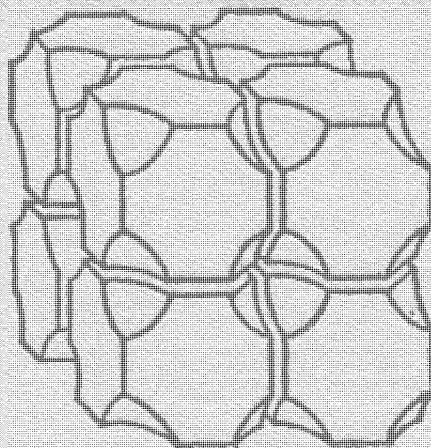


**Структурные  
модели  
порового  
пространства  
горных  
пород**

---

*E.C. Ромм*



---

*Недра*

Структурные  
модели  
порового  
пространства  
горных  
пород

---

*E. C. Ромм*



ЛЕНИНГРАД  
«НЕДРА»  
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
1985

Ромм Е. С. Структурные модели порового пространства горных пород.—  
Л.: Недра, 1985.—240 с.

Рассматриваются вопросы физического и математического моделирования структуры порового пространства горных пород. Приведена классификация структурных моделей, на основе которых устанавливаются аналогические связи между различными свойствами пород-коллекторов нефти и газа. Особое внимание удалено фильтрационным, емкостным, электрическим и деформационным характеристикам горных пород. Приводятся некоторые новые результаты теоретических и экспериментальных исследований механизмов фильтрации на гранулярных, капиллярных, трещинно-капиллярных и биокомпонентных моделях структуры порового пространства. С помощью новой нелинейно-упругой модели установлены связи между пористостью, сжимаемостью и тензорами проницаемости и удельного электрического сопротивления пород коллекторов нефти и газа в условиях сложнонапряженного состояния. На основе рассмотренных структурных моделей предлагаются новые методы изучения физических свойств нефтяных и газовых коллекторов.

Для специалистов научно-исследовательских учреждений и производственных организаций, занимающихся поисками, разведкой и разработкой нефтяных и газовых месторождений, строительством гидротехнических сооружений, инженерно-геологическими изысканиями, проектированием и производством горных работ.

Табл. 13, ил. 57, список лит. 50 назв.

Рецензент — д-р физ.-мат. наук А. М. Линьков (ВНИМИ)

ЕВГЕНИЙ СОЛОМОНОВИЧ РОММ

СТРУКТУРНЫЕ МОДЕЛИ  
ПОРОВОГО ПРОСТРАНСТВА  
ГОРНЫХ ПОРОД

Редактор издательства Н. В. Виноградова  
Переплет художника Б. Н. Осенчакова  
Технический редактор Н. П. Старостина  
Корректор В. Н. Малахова

ИБ № 5718

Сдано в набор 20.11.84. Подписано в печать 20.05.85. М-32193. Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 15,00.  
Усл. кр.-отт. 15,00. Уч.-изд. л. 15,88. Тираж 930 экз. Заказ 80/661. Цена 2 р. 40 к.  
Ордена «Знак Почета» издательство «Недра». Ленинградское отделение, 193171,  
Ленинград, С-171, ул. Фарфоровская, 12.  
Ленинградская типография № 8 ордена Трудового Красного Знамени Ленинград-  
ского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной  
торговли. 190000, Ленинград, Прачечный пер., 6.

Р 1904050000—335  
043(01)—85 свод. пл. подписных изд. 1985 г.

© Издательство «Недра», 1985

## Предисловие

Предлагаемая вниманию читателя книга является одной из первых попыток обобщения многочисленных результатов теоретических и экспериментальных исследований зависимости физических свойств горных пород и пористых материалов от структуры их пространства. Структурное моделирование дисперсных систем широко используется в самых различных областях знания: начиная от углубленного изучения свойств горных пород и кончая теорией и технологией процессов химической адсорбции. Анализ материала, разбросанного в изданиях, посвященных столь отличающимся друг от друга проблемам, представляет собой сложную задачу. Поэтому автор заранее приносит свои извинения за возможные пробелы в изложении.

В книге по возможности широко представлены результаты исследований многих советских и зарубежных авторов, при этом особое внимание удалено ранее не опубликованным работам, а также выполненным в самое последнее время. Автор, к сожалению, имел ограниченную возможность для составления достаточно полного библиографического указателя к книге. Заинтересованный читатель может найти необходимые библиографические справки в обзорных работах, посвященных принципам моделирования пористых материалов [13, 33, 36], физико нефтяного пласта [1, 21, 28], гравиулярным [15] и капиллярным [18, 21, 33] моделям, моделированию трещиноватых [1, 22] и трещиновато-пористых [2] горных пород, вопросам перколяционной теории [29] и, наконец, физическим основам моделирования деформационных свойств коллекторов нефти и газа [8, 10].

Экспериментальные исследования двухфазной фильтрации на плоских моделях пористых сред и на модели чисто трещиноватой среды проводились с участием Г. И. Сергеевой, работы по программированию на БЭСМ-6 в связи с изучением взаимного вытеснения жидкостей на математической модели с включенными объемами, а также с реализацией метода изучения физических свойств горных пород по машинной обработке изображений шлифов выполнялись совместно с Ю. В. Рыбаковой.

Пятая глава книги (кроме раздела 5.3.2) написана И. А. Волковым, в написании шестой главы принимала участие Т. Н. Кречетова. Всем этим лицам автор выражает глубокую благодарность. Автор признателен также рецензенту д-ру физ.-мат. наук А. М. Линькову, внимательно просмотревшему рукопись и сделавшему ряд ценных замечаний.

## Введение

Горные породы представляют собой, по-видимому, наиболее распространенный класс пористых тел, изучение которых имеет решающее значение для многих областей человеческой деятельности. Добыча полезных ископаемых, возведение инженерных сооружений, земледелие, ирригация — вот далеко не полный перечень технологических процессов, где поровая структура коренных горных пород и их поверхностных слоев во многом определяет приемы и методы, с помощью которых добиваются успехов в развитии технического прогресса.

Основной практической задачей изучения массива горных пород является определение существующих в нем различных физических полей: электрического, напряжений и деформаций, давлений и скоростей фильтрации, насыщенности, скоростей диффузии и переноса тепла. Подобные задачи решаются с помощью известных методов математической физики, возможность использования которых в современную эпоху широкого развития электронно-вычислительной техники обусловливается лишь знанием соответствующих граничных условий и физических свойств исследуемого массива. Изучение многих из этих свойств предусматривает проведение сложных лабораторных или натурных исследований, поэтому представляет значительный интерес разработка новых методов определения физических свойств, основанных на существовании между ними вполне определенных количественных связей. Практически все физические свойства пористой горной породы должны определяться весьма ограниченным числом факторов, к которым относятся: особенности взаимодействия фаз в системе горная порода — насыщающие ее жидкости, структура порового пространства горной породы и, наконец, свойства ее минерального скелета. Если под элементами структуры порового пространства понимать пористость, удельную поверхность и геометрию пор, то взаимосвязь практических всех важнейших физических свойств горной породы с перечисленными факторами можно выразить с помощью условной схемы, представленной на рис. в.1. Из этой схемы видно, что основным фактором, определяющим практически все физические свойства породы, является структура порового пространства. Что касается пористости и удельной поверхности, то эти элементы структуры имеют ясный физический смысл и их количественные характеристики

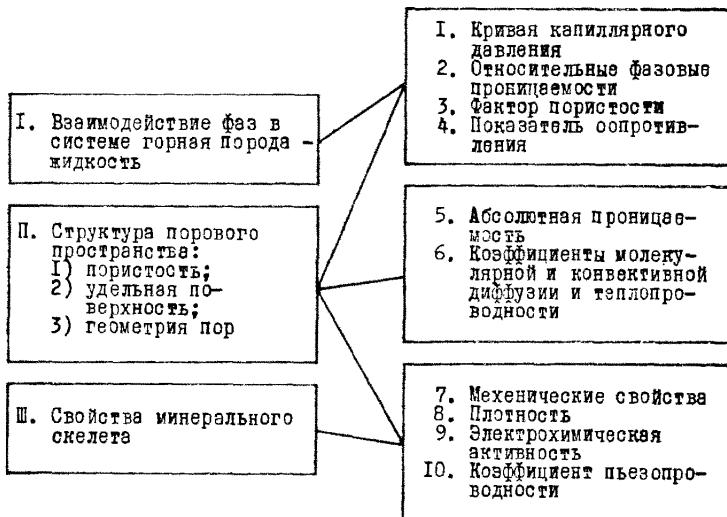


Рис. в.1. Схема связи физических свойств горных пород со свойствами минерального скелета и элементами структуры порового пространства.

доступны прямому определению. Проблема состоит в том, чтобы найти количественную характеристику третьего элемента — геометрии пор. Решение этой задачи сделало бы возможным определение всех физических свойств горной породы по данным о ее пористости, удельной поверхности, геометрии пор и по характеристикам минерального скелета. Для одного из свойств горной породы — плотности — эта задача решается, например, весьма просто: так как плотность породы  $\rho$  не зависит от геометрии пор, а определяется лишь пористостью  $m$  и плотностью твердой фазы  $\rho_t$ , то

$$\rho = m \rho_t.$$

Структура порового пространства (геометрия пор) горной породы настолько сложна, что количественная ее характеристика встречает принципиальные затруднения. Если представить себе возможность определения расположения в пространстве всех поверхностей пор в пористом теле с последующим введением данных в память гигантской ЭВМ, то это тоже не спасает положения: граничные условия на этих поверхностях настолько сложны, что исключают реальную возможность решения соответствующих уравнений для искомых физических полей. Единственным путем решения этой проблемы является создание математических структурных моделей порового пространства, которые, определяя различные варианты геометрии пор, позволяют устанавливать количественные соотношения между теми или иными свойствами породы и перечисленными выше тремя основными факторами (см. рис. в.1).

Известно, что такой подход к изучению физических свойств горных пород является весьма перспективным, так как при этом автоматически устанавливаются количественные связи между различными свойствами. Результаты исследований в этом направлении в настоящее время широко используются в практике горно-геологических, геолого-промышленных и инженерно-геологических работ. Так, по гранулометрическому составу песка (удельной поверхности) и пористости можно оценить его проницаемость, по распределению электрических полей в разрезе — пористость и водо- и нефтенасыщенность продуктивных нефтяных и газовых пластов, по кривой капиллярного давления — кривые относительных фазовых проницаемостей и т. д.

Сложность структуры порового пространства реальных горных пород обуславливает значительные трудности в создании универсальных моделей, которые позволили бы связать друг с другом все физические свойства породы. Однако исследования в этом направлении, продолжающиеся до последнего времени, заставляют смотреть в будущее с известной долей оптимизма.

Кроме математического моделирования сложной структуры порового пространства реальных горных пород достаточно широко развиты методы ее физического моделирования, направленные на установление механизма некоторых сложных явлений, происходящих в пористых средах. В связи с этим в книге уделяется определенное внимание экспериментальным исследованиям процессов массопереноса, упругой деформации и капиллярного вытеснения, выполненным на тех или иных физических структурных моделях горных пород.

## Гранулярные модели

Как известно, одними из первых задач, связанных с движением жидкостей в горных породах, явились задачи фильтрации воды в песчаных фильтрах, в насыпных гидротехнических сооружениях и в подземных водоносных горизонтах, находящихся в зоне активного водообмена. Несмотря на выполненные в середине прошлого века работы Х. Дарси [1856 г.], в которых впервые было введено понятие коэффициента фильтрации, экспериментальные определения этой величины практически не проводились вплоть до 20-х годов нашего столетия. Тем не менее, знание коэффициента фильтрации было необходимо для решения многих прикладных задач инженерной геологии. В связи с этими задачами были осуществлены первые попытки рассмотреть механизм течения в простейших гранулярных моделях пористой среды, ближайших по структуре к реальным насыпным грунтам или несцементированным песчаникам.

Дальнейшее развитие нефтепромыслового дела поставило новые задачи, связанные как с разработкой месторождений при упругом режиме, так и с созданием новых сейсмофизических методов поисков залежей нефти и газа. Это вызвало широкий интерес к изучению процессов упругой деформации горных пород. Для построения теории этих явлений также была использована гранулярная модель горной породы, с помощью которой были выполнены многочисленные теоретические и экспериментальные исследования.

В настоящей главе рассматриваются важнейшие результаты математического и физического моделирования на некоторых простейших гранулярных структурных моделях горных пород.

### 1.1. Математическое моделирование

Простейшая гранулярная модель несцементированной горной породы представляет собой конгломерат различным образом упакованных сферических частиц одинаковых размеров. Очевидно, что все свойства подобной модели должны определяться свойствами частиц, способом их упаковки, а также взаимодействием насыщающих модель жидкостей друг с другом и с самими частицами. Именно это обстоятельство позволяет найти количественные связи между такими свойствами модели, как ее пористость, размер

частиц, проницаемость и капиллярность, а также между упругими свойствами частиц и насыщающей жидкости и упругими свойствами модели в целом (см. рис. в.1).

### 1.1.1. Модель Слихтера

Впервые гранулярная модель, состоящая из геометрически правильно упакованных одинаковых сферических частиц, была рассмотрена С. Слихтером [47], который предположил, что форма элементарной ячейки модели представляет собой ромбоэдр, образованный центрами восьми соприкасающихся друг с другом шаров (рис. 1.1). Легко заметить, что степень плотности упаковки определяется углом  $\beta$ : при  $\beta = 60^\circ$  упаковка наиболее плотная, при  $\beta = 90^\circ$  ромбоэдр превращается в куб и пористость упаковки кажется максимальной. Более поздние исследования [Михайлов Г. К., 1952 г.] показали, что можно представить себе некоторые усложненные устойчивые системы упаковки одинаковых шаров в гранулярной модели, увеличивающие ее пористость почти в 2 раза. Тем не менее для реальных песчаных пород подобные системы упаковки частиц не характерны, поэтому в рамках модели Слихтера целесообразно полагать, что при  $\beta = 90^\circ$  имеет место действительно наименее плотная упаковка сферических частиц.

**Геометрия модели.** Рассмотрим более детально изменение пористости модели в зависимости от изменения угла  $\beta$  ( $60^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ ) [15]. Для этого выделим единичный ромбоэдр модели (рис. 1.2). Ясно, что при любом значении  $\beta$  объем твердой фазы  $V_t$  в каждой ячейке будет равен объему сферической частицы:

$$V_t = \pi d^3/6, \quad (1.1)$$

где  $d$  — диаметр сферы. Отсюда следует, что пористость модели  $m$  должна определяться формулой

$$m = 1 - \pi d^3/(6V_0),$$

где  $V_0$  — объем ромбоэдра. Но из рис. 1.2 следует, что

$$V_0 = hS_0 \quad (1.2)$$

и

$$S_0 = d^2 \sin \beta,$$

где  $h$  — высота ромбоэдра;  $S_0$  — площадь его основания.

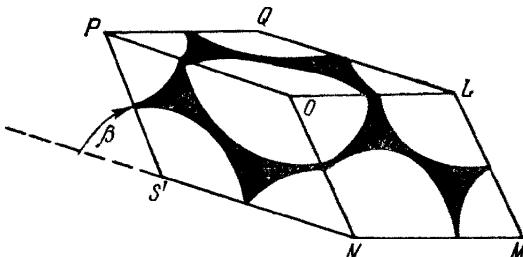
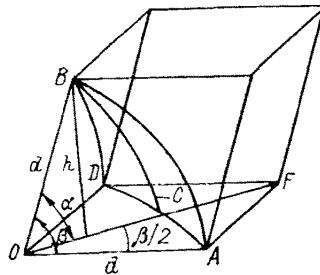


Рис. 1.1. Элементарная ячейка модели Слихтера [15].

Рис. 1.2. Схема элементарной ячейки модели Слихтера [15].



