которая иногда при этом возникает, заключается в передаче давления из трубы в манометр. Наилучшим способом является соединение манометра с исследуемым потоком через отверстие в стенке трубы (см. § 8 гл. II). Если

¹Более подробные указания см. на стр. 541.

²Бюргерс и Ван-дер-Хегге-Цейнен таким путем измеряли скорости в пограничном слое около плоской пластинки, см. Burgers J. M. und v. d. Hegge – Zijnen, Verh. XIII, № 3, 1924, Koningl. Akad. van Wetenschappen, Amsterdam.

³Burgers J. M., Proc. XXIX, № 4, Koningl. Akad. van Wetenschappen, Amsterdam; далее and Fage and Johannsen, Proc. Roy. Soc. London (A), т. 116 (1927)

⁴Dryden H. L., NACA-Report № 320, 342, 448 и 581 (1929–1936).

необходимо измерить давление внутри жидкости, то в поток вводится полый зонд с отверстиями, параллельными потоку; при этом необходимо следить, чтобы ось зонда точно совпадала с направлением потока (допустимы отклонения в несколько градусов). Зонды для измерения давления должны подвергаться тарировке. Для этой цели они вводятся в строго однородную параллельную свободную струю достаточно больших размеров. Находясь в такой струе, они должны показывать давление неподвижного воздуха, окружающего струю, или, точнее, давление, большее указанного на $1/2\%$ от динамического давления в струе, так как вследствие процесса перемешивания внешних частей струи с окружающим воздухом на ее поверхности имеет место именно такое повышенное давление¹. Это обстоятельство необходимо учитывать также и в том случае, когда требуется весьма точная тарировка анемометров и трубок для измерения скорости.

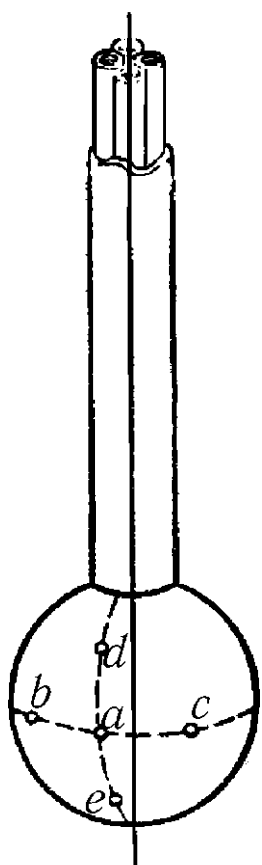


Рис. 205. Шаровая трубка с пятью отверстиями для измерения давления и определения направления тока

Для определения направления потока можно пользоваться так называемым *щупом* — тонким зондом, на конце которого укреплена легкая нить. При достаточной скорости течения эта нить устанавливается довольно точно по направлению потока. Прощупывая весь поток таким зондом, можно легко получить отчетливую картину исследуемого течения. Для получения картины течения вблизи поверхности обтекаемого тела (например, модели самолета или самолета в натуре) к поверхности прикрепляются на равных расстояниях друг от друга тонкие шерстинки. При продувке эти шерстинки устанавливаются по направлению течения и, кроме того, они очень наглядно показывают зоны отрыва потока от поверхности тела. Для определения направления потока применяется также способ прочерчивания линий тока на стенках или дне канала, упомянутый на стр. 199. В аэродинамических трубах весьма удобны дымовые зонды — тоненькие трубочки, из открытого конца которых с небольшой скоростью вытекает дым.

Существуют также специальные зонды для измерения давления, которые позволяют по отсчитанным на манометре разностям давлений

¹Tollmien W., ZAMM, т. 6 (1926), стр. 468

определять направление потока. Наиболее совершенным прибором этого рода является шаровая трубка с пятью отверстиями (рис. 205), предложенная Ван-дер-Хегге-Цей-неном¹. Шар с отверстиями укреплен на державке, вокруг оси которой он может поворачиваться. Отверстия соединены с манометром отдельными трубками, проложенными внутри державки. При измерении шар поворачивается сначала так, чтобы разность давлений в отверстиях b и c сделалась равной нулю; направление, соответствующее такому положению шара, отсчитывается по лимбу. Затем отсчитываются разности давлений $a-d$ и $a-e$ и по ним при помощи заранее построенной (путем тарировки) шкалы определяются динамическое давление и угол, образуемый потоком относительно оси державки. Наконец, при помощи второй шкалы, также заранее построенной, определяется по полученным отсчетам статическое давление².

В тех случаях, когда достаточно определить направление потока в плоскости, можно пользоваться цилиндрической трубкой (рис. 206) с тремя отверстиями a , b , c , соответствующими одноименным отверстиям шаровой трубки³. Наконец, для измерения в сильно турбулентных потоках можно применять трубку только с одним отверстием, правда, выполняя три отсчета для определенных положений трубки; при этом одновременно получают данные, позволяющие судить о степени турбулентности⁴.

с) *Определение сил, действующих на модели.* Наиболее простым способом определения сил, действующих на модели, является их *непосредственное измерение при помощи весов*. Буксируемая или обдуваемая модель прикрепляется к тележке гидродинамического канала

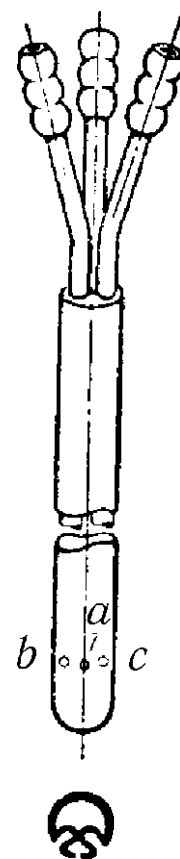


Рис. 206. Цилиндрическая трубка с тремя отверстиями для измерения давления и определения направления потока

¹Van der Hegge – Zijnen, Verh. d. Akad. van Wetenschappen zu Amsterdam, т. 32, 1 (1929), стр. 552.

²Подробные указания о способе тарировки такого прибора и о построении соответствующих шкал имеются в работе F. Krisam'a, ZFM. т. 23 (1932), стр. 369.

³С помощью такого прибора Грушвитц (E. Gruschwitz) измерял вторичный поток у боковой стенки искривленного канала; см. Ing.-Arch. т., 6 (1935), стр. 355.

⁴Bohl J. G., Ing.-Arch., т. 11 (1940), стр. 295. (Более подробные сведения об измерении скоростей и давлений в воздушных потоках можно найти в книге: Попов С. Г., Измерение воздушных потоков, Москва 1917. (Прим. перев.)

или подвешивается к стенкам аэродинамической трубы и соединяется с рычагами специальных весов. Силы, действующие на модель при ее буксировке или обдувке, передаются на весы и таким путем измеряются. Существует много различных способов взвешивания гидродинамических и аэродинамических сил. Остановимся только на одном из них, хорошо оправдавшем себя для измерений в воздухе.

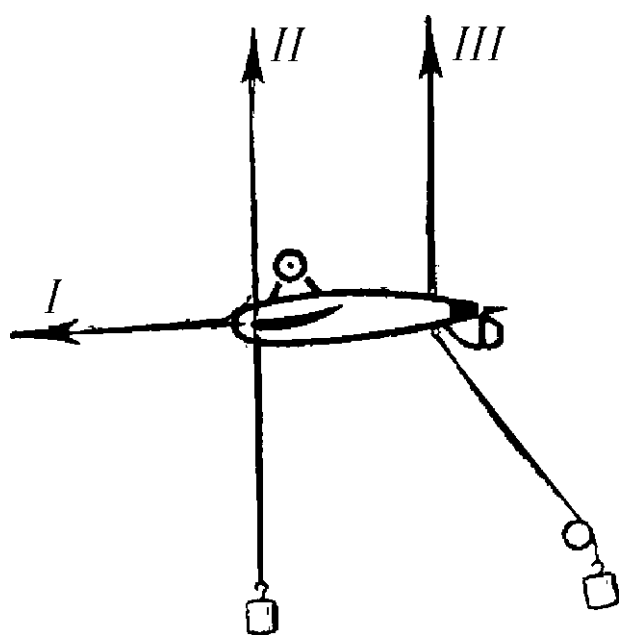


Рис. 207. Подвеска модели на трех проволоках

Модель подвешивается на трех проволоках I, II, III (рис. 207), из которых первая направлена горизонтально вперед, а две другие — вертикально вверх. Другие концы проволок прикреплены к рычагам весов. Первая проволока передает на весы лобовое сопротивление, а вторая и третья вместе — подъемную силу. Отношение показаний вторых и третьих весов позволяет определить положение результирующей аэродинамической силы. Грузы, подвешенные к проволокам, необходимы для того, чтобы создать предварительное натяжение проволок. Модель обычно подвешивается в перевернутом положении, как

это изображено на рис. 207; иначе подъемная сила не натягивала бы проволоки, а, наоборот, разгружала их. Измерение ведется следующим образом. Предварительно, до начала продувки, все весы уравниваются. Затем, после того как создается поток воздуха определенной скорости, отсчитываются величины грузов, уравнивающих возникшие силы.

Силы, действующие на обтекаемое тело, можно определить также путем измерения распределения давления на поверхности тела. Для этой цели, как уже было сказано в § 13, п. б), на поверхности тела пробуравливается достаточно большое число отверстий, которые поочередно соединяются с манометром. Зная распределение давления, можно путем численного или графического интегрирования определить результирующую силу давления. При соединении какого-нибудь отверстия с манометром все остальные отверстия должны быть чем-нибудь заклеены, например, воском. Такой способ работы требует затраты значительного времени, поэтому удобнее соединять сразу большую группу отверстий с так называемым *батарейным манометром*. Такой манометр состоит из большого числа вертикальных трубок, наполненных жидкостью и внизу сообщающихся между собой. Две крайние труб-

ки батарейного манометра имеют открытые верхние концы и, следовательно, показывают невозмущенное давление. Отсчет показаний манометра проще всего производится путем фотографирования. Указанным способом можно находить распределение давления не только на поверхности моделей, но и на поверхности настоящих самолетов, дирижаблей и т. п.

Кильватерное сопротивление, упомянутое в § 13, п. b), может быть определено путем измерения возмущений, оставляемых движущимся телом позади себя в так называемом кильватерном потоке. Этот способ был впервые предложен в 1925 г. А. Бетцем (см. § 14, п. c). Строгое доказательство возможности такого способа определения кильватерного сопротивления — далеко не простое. В самом деле, возмущения давления, исходящие от движущегося тела, распространяются в жидкости во все стороны, и поэтому прежде всего надо выяснить, дают ли они вообще сопротивление и какое именно; кроме того, в случае наличия волнового или индуктивного сопротивления надо доказать, что они вместе с сопротивлением, измеренным в кильватерном потоке, дают в сумме полное сопротивление. Поэтому мы ограничимся здесь только тем, что приведем окончательный результат Бетца. Пусть где-либо позади тела в плоскости, перпендикулярной к его движению, измерены при помощи трубки Пито, неподвижной относительно тела, распределение полного давления g и при помощи статического зонда — распределение статического давления p . Пусть скорость тела равна v , а составляющая скорости течения, относительно невозмущенной жидкости, параллельная направлению v , пусть равна w . Тогда невозмущенное полное давление будет

$$g_0 = p_0 + \frac{\rho}{2}v^2,$$

а полное давление в кильватерном потоке будет

$$g = p + \frac{\rho}{2}(v - w)^2,$$

при условии, что здесь можно пренебречь квадратом составляющей скорости течения, перпендикулярной к направлению v . В области вне кильватерного потока имеет место уравнение Бернулли, следовательно, здесь везде $g = g_0$. Далее, введем в расчет скорость w_* , удовлетворяющую уравнению Бернулли также внутри кильватерного потока; следовательно, для этой скорости мы имеем уравнение

$$p + \frac{\rho}{2}(v - w_*)^2 = g_0.$$

Скорость w_* внутри кильватерного потока представляет собой ту скорость, которую вызвало бы здесь поле давлений, если бы не было обычного и турбулентного трения; вне кильватерного потока, очевидно, $w_* = w$. При этих обозначениях формула Бетца имеет вид¹:

$$W = \iint \left[g_0 - g - \frac{\rho}{2}(w^2 - w_*^2) \right] dF.$$

Для случая, когда $p = p_0$, следовательно, $w_* = 0$, эта формула, как нетрудно убедиться, дает результат, полученный на стр. 320 в связи с подсчетом тяги ветряка.

Рассмотренный способ с успехом применяется при продувке в аэродинамических трубах для определения профильного сопротивления крыльев (отдельно от индуктивного сопротивления!). Шренк² воспользовался этим способом также для определения профильного сопротивления настоящего самолета в полете.



Рис. 208. Приспособление для измерения сопротивления трения

Сопротивление трения, на основании сказанного в § 13, п. б), может быть определено как разность между полным сопротивлением, измеренным на весах, и сопротивлением давления, найденным из распределения давления (см. выше). Существует также непосредственный способ его измерения, предложенный Фэджем и Фокнером³. Этот способ сводится к изме-

рению скоростей в непосредственной близости от поверхности тела, где поток движется ламинарно и, следовательно, касательное напряжение, согласно сказанному в § 1, равно

$$\tau = \mu \frac{w}{y},$$

где w есть измеренная скорость, а y — расстояние от поверхности тела. Расстояние y практически составляет около $1/20$ мм. Приспособление

¹В статье Бетца и в книге Прандтля — Титъенса, Гидроаэромеханика, т. II, применены несколько иные обозначения, а именно: скорость v обозначена через u_0 , скорость w — через $u_0 - u_2$, скорость w_* — через $u_0 - u'_2$, и выражение в скобках под знаком интеграла имеет вид:

$$g_0 - g + \frac{\rho}{2}(u'_2 - u_2)(u'_2 + u_2 - 2u_0).$$

²Schrenk M., Luftfahrtforschung, т. 2 (1928), № 1; см. также Jones B. M., Rep. and mem. № 1688 (1936).

³Fage A., and Falkner V. M., Proc. Roy. Soc. London, (A), т. 129 (1930), стр. 378.

для измерения состоит из отверстия в стенке, над которым сверху на только что указанном расстоянии помещена очень тонкая остро отточенная пластинка (рис. 208). Такого рода зонд, конечно, предварительно должен быть тарирован; поэтому пластинка прикреплена так, что она может вывинчиваться. Тарировка производится следующим образом. Зонд помещается в узкий канал, относительно которого заранее известно, что течение в нем ламинарное, и поэтому возникающее касательное напряжение может быть вычислено по теоретической формуле из наблюдаемого перепада давлений. Отдельные отсчеты, полученные при помощи зонда, дают распределение касательного напряжения на поверхности тела; полное сопротивление трения получается отсюда путем интегрирования. Выполнение измерений по такому способу является весьма трудной задачей и требует большого количества времени, однако получаемые результаты представляют большую ценность с точки зрения общей теории.

ГЛАВА 4

Газовая динамика

§ 1. Предварительные замечания. В § 1 гл. II мы подчеркнули, что если при движении газа возникают разности давлений, небольшие по сравнению с абсолютным давлением газа, то изменения объема получаются столь малыми, что такие потоки газа можно считать в первом приближении как несжимаемые. Следовательно, для их исследования можно применять законы, выведенные для движения несжимаемой жидкости. Но в тех случаях, когда движение газа или пара сопровождается образованием больших разностей давлений, изменения объема получаются значительными, и рассматривать газ как несжимаемую жидкость уже нельзя.

При движении газа большие разности давлений и связанные с ними значительные изменения объема возникают в основном в следующих случаях:

- 1) *когда пространство, занятое газом, находящимся под действием силы тяжести, имеет большое протяжение в высоту;*
- 2) *когда в потоке газа имеют место большие скорости;*
- 3) *когда движение газа связано с большими ускорениями.*

С первым случаем мы встречаемся при движении масс воздуха в свободной атмосфере. Исследование таких движений составляет предмет динамической метеорологии, вопросы которой, во многом еще мало разработанные, выходят за рамки настоящей книги. Поэтому мы не будем здесь заниматься систематическим изучением таких движений и ограничимся рассмотрением только некоторых задач (см. гл. V).

Второй случай имеет место либо при движении газа через отверстие или канал, соединяющий две такие области, в которых разность давлений сравнима с абсолютными давлениями¹, либо при движении

¹Подчеркнем, что сама разность давлений не должна быть обязательно большой; важно лишь, чтобы она была сравнима с абсолютными давлениями в обеих областях. Поясним это на примере ртутного насоса, применяемого для получения высокого вакуума. Пусть разность давлений между пространством, в котором происходит испарение ртути, и пространством, в котором ртуть конденсируется, составляет 0,1 мм ртутного столба, а давление в последнем пространстве (соединенном с форвакуумом) пусть также равно 0,1 мм ртутного столба. Тогда указанную разность

тела в газе с очень большой скоростью. В теоретическом отношении оба эти вида движений тесно связаны между собой; если движение тела в покоящемся газе рассматривать в системе отсчета, связанной с движущимся телом, то в ней тело будет покоиться, а газ будет набегать на него, следовательно, мы будем иметь поток газа около неподвижного тела. Законы, управляющие движениями газа при больших изменениях объема, имеют чрезвычайно важное практическое значение для исследования движений артиллерийских снарядов, ракет и скоростных самолетов, а также для исследования движений, происходящих в реактивных моторах и в паровых турбинах. Теория движения газов при больших скоростях обычно для краткости называется *газовой динамикой*².

Наконец, с третьим случаем, связанным с наличием больших ускорений, мы встречаемся при быстрых колебаниях в газе (также движения рассматриваются в акустике), при распространении взрывных волн и при быстром открывании или закрывании задвижек в трубопроводах.

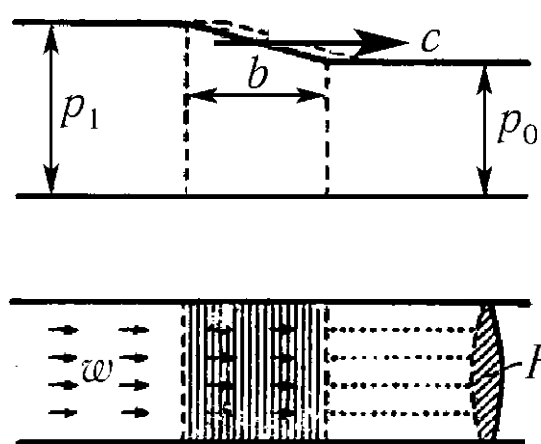
Во всех этих случаях чрезвычайно важную роль играет скорость, с которой в массе газа распространяются возмущения давления. Поэтому мы подробно остановимся прежде всего на этом процессе.

§ 2. Распространение возмущений давления. Скорость звука. Вопрос о распространении в газе возмущений давления мы рассмотрим на следующем простом примере, сходном со случаем распространения вала воды (§ 15 гл. II). Пусть в покоящейся массе газа, заключенной в широкой трубе, каким-нибудь образом, например, движением поршня слева направо, создано повышение давления. Это повышение давления начинает распространяться вправо так, как это схематически показано на рис. 209. Предположим, что возникшее распределение

давлений следует считать значительной и поэтому при исследовании движения газа в насосе следует учитывать сжимаемость газа.

²Обзорное изложение проблем газовой динамики можно найти в Handbuch der Physik, т. 7, стр. 289 (статья Аккерста); в Handbuch der Exp.-Phys., т. IV, стр. 341 (статья Буземана); у Durand W., Aerodynamic Theory, т. III; в трудах Конференции по большим скоростям, состоявшейся в Риме в 1935 г.: «Le alte velocità in aviazione» (Convegno 30 Sett. — 6 Ott. 1935. Roma 1936). Изложение теории дано в книге Sauer R., Theoretische Einführung in die Gasdynamik, 1943. [На русском языке см. книги: Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, т. II. изд. 3-е, Москва 1948; Христианович С. А., Гальперин В. Г., Миллионщиков М. Д. и Симонов Л. А., Прикладная газовая динамика, Москва 1948, а также переводы упомянутых выше трудов: Дюрэнд В., Аэродинамика, т. III, Москва 1939: «Газовая динамика» (доклады на Римской конференции 1935 г.), Москва 1939; Зауэр Р., Введение в газовую динамику, Москва 1947. (Прим. перев.)]

давления перемещается, не изменяя своей формы, с постоянной скоростью c . Так как газ при этом сжимается, то та его часть, через которую повышение давления уже прошло, должна обладать некоторой скоростью w , направленной вправо. Для простоты расчета примем, что повышение давления $p_1 - p_0$ мало по сравнению с первоначальным давлением p_0 , тогда будет мало также изменение плотности $\rho_1 - \rho_0$; кроме того, как это еще выяснится из дальнейшего, будет мала также скорость w .



Относительно явлений, которые происходят в переходной области шириной b (рис. 209), мы можем сказать, по аналогии со случаем распространения вала воды, следующее:

1. Когда область b проходит через какое-нибудь место рассматриваемой массы газа, плотность в нем увеличивается от значения ρ_0 до значения ρ_1 . Соответствующий промежуток времени равен

$$\tau = \frac{b}{c}.$$

Рис. 209. Волна давления в трубе

Приращение массы газа, находящейся в переходной области, в единицу времени¹ равно объему Fb переходной области, умноженному на приращение плотности в единицу времени, т. е. на $\frac{\rho_1 - \rho_0}{\tau}$. Следовательно, это приращение массы газа равно

$$F(\rho_1 - \rho_0)c.$$

Оно вызвано тем, что в переходную область втекает слева из области сгущения в единицу времени масса газа $\rho_1 Fw$. Вследствие неразрывности течения обе массы должны быть равны друг другу; приравняв их, мы получим уравнение:

$$\rho_1 w = (\rho_1 - \rho_0)c. \quad (1)$$

2. Внутри переходной области скорость увеличивается за промежуток времени τ от нуля до w , следовательно, среднее ускорение в переходной области равно

$$\frac{w}{\tau} = \frac{wc}{b}.$$

¹В приводимых рассуждениях целесообразно выбрать эту единицу времени малой по сравнению с промежутком времени τ . Так как в окончательный результат время τ не входит, то такой выбор не ограничивает общности вывода.

Масса, которой сообщается ускорение, равна $\rho_m Fb$, где ρ_m есть средняя плотность. Результирующая сила равна $F(p_1 - p_0)$. Следовательно, из основного уравнения динамики — масса, умноженная на ускорение, равна результирующей силе, — мы имеем:

$$\rho_m w c = p_1 - p_0. \quad (2)$$

Заменим в левой части уравнения (1) ρ_1 на ρ_m ; делая это, мы вводим ошибку, которая, однако, не больше той ошибки, которая уже внесена предыдущими допущениями. Разделив теперь уравнение (2) на уравнение (1), мы получим:

$$c^2 = \frac{p_1 - p_0}{\rho_1 - \rho_0}.$$

Правая часть этого уравнения зависит только от закона сжатия газа; приняв ее равной производной от p по ρ , мы будем иметь:

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho}. \quad (3)$$

Таким образом, если изменения давления в газе незначительны, то скорость их распространения не зависит ни от их величины, ни от ширины переходной области и зависит только от закона сжатия газа. Отсюда следует, что скорость распространения изменений давления не изменится, если будут следовать друг за другом различные по знаку изменения давления, лишь бы они были малыми. Так как звук представляет собой последовательность положительных и отрицательных изменений давления, которые, согласно предыдущему, распространяются со скоростью c , то величину c называют *скоростью звука*.

При адиабатическом изменении состояния газа связь между давлением p и плотностью ρ определяется, согласно сказанному в § 5 гл. I, уравнением

$$p = \text{const} \cdot \rho^\kappa,$$

поэтому

$$\frac{dp}{d\rho} = \kappa \cdot \text{const} \cdot \rho^{\kappa-1} = \kappa \cdot \frac{p}{\rho}.$$

С другой стороны, мы имеем:

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0} \frac{1}{1 + \alpha \vartheta},$$

где ρ_0 есть нормальная плотность при нормальном давлении p_0 и при 0°C . Подставив эти значения $\frac{dp}{d\rho}$ и ρ в уравнение (3), мы получим:

$$c = \sqrt{\vartheta \frac{p_0}{\rho_0} (1 + \alpha \vartheta)}. \quad (4)$$

Следовательно, скорость звука в каком-нибудь определенном газе зависит только от температуры. Для воздуха средней влажности и при температуре 0°C формула (4) дает:

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p_0}{\rho_0}} = 334 \text{ м/сек}, \quad (5)$$

что хорошо совпадает с результатами измерения.

Важный для нас случай распространения давления в *текущей* жидкости можно свести к предыдущему случаю, если рассматривать явление в системе отсчета, движущейся вместе с жидкостью. Отсюда следует, что распространение давления *относительно* жидкости происходит со скоростью c . Относительно пространства, в котором жидкость течет со скоростью w , давление распространяется вниз по течению со скоростью $c + w$, а вверх по течению — со скоростью $c - w$. Легко видеть, что в том случае, когда w больше c , изменение давления вверх по течению не распространяется совсем. Поэтому газы и пары при движении со скоростями, большими скорости звука, ведут себя совершенно иначе, чем при движении с дозвуковыми скоростями.

Существенная разница между дозвуковыми и сверхзвуковыми потоками обнаруживается особенно наглядно при рассмотрении точечного источника возмущения давления в потоке. В равномерном потоке газа мгновенное возмущение давления, исходящее из точки A (рис. 210), распространяется в виде шаровой волны, центр которой перемещается со скоростью течения. Длительное возмущение давления в точке A , производимое, например, маленьким препятствием в этой точке, можно рассматривать как последовательность мгновенных возмущений. Если скорость течения w меньше скорости звука c , то распространение возмущения, вызванного препятствием, происходит во всех направлениях, правда, в разных направлениях по-разному. Если же скорость течения больше скорости звука, то все шаровые волны, исходящие из препятствия, заполняют только конус, расходящийся вниз по течению и имеющий свою вершину в точке A (рис. 211). Пространство перед конусом остается совершенно свободным от влияния источника возмущения.

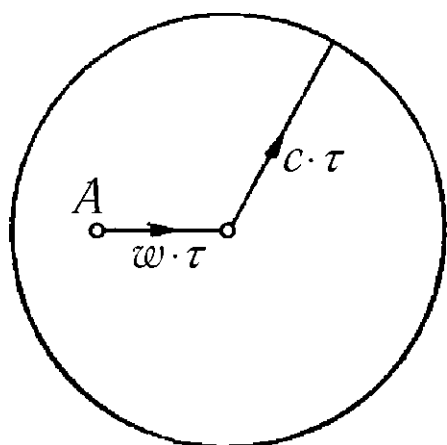


Рис. 210. Волна давления при скорости течения, меньшей скорости звука

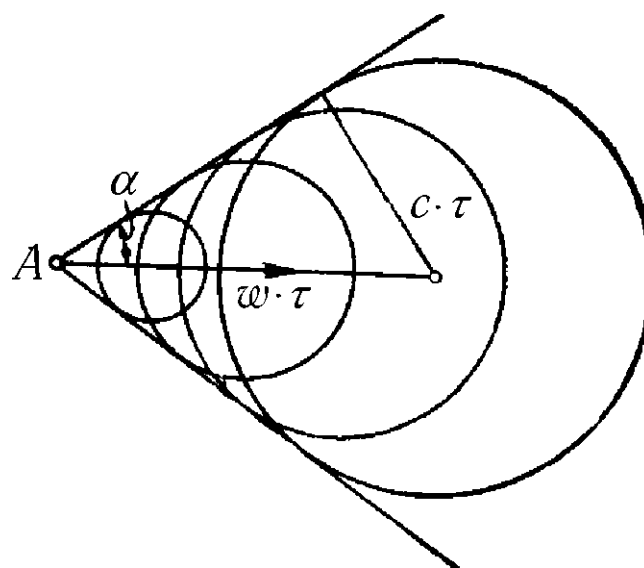


Рис. 211. Волна давления при скорости течения, большей скорости звука

Угол между образующей конуса и его осью, совпадающей с направлением течения, определяется на основании следующих простых соображений. В течение короткого промежутка времени точечное возмущение вырастает в шар с радиусом $c\tau$ и с центром, удаленным от источника возмущения на расстояние $w\tau$. Конус касается шара, следовательно, должно иметь место отношение

$$\sin \alpha = \frac{c\tau}{w\tau} = \frac{c}{w}. \quad (6)$$

Угол α называется *углом Маха*.

При движении газа с дозвуковой скоростью вдоль стенки с неровностями возмущения давления распространяются во всем пространстве, заполненном движущимся газом. Если же газ движется со сверхзвуковой скоростью, то из каждой неровности стенки отходит вниз по течению волна давления под определенным углом Маха. Если течение газа происходит между двумя стенками, то возникшая волна давления, достигнув противоположной стенки, отражается от нее. Ниже, на стр. 370, изображена фотография подобного рода течения между двумя стенками с искусственной шероховатостью (рис. 223). Уменьшение угла Маха слева направо ясно показывает, как увеличивается слева направо скорость течения.

При движении какого-нибудь тела (например, артиллерийского снаряда или пули) в покоящемся газе — возникают аналогичные явления. Если снаряд движется со сверхзвуковой скоростью, то это действие на окружающий воздух проявляется только в пределах конуса,

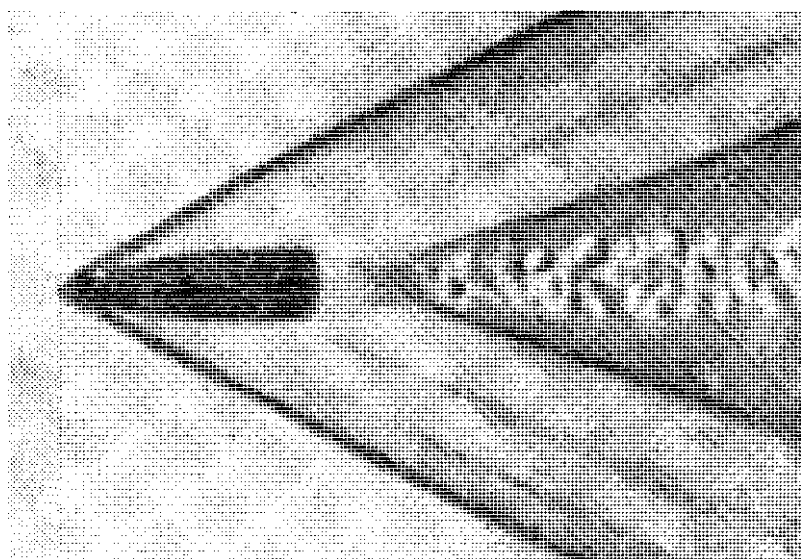


Рис. 212. Полет пули

вершина которого перемещается вместе со снарядом¹. Впереди этого конуса воздух остается в полном покое. От выступающих точек поверхности снаряда отходят волны давления. На рис. 212 показана фотография полета пули. Измеряя на такой фотографии угол, образуемый головной волной с направлением движения, можно довольно точно определить скорость снаряда.

Для измерения этого угла надо поль-

зоваться той частью волны давления, которая достаточно удалена от снаряда. В непосредственной близости от снаряда разности давлений столь велики, что здесь головная волна распространяется со сверхзвуковой скоростью, и поэтому угол α здесь больше, чем на некотором расстоянии от снаряда. Такого же рода волны давления образуются и при вращении воздушного винта, у которого концы лопастей имеют окружную скорость, большую скорости звука. Эти волны и являются причиной упомянутого на стр. 312 звука, возникающего при работе такого винта и похожего на звук тромбона.

Конечное по величине изменение давления можно рассматривать как результат многих следующих друг за другом малых изменений давления. Согласно уравнению (2) в местах с повышенным давлением скорость движения w приблизительно пропорциональна разности давлений и направлена в сторону распространения изменения давления (в местах с пониженным давлением она направлена в противоположную сторону). Отсюда следует, что скорость распространения нового уплотнения, следующего за предшествующим ему уплотнением, равна $c + w$, т. е. больше скорости звука; наоборот, скорость распространения нового разрежения, следующего за предшествующим разрежением, меньше скорости звука. Таким образом, сильные уплотнения распространяются со скоростью, большей скорости звука, а сильные разрежения, наоборот, со скоростью, меньшей скорости звука. Точная теория этих явлений дана Риманом². Эта теория, в полном согласии со сказанным выше, показывает, что перед волной давления, несущей конечное по величине

¹ Mach E., Sitzungsber. d. Wien. Akad. IIa, т. 95 (1887), стр. 164, т. 98 (1889), стр. 1310, т. 105 (1896), стр. 605.

² См. например, Riemann B. und Weber H., Die partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik, т. 2, стр. 507, изд. 5, Braunschweig, 1912. Дальнейшая разработка, а также примеры имеются в статье Bechert K., Ann. d. Physik, т. 37 (1940), стр. 89; т. 38 (1940), стр. 1.

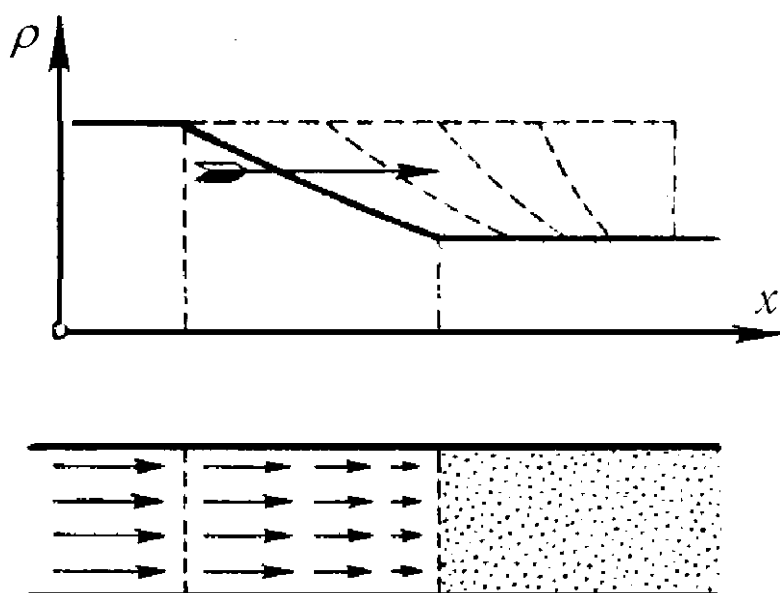


Рис. 213. Волна уплотнения

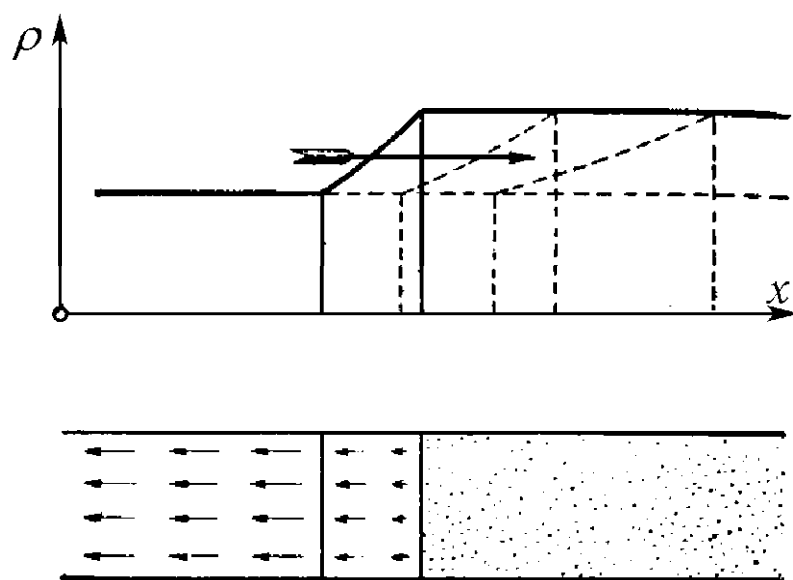


Рис. 214. Волна разрежения

не уплотнение, движутся частичные уплотнения с тем большей скоростью, чем на большую величину уже повысилось давление; следовательно, голова волны движется быстрее ее основания и с течением времени догоняет его (рис. 213). В тот момент времени, когда голова волны догоняет основание, возникает прерывное изменение давления, так называемый *скачок уплотнения*, о котором подробно будет сказано ниже. В случае волны разрежения основание волны отстает от ее головы, вследствие чего форма волны делается постепенно все более и более полой (рис. 214).

§ 3. Одномерный установившийся поток газа со значительными изменениями объема. Будем рассматривать поток газа как одномерный. В таком случае вдоль линии тока соблюдается обобщенное уравнение Бернулли [см. § 4 гл. II, уравнение (11)]. Если пренебречь силой тяжести, а также, как мы всегда будем делать в этой главе, трением, то обобщенное уравнение Бернулли примет вид:

$$P + \frac{w^2}{2} = \text{const} = P_1, \quad (7)$$

где P есть функция давления, равная

$$P = \int \frac{dp}{\rho}, \quad (8)$$

или, если свести удельный объем $v = \frac{1}{\rho}$,

$$P = \int v dp.$$

Если удельный объем v известен как функция давления, то величину P можно вычислить как площадь, ограниченную кривой $v = \varphi(p)$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только адиабатические изменения состояния, при которых плотность и давление идеального газа связаны между собой соотношением:

$$\rho = \rho_1 \cdot \left(\frac{p}{p_1} \right)^{1/\kappa}.$$

Подставив это значение ρ в интеграл (8) и выполнив вычисления, мы получим:

$$P = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{p}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}. \quad (9)$$

Если p_1 есть давление, при котором скорость движения газа w равна нулю, следовательно, в случае истечения газа из напорной камеры — давление в камере, то из уравнения (7), после подстановки в него значений P и P_1 , мы получим:

$$w = \sqrt{2(P_1 - P)} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}. \quad (10)$$

Легко видеть, что скорость движения, приобретаемая газом при расширении до самого крайнего вакуума, имеет конечное значение. Этой скорости в уравнении (10) соответствует давление $p = 0$, следовательно, она равна

$$w_{\max} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_1}{\rho_1}}. \quad (11)$$

Подставляя в эту формулу численные значения входящих в нее величин (измеренные в кг и м) для воздуха, начальное состояние которого определяется температурой 15°C и нормальным атмосферным давлением, мы получим:

$$\sqrt{\frac{2 \cdot 1,405}{0,405} \cdot \frac{10\,330}{0,125}} = 757 \text{ м/сек.}$$

Зависимость скорости w от давления p графически изображена на рис. 215. На этом же рисунке изображена кривая $v = \varphi(p)$, связывающая удельный объем $v = \frac{1}{\rho}$ и давление p при адиабатическом изменении состояния. Заштрихованная площадь представляет собой интеграл

$$\int_p^{p_1} v \, dp = P_1 - P.$$

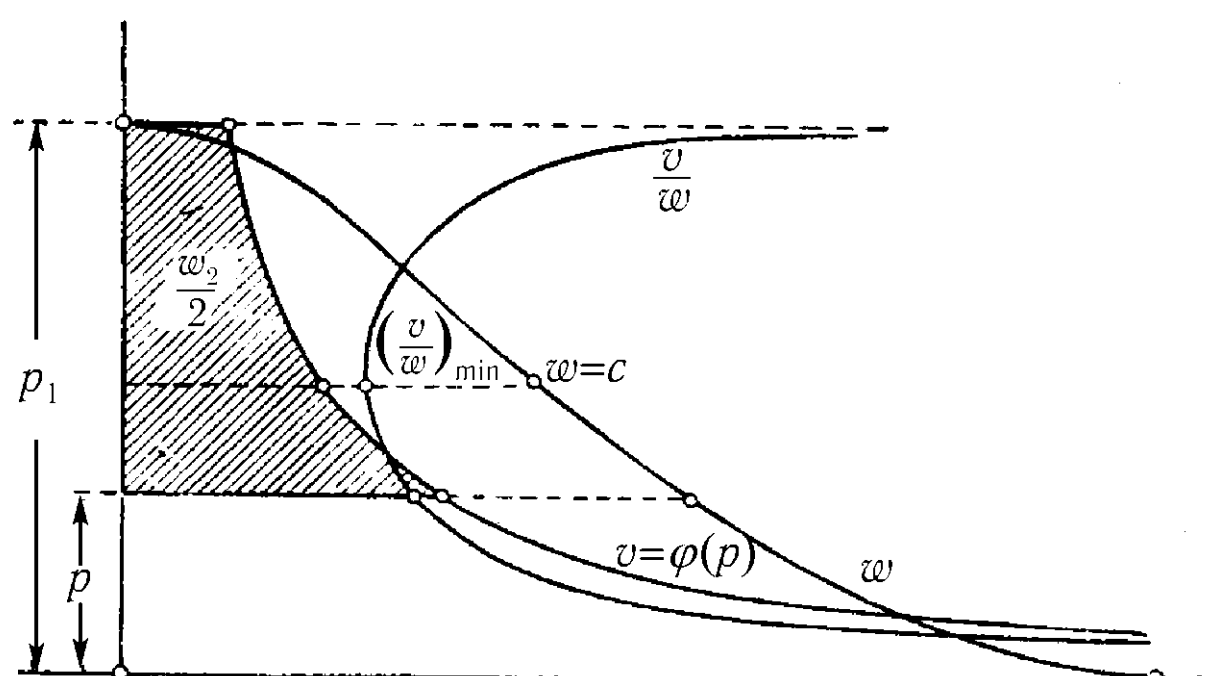


Рис. 215. Зависимость удельного объема v , скорости течения w и отношения $\frac{v}{w}$ от давления p

Условие неразрывности установившегося движения сжимаемой жидкости требует, чтобы через каждое поперечное сечение струйки газа в одну секунду протекала одна и та же масса (§ 3 гл. II), т. е. чтобы вдоль струйки газа соблюдалось уравнение

$$F\rho w = \text{const.} \quad (12)$$

Отсюда мы имеем:

$$F = \frac{\text{const}}{\rho w} = \frac{\text{const}v}{w}.$$

Следовательно, зависимость поперечного сечения F струйки газа от давления p изображается функцией $\frac{v}{w}$ (третья кривая на рис. 215). Характер связи между F и p можно выяснить, исходя из уравнений (10) и (12), следующим образом. Когда давление p равно p_1 скорость $w = 0$, и поэтому поперечное сечение $F = \infty$. При уменьшении p скорость w постепенно возрастает, однако плотность ρ изменяется при этом сначала незначительно, следовательно, поперечное сечение F струйки газа уменьшается. В дальнейшем, после того как давление p делается очень малым, скорость w приближается к своему максимальному значению $w_{\max}$ и поэтому изменяется сравнительно слабо, но зато плотность ρ уменьшается очень сильно; это означает, что при неограниченном уменьшении p поперечное сечение F увеличивается и стремится к бесконечности. Очевидно, что при таком характере изменения сечения оно должно где-то проходить через минимум. Этот минимум имеет место при том давлении p^* , при котором относительное прира-

щение скорости $\frac{dw}{w}$ равно относительному уменьшению плотности — $\frac{d\rho}{\rho}$. Вычисления показывают, что давлению p^* соответствует скорость течения, равная скорости звука для того состояния газа, в котором он находится в минимальном поперечном сечении. Вследствие адиабатического охлаждения эта скорость звука меньше скорости звука, соответствующей начальному состоянию (для воздуха при начальной температуре 15°C она равна круглым числом 315 м/сек).

В существовании минимума поперечного сечения F можно убедиться также без всяких вычислений, исходя из соображений предыдущего параграфа. В самом деле, будем рассматривать распространение волны давления, изображенное на рис. 209, в системе отсчета, движущейся вправо со скоростью звука c . Тогда в тех местах пространства, в которых газ покоится, в новой системе отсчета он будет казаться движущимся справа налево со скоростью c , а волна давления будет оставаться на месте. Таким образом, в новой системе отсчета мы будем иметь установившееся течение с той особенностью, что в нем происходит изменение давления, не сопровождающееся изменением поперечного сечения струйки газа. Но такое состояние является характерным свойством того места струйки газа, где поперечное сечение имеет минимум, т. е. не увеличивается и не уменьшается.

После того как поперечное сечение струйки газа, пройдя через минимум, опять начинает увеличиваться, скорость течения делается больше скорости звука. Таким образом, теперь, в сверхзвуковой зоне, при уменьшении давления, следовательно, при увеличении скорости течения, поперечное сечение струйки газа *увеличивается* (вместо того чтобы уменьшаться, как это происходит при движении несжимаемой жидкости); наоборот, при увеличении давления, следовательно, при уменьшении скорости, оно уменьшается. Это обстоятельство делает потоки, движущиеся со сверхзвуковой скоростью, совершенно непохожими по своим свойствам на дозвуковые потоки.

Пусть разность давлений $p_1 - p$, обуславливающая движение газа, такова, что его скорость w может сделаться больше скорости звука; в таком случае постепенное увеличение скорости w до своего конечного — сверхзвукового — значения, определяемого формулой (10), может быть достигнуто только в том случае, если движение происходит в трубе, сначала суживающейся, а затем вновь определенным образом расширяющейся (такая труба называется *соплом Лавала*, см. ниже). Поэтому, если газ вытекает из резервуара в пространство (в котором давление достаточно мало, чтобы могла возникнуть сверхзвуковая ско-

рость) через простое отверстие в стенке, без добавления расширяющегося насадка, то в самом отверстии устанавливается только звуковая скорость истечения, равная

$$w' = c' = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa + 1} \frac{p_1}{\rho_1}}$$

и соответствующее ей критическое давление

$$p' = p_1 \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}.$$

Для воздуха и других двухатомных газов это давление равно круглым числом 0,53 давления в покое газе. При таком истечении количество вытекающего газа совершенно не зависит от противодействия. После выхода из отверстия струя газа расширяется и притом, вследствие инерции, настолько сильно, что давление внутри нее делается меньше давления в окружающем пространстве. Это приводит к тому, что на некотором расстоянии от отверстия струя перестает расширяться и начинает суживаться, причем в результате сужения в ней достигается приблизительно опять такое же давление, как и в отверстии, вследствие чего весь процесс несколько раз повторяется. На рис. 216 изображена фотография такой многократно расширяющейся и суживающейся воздушной струи¹. Эта фотография получена по способу Теплера, о котором будет сказано в § 5.

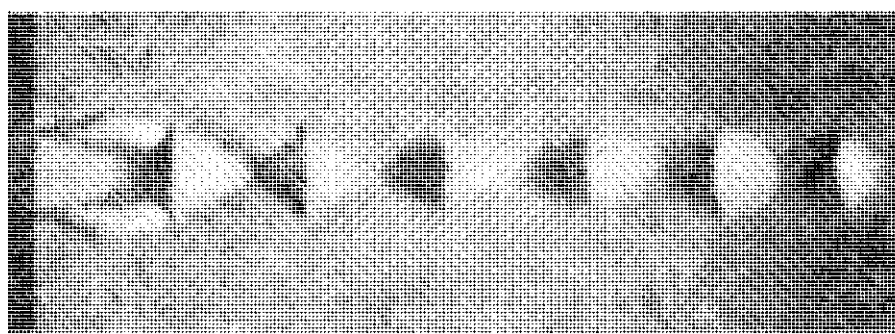


Рис. 216. Истечение сжатого воздуха из отверстия

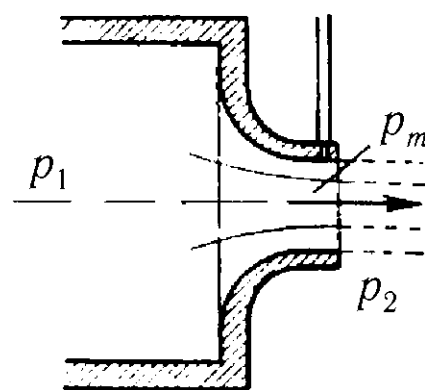


Рис. 217. Измерение давления в выходном сечении

Давление p_m в выходном сечении насадка можно измерить, сделав отверстие вблизи самого края насадка (рис. 217). Если внешнее

¹ Mach E., Sitzungsber. d. Wien Akad. IIa, т. 106 (1897), стр. 1025; см. также Emden R., Ann. d. Phys u. Chem., т. 69 (1899), стр. 264 и 426; Prandtl L., Phys. Zeitschr., т. 8 (1907), стр. 23.

давление p_2 меньше критического давления p' , то давление p_m почти постоянно и равно критическому давлению. При более высоком противодействии p_2 давление p_m практически совпадает с давлением p_2 . Количество газа, вытекающего из отверстия в одну секунду при противодействии p_2 , равно

$$M = F \rho_2 w_2 = F \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1/\kappa} \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} p_1 \rho_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}. \quad (13)$$

При постепенном уменьшении противодействия p_2 расход M увеличивается и достигает максимума при противодействии, равном критическому давлению p' . Этот максимум равен

$$M_{\max} = \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} F \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa+1} p_1 \rho_1}. \quad (14)$$

При дальнейшем уменьшении противодействия p_2 расход остается постоянным и равным $M_{\max}$. Зависимость давления p_m и расхода M от противодействия p_2 графически изображена на рис. 218.

Кривая (M, p_2) значений $p_1 > p_2 > p'$ по своему виду весьма близка к четверти эллипса. Это обстоятельство позволяет вывести приближенные формулы для расхода M , удобные для практических вычислений. Для атмосферного воздуха эти формулы имеют вид:

$$1) \text{ для } p_2 > \frac{1}{2} p_1$$

$$M = 0,76 F \sqrt{\frac{(p_1 - p_2) p_2}{T_1}},$$

$$2) \text{ для } p_2 < \frac{1}{2} p_1$$

$$M = 0,38 F \frac{p_1}{\sqrt{T_1}},$$

Рис. 218. Зависимость давления p_m и расхода M от противодействия p_2

где T_1 есть абсолютная температура в напорном резервуаре. Если давление p измерять в кг/см^2 , а площадь F в см^2 или p в кг/м^2 , а F в м^2 , то обе эти формулы дают количество вытекающего газа в килограммах.

В том, что при истечении из простого отверстия в условиях, допускающих возникновение сверхзвуковой скорости, в нем устанавливается постоянное давление при любом противодавлении, легко убедиться при помощи рассуждений предыдущего параграфа о распространении давления. Предположим, что к выходному концу отверстия примыкает камера, давление в которой может регулироваться при помощи вентиля или другого подобного приспособления (рис. 219). Пусть давление p_2 в этой камере больше критического давления p' . Если открыть вентиль, то давление p_2 в камере понизится и образуется волна разрежения,двигающаяся к отверстию. Эта волна изменяет состояние течения в отверстии — скорость истечения увеличивается. При дальнейшем понижении давления p_2 скорость истечения будет продолжать увеличиваться, но лишь до тех пор, пока не будет достигнута звуковая скорость. Новое понижение давления не изменит состояния течения в отверстии. В самом деле, скорость распространения этого понижения давления не может превысить скорости звука, и поэтому оно не достигнет отверстия, следовательно, состояние течения в нем, начиная с момента достижения звуковой скорости, будет оставаться неизменным.

Для получения правильной сверхзвуковой струи шведский инженер Лаваль (Laval), конструируя свою паровую турбину, применил насадок особой формы, изображенный на рис. 220а и называемый теперь *соплом Лавала*. Такие насадки имеют большое практическое значение, поэтому явления, происходящие в них при течении газа, очень подробно изучены и теоретически и экспериментально. Результаты этого изучения позволили получить ответ на многие принципиальные вопросы движения газов и паров.

Здесь мы рассмотрим только такое течение через сопло Лавала, при котором можно пренебрегать трением. Пусть давление p_1 до сопла задано. Тогда значения скорости w и отношения $\frac{v}{w}$, соответствующие каждому давлению p , меньшему p_1 , могут быть либо вычислены по формулам, либо отсчитаны по графикам на рис. 215. Так как расход газа, т. е. количество его массы, протекающей в одну секунду, равен

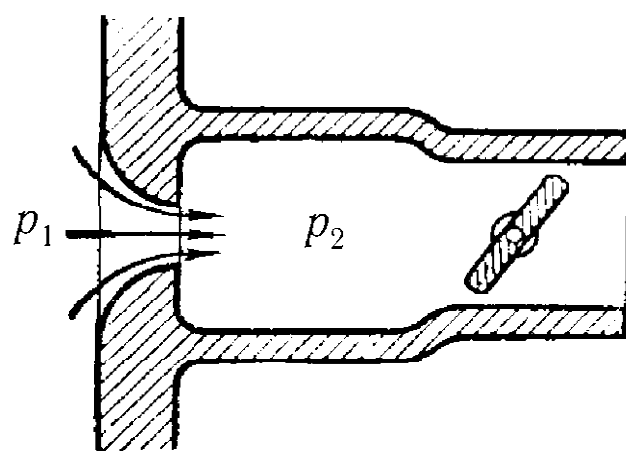


Рис. 219. Истечение сжатого воздуха из отверстия через дополнительную камеру с вентилем

$$M = F\rho w = F\frac{w}{v},$$

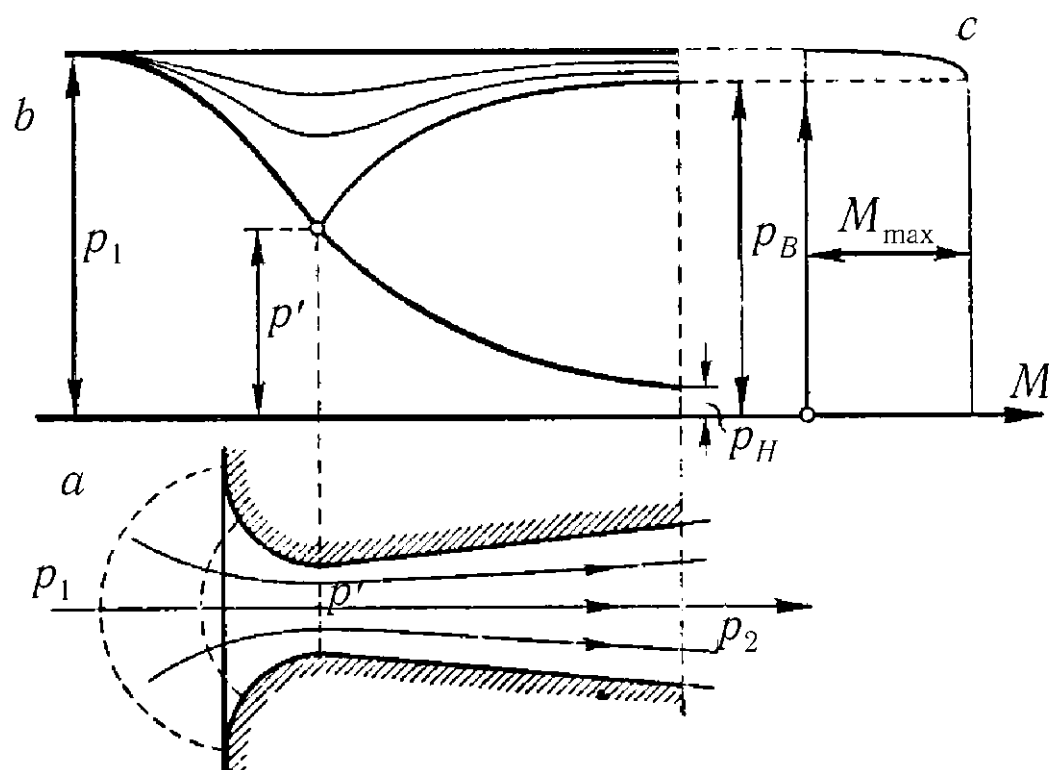


Рис. 220. Течение через сопло Лавалья

то для каждого заданного расхода M можно вычислить значения $\frac{v}{w}$, соответствующие определенным значениям площади поперечного сечения F . Зная же $\frac{v}{w}$, можно из рис. 215 найти соответствующие значения давления. Очевидно, что при нормальном режиме работы сопла минимум поперечного сечения струнки газа, следовательно, и минимум функции $\frac{v}{w}$ должны совпадать с минимумом поперечного сечения сопла. При таком режиме расход получается максимальным и определяется, как и при истечении из простого отверстия, формулой (14). Найденное указанным способом изменение давления вдоль оси сопла (от значения p_1 до самого низкого конечного давления p_H) изображено на рис. 220b жирной линией. Но так как, согласно рис. 215, каждому значению $\frac{v}{w}$ соответствуют всегда два разных давления, то в расширяющейся части сопла — после самого узкого поперечного сечения — давление может изменяться также по второй кривой, изображенной на рис. 220b тонкой линией и ведущей к верхнему конечному давлению p_B .

Найдем теперь изменение давления вдоль оси сопла при меньших расходах M ; мы получим кривые, вычерченные на рис. 220b тонкими линиями и оканчивающиеся ординатами, большими p_B . Изменение расхода в зависимости от противодействия p_2 в конце сопла изображено на рис. 220c. При уменьшении противодействия от значения $p_2 = p_1$ до значения $p_2 = p_B$, расход возрастает от нуля до $M_{\max}$. Как только расход достигает своего максимального значения, в самом узком поперечном сечении сопла устанавливается звуковая скорость течения. Следовательно, даже не зная в точности, какие явления происходят в этом

месте, можно предполагать, что дальнейшее понижение противодавления не влияет на часть потока, расположенную вверх по течению от самого узкого места сопла, и поэтому теперь расход должен оставаться постоянным. Многочисленные опыты хорошо подтверждают это предположение.

Из предыдущих рассуждений следует, что если в газе при движении через сопло давление p уменьшается от значения p_1 до значения p_2 , лежащего между p_v и p_n , то обязательно должна происходить потеря энергии. А. Стодола (A. Stodola), наблюдая за изменением давления в таких потоках, обнаружил, что в них возникают прерывные изменения давления, так называемые *скачки уплотнения*, предсказанные теоретически Риманом (см. конец § 2). При скачках уплотнения действительно возникает потеря энергии, следовательно, изучение их на основе уравнений, выведенных для потоков без потерь энергии, невозможно. Для вывода уравнений, пригодных для исследования скачков уплотнения, необходимо исходить из теоремы о количестве движения (§ 13 гл. II) в сочетании с теоремой об энергии для течений, сопряженных со значительными изменениями объема и с сопротивлениями.

В связи с большой важностью последней теоремы для изучения сжимаемых потоков, мы посвятим ей весь следующий параграф.

§ 4. Теорема об энергии для сжимаемых потоков при наличии сопротивлений. При движении газов сопротивление оказывает двойное действие: во-первых, оно механически тормозит поток, а во-вторых, механическая энергия, затраченная на его преодоление, частично возвращается в поток в виде тепловой энергии. Таким образом, в потоках сжимаемой жидкости, в противоположность потокам несжимаемой жидкости, имеется возможность часть энергии, затраченной на преодоление сопротивления, вновь использовать при дальнейшем расширении.

Выделим в установившемся потоке газа некоторую область и вычислим изменение энергии массы газа, заключенной в этой области. Удобнее всего за такую область взять отрезок трубки тока (см. рис. 73 на стр. 114). Так как мы рассматриваем установившееся движение, то изменение состояния выделенной массы газа в течение промежутка времени dt заключается только в том, что через сечение A из трубки тока выходит элемент массы

$$dm = \rho_A F_A w_A dt, \quad (15)$$

а через сечение B входит элемент массы

$$dm' = \rho_B F_B w_B dt, \quad (16)$$

причем вследствие неразрывности течения $dm = dm'$.

При таком изменении содержимого трубки тока энергия струйки газа может измениться, очевидно, только на величину, равную притоку энергии извне за тот же промежуток времени dt . Энергия элемента массы складывается из кинетической, потенциальной и тепловой энергии; последняя называется также внутренней энергией. Ее величину в единице массы обозначим через u , причем будем измерять ее не в единицах тепла, а в единицах работы, т.е. так же, как механическую энергию. Таким образом, если принять, что потенциальная энергия обуславливается исключительно полем тяготения, содержание энергии в массе dm будет равно

$$dm \left(\frac{w^2}{2} + gz + u \right).$$

Приток энергии к массе, заключенной в выделенном отрезке трубки тока, складывается из работы сил давления на концевых поверхностях трубки и из возможного поступления тепла через боковую поверхность. Учитывать особо работу сил трения не следует, так как она сводится к преобразованию механической работы в тепловую энергию, следовательно, не влечет за собой изменения содержания энергии в выделенной области. Работа сил давления, действующих на площадь F_A , равна силе, умноженной на путь, т.е. равна

$$F_A p_A w_A dt$$

или, если ввести массу dm , определяемую формулой (15),

$$dm \frac{p_A}{\rho_A} = dm \cdot p_A v_A,$$

где v есть удельный объем газа. Аналогичным образом, для работы сил давления, действующих на площадь F_B , мы получим величину

$$-dm \cdot p_B v_B.$$

Возможный приток тепла в трубку тока между сечениями A и B обозначим через $q_{AB} dm$, где q_{AB} есть количество тепла, полученное каждой единицей массы в трубке тока между A и B и измеренное в единицах механической работы.

Таким образом, сформулированное выше предложение о балансе энергии в выделенной части трубки тока мы можем записать следующим образом:

$$dm\left(\frac{w_B^2}{2} + gz_B + u_B\right) - dm\left(\frac{w_A^2}{2} + gz_A + u_A\right) = dm(p_A v_A - p_B v_B + q_{AB}),$$

откуда

$$\frac{w_B^2}{2} + gz_B + u_B + p_B v_B = \frac{w_A^2}{2} + gz_A + u_A + p_A v_A + q_{AB}.$$

Так как концевое сечение B трубки тока можно произвольна перемещать, то предыдущее уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{w^2}{2} + gz + u + pv = \text{const} + q. \quad (17)$$

Это уравнение применяется также в дифференциальной форме:

$$w dw + g dz + du + d(pv) = dq. \quad (18)$$

Величина $u + pv$ очень часто встречается в термодинамике. Она называется *теплосодержанием*, или *энтальпией* и обычно обозначается одной буквой i .

Для идеальных газов имеют место формулы:

$$u = \frac{1}{\kappa - 1}pv = c_v T, \quad (19)$$

$$i = u + pv = \frac{\kappa}{\kappa - 1}pv = c_p T, \quad (20)$$

где c_v и c_p суть удельные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении, а T — абсолютная температура, причем c_v и c_p должны быть взяты в единицах работы, т.е. их обычные значения должны быть разделены на тепловой эквивалент работы.

Уравнение энергии (17) можно дополнить уравнением, вытекающим из первого принципа термодинамики. В применении к нашему случаю из этого принципа следует, что теплота, полученная любым элементом массы газа извне, вместе с теплотой, возникшей вследствие работы сил трения, увеличивают внутреннюю энергию элемента газа и кроме того, совершают работу расширения. Обозначив работу

сил трения, отнесенную к единице массы элемента газа в струйке газа, через dR , мы можем, на основании только что сказанного, написать:

$$dq + dR = du + p dv. \quad (21)$$

Сложив это уравнение с уравнением (18) и имея в виду, что

$$d(pv) = p dv + v dp,$$

мы найдем:

$$w dw + g dz + v dp + dR = 0. \quad (22)$$

Отсюда после интегрирования мы получим уравнение:

$$\frac{w^2}{2} + gz + \int v dp + R = \text{const}, \quad (23)$$

которое есть не что иное, как уравнение Бернулли, дополненное членом R , учитывающим отнесенную к единице массы работу сил трения на пути от начального поперечного сечения струйки газа до конечного сечения. Таким образом, мы получили уравнение Бернулли для потоков с наличием сопротивлений. Величину $\frac{R}{g}$ можно назвать *высотой трения*. В таком случае из уравнения (23) следует, что сумма высот: скоростной, геометрической, пьезометрической и трения-остается вдоль струйки газа постоянной (ср. § 4 гл. II).

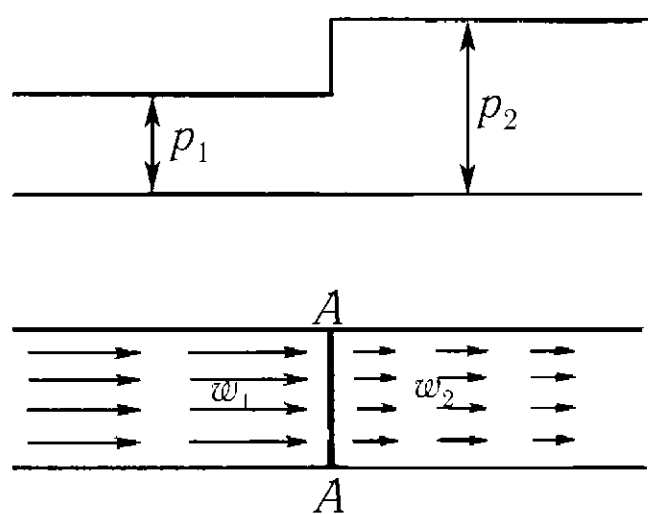


Рис. 221. Прямой скачок уплотнения

§ 5. Теория прямого скачка уплотнения. а) Простейшим примером прерывного уплотнения является *прямой установившийся скачок уплотнения*, впервые рассмотренный Стодолой¹. При таком скачке уплотнения происходит следующее явление: газ, движущийся в виде параллельного потока со скоростью w_1 и имеющий давление p_1 и удельный объем v_1 (рис. 221), при переходе через некоторую плоскость AA прерывно уплотняется, причем скорость его движе-

ния уменьшается до значения w_2 , давление увеличивается до значения p_2 , а удельный объем уменьшается до значения v_2 . Уравнения,

¹См., например, Stodola A., Dampf- und Gasturbinen, изд.5, Berlin, 1922, стр.68.

описывающие это явление, в известной мере сходное с валом воды, рассмотренным в § 15 гл. II, имеют следующий вид:

1. Уравнение неразрывности:

$$m = \frac{w_1}{v_1} = \frac{w_2}{v_2} \quad (24)$$

(в этом уравнении для удобства вычислений масса газа, протекающая в одну секунду, отнесена к единице площади).

2. Уравнение количеств движения:

$$m(w_1 - w_2) = p_2 - p_1. \quad (25)$$

3. Уравнение энергии (приток и отвод тепла отсутствуют!):

$$\frac{w_1^2}{2} + u_1 + p_1 v_1 = \frac{w_2^2}{2} + u_2 + p_2 v_2. \quad (26)$$

Следовательно, если три величины, например, p_1 , v_1 и p_2 , заданы, то остальные три, w_1 , w_2 и v_2 , могут быть вычислены. Однако эти вычисления довольно кропотливы, поэтому мы приведем только важнейшие результаты.

Скорости w_1 и w_2 и после скачка уплотнения связаны между собой соотношением:

$$w_1 w_2 = c'^2,$$

где c' есть критическая скорость звука (стр. 359). Из этого соотношения следует, что если одна из скоростей w_1 или w_2 больше скорости звука, то другая из них обязательно меньше скорости звука.

Так как все приведенные выше уравнения совершенно симметричны, то из этого, казалось бы, следует, что возможны как скачки уплотнения, так и скачки разрежения. Однако, если ввести в расчет энтропию, которая для замкнутых систем может только возрасти, но не уменьшаться, то окажется, что *физически возможны только скачки уплотнения*. Это вполне согласуется с замечаниями в конце § 2, согласно которым устойчиво только прерывное уплотнение, прерывное же разрежение сразу переходит в непрерывную волну разрежения. Таким образом, скачок уплотнения может образоваться только в том случае, если скорость w_1 больше скорости звука.

Только что полученные результаты для установившегося скачка уплотнения могут быть применены к волне уплотнения, распространяющейся в покоящемся воздухе. Для этого достаточно рассмотреть

установившийся скачок уплотнения в другой системе отсчета. В самом деле, сообщим потоку, изображенному на рис. 221, скорость w_1 , направленную справа налево. Тогда скорость перед плоскостью скачка уплотнения будет равна нулю, скачок уплотнения будет распространяться влево со скоростью w_1 , а масса газа позади скачка уплотнения будет двигаться со скоростью $w = w_1 - w_2$. Уравнение количеств движения в этом случае принимает вид:

$$p_2 - p_1 = \rho_1 w_1 w.$$

Таким образом, скорость w_1 распространения волны уплотнения в покоем воздухе всегда больше скорости звука и при очень большой разности давлений может сделаться чрезвычайно большой, что в действительности и наблюдается при взрывах.

Если учесть, что газы все же обладают теплопроводностью, хотя и очень малой, то вместо математически строгого прерывного изменения давления мы будем иметь постепенный переход от давления p_1 к давлению p_2 , правда, совершающийся обычно на отрезке длиной порядка 0,001 мм.¹ Происходящее при этом увеличение энтропии происходит в основном вследствие теплопередачи от частей газа, уже уплотненных, а поэтому более теплых, к частям газа, еще не уплотненным.

При скачке уплотнения кинетическая энергия единицы массы $\frac{w_2^1 - w_2^2}{2}$ преобразуется в тепловую энергию, вследствие чего увеличивается теплосодержание. Однако при расширении газа от давления p_2 до давления p_1 только часть этой тепловой энергии опять преобразуется в кинетическую энергию. При неоднородном скачке уплотнения (примером такого скачка может служить головная волна перед снарядом, см. рис. 249, или случай, изображенный на рис. 232) различные струйки газа нагреваются по-разному, что приводит к потере однородности массы газа и к нарушению потенциального характера движения.

С процессами прерывного уплотнения тесно связаны *взрывные волны*, возникающие при сгорании воспламеняющихся газовых смесей. Уравнения (24)–(26) могут быть применены и к взрывным волнам, если только в левой части уравнения энергии (26) добавить член, учитывающий химическую энергию, возникающую при взрыве. Более подробное исследование, выполненное Беккером², показывает, что при взрыве следует различать два

¹ Prandtl I., Zeitschr. f. d. gesamte Turbinenwesen, т. 3 (1906), стр. 241; Becker R., Zeitschr. f. Phys., т. 8 (1922), стр. 321.

² Becker R., Zeitschr. f. Elektrochemie, т. 23 (1917), стр. 40 и 304, далее Zeitscher. f. Phys., т. 8 (1922), стр. 348; см. также Jost W., Explosions- und Verbrennungsvorgänge in Gasen, Berlin, 1939, стр. 161 и следующие.

случая: во-первых, случай более или менее быстрого сгорания и, во-вторых, случай детонации. В первом случае воспламенение распространяется вследствие теплопроводности, во втором случае оно начинается вследствие нагревания, вызванного скачком уплотнения. Возможность детонации в той или иной взрывчатой газовой смеси зависит от физических и химических свойств смеси (теплопроводность, скорость реакции и т. д.). Детонация может возникать также в жидких и твердых взрывчатых веществах. Скорость распространения детонации весьма велика: для гремучего газа при атмосферном давлении и обычной температуре она равна приблизительно 2800 м/сек , для нитроглицерина — около 7400 м/сек . Давления, возникающие при детонации в гремучем газе и нитроглицерине, равны соответственно 18 кг/см^2 и $100\,000 \text{ кг/см}^2$.

б) Теперь мы можем выяснить, что должно проходить в расширяющейся части сопла Лавала в тех случаях, когда противодавление p_2 заключается в пределах от p_B до p_H (в § 3 этот вопрос остался открытым). Предположим, что в таких случаях где-нибудь позади самого узкого поперечного сечения возникает прямой скачок уплотнения, переводящий сверхзвуковую скорость течения в дозвуковую. Кривая изменения давления на рис. 220б была построена для определенного значения полной энергии и определенного значения секундного расхода. Дополним теперь рис. 220б кривыми изменения давления, построенными для тех же значений полной энергии и расхода, но для меньших начальных давлений p_1 . Эти кривые изображены отдельно на рис. 222. Так как полная энергия при скачке уплотнения остается неизменной, то полученные кривые и дают представление о тех явлениях, которые можно ожидать в рассматриваемых условиях. Переход от кривой нормального изменения давления $p_1 = p_H$ к новым кривым осуществляется в результате скачка уплотнения, место возникновения которого однозначно определяется уравнением количеств движения. Однако в действительности получается более сложная картина, так как вместо прямого скачка уплотнения могут возникать также косые скачки (см. § 7) и другие сопротивления. Кроме того, вследствие внезапного значительного повышения давления происходит отрыв потока от стенок сопла (см. § 6

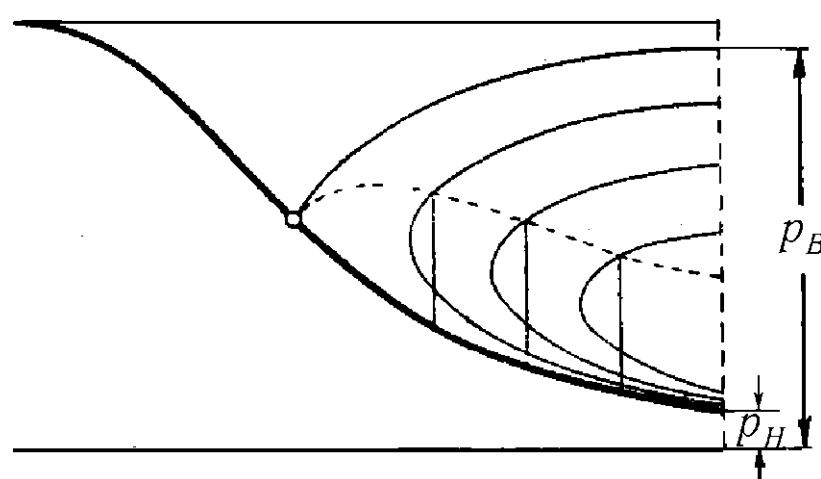


Рис. 222. Теоретическое распределение давления в сопле Лавала при скачках уплотнения

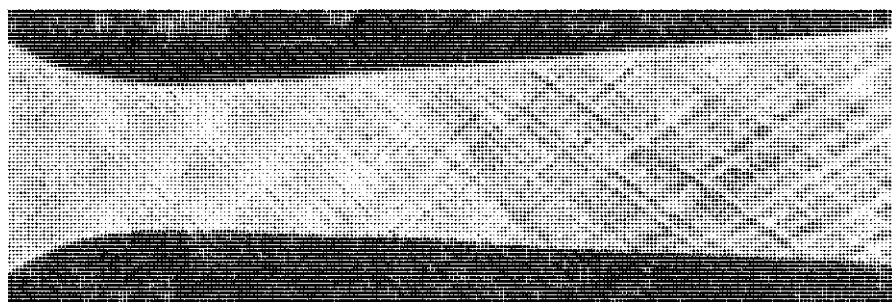


Рис. 223. Течение через сопло Лавали сжатого воздуха при начальном давлении в 7 *ата* и противодавлении в 1 *ата*. Скорость истечения — сверхзвуковая

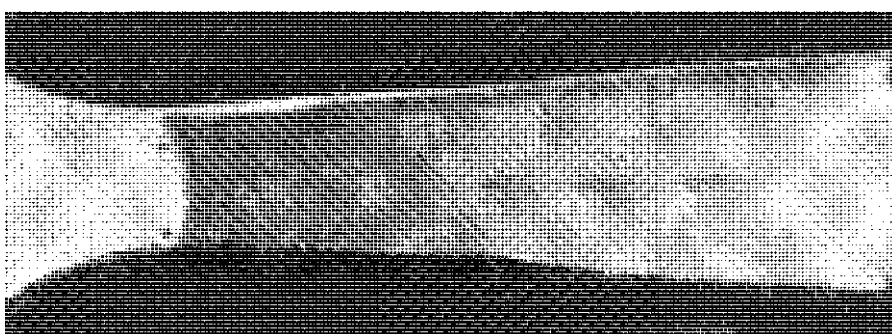


Рис. 224. Течение через сопло Лавали при ($p_2 > p_v$). Скорость истечения дозвуковая

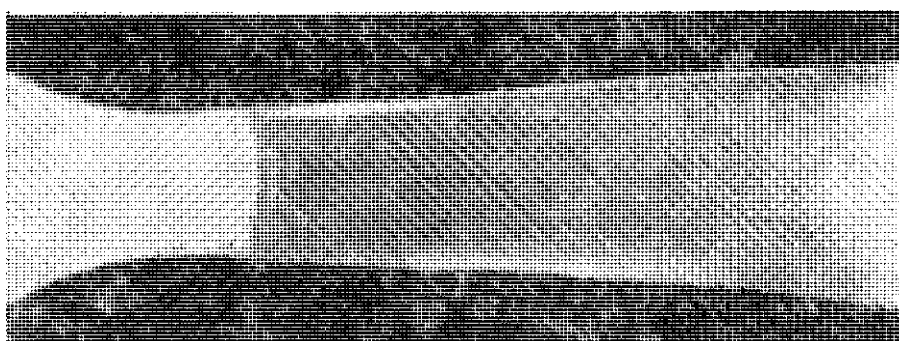


Рис. 225. Течение через сопло Лавали со скачком уплотнения ($p_2 < p_v$).