Таким образом,

$$m = 1 - \pi d / (6h \sin \beta), \quad (1.3)$$

и задача сводится к определению  $h$ . Проведем из вершины  $O$  ромбоэдра сферу радиусом  $d$  и диагональ основания  $OF$ , в результате чего линии пересечения поверхности сферы с гранями ромбоэдра и линия  $BC$  на ее же поверхности дадут два одинаковых сферических треугольника. Решая один из этих треугольников, находим, что

$$\cos(\angle AB) = \cos(\angle BC) \cdot \cos(\angle AC),$$

откуда следует, что

$$\cos \beta = \cos(\beta/2) \cdot \cos \alpha$$

или

$$\cos \alpha = \cos \beta / \cos(\beta/2). \quad (1.4)$$

Из этого уравнения путем несложных тригонометрических преобразований можно найти, что

$$\sin \alpha = \frac{\sin \beta}{1 + \cos \beta} \sqrt{1 + 2 \cos \beta}.$$

Теперь уже не представляет труда определить искомую высоту ромбоэдра, которая равна

$$h = d \sin \alpha = \frac{d \sin \beta}{1 + \cos \beta} \sqrt{1 + 2 \cos \beta}. \quad (1.5)$$

Отсюда, подставляя это выражение в формулу (1.3), найдем

$$m = 1 - \frac{\pi (1 + \cos \beta)}{6 \sin^2 \beta \sqrt{1 + 2 \cos \beta}}$$

или, учитывая, что  $\sin^2 \beta = (1 - \cos \beta)(1 + \cos \beta)$ ,

$$m = 1 - \frac{\pi}{6 (1 - \cos \beta) \sqrt{1 + 2 \cos \beta}}. \quad (1.6)$$

Легко сосчитать, что если угол  $\beta$  изменяется в пределах от  $60$  до  $90^\circ$ , то пористость модели Слихтера будет изменяться в пределах от  $0,259$  до  $0,476$ . Таким образом, для данной гранулярной

модели удалось связать пористость с основной и единственной характеристикой геометрии пор — углом  $\beta$ . Теперь задача заключается в том, чтобы с этой же характеристикой связать и коэффициент проницаемости модели.

**Фильтрация в модели.** Для анализа движения жидкости внутри ячейки введем в рассмотрение просветность  $n$ , которая определяется отношением площади просвета  $S$  между шарами в плоскости, соединяющей их центры, к площади основания ромбодрэда  $S_0$ :

$$n = S/S_0. \quad (1.7)$$

Так как площадь просвета равна площади  $S_0$  за вычетом площади круга, радиус которого равен радиусу сферы, то, учитывая формулу (1.2), можно написать

$$n = \frac{d^2 \sin \beta - \pi d^2/4}{d^2 \sin \beta},$$

откуда

$$n = 1 - \pi/(4 \sin \beta). \quad (1.8)$$

К сожалению, система уравнений (1.6) — (1.8) является трансцендентной, поэтому связь между пористостью и просветностью может быть выражена лишь с помощью приближенной формулы

$$n = 0,603m^{1,38}. \quad (1.9)$$

Следует подчеркнуть, что в диапазоне  $0,259 \leq m \leq 0,476$  эта формула выполняется с погрешностью до 2 %.

Для изучения течения жидкости в модели С. Слихтер рассматривает вначале частный случай теснейшего расположения сферических частиц в упаковке ( $\beta = 60^\circ$ ). В этом случае в каждой ячейке модели будут существовать два фильтрационных канала, форма сечения которых представляет собой криволинейные треугольники с изменяющимися по длине ячейки размерами. Оба эти канала переменного сечения автор заменяет каналом постоянного сечения  $\bar{S}$ , имеющим форму равностороннего треугольника. Известно [16], что средняя скорость течения жидкости  $\bar{v}_1$  в таком канале определяется формулой

$$\bar{v}_1 = \frac{\bar{S}}{20 \sqrt{3} \mu} \frac{\Delta p}{l}, \quad (1.10)$$

где  $\mu$  — физическая вязкость жидкости;  $l$  — длина канала;  $\Delta p$  — перепад давления на концах канала.

Таким образом, задача сводится к определению  $\bar{S}$  и  $l$ . Решение этой задачи, предложенное С. Слихтером, заключается в том, что путем геометрических преобразований автор связывает длину  $l$  с диаметром сферической частицы  $d$ , а площадь  $\bar{S}$  — с просветностью:

$$l = 1,065d; \quad (1.11)$$

$$\bar{S} = 1,436nS_0. \quad (1.12)$$

Подставляя эти формулы в соотношение (1.10), находим

$$\bar{v}_1 = \frac{1,436}{20 \sqrt{3} \cdot 1,065} \frac{nS_0}{\mu} \frac{\Delta p}{d}.$$

Так как с погрешностью до 2 %

$$1,436/(20 \sqrt{3} \cdot 1,065) = 1/(8\pi),$$

то

$$\bar{v}_1 = \frac{nS_0}{8\pi\mu} \frac{\Delta p}{d}, \quad (1.13)$$

Учитывая, что в каждой ячейке два канала, а также внося в формулу (1.13) выражение для  $S_0$  из формулы (1.2) и соотношение (1.5), получаем

$$\bar{v} = \frac{nd^2 \sin^2 \beta \sqrt{1+2 \cos \beta}}{16\pi\mu (1+\cos \beta)} \frac{\Delta p}{h},$$

где  $\bar{v} = \bar{v}_1/2$ .

Исключив выражения тригонометрических функций с помощью соотношения (1.6), получим известную формулу Слихтера:

$$\bar{v} = \frac{d^2}{96\mu} \frac{n}{(1-m)} \frac{\Delta p}{h}. \quad (1.14)$$

Сравнив это выражение с формулой закона Дарси

$$\bar{v} = \frac{k}{\mu} \frac{\Delta p}{h}, \quad (1.15)$$

найдем, что

$$k = d^2 n / [96 (1-m)], \quad (1.16)$$

где  $k$  — проницаемость модели.

Полученное выражение С. Слихтер распостранил с известной степенью приближения и на те случаи, когда упаковка сферических частиц не столь плотна, т. е. на случаи, когда  $\beta > 60^\circ$ . Как уже указывалось, в изучаемом диапазоне значений пористости с большой точностью справедливо выражение (1.9), поэтому формулу (1.16) можно написать в виде

$$k = 6,28 \cdot 10^{-3} m^{1,38} d^2 / (1-m). \quad (1.17)$$

Таким образом, это соотношение связывает проницаемость модели Слихтера, ее пористость и диаметр сферических частиц, определяющий геометрию пор (см. рис. в.1).

Для сопоставления полученных результатов с результатами анализа других моделей выразим диаметр сферических частиц через значения удельной поверхности. Так как количество частиц  $N$  в единице объема модели будет

$$N = \frac{1-m}{\pi d^3/6},$$

а площадь поверхности одной частицы  $s_1 = \pi d^2$ , то общая поверхность частиц в единице объема  $s_V$  будет определяться выражением

$$s_V = s_1 N = 6(1 - m)/d. \quad (1.18)$$

Легко найти удельные поверхности модели, рассчитанные на единицу объема пор ( $s_m$ ) и на единицу объема твердой фазы ( $s_t$ ):

$$s_m = 6(1 - m)/(dm); \quad (1.19)$$

$$s_t = 6/d. \quad (1.20)$$

Заменяя в формуле (1.17) диаметр  $d$  с помощью выражения (1.20), получаем

$$k = \frac{1}{7,35} \frac{m^{2,76}}{s_t^2 (1 - m)}. \quad (1.21)$$

**Ртутная порометрия в модели.** С тех пор как в 1921 г. Э. Уишберн предложил использовать для определения распределения пор по размерам в пористых телах ртутную порометрию, этот метод нашел очень широкое применение. Сущность метода состоит в том, что пористое тело, поверхность твердой фазы которого не смачивается ртутью, приводится с ней в соприкосновение. Капиллярные силы препятствуют проникновению ртути в поры образца, поэтому для заполнения все более тонких каналов необходимо прикладывать к ртути все большее давление. По количеству зашедшей в образец ртути можно судить об объеме пор данного радиуса, который в соответствии с формулой Лапласа связан с приложенным к ртути давлением зависимостью

$$p = \sigma \cos \theta (1/r_1 + 1/r_2), \quad (1.22)$$

где  $p$  — приложенное давление;  $\sigma$  — поверхностное натяжение на границе ртуть—твердое тело;  $r_1$  и  $r_2$  — главные радиусы кривизны поверхности раздела ртуть—воздух в поре;  $\theta$  — контактный угол.

В результате ступенчатого повышения давления ртути все большее ее количество заполняет поровый объем, поэтому по данным эксперимента имеется возможность построить так называемую кривую капиллярного давления (капиллярную кривую), представляющую собой зависимость  $V_{\text{рт}}/V_{\text{п}} = f(p)$ , где  $V_{\text{рт}}$  и  $V_{\text{п}}$  — объем пор, заполненных ртутью, и общий объем пор соответственно. Далее по этой кривой, используя формулу (1.22), можно найти кривую распределения пор по размерам:  $V_{\text{рт}}/V_{\text{п}} = f(r_1, r_2)$ .

Совершенно очевидно, что в зависимости от формы и размера поровых каналов, а также от способов их соединения друг с другом формула (1.22) будет изменять свой вид, поэтому получаемая кривая распределения пор по размерам будет зависеть как от истинной геометрии пор в пористом теле, так и от использованных при написании формулы (1.22) модельных представлений о геометрии порового пространства. В связи с этим представляет несомненный интерес теоретическое исследование проникновения ртути внутрь гранулярной модели Слихтера.

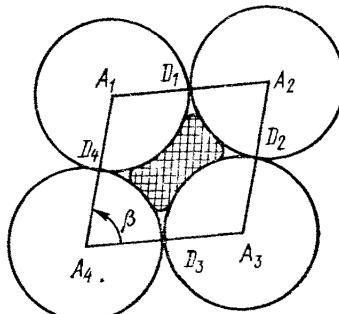


Рис. 1.3. Схема внедрения ртути в гранулярную модель (сплошной целик) [Мейер Р., Стоу Р., 1965 г.].

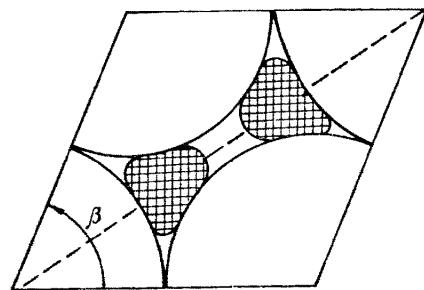


Рис. 1.4. Схема внедрения ртути в гранулярную модель (двойной целик) [Мейер Р., Стоу Р., 1965 г.].

Последовательное рассмотрение формирования кривой капиллярного давления в условиях гранулярной модели было проведено Р. Мейером и Р. Стоу [1965, 1966 гг.]. Более приближенный подход осуществлен в работах С. Крейера [1958 г.] и Л. Фревела и Л. Кресли [1963 г.]. В основу исследования Р. Мейера и Р. Стоу положена модель Слихтера, плотность упаковки которой и тем самым пористость определяются формулой (1.6). В своей первой работе авторы рассматривают проблему первоначального внедрения ртути в модель, которое происходит при определенном значении давления, называемого давлением прорыва. Это давление при прочих равных условиях целиком и полностью определяется геометрией пор модели, т. е. углом  $\beta$  [формула (1.6)]. Рассматривая элементарную ячейку модели (ромбоэдр на рис. 1.1), легко заметить, что внутрь ячейки ведут шесть проходов, в каждом из которых суммарный периметр целика ртути равен  $L$  (рис. 1.3) и который включает в себя участок границ жидкость—твердое тело ( $L_{ж. т.}$ ) и жидкость—пар ( $L_{ж. п.}$ ):

$$L = L_{ж. п.} + L_{ж. т.} \quad (1.23)$$

Пусть ртуть в проходе переместилась на бесконечно малый отрезок  $dn$ . В этом случае работа перемещения  $p dV$  определяется суммой изменений граничных поверхностей  $S_{ж. п.}$ ,  $S_{ж. т.}$  и  $S_{т. п.}$ :

$$p dV = \sigma_{ж. п.} dS_{ж. п.} + \sigma_{ж. т.} dS_{ж. т.} + \sigma_{т. п.} dS_{т. п.} \quad (1.24)$$

Так как перемещение  $dn$  бесконечно мало, то стенки прохода при этом перемещении можно считать параллельными и

$$dV = A dn; \quad dS_{ж. п.} = L_{ж. п.} dn;$$

$$dS_{ж. т.} = -dS_{т. п.} = L_{ж. т.} dn,$$

где  $A$  — площадь поперечного сечения ртути внутри прохода.

Подставляя эти выражения в формулу (1.24) и учитывая тот факт, что

$$\sigma_{т. п.} - \sigma_{ж. т.} = \sigma_{ж. п.} \cos \theta, \quad (1.25)$$

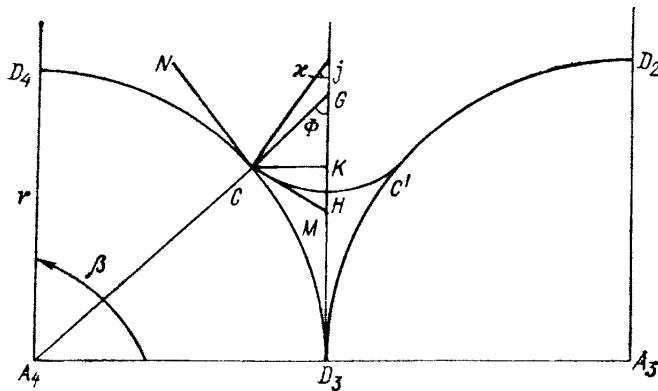


Рис. 1.5. Геометрия включения ртути в гранулярной модели [Мейер Р., Стой Р., 1965 г.].

получаем

$$pA = \sigma_{jk, \perp} (L_{jk, \perp} - L_{jk, \parallel} \cos \theta). \quad (1.26)$$

Таким образом, для каждой конфигурации модели, т. е. для каждого угла  $\beta$ , значение давления перемещения ртути внутри прохода определяется формулой

$$p = \sigma_{\text{ж. н}} L' / A, \quad (1.27)$$

где

$$L' = L_{\mathbf{j}_k, \Pi} - L_{\mathbf{j}_k, \mathbf{T}} \cos \theta.$$

Теперь задача сводится к определению минимума функции (1.27). Для этого рассматриваются два случая: первый — когда углы  $\beta$  достаточно велики, второй — когда значения  $\beta$  близки к  $60^\circ$ . В зависимости от контактного угла эти случаи соответствуют сплошному целику ртути в проходе (см. рис. 1.3) и двойному (рис. 1.4).

Рассмотрим более детально геометрию включения ртути в проходе (случай неразделенных потоков). На рис. 1.5 схематически изображена часть включения ртути между двумя сферическими частицами с центрами  $A_3$  и  $A_4$  и с поверхностью раздела  $CHC'$ . Прямая  $A_4G$  проведена так, чтобы угол  $CA_4D_3$  был меньше  $\beta/2$ . Угол  $\Phi$ , под которым прямая  $A_4G$  пересекается с перпендикуляром  $D_3G$  ( $\angle A_4GD_3$ ), представляет собой еще один параметр процесса. Пересечение  $A_4G$  с дугой  $D_3D_4$  дает точку  $C$ , где встречаются границы (ж.т.), (ж.п.) и (т.п.). При этом кривая  $CH$  сечения поверхности раздела (ж.п.) является функцией контактного угла  $\theta$ . Отметим, что  $\theta = \angle NCM$ , где  $NC \perp A_4G$ , а  $Cj \perp CM$  и является радиусом кривизны дуги  $CH$ . При рассмотрении рис. 1.5 можно найти

$$L' = 8r \left[ \kappa \frac{(1 - \sin \Phi)}{\sin \kappa} - \cos \theta \left( \Phi - \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (1.28)$$

С другой стороны, общая площадь сечения ртутного включения, изображенного на рис. 1.3, будет определяться выражением

$$A = 4r^2 \{ \sin \beta + \pi/4 - \operatorname{ctg} \Phi - \operatorname{ctg} \alpha (1 - \sin \Phi)^2 + \operatorname{ctg} \Phi (1 - \sin \Phi)^2 - \Phi + \alpha [(1 - \sin \Phi)/\sin \alpha]^2 \}. \quad (1.29)$$

Таким образом, формулы (1.28) и (1.29) полностью определяют функцию (1.27), что позволяет найти минимум этой функции при заданных значениях  $\beta$  и  $\theta$ , т. е. найти условие

$$A = \left( \frac{\partial L'}{\partial \Phi} \right)_{r, \beta, \theta} - L' \left( \frac{\partial A}{\partial \Phi} \right)_{r, \beta, \theta} = 0. \quad (1.30)$$

Как уже указывалось, при  $\beta = 60^\circ$  происходит разделение потока ртути на две одинаковые части (см. рис. 1.4). В этом случае рассмотрение проникновения ртути внутрь модели несколько усложняется, но его принцип остается прежним.