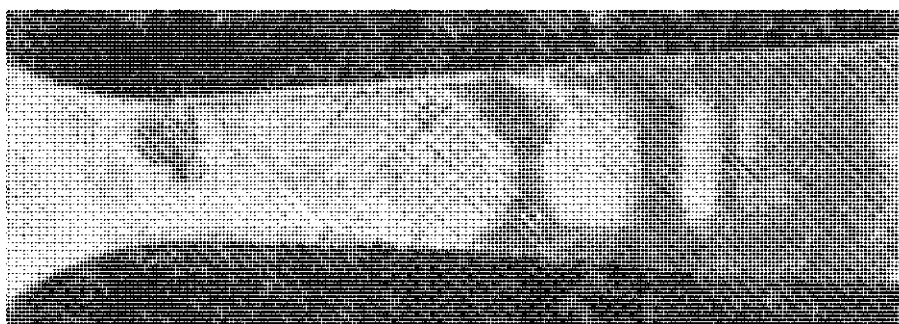


Рис. 226. Течение через сопло Лавали со скачком уплотнения ($p_2 < p_v$)

гл. III). В результате, вместо прямого скачка уплотнения образуется два перекрещивающихся косых скачка (см. рис. 226). Если при этом струя газа вновь не прижимается к стенкам, то за скачками уплотнения часто следуют волны давления. Действительное повышение давления,

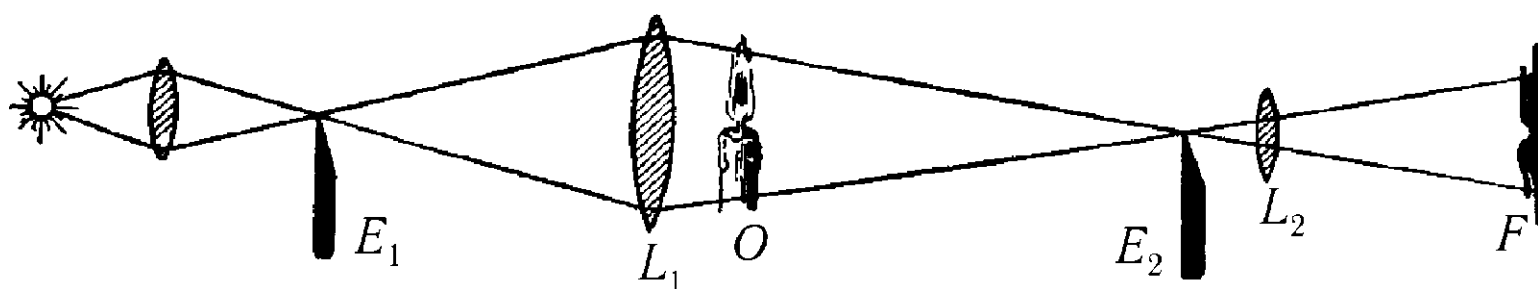


Рис. 227. Схема установки для получения снимков по способу Теплера

возникающее при скачке уплотнения, значительно меньше теоретического значения.

На рис. 223–226 изображены снимки потока газа через сопла со стеклянными боковыми стенками и с прямоугольным поперечным сечением при различных противодавлениях. Все эти снимки получены по способу Теплера¹. Прежде чем дать пояснения к этим снимкам, остановимся вкратце на способе их получения. Суть способа Теплера заключается в том, что области потока, в которых имеют место малые разности давлений, получают при проектировании на экран разную освещенность. Для этой цели лучи, исходящие из подходящего источника света (рис. 227), концентрируются при помощи собирающей линзы в небольшое световое пятно, на месте которого устанавливается экран E_1 с острым ребром. Этот экран задерживает часть световых лучей. Остающаяся часть лучей проходит через хорошо скорректированную линзу L_1 , которая дает резкое изображение этих лучей и ребра экрана E_1 на втором экране E_2 . Этот второй экран также имеет острое ребро, параллельное ребру первого экрана; оно устанавливается так, чтобы дальше проходила только узкая полоска света. Поместим теперь между линзой L_1 и экраном E_2 какой-нибудь возмущающий объект, например, пламя зажженной свечи O . Это пламя будет сообщать проходящим через него лучам света, исходящим из светового пятна в E_1 , небольшие отклонения вверх и вниз. Если такой луч света пройдет через точку пламени, вызывающую отклонение луча вверх, то продолжение этого луча пройдет над экраном E_2 выше, чем при отсутствии отклонения. Наоборот, если луч света, исходящий из E_1 , пройдет через точку пламени, вызывающую отклонение вниз, то над экраном E_2 свет либо совсем не пройдет, либо пройдет ослабленным. Следовательно, если теперь при помощи линзы L_2 отобразить объект O на матовый экран или на фотографическую пластинку F , то в полученном изображении мес-

¹ Töpler A., Beobachtungen nach einer neuen optischen Methode. Bonn 1864 (перепечатано в Ostwalds Klassiker, т. 157).

та объекта, вызвавшие отклонение лучей вверх, будут выглядеть светлыми, а места объекта, вызвавшие отклонение лучей вниз, наоборот, будут выглядеть темными. Если пламя свечи заменить неоднородным потоком газа, то получится совершенно такая же картина. Отклонение лучей света в неоднородной массе воздуха пропорционально составляющей градиента плотности в направлении, перпендикулярном к ребру экрана. Следовательно, те места потока, в которых плотность уменьшена, выходят на снимке либо светлыми, либо темными (в зависимости от направления потока), те же места, где плотность увеличена, либо темными, либо светлыми.

На рис. 223 показана фотография невозмущенного потока сжатого воздуха, входящего в сопло при давлении около 7 атм и расширяющегося до давления в 1 атм . В области сверхзвуковой скорости отчетливо видны в виде тонких полос перекрещивающиеся установившиеся звуковые волны. Эти волны получились особенно четкими и частыми потому, что стенки сопла были намеренно сделаны шероховатыми при помощи напильника. Измерение угла, под которым пересекаются волны, позволило определить отношение — в разных точках сопла. Значения скорости w , вычисленные по теоретическим формулам, оказались хорошо совпадающими с измеренными значениями¹. На рис. 224 изображена фотография потока, в котором звуковая скорость не достигается ($p_2 > p_v$), в этом потоке плотность уменьшается вплоть до самого узкого поперечного сечения, а затем начинает увеличиваться. Установившиеся звуковые волны не возникают ни в одном месте сопла. На рис. 225 показана фотография скачка уплотнения ($p_2 < p_v$). Отчетливо видны первые установившиеся звуковые волны перед скачком уплотнения; после же скачка уплотнения все поле потока затемнено — скорость течения здесь везде меньше скорости звука. На рис. 226 показана фотография скачка уплотнения при еще меньшем противодавлении. В этом случае происходит отрыв струи от стенок сопла и образуются перекрещивающиеся косые скачки уплотнения, позади которых распространяются звуковые волны. Каждая отдельная волна давления на рис. 226 идентична с соответствующей волной на рис. 223, что опять подтверждает сказанное в § 3: как только в потоке устанавливается звуковая скорость, всякого рода возмущения давления не передаются вверх по течению.

Сходство течения газа через сопло с течением воды через плотину (§ 16

¹ Magin L. Диссертация, Göttingen, напечатана в Forschungsheft 62 des Vereins Deutsch. Ing. 1908.

гл. II) очевидно. В самом деле, при перетекании воды через плотину скорость движения вала играет такую же роль, как скорость звука при течении газа через сопло. Прейсверк¹ исследовал эту аналогию с математической точки зрения и показал, что движение воды над плоским дном в случае, когда горизонтальные размеры потока велики по сравнению с глубиной, в количественном отношении совпадает с плоским течением гипотетического газа, для которого отношение удельных теплоемкостей равно $\kappa = 2$. При этом глубина потока в каждом месте соответствует плотности газа и одновременно — температуре газа (так как $\kappa = 2$).

§ 6. Движение газа при наличии сопротивлений. а) *Установившееся течение.* В установившемся потоке газа при наличии сопротивлений, но при отсутствии теплопередачи через стенки, ограничивающие поток, полная энергия остается постоянной, так как работа трения полностью преобразуется в теплоту. В большинстве случаев разности высот не играют никакой роли, поэтому уравнение энергии (17) принимает вид:

$$\frac{w^2}{2} + u + pc = \text{const.} \quad (27)$$

Для идеальных газов значения нив определяются соотношениями (19) и (20). Подставляя эти значения в уравнение (27), мы получим:

$$\frac{w^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1}pv = \text{const} \quad (28)$$

или

$$\frac{w^2}{2} + c_p T = \text{const} \quad (29)$$

(напомним, что удельную теплоемкость c_p следует измерять в единицах работы, см. § 4). Из уравнения (29) следует, что при движении идеальных газов понижение температуры по сравнению с начальным состоянием зависит только от скорости течения в рассматриваемом месте, но не от величины сопротивления. Если скорость течения везде незначительна, как это наблюдается в потоках с очень большим сопротивлением, то расширение газа при его движении происходит при постоянной температуре. Работа расширения при таком движении газа

¹Preiswerk E., Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik an der E.T.H. Zürich № 7 (1938).

целиком преобразуется в работу трения, и теплота, возникающая вследствие трения, возмещает охлаждение, возникающее вследствие расширения. Такое же явление наблюдается и в том случае, когда поток газа, имеющий значительную скорость, быстро теряет ее вследствие большого сопротивления.

Действительные газы немного отклоняются от такого поведения. Впервые это показали В. Томсон (W. Thomson) и Джоуль (Joule). Они заставляли протекать воздух под большой разностью давлений через ватную пробку и обнаружили, что при этом происходит небольшое охлаждение воздуха, которое они объяснили молекулярным притяжением. Для воздуха при обычной температуре это охлаждение равно $1/4^\circ\text{C}$ на каждую атмосферу, однако при низких температурах оно значительно больше. На таком охлаждении газа, между прочим, основано действие машины Линде для сжижения воздуха.

Для математического исследования течения газа в трубе с сопротивлением следует к уравнению энергии (17) или (28) присоединить уравнение неразрывности и дополненное уравнение Бернулли (23) и, кроме того, ввести некоторое допущение относительно математического выражения для работы сопротивления R .

Выполнение такого исследования для течения через сопло Лаваля показывает, что поправки для скорости и давления по сравнению с прежними результатами в большинстве случаев не очень велики. В частности, звуковая скорость достигается не в самом узком поперечном сечении сопла, а немного позади него и при этом при более низком давлении. Несколько подробнее мы остановимся, не приводя вычислений¹, на течении газа через трубу постоянного поперечного сечения.

Предварительно рассмотрим такое течение с сопротивлением, при котором скорость w остается постоянной; тогда, согласно уравнению (28),

$$pv = \text{const.} \quad (30)$$

Так как в этом случае сопротивление преодолевается за счет падения давления в направлении течения, то из уравнения (30) следует, что удельный объем возрастает в направлении течения, следовательно, на основании уравнения неразрывности, возрастает и поперечное сечение потока. Для того чтобы от этого случая перейти к течению в трубе с постоянным поперечным сечением, следует сузить только что рассмотренный расширяющийся поток до постоянного поперечного сечения. При условии, что скорость потока меньше скорости звука, такое

¹df Grashof, Theoretische Maschinenlehre, т. I, Leipzig, 1875, стр. 592; см. также Zeuner, Techn. Thermodynamik, т. I, изд. 2, Leipzig, 1900, стр. 261.

сужение влечет за собой увеличение скорости и, следовательно, новое понижение давления и новое увеличение удельного объема. Это новое понижение давления тем сильнее, чем больше скорость течения приближается к скорости звука (см. кривую $\frac{v}{w}$ на рис. 215). Скорость звука c' , соответствующая критическому давлению (§ 3), является в данном случае наивысшей скоростью, достижимой в конце трубы.

При движении со сверхзвуковой скоростью, которая может быть достигнута, конечно, только путем предварительного прохождения газа через поставленное перед трубой сопло Лавала, сужение расширяющегося потока влечет за собой уменьшение скорости и повышение давления. Скорость звука c' , соответствующая критическому давлению, по-прежнему является предельной достижимой скоростью при непрерывном изменении давления. Однако эта предельная скорость может быть достигнута в действительности только при условии, что труба имеет вполне определенную, не очень большую длину, зависящую от начального состояния газа и величины сопротивления трения. В трубе же с большей длиной происходит где-либо внутри трубы скачок уплотнения, скорость течения из сверхзвуковой делается дозвуковой и дальнейшее течение происходит так, как было описано выше для случая дозвуковой скорости.

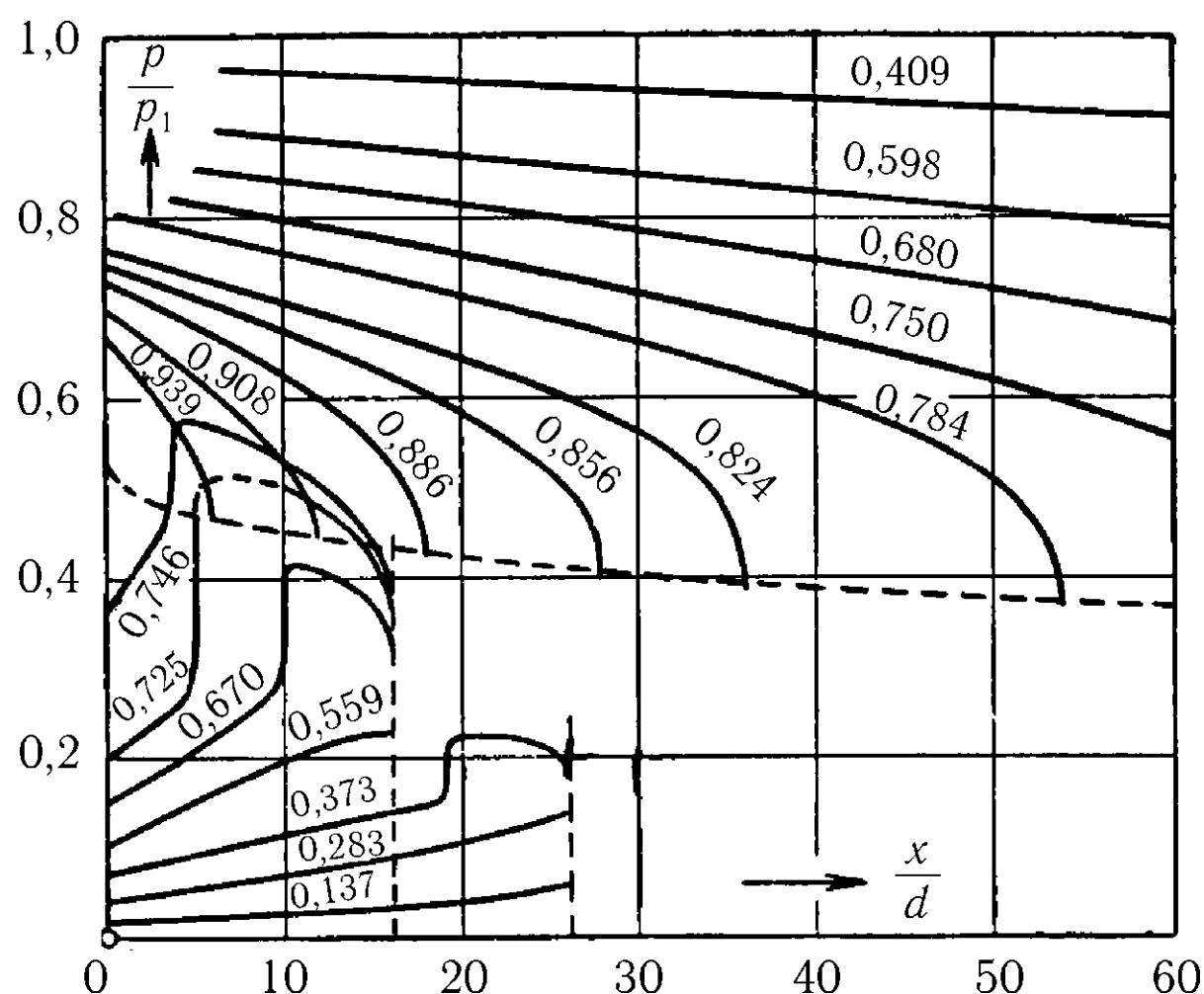


Рис. 228. Изменение давления вдоль трубы при течении газа

Согласно опытам Фресселя¹, коэффициент сопротивления λ при течении газов в гладких трубах с дозвуковыми и сверхзвуковыми скоростями не отличается сколько-нибудь от коэффициента сопротивления при движении несжимаемых жидкостей. На рис. 228 изображены кривые изменения давления вдоль оси трубы, полученные Фресселем. Кривые, идущие сверху, относятся к дозвуковым течениям, а кривые, идущие снизу, — к течениям, начинающимся со сверхзвуковой скорости, но при достаточной длине трубы переходящим вследствие скачка уплотнения в дозвуковые течения. Числа, надписанные около кривых, указывают расход в долях максимального расхода, получающегося при истечении под тем же начальным давлением из короткого насадка с таким же диаметром, как у трубы.

б) *Истечение из сосудов и втекание в сосуды.* Предположим, что между газом, содержащимся в сосуде, и стенками последнего не происходит теплообмена; тогда при истечении газа из такого сосуда газ, остающийся в сосуде, адиабатически расширяется, следовательно, температура его понижается. Если бы некоторая масса газа, вытекшая за короткий промежуток времени из сосуда, пришла опять в состояние покоя, не смешавшись при этом с окружающей средой, то на основании уравнения (29) она имела бы ту температуру, которая была в сосуде при ее истечении. Однако в действительности каждая новая вытекшая масса газа смешивается с ранее вытекшими массами. Поэтому смесь, которую можно было бы уловить, например, в газовый колокол, имеет температуру T_m , промежуточную между начальной и конечной температурами T_1 и T_2 в сосуде. Эквивалентом тепловой энергии, потерянной газом при охлаждении до температуры T_2 в сосуде и до температуры T_m вне сосуда, является работа, произведенная газом для преодоления внешнего давления.

Если газ, находящийся под атмосферным давлением, втекает в сосуд, в котором давление меньше атмосферного, то каждая новая масса газа, поступившая в сосуд, быстро смешивается с газом в сосуде. Если бы этого не происходило, т. е. каждая новая масса, поступившая в сосуд, приходила бы в состояние покоя, не смешиваясь с окружающим газом, то она приобретала бы свою прежнюю температуру; газ же, находившийся до этого в сосуде, адиабатически сжимался бы и, следовательно, нагревался. Но так как в действительности в сосуде происходит перемешивание, то нагревание газа внутри сосуда получается меньшим, чем должно было бы быть при адиабатическом сжатии. Эквивалентом

¹Frössel W., Forschung, т. 7 (1936), стр. 75.

тепловой энергии, полученной газом при нагревании, является работа, совершенная внешним давлением при проникновении газа в сосуд.

Если газ, находящийся под постоянным давлением, втекает в сосуд, в котором создан полный вакуум, то температура T в сосуде остается в течение всего процесса втекания постоянной и равной κT_0 , где T_0 есть внешняя температура.

При перетекании газа из одного сосуда в другой в первом сосуде происходит охлаждение, а во втором — нагревание. Так как в этом процессе внешняя среда не участвует, то полное теплосодержание в обоих сосудах остается в течение всего процесса постоянным.

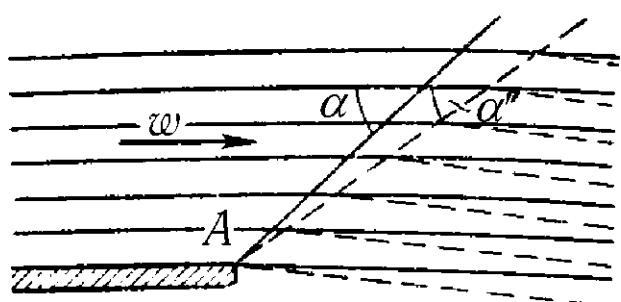


Рис. 229. Сверхзвуковой поток с понижением давления

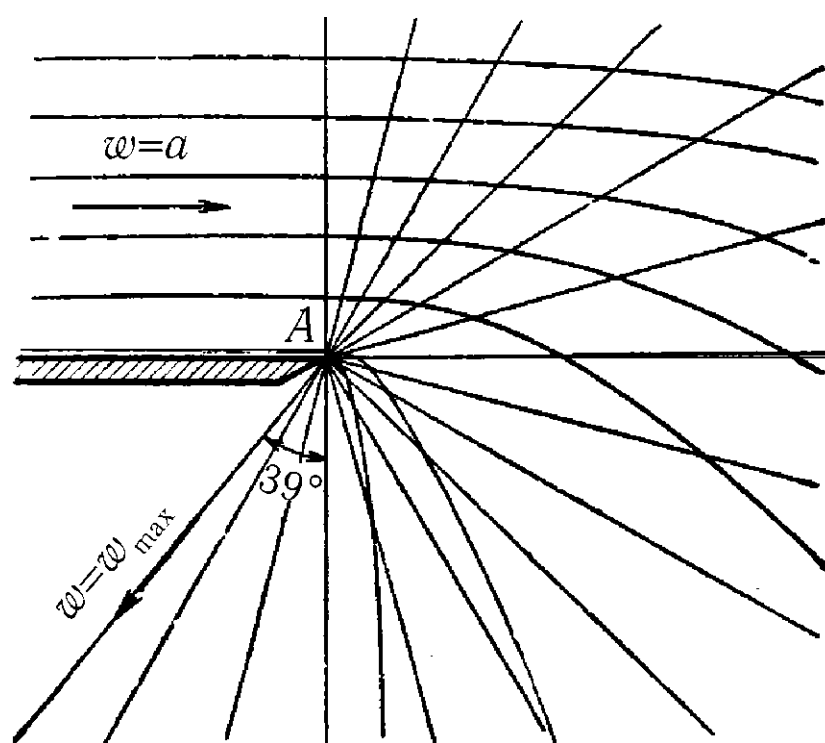


Рис. 230. Сверхзвуковой поток, движущийся в вакуум

§ 7. Двухмерные и трехмерные сверхзвуковые потоки. а) *Сверхзвуковой поток около угла.* Предварительно рассмотрим такой сверхзвуковой поток газа около стенки (рис. 229), в котором в точке A происходит небольшое *прерывное* понижение давления. Это понижение давления распространяется в потоке в виде волны или линии разрежения, образующей с направлением потока угол Маха α , и сообщает частицам газа ускорение, направленное перпендикулярно к скачку давления. В результате скорость потока немного увеличивается и одновременно немного изменяет свое направление.

Если затем в точке A происходит новое прерывное понижение давления, то оно распространяется в отклоненном потоке уже под другим углом Маха α (меньшим угла α) и обуславливает новое увеличение скорости и новое изменение ее направления и т. д.

Такого рода процесс, который в действительности протекает непрерывно, можно теоретически исследовать, рассматривая его как потенциальное течение¹, обладающее, согласно сказанному выше, следующими свойствами: вдоль каждой прямой, проведенной из точки A , давление, а также величина и направление скорости постоянны; каждая прямая, проведенная из A , образует с направлением течения на ней угол Маха, вследствие чего составляющая скорости, перпендикулярная к этой прямой, всегда равна скорости звука, соответствующей состоянию газа в этом месте.

По мере все большего и большего огибания потоком точки A , скорость его постепенно увеличивается, однако она не может превысить некоторого максимального значения, соответствующего истечению в вакуум и вполне определенного для данного газа при данном начальном состоянии (§ 3). Вместе с тем и направление потока не может отклониться от направления, совпадающего со стенкой, больше, чем на определенный угол. Как показывает математическое исследование, для воздуха ($\kappa = 1,405$) предельный угол отклонения потока составляет 129° . На рис. 230 изображена картина такого сверхзвукового воздушного потока, движущегося в вакуум.

Главная ценность рассмотренного теоретического решения состоит в том, что оно позволяет комбинировать любые клинообразные области потока, ограниченные линиями распространения давления, с прямолинейными участками потока. Пусть, например, поток газа движется со сверхзвуковой скоростью w_1 параллельно стенке, заканчивающейся в точке A (рис. 231), и пусть в пространстве правее точки A имеет место давление p_2 , меньшее на некоторую конечную величину чем давление p_1 в потоке газа. До линии 1, образующей с направлением потока угол Маха α ($\sin \alpha_1 = \frac{c_1}{w_1}$), поток будет двигаться без изменений. Начиная от этой линии, газ начнет расширяться, пока его давление не уменьшится от p_1 до p_2 . Расширение закончится на линии 2, после перехода через которую поток будет двигаться прямолинейно и равномерно в новом направлении. Это направление определяется углом Маха α_2 , соответствующим скорости w_2 , большей скорости w_1 .

Если на стенке имеется один или несколько выпуклых углов, то и в этом случае поток можно представить как комбинацию прямолинейных участков, на которых газ движется равномерно, и клинообразных областей, внутри которых происходит расширение газа и граница-

¹Prandtl L., Physikal. Zeitschr., т. 8 (1907), стр. 23; Meyer Th., Диссертация, Göttingen, напечатанная в Forschungsheft 62 d. Vereins Deutsch. Ing. 1908.

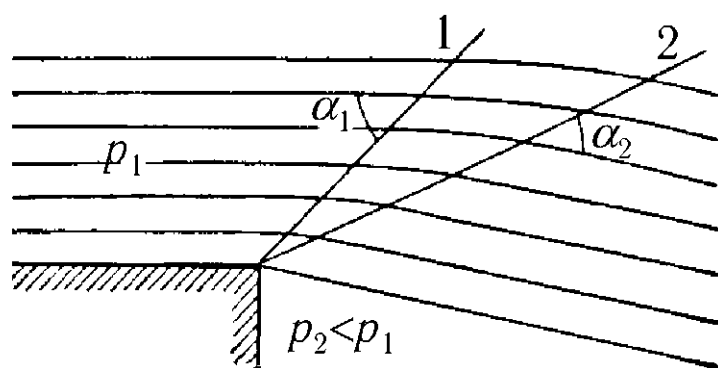


Рис. 231. Линии разрежения

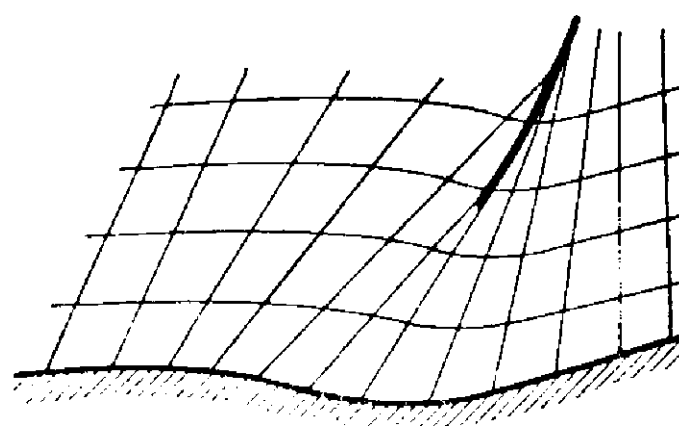


Рис. 232. Поток вдоль криволинейной стенки

ми которых являются линии, образующие с направлением потока углы Маха. Течение вдоль непрерывно изогнутой выпуклой стенки можно рассматривать как предельный случай только что рассмотренного течения. Стенка может быть также вогнутой, однако в этом случае решение остается правильным только до тех пор, пока какие-нибудь две соседние линии не пересекаются (рис. 232). Если такое пересечение происходит, то в этом месте состояние течения изменяется прерывно.

При течении вдоль стенки с вогнутым углом, когда давление в потоке повышается, а также при истечении струи газа в пространство с более высоким давлением, в потоке всегда возникает прерывное изменение состояния, происходит так называемый косой скачок уплотнения (рис. 233). Если к этому случаю применить предыдущее рассуждение, то окажется, что линия распространения давления 2, которая теперь является *линией уплотнения*, должна лежать не после линии уплотнения 1, как на рис. 231, а впереди нее, что физически невозможно; вместо этого возникает прерывное уплотнение, причем плоскость уплотнения лежит между линиями 1 и 2.

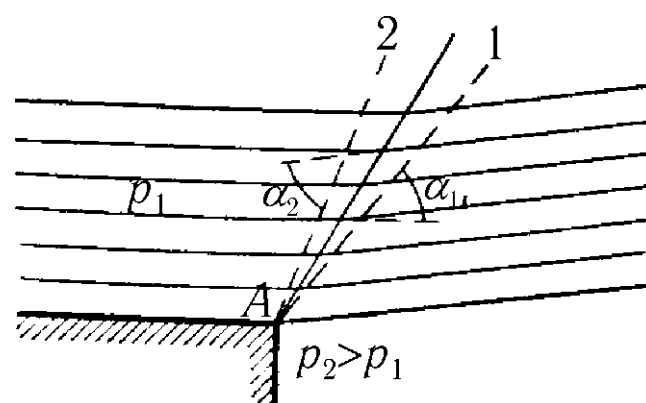


Рис. 233. Косой скачок уплотнения

Составляющие скорости до и после косого скачка уплотнения, перпендикулярные к плоскости скачка, связаны между собой такими же соотношениями, как и скорости до и после прямого скачка уплотнения. Составляющие же скорости, параллельные плоскости косого скачка, равны друг другу.

б) *Свободные газовые струи*. Мах и Зальхер¹, наблюдая по методу

¹ Mach E. und Salcher P., Sitzungber. d. Wiener Akad., Math.-naturw. Klasse IIa, т. 98 (1889) стр. 1303.

Теплера газовые струи, вытекающие из насадка, обнаружили, что если скорость в струе больше скорости звука, то в ней возникают правильные волны. Впоследствии существование таких волн было подтверждено также другими исследователями при помощи измерений давления. Возникновение этих волн объясняется следующим образом: косые линии разрежения и уплотнения, описанные в предыдущем пункте, при пересечении проникают друг через друга без заметного взаимного влияния и, достигнув свободных границ, полностью отражаются от них, причем так, что линии разрежения превращаются в линии уплотнения, и наоборот.

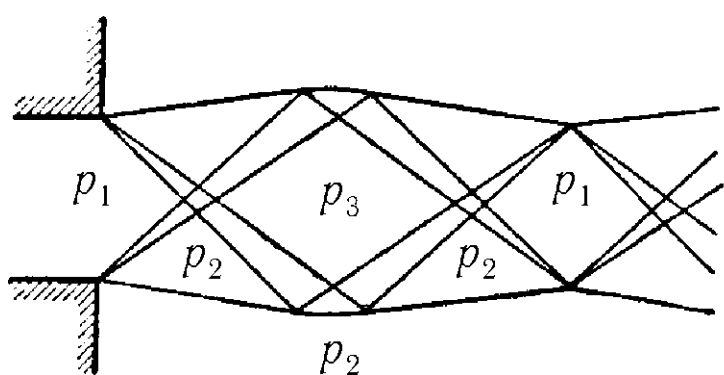


Рис. 234. Линии разрежения и уплотнения в струе при ее истечении со сверхзвуковой скоростью

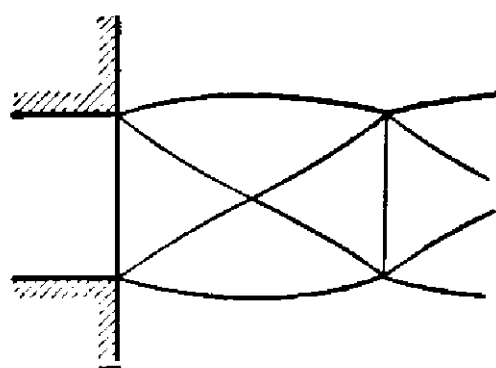


Рис. 235. Линии разрежения и уплотнения в струе при ее истечении со скоростью звука

Движение в газовой струе, вытекающей со сверхзвуковой скоростью из длинного прямоугольного насадка, можно рассматривать как плоское движение. На основании только что указанных свойств линий разрежения и уплотнения, картина течения такой газовой струи имеет следующий вид. Если в пространстве, в которое втекает струя, давление меньше, чем в струе (рис. 234), то с выходных ребер насадка отходят по две линии разрежения такого же вида, как и на рис. 231; эти линии расходятся в виде клина и на некотором расстоянии от насадка перекрещиваются, а затем, достигнув границ струи, отражаются от них в виде линий уплотнения. Последние распространяются дальше, суживаясь в виде клина, и, достигнув границ струи, отражаются в виде линий разрежения. Затем картина повторяется в прежнем порядке. Давление p_3 в центральном поле образовавшихся волн во столько же раз меньше внешнего давления p_2 , во сколько раз p_1 больше p_2 .

Если внешнее давление p_2 больше давления в струе p_1 при ее выходе из насадка, то сначала возникают два косых скачка уплотнения такого же вида, как на рис. 233; эти скачки, достигнув границ струи,

отражаются в виде расходящихся клином линий разрежения, которые в дальнейшем ведут себя так же, как было описано выше.

Если начальная скорость истечения газа равна скорости звука (как всегда бывает в случае простых насадков, т. е. насадков, не являющихся продолжением сопла Лавалья), то начальный угол Маха равен $\alpha = 90^\circ$, и картина распространения линий разрежения и уплотнения принимает вид, изображенный на рис. 235.

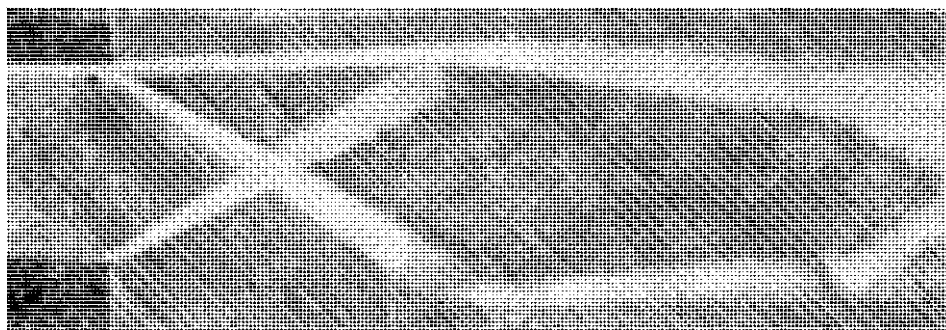


Рис. 236. Истечение струи газа со сверхзвуковой скоростью в пространство, давление в котором меньше давления в струе

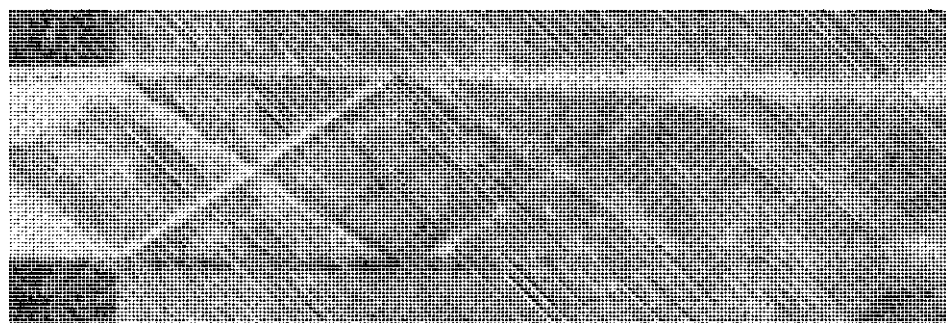


Рис. 237. Истечение струи газа со сверхзвуковой скоростью в пространство, давление в котором равно давлению в струе

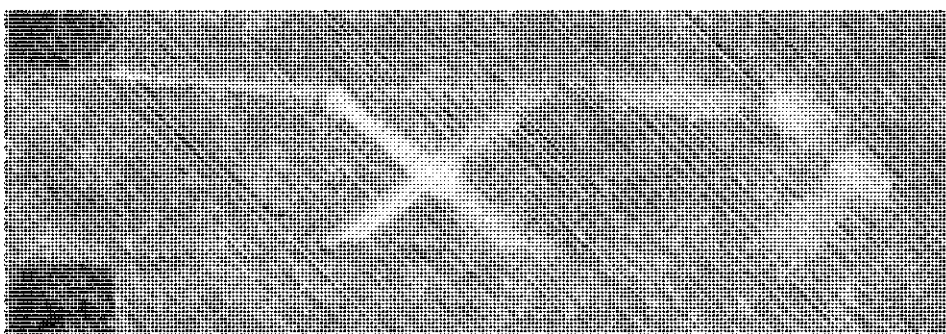


Рис. 238. Истечение струи газа со сверхзвуковой скоростью в пространство, давление в котором больше давления в струе

На рис. 236–239 показаны фотографические снимки волн в газовых струях. Давление в пространстве, в которое втекает струя, на рис. 236 ниже, чем давление в струе, на рис. 237 одинаково с давлением в струе, а на рис. 238

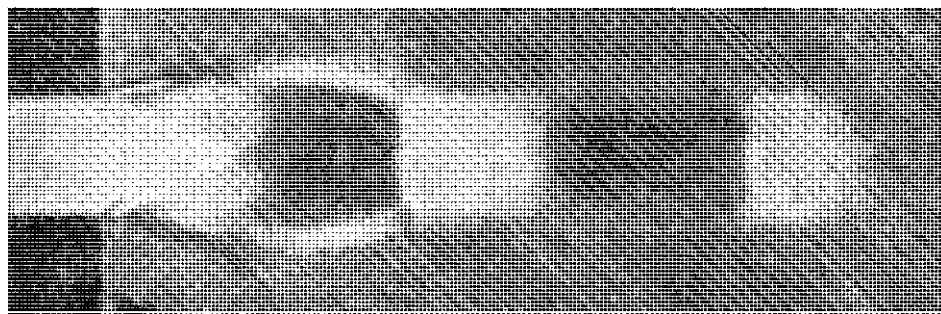


Рис. 239. Истечение струи газа со скоростью, равной скорости звука

выше, чем давление в струе. Скорость истечения во всех этих случаях выше скорости звука. Наконец, на рис. 239 изображен случай, когда скорость истечения равна скорости звука. На всех снимках светлые места означают зоны разрежения, а темные — зоны уплотнения.

Если струя вытекает из насадка не в виде параллельного потока, как это обычно и бывает, то картина расположения линий разрежения и уплотнения становится значительно сложнее. Однако длина волны остается во всех случаях довольно постоянной; как показывают расчеты, она равна

$$\lambda = 2d_m \operatorname{ctg} \alpha_m = 2d_m \sqrt{\left(\frac{w}{c}\right)_m^2 - 1},$$

где d_m есть средний диаметр струи, а α_m и $\left(\frac{w}{c}\right)_m$ — средние значения угла Маха α и отношения $\frac{w}{c}$.

Еще более сложная картина линий разрежения и давления получается при истечении струи из круглого отверстия, так как в этом случае линии разрежения и уплотнения расходятся и сходятся в виде конусов. Снимок струи, вырывающейся из суживающегося отверстия, следовательно, имеющей скорость истечения, равную скорости звука, был изображен выше, на рис. 216. Согласно опытам Эмдена (R. Emden), для сжатого воздуха длина волны в такой струе равна

$$\lambda = 0,89d \sqrt{\frac{p_1 - 1,9p_2}{p_2}},$$

уже d есть диаметр отверстия, p_1 — давление в напорном резервуаре, p_2 — давление в пространстве, в которое втекает струя.

§ 8. Приближенный расчет двумерных сверхзвуковых потоков при помощи диаграммы характеристик. Приемы построения сверхзвуковых потоков, изложенные в предыдущем параграфе, могут быть обобщены путем введения следующего приближенного

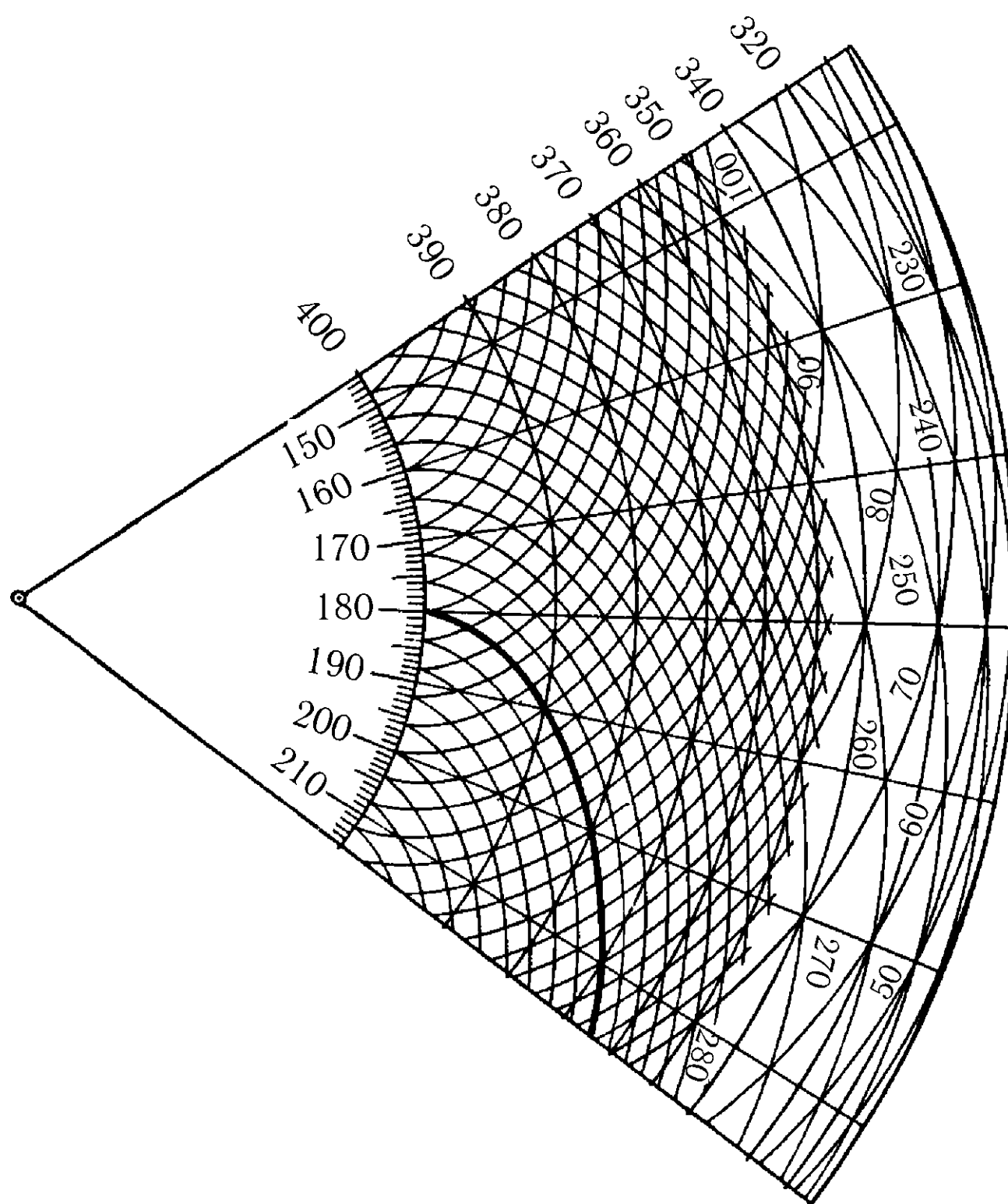


Рис. 240. Диаграмма характеристик. Разность чисел, надписанных около отдельных кривых, дает сразу в градусах величину угла, образуемого с начальным направлением вектором скорости, изображаемым точкой пересечения этих кривых; сумма этих чисел дает возможность найти при помощи специальной таблицы величину скорости и давление

способа расчета¹. Изменение состояния потока, которое в действительности происходит непрерывно, разобьем на последовательность прерывных изменений, каждое из которых будет представлять собой один из процессов, изображенных на рис. 229 и 233. Следовательно, каждое прерывное изменение состояния будет изображаться либо линией

¹Этот способ предложен Л.Прандтлем и А.Буземаном, см. Festschrift zum 70 Geburtstag von Prof. A. Stodola, Zürich 1929, стр. 499, или Handbuch der Experimentalphysik, т. IV, часть I, стр. 421.

разрежения, либо линией уплотнения. Последовательность прерывных изменений состояния выберем так, чтобы на каждой отдельной линии разрежения или уплотнения линии тока отклонялись на вполне определенный, заранее установленный угол, например, на 2° . Это означает, что скорости в промежуточных полях между отдельными линиями разрежения и уплотнения могут иметь только такие направления, которые отличаются друг от друга на кратное от 2° . Так как величина скорости до и после каждой линии разрежения или уплотнения связана с заданным углом отклонения, то для абсолютных значений скоростей возможна также только дискретная последовательность значений. Если мы построим план скоростей (годограф), т. е. отложим все векторы скоростей из общего центра O , то получим правильную сетку из двух семейств равноотстоящих друг от друга кривых (рис. 240). Каждая точка этой сетки, называемая *диаграммой характеристик*, будет представлять допустимое значение скорости, а каждая линия, соединяющая две соседние точки сетки, будет соответствовать переходу от одного состояния потока к другому — разрежению или уплотнению с поворотом линий тока на 2° . Состояния течения на рис. 230, где на каждой линии разрежения, проходящей через точку A , имеет место постоянная скорость, изображены на рис. 240 жирной линией. (Если в потоке линии разрежения или уплотнения отходят только в одну какую-нибудь сторону — такие случаи мы имеем на рис. 230 и 232, — то в диаграмме характеристик приходится передвигаться вдоль кривой только одного семейства; однако в общем случае линии разрежения и уплотнения отходят в обе стороны.) Задача построения линий тока будет вполне определенной, если будут заданы скорости течения и их направления в каком-нибудь поперечном сечении потока и, кроме того, для случая свободной струи — давление на ее боковых границах, а для случая жестких ограничивающих стенок — направление течения на них. Линии разрежения и уплотнения, подходящие изнутри потока к его границам, отражаются от них, и притом следующим образом: если границами потока является свободная поверхность струи, где скорость должна оставаться постоянной, то отражение происходит так, что линия уплотнения превращается в линию разрежения; если же границами потока являются неподвижные стенки, то линия уплотнения остается после отражения линией уплотнения, а линия разрежения — линией разрежения.

Необходимо подчеркнуть, что этот способ применим только к таким потокам, в которых постоянная Бернулли имеет одинаковое значение на всех линиях тока, следовательно, только к потенциальным

потокам (см. § 9 гл. II). Только для таких потоков можно обойтись применением описанной диаграммы характеристик.

Если несколько линий уплотнения сходятся, то дальше они продолжают как скачок уплотнения. Если при этом прерывное увеличение давления не очень велико, то процесс скачка уплотнения приближенно можно рассматривать как обратимый, и, следовательно, для дальнейшего определения величин и направлений скоростей можно попрежнему пользоваться диаграммой характеристик. Однако в случае сильных скачков уплотнения этого делать нельзя, так как получаются значительные ошибки. Графический способ, позволяющий оперировать с сильными скачками уплотнения, дан А. Буземаном¹.

Некоторые обстоятельства значительно облегчают пользование диаграммой характеристик. Прежде всего, линии разрежения и уплотнения всегда перпендикулярны к отрезкам, соединяющим соответствующие две точки в диаграмме характеристик. В этом легко убедиться на основании следующих соображений. Как уже было упомянуто, составляющая скорости, параллельная линии разрежения или уплотнения, при переходе потока через эти линии остается неизменной; изменяется только составляющая скорости, перпендикулярная к этим линиям, причем она увеличивается в случае перехода через линию разрежения и уменьшается при переходе через линию уплотнения. Но это означает, что отрезок, соединяющий в диаграмме характеристик точки, изображающие состояния потока до и после перехода через линии разрежения или уплотнения, перпендикулярен к этим линиям. Далее, если рассматриваемый газ — идеальный, т.е. если связь между его плотностью и давлением изображается уравнением

$$p = \text{const} \cdot \rho^\kappa,$$

то все кривые обоих семейств на диаграмме характеристик являются эпициклоидами (одна из этих эпициклоид выделена на рис. 240 жирной линией). В этом случае значительно упрощается проведение касательных к этим кривым. На дальнейших подробностях способа пользования диаграммой характеристик мы не можем здесь останавливаться и отсылаем читателя к упомянутым выше работам.

Приведем в качестве примера решение следующей задачи: какую форму следует придать стенкам расширяющегося сопла для того, чтобы

¹Busemann A., Verdichtungsstöße in ebenen Gasströmungen. Vorträge aus dem Gebiet der Aerodynamik, Aachen 1929, Herausgegeben von Gilles, Hopf und Kármán. Berlin 1930, стр. 162; см. также Handbuch der Exp.-Phys., т. IV, часть I, стр. 431.

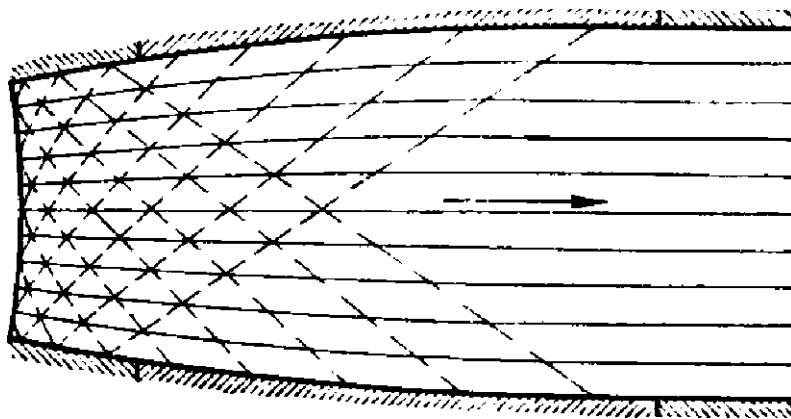


Рис. 241. Насадок для получения параллельной струи

при истечении из него газа получилась параллельная струя. Очевидно, для этого необходимо, чтобы линии разрежения, подходящие к стенкам, не отражались от них; только при соблюдении этого условия линии тока сделаются параллельными. Для выполнения этого условия стенки сопла должны в каждой своей точке изменять свое направление на такой угол, который вызывал бы появление линии уплотнения, отходящей от стенки под таким же углом, под каким отходит отраженная линия разрежения; это приводит к затуханию всех линий разрежения, а поток делается параллельным. Результат построения при помощи диаграммы характеристик изображен на рис. 241.

Потоки, изображенные на рис. 234 и 235, также могут быть построены при помощи диаграммы характеристик. Два других примера такого способа построения потоков будут даны в § 11¹.

§ 9. Дозвуковые потоки^{2,3}. Прежде всего выведем некоторые общие соотношения для установившегося потенциального потока, скорость которого по величине и направлению мало отклоняется от заданной скорости u_0 . Последнюю скорость примем *большой*, но при этом сначала оставим открытым вопрос, является ли эта скорость меньше или больше скорости звука. Далее, для простоты вычислений примем,

¹Теоретическому исследованию доступны также некоторые осесимметричные сверхзвуковые потоки См. Taylor G. J. and Maccoll J. W., Proc. Roy. Soc., London (A), т. 139 (1933), стр. 278 (потоки около конусообразных головок снарядов); Busemann A., Luftfahrtforschung т. 19 (1942), стр. 137 (общий случай конических потоков); Зауэр рассчитал поток около головки снаряда любой формы при условии, что угол атаки небольшой [R. Sauer, Luftfahrtforschung т. 19 (1942), стр. 148].

²Библиографию по этому вопросу можно найти в статье Eser F., Luftfahrtforschung, т. 20 (1943), стр. 220.

³Исследованию дозвуковых потоков посвящена работа С. А. Чаплыгина «О газовых струях», впервые опубликованная в 1902 г. (см. также Собрание сочинений, т. II, Москва 1948). Несмотря на то, что эта работа написана почти 50 лет тому назад, она только в последние годы нашла непосредственное приложение к практическим вопросам. (Прим. перев.)

что рассматриваемый поток — плоский (двухмерный). Составляющие небольших отклонений скорости потока от скорости u_0 обозначим через u и v . Во всех вычислениях будем сохранять только величины первого порядка малости.

Обобщенное уравнение Бернулли (7) для нашего потока принимает вид:

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{(u_0 + u)^2 + v^2}{2} = \text{const}, \quad (31)$$

или, в дифференциальной форме,

$$\frac{dp}{\rho} + u_0 du + (\text{члены второго порядка малости}) = 0.$$

Имея в виду, что на основании равенства (3)

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{dp}{d\rho} \cdot \frac{d\rho}{\rho} = c^2 \frac{d\rho}{\rho},$$

мы можем переписать уравнение (31) в следующем виде:

$$d\rho = -\rho \frac{u_0}{c^2} du. \quad (32)$$

Условие неразрывности выражается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x} [\rho(u_0 + u)] + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) = 0 \quad (33)$$

(ср. с выводом для несжимаемой жидкости на стр. 54). Обозначая среднее значение плотности ρ через ρ_0 и сохраняя только члены первого порядка малости, мы получим из уравнения (33):

$$u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0.$$

Подставляя сюда значение $d\rho$ из уравнения (32), в котором также следует заменить ρ на ρ_0 и, сокращая на ρ_0 , мы получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \left(1 - \frac{u_0^2}{c^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (34)$$

Обозначим потенциал скоростей через φ , тогда будет

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

и уравнение (34) примет вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \left(1 - \frac{u_0^2}{c^2}\right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (35)$$

Это дифференциальное уравнение ясно показывает разницу между дозвуковыми и сверхзвуковыми потоками. Когда скорость u переходит через значение, равное скорости звука, коэффициент при $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ делается равным нулю. Пока этот коэффициент положителен, дифференциальное уравнение (35) имеет такой же вид, как и соответствующее уравнение потенциального течения несжимаемой жидкости, и называется уравнением *эллиптического типа*; если же коэффициент при $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ отрицателен, уравнение (35) имеет такой же вид, как уравнение для колебаний струны, и называется уравнением *гиперболического типа*. При $u_0 = c$, т.е. при скорости течения, равной скорости звука, мы имеем:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

и величина

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

может принимать произвольные значения; это означает, что в этом случае могут существовать установившиеся волны с фронтом, параллельным оси y .

Для скоростей $u_0 > c$ каждая функция F от $y \pm x \operatorname{tg} \alpha$; непрерывная и дважды дифференцируемая, а в остальном произвольная, является решением уравнения (35), если только подходящим образом определить величину α . В самом деле, мы имеем:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = F'' \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = F'',$$

следовательно, для того чтобы удовлетворить уравнению (35), необходимо принять, что

$$\operatorname{tg}^2 \alpha \left(\frac{u_0^2}{c^2} - 1 \right) = 1.$$

Отсюда находим:

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{c}{\sqrt{u_0 - c^2}}$$

и

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \pm \frac{c}{u_0}.$$

Таким образом, решением уравнения (35) для случая, когда $u_0 > c$, являются волны произвольной формы, прямолинейные фронты которых ($y = \pm x \operatorname{tg} \alpha + \text{const}$) наклонены к оси x , имеющей среднее направление линий тока, на угол Маха влево или вправо. Следовательно, мы получили тот же результат, к которому пришли в § 2 упрощенным способом.

В случае, когда скорость течения u_0 меньше скорости звука c , для решения уравнения (35) применим следующий прием. Сравним рассматриваемый дозвуковой поток сжимаемого газа с потоком *несжимаемой* жидкости с той же плотностью ρ_0 и той же заданной скоростью u_0 . Координаты точек несжимаемого потока будем обозначать через X и Y , составляющие возмущенной скорости, даю отличающейся от u_0 , — через U и V и соответствующий потенциал скоростей — через Φ . Согласно сказанному в § 10 гл. II этот потенциал должен удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} = 0. \quad (36)$$

Предположим далее, что потенциалы скоростей обоих потоков — сжимаемого и несжимаемого — связаны между собой соотношением

$$\varphi = \varepsilon \Phi. \quad (37)$$

Для того чтобы функция φ удовлетворяла уравнению (35) и одновременно функция Φ уравнению (36), масштабы для перехода, с одной стороны, от координаты x к координате X , а с другой стороны, от координаты y к координате Y должны быть разными. Полагая

$$\frac{Y}{y} = \beta \frac{X}{x},$$

мы можем путем соответствующего выбора множителя β осуществить связь (37) между потенциалами φ и Φ . Для упрощения расчетов произвольно примем, что $X = x$, тогда мы будем иметь:

$$Y = \beta y. \quad (38)$$

Пользуясь соотношениями (37) и (38), мы можем переписать уравнение (35) в следующем виде:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} \left(1 - \frac{u_0^2}{c^2}\right) + \varepsilon \beta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} = 0. \quad (39)$$

Это уравнение тождественно совпадает с уравнением (36), если принять, что

$$\beta^2 = 1 - \frac{u_0^2}{c^2}.$$

Величина ε остается при этом пока произвольной. Безразмерная величина $\frac{u_0}{c}$ называется *числом Маха* и обозначается буквой M . Применяя это обозначение, мы можем написать:

$$\beta = \sqrt{1 - M^2}. \quad (40)$$

Так как β всегда меньше единицы, то из соотношения (38) следует, что поперечное протяжение (y) поля скоростей и поля давлений у сжимаемого потока больше, чем у несжимаемого потока (Y). При приближении u_0 к скорости звука величина β стремится к нулю, а поперечное расстояние, на которое распространяются возмущения течения, неограниченно возрастает.

Угол δ , образуемый какой-нибудь линией тока с осью x , определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{v}{u_0 + u},$$

которое мы можем заменить следующим приближенным равенством:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{v}{u_0} = \frac{1}{u_0} \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Аналогичным образом мы можем написать и для несжимаемого потока:

$$\operatorname{tg} \Delta = \frac{V}{u_0} = \frac{1}{u_0} \frac{\partial \Phi}{\partial Y}.$$

Если оба потока вызваны присутствием в несжимаемой жидкости и сжимаемом газе одного и того же тела с заостренными концами (рис. 242), то на линии тока, ограничивающей тело, должно соблюдаться условие

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \Delta,$$

или

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial Y}.$$

Вследствие соотношений (37) и (38) это условие принимает вид:

$$\varepsilon \beta = 1,$$

откуда следует, что

$$\varepsilon = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{1 - M^2}}. \quad (41)$$

Для того чтобы сравнить распределения давления в обоих потоках, достаточно рассмотреть градиенты давления в направлении оси x . Так как масштаб для координат в направлении x в обоих случаях одинаковый, то конечные разности давлений в обоих потоках относятся друг к другу как указанные градиенты. В сжимаемом потоке главный член градиента давления вдоль оси x равен

$$\rho(u_0 + u) \frac{\partial u}{\partial x} \approx \rho u_0 \frac{\partial u}{\partial x} = \rho u_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$

а в несжимаемом потоке

$$\rho u_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2}.$$

Отношение этих градиентов равно

$$\frac{\rho u_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}}{\rho u_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2}} = \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1 - M^2}}.$$

Отсюда следует, что при обтекании одного и того же заостренного тела сжимаемым и несжимаемым потоком разности давлений в сжимаемом потоке в первом приближении в $\frac{1}{\sqrt{1 - M^2}}$ раз больше, чем в несжимаемом потоке. Это так называемое *правило Прандтля* применимо, как подтверждают опыты¹, также к тонким крыльям, установленным на

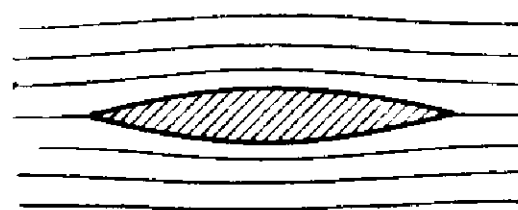


Рис. 242. Обтекание тела с заостренными концами

¹Примеры распределения давления на крыльях для скоростей, близких к скорости звука, имеются в работе Stack Lindsay and Littel, NACA-Report № 646 (1938).

небольших углах атаки, правда, при условии, что нигде около крыла не достигается скорость звука (см. ниже); в таком случае подъемная сила возрастает вследствие сжимаемости также в $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1-M^2}}$ раз.

Вопрос об определении величины ε в уравнении (37) может быть поставлен также следующим образом: какую форму должно иметь тело, чтобы разности давлений в обтекающем его сжимаемом потоке были такие же, как и в несжимаемом потоке. Такая постановка вопроса важна, очевидно, в том случае, когда распределение давления вдоль обтекаемого тела в несжимаемом потоке близко предельному состоянию, после перехода через которое возникает, вследствие влияния трения, отрыв потока от тела. Очевидно, что в этом случае величина ε должна быть выбрана равной единице. Но тогда

$$\operatorname{tg} \delta = \beta \operatorname{tg} \Delta,$$

т.е. для того чтобы при обтекании тела сжимаемым потоком не произошло отрыва потока от тела, последнее должно быть тем тоньше, чем ближе скорость потока u_0 к скорости звука. Этот вывод также хорошо согласуется с результатами опытов.

Следующая задача, являющаяся хорошей иллюстрацией изложенной теории, может быть решена при помощи простых вычислений. Поток движется со средней скоростью u_0 вдоль волнистой стенки, контур которой имеет уравнение

$$y = a \sin \lambda x.$$

Требуется определить, как распространяются в потоке возмущения, вызванные стенкой.

Из уравнения

$$\frac{v}{u_0} = \frac{dy}{dx}$$

находим, что скорость v вблизи стенки, где $y = 0$, будет:

$$v = u_0 a \lambda \cos \lambda x. \quad (42)$$

Потенциал скоростей для несжимаемого потока равен

$$\Phi = -A \cos \lambda X e^{-\lambda Y},$$

а для сжимаемого потока —

$$\varphi = -A \cos \lambda x \cdot e^{-\lambda y \sqrt{1-M^2}}. \quad (43)$$

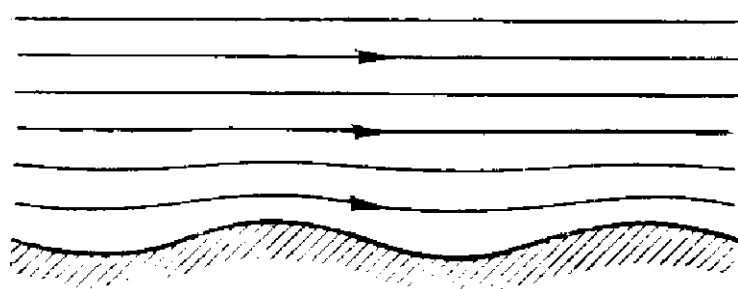


Рис. 243. Дозвуковой поток около волнистой стенки при скорости течения $u_0 \ll c$

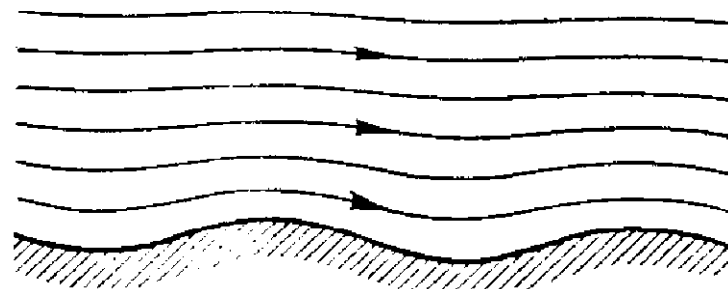


Рис. 244. Дозвуковой поток около волнистой стенки при скорости течения $u_0 = 0,9c$

Условие, что при $y = 0$ скорость v должна иметь значение (42), приводит к уравнению:

$$u_0 a \lambda = A \lambda \sqrt{1 - M^2},$$

откуда находим:

$$A = \frac{u_0 a}{\sqrt{1 - M^2}},$$

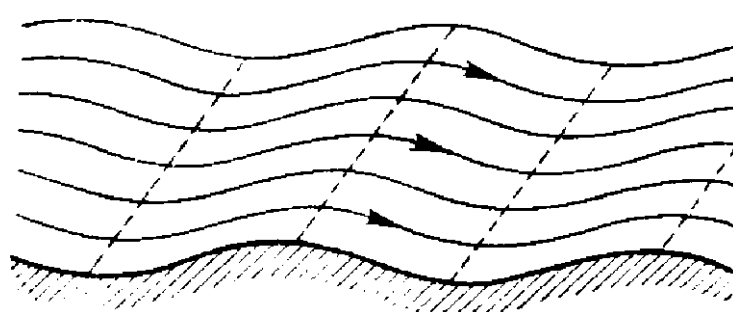


Рис. 245. Сверхзвуковой поток около волнистой стенки при скорости течения $u_0 = 1,25c$

что согласуется с изложенным выше. На рис. 243 изображены линии тока несжимаемого потока; мы видим, что влияние волнистой стенки сказывается только на близких расстояниях от нее. На рис. 244 изображены линии тока для потока, скорость которого близка к скорости звука. Наконец, на рис. 245 изображен поток со сверхзвуковой скоростью, равной $u_0 = 1,25c$. Для сверхзвукового потока потенциал скоростей равен

$$\varphi = \frac{u_0 a}{\sqrt{M^2 - 1}} \sin \lambda(x - y\sqrt{M^2 - 1}) \quad (44)$$

Приведенная выше приближенная теория дозвуковых потоков была изложена для облегчения понимания только для плоских потоков. Однако она полностью применима и для трехмерных потоков. В этом случае оба протяжения занимаемого потоком пространства, перпендикулярные к направлению скорости u_0 , должны быть растянуты при переходе от несжимаемого потока к сжимаемому совершенно так же, как было сделано выше для протяжения в направлении оси y .

Основная суть изложенной теории заключается в том, что при ее построении отклонения действительной скорости течения от заданной невозмущенной скорости u_0 предполагаются настолько малыми, что в дальнейших вычислениях можно пренебрегать вторыми и более высокими степенями указанных отклонений. Именно благодаря этому решение задачи свелось к линейному дифференциальному уравнению (35)

вместо точного, *нелинейного* уравнения. Однако при больших числах Маха M действительная скорость потока вблизи обтекаемого тонкого тела может сделаться очень близкой к скорости звука. В этом случае расчеты по изложенной теории, называемой *линеаризованной*, недостаточны. Можно значительно уточнить расчет поля давлений, если вести вычисления с числом Маха, взятым не по основной, невозмущенной скорости, а по местной скорости; это приводит к тому, что в рассматриваемом месте звуковая скорость возникает уже при меньшей скорости u_0 , чем можно было бы ожидать на основании приближенной теории. *Нелинеаризованная теория*, в которой сохраняются члены более высокого порядка малости, дает более точные результаты^{1,2}.

Явления, возникающие в потоках при скоростях, очень близких к скорости звука, до сих пор полностью еще не ясны. Методы, разработанные для исследования дозвуковых потоков, не могут быть применены для исследования сверхзвуковых потоков и, наоборот, методы, пригодные для исследования сверхзвуковых потоков, неприменимы для дозвуковых потоков. Поэтому ни те, ни другие методы не могут дать результатов при изучении потоков, в которых совершается переход скорости через значение, равное скорости звука. Однако известны примеры таких потоков³, и эти примеры показывают, что в ограниченном пространстве возможен непрерывный переход от дозвуковой к сверхзвуковой скорости без наличия особых точек, правда, не при любом заданном контуре (хотя бы и непрерывном), ограничивающем поток. Это связано, очевидно, с явлением, изображенным на рис. 232. Наблюдения показывают, что переход от дозвуковой к сверхзвуковой скорости совершается всегда непрерывно, обратный же переход легко приводит к скачкам уплотнения, вызывающим отрыв потока, который, в свою очередь, еще более усиливает скачок уплотнения. Это явление и служит причиной очень сильного ухудшения полетных свойств тех профилей, у которых на подсасывающей стороне в отдельных местах возникают сверхзвуковые скорости. На рис. 246 и 247 изображены фотографии

¹Busemann A., Schriften d. Deutsch. Akad. d. Luftfahrtforschung № 18; см. также Hantzsch W. und Wendt H., ZAMM, т. 22 (1942), стр. 72.

²В СССР развитию нелинеаризованной теории дозвуковых потоков посвящены, в частности, работы: С. А. Христианович, Обтекание тел газом при больших дозвуковых скоростях. Труды ЦАГИ, вып. 481 (1940); С. А. Христианович и И. М. Юрьев, Обтекание профиля при докритической скорости потока. Прикл. матем. и механ., т. XI (1947), вып. 1; Н. А. Слезкин, К вопросу о плоском движении газов. Труды МГУ, 1935. (Прим. перев.)

³Tollmien W. und Görtler H., ZAMM, т. 17 (1937), стр. 117; т. 19 (1939), стр. 325; т. 20 (1940), стр. 254; см. также Ringleb F., ZAMM; т. 20 (1940), стр. 185.



Рис. 246. Возникновение местных сверхзвуковых скоростей при обтекании профиля (поток получен при давлении в напорной камере, равном 1,60 *ата*)

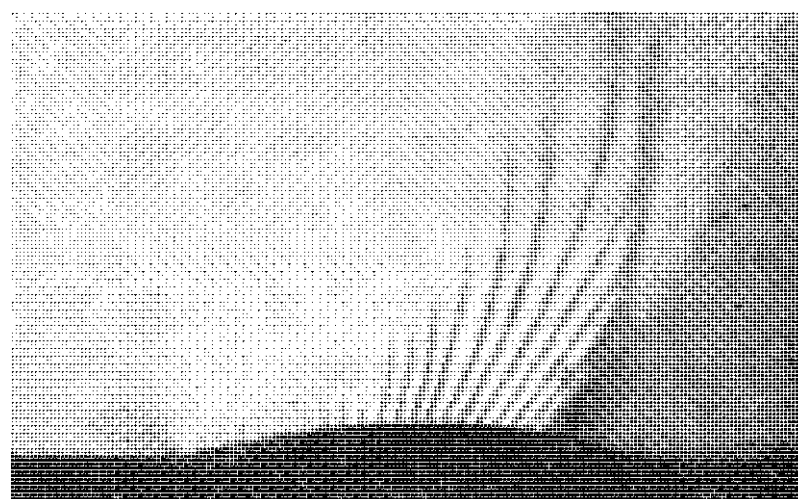


Рис. 247. Возникновение местных сверхзвуковых скоростей при обтекании профиля (поток получен при давлении в напорной камере, равном 1,89 *ата*)

обтекания таких профилей. Область сверхзвукового течения получилась видимой потому, что на поверхности моделей были процарапаны небольшие бороздки, каждая из которых привела к возникновению линий разрежения. Скорость обтекания больше скорости звука всюду, где линии разрежения наклонены относительно линий тока. Там же, где линии разрежения перпендикулярны к линиям тока, скорость обтекания уже меньше скорости звука. В этой области возмущения давления по мере удаления от поверхности профиля постепенно затухают. На обоих рисунках видно, что сверхзвуковая область заканчивается скачком уплотнения. Кривые изменения давления при такого рода переходах через скорость звука изображены на рис. 248¹.

Вид этих кривых объясняет упомянутое выше резкое ухудшение полетных свойств профиля, когда скорость обтекания на некоторой части подсаживающей стороны становится больше скорости звука. Вследствие возникновения сильных скачков уплотнения лобовое сопротивление крыла возрастает настолько, что при числах Маха, близких к единице, становится невозможным. При скоростях, близких к скорости звука, лобовое сопротивление тем меньше, чем меньше кривизна профиля. Следовательно, и с этой точки зрения профиль (b) на рис. 156 (стр. 269) лучше в отношении быстроходности, чем профиль (a).

Явления, возникающие при обтекании выпуклых поверхностей в тех случаях, когда скорость обтекания переходит через значение скорости звука, объясняют также характер изменения коэффициентов сопротивления шаров и цилиндров (см. стр. 260). При увеличении числа Маха критическое число Рейнольдса возрастает втрое; приблизительно при $M = 0,7$ влияние числа

¹Stack, Lindsay and Littel, NACA-Report № 646 (1938).

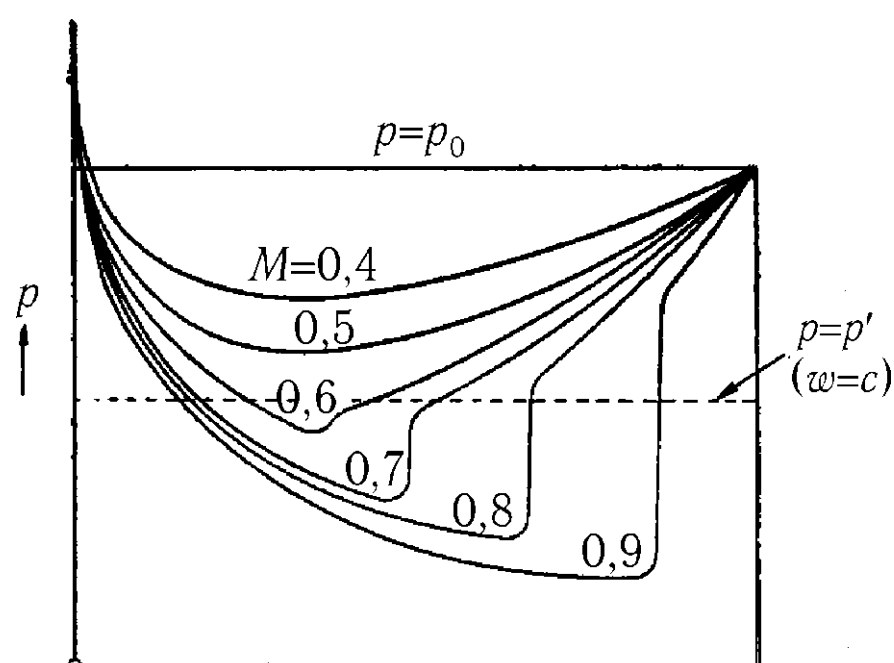


Рис. 248. Изменение распределения давления вдоль поверхности крыла при увеличении числа Маха

Рейнольдса на коэффициент сопротивления исчезает почти полностью; при $M = 0,8$ сопротивления делается практически постоянным ($\approx 0,65$). Новые тщательные измерения произведены А. Ферри¹.

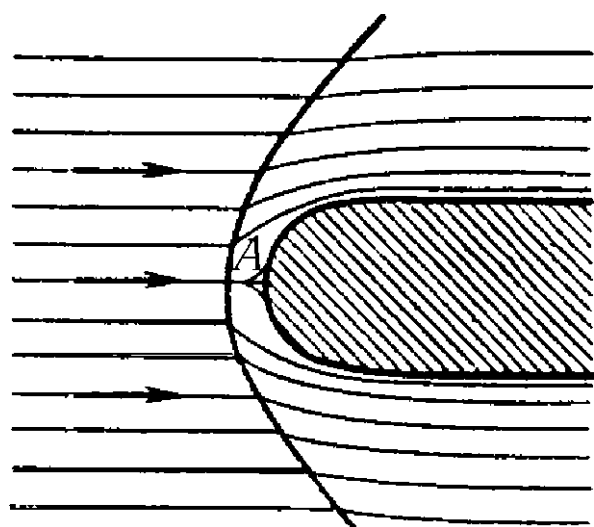


Рис. 249. Головная волна впереди тела с тупым передним концом

§ 10. Движение тел в газах при сверхзвуковых скоростях. Сопротивление снарядов. В § 2 мы выяснили, что в тех случаях, когда небольшое тело движется в газе со сверхзвуковой скоростью или, что сводится к тому же, газ движется равномерно со сверхзвуковой скоростью около небольшого неподвижного тела, возмущения давления распространяются только позади тела внутри определенного конуса, угол раствора которого зависит от скорости течения. Однако этот результат передает действительную картину явления только до тех пор, пока обтекаемое тело является малым.

Если же размеры обтекаемого тела не малы, то действительная картина обтекания получается более сложной. Пусть тело имеет спереди тупую форму. Тогда при своем движении оно немного вытесняет газ вперед, и в середине закругления в критической точке А (рис. 249) возникнет подпор газа [§ 5, п. с) гл. II]. Так как вытесняемая масса газа движется относительно тела с дозвуковой скоростью, то давление в ней распространяется также и в сторону движения тела, но на сравнительно

¹Ferri A., Atti di Guidonia, № 67–69 (1942), стр. 49.

небольшое расстояние — до так называемой *головной волны*, представляющей собой не что иное, как скачок уплотнения впереди тела. Этот скачок уплотнения переводит сверхзвуковую скорость (относительно тела), имеющую место до головной волны, в дозвуковую скорость после головной волны. Скачок уплотнения перед вершиной тела получается прямым, но по обо стороны от вершины он переходит в косой скачок. С увеличением расстояния от тела прерывное увеличение давления делается все меньше и меньше, и скачок уплотнения постепенно переходит в линии уплотнения, расходящиеся в виде конуса. Головная волна располагается тем ближе к телу, чем больше скорость движения тела. Фотография, изображенная на рис. 212, дает отчетливую картину движения воздуха при полете пули.