В обоих случаях были найдены частные производные функций типа (1.28) и (1.29) и с помощью ЭВМ из условия (1.30) определялось безразмерное давление прорыва  $p^* = p/\sigma$  при различных параметрах  $\beta$  и  $\theta$ . Результаты вычислений представлены на рис. 1.6.

В своей последующей работе Р. Мейер и Р. Стоу рассмотрели процесс заполнения модели ртутью после прорыва ее во внутреннюю часть элемента. В этом случае вокруг контактов сферических частиц друг с другом образуются тороидальные не заполненные ртутью кольца (подвешенные кольца), проникновению внутрь которых несмачивающей жидкости препятствуют капиллярные силы, увеличивающиеся по мере уменьшения указанных тороидальных объемов.

Комбинация формул (1.24) и (1.25) с условием  $dS_{ж. \pi} = -dS_{т. \pi}$  дает

$$\frac{p}{\sigma_{ж. \pi}} = \frac{dS_{ж. \pi}/d\Phi + dS_{т. \pi} \cos \theta/d\Phi}{dV/d\Phi}. \quad (1.31)$$

Рассматривая рис. 1.5, легко установить, что поверхность  $S_{ж. \pi}$  единичного тороида можно выразить аналитически, как поверхность вращения двойной дуги  $CH$ ; таким же образом поверхность  $S_{т. \pi}$  является поверхностью тела вращения, образованного дугой  $CD_3$ . Параметр  $V$  в уравнении (1.31) представляет собой объем ртути, изменение которого соответствует изменению с обратным

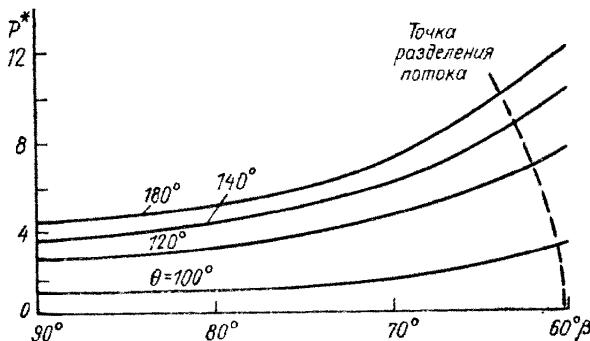


Рис. 1.6. Зависимость давления прорыва от параметров  $\theta$  и  $\beta$  [Мейер Р., Стоу Р., 1965 г.].

знаком тороидального незаполненного объема  $V_t$ . Если на рис. 1.5 обозначить  $Cj=g$ ;  $CK=f$ ;  $D_3j=l$ , то можно показать, что для величин, входящих в формулу (1.31), справедливы следующие соотношения, полученные путем обычных приемов интегрирования для определения поверхности и объема тел вращения:

$$S_{t, \pi} = 4\pi r f; \quad S_{\text{ж. п.}} = 4\pi g (l\pi - f); \quad (1.32)$$

$$V_t = 2\pi [f l^2 - f^2 l \operatorname{ctg} \nu - g^2 l \nu + f g^2 - r f^2]. \quad (1.33)$$

Учитывая то обстоятельство, что  $dV = -dV_t$ , можно найти производные в уравнении (1.31), после чего с помощью ЭВМ вычисляются функции  $p/\sigma_{\text{ж. п.}} = F(\beta)$  при различных значениях параметров  $\Phi$  и  $\theta$ .

Количество тороидальных объемов в ячейке зависит от плотности упаковки, т. е. от угла  $\beta$ . Легко заметить, что плотность упаковки модели Слихтера определяется также числом контактов между сферическими частицами. Если  $\beta = 90^\circ$ , то число контактов  $n=8$ , если  $\beta = 60^\circ$ , то  $n=12$ . Общий объем торондов (подвешенных колец) в модели будет тогда

$$V_o = n V_t / 2.$$

Далее по формуле (1.33) для среднего значения  $n=10$  вычисляются функции  $V_t = F(\Phi)$  при различных значениях параметров  $\beta$  и  $\theta$ . После этого можно определить собственно капиллярные кривые для рассматриваемой модели. Если объем ячейки модели обозначить через  $V_a$ , то

$$V_a = \frac{1}{1-m} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3. \quad (1.34)$$

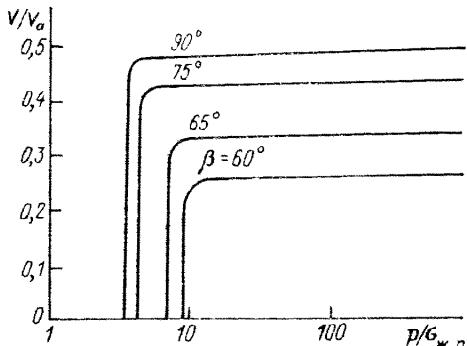
С другой стороны, объем проникшей в ячейку ртути будет определяться формулой

$$V = m V_a - n V_t / 2. \quad (1.35)$$

Формулы (1.31) — (1.35) позволяют найти теоретические капиллярные кривые для рассматриваемой модели, т. е. функции  $V/V_a = F(p/\sigma_{\text{ж. п.}})$ . Семейство этих кривых для  $\theta = 140^\circ$  изображено на рис. 1.7.

Интересно отметить, что задолго до Р. Мейера и Р. Стоу С. Крейер [1958 г.] исследовал процесс вытекания ртути из полностью заполненной ею гранулярной модели. Правда, в работе этого автора не было столь четких представлений о количественных критериях плотности упаковки модели, тем не менее сравнение начального участка капиллярной кривой С. Крейера с конечным участком той же кривой, полученной в работе Р. Мейера и Р. Стоу, показало прекрасное совпадение результатов. В табл. 1.1 в первой колонке представлены значения параметра  $\Phi$ , во второй — относительных объемов подвешенных колец  $\bar{V} = [V_t / (2\pi r^3)] \cdot 10^3$ , в третьей — соответствующего относительного давления, полученного

Рис. 1.7. Кривые капиллярного давления для гранулярной модели Слихтера при  $\theta=140^\circ$  [Мейер Р., Стоу Р., 1966 г.].



в работе С. Крейера,  $\bar{p}_1$ , в четвертой — той же величины, вычисленной по Р. Мейеру и Р. Стоу,  $\bar{p}_2$ . Кроме того, в работе С. Крейера были описаны эксперименты по дренированию ртути из физических гранулярных моделей, состоящих из одинаковых сферических частиц (стекло — 0,21—1,2 мм; сталь — 0,08 мм). Теоретические кривые, полученные в этой работе, вполне удовлетворительно соответствуют экспериментальным данным.

Таблица 1.1

$\Phi$	$[V_T/(2\pi r^3)] \cdot 10^3$	$\bar{p}_1$	$\bar{p}_2$
60°	14,26	0,528	0,524
65	7,14	2,139	2,133
70	3,05	5,405	5,394
75	1,01	13,098	13,077
80	0,21	36,900	36,846

Анализ графиков на рис. 1.7 позволяет сделать весьма важный вывод о том, что гранулярная модель, состоящая из одинаковых сферических частиц, имеет капиллярную кривую с очень резко выраженным крутым участком; это соответствует наличию на дифференциальной кривой распределения пор по размерам максимума с относительно малой дисперсией. Наблюдаемые для реальных супучих горных пород размытые максимумы на дифференциальных кривых распределения пор по размерам должны объясняться лишь неоднородностью упаковки частиц и наличием в исследуемом образце их различных фракций. Дальнейшие теоретические исследования капиллярных кривых на гранулярных моделях с частицами неодинаковых размеров могли бы послужить основой для новых методов гранулометрического анализа.

### 1.1.2. Модель Терцаги

В отличие от модели Слихтера одинаковые сферические частицы в модели К. Терцаги [27] упакованы хаотически. В этом случае число частиц  $N$  в единице объема модели будет определяться формулой

$$N = 6(1 - m)/(\pi d^3).$$

Тогда легко подсчитать число частиц  $N_1$  на единице площади плоскости, пересекающей модель:

$$N_1 = [6(1 - m)/(\pi d^3)]^{2/3}. \quad (1.36)$$

Предположим, что число каналов треугольного сечения и длины  $l$  должно совпадать с числом частиц на единице площади. Если обозначить площадь поперечного сечения единичного канала через  $s_0$ , то пористость модели должна быть равна

$$m = [6(1 - m)/(\pi d^3)]^{2/3} s_0,$$

откуда

$$s_0 = \frac{m}{[6(1 - m)/(\pi d^3)]^{2/3}}. \quad (1.37)$$

Для характеристики сопротивления течению вязкой жидкости в канале в гидравлике вводится понятие гидравлического радиуса  $r_0$ , который равен отношению площади поперечного сечения канала к его периметру  $\Pi$ :

$$r_0 = s_0/\Pi.$$

Так как для равностороннего треугольника со стороной  $a$   $s_0 = a^2\sqrt{3}/4$  и  $\Pi = 3a$ , то

$$r_0^2 = s_0/12\sqrt{3}. \quad (1.38)$$

С другой стороны, известно [16], что приближенная формула для средней скорости течения вязкой жидкости в канале призматического сечения имеет следующий вид:

$$v = \frac{r_0^2}{\gamma\mu} \frac{\Delta p}{l}, \quad (1.39)$$

где  $\Delta p$  — перепад давления на концах канала длиной  $l$ ;  $\gamma$  — численный коэффициент, зависящий от формы сечения канала (для равностороннего треугольника  $\gamma = 5/3$ ). Перейдем в формуле (1.39) к скорости фильтрации, воспользовавшись известным соотношением Дюпюи—Форхгеймера [Дюпюи А., 1863 г.]:

$$v_\phi = mv. \quad (1.40)$$

Следует подчеркнуть, что уравнение (1.40) само по себе основано на модельных представлениях и не подлежит экспериментальной проверке из-за неопределенности понятия «истинной скоп-

рости» течения жидкости в поровом пространстве реальных горных пород.

Сопоставляя формулы (1.39) и (1.40) с известным выражением закона Дарси

$$v_\Phi = \frac{k}{\mu} \frac{\Delta p}{l},$$

легко найти, что

$$k = mr_0^2/\gamma$$

или, учитывая формулу (1.38),

$$k = ms_0/(12\sqrt{3}\gamma). \quad (1.41)$$

Подставляя сюда значение  $s_0$  из формулы (1.37), найдем

$$k = \frac{1}{53} \frac{m^2 d^2}{(1-m)^{2/3}}. \quad (1.42)$$

Коэффициент 1/53 К. Терцаги обозначил через  $\epsilon$ , придавая ему различные значения в соответствии со своими экспериментальными данными, поэтому окончательно формула Терцаги имеет следующий вид:

$$k = \epsilon \frac{m^2 d^2}{(1-m)^{2/3}}. \quad (1.43)$$

### 1.1.3. Модель Козени

Около 30 лет спустя после работ С. Слихтера И. Козени [41] предложил новую модель неконсолидированной пористой среды. Эта модель мало отличалась от предыдущих гранулярных моделей: так же как и его предшественники, И. Козени пытался установить количественную связь между диаметром сферических частиц, составляющих модель, ее пористостью и проницаемостью. Но при выводе основного уравнения И. Козени использовал некоторый новый прием, который на несколько десятилетий вперед определил основные принципы структурного моделирования порового пространства пористых сред.

Гранулярная модель Козени предусматривает случайную упаковку одинаковых сферических частиц. В этом случае в единице объема будет содержаться  $N = 6(1-m)/(\pi d^3)$  сферических частиц с удельной поверхностью, равной

$$s_V = N\pi d^2 = 6(1-m)/d. \quad (1.44)$$

Далее автор полагает, что в единице объема модели существует один поровый канал длиной  $l$  с поперечным сечением в форме треугольника и с гидравлическим радиусом, равным  $r_0$ . Для определения средней скорости течения жидкости в этом канале автор решает соответствующие уравнения Навье—Стокса [16], в резуль-

тате чего получает выражение, аналогичное упоминавшейся ранее формуле Пуазейля:

$$v = \frac{r_0^2}{\gamma \mu} \frac{\Delta p}{l}. \quad (1.45)$$

Для кругового сечения (собственно формула Пуазейля)  $\gamma = 2$ , для канала с треугольным сечением, как уже указывалось,  $\gamma = 5/3$ .

Чтобы перейти к расходу жидкости, протекающей через модель, необходимо снова воспользоваться постулатом Дюпон—Форхгеймера [формула (1.40)].

Новым приемом, использованным И. Козени, явился способ определения гидравлического радиуса канала. Автор предположил, что радиус  $r_0$  определяется объемом порового пространства в единичном объеме модели, деленным на удельную поверхность, т. е.

$$r_0 = m/s_V.$$

Подставив сюда значение  $s_V$  из формулы (1.44), найдем

$$r_0 = m d/[6(1-m)]. \quad (1.46)$$

Теперь, комбинируя формулы (1.40), (1.45) и (1.46), можно найти скорость фильтрации в модели:

$$v_\Phi = \frac{d^2 m^3}{36(1-m)^2 \gamma \mu} \frac{\Delta p}{l}. \quad (1.47)$$

Автор предположил далее, что длина канала  $l$  в 2 раза больше длины пути фильтрации  $h$ . Принимая во внимание это обстоятельство и внося в численный коэффициент значение  $\gamma = 5/3$ , для канала треугольного сечения получаем

$$v_\Phi = \frac{d^2 m^3}{120(1-m)^2 \mu} \frac{\Delta p}{h}.$$

Сравнив это выражение с законом Дарси, получим соотношение, которое называется формулой Козени:

$$k = \frac{d^2 m^3}{120(1-m)^2}. \quad (1.48)$$

Для сравнения результата И. Козени с другими модельными представлениями напишем формулу (1.48) в несколько другом виде. Введем в рассмотрение извилистость  $\varphi$ :

$$\varphi = l/h, \quad (1.49)$$

а также перейдем в формуле (1.48) к удельным поверхностям  $s_V$  и  $s_T$  [формулы (1.18) и (1.20)]:

$$k = m^3 / (\gamma \varphi s_V^2); \quad (1.50)$$

$$k = m^3 / [\gamma s_T^2 (1-m)^2 \varphi]. \quad (1.51)$$

#### 1.1.4. Упругие свойства гранулярных моделей

Впервые упругие свойства гранулярной структурной модели несцепментированных горных пород были рассмотрены Ф. Гассманом [39]. Этим автором использовалась уже описанная в предыдущих разделах модель Слихтера с наименейшим расположением сферических частиц ( $\beta = 60^\circ$ ). В отличие от фильтрационных свойств гранулярных моделей здесь рассматриваются их упругие свойства при условии известных механических свойств твердых компонентов модели и насыщающих модель жидкостей (см. рис. в.1).

Наиболее важными в этом случае представляются задачи деформациях насыщенных и не насыщенных жидкостью моделей и распространении в этих условиях продольных упругих колебаний. Если модель насыщена жидкостью и помещена в непроницаемую оболочку, которая испытывает внешние нагрузки, то такая система называется закрытой. Если же жидкость при деформации модели может свободно проходить через оболочку, то система называется открытой.

В предыдущей работе Ф. Гассманом [1951 г.] были получены общие соотношения для упругих постоянных  $\bar{C}_{ij}$  пористого тела без каких бы то ни было модельных представлений:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\bar{\sigma}_i &= - \sum_{j=1}^6 \bar{C}_{ij} \Delta\varepsilon_j; \\ \Delta\varepsilon_i &= - \sum_{j=1}^6 \bar{\gamma}_{ij} \Delta\bar{\sigma}_j, \\ \bar{C}_{ij} &= \bar{C}_{ji} \text{ и } \bar{\gamma}_{ij} = \bar{\gamma}_{ji}, \end{aligned} \right\} \quad (1.52)$$

где  $\Delta\bar{\sigma}_i$  и  $\Delta\varepsilon_i$  — компоненты приращений напряжений и деформаций для закрытой системы соответственно. Для открытой системы уравнения вполне аналогичны выражениям (1.52), лишь обозначения величин используются без черты сверху. При этом соотношения между упругими постоянными открытой и закрытой систем будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} C_{ij} &= \bar{C}_{ij} + \frac{a^*}{D^*} b_i b_j; \\ \gamma_{ij} &= \bar{\gamma}_{ij} - \frac{a^*}{D} a_i a_j; \\ a^* &= \frac{1}{m (1/B_{\kappa} - 1/B_i)}; \end{aligned} \right\} \quad (1.53)$$

$$a_i = \bar{\gamma}_{i1} + \bar{\gamma}_{i2} + \bar{\gamma}_{i3} - \theta_i/(3B_{\tau});$$

$$b_i = \theta_i - (\bar{C}_{i1} + \bar{C}_{i2} + \bar{C}_{i3})/(3B_{\tau});$$

$$D = 1 + a^* (a_1 + a_2 + a_3);$$

$$D^* = 1 + a^* (b_1 + b_2 + b_3)/(3B_{\tau});$$

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 1; \quad \theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 0,$$

где  $B_ж$  и  $B_т$  — модули сжатия жидкости и твердого тела соответственно;  $m$  — пористость ( $m=0,259$ ).