Волны уплотнения, образуемые при движении тела со сверхзвуковой скоростью и располагающиеся в виде конуса, распространяются в направлении, перпендикулярном к поверхности конуса, и воспринимаются наблюдателем как резкий короткий звук, напоминающий щелканье бича. В связи с этим заметим, что щелканье бича имеет такое же происхождение; оно возникает в тех случаях, когда самый внешний кончик бича движется в воздухе со сверхзвуковой скоростью. Если такие звуки повторяются в быстрой и правильной последовательности, как, например, при вращении пропеллера, у которого концы лопастей движутся со сверхзвуковой скоростью, то возникает резкий музыкальный звук, напоминающий звук тромбона.

Полное повышение давления, которое возникает в критической точке тела, движущегося со сверхзвуковой скоростью, складывается из двух частей: из прерывного повышения, вызванного головной волной, и непрерывного повышения, вызванного подпором газа, находящегося между головной волной и критической точкой. Вычисления показывают, что это полное повышение давления пропорционально квадрату скорости не только при малых скоростях [§ 5, п. с) гл. II], но и при очень больших скоростях; в промежуточной области оно возрастает несколько быстрее. Поэтому можно написать, что

$$p_1 - p_0 = \frac{\rho w^2}{2} \beta,$$

где β есть функция числа Маха. Отдельные значения коэффициента β для воздуха ($\kappa = 1,405$) даны в приводимой ниже таблице. На рис. 250 зависимость β от числа Маха представлена графически (верхняя кривая).

Прерывную составляющую повышения давления также можно принять пропорциональной квадрату скорости, но в этом случае коэффици-

ент пропорциональности β_1 будет равен нулю при $w \leq c$. Зависимость коэффициента β_1 от числа Маха представлена на рис. 250 нижней кривой.

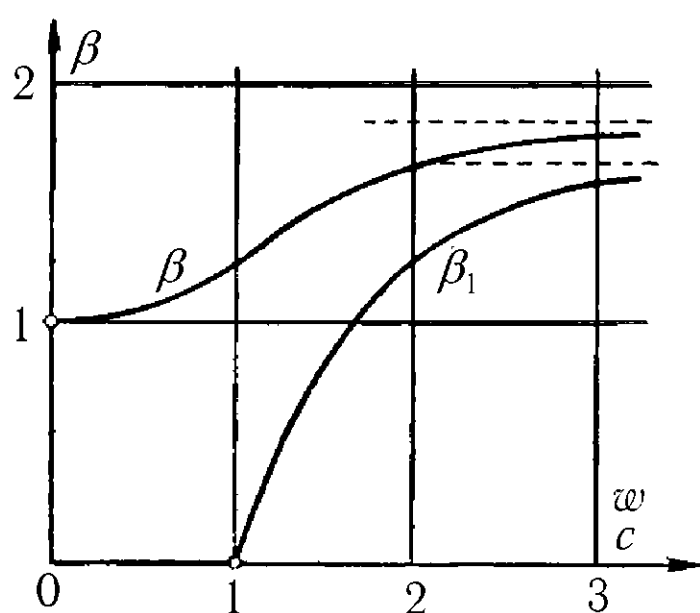


Рис. 250. Зависимость коэффициентов β и β_1 от числа Маха $\frac{w}{c}$

Только что изложенные обстоятельства должны учитываться при изменении скоростей с помощью трубки Пито¹. При сверхзвуковой скорости потока перед трубкой Пито образуется головная волна. Давление, показываемое в этом случае трубкой Пито, часто удобно сравнивать с избыточным давлением, которое должно быть в напорной камере для того, чтобы при истечении возникла скорость w . Если обозначить избыточное давление через $\rho \frac{w^2}{2} \beta_0$, то мы будем иметь: $\beta_0 = \beta$ для $w \leq c$, но $\beta_0 > \beta$ для $w > c$, что связано с потерей энергии в головной волне. В следующей таблице мы приводим отдельные значения коэффициентов β , β_1 и β_0 :

$M = \frac{w}{c}$	0	0,5	1	1,5	2	3	∞
β	1	1,065	1,275	1,53	1,655	1,75	1,85
β_1	—	—	0	0,92	1,25	1,48	1,65
β_0	1	1,065	1,275	1,69	2,48	4,85	∞

Из уравнения (29) следует, что повышение температуры газа перед движущимся телом, связанное с подпором газа, равно

$$T_1 - T_0 = \frac{w^2}{2c_p}.$$

Если w измерять в $м/сек$, то для воздуха c_p , выраженное в единицах работы, будет равно $0,238 \cdot 427 \cdot 9,8 \approx 1000$. Следовательно, при скорости движения $1000 м/сек$ (артиллерийский снаряд) повышение температуры равно 500° при скорости $20\,000 м/сек$ (метеорное тело) оно равно $200\,000^\circ$. В случае метеорного тела указанная температура в действительности, вероятно, не достигается, так как сжатый воздух быстро охлаждается вследствие сильного излучения тепла.

Из указанной выше зависимости коэффициента ρ от числа Маха следует, что сопротивление артиллерийских снарядов при очень больших скоростях делается опять пропорциональным квадрату скорости,

¹См. также Walchner O., Jahrbuch 1938 der Deutschen Luftfahrtforschung, т. I стр. 578.

правда, с иным коэффициентом пропорциональности, чем при малых скоростях. Однако и при меньших скоростях для сопротивления снарядов W можно пользоваться формулой такого же типа, как и для сопротивления в несжимаемой жидкости, т. е. полагать, что

$$W = c_w \frac{F \rho w^2}{2},$$

где F есть площадь поперечного сечения снаряда; правда, теперь коэффициент c_w является не постоянной величиной, а функцией числа Маха $\frac{w}{c}$.

Опытное определение сопротивления снарядов, осуществляемое путем измерения замедления скорости полета, показывает следующее. При скоростях полета, меньших скорости звука, коэффициент сопротивления сохраняет приблизительно постоянное значение, но при переходе скорости полета через скорость звука резко увеличивается. Это увеличение объясняется тем, что к прежнему сопротивлению, вызываемому главным образом вихрями позади снаряда, прибавляется волновое сопротивление, обусловливаемое затратой энергии на образование звуковых волн. При еще больших скоростях коэффициент сопротивления заостренных снарядов несколько уменьшается и затем, по-видимому, приближается к постоянному значению. Это уменьшение связано, во-первых, с изменением формы головной волны, а во-вторых, с тем, что подсасывающее действие на заднем конце снаряда с увеличением скорости приближается к некоторому предельному значению, а не продолжает расти пропорционально квадрату скорости.

На рис. 251 даны кривые, показывающие зависимость коэффициента сопротивления c_w от числа Маха для трех артиллерийских снарядов¹ и винтовочной пули². Формы снарядов и пули изображены в нижней части рисунка.

§ 11. Двухмерные сверхзвуковые потоки около заостренных тел и крыльев. Методы, изложенные в § 8, позволяют получить отчетливую картину обтекания достаточно заостренных тел сверхзвуковыми потоками³. Давление на каждом элементе поверхности таких тел, если отвлечься от небольшой потери энергии вследствие скачка уплотнения на переднем конце, полностью определяется скоростью

¹Eberhard O., Artilleristische Monatshefte, № 69 (1912), стр. 196.

²Cranz C., Artilleristische Monatshefte, № 69 (1912), стр. 189 и № 71 (1912), стр. 833.

³Впервые это было сделано Аккеретом [Ackeret J., ZFM, т. 16 (1925) стр. 72], см. также Busemann A., Luftfahrtforschung, т. 19 (1942), стр. 137.

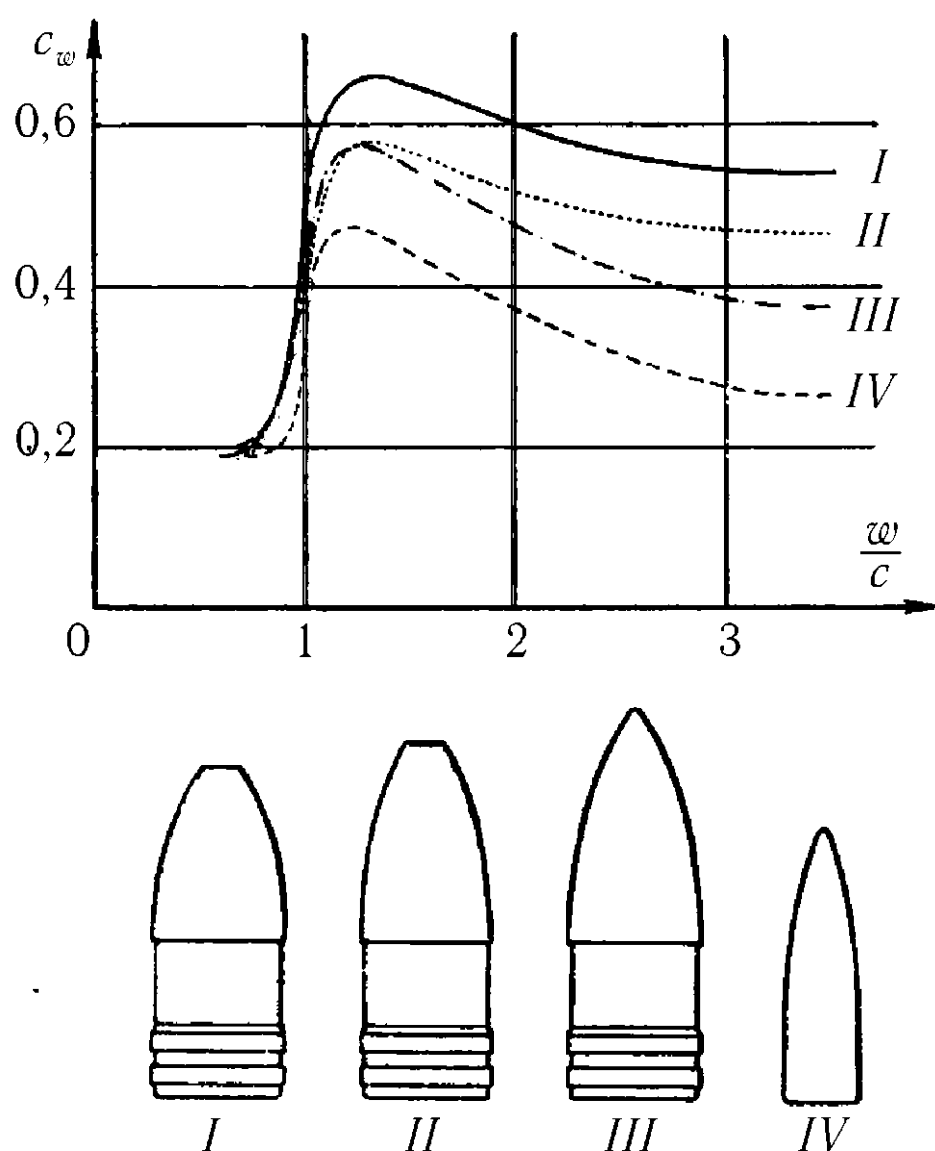


Рис. 251. Зависимость коэффициента сопротивления от числа Маха для трех артиллерийских снарядов и винтовочной пули изображенных в нижней части рисунка

притекания газа и наклоном элемента. Обтекание заостренного тела (рис. 252), поперечное сечение которого имеет форму чечевицы, начинается с косого скачка уплотнения, распространяющегося по обе стороны от тела. Давление позади скачка уплотнения больше невозмущенного давления. При дальнейшем обтекании от поверхности тела вследствие ее выпуклой формы отходят линии разрежения; при переходе потока через эти линии давление постепенно понижается, пока, наконец, вблизи заднего конца тела не делается меньше невозмущенного давления. На заднем конце тела оба потока, обтекающие тело с обеих его сторон, сталкиваются под конечным углом, что опять приводит к возникновению скачка уплотнения. Позади второго скачка уплотнения давление опять приблизительно равно невозмущенному давлению. Линии разрежения, отходящие от поверхности тела, по мере удаления от тела расходятся. Те из них, которые отходят от поверхности вблизи переднего конца тела, пересекаются с передним скачком уплотнения и постепенно его ослабляют; те же из них, которые отходят вблизи заднего конца тела, пересекаются с задним скачком уплотнения и также постепенно

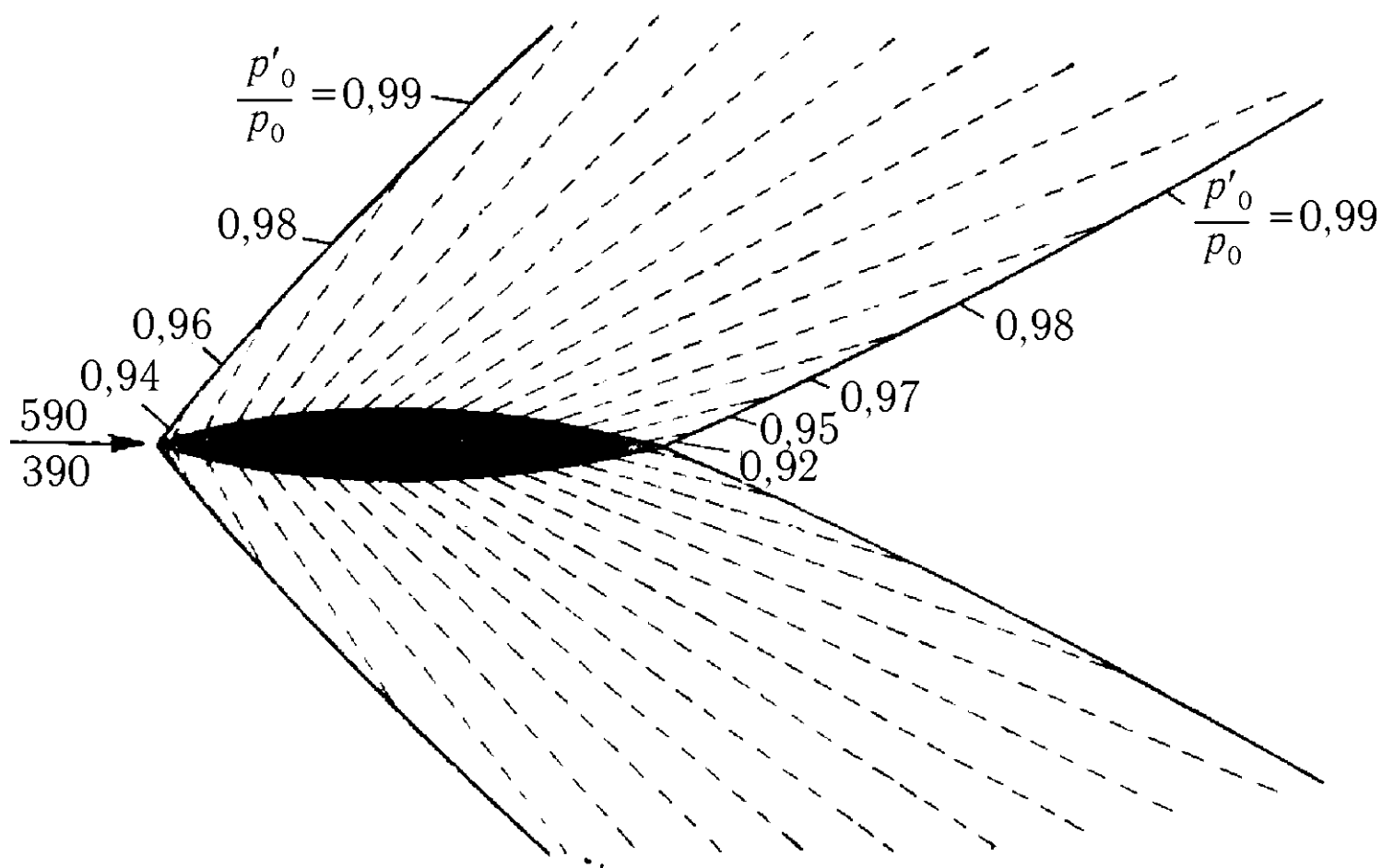


Рис. 252. Обтекание заостренного тела сверхзвуковым потоком. Величина p_0 означает начальное давление, которое было необходимо для создания скорости потока, а величина p'_0 — то давление, которое получилось из начального давления после понижения его вследствие потери энергии в скачке уплотнения

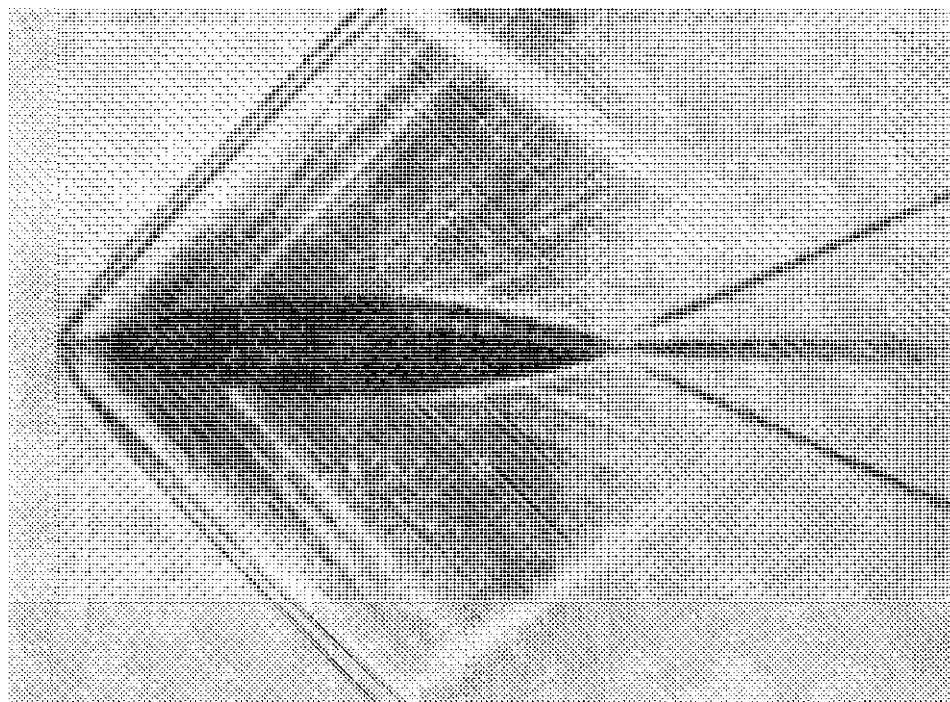


Рис. 253. Фотография обтекания тела, изображенного на рис. 252

его ослабляют. Снимки, сделанные по способу Теплера с потоков около заостренных тел (рис. 253), полностью подтверждают правильность полученной теоретической картины обтекания.

Распределение давления, подсчитанное рассмотренным способом, позволяет вычислить сопротивление тела (без учета трения). Соглас-

но Буземану¹, увеличение энтропии той массы воздуха, через которую продвигаются в единицу времени оба скачка уплотнения, в точности равно секундной работе сопротивления давления. Из теоремы о количестве движения следует, что скачки уплотнения вызывают кильватерный поток воздуха по обе стороны от тела и что количество движения этого потока равно сопротивлению давления. В действительных условиях кроме сопротивления давления имеет место также сопротивление трения, которому соответствует свой кильватерный поток в пограничном слое.

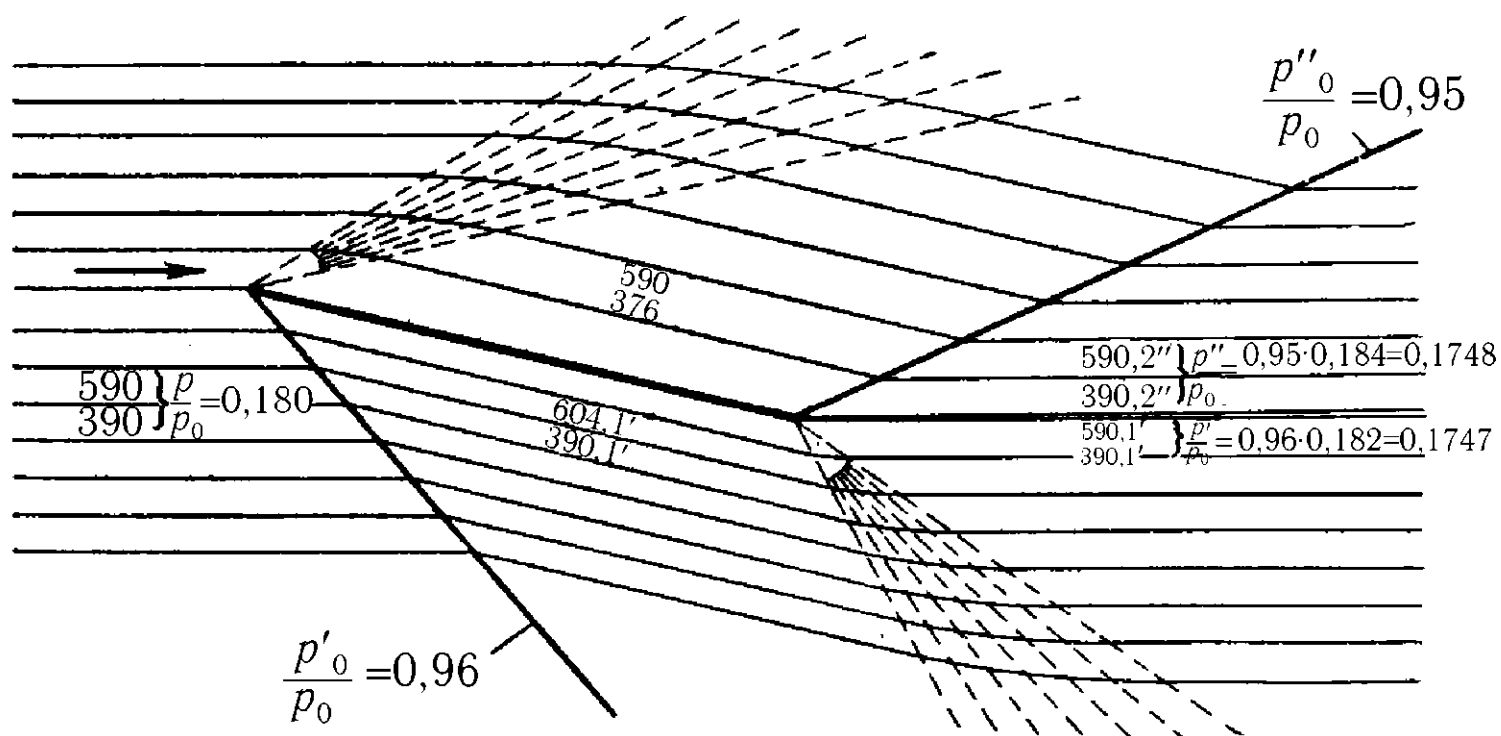


Рис. 254. Обтекание сверхзвуковым потоком наклоненной пластинки

В качестве примера крыла, т. е. тела, создающего подъемную силу вследствие наклона на небольшой угол относительно направления движения или обтекания, рассмотрим тонкую плоскую пластинку (рис. 254). На переднем ребре пластинки поток разделяется на две части без возникновения обтекания с «бесконечной» скоростью; на той стороне пластинки, где давление повышено, образуется скачок уплотнения, а на подсасывающей стороне — волна разрежения. Интенсивность скачка уплотнения и волны разрежения получается такой, что поток отклоняется от своего первоначального направления на угол, равный углу атаки ϵ пластинки. Поскольку в дальнейшем над и под пластинкой направление потока остается постоянным, давление в нем также остается постоянным, и поэтому результирующая аэродинамическая сила приложена к пластинке точно в ее середине. На заднем ребре пластинки давление выравнивается, вследствие чего на подсасывающей стороне

¹ Busemann A., Handb. der Exp-Physik, т. IV, часть I, 1931, стр. 443.

возникает скачок уплотнения, а на противоположной стороне — волна разрежения. Таким образом, при движении пластинки также образуются скачки уплотнения, что приводит к появлению кильватерного потока. При небольших углах атаки результирующая аэродинамическая сила приблизительно пропорциональна углу атаки и направлена вследствие отсутствия подсасывающей силы (см. стр. 280) точно перпендикулярно к поверхности пластинки.

Для движения на сверхзвуковой скорости наиболее выгодным профилем является тонкая пластинка, спереди и сзади заостренная и немного выгнутая кверху. Профили с утолщенным передним концом, выгодные для полета на обычных дозвуковых скоростях, дают при сверхзвуковых скоростях слишком большое сопротивление.

С целью получения приближенных формул для распределения давления в потоках, изображенных на рис. 252 и 254, можно воспользоваться дифференциальным уравнением (35) из § 9. Как там было указано, любая функция вида дает возможное возмущающее движение, налагающееся на основной поток u_0 . Примем, что

$$\varphi = 0$$

для $y - x \operatorname{tg} \alpha > 0$ и

$$\varphi = C(y - x \operatorname{tg} \alpha)$$

для $y - x \operatorname{tg} \alpha < 0$ (рис. 255). Здесь α есть угол Маха, так что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}.$$

Следовательно, до граничной линии $y = x \operatorname{tg} \alpha$ возмущенная скорость равна нулю, после же перехода через эту линию ее составляющие u и v будут

$$u = -C \operatorname{tg} \alpha, \quad v = +C.$$

Угол ε , на который отклоняются линии тока при переходе через граничную линию, определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{v}{u_0 + u} \approx \frac{v}{u_0} = \frac{C}{u_0}.$$

Пользуясь уравнением Бернулли, мы найдем что повышение давления $p_2 - p_1$ в первом приближении равно

$$p_2 - p_1 = -\rho u_0 u = \rho u_0 C \operatorname{tg} \alpha,$$

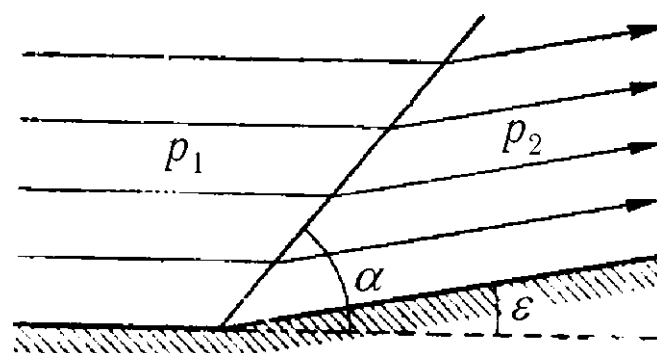


Рис. 255. К вычислению распределения давления в сверхзвуковом потоке

или

$$p_2 - p_1 = \rho u_0^2 \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

причем вместо $\operatorname{tg} \varepsilon$ ввиду его малости можно подставить просто ε . Таким образом, давление на поверхности тонкого тела, обтекаемого сверхзвуковым потоком, зависят только от наклона ε элемента поверхности, если только к этой поверхности случайно не подходят линии разрежения или уплотнения от соседнего тела. Этот результат, впрочем, можно было предвидеть на основании сказанного в § 7 и 8. При обтекании тела, изображенного на рис. 252, давление на передней половине тела, как уже было упомянуто, повышено, а на задней половине, наоборот, понижено по сравнению с невозмущенным давлением, но на каждом элементе поверхности оно пропорционально местному значению угла ε . Силы давления везде направлены по нормальям к поверхности и поэтому имеют в направлении обдувки составляющую, равную $p \sin \varepsilon$. Интеграл от этой составляющей, взятый по всей поверхности тела, дает сопротивление давления:

$$W_p = \iint p \sin \varepsilon dF \approx \rho u_0^2 \operatorname{tg} \alpha \iint \varepsilon^2 dF.$$

На верхней стороне пластинки, наклоненной к направлению потока на угол ε (рис. 254), давление повышено по сравнению с невозмущенным давлением на величину $\rho u_0^2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \varepsilon$, а на нижней стороне понижено на такую же величину. Следовательно, на пластинку действует нормальная сила

$$N = 2F \rho u_0^2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \varepsilon,$$

с которой в первом приближении совпадает подъемная сила A . Отсюда находим коэффициент подъемной силы:

$$c_a = 4 \operatorname{tg} \alpha \cdot \varepsilon = \frac{4\varepsilon}{\sqrt{M^2 - 1}}.$$

Если пренебречь трением, то, согласно сказанному выше.

$$c_w = c_a \sin \varepsilon,$$

следовательно, приближенно

$$c_w = \frac{4\varepsilon^2}{\sqrt{M^2 - 1}}.$$

Приведенные формулы впервые были получены в несколько иной форме Аккеретом¹. Измерения подъемной силы и лобового сопротивления выполнены Буземаном и Вальхнером², ими же разработана более точная теория.

¹ Ackeret J., ZFM, т. 16 (1925), стр. 72

² Busemann A. und Walchner O., Forschung, т. 4 (1933), стр. 87.

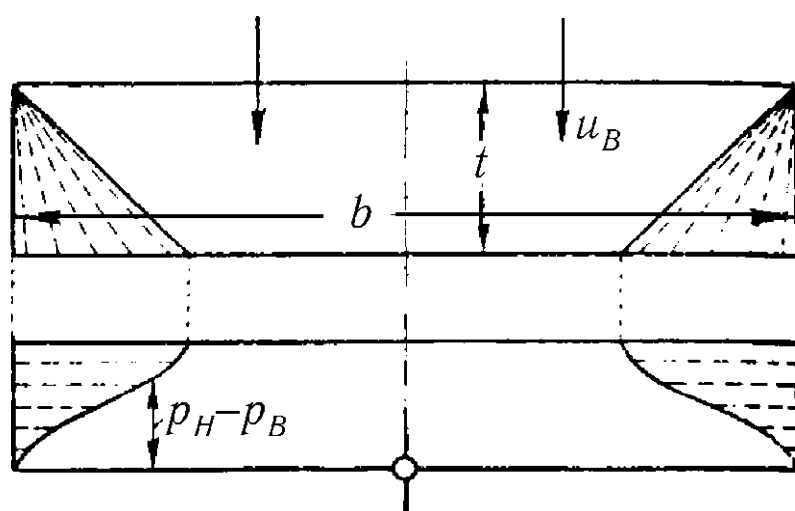


Рис. 256. Распределение давления для плоского прямоугольного крыла при сверхзвуковой скорости обтекания

Задача трехмерного обтекания крыла сверхзвуковым потоком рассмотрена Шлихтингом¹. Его решение внесло значительную ясность в этот вопрос. Влияние боковых ребер крыла распространяется, как этого и следовало ожидать, только на области конусов, образованных линиями разложения, отходящими с боковых ребер крыла; в остальном пространстве, если только переднее ребро крыла прямолинейное и угол атаки постоянный, поток можно рассматривать как плоский.

Распределение давления для плоского прямоугольного крыла изображено на рис. 256².

§ 12. Техника аэродинамического эксперимента при высоких скоростях³. В дополнение к изложенному в § 22 предыдущей главы о постановке гидродинамических и аэродинамических экспери-

¹Schlichting H., Tragflügeltheorie bei Ueberschallgeschwindigkeit Luftfahrtforschung, т. 13 (1936), стр. 320.

²Выдающиеся успехи в изучении сверхзвуковых потоков были получены в СССР; см. например, Христианович С. А., О сверхзвуковых течениях газа. Труды ЦАГИ, вып. 453 (1941); Христианович С. А., Приближенное интегрирование уравнений сверхзвуковых течений газа. Прикл. матем. и механ., т. XI (1947), вып. 2. Общее решение задачи обтекания тонкого профиля сверхзвуковым потоком было получено в СССР в 1947 г. Е. А. Красильщиковой; см. ее работы: Красильщикова Е. А., Влияние концевых кромок при установившемся движении крыла со сверхзвуковой скоростью, Доклады Акад. Наук СССР, т. VIII (1947), № 4; Красильщикова Е. А., Влияние концевых промок при движении крыла с вибрациями со сверхзвуковой скоростью, Доклады Акад. Наук СССР, т. VIII (1947), № 5; Красильщикова Е. А., Влияние вихревой пелены при установившемся движении крыла со сверхзвуковой скоростью, Доклады Акад. Наук, т. VIII (1947), № 6. См. также книгу Франкль Ф. И. и Карпович Е. Л., Газодинамика тонких тел, Москва 1948. (Прим. перев.)

³См. доклады Джекобса, Панетти и Аккерета на конференции по большим скоростям в авиации, состоявшейся в Риме в 1935 г. [переведены на русский язык и помещены в сборнике «Газовая динамика», Москва, 1939 (прим. перев.)], а также Busemann A., Schriften d. Deutsch. Akad. d. Luftfahrtforschung, № 30, стр. 17.

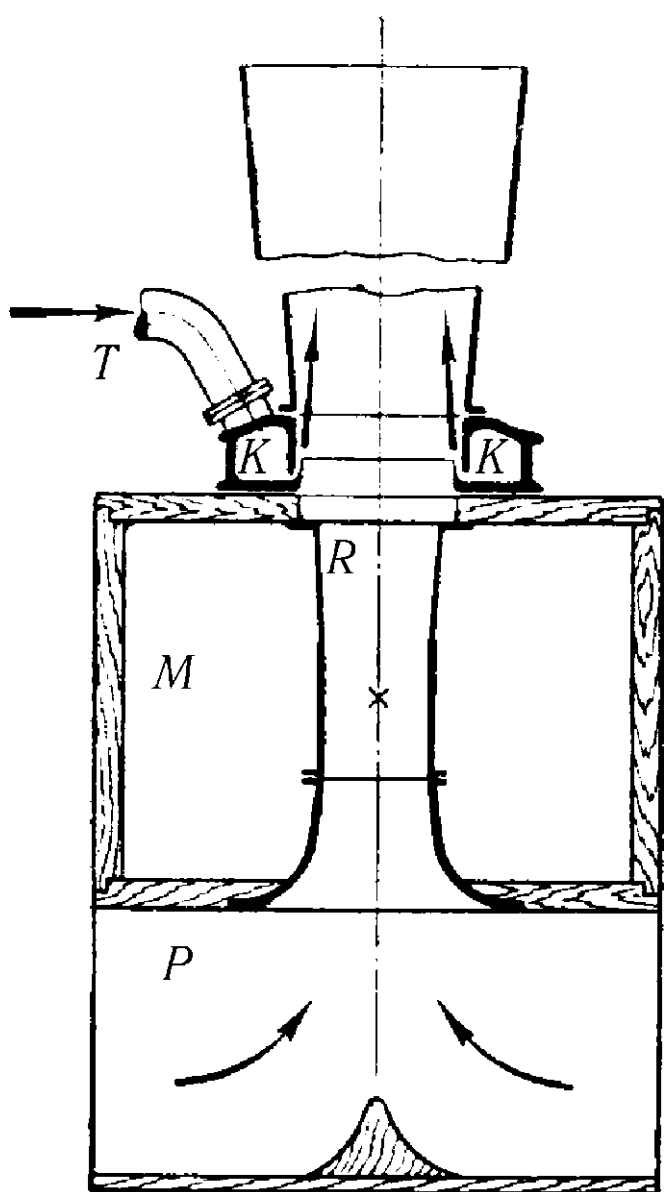


Рис. 257. Аэродинамическая труба высоких скоростей. Крестиком (X) отмечено место, где устанавливаются исследуемые модели. *M* — помещение для измерительных приборов

ся вакуумные камеры, обладающие по сравнению с напорными камерами тем преимуществом, что они в течение некоторого промежутка времени дают совершенно равномерный поток. Напорные камеры позволяют использовать для создания потока большую разность давлений, чем вакуумные, но зато они обладают следующим существенным недостатком: вследствие адиабатического расширения воздуха, находящегося в камере, его плотность и температура во время истечения непрерывно изменяются и при этом скорость истечения и скорость звука изменяются пропорционально корню квадратному из температуры. Правда, это не отражается на исследовании сверхзвуковых потоков, так как картины, получаемые на снимках по способу Теплера, зависят не от абсолютных значений указанных скоростей, а только от их отношения. Следовательно, результаты наблюдения не зависят от степени рас-

ментов укажем здесь на некоторые особенности, которые следует иметь в виду при экспериментировании со скоростями, сравнимыми со скоростью звука. Для создания достаточно широкого и длительного воздушного потока, скорость которого близка или выше скорости звука, очевидно, требуется весьма мощная установка. Долгое время избегали устройства таких установок и применяли большие камеры, которые в течение нескольких минут наполнялись при помощи насосов умеренной мощности сжатым воздухом или, наоборот, освобождались от воздуха до вакуума. Выпуская затем воздух из напорной камеры (через специальную трубу) или, наоборот, впуская воздух в вакуумную камеру (также через специальную трубу) удавалось получать воздушные потоки со сравнительно небольшим поперечным сечением и длительностью от 5 до 10 секунд. В установке, сделанной в 1929 г. в Аахенском аэродинамическом институте, объем камеры составляет 90 м^3 , и получается поток с поперечным сечением $10 \times 10 \text{ см}^2$. В большинстве подобного рода установок применяются

ширения воздуха в камере, однако наблюдения должны производиться очень быстро, так как вследствие адиабатического расширения в камере образуется туман и происходит ее обледенение. Существует также иной способ создания потоков с большой скоростью при помощи сжатого воздуха. Этот способ применяется в тех лабораториях, которые имеют обычные аэродинамические трубы для дозвуковых скоростей, работающие на воздухе, сжатом под высоким давлением. Очевидно, что после окончания продувки сжатый воздух из такой трубы должен быть выпущен, т. к. иначе в трубу нельзя будет войти для снятия исследованной модели и установки новой. Вместо того чтобы выпускать сжатый воздух в атмосферу, он подается через трубу T (рис. 257) в камеру K , из которой выпускается вверх через узкие отверстия. При этом, так же как и в стрийном насосе происходит засасывание атмосферного воздуха из помещения P через трубу R . Таким путем в трубе R сочетается поток воздуха с большой скоростью, однако не большей, чем скорость звука. Скорость этого потока можно регулировать путем изменения скорости истечения сжатого воздуха из камеры K .

При работе на вакуумных камерах можно получать как дозвуковые, так и сверхзвуковые потоки. Однако трубы, в которых создается поток, устремляющийся в вакуумную камеру, в обоих случаях должны иметь совершенно различную форму. В трубе для дозвуковых потоков рабочее пространство расположено непосредственно вслед за всасывающей воронкой (рис. 258). Из рабочего пространства поток попадает в суживающуюся трубу с регулируемым просветом. В самом узком сечении этой трубы скорость потока делается равной скорости звука и тем самым устанавливается вполне определенное количество протекающего воздуха. В трубе же для сверхзвуковых потоков рабочему пространству должно предшествовать сопло Лавала (рис. 259). Поперечное сечение рабочего пространства получается больше, чем в трубе для дозвуковых потоков. Самое узкое поперечное сечение сопла Лавала должно быть

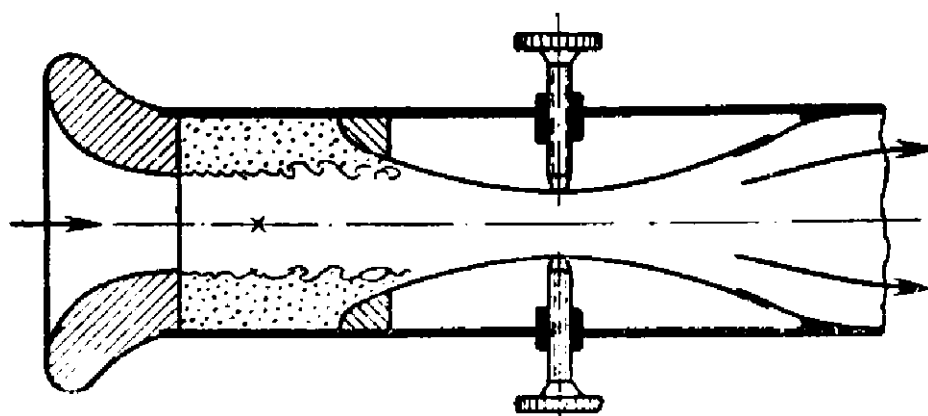


Рис. 258. Аэродинамическая труба дозвуковых скоростей

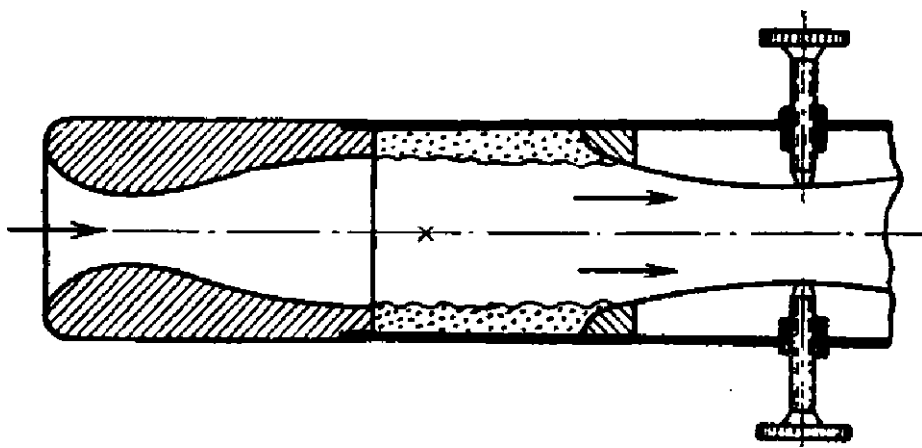


Рис. 259. Аэродинамическая труба сверхзвуковых скоростей

тем меньше, чем большее число Маха должно быть достигнуто в трубе. Во избежание появления в потоке воздуха поперечных колебаний, расширяющаяся часть сопла Лаваля должна быть продолжена так, чтобы из нее выходила строго параллельная струя (см. § 9, рис. 241). Для каждого числа Маха должно иметься отдельное сопло Лаваля, рассчитанное именно на это число. Крестиком (×) на рис. 258 и 259 отмечены те места, в которых помещаются исследуемые модели.

Так как длительность потока, создаваемого при помощи вакуумной камеры, чрезвычайно небольшая, то для его наилучшего использования между рабочим пространством и вакуумной камерой устанавливается автоматический быстродействующий кран с широким просветом. Управление этим краном производится электрическим путем из того места, где находится наблюдатель. На открывание и закрывание крана требуется небольшая доля секунды¹. Значительную трудность при работе с вакуумными камерами на сверхзвуковых скоростях вносит влажность воздуха. Вследствие адиабатического расширения температура воздушного потока уменьшается на 50° ; при столь сильном падении температуры почти весь водяной пар, содержащийся в воздухе, должен был бы выпасть в виде жидких капель. Однако время прохождения частиц воздуха через трубу столь мало (порядка 10^{-4} сек.), что его не хватает для возникновения капелек тумана обычным путем. Вместо этого происходит, как показывают исследования Осватича², самопроизвольная конденсация вида, теоретически исследованного Беккером и Дерингом³. Эта конденсация наступает после того, как достигается

¹ Подробное описание имеется в Jahrbuch 1928 der Wissensch. Gesellschaft für Luftfahrt, стр. 95.

² Oswatitsch K., ZAMM, т. 22 (1942), стр. 1. В этой работе развита количественная теория явления, выводы которой хорошо совпадают с результатами наблюдений. В 1934–1936 гг. в Аахенском аэродинамическом институте были выполнены тщательные наблюдения над зависимостью места возникновения и интенсивностью «конденсационного скачка» от степени влажности воздуха и от числа Маха [Hermann R., Luftfahrtforschung, т. 19 (1942), стр. 201].

³ Becker R. und Dörin W., Ann. d. Physik (5), т. 24 (1935), стр. 719.

высокая степень насыщения, причем для ее возникновения не требуется, чтобы в воздухе были посторонние частицы. Так как это явление возникает совершенно внезапно и при этом освобождается сразу значительное количество скрытой теплоты, то внутри расширяющейся массы газа происходит повышение давления. Это повышение давления часто наблюдается в виде скачка уплотнения (обычно косо́го), который значительно изменяет поле скоростей. Положение того сечения трубы, в котором возникает повышение давления, зависит от степени влажности воздуха, поэтому заранее учесть влияние описанного явления очень трудно. Гораздо проще совсем предупредить его, что возможно либо путем нагревания засасываемого воздуха, либо путем его искусственного осушения. Применение последнего способа дает хорошие результаты.

Крайне малая длительность потоков, достигаемых при помощи напорных или вакуумных камер, является основным недостатком аэродинамических труб, работающих по такому принципу. Необходимость увеличить время возможного наблюдения процессов, происходящих при обтекании моделей, привела к созданию аэродинамических труб непрерывного действия. Для этой цели понадобилось применение весьма мощных воздуходувных машин обычно турбокомпрессоров. Первая аэродинамическая труба такого рода была построена Аккеретом в Цюрихе¹. Она приводится в действие мотором в 1000 л.с. и при больших скоростях работает на разреженном воздухе, так как в противном случае была бы нужна еще большая мощность. Вторая установка такого же рода, но с мощностью около 4000 л.с., построена в Гвидонии близ Рима². Так как в турбокомпрессоре происходит нагревание воздуха, то для сохранения температуры воздушного потока на постоянном уровне труба снабжается специальной охлаждающей системой. Рабочий участок такой трубы устраивается совершенно так же, как и в трубах с вакуумными камерами. Схема Цюрихской аэродинамической трубы больших скоростей изображена на рис. 260.

Скорость течения на рабочем участке трубы определяется по формуле (10) (стр. 356). Для этого должен быть измерен перепад давления, причем кроме давления p_1 , соответствующего состоянию покоя, должна быть измерена также плотность ρ , соответствующая состоянию по-

¹См. доклад Аккерета на конференции по большим скоростям в авиации, состоявшейся в Риме в 1935 г. [имеется в переводе на русский язык в сборнике статей «Газовая динамика», Москва, 1939. (Прим. перев.)]

²См. доклад М. Гаспери на конференции по большим скоростям в авиации, состоявшейся в Риме в 1935 г. [имеется в переводе на русский язык в сборнике статей «Газовая динамика», Москва, 1939]; см. также *Gesammelte Vorträge der Hauptvers. der Lilienthalges. f. Luftfahrtforschung* 1937, стр. 187.

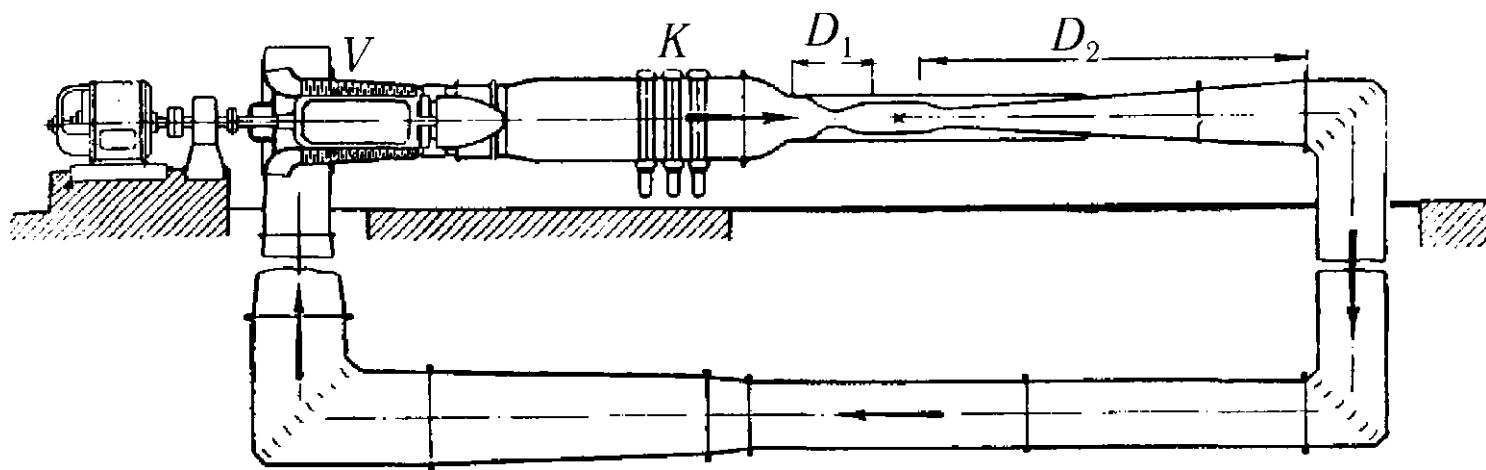


Рис. 260. Цюрихская аэродинамическая труба сверхзвуковых скоростей. V — турбокомпрессор; K — охлаждающая система; D_1 — сопло Лавала, D_2 — диффузор

кая (например, путем измерения температуры). Однако, если перед рабочим участком возникает конденсация водяного пара, то указанный способ дает не совсем точные результаты. В этом случае для определения состояния потока в какой-нибудь точке необходимо знать три величины, например, давление p , плотность ρ и скорость w . Давление может быть измерено непосредственно через отверстие в стенке трубы или при помощи зонда. Измерение плотности можно выполнить путем наблюдения интерференции света. Вместо плотности можно измерить температуру, которая связана с давлением и плотностью уравнением состояния. Однако измерение температуры в движущемся газе довольно затруднительно (см. ниже). Наконец, третья величина, скорость w , может быть определена либо путем измерения полного давления p_p , либо путем вычисления числа Маха. Полное давление измеряется трубкой Пито, а число Маха вычисляется по углу Маха, отсчитанному на снимке, полученном с потока по способу Теплера.

Так как

$$\rho c^2 = \kappa p \quad (45)$$

и

$$\rho w^2 = \frac{2(p_p - p)}{\beta}, \quad (46)$$

где β есть функция числа Маха $\frac{w}{c}$ [см. уравнение (45)], то мы имеем:

$$\frac{p_p}{p} = 1 + \frac{\kappa M^2 \beta}{2}.$$

Следовательно, величина $\frac{p_p}{p}$ является функцией числа Маха. Эта функция может быть изображена в виде кривой или представлена в виде

таблицы. Имея такую кривую или таблицу, можно определить по измеренным значениям p_p и p число Маха. Зная же число Маха и плотность ρ , можно из соотношений (46) и (47) найти w и s .

Если площадь поперечного сечения потока известна, то измерение плотности можно выполнить, пользуясь уравнением неразрывности

$$F\rho w = F_0\rho_0 w_0, \quad (47)$$

причем, конечно, произведение $F_0\rho_0$ для входного поперечного сечения F_0 должно быть известно. Решая систему уравнений (47) и (48), мы найдем ρ и w .

Казалось бы, что для заданной температуры и измеренного давления p можно определить плотность ρ из уравнения состояния. Однако термометр, помещенный в газовый поток, отнюдь не показывает истинную температуру газа. В самом деле, согласно сказанному в § 10, в критической точке всегда возникает повышение температуры. Повышение температуры возникает также и на боковых поверхностях термометра — вследствие трения движущегося газа. Величина этого повышения не постоянная, она зависит от вязкости и теплопроводности; для воздуха она лишь немного меньше повышения температуры в критической точке. Более или менее надежное измерение температуры можно выполнить при помощи термоэлемента, помещенного внутрь полутела, выполненного в виде трубки Пито. Но для того чтобы получить истинную температуру газа, надо из отсчитанной температуры вычесть величину $\frac{w^2}{2c_p}$.

При применении так называемого пластинчатого термометра его показания должны быть уменьшены, согласно теории Польгаузена¹, учитывающей только трение ламинарного пограничного слоя, на $0,85\frac{w^2}{2c_p}$ для воздуха и на $1,04\frac{w^2}{2c_p}$ для водяного пара.

Тепловые явления, происходящие в ламинарных и турбулентных пограничных слоях около ненагреваемых тел, обтекаемых потоком газа с большой скоростью, экспериментально исследованы Эккертом и Вейзе². Расчет таких температурных полей для ламинарных пограничных слоев выполнен Эккертом и Древитцем³.

¹Pohlhausen E., ZAMM т. 1 (1921), стр. 115. О практических конструкциях приборов для измерения температуры см. Eckert E., VDI-Zeitschrift, т. 84 (1940), стр. 817.

²Eckert E. und Weise W., Forschung, т. 12 (1941), стр. 40, т. 13 (1942), стр. 246.

³Eckert E. und Drewitz O., Luftfahrtforschung, т. 19 (1942), стр. 189.

ГЛАВА 5

Специальные задачи

§ 1. Предварительные замечания. В этой главе мы рассмотрим такие явления, которые не могли быть включены без известной натяжки в содержание предыдущих глав, но в то же время не могут быть обойдены молчанием при изложении современного состояния гидроаэродинамики.

К числу таких явлений относятся:

А. Явления, в которых участвуют несколько агрегатных состояний: жидкость и газ (кавитация, гидравлический удар, движение смеси воды и воздуха, распыление); жидкость и твердое тело, а также газ и твердое тело (движение наносов в реках и морях, движение взвешенных веществ в жидкостях, движение песка и снега в бурную погоду). К этим явлениям относится также возникновение сил гидродинамического дальнего действия. За неимением другой возможности мы включим сюда также задачу о глиссировании твердого тела на поверхности воды.

В. Явления, возникающие при движении жидкостей и газов во вращающемся пространстве (движение жидкостей в гидравлических машинах, движение ветра и морские течения на вращающейся Земле). К этим явлениям относится также вращение диска в среде с сопротивлением.

С. Явления, возникающие в расслоенных средах под действием силы тяжести (внутренние волны в расслоенной среде, циклоны и антициклоны как результат вертикального перемещения масс в связи с расслоением среды и вращением Земли, общая циркуляция атмосферы).

Д. Явления, связанные с теплопередачей в текущих средах (вынужденная и самопроизвольная теплопередача и т. п.).

А. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ АГРЕГАТНЫХ СОСТОЯНИЙ

§ 2. Кавитация. *Кавитацией* называется образование в текущей жидкости полостей, заполненных паром или газом. Это явление возникает в тех случаях, когда в каких-нибудь местах потока вследствие возникновения больших местных скоростей давление p снижается

настолько, что становится меньше давления насыщения p , т. е. давления, при котором начинается кипение жидкости (при этом предполагается, что невозмущенное давление p_0 больше p'). В этом состоянии в соответствующих местах потока начинается бурное испарение жидкости, и возникают полости в виде пузырей, наполненных паром под давлением p' . Так как в этих местах происходит увеличение объема потока, то свойства потоков при наличии кавитации, конечно, значительно отличаются от свойств обычных потоков. Если при дальнейшем продвижении потока давление в нем повышается, то в образовавшихся полостях пар конденсируется и полости смыкаются. Такое смыкание кавитационных полостей обычно сопровождается резким треском¹.

Воздушные пузыри, увлекаемые движущейся водой, а также газы, растворенные в воде, значительно облегчают возникновение кавитации. Наоборот, в воде, почти свободной от примеси воздуха, кавитация в течение короткого промежутка времени не возникает не только при давлениях, меньших давления насыщения, но даже при значительных растягивающих напряжениях. Это обнаруживается при некоторых опытах, когда возникновение кавитации начинается в том же месте, где происходит отрыв потока от стенки, т. е. там, где частицы пограничного слоя, близкие к стенке, останавливаются и остаются в таком состоянии продолжительное время. Необходимо, впрочем, заметить, что, измеряя давление путем устройства отверстия в стенке, невозможно обнаружить в жидкости давление, меньшее давления насыщения, так как жидкость, находящаяся в отверстии в состоянии покоя, начинает кипеть, как только давление над нею становится меньше p' . В дальнейшем мы будем предполагать, что в текущей жидкости всегда содержатся пузырьки воздуха или другого газа, которые и разрастаются в полости, наполненные парами воды, при падении давления ниже давления насыщения. В практических условиях почти всегда именно так и бывает.

Особенно простой и наглядный случай кавитации возникает при движении жидкости в канале, сначала суживающемся, а затем опять расширяющемся. Если расширение канала происходит постепенно, то

¹Эти явления подробно разобраны в статье Ackeret J., *Forschung*, т. I (1930), стр. 1 и 63; см. также статью того же автора под названием «Кавитация» в *Handbuch der Experimentalphysik*, т. IV, часть I, стр. 461–486. Многочисленные указания на литературу можно найти в книге *Hydromechanische Probleme der Schiffsantriebs*, Hamburg, 1932, стр. 227–342.

См. также многочисленные работы В. Л. Поздюнина, например: Поздунин В. Л., О некоторых задачах гидромеханики отрывного обтекания тел. Известия Отделения технических наук Акад. Наук. СССР, 1946, № 2. (Прим. перев.)

при большой скорости течения давление в расширяющейся части может повыситься до атмосферного давления, в то время как вверх по течению, в узком месте канала, давление будет оставаться очень низким. Если давление здесь понижается до давления насыщения, то позади самого узкого сечения основная масса жидкости движется в виде свободной, правда, обычно очень неспокойной струи, сопровождаемой по бокам пенообразной смесью из пузырьков пара и жидкости. Дальше, вниз по течению струя внезапно замедляет свое движение, происходит своего рода скачок уплотнения, и вода заполняет все сечение канала¹. Здесь отдельные пузыри пара сталкиваются друг с другом и, вследствие повышения давления, спадают, после чего в потоке остаются только маленькие пузырьки воздуха, находившегося ранее в воде в растворенном состоянии. Явления только что описанного рода часто возникают в водопроводных кранах, особенно при высоком давлении подачи воды, и дают о себе знать своеобразным резким шумом.

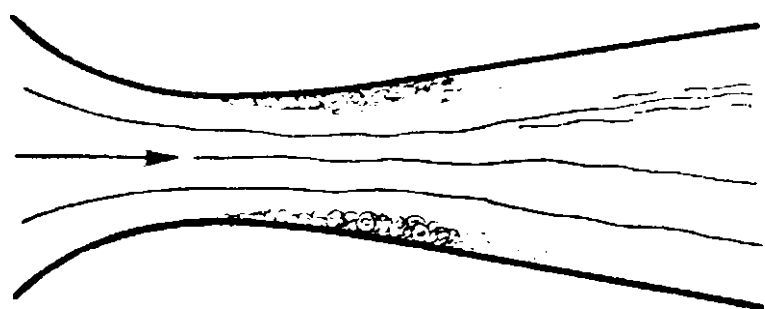


Рис. 261. Область, охватываемая кавитацией при большом противодавлении

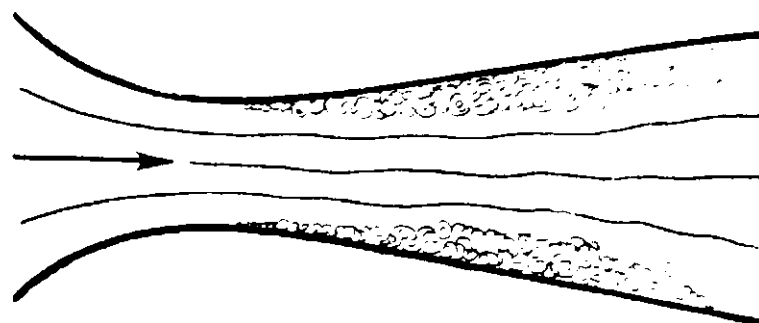


Рис. 262. Область, охватываемая кавитацией при малом противодавлении

Нумахи² исследовал кавитацию в воде при различном содержании в ней воздуха и обнаружил, что в стеклянной трубе, сначала суживающейся, а затем расширяющейся, струя воды остается совершенно прозрачной и спокойной до тех пор, пока содержание воздуха меньше половины количества, требующегося для насыщения; по мере же увеличения содержания воздуха около струи появляется все больше и больше пены. Длина свободной струи зависит от противодавления. Она довольно точно совпадает с той длиной, которую дает вычисление на основании теоремы о количестве движения для случая внезапного расширения трубы (§ 6, гл. II). Следовательно, давление восстанавливает свою величину тем меньше, чем меньше отношение поперечного сече-

¹Теория такого скачка уплотнения дана Аккеретом [см. A c k e r e t J., Forschung, т. 1 (1930), стр. 63].

²N u m a c h i F., Ing.-Arch., т. 7 (1936), стр. 397; см. также т. 9 (1938), стр. 86.

ния струи к поперечному сечению трубы. Поэтому при высоких противодавлениях кавитация охватывает меньшую область (рис. 261), чем при низких противодавлениях (рис. 262)¹. При средних длинах области кавитации в струе часто возникают сильные колебания.

На рис. 263 изображен результат измерений давления, выполненных Гохшильдом² в канале, сначала суживающемся, затем расширяющемся (форма канала изображена в верхней части рисунка). Поперечное сечение канала имело прямоугольную форму с постоянной высотой. Измерения производились через отверстия, сделанные в стенке канала. Через канал перекачивалось все время одно и то же количество воды, но при этом изменялось противодавление (при помощи дроссельного клапана). Мы видим, что при достаточно больших противодавлениях кривые изменения давления вдоль длины канала почти параллельны друг другу (кривые *a* и *b*). Но когда давление в самом узком сечении канала делается столь низким, что там начинается кавитация, давление в расширяющейся части канала не восстанавливается в соответствии с уменьшением скорости, и происходит значительная, а иногда почти полная потеря энергии (кривые *e* — *i*). То точки, в которых начинается подъем кривых *e* — *g*, отмечают конец области, охваченной кавитацией.

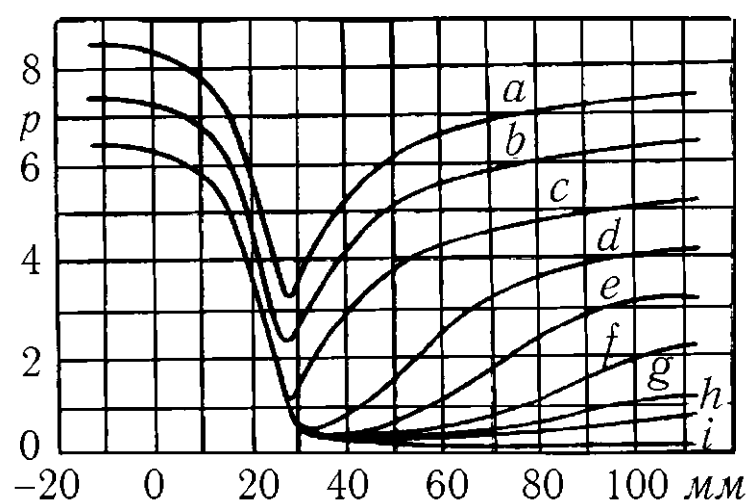
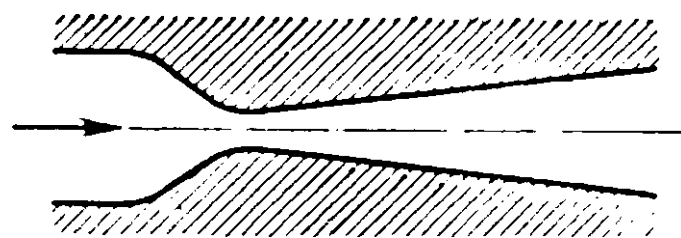


Рис. 263. Изменение давления вдоль канала переменного сечения при навигации

Кавитация оказывает очень вредное действие на работу быстроходных водяных турбин и гребных винтов. Вследствие ряда соображений желательно, чтобы скорость вращения рабочих колес турбин и гребных винтов была возможно большей. Однако при слишком больших скоростях вращения на концах лопаток и лопастей возникают столь большие линейные скорости, что создаются необходимые условия для кавитации. Между тем кавитация влечет за собой не только потерю энергии,

¹Если различны начальные давления, а противодавления одинаковые, то при меньшем начальном давлении кавитация охватывает меньшую область, а при большем начальном давлении — большую область.

²Hochschild H., Versuche über die Strömungsvorgänge in erweiterten und verengten Kanälen. Forschungsheft № 114 des Vereins Deutsch. Ing., 1912.

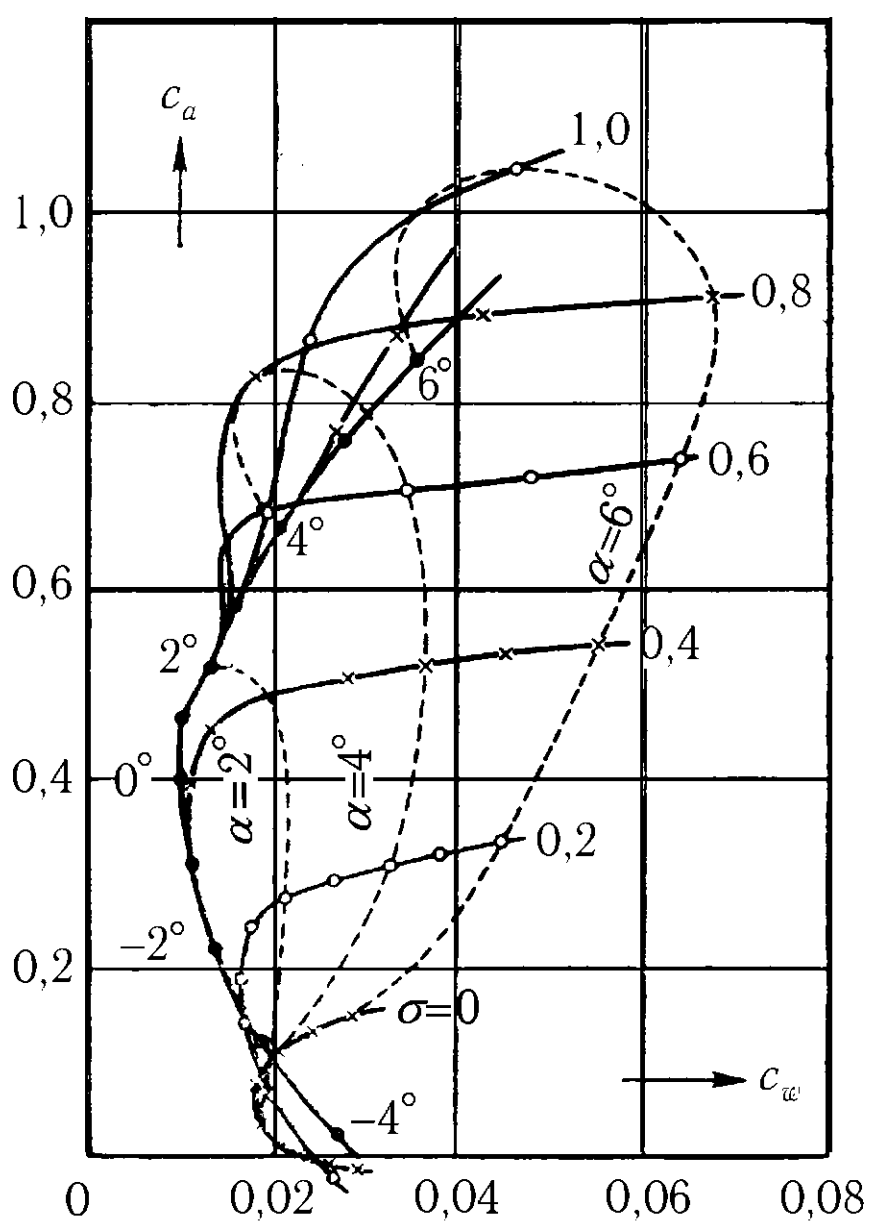


Рис. 264. Кавитационные поляры

но и другое вредное явление — так называемую *кавитационную коррозию металла* — своеобразное его разъедание (см. ниже). Поэтому при конструировании водяных турбин и гребных винтов является чрезвычайно важной задачей предупредить возникновение кавитации. Простой способ ее предупреждения заключается в устранении возможности появления низких давлений на концах лопаток и лопастей. Это достигается путем применения слабо изогнутых профилей и очень малых углов атаки, следовательно, путем ограничения нагрузки на поверхность лопаток и лопастей. В качестве величины, определяющей опасность возникновения кавитации, может служить отношение

$$\sigma = \frac{p_0 - p'}{\frac{1}{2}\rho w^2},$$

где p_0 есть невозмущенное давление, а p' — давление насыщения. В настоящее время удалось получить хорошие гребные винты, для которых

$$\sigma = 0,2.$$

Хорошее представление о явлениях, возникающих на концах лопастей быстроходных гребных винтов, дают испытания моделей винтов, производимые в специальной кавитационной установке. Эта установка представляет собой камеру, где создается круговой поток воды, в котором абсолютное давление может произвольно меняться¹. Более простая, а потому и более отчетливая картина получается при испытании

¹Описание такой установки см. в статье L e r b s H., Werft, Reederei, Hafen, т. 12 (1931), стр. 191, а также в книге Hydromechanische Probleme des Schiffsantriebs, стр. 287.

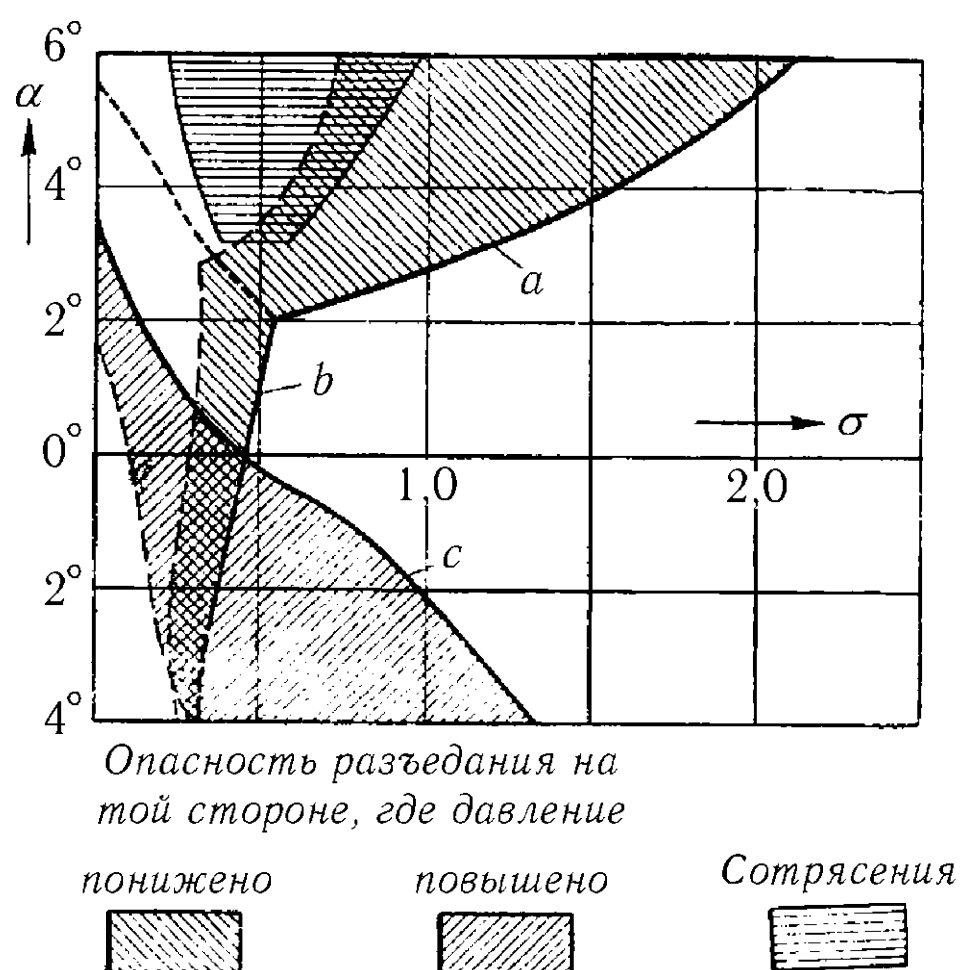


Рис. 265. Кавитационная диаграмма

отдельного профиля лопасти. На основании измерений и наблюдений через стеклянные стенки камеры строят для каждого значения σ кавитационную поляру (рис. 264) и кавитационную диаграмму (рис. 265), на которой значения σ откладываются как абсциссы, а углы атаки — как ординаты.

Кавитационные поляры и диаграмма, изображенные на рис. 264 и 265, построены для профиля, имеющего форму кругового сегмента, причем высота сегмента равна 0,075 его хорды (водяные гребные винты очень часто делаются с профилем такой формы). Кривая на рис. 264, вычерченная более жирно, чем остальные кривые, представляет собой поляру для высокого абсолютного давления.

При уменьшении σ обнаруживается следующее замечательное явление: на больших углах атаки кавитация значительно улучшает качество профиля (лобовое сопротивление уменьшается больше, чем подъемная сила). Причина этого явления заключается в том, что возникновение кавитации на передней части подсасывающей стороны делает профиль значительно более удобообтекаемым¹. Однако при дальнейшем уменьшении σ область, охватываемая кавитацией, расширяет-

¹В случае профиля, имеющего хорошую форму, такое явление не наблюдается, см. Numachi F., Forschung, т. 11 (1940), стр. 303.

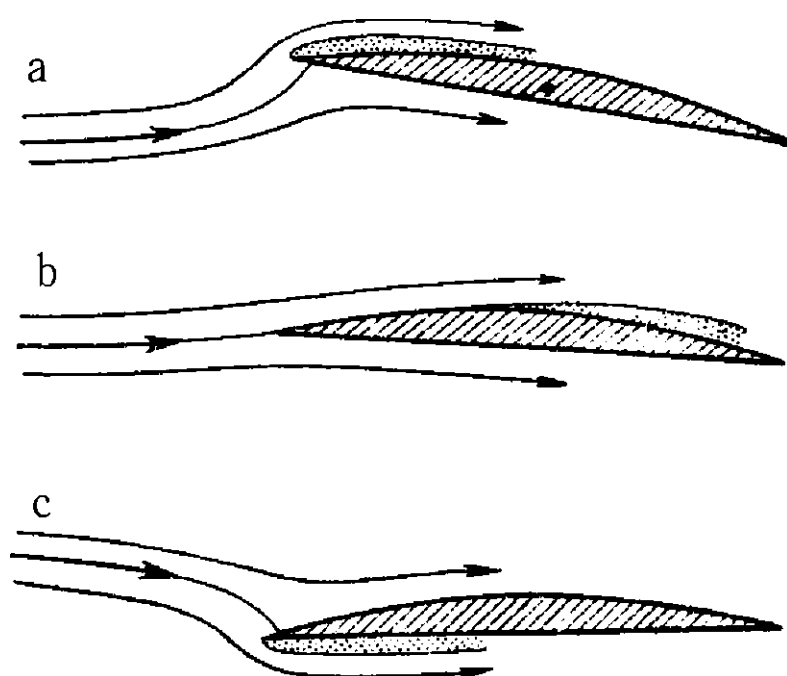


Рис. 266. Области возникновения кавитации на профиле

ся, и свойства профиля становятся хуже; при совсем малых значениях σ сила тяжести винта делается очень небольшой.

Кавитационная диаграмма дает ясное представление о состоянии кавитации в каждом отдельном случае. Область состояний (α, σ) справа от кривых a , b и c свободна от кавитации, и поэтому здесь сила тяги и сопротивление такие же, как и при больших значениях σ . При состояниях (α, σ) , отвечающих точкам, лежащим слева от кривых a , b или c , возникает кавитация соответственно в передней части подсасывающей стороны профиля, в средней части этой стороны и в передней части стороны с повышенным давлением (рис. 266). При состояниях (α, σ) , лежащих слева от b и c , кавитация возникает одновременно и в средней части подсасывающей стороны и в передней части противоположной стороны профиля. При состояниях (α, σ) , соответствующих областям, заштрихованным косыми линиями, имеется опасность разъедания лопастей (при этих состояниях конец наполненной паром полости находится на лопасти, см. ниже). При состояниях (α, σ) , лежащих в области, заштрихованной горизонтальными линиями, возникают ритмичные колебания потока, с которыми связано появление значительных сил, сотрясающих лопасть винта. Наконец, при состояниях (α, σ) , лежащих в незаштрихованных областях слева от a , b или c , режим работы винта безопасен. Гельмбольд¹ обратил внимание на следующее обстоятельство. Если на кавитационной диаграмме вместо значений α и σ откладывать значения $\frac{\alpha}{\delta}$ и $\frac{\sigma}{\delta}$, где $\delta = \frac{d}{b}$, т.е. отношению толщины профиля к его ширине, то для аффинных профилей разной толщины получаются кривые b ,

¹ Helmbold H., Hydromechanische Probleme der Schiffsantriebs, стр. 338.



Рис. 267. Разъедание лопасти гребного винта вследствие кавитации

приблизленно между собой совпадающие. Это связано с тем, что разности давлений на профиле при одинаковых значениях $\frac{\alpha}{\sigma}$ приблизительно пропорциональны величине δ . Отсюда следует, что если желательно построить винт с малым значением числа σ , то необходимо взять очень тонкий профиль. (Напомним, что такое же правило мы получили и для воздушных гребных винтов при приближении к скорости звука, правда вследствие совсем других оснований.) При построении кавитационных диаграмм в координатах $\frac{\alpha}{\delta}$ и $\frac{\sigma}{\delta}$ более или менее совпадают также и кривые a и c для отдельных аффинных профилей.