Рассматривая модель Слихтера при  $\beta=60^\circ$ , можно заметить, что она состоит из отдельных слоев, в каждом из которых сферы имеют гексагональную упаковку. В этом случае можно, зная радиус сферы  $R$ , написать координаты центра сферы, принадлежащей слою  $N$  (ось  $z$  направлена вертикально вниз):

$$\begin{aligned} x &= \frac{R}{2} [4N' + 2N'' + (-1)^N + 1]; \\ y &= -\frac{\sqrt{3}R}{4} [4N'' + (-1)^N + 1]; \\ z &= \frac{2\sqrt{6}}{3} N, \end{aligned} \quad (1.54)$$

где  $N'$  и  $N''$  — произвольные целые числа.

Пусть модель испытывает некоторую нагрузку. Тогда упругие сферы вдавливаются друг в друга и точки их контактов превращаются в круглые площадки с радиусом  $R'$ , который в соответствии с известной задачей Герца определяется формулой

$$R' = \sqrt[3]{3(1 - v_t^2)RF/(4E_t)}, \quad (1.55)$$

где  $F$  — сила, действующая на сферу, а модуль Юнга  $E_t$  и коэффициент Пуассона  $v_t$  материала, из которого состоит сфера, выражаются через коэффициенты Ламе следующим образом:

$$\begin{aligned} E_t &= \mu_t(3\lambda_t - 2\mu_t)/(\lambda_t + \mu_t); \\ v_t &= \lambda_t/[2(\lambda_t + \mu_t)]. \end{aligned}$$

Радиус контакта  $R'$  при этом предполагается много меньшим радиуса сферы  $R$ .

Из той же задачи Герца следует, что относительное перемещение деформируемых сфер  $S$  будет приближенно определяться уравнением

$$S \approx R'^2/R = \sqrt[3]{9(1 - v_t^2)^2 F^2/(16E_t^2 R)}. \quad (1.56)$$

Если число сфер в модели велико, то благодаря их гексагональной упаковке всю модель можно рассматривать как соответствующий кристалл с осью симметрии, совпадающей с осью  $z$ , для которого справедлива следующая матрица упругих констант  $C_{ij}$ , входящих в формулу (1.52) для открытой системы [Гасман Ф., 1951 г.]:

$$\begin{vmatrix} C_1 & C_1 - 2C_5 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ C_1 - 2C_5 & C_1 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & C_2 & C_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_5 \end{vmatrix},$$

при этом значения  $C_k$  в матрице определяются по формулам:

$$C_1 = \bar{C}; \quad C_2 = C_4 = 4\bar{C}; \quad C_3 = 16\bar{C}; \quad C_5 = 0, \quad (1.57)$$

где

$$\bar{C} = \frac{1}{12\sqrt{2}} \frac{1}{R} \frac{dp}{dS} = \frac{1}{12\sqrt{2}} \sqrt{\frac{6E_t^2 F}{(1-v_t^2) R^2}}. \quad (1.58)$$

С помощью полученных соотношений можно рассмотреть деформацию модели под действием собственной тяжести и, определив сжимаемость модели, найти скорости распространения в ней продольных колебаний при различных значениях координаты  $z$ . Будем рассматривать модель как систему, заполненную жидкостью с плотностью  $\rho_j$ . Заметим, что каждая сфера, принадлежащая слою  $N$ , контактирует с тремя сферами  $(N+1)$ -го слоя под давлением  $p_N$  и с тремя сферами слоя  $N-1$  под давлением  $p_{N-1}$ . Если кажущаяся масса сферы равна  $(4\pi/3)R^3(\rho_t - \rho_j)g$ , где  $\rho_t$  — плотность твердого тела, а  $g$  — ускорение свободного падения, то условие равновесия сил, действующих на сферу, будет иметь вид

$$p_{N-1}\sqrt{6} - p_N\sqrt{6} + (4\pi/3)R^3(\rho_t - \rho_j)g = 0. \quad (1.59)$$

Если предположить, что над верхним слоем нет нагрузки, то  $z=0$  и рекуррентная формула (1.59) дает

$$p_N = N \frac{4\pi}{3\sqrt{6}} R^3 (\rho_t - \rho_j) g. \quad (1.60)$$

Подставив сюда вместо  $N$  его выражение через  $z$  из третьей формулы (1.54), найдем

$$p_N = (\pi R^3/3) (\rho_t - \rho_j) g z. \quad (1.61)$$

Тогда для  $\bar{C}$  [формула (1.58)] с помощью соотношения (1.61) можно получить

$$\bar{C} = \frac{1}{12\sqrt{2}} \left[ \frac{2\pi E_t^2 (\rho_t - \rho_j) g z}{(1-v_t^2)^2} \right]^{1/3}. \quad (1.62)$$

Рассмотрим теперь скорость распространения упругих колебаний в модели. Упругость ненасыщенной системы дается матрицей компонентов  $C_{ij}$ , которые вычисляются с помощью формул (1.56), (1.57) и (1.62) при условии  $\rho_j = 0$ . Для того чтобы вычислить упругость насыщенной закрытой системы, матрица  $\bar{C}_{ij}$  определяется тем же путем, но в формуле (1.62) предполагается, что  $\rho_j \neq 0$ . Тогда матрица  $C_{ij}$  должна быть найдена из формул (1.53) при условиях

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \bar{C} + \frac{a^*}{D^*} b_1^2; & C_2 &= 4\bar{C} + \frac{a^*}{D^*} b_1 b_3; \\ C_3 &= 16\bar{C} + \frac{a^*}{D^*} b_3^2; & C_4 &= 4\bar{C}; & C_5 &= 0; \\ b_1 &= b_2 = 1 - 2\bar{C}/B_t; & b_3 &= 1 - 8\bar{C}/B_t; & b_4 &= b_5 = b_6 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.63)$$

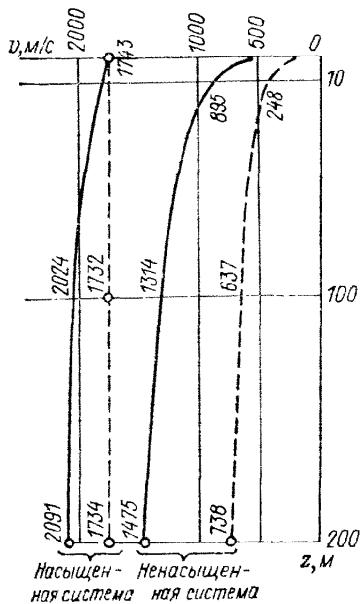


Рис. 1.8. Зависимость скорости распространения упругих колебаний от приложенного давления для модели Слихтера [39].

Для определения скорости распространения упругой волны в модели выписывается система дифференциальных уравнений в частных производных, которая решается с помощью характеристического уравнения Леви—Чивита [1932 г.]. На основе полученного решения, которое имеет достаточно громоздкий вид, были вычислены вертикальная и горизонтальная скорости распространения упругой волны в насыщенной и не насыщенной водой модели, состоящей из гранитных шариков. Численные значения величин, определяющих процесс, были приняты следующими:  $\rho_t = 2,65 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_{ж} = 0$  (ненасыщенная система);  $\rho_{ж} = -1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$  (насыщенная система);

$$E_t = 0,5 \cdot 10^{11} \text{ Па}; v_t = 0,25; B_{ж} = 2,06 \cdot 10^9 \text{ Па}.$$

Результаты расчетов приведены на рис. 1.8. Из графиков видно, что скорости распространения упругих волн  $v$  в ненасыщенной системе много меньше, чем в насыщенной, и увеличиваются с ростом глубины, кроме случая горизонтальной волны в ненасыщенной среде.

Теоретический анализ упругих свойств гранулярных моделей, предложенный Ф. Гассманом, явился основной базой для всех последующих рассмотрений этой задачи.

Х. Брандт [31] усложнил гранулярную модель Слихтера, предположив, что сферические частицы модели упакованы в ней беспорядочно. При этом модель характеризуется четырьмя размерами сферических частиц, удовлетворяющих определенному условию, а именно: частицы следующего в ряду уменьшения размера заполняют промежутки между частицами предыдущего. Рассмотрим частицы размером  $R_i$ . Пористость модели, составленной из этих частиц, будет равна  $m_i$ , а относительный объем твердой фазы в модели  $V_i = 1 - m_i$ . Если использовать эти представления для модели, состоящей из четырех типов сферических частиц, то легко показать, что

$$V_1 : V_2 : V_3 : V_4 = 1 : m : m^2 : m^3. \quad (1.64)$$

Если одинаковые частицы распределены в модели случайно, то тщательно проведенные эксперименты показывают, что пористость такой системы равна 0,392 [Уистмэн А., 1930 г.], а среднее число контактов между частицами 8,84 [Смит В., Фут Р., Бусанг Р.,

1929 г.]. Пусть радиус частицы равен  $R$ , а число частиц в модели  $N$ . Тогда объем модели определится формулой

$$V_{\text{п}} = 4\pi NR^3/[3(1-m)]. \quad (1.65)$$

Если модель подвергается нагрузке, то радиусы сферических частиц уменьшатся на  $\Delta$  и объем модели станет равным

$$V_{\text{п}} = 4\pi N(R - \Delta)^3/[3(1-m)]. \quad (1.66)$$

Считая значение  $\Delta$  малым по сравнению с  $R$ , получаем

$$V_{\text{п}} = \frac{4\pi NR^3}{3(1-m)} - \frac{4\pi NR^2 \Delta}{1-m}. \quad (1.67)$$

Свободный объем модели будет

$$V_0 = \frac{4\pi mNR^3}{3(1-m)} - \frac{4\pi NR^2 \Delta}{1-m}. \quad (1.68)$$

Но согласно формуле (1.56)

$$\Delta = [3(1 - v_t^2)F/(4E_t \sqrt{R})]^{1/3}. \quad (1.69)$$

Подставляя это выражение в формулу (1.67), получаем для частиц с радиусом  $R_1$

$$V_{\text{п}} = \frac{4\pi N_1 R_1^3}{3(1-m)} - \frac{4\pi N_1 R_1^2}{1-m} \left[ \frac{3(1 - v_t^2)F}{4E_t R_1^{1/2}} \right]^{1/3}. \quad (1.70)$$

Если учесть, что каждая частица в среднем контактирует с 8,84 себе подобных частиц, то с помощью условия эквивалентности энергии сжатия и энергии деформации путем громоздких, но несложных вычислений можно распространить формулу (1.70) на насыщенную жидкостью модель, состоящую из четырех сортов частиц разного размера:

$$V_{\text{п}} = \frac{4\pi N_1 R_1^3}{3(1-m)} - \frac{4\pi N_1 R_1^3}{1-m} \left[ \frac{1,75(1 - v_t^2)(p - p_{ж})}{E_t C_m} \right]^{1/3}, \quad (1.71)$$

где

$$C_m = \frac{8}{27m^{3/2}} \left[ 1 + \frac{30,75B^{3/2}(1 - v_t^2)}{E_t(p - p_{ж})^{1/2}} \right];$$

$p_{ж}$  — давление в жидкости;  $B$  — модуль сжатия (рассматривается закрытая система).

Формула (1.71) дает возможность определить коэффициент сжимаемости модели

$$\beta = -V_{\text{п}} \frac{dp}{dV_{\text{п}}},$$

который входит в известную формулу скорости распространения продольных колебаний в однородной изотропной упругой среде:

$$v = \left[ \frac{3\beta}{\rho} \frac{1-v}{1+v} \right]^{1/2}, \quad (1.72)$$

где  $\rho$  и  $v$  — плотность и коэффициент Пуассона насыщенной модели соответственно (или упругой среды, в которой распространяются волны).

Производя соответствующие операции дифференцирования в формуле для коэффициента сжимаемости, подставляя результат в выражение (1.72) и пренебрегая членом второго порядка малости, получаем;

$$v = \left\{ \frac{2}{3m[\rho_t - m(\rho_t - \rho_{jk})]} \frac{1-v}{1+v} \right\}^{1/2} \times \times \frac{(p - p_{jk})^{1/6} \{1 + 30,75B^{3/2}(1 - v_t^2)/[E_t(p - p_{jk})^{1/2}]\}^{5/6}}{[1,75(1 - v_t^2)/E_t]^{1/3} \{1 + 46,13B^{3/2}(1 - v_t^2)/[E_t(p - p_{jk})^{1/2}]\}^{1/2}}. \quad (1.73)$$

Анализ этой формулы показывает, что зависимость скорости звука от эффективного давления ( $p_{\text{эфф}} = p - p_{jk}$ ) можно приблизительно представить в виде

$$\ln v = \text{const} + (1/6) \ln p_{\text{эфф}}. \quad (1.74)$$

Проверка справедливости соотношения (1.74) на некоторых реальных сцементированных песчаниках показала, что угол наклона функции  $\ln v = F(\ln p_{\text{эфф}})$  меняется в достаточно широких пределах: от  $1/2$  до  $1/7$ .

И. Фэтт [1957 г.] развел теорию Брандта, включив в рассмотрение два сорта шариков в модели: «мягкие» и «твёрдые», пытаясь тем самым учсть различную сжимаемость самих зерен горной породы и цементирующего их вещества. Прежде всего И. Фэтт преобразует формулу Брандта (1.71) к виду

$$V = V_0 - 3V_0 [1,75(1 - v^2)/(EC_m)]^{2/3} p^{2/3}, \quad (1.75)$$

где  $V_0$  и  $V$  — объемы модели до и после деформации. Рассматривая затем две фракции сферических частиц в модели, доли которых в общем числе частиц равны соответственно  $f_1$  и  $f_2$ , И. Фэтт получает соотношение

$$V = V_0 - 3V_0 \left[ f_1^2 \frac{1 - v_1^2}{E_1} + f_2^2 \frac{1 - v_2^2}{E_2} + + f_1 f_2 \left( \frac{1 - v_1}{E_1} + \frac{1 - v_2}{E_2} \right) \right]^{2/3} p^{2/3}, \quad (1.76)$$

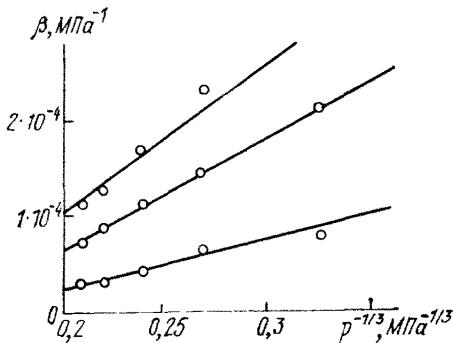
где индекс «1» относится к первой фракции, а индекс «2» — ко второй.

Если положить  $E_2 \gg E_1$  и учсть, что  $f_1 + f_2 = 1$ , то

$$\frac{dV}{dp^{2/3}} = -3V \left( \frac{1 - v_1^2}{E_1} f_1 \right)^{2/3}. \quad (1.77)$$

Из формулы (1.76) путем дифференцирования  $dV/dp$  можно получить зависимость сжимаемости модели от давления, которая

Рис. 1.9. Зависимость сжимаемости песчаников от давления [Фэтт И., 1957 г.].



с точностью до постоянного множителя будет выглядеть следующим образом:

$$\beta = Cp^{-1/3}. \quad (1.78)$$

На рис. 1.9 представлены данные о сжимаемости нескольких образцов песчаников (точки), которые сопоставлены с прямыми, построенными по формуле (1.78). Совпадение теоретических и экспериментальных данных является вполне удовлетворительным, что свидетельствует о возможности использования гранулярной модели для изучения сжимаемости несцементированных песков.