Разъедание металла вследствие кавитации обычно наступает в том месте, где происходит скачок уплотнения, сопровождающийся, как было упомянуто, столкновениями пузырей пара¹. При этом части воды, до этого разделенные пузырями, сталкиваются друг с другом с конечными, но различными по величине скоростями, вследствие чего возникают очень высокие местные импульсивные давления (см. § 3). К этим ударным действиям часто присоединяются химические действия. Воздух, выделяющийся из воды при кавитации, богаче кислородом, чем обычный воздух. Под действием импульсивного давления этот обогащенный кислородом воздух вдавливается в поры металла, а затем, после падения давления, вырывается оттуда. Это означает, что слой металла, близкий к поверхности, подвергается переменной нагрузке. В результате всех этих явлений, полностью до сих пор еще не выясненных, на поверхности металла появляются маленькие углубления и бороздки, которые постепенно, если кавитация длится продолжительное время, углубляются и разрастаются, вплоть до того, что из лопасти или лопатки выпадают отдельные кусочки металла — происходит своеобразное разъедание металла, он принимает на большую глубину губчатое

¹Более подробно см. у Ackeret J., Handbuch der Experimentalphysik, т. IV, часть 1, а также у Haller P., Handbuch der Werkstoffprüfung Berlin, 1939, т. II,

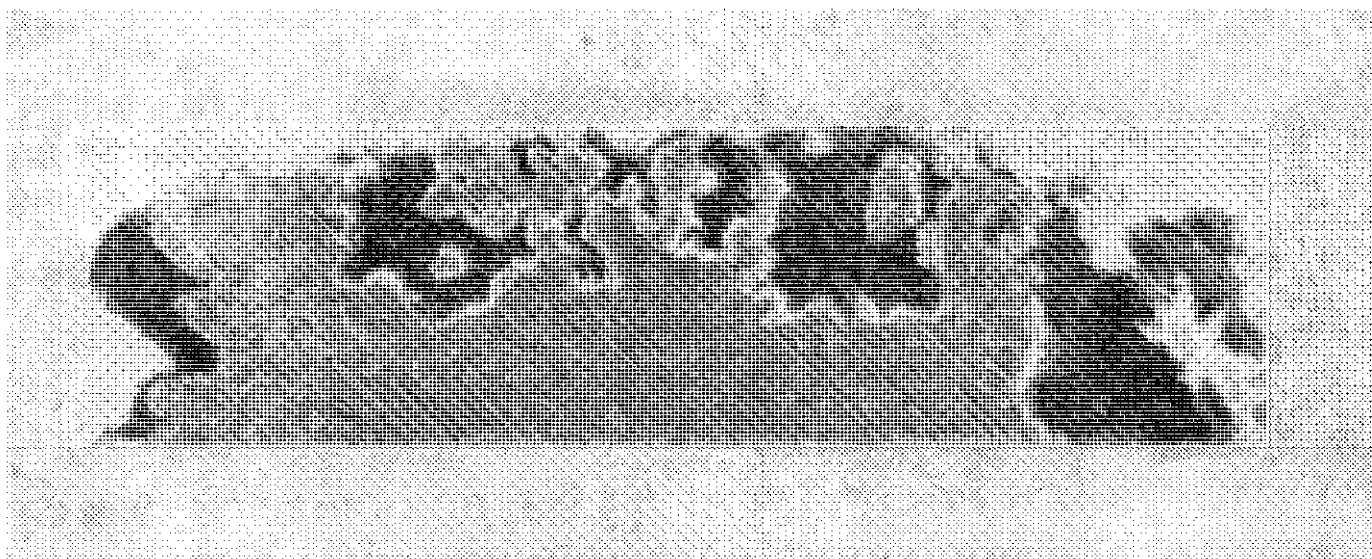


Рис. 268. Разрез через лопасть гребного винта, подвергнувшегося навигационному разъеданию

строение. На рис. 267 изображен пример такого разъедания бронзовой лопасти гребного винта торпедного катера. На рис. 268 показан разрез через кусок этой же лопасти.

§ 3. Гидравлический удар. Глиссирование. а) *Ударные явления.* Если в трубе вследствие временного понижения давления происходит разрыв столба жидкости, то пространство между разъединенными частями жидкости наполняется ее паром. Если затем давление вновь повышается, то полость, наполнившаяся паром, смыкается, и при этом наблюдается резкий, как бы металлический удар¹. При смыкании полости кавитации разорвавшиеся части столба жидкости движутся навстречу друг другу с некоторой относительной скоростью w и при встрече ударяются. Для выяснения того, что происходит при таком ударе, можно в первом приближении принять, что свойством упругой сжимаемости обладает только жидкость, стенки же трубы — неупругие (в действительности, они, конечно, упругие). В упруго-сжимаемой среде скорость распространения звука равна

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}},$$

стр.471.

¹Такое явление наблюдается, в частности, при быстром закрывании водопроводного крана, поставленного на более или менее значительном расстоянии от выходного конца трубы. Тогда между краном и выходным концом трубы вода сначала по инерции продолжает двигаться вперед, причем возникает кавитация, но затем под действием атмосферного давления начинает двигаться назад. При этом она приобретает скорость, которая при отсутствии трения была бы такой же, как и начальная скорость.

где K есть модуль сжимаемости. При ударе, очевидно, возникает резкое повышение давления, которое распространяется в обе стороны со скоростью звука c ; при этом части жидкости, которых достигает в данный момент волна давления, принимают скорость, равную среднему арифметическому от тех значений, которые они имели до удара. Следовательно, изменение скорости в каждом из столбов жидкости при прохождении ударной волны равно $\frac{w}{2}$. На основании уравнения (2) гл. IV это означает, что повышение давления, возникающее при ударе, равно

$$p = \rho c \frac{w}{2}.$$

Если, например, движение разорвавшихся частей происходит навстречу друг другу с относительной скоростью ($w = 10$ м/сек, то в случае воды ($c = 1400$ м/сек, $\rho = \frac{1000}{9,81}$ кг·сек²/м⁴) мы будем иметь повышение давления на величину;

$$p = 102 \cdot 1400 \cdot 5 = 714\,000 \text{ кг/м}^2 = 71,4 \text{ кг/см}^2.$$

При учете упругости стенок трубы получаются значительно более сложные соотношения, которые упрощаются, если пренебречь изгибными колебаниями стенок трубы, возникающими при ударе. В этом случае в воде кроме звуковых волн распространяется еще одна система волн со скоростью

$$c' = c \sqrt{\frac{Es}{Kd + Es}},$$

где E есть модуль Юнга материала трубы, s — толщина стенок и d — диаметр трубы. В тонкостенных трубах скорость c' распространения волн второго вида может быть значительно меньше скорости c . На больших расстояниях от места удара преобладающую роль играют волны второго вида¹.

С гидравлическим ударом сходны явления, возникающие при сжатии пузырей, образовавшихся при кавитации. Как показывают снимки,

¹О подробностях см. Alliévi, *Revue de Mécanique* 1904; см. также Camichel C., *Verhandl. d. 2 Internat. Kongr. f. Techn. Mech. Zürich* 1926, стр. 75; Kreitner H., *Die Wasserwirtschaft* 1926, стр. 258; далее Jäger Ch., *Wasserkraft und Wasserwirtschaft*, т. 32 (1937), стр. 269 (в этой статье имеется много библиографических указаний), Ried G., *VDI-Zeitschr.*, т. 85 (1941), стр. 639.

Классическое исследование о гидравлическом ударе выполнено еще в 1899 г. Н. Е. Жуковским в работе: О гидравлическом ударе в водопроводных трубах, *Бюллетени Политехнического общества*. 1899. № 5; см. также «Избранные сочинения», т. II, Москва 1948. (Прим. перев.)

полученные при вспышке искры, пузыри при таком сжатии либо делаются плоскими, либо стягиваются в точку. В первом случае возникают примерно такие же соотношения, как и при гидравлическом ударе. Во втором же случае в последний момент стягивания пузыря получаются очень большие скорости, так как при таком стягивании кинетическая энергия сосредоточивается в очень небольшом пространстве. Это приводит к тому, что в ничтожном по размерам пространстве возникают очень высокие давления. Аналогичное явление наблюдается также при стягивании полусферических пузырей на стенке и сферических пузырей в конусообразных углублениях стенки. Механизм этого явления в известной мере разъясняет то разрушающее действие кавитации на металл, о котором было сказано в конце предыдущего параграфа.

Удар твердого тела о плоскую поверхность воды можно исследовать таким же путем, как и гидравлический удар в трубе. Так как теперь для обеих столкнувшихся сред величина ρc имеет разные значения, то скорость распространения волн давления в обеих средах будет разная, а потому будет разным и изменение скорости в них. Если тело, ударяющееся о воду, представляет собой массивный кусок металла, то практически вся относительная скорость воспринимается водой¹. Повышение давления, возникающее в воде при ударе, довольно быстро спадает, во-первых, вследствие своего распространения со скоростью звука от контура поверхности столкновения, а во-вторых, вследствие того, что твердое тело под действием противодействия более или менее быстро (в зависимости от своей массы) теряет скорость. Кривая, изображающая зависимость ударного давления от времени, имеет примерно такой же вид, как кривая, изображающая распределение давления вдоль ширины прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком (см. рис. 256). После того как ударное давление в воде делается равным нулю, в ней остается только обычное гидродинамическое давление, соответствующее оставшемуся после удара движению.

б) *Непрерывные явления.* Пусть твердое тело с плоским днищем опускается без скорости на поверхность воды, а затем внезапно получает ускорение, направленное вниз. Тогда в воде возникает течение

¹С описанным явлением в известной мере сходен удар морских волн в стенки мола или набережной. Если волны движутся над постепенно повышающимся дном, то гребни волн наклоняются вперед, и затем волна опрокидывается. Перед опрокидыванием в какой-то момент времени волна имеет вертикальный фронт. Если такое положение волны возникает в непосредственной близости от стенки, то при большой поступательной скорости фронта возникают столь мощные удары, что из стенки иногда вырываются отдельные плиты камня.

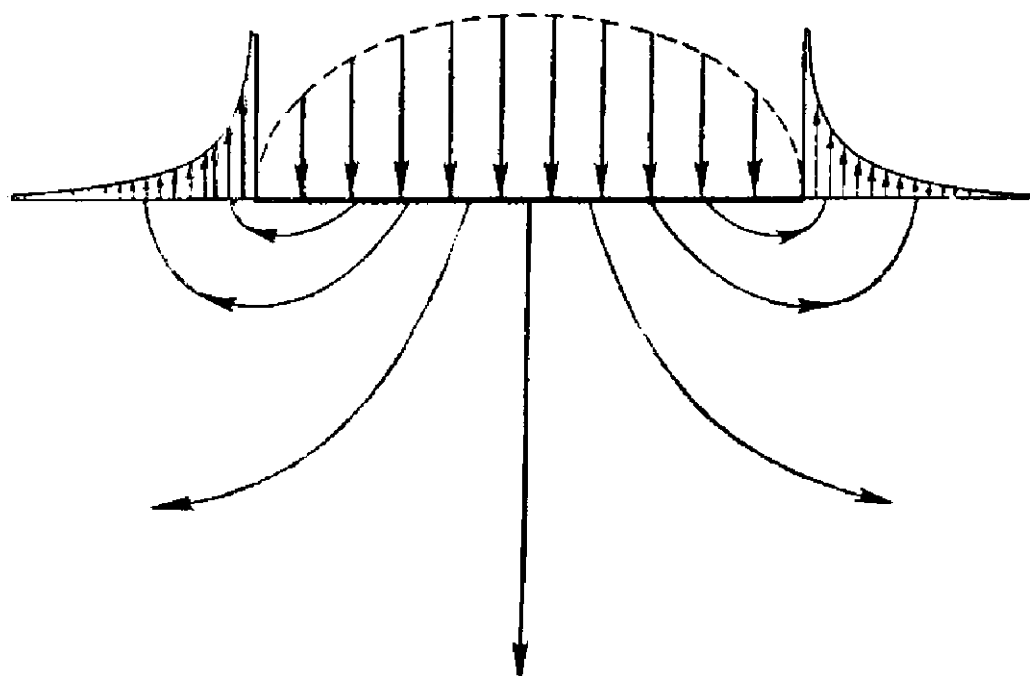


Рис. 269. Распределение давления вдоль ширины плоского днища при погружении в воду

такого же вида, как течение, вызываемое в воздухе доской, заменяющей крыло и получающей ускорение, направленное вниз (стр. 288). Разница заключается только в том, что в случае крыла среда, в которой возникает поток, окружает крыло и сверху и снизу, теперь же она находится только под днищем тела. В случае крыла давление под плоскостью доски выше невозмущенного, над плоскостью доски — ниже невозмущенного давления, а в плоскости доски — рядом с нею — оно остается таким же, как и невозмущенное давление. В случае посадки тела на воду давление под днищем также выше невозмущенного, а на свободной поверхности воды рядом с днищем оно равно невозмущенному давлению. Следовательно, в течение короткого промежутка времени, пока днище тела еще очень мало погрузилось в воду, возникающий поток совпадает с нижней половиной потока, рассмотренного на стр. 288. Давление в потоке определяется уравнением

$$p - p_{\infty} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

решение которого для плоской задачи (бесконечно-длинная доска) можно выполнить способом, указанным на стр. 288. Распределение давления вдоль ширины днища, как и в случае крыла, изображается полуэллипсом (рис. 269).

Иное явление возникает при опускании на воду наклоненной относительно ее поверхности пластинки с нормальной скоростью v_n (рис. 270). В этом случае, как показал в своей фундаментальной рабо-

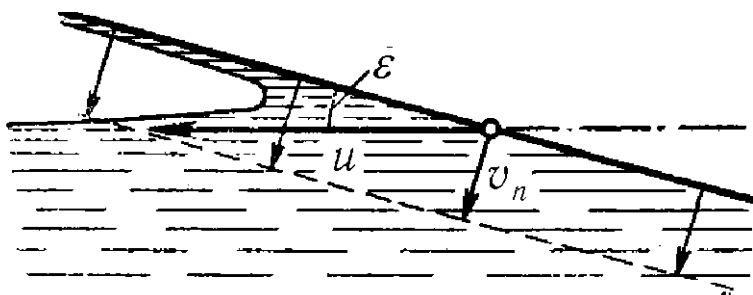


Рис. 270. Опускание на воду пластинки с нормальной скоростью v_n

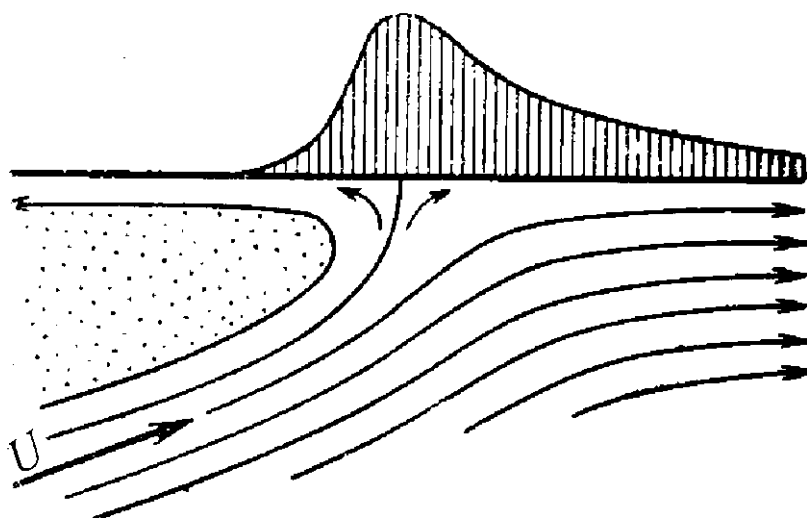


Рис. 271. Линии тока течения около пластинки, опускающейся на воду с нормальной скоростью v_n , в системе отсчета,двигающейся вправо со скоростью $U = \frac{v_n}{\sin \alpha}$

те Г. Вагнер¹, вдоль нижней поверхности пластинки образуется своеобразная струя, вылетающая за пределы пластинки (см. также рис. 273). Процесс соприкосновения поверхности воды с пластинкой распространяется, очевидно, влево с горизонтальной скоростью

$$U = \frac{v_n}{\sin \varepsilon},$$

где ε есть угол наклона пластинки относительно поверхности воды. В системе отсчета, движущейся вдоль пластинки со скоростью U вправо, течение, ведущее к образованию струи, будет установившимся. Покоящаяся жидкость имеет относительно этой системы отсчета скорость U , направленную влево. Линии тока такого установившегося течения изображены на рис. 271. Применяя уравнения Бернулли к линии тока, ведущей к критической точке, мы найдем, что повышение давления в ней равно

$$\rho \frac{U^2}{2} = \frac{\rho v_n^2}{2 \sin^2 \varepsilon}.$$

Отсюда видно, что при малых углах ε под пластинкой может возникнуть очень большое местное давление. Это давление следует учитывать при конструировании поплавков для гидросамолетов; если придать им неправильную форму, то при жесткой посадке гидросамолета они могут быть повреждены.

¹Wagner H., Über Stoss- und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten, ZAMM, т. 12 (1932) стр. 193

с) *Глиссирование на поверхности воды.* С вопросами, рассмотренными в пункте б), тесно связаны явления, наблюдающиеся при глиссировании, т. е. при скольжении летающих лодок и поплавков гидросамолетов на поверхности воды. Наиболее важное из этих явлений заключается в возникновении часто весьма значительной подъемной силы¹. Сходство этого явления с возникновением подъемной силы крыла — очевидное. Здесь, как и там, основным условием для возникновения подъемной силы служит наличие большой скорости движения. Однако сходство между обоими явлениями не ограничивается внешней аналогией; на самом деле оно значительно глубже. В обоих случаях в текучей среде перемещается в горизонтальном направлении установившееся распределение давления и вызывает в ней определенное поле скоростей. Правда, при глиссировании текучая среда находится только под движущейся поверхностью, а не с обеих ее сторон, как при движении крыла. Однако это влечет за собой, как и в случае, рассмотренном в пункте б), только то, что отпадает необходимость учитывать распределение давления на верхней (подсасывающей) стороне скользящей поверхности. Аналогия с крылом будет полной, если скорость глиссирования v очень большая; в самом деле, при этом условии можно считать, что в пределах области, занимаемой глиссирующей поверхностью, сила тяжести не влияет на движение возмущенной поверхности воды. Поэтому к глиссирующей поверхности можно применить формулы двухмерной и трехмерной теории крыла, правда, при дополнительном условии, что встреча передней кромки глиссирующей поверхности с водой происходит без удара. По сравнению с крылом получается разница только в том, что теперь в выражения для подъемной силы и индуктивного сопротивления входит множитель, равный половине. Такой же множитель входит и в выражение для трения скольжения, так как теперь со средой соприкасается только одна сторона поверхности.

Если при движении глиссирующей поверхности происходит удар ее передней кромки о воду, то по сравнению с аналогичным случаем в теории крыла получается следующая разница: в случае крыла происходит обтекание его тупого переднего конца с образованием подсасывающей силы (см. стр. 280), в случае же глиссирующей поверхности образуется струя такого же рода, как при посадке на воду наклоненной пластинки с нормальной скоростью. Количеству движения струи соответствует дополнительное сопротивление глиссирующей поверхности. При глис-

¹Этим явлением, между прочим, объясняется подпрыгивание (часто многократное) плоского камня, брошенного с большой скоростью на воду так, что возникает его скольжение по поверхности воды.

сировании плоской пластинки, наклоненной к поверхности воды под углом ε , силы давления воды дают результирующую, перпендикулярную к плоскости пластинки, следовательно, отклоненную от вертикали на угол ε против движения.

Частицы воды позади глиссирующей поверхности получают скорости, направленные вниз, а с боковых ее сторон — скорости, направленные вверх. Это приводит к возникновению волн, исследование которых в случае пространственной задачи связано с большими затруднениями. В случае плоской задачи (глиссирующая пластинка бесконечной ширины или пластинка, примыкающая к двум параллельным стенками) вычисления значительно проще и приводят к результату, что за глиссирующей поверхностью следует система волн со скоростью, равной скорости глиссирования. Длина этих волн, согласно уравнению (62) гл. II, равна

$$\lambda = 2\pi \frac{v^2}{g}.$$

Если при умеренных скоростях глиссирования v и сравнительно большой смоченной ширине t глиссирующей поверхности величина $\frac{v^2}{g}$ не велика по сравнению с t , то волновое движение значительно влияет на величину подъемной силы и лобового сопротивления.

Плоская задача глиссирования была рассмотрена еще Релеем и Ламбом¹. Однако принципиальное разъяснение явления глиссирования было дано впервые Г. Вагнером²; им же были решены многие частные задачи³.

На рис. 272а изображена для плоской задачи линия уровня воды при безударном глиссировании и при отсутствии влияния силы тяжести, а на рис. 272b — такая же линия, но при влиянии силы тяжести. В первом случае из соображений симметрии сопротивление давления отсутствует, во втором же случае оно имеется. Эквивалентом этого

¹ Lamb H., Hydrodynamics, § 242; см. также Hogner E., Proceedings of the Internat. Congr. for Applied Mechanics 1924, Delft 1925, стр. 146.

² Wagner H., Über Stoss- und Gleitvorgängen an der Oberfläche von Flüssigkeiten, ZAMM, т. 12 (1932), стр. 193; см. также Proceedings of the IV Intern. Congr. for Applied Mechanics 1934, Cambridge, 1935, стр. 126.

³ Исследованию глиссирования, а также удара твердого тела о воду посвящены многочисленные работы Л. И. Седова и других советских ученых; см., например: Седов Л. И., Теория нестационарного глиссирования и движения крыла со обтекающими вихрями. Труды ЦАГИ, вып. 252 (1936); Седов Л. И., Глиссирование по поверхности воды. Техника воздушного флота, 1940, № 4–5; Лаврентьев М. А. и Келдыш М. В., Общая задача о жестком ударе о воду. Труды ЦАГИ, вып. 152 (1935). (Прим. перев.)

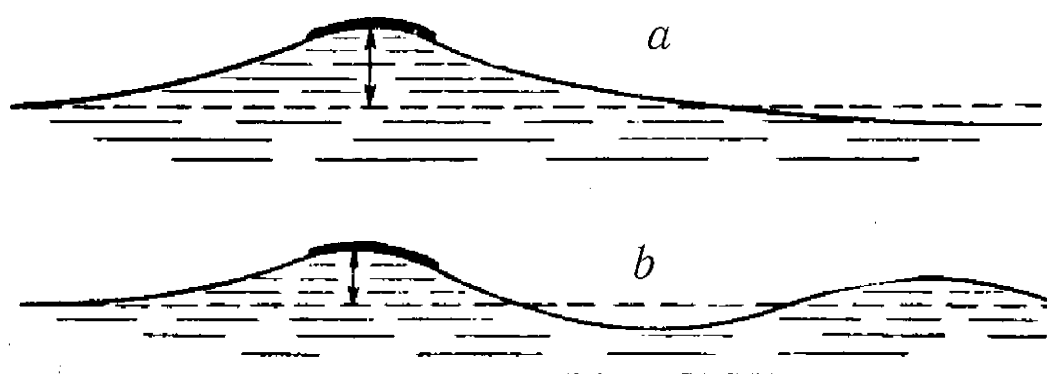


Рис. 272. Форма линии уровня воды при глиссировании: а) при отсутствии влияния силы тяжести, б) при наличии влияния силы тяжести

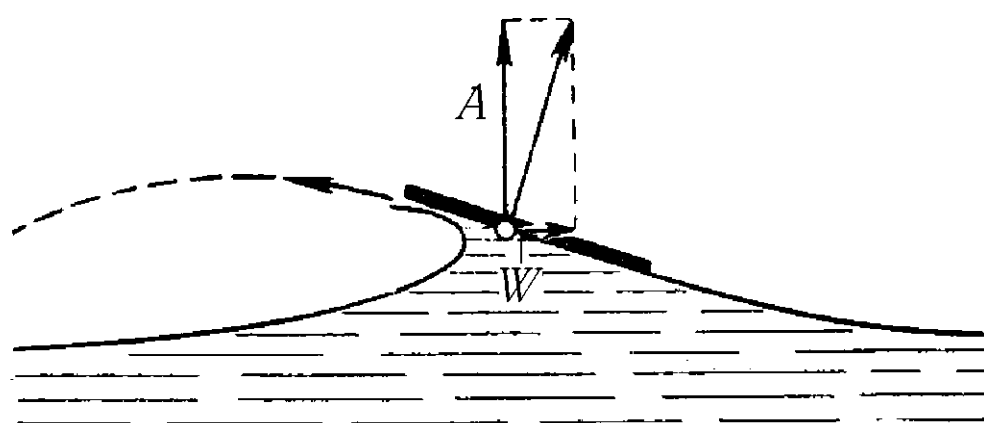


Рис. 273. Глиссирование плоской пластинки с образованием струи

сопротивления является энергия, остающаяся в волнах, следующих за глиссирующей пластинкой. На рис. 273 изображено глиссирование плоской пластинки с образованием струи. Уровень воды перед пластинкой поднимается еще до подхода пластинки. Это есть результат действия поля давления, сообщающего ускорение, направленное вверх, частицам жидкости, находящимся как впереди, так и позади пластинки; частицы же жидкости, находящиеся под пластинкой, получают ускорение, направленное вниз (представление об относительной величине ускорения в отдельных точках можно получить из рис. 269). В этом случае, как уже было сказано выше, для возникновения сопротивления не требуется влияния силы тяжести, достаточно действия только струи.

§ 4. Смеси из воды и воздуха. а) *Капли воды в воздухе.* Очень маленькие капли воды при свободном падении в воздухе принимают вследствие капиллярных сил практически шаровую форму. Так как вязкость воды, в зависимости от температуры, в 50–90 раз больше вязкости воздуха, то такие водяные шарики можно рассматривать как твердые шарики и, следовательно, применять к ним закон Стокса (§ 3 гл. III). При равномерном падении сопротивление шарика равно его весу. Поэтому, обозначая через d , диаметр шарика, а через v — скорость

падения, мы будем иметь:

$$3\pi\mu_{\text{воз}}vd = g\rho_{\text{вод}}\frac{\pi}{6}d^3, \quad (1)$$

где $\mu_{\text{воз}}$ есть вязкость воздуха, а $\rho_{\text{вод}}$ — плотность воды. Решая уравнение (1) относительно v , мы найдем:

$$v = \frac{\rho_{\text{вод}}gd^2}{18\mu_{\text{воз}}} = \frac{g}{18} \frac{\rho_{\text{вод}}}{\rho_{\text{воз}}} \frac{d^2}{\nu_{\text{воз}}}, \quad (2)$$

где $\rho_{\text{воз}}$ есть плотность воздуха, а $\nu_{\text{воз}}$ — кинематический коэффициент вязкости воздуха. Эта формула дает достаточно точные результаты для чисел Рейнольдса, не превышающих $R = 2$, т. е. для капель с диаметром не свыше $d = 0,1$ мм (капли тумана).

Для вычислений удобнее подставлять в формулу (2) значения диаметра в мм, а скорость получать в м/сек; имея в виду, что

$$\frac{\rho_{\text{вод}}}{\rho_{\text{воз}}} = 800$$

и

$$\nu_{\text{воз}} = 0,14 \text{ см}^2/\text{сек},$$

мы после пересчета к указанным единицам получим вместо формулы (2) следующую:

$$v = 31d^2. \quad (3)$$

Таким образом, капли диаметром в 0,1 мм падают со скоростью 0,31 м/сек.

Для определения скорости капель значительно большего диаметра, например, в 1 мм, следует применять закон Ньютона и пользоваться уравнением (78) гл. III. Предполагая по-прежнему, что капля имеет шаровую форму, мы получим:

$$g\rho_{\text{вод}}\frac{\pi}{6}d^3 = c\rho_{\text{воз}}\frac{v^2}{2}\frac{\pi}{4}d^2,$$

откуда найдем скорость падения:

$$v = \sqrt{\frac{4}{3c} \frac{\rho_{\text{вод}}}{\rho_{\text{воз}}} gd}, \quad (4)$$

где коэффициент сопротивления s имеет значение, близкое к 0,5, но не совсем постоянное при разных скоростях. Полагая $s = 0,5$ и пересчитывая формулу так, чтобы после подстановки диаметра в $мм$ она давала скорость в $м/сек$, мы получим:¹

$$v = 4,6\sqrt{d}. \quad (5)$$

Для капель диаметром свыше 4 $мм$ эта формула уже не пригодна, так как под действием постепенно возрастающей разности давлений происходит деформация капли — она сплющивается, прежде всего в области критической точки, причем иногда в ней даже возникает углубление. Это приводит, во-первых, к увеличению диаметра, а во-вторых, к увеличению коэффициента сопротивления s . Гохшвендер², фотографируя при вспышке искры капли воды, падавшие в вертикальном восходящем потоке воздуха, обнаружил, что при диаметре около 6 $мм$ наступает очень сильное сплющивание, а при еще большем диаметре капля принимает форму неправильного купола. Капли диаметром, большим 6,5 $мм$ (измеренном тогда, когда капля имела шаровую форму), при падении разрываются на более мелкие капли. Следовательно, максимальный размер дождевых капель не может превышать 6,5 $мм$, что было обнаружено уже давно рядом наблюдателей. Процесс разрыва капли происходит следующим образом: после того как капля принимает форму купола, середина ее растягивается в тонкую пленку и, наконец, лопается; капля сначала принимает форму неправильного кольца, которое сейчас же распадается на большое число мелких капель. На рис. 274 изображены отдельные фазы сплющивания и последующего разрыва большой дождевой капли.

б) *Распадение струи жидкости в воздухе.* Тонкая струя жидкости распадается в воздухе на капли даже при небольших скоростях движения. Как показал Релей³, это объясняется тем, что поверхностное натяжение делает цилиндрическую струю статически неустойчивой. Потеря устойчивости происходит следующим образом. Вследствие случайного отклонения диаметра струи от своего среднего значения в ней образуются более тонкие участки. В этих участках под действием поверхностного натяжения давление становится больше, чем в толстых

¹ Для определения скорости капель диаметром от $b = 0,1$ до 1 $мм$ можно пользоваться приближенной формулой $v = 4d$ (скорость получается в $м/сек$).

² Hochschwender E., Диссертация, Гейдельберг 1919.

³ Lord Rayleigh, Proc. Lond. Math. Soc., т. 10 (1879), стр. 4, или Scientif. Papers, т. I, стр. 361.

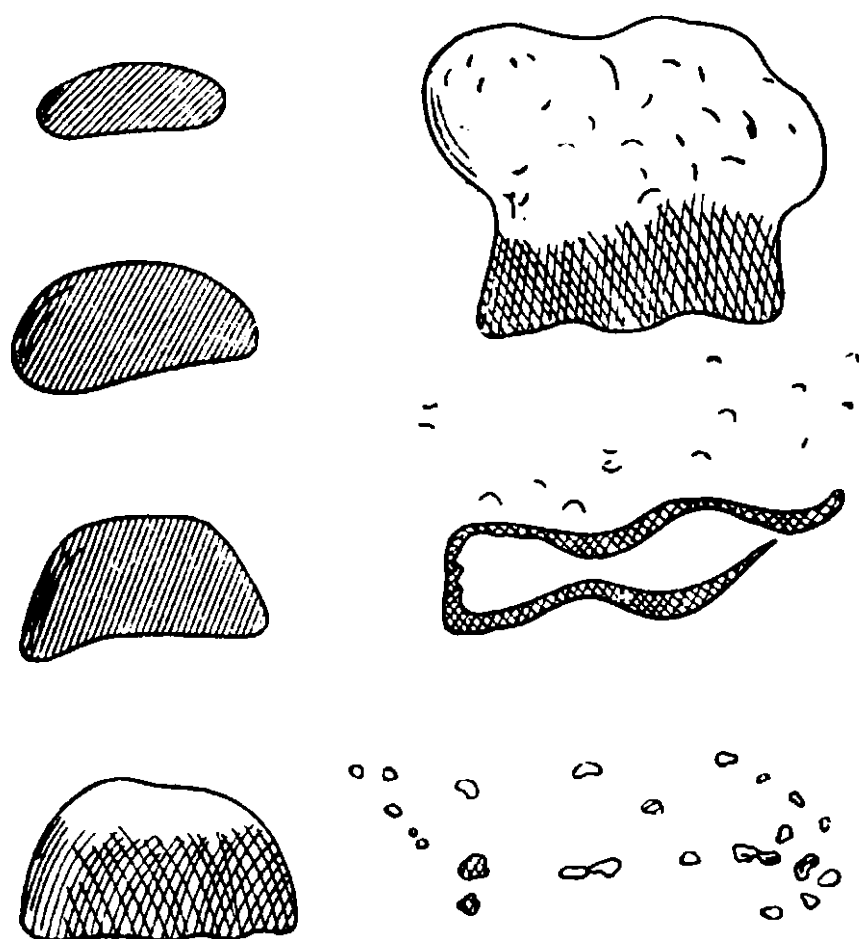


Рис. 274. Отдельные фазы сплющивания и разрыва большой дождевой капли

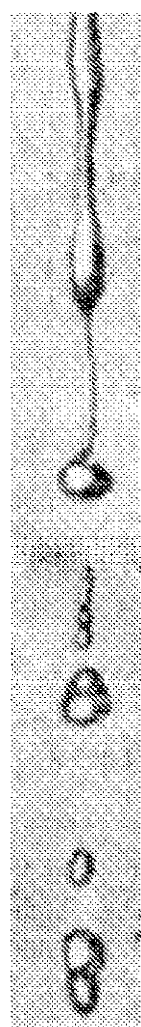


Рис. 275. Распадение вертикальной струи воды на капли

участках. Это приводит к тому, что жидкое содержимое тонких участков переходит в толстые участки, тонкие участки постепенно вытягиваются в длину и, наконец, отрываются от образовавшихся больших капель, превращаясь при этом в маленькие капли. Такое распадение струи на капли очень легко наблюдать, выпуская воду из крана в виде тонкой струйки. На рис. 275 изображен снимок распадения вертикальной струи, а на рис. 276 — снимок распадения горизонтальной струи. Оба снимка получены при вспышке искры. Струя, изображенная на рис. 276, имеет довольно большую скорость движения, тем не менее распадение ее на капли происходит очень равномерно; этого удалось достигнуть путем прикосновения звучащим камертоном к выходному концу насадка, из которого вытекала струя. Значительная вязкость жидкости сильно замедляет распадение струи; именно поэтому тонкие струйки сиропа и других подобных жидкостей могут достигать очень большой длины¹.

¹Стеклянная ткань делается из тонких жидких нитей стекла, которые при вытягивании не рвутся и не распадаются на капли. Причина этого заключается в сильном увеличении вязкости стекла при его охлаждении. Большой устойчивостью обладают также струи, в которых растворены летучие вещества. Причина по-прежнему заключается в увеличении вязкости, на этот раз вследствие испарения.



Рис. 276. Распадение горизонтальной струи воды на капли

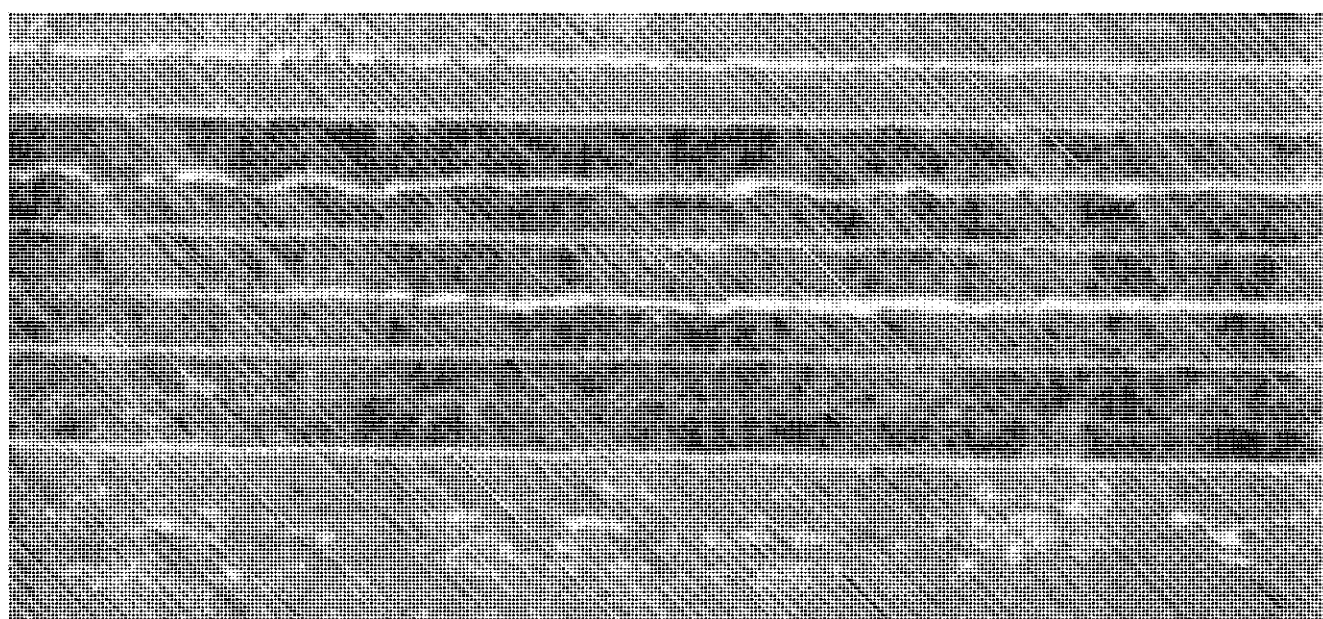


Рис. 277. Распадение тонких струй жидкости (струи движутся справа налево)

При увеличении скорости струи легкоподвижной жидкости ее распад на капли происходит быстрее. Этому способствует сопротивление воздуха. Кроме того, характер распада на капли получается совсем иным — струя принимает сначала волнистый вид¹. Еще большее увеличение скорости струи влечет за собой ее полное распадение, волнистые ее выгибы разрываются вследствие сильной турбулентности воздуха, увлеченного струей. На рис. 277 *a, b, c* изображен такой процесс постепенного распада струи из жидкости с малой вязкостью, а на рис. 277, *d* и *e* — из жидкости с очень большой вязкостью. Путем намеренной турбулизации струи или путем придания ей вращательного движения при выходе из насадка можно значительно ускорить процесс ее распада. В случае жидкости с малой вязкостью конечным продуктом распада является смесь из мелких капелек жидкости и увлеченного ею воздуха.

Толстые струи воды, например, выбрасываемые пожарным насосом, также распадаются на капли, даже если путем придания специальной формы брандспойту турбулизация струи в выходном сечении сводится к минимуму. Распадение возникает потому, что поверхность струи покрывается, подобно поверхности пруда при порыве бури, ма-

¹Haenlein A., *Forschung*, т. 2 (1931), стр. 139 (описание наблюдений), Weber C., *ZAMM*, т. 11 (1931), стр. 136 (теоретический анализ).

ленькими волнами, от гребней которых отрываются капли¹. Постепенно струя распадается на поток брызг, что значительно уменьшает дальность ее полета². Лучшим средством для увеличения дальности полета является возможно полное предупреждение турбулизации струи при ее выходе из насадка.

Изложенное выше о распадении струй позволяет легко понять, как происходит работа распылителей жидкости. В большей части таких распылителей быстрая струя воздуха увлекает за собой более медленную струю жидкости, вытекающую из насадка, и раздробляет ее на мелкие капли; одновременно происходит турбулентное расширение струи воздуха, вследствие чего капли воды перемешиваются с воздухом, создавая своего рода туман. Такой процесс происходит, например, в карбюраторе двигателя внутреннего сгорания. Сильная струя воздуха, засасываемая при помощи мотора, пропускается рядом с насадком, из которого вытекает горючее; в результате получается распыленная смесь горючего и воздуха, которая подается в цилиндры и там сжигается. В дизельмоторах распыление горючего производится внутри цилиндра путем впрыскивания горючего под большим давлением через сопло такого устройства, которое обеспечивает сильную турбулизацию струи. Струя сразу распадается на маленькие капли, которые, в свою очередь, вследствие быстрого движения раздробляются подобно дождевым каплям на еще более мелкие капли.

Для оценки диаметра наибольших капель, которые еще могут сохраняться после распыления, следует рассмотреть равновесие сил, приложенных к каплям в их куполообразном состоянии. Снаружи на переднюю поверхность капли действует динамическое давление воздуха, равное $\frac{\rho_{\text{воз}} v^2}{2}$, а изнутри — капиллярная сила. Если принять радиус кривизны K купола пропорциональным диаметру d капли, то капиллярное давление, согласно сказанному в § 11 гл. I, пропорционально величине $\frac{C}{d}$, где C есть капиллярная постоянная. Приравняв оба давления, мы найдем для диаметра d следующую оценку:

$$d = \text{число} \cdot \frac{C}{\rho_{\text{воз}} v^2}. \quad (6)$$

¹ Неустойчивость поверхности струи, имеющей относительно воздуха большую скорость, объясняется совершенно так же, как неустойчивость поверхности раздела (§ 7 гл. II).

² Подробные данные можно найти в статье Oehler Th., Forschung т. 1 (1930), стр. 329.

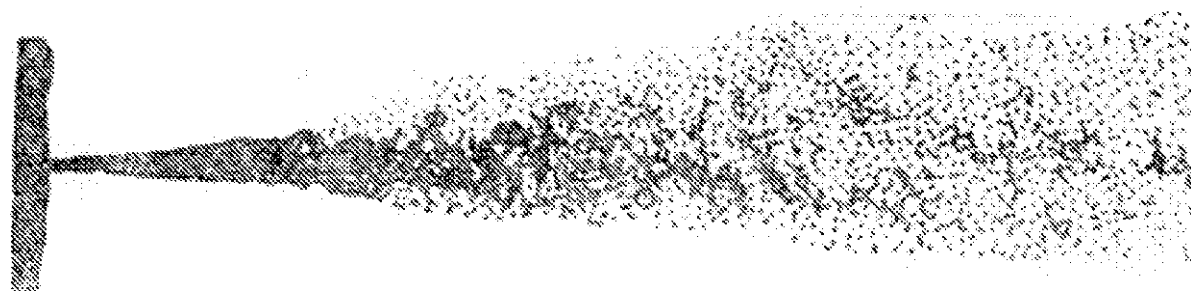


Рис. 278. Распыление струи горючего

Сравнение с опытами Гохшвендера (см. сноску на стр. 429) показывает, что «число» в этой оценке имеет значение, приблизительно равное 10. Для v следует подставить среднее значение скорости капель относительно воздуха (эта скорость во время процесса распыления, очевидно постепенно уменьшается). Формула (6) ясно показывает, какую роль в распылении играют скорость впрыскивания и плотность воздуха. При равных скоростях впрыскивания v степень распыления тем выше, чем больше плотность воздуха в цилиндре.

Вязкость увеличивает время, необходимое для раздробления больших капель на мелкие, однако учесть ее количественное влияние теоретическим путем до сих пор не удалось.

Выяснению процесса распыления горючего в дизельмоторах посвящено много опытных исследований. На рис. 278 изображена фотография распыленной струи, полученная при вспышке искры¹. Распыление производилось при помощи жиклера, изображенного в увеличенном виде на рис. 279.

Распыление воды применяется в дождевальных установках, устраиваемых для полива полей и огородов. Для получения хорошего распыления перед отверстием насадки, из которого вылетает струя, устанавливается наклоненная под

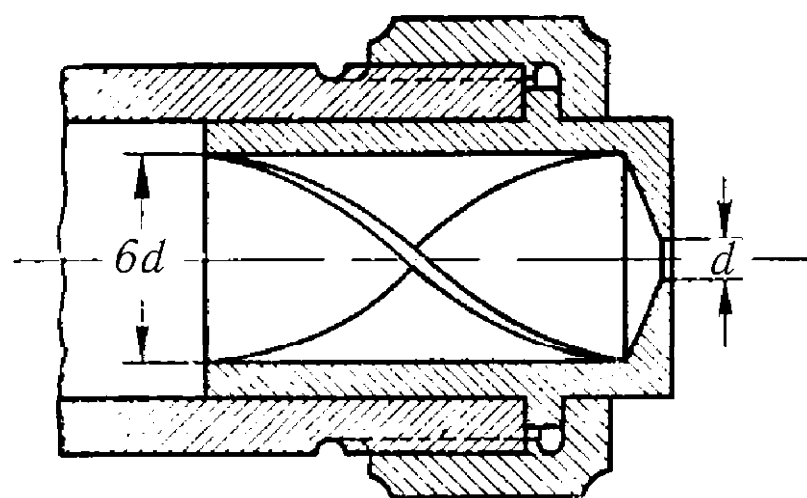


Рис. 279. Жиклер для распыления горючего

небольшим углом пластинка. Эта пластинка вызывает разбрасывание струи в виде веера и последующее быстрое распадение ее на капли. Еще более эффективно действуют распыляющие насадки Кертинга, в кото-

¹Многочисленные снимки распыления струй горючего имеются в статье O s c h a t z W., Deutsche Kraftfahrtforschung, № 57 (1941); см. также Photographie und Forschung, т. 3 (1941), стр. 170. Снимки, полученные при помощи лупы времени, имеются в статье H o l f e l d e r O., VDI-Forschungsheft 374 (1935) (здесь же даны снимки воспламенения и сгорания распыленной струи). Далее, см. B l u m e K., Forschung, т. II (1941)), стр. 284, и Deutsche Kraftfahrtforschung, № 53 (1941).

рых воде, до ее подхода к узкому выходному сечению, сообщается при помощи специального приспособления мощное циркуляционное течение вокруг продольной оси насадка. По мере подхода циркулирующего потока к выходному сечению, т. е. при уменьшении радиуса этого потока, окружная скорость его значительно увеличивается (см. сказанное в § 6 гл. II по поводу спиральной камеры); поэтому при выходе струи из насадка она расширяется в виде конуса и быстро распыляется. Распылитель, изображенный на рис. 279, действует именно таким способом. Существуют и другие конструкции распылителей, позволяющие осуществлять распыление под большим углом.

с) *Пузыри воздуха в воде.* Статическая подъемная сила пузыря воздуха в воде равна по своему численному значению весу капли воды такого же диаметра в воздухе. Поэтому для определения скорости подъема воздушных пузырей сферической формы можно применять формулы такого же вида, как выведенные в пункте а) для падения капель воды в воздухе. Необходимо только учесть, что вязкость воды при средних температурах круглым числом в 60–80 раз больше вязкости воздуха, а плотность воды приблизительно в 800 раз больше плотности воздуха.

Имея это в виду, мы получим следующие приближенные формулы, которые после подстановки значений диаметра в мм, дают скорость в *м/сек*:

- а) для $d \leq 0,16 \text{ мм}$ $v = 0,4d^2 \approx 0,5d^2$ (закон Стокса)¹
- б) для $d \geq 1 \text{ мм}$ $v = \text{число} \cdot \sqrt{d}$ (закон Ньютона).

В последней формуле при прямом восходящем движении пузырей и при $c = 0,4$ до $0,5$ «число» должно было быть равно от $0,16$ до $0,18$. Однако в действительности маленькие пузыри поднимаются вверх не строго вертикально, а с отклонениями от вертикали то в одну, то в другую сторону, а иногда — по винтовой линии, причем форма их обычно все время неправильно меняется². Согласно неопубликованным еще

¹ Поверхность маленьких пузырьков в основном ведет себя как твердая поверхность, поэтому к таким пузырькам закон Стокса приложим в своей обычной форме. Случай подвижной поверхности также исследован теоретически; для таких пузырьков, если пренебречь вязкостью содержащегося в них воздуха, получается скорость подъема, в 1,5 раза большая, чем по закону Стокса (см., например, Handbuch der Experimentalphysik, т. IV, часть 2, стр. 346).

² Höfer K., VDI-Forschungsheft № 138 (1913), стр. 3. Подробные библиографические указания по этому вопросу имеются в статье Pickert F., Forschung, т. 3 (1932), стр. 308.

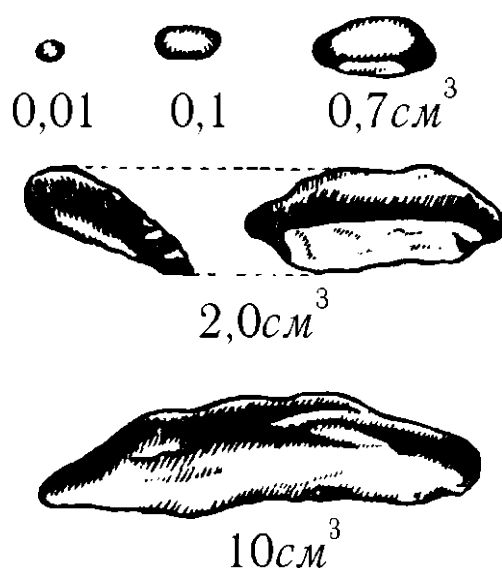


Рис. 280. Формы пузырьков воздуха, поднимающихся в воде (в 1/2 натуральной величины)

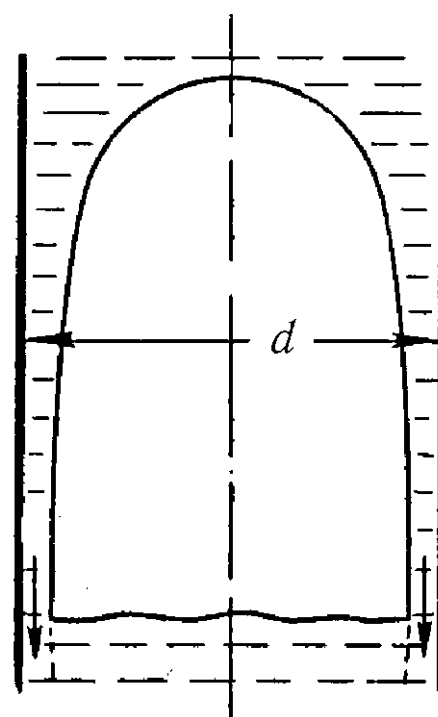


Рис. 281. Пузырь воздуха в вертикальной трубе

опытам В. Мюллера (W. Müller) для пузырьков, равновеликих по объему с шариками диаметром и от 1 до 2,5 мм, указанное выше «число» следует взять равным 0,127. Для значений d от 3 до 8 мм форма пузырьков при движении так быстро меняется, что скорость подъема получается почти постоянной, изменяясь только в пределах от 0,21 до 0,22 м/сек. Для значений d свыше 12 мм шарики принимают форму довольно плоского купола, практически не меняющуюся при движении; в этом случае «число» следует принять равным 0,068 (соответствующий коэффициент сопротивления равен $s = 1,7$)¹. На рис. 280 изображены формы пузырьков по снимкам Мюллера. Около каждого пузырька указан его объем; шарики с таким же объемом имели бы диаметр, равный соответственно 2,7; 5,7; 11,0; 15,6; 26,7 мм.

Если в вертикальной трубе с водой поднимается один или несколько пузырей воздуха, то при полном объеме V всех пузырей вес воды в трубе на γV меньше того веса, который был бы при отсутствии пузырей в столбе такой же высоты ($\gamma = \rho g$ — удельный вес воды). Следовательно, при заданном давлении на верхнем уровне давление в трубе

¹В рассмотренных случаях формуле для определения скоростей подъема пузырьков удобно придать вид: для пузырьков с диаметром от 1 до 2,5 мм:

$$v = 1,28\sqrt{gd};$$

для пузырьков с диаметром от 12 мм:

$$v = 0,69\sqrt{gd}$$

(в качестве единицы длины для всех величин следует брать см или м).

с поперечным сечением F под группой пузырей на

$$p' = \frac{\gamma V}{F}$$

меньше, чем если бы пузырей не было. Это обстоятельство используется в воздушном подъемнике (эрлифт), поднимающем воду при помощи сжатого воздуха, впускаемого в трубу в ее нижнем конце. Если вода должна подниматься на высоту H над первоначальным уровнем, то объем V пузырей в воде все время должен быть больше Fh ; только при этом условии вода будет переливаться через верхний край трубы. Точная теория воздушного водоподъемника довольно сложна, так как воздушные пузыри опережают воду со скоростью v (см. выше) и, кроме того, расширяются по мере подъема; поэтому здесь мы не будем останавливаться на этой теории¹. Для получения воздушного водоподъемника с высоким коэффициентом полезного действия необходимо, чтобы скорость с подъема воздушных пузырей была возможно меньшей, следовательно, сами пузырьки должны быть возможно малыми. Однако в действительных условиях маленькие пузырьки воздуха сливаются в большие, и труба постепенно заполняется все большими и большими пузырями, пока, наконец, не получают столь большие пузыри, что они заполняют почти весь просвет трубы. Форма таких пузырей, изображенная на рис. 281, очень устойчивая. Их движение не возмущается отрывом вихрей и поэтому легко может быть исследовано теоретически. Согласно исследованиям Думитреску² скорость подъема этих пузырей равна

$$v = 0,35\sqrt{gd},$$

следовательно, меньше скорости подъема пузырей, имеющих, если принимать их за шарики, диаметр, больший 0,26 диаметра трубы; это означает, что последние пузыри перегоняют большие и делают их еще больше. Циркуляция воды в водотрубных паровых котлах поддерживается также при помощи разности давлений, возникающей вследствие движения пузырей пара³.

¹См. Behringer H., Диссертация, Karlsruhe 1930 [извлечение помещено в Forschung, т. 3 (1932), стр. 310].

²Dumitrescu Th., ZAMM, т. 23 (1943), стр. 139.

³Экспериментальное определение скорости подъема пузырей пара в трубах котла производилось Е. Шмидтом и его сотрудниками [Schmidt E., VDI-Forschungsheft № 365 (1934)]. Полученные результаты обработаны Кайслингом с точки зрения теории подобия [см. Kaissling F., Forschung, т. 14 (1943), стр. 30].

Пусть масса ε воздуха в потоке из смеси воды и воздуха мала и пусть скорость течения настолько велика, что воздух не успевает выделяться из смеси. Примем, что температура воздуха равна практически постоянной температуре воды. Тогда удельный объем смеси, т. е. объем единицы ее массы будет

$$v = \frac{1}{\rho} = (1 - \varepsilon)v_{\text{вод}} + \varepsilon v_{\text{воз}},$$

где

$$v_{\text{воз}} = \frac{RT}{p} = \frac{K}{p}.$$

Полагая $v_{\text{вод}} = \text{const}$, мы получим на основании уравнения Бернулли:

$$\frac{1}{2}w^2 = \text{const} - \int v dp = \text{const} - [(1 - \varepsilon)pv_{\text{вод}} + \varepsilon K \ln p].$$

Скорость звука в таком потоке равна

$$c = \sqrt{1 : \frac{d\rho}{dp}} = \sqrt{\varepsilon K} + \frac{(1 - \varepsilon)pv_{\text{вод}}}{\sqrt{\varepsilon K}}.$$

Часто она бывает очень мала. Термодинамически более точная теория дана Гейнрихом¹. Скачок уплотнения в потоке из смеси воздуха и воды исследован Аккеретом².

§ 5. Твердые тела в движущемся воздухе. В настоящем параграфе мы рассмотрим две задачи: задачу о пневматическом транспорте зернистых веществ в трубах и задачу о движении песка и снега в естественном ветре. Обе эти задачи родственны соответствующим задачам о транспорте наносов в движущейся воде (см. § 6), однако практически между теми и другими задачами имеется следующая разница: в то время как отношение удельного веса наносов к удельному весу воды составляет около 3:1, в случае снега и воздуха это отношение равно приблизительно 700:1, а в случае песка и воздуха оно доходит до 2400:1. Траектории отдельных зерен, особенно больших, значительно отклоняются от траекторий частиц увлекающего их потока воздуха и близки по своей форме к траектории брошенного в воздухе тела. Теория таких движений мало разработана, поэтому мы ограничимся в основном изложением только экспериментальных результатов.

а) *Технические приложения.* Задача о транспорте зернистых веществ в трубах получила существенное разъяснение благодаря работам

¹Heinrich G., ZAMM, т. 23 (1943), стр. 117.

²Ackeret J., Forschung, т. 1 (1930), стр. 63.

Гастерштедта¹, производившего опыты над пневматическим транспортом зерна. Для зерен пшеницы предельная скорость падения в неподвижном воздухе равна $v_0 = 10$ м/сек. Пусть вес зерна, перемещенного в горизонтальной трубе в единицу времени, равен G и пусть для этого требуется весовой расход воздуха Q ; тогда для скоростей воздушного потока, больших $2v_0$, коэффициент сопротивления (§ 11 гл. III) будет

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 + 0,3 \frac{G}{Q} \right),$$

где λ_0 есть коэффициент сопротивления движения воздуха в пустой трубе. При меньших скоростях воздушного потока множитель при величине $\frac{Q}{G}$ больше, чем 0,3. При скорости, равной $1,2v_0$, зерно остается неподвижным.

Гастерштедт наблюдал также движение отдельных зерен. Если скорость увлекающего потока воздуха достаточно велика, то они подпрыгивают и перескакивают от одной стенки к другой, двигаясь при этом по траекториям, более или менее наклоненным относительно направления воздушного потока. В результате такого движения зерно заполняет в среднем довольно равномерно все поперечное сечение трубы.

Другим технически важным применением пневматического транспорта является отсасывание мелких стружек и пыли, получающихся на заводах при различных технологических операциях, а также очищение от древесных или кожаных опилок различных мелких изделий, полученных путем обточки или шлифования. Такое очищение от опилок производится в так называемом циклоне, представляющем собой симметричный относительно оси вращения резервуар с вертикальной осью. Готовые изделия вводятся во вращающийся циклон вместе со струей воздуха в направлении касательной к стенкам. Вследствие инерции они прижимаются к внешним стенкам, быстро теряют из-за трения свою скорость и соскальзывают вниз в приемник. Неустойчивость пограничного слоя, прилегающего к выпуклым стенкам (см. § 5 гл. III), крайне усиливает турбулентность воздушного потока внутри циклона; это приводит к тому, что легкие опилки увлекаются воздухом, смешиваются с ним и уносятся в выводную трубу. Опыт показал, что в маленьких циклонах отделение опилок происходит лучше, чем в больших, поэтому следует предпочитать иметь несколько небольших циклонов, чем один большой. На рис. 282 изображен циклон простой конструкции.

¹ Gasterstädt J., VDI-Forschungsheft № 265 (1924), стр. 617 и VDI-Zeitschrift, т. 68 (1924).

Упомянем еще о двух технических приложениях взаимодействия воздушных потоков с зернистыми веществами — о веялке и пескоструйном аппарате. В веялке смесь из тяжелых и легких зерен падает сверху и при этом обдувается косым восходящим потоком воздуха с такой скоростью, чтобы тяжелые зерна продолжали падать, а легкие уносились вместе с воздухом. В легко струйном аппарате поток воздуха, увлекающий за собой песок, пропускается через узкое сопло, в котором он приобретает большую скорость. Сопло подводится на определенное расстояние к предмету, поверхность которого должна быть обработана песком. Зерна песка, ударяясь с большой скоростью в обрабатываемую поверхность, постепенно сцарапывают ее и таким путем очищают ее от грязи. Существующие теории таких аппаратов построены на рассмотрении движения одного единственного зерна, на которое действует аэродинамическая сила сопротивления. Однако при этом совершенно не учитывается, что движение всей массы зерен определенным образом изменяет воздушный поток. Поэтому такие теории, полезные с технической точки зрения, не дают тем не менее никакого представления о действительной аэродинамической картине явления.

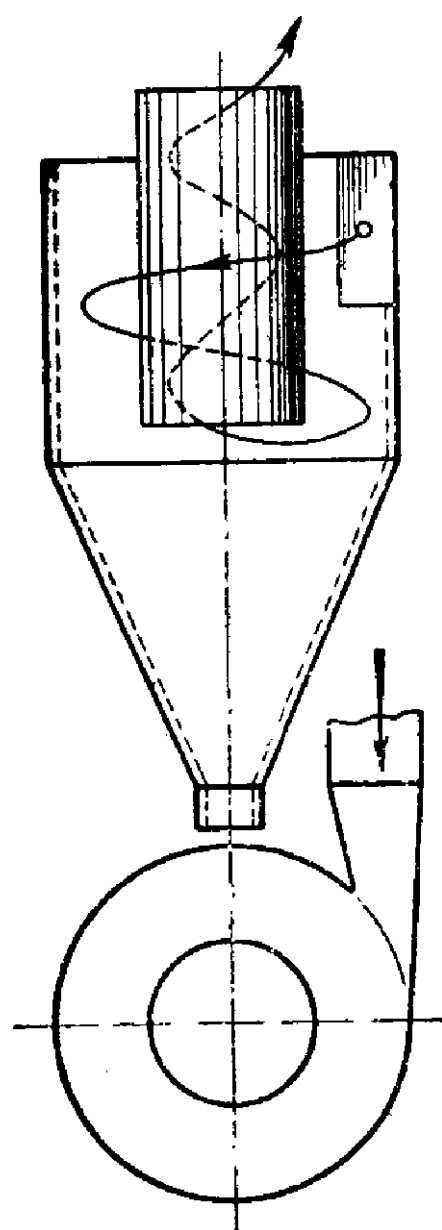


Рис. 282. Циклон

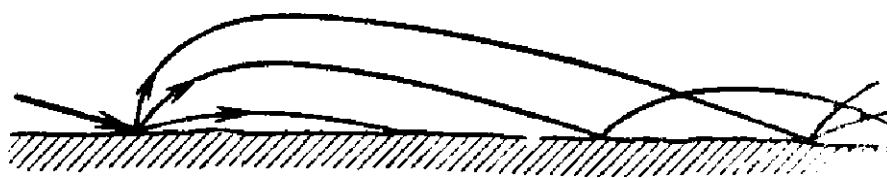


Рис. 283. Траектории песчинок в воздухе

б) *Действие свободного ветра.* Перенос песка естественным ветром, очень сходный с переносом снега, изучался Багнольдом¹ в специально для этой цели построенной аэродинамической трубе, а также в природных условиях — в пустыне. Если скорость ветра меньше определенной минимальной скорости, то движение песка не возникает совсем. При скорости ветра, большей минимальной, но меньшей второй

¹ Bagnold R. A., Proc. Roy. Soc. (A), т. 157 (1936), стр. 594 (опыты в аэродинамической трубе), и т. 167 (1938), стр. 282 (наблюдения песчаных бурь в пустыне).

предельной скорости, песок вообще может оставаться в покое. Но если в неподвижную массу песка падает откуда-нибудь из другого места песчинка, то от ее удара подскакивает вверх несколько других песчинок; эти песчинки увлекаются ветром, опять падают и приводят в движение еще некоторое число других песчинок. Таким путем в движение приходит все большее и большее количество песчинок. Траектории песчинок имеют форму, изображенную на рис. 283. При еще больших скоростях ветра, когда вертикальная составляющая турбулентной пульсации больше предельной скорости свободного падения v_0 песчинок, большое число песчинок поднимается вертикально вверх, образуя песчано-воздушный поток довольно значительной, но уменьшающейся кверху плотности (см. по этому поводу о движении взвешенных наносов в реках, § 5, п. b).

Если ветер на своем пути встречает какие-нибудь препятствия, то равновесие между увлекаемыми вверх и падающими вниз твердыми частицами нарушается. Там, где скорость меньше, падает твердых частиц больше, чем поднимается; наоборот, там, где скорость больше, количество поднимающихся частиц превышает количество падающих. В результате в некоторых местах поверхности песка или снега происходят отложения частиц, а в других образуются выемки. Именно этим процессом, продолжающимся до тех пор, пока не устанавливается равновесие, объясняется форма поверхности снега вокруг стволов деревьев или вокруг столбов. Непосредственно перед стволом, с той его стороны, откуда дует ветер, возникает нисходящее движение воздуха. Оно приводит к тому, что с наветренной стороны ствола и с боков на поверхности снега образуется глубокая выемка. Перед этой выемкой, а также немного позади ствола, где скорость ветра меньше, образуются наоборот, возвышения. Аналогичным образом объясняются выемки на поверхности снега перед устоями моста. О линиях тока таких течений в плоскости, совпадающей с поверхностью снега, дает представление рис. 115 на стр. 200.

Ветер достаточной силы, набегающий на песчаную дюну, поднимает песок с наветренной стороны; на подветренной стороне, где скорость меньше (иногда, в случае отрыва воздушного потока от верхушки дюны, здесь возникает мертвая зона), песок падает вниз. В результате с течением времени дюны постепенно перемещаются в направлении ветра (*«кочующие» дюны*).

Иногда при равномерном ветре средней силы поверхность наветренной стороны дюн принимает очень правильный волнистый вид. Механизм это-

го явления до сих пор не выяснен. Возможно, что длина «волн» связана со средней длиной пути подскакивающих песчинок (см. рис. 283).

С практической точки зрения интересны мероприятия, позволяющие предотвратить занос снегом участков железных дорог или шоссе, про ходящих в ложбинах или искусственных выемках. Из сказанного выше следует, что в таких местах вследствие понижения скорости ветра снег, увлекаемый ветром, должен оседать, что в действительности и наблюдается. Для того чтобы этого не происходило, на определенном расстоянии перед выемкой или ложбиной устанавливаются с наветренной стороны заборы из досчатых щитов. С подветренной стороны этих заборов создается спокойная зона с равномерным слабым ветром, в которой полностью отлагается весь увлекаемый ветром снег. Сплошной забор не устраивается потому, что он вызывает появление мощных вихрей, которые поднимают снег на большую высоту и таким путем позволяют ему перелетать через спокойную зону на подветренной стороне забора.

Воздух, смешанный со снегом или песком, значительно тяжелее, чем чистый воздух. Поэтому потоки из таких смесей, ниспадающие вдоль наклонной плоскости (например, снежные лавины в горах), имеют очень большие скорости движения и могут вызывать значительные разрушения. Подробнее об этом будет сказано ниже, на стр. 486.

§ 6. Твердые тела в текущей воде. а) *Движение донных наносов в реках.* Удельный вес наносов, т. е. камней, гальки, песчинок и т. п., увлекаемых рекой, самое большее в три раза больше удельного веса воды, поэтому длина свободного пути, который могут описывать отдельные твердые частицы в воде, в общем случае очень мала. Это значительно облегчает теоретическое исследование таких движений по сравнению с движением песка или снега в воздухе. Ввиду большой важности, которую имеет движение наносов в гидрологии и в гидротехнике, остановимся подробнее на деталях этого явления¹. Некоторые из результатов, которые мы приведем, между прочим, могут быть приложены к сходным случаям движения твердых частиц в движущемся воздухе.

Сила, с которой турбулентный поток воды действует на куски наносов, лежащих на дне реки, может быть оценена следующим образом.

¹Многочисленные исследования о движении донных и взвешенных наносов, а также о влиянии этого движения на русло рек выполнены в СССР М. А. Великановым и другими; см., например: Великанов М. А., Динамика русловых потоков, Ленинград 1946; Великанов М. А., Движение наносов, Москва 1948. (Прим. перев.)

Пусть какая-нибудь твердая частица выступает над средним уровнем дна реки на высоту y_1 . Средняя скорость u_1 , с которой на эту частицу набегают вода, согласно формуле (33) гл. III равна

$$u_1 = v_* (5,75 \lg \frac{y_1}{k} + C_2), \quad (7)$$

где k есть величина, определяющая шероховатость речного дна. Ее можно принять пропорциональной среднему диаметру d более крупных частиц наносов (при той минимальной предельной скорости, которая необходима для приведения в движение крупных частиц, более мелкие частицы могут оставаться неподвижными только в том случае, если они находятся во входящих углах между крупными частицами). Для геометрически подобных частиц высота y_1 также может быть принята пропорциональной d . Следовательно, если предположить, что все твердые частицы геометрически подобны между собой и что в потоке около дна шероховатость проявляет себя в полной мере, т. е. величина C_2 имеет вполне определенное постоянное значение, то выражение в скобках в правой части равенства (7) будет иметь постоянное значение. Средняя сила, с которой поток действует на частицу рассматриваемой формы, очевидно, равна

$$K_m = cF \frac{\rho u_1^2}{2}.$$

Эта сила определенным образом связана с величиной $\tau_{\text{дн}}$ турбулентного касательного напряжения на дне реки. В самом деле, согласно определению, мы имеем:

$$\rho v_*^2 = \tau_{\text{дн}},$$

и так как

$$u_1 = \text{число} \cdot v_*,$$

то

$$\rho \frac{u_1^2}{2} = \text{число} \cdot \tau_{\text{дн}}.$$

Будет ли рассматриваемая частица оставаться в потоке неподвижной, или же она начнет увлекаться потоком, зависит от того, возникнет или не возникнет вследствие особенно сильной турбулентной пульсации сила K_1 , большая силы K_m . Силу K_1 можно принять пропорциональной K_m , а площадь поперечного сечения F частицы — пропорциональной d^2 .

Сопротивление K_2 , которое должно преодолеваться при влечении частицы по шероховатой поверхности дна, пропорционально весу частицы под водой (т.е. ее истинному весу, уменьшенному на величину статической подъемной силы). Если γ есть удельный вес воды и γ_N — удельный вес наносов, то истинный вес частицы наносов будет $\gamma_N V_N$, а статическая подъемная сила будет γV_N . Объем V_N частицы наносов пропорционален d^3 . Следовательно, сила сопротивления будет равна

$$K_2 = \text{число} \cdot (\gamma_N - \gamma) d^3.$$

Условие, которое должно быть выполнено для того, чтобы твердая частица пришла в движение, очевидно, будет

$$K_1 > K_2,$$

или, в раскрытом виде, на основании сказанного выше,

$$\tau_{\text{дн}} > \text{число} \cdot (\gamma_N - \gamma) d. \quad (8)$$

В случае широкого русла с равномерным уклоном i легко вывести [см. уравнение (60) в § 11 гл. III], что

$$\tau_{\text{дн}} = \gamma t i, \quad (9)$$

где $t (= r_h)$ есть глубина реки. Подставляя это значение $\tau_{\text{дн}}$ в условие (8), мы получим:

$$i > \text{число} \cdot \frac{\gamma_n - \gamma}{\gamma} \cdot \frac{d}{t}. \quad (10)$$

В этом неравенстве «число» немного зависит от формы твердой частицы; в случае мелкозернистых частиц, когда влияние шероховатости при течении не успевает проявить себя в полной мере, это число зависит также от числа Рейнольдса $\frac{v_* d}{\nu}$. Согласно Шильдсу¹ при сравнительно больших значениях $\frac{v_* d}{\nu}$ среднее значение «числа» в неравенстве (10) для твердых частиц круглой формы равно 0,06, т.е. очень мало. Повидимому, начало движения частицы облегчается тем, что срывающиеся с нее вихри чуть-чуть приподнимают ее, вследствие чего уменьшается сопротивление ее движению вперед. При $\frac{v_* d}{\nu} = 10$ «число» в неравенстве (10) принимает минимальное значение, равное приблизительно 0,033.

¹См. Mitteilungen der Preussischen Versuchsanstalt für Wasser-, Erd- und Schiffbau in Berlin, № 9 (1932), № 19 (1935), № 26 (1936). В № 26, составленном Шильдсом (A. Shields), дана обширная сводка закономерностей, имеющих место при движении наносов и полученных с учетом теории подобия и теории турбулентности.

Мейер-Петер, Фавр и Эйнштейн¹ вывели на основе очень тщательных опытов в искусственном русле эмпирическое условие для возможности движения донных наносов из первичных пород с удельным весом $\gamma_N \approx 2,6\gamma$; это условие имеет вид:

$$i > 16,1 \frac{d}{Q^{2/3}}, \quad (11)$$

где Q есть расход воды на 1 м ширины реки, выраженный в $кг/сек$, а d — диаметр частиц в $м$. Условие (11) можно переписать, пользуясь формулой Штриклера (64) (стр. 221) в безразмерной форме:

$$i > 0,0555 \left(\frac{d}{t} \right)^{5/6}, \quad (12)$$

где t есть глубина реки. Правильность этого условия подтверждена опытами в области значений $\frac{d}{t}$ до 50.

Для гидротехнических лабораторий чрезвычайно важной задачей является установление правил, которые позволяли бы моделировать движение наносов в искусственных условиях. Прежде всего должно соблюдаться условие (10), что сводится к соблюдению закона подобия Фруда (стр. 243). Однако, для того чтобы более или менее удовлетворить также закону подобия Рейнольдса, необходимо брать для моделирования частицы с размерами более крупными, чем это следовало бы делать для сохранения геометрического подобия (соответственно такому увеличению размеров должен уменьшаться удельный вес частиц). Достигаемое таким путем совпадение условий опыта с естественными условиями получается довольно удовлетворительным². Интересующихся критическим разбором этой задачи отсылаем к статье Зейферта³.

б) *Движение взвешенных наносов.* Если наносы приходят в движение на значительном участке дна реки, то более легкие частицы подхватываются течением и увлекаются вверх, часто вплоть до свободной поверхности. Таким путем возникает перенос наносов во взвешенном состоянии. Взвешенные частицы постепенно падают, каждая с определенной скоростью v_0 относительно воды, но на смену из глубины потока поднимаются вследствие турбулентного перемешивания другие частицы. Число взвешенных частиц на единицу объема воды, конечно,

¹Meyer-Peter E., Favre H., und Einstein A., Schweizer Bauzeitung, т. 103 (1934), № 13; Meyer-Peter E., Hoeck E. und Müller R., Schweizer Bauzeitung, т. 109 (1937), стр. 199.

²und Müller R., Schweizer Bauzeitung, т. 109 (1937), стр. 199.

³Seifert R., Die Bautechnik, т. 20 (1942), стр. 327.

больше в более глубоких слоях, чем в поверхностных, однако характер этого распределения по высоте может быть разным в зависимости от скорости падения частиц и интенсивности турбулентного перемешивания. Увеличение интенсивности турбулентного перемешивания делает распределение взвешенных частиц по высоте более равномерным, увеличение скорости падения, наоборот, усиливает неравномерность такого распределения.

Для аналитического исследования распределения взвешенных наносов следует исходить из теории перемешивания в турбулентных потоках. Согласно изложенному в конце § 4 гл. III, коэффициент перемешивания массы A_M в $1,4 \div 2$ раза больше, чем коэффициент перемешивания количества движения A_τ , который равен

$$A_\tau = \rho l^2 \left| \frac{du}{dy} \right|. \quad (13)$$

В нашем случае вычисления необходимо вести с коэффициентом перемешивания объема, который, очевидно, связан с коэффициентом перемешивания массы соотношением

$$A_v = \frac{A_M}{\rho}. \quad (14)$$

В потоке вдоль плоской стенки длина пути перемешивания равна:

$$l = \kappa y.$$

Что касается градиента скорости $\frac{du}{dy}$, то, на основании уравнения (26) гл. III, он равен

$$\frac{du}{dy} = \frac{v_*}{\kappa y}.$$

Подставляя значения l и $\frac{du}{dy}$ в равенства (13) и (14), мы получим:

$$A_\tau = \kappa \rho v_*, \quad (15)$$

$$A_p = \beta y v_*. \quad (16)$$

При $\kappa = 0,4$ коэффициент β равен

$$\beta = 0,55 \div 0,65.$$

Пусть число взвешенных частиц, имеющих одинаковую скорость падения v_0 в единице объема, равно n . Тогда количество частиц, переносимых вверх в единицу времени, будет

$$-A_v \frac{dn}{dy} = -\beta y v_* \frac{dn}{dy}.$$

Этот восходящий перенос частиц, очевидно, компенсируется нисходящим переносом частиц, происходящим вследствие их падения. В единицу времени опускается через единицу площади столько частиц, сколько до этого их содержалось в объеме $1 \times 1 \times v_0$, т. е. $v_0 n$ частиц. Таким образом, должно иметь место равенство

$$v_0 n = -\beta y v_* \frac{dn}{dy}$$

или

$$\frac{dn}{n} = -\frac{v_0}{\beta v_*} \frac{dy}{y},$$

откуда после интегрирования мы получаем:

$$n = n_1 \left(\frac{y}{y_1} \right)^{-\frac{v_0}{\beta v_*}}, \quad (17)$$

где через n_1 обозначено количество взвешенных частиц, приходящихся на единицу объема самого нижнего слоя воды, а через y_1 — расстояние этого слоя от уровня дна. Для определения величины n_1 необходимо знать механизм течения в непосредственной близости от дна. В частности, если уклон i значительно больше значения, стоящего в правой части неравенства (10) или (12), то необходимо принять, что ближайший к дну слой сплошь заполнен частицами наносов, и, следовательно, число n_1 может быть определено из условия, что при таком числе частиц еще возможно движение придонного слоя воды.