## 1.2. Физическое моделирование

Как уже указывалось, физическое моделирование на структурных гранулярных моделях неконсолидированных пористых сред может иметь две цели: с одной стороны, подобные эксперименты должны определить границы применимости тех или иных структурных моделей реальных песчаных пород, с другой — физическое моделирование на гранулярных моделях может содействовать в установлении важных деталей механизмов некоторых процессов, происходящих в горных породах.

### 1.2.1. Экспериментальные исследования возможности использования гранулярной модели для определения проницаемости сыпучих грунтов по данным об их пористости и гранулометрическом составе

В относящихся к концу прошлого — началу нынешнего века работах существует множество описаний экспериментов по фильтрации в хорошо отсортированных песках. Как правило, целью этих экспериментов являлось установление численных коэффициентов в различных полуэмпирических фильтрационных формулах [15]. Ввиду того что для дальнейшего развития модельных представлений о структуре порового пространства горных пород особо важную роль сыграли модель и формула Козени, то имеет смысл остановиться на экспериментальных исследованиях, выполненных самим автором [41].

Работы по экспериментальному изучению фильтрации проводились на образцах песков, имеющих вполне определенное распределение частиц по размерам, что исключает непосредственное применение формулы (1.48), выведенной для модели, состоящей из одинаковых сферических частиц. С целью уменьшить влияние неоднородности состава песка на результаты расчетов И. Козени была предложена методика определения так называемого эффективного диаметра зерна. Согласно этой методике эффективный диаметр  $d_3$ , который следует подставлять в соотношение (1.48), определяется по следующей формуле:

$$d_3 = 100 \left( \sum_{i=2}^n \frac{\Delta g_i}{d_i} + \frac{3}{2} \frac{\Delta g_1}{d_1} \right), \quad (1.79)$$

где  $\Delta g_i$  — процентное содержание по массе  $i$ -й фракции;  $d_i$  — диаметр фракции;  $\Delta g_1$  — процентное содержание по массе минимальной по размеру зерна фракции;  $d_1 < 0,0025$  мм, причем

$$\frac{1}{d_i} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{d'_i} + \frac{1}{d''_i} \right),$$

где  $d'_i$  и  $d''_i$  — крайние диаметры зерен для данной фракции.

Используя эту методику определения  $d_3$ , И. Козени рассчитал скорость фильтрации для различных образцов песков по формуле

$$v_\phi = \frac{d_3^2 m^3}{120 (1-m)^2 \mu} \frac{\Delta p}{h} \quad (1.80)$$

и сравнил с экспериментально полученными данными. Результаты этого сравнения представлены в табл. 1.2. Из таблицы видно, что при весьма широком диапазоне изменения эффективного диаметра зерен ( $0,005 \leq d_3 \leq 0,23$  мм) вычисленные значения скорости фильтрации лишь в двух случаях из одиннадцати отклонялись от экспериментальных значений более чем на 70 %.

Таблица 1.2

№ опыта	$d_3$ , мм	$m$	$v_\phi$ , теор, м/день	$v_\phi$ , эксп, м/день	Погрешность, %
1	0,005	0,47	0,0158	0,0058	+ 172
2	0,005	0,40	0,922	0,86	+ 7,2
3	0,06	0,35	0,627	0,92	- 31,9
4	0,075	0,34	0,864	1,08	- 20,0
5	0,06	0,38	0,881	1,13	- 22,0
6	0,06	0,38	0,881	1,29	- 31,0
7	0,06	0,32	0,438	1,40	- 68,7
8	0,11	0,32	1,472	1,78	- 17,4
9	0,23	0,30	4,99	4,73	+ 5,5
10	0,23	0,37	11,59	6,24	+ 85,7
11	0,23	0,36	10,37	18,93	- 45,2

Рассматривая формулу Козени (1.80), легко заметить, что ее можно написать в следующем виде:

$$v_{\Phi} = \frac{d^2}{120\mu} F(m) \frac{\Delta p}{h},$$

где  $F(m) = m^3/(1-m)^2$  — так называемая функция пористости.

И. Козени [41] предложил остроумный способ проверки справедливости именно этой функции. Одни и те же образцы песка путем изменения плотности упаковки зерен приобретали различные значения пористости, сохраняя при этом, естественно, одни и те же функции распределения зерен по размерам. Пористость образцов и скорость фильтрации в них определялись экспериментально, а затем для каждого опыта вычислялись

$$\bar{v}_{\Phi} = v_{\Phi, \text{эксп}} / v_{\Phi, \text{мин}} \text{ и } F(m) = F(m) / F_{\text{мин}}(m),$$

где  $v_{\Phi, \text{мин}}$  и  $F_{\text{мин}}(m)$  — значения, относящиеся к опыту с наименьшей пористостью. И. Козени использовал экспериментальные данные Ф. Цункера [1939 г.], полученные для песков Хоэнбока, одерских песков и стеклянных шариков. Все полученные при этом исследовании результаты сведены в табл. 1.3. Данные, представленные

Таблица 1.3

Среда	$m$	$v_{\Phi}$ , см/с	$\bar{v}_{\Phi}$	$F(m)$	$\bar{F}(m)$	$1 - \frac{\bar{v}_{\Phi}}{\bar{F}(m)}$ , %
Песок Хоэнбока	0,396	0,0208	1,00	0,171	1,00	0,00
	0,411	0,0254	1,221	0,200	1,172	4,2
	0,434	0,0326	1,567	0,255	1,492	5,02
	0,438	0,0336	1,615	0,265	1,549	4,2
Одерский песок II	0,386	0,234	1,00	0,153	1,00	0,00
	0,404	0,297	1,269	0,187	1,220	4,0
	0,425	0,368	1,578	0,232	1,519	3,6
	0,341	0,135	0,577	0,091	0,595	3,0
Стеклянные шарики II	0,341	23,72	1,00	0,099	1,00	0,00
	0,356	28,38	1,22	0,107	1,20	1,7
	0,377	36,91	1,59	0,139	1,53	3,9
Стеклянные шарики I	0,336	20,01	1,00	0,086	1,00	0,00
	0,350	23,57	1,18	0,101	1,174	0,5
	0,384	31,14	1,56	0,149	1,73	9,8
Одерский песок I	0,339	27,71	1,00	0,088	1,00	0,00
	0,384	40,69	1,47	0,150	1,69	13,0
	0,422	65,22	2,35	0,224	2,52	6,7
Одерский песок II	0,350	12,81	1,00	0,101	1,00	0,00
	0,363	15,80	1,23	0,117	1,16	6,0
	0,403	22,85	1,78	0,184	1,82	2,2
Одерский песок III	0,363	6,04	1,00	0,118	1,00	0,00
	0,392	7,96	1,32	0,164	1,39	5,0
	0,419	10,79	1,79	0,218	1,85	3,2

ные в таблице, свидетельствуют о том, что функция пористости, предложенная И. Козени, вполне удовлетворительно описывает влияние пористости сыпучих песков на их проницаемость, что позволяет широко использовать рассматриваемую модель для изучения фильтрации в подобных условиях. Подтверждением этому служат расчеты, проведенные И. Козени для случая, когда к скважине осуществляется радиальная фильтрация жидкости при наличии промежутка высачивания [41].

Экспериментальные исследования проводились на цилиндрической модели пласта диаметром 42 и высотой 12,2 см. Вода фильтровалась от периферии модели к осевой скважине. Модель была заполнена песком с фракционным составом, представленным в табл. 1.4. На основании этих данных по формуле (1.52) был рас-

Таблица 1.4

Номер фракции	$d$ , мм	Масса фракции, г	Номер фракции	$d$ , мм	Масса фракции, г
1	1,0	67,4	4	2,5—4,0	234,37
2	1,0—1,5	14,5	5	4,0—5,0	94,2
3	1,5—2,5	46,35	6	5,0—6,0	43,42

считан эффективный диаметр, который оказался равным 0,77 мм. Далее, пользуясь формулой (1.48), автор определил коэффициент проницаемости модели, после чего, решив задачу о фильтрации к скважине при наличии промежутка высачивания, И. Козени рассчитал расход  $Q_{\text{выч}}$  при различном напоре  $h$  и сравнил с экспериментальными значениями  $Q_{\text{эксп}}$  (табл. 1.5). Результаты, представленные в табл. 1.5, говорят о хорошем соответствии экспериментальных и теоретических данных, что делает вполне обоснованным использование методики Козени для расчетов фильтрации в сыпучих грунтах.

Таблица 1.5

$h$ , см	$Q_{\text{выч}}$ , $\text{см}^3/\text{с}$	$Q_{\text{эксп}}$ , $\text{см}^3/\text{с}$
0,6	5,31	5,18
2,2	11,30	11,24
4,1	15,80	16,39
6,0	18,20	19,80
8,2	22,80	22,25

Как уже отмечалось, одной из основных проблем, возникающих при использовании модели и формулы Козени, является выбор надежного способа определения эффективного диаметра зерен в случае существования значительной дисперсии распределения их

по размерам. Достаточно полный обзор подобных способов содержится в книге Л. С. Лейбензона [15].

### 1.2.2. Исследования механизма двухфазной фильтрации

Закономерности совместного течения несмешивающихся жидкостей в пористой среде имеют очень важное значение для многих технологических процессов, широко используемых в практике. К таким процессам относятся добыча нефти и газа в условиях искусственного или естественного заводнения продуктивных пластов, осушение или, наоборот, ирригация почв, различные процессы химической технологии, связанные с осушением отфильтрованных осадков и т. п. Кроме того, знание этих закономерностей необходимо для решения весьма важного в нефтяной геологии вопроса о процессах разрушения и формирования нефтяных залежей. Именно поэтому проблема двухфазной фильтрации занимает в настоящее время одно из первых мест в списке наиболее актуальных и наименее разработанных вопросов подземной гидродинамики. Об этом свидетельствуют интересные результаты, полученные В. В. Скворцовым [1973 г.] после изучения и обобщения мнений ведущих специалистов в области теории фильтрации и разработки нефтяных месторождений. Первые экспериментальные исследования двухфазной фильтрации относятся к концу 30-х годов нашего века. Эти исследования показали, что при совместном течении в пористой среде несмешивающиеся жидкости оказывают друг на друга тормозящее действие. Эффект взаимного торможения оказался присущ любым парам фильтрующихся жидкостей, а его значение явно зависело лишь от насыщенности жидкостями пористой среды, причем все последующие попытки теоретического обоснования указанных эмпирических зависимостей были безуспешными. Это обстоятельство дало основание Дж. Беру [1970 г.] в своей обзорной работе отметить, что «до настоящего времени нет теоретического обоснования даже упрощенной картины совместного течения жидкостей в пористой среде». Тем не менее, количество экспериментальных исследований механизма двухфазной фильтрации даже на простейших гранулярных моделях очень мало.

**Изучение взаимного вытеснения жидкостей.** В работе Э. Четеневера и Дж. Кольхайна [34] описана гранулярная модель пористой среды, состоящая из двух стеклянных пластин, между которыми в один слой укладываются стеклянные или люситовые шарики диаметром 175 мкм. При этом стеклянные шарики лучше смачиваются водой, а люситовые — нефтью. Путем использования специального вибратора и аккуратного постукивания модели в процессе ее заполнения авторам удалось добиться упорядоченной укладки шариков, имеющей ромбовидную форму. Полученная таким образом модель заполнялась подкрашенной водой или бесцветной прозрачной нефтью, после чего происходило вытеснение одной фазы другою. В различных экспериментах менялись вытесняющая и вытесняемая фазы, скорость вытеснения, а также тип

смачиваемости сферических частиц модели. В процессе эксперимента производилось микрофотографирование модели, позволяющее визуально наблюдать распределение в ней фаз. Опыты имели сугубо качественный характер: кроме скорости вытеснения, которая менялась в пределах от десятков до нескольких сотен сантиметров в секунду, параметры течения не измерялись. Плотность и вязкость нефти равнялись соответственно  $0,9 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> и  $14 \times 10^{-3}$  Па · с, ее поверхностное натяжение —  $6 \cdot 10^{-3}$  Н/м.

Наиболее важным результатом этих исследований явилось установление существования двух совершенно различных режимов потока в зависимости от скорости фильтрации. Оказалось, что если скорость вытеснения меньше 0,35 см/с, то структура двухфазного потока представляет собой сеть соединенных друг с другом каналов (струй) каждой из фаз. Причем увеличение насыщенности модели одной из фаз влечет за собой увеличение ширины струек, по которым течет эта фаза. Вторым типом течения, наблюдавшегося при скоростях вытеснения, больших 0,35 см/с, является течение, при котором несмачивающая фаза перемещается в виде пятен, или, как их называют авторы работы, «слизняков» («slug flow»). При этом авторы отмечают увеличение числа пятен с ростом скорости потока в модели. Кроме медленно перемещающихся пятен в потоке постепенно появляются и более мелкие глобулы несмачивающей фазы, имеющие примерно такие же размеры, как единичные поры. Смачивающая фаза остается при таком типе течения непрерывной.

Интересными являются также наблюдения авторов, касающиеся процесса формирования остаточной насыщенности. Если говорить о несмачивающей фазе (нефти), то в зависимости от условий и физических характеристик системы остаточная насыщенность может колебаться в широких пределах. Размеры областей, занятых остаточной нефтью, могут достигать иногда размеров модели. Наименьшая остаточная нефтенасыщенность образуется в результате обхода смачивающей фазой нескольких частиц. Подобные зоны несмачивающей фазы не могут быть разрушены даже при скоростях около 3,5 см/с. Другой формой остаточной нефти являются глобулы, размер которых меньше размера пор. Интересным свойством этих глобул является наблюдаемое вращение в процессе заворота модели.

Наиболее часто встречающейся формой остаточной воды в исследуемых моделях являются подвешенные кольца вокруг контактов между сферами и плоскими пластинами, а также между соседними сферами. К сожалению, авторы не указывают, при каких скоростях потока образуется остаточная насыщенность в виде подвешенных колец.

В этой же работе авторы сообщают о других своих исследованиях, проводившихся с искусственными образцами из консолидированной соли, через которые пропускались несмешивающиеся фазы; одной из них был воск. После осуществления процесса двухфазной фильтрации в нагретой системе ее охлаждали и, растворя-

ряя соль, устанавливали структуру потока. Эти эксперименты также показали наличие струйного характера течения.

Результаты, полученные Э. Четеневером и Дж. Кольхауном, хоть и представляют значительный интерес, но не дают тем не менее четких количественных критериев существования в пористой среде тех или иных форм двухфазного потока.

**Изучение механизма стационарной двухфазной фильтрации.** Для установления количественной характеристики существования в пористой среде той или иной формы двухфазного течения необходимо использовать такую экспериментальную установку, которая позволяла бы измерять одновременно все параметры двухфазного потока с фиксированием картины распределения фаз в поровом пространстве. Из этих соображений в качестве образца пористой среды была выбрана плоская гранулярная структурная модель, толщина которой настолько мала, что распределение фаз вдоль этого размера можно было бы считать постоянным. В отличие от модели, описанной в работе [34], регистрация распределения фаз между частицами была основана на том, что в качестве модели нефти использовался раствор органического люминофора в керосине, обладающего ярким синим свечением в ультрафиолетовом свете, тогда как вода была прозрачной и бесцветной. Для моделирования зерен пористой среды использовались бронзовые шарики диаметром от 100 до 110 мкм.

Необходимо учитывать, что скорости фильтрации и градиенты давления в модели не должны слишком сильно отличаться (по характеристикам подобия) от значений этих величин в условиях реальных нефтяных пластов. В связи с этим необходимо рассмотреть безразмерный параметр  $\Pi$ , представляющий собой отношение капиллярных и вязких сил в двухфазном потоке и введенный в качестве критерия подобия еще М. Левереттом [1941 г.]:

$$\Pi = m\sigma \cos \theta / (\mu v_\phi), \quad (1.81)$$

где  $m$  — пористость;  $\sigma$  — удельное поверхностное натяжение;  $\theta$  — контактный угол;  $\mu$  — вязкость;  $v_\phi$  — скорость фильтрации жидкости.

Если в этой формуле скорость фильтрации выразить через дебит скважины

$$Q = 2\pi r h v_\phi,$$

то получим следующее выражение:

$$\Pi = 2\pi r h m \sigma \cos \theta / (\mu Q),$$

где  $r$  — расстояние от оси скважины;  $h$  — мощность пласта. Пусть  $\sigma = 3 \cdot 10^{-2}$  Н/м;  $\cos \theta = 1$  (условие полной смачиваемости);  $\mu = 10^{-3}$  Па · с;  $m = 25\% = 0,25$ . Тогда

$$\Pi = 4,7 \cdot 10^2 r h / Q.$$

Если дебит скважины измерять кубическими метрами в сутки, а расстояние от оси скважины и мощность пласта — метрами, то

$$\Pi = 0,41 \cdot 10^7 r h / Q. \quad (1.82)$$

Рассмотрим участок нефтяного пласта мощностью 1 м на расстоянии 1 м от оси скважины, работающей с дебитом 100 м<sup>3</sup>/сут. В этом случае формула (1.82) дает для  $\Pi$  значение  $4,1 \cdot 10^4$ . Естественно, что это значение будет расти при удалении исследуемого участка пласта от оси скважины, а также при уменьшении ее дебита и росте мощности пласта.

Воспользуемся найденным значением  $\Pi = 4,1 \cdot 10^4$  для определения возможных значений скорости течения жидкости в модели. Из формулы (1.81) получим

$$v_{\phi} = m\sigma/(\Pi\mu).$$

Подставив в эту формулу  $m = 0,5$  (обычные значения пористости искусственных несцементированных сред);  $\Pi = 4 \cdot 10^4$ ;  $\sigma = 3 \times 10^{-2}$  Н/м и  $\mu = 10^{-3}$  Па·с, найдем, что  $v_{\phi} = 3,75 \cdot 10^{-2}$  см/с.

Если учесть, что площадь потока в плоских моделях обычно мала и составляет десятые или сотые доли квадратного сантиметра, то расход через модель для сохранения условий подобия по параметру  $\Pi$  должен измеряться значениями, не большими  $10^{-2}$  см<sup>3</sup>/с.

Таким образом, общая схема экспериментов состоит в том, что в специальную плоскую гранулярную модель пористой среды подаются несмешивающиеся жидкости, одна из которых обладает способностью люминесцентного свечения в ультрафиолетовом свете. При этом измеряются расход обеих фаз, перепад давления на модели и по этим данным вычисляются значения относительных фазовых проницаемостей:

$$k_n^* = Q_n \mu_n l / (k S \Delta p);$$

$$k_v^* = Q_v \mu_v l / (k S \Delta p),$$

где  $k^*$  — относительные фазовые проницаемости;  $Q$  и  $\mu$  — расход и вязкость фазы соответственно;  $S$ ,  $l$  и  $k$  — площадь сечения, длина и абсолютная проницаемость модели соответственно;  $\Delta p$  — перепад давления; индексы « $n$ » и « $v$ » относятся к нефти и воде. Одновременно с этим с помощью установленной над моделью фотокамеры фотографируется картина распределения фаз в модели, которая освещается сильным источником ультрафиолетового излучения без видимой части спектра. Изучение полученных фотографий под микроскопом позволяет вычислить насыщенность модели обеими фазами и установить характер распределения фаз в поровом пространстве.

Одним из наиболее важных результатов проведенных экспериментов следует считать количественную оценку условий двухфазной фильтрации, при которых поток продолжает сохранять струйный характер течения. В процессе опытов было установлено, что несмачивающая фаза (керосин) начинает двигаться в виде пятен при градиентах давления, больших  $10^{-5}$  МПа/м; это приблизительно соответствует суммарному расходу обеих фаз через модель, равному  $0,7 \cdot 10^{-2}$  см<sup>3</sup>/с. Для вычисления безразмерного параметра

$\Pi$ , соответствующего этим данным, можно воспользоваться двумя, казалось бы, эквивалентными формулами:

$$\Pi = \frac{m \sigma \cos \theta}{\mu v_\Phi} \quad \text{и} \quad \Pi = \frac{m \sigma \cos \theta}{k \Delta p / l},$$

так как согласно закону Дарси

$$v_\Phi = \frac{k}{m} \frac{\Delta p}{l}.$$

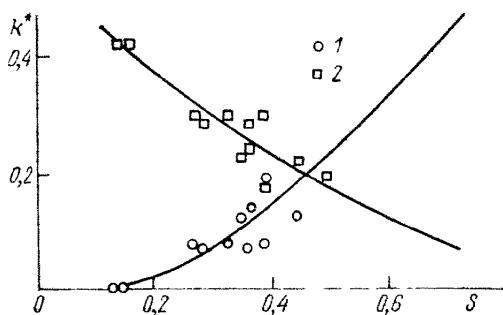
В условиях двухфазной фильтрации между скоростью и градиентом давления не существует линейной зависимости, поэтому формулы не равноправны. Кроме того, при использовании первой из этих формул возникает вопрос о том, какое значение вязкости необходимо в ней учитывать — первой или второй из фильтрующихя фаз. В связи с этими соображениями для вычисления  $\Pi$  целесообразно пользоваться второй формулой. Подставим в нее численные значения соответствующих величин, считая что вода полностью смачивает твердое тело ( $\cos \theta = 1$ ):  $m = 0,5$ ;  $\sigma = 3 \times 10^{-2}$  Н/м;  $k = 0,5 \cdot 10^{-6}$  см<sup>2</sup>;  $\Delta p / l = 10^{-5}$  МПа/м. Тогда  $\Pi_{\text{кр}} = 0,3 \times 10^4$ . Таким образом, можно заключить, что в условиях двухфазной фильтрации струйный характер течения сохраняется при  $\Pi > \Pi_{\text{кр}}$ . (Если использовать формулу, включающую скорость фильтрации, то критическое значение параметра  $\Pi$  возрастет в 5 раз.)

Непосредственные наблюдения двухфазного потока в модели показывают, что при дальнейшем увеличении скорости (уменьшении параметра  $\Pi$ ) размер движущихся пятен несмачивающей фазы становится все меньше и эти пятна превращаются в капли эмульсии.

На рис. 1.10 представлены экспериментальные кривые относительных фазовых проницаемостей (ОФП). Анализ этих кривых свидетельствует о том, что они вполне идентичны кривым, полученным при исследовании обычных образцов пористых горных пород. Тем самым подтверждается реальная возможность изучения механизма двухфазного течения на плоских гранулярных моделях пористых сред.

Рис. 1.10. Кривые ОФП, полученные на плоской модели пористой среды.

1 — вода; 2 — керосин.



Изучение элементов распределения фаз в модели при двухфазной фильтрации показало, что это распределение является достаточно сложным для того, чтобы какими-либо простейшими методами можно было найти количественные закономерности, связывающие кривые ОФП с характером распределения фаз в поровом пространстве. Тем не менее проведенные эксперименты показывают, что на базе описанной экспериментальной установки эта принципиальная задача вполне разрешима. С другой стороны, полученные результаты позволяют с новыми позиций подойти к рассмотрению основных положений существующих в настоящее время теорий механизма совместного течения несмешивающихся жидкостей в пористой среде.

Одна из этих теорий основана на представлении реальных пористых сред сложными капиллярными системами, в которых имеется набор капилляров разного диаметра. (Подробное изложение этой теории содержится в гл. 2.) Сущность этих представлений состоит в том, что форма кривых ОФП обусловливается наличием в пористой среде капилляров разного диаметра, из-за чего более тонкие из них заполняются в первую очередь смачивающей фазой. В используемых в наших опытах моделях пористой среды роль тонких капилляров должны, очевидно, выполнять места контактов между шариками, где капиллярные силы наиболее значительны. Следовательно, исходя из капиллярной теории двухфазной фильтрации, можно было бы ожидать одновременного присутствия в каждой поре обеих фаз: в местах контактов — смачивающей фазы и в центре поры — несмачивающей. Микроскопический анализ распределения фаз в пористом пространстве модели показывает, что подобное явление не наблюдается, т. е. каждая пора заполнена либо смачивающей фазой, либо несмачивающей. Это обстоятельство заставляет сомневаться в том, что наличие в породе пор различных диаметров может служить определяющим фактором, обусловливающим форму кривых ОФП.

Другой теорией механизма двухфазной фильтрации является теория диспергирования, которая связывает ОФП со степенью раздробленности фильтрующих фаз. При этом предполагается, что фазы двигаются в диспергированном состоянии, т. е. их движение происходит в виде пятен больших или меньших размеров. Действительно, при градиентах давления, больших  $10^{-5}$  МПа/м (что соответствует значениям  $\Pi < \Pi_{кр}$ ), наблюдалась отрыв участков несмачивающей фазы и дальнейшее их движение в виде пятен. Более того, при увеличении градиента (уменьшении безразмерного параметра  $\Pi$ ) размеры отрывающихся пятен становятся все меньше вплоть до превращения несмачивающей фазы в эмульсию. В наших опытах иногда эмульсия образовывалась еще во входной камере прибора или на выходе из нее. В этом случае можно было наблюдать, как в процессе фильтрации в пористой среде происходит постепенная коалесценция глобул несмачивающей фазы и в конце пути фильтрации у выходной камеры модели картина фильтрации становится почти стационарной. Но, как это уже от-

мечалось, подобные явления происходят при градиентах давления, больших  $10^{-5}$  МПа/м. При меньших градиентах отдельные участки фазы, ограниченные со всех сторон другой фазой, не двигаются и не изменяют свои контуры. Отсюда следует вывод, что теория диспергирования не может объяснить механизм двухфазной фильтрации при достаточно больших значениях параметра  $\Pi$ .

Ранее с помощью формулы (1.82) было установлено, что на расстоянии 1 м от оси скважины, работающей с дебитом 100 м<sup>3</sup>/сут, при мощности пласта 1 м  $\Pi = 4 \cdot 10^4$  (более чем на порядок превышает найденное экспериментально значение  $\Pi_{kp}$ ). Таким образом, даже при интенсивной эксплуатации нефтяного месторождения в непосредственной близости от работающей скважины градиенты давления в продуктивном пласте достаточно малы, а параметр  $\Pi$  на порядок больше  $\Pi_{kp}$ , т. е. того значения, при котором в плоской гранулярной модели пористой среды происходит разрыв непрерывности фильтрующихся фаз. Отсюда можно заключить, что в большинстве случаев двухфазной фильтрации в реальных условиях продуктивных пластов нефть и вода перемещаются в пористой среде в виде непрерывных струек с сохраняющимися контурами. Тем более справедливым это утверждение становится в условиях миграции углеводородов, при которой скорости фильтрации и градиенты давления на несколько порядков меньше, чем при добыче нефти.

Основной задачей дальнейших экспериментальных исследований на гранулярных структурных моделях пористой среды должно явиться установление строгих количественных зависимостей между параметрами распределения фаз в пористой среде и формой кривых ОФП.

### 1.2.3. Экспериментальные исследования остаточной насыщенности

Известно, что в нефтяной геологии широко распространена концепция так называемой связанный воды. Согласно этой концепции часть погребенной воды в коллекторе не может быть ни замещена нефтью, ни извлечена из пор какими-либо методами, кроме испарения. Это объясняют тем, что некоторая часть пластовой воды находится в пленочном состоянии и связана молекулярными силами с поверхностью минерального скелета породы, при этом количество подобной пленочной воды должно зависеть от удельной поверхности породы. Результаты исследования течения жидкостей в сверхтонких щелях [22] показали, что толщина пленки воды, обладающей аномальными свойствами, не должна превышать 16 нм. Таким образом, легко оценить суммарное количество связанный пленочной воды в коллекторе, зная его удельную поверхность. Ф. И. Котяхов [1977 г.] указывает, что удельная поверхность алевритов и смешанных литологических разностей не превышает  $2 \cdot 10^5$  1/м. Пелиты характеризуются большими значениями удельной поверхности, тогда как для псаммитов эти зна-

чения не превышают  $10^5$  1/м. Тогда для алевритов и смешанных литологических разностей количество связанной воды в породе будет равно приблизительно  $3 \cdot 10^{-3}$ .

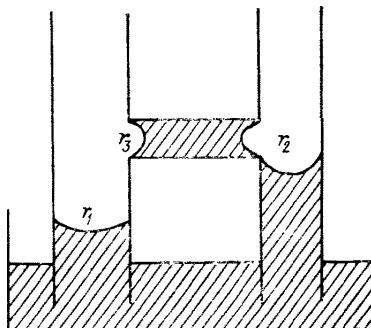
Таким образом, процентное содержание связанной воды (к объему пор) будет определяться равенством  $\alpha = v/m$ , где  $m$  — пористость. Например, для  $m = 0,2$   $\alpha = 1,5\%$ , для  $m = 0,05$   $\alpha = 6\%$  и т. д. Итак, если даже предположить, что песчаник с пористостью 0,05 имеет удельную поверхность, равную  $2 \cdot 10^5$  1/м, что практически невероятно, то и в этом случае только 6 % порового пространства будет занято пленкой воды с аномальными свойствами. Между тем породы, характеризующиеся пористостью около 0,05, содержат до 50—70 % связанной воды. Возникает вопрос, почему эта вода, физико-химические свойства которой не отличаются от свойств обычной пластовой воды, может быть извлечена из пор породы только методами испарения? Ответ на этот вопрос следует искать лишь в том, что при извлечении части воды из породы последняя становится насыщенной какими-либо двумя фазами: вода—нефть, вода—газ и т. п., в связи с чем возникают значительные капиллярные силы,держивающие воду в порах. Поэтому весьма большой интерес представляют экспериментальные исследования Н. Морроу [44], который провел количественное изучение остаточной смачивающей фазы на различных гранулярных моделях пористых сред.

Прежде всего следует особо остановиться на используемой автором терминологии. Для обозначения насыщенности смачивающей фазой, находящейся в пористой среде в диспергированном состоянии, Н. Морроу пользуется названием «неуменьшаемая насыщенность», имея в виду, что значение этой насыщенности нельзя уменьшить, используя традиционные механические способы дренажирования (в их число не входит, естественно, центрифугирование насыщенных образцов при сверхвысокой частоте вращения). Так как в отечественной литературе для этой величины принят термин «остаточная насыщенность», то в дальнейшем мы будем использовать именно это наименование. Автор справедливо отмечает, что некоторые среды не могут быть охарактеризованы четко фиксируемыми значениями остаточной насыщенности. В таких средах увеличением внешнего давления дренажирования всегда можно добиться хотя бы незначительного уменьшения насыщенности. К подобным средам, например, относятся горные породы, содержащие в своем составе значительные количества глинистых минералов.

Интерес, который представляют исследования Н. Морроу, связан также с тем, что остаточная насыщенность является ни чем иным, как крайней точкой на графике «относительные фазовые проницаемости — насыщенность». Если иметь в виду непрерывный характер кривых ОФП, детальное исследование факторов, влияющих на их крайнюю точку, представляется очень интересным.

Основная концепция автора сводится к тому, что смачивающая фаза теряет подвижность в пористой среде в тот момент, когда отдельные ее части становятся гидродинамически изолированными,

Рис. 1.11. Сеточная модель элемента пористой среды по Н. Морроу [44].



причем значительная часть жидкости в этих условиях находится в виде подвешенных колец вокруг контактов между зернами.

Для иллюстрации своей концепции капиллярного удержания смачивающей фазы в пористой среде автор предлагает простую сеточную модель элемента этой среды, состоящую из трех капилляров, как это изображено на рис. 1.11. Легко убедиться, что если  $r_1 > r_2 > r_3$ , то в процессе дренирования жидкость, содержащаяся в капилляре с радиусом  $r_3$ , при любых условиях не может быть вытеснена и остается в элементе, образуя остаточную насыщенность.

В опытах Н. Морроу в качестве основной экспериментальной гранулярной модели пористой среды использовалась случайная упаковка частиц. Для установления влияния свойств жидкостей и частиц на остаточную насыщенность эти свойства по очереди подвергались изменениям. Для дренирования насыщенных моделей использовались методы дренажной колонки и полупроницаемой мембранны (подробнее об этом методе рассказано в разделе 2.2.3). Остаточная насыщенность измерялась с высокой точностью весовым методом.

Для изучения влияния поверхностного натяжения на остаточную насыщенность из модели, состоящей из случайно упакованных стеклянных шариков, вытеснялись растворы метилового спирта в воде различной концентрации. Поверхностное натяжение в этих опытах изменялось от  $2,2 \cdot 10^{-2}$  до  $7,1 \cdot 10^{-2}$  Н/м. Остаточная насыщенность при этом незакономерно изменялась от 8,0 до 8,5 %.