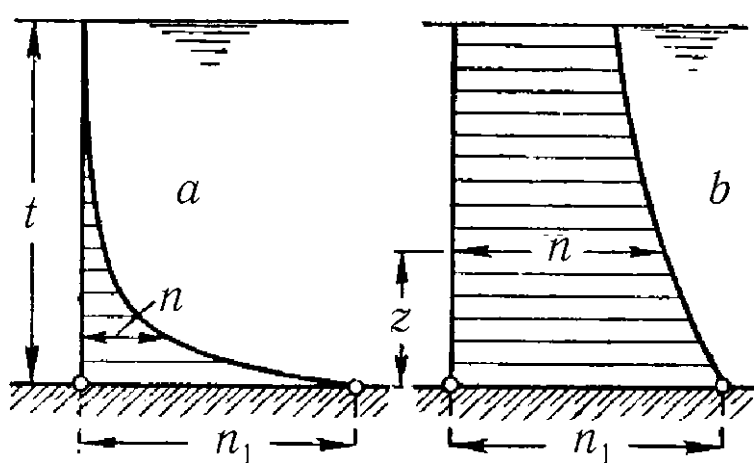


Рис. 284. Распределение взвешенных частиц в потоке

Формула (17) ясно показывает, что очень маленькие взвешенные частицы ($v_0 \ll \beta v_*$) распределяются практически равномерно по всей глубине (рис. 284, b), более же крупные частицы сосредотачиваются в нижних слоях (рис. 284, a).

Полное число взвешенных частиц, приходящихся на единицу площади сечения потока, равно

$$N = \int_{y_1}^t n dy.$$

Для $v_0 > \beta v_*$ приближенно можно принять, что

$$N = \int_{y_1}^{\infty} n dy = \frac{\beta v_* n_1}{v_0 - \beta v_*}.$$

Умножая N на вес каждой взвешенной частицы и на среднюю скорость u_m частиц, мы получим количество взвешенных наносов, переносимых потоком в единицу времени.

Выполненный расчет применим только к частицам одинакового размера. точнее, к частицам с одинаковой скоростью падения v_0 . Если во взвешенном состоянии находятся одновременно частицы разного размера, то вычисление распределения по глубине должно быть произведено для каждого сорта частиц отдельно, причем отдельно должны быть вычислены и соответствующие значения n_1 . Решение последней задачи до сих пор не выполнено.

Совсем иные соотношения получаются в том случае, когда число взвешенных частиц в потоке столь велико, что они все время касаются друг друга. Для подобного рода потоков, напоминающих по своей структуре тину или кашу, существует такое предельное состояние, в известной мере сходное с пластическим состоянием вещества, при котором прекращаются всякие взаимные перемещения частиц. Теоретическим исследованием движения таких потоков в трубах занимался Бингам¹. Опыты Колдуэлла и Баббита² подтвердили правильность соотношений, полученных Бингамом.

с) *Весовое количество наносов, переносимых потоком.* Движение наносов значительно изменяет рельеф ложа реки; неровности возникают также в каналах с первоначально плоским ложем. Формы неровностей получаются очень различными. Наряду с узкими грядами отложений, идущими поперек течения, образуются широкие отмели, располагающиеся обычно попеременно то около правого, то около левого берега; кроме этих двух форм основных отложений возникают также промежуточные формы в виде коротких гряд и узких отмелей³. Как показал Шильдс⁴, форма отложений зависит в основном от числа Рейнольдса $\frac{v_* d}{\nu}$. Так, например, гряды образуются при числах Рейнольдса от 2 до 6, широкие отмели — при числах Рейнольдса от 20 до 70 (так как толщина δ ламинарного пограничного слоя при турбулентном течении пропорциональна $\frac{\nu}{v_*}$, то вместо числа Рейнольдса $\frac{v_* d}{\nu}$ можно пользоваться как критерием отношением $\frac{d}{\delta}$). Однако внутренний механизм образования различных по форме отложений пока еще не выяснен. Заслуживает внимания в этом вопросе то обстоятельство, что поперечные

¹ Bingham E. C., Fluidity and plasticity. New-York, 1992, стр. 224.

² Caldwell D. H., and Babitt H. E., Am. Inst. Chem. Engrs., т. 37 (1941), стр. 237.

³ Снимки разного рода отложений можно найти в статье Casey H. J., Mitteilungen d. Preuss. Versuchsanstalt für Wasser-, Erd- und Schiffbau, № 19 (1905).

⁴ Shields A., Mitteilungen d. Preuss. Versuchsanstalt für Wasser-, Erd- und Schiffbau, № 26 (1936).

гряды образуются при числах Рейнольдса $\frac{v_* d}{\nu}$, меньших того значения, которое соответствует минимуму «числа» в условии (10), а отмели — при числах Рейнольдса, больших этого значения.

Из изложенного выше ясно, что теоретическое определение весового количества наносов, переносимых потоком в единицу времени через один метр ширины ложа потока, представляет большие затруднения, тем более, что это количество зависит также от формы переносимых частиц и, кроме этого, от пропорции, в которой в потоке смешаны частицы различных размеров. Экспериментальным определением этого количества занимался Шильдс¹. Полученные результаты он изобразил графически в виде зависимости величины

$$y = \frac{G}{Q} \frac{\gamma_N - \gamma}{\gamma^i}$$

от аргумента

$$x = \frac{\tau_{\text{дн}} - \tau_0}{(\gamma_N - \gamma)d},$$

где G есть вес (в воде!) наносов, переносимых в одну секунду, Q — секундный весовой расход воды на один метр ширины ложа, d — средний диаметр частиц, $\tau_{\text{дн}} = \gamma t i$, как и прежде, турбулентное касательное напряжение на дне, а τ_0 — предельное значение этого напряжения, равное

$$\tau_0 = \text{число} \cdot (\gamma_N - \gamma)d,$$

причем «число» борется равным от 0,03 до 0,06 (следовательно, предполагается, что $\frac{v_* d}{\nu} > 10$, т.е. исключается стадия образования гряд). Точки с координатами x и y располагаются более или менее близко около прямой $y = 4x^2$.

Мейер-Потер и его сотрудники на основе своих опытов, упомянутых на стр. 443, получили следующую эмпирическую формулу для определения G :

$$\frac{G}{Q} = 2,52 \left(i - 16,1 \frac{d}{Q^{2/3}} \right)^{3/2}, \quad (18)$$

¹ Shields A., Mitteilungen d. Preuss. Versuchsanstalt für Wasser-, Erd- und Schiffbau, № 26 (1936).

²У Шильдса — около прямой $y = 10x$, так как он пользуется иным определением удельного веса γ_N наносов (без учета объема пор, имеющих в частицах).

(единицы измерения: m , kg и $сек$). Пользуясь формулой Штриклера, можно представить формулу (18) в безразмерном виде:

$$\frac{G}{Q} = 2,52 \left[i - 0,0211 \left(\frac{d}{t} \right)^{10/9} i^{-1/3} \right]^{3/2}, \quad (19)$$

где G по-прежнему означает вес наносов в воде. Формула (19) получена для наносов с удельным весом $\gamma_N \approx 2,6$. Она проверена на опытах только до значений $\frac{t}{d} = 50$.

d) *Влияние перемещения наносов на ложе реки.* Реки, берущие свое начало в горных местностях, содержат в своем верхнем течении более или менее крупные куски горных пород. Эти куски переносятся вниз по течению главным образом во время паводков и при этом от взаимных ударов и трения делаются постепенно все меньше и меньше. Наиболее мелкие частицы, образующиеся при истирании крупных кусков, уносятся рекой дальше во взвешенном состоянии. Долина реки, сама состоящая из наносов, и река взаимодействуют друг с другом таким образом, что в течение тысячелетий между ними устанавливается своего рода равновесие: количество твердых веществ, приносимых с верхнего течения на каждый участок реки за большой промежуток времени, в среднем равно количеству твердых веществ, уносимых с этого же участка за тот же промежуток времени вниз по течению¹.

Река, течение которой не управляется путем искусственных сооружений, при каждом паводке выходит из берегов и оставляет на них отложения наносов, которые с течением времени приподнимают берега, а вместе с ними и ложе реки. Это приводит к тому, что река прорывается в более низко расположенную местность, где и прокладывает себе новое русло. Таким путем в течение длительных периодов времени река «обрабатывает» свою долину по всей ее ширине². По мере приближения к устью уклон реки постепенно уменьшается, однако это не приостанавливает перемещения наносов, так как одновременно уменьшается и размер твердых частиц.

¹Строго говоря, точного равновесия не получается, так как устье реки вследствие осаднения наносов постепенно все больше и больше выдвигается в море (или во внутреннее озеро), что приводит к соответствующему повышению уровня долины реки.

²Перемещению русла рек способствует образование меандров (извилин), рассмотренное в § 8 гл. III. Вторичные (поперечные) течения, во-первых, относят взвешенные вещества к внутренней стороне извилины, где они отлагаются в виде отмелей, а во-вторых, обуславливают перемещение максимума скорости к внешней стороне извилины. Последнее обстоятельство приводит к усиленному размыву берега на внешней стороне извилины, что еще больше увеличивает ее кривизну.

Равновесие между руслом реки и ее ложем может нарушаться вследствие природных катастроф, а также вследствие вмешательства человека. Так, например, замечено, что при перегораживании плотинами горных рек, несущих много наносов, русло реки ниже плотины значительно углубляется. Это происходит потому, что наносы, приносимые рекой с верхнего течения, осаждаются перед плотиной и, следовательно, не компенсируют убыли наносов, размываемых и увлекаемых рекой ниже плотины. В результате происходит оголение фундамента устоев плотины и береговых сооружений гидроэлектрических станций. Заключение реки в слишком узкие искусственные берега вызывает увеличение скорости течения и также приводит к углублению русла. Наоборот, устройство вдоль берегов рек дамб, предохраняющих окружающую местность от затопления во время половодья, понижает при половодье скорость течения в русле реки, что приводит к постепенному поднятию ложа реки, которое может быть особенно большим, если река несет с собой много взвешенных наносов. Так именно случилось после устройства оградительных дамб на реках Миссисипи и Хуан-Хе. С течением времени русла этих рек поднялись на несколько метров выше уровня местности, огражденной дамбами, что в конце концов вызвало прорыв дамб и образование новых русел. Поднятием русла объясняется также образование дельт в устьях крупных рек.

Устройство гидротехнических сооружений изменяет режим течения воды, что может значительно отражаться на поведении ложа реки. Действие воды на ложе, очевидно, тем сильнее, чем больше ее скорость. Поэтому вблизи гидротехнических сооружений наибольшему действию воды подвергаются те участки ложа, к которым имеет доступ вода, притекающая изнутри потока с большой скоростью. Такие участки расположены, например, непосредственно перед устоями моста или перед отдельными сваями; здесь, как уже было упомянуто в § 5, образуются характерные углубления, которые при недостаточно глубоком фундаменте могут привести к подмыванию устоев и их обрушению (такие случаи наблюдались в практике гидротехнического строительства). Участки ложа, к которым притекает с большой скоростью вода изнутри потока, могут существовать также позади препятствия, установленного в реке. С таким случаем мы встречаемся при опускании в реку на некоторую глубину щита. Для предупреждения размывания ложа под самым щитом дно реки здесь покрывается камнем или бетоном. Тем не менее там, где заканчивается искусственное покрытие дна, возникает углубление (рис. 285*b*), которое при больших размерах может оказаться опасным для сооружения. Для устранения возможности

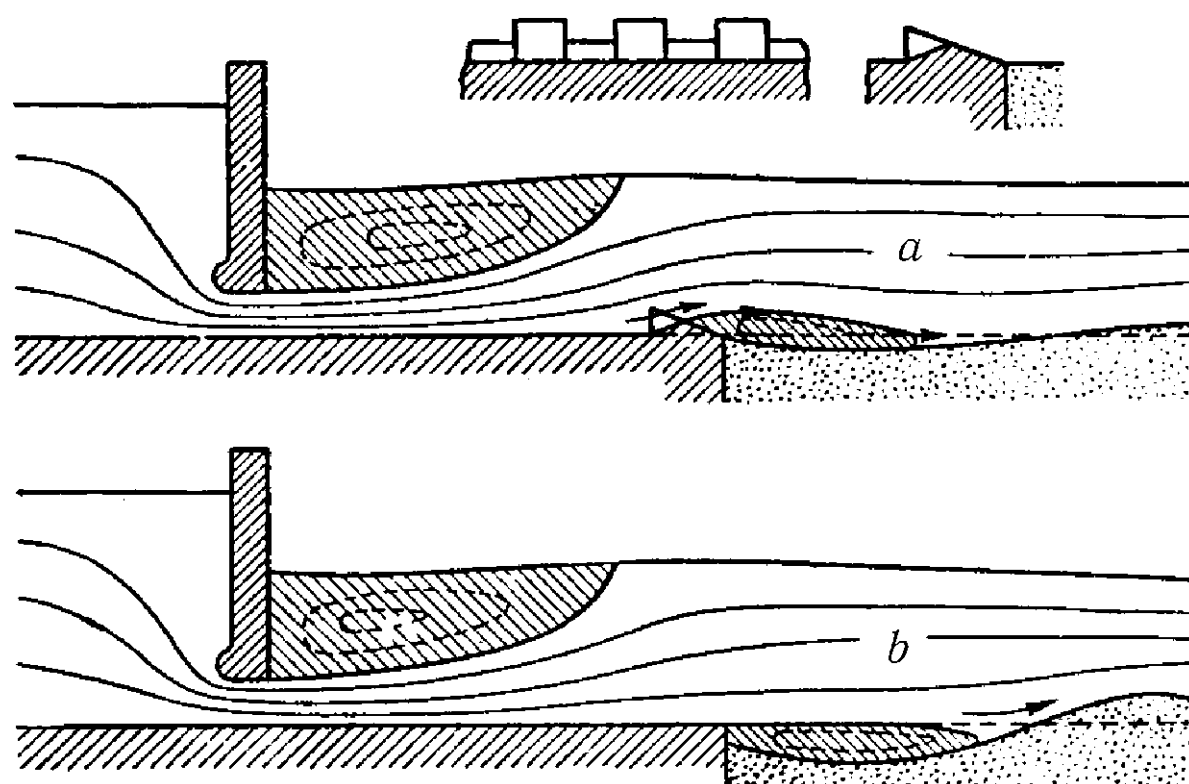


Рис. 285. Образование углубления в дне реки вследствие преграждения русла щитом: а) при установке зубчатой решетки; б) без такой установки. Заштрихованы те области потока, в которых происходит возвратное движение

появления таких углублений необходимо искусственным путем понизить скорость течения в придонном слое воды. Это достигается путем устройства в конце донного покрытия ряда зубцов (рис. 285а).

§ 7. Поведение тел в ускоренных потоках. Силы гидродинамического дальнего действия. В этом параграфе мы рассмотрим несколько случаев силового взаимодействия между неравномерно движущимся потоком и телом, в нем находящимся. Эти случаи представляют интерес как с практической, так и с теоретической точки зрения. Мы ограничимся рассмотрением только потенциальных течений в среде, окружающей тело со всех сторон, следовательно, не будем касаться течений с образованием поверхностей раздела¹.

Первый случай относится к продувке в аэродинамических трубах моделей дирижаблей. Как мы уже упомянули в § 22 гл. III, если стенки трубы параллельные, то давление в потоке вследствие его трения о стенки постепенно падает. Такое падение давления равносильно появлению добавочной силы, приложенной к модели и направленной против потока. Следовательно, эта сила увеличивает лобовое сопротивление. Так как лобовое сопротивление моделей дирижаблей очень незначительное,

¹К последней категории относится, в частности, течение, возникающее около крыла самолета при порывах ветра. По этому поводу см. статью Küssner H. G., ZFM, т. 22 (1931), стр. 579 и 605 [помещено также в Jahrb. d. Deutsch. Versuchsanst. f. Luftfahrt 1931, стр. 83]; далее, Küssner H. G., Luftfahrtforschung, т. 17 (1940), стр. 355.

то возникновение даже небольшого добавочного сопротивления значительно искажает результаты измерений. В первое время для исправления результатов измерения из сопротивления, измеренного на весах, вычитали величину $V \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|$, где V есть объем модели дирижабля; иными словами, предполагали, что на модель действует кроме сопротивления еще сила, аналогичная статической подъемной силе. Однако более строгое гидродинамическое исследование, впервые выполненное Мунком¹, а затем продолженное Глауэртом² и Тейлором³, показало, что указанный прием дает правильные результаты только в том случае, если к объему V дирижабля прибавить еще объем V' присоединенной массы (см. стр. 247). Правда, для моделей дирижаблей это уточнение почти не изменяет прежнего правила, так как присоединенная масса вытянутого эллипсоида с отношением осей 6:1 составляет только 4,5% вытесненной массы жидкости. Но для слабо вытянутого эллипсоида с отношением осей 2:1 присоединенная масса равна 20%, а для шара — 50% от вытесненной массы, поэтому в этих случаях уточнение получается очень существенным⁴. Желающих ознакомиться со строгим доказательством и с другими примерами аналогичных течений отсылаем к работе Толлмина⁵. В этой работе, в частности, вычислены силы и вращающие моменты, действующие на тело, обтекаемое слабо искривленным потенциальным потоком.

Перейдем к следующей задаче — выясним, как ведет себя тело, находящееся в жидкой среде, в которой имеют место переменные по времени ускорения. Пусть, например, среда, окружающая тело, получает ускорение b в направлении оси x . Вычислим, какое ускорение b_1 получает при этом тело. Обозначим плотность среды через ρ , а плотность тела — через ρ_1 . Возмущения, вызываемые в жидкости телом, сначала не будем учитывать; в таком случае мы можем принять, что все части жидкости получают одинаковое ускорение. Этого можно достичь в действительности, например, следующим образом: заключим жидкую среду, которую будем предполагать несжимаемой, в какой-нибудь сосуд так, чтобы она заполняла его сплошь, и сообщим сосуду

¹ Munk M., NACA-Rep. № 114 (1921)

² Glauert H., Rep. a. Mem. № 1158 (1928).

³ Taylor G.I., Proc. Roy. Soc., т. 120 (1928), стр. 260 и Rep. a. Mem. № 1160.

⁴ Конечно, вместо внесения поправок на падение давления гораздо целесообразнее устроить аэродинамическую трубу так, чтобы падения давления в направлении потока не было совсем. Для этой цели достаточно сделать трубу немного расширяющейся в направлении потока.

⁵ Tollmien W., Ing.-Arch., т. 9 (1938), стр. 308.

ускоренное поступательное движение; тогда каждая частица жидкости также будет совершать это ускоренное движение¹. Одинаковому ускорению b всех частиц соответствует одинаковое во всем потоке падение давления в направлении ускорения, равное

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho b.$$

Вследствие этого падения давления тело, находящееся в жидкости, получает прежде всего «подъемную силу» в направлении ускорения, равную $V\rho b$. Так как мы предполагаем, что плотность тела ρ_1 не равна плотности ρ жидкой среды, то ускорение тела b_1 также не будет равно ускорению жидкости b . Следовательно, возникнет движение тела относительно жидкости с ускорением $b_1 - b$. Этому ускоренному движению соответствует сопротивление, направленное в сторону, противоположную подъемной силе, и пропорциональное присоединенной массе $\rho V'$, т. е. равное $\rho(b_1 - b)V'$. Результирующая сила, т. е. разность между подъемной силой и сопротивлением, должна быть равна, очевидно, массе тела $\rho_1 V$, умноженной на его ускорение b_1 . Таким образом, мы получаем уравнение:

$$\rho[bV - (b_1 - b)V'] = \rho_1 V b_1,$$

откуда находим искомое ускорение b_1 :

$$b_1 = b \frac{V + V'}{V \frac{\rho_1}{\rho} + V'}. \quad (20)$$

Это соотношение показывает, что для $\rho_1 > \rho$ ускорение b_1 меньше ускорения b , и наоборот. Для $\rho_1 = \rho$ мы имеем, как и следовало ожидать, что $b_1 = b$. Последний результат приложим к любому объему рассматриваемой жидкости, мысленно выделенному из остальной жидкости; следовательно, этот объем вынужден под воздействием окружающей жидкости двигаться с таким же ускорением, как и остальная жидкость.

В. Бьеркнес² описывает следующий простой опыт, иллюстрирующий соотношение (20). Три пробирки наполняются одинаковой жидкостью; в первую из них опускается тело с удельным весом, меньшим

¹Так как такое течение возникает из состояния покоя, то оно является потенциальным течением. Приводимое ниже решение удовлетворяет граничным условиям, поэтому, согласно теореме единственности теории потенциала, оно является истинным решением.

²Bjerknes V., Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterricht, т. 43 (1930), стр. 1.

удельного веса жидкости, во вторую — тело с таким же удельным весом, как у жидкости, и в третью — тело с удельным весом, бóльшим, чем у жидкости. Пробирки плотно закрываются так, чтобы в них не было пузырьков воздуха. Затем они кладутся одна за другой на стол и одновременно ударяются в продольном направлении легким деревянным молотком. Удар сообщает им ускоренное движение, которое сразу же тормозится вследствие трения о поверхность стола. При этом происходит следующее. В первой трубке тело проходит больший путь, чем сама трубка, и, следовательно, перемещается относительно нее в направлении удара. Во второй трубке тело движется в точности так же, как и трубка. Наконец, в третьей трубке тело отстает от трубки, следовательно, перемещается относительно нее в сторону, противоположную направлению удара. В качестве еще одного примера Бьеркнес указывает на пламя свечи, находящейся в ручном переносном фонаре. Когда человек с фонарем начинает идти, пламя, которое легче окружающего воздуха, отклоняется не назад, как можно было бы сначала подумать, а вперед; наоборот, при остановке пламя отклоняется назад ($b_1 > b!$).

Бьеркнес применил соотношение (20) для исследования поведения тела, ритмично увеличивающего и уменьшающего свой объем, в жидкости, совершающей колебания в том же ритме. Пусть в тот момент, когда жидкость, отклонившись в крайнее правое положение, начинает обратное движение влево (ускорение направлено влево), объем тела достигает своего наибольшего значения, а в тот момент, когда жидкость, отклонившись в крайнее левое положение, начинает двигаться вправо (ускорение направлено вправо), объем тела имеет минимальное значение. Примем для упрощения, что средний удельный вес тела равен удельному весу жидкости¹. В таком случае, удельный вес тела в расширенном состоянии меньше удельного веса жидкости, и поэтому тело опережает жидкость при ее движении влево; следуя Бьеркнесу, предположим, что периодическое движение жидкости возникает вследствие пульсации второго тела. Если оба тела пульсируют в одинаковой фазе, т. е. оба достигают своего наибольшего и наименьшего объема одновременно, то, как нетрудно убедиться на основании сказанного выше, между ними возникает притяжение. Наоборот, если они пульсируют в противоположной фазе, то между ними возникает отталкивание. В неограниченной жидкости скорости в окрестности пульсирующего тела обратно пропорциональны квадрату расстояния от тела, следовательно силы притяжения или отталкивания, возникающие между дву-

¹Это ограничение не отражается на конечном результате.

мя пульсирующими телами, также обратно пропорциональны квадрату расстояния, т.е. они подчиняются такому же закону, как и силы электростатического и магнитного дальнего действия. Поэтому эти силы называются силами *гидродинамического дальнего действия*. Следует, однако, иметь в виду, что правило знаков для сил при гидродинамическом дальнем действии обратно по сравнению с таким правилом при электростатическом и магнитном дальнем действии, так как в обоих последних случаях разноименные заряды и полюсы притягиваются, а одноименные, наоборот, отталкиваются. Теория сил гидродинамического дальнего действия впервые была опубликована К. А. Бьеркнесом в 1871 г., а затем подробно развита его сыном В. Бьеркнесом¹. Для демонстрации гидродинамического дальнего действия В. Бьеркнес сконструировал серию приборов. Среди этих приборов наряду с «пульсаторами» имеются «осцилляторы», позволяющие осуществлять диполи, которые ведут себя как элементарные магниты².

Сила притяжения между двумя пульсирующими шарами может быть вычислена следующим образом. Пусть объем первого шара равен

$$V = V_1 + A_1 \cos \omega t,$$

а объем второго —

$$V = V_2 + A_2 \cos \omega t.$$

Масса обоих шаров с течением времени не изменяется. Масса первого из них равна $\rho_1 V$; примем для упрощения расчетов, что она равна ρV_1 . Тогда, имея в виду, что $V' = \frac{1}{2} V$, мы получим, на основании соотношения (20), что

$$b_1 = b \frac{\frac{3}{2}(V_1 + A_1 \cos \omega t)}{\frac{3}{2}V_1 + \frac{1}{2}A_1 \cos \omega t}.$$

Если амплитуда A мала, то, ограничиваясь членами первого порядка малости, мы можем представить ускорение b_1 в следующем виде:

$$b_1 = b \left(1 + \frac{2}{3} \frac{A_1}{V_1} \cos \omega t \right).$$

Мгновенная сила равна

$$\rho V_1 b_1 = \rho V_1 b + \frac{2}{3} \rho A_1 \cos \omega t \cdot b. \quad (21)$$

¹ B j e r k n e s V., Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte, т. I и II, Leipzig 1900 и 1902.

² B j e r k n e s V., Die Kraftfelder, Braunschweig 1909, см. также второй том его «Vorlesungen».

Первое слагаемое в правой части при составлении среднего дает нуль, так как оно зависит только от одной периодической величины — ускорения b , второе же слагаемое, зависящее от двух периодических величин, дает среднее значение, не равное нулю.

Ускорение b в окрестности первого пульсирующего шара создается вторым пульсирующим шаром, расстояние которого от первого шара пусть равно r . Поток около первого шара есть не что иное, как источник с переменной мощностью Q . На основании сказанного в § 10. п. б) гл. II скорость w в таком потоке равна

$$w = \frac{d\Phi}{dr} = \frac{c}{r^2}. \quad (22)$$

Мощность источника Q , с одной стороны, равна $\frac{dV}{dt}$, а с другой стороны, $4\pi c$; исключая c из равенства (22), мы получим: стороны, $4\pi c$; исключая c из равенства (22), мы получим:

$$w = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dV}{dt} = -\frac{A_2 \omega}{4\pi r^2} \sin \omega t.$$

Следовательно, ускорение b , если ограничиться малыми величинами первого порядка, равно

$$b = \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{A_2 \omega}{4\pi r^2} \cos \omega t.$$

Так как среднее значение от $\cos^2 \omega t$ равно $\frac{1}{2}$, то средним значением силы притяжения, на основании равенства (21), будет

$$K = -\frac{\rho A_1 A_2}{12\pi r^2}. \quad (23)$$

Знак минус показывает, что сила направлена в сторону, противоположную направлению отрезка r ; поэтому она будет силой притяжения, если амплитуды A_1 и A_2 имеют одинаковые знаки. Формула (23) симметрична относительно A_1 и A_2 , следовательно, закон равенства действия и противодействия удовлетворяется, как это, конечно, и должно быть.

В практических условиях силы гидродинамического дальнего действия наблюдаются при звуковых колебаниях в жидкости, внутри которой находятся пузырьки воздуха. Вследствие колебания давления соседние пузырьки воздуха ритмично и в одинаковой фазе изменяют свой объем и поэтому притягиваются друг к другу и сливаются в пузырьки большего размера. Постепенно образуются большие пузыри, которые быстро выскакивают из воды. При помощи ультразвуковых колебаний

удается таким путем очень эффективно удалять примеси газа из расплавленных металлов.

При пульсации пузырька газа в окружающем его пограничном слое происходит продольный сдвиг, причем скорости сдвига в одной половине слоя направлены в одну сторону, а в другой — в противоположную сторону. По-видимому, такого рода движение способствует выделению пузырьков газа из растворителя. Это явление наблюдается, между прочим, в смазочном масле, помещенном между двумя коаксиальными цилиндрами, вращающимися относительно друг друга¹.

В. ВРАЩАЮЩИЕСЯ ТЕЛА И ВРАЩАЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

§ 8. Уравнение Бернулли во вращающейся системе отсчета. а) В этой подглаве мы рассмотрим движения жидкости, которые возникают около вращающегося тела или во вращающемся пространстве, причем остановимся только на случае равномерного вращения, как наиболее важном. При изучении таких движений жидкости целесообразно рассматривать их с точки зрения наблюдателя, вращающегося вместе с телом или пространством. В самом деле, для такого наблюдателя вращающееся тело или пространство находятся в покое, и поэтому в ряде случаев течение жидкости будет казаться ему установившимся. Как известно, законы механики остаются справедливыми и во вращающихся системах при условии, что к силам, действующим в абсолютной системе координат, добавляются еще две массовые силы, из которых одна является функцией только положения в пространстве, а другая зависит также от скорости. Первая из этих добавочных сил равна рассматриваемой массе, умноженной на взятое с отрицательным знаком ускорение (в абсолютном пространстве) той точки вращающейся системы отсчета, которая совпадает с мгновенным положением массы. Этим ускорением, называемым переносным ускорением, в нашем случае является центростремительное ускорение $\omega^2 r$, где ω есть угловая скорость вращения; поэтому добавочная сила, направленная в противоположную сторону, представляет собой не что иное, как центробежную силу $m\omega^2 r$. Вторая добавочная сила равна рассматриваемой массе, умноженной на взятое с отрицательным знаком поворотное, или кориолисово ускорение, которое равно по модулю $2\omega v$, где v есть относительная

¹Frössel W., Öl und Kohle, т. 39 (1943), стр. 257, см. также Forschung, т. 9 (1938) стр. 273.

скорость массы, и направлено перпендикулярно к оси вращения системы отсчета и, кроме того, перпендикулярно к относительной скорости. Следовательно, вторая добавочная сила, называемая кориолисовой силой, равна $-2m\omega v$ и направлена перпендикулярно к относительной скорости.

Для пояснения приведем два простых примера. Пусть материальная точка с массой m покоится в абсолютном пространстве. С точки зрения наблюдателя, находящегося в системе координат, вращающейся с угловой скоростью ω , эта точка описывает окружность с угловой скоростью $-\omega$. Для того чтобы к этому движению можно было применить законы механики, необходимо, согласно сказанному выше, присоединить к силам, действующим в абсолютном пространстве (такие силы в данном случае отсутствуют) центробежную силу $-mr\omega^2$ и кориолисову силу, равную по модулю

$$2m\omega v = 2mr\omega^2$$

и направленную, согласно приведенному выше правилу, к центру вращения, следовательно, в сторону, обратную центробежной силе. Таким образом, результирующая сила, приложенная к материальной точке в ее движении относительно вращающейся системы координат, равна

$$-mr\omega^2 + 2mr\omega^2 = mr\omega^2$$

и направлена к центру вращения, т. е. представляет собой именно ту центростремительную силу, которая во вращающейся системе отсчета необходима для создания кругового движения.

В качестве второго примера рассмотрим материальную точку в виде маленького шарика с массой m , помещенную в гладкую прямолинейную трубку, вращающуюся с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной к центральной линии трубки. С точки зрения наблюдателя, движущегося вместе с вращающейся системой отсчета, на шарик действует прежде всего центробежная сила, поэтому шарик будет двигаться ускоренно вдоль трубки по направлению от центра вращения. Кроме того, на шарик действует кориолисова сила $2m\omega v$, где v есть относительная скорость шарика в рассматриваемый момент времени; кориолисова сила прижимает шарик к стенке трубки, которая, в свою очередь, действует на шарик с равной, но противоположно направленной силой. Кинетическая энергия шарика с точки зрения наблюдателя, движущегося вместе с вращающейся системой отсчета, все время возрастает за счет работы, совершаемой центробежной силой. Кориолисова сила перпендикулярна к пути шарика и поэтому не совершает никакой работы. В абсолютной системе отсчета шарик в радиальном направлении совершенно свободен, тем не менее его кинетическая энергия все время возрастает, но на этот раз за счет работы той силы реакции, с которой стенка трубки действует на шарик; эта сила, вызывающая в абсолютном движении

все большее и большее увеличение окружной скорости w шарика, направлена не перпендикулярно к перемещению шарика и, следовательно, совершает определенную работу.

б) Выведем уравнение Бернулли для относительного движения в равномерно вращающейся системе координат. Для этой цели достаточно присоединить к силам, рассмотренным на стр. 56, составляющую центробежной силы $m\omega^2 r$ в направлении течения; вводить в расчеты кориолисову силу нет никакой необходимости, так как она направлена всегда перпендикулярно к скорости относительного течения и поэтому не дает составляющей в направлении течения. Согласно сказанному на стр. 41 центробежная сила имеет потенциал, равный

$$\text{const} - \frac{\omega^2 r^2}{2}.$$

Поэтому уравнение движения можно сразу проинтегрировать, и мы получим уравнение Бернулли в следующем виде:

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{w^2}{2} = \text{const} + \frac{\omega^2 r^2}{2}. \quad (24)$$

В общем случае постоянная имеет разные значения для различных линий тока, поэтому уравнение (24) применимо вообще только к точкам, лежащим на одной и той же линии тока. Но в том случае, когда жидкость покоится относительно вращающейся системы координат (скорость w везде равна нулю), следовательно, когда линии тока вообще отсутствуют, уравнение (24) совпадает с уравнением (19) на стр. 41 и поэтому применимо для любых точек в занятом жидкостью пространстве.

Постоянная в уравнении (24) не связана с линиями тока также в таких относительных потоках, которые, если их рассматривать в неподвижной системе отсчета, свободны от вращений, т. е. представляют собой вообще неустановившиеся потенциальные потоки. С этим практически важным случаем мы встречаемся, например, в турбинах или центробежных насосах, когда поток жидкости из неподвижной системы каналов переходит во вращающуюся систему каналов (предполагается, что трение отсутствует). В неподвижной системе отсчета каждая частица такого потока остается свободной от вращения, поэтому во вращающейся системе отсчета она должна иметь вращение с постоянной угловой скоростью $-\omega$ вокруг оси, параллельной оси вращения системы каналов. Общее доказательство того, что в таком потоке постоянная

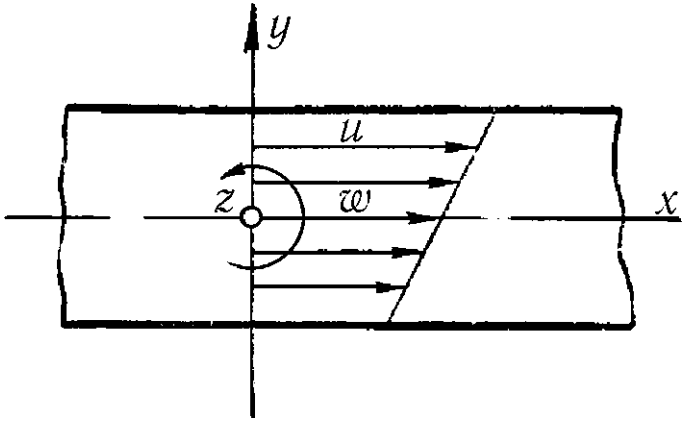


Рис. 286. Движение жидкости во вращающемся канале

в уравнении (24) имеет одинаковое значение для всех линий тока, мы дадим ниже, здесь же мы ограничимся рассмотрением поучительного простого примера. Пусть прямоугольный канал (рис. 286) равномерно вращается вокруг оси z , перпендикулярно к продольной оси канала. Для простоты рассуждения примем, что эта ось вращения вертикальна, следовательно, плоскость вращения горизонтальна. Пусть в канале движется поток жидкости, который, если рассматривать его в неподвижной системе отсчета, свободен от вращений, т. е. является потенциальным потоком. Обозначим составляющие скорости по осям x , y и z соответственно через u , v и w . Примем, что

$$u = u_1 + 2\omega y, \quad v = w = 0.$$

Следовательно,

$$\omega_x = \omega_y = 0; \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\omega.$$

Кориолисова сила на единицу объема равна $2\rho\omega u$ и направлена в отрицательную сторону оси y . Составляющая центробежной силы вдоль оси y равна

$$\rho\omega^2 r \cdot \frac{y}{r} = \rho\omega^2 y.$$

Следовательно, повышение давления в направлении оси y равно

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -2\rho\omega(u_1 + 2\omega y) + \rho\omega^2 y.$$

Интегрируя это уравнение, мы получим:

$$p = -\rho \left(2\omega u_1 y + \frac{3}{2}\omega^2 y^2 \right) + f(x, z).$$

Левая часть уравнения (24) после подстановки в нее этого значения p и замены скорости w на $u_1 + 2\omega y$ принимает вид:

$$\frac{1}{\rho} f(x, z) + gz + \frac{1}{2}(u_1^2 + \omega^2 y^2). \quad (25)$$

Правая часть уравнения (24) равна

$$\text{const} + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2). \quad (26)$$

Для того чтобы выражение (25) совпадало с выражением (26), очевидно, функцию $f(x, z)$ необходимо выбрать в виде

$$f(x, z) = \text{const} + \frac{\rho}{2}(\omega^2 x^2 - u_1^2) - \rho g z.$$

Таким образом, постоянная в уравнении (24) для рассмотренного класса потоков действительно не зависит от y и z .

Для того чтобы доказать это в общем виде, применим уравнение (39) гл. II (стр. 91) к абсолютному движению и при этом учтем, что относительное движение должно быть установившимся, следовательно, в каждой точке вращающегося потока (линейная скорость которой равна ωr) потенциал скоростей должен оставаться постоянным. В таком случае должно соблюдаться соотношение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \omega r \frac{\partial \Phi}{\partial s'} = 0, \quad (27)$$

где $\frac{\partial \Phi}{\partial s'}$ есть линейный элемент в направлении вращения. Величина $\frac{\partial \Phi}{\partial s'}$, очевидно, есть не что иное, как составляющая скорости абсолютного течения по направлению вращения. В теории турбин эта составляющая обозначается через c_u . Из соотношения (27) мы имеем:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\omega r c_u.$$

Переходя в этом равенстве от абсолютной скорости к относительной, мы придем к искомому доказательству¹.

¹Большое число примеров плоских потенциальных потоков во вращающихся каналах имеется в книге K u c h a r s k y W., Strömungen einer reibungsfreien Flüssigkeit bei Rotation fester Körper, München und Berlin 1918. Рассмотренный нами пример взят из этой книги. Об экспериментальных работах, связанных с потоками такого рода, имеются сведения в статье F e t t e H., Zeitschr. f. techn. Physik, т. 14 (1933), стр. 257. Теоретические расчеты потоков в каналах между лопатками рабочих колес турбин приводятся в книге Hydraulische Probleme, Berlin 1926, стр. 180 (статья S p a n n h a k e W.), а также в статьях: S p a n n h a k e W. und B a r t h W., ZAMM, т. 4 (1929) стр. 466, и S p a n n h a k e W., Mitteilungen des Instituts für Strömungsmaschinen d. Techn. Hochschule Karlsruhe № 1 (1930), стр. 4. Уравнение

$$\frac{p}{\gamma} + z + \frac{c^2}{2g} - \frac{\omega r c_u}{g} = \text{const}$$

с) Разложение так называемого статического давления p на весовое давление p' и на кинетическое давление p^* , выполненное в § 6, п. а) гл. II, может быть применено также к случаю движения жидкости во вращающейся системе координат. В нашем случае весовое давление равно

$$p' = \text{const} - g\rho z + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2. \quad (28)$$

Подставляя в уравнение (24) $p = p' + p^*$, мы получим:

$$p^* = \text{const} - \rho \frac{w^2}{2}, \quad (29)$$

следовательно, кинетическое давление p^* во вращающейся системе отсчета формально совпадает с кинетическим давлением в неподвижной системе отсчета, хотя формы течения в обеих системах различные. Постоянная в уравнении (29) в общем случае имеет разные значения для разных линий тока, но для класса потенциальных потоков, рассмотренных в предыдущем пункте, она одинакова для всех линий тока.

Если при вращении твердого тела происходит отрыв потока от него, то оторвавшиеся части жидкости в какой-то мере продолжают вращаться и поэтому отбрасываются наружу («центрифугируются»). Такое

Рис. 287. Движение в пограничном слое вращающегося гребного винта. Поверхность, на которой давление понижено. Поверхность, на которой давление повышено

же центрифугирование испытывают части пограничного слоя, наиболее близкие к поверхности вращающегося тела; при этом возникают вторичные течения такого же вида, как и рассмотренные в § 8 гл. III, и происходит как бы отсасывание пограничного слоя от центра вращения наружу (см. § 7 гл. III). На рис. 287 изображены полученные

впервые встречается у Prážil F., Schweizer Bauzeitung, т. 48 (1906), стр. 300; доказательство рассмотренного свойства постоянной для выделенного класса движений — у Mises R., Theorie der Wasserräder, Leipzig, 1908 (см. также Mises R., Zeitschr. f. Math. und Physik, т. 57 (1909), стр. 1). Новую гидродинамическую теорему для вращающейся системы лопаток приводит А. Бузман в девятом издании книги Förrpl, Vorlesungen über Technische Mechanik, т. IV, 1942.

Гутче¹ снимки течения в пограничном слое на подсасывающей и противоположной поверхностях водяного гребного винта с профилем в виде сегмента круга. Перед опытом на обе поверхности винта была нанесена в виде маленьких бугорков масляная краска; при вращении эта краска, увлекаемая пограничным слоем, оставила на поверхности винта следы, указывающие направление течения. Ясно видно, что на подсасывающей поверхности происходит отрыв потока.

Отрыв пограничного слоя может возникнуть только в том случае, если кинетическое давление p^* возрастает в направлении течения. Центробежная сила $m\omega^2 r$ действует на покоящиеся и движущиеся частицы жидкости совершенно одинаково и поэтому не влияет на отрыв потока².

По поводу примера, рассмотренного в предыдущем пункте (рис. 286), заметим еще следующее. Вследствие вращения канала с угловой скоростью ω на той стороне его, где давление повышается, скорость уменьшается, а на противоположной стороне, где давление понижается, скорость увеличивается. Возникающая вследствие этого разность кинетических давлений уравнивается кориолисовыми силами. Действие этой разности давлений на стенки канала складывается во вращающий момент, который препятствует вращению канала и должен преодолеваться машиной, вращающей канал. Мощность этой машины должна быть равна произведению момента сопротивления на угловую скорость. Полезная мощность радиального канала, вращающегося с угловой скоростью ω и ограниченного радиусами r_1 и r_2 , определяется повышением давления $\frac{1}{2}\rho\omega^2(r_2^2 - r_1^2)$, вызванным центробежной силой, при условии, что не происходит преобразования скорости в давление при выходе жидкости из канала в неподвижный направляющий аппарат или в спиральную камеру. Указанные соотношения находят применение при расчете центробежных насосов и воздуходувок, а также радиальных турбин.

§ 9. Влияние вращения Земли на движения в атмосфере и в морях. а) Вращение Земли оказывает существенное влияние на поведение земной атмосферы и водных масс в морях. Так как центробежная сила, связанная с вращением Земли, действует одинаково и на покоящиеся и на движущиеся массы и составляет просто некоторую долю ощутимой силы тяжести, то при исследовании движений следует особо учитывать только кориолисову силу или соответствующее ей

¹ G u t s c h e F., Jahrb d. Schiffsbau techn. Ges., т. 41 (1940), стр. 188. В этой работе имеются снимки и других течений.

² При опытах часто удобно производить вращение тела не вокруг оси симметрии, а вокруг другой, ей параллельной оси. Такая замена оси вращения не влияет на распределение кинетического давления, следовательно, не влияет и на отрыв потока.

кориолисово ускорение. Наиболее важную роль играет горизонтальная составляющая этого ускорения, равная $2\omega v \sin \varphi$, где φ есть географическая широта места, v — скорость относительно поверхности земли, предполагаемая горизонтальной, а ω — угловая скорость вращения Земли. Так как в звездных сутках содержится 86 164 сек, то

$$\omega = \frac{2\pi}{86\,164} = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ сек}^{-1}.$$

Скорость v может иметь любое направление в горизонтальной плоскости. Для того чтобы доказать, что вертикальная составляющая кориолисова ускорения не играют заметной роли, разложим вектор угловой скорости ω (он направлен вдоль земной оси) на две составляющие: одну — вдоль вертикали, а другую — в горизонтальной плоскости вдоль направления юг–север. Последняя составляющая, равная по модулю $\omega \cos \varphi$, после умножения на удвоенную скорость v , дает вертикальную составляющую кориолисова ускорения. Эта составляющая столь мала по сравнению с ускорением силы тяжести, что в большинстве случаев ее можно не учитывать. Первая же составляющая, равная по модулю $\omega \sin \varphi$, после умножения на удвоенную скорость v дает горизонтальную составляющую кориолисова ускорения, перпендикулярную к направлению скорости v и равную $2\omega v \sin \varphi$. В северном полушарии горизонтальная составляющая кориолисова ускорения повернута относительно направления скорости v вправо, а в южном полушарии — влево; на экваторе она равна нулю, а на полюсах имеет наибольшие значения.

Пусть в горизонтальной плоскости равномерно движется со скоростью v материальная точка. Так как горизонтальная составляющая кориолисова ускорения перпендикулярна к скорости v , а последняя остается все время постоянной, то очевидно, что траекторией точки будет окружность. Для определения радиуса этой окружности, называемой *инерциальной окружностью*, мы имеем соотношение:

$$\frac{v^2}{r} = 2\omega v \sin \varphi,$$

откуда

$$r = \frac{v}{2\omega \sin \varphi}^1.$$

¹ При таком выводе мы принимаем, что $\sin \varphi$ есть постоянная величина. Однако такое допущение возможно только до тех пор, пока радиус инерциальной окруж-

Время обращения материальной точки по инерциальной окружности равно

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{\pi}{\omega \sin \varphi}.$$

Как известно, маятник Фуко делает один полный оборот в промежуток времени

$$T' = \frac{2\pi}{\omega \sin \varphi}.$$

Этот промежуток времени называется *маятниковыми сутками*. Следовательно, инерциальная окружность описывается движущейся точкой всегда в течение половины маятниковых суток, независимо от того, какую скорость v имеет точка. Такого рода движение по инерциальной окружности иногда наблюдается в атмосфере и в морях после быстро протекающих возмущающих процессов.

б) Кривизна земной поверхности значительно усложняет исследование влияния вращения Земли на движения в атмосфере и в морях. Поэтому сначала рассмотрим, как происходит движение жидкой массы на плоскости, вращающейся с угловой скоростью $\omega' = \omega \sin \varphi$. При вращении Земли центробежная сила является по существу составной частью того, что называется силой тяжести; поэтому при исследовании движения жидкости на вращающейся плоскости целесообразно наложить на силовое поле дополнительное поле центростремительных сил так, чтобы исключить проявление центробежной силы. Тогда масса жидкости, покоящаяся относительно вращающейся плоскости, будет иметь плоскую поверхность уровня. Плотность жидкости примем постоянной; кроме того, для дальнейшего упрощения предположим, что жидкость не обладает трением.

Сообщим теперь некоторой части этой жидкости скорость w относительно вращающейся плоскости, причем так, чтобы эта скорость была одинаковой по величине и направлению по всей высоте h слоя жидкости. Если вращение происходит так же, как и в северном полушарии Земли, т.е. в сторону, обратную вращению часовой стрелки, то поверхность уровня рассматриваемой части жидкости получит под действием кориолисова ускорения наклон $\frac{2\omega' w}{g}$ в направлении, перпендикулярном к скорости w ; при этом высота уровня вдоль направления

ности мал по сравнению с расстоянием ее центра от экватора. В противном случае инерциальные траектории будут представлять собой петли такого вида, как на рис. 81 (стр. 129), т.е. уже не будут замкнутыми линиями. Кривизна этих петель тем больше, чем больше расстояние от экватора.

скорости w останется неизменной, а справа от направления w повысится. Рассмотрим теперь область жидкости, занимающую большое протяжение, и пусть в этой области при переходе от одной точки к другой величина и направление скорости w постепенно изменяются (но остаются постоянными во времени в каждой точке). Тогда, согласно только что сказанному, разность dh уровней жидкости на концах отрезка ds , перпендикулярного к скорости w , будет

$$dh = \frac{2\omega'w}{g} ds. \quad (30)$$

Проследим какую-нибудь линию тока. Вследствие неразрывности должно иметь место равенство

$$w ds \cdot h = \text{const},$$

поэтому для $h = \text{const}$ должно быть

$$w ds = \text{const}.$$

В таком случае из равенства (30) следует, что

$$dh = \text{const}.$$

Таким образом, для любой формы свободной поверхности жидкости, определяемой системой горизонталей (т.е. линиями равного уровня), возможно такое установившееся течение, линии тока которого совпадают с горизонталями. Единственным ограничением является величина скорости w : при заданном наибольшем значении кривизны горизонталей она не должна превышать некоторого определенного значения, именно такого, при котором еще можно пренебречь трансверсальным ускорением $\frac{w^2}{r}$, обусловленным кривизной траектории, по сравнению с кориолисовым ускорением. [Еще раз подчеркнем, что в основу сделанного вывода положено предположение об отсутствии трения, а также об отсутствии кривизны или наклона вращающейся поверхности. Если эта поверхность неровная, например, имеет возвышения или имеет наклон, то возникают более сложные соотношения (см. ниже).] Там, где уровень жидкости понижен (области низкого давления), направление обхода замкнутых линий тока совпадает с направлением вращения основания, наоборот, там, где уровень жидкости повышен (области высокого давления), оно противоположно направлению вращения основания. О той

роли, которую при таких течениях играет трение жидкости о поверхность основания, будет сказано в следующем параграфе.

Выше мы предполагали, что высота H слоя жидкости над основанием везде одинакова. Если же вследствие неровности или наклона основания высота H изменяется, но постепенно, то из теоремы Гельмгольца следует, что вертикальная составляющая вектора вращения частицы жидкости, измеренная в неподвижной системе отсчета, изменяется вдоль линии тока пропорционально H . Предположение о постепенном изменении высоты необходимо, так как только при соблюдении этого условия (и одновременно при отсутствии трения!) горизонтальная скорость течения будет одинакова во всех точках каждой вертикали. Пусть, например, на ровной местности имеется пологое возвышение высотой h и пусть слой жидкости постоянной плотности, движущейся над местностью, имеет толщину H_0 . Если скорость течения жидкости во вращающейся системе отсчета постоянна по величине и направлению, то угловая скорость текущей жидкости относительно вращающегося основания равна

$$\omega_{\text{отн}0} = 0,$$

следовательно, абсолютная угловая скорость будет

$$\omega_{\text{абс}0} = \omega',$$

т. е. она равна угловой скорости вращающегося основания. Согласно сказанному выше, если только не учитывать небольших изменений высоты уровня, угловая скорость вращения над возвышением будет

$$\omega_{\text{абс}1} = \omega_{\text{абс}0} \frac{H_0 - h}{H_0},$$

следовательно, угловая скорость относительного вращения равна

$$\omega_{\text{отн}1} = \omega_{\text{абс}1} - \omega' = -\omega' \frac{h}{H_0}.$$

Это означает, в соответствии с изложенным выше, что над возвышенным возникает, во-первых, повышение давления и, во-вторых, циркуляционное течение, направленное по часовой стрелке в северном полушарии и против часовой стрелки — в южном полушарии. В атмосфере, где вместо свободной поверхности имеется постепенное понижение плотности, происходит сходное явление, отличающееся от описанного только в количественном отношении (см. § 14, п.с). Такого рода повышение давления наблюдается в действительности над местностями, расположенными высоко над уровнем моря.

Ветер, дующий поперек длинной горной цепи (рис. 288), отклоняется в северном полушарии вправо. Пусть горная цепь простирается в направлении оси y (перпендикулярной к плоскости рис. 288) и пусть до горной цепи

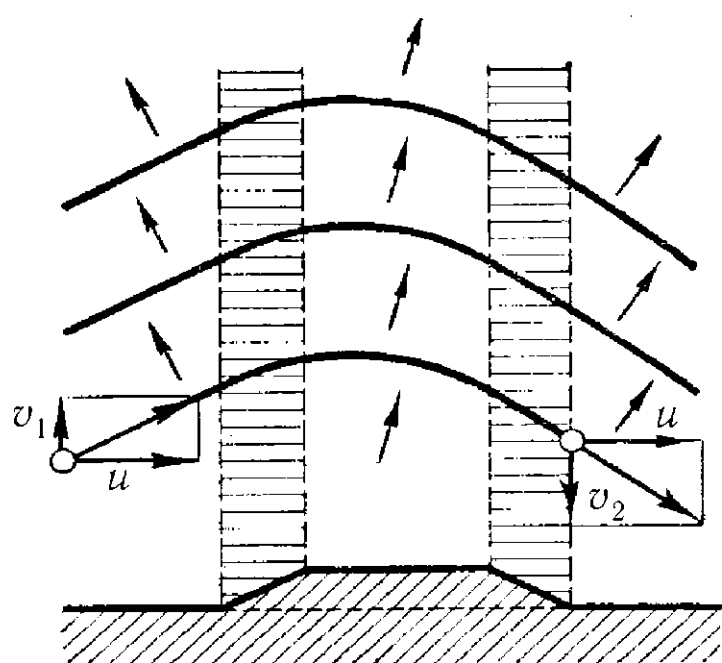


Рис. 288. Обтекание гребня горы

($x = x_1$) горизонтальные составляющие скорости ветра равны соответственно

$$u = U = \text{const}, \quad v = V_1 = \text{const}.$$

В таком случае $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, и поэтому из соотношения

$$\omega_{\text{отн}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\omega' \frac{h}{H_0}$$

мы имеем:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2\omega' \frac{h}{H_0}.$$

Интегрируя от $x = x_1$ до $x = x_2$, мы получим:

$$V_2 = V_1 - \frac{2\omega'}{H_0} \int_{x_1}^{x_2} h dx = V_1 - \frac{2\omega'}{H_0} F,$$

где F есть площадь поперечного сечения через горную цепь, ограниченная слева и справа абсциссами x_1 и x_2 . Отсюда следует, что тангенс угла отклонения потока равен

$$\frac{V_2 - V_1}{U} = -\frac{2\omega' F}{H_0 U},$$

т.е. отклонение тем больше, чем меньше составляющая скорости течения перпендикулярная к горной цепи. Поэтому в морях, где течения значительно медленнее, чем ветры на поверхности Земли, отклоняющее действие длинных возвышенностей значительно сильнее, чем в атмосфере.

Отклоняющее действие длинной возвышенности (горной цепи) можно вычислить также иным путем, а именно, исходя из распределения давления. Над плоской местностью, согласно предыдущему, мы имеем:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -2\rho\omega' U.$$

Над гребнем возвышенности вследствие неразрывности потока скорость равна

$$u = \frac{U H_0}{H_0 - h}.$$

Величина $\frac{\partial p}{\partial y}$ должна иметь здесь такое же значение, как и до возвышенности.

В самом деле, вследствие того, что условия притекания одинаковы для всех y , должны быть одинаковы для всех y и разности давлений в направлении x . Следовательно, увеличение кориолисовой силы над гребнем, где скорость u больше, чем до возвышенности, должно компенсироваться ускорением $u \frac{\partial v}{\partial x}$ в направлении y . Выполняя вычисления, мы получим:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2\omega' \frac{h}{H_0},$$

т. е. тот же результат, что и прежде.

с) Весьма своеобразно ведет себя жидкость, первоначально покоившаяся относительно вращающегося горизонтального основания, но затем получившая вследствие каких-либо внешних воздействий некоторое перемещение. Для того чтобы выяснить, какое при этом возникает движение, рассмотрим горизонтальную жидкую линию и применим к ней, для ее абсолютного движения, теорему Томсона (стр. 82). Для жидкости, покоящейся относительно вращающейся системы отсчета, абсолютным движение будет жесткое вращение с угловой скоростью ω' , следовательно, циркуляция в абсолютном движении, согласно формуле (32) гл. I (стр. 86), равна

$$\Gamma_0 = 2\omega' F_0,$$

где F_0 есть площадь, ограниченная жидкой линией. Циркуляция Γ'_0 во вращающейся системе отсчета в случае относительного покоя жидкости, очевидно, равна нулю. Пусть в результате внешнего воздействия жидкая линия деформируется так, что ограниченная ею площадь делается равной F_1 . Абсолютная циркуляция остается при этом, согласно теореме Томсона, по-прежнему равной Γ_0 , относительная же циркуляция уменьшается на величину $2\omega' F_1$, следовательно, делается равной

$$\Gamma'_1 = 2\omega'(F_0 - F_1).$$

Изменение площади, ограниченной жидкой линией, может быть вызвано, например, изменением высоты столба жидкости, а также притоком или оттоком жидкости из области, окруженной жидкой линией. Если площадь, ограниченная жидкой линией, уменьшается, то возникает относительная циркуляция с таким же направлением, как у ω' ; наоборот, если эта площадь увеличивается, то возникает относительная циркуляция с направлением, противоположным направлению ω' . Первая циркуляция называется *циклональной*, а вторая — *антициклокальной*.

Вследствие циркуляционного движения, линейные скорости которого направлены перпендикулярно к радиусу вращения, возникают кориолисовы силы. Легко видеть, что при циклональной циркуляции эти силы направлены наружу от центра вращения, а при антициклональной циркуляции — к центру вращения, следовательно, в первом случае они вызывают в области циркуляции понижение давления, а во втором случае, наоборот, повышение давления (см. также § 14, п. b). Таким образом, кориолисовы силы всегда препятствуют изменению поперечного сечения циркулирующей массы жидкости, иными словами, они обеспечивают динамическую устойчивость циркулирующей массы жидкости совершенно так же, как силы упругости обеспечивают упругую устойчивость.

В случае плоского движения, начинающегося из состояния покоя относительно вращающегося основания, всегда $F_1 = F_0$, следовательно, $\Gamma' = 0$, т. е. относительное течение, возникающее из состояния покоя, всегда является потенциальным течением. Если в области возмущения движения происходит отток или приток жидкости, то вне области возмущения возникает потенциальное движение с циркуляцией. Пусть область возмущения ограничена окружностью радиуса R и пусть в результате возмущения радиус изменяется на величину ΔR ; тогда циркуляция относительного движения приближенно будет равна

$$\Gamma' = -2\omega' \cdot 2\pi R \cdot \Delta R.$$

С другой стороны, если w есть окружная скорость циркуляционного движения, происходящего в ту же сторону, в какую происходит вращение ω' (т. е. в северном полушарии против движения часовой стрелки), то

$$\Gamma' = 2\pi R \cdot w.$$

Сравнивая оба выражения для Γ' , мы получим

$$w = -2\omega' \Delta R.$$

Следовательно, кориолисова сила вызывает в радиальном направлении изменение давления

$$\frac{dp}{dR} = 2\rho\omega'w = -4\rho\omega'^2 \cdot \Delta R.$$

При положительном ΔR будет происходить понижение давления, а при отрицательном ΔR , наоборот, — повышение давления. Боковое перемещение области возмущения, при котором площадь F не изменяется, вызывает обычное потенциальное течение, поэтому такое перемещение не влечет за собой появления какого-либо поля скоростей или поля давлений.

§ 10. Влияние трения. а) В предыдущих рассуждениях мы намеренно пренебрегали трением. Между тем вязкость и прилипание жидкости к вращающемуся основанию приводят к тому, что в пограничном слое (или, в случае атмосферы, в слое, близком к поверхности земли) возникает вторичное течение (см. § 8 гл. III). Поле давлений, которое в свободном потоке уравнивается с кориолисовыми силами, существует также в слоях, близких к вращающемуся основанию; однако здесь, вследствие меньших скоростей течения, кориолисовы силы меньше, чем на большой высоте, и поэтому они не в состоянии уравновесить поле явлений. Вследствие преобладающего действия поля давлений Вблизи вращающегося основания возникает течение в направлении перепада давления, и при этом с такой скоростью, которая обуславливает появление сил трения, компенсирующих уменьшение кориолисовых сил. Однако вследствие увлекающего действия верхних слоев отклонение вторичного потока от направления основного потока составляет только около 45° при ламинарном движении и от 20 до 30° при турбулентном движении (в этом случае отклонение получается меньше вследствие более сильного увлекающего действия основного потока).

Рассмотрим наиболее простой пример. Пусть относительно вращающейся плоскости над зоной трения движется параллель поток со скоростью $u = U$ в направлении оси x . Давление в этом потоке пусть равно

$$p = p_0 - 2\rho\omega'U \cdot y,$$

следовательно, кориолисова сила, обусловленная скоростью U , уравнивается с градиентом давления $-\frac{\partial p}{\partial y}$ (уменьшением давления кверху вследствие уменьшения плотности можно пренебречь). В пограничном слое скорость u не равна U ; она является функцией расстояния z от основания. Кроме скорости u в направлении оси x в пограничном слое имеется скорость v в направлении оси y , также являющаяся функцией от z . Для $z = 0$ должно быть

$$u = v = 0,$$

а для $z = \infty$

$$u = U, \quad v = 0.$$

При ламинарном движении согласно уравнениям Навье–Стокса, в направлении оси x на единицу объема действует сила вязкости $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$,

а в направлении оси y — сила вязкости $\mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ (см § 1, гл. III). Так как каждый слой, согласно предположению, движется равномерно, то ускорения, за исключением кориолисова ускорения, отсутствуют. Далее мы имеем:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -2\rho\omega'U.$$

Следовательно, уравнения движения принимают вид:

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -2\rho\omega'v, \quad \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 2\rho\omega'(u - U).$$

Полагая

$$u = U - Ae^{\lambda z}, \quad v = Be^{\lambda z},$$

мы получим:

$$\lambda^4 = -\left(\frac{2\rho\omega'}{\mu}\right)^2. \quad (31)$$

Из четырех комплексных корней этого уравнения два имеют положительные вещественные части. Этим двум корням соответствует затухание составляющих скорости u и v по направлению вниз, следовательно, эти корни дают решение задачи для возмущений, исходящих от верхней ограничивающей поверхности.

Примером таких возмущений являются морские течения, вызванные ветрами¹. Два другие комплексные корня уравнения (31) имеют отрицательные вещественные части. Этим корням соответствует затухание составляющих u и v по направлению кверху, следовательно, эти корни дают решение рассматриваемой задачи, которое можно представить в следующей вещественной форме:

$$u = U(1 - e^{-\beta z} \cos \beta z), \quad v = U e^{-\beta z} \sin \beta z,$$

где

$$\beta = +\sqrt{\frac{\omega'}{\nu}},$$

а $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ есть кинематическая вязкость. Проекция годографа результирующей скорости на горизонтальную плоскость изображена на рис. 289.

¹Ekman W., Dynamische Gesetze der Meeresströmungen, Innsbrucker Vorträge 1992, стр. 97.

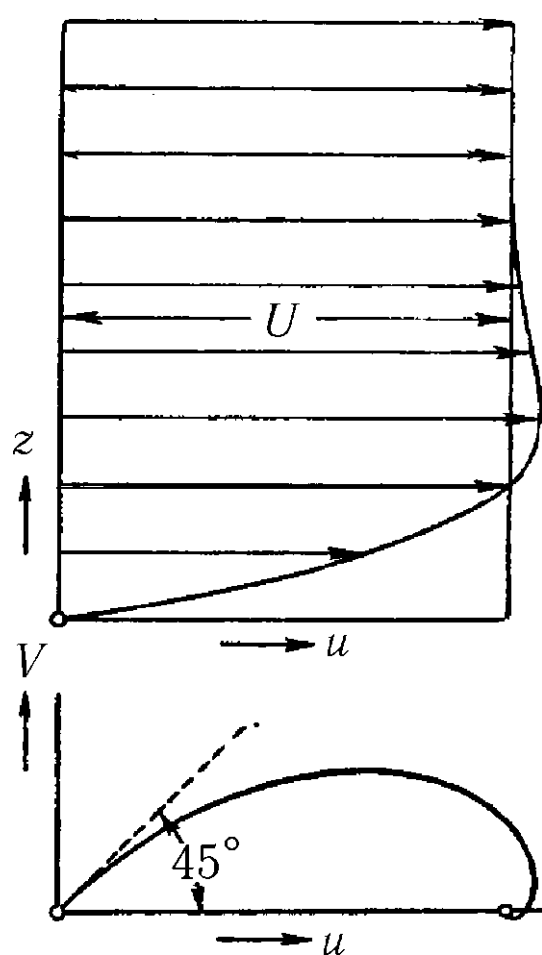


Рис. 289. Ламинарное приземное течение

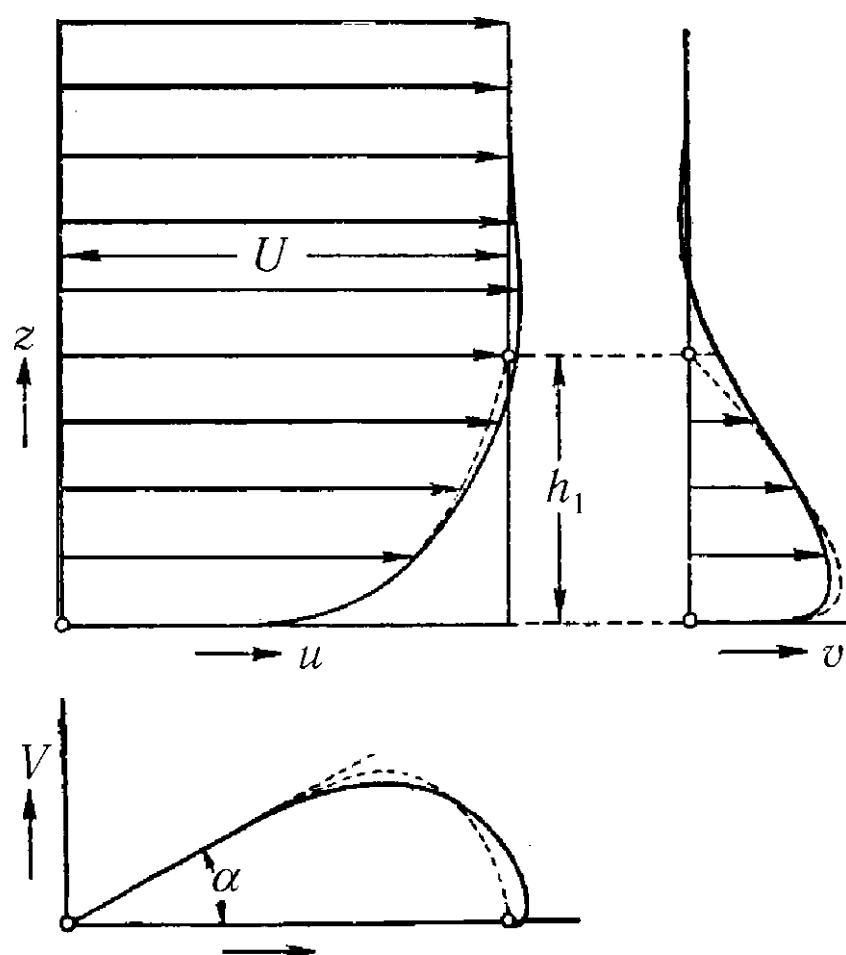


Рис. 290. Турбулентное приземное течение

Полученная кривая называется *спиралью Экмана*. Мы видим, что направление ветра у поверхности земли отклонено от направления высотного ветра на 45° .

Для решения аналогичной задачи в случае турбулентного движения следует ввести в расчет вместо вязкости μ коэффициент турбулентного перемешивания A [§ 4, п. е) гл. III]. Так как этот коэффициент во много раз больше, чем μ и приблизительно пропорционален скорости ветра, то пограничный слой получается значительно толще, чем при ламинарном движении, причем тем более толстым, чем больше скорость ветра. Кроме того, поскольку величина коэффициента A не постоянна по высоте z , для распределения скорости в пространстве получаются иные формулы, чем при ламинарном движении. В частности, наибольший градиент скорости получается, как вообще всегда при турбулентных течениях, вблизи поверхности земли. Поэтому средняя скорость в пограничном слое больше, чем при ламинарном движении, что несколько сглаживает разность между кориолисовыми силами вблизи поверхности земли и на высоте; этим и объясняется, что при турбулентном движении отклонение направления ветра в зоне трения от направления высотного ветра меньше, чем при ламинарном движении. Проекция годографа скоростей на горизонтальную плоскость изображена на рис. 290.

Подчеркнем, что полученные результаты являются точными толь-

ко для случая прямолинейных установившихся изобар. В действительности же изобары обычно непрямолинейные и изменяются во времени, поэтому измерения скорости и направления ветра, производимые путем наблюдения за движением шаров-пилотов или путем записи курса и скорости свободных аэростатов, дают результаты, более или менее отклоняющиеся от указанных выше теоретических значений.

б) Для получения численных соотношений необходимо знать составляющие τ_x и τ_y касательного напряжения на поверхности земли. Общие формулы для этих составляющих легко вывести, исходя из значений кориолисовых сил в приземном течении. Мы получим:

$$\tau_x = 2\omega' \int_0^h \rho v dz, \quad (32)$$

$$\tau_y = 2\omega' \int_0^h \rho(U - u) dz. \quad (33)$$

В этих формулах h означает ту высоту, на которой величины $U - u$ и v можно считать равными нулю. Результирующее касательное напряжение должно иметь направление ветра в зоне трения, следовательно, угол α между этим направлением и направлением высотного ветра определяется из соотношения:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\tau_y}{\tau_x} = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{v}{u} \right). \quad (34)$$

Согласно сказанному в § 5, п. d) гл. III, касательное напряжение при турбулентном течении вдоль шероховатой поверхности приблизительно пропорционально квадрату скорости. Из этого в сочетании с уравнением (32) следует, что высота пограничного слоя при увеличении скорости ветра возрастает приблизительно пропорционально этой скорости.

Дальнейшие точные вычисления невозможны, так как пока мы еще не знаем точных закономерностей, имеющих место при ускоренных турбулентных течениях. Поэтому мы ограничимся здесь только приближенной оценкой.

Примем, что вблизи поверхности земли составляющая скорости u равна

$$u = U \left(\frac{z}{h_1} \right)^{1/n}, \quad (35)$$

т. е. изменяется пропорционально корню n -й степени из z . Составляющую c вблизи поверхности земли примем равной

$$v = u \operatorname{tg} \alpha. \quad (36)$$

Для того чтобы при $z = h_1$ было $v = 0$, заменим равенство (36) следующим равенством:

$$v = u \left(1 - \frac{z}{h_1}\right) \operatorname{tg} \alpha. \quad (37)$$

Высота h_1 меньше той высоты h , которая была введена в формулы (32) и (33); выберем ее так, чтобы изменение составляющей u по формуле (35) в среднем совпадало с изменением ее по точному закону. [Кривые, изображающие изменение u и v по формулам (35) и (37), изображены на рис. 290 пунктиром.] Подставляя значения u и v из формул (35) и (37) в формулы (32) и (33), мы получим после простых вычислений следующее соотношение:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{n} \sqrt{2n + 1}. \quad (38)$$

Касательное напряжение τ_x у поверхности земли, согласно формуле (32), равно

$$\tau_x = \frac{2n}{(n + 1)\sqrt{2n + 1}} \rho \omega' U h_1 = - \frac{n}{(n + 1)\sqrt{2n + 1}} h_1 \frac{dp}{dy}, \quad (39)$$

где величина

$$-\frac{dp}{dy} = 2\rho\omega'U$$

есть барометрический градиент, который должен быть выражен в таких же единицах, как и напряжение τ_x .

Показатель степени $\frac{1}{n}$ в формуле (35) зависит от h_1 , а также от шероховатости поверхности земли. Если развитию нормальной турбулентности не препятствует устойчивое температурное расслоение воздуха, то для определения h_1 и $\frac{1}{n}$ можно воспользоваться формулой (33) гл. III. Эта формула, выражающая скорость турбулентного течения над шероховатой поверхностью, имеет вид:

$$u = \sqrt{\frac{\tau_x}{\rho}} \left(5,75 \lg \frac{z}{k} + C_2\right), \quad (40)$$

причем, согласно сказанному на стр. 178, величина C_2 зависит от высоты выступов, образующих шероховатость. Для шероховатости, образованной растительностью или строениями, величина C_2 колеблется между 5 и 8,5. Так

как при $z = h_1$ должно быть $u = U$, то из равенства (40) мы имеем:

$$\tau_x = \frac{\rho U^2}{\left(5,75 \lg \frac{h_1}{k} + C_2\right)^2}. \quad (41)$$

Использование для составляющей u , в противоположность предыдущему, логарифмической формулы почти не отражается на оценке, так как при подходящем выборе величины n ход изменения обеих функций (35) и (40) почти одинаковый. Необходимо только, чтобы обе функции давали одно и то же значение интеграла

$$\int_0^h (U - u) dz,$$

что приводит к соотношению:

$$\lg \frac{h_1}{k} + \frac{C_2}{5,75} = (n + 1) \lg e.$$

Исключая τ_x из равенств (39) и (41), мы получим:

$$h_1 \left(5,75 \lg \frac{h_1}{k} + C_2\right)^2 = \frac{(n + 1)\sqrt{2n + 1}}{2n} \frac{U}{\omega'}. \quad (42)$$

Из этого уравнения нетрудно найти путем проб для заданного значения U соответствующее значение h_1 (удобнее поступить наоборот — для взятого значения h_1 вычислить соответствующее значение U). Формула (42) подтверждает, что высота h_1 приблизительно пропорциональна скорости ветра U .

Рассмотрим численный пример. Примем, что $C_2 = 5,0$ и что

$$\lg \frac{h_1}{k} + C_2 = 20; 25; 30.$$

В таком случае

$$\frac{h_1}{k} = 400; 3000; 22\,000 \quad \text{и} \quad \frac{\tau_x}{\rho U^2} = 0,0025; 0,0016; 0,0011,$$

следовательно, $n = 7, 9, 11$. Этим значениям n соответствуют углы отклонения $\alpha = 29^\circ; 26^\circ; 23,5^\circ$. Наконец, из уравнения (42) находим:

$$\frac{h_1 \omega'}{U} = 0,00553; 0,00388; 0,002905. \quad (43)$$

На широте 50° угловая скорость вращения равна

$$\omega' = \omega \sin \varphi = 5,58 \cdot 10^{-5} \text{ сек}^{-1}.$$

Для $U = 12$ м/сек получаем из равенств (43):

$$h_1 = 1200; 830; 625 \text{ м.}$$

Соответствующие значения k равны:

$$k \approx 3,0 \text{ м, (низкий лес),}$$

$$k \approx 0,3 \text{ м, (пашня, огороды),}$$

$$k \approx 0,03 \text{ м, (плоская поверхность воды или снега).}$$

с) Важным следствием возникновения приземного течения, направленного под определенным углом к заданному высотному или градиентному ветру, является постепенное ослабление поля давлений. Приземное течение непрерывно перемещает воздух из области высокого давления в область низкого давления. Поток массы воздуха в направлении перепада давления на единицу длины вдоль направления и градиентного ветра равен

$$M = \int_0^h \rho v dz$$

или, на основании равенства (32),

$$M = \frac{\tau_x}{2\omega'}$$

Перемещение массы воздуха в нижних слоях атмосферы должно компенсироваться перемещением в верхних слоях в противоположном направлении, т. е. из области низкого давления в область высокого давления. Такого рода перемещения влекут за собой, на основании сказанного в § 9, п. с), изменение первоначальных полей скоростей и давлений. Эти изменения, как легко видеть, всегда сводятся к тому, что оба поля ослабляются. Таким образом, трение, проявляющееся только в сравнительно тонком слое вблизи поверхности земли, приводит в сочетании с кориолисовыми силами к уменьшению кинетической энергии не только нижних, но и верхних слоев атмосферы. Энергия, расходуемая в единицу времени для преодоления сил трения на единице площади, равна

$$E = \tau_x U;$$

в то же время эта энергия равна секундной работе перепада давления, т. е.

$$E = - \int_0^h \frac{dp}{dy} v dz.$$

В самом деле, умножая равенство

$$-\frac{dp}{dy} = 2\rho\omega'U$$

на $v dz$ и интегрируя в пределах от 0 до h , мы получим, на основании формулы (32):

$$-\int_0^h \frac{dp}{dy} v dz = \tau_x U.$$

Определение быстроты уменьшения энергии $-\frac{dE}{dt}$ можно выполнить следующим приближенным способом. Полагая, например, $n = 7$, мы получим:

$$-\frac{dE}{dt} = 0,452\rho\omega'U^2h_1,$$

или, имея в виду, что на основании первого из равенств (43) $\frac{h\omega'}{U} = 0,00553$,

$$-\frac{dE}{dt} = 0,0025\rho U^3. \quad (44)$$

Если высоту всей массы воздуха, пересчитанную на постоянную плотность, обозначить через H , то кинетическая энергия на единицу площади будет равна

$$E = \frac{1}{2}\rho H U^2.$$

Подставляя это выражение E в уравнение (44) и интегрируя по всей площади области возмущения, мы найдем быстроту уменьшения энергии (при условии, что термические явления не приводят ни к притоку, ни к отводу энергии). Можно не интегрировать уравнения (44) и ограничиться подсчетом для единицы площади. Для этого надо взять для скорости U ее среднее значение U_m , тогда мы получим:

$$\Delta t = \frac{400H}{U_m} \cdot \frac{\Delta U}{U_m}. \quad (45)$$

Пользуясь этой формулой, можно вычислить время Δt , в течение которого скорость U_m уменьшается на определенное число процентов. Так, например, если $U_m = 12$ м/сек и $H = 8000$ м, то для уменьшения скорости U_m на 10% требуется

$$\Delta t = 26\,700 \text{ сек} \approx 7,5 \text{ часа}.$$

Подчеркнем, что это время подсчитано для наблюдателя, движущегося вместе с областью возмущения; для наблюдателя, неподвижного относительно поверхности земли, получается совсем другое время. Формула (45) показывает,

что уменьшение скорости ветра происходит тем быстрее, чем больше скорость.