Влияние вязкости на остаточную насыщенность исследовалось путем использования различных жидкостей, вязкость которых менялась от  $0,4 \cdot 10^{-3}$  Па · с для гептана до 1,2 Па · с для одной из фракций нефти (флаксон 680). Эти исследования также не показали заметного влияния вязкости на остаточную насыщенность (последняя менялась в пределах от 8,3 до 8,6 %). Были проведены специальные опыты с вязкопластичными жидкостями, которые также не показали увеличения остаточной насыщенности с ростом эффективной вязкости.

Далее была проведена серия опытов для установления возможного влияния смачиваемости на остаточную насыщенность. Для этих исследований в модели использовались микросфера из фторопласта, контактный угол для которого при смачивании различными жидкостями меняется от  $0^\circ$  для пентана до  $108^\circ$  для воды. Эти эксперименты также не показали заметного влияния смачиваемости на остаточную насыщенность. Автором исследовался, кроме того, частный случай смешанной смачиваемости, когда одна часть частиц была смачиваемой, а другая — несмачиваемой по отношению к испытуемой жидкости. В результате экспериментов выяснилось, что остаточная насыщенность такой гетерогенной в смысле смачивания системы близка к 8 %. Эти данные, вообще говоря, противоречат результатам И. Фэтта и У. Кликоффа [1959 г.], но в связи с высокой тщательностью экспериментов Н. Морроу его данные кажутся нам более убедительными.

Большой цикл исследований был проведен также для установления влияния свойств среды на остаточную насыщенность. Прежде всего было установлено, что размер пор не влияет на эту величину: при изменении средних диаметров микросфер от 54 до 4420 мкм остаточная насыщенность незакономерно изменялась в пределах от 6 до 8 %. Более того, модели, в которых использовались сферы различных диаметров, но хорошо перемешанные друг с другом, показали те же значения остаточной насыщенности, близкие к 8 %. Несколько больший разброс в значениях остаточной насыщенности имел место в опытах, где использовались частицы различной формы, вплоть до частиц, обладающих острыми углами. В этих опытах отмечались незакономерные изменения остаточной насыщенности от 8 до 12 %. Аналогичные результаты получены и для моделей, частицы которых распределены по лог-нормальному закону.

Путем тонко поставленных экспериментов автору удалось показать, что увеличение остаточной насыщенности до 25 % и более (а именно такие значения характерны для реальных пород-коллекторов нефти и газа) обусловливается существованием в матрице, имеющей более крупные поры, областей с более мелкими порами. В процессе дренирования жидкость покидает крупнопористую матрицу, оставляя полностью насыщенными мелкопористые включения. Этот механизм автору удалось подтвердить элементарными количественными расчетами остаточной насыщенности неоднородных систем, с которыми проводились эксперименты.

Выводы, полученные в этой работе, частично противоречат общепринятым представлениям о механизме образования остаточной насыщенности, однако тщательность, полнота и убедительность экспериментов Н. Морроу заставляют признать справедливость их результатов.

Таким образом, можно заключить, что значительные количества связанный воды в порах коллектора обязаны в основном не силам молекулярного притяжения, а наличию капиллярных сил, туликовых пор и главным образом существованию в реальных горных по-

родах неоднородного распределения областей с крупными и мелкими порами. С другой стороны, количество остаточной воды в нефтяном коллекторе во многом должно определяться условиями его насыщения углеводородами в процессе формирования месторождения. Однако многие лабораторные методы определения связанной воды в образцах горных пород характеризуются именно тем, что они не предусматривают зависимости количества связанной воды от процесса насыщения породы нефтью или газом; это, естественно, является их недостатком. Теоретическая основа методики определения количества связанной воды должна состоять в изучении процесса вытеснения (замещения) воды нефтью.

Изложенные выше результаты экспериментов Н. Морроу позволяют считать, что в процессе заполнения коллектора нефтью соотношение между коэффициентами нефте- и водонасыщенности должно определяться не только и не столько структурой порового пространства, сколько механизмом вытеснения нефти водой и неоднородностью коллектора. Следует оговориться, что подобные выводы могут быть отнесены с полным основанием лишь к таким коллекторам, где отсутствуют (или почти отсутствуют) всякого рода глинистые разности. Это объясняется тем, что частицы глины при контакте с водой набухают, связывая воду химическим путем.

#### 1.2.4. Экспериментальные исследования процессов деформации

Наиболее полные исследования процессов упругой деформации на физических гранулярных моделях были выполнены И. Фэттом [37], который разработал специальную методику, предусматривающую возможность измерения пористости модели  $m$ , ее удельной электропроводности  $\chi$  и проницаемости  $k$  при различных значениях эффективного давления. Сама модель состояла из 4000 шариков диаметром 0,155 мм, выполненных из резины и стекла. Процентное содержание «мягких» шариков в модели менялось в широких пределах: от 0 до 100 %, что моделировало различное содержание в горной породе более «мягкого» цементирующего зё尔на вещества. При сравнительно небольших давлениях шарики помещались в толстостенный цилиндр, в котором мог перемещаться поршень, изменяя нагрузку на модель. На дне цилиндра и на поверхности поршня предусмотрены специальные канавки для свободного перемещения жидкости в модели. Электрическое сопротивление измерялось с помощью двух сетчатых электродов, выполненных из нержавеющей стали. Количество протекающей через модель жидкости измерялось с помощью хорошо отградуированных емкостей. При больших давлениях модель, насыщенная соляным раствором, помещалась в тонкостенную полиэтиленовую емкость, которая с помощью специальных трубок и сальников сообщалась с атмосферой. При этом сама емкость с моделью заключалась в толстостенный сосуд, заполненный маслом, в котором можно было создавать значительные давления. Изменение объема модели счита-

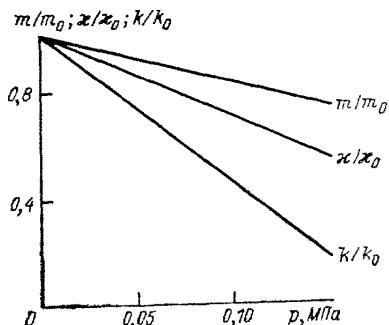


Рис. 1.12. Относительные изменения пористости ( $m/m_0$ ), удельной электрической проводимости ( $\chi/\chi_0$ ) и проницаемости ( $k/k_0$ ) гранулярной модели, составленной из резиновых шариков, под действием давления [37].

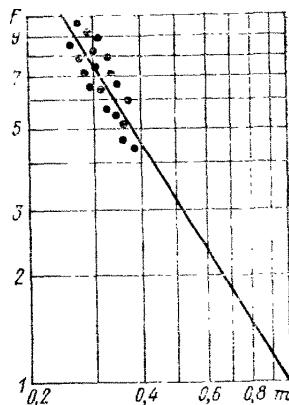


Рис. 1.13. Зависимость фактора пористости  $F$  модели, составленной из смеси резиновых и стальных шариков, от пористости  $m$  в диапазоне давлений от 0 до 0,35 МПа [37].

лось равным изменению объема ее пор, а электрические измерения проводились с помощью мостовой схемы.

Серия экспериментов была проведена также с моделью, состоящей не из сферических, а из неправильной формы кубических частиц размером около 0,65 мм. Целью экспериментов являлось непосредственное изучение изменения свойств модели под давлением, а также проверка некоторых положений теории Гассмана—Брандта, в частности справедливости формулы (1.77). Результаты экспериментов на модели с резиновыми шариками представлены на рис. 1.12.

Если ввести в рассмотрение фактор пористости  $F$ , равный отношению удельного электрического сопротивления электролита к удельному сопротивлению насыщенной этим электролитом модели, то зависимость  $F$  от пористости при изменении давления от 0 до 0,35 МПа будет характеризоваться графиком на рис. 1.13. На рис. 1.14 представлена аналогичная зависимость для модели, состоящей из кубических резиновых частиц. При этом ясно фиксируется анизотропность подобной упаковки.

На рис. 1.15 представлены экспериментальные данные об изменении объема гранулярной модели, составленной из резиновых и стальных сферических частиц, в зависимости от приложенного к ней давления. Точками показаны экспериментальные данные, сплошными линиями — результаты вычислений по формуле (1.77). Этот график свидетельствует о том, что теория Брандта, развитая И. Фэттом, вполне удовлетворительно описывает поведение гранулярной модели под нагрузкой. Использование модели из смеси шариков разной твердости позволяет также очень приближенно оценить сжимаемость цемента в сцементированных песчаниках.

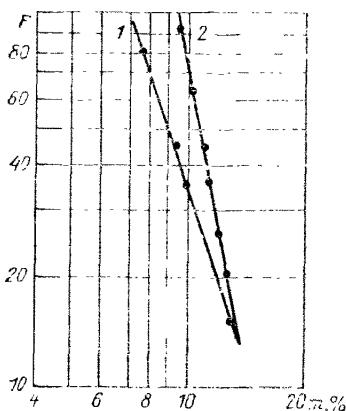


Рис. 1.14. Зависимость фактора пористости гранулярной модели из резиновых кубиков от одноосного нагружения [37].

Направление измерения электропроводности: 1 — вдоль оси нагрузжения, 2 — перпендикулярно к оси нагрузжения.

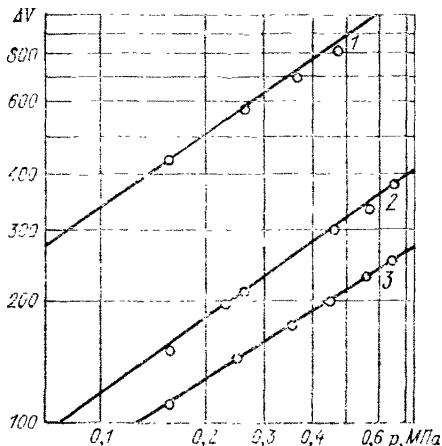


Рис. 1.15. Изменение общего объема модели из смеси резиновых и стальных шариков в зависимости от приложенного давления [Фэтт И., 1957 г.]

Резиновых шариков, %: 1 — 100, 2 — 35, 3 — 25.

Одним из важных выводов, сделанных автором на основании анализа графиков 1.13 и 1.14, является заключение о возможной форме пор в реальных сцементированных нефтяных песчаниках. Структура порового пространства сцементированных пород-коллекторов нефти и газа представляет собой сетку каналов с относительно плоскими стенками. Поровое пространство реальной горной породы гораздо больше похоже на поровое пространство деформированной модели из резиновых кубиков, чем на поры между шариками. Это, по-видимому, объясняется тем, что поры в песчаниках в результате цементации представляют собой каналы, имеющие два измерения, гораздо большие, чем третье. К этому же выводу пришел и А. Райдер [46]. Очевидно, справедлива та точка зрения, согласно которой изменение пористости песков в результате их цементации при геологическом процессе метаморфизации похоже на изменение пористости модели из резиновых шариков под действием внешнего сжимающего напряжения. Под давлением места контактов между шариками уплотняются и уплощаются так же, как уплощаются контакты между зернами при процессах растворения, твердения и цементации. После того как пески цементируются, их поры становятся похожи на каналы с плоскими стенками. Дальнейшее сжатие сцементированного песка ведет к радиальному изменению размера пор и к смыканию щелевидных каналов.

### Капиллярные модели

В отличие от гранулярных структурные модели капиллярного типа основаны на моделировании порового пространства горных пород пучками непересекающихся капилляров, которые могут различаться как размерами, так и ориентировкой в пространстве. Вообще говоря, капиллярные модели во многом сходны с гранулярными (особенно с моделью Козени), но тем не менее если число, форма, сечение и длина капилляров в гранулярной модели определяются конфигурацией слагающих ее частиц, то в капиллярных моделях эти величины связаны с макроскопическими характеристиками пористой системы. При этом могут быть осуществлены два принципиально разных подхода к определению параметров моделируемого пучка. Первый, предложенный впервые И. Козени и развитый П. Карманом, заключается в предположении, что гидравлический радиус единственного капилляра в единице объема модели равен среднему гидравлическому радиусу моделируемой пористой среды, определенному как частное от деления пористости среды на ее удельную поверхность, а пористость модели эквивалентна пористости моделируемой среды. В этом случае оказываются связанными друг с другом пористость, проницаемость и удельная поверхность модели (см. рис. в. 1). Другой подход предусматривает непосредственную связь между радиусом капилляров в пучке, пористостью и проницаемостью модели. Если первый из рассмотренных подходов получил широкое развитие в разработке методов определения удельной поверхности неконсолидированных пористых сред, то второй явился основой для исследования сложных капиллярных явлений в горных породах.

В процессе использования подобных моделей для описания совместного течения жидкостей в сцементированных горных породах возникли новые трудности, которые привели к необходимости ввести в рассмотрение так называемые капиллярно-статистические модели с капиллярами переменного сечения. Последовательному рассмотрению всех этих моделей и посвящена настоящая глава.

## 2.1. Модель Козени—Кармана

Для характеристики движения жидкости в пористой среде понятие гидравлического радиуса впервые было введено, по-видимому, Ф. Блейком [1921 г.], который предложил выразить известное число Рейнольдса

$$Re = \rho v r_0 / \mu \quad (2.1)$$

и коэффициент гидравлического сопротивления

$$\Psi = \frac{r_0}{\rho v^2} \frac{\Delta p}{l} \quad (2.2)$$

через гидравлический радиус пористой среды

$$r_0 = m/s_V, \quad (2.3)$$

где  $\rho$ ,  $\mu$  и  $v$  — плотность, вязкость и средняя скорость движения жидкости в порах соответственно;  $m$  — пористость среды;  $\Delta p$  — перепад давления на длине  $l$ ;  $s_V$  — удельная поверхность, рассчитанная на единицу объема среды. Учитывая известное соотношение Дююн—Форхгеймера  $v_\phi = v m$  и внося выражение (2.3) в формулы (2.1) и (2.2), получаем

$$Re = \frac{\rho v_\phi}{\mu s_V} \quad \text{и} \quad \Psi = \frac{m^3}{\rho v_\phi^2 s_V} \frac{\Delta p}{l}.$$

Найденные таким образом комплексы  $\Phi$ . Блейк использовал для изучения турбулентного движения в крупнопористых средах. Но эти же комплексы можно использовать и для ламинарной фильтрации жидкости в пористой среде. В этом случае согласно общим законам гидродинамики [16] можно написать, что

$$\Psi = c/Re,$$

где  $c$  — некоторая постоянная. Подставив сюда полученные выражения для  $Re$  и  $\Psi$ , найдем

$$v_\phi = \frac{m^3}{c \mu s_V^2} \frac{\Delta p}{l}. \quad (2.4)$$

Если учесть, что

$$s_m = s_V/m; \quad s_t = s_V(1 - m); \quad s_t = s_m m (1 - m), \quad (2.5)$$

где  $s_m$  и  $s_t$  — удельные поверхности, рассчитанные на единицу объема пор и твердой фазы соответственно, то формулу (2.4) можно переписать в виде

$$v_\phi = \frac{1}{c \mu s_t^2} \frac{m^3}{(1 - m)^2} \frac{\Delta p}{l}.$$

Сравнив это выражение с известным законом Дарси

$$v_\phi = \frac{k}{\mu} \frac{\Delta p}{l},$$

найдем

$$k = m^3 / [c s_t^2 (1 - m)^2]. \quad (2.6)$$

Но это соотношение с точностью до постоянной  $c$  совпадает с формулой Козени (1.51), который, по-видимому, не зная исследований Ф. Блейка, получил ее другим путем и несколько в другом виде (1.48).

### 2.1.1. Принципы построения модели

П. Карман [1937 г.], проанализировав формулы (1.48), (1.51) и (2.6), пришел к выводу о необходимости учитывать фактор извилистости  $\varphi$  поровых каналов в среде не только при переходе от длины пути потока  $l$  в модели Козени к истинной длине в среде  $h$  (И. Козени, как это уже указывалось, принял  $\varphi = 2$ ), но и при переходе от скорости фильтрации к средней скорости в поровом канале в соотношении Дюпон—Форхгеймера, которое в этом случае будет выглядеть следующим образом:

$$v_\varphi = m v l / h.$$

Тогда уравнение (1.51) принимает следующий вид:

$$k = m^3 / [\gamma s_t^2 (1 - m)^2 \varphi^2]. \quad (2.7)$$

Это соотношение представляет собой одну из модификаций формулы Козени—Кармана. Значения коэффициента  $\gamma$  для различных форм поперечного сечения моделируемого канала, известные из приближенных и точных решений уравнений Навье—Стокса, даны в табл. 2.1 [33].