В § 9, п. б) нами было рассмотрено обтекание длинной возвышенности в предположении, что трение отсутствует. В действительности трение всегда существует, и поэтому возникает вторичное течение рассмотренного выше вида, которое влечет за собой постепенное ослабление поля давлений. Из формы линий тока, изображенных на рис. 288, видно, что вторичный поток, перпендикулярный к направлению ветра, расширяется над возвышенностью; таким путем создается отток воздуха (такой же, как из области высокого давления), который компенсируется притоком воздуха сверху. Расчеты Гёртлера¹ показали, что это явление оказывает значительное влияние на течение верхних слоев атмосферы только в случае очень слабых ветров или очень большой шероховатости почвы.

д) В морях следует различать *поверхностные течения*, вызванные ветрами, и *глубинные течения*, связанные, согласно сказанному в § 9, п. б), с разностями высот уровня свободной поверхности. Если плотность воды в области глубинного течения всюду одинаковая, то скорость этого течения по всей глубине постоянна по величине и направлению, за исключением нижних, придонных слоев, где вследствие трения возникает вторичное, придонное течение².

Все выводы, полученные нами в этом параграфе для ветров, могут быть непосредственно перенесены на глубинные течения.

Поверхностные течения возникают вследствие трения ветра о свободную поверхность воды, точнее говоря, главным образом вследствие переноса количества движения ветра на волны. Приведенные в движение слои воды получают вследствие вращения Земли отклонение вправо в северном полушарии и влево — в южном полушарии. В результате образуется морское течение, отклоненное от направления ветра вправо или влево, в зависимости от полушария. При ламинарном течении распределение скоростей по глубине изображается опять спиралью Экмана³. Однако, в общем случае, главным образом вследствие неравномерности ветра, поверхностное течение получается турбулентным, и поэ-

¹Görtler H., ZAMM, т. 21 (1941), стр. 279; выдержка из этой работы вместе с изложением родственных проблем помещена в Naturwissenschaften, т. 29 (1941), стр. 473.

²При наличии горизонтального градиента плотности, вызванного неодинаковой температурой или неодинаковым содержанием соли в области течения, скорость глубинного течения получается различной на разных глубинах (см. § 15, п. б).

³См., например, Ekman W., Innsbrucker Vorträge 1922, стр. 97.

тому распределение скоростей по глубине изображается спиралью турбулентного типа. На рис. 291 изображена проекция годографа скоростей

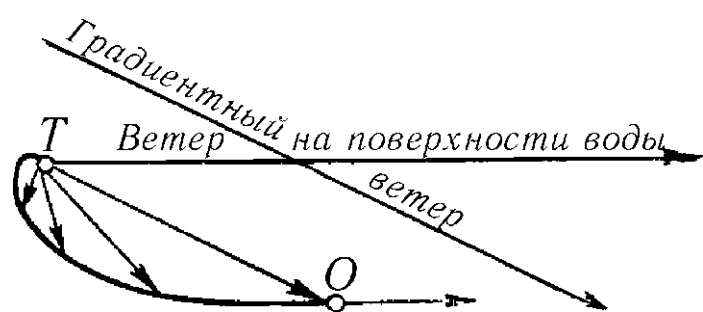


Рис. 291. Годограф скоростей поверхностного течения в море (точка O соответствует поверхности воды, точка T — нижнему слою течения)

турбулентного поверхностного течения на горизонтальную плоскость. Так как ветер, дующий около поверхности воды, не совпадает по направлению с градиентным ветром, то отклонение поверхностного течения относительно градиентного ветра получается иным, чем относительно ветра около поверхности воды. Как легко видеть, направление поверхностного течения около самой поверхности воды приблизительно совпадает с направлением градиентного ветра, следовательно, поверхностное течение почти перпендикулярно к барометрическому градиенту. Небольшие отклонения от этого правила могут возникать вследствие влияния расслоения атмосферы, которое дает себя знать в виде усиления или ослабления турбулентности.

Глубинные течения обуславливаются в основном поверхностными течениями. Если, например, поверхностное течение направлено к берегу, то необходимо должно возникнуть глубинное течение, отводящее от берега воду, пригоняемую поверхностным течением. Поэтому при установившемся движении возникает наклон поверхности моря, а вместе с ним и горизонтальный градиент давления в воде. Составляющая этого градиента, параллельная береговой линии, направлена в сторону, противоположную соответствующей составляющей барометрического градиента.

§ 11. Движение жидкости около вращающегося диска. **Формулы для сопротивления.** Пусть диск диаметром D вращается в покоящейся жидкости вокруг оси, перпендикулярной к своей плоскости и проходящей через центр диска. Частицы жидкости, прилегающие к диску, увлекаются им вследствие трения, приводятся в круговое движение и затем вследствие инерции отбрасываются наружу — к краю диска. Вместо отброшенных частиц жидкости к диску притекают другие частицы и опять отбрасываются наружу. В результате после небольшого промежутка времени, в течение которого происходит разгон течения, возникает установившийся поток, оказывающий большее сопротивление вращению диска. Если вращение диска происходит не в неограниченном пространстве, наполненном жидкостью, а в камере,

концентричной с диском, то масса жидкости, приведенная в круговое движение и отброшенная от диска, сейчас же вновь притекает к диску, потеряв, однако, предварительно некоторую часть сообщенной ей циркуляции вследствие трения о стенки камеры.

Если движение жидкости ламинарное, то определение момента сопротивления, возникающего при вращении диска, возможно выполнить теоретическим путем. Прежде чем перейти к изложению полученных результатов, остановимся на простом приближенном рассмотрении поставленной задачи. Пусть направление, в котором вдоль диска скользит поток и которое параллельно касательному напряжению на стенке $\tau_{\text{ст}}$, образует с направлением кругового движения угол φ . Радиальная составляющая касательного напряжения, равная $\tau_{\text{ст}} \sin \varphi$, должна уравновешиваться с центробежной силой отбрасываемого пластинкой потока, следовательно, она пропорциональна $\rho r \omega^2 \delta$, где δ есть толщина увлекаемого слоя жидкости. С другой стороны, трансверсальная составляющая касательного напряжения, равная $\tau_{\text{ст}} \cos \varphi$ пропорциональна $\mu \cdot \frac{r\omega}{\delta}$. Исключая из соотношений

$$\begin{cases} \tau_{\text{ст}} \sin \varphi \sim \rho r \omega^2 \delta, \\ \tau_{\text{ст}} \cos \varphi \sim \mu \frac{r\omega}{\delta} \end{cases} \quad (46)$$

касательное напряжение $\tau_{\text{ст}}$ и принимая, что угол φ не зависит от радиуса, что подтверждается наблюдениями, мы получим:

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}; \quad (47)$$

следовательно, толщина увлекаемого диском слоя одинакова на всех радиусах. Впрочем, этот результат можно было предвидеть на основании соображений о размерностях, изложенных в § 3 гл. III при оценке толщины пограничного слоя. Там мы получили для этой толщины оценку

$$\delta \sim \sqrt{\nu t}, \quad (48)$$

которая совпадает с оценкой (47), поскольку в нашем случае характерное для явления время $t \sim \frac{1}{\omega}$. Если бы в наших рассуждениях мы исходили из факта существования соотношения (48), то из соотношений (46) мы получили бы, что $\varphi = \text{const}$. Подставляя значение δ из соотношения (47) в любое из соотношений (46), мы получим:

$$\tau_{\text{ст}} \sim \rho r \omega \sqrt{\nu \omega}.$$

Момент сопротивления вращению пропорционален произведению касательного напряжения, площади и плеча, следовательно,

$$M \sim \rho r^4 \omega \sqrt{\nu \omega}. \quad (49)$$

Задача о вращении диска в покоящейся жидкости решена Кохраном¹. Пусть u есть касательная составляющая скорости жидкости, v — радиальная составляющая и w — составляющая, перпендикулярная к диску. Очевидно, что составляющие u и v пропорциональны $r\omega$. Множитель пропорциональности есть функция от

$$\frac{z}{\delta} = z \sqrt{\frac{\omega}{\nu}},$$

где z есть расстояние от диска. В таком случае составляющая w вследствие неразрывности потока пропорциональна $\delta\omega = \sqrt{\nu\omega}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} u &= r\omega F\left(z\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right), \\ v &= r\omega G\left(z\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right), \\ w &= \sqrt{\nu\omega} \cdot \left(z\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right)^2. \end{aligned}$$

Графики трех функций F , G и H изображены на рис. 292. Из этого рисунка мы видим, что расстояние z от диска, на котором окружная скорость потока понижается до половины окружной скорости диска, равно

$$z_{0,5} = \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}.$$

Угол, образуемый относительными линиями тока в плоскости диска с направлением окружной скорости диска, определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{G'(0)}{F'(0)} = \frac{0,510}{0,616} = 0,838,$$

следовательно,

$$\varphi_1 = 39,6^\circ.$$

¹ Kochran W. G., Proc. Cambridge Philos. Soc., т. 30 (1934), часть 3.

²В работе Кохрана, а также в цитируемой ниже работе Бедевадта множитель пропорциональности для u обозначен через G , а множитель пропорциональности для v — через F , т. е. по сравнению с нашими обозначениями — наоборот.

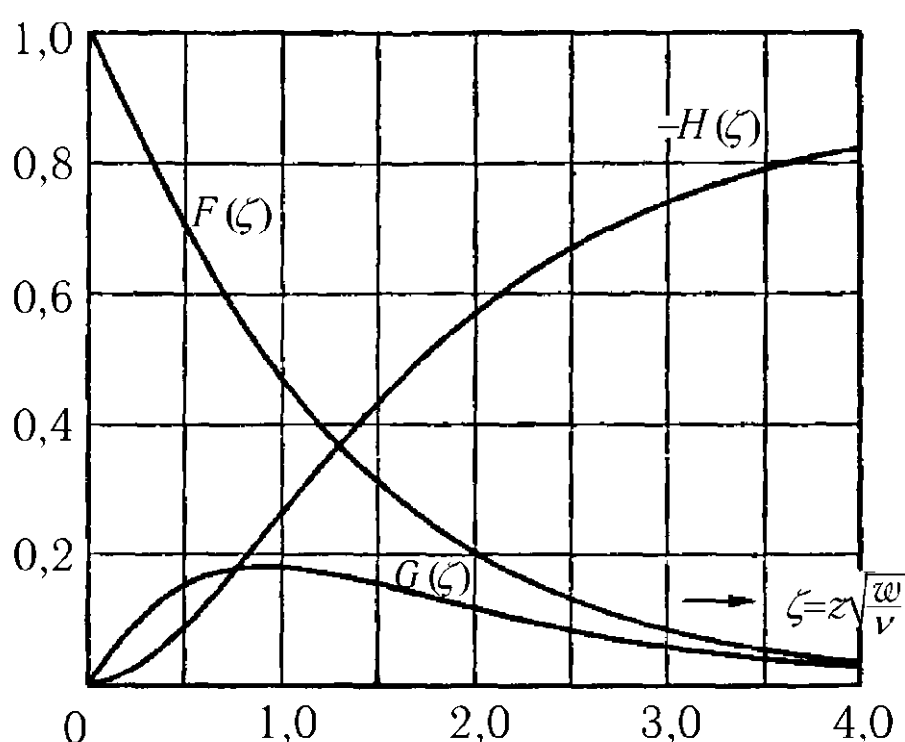


Рис. 292. Вращающийся диск в покоящейся жидкости

Для момента сил трения диска диаметра D вращающегося с окружной скоростью u_1 вычисления дают значение:¹

$$M = 0,684 D^3 \frac{\rho}{2} u_1^2 \sqrt{\frac{\nu}{u_1 D}}. \quad (50)$$

Подставив в эту формулу

$$u_1 = \omega r_1 = \frac{1}{2} \omega D,$$

мы увидим, что она по своей структуре совпадает с формулой (49).

Бёдевадт² рассмотрел случай неподвижного диска, помещенного в жидкость, вращающуюся с угловой скоростью ω .

Графики соответствующих функций F , G и H изображены на рис. 293. Теперь вторичный поток такого же рода, какой был уже описан в § 8 гл. III, направлен к центру диска. Составляющая его скорости, параллельная оси диска, направлена от диска; ее предельное значение равно

$$w_\infty = 1,349 \sqrt{\omega \nu}.$$

(Заметим, что в данном случае вторичный поток является типичной формой циклона, в то время как при вращении диска в неподвижной

¹Эту же формулу, но с другим численным коэффициентом, вывел приближенным способом Карман [см. его статью в ZAMM, т. I (1921), стр. 247]. Кохран в своей работе уточнил полученный Карманом результат.

²Bödewadt U. T., ZAMM, т. 20 (1940), стр. 241.

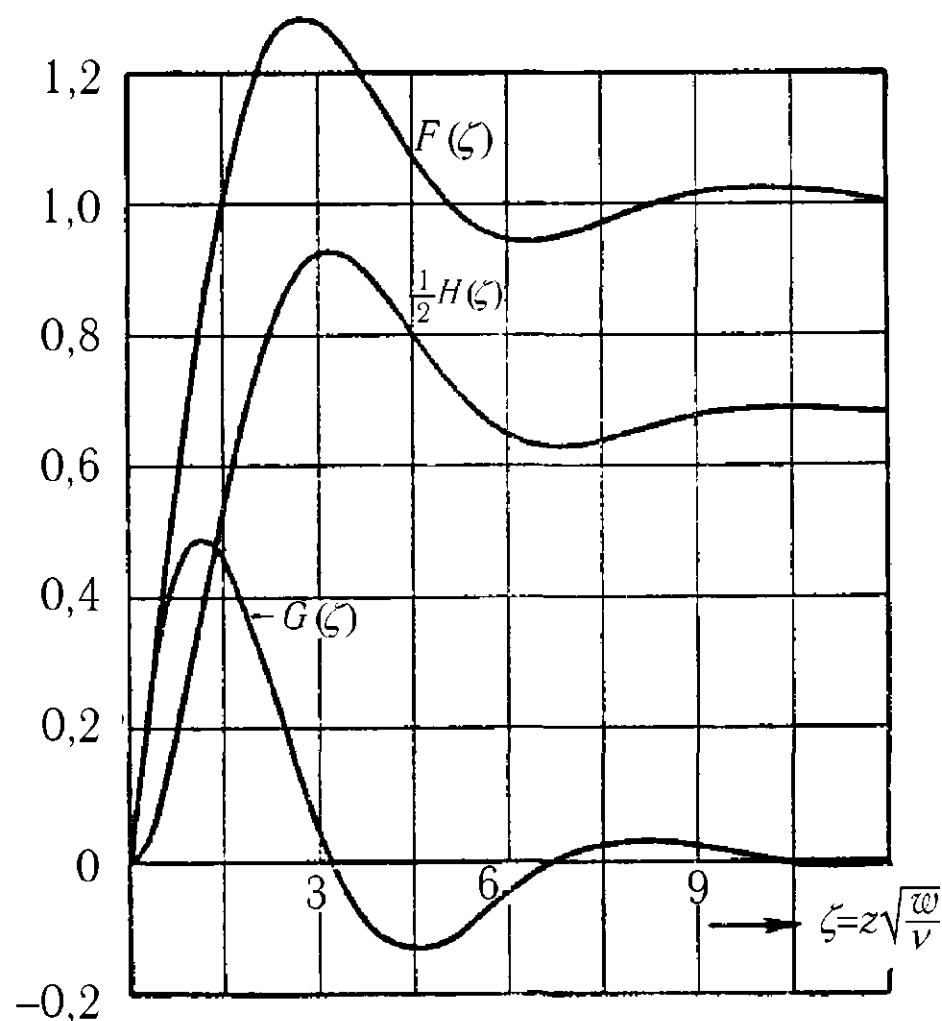


Рис. 293. Вращающаяся жидкость на покоящемся основании

жидкости вторичный поток подобен антициклону.) Тангенс угла, образуемого линиями тока непосредственно около диска с направлением окружной скорости, равен $\operatorname{tg} \varphi_2 = 1,218$, следовательно, $\varphi_2 = 50,6^\circ$. Мы видим, что угол φ_2 больше, а угол φ_1 меньше угла $\varphi = 45^\circ$, полученного Экманом (рис. 289). Это несовпадение объясняется кривизной линий тока. Выяснению картины движения при разгоне от состояния покоя до состояния установившегося течения посвящена работа Тириота¹.

Перейдем к случаю турбулентного движения в пограничном слое около вращающегося диска. Если турбулентность возникает достаточно близко от центра диска, то в соответствии с уравнением (31) гл. III (стр. 162) для трансверсальной составляющей касательного напряжения мы получим:

$$\tau \cos \varphi \sim \rho(\omega r)^{7/4} \left(\frac{\nu}{\delta} \right)^{1/4}. \quad (51)$$

Радиальная составляющая касательного ускорения, как и при ламинарном движении, будет

$$\tau \sin \varphi \sim \rho \omega^2 r \cdot \delta. \quad (52)$$

¹Thiriot К. Н., ZAMM, т. 20 (1940), стр. 1.

Исключая из соотношений (51) и (52) τ и принимая, что $\varphi = \text{const}$, мы получим:

$$\delta \sim r^{3/5} \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^{1/5}.$$

Полагая опять

$$M \sim D_\tau^3$$

и подставляя сюда значение τ , а также окружную скорость диска $u_1 = r\omega$, мы найдем, что момент сопротивления равен

$$M = \text{число} \cdot D^3 \frac{\rho}{2} u_1^2 \left(\frac{\nu}{u_1 D} \right)^{1/5}. \quad (53)$$

Карман¹ путем приближенного расчета нашел для «числа» в формуле (53) значение, равное 0,021. Согласно опытам Шмидта² и Кемпфа³, при развившемся турбулентном течении это число равно 0,025. Переход от ламинарного состояния к турбулентному происходит так же, как при обтекании пластинок (см. кривую 3 на рис. 152).

Если диск вращается в цилиндрической камере, то, как уже было сказано, во вращение приводится вся жидкость, и поэтому относительная скорость диска и жидкости получается меньше, чем в неограниченном пространстве; следовательно, будет меньше и момент сопротивления. Согласно измерениям Шульц–Грунова⁴, для $\frac{uD}{\nu} > 6 \cdot 10^5$ «число» в формуле (53) равно 0,0089 и практически не зависит от расстояния между плоскими стенками камеры и диска, если только это расстояние не очень мало. На обеих сторонах диска образуются пограничные слои, в которых жидкость движется от центра к периферии, а на обеих крышках камеры — два других пограничных слоя, в которых жидкость движется от периферии к центру. В промежутках между пограничными слоями находится слой пассивной жидкости, довольно равномерно вращающейся и медленно перетекающей от крышек к диску. Наблюдения Шульц–Грунова показали, что для значений $\frac{uD}{\nu}$ между $3 \cdot 10^4$ и $6 \cdot 10^5$ имеет место ламинарное течение, причем момент сопротивления равен

$$M = 0,47 D^3 \frac{\rho}{2} u_1^2 \sqrt{\frac{\nu}{u_1 D}}. \quad (54)$$

¹ K á r m á n Th., ZAMM, т. I (1921), стр. 249.

² S c h m i d t W., VDI-Zeitschr., т. 65 (1921), стр. 441.

³ K e m p f G., Innsbrucker Vorträge 1922, стр. 168

⁴ S c h u l t z – G r u n o w F., ZAMM, т. 15 (1935), стр. 191. В этой же статье дано и теоретическое исследование. См. также расчеты O k a y a T. and H a s e g a w a M., Japan. Journ. of Physics, т. 13 (1939), стр. 29.

Для узких камер и малых значений $\frac{uD}{\nu}$ момент сопротивления можно вычислить теоретически; он равен

$$M = \frac{\pi}{8} \mu u_1 \frac{D^3}{s}, \quad (55)$$

где s есть расстояние между диском и крышкой. Опыты хорошо подтверждают эту формулу.

С. ТЕЧЕНИЯ В РАССЛОЕННЫХ ВЕСОМЫХ ЖИДКОСТЯХ

§ 12. Две жидкости различной плотности. а) Если две жидкости различной плотности наслоены одна на другую, то для исследования возникающих в них движений целесообразно воспользоваться указанным в § 6 гл. II способом разложения действительного давления на весовое и на кинетическое давления. Отбросив в более легкой жидкости весовое давление, как не играющее роли при ее движении, мы получим, что в более тяжелой жидкости наряду с кинетическим давлением будет теперь такое же весовое давление, как в жидкости с плотностью $\rho_2 - \rho_1$. В таком случае более легкую жидкость можно рассматривать как невесомую, а более тяжелую — как весомую, но подверженную меньшему ускорению силы тяжести, а именно, равному только $g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}$.

Отсюда прежде всего следует, что более тяжелая жидкость всегда стремится занять самое низкое положение.

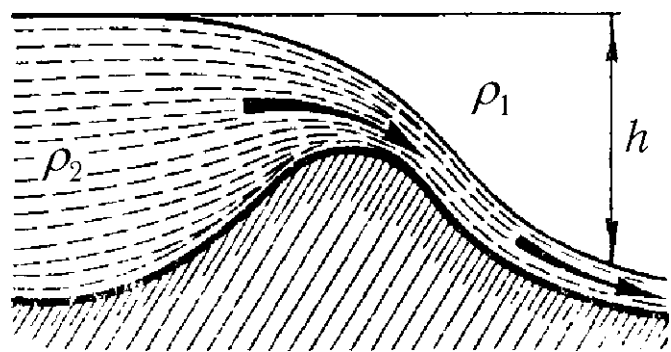


Рис. 294. Вторжение холодного воздуха в горах

В горных местностях иногда можно наблюдать, как в долине, закрытой с трех сторон горными склонами, дует сверху вниз сильный ветер. На первый взгляд такое явление кажется непонятным, так как горные склоны делают невозможным такое направление ветра. Объяснение заключается в следующем: на другой стороне горной цепи происходит так называемое вторжение холодного воздуха; этот

воздух перетекает через перевалы горной цепи и врывается в долину подобно горной реке (рис. 294). Если, например, разность высот между уровнем долины и верхней границей холодного воздуха составляет

1000 м, а температурный скачок равен 10° , то

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \approx \frac{1}{30}.$$

В таком случае, если предположить, что трение не даст себя знать, скорость ветра будет равна

$$w_0 = \sqrt{2gh \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}} \approx \sqrt{\frac{20\,000}{30}} = 25,8 \text{ м/сек},$$

т.е. будет такой же, как при довольно сильной буре. В основе этого расчета лежит предположение, что масса теплого воздуха, расположенная в долине над массой холодного воздуха, находится приблизительно в безразличном (адиабатическом) равновесии (см. стр. 30). При устойчивом расположении слоев разности температур в более низких слоях уменьшаются, так как стекающий вниз холодный воздух адиабатически сжимается. Это приводит к уменьшению величины $\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}$ и, следовательно, к уменьшению скорости w_0 .

Если лавина из порошкообразного снега падает с вертикального уступа и при этом происходит перемешивание снега с воздухом, то может образоваться такая смесь, плотность которой в несколько раз больше плотности воздуха, но которая, тем не менее, обладает свойствами жидкости¹. Если, например, плотность смеси в пять раз больше плотности воздуха, то ускорение падения смеси будет составлять $4/5$ ускорения свободного падения, следовательно, при падении с высоты 500 м скорость потока будет равна круглым числом 90 м/сек, а соответствующее динамическое давление около 2500 кг/м^2 . В действительности движение потока из смеси снега и воздуха является, конечно, турбулентным. Тем не менее в ядре потока все же может возникнуть чрезвычайно большое динамическое давление, чем и объясняется, что такие «пылевые» лавины иногда сносят со своего пути целью строения.

Остановимся несколько подробнее на форме, которую имеет фронт холодной массы воздуха, вторгающейся в теплую массу воздуха, принимаемую за неподвижную. Когда холодный воздух приходит в движение, то сначала он начинает свертываться совершенно так же, как это

¹Сухой снег, выпавший в особенно рыхлом состоянии, иногда содержит в себе столько воздуха, что при падении вместе с лавиной может образовать своего рода жидкую эмульсию без дальнейшего примешивания воздуха и оставаться «жидким» также при турбулентном течении (при условии, что соблюдаются условия для взвешенного состояния, указанные на стр. 446).

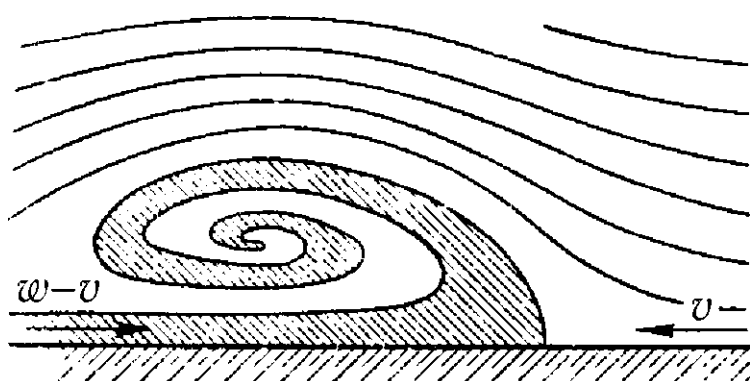


Рис. 295. Идеализированная картина продвижения фронта холодной массы воздуха (система отсчета движется вместе с фронтом)

изображено на рис. 45 на стр. 77 (необходимо только отбросить нижние половины потока в обоих его положениях). Образующийся вихрь увеличивается в размерах, и так как плотность воздуха в этом вихре больше, чем в окружающем теплом воздухе, то постепенно под действием тяжести он немного сплющивается. Таким путем возникает поток, который в идеализированном виде изображен на рис. 295 для системы отсчета, движущейся вместе с фронтом. Скорость v поступательного перемещения фронта можно вычислить из условия, что давление везде изменяется непрерывно и поэтому оно одинаково и слева и справа от критической точки. Если скорость вторгающегося холодного воздуха равна w , а первоначальная скорость теплого воздуха $w = 0$, то для системы отсчета, движущейся вместе с фронтом, указанное условие приводит к уравнению

$$\frac{1}{2}\rho_2(w - v)^2 = \frac{1}{2}\rho_1 v^2,$$

откуда следует, что скорость поступательного перемещения холодного фронта равна

$$v = \frac{w}{1 + \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}}.$$

Если обе плотности отличаются друг от друга не очень значительно, как это обычно и бывает, то приближенно

$$v = \frac{w}{2},$$

что подтверждается наблюдениями¹.

¹См., например, Koschmieder H., Danziger Seewinduntersuchungen. Forsch.-Arb. der Observ. Danzig, № 8 (1936).

В предыдущих рассуждениях мы не учли, во-первых, трение, а во-вторых неустойчивость тех границ теплого и холодного воздуха, вдоль которых тяжелый холодный воздух расположен над более легким теплым воздухом. Поэтому действительная картина продвижения фронта холодного воздуха имеет несколько иной вид, чем на рис. 295; она изображена на рис. 296. для системы отсчета, неподвижной относительно поверхности земли. В такой системе отсчета линии тока

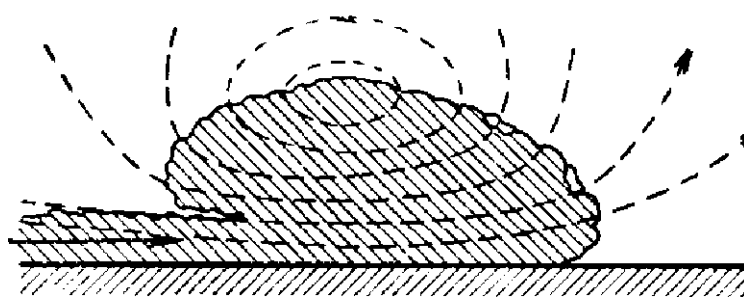


Рис. 296. Действительная картина продвижения фронта холодной массы воздуха (система отсчета неподвижна относительно поверхности земли)

сразу дают представление о направлении скорости для наблюдателя, находящегося на поверхности земли. Наблюдения над движением пыли во время бурь подтверждают правильность картины, изображенной на рис. 296¹.

Аналогичное течение возникает также в том случае, когда восходящая масса воздуха, часто делающаяся заметной в виде кучевого облака², достигает слоя, в котором температура выше, чем в нижележащих слоях. В такой слой восходящая масса воздуха не может проникнуть, и поэтому, сохраняя свою кинетическую энергию, она отклоняется в стороны и начинает двигаться горизонтально вдоль границы этого слоя. При этом фронт движущегося воздуха свертывается так же, как на рис. 295, но одновременно и вверх и вниз. При подходящих условиях этот двойной вихрь может сохраняться очень долго, причем в верхней его части возникает новая конденсация. Таким путем иногда возникают изолированные вытянутые в длину облака, простирающиеся от одного горизонта к другому.

Многократное повторение такого явления часто приводит к тому, что на некоторой высоте возникает последовательность тонких слоев воздуха с различными направлениями ветра и с различной степенью влажности. Эти тонкие слои иногда делаются заметными либо благодаря зигзагообразному движению ледяных игл, медленно падающих через эти слои (перистые облака), либо благодаря образованию тонких облаков в том случае, когда вся масса воздуха поднимается как целое.

б) На горизонтальной поверхности раздела двух жидкостей различной плотности могут возникать под действием силы тяжести волновые движения, сходные с такими же движениями на свободной поверхности жидкости. Если обе жидкости находятся в покое относительно друг

¹Снимки таких бурь имеются в книге Koschmieder Н., *Kleinräumige Luftbewegungen*, Leipzig, 1943, стр. 119 и 125.

²Восходящая масса воздуха, попадая в область более низкого давления, охлаждается адиабатически; при достаточной влажности возникает конденсация части водяных паров в виде тумана.

друга, то при достаточной толщине обоих слоев образуются волны, скорость распространения которых, как уже было упомянуто на стр. 134, равна

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2}}, \quad (56)$$

где λ есть длина волны. Скорости движения, вызванные волнами в обеих жидкостях, одинаковы и по мере удаления от поверхности раздела уменьшаются так же, как величина $e^{-2\pi z/\lambda}$. Горизонтальные скорости в обеих жидкостях направлены в разные стороны¹.

Так же как и на свободной поверхности, на поверхности раздела возможны стоячие волны. Они получаются, например, при наложении двух волн, движущихся навстречу друг другу. Период колебания таких волн равен

$$T = \frac{\lambda}{c},$$

где c есть скорость распространения, определяемая формулой (56).

Формула (56) применима только в том случае, когда толщина каждого слоя жидкости велика по сравнению с $\frac{\lambda}{2\pi}$. При меньшей толщине слоев для скорости распространения волн получается значительно более сложная формула. Однако, если один из слоев, имеет очень большую толщину по сравнению с толщиной h , другого слоя и разность плотностей $\rho_2 = \rho_1$ мала по сравнению со средним арифметическим $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$, то для скорости распространения очень длинных волн получается простая формула:

$$c = \sqrt{\frac{gh(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1}}.$$

Кроме того могут образоваться волны на свободной поверхности, скорость распространения которых при большой длине волны равна

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}.$$

Формула (56) показывает, что если разность $\rho_2 - \rho_1$ мала, то скорость распространения внутренних волн незначительна по сравнению со скоростью распространения поверхностных волн.

¹Более подробные сведения можно найти в книге L a m b Н., Hydrodynamics, § 231 и следующие.

Такой случай имеет место, например, при наслоении пресной воды на соленую при таянии дрейфующего льда в полярных морях. Наблюдения показывают, что в этом случае при достаточной толщине слоя пресной воды скорость движения корабля не может превысить скорости распространения внутренних волн. Так происходит потому, что весь излишек мощности расходуется на образование внутренних волн с весьма значительной амплитудой, и поле давлений потока в верхнем слое удерживает корабль все время над гребнем волны. Для того чтобы дать возможность кораблю двигаться с нормальной скоростью, необходимо превысить критическую скорость движения, прежде чем в полной мере начнет проявлять себя тормозящее действие внутренних волн. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы переход от малой скорости движения к нормальной скорости происходил очень быстро. Достигнув нормальной скорости, корабль беспрепятственно продолжает двигаться с этой скоростью дальше².

Известный интерес представляют также волны, возникающие на поверхности раздела двух жидкостей разной плотности, движущихся со скоростями U_1 и U_2 . В случае жидкостей, покоящихся относительно друг друга, для каждой заданной длины волны возможны два решения, одно из которых дает волны, распространяющиеся вправо, а другое — волны, распространяющиеся влево, причем скорость распространения с тех и других волн одинакова. Аналогичное положение мы имеем и в случае относительного движения обеих жидкостей. Для волн с настолько большой длиной, что скорость их распространения, вычисленная по формуле (56), значительно больше, чем U_1 или U_2 , обе скорости имеют различные знаки; с уменьшением длины λ разница делается все меньше и, наконец, при предельном значении λ , равном

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi(U_1 - U_2)^2}{g} \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_2^2 - \rho_1^2}, \quad (57)$$

обе скорости c совпадают друг с другом, причем общее значение c равно

$$c_1 = c_2 = \frac{U_1 \rho_1 + U_2 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}. \quad (58)$$

При значениях λ , меньших $\lambda_{кр}$, обычное волновое движение невозможно, так как в этом случае амплитуда возникающих волн с течением

²См. Bjerknes V., *Physikalische Hydrodynamik*, стр. 387, а также Lamb H., *Hydrodynamics* § 248 и 249.

времени нарастает (могут возникать также волны с амплитудой, с течением времени убывающей, однако такие волны не представляют интереса). Все волны с длиной, большей $\lambda_{кр}$, устойчивы. Характер их распространения ничем не отличается от случая относительного покоя обеих жидкостей. Все волны с длиной, меньшей $\lambda_{кр}$, имеют фазовую скорость (58). Амплитуда их возрастает по показательному закону, и в конце концов они опрокидываются. Это приводит к перемешиванию соприкасающихся жидкостей, вследствие чего вместо поверхности раздела со скачком плотности получается переходный слой конечной толщины с непрерывным изменением плотности. После образования такого слоя все возмущения волнового характера становятся устойчивыми. Рассмотренная здесь в общих чертах теория находит применение при изучении волн, возникающих на границе двух движущихся слоев воздуха разной температуры. Впервые изучением таких волн занимался Гельмгольц. Часто эти волны делаются видимыми благодаря образованию правильной последовательности облаков на их гребнях¹. В тех случаях, когда они остаются невидимыми, они всегда могут быть обнаружены по ритмичным колебаниям атмосферного давления.

§ 13. Непрерывное изменение плотности. а) *Теорема В.Бьеркнеса.* В § 9 гл. II (стр. 82) мы доказали теорему Томсона о том, что в жидкости, лишенной трения, циркуляция вдоль замкнутой жидкой линии не изменяется во времени. Необходимым условием для доказательства было предположение, что плотность жидкости или имеет постоянное значение, или, как в случае однородных газов, зависит только от давления. Для иного, более общего случая распределения плотности теорема Томсона неприменима. В самом деле, теперь интеграл

$$- \int \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right)$$

в уравнении (33) на стр. 88, взятый вдоль замкнутой линии, не равен нулю. Для того чтобы подсчитать его значение при любом законе распределения плотности ρ , воспользуемся векторным исчислением, так как вычисления в координатной форме довольно кропотливы и требуют много места. В векторной форме указанный выше криволинейный

¹Восходящая масса воздуха, попадая в область более низкого давления, охлаждается адиабатически; при достаточной влажности возникает конденсация части водяных паров в виде тумана.

интеграл записывается следующим образом:

$$- \int \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \cdot ds,$$

где ds есть элемент жидкой линии. Согласно теореме Стокса, этот интеграл, взятый вдоль замкнутой линии, равен поверхностному интегралу

$$- \iint \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \right) d\mathbf{F},$$

взятому по площади $\mathbf{F}$, ограниченной замкнутой линией. Но мы имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \right) &= \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \right) = \\ &= \left(\nabla \frac{1}{\rho} \right) \times \operatorname{grad} p + \frac{1}{\rho} \nabla \times \operatorname{grad} p. \end{aligned} \quad (59)$$

Так как ротация градиента равна нулю, то последний член в равенстве (59) отпадает, и мы получаем:

$$- \int \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \cdot ds = - \iint \operatorname{grad} \frac{1}{\rho} \times \operatorname{grad} p \cdot d\mathbf{F}.$$

Обозначая циркуляцию через Γ , мы будем иметь:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \iint \operatorname{grad} \frac{1}{\rho} \times \operatorname{grad} p \cdot d\mathbf{F}. \quad (60)$$

Если $\operatorname{grad} \frac{1}{\rho}$ везде параллелен $\operatorname{grad} p$, то подынтегральное выражение равно нулю, и мы по-прежнему получаем, что

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0.$$

Если же поверхности $p = \text{const}$ и $v = \text{const}$, каждая из которых перпендикулярна к соответствующему градиенту, пересекаются друг с другом, то правая часть формулы (60) не равна нулю.

В. Бьеркнес дал для интеграла в правой части формулы (60) очень наглядное геометрическое толкование. Пусть проведены все поверхности $p = \text{const}$ с интервалом Δp и все поверхности $v = \frac{1}{\rho} = \text{const}$ (v есть объем единицы массы) с интервалом Δv ; тогда каждая пара соседних поверхностей $p = \text{const}$ образует с каждой парой соседних поверхностей $v = \text{const}$ трубку, поперечное сечение которой представляет собой параллелограмм (рис. 297). В. Бьеркнес показал, что интеграл в правой части формулы (60) пропорционален числу трубок, окруженных жидкой линией.

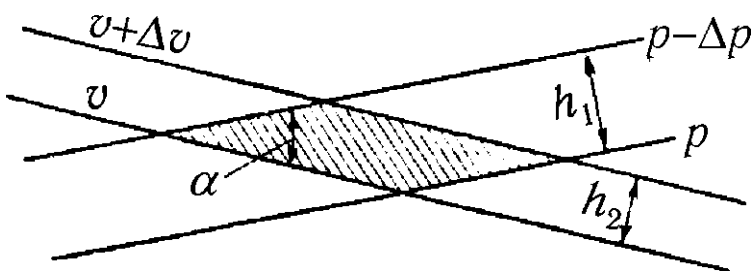


Рис. 297. Трубка, образованная пересечением поверхностей $p = \text{const}$ и $v = \text{const}$

а h_2 — между двумя соседними поверхностями $v = \text{const}$, то площадь параллелограмма, очевидно, равна

$$f' = \frac{h_1 h_2}{\sin \alpha}.$$

Если вместо поперечного сечения, перпендикулярного к стенкам трубки, взять косое сечение, то мы получим другой параллелограмм, наклоненный относительно первого на некоторый угол β . Площадь наклонного параллелограмма, очевидно, равна

$$f = \frac{f'}{\cos \beta}.$$

Так как

$$\Delta p = h_1 \cdot |\text{grad } p|, \quad \Delta v = h_2 \cdot |\text{grad } v|,$$

то мы имеем

$$f = \frac{\Delta p \Delta v}{|\text{grad } p| |\text{grad } v| \sin \alpha \cos \beta}.$$

Знаменатель этого выражения совпадает с подынтегральным выражением в формуле (60). В самом деле, синус появляется в результате векторного произведения, а косинус — в результате скалярного произведения. Число параллелограммов с площадью f на единице площади равно

$$n = \frac{1}{f}.$$

Полное число таких параллелограммов на площади F , замыкаемой жидкой линией, будет

$$N = \int n dF = \int \frac{|\text{grad } p| |\text{grad } v| \sin \alpha \cos \beta dF}{\Delta p \Delta v}.$$

Сравнивая это равенство с формулой (60), мы получим:

$$\left| \frac{d\Gamma}{dt} \right| = \delta p \cdot \Delta v \cdot N. \quad (61)$$

Знак $\frac{d\Gamma}{dt}$ в каждом отдельном случае легко определить из того соображения, что более плотные части жидкости стремятся двигаться вниз, а менее плотные — вверх. Теорема Бьеркнеса пригодна главным образом для качественного исследования. Применение ее для количественного исследования затрудняется тем, что обычно поле давлений ускоренного течения точно не известно. Исключение составляют течения в таком пространстве, горизонтальное протяжение которого во много раз превышает вертикальное протяжение. Этот случай имеет место в большинстве метеорологических приложений. При течениях в таком пространстве вертикальные ускорения вследствие условия неразрывности малы по сравнению с горизонтальными ускорениями, и поэтому давление на каждой вертикали можно определять на основании законов гидростатики. Для вычислений, однако, целесообразно пользоваться не тем интегралом, который получился в правой части формулы (60), а его исходной формой, т. е. интегралом

$$- \int \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \cdot ds.$$

Так как теперь

$$|\operatorname{grad} p| = \rho g,$$

то при интегрировании вдоль вертикальных отрезков жидкой линии получается просто $\rho(h_1 - h_2)$; при интегрировании же вдоль отрезков жидкой линии, расположенных на изобарных поверхностях, получается нуль.

б) *Внутренние волны в несжимаемой среде.* В каждой расслоенной среде, находящейся в устойчивом состоянии, возможны внутренние волновые движения. До настоящего времени исследованы главным образом простые формы таких движений, в том числе так называемые *ячейковые волны*. При таком волновом движении все пространство разбивается на отдельные ячейки, как бы ограниченные жесткими стенками. Колебания во всех ячейках происходят с одинаковой частотой. Наиболее простым случаем являются *плоские стоячие волны в несжимаемой расслоенной жидкости*.

Пусть жидкость расслоена так, что плотность $\rho_0(z)$ в состоянии покоя связана с высотой z соотношением

$$\rho_0(z) = \rho_{\text{дн}} e^{-z/H}, \quad (62)$$

где $\rho_{\text{дн}}$ есть плотность около дна. В таком случае все ячейки получают-ся конгруэнтными, и амплитуда волн с увеличением высоты возрастает в такой мере, что энергия волнового движения в каждой ячейке получается одинаковой; поэтому скорость с увеличением высоты возрастает так же, как величина $e^{+z/2H}$. При такой форме волнового движения в бесконечном пространстве содержится бесконечно большая энергия, следовательно, это волновое движение представляет собой не что иное, как вынужденные колебания, развившиеся в течение бесконечно большого промежутка времени. Вынужденные колебания, развивающиеся в течение конечного промежутка времени, до сих пор не изучены.

Так как плотность является теперь функцией положения в пространстве, то при выполнении вычислений необходимо различать друг от друга отдельные частицы жидкости, следовательно, уравнений движения в форме Эйлера недостаточно. Однако нет нужды прибегать к уравнениям движения в форме Лагранжа, так как вследствие математических трудностей приходится ограничиваться пока только случаем малых амплитуд. В этом случае можно выразить перемещения ξ , η , ζ частицы в виде функций от ее координат x , y , z неподвижном пространстве и от времени t .

Линеаризованные уравнения для двухмерного течения (ξ и ζ суть функции от x , z и t) при условии несжимаемости жидкости получаются следующим путем.

1. Вследствие перемещения мгновенная плотность $\rho(x, z, t)$ в какой-либо точке x , z отличается от плотности $\rho_0(z)$, соответствующей состоянию покоя, на величину σ , следовательно

$$\rho = \rho_0 + \sigma.$$

Отсюда, имея в виду, что в точке x , z в данный момент находится частица, первоначально находившаяся на уровне $z - \zeta$, и сохраняя малые величины только первого порядка малости, мы получим:

$$\sigma = -\zeta \frac{\partial \rho_0}{\partial z},$$

или, после подстановки вместо $\frac{\partial \rho_0}{\partial z}$ его значения из уравнения (62)

$$\sigma = \frac{\zeta \rho_0}{H}.$$

2. Условие неразрывности выражается уравнением:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

3. Уравнения движения для направлений x, z после линеаризации принимают следующий вид:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \rho_0 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial z} - g(\rho_0 + \sigma)$$

(слева ρ_0 вместо $\rho_0 + \sigma$!).

Для указанного выше случая малых амплитуд при плоском течении получаются следующие перемещения ζ и ξ :

$$\begin{cases} \zeta = A e^{\frac{z}{2H}} \sin \alpha x \cos \beta z \cos \omega t, \\ \xi = A e^{\frac{z}{2H}} \cos \alpha x \left(\frac{1}{2H_\alpha} \cos \beta z - \frac{\beta}{\alpha} \sin \beta z \right) \cos \omega t. \end{cases} \quad (63)$$

Эти формулы показывают, что рассматриваемое движение представляет собой стоячие ячейковые волны (рис. 298) с горизонтальной длиной

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{\alpha}$$

и с вертикальной длиной

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{\beta}.$$

Для круговой частоты ω , связанной с периодом колебаний T соотношением

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

вычисления дают значение

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{H} \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{4H^2}}}. \quad (64)$$

Если наложить на эти волны другие волны такого же вида, но смещенные в направлении x на четвертую часть длины волны и имеющие фазу, смещенную на четвертую часть периода колебаний, то получатся горизонтальные бегущие волны, фазовая скорость которых равна

$$c = \frac{\omega}{\alpha} = \pm \sqrt{\frac{g}{(\alpha^2 + \beta^2)H + \frac{1}{4H}}}. \quad (65)$$

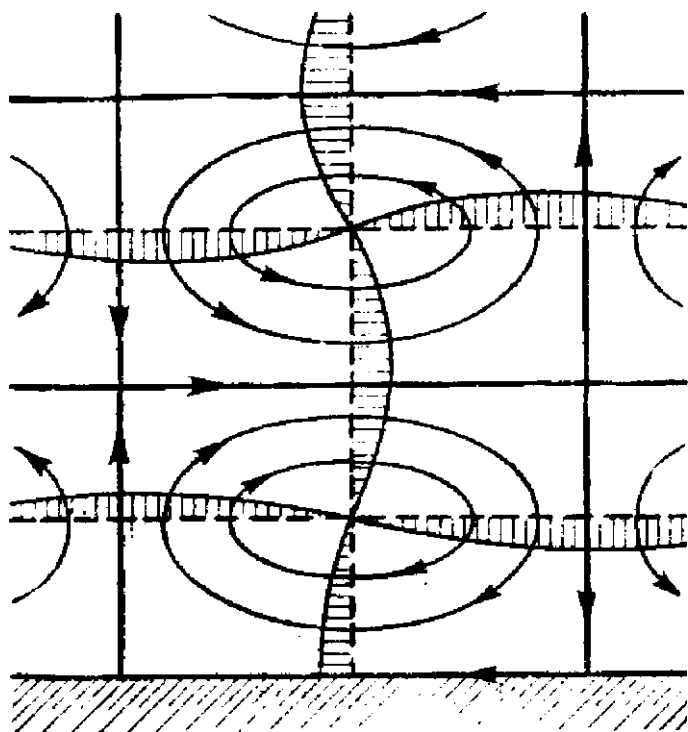


Рис. 298. Стоячие ячейковые волны гравитационного типа

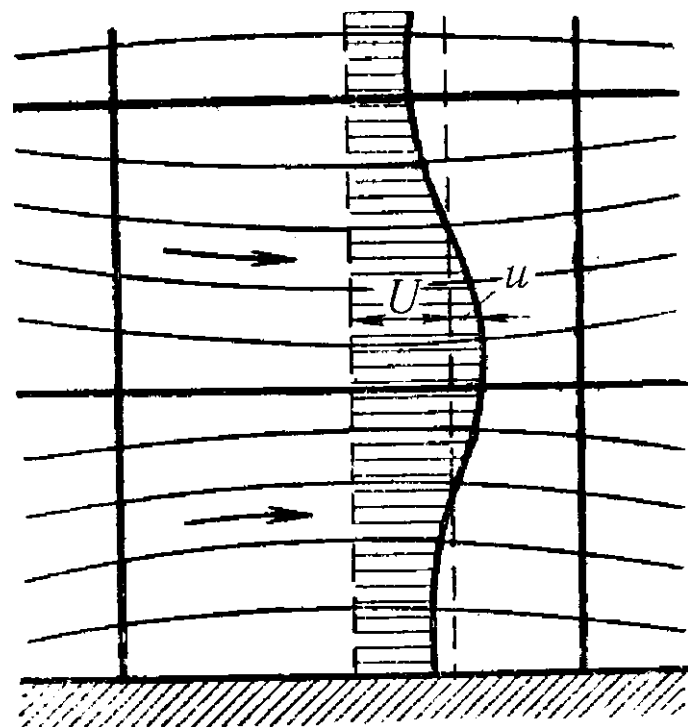


Рис. 299. Установившиеся волны

Если на поле скоростей таких волн наложить поле скоростей $U = -c$, то получится установившееся течение с волнообразными линиями тока (рис. 299). Взяв для β определенное значение, мы можем вычислить при помощи формулы (65) для заданного значения U соответствующее значение α , следовательно, и длину волны λ_x . Так, например, для $\beta = 0$, чему соответствует $\lambda_z = \infty$ или, иными словами, одинаковая фаза колебаний для всех z , мы получим:

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi U \sqrt{\frac{H}{g\left(1 - \frac{U^2}{4gH}\right)}}. \quad (66)$$

Если скорость U мала по сравнению со скоростью $\sqrt{2gH}$, возникающей при падении с высоты H , то в правой части формулы (66) можно пренебречь членом $\frac{U^2}{4gH}$ по сравнению с единицей, и мы получаем из этой формулы примечательный результат: длина установившихся волн пропорциональна скорости течения U , в то время как длина установившихся волн, образующихся на свободной поверхности глубокой воды, равна

$$\lambda = \frac{2\pi U^2}{g},$$

т. е. пропорциональна квадрату скорости U . Еще нагляднее особые свойства ячейковых волн выявляются из формулы (64), особенно в том случае, когда $\beta = 0$. Легко видеть, что для всех волн с длиной λ_x , малой по

сравнению с $8\pi H$, получается практически одинаковый, не зависящий от λ_x , период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{H}{g}}.$$

И случае же волн на свободной поверхности воды период колебаний, как это следует из равенств (60) и (62) на стр. 129 и 129, равен

$$T = \sqrt{\frac{2\pi\lambda_x}{g}},$$

т. е. зависит от длины волны λ_x .

В общем случае ячейковые волны имеют три измерения. Путем наложения друг на друга ячейковых волн с разными длинами λ_x , λ_y и λ_z получаются волны более общего вида, причем не всегда ячейковые. Эти волны до настоящего времени мало изучены. Практически интересный случай таких волн будет рассмотрен ниже, на стр. 501.

Таким образом, мы видим, что в расслоенной весомай жидкости с плотностью, убывающей снизу вверх, возможны очень разнообразные колебательные движения, следовательно, поведение такой жидкости совершенно не похоже на поведение однородных жидкостей. Решения, получаемые при исследовании колебаний в расслоенной жидкости, в отличие от аналогичных задач для однородных жидкостей, не однозначны. Они делаются однозначными только тогда, когда принимаются во внимание силы трения или когда возникновение движения из состояния полного покоя расчленяется на ряд последовательных этапов. Математическое исследование обоих этих случаев наталкивается на большие затруднения.

с) *Внутренние волны в сжимаемой среде.* Исследование ячейковых волн, возникающих в сжимаемой расслоенной среде, например, в расслоенном весомай газе, температура которого везде одинакова, труднее, чем изучение таких же волн в несжимаемой среде, так как при вычислениях необходимо учитывать, что каждая отдельная частица газа при колебательном движении адиабатически изменяет свое состояние. Из уравнения (3) гл. IV следует, что в этом случае изменения давления Δp связаны с изменениями плотности $\Delta \rho$ соотношением

$$\Delta p = c_{зв}^2 \Delta \rho,$$

где $c_{зв}$ есть скорость звука, равная

$$c_{зв} = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}.$$

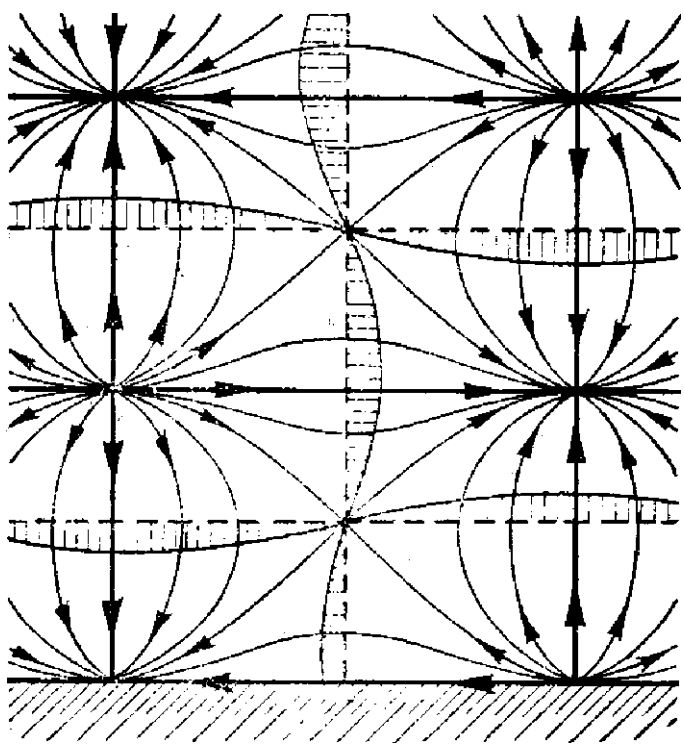


Рис. 300. Стоячие ячейковые волны звукового типа

Как показывают исследования¹, в сжимаемой среде возможны два типа ячейковых волн. Волны первого типа характерны тем, что они колеблются сравнительно медленно и что основной причиной их возникновения являются перемещения центра тяжести частиц жидкости. Ячейковые волны, возникающие в несжимаемой среде, принадлежат к этому же типу. Волны второго типа колеблются значительно быстрее, и основной причиной их возникновения является последовательное сжатие и расширение частиц жидкости. Линии тока волн второго типа изображены на рис. 300. Если $\alpha^2 + \beta^2$

велико по сравнению с $\frac{1}{H^2}$, следовательно, если λ_x , или λ_z , или оба они малы по сравнению с $2\pi H$, где теперь H означает высоту однородной атмосферы, равную круглым числом 8000 м (см. стр. 28), то для круговой частоты обоих типов волн получаются следующие приближенные формулы:

$$\omega_1 \approx \sqrt{\frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{g}{H} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \dots}}, \quad (67)$$

$$\omega_2 \approx c_s \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \dots} \quad (68)$$

В этих формулах α и β имеют тот же смысл, что и раньше, а κ есть отношение удельной теплоемкости при постоянном давлении к удельной теплоемкости при постоянном объеме. Мы видим, что формула (67) отличается от формулы (64) только множителем $\sqrt{\frac{\kappa - 1}{\kappa}}$, если не считать некоторой разницы в последнем слагаемом знаменателя, которое нами в формулах (67) и (68) не выписано.

От стоячих волн можно перейти к бегущим волнам совершенно так же, как это было сделано в пункте б). Скорость бегущих волн второго типа равна

$$c \approx c_{зв} \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \dots}, \quad (69)$$

¹ Bjerknes V., Physikalische Hydrodynamik, Berlin 1993, стр. 341.

т. е. больше скорости звука. Эти волны можно рассматривать, как результат наложения друг на друга двух звуковых волн, фронты которых наклонены относительно вертикали на углы

$$\operatorname{tg} \gamma = \pm \frac{\beta}{\alpha}.$$

Если ввести угол γ в формулу (69), то мы получим:

$$c = \frac{c_{\text{зв}}}{\cos \gamma}.$$

Колебания в земной атмосфере в предположении, что она изотермическая, впервые подробно были изучены Маргулесом¹.

С практической точки зрения представляет интерес возмущение, вызываемое в горизонтальном потоке воздуха, движущемся со скоростью U , препятствием в виде горной гряды умеренной высоты, расположенной перпендикулярно к направлению потока. Лира² исследовал такой случай для изотермической атмосферы и показал, что возмущение выражается суммой бесселевых функций от аргумента $\frac{2\pi r}{\lambda}$, умноженных на круговые функции от φ , и на $e^{z/2H}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ есть расстояние от центра возмущения на поверхности земли, φ — угол ($\operatorname{tg} \varphi = \frac{z}{x}$) и λ — длина волны, которая приближенно равна

$$\lambda = 2\pi U \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{H}{g}}. \quad (70)$$

Полученное решение — неоднозначное, но оно делается таким, если ввести дополнительно требование об апериодическом характере результирующего движения на наветренной стороне горы³. Заметим, что такое же требование вводится в родственных задачах гидродинамики⁴. Формула (70) приближенно применима также к случаю политропической атмосферы ($p \sim \rho^n$), необходимо только подставить в нее вместо $\frac{\kappa}{\kappa - 1}$ величину $\frac{n\kappa}{\kappa - n}$, а H принять равным высоте соответствующей

¹ Margules M., Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. IIa, т. 99 (1890), стр. 204, т. 101 (1892), стр. 597, т. 102 (1893), стр. 11 и 1369; см. также Koschmieder H., Dynamische Meteorologie, изд. 2, Leipzig 1941, стр. 297; в этой книге имеются подробные библиографические указания [первое издание переведено на русский язык: Кошмидер Г., Динамическая метеорология, Москва 1938 (Прим. перев.)]

² Lyra G., Beitr. z. Physik. d. freien Atmosphäre, т. 26 (1940), стр. 197; см. также Koschmieder H., Dynamische Meteorologie, изд. 2, стр. 318.

³ Lyra G., ZAMM, т. 23 (1943), стр. 1. Из этой работы взят приводимый ниже рис. 301; в ней имеются также многочисленные другие рисунки.

⁴ См. в связи с этим рис. 272b на стр. 427.

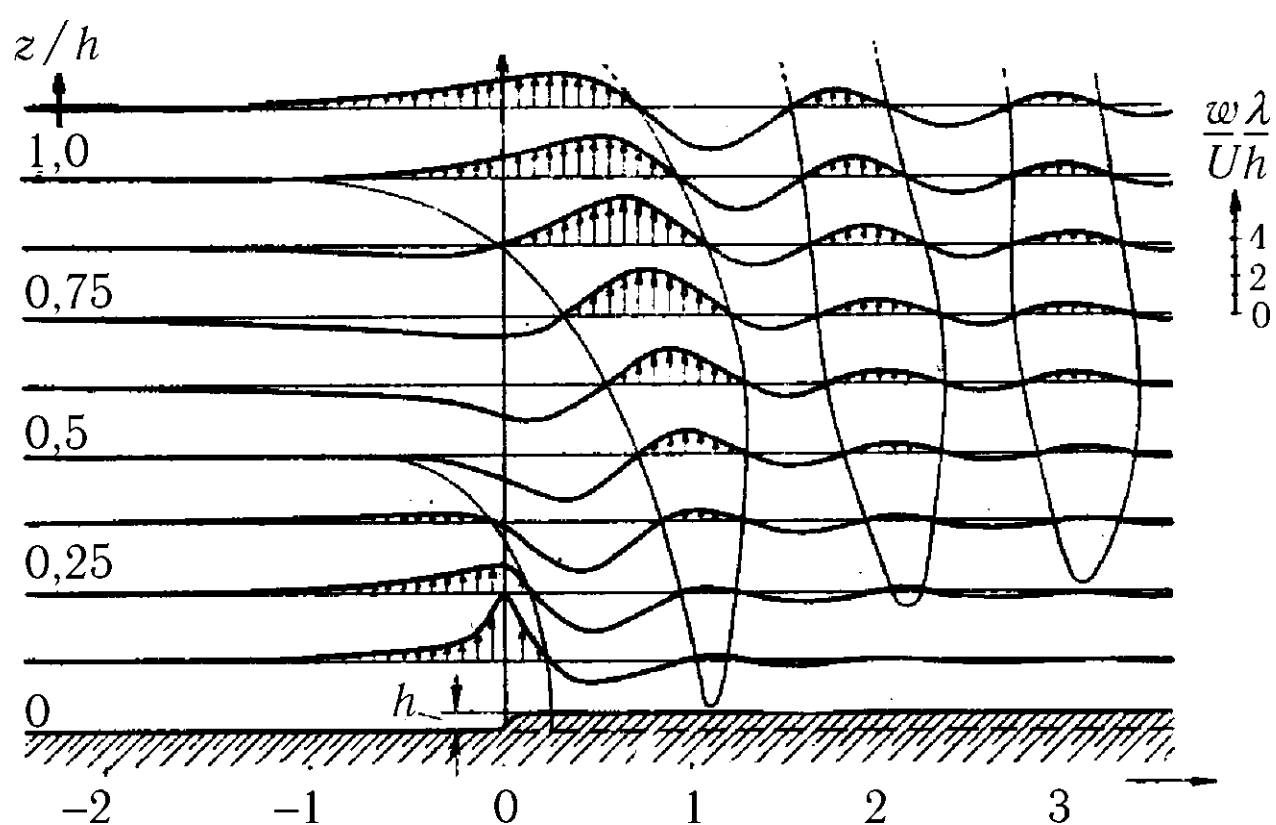


Рис. 301. Волны над краем плоскогорья

однородной атмосферы (стр. 28). На рис. 301 изображено для политропической атмосферы распределение вертикальных скоростей, вызванных препятствием в виде плоскогорья высотой h . Для наглядности масштаб вдоль вертикальной оси взят в три раза больше масштаба вдоль горизонтальной оси. Мы видим, что первая зона восходящего движения воздуха расположена непосредственно около края плоскогорья. За первой зоной, на расстоянии примерно одной волны от края плоскогорья, расположена вторая зона, а за нею — на расстоянии $2h$, $3h$ и т. д. — следующие, более слабые зоны восходящих движений воздуха. Такие восходящие движения воздуха около гор, как известно, представляют большой интерес для полетов на планерах.

Скорость восходящего движения воздуха пропорциональна

$$h \sqrt{\frac{\kappa - n}{n\kappa} \frac{g}{H}},$$

где h есть высота плоскогорья; множитель пропорциональности следует отсчитывать по рис. 301. Мы видим, что скорость восходящего движения не зависит от скорости ветра U . От скорости ветра зависит только λ , т. е. горизонтальное протяжение восходящих движений. Заметим, что результаты, полученные Лирой, применимы только к тому случаю, когда скорость восходящего движения мала по сравнению со скоростью ветра U , следовательно, только для ограниченной высоты h плоскогорья.

Как показал Штjumке¹, при встрече ветром на своем пути плос-

¹ Stümke H., Beitr. z. Phys. d. freien. Atm., т. 26 (1940), стр. 207.

когорья горизонтальная составляющая u скорости возмущения отнюдь не затухает полностью по мере удаления от края плоскогорья. Кроме того, эта составляющая при увеличении высоты z переходит от положительных к отрицательным значениям, затем от отрицательных опять к положительным и т. д., причем амплитуда этих колебаний возрастает с высотой. Наконец, эта составляющая зависит только от высоты H плоскогорья, но не от скорости ветра U . Длина волны по-прежнему определяется формулой (70). Этот пример еще раз показывает, насколько сильно расслоенная жидкость отличается по своему поведению от однородной жидкости.

В наших обозначениях асимптотическая формула, полученная Штюмке для скорости u , имеет вид:

$$u(z) = h \sqrt{\frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{g'}{H}} e^{z/2H} \left(\sin \frac{2\pi z}{\lambda} + \frac{2 - \kappa}{2\kappa} \frac{\lambda}{2\pi H} \cos \frac{2\pi z}{\lambda} \right). \quad (71)$$

Эта формула применима опять только до тех пор, пока скорость u мала по сравнению со скоростью U . При увеличении высоты z скорость u безгранично возрастает (удваивается на каждые 10–11 км). Что происходит, когда скорость u уже не мала по сравнению с U , до настоящего времени не исследовано. Наблюдения, сделанные в Голландии и Норвегии над облаком, образовавшимся при полете метеорного тела над Шотландией¹ (это облако оставалось очень долго видимым на фоне вечернего неба), показали, что такого рода распределения скоростей действительно возникают на больших высотах. Сначала облако было заметно в виде приблизительно прямой черты, затем оно приняло довольно точно форму синусоиды с несколькими изгибами и, наконец, стало вытягиваться в ширину в горизонтальном направлении.

d) *Затухание турбулентности при движении устойчиво расслоенной жидкости.* Устойчивое расслоение весоной жидкости, движущейся со скоростью, изменяющейся по высоте, способствует уменьшению степени турбулентности. В самом деле, при таком расслоении турбулентное перемешивание в вертикальном направлении приводит к поднятию более тяжелых частей жидкости и, наоборот, к опусканию более легких частей, следовательно, в обоих случаях выполняется определенная работа. Интересным примером такого явления может служить успокоение ветра вблизи поверхности земли в летние безоблачные вечера, Между тем как на высоте ветер продолжает дуть с прежней скоростью. Такое успокоение ветра происходит потому, что вследствие теплового излучения нагретой земли создается вблизи ее поверхности очень устойчивое расслоение. Возникает вопрос, какие должны соблюдаться условия для

¹Störmer C., Astr. Norv., т. 3 (1939), № 5.

того, чтобы выполнение указанной выше работы привело к затуханию турбулентного перемешивания в вертикальном направлении (горизонтальное перемешивание остается при этом, конечно, неизменным).

Очевидно, что основную роль в таком затухании играет изменение скорости $\frac{dU}{dz}$ ветра с высотой. Согласно сказанному в § 4, п. d) гл. III порядок величины вертикальной пульсации турбулентного движения определяется соотношением

$$w' \sim l \frac{dU}{dz},$$

где U есть скорость ветра, а l — длина пути перемешивания. Следовательно, кинетическая энергия вертикального движения скопления частиц в виде шара объемом V будет

$$\rho \frac{V w'^2}{2} \sim \frac{1}{2} \rho V l^2 \left(\frac{dU}{dz} \right)^2.$$

Для того чтобы поднять это скопление из слоя $z = z_1$, в котором оно находилось в равновесии, в слой $z = z_2 = z_1 + l$, необходимо приложить силу, равную разности веса этих частиц и статической поддерживающей силы, т. е. силу

$$K = g(\rho_1 - \rho_2)V = g \frac{d\rho}{dz} (z_1 - z_2)V.$$

Работа, выполняемая этой силой на пути l , будет

$$\int_{z_1}^{z_1+l} K dz_2 = -g \frac{d\rho}{dz} \frac{l^2}{2} V.$$

Приравнивая кинетическую энергию работе, мы получим:

$$-g \frac{d\rho}{dz} = \rho \left(\frac{dU}{dz} \right)^2. \quad (72)$$

Это соотношение дает, очевидно, только верхнюю границу для $-\frac{d\rho}{dz}$, т. е. для уменьшения плотности с высотой, при переходе через которую всякое турбулентное движение должно сразу затухать. В действительности же для затухания турбулентности достаточно, чтобы отдельные

возмущения ослаблялись так, чтобы следующие за ними возмущения также делались более слабыми. Отношение левой части равенства (72) к правой части, т. е.

$$\frac{-\frac{\rho}{H} \frac{d\rho}{dz}}{\left(\frac{dU}{dz}\right)^2},$$

называется *числом Ричардсона* — в честь ученого, впервые занимавшегося рассматриваемой задачей¹, и обозначается через R_i . Тэйлор², исследуя малые колебания в расслоенной жидкости, движущейся со скоростью $U = U_0 + az$, нашел, что нижней границей для затухания турбулентности, по-видимому, является число Ричардсона, равное

$$\frac{-\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz}}{a^2} = \frac{1}{4}.$$

Полученный результат можно распространить также на случай сжимаемой среды. Выделим в среде объем V_1 с такой же плотностью ρ_1 , как и вокруг этого объема, и поднимем его на высоту dz ; давление p_1 при этом изменится на величину dp , которая, согласно равенству (8) гл. I, равна

$$dp = -g\rho_1 dz.$$

Пусть изменение состояния в поднятом объеме происходит адиабатически по закону

$$pV^\kappa = \text{const},$$

следовательно, в нашем случае мы будем иметь:

$$\frac{dV}{V_1} = -\frac{1}{\kappa} \frac{dp}{p_1}.$$

Вычислим теперь разность между собственным весом G поднявшегося объема и его статической поддерживающей силой A . Собственный вес равен

$$G = g\rho_1 V_1.$$

¹Richardson L. F., Proc. Roy. Soc (A), т. 97 (1920), стр. 354, и Phil. Mag (6). т. 49 (1925), стр. 81; см. также Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebieten, Aachen 1929.

²Taylor G. I., Proc. Roy. Soc (A), т. 132 (1931), стр. 499; см. также Goldstein S., там же стр. 524.

Поддерживающая сила зависит от рода расслоения окружающей среды. Если это расслоение — политропическое, т. е. определяется уравнением

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^n,$$

то тогда

$$d\rho = \rho_1 \frac{dp}{np_1}$$

и поддерживающая сила будет

$$A = (V_1 + dV) \cdot g(\rho_1 + d\rho) = V_1 g \rho_1 \left[1 + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\varkappa} \right) \frac{dp}{p_1} \right]$$

Таким образом, разность между собственным весом поднявшегося объема и его поддерживающей силой равна

$$G - A = -G \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\varkappa} \right) \frac{dp}{p_1}.$$

Так как

$$p_1 = g \rho_1 H,$$

где H есть высота однородной атмосферы (стр. 28), а

$$dp = -g \rho_1 dz,$$

то

$$G - A = G \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\varkappa} \right) \frac{dz}{H}. \quad (73)$$

Для ранее рассмотренного случая несжимаемой жидкости эта разность равна

$$G - A = -G \frac{d\rho}{\rho_1} = +G \frac{dz}{H}. \quad (74)$$

Сравнивая равенства (73) и (74), мы видим, что для сжимаемой среды, в которой давление изменяется по политропе, в формуле (72) следует заменить величину $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz}$ на $\frac{1}{H} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\varkappa} \right)$.

Из сказанного ясно, почему в формулы для колебаний сжимаемой среды, приведенные в пункте с), входит множитель $\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}$. Эти формулы были выведены для изотермической атмосферы, для которой $n = 1$, и поэтому указанная выше величина $\frac{1}{n} - \frac{1}{\varkappa}$ для такой атмосферы равна

$$1 - \frac{1}{\varkappa} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}.$$

Так как

$$dA = g\rho_1 dV + gV_1 dz \frac{d\rho}{dz},$$

где

$$dV = V dz \left(\frac{d\rho}{dz} \right)_{\text{ад}},$$

число Ричардсона можно представить также в следующем, более общем виде:

$$R_i = \frac{g \left[\left(\frac{d\rho}{dz} \right)_{\text{ад}} - \frac{d\rho}{dz} \right]}{\rho \left(\frac{dU}{dz} \right)^2}.$$

Далее, имея в виду уравнение состояния

$$\rho = \frac{p}{RT},$$

где R есть газовая постоянная, а T — абсолютная температура, мы получим:

$$R_i = \frac{g \left[\left(\frac{dT}{dz} - \frac{dT}{dz} \right)_{\text{ад}} \right]}{T \left(\frac{dU}{dz} \right)^2}.$$

Но

$$\frac{dT}{dz} - \left(\frac{dT}{dz} \right)_{\text{ад}} = \frac{T}{T_p} \frac{dT_p}{dz},$$

где T_p есть *потенциальная температура*, и окончательным выражением числа Ричардсона будет:

$$R_i = \frac{\frac{g}{T_p} \frac{dT_p}{dz}}{\left(\frac{dU}{dz} \right)^2}.$$

Потенциальной температурой называется та температура, которую приняла бы какая-нибудь частица воздуха, если бы она была адиабатически сжата до нормального давления, например, до 1000 мб.

Перемешивание устойчиво расслоенной массы воздуха, возникающее при сильном ветре вследствие турбулентности, приводит к тому, что расслоение воздуха постепенно приближается к адиабатическому состоянию, т.е. к состоянию безразличного равновесия. Турбулентный перенос тепла (см. стр. 165 и следующую), осуществляющий такое изменение состояния, определяется, согласно В. Шмидту¹, уравнением

$$Q = c_p A_Q \left[\left(\frac{dT}{dz} \right)_{\text{ад}} - \frac{dT}{dz} \right].$$

¹ Schmidt W., Der Massenaustausch in freier Luft und verwandte Erscheinungen, Hamburg 1925.

При устойчивом расслоении величина Q отрицательна, т.е. перенос тепла происходит вниз и поэтому способствует выравниванию потенциальной температуры. Если при этом

$$\frac{dT}{dz} < 0,$$

как это обычно и бывает, то тепло переносится из более холодного места в более теплое. На основании сказанного на стр. 502–505, такое явление термодинамически возможно за счет затраты энергии турбулентного потока воздуха. Следовательно, мы имеем здесь пример своеобразной холодильной машины¹.

§ 14. Совместное действие расслоения среды и вращения Земли. Объединяя теорию движения жидкости на вращающейся Земле с теорией движения расслоенной среды, мы получим ряд следствий, весьма важных для понимания движений, происходящих в земной атмосфере.

а) *Случай двух жидкостей с различной плотностью.* Пусть две несжимаемые жидкости с постоянными плотностями ρ_1 и ρ_2 наслоены одна на другую и движутся с постоянными скоростями U_1 и U_2 . Выясним, какое положение принимает поверхность раздела обеих жидкостей².

Для простоты примем, что обе скорости U_1 и U_2 направлены горизонтально и параллельно друг другу. Ось x направим параллельно скоростям, ось y — перпендикулярно к скоростям, а ось z — в вертикальном направлении. Если скорости направлены к востоку, то положительную сторону оси z направим вверх, а положительную сторону оси y — к северу. Вертикальная составляющая угловой скорости вращения Земли на широте φ , равная $\omega' = \omega \sin \varphi$, вызывает появление кориолисова ускорения, которое для положительной скорости U направлено к югу и по модулю равно $2\omega'U$. Под совокупным действием расслоения и кориолисовой силы в каждой из двух жидкостей возникает распределение давления следующего вида:

$$p_1 = p_0 - g\rho_1 z - 2\omega'U_1\rho_1 y,$$

$$p_2 = p_0 - g\rho_2 z - 2\omega'U_2\rho_2 y.$$

На искомой поверхности раздела давление при переходе из одной жидкости в другую должно изменяться непрерывно. Следовательно, мы получим уравнение поверхности раздела, положив $p_1 = p_2$. Для простоты вычислений выберем за начало координат ту точку поверхности

¹ Ertel H., Meteorol. Zeitschr., т. 56 (1939), стр. 109.

² Результаты приводимого ниже расчета применимы также к случаю двух адиабатически наслоенных друг на друга масс воздуха с различной потенциальной температурой.

раздела, в которой

$$p_1 = p_2 = p_0.$$

В таком случае уравнением поверхности раздела будет

$$\frac{z}{y} = \frac{2\omega'(U_2\rho_2 - U_1\rho_1)}{g(\rho_1 - \rho_2)}, \quad (75)$$

т.е. поверхность раздела представляет собой наклонную плоскость. Уравнение (75) впервые было дано Маргулесом¹. Если ввести в рассмотрение среднюю плотность

$$\rho_m = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2),$$

то уравнение (75), как легко видеть, можно привести к виду:

$$\frac{z}{y} = \frac{2\omega'}{g} \left[\frac{\rho_m}{\rho_1 - \rho_2} (U_2 - U_1) - \frac{U_1 + U_2}{2} \right]. \quad (76)$$

Если разность $\rho_1 - \rho_2$ мала по сравнению с ρ_m , как это в большинстве случаев и бывает, а разность $U_2 - U_1$ велика, то второй член в квадратных скобках будет значительно меньше первого, и поэтому его можно отбросить.

Для устойчивости необходимо, чтобы плотность ρ_1 нижней жидкости была больше плотности ρ_2 верхней жидкости. Если при этом скорость U_2 верхней жидкости больше скорости U_1 нижней жидкости и направлена на восток (западный ветер), то отношение $\frac{z}{y}$ будет, согласно равенству (76), положительным, следовательно поверхность раздела повышается к северу. В северном полушарии обычно так и происходит: более быстрый поток теплого воздуха, движущийся на восток (западный ветер), располагается над более медленным потоком холодного воздуха, движущемся на восток или на запад. Наклон поверхности раздела обычно составляет около 1/100. На рис. 302 изображено сечение потока, перпендикулярное к скорости U_2 , для случая, когда $U_1 = 0$; на рисунке показаны также изобары.

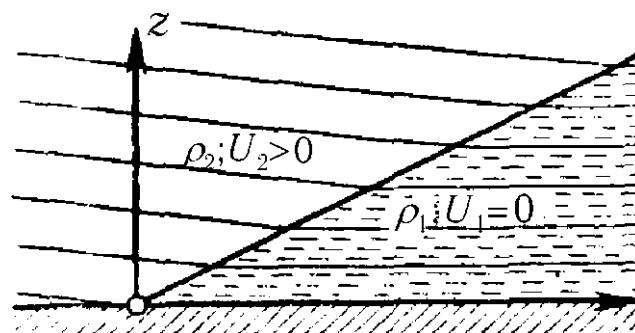


Рис. 302. Поверхность раздела между теплым и холодным потоками

¹ Margules M., Meteor. Zeitschr., Hann-Band (1906), стр. 243.

Для примера вычислим отношение $\frac{z}{y}$, приняв $\omega' = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{сек}^{-1}$ (этому значению ω' соответствует широта $\varphi = 43,5^\circ$), $U_2 = U_1 = 10 \text{ м/сек}$, $\rho_1 - \rho_2 = 0,01\rho_m$ (такой разности плотностей соответствует разность температур в 3°). Полагая $g \approx 10 \text{ м/сек}^2$, мы получим:

$$\frac{z}{y} = \frac{10^{-4}}{10} \cdot \frac{10}{0,01} = \frac{1}{100}.$$

Так как поверхность раздела понижается к югу, то где-то она пересекает поверхность земли. На линии пересечения теплый, более быстрый поток граничит с холодным, менее быстрым потоком непосредственно около поверхности земли. Здесь вследствие отклонения обоих потоков в направлении, перпендикулярном к линии пересечения, для отдельных наблюдателей возникает так называемый *фронт*, т.е. такая линия, на которой происходит внезапное изменение направления скорости ветра, а также изменение температуры. Трение воздуха о поверхность земли вносит в эту картину дополнительные изменения, на которых, однако, мы не можем здесь останавливаться.

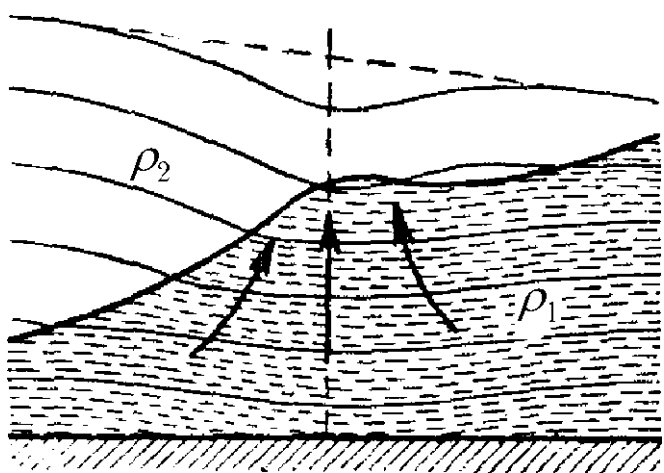


Рис. 303. Область низкого давления, вызванная вихрем в стратосфере

Пусть верхний поток воздуха в той области, где поверхность раздела проходит на большой высоте, содержит в себе циклональный вихрь, следовательно, движется не прямолинейно. Давление в центре вихря меньше, чем в его окрестности, поэтому возникает подсасывание нижнего потока вверх так, как это показано на рис. 303, представляющем собой разрез через поток в направлении, перпендикулярном к скорости. Вследствие этого в нижнем потоке, в соответствии со сказанным в § 9, также возникает вращение и притом направленное в ту же сторону, как и в верхнем потоке. Этот вихрь, после того

как верхний вихрь уносится дальше, постепенно затухает. Однако до своего затухания он успевает привести во вращение новую часть более тяжелой среды, следовательно, в кажущемся противоречии с теоремой Гельмгольца нижний вихрь перемещается вместе с верхним. Такое явление очень часто наблюдается в атмосфере, так как в верхних слоях воздуха почти всегда имеются вихри, возникшие при подъеме масс воздуха (см. ниже, пункт б); эти вихри могут сохраняться в верхнем, более теплом потоке воздуха очень долго, так как трение на поверхности раздела обоих потоков очень небольшое. Движение возникшей внизу области низкого давления определяется скоростью перемещения верхней, стратосферной области низкого давления, поэтому

для предсказания этого движения одних только наблюдений на поверхности земли, очевидно, недостаточно.

б) *Непрерывное распределение плотности.* При непрерывном распределении плотности особый интерес представляет случай, когда масса воздуха перемещается (например, вследствие местного нагревания или охлаждения) с одной высоты на другую и при этом в новом положении оказывается опять в устойчивом положении. Такое явление для облегчения его теоретического исследования удобно расчленить на два этапа. При первом этапе масса воздуха удаляется из ее первоначального положения, а окружающий воздух устремляется со всех сторон в освободившееся место, чтобы его заполнить. При втором этапе масса воздуха занимает новое положение и вытесняет окружающий воздух во все стороны. Тогда, предполагая, что все перемещения окружающих частей воздуха малы, можно определить состояние, возникшее после перехода рассматриваемой массы в новое положение, аналитическим путем¹. В том месте, где первоначально находилась масса воздуха, возникает сток, а в том месте, куда эта масса перешла, — источник. В окрестности стока возникает понижение давления, и поэтому здесь, в соответствии со сказанным в § 9, п. с), устремляющийся к стоку воздух приходит в циклональное движение. В окрестности источника, наоборот, возникает повышение давления и антициклональное движение. Совместное действие расслоения и вращения Земли приводит к тому, что переместившаяся масса воздуха приобретает, подобно упругому телу, всестороннюю устойчивость, правда, при этом жесткость массы воздуха в горизонтальном направлении значительно меньше, чем в вертикальном направлении. Вблизи центра возмущения поверхности равного изменения давления, имеющие в случае изотропного упругого тела форму шара, для массы воздуха имеют форму эллипсоида вращения (относительно вертикальной оси). Отношение вертикальной оси этого эллипсоида к горизонтальной оси равно

$$1 : \frac{1}{2\omega'} \sqrt{\frac{g}{H} \frac{(\kappa - n)}{n\kappa}}.$$

Полагая в этом отношении $H = 8\,000$ м; $\kappa = 1,4$; $n = 1,2$ и $2\omega' = 10^{-4}$, мы получим, что оно равно круглым числом 1:120. Если происходит

¹ St ü m k e H., Zeitschr. f. Geophysik, т. 16 (1940), стр. 127 (осесимметричная задача); см. также P r a n d t l L., Bericht an die Meteorologenversammlung zu Edinburgh 1936 (Paris 1939) стр. 186 (плоская задача).

подъем массы воздуха, то конечной формой, которую эта масса воздуха приобретает, является плоское слоистое облако. Если такого рода подъем масс воздуха происходит на большой площади, то поля давлений и круговые движения налагаются друг на друга, и в результате могут возникать очень мощные движения воздуха (циклон в нижних слоях и антициклон в верхних слоях). При этом энергия движущихся масс воздуха, а также их линейная скорость возрастают пропорционально квадрату возмущения давления.

Такое возрастание энергии происходит за счет энергии масс воздуха, которые поднимаются вслед за ранее поднявшимися массами, причем основную роль в этом явлении играет следующий термодинамический процесс. Воздух, насыщенный парами воды, при подъеме в область с более низким давлением адиабатически охлаждается и выделяет часть влаги в виде тумана. При этом освобождается так называемая скрытая теплота испарения, вследствие чего поднимающийся воздух охлаждается не на 1° (круглым числом) на каждые 100 м высоты, а только на $0,5\text{--}0,7^\circ$ на 100 м (в зависимости от начальной температуры). Кривая, изображающая такое изменение состояния, называется *влажной адиабатой*. Если расслоенный воздух, не принимающий участия в подъеме, по своему состоянию ближе к сухой адиабате, например, понижение температуры в нем составляет $0,8\text{--}0,9^\circ$ на каждые 100 м высоты, то восходящая масса воздуха, изменяющая свое состояние по влажной адиабате, может увеличивать свою энергию при подъеме и, следовательно, совершать определенную работу¹.

До тех пор, пока возникшая указанным способом область высокого давления остается непосредственно над областью низкого давления, обе они взаимно ослабляются. Если же вся масса воздуха, в которой возникли области высокого и низкого давлений, движется со скоростью, возрастающей по мере увеличения высоты (см. ниже, § 15, п. b), то источники, а вместе с ними и область высокого давления постепенно опережают стоки и область низкого давления. Это исключает возможность взаимного ослабления обеих областей, и теперь каждая из них полностью проявляет свое действие в районе своего движения.

Возникновение области низкого давления из первоначально покоившейся массы воздуха является не единственным из возможных способов образования таких областей. Другая возможность возникает в том случае, когда

¹Более подробные сведения о «влажно-неустойчивом» состоянии воздуха и его роли в качестве источника энергии при атмосферных явлениях можно найти во всех современных учебниках метеорологии, в частности, в особенно наглядной форме, в книге Ficker H., *Wetter und Wetterentwicklung*, изд. 2-е, Berlin 1940 (стр. 70); см. также Koschmieder H., *Dynamische Meteorologie*, изд. 2, Leipzig 1941 (стр. 94 и далее), или Raethjen P., *Einführung in der Physik der Atmosphäre*, т. I, стр. 65.

поверхность раздела двух соприкасающихся потоков воздуха, движущихся с разными скоростями, вследствие каких-либо возмущений принимает сначала волнистую форму, а затем распадается на вихри (ср. рис. 40 и 41 на стр. 75 и 76). Такой способ возникновения областей низкого давления впервые был теоретически постулирован В. Бьеркнесом; правильность его была затем подтверждена наблюдениями И. Бьеркнеса над развитием высокоширотных циклонов¹. Рассмотренный выше способ возникновения областей низкого давления является начальной стадией развития тропических циклонов. Стратосферные циклоны и антициклоны, упомянутые в пункте а), являются остатками тропических циклонов.

с) *Действие вращения Земли на движение устойчиво-расслоенного воздуха над широким горным хребтом.* В § 9, п. б) мы показали, как действует вращение Земли на поток, обтекающий горный хребет, в предположении, что плотность движущейся среды не изменяется с высотой. Расслоение движущейся среды вносит значительные изменения в полученные результаты. Для упрощения расчетов пренебрежем вертикальными ускорениями. В § 13 мы привели формулу (71) для добавочной скорости и над плоскогорьем высотой h , обусловленную расслоением атмосферы. Если ввести обозначения:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{U} \sqrt{\frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{g}{H}}, \quad A \approx \beta U h, \quad \varphi \approx -\frac{2 - \kappa}{2\kappa\beta H},$$

то формула (71) примут вид:

$$u = A e^{\frac{z}{2H}} \sin(\beta z + \varphi). \quad (77)$$

Как показывают вычисления, формула (77) остается в первом приближении верной и для того случая, когда наряду с расслоением атмосферы учитывается и вращение Земли. Однако при учете вращения Земли к добавочной скорости u присоединяется над плоскогорьем еще другая, также горизонтальная скорость v , но направленная перпендикулярно к u . Эта скорость равна

$$v = -A e^{\frac{z}{2H}} \sin(\beta z + \varphi) \cdot \frac{2\omega' x}{U}. \quad (78)$$

Следовательно, самая нижняя полуволна отклоняется вправо, следующая полуволна — влево и т. д. Максимальное отклонение самой нижней

¹Подробности по этому поводу можно найти в книге B j e r k n e s V., *Physikalische Hydrodynamik* и в большинстве современных учебников метеорологии.

полуволны круглым числом в βH раз больше, чем одинаковое, по всей высоте отклонение жидкости постоянной плотности, простирающейся до высоты H и движущейся со скоростью

$$v = -\frac{2\omega' x h}{H}.$$

Так, например, для $U = 10$ м/сек, $H = 8000$ м, $\kappa = 1,2$, мы найдем, что

$$\beta H = 11,5.$$

Картина движения, возникающего по другую сторону плоскогорья, до настоящего времени не исследована.

§ 15. Совместное действие вращения Земли и горизонтальных градиентов плотности и скорости. Общая циркуляция атмосферы. а) *Вопросы устойчивости.* В § 7 гл. I мы рассмотрели вопросы, связанные с устойчивостью расслоений атмосферы для случая покоя. Там было показано, что адиабатическое расслоение равносильно безразличному состоянию равновесия несжимаемое жидкости со всюду одинаковой плотностью (при адиабатическом расслоении каждая частица жидкости, будучи перемещена на новый уровень, не стремится вернуться на старый уровень). В конце § 13 этой главы мы ввели для газа, т. е. для сжимаемой жидкости, понятие потенциальной температуры. Для расслоенного газа, подверженного действию силы тяжести, потенциальная температура играет такую же роль, как плотность для расслоенной несжимаемой жидкости. При адиабатическом расслоении, которое, согласно сказанному, является безразличным состоянием равновесия, потенциальная температура, на основании ее определения, имеет постоянное значение. Следовательно, об устойчивости расслоения атмосферы можно судить по быстроте возрастания потенциальной температуры с высотой. Поверхности равной потенциальной температуры в идеальном случае расположены горизонтально. Однако в том случае, когда температура изменяется также в горизонтальном направлении, эти поверхности наклонены к горизонту. При сильной вертикальной устойчивости этот наклон весьма мал.

Если не учитывать вращения Земли, то частица устойчиво расслоенной атмосферы может как угодно перемещаться на поверхности равной потенциальной температуры. В действительности же вращение Земли, в соответствии со сказанным в § 9, п. с), приводит к следующему: перемещение частицы в направлении оси y на расстояние $y - y_0$

вызывает появление скорости в направлении оси x , эта скорость, как нетрудно подсчитать, равна

$$u = 2\omega'(y - y_0)$$

и вызывает, в свою очередь, появление кориолисова ускорения, параллельного оси y и направленного к оси x , т.е. к первоначальному положению частицы. Однако частица будет двигаться в направлении этого ускорения только в том случае, если этому не будет препятствовать поле давлений, связанное с существующим распределением скоростей.

Таким образом, на поверхности равной потенциальной температуры вообще имеет место также динамическая устойчивость. Наличие поля скоростей может нарушить эту устойчивость¹. Для примера рассмотрим наиболее простое движение, при котором все частицы имеют параллельные скорости $u = u(y)$, а потенциальная температура в каждой горизонтальной плоскости постоянная. Состояние такого движения будет с точки зрения устойчивости безразличным, если каждая частица, переместившаяся в направлении оси y , получит при дальнейшем перемещении под действием вращения Земли в своем новом положении такую же скорость, какую в этом положении имела частица, находившаяся здесь с самого начала. Очевидно, это будет иметь место в том случае, когда

$$u = \text{const} + 2\omega'y.$$

При таком движении угловая скорость относительно вращающегося основания, согласно определению, будет

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\omega'$$

(антициклональное направление вращения!), следовательно, абсолютная угловая скорость равна нулю. Таким образом, относительное движение, состояние которого, с точки зрения устойчивости, является безразличным, тождественно с таким относительным движением, в котором, если его рассматривать в неподвижной системе отсчета, частицы жидкости не совершают вращения. С этой точки зрения указанный выше признак безразличного состояния применим также к криволинейным установившимся относительным течениям. Если угловая скорость антициклонального движения больше $-\omega'$, то установившееся относительное течение будет неустойчивым. Для рассмотренного нами примера прямолинейного относительного течения это условие требует, чтобы

¹См., например, Ertel Н., Meteorol. Zeitschr., т. 57 (1940), стр. 397.

имело место соотношение

$$\frac{du}{dy} > 2\omega'.$$

В жидкости, находившейся до начала движения в покое относительно вращающегося основания, т. е. вращавшейся относительно неподвижной системы отсчета с угловой скоростью ω' , такое неустойчивое состояние в нормальных условиях под действием внешнего давления не может возникнуть¹.

б) *Связь между полем плотности и полем скоростей.* Рассмотрим теперь такие состояния, при которых в горизонтальном направлении изменяется также плотность. Для упрощения расчетов примем, что в каком-нибудь *одном* горизонтальном направлении скорость u и плотность ρ постоянны. В атмосфере таким направлением, которое мы совместим с осью x , обычно является направление запад-восток. В таком случае ось y будет направлена с юга на север. Вращение пусть происходит на горизонтальном основании с угловой скоростью ω' . Если скорость u положительна, т. е. направлена к востоку, то кориолисово ускорение при сделанном выборе осей будет направлено в сторону отрицательной оси y , т. е. к югу, и поле давлений будет определяться следующими уравнениями:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho, \quad (79)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -2\omega'\rho u. \quad (80)$$

Для того чтобы было возможно равновесие между силами тяжести и кориолисовыми силами, с одной стороны, и полем давлений $p = p(y, z)$, с другой стороны, необходимо, чтобы соблюдалось условие

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial z}.$$

Это условие приводит к примечательному соотношению

$$g \frac{\partial \rho}{\partial y} = 2\omega' \frac{\partial}{\partial z}(\rho u), \quad (81)$$

¹Исключение возможно только в том случае, когда верхние массы жидкости перемещаются вниз, а нижние — вверх. Однако такое явление в общем случае не может быть вызвано действием давления, но оно возможно при термодинамических процессах.

впервые установленному Маргулесом и связывающему градиент плотности в направлении юг – север с градиентом произведения ρu по высоте. Следовательно, если при перемещении от экватора к полюсу температура постепенно понижается, вследствие чего плотность в горизонтальном направлении увеличивается, то произведение плотности ρ на скорость u , направленную с запада на восток, увеличивается с высотой. Так как плотность с высотой всегда уменьшается, то только что сказанное означает, что скорость движения с запада на восток быстро возрастает с высотой.

Пусть плотность изменяется с высотой по политропическому закону

$$\frac{p}{p_3} = \left(\frac{\rho}{\rho_3} \right)^n,$$

где p_3 и ρ_3 суть давление и плотность на поверхности земли. Тогда, имея в виду соотношения

$$\frac{dp}{\rho} = -g dz, \quad \frac{p}{g\rho} = H,$$

мы найдем после простых вычислений, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = -\frac{\rho}{nH}.$$

Подставляя это значение в уравнение (81), мы получим:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u}{nH} + \frac{g}{2\omega' \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y}. \quad (82)$$

Наблюдения показывают, что скорость западного ветра действительно всегда увеличивается с высотой, а скорость восточного ветра, наоборот, уменьшается.

Если изменение плотности в направлениях z и y происходит по политропическому закону с одним и тем же показателем n , то на основании уравнения (80) мы будем иметь:

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\rho}{np} \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2\omega' \rho u}{ngH}.$$

Подставляя это значение в уравнение (82), мы получим:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

следовательно, $u = \text{const}$ для $y = \text{const}$. Зависимость u от y может быть произвольной.

с) *Общая циркуляция атмосферы на земном шаре.* Общая циркуляция атмосферы является фундаментальной проблемой метеорологии. С точки зрения гидромеханики об этой проблеме можно сказать следующее. В области экватора воздух теплый, в области полюса — холодный, следовательно, на равных высотах z над поверхностью земли плотность воздуха около экватора меньше, чем около полюсов; поэтому в области экватора возникают мощные восходящие движения воздуха, а около полюсов, наоборот, нисходящие движения. Вследствие условия неразрывности эти перемещения воздушных масс приводят к течению воздуха от экватора к полюсам в верхних слоях атмосферы и от полюсов к экватору в нижних слоях. Такое движение воздуха, регулируемое силами турбулентного трения, в старых теориях общей циркуляции атмосферы принимали за главное течение; для учета же влияния, оказываемого вращением Земли, налагали на это течение добавочное, своего рода вторичное, течение, вызванное кориолисовыми силами, связанными с главным течением, причем учитывали, что добавочное течение также влечет за собой появление кориолисовых сил¹. Подобного рода разложение действительного течения на основное и добавочное считали возможным потому, что вращение Земли происходит с очень небольшой угловой скоростью $\omega = 7 \cdot 10^{-5} \text{сек}^{-1}$, и поэтому, якобы, не может оказать значительного влияния на общую циркуляцию атмосферы. Однако такое предположение было совершенно неправильным, так как недопустимо было пользоваться секундой в качестве единицы времени при исследовании процесса, в котором массы воздуха, движущиеся на большой высоте с запада на восток, описывают путь относительно Земли, равный длине окружности экватора, в среднем в течение 10 суток (движение с юга на север происходит еще медленнее — на путь от экватора до полюса уходит около 100 суток). Таким образом, в процессе общей циркуляции атмосферы угловую скорость ω следует относить не к одной секунде, а к большей единице времени, и тогда окажется, что роль вторичного течения значительно выше (примерно в 40 раз) роли основного течения². В самом деле, основное течение почти целиком тормозится кориолисовыми силами, связанными с течением с запада на восток, и проявляет свое действие в основном только через посредство поля давлений.

¹См., например, Oberbeck A., Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss. 1888, стр. 383.

²Тем не менее теория Обербека позволяет получить некоторые правильные качественные выводы, например, о возникновении пассатов в низких широтах и западных ветров в высоких широтах.

Для получения правильной, хотя и приближенной теории общей циркуляции атмосферы следует исходить из уравнения (81). Заменяя в нем dy на $R d\varphi$ и ω' на $\omega \sin \varphi$ и интегрируя в предположении, что распределение плотности задано, мы получим:

$$u = u_0 \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{gR}{2\rho\omega \sin \varphi} \int_0^z \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} dz, \quad (83)$$

где u_0 есть постоянная интегрирования, представляющая собой скорость ветра около поверхности земли, точнее говоря, скорость ветра на внешней границе пограничного слоя¹. Уравнение (83) Дает для каждой широты φ распределение скорости западного или восточного ветра по высоте. Если бы трения не было, то поле давлений, определяемое уравнениями (79) и (80), полностью уравновешивало бы кориолсову силу $-2\omega \sin \varphi \cdot \rho u$. Однако в действительности трение всегда существует. Турбулентное касательное напряжение в плоскости соприкосновения двух текущих друг над другом слоев равно

$$\tau' = A \frac{\partial u}{\partial z},$$

где A есть коэффициент турбулентной вязкости (стр. 165). Величина $\frac{\partial \tau'}{\partial z}$ (разность значений τ' в двух слоях, лежащих друг над другом на расстоянии, равном единице) представляет собой силу, действующую на единицу объема в направлении с запада на восток. Эта сила уравновешивается кориолисовой силой, связанной с течением с юга на север со скоростью v , следовательно, мы можем написать:

$$2\rho\omega \sin \varphi \cdot v = -\frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (84)$$

откуда найдем скорость v .

Из условия неразрывности следует, что поле скоростей в направлении юг – север должно быть связано с полем вертикальных скоростей w посредством уравнения

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \cos \varphi = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho v \cos \varphi). \quad (85)$$

¹При этом интегрировании, а также в дальнейших вычислениях мы предполагаем, что вертикальные перемещения атмосферы происходят только в тропосфере, т. е. в пределах высоты $H=10-15$ км, незначительной по сравнению с радиусом Земли $R=6380$ км, поэтому вместо $R+z$ всегда можно писать R .

При интегрировании этого уравнения следует учесть, что поток массы воздуха M , переносимый ветром в слое трения, несколько увеличивает скорость w вблизи поверхности земли. Согласно сказанному в § 10, п. с), масса M равна

$$M = \frac{\tau_0}{2\omega \sin \varphi},$$

где τ_0 есть составляющая касательного напряжения приземного течения в направлении градиентного ветра (в § 10 эта составляющая была обозначена через τ_x). Упомянутая выше постоянная интегрирования u_0 , т.е. скорость градиентного ветра вблизи поверхности земли, также может быть выражена через τ_0 (§ 10, п. b). Приближенно можно принять, что

$$\tau_0 = 0,0016\rho_0 u_0^2,$$

откуда

$$u_0 = 25\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_0}}.$$

Остается определить величину τ_0 для чего следует воспользоваться теоремой о моменте количества движения (стр. 113). На широте φ поток момента количества движения через площадь $2\pi R \cos \varphi \cdot H$, имеющую своим основанием параллель радиуса $R \cos \varphi$, равен

$$2\pi R \cos \varphi \int_0^H \rho uv dz \cdot R \cos \varphi, \quad (86)$$

где H есть высота тропосферы — того слоя атмосферы, в котором происходят все движения, связанные с циркуляцией. На экваторе интеграл (86) равен нулю, так как там, как это следует из соображений симметрии, $v = 0$; на полюсах он также равен нулю, так как там $\cos \varphi = 0$. Отсюда следует, что результирующий момент вращения сил трения всех ветров между экватором и полюсом должен быть равен нулю, а это означает, что момент вращения сил трения западных ветров равен моменту вращения сил трения восточных ветров. Между экватором и широтой φ момент вращения сил трения равен

$$\int_0^\varphi \underbrace{\tau_0 \cdot 2\pi R \cos \varphi \cdot R d\varphi}_{\text{площадь}} \cdot \underbrace{R \cos \varphi}_{\text{плечо}}. \quad (87)$$

Этот момент численно должен совпадать с интегралом (86). Если скорости u и v считать положительными для западного и южного ветров,

а касательное напряжение τ_0 при западном ветре — отрицательным, то тогда перед интегралом (87) следует поставить знак минус. Приравняв друг другу интегралы (86) и (87) и дифференцируя полученное соотношение по φ , мы найдем:

$$\tau_0 = -\frac{1}{R \cos^2 \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\cos^2 \varphi \int_0^H \rho u v dz \right]. \quad (88)$$

Таким образом, мы получили все предпосылки для необходимого расчета. Однако выполнение такого расчета представляет большую трудность. Необходимо, впрочем, заметить, что можно получить довольно точное значение τ_0 , если определить u и v из уравнений (83) и (84) в предположении, что $u_0 = 0$.

До настоящего времени в качестве предварительного исследования рассматривалась более простая задача о циркуляции жидкости постоянной плотности, расположенной на поверхности вращающегося небесного тела в виде тонкого слоя и движущейся под действием массовых сил, направленных в области экватора вверх, а около полюсов — вниз. Эту задачу удалось полностью решить при некоторых допущениях относительно поля массовых сил и величины коэффициента турбулентного перемешивания¹. Из полученных результатов приведем здесь следующие:

1. В полном согласии с наблюдениями вычисления показывают, что по обе стороны от экватора в нижних слоях дуют восточные ветры, причем в северном полушарии они отклоняются вследствие трения к югу, а в южном полушарии — к северу. Зона этих ветров, называемых *пассатами*, достигает до тех широт, на которых интеграл (86) принимает свое наибольшее значение. Над пассатами дуют западные ветры, так называемые *антипассаты*, скорость которых увеличивается вместе с широтой. На экваторе имеет место почти полное затишье. В северном

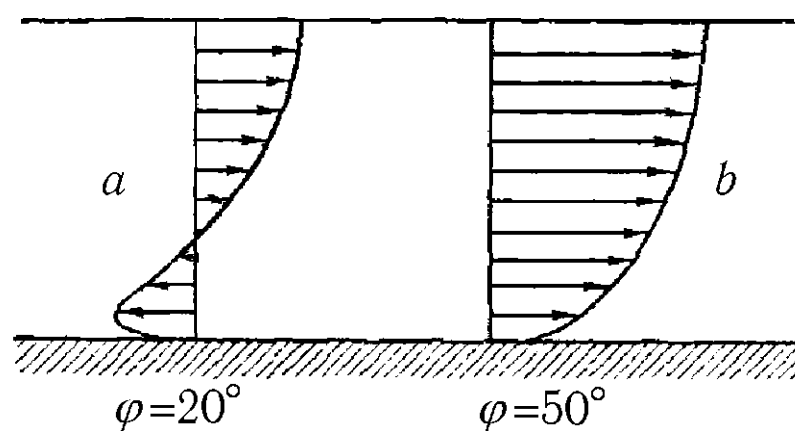


Рис. 304. Распределение скорости u по высоте: а) в зоне пассатов, б) в зоне западных ветров

¹ Kropatschek F., Диссертация, Göttingen 1935, опубликована в Beitr. z. Physik d. freien Atm., т. 22 (1935), стр. 272; см. также Prandtl L., Bericht an die meteorol. Assoziation in Edinburgh 1936, стр. 171, Paris 1939.

полушарии к северу от той широты, на которой интеграл (86) достигает максимума, западный ветер спускается до поверхности земли, получая здесь вследствие трения отклонение к северу. На рис. 304*a* изображено распределение скорости u по высоте в зоне пассатов, а на рис. 304*b* в зоне западных ветров. Напомним, что оба эти распределения построены для случая постоянной плотности. Для плотности, уменьшающейся кверху, увеличение скорости ветра с высотой происходит быстрее [см. конец пункта б) этого параграфа].

2. Обе составляющие v и w , расположенные в плоскости меридиана, приводят к такому циркуляционному движению, в котором теплые экваториальные массы воздуха поднимаются, а холодные полярные массы, остывшие вследствие излучения тепла, опускаются. Под этой циркуляцией в зоне западных ветров имеет место противоположная циркуляция, обусловленная трением о поверхность земли и простирающаяся, при положенном в основу расчета предположении о поле массовых сил, только на небольшую высоту.

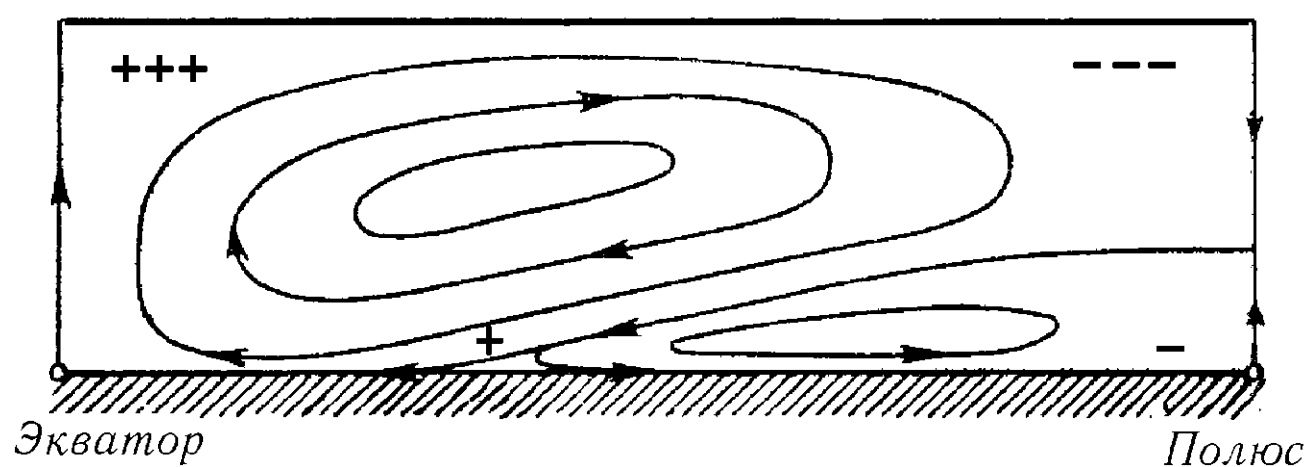


Рис. 305. Циркуляция атмосферы в плоскости меридиана (области высокого давления отмечены знаками +, а области низкого давления знаками —)

На рис. 305 изображена схема обоих циркуляционных движений в северном полушарии, причем для наглядности масштаб в вертикальном направлении взят значительно большим, чем в горизонтальном направлении.

Более точная теория должна основываться на изменении распределения плотности, вызванном обеими циркуляциями. Пассаты несут теплые массы воздуха, нагретые около поверхности земли, к экватору и с севера и с юга, вследствие чего здесь возникает особенно большое скопление теплого воздуха. Этот воздух, содержащий большое количество влаги, при подъеме изменяет свое состояние по влажной адиабате и поэтому поднимается на весьма большую высоту, где сильно охлаждается. Нижняя циркуляция в зоне западных ветров несет теплые массы воздуха из субтропических областей

к полюсам. Так как при этом теплые массы воздуха оказываются под холодными массами, то здесь движение воздуха отличается резко выраженной неустойчивостью. Именно этой неустойчивостью и объясняется регулярное возникновение циклонов. При возникновении циклонов теплый воздух отрывается от поверхности земли и поднимается вверх. Наконец, к северу от области циклонов находится третья циркуляция — циркуляция полярных ветров, в которых основную роль играет охлаждение приземного слоя воздуха вследствие излучения тепла. Эта циркуляция несет холодные массы в северном полушарии к югу, в область циклонов, где они смешиваются с южными ветрами в приземной зоне трения. Все эти явления можно учесть при вычислениях, если в области циклонов в уравнение (84) подставить несколько большее значение для коэффициента турбулентной вязкости.

3. Поле давлений в плоскости меридиана имеет следующую структуру. Вблизи поверхности земли градиент давления возникает вследствие градиентного ветра, имеющего здесь небольшую скорость u_0 , и поэтому он также мал. На границе зоны пассатов и западных ветров находится область высокого давления; около экватора и вблизи полюсов находятся области низкого давления. Значительно большие значения имеют разности давлений на высоте, где они уравниваются кориолисовыми силами, связанными с западными ветрами. Высоко над экватором расположена область особенно высокого давления, вызванная устремляющимися вверх теплыми массами воздуха; наоборот, высоко над полюсом расположена область особенно низкого давления.

В еще неопубликованной к моменту выпуска этой книги работе автор показал, что движения, происходящие в атмосфере, целесообразно разделять на кратковременные и долговременные. Если промежуток времени, который требуется определенной частице для того, чтобы пройти рассматриваемый путь, не превышает приблизительно двух часов маятниковых суток (в наших широтах это соответствует примерно трем обычным часам, вблизи экватора — соответственно больше), то обычное гидродинамическое ускорение, определяемое уравнениями (12) и (13) гл. II, составляет преобладающую часть полного ускорения. В этом случае кориолисово ускорение влияет на движение незначительно, и движение происходит в основном так, как если бы вращение Земли отсутствовало. Если же время движения определенной частицы превышает половину маятниковых суток, то гидродинамическое ускорение в общем случае мало по сравнению с кориолисовым ускорением, и поэтому в первом приближении его можно не учитывать.

Согласно такой классификации, течения, рассмотренные в § 9, п. а), 12 и 13, являются кратковременными, а течения, рассмотренные в § 10,

14 и 15 — долговременными. Теории, изложенные в § 8, 9, п. b), 9, п. c) и 11, являются точными¹.

Д. ТЕПЛООБМЕН В ТЕКУЩИХ ЖИДКОСТЯХ. ПОТОКИ, ВЫЗВАННЫЕ НАГРЕВАНИЕМ СРЕДЫ

§ 16. Предварительные замечания. Точное теоретическое исследование задач, связанных с теплообменом в текущих жидкостях и с возникновением потоков вследствие нагревания среды, представляет очень большие трудности, так как такие материальные характеристики жидкости, как плотность, вязкость, коэффициент теплопроводности и удельная теплоемкость, — все зависят от температуры. Более доступны теоретическому исследованию задачи, в которых разности температур в разных точках среды очень небольшие, — в таких задачах материальные характеристики можно рассматривать как постоянные величины. Но и в этом случае, для того чтобы довести вычисления до конца, приходится ограничиваться рассмотрением только особо простых задач. Все эти задачи можно разделить на две группы. В задачах первой группы рассматриваются такие потоки, которые вызваны внешними причинами и относительно которых предполагается, что поле скоростей в них получается таким же, как если бы разностей температур не было. Следовательно, в этих задачах не учитываются те движения потока, которые возникают вследствие разностей плотности, вызванных тепловым расширением. При решении этих задач прежде всего требуется найти только температурное поле, возникающее вследствие

¹Фундаментальные результаты в области приложения гидромеханики к вопросам динамической метеорологии получены советскими учеными. См., например: Фридман Л. А., Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости, Ленинград 1934; Кочин Н. Е., Об упрощении уравнений гидромеханики для случая общей циркуляции атмосферы, Труды главн. геоф. обсерв., вып. 4 (1935); Кочин Н. Е., Построение модели зональной циркуляции атмосферы, Труды Главн. геоф. обсерват., вып. 10 (1936); Дородницын Л. А., Извеков Б. И. и Швец М. Е., Математическая теория общей циркуляции. Метеорология и гидрология 1939, № 4; Кибель И. А., Применение к метеорологии уравнений механики бароклинной жидкости, Известия Акад. Наук СССР, Серия геогр. и геофиз. 1940, № 5; Извеков Б. И., Теоретический метод прогноза погоды И. А. Кибеля, Метеорология и гидрология 1941, № 5; Блинова Е. Н., Гидродинамическая теория волн давления и центров действия атмосферы. Доклады Акад. наук СССР, т. XXXIX (1917), № 7. Систематическое изложение динамической метеорологии с учетом работ советских ученых можно найти в книге: Белинский В. Л., Динамическая метеорология, Москва 1948. (Прим. перев.)

теплопроводности и конвекции; это температурное поле определяет и количество переносимого тепла. Потоки, являющиеся предметом исследования задач первой группы, называются *вынужденными конвективными потоками*.

В задачах второй группы рассматриваются потоки, возникающие в поле тяжести вследствие теплового расширения, и при этом предполагается, что никаких других причин, обуславливающих движение, не имеется. При решении таких задач требуется одновременно с полем скоростей найти и температурное поле. Потоки, являющиеся предметом исследования задач второй группы, называются *естественными конвективными потоками*.

Изучению теплообмена в текущих жидкостях, особенно экспериментальному, посвящены многочисленные работы. Подробный разбор всех этих работ выходит за рамки настоящей книги. Мы ограничимся лишь кратким рассмотрением наиболее существенных вопросов. Подробности можно найти в специальных курсах¹.

§ 17. Общие сведения о теплообмене. Вынужденные потоки. а) Обычно возникают задачи такого рода: жидкость или газ с температурой ϑ_1 течет вдоль стенки, которая составляет часть твердого тела, хорошо проводящего тепло, и имеет температуру ϑ_2 ; требуется определить количество тепла, передаваемого в одну секунду (или в один час) от жидкости к телу или, наоборот, от тела к жидкости. Первый случай, очевидно, будет иметь место при $\vartheta_1 > \vartheta_2$, а второй случай — при $\vartheta_1 < \vartheta_2$. Часто возникают также задачи о передаче тепла от одной текущей среды с температурой ϑ_1 к другой текущей среде, имеющей температуру ϑ_2 и отделенной от первой жидкости металлической стенкой. В этих случаях, если $\vartheta_1 > \vartheta_2$ тепло переходит от первой среды к стенке, а на другой стороне стенки оно переходит от стенки во вторую среду.

Примером естественного конвективного потока может служить движение воды в системе водяного отопления, примером вынужденного потока — движение воды в радиаторе самолета. В обоих случаях тепло переходит от горячей воды в воздух, но при этом осуществля-

¹См., например, Gröber H. und Erk S., Die Grundgesetze der Wärmeübertragung, Berlin 1933; ten Bosch M., Die Wärmeübertragung, изд. 3, Berlin. 1936 [обе эти книги имеются в переводе на русский язык: Гребер Г. и Эрк С., Основы учения о теплообмене. Москва 1936; тен Бош М., Теплопередача, Москва 1930 (*Прим. перев.*)]; см. также Handbuch der Experimentalphysik, т. 9, часть I, Leipzig 1929, стр. 268–217 (статья Reihner H., Wärmeübergang durch Mitführung); Eucken A. und Jakob M., Der Chemir-Ingenieur, т. I, часть 1 (1933), Leipzig, стр. 230–285 и 380–517.

ются разные цели: в первом случае добиваются согревания воздуха, а во втором — охлаждения воды. Металлические стенки труб водяного отопления и радиатора принимают в процессе теплопередачи такую температуру, при которой одна сторона стенок получает столько же тепла, сколько отдает другая сторона.

Передача тепла происходит, во-первых, посредством переноса (конвекции) текущей жидкостью, во-вторых, посредством теплопроводности и, в-третьих, посредством излучения. При умеренных температурах, а также в небольших по размеру пространствах излучение тепла играет очень ограниченную роль и поэтому в дальнейшем нами нигде не будет учитываться. При передаче тепла путем конвекции следует различать конвекцию посредством упорядоченного течения и конвекцию посредством турбулентного перемешивания. При конвекции путем упорядоченного, т. е. ламинарного течения тепло переносится в направлении течения, причем количество тепла, переносимого в одну секунду через единицу площади, перпендикулярной к течению, равно

$$q_1 = c_p \rho w \vartheta, \quad (89)$$

где ρ есть плотность жидкости, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, w — скорость течения и ϑ — температура жидкости. При конвекции посредством турбулентного перемешивания тепло переносится в направлении наибольшего температурного перепада; этот перепад возникает вследствие того, что части жидкости, притекающие при турбулентном перемешивании к какому-нибудь месту из более теплой области, переносят больше тепла, чем части жидкости, притекающие к тому же месту из более холодной области. Количество тепла, переносимого при конвекции посредством турбулентного перемешивания через единицу площади, равно

$$q_2 = -c_p A_q \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial n}, \quad (90)$$

где A_q есть коэффициент турбулентного переноса тепла (см. § 4 гл. III), $\bar{\vartheta}$ — среднее во времени значение температуры и dn — линейный элемент в направлении, нормальном к поверхности $\bar{\vartheta} = \text{const.}$ Количество тепла, переносимого посредством теплопроводности, равно

$$q_3 = -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial n}, \quad (91)$$

где λ есть коэффициент теплопроводности (заметим, что этот коэффициент не является безразмерным числом). Сравнивая равенства (90)

и (91), мы видим, что величина $c_p A_q$ играет при конвекции посредством турбулентного перемешивания такую же роль, как коэффициент λ при переносе посредством теплопроводности. Поэтому величину $c_p A_q$ называют *коэффициентом турбулентной теплопроводности*¹.

Подобно тому как турбулентная вязкость вдали от стенок значительно превышает молекулярную вязкость μ , так и турбулентная теплопроводность вдали от стенок во много раз больше молекулярной теплопроводности λ . Однако по мере приближения к стенкам турбулентное перемешивание уменьшается и поэтому здесь преобладающую роль играет молекулярная теплопроводность (в ламинарных потоках турбулентная теплопроводность, конечно, отсутствует). Так как коэффициент молекулярной теплопроводности жидкостей вообще очень мал, то пограничный слой представляет для теплопередачи значительное препятствие; поэтому около него наблюдается резкое изменение температуры, в то время как внутри потока температура, вследствие турбулентного перемешивания, быстро выравнивается. В связи с этим раньше часто предполагали, что вблизи стенки происходит *скачок температуры* на конечную величину $\vartheta_m - \vartheta_0$, где ϑ_m есть средняя температура жидкости, а ϑ_0 — температура стенки, и принимали, что количество тепла q , передаваемого от жидкости к стенке через единицу площади, равно

$$q = \alpha(\vartheta_m - \vartheta_0), \quad (92)$$

т.е. пропорционально скачку температуры. Коэффициент пропорциональности α называли *коэффициентом теплопередачи* и предполагали, что он зависит только от рода жидкости и, может быть, от материала стенки.

Такое предположение для случая течения в трубе со средней скоростью u_m приводило к следующему результату. Количество тепла Q , переносимого в трубе в направлении течения посредством конвекции, на основании формулы (89) равно

$$Q = \pi r^2 q_{1m} = \pi r^2 \rho u_m c_p \vartheta_m. \quad (93)$$

Условие неразрывности потока тепла выражается в рассматриваемом случае, как нетрудно видеть, уравнением:

$$\frac{dQ}{dx} + 2\pi r q = 0. \quad (94)$$

¹О связи между коэффициентом турбулентного переноса тепла A_q и коэффициентом турбулентной вязкости A_τ см. стр. 166 и 538.

Подставляя сюда вместо Q его значение (93) и принимая правильным допущение (94), мы получим:

$$\frac{d\vartheta_m}{dx} = -\frac{2\alpha(\vartheta_m - \vartheta_0)}{\rho c_p r u_m}. \quad (95)$$

Решая это дифференциальное уравнение в предположении, что $\vartheta_0 = \text{const}$, мы найдем:

$$\vartheta_m = \vartheta_0 + C e^{-\frac{2\alpha x}{\rho c_p r u_m}}, \quad (96)$$

где C есть произвольная постоянная, позволяющая удовлетворить начальному условию, т. е. начальной температуре жидкости. Из этого решения следует, что эффективная теплопередача происходит только на длине, равной

$$x_1 = \frac{\rho c_p r u_m}{\alpha}$$

(несколько большее). Ниже по течению, т. е. при значениях $x > x_1$ температура жидкости и температура стенок трубы практически становятся одинаковыми (рис. 306).

б) В действительности коэффициент теплопередачи α очень сильно зависит от состояния течения, тем не менее решение (96) сохраняет свою практическую ценность для тех случаев, когда можно считать, что во всех поперечных сечениях трубы состояние течения одинаковое.

Для вывода более точных соотношений, учитывающих зависимость коэффициента теплопередачи α от состояния течения, можно поступить следующим образом. При достаточно большой скорости течения поверхности равной температуры приблизительно параллельны стенке, поэтому поток тепла $q_2 + q_3$ можно считать почти точно перпендикулярным к стенке, а поток тепла q_1 — параллельным стенке (составляющая потока тепла $q_2 + q_3$ параллельная стенке, мала по сравнению с q_1). Следовательно, если направить ось x вдоль стенки, а ось y перпендикулярно к стенке и отвлечься от возможной кривизны стенки, то уравнение неразрывности для потока тепла будет иметь вид:

$$\frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial (q_2 + q_3)}{\partial y} = 0. \quad (97)$$

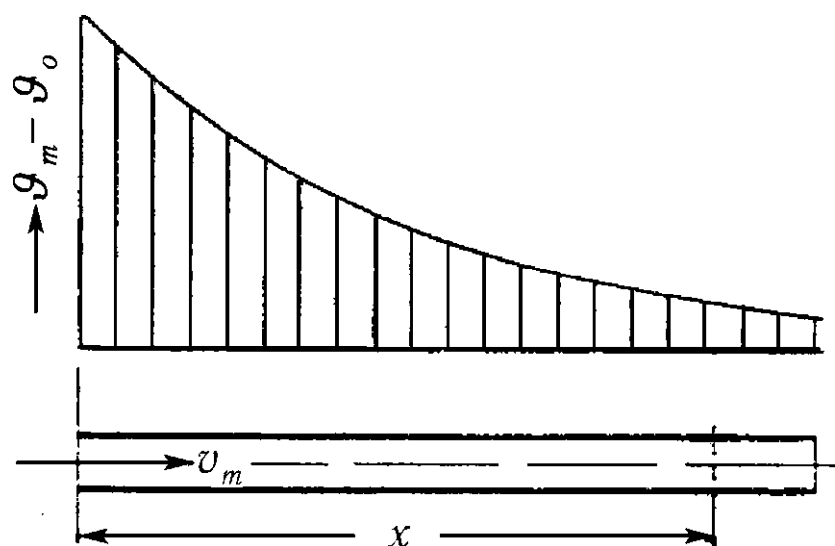


Рис. 306. Распределение разности температур $\vartheta_m - \vartheta_0$ вдоль трубы

Для дальнейшего упрощения примем, что поток в трубе движется строго параллельно стенке и что скорость u зависит только от y . Тогда для плоской задачи из уравнения (97), на основании сказанного выше, получим следующее дифференциальное уравнение распределения температуры:

$$\rho c_p u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left[(c_p A_q + \lambda) \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right] = 0. \quad (98)$$

В пространственной задаче в левой части уравнения добавляется еще один член

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[(c_p A_q + \lambda) \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right].$$

Решение уравнения (98) теоретически вполне возможно, если задано распределение температуры $\vartheta(y, z)$ в начальном поперечном сечении $x = 0$, а также температура на стенке для всех значений $x > 0$ или совпадающая с ней температура слоя жидкости, прилегающего к стенке. Однако практически решение уравнения (98) весьма затруднительно. Проще всего оно выполнимо для ламинарного течения, при котором $A_q = 0$. Для случая течения в трубе с параболическим распределением скоростей, одинаковым для всех x , и с постоянной температурой на стенке такое решение было впервые дано Гретцом¹ и затем вновь, независимо от Гретца, Нуссельтом². Пусть стенки трубы имеют температуру ϑ_0 , а жидкость притекает к начальному поперечному сечению $x = 0$ с температурой ϑ_1 . В связи с тем, что для образования параболического профиля скорости требуется разгон течения на начальном участке³ (см. стр. 227), примем, что поперечному сечению $x = 0$ предшествует отрезок трубы подходящей длины со стенками, не проводящими тепла; следовательно, на протяжении этого отрезка развивается параболический профиль скоростей, но температура жидкости ϑ_1 остается неизменной.

Начиная от сечения $x = 0$ вследствие соприкосновения с хорошо проводящей тепло стенкой образуется тепловой пограничный слой, при посредстве которого изменение температуры постепенно передается вплоть до середины трубы. Затем, после некоторого переходного участка, разность между температурами стенки и потока начина-

¹ Grätz L., Ann. d. Physik u. Chem., новая серия, т. 18 (1883), стр. 79, и т. 25 (1885), стр. 337.

² Nusselt W., VDI-Zeitsche., т. 54 (1910), стр. 1155

³ Об этом в годы написания работ Гретца и Нуссельта еще не было известно.

ет уменьшаться по показательному закону в соответствии с уравнением (96) или графиком, на рис. 306. Гретц и Нуссельт получили свои решения в виде рядов, каждый член которых, за исключением первого, представляет собой произведение некоторой функции от ϑ на показательную функцию от x . Для середины трубы, если сохранить из всех членов ряда только первые два, решение принимает вид:

$$\vartheta = \vartheta_0 + 1,477(\vartheta_1 - \vartheta_0)e^{-14,63 \frac{\lambda x}{\rho c_p \bar{u} d^2}}. \quad (99)$$

Величина

$$\frac{\rho c_p \bar{u} d}{\lambda} = \frac{\bar{u} d}{a},$$

входящая в показатель степени при e , безразмерна и обладает такой же структурой, как и число Рейнольдса. В самом деле, величина

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p} = P_e,$$

называемая *температуропроводностью*, имеет такую же размерность $L^2 T^{-1}$, как и кинематическая вязкость ν . Число P_e было введено в расчеты Гребером и названо им *числом Пекле*, по имени французского ученого, впервые использовавшего работы Фурье о теплопроводности для технических приложений. На рис. 307 изображена диаграмма распределения температуры при ламинарном течении в трубе. Для построения этой диаграммы использованы новые точные вычисления Ямагаты)¹.

С технической точки зрения весьма важен вопрос о вычислении количества тепла, передаваемого в единицу времени от стенок трубы в жидкость или наоборот. Для этого вычисления можно воспользоваться условием неразрывности потока тепла и уравнением (89). Тогда количество тепла Q , переданное на участке от $x = x_1$ до $x = x_2$ от стенок в жидкость или наоборот, получится как разность между полным потоком тепла через сечение $x = x_1$ и полным потоком тепла через сечение $x = x_2$. Если не учитывать, что c_p и ρ зависят от температуры (так было сделано и выше, при вычислении распределения температуры), то мы получим:

$$Q = Q_1 - Q_2 = c_p \rho \iint u(\vartheta_1 - \vartheta_2) dF. \quad (100)$$

¹ J a m a g a t a K., Mem. Fac. Engg. Kyushu Imp. Univ., т. 8 (1936/40), стр. 365.

С другой стороны, количество тепла Q можно вычислить непосредственно как передачу тепла через стенки посредством теплопроводности, т. е. на основании уравнения

$$q_3 = \lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial n} \right)_{\text{стенка}}. \quad (101)$$

В этом случае мы получим:

$$Q = \iint \lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial n} \right)_{\text{стенка}} dF', \quad (102)$$

где dF' есть элемент площади стенки. Это соотношение применимо для вычисления Q также и при турбулентном течении, так как непосредственно около стенки коэффициент $A_q = 0$.

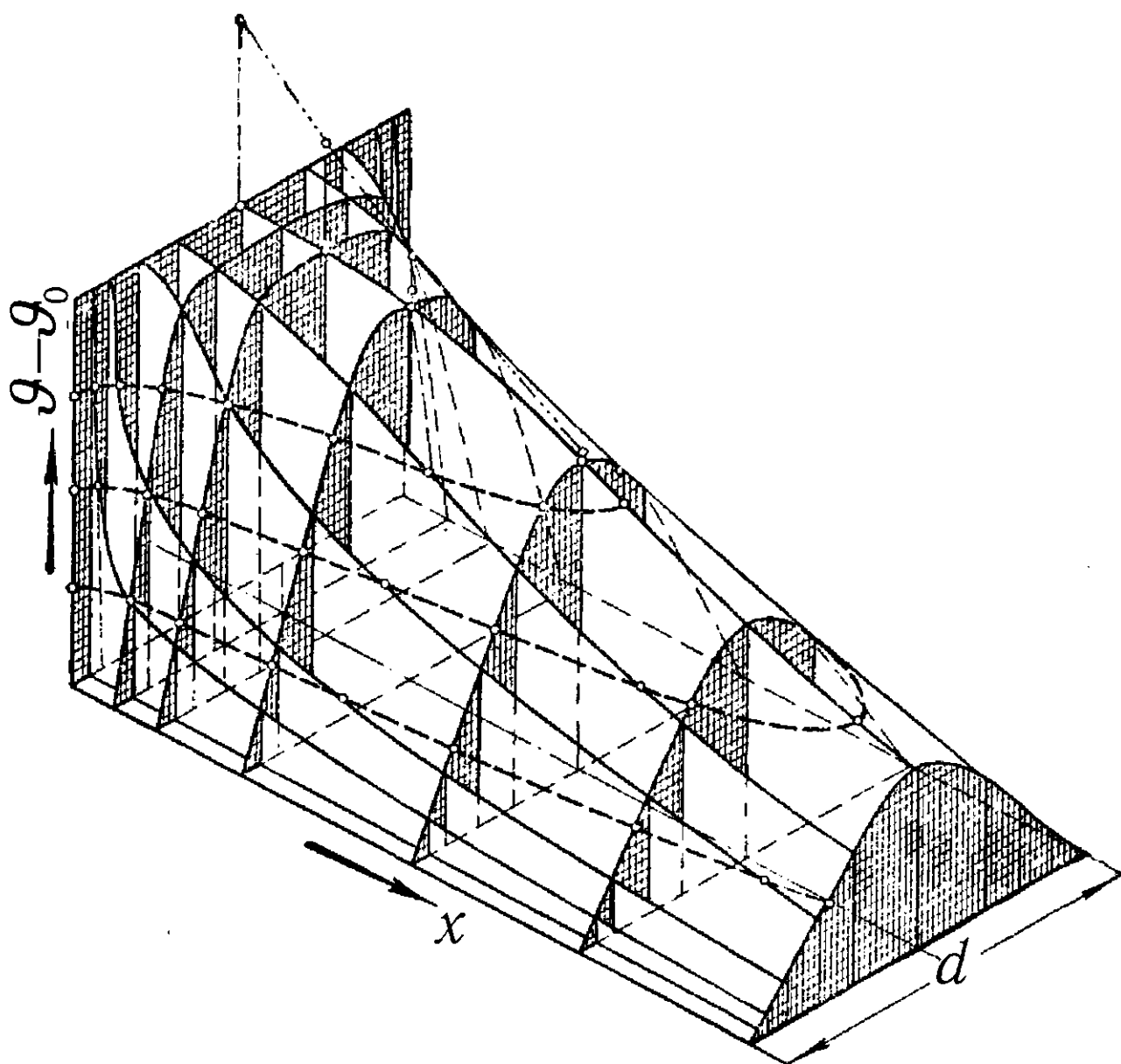


Рис. 307. Распределение температуры в трубе. Профили температур, вычерченные сплошными линиями, соответствуют значениям $\frac{ax}{\bar{u}d^2} = 0,005; 0,01; 0,02; 0,04; 0,06; 0,08$. Линия, вычерченная штрих-пунктиром, является графиком уравнения (99)

Для приближенных расчетов удобно пользоваться количеством тепла передаваемого при разности температур в 1°C в единицу времени (в секунду или в час) через единицу площади стенки. Эта величина представляет собой не что иное, как упомянутый выше коэффициент теплопередачи α . По поводу разности температур которая должна составлять 1° , необходима особая оговорка. Можно было бы брать разность между температурами в середине трубы и на стенке или между средней температурой жидкости в поперечном сечении, т. е. между

$$\bar{\vartheta} = \frac{1}{F} \int \vartheta dF$$

и температурой на стенке. Однако если учесть, что вычисление переноса тепла удобнее всего производить путем измерений в двух поперечных сечениях трубы, то целесообразнее брать не температуру $\bar{\vartheta}$, а ту температуру ϑ_m , которая при объемном расходе жидкости $V = F\bar{u}$ обеспечивает перенос тепла $c_p \rho V \vartheta_m$ по формуле (100). Подставляя в формулу (100) вместо Q это значение, мы получим

$$\vartheta_m = \frac{1}{V} \iint u \vartheta dF.$$

Эту среднюю температуру можно измерить термометром, если только позади рассматриваемого поперечного сечения при помощи какого-нибудь приспособления обеспечить перемешивание жидкости. Таким образом, для определения коэффициента теплопередачи мы имеем уравнение:

$$\alpha = \frac{q_3}{\vartheta_m - \vartheta_0}. \quad (103)$$

Для заданного температурного профиля мы можем написать:

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial n} \right)_{\text{стенка}} = \text{число} \cdot \frac{\vartheta_m - \vartheta_0}{d}.$$

Отсюда, имея в виду равенства (101) и (103), мы получим:

$$\alpha = \text{число} \cdot \frac{\lambda}{d},$$

следовательно, величина

$$\frac{\alpha d}{\lambda} = N \quad (104)$$

есть безразмерное число. Это число, обозначаемое буквой N ; называется *числом Нуссельта*. В рассмотренном выше примере число Нуссельта всюду, за исключением начального участка трубы, имеет значение $N = \text{const} = 3,06$. В начальном участке число N несколько больше.

с) В технических приложениях значительно более важное значение имеет теплообмен, связанный не с ламинарным, а с турбулентным течением. Однако в этом случае получаются значительно более сложные соотношения, так как теперь во все расчеты входит, кроме коэффициента теплопроводности, коэффициент A_q , величина которого зависит от расстояния от стенки. На стенке этот коэффициент имеет значение, равное нулю; внутри трубы он увеличивается по мере приближения к оси трубы, и притом тем сильнее, чем больше число Рейнольдса. Для большей части жидкостей, за исключением расплавленных металлов, коэффициент теплопроводности довольно мал, поэтому в них коэффициент A_q достигает значения, большего λ , уже вблизи стенок. Следовательно, при турбулентном течении возникает ядро потока, в котором вследствие сильного перемешивания разности температур сравнительно невелики; но зато в тонкой пограничной зоне градиент температуры очень велик. Отсюда ясно, что явления, происходящие в пограничной зоне играют решающую роль в обмене теплом между жидкостью и стенкой. Точное исследование этих явлений при помощи уравнения (98) связано с очень сложными вычислениями и, кроме того, с необходимостью очень точного знания изменения скорости в непосредственной близости от стенок. Можно значительно облегчить вычисления и в то же время получить достаточно хорошие результаты, если разбить весь поток на две следующие зоны: на пограничную, примыкающую к стенкам трубы, и на зону, образующую ядро потока. В пограничной зоне течение ламинарное, и поэтому здесь в процессе теплообмена играет роль только теплопроводность. В ядро потока коэффициент теплопроводности λ мал по сравнению с коэффициентом A_q , и поэтому здесь основную роль играет турбулентный перенос тепла.

Пусть на границе обеих зон скорость течения равна u' , а температура равна ϑ' . Температуру на стенке для упрощения вычислений примем равной нулю, что равносильно перемещению нулевой точки температурной шкалы и поэтому не отражается на общности рассуждений. Для дальнейшего упрощения примем, что внутрь жидкости каким-нибудь путем, например, при помощи электрического тока, подводится такое количество тепла, которое в точности компенсирует понижение разности температур $\vartheta_1 - \vartheta_0$ в направлении оси x , происходящее в соответствии с уравнением (96). Если принять, что это количество тепла

одинаково для каждого элемента объема ядра потока, то тогда поток тепла q_2 , перпендикулярный к оси трубы, будет везде пропорционален расстоянию r от оси¹, и мы можем написать:

$$q_2 = q_{20} \frac{r}{r_0}, \quad (105)$$

где $r = r_0 - y$, а r_0 и q_{20} суть значения r и q_2 на стенке. Уравнение (105) имеет такой же вид, как и уравнение распределения турбулентного касательного напряжения

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{r_0}, \quad (106)$$

где τ_0 есть значение τ на стенке. (Заметим, что, поскольку пограничная зона очень тонкая, значения r_0 , q_{20} и τ_0 можно отнести также к границе ядра потока.) Далее, мы имеем:

$$q_2 = c_p A_q \frac{d\vartheta}{dy}, \quad \tau = A_\tau \frac{du}{dy}.$$

Относительно величин A_q и A_τ предположим, что их отношение имеет постоянное значение. В таком случае из равенств (105) и (106) следует, что профили температур и скоростей в ядре потока афинны друг другу. Это обстоятельство облегчает дальнейшие вычисления². Такая афинная связь, которая в одинаковой мере справедлива и для средних значений³, может быть записана в виде уравнения:

$$\frac{c_p A_q (\bar{\vartheta} - \vartheta')}{q_{20}} = \frac{A_\tau (\bar{u} - u')}{\tau_0}.$$

¹В самом деле, обозначая через q' количество тепла, подводимого к единице объема в единицу времени, мы будем иметь: $\pi r^2 \cdot l q' = 2\pi r \cdot l q_2$.

²В случае постепенно понижающейся в направлении оси x разности температур оба профиля не афинны друг другу, однако, отклонение от афинности небольшое. При более высоких требованиях к точности вычислений это отклонение следует учитывать (см. ниже).

³Средние значения скоростей и температур должны быть составлены, конечно, одинаковым образом. Так как выше для температуры мы взяли среднее значение

$\bar{\vartheta} = \frac{1}{F} \int \vartheta dF$, то для скоростей следует взять среднее значение $\bar{u} = \frac{1}{F} \int u dF$, которое, между прочим, особенно удобное в рассматриваемой задаче, поскольку в ней $\frac{dq_1}{dx} = 0$.

Полагая $A_q = mA_\tau$, мы определим отсюда величину q_{20} на границе ядра потока, которая равна величине q_2 в пограничной зоне:

$$q_{20} = mc_p \tau_0 \frac{\bar{\vartheta} - \vartheta'}{\bar{u} - u'}. \quad (107)$$

Для ламинарной зоны мы имеем соотношения:

$$q_3 = \lambda \frac{\vartheta'}{\delta}, \quad \tau_0 = \frac{\mu u'}{\delta},$$

где δ есть толщина зоны. Исключая из этих соотношений δ , мы получим:

$$q_3 = \frac{\lambda}{\mu} \frac{\tau_0 \vartheta'}{u'}. \quad (108)$$

Приравнивая правые части равенств (107) и (108) и решая полученное уравнение относительно ϑ' , мы найдем:

$$\vartheta' = \frac{\bar{\vartheta} u'}{\sigma \bar{u} + (1 - \sigma) u'}, \quad (109)$$

где для сокращения введено обозначение

$$\frac{\lambda}{m \mu c_p} = \frac{a}{m \nu} = \sigma.$$

Подставляя значение ϑ' из равенства (109) в равенство (108), мы получим:

$$q_3 = \frac{\lambda \bar{\vartheta} \tau_0}{\mu [\sigma \bar{u} + (1 - \sigma) u']}. \quad (110)$$

Таким образом, поставленная нами задача сведена к чисто гидродинамической задаче. Согласно сказанному в § 11 гл. III, коэффициент сопротивления λ при движении в трубе, связанный с существованием касательного напряжения τ_0 , является функцией числа Рейнольдса $R = \frac{wd}{\nu}$ и определяется приближенными формулами (66), (67), (68) и (71) (стр. 223 и 224). Поскольку здесь мы применяем букву λ для обозначения коэффициента теплопроводности, будем обозначать в дальнейшем коэффициент сопротивления через ζ . Скорость w в указанных

формулах тождественна с рассматриваемой здесь средней скоростью u . Из формул на стр. 224 легко видеть, что

$$\tau_0 = \frac{1}{8} \zeta \rho \bar{u}^2.$$

Подставляя это значение τ_0 в уравнение (110) и вводя число Нуссельта

$$N = \frac{q_3 d}{\lambda \vartheta},$$

мы получим:

$$N = \frac{\zeta}{8} \frac{R}{\sigma + (1 - \sigma) \frac{u'}{u}}. \quad (111)$$

Число Рейнольдса $R = \frac{\bar{u}d}{\nu}$ связано с числом Пекле $P_e = \frac{\bar{u}d}{a}$ соотношением

$$R = \frac{a}{\nu} P_e = m \sigma P_2,$$

поэтому формулу (111) можно переписать также в следующем виде:

$$N = \frac{\zeta}{8} \frac{m P_e}{1 + \left(\frac{1}{\sigma} - 1 \right) \frac{u'}{u}}. \quad (112)$$

В этой формуле остается неизвестной величина $\frac{u'}{u}$. Эта величина есть функция от числа Рейнольдса, связанная с универсальным законом распределения скоростей¹. Для определения $\frac{u'}{u}$ надо точно знать, в каком месте совершается прерывный переход пограничной зоны в ядро потока. Эта задача представляет большие затруднения, так как в действительности переход от ламинарного к турбулентному состоянию происходит непрерывно. Поэтому гораздо проще определить значение $\frac{u'}{u}$ из уравнения (99) при помощи измерения температуры при малом значении σ .²

¹См. в связи с этим рис. 101 на стр. 177; так как u' пропорционально v_* , то, пользуясь степенной формулой (30) гл. III, мы получим, что $\frac{u'}{u}$ пропорционально $R^{-1/8}$.

²P r a n d t l L., Phys. Zeitschr., т. 11 (1910), стр. 1072.

Для газов в первом приближении можно считать, что $\sigma = 1$. В таком случае формула (111) принимает особенно простой вид:

$$N = \frac{\zeta}{8} R.$$

Пользуясь для степенной формулой (66) гл. III, мы получим приближенно:

$$N = 0,04R^{3/4}. \quad (113)$$

Измерения Нуссельта¹, выполненные для воздуха при давлении от 1 до 16 *ата*, а также для углекислоты и светильного газа, привели к аналогичной степенной формуле с показателем при R , равным 0,786. Для коэффициента при R тен-Бош² получил, пользуясь результатами измерений Нуссельта, значение 0,0255. Таким образом, для $R = 10^4$ и $R = 10^5$ получаются значения числа Нуссельта, соответственно равные 3,55 и 21,7, в то время как формула (113) дает значения 4,0 и 22,5. Если учесть, что положенное в основу нашего вывода предположение о подводе тепла приводит к более выпуклому температурному профилю и вследствие этого — к большему теплообмену вблизи стенок, то совпадение теоретического результата с экспериментом следует признать очень хорошим. Для вязких сред столь хорошего совпадения не получается.

d) Коэффициент вязкости таких жидкостей, как различные жидкие масла, очень сильно зависит от температуры; так, например, увеличение температуры смазочного масла от 20°C до 28–30° приводит к уменьшению коэффициента вязкости в два раза. Отсюда ясно, что даже при очень умеренных разностях температур весьма важно знать, какое значение коэффициента вязкости следует брать для составления числа Рейнольдса, входящего в формулы (111)–(113). Так как основную роль играет падение температуры в пограничном слое, то, очевидно, следует брать то значение коэффициента вязкости, которое соответствует средней температуре $\vartheta = \frac{1}{2}(\vartheta_0 + \vartheta')$ в этом слое. Легко видеть, что в таком случае при равных расходах и равных начальных температурах коэффициент теплопередачи будет иметь весьма различные значения, в зависимости от того, происходит ли нагревание или охлаждение жидкости при ее движении в трубе (в первом случае коэффициент теплопередачи больше, так как пограничный слой тоньше; оба профиля скоростей также различны — первый из них более выпуклый).

¹ Nusselt W., XDI-Forschungsheft, № 89 (1910).

²ten Bosch M., Wärmeübertragung, уравнение (63) на стр. 127.

В последнее время всесторонним теоретическим исследованием проблемы теплопередачи при движении жидкости в трубе занимался Рейхардт¹. В основу исследования он положил универсальный профиль скоростей при турбулентном движении, измеренный им самим в непосредственной близости от стенок. Всю область течения он разделил не на две, а на три зоны: на зону чисто ламинарного течения; на промежуточную зону, в которой действие молекулярной вязкости и теплопроводности сравнимо с действием турбулентного перемешивания, и на зону чисто турбулентного течения (ядро потока), в которой действие молекулярной вязкости и теплопроводности ничтожно мало по сравнению с действием турбулентного перемешивания. Для материальных характеристик, кроме коэффициентов вязкости и теплопроводности, а также удельной теплоемкости в каждой зоне берутся свои средние значения. Теория Рейхардта очень сложна, но зато она позволяет с единой точки зрения подойти к оценке всех до сих пор известных опытов, произведенных как при самых малых, так и при самых больших коэффициентах вязкости. Одним из важных результатов этой теории является определение числа $m = \frac{A_q}{A_\tau}$. Вычисления дали для него, в согласии с опытами, значение $m = 1,1$. Это значение числа m расходится с тем его значением, которое наблюдается при обтекании пластинки: на стр. 166 мы видели, что в этом случае одновременные измерения профиля скоростей и профиля температур дают для m значение, равное от 1,4 до 1,5. Чем объясняется такое расхождение, до сих пор не выяснено.

е) *Несколько исторических замечаний.* О. Рейнольдс, по-видимому, был первым, указавшим на роль скорости течения в процессе теплообмена в текущей жидкости. В своей небольшой статье, посвященной вопросу о поверхности нагрева в паровозных котлах², он обращает внимание на значительную путаницу в существовавших тогда способах расчета теплопередачи. Эти способы были основаны на предположении, что в процессе теплопередачи играет роль только теплопроводность, и поэтому скорость течения совершенно не учитывалась. Сравнивая охлаждающее действие ветра и неподвижного воздуха, Рейнольдс приходит к выводу, что такого рода способы расчета неверны. Он указывает, что при теплоотдаче основную роль играет то обстоятельство, что частицы жидкости подходят из внутренних частей занимаемого ею пространства к стенкам и таким путем переносят тепло. Здесь проявляется аналогия с сопротивлением при течении жидкости, когда частицы жидкости, находящиеся внутри потока и имеющие здесь определенную скорость, под-

¹ Reichardt H., ZAMM, т. 20 (1940), стр. 297

² Reynolds O., Proc. Lit. and Philos. Soc. Manchester, т. 14 (1874–1875), также в Papers on Mechanical and Physical Subjects, т. I (1900), стр. 81.

ходят к стенке и теряют около нее скорость вследствие трения. Силы трения, как показывает опыт, пропорциональны ρw^2 (множитель ρw означает количество движения отдельной частицы; второй множитель w означает количество жидкости, проходящей в единицу времени мимо стенки). Поэтому теплопередачу следует принять пропорциональной $w\vartheta$, где ϑ есть разность температур. Действие теплопроводности при теплопередаче Рейнольдс учитывает путем введения дополнительного постоянного слагаемого, а действие вязкости при сопротивлении — при помощи слагаемого, пропорционального скорости w . Таким путем Рейнольдс получает соотношения:

$$q = (a + bw)\vartheta, \quad \tau = (a' + b'w)\rho w,$$

причем принимает, что

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}.$$

Позднейшие измерения показали, что при расчете сопротивления следует брать $w^{1,75}$ вместо w^2 , а при расчете теплопередачи — от $w^{0,75}$ до $w^{0,8}$ вместо w . Нуссельт, получивший последний результат на основе очень тщательных измерений, показал при помощи соображений о размерностях, что формула для теплопередачи от газа (или жидкости) к стенке, если придать ей степенной вид, должна иметь следующую структуру:

$$q = \text{число} \cdot \frac{\lambda \vartheta}{d} \left(\frac{wd}{\nu} \right)^{n_1} \left(\frac{\nu}{a} \right)^{n_2},$$

где

$$a = \frac{\lambda}{c_p \rho} \quad \text{и} \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

Из опытов, произведенных с воздухом, выяснилось, что приблизительно $n_1 = n_2 = 0,75$, следовательно, оба эти показателя почти точно на единицу меньше показателя в формуле сопротивления Блазиуса $\left(\frac{p_1 - p_2}{l} \sim w^{1,75} \right)$.

Стремясь объяснить эту связь, автор настоящей книги, которому указанная выше небольшая, давно опубликованная статья Рейнольдса не была известна, вторично пришел к тем же выводам, что и Рейнольдс, правда математически в более точной форме¹. При этом выяснилось, что простое соотношение, полученное Рейнольдсом, применимо только в том случае, когда $\frac{\nu}{a} = 1$ [с современной точки зрения правильнее было принять

$$\frac{A_q}{A_\tau} \frac{\nu}{a} = m \frac{\nu}{a} = \frac{1}{\sigma} = 1,$$

¹Prandtl L., Phys. Zeitschr., т. 11 (1910), стр. 1072. Содержание пункта с) настоящего параграфа частично совпадает с содержанием этой статьи.

см. равенство (111)]. При ламинарных течениях с исчезающе малой разностью давлений получается при $\frac{\nu}{a} = 1$ (и только в этом случае) точная пропорциональность между полем температур и полем составляющей скорости u .¹ Теория теплопередачи, основанная на работах Рейнольдса и Прандтля, в литературе называется *импульсивной теорией теплопередачи*.

f) *Теплопередача при обтекании тела потоком*. Простейшим примером такого рода задачи является обтекание тонкой плоской пластинки ламинарным потоком, движущимся параллельно пластинке. Эта задача аналитически решена Польшаузен². Если $\frac{\nu}{a} = 1$, то, как уже было упомянуто, поле температур полностью совпадает с полем продольной составляющей скорости течения; в этом случае линии $\vartheta = \text{const}$ тождественны с линиями $u = \text{const}$, и температура в пограничном слое равна

$$\vartheta = \vartheta_0 + (\vartheta_1 - \vartheta_0) \frac{u}{u_1},$$

где ϑ_0 есть температура пластинки, ϑ_1 и u_1 — температура и скорость в невозмущенном потоке и u — скорость в пограничном слое (см. в связи с этим стр. 152–154). Количество тепла Q , которым обмениваются жидкость и пластинка на *одной* стороне последней, согласно импульсивной теории, равно

$$Q = \frac{\lambda}{\mu} \frac{W}{u_1} (\vartheta_1 - \vartheta_0), \quad (114)$$

где W есть сопротивление трения на одной стороне пластинки, равное

$$W = 0,664b\sqrt{\mu\rho u_1^3 l} \quad (115)$$

[W есть интеграл от касательных напряжений τ_0 , см. уравнения (14) и (83) гл. III; равенство (115) совпадает с формулой (14), но численный множитель в нем равен половине такого же множителя в формуле (14), так как теперь расчет ведется для одной стороны пластинки]. Равенство (114) может быть представлено в следующем безразмерном виде:

$$N = \frac{\alpha l}{\lambda} = 0,664\sqrt{R}. \quad (116)$$

¹Число $\frac{\nu}{a} = \mu \frac{c_p}{\lambda}$, встречающееся впервые в работах Нуссельта, впоследствии было названо числом Прандтля. Автор настоящей книги не желает следовать этой исторической некорректности и поэтому предпочитает пользоваться просто обозначением $\frac{\nu}{a}$.

²Pohlhausen E., ZAMM., т. I (1921), стр. 225.

Теплообмен сильнее всего на переднем ребре пластинки и по мере удаления от него уменьшается пропорционально $x^{-1/2}$ в полном соответствии с увеличением толщины пограничного слоя. Если $\frac{\nu}{a} \neq 1$, то распределение температуры уже не афинно распределению скоростей. Для $\frac{\nu}{a} > 1$ температурный пограничный слой тоньше вязкого пограничного слоя, а для $\frac{\nu}{a} < 1$, наоборот, шире. Польшаузен вычислил профили температур, а также теплообмен для некоторых практически важных значений числа $\frac{\nu}{a}$.

При числах Рейнольдса $R = \frac{u_1 l}{\nu}$ свыше 10^5 возможно турбулентное течение, при котором теплообмен значительно повышается. Соответствующие вычисления производятся на основе уравнения (110). Подробности по этому поводу можно найти в книге тен Боша.

С технической точки зрения наиболее важным случаем является теплообмен между жидкостью и круглым цилиндром, обтекаемым перпендикулярно к его оси. В практических условиях такой случай имеет место при обтекании потоком жидкости проволоки, нагреваемой электрическим током (термоанемометр), или трубы, в которой движется другая жидкость с иной температурой (отопительные трубы, радиаторы). В широкой области значений числа Рейнольдса, примерно от $R = \frac{ud}{\nu} = 30$ до 5000, теплообмен происходит главным образом в пограничном слое и поэтому подчиняется закону, выраженному уравнением (116). Опыты Гильперта¹ показали, что при обтекании цилиндра воздухом в указанной области значений числа Рейнольдса получается соотношение

$$N = \frac{ad}{\lambda} = 0,63R^{0,46}. \quad (117)$$

При меньших значениях R , примерно около 4 (накаливаемая проволока в термоанемометре), показатель при R равен около 0,38, а при еще более низких значениях R — около 0,33. При числах Рейнольдса, больших 5000 (отопительные трубы и т. п.), показатель при R в формуле (117) увеличивается до 0,8 (при $R = 4 \cdot 10^4 \div 4 \cdot 10^5$). Последнее показывает, что при больших числах Рейнольдса усиление турбулентности и прилегание потока к поверхности цилиндра на большем участке, чем при ламинарном течении, вовлекают в процесс теплообмена также заднюю половину трубы. Завихренность набегающего потока при умеренных числах Рейнольдса значительно увеличивает теплообмен. Рейер²,

¹ Hilpert R., Forschung, т. 4 (1933), стр. 215.

² Reiher H., VDI-Forschungsheft № 269 (1925).

поставив перед трубой решетку из двух рядов одинаковых трубок, возмущавших поток, обнаружил, что это увеличивает теплообмен в 1,5 раза. Весьма поучительны в этом отношении опыты Шмидта и Веннера¹ о распределении теплообмена на поверхности цилиндра².

Импульсивная теория теплопередачи, развитая с успехом для обтекания пластинки, основана на связи между теплообменом и сопротивлением трения. Между тем у всех тел, за исключением только очень узких, весьма значительную долю сопротивления составляет сопротивление давления (стр. 242), которое, очевидно, непосредственно никак не связано с теплообменом. Косвенно это сопротивление может вызвать повышение теплообмена благодаря вызываемому им увеличению завихренности потока позади его места отрыва от поверхности тела. Аналогичные соображения имеют место и для шероховатых поверхностей, которые также обладают сопротивлением давления. Теплообмен для таких поверхностей значительно выше, чем для гладких поверхностей, при условии, что их сопротивление больше, чем у гладких поверхностей, иными словами, при условии, что шероховатые поверхности не являются «гидравлически гладкими» (стр. 178). Полностью этот вопрос до сих пор не исследован.

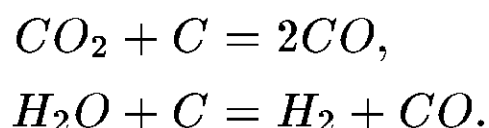
d) *Диффузия* химического вещества в растворителе (или одного газа в другом) управляется законами, очень сходными с законами теплопередачи. В предельном случае очень малой концентрации, когда объем диффундирующего вещества мал по сравнению с объемом растворителя, дифференциальное уравнение диффузии по своей структуре точно совпадает с дифференциальным уравнением теплопроводности. Роль температуры ϑ играет концентрация C , а роль температуропроводности α — коэффициент диффузии D . Если концентрацию C измерять безразмерным числом, например, процентным содержанием растворенного вещества, то размерность D будет L^2T^{-1} , т. е. такая же, как у α и ν . Для газов $D \approx \alpha$, например, при диффузии водяного пара в воздухе $D = 0,86\alpha_{\text{воз}}$. Отсюда следует, что между диффузионным процессом, происходящим в движущемся растворителе, и процессом теплопередачи в движущейся среде имеется аналогия, правда, точная только в том случае, когда $D = \alpha$. Эта аналогия может быть использована для двух целей: во-первых, для изучения химического процесса, происходящего в движущейся среде, при помощи формул, полученных для аналогичного процесса теплопередачи, а во-вторых, для решения задач теплопередачи путем наблюдения аналогичных процессов диффузии.

Примером использования этой аналогии для первой цели может служить

¹ Schmidt E. und Wenner K., Forschung, т. 12 (1941), стр. 65.

² См. также в статье Eckert E., VDI-Forschungsheft № 416 (1942).

расчет сгорания угля на колосниках котельной топки, выполненный Нуссельтом¹. Как известно, при таком сгорании воздух, увлекаемый тягой дымовой трубы или подаваемый при помощи воздухоудвки, проходит через промежутки между отдельными кусками угля, причем кислород воздуха диффундирует в раскаленный поверхностный слой кусков угля и абсорбируется углем. Образующаяся при этом двуокись углерода диффундирует из угля обратно в оставшийся азот. Вследствие тяги воздуха двуокись углерода, а также образовавшаяся теплота уносятся течением; в то же время к углю поступают новые порции кислорода. Все эти три процесса — уменьшение содержания кислорода, увеличение содержания двуокиси углерода и увеличение температуры газа — происходят в первом приближении по одному и тому же закону, по крайней мере до тех пор, пока коэффициенты диффузии O_2 в N_2 и CO_2 в N_2 равны коэффициенту температуропроводности в N_2 .² Для упрощения вычислений Нуссельт принял, что промежутки между кусками угля представляют собой прямые цилиндрические каналы с гладкими стенками. Для расчета диффузии в таких каналах Нуссельт и применил известные формулы теплопередачи в прямых трубах³. Аналогичным образом Нуссельт исследовал возгонку угля, т. е. превращение его в газ. При недостатке кислорода на раскаленной поверхности угля происходят реакции:



Следовательно, и в этом случае возникает одна диффузия, направленная внутрь угля, и вторая диффузия, направленная из угля наружу, но при этом происходит не нагревание, а охлаждение.

Аналогичные соотношения возникают и при испарении воды в движущемся воздухе. Если нагревание воды не производится, то скрытая теплота парообразования должна извлекаться из воздуха. Это происходит следующим образом: в соответствии с «психрометрической разностью» поверхность воды или пористого тела, пропитанного водой, принимает более низкую температуру воздуха к влажной поверхности передается теплота, а из последней диффундирует в воздух соответствующее количество водяного пара, кото-

¹ Nusselt W., VDI-Zeitschr., т. 60 (1916), стр. 102

² В действительности для газа с молекулярным весом M_1 диффундирующего в очень малом количестве в другой газ с молекулярным весом M_2 , отношение $\frac{a}{D}$ в

первом приближении равно $\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}$. При диффузии H_2O и CO_2 в N_2 равенство $D = a$ соблюдается очень хорошо, при диффузии H_2O и CO_2 в воздух — несколько хуже.

³ В действительности промежутки между кусками угля имеют самую неправильную форму. Движение раскаленных газов в таких неправильных промежутках (но не химические процессы) рассматривается в статье Kaye H. G., Forschung, т. 6 (1935), стр. 89 (в этой статье имеется подробная библиография).

рый уносится потоком таким же образом, как и теплота. За подробностями этого процесса отсылаем к фундаментальной работе Шмидта¹.

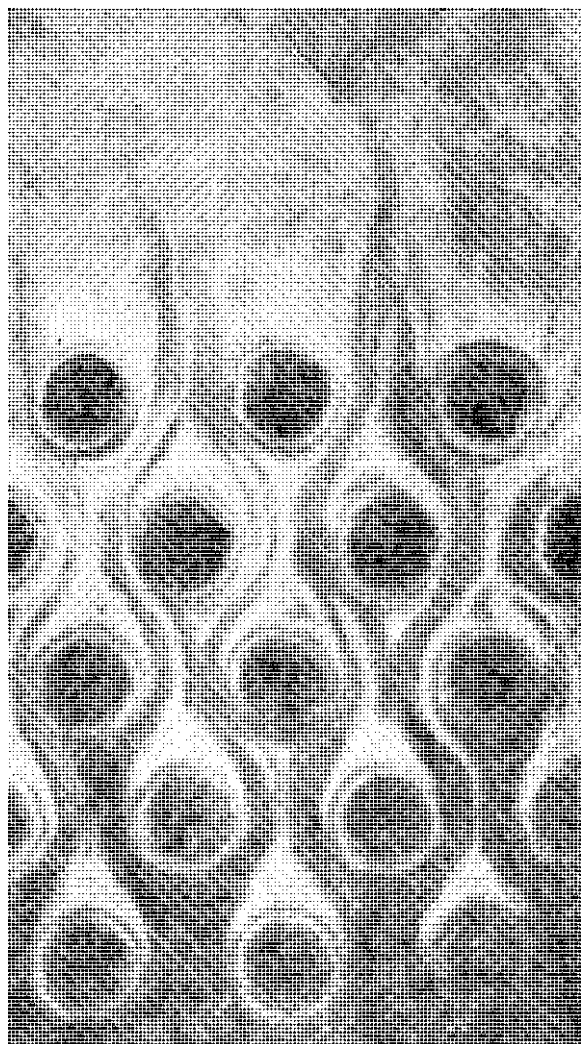


Рис. 308. Придание видимости зонам перемешивания

Впервые наблюдением диффузии для исследования процесса теплопередачи воспользовался Тома², пытавшийся таким путем найти наиболее выгоднейшее расположение труб для водотрубного парового котла. Для этой цели Тома сделал модель системы труб из промокательной бумаги, пропитанной фосфорной кислотой, и пропускал через эту модель поток воздуха, смешанного с аммиаком. Фосфорная кислота усиленно абсорбировала аммиак. После окончания опыта, в течение которого расходовалось определенное количество аммиака, определялось путем титрования количество образовавшегося в промокательной бумаге фосфорнокислого аммония и таким путем находился коэффициент теплопередачи. Тома пропитывал промокательную бумагу также соляной кислотой, пары которой, соединяясь с аммиаком, давали густой белый дым. Это позволило получить очень наглядные снимки процесса диффузии. На этих снимках зоны диффузии и перемешивания очень четко выделялись среди прозрачных зон, в которых перемешивания не происходило и которые, следовательно, не играли роли при теплопередаче. На рис. 308 изображен такой снимок, заимствованный из работы Лориша³.

В этой работе описываются также очень точные измерения с применением фосфорной кислоты. Полученные результаты хорошо совпадают с непосредственными измерениями теплопередачи.

Шмидт в упомянутой выше работе указал, что хорошее моделирование процесса теплопередачи можно производить также при помощи измерений испарения. Подробности о таком способе можно найти в работе Кеттенакера⁴.

Строгий критический разбор рассмотренных методов имеется в статье Нуссельта⁵, а также в упомянутой работе Шмидта.

Розин и Кайзер⁶ использовали аналогию между диффузией и теплопередачей для моделирования постепенного сгорания угля в движущемся воздухе

¹ Schmidt E., *Gesundh.-Ingenieur*, т. 52 (1929), стр. 525.

² Thoma H., *Hochleistungskessel*, Berlin 1921, стр. 38.

³ Lohrich W., *VDI-Forschungsheft* № 322 (1929), стр. 46.

⁴ Kettenacker L., *Techn. Mechanik und Thermodynamik*, т. 1 (1930), стр. 439.

⁵ Nusselt W., *ZAMM*, т. 10 (1930), стр. 105.

⁶ Rosin P. und Kayser H.-G., *VDI-Zeitschr.*, т. 75 (1931), стр. 849.

путем растворения в движущейся воде соли, спрессованной в куски такой же формы, как и уголь.

§ 18. Естественные конвективные потоки. а) Если единственной причиной движения жидкой среды являются разности плотности, вызванные тепловым расширением среды, то потоки, возникающие таким путем, называются, в отличие от вынужденных потоков, *естественными конвективными потоками*. Если естественные потоки возникают в пространстве, не ограниченном стенками, то они называются также *свободными конвективными потоками*. В свободных потоках поле давлений получается обычно почти в точности таким же, каким оно было бы в невозмущенной среде под действием силы тяжести¹. Поэтому для исследования таких потоков можно воспользоваться искусственным приемом, изложенным в § 12, п. а), т. е. вычесть из действительного давления весовое давление. Тогда полученная разность, т. е. кинетическое давление, на основании только что сказанного, практически будет равна нулю, и в качестве единственной причины движения останется только сила, равная разности между весом и статической подъемной силой, т. е. $g(\rho - \rho_1)$ на единицу объема, где ρ_1 есть невозмущенная плотность, которую обычно можно рассматривать как постоянную. Этой силе соответствует ускорение, равное

$$j = \frac{g(\rho - \rho_1)}{\rho}$$

и направленное вертикально вниз. При условии линеаризации задачи это ускорение можно заменить ускорением

$$j = \frac{g(\rho - \rho_1)}{\rho_1}. \quad (118)$$

В случае газа с абсолютной температурой T_1 в невозмущенной области и абсолютной температурой $T_1 + \vartheta$ — где-нибудь в возмущенной области, плотность в рассматриваемом месте возмущенной области равна

$$\rho = \rho_1 \frac{T_1}{T_1 + \vartheta},$$

¹Так получается прежде всего в тех случаях, когда весь поток в целом представляет собой как бы один пограничный слой, см. Hermann R., Phys. Zeitschr, т. 34 (1933), стр. 211.

или приближенно (после отбрасывания вторых и более высоких степеней ϑ)

$$\rho = \rho_1 \frac{T_1 - \vartheta}{T_1}.$$

Подставляя это значение ρ в равенство (118), мы получим, что результирующее ускорение поля тяжести равно

$$j = -g \frac{\vartheta}{T_1}$$

если положительным считается ускорение, направленное вниз, и

$$j = +g \frac{\vartheta}{T_1},$$

если положительным считается ускорение, направленное вверх.

В случае жидкости, для которой коэффициент теплового расширения равен β , результирующее ускорение равно

$$j = g\beta\vartheta \tag{119}$$

и направлено, согласно предыдущему, вверх, если ϑ положительно.

Рассмотрим прежде всего следующий простой пример. Пусть в вертикальной трубке диаметром d , наполненной жидкостью и открытой сверху и снизу, температура на ϑ больше, чем снаружи. Тогда, согласно формуле (119), сила, действующая на единицу объема жидкости, будет равна $g\rho\beta\vartheta$. В случае ламинарного течения эта сила уравновешивается силой трения, пропорциональной $\frac{\mu\bar{w}}{d^2}$, где $\bar{w}$ есть средняя скорость течения¹. Следовательно, мы можем написать:

$$g\rho\beta\vartheta = \text{число} \cdot \frac{\mu\bar{w}}{d^2},$$

откуда, имея в виду, что $\mu = \rho\nu$, получим среднюю скорость:

$$\bar{w} \sim \frac{g\beta\vartheta d^2}{\nu}$$

¹Согласно равенству (2) на стр. 143, эта сила пропорциональна $\frac{p_1 - p_2}{l}$. Так как расход жидкости равен $Q = \pi r \bar{w}_2$, то из равенства (4) гл. III следует, что

$$\frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{8\mu\bar{w}}{r^2} = \frac{32\mu\bar{w}}{d^2}.$$

Соответствующее число Рейнольдса равно

$$\frac{\overline{w}d}{\nu} = \text{число} \cdot \frac{g\beta\vartheta d^3}{\nu^2}.$$

Если мы теперь предположим, что движение жидкости в трубе происходит без трения, то при входе в трубу, на основании уравнения Бернулли, будет иметь место падение давления $\frac{1}{2}rw^2$. Из уравнения

$$\frac{1}{2}rw^2 = g\rho\beta\vartheta l$$

мы найдем скорость течения:

$$w = \sqrt{2g\beta\vartheta l}.$$

Составляя формально при помощи этой скорости число Рейнольдса, мы получим:

$$\frac{wd}{\nu} = \sqrt{\frac{2g\rho\vartheta d^2 l}{\nu^2}} = \sqrt{\frac{2g\beta\vartheta d^3}{\nu^2}} \cdot \frac{l}{d}.$$

Мы видим, что в обоих случаях безразмерная величина

$$\frac{g\beta\vartheta d^3}{\nu^2}$$

играет при течении существенную роль. В честь И. Грасгофа, впервые разработавшего теорию тяги в трубе, эта величина называется *числом Грасгофа* и обозначается буквой G. Таким образом

$$G = \frac{g\beta\vartheta d^3}{\nu^2}, \quad (120)$$

причем для газов следует подставить $\beta = \frac{1}{T_m}$, где T_m есть средняя абсолютная температура в рассматриваемом процессе.

б) Число Грасгофа входит во все соотношения, получающиеся для естественных потоков в тех случаях, когда задана разность температур. Исключение составляют случаи, для которых задана не разность температур, а количество тепла, отдаваемое в единицу времени. Примером таких потоков могут служить восходящие потоки воздуха около пламени свечи или других источников тепла. Аналитическое исследование подобного рода потоков возможно только на таких расстояниях

от источника тепла, на которых разности между температурой воздушного потока и окружающей средой малы по сравнению с имеющей здесь место абсолютной температурой. Для турбулентных потоков такое исследование было сделано В. Шмидтом¹. Его расчеты, основанные на результатах, полученных Толмином для расширяющейся струи², показали, что ширина турбулентного естественного потока, так же, как и ширина турбулентной струи, увеличивается пропорционально расстоянию от начала потока, т. е. в нашем случае пропорционально высоте z над источником тепла. В случае осесимметричного потока распределение температур и скоростей имеет приблизительно такой же вид, как распределение скоростей на рис. 96 (стр. 169). Скорость, получаемая вследствие статической подъемной силы нагретого воздуха, наибольшая около пламени; по мере удаления от источника тепла она уменьшается пропорционально $z^{-1/3}$, в то время как уменьшение температуры происходит пропорционально $z^{-5/3}$. Результаты, полученные Шмидтом, хорошо подтверждаются опытом.

Аналитическое исследование ламинарного естественного потока до сих пор, по-видимому, не выполнено. Приближенные расчеты автора показывают, что скорость восходящего движения не зависит от z , а температура в середине струи пропорциональна z^{-1} . Ширина струи увеличивается пропорционально $z^{1/2}$.

Эти приближенные расчеты выполняются так же, как и расчеты, сделанные на стр. 169 для расширения струи. В основе этих расчетов лежит допущение, что секундное количество Q тепла, переносимое струей и пропорциональное $c_p \rho \vartheta_1 w_1 b^2$, имеет одно и то же значение на любой высоте z над источником тепла (w_1 — скорость в середине струи, ϑ_1 — разность между температурой в середине струи и вне струи, b — ширина струи). Уравнение движения для центральной линии тока имеет вид:

$$\rho w_1 \frac{dw_1}{dz} = g\rho\beta\vartheta_1 + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}.$$

¹ Schmidt W., ZAMM, т. 21 (1941), стр. 265 и 351.

²Этот, а также другие случаи рассмотрены у Толмина [Tollmien W., Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge, ZAMM, т. 6 (1926), стр. 468]; см. также Prandtl L., Über die ausgebildete Turbulenz. Verh. d. 2 internat. Kongr. f. techn. Mech. (1926), Zürich 1927, стр. 62. Рейхардт в своей работе [VDI-Forschungsheft № 414 (1942)] ставит перед собой задачу вычислить все важнейшие факторы, определяющие турбулентное движение, из результатов опыта и выполняет ее на основе собственных измерений для случая свободной турбулентности. Полученная таким образом теория свободной турбулентности изложена в ZAMM, т. 21 (1941), стр. 257. Другая предпосылка для развития теории турбулентности предложена Прандтлем и проверена на некоторых примерах Гертлером [Görtler H., ZAMM, т. 22 (1942), стр. 241 и 244].

Если между w_1 и z имеет место степенная зависимость, то отношение отдельных членов этого уравнения друг к другу должно быть одинаковым для всех z , т. е. должна соблюдаться пропорциональность:

$$\frac{\rho w_1^2}{z} \sim g\rho\beta\vartheta_1 \sim \frac{\tau}{b}. \quad (121)$$

Полагая $\tau \sim \rho w_1^2$ для турбулентного потока и $\tau \sim \frac{\mu w_1}{b}$ для ламинарного потока, мы получим из соотношений (121) указанные выше оценки.

В дополнение к сказанному выше добавим еще следующее: в случае турбулентного потока для заданного z

$$w_1 \sim Q^{1/3} \quad \text{и} \quad \vartheta_1 \sim Q^{2/3},$$

а в случае ламинарного потока

$$w_1 \sim Q^{1/2} \quad \text{и} \quad \vartheta_1 \sim Q.$$

Плоская задача (восходящий поток воздуха от источника тепла, имеющего большое протяжение в горизонтальном направлении) отличается от рассмотренной осесимметричной пространственной задачи в отношении вычислений только тем, что количество тепла Q , переносимого в одну секунду на единицу длины, следует принять пропорциональным $c_p \rho \vartheta_1 w_1 b$, а не $c_p \rho \vartheta_1 w_1 b^2$. Поэтому показатель степенной зависимости w от z получается иным, чем в пространственной задаче. Решение Шмидта для турбулентного потока приведено выше. Для ламинарного потока опять $b \sim z$, но зато $w_1 = \text{const}$ и $\vartheta_1 \sim z^{-1}$.

с) *Естественный поток около нагретой вертикальной стенки.* Если в пространстве имеется вертикальная нагретая стенка, то около нее образуется слой нагретого воздуха, который поднимается кверху. В общем случае поток получается ламинарным, так как возникают не очень большие скорости. Если разности температур ϑ в потоке малые, то для приближенного определения зависимости скорости от высоты можно воспользоваться приемом, очень сходным с рассмотренным в предыдущем пункте. Пусть w_1 есть максимальная скорость в поперечном сечении $z = \text{const}$, ϑ_1 — положительная разность между температурой стенки и средой и δ — толщина поднимающегося кверху слоя воздуха. Уравнение движения имеет вид:

$$w \frac{\partial w}{\partial z} + v \frac{\partial w}{\partial y} = g\beta\vartheta + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (122)$$

В этом уравнении для $w = w_1$ должно быть

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{dw_1}{dz};$$

кроме того, ϑ следует положить пропорциональным ϑ_1 . Если искомая зависимость между w_1 и z должна быть степенной, то необходимо, чтобы было

$$\frac{w_1^2}{z} \sim g\beta\vartheta_1 \sim \frac{\nu w_1}{\delta^2},$$

откуда следует, что

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu z}{w_1}} \quad \text{и} \quad w_1 \sim \sqrt{g\beta\vartheta_1 z},$$

и поэтому окончательно

$$\delta \sim \sqrt[4]{\frac{\nu^2 z}{g\rho\vartheta_1}}. \quad (123)$$

Так как секундное количество тепла Q_1 , уносимого от пластинки потоком с высоты $z = h$ через единицу ширины, пропорционально $\rho c_p \vartheta_1 \cdot w_1 \delta$, то на основании соотношения (123) мы имеем:

$$Q_1 \sim \sqrt[4]{\nu^2 g \beta \vartheta_1^5 h^3}.^1$$

При выполнении этих вычислений осталось не использованным дифференциальное уравнение распределения температуры, которое для пограничного слоя имеет вид:

$$w \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}. \quad (124)$$

При точном решении задачи распределение скоростей, как нетрудно видеть из структуры уравнений, всегда зависит от распределения температуры. Поэтому оба распределения всегда зависят от отношения $\frac{\nu}{a}$.

¹Все эти формулы, если заменить в них z на H , совпадают с формулами, приводимыми в старой работе копенгагенского физика Л. Лоренца [L o r e n z L., Wied. Ann. d. Physik u. Chem., т. 13 (1881), стр. 582]. Таким образом, эта работа является первой работой о конвекции тепла и одновременно первой работой о пограничном слое. Правда, зависимости w_1 и δ от z у Лоренца не выведены.

Отсюда следует, что «числа» в полученных нами оценках для w_1 , δ и Q являются некоторыми функциями от отношения $\frac{\nu}{a}$.

Составляя при помощи приведенных выше формул безразмерные числа

$$\frac{\delta}{z}, \quad \frac{w_1 \delta}{\nu}, \quad \frac{Q_1}{\lambda \vartheta_1} = N_h,$$

мы найдем:

$$\frac{\delta}{z} \sim G_z^{-1/4}, \quad \frac{w_1 z}{\nu} \sim G_z^{1/2}, \quad N_h \sim \frac{\nu}{a} G_h^{1/4}.$$

Если теперь, вместо того чтобы рассматривать перенос тепла посредством конвекции в направлении потока, мы рассмотрим перенос тепла посредством теплопроводности в направлении, перпендикулярном к потоку, то мы должны будем положить

$$Q_1 \sim h \cdot \frac{\lambda \vartheta_1}{\delta},$$

и поэтому получим, что

$$N_h \sim \frac{h}{\delta} \sim G_h^{1/4}.$$

Отсюда ясно видно, что путем примитивных соображений приведенного рода ни в коем случае нельзя точно выяснить, в каком виде должна войти в формулы безразмерная величина $\frac{\nu}{a}$.

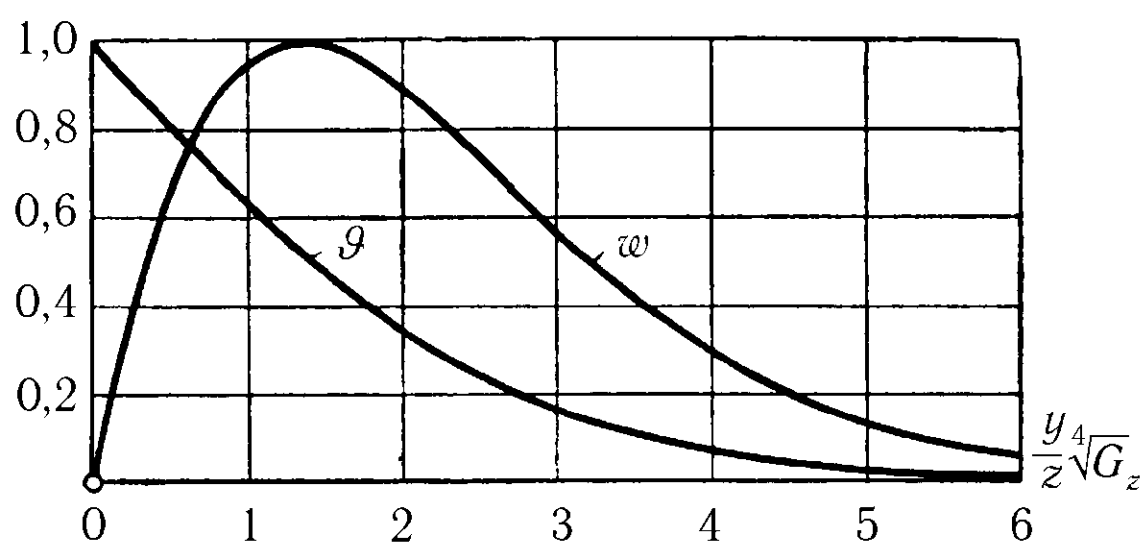


Рис. 309. Распределение температур и скоростей около нагретой вертикальной стенки

Строгое решение системы дифференциальных уравнений (122) и (124), после подстановки в них приведенных выше степенных выражений основных величин, дал Польгаузен¹ для случая $\frac{\nu}{a} = 0,733$ (воздух). Из этого решения следует, что в том месте где $\vartheta = 0,02\vartheta_1$

¹Опубликовано в статье: Schmidt E. und Beckman W., Forschung, т. 1 (1930), стр. 391.

и $w = 0,1w_1$,

$$N_h = 0,478 \sqrt[4]{G_h}, \quad \frac{w_1 z}{\nu} = 0,550 \sqrt{G_z}, \quad \frac{\delta}{z} \approx \frac{5,4}{\sqrt[4]{G_z}}.$$

Зависимость величин $\frac{\vartheta}{\vartheta_1}$ и $\frac{w}{w_1}$ от $\frac{y}{z} \sqrt[4]{G_z}$ изображена на рис. 309. Эти теоретические результаты очень хорошо подтверждены тщательными опытами Шмидта и Бекмана¹.

Герман² теоретически исследовал естественный поток, возникающий около нагретого круглого цилиндра с горизонтальной осью, в предположении, что δ мало по сравнению с диаметром цилиндра d . Это предположение позволило применить к рассматриваемому случаю приемы, применяемые для расчета пограничных слоев. Оказалось, что функции, изображенные графически на рис. 309, применимы и для потока около цилиндра; кроме того, для этого потока получаются такие же степенные зависимости, как и для потока около вертикальной пластинки, с заменой только h на d . Зависимость скорости и толщины пограничного слоя от центрального угла подчиняется, конечно, особым законам, свойственным для рассматриваемого случая (см. рис. 311). Все результаты вычислений хорошо подтверждены опытами Иодльбауэра³. Для переноса тепла теоретический расчет дает соотношение

$$N_h = 0,372 \sqrt[4]{G_d}.$$

Из опытов при значениях $G > 10^5$ для коэффициента при радикале получилось значение 0,395, т. е. лишь немного большее теоретического значения.

Конвективные потоки около вертикальной пластинки и цилиндра остаются ламинарными до весьма больших чисел Грасгофа. Герман наблюдал потоки около вертикальной пластинки высотой 1 м и цилиндра диаметром 58,5 см и нашел, что переход ламинарного течения в турбулентное происходит при числах Грасгофа, равных соответственно 10^9 и $3,5 \cdot 10^8$. Критическое число Рейнольдса $\frac{w_1 \delta}{\nu}$ в обоих случаях было равно около 500 (столь низкое значение этого числа связано с особым видом профиля скоростей).

¹ Schmidt E. und Beckman W., Forschung, т. I (1930), стр. 341.

² Hermann R., Phys. Zeitschr., т. 34 (1933), стр. 211.

³ Jodlbauer K., Диссертация, Danzig, 1933, напечатана в Forschung, т. 4 (1933), стр. 157. См. также обзорную статью Schmidt E., VDI-Zeitschrift, т. 76 (1932), стр. 1025.

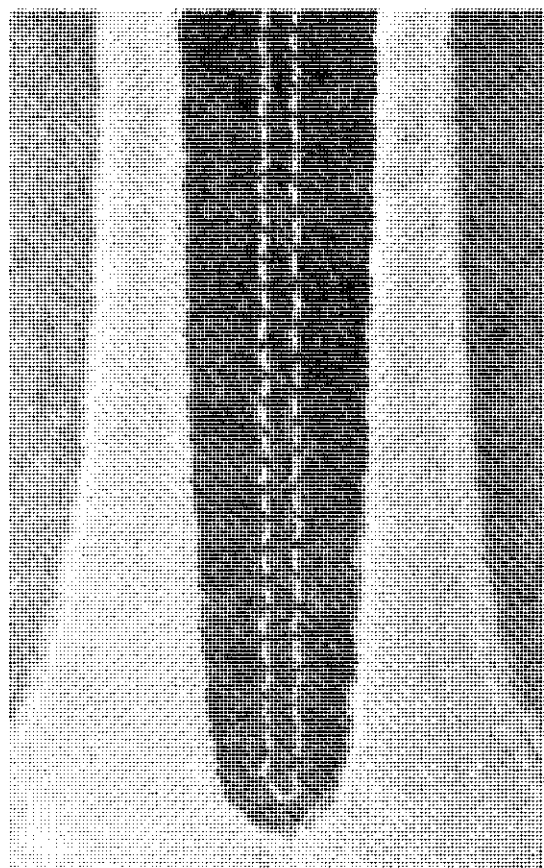


Рис. 310. Снимок конвективного потока около нагретой вертикальной пластинки



Рис. 311. Снимок конвективного потока около нагретого круглого цилиндра с горизонтальной осью

При числах Грасгофа, меньших 10^5 , толщина «пограничного слоя» не мала по сравнению с высотой пластинки или диаметром цилиндра, и выведенные выше формулы становятся тем менее точными, чем меньше число Грасгофа G . Между тем задача о теплоотдаче в воздухе горизонтально натянутой проволоки, нагреваемой электрическим током, имеет большой практический интерес. Герман⁴, обработав чужие экспериментальные результаты, составил для связи между числами N_h и $\sqrt[4]{G}$ числовую таблицу. Приводим небольшую выдержку из этой таблицы для малых разностей температур и при неподвижном воздухе:

$\sqrt[4]{G} = 0,1$	0,316	1	3,16	10	31,6	100
$N_h = 0,484$	0,612	1,10	2,18	4,47	12,4	39,3.

В движущемся воздухе теплоотдача проволоки значительно увеличивается.

Потоки около нагретых тел могут быть визуально обнаружены пу-

⁴Hermann R., VDI-Forschungsheft № 379 (1936).

тем фотосъемки по способу, разработанному Е. Шмидтом¹ и сходному со способом Теплера. Этот способ особенно пригоден для исследования плоских потоков, так как позволяет получать для таких потоков не только качественные, но и количественные выводы. Суть способа Шмидта заключается в следующем. Горячее тело проектируется на достаточно удаленный экран при помощи параллельного пучка света. Так как плотность нагретого слоя воздуха, прилежащего к телу, меньше, чем плотность невозмущенного воздуха, то лучи света, проходящие через этот слой параллельно отдающей тепло поверхности, отклоняются наружу, причем сильнее всего там, где градиент плотности имеет наибольшее значение, т. е. непосредственного около нагретого тела. Вследствие этого на снимке получается отчетливая светлая кайма. Так как теплоотдача в каждом месте тела пропорциональна градиенту плотности в этом месте, то расстояние внешнего контура полученной каймы от контура тени ненагретого тела дает численную оценку для местной теплоотдачи. Вне пограничного слоя лучи света не отклоняются, внутри же пограничного слоя они отклоняются наружу, но слабее, чем в самом близком к телу слое воздуха. Отсюда следует, что при достаточном удалении экрана от тела все пространство, занятое нагретым слоем, получается на снимке темным. На рис. 310 изображен снимок с потока около нагретой вертикальной пластинки. Контур тени холодной пластинки отмечен пунктиром. Из снимка ясно видно, что толщина пограничного слоя δ пропорциональна $z^{1/4}$, а теплоотдача пропорциональна $\frac{1}{\delta}$. На рис. 311 изображен снимок потока около нагретого круглого цилиндра с горизонтальной осью. Теплоотдача вдоль нижней половины цилиндра почти постоянная, но по мере перехода на верхнюю половину она сильно уменьшается.

д) *Конвективный поток около горизонтальной пластинки.* В этом случае условия для движения около нижней и верхней поверхностей пластинки совершенно различные. Под пластинкой возникает устойчивое расслоение. Нагретый воздух оттекает постепенно, огибая боковые края пластинки. Над пластинкой расслоение получается, наоборот, неустойчивым, движение нагретого воздуха здесь происходит очень неправильно, он то поднимается, то опускается (рис. 312). Экспериментальные исследования, выполненные до настоящего времени, дают не совсем одинаковые результаты.

Неустойчивость потока над нагретой пластинкой представляет особый интерес в связи с особой формой течения, которая при этом возни-

¹ Schmidt E., Forschung, т. 3 (1932), стр. 181.



Рис. 312. Снимок конвективного потока около нагретой горизонтальной пластинки

кает. Эта форма течения обнаруживается в особенно чистом виде при нагревании снизу тонкого слоя жидкости с не очень малым коэффициентом теплового расширения. Своеобразные явления, возникающие при таком нагревании, очень подробно изучены Бенардом¹ и его учениками, а также многочисленными другими авторами². Выяснилось, вопреки элементарным соображениям об устойчивости, изложенным на стр. 24 и 28, что при одновременном действии теплопроводности и вязкости возможно, при умеренной разности температур, такое устойчивое расслоение жидкости, в котором плотность увеличивается снизу вверх. Если разность температур становится больше некоторого определенного значения, зависящего от толщины слоя жидкости (см. ниже), то внутри жидкости возникают восходящие и нисходящие движения, которые после некоторой беспорядочной стадии приводят к разделению всего слоя жидкости на систему ячеек более или менее правильной структуры. При незначительном превышении критической разности температур получают правильно расположенные шестиугольные ячейки такого же вида, как ячейки в пчелиных сотах. В середине каждой ячейки жидкость поднимается, а вдоль контура ячейки опускается. При большей разности температур или при большей толщине слоя ячейки получают более или менее неправильными (рис. 313), но движение остается устойчивым. При еще большей разности температур правильное «ячейковое» движение заменяется беспорядочной совокупностью неустановившихся восходящих и нисходящих движений, поток становится турбулентным (рис. 314).

¹ Benard H., *Revue gén. des Sciences pures et appl.*, т. 11 (1900) стр. 1261 и 1309.

² Подробный перечень литературы имеется в статье A v s e c D., *Publ. scientif. et techn. du ministère de l'air* № 155 (1939), Paris.

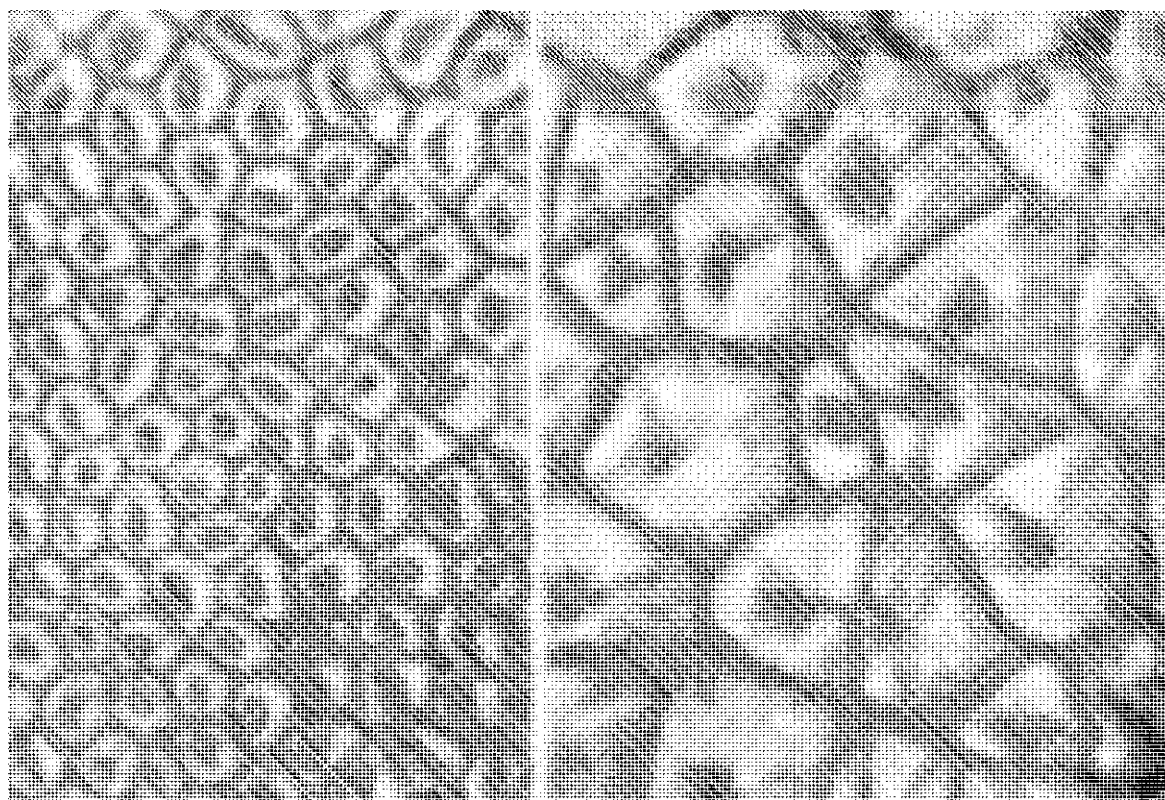


Рис. 313. Устойчивый конвективный поток ($2/5$ натуральной величины). Слева высота слоя жидкости равна 4 мм, справа 10 мм. Для придания течению видимости к жидкости были добавлены маленькие алюминиевые блестки



Рис. 314. Турбулентный конвективный поток. Высота слоя жидкости равна 20 мм

Если на вертикальное движение налагается горизонтальное движение, то в устойчивом случае образуются вместо «ячейковых» вихрей параллельные вихревые трубки, причем каждые две соседние трубки вращаются в разные стороны¹.

¹Снимки таких потоков можно найти в статьях: Malin S., Beitr. z. Phys. d. fr. Atm., т. 17 (1931), стр. 40; A v s e c D., Publ. scientif et techn. du ministère de l'air, №155 (1939); Volkovisky V., Publ. scientif et techn. du ministère de l'air, №151 (1939).

Теория такого рода движений впервые была дана Релеем¹, правда, в упрощенной форме. Тем не менее Релей получил вполне правильный результат, согласно которому сохранение устойчивости зависит от величины

$$\Lambda = \frac{g\beta(\vartheta_1 - \vartheta_2)h^3}{a\nu},$$

которую в настоящее время можно представить также в следующем виде

$$\Lambda = G \cdot \frac{\nu}{a}.$$

Критическое значение этой величины впервые было вычислено Джеффри². Правильность вычислений Джеффри была затем подтверждена работами Лоу³ и Авсека⁴. Для твердых стенок, хорошо проводящих тепло и снизу и сверху, это критическое значение равно приблизительно 1705. Шмидт и Сондерс⁵, производившие опыты с водой при средней температуре от 18 до 20°, откладывали измеренные значения $\vartheta_1 - \vartheta_2$ в функции от мощности электрического тока, нагревавшего стенку, и обнаружили, что полученные кривые имеют один четко выраженный перелом при Λ , равном от 1700 до 1800,⁶ и второй перелом приблизительно при $\Lambda = 47\,000$ (переход к турбулентному потоку). Далее они нашли, что при значениях Λ от 47 000 до 150 000 (наибольшее значение Λ , которого они достигли в своих опытах), теплоотдача определяется формулой

$$N = 0,113 \sqrt[3]{G \cdot \frac{\nu}{a}}.$$

Указанный выше теоретический результат можно получить следующим путем. Рассмотрим для простоты плоское течение в плоскости x, z . Составляющие скорости обозначим через $u(x, z)$ и $w(x, z)$. Распределение темпера-

¹Lord Rayleigh, Phil. Mag. (6), т. 32 (1916), стр. 529, также в Papers, т. VI, стр. 432.

²Jeffreys H., Proc. Roy. Soc. (A), т. 118 (1928), стр. 195.

³Low A. R., Proc. Roy. Soc (A), т. 125 (1929), стр. 180.

⁴Подробный перечень литературы имеется в статье Avsec D., Publ. scientif. et. techn. du ministère de l'air № 155 (1939), Paris.

⁵Schmidt R. J. and Sounders O. A., Proc. Roy. Soc (A), т. 165 (1938), стр. 216.

⁶Эти числа получены для случая, когда поверхность жидкости была абсолютно чистая и поэтому под действием малых сил трения она не могла перемещаться. Для случая абсолютно чистой и поэтому легко подвижной свободной поверхности Лоу получил критическое значение $\Lambda_{кр} = 1107$ (Low A. R., Proc. Roy. Soc (A), т. 125 (1929), стр. 180., а также в Verh. d. 3 intern Mechanikkongress, Stockholm 1930, т. 1, стр. 109).

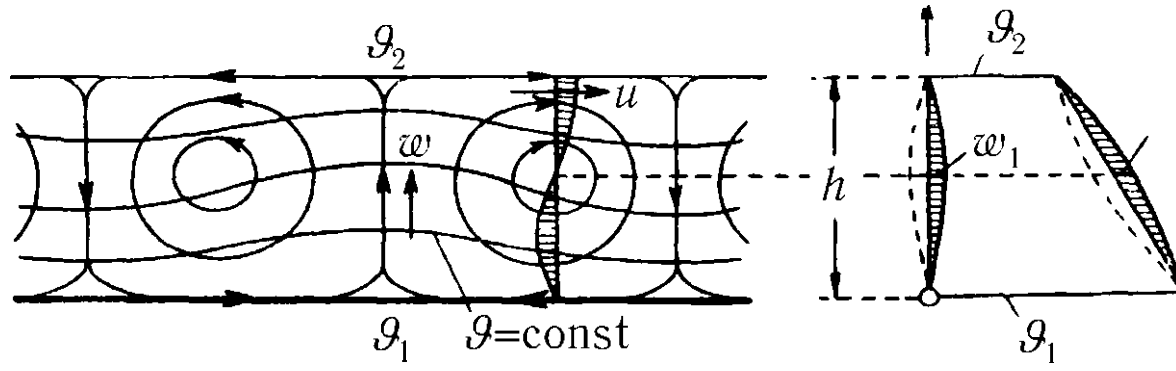


Рис. 315. Конвективный поток

туры представим в виде уравнения

$$\vartheta = \vartheta_1 - (\vartheta_1 - \vartheta_2) \frac{z}{h} + \vartheta'(x, z)$$

обозначения — см. на рис. 315¹, а распределение плотности — в виде уравнения

$$\rho = \rho_0(1 - \beta\vartheta).$$

Предполагая, что движение ползущее, т. е. пренебрегая силами инерции, мы будем иметь для решения задачи следующие уравнения:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (125)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \quad (126)$$

$$u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + w \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) \quad (127)$$

и, кроме того, уравнение неразрывности

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0,$$

в котором плотность ρ можно считать приближенно постоянной. Если требуется определить условия возникновения критического состояния, то величины u , w и ϑ' следует принять очень малыми. В таком случае после отбрасывания величин второго порядка малости в левой части уравнения (127)

остается только член $\frac{w(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{h}$.

Таким образом, задача сводится к решению системы из четырех линеаризованных дифференциальных уравнений. Исключая из четырех неизвестных u , w , p и ϑ' три, мы получим одно дифференциальное уравнение, решение

¹Этот рисунок соответствует не плоскому течению, а кольцевому вихрю; при $z = 0$ мы имеем неподвижное дно, а при $z = h$ свободную поверхность.

которого сводится к задаче о собственных значениях. Вместо того чтобы приводить такое решение, мы ограничимся здесь только приближенной оценкой, вполне достаточной для наших целей. Если протяжение каждого отдельного вихря вдоль оси x такого же порядка, как и протяжение вдоль оси z , то нам достаточно выяснить зависимость искомых величин только от z . Давление p есть величина, зависящая от других искомых величин; следовательно, если будут известны эти величины, то можно будет определить и p . Поэтому при нашей приближенной оценке давление p можно вообще не рассматривать.

Величина $-g\rho$ в правой части уравнения равна

$$-g\rho = -g\rho_0 \left[1 - \beta\vartheta_1 + \beta(\vartheta_1 - \vartheta_2) \frac{z}{h} \right] + g\rho_0\beta\vartheta'.$$

Первое слагаемое влияет только на давление в состоянии покоя, для движения же существенно только второе слагаемое; поэтому первое слагаемое можно отбросить. Порядок величины производных $\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ и $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}$ будет соответственно $\frac{w_1}{h^2}$ и $\frac{\vartheta'_1}{h^2}$. Следовательно, имея в виду, что $\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$, мы получим из уравнении (126) и (127) следующее соотношение:

$$g\beta\vartheta'_1 \sim \frac{\nu w_1}{h^2}$$

и

$$(\vartheta_1 - \vartheta_2) \frac{w_1}{h} \sim \frac{a\vartheta'_1}{h^2}.$$

Так как произведение левых частей должно быть пропорционально произведению правых частей, то мы имеем:

$$\frac{g\beta(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{h} \sim \frac{\nu a}{h^4},$$

откуда следует, что

$$\frac{g\beta(\vartheta_1 - \vartheta_2)h^3}{\nu a} G \cdot \frac{\nu}{a} = \text{безразмерное число.}^1$$

Аналогия рассмотренных явлений с процессом образования некоторых видов облаков очевидна; поэтому теория этих явлений часто используется в метеорологической литературе². В условиях атмосферы

¹Заметим, что безразмерная величина $G \cdot \frac{\nu}{a}$ входит в вычисления во всех случаях, когда рассматриваются ползущие течения.

²См., например, Malin S., Beitr. z. Phys. d. fr. Atm., т. 17 (1931), стр. 40, или Low A. R., Verh. d. 3 Intern. Mechanikkongress Stockholm 1930, т. I, стр. 109.

вместо нагреваемого горизонтального дна мы имеем нижнее основание устойчивого расслоения воздуха, а вместо свободной поверхности — верхнее основание этого слоя. Для возникновения «ячейковой» циркуляции необходимо, чтобы происходило нагревание или охлаждение какого-нибудь отдельного слоя и, как следствие, нарушение равновесия. Так, например, сильное охлаждение верхней поверхности устойчивого слоя в ночное время (вследствие излучения тепла) приводит к образованию характерных слоистых облаков, которые легко наблюдать при свете Луны. Впрочем, необходимо заметить, что некоторые кратковременные явления очень сходного вида, например, небольшие кучевые облака (барашки), могут возникать также вследствие обычной неустойчивости расслоения воздуха [такая неустойчивость получается в том случае, когда влажная масса воздуха, расположенная под слоем сухого воздуха, поднимается; при этом влажный воздух расширяется по влажной адиабате и образует облако, а сухой слой расширяется по сухой адиабате и поэтому охлаждается сильнее влажного¹].

Структура солнечной поверхности, явственно обнаруживаемая на фотоснимках и называемая грануляцией, представляет собой, по Зидентопфу², не что иное, как конвективный поток, вызванный ионизацией тонкого слоя атмосферы Солнца вблизи его поверхности ионами водорода. Движение в этом потоке турбулентное, и отдельные элементы его очень недолговечны.

е) *Горный и долинный ветры в расслоенном воздухе.* Склон горы можно рассматривать как пластинку, наклоненную под некоторым углом α к горизонту. При нагревании склона днем и охлаждении его ночью около него создается температурное поле, вследствие чего возникают конвективные потоки. Если бы в данном случае отсутствовало расслоение воздуха, то закономерности для таких потоков можно было бы получить из закономерностей для потока около вертикальной пластинки путем замены в них g на $g \sin \alpha$. При этом необходимо учитывать следующее обстоятельство. В случае, если пластинка имеет температуру, более высокую, чем окружающая среда, то возмущение температурного поля над пластинкой влечет за собой появление статической неустойчивости, что создает благоприятные условия для возникновения турбулентности. Наоборот, под нагретой пластинкой или над охлажден-

¹Обратное явление, т. е. опускание влажного слоя воздуха, расположенного над слоем, приводит к образованию так называемых мамматус-облаков.

²Siedentopf H., Vierteljahrsschrift der Astronom. Gesellschaft, т. 76 (1941), стр. 185.

ной пластинкой возникает статическая устойчивость, затрудняющая возникновение турбулентности.

Совсем иные соотношения получаются при расслоении массы воздуха. В этом случае, если потенциальная температура возрастает с высотой¹, с самого начала создается устойчивое расположение всей массы воздуха. В таком расслоении нагретая частица воздуха может подняться только на ту высоту, на которой она будет окружена другими частицами воздуха с той же температурой. Однако если теплоотдача от нагреваемой поверхности будет продолжаться, то нагретые частицы будут подниматься выше.

Проще всего для исследования случай ламинарного течения (рис. 316). Результаты вычислений показывают, что для плоскости, наклоненной под углом α к горизонту и имеющей везде одинаковую температуру, большую температуры воздуха, движение каждой частицы воздуха приблизительно равномерное, следовательно, инерция не влияет на движение².

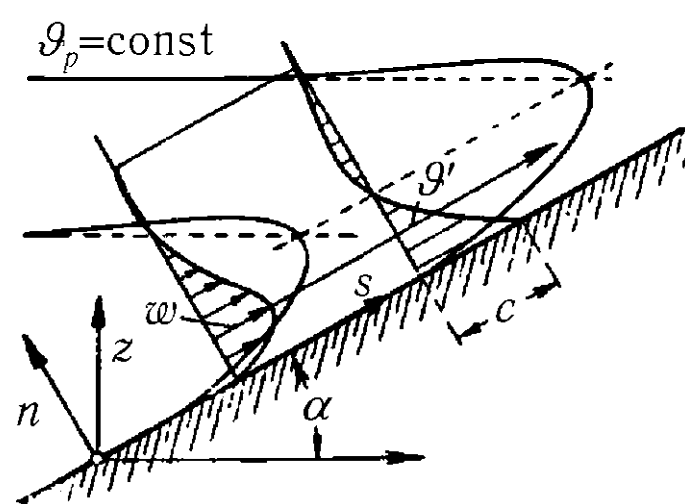


Рис. 316. Склоновый ветер

Для выполнения вычислений введем сначала систему координат x, z , от которой затем перейдем в координатам s, n (рис. 316). Потенциальная температура воздуха с учетом температурного возмущения ϑ' вследствие теплопроводности от нагретой поверхности равна

$$\vartheta_p = A + Bz + \vartheta'(n). \quad (128)$$

Скорость w в направлении x примем зависящей только от n . Тогда от уравнений Навье – Стокса останется только одно уравнение, которое после исключения весового давления примет вид:

$$0 = g \sin \alpha \cdot \beta \vartheta' + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial n^2}. \quad (129)$$

Уравнением переноса тепла, как нетрудно видеть, будет:

$$w \frac{\partial \vartheta_p}{\partial s} = a \left(\frac{\partial^2 \vartheta_p}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_p}{\partial s^2} \right).$$

¹См. замечания в конце § 13 настоящей главы.

²За исключением нижнего края нагретой поверхности, где происходит разгон потока.

Подставляя сюда значение ϑ_p из уравнения (128) и имея в виду, что $z = s \sin \alpha + n \cos \alpha$, мы получим:

$$wB \sin \alpha = a \frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial n^2}. \quad (130)$$

Дважды дифференцируя это уравнение и подставляя значение $\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}$ в уравнение (129), мы будем иметь:

$$0 = g \sin \alpha \cdot \beta \vartheta' + \frac{\nu a}{B \sin \alpha} \cdot \frac{\partial^4 \vartheta'}{\partial n^4}. \quad (131)$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$\vartheta' = C \cdot e^{-\frac{n}{l}} \cos \frac{n}{l}, \quad (132)$$

где

$$l = \sqrt[4]{\frac{4\nu a}{g\rho B \sin^2 \alpha}}, \quad (133)$$

а C есть возмущение температуры около поверхности. Наконец, после небольших вычислений мы найдем из уравнения (129), что

$$w = C \sqrt{\frac{g\rho\alpha}{\nu B}} e^{-\frac{n}{l}} \sin \frac{n}{l}. \quad (134)$$

Примечательно, что скорость w не зависит от угла наклона α поверхности. Это объясняется следующим образом: хотя статическая подъемная сила, связанная с неодинаковой плотностью воздуха вследствие нагревания, уменьшается при уменьшении угла наклона α , но одновременно в равной мере уменьшается и торможение движения через расслоенную массу воздуха в направлении s . Уменьшение торможения выражается в том, что увеличивается величина l . [Согласно расчету пограничного слоя, изложенному на стр. 153, удвоению «незаторможенного пробега» s_1 отвечает увеличение толщины пограничного слоя l в $\sqrt{2}$ раз, в соответствии с формулой (133)].

Графики уравнений (132) и (134) изображены на рис. 316. На первый взгляд кажется странным, что температурные возмущения могут принимать также отрицательные значения. Однако нетрудно убедиться в закономерности такого явления. В самом деле, нагретые части воздуха при своем подъеме приводят в движение вследствие трения и такие слои воздуха, которые сами не нагреты; эти слои воздуха, поднявшись на большую высоту, приобретают там температуру, меньшую температуры окружающих слоев воздуха, не участвовавших в движении. На рис. 316 приведены две кривые $\vartheta_p = \text{const}$,

изображающие деформированные потенциальные изотермы для случая сильного нагревания, делающего вполне вероятным возникновение турбулентности.

Выведенные выше формулы можно сделать более наглядными, если подставить в них $\beta = \frac{1}{T}$ и ввести такую высоту H , чтобы соблюдалось равенство

$$B = \frac{T}{H}.$$

Тогда, например, формула (134) примет вид

$$w = \frac{C}{T} \sqrt{gH \cdot \frac{a}{\nu}} \cdot e^{-\frac{n}{l}} \sin \frac{n}{l}.$$

Для случая турбулентного движения ограничимся оценкой. Вместо уравнения (129) будем исходить из следующего соотношения: примем, что касательное напряжение на шероховатой поверхности, которое приближенно равно

$$\tau = \zeta \rho w_1^2, \quad (135)$$

где w_1 есть максимальная скорость, пропорционально статической подъемной силе, вызванной нагреванием, всего нагретого слоя толщиной l . Следовательно, будем считать, что

$$\zeta \rho w_1^2 \sim g \rho \sin \alpha \cdot \beta C \cdot l. \quad (136)$$

К этому соотношению надо присоединить еще уравнение (130), предварительно заменив в нем температуропроводность величиной $\frac{A}{\rho}$, где A есть коэффициент турбулентного перемешивания. Подставляя в равенство (135) $\tau = A \frac{\partial w}{\partial n}$ и имея в виду, что

$$\frac{\partial w}{\partial n} \sim \frac{w_1}{l},$$

мы получим из равенства (135):

$$A \sim \zeta \rho w_1 l,$$

следовательно,

$$a \sim \zeta w_1 l.$$

Подставляя это значение a в соотношение (130), мы получим:

$$w_1 B \sin \alpha \sim \zeta w_1 l \cdot \frac{C}{l^2} = \zeta w_1 \frac{C}{l}, \quad (137)$$

откуда

$$l \sim \frac{\zeta C}{B \sin \alpha}. \quad (138)$$

Наконец, подставляя это значение l в соотношение (136), мы найдем скорость w_1 :

$$w_1 \sim C \sqrt{\frac{\zeta g \beta}{B}} = \frac{C}{T} \sqrt{\zeta g H}. \quad (139)$$

Следовательно, скорость по-прежнему не зависит от угла α . Необходимо, однако, заметить, что коэффициент трения ζ зависит не только от отношения $\frac{l}{k}$ (см. стр. 178), а также — особенно при небольших углах наклона — от степени турбулентности, определяемой числом Ричардсона (см. стр. 505). Вследствие этого, а также вследствие возрастания l уменьшение угла наклона α влечет за собой постепенный переход к закономерностям, имеющим место над горизонтальной нагретой плоскостью и рассмотренным выше, в пункте d).

Возникновение воздушных потоков на склонах гор (восходящих при нагревании и нисходящих при охлаждении) равносильно тому, что для окружающего воздуха около подножия горы и на ее гребне образуются стоки и источники. Так, например, восходящий поток нагретого воздуха в длинной долине между высокими горами, наполненной устойчиво расслоенной массой воздуха, равносильно появлению стока в нижнем конце долины. В этот сток устремляется равнинный воздух и создается так называемый *долинный ветер*, который вследствие устойчивого характера расслоения воздуха в долине может двигаться в основном только горизонтально. Так как сток расположен в самых низких слоях, то следует ожидать, что скорость долинного ветра достигает наибольших значений именно в нижних слоях. При охлаждении горных склонов вследствие ночного излучения холодные массы воздуха скапливаются на дне долины и текут по ней, подобно реке, вниз — возникает так называемый *горный ветер*. Верхнее течение воздуха, возникающее вследствие наличия стока в верхнем конце долины, мало заметно, так как оно распространяется в верхних слоях беспрепятственно, не встречая суживающихся стенок.

Исследования склоновых ветров с количественной точки зрения, например, в отношении их мощности вдоль направления n (рис. 316) или степени их турбулентности, насколько известно автору, до сих пор не производились.

Предметный указатель

- Автожир 320
Адиабата влажная 512
Анемометр 339
Антипассаты 521
Антициклон 512, 513
Аппарат пескоструйный 439
Атмосфера техническая 19
— физическая 19, 36
Аэродинамика 55
- Бар 36
Барометр 19, 35
Бернулли уравнение 58, 91
— — во вращающейся системе от-
счета 459
— — обобщенное 60
Биплан 292, 300
Блазиуса закон сопротивления
223, 265
Бойля–Мариотта закон 19
Борда насадок 117
Бьеркнеса теорема 492
- Вал воды 136, 221
Вентилятор 324
Вентури трубка 233
Вертушка гидрометрическая 339
Вес объемный 22
— удельный 22
Ветер высотный 473
— горный 564
— градиентный 477
— долинный 564
Ветряк 315, 317
- Веялка 439
Винт геликоптерный 119, 308, 309
— гребной 302
— с изменяемым шагом 312
Вихрь 75, 103, 112, 186
— водяной 103
— начальный 112
— несущий 284
— образование его 74
— пара вихрей 110
Водоподъемник воздушный 436
Водослив через плотину 235
Воздуходувка 324, 331
Волна взрывная 368
— головная 354, 397
— давления 352
— разрежения 355
— уплотнения 354
Волнистость 180
Волны в атмосфере 134, 502
— внутренние 495, 499
— гравитационные 130, 134
— капиллярные 130, 134
— корабельные 133, 243
— на поверхности раздела 134,
490, 491
— на свободной поверхности жид-
кости 128
— над краем плоскогорья 503
— стоячие 495
— ячейковые 495, 497, 500

- Вращение Земли, его влияние на
 движения в атмосфере и морях
 463
— цапфы 216
Высота геометрическая 59
— однородной атмосферы 27
— пьезометрическая 59
— скоростная 59
— трения 366
Вязкость 10, 142, 143
— кинематическая 149
— масел 218
— турбулентная 165
- Гагена–Пуазейля закон 144
Газы, их свойства 18
Гей-Люссака закон 20
Гельмгольца теоремы 107, 108, 110
Гидравлика 55
Гидродинамика 55
Глиссирование 425
Градиент потенциала 85
Грасгофа число 547
- Давление 15
— в невесомой жидкости 16
— весовое 68, 462
— ветра на здание 258
— динамическое 66
— измерение его 78, 341
— кинетическое 68
— полное 67
— скоростное 66, 462
Дарси закон фильтрации 203
Движение водяных животных 322
— воздуха антициклональное 511
— — циклональное 511
— волновое 128, 243
— — на поверхности раздела 134,
 490, 491
— инфузорий 324
— наносов взвешенных 444
— — донных 441
— песка в воздухе 439
— снега в воздухе 439
— струи свободной 168, 380, 429
Детонация 369
Диаграмма кавитационная 417
— характеристик 384
Диафрагма 232
Динамика газовая 349
Диполь 95
Диффузия 542
— турбулентная 165
Длина волны 129
— пути перемешивания 163
Дождевание 433
Дорожка вихревая 250
Дюны кочующие 440
- Жидкость аномальная 146
— без трения 56
— ее определение 10, 15
— ее свойства 10
— реальная 142
Жиклер 433
Жуковского теорема 124
- Закон Бойля–Мариотта 19
— Гагена–Пуазейля 144
— Гей-Люссака 20
— Мариотта–Гей-Люссака 20
— Стокса 151, 434
— подобия Рейнольдса 149, 444
— — Фруда 243, 335, 444
— сопротивления Блазиуса 223,
 265
— трения Ньютона 143
— универсальный распределения
 скоростей 176

- фильтрации Дарси 203
- Закрылок 275
- Затухание турбулентности 182, 503
- Измерение давления 30, 78
- Изотаха 201
- Инжектор 235
- Интеграл криволинейный скорости 82
- Истечение воздуха сжатого через отверстие 359, 360
 - газа из сосуда 376
 - жидкости из насадка 231
 - — из сосуда 62, 64
 - — через щель 101, 235
- Источник 93
- Кавитация 313, 412
- Камера вакуумная 406
 - напорная 406
- Канал гидродинамический 335
- Капиллярность 42
- Каплана колесо 329
 - турбина 329
- Капли воды в воздухе 427
- Колебания звуковые в жидкости 456
- Колесо Каплана 329
 - Пельтона 329
 - Фрэнсиса 329
 - водяное 324
 - гребное 302
 - сегнерово 117
- Кольцо вихревое 77, 111
- Конвекция 525, 526
- Конфузор 337
- Корабль роторный 106
- Коррозия кавитационная 416
- Корта пропеллер 323
- Коэффициент внутреннего трения 143
 - вязкости 143
 - диффузии 542
 - индуктивного сопротивления 294
 - корреляции 185
 - лобового сопротивления 270, 294
 - момента 273
 - нагрузки винта 308
 - планирования 312
 - подъемной силы 270
 - полезного действия воздухоудувки 333
 - — действия насоса 333
 - — действия пропеллера 301
 - — действия турбин 331
 - профильного сопротивления 294
 - расхода 231
 - сжатия струи 64, 231
 - сопротивления 222, 241
 - теплопередачи 527
 - теплопроводности 527
 - турбулентного переноса тепла 527
 - турбулентной теплопроводности 165, 527
 - уменьшения скорости 231, 232
- Кривая подпора 238
 - спада 238
- Крыло 267, 282
 - в сверхзвуковом потоке 399
 - добавочное 197
 - разрезное 196, 197
 - с закрылком и предкрылком 275
 - со щитком 275
- Кундта фигуры 203

- Лаваля сопло 358, 369
 Лавина снежная 487
 Лагранжа уравнения 50
 Лапласа уравнение 91
 Линия жидкая 82
 — равных скоростей 201
 — разрежения 377
 — скелетная 273
 — тока 50
 — уплотнения 379
 Лопатки поворотные 197

 Магнуса эффект 106
 Манометр 19, 30
 — Рейхардта 33
 — батарейный 81, 344
 Мариотта–Гей-Люссака закон 20
 Масса присоединенная 247
 Маха угол 353
 — число 390
 Меандры 199
 Метеорология динамическая 348
 Мешок вязкой жидкости 256
 Микроманометр Крелля 31
 Моделирование движения корабля
 244, 335
 — — крыла 339
 — — наносов 444
 Мощность источника 93
 — потока 54
 — стока 93

 Навье–Стокса уравнения 147
 Наносы взвешенные 444, 447, 449
 — донные 441
 Напряжение 13
 — касательное 128, 142
 Напряжения главные 15
 Насадок Борда 117
 — для получения сверхзвуковой
 параллельной струи газа 385
 Насос 324, 331
 — струйный 235
 Натяжение поверхностное 42
 Неразрывность 52, 55
 Нить вихревая 107, 109
 Нифер 80
 Нуссельта число 533
 Ньютона закон трения 143

 Область многосвязная 102
 Образование вихрей 74, 186
 Обтекание гребня горы 467
 — двугранника 240
 — заостренного тела сверхзвуко-
 вым потоком 399
 — здания 190
 — крыла 270
 — наклоненной пластинки сверх-
 звуковым потоком 402
 — острого ребра 76
 — пластинки 158, 248
 — цилиндра 194
 Окружность инерциальная 464
 Отвердевание 11
 Отображение конформное 100, 279
 Отражение зеркальное 293
 Отрыв потока 187
 Отсасывание жидкости из погра-
 ничного слоя 196

 Падение капель 151, 427
 Пара вихрей 110
 Парабола индуктивного сопротив-
 ления 297
 Парение тяжелого тела в воздухе
 119
 Пассаты 521
 Пекле число 530

- Пельтона колесо 329
- Перемешивание , длина пути перемешивания 163
- турбулентное 163, 165, 181
- Перенос количества движения 163
- субстанций при турбулентном перемешивании 165
- Пересчет коэффициентов лобового сопротивления 295
- углов атаки 297
- Переход ламинарного течения в турбулентное 157, 191
- Пито трубка 67
- Пластика , обтекание ее 158, 248
- , сопротивление ее 258, 263, 266
 - , течение вдоль пластинки 153
 - — между двумя пластинками 142
- Плотность 22
- Площадь, ометаемая винтом 305
- Поверхность жидкая 82
- контрольная 115
 - равного потенциала 39
 - раздела 74, 112, 510
 - уровня 40
- Подобие механическое 148
- Подпор жидкости 66
- Полет птиц 322
- пули 353
- Поля прибор 206
- Поляра 271
- кавитационная 415
- Постоянная капиллярная 43
- Поступь относительная 314
- Потенциал 39, 84
- скоростей 85
 - — многозначный 103
- Поток в прямоугольном колене 189
- вдоль двух пересекающихся стенок 98
 - вторичный 198, 201, 202, 207
 - газа вдоль криволинейной стенки 379
 - — двухмерный 377
 - — дозвуковой 386
 - — одномерный 355
 - — сверхзвуковой 377, 396, 399
 - кильватерный 251
 - конвективный вынужденный 525
 - — естественный 525, 545, 549, 552, 554
 - — свободный 545
 - между двумя стенками 173
 - несжимаемый 53
 - около крыла 104, 270
 - плоский перед стенкой 97
 - потенциальный около шара 95
 - — с циркуляцией 102, 104
 - сжимаемый 54
 - трехмерный перед пластинкой 92
- Прандтля правило 391
- трубка 81
- Прибор Поля 206
- Привод гидравлический 334
- Принцип отвердевания 11
- Пропеллер 301
- Корта 323
 - Фохта—Шнейдера 320
 - идеальный 305
- Профиль Жуковского 278
- ламинированный 266, 268
- Прыжок воды 139
- Пуаз 150
- Пузыри воздуха в воде 434
- Пульверизатор 168
- Пульсация скорости 125
- Равновесие газа 26, 39

- жидкости 22, 25, 37, 39
- Радиус гидравлический 220
- Разгон течения 227, 228
- Размах крыла 270
- — относительный 276
- Размыв края струи 170
- Распределение давления в весомерной жидкости 24
- скоростей в трубе при ламинарном течении 171
- — в трубе при турбулентном течении 171
- — универсальное 176
- Распространение возмущений в газе 349
- Распыление воды 432, 433
- горючего 432, 433
- Расход газа 360
- жидкости 54, 64, 231
- объемный 54, 64
- Расширение адиабатическое 22
- изотермическое 22
- трубы внезапное 118
- Реакция вытекающей струи 116
- Ребро острое 76
- Рейнольдса закон подобия 149, 444
- число 149
- — критическое 157
- Решетка из крыльев 120
- Ричардсона число 505

- Самолет скоростной 266
- Сера шайба 80
- Сжатие адиабатическое 22
- изотермическое 22
- струи 64
- Сжимаемость жидкостей 11, 48
- Сила гидродинамического дального действия 455
- кориолисова 458
- подъемная 104, 124, 267, 269, 392, 425
- поперечная 106, 124
- сопротивления касательная 269
- — нормальная 269
- — результирующая 269
- тяги 301
- Скачок уплотнения 355, 363, 367, 397
- — косой 379
- — прямой 366
- Скорость волн групповая 131
- — фазовая 130
- детонации 369
- динамическая 173
- звука 351
- индуктивная 286
- комплексная 101
- критическая 138, 244
- пульсационная 126
- распространения волн 129
- фильтрации 203
- Слой вихревой 112
- пограничный 152
- — около пластинки 180
- — управление им 194
- раздела 187
- Сопло Лаваля 358, 369
- Сопротивление 239
- волновое 243
- давления 242
- индуктивное 286, 289, 290, 292
- кильватерное 244
- круглой пластинки 258
- лобовое 267, 269, 395
- поверхности 249
- снарядов 396
- трения 154, 242, 263
- — гладких пластинок 264
- — шероховатых пластинок 266

- формы 243
- цилиндров 260
- шаров 259
- Состояние напряженное 11, 13, 14
 - — гидростатическое 16
- Спираль Экмана 473, 479
- Стокс (единица вязкости) 150
- Стокса формула (закон) 151, 434
- Струйка жидкая 52
- Струя газа свободная 380
 - жидкости в воздухе 429
 - — свободная, ее движение 168
 - размыв края ее 170
- Сужение внезапное 232
 - постепенное 233
- Сутки маятниковые 465
- Температура потенциальная 507, 514
- Температуропроводность 530
- Теорема Бьеркнеса 492
 - Жуковского 124
 - Томсона 82, 87, 88
 - Торичелли 63
 - о количестве движения 113, 125
 - о моменте количества движения 113
- Теоремы Гельмгольца 107, 108, 110
- Теория крыла 282
 - пропеллера струйная 306
 - смазки гидродинамическая 207
 - сопротивления гидродинамическая 239
- Теплообмен в текущей жидкости 524
- Теплопроводность турбулентная 165
- Теплосодержание 365
- Термоанемометр 341, 541
- Термометр пластинчатый 411
- Течение в изогнутом канале 115
 - в канале переменного сечения 231
 - в канале постоянного сечения 219
 - в море глубинное 479
 - в море поверхностное 479
 - в прямоугольном колене 189
 - в расслоенной весомай жидкости 486
 - в расширяющемся канале 194
 - в среднем установившееся 125
 - в трубах 174, 179, 219
 - вдоль двух пересекающихся стенок 98
 - вдоль пластинки 153
 - возвратное 187, 190
 - вторичное 198, 207
 - — второго рода 201
 - — третьего рода 202
 - газа вдоль криволинейной стенки 378
 - ламинарное 157
 - между двумя пластинками 205
 - между двумя пластинки 142
 - между двумя стенками 173
 - между коаксиальными цилиндрами 182
 - около вращающегося диска 480
 - около лопаток турбины 327
 - плоское (плоскопараллельное) 95
 - подпочвенных вод 203
 - позади крыла 287
 - ползущее 152, 203
 - потенциальное 85
 - — с циркуляцией 102
 - придонное 199, 479
 - приземное 472, 477

- с преобладающей ролью вязкости 203
- спокойное 139, 221, 237
- стремительное 139, 221, 237
- турбулентное 157, 171
- Томсона теорема 82, 87, 88
- Тор (единица давления) 34
- Торичелли теорема 63
- Торможение в пограничном слое 194
- в потоке 187
- Точка критическая 66
- Траектория частицы жидкости 50
- Транспорт зернистых веществ в трубах 437
- пневматический 437
- Трение, влияние его на движения в атмосфере и в морях 471
- внутреннее 142
- жидкости 56
- Труба аэродинамическая 336, 338
- Трубка Вентури 233
- Пито 67
- Прандтля 81
- тока 52
- цилиндрическая 342
- шаровая 342
- Турбина Каплана 329
- Фрэнсиса 329
- водяная 324
- избыточного давления 326
- равного давления 325
- Турбулентность 154, 156
- в аэродинамической трубе 183, 184
- возникновение ее 159
- вполне развившаяся 161
- затухание ее 182, 503
- изотропная 184
- Тяга 301
- гребного винта 303
- у плавающих и летающих животных 322
- Угол Маха 353
- атаки 268
- — геометрический 291
- — действительный 291
- краевой 45
- Удар гидравлический 420
- твердого тела о поверхность воды 422
- Удлинение 276
- Уклон потока 219
- Управление пограничным слоем 194
- Уравнение Бернулли 58, 91
- — во вращающейся системе отсчета 459
- — обобщенное 60
- Лапласа 91
- Эйлера турбинное 124, 327
- неразрывности 55
- состояния идеальных газов 20
- Уравнения Лагранжа 50
- Навье–Стокса 147
- Эйлера 50, 61
- Уровень манометрический 31
- Участок начальный 227
- Фигуры Кундта 203
- Фильтрация 203
- Формула Стокса 151
- Шези 220
- барометрическая 28
- Фронт холодной массы воздуха 487
- Фруда закон подобия 243, 335, 444
- число 243
- Фрэнсиса колесо 329
- турбина 329

Функция тока 97

Центр давления крыла 268, 273

Циклон 438, 512, 513

Цилиндр , обтекание его 194

— , сопротивление его 260

Циркуляция 83, 102

— антициклональная 469

— общая атмосферы 518

— циклональная 469

Число Грасгофа 547

— Маха 390

— Нуссельта 533

— Пекле 530

— Рейнольдса 149, 157

— Ричардсона 505

— Фруда 243

Шайба Сера 80

— дроссельная 232

Шар, сопротивление его 259

Шези формула 220

Шероховатость абсолютная 178

— эквивалентного песка 180

Щиток 275

Щуп 342

Эйлера уравнение турбинное 124

— уравнения 50, 61

Экмана спираль 473, 479

Эллипсоид напряжений 14

Энтальпия 365

Эрлифт 436

Эффект Магнуса 106, 194

Ядро вихря 103

— течения в трубе 227

Л. Прандтль

ГИДРОАЭРОМЕХАНИКА

Дизайнер М. В. Ботя

Технический редактор А. В. Широбоков

Компьютерная подготовка: С. В. Высоцкий

И. В. Рылова

О. С. Михайлова

Ю. М. Шарычева

Корректор М. А. Ложкина

Подписано к печати 05.09.00. Формат 60 × 84¹/₁₆.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 33,48. Уч. изд. л. 34,31.

Гарнитура Computer Modern Roman. Бумага офсетная № 1.

Тираж 1000 экз. Заказ №

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»

426034, г. Ижевск, ул. Пастухова, 13.

Лицензия на издательскую деятельность ЛУ № 084 от 03.04.00.

<http://www.rcd.com.ru>. E-mail: borisov@uni.udm.ru.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов в ГИПП «Вятка».

610033, г. Киров, ул. Московская, 122.