Таким образом, для большинства возможных типов отверстий коэффициент  $\gamma$  лежит в пределах от 1,7 до 3 и его в среднем можно принять равным 2,5 для канала произвольного сечения. С другой стороны, П. Карман считает, что среднее значение извилистости  $\varphi = \sqrt{2}$ , отсюда, подставляя эти значения для  $\gamma$  и  $\varphi$  в со-

Таблица 2.1

Форма поперечного сечения канала	$\gamma$
Круг	2,00
Эллипс с полуосами $a$ и $b$ :	
$a = 2b$	2,13
$a = 10b$	2,45
Квадрат	1,78
Прямоугольник со сторонами $a$ и $b$ :	
$a = 2b$	1,94
$a = 10b$	2,65
Щель с параллельными стенками	4,00
Равносторонний треугольник	1,67
Щель с коаксиальными стенками	2,0—3,0

отношение (2.6), получаем формулу Козени—Кармана в наиболее широко известном виде:

$$k = m^3 / [cs_t^2(1 - m)^2] = m^3 / (cs_V^2), \quad (2.8)$$

где  $c = 5$  — так называемая постоянная Кармана.

Таким образом, капиллярная модель Козени—Кармана с помощью формулы (2.8) связывает пористость, удельную поверхность и проницаемость среды (см. рис. в. 1).

Без проведения каких бы то ни было экспериментов совершенно ясно, что модель Козени—Кармана должна удовлетворительно описывать реальные пористые среды лишь в том случае, если форма пор не будет слишком сильно отличаться от форм, перечисленных в табл. 2.1. С другой стороны, очевидно, что если пористая среда обладает широким диапазоном размеров пор, то вклад пор большего диаметра в удельную поверхность будет много меньшим, чем вклад мелких пор, поэтому формула Козени—Кармана при вычислении проницаемости должна давать в этом случае значительную погрешность.

### 2.1.2. Экспериментальная проверка модели

Методика проверки справедливости формулы (2.8) для различных типов неконсолидированных пористых сред заключается в экспериментальном определении проницаемости, пористости и удельной поверхности модели с последующим вычислением значения  $c$  в формуле (2.8). Эксперименты, проведенные различными авторами с моделями, состоящими из одинаковых сфер, показали для постоянной Кармана значения, близкие к 5. Так, Дж. Донэт [1929 г.] установил, что для стеклянных шариков  $c = 5,2$ . По данным В. Шривера [1930 г.], для мелких стеклянных шариков с диаметрами от 1,025 до 0,252 мм и с пористостью  $m = 0,35 \div 0,40$  вычисленное значение  $c$  мало отличается от среднего, равного 5,06. Для аналогичных сфер данные М. Маскета и Х. Ботсета [1931 г.] приводят к  $c = 4,65$ . Тщательные исследования вязкого течения через модели, состоящие из одинаковых шариков, с пористостью от 0,34 до 0,45 [Салливан Р., Хертель К., 1940 г.; Коулсон Дж., 1949 г.; Браунэлл Л., Домбровски Х., Дики С., 1950 г.; Додд С., Дэвис Дж., Пиджен Ф., 1951 г.] дают колебания постоянной Кармана от 4,5 до 5,1.

Меньшее число экспериментов проведено с моделями, состоящими из частиц произвольной формы и волокон. П. Карманом [1938 г.], У. Уиггинсом, У. Кэмблэллом и О. Маасом [1939 г.] были выполнены эксперименты по определению  $c$  с самыми разнообразными средами. Результаты представлены в табл. 2.2.

Аналогичные результаты были получены также при изучении физических моделей, состоящих из крупных, измеряемых миллиметрами, кубов, призм, коротких цилиндров, дисков и т. д. [Коулсон Дж., 1949 г.; Вилли М., Гретори А., 1955 г.]. Кроме того, П. Карманом [33] была исследована возможность использования

Таблица 2.2

Материал модели	<i>m</i>	<i>c</i>
Стальная проволока, $s_v = 126$ 1/см	0,688 0,722 0,765	4,7 4,7 4,7
Фарфоровые седла Берла размером 0,6 см, $s_v = 24,5$ 1/см	0,685 0,714 0,746	5,0 4,8 4,7
Кольца Лессинга из никеля размером 0,6 см, $s_v = 59,5$ 1/см	0,870 0,882 0,889	5,2 5,0 4,7
Стеклянные волокна диаметром 0,4 мм, $s_v = 101$ 1/см	0,685	6,5
Медная проволока, $s_v = 394$ 1/см	0,830	6,0
Стекловата, $s_v = 2200$ 1/см	0,846—0,910	4,0—4,9
Стеклянные волокна, $s_v = 7000$ 1/см	0,885—0,919	4,5—6,0
Пряжа, $s_v = 3000$ 1/см	0,900	5,0
Стекловата + стеклянные волокна, $s_v = 4830$ 1/см	0,909	5,3

формулы (2.8) для случаев, когда неконсолидированная среда состоит из смеси частиц разного размера, но с известным соотношением фракций. Эксперименты показали, что если общая удельная поверхность смеси  $s_t$  определяется по формуле

$$s_t = \sum_{i=1}^n f_i s_{ti},$$

где  $f_i$  — фракция частиц с удельной поверхностью  $s_{ti}$ , и если размеры частиц не отличаются друг от друга более чем в 5 раз, то формула Козени—Кармана удовлетворительно описывает связь между пористостью, проницаемостью и удельной поверхностью неконсолидированной пористой среды.

#### 2.1.3. Использование модели для определения удельной поверхности пористых материалов

Обширный экспериментальный материал свидетельствует о возможности использования формулы Козени—Кармана для определения удельной поверхности неконсолидированных пористых сред, и в том числе несцементированных горных пород. Следует отметить, что удельная поверхность несцементированных песков имеет ограниченное значение в прикладных проблемах инженерной и нефтяной геологии, поэтому применение фильтрационного метода определения удельной поверхности сыпучих материалов характерно в основном для физико-химических исследований. Поэтому в настоящей работе лишь кратко остановимся на основных этапах развития этого метода.

Впервые метод был, по-видимому, предложен в 1937 г. самим П. Карманом и получил сразу же широкое развитие в исследова-

ниях самого автора [1938, 1939, 1941 гг.], а также в работах Р. Салливана и К. Хертеля [1953 г.], Б. В. Дерягина [1946 г.], Г. Хердена [1953 г.], Р. Баррера [1954 г.] и др. Дальнейшее усовершенствование этого метода получил в работах Т. А. Заварицкой и О. К. Григорова [1952 г.], И. С. Израилевича и С. Н. Новикова [1965 г.] и др. Достаточно полный обзор гидродинамических методов изучения удельной поверхности дисперсных материалов содержится в книге М. И. Курочкиной и В. Д. Лунева [13], а также в обзорной статье А. Даллена и У. Батра [36].

Сущность метода состоит в том, что формула Козени—Кармана перелистывается в следующем виде:

$$s_t = \left[ \frac{m^3}{5k(1-m)^2} \right]^{1/2}. \quad (2.9)$$

Пористость и проницаемость, входящие в правую часть формулы, подлежат экспериментальному определению, и по этим данным вычисляется  $s_t$ . Следует отметить, что знание  $s_t$  предусматривает также возможность приближенного определения размера частиц, так как если они, например, имеют правильную сферическую форму, то справедливы следующие соотношения:

$$S_t = N\pi d^2 \text{ и } V_t = (\pi/6) N d^3,$$

где  $S_t$  и  $V_t$  — общие поверхность и объем частиц модели соответственно;  $N$  — число частиц в модели;  $d$  — диаметр частиц. В этом случае по определению

$$s_t = S_t/V_t = 6/d,$$

откуда

$$d = 6/s_t.$$

Если проницаемость среды определяется по фильтрующейся через образец жидкости, то использование формулы (2.9) не вызывает принципиальных затруднений. Если же исследуемая система обладает высокой дисперсностью, то измерения гораздо легче проводить с помощью газа. Но в отличие от жидкости при течении газа в тонком канале массоперенос может осуществляться, вообще говоря, с помощью различных механизмов, которые, накладываясь друг на друга, не позволяют однозначно определить проницаемость в формуле (2.9). В связи с этим были предприняты многочисленные попытки модифицировать формулу Козени—Кармана для случая фильтрации газа. Подобные исследования проводились Ф. Ли и Р. Нерсом [1938 г.], а также П. Карманом и Дж. Арнеллом [1947, 1948, 1950 гг.]. В работе [33] был предложен следующий путь получения модифицированной формулы Козени—Кармана. Сначала рассматриваются механизмы течения газа в цилиндрическом капилляре, затем осуществляется переход к капилляру произвольного сечения, после чего гидравлический радиус этого капилляра выражается через пористость и удельную

поверхность моделируемой среды и выполняется переход от средней скорости газа в капилляре к скорости фильтрации.

**Режимы течения газа в тонких капиллярах.** В отличие от течения жидкости в капилляре в условиях газового потока могут осуществляться течение со скольжением и свободно-молекулярное течение (кнудсеновский режим). Физическая сущность этих явлений состоит в том, что при увеличении отношения длины свободного пробега молекул  $\lambda$  к диаметру канала  $d$  доля молекул, взаимодействующих со стенкой канала (в том числе и опосредованно), уменьшается и скорость на стенке канала становится не равной нулю (течение со скольжением). При дальнейшем росте отношения длины свободного пробега к диаметру канала внутри его осуществляется свободный молекулярный поток (кнудсеновский режим).

Напишем сначала выражение для скорости движения газа в капилляре в условиях чисто пуазейлевского течения. В этом случае согласно формуле Пуазейля

$$v_{cp} = - \frac{r^2}{8\mu} \frac{dp}{dx}, \quad (2.10)$$

где  $v_{cp}$  — скорость при среднем давлении газа на обоих концах капилляра  $p_{cp} = (p_1 + p_2)/2$ . Воспользовавшись известной формулой Бойля—Мариотта, найдем

$$v_{cp} (p_1 + p_2)/2 = v_1 p_1,$$

тогда

$$v_1 p_1 = - \frac{r^2}{8\mu} \frac{p_1 + p_2}{2} \frac{dp}{dx}$$

или, учитывая, что

$$\frac{dp^2}{dx} = 2p_{cp} \frac{dp}{dx} = (p_1 + p_2) \frac{dp}{dx},$$

и, переходя к диаметру капилляра  $d = 2r$ , будем иметь

$$v_1 p_1 = - \frac{1}{2} \frac{dp^2}{dx} \frac{d^2}{32\mu}.$$

Таким же путем можно получить выражение для пуазейлевского течения газа в модели Козени—Кармана:

$$v_{1\Phi} = \frac{m^3}{\mu\gamma\varphi^2 s_V^2} \frac{p_2^2 - p_1^2}{2p_1 h}, \quad (2.11)$$

где  $v_{1\Phi}$  — скорость фильтрации при давлении  $p_1$  на выходе об разца длиной  $h$ ;  $\gamma\varphi^2 = c = 5$  — постоянная Кармана.

Как показали исследования Дж. Максвелла, а затем и Р. Милликена [13], для течения со скольжением в круглом капилляре не-

обходимо учитывать так называемый коэффициент внешнего трения

$$\zeta = \frac{1}{2} \rho v_m \frac{f_1}{2 - f_1}, \quad (2.12)$$

где  $\rho$  — плотность газа;  $v_m$  — средняя скорость теплового движения молекул, испытывающих отражение от стенки.

С учетом члена, зависящего от внешнего трения, формула для скорости в капилляре должна иметь следующий вид:

$$v_1 p_1 = -\frac{1}{2} \frac{dp^2}{dx} \left( \frac{d^2}{32\mu} + \frac{d}{4\xi} \right).$$

Подставляя сюда  $\xi$  из формулы (2.12) и учитывая также, что

$$v_m = \sqrt{8RT/(\pi M)},$$

после интегрирования можно получить

$$v_1 p_1 = \left( \frac{d^2 p_{cp}}{32\mu} + \frac{d}{4} \sqrt{\frac{\pi RT}{2M}} \frac{2 - f_1}{f_1} \right) \frac{p_1 - p_2}{l}, \quad (2.13)$$

где  $M$  — молекулярная масса;  $R$  — универсальная газовая постоянная;  $T$  — абсолютная температура;  $l$  — длина капилляра.

М. Кнудсен [13] показал, что при дальнейшем увеличении отношения  $\lambda/d$  становится справедливым соотношение

$$v_1 p_1 = \frac{d}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \left( \frac{2 - f_0}{f_0} \right) \frac{p_1 - p_2}{l}. \quad (2.14)$$

Имеется возможность объединить формулы (2.13) и (2.14) с помощью некоторого безразмерного параметра  $\delta$ :

$$v_1 p_1 = \left( \frac{d^2 p_{cp}}{32\mu} + \frac{\delta}{3} d \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \right) \frac{p_1 - p_2}{l}. \quad (2.15)$$

Введем две величины  $\delta_0$  и  $\delta_1$  по формулам:

$$\delta_0 = \frac{2 - f_0}{f_0}; \quad \delta_1 = \frac{3\pi}{16} \frac{2 - f_1}{f_1}.$$

Легко убедиться, что если в формуле (2.14)  $\delta = \delta_0$ , то имеет место кнудсеновский режим течения, если же  $\delta = \delta_1$ , то осуществляется течение со скольжением. Для кнудсеновского режима параметр  $\delta_0$  приблизительно равен единице. Для режима скольжения газа параметр  $\delta_1$  зависит как от состава используемого газа, так и от исследуемого дисперсного материала [33]. Тем не менее для широкого ряда газов и дисперсных сред (газы — водород, кислород, углеводородные, углекислый газ, гелий, воздух; среды — серебро, алюминий, медь, стекло, железо, окислы металлов) параметр  $\delta_1$  колеблется от своего минимального значения 0,59 (при  $f_1 = 1$ ) до 0,92, так что  $\delta_1$  в среднем можно принять равным 0,8, внося, если это необходимо, коррекцию на данный состав газа и среды.

Формулу (2.15) легко написать для случая капилляра произвольного сечения, используя понятие гидравлического радиуса. В этом случае выражение для скорости потока газа будет иметь следующий вид:

$$v_1 p_1 = \left( \frac{r_0^2 p_{cp}}{\mu \gamma} + \frac{4 \delta r_0}{3 \gamma_1} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \right) \frac{p_2 - p_1}{l}. \quad (2.16)$$

Здесь используется коэффициент формы  $\gamma_1$ , который, вообще говоря, может отличаться от коэффициента формы  $\gamma$ , определяемого по табл. 2.1. В условиях течения со скольжением согласно исследованиям Р. Милликена [13]  $\gamma_1 = 1$  независимо от формы капилляра. В случае кнудсеновского режима течения  $\gamma_1 = 1$ , если длина капилляра превышает его гидравлический радиус более чем в 100 раз [Смолуховский фон М., 1911 г.]. Если же отношение длины капилляра к гидравлическому радиусу уменьшается, то коэффициент  $\gamma_1$  растет, достигая, например для цилиндрических капилляров, значения 2,6 при  $l/r_0 = 4$ .

**Модифицированная формула Козени—Кармана и ее использование в исследованиях горных пород.** Первые попытки распространения теории течения газа в тонких капиллярах на капиллярные модели пористых сред были предприняты Х. Адзуми [1937 г.], а затем и Л. Клинкенбергом [1941 г.]. Для перехода от формулы (2.16) к формуле типа Козени—Кармана необходимо воспользоваться предположениями И. Козени о связи капиллярной модели со свойствами моделируемой среды. Если капилляры в модели характеризуются некоторой извилистостью  $\Phi = l/h$ , то, переходя к скорости фильтрации в модели, из формулы (2.16) можно получить

$$v_{1\Phi} = \left( \frac{r_0^2 m}{\mu \gamma \Phi^2} + \frac{1}{p_{cp}} \frac{4 \delta r_0 m}{3 \gamma_1 \Phi^2} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \right) \frac{p_2^2 - p_1^2}{2 p_1 h}$$

или, выражая удельную поверхность модели через гидравлический радиус,

$$v_{1\Phi} = \left( \frac{m^3}{\mu \gamma \Phi^2 s_V^2} + \frac{1}{p_{cp}} \frac{4 \delta m^2}{3 \gamma_1 \Phi^2} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \right) \frac{p_2^2 - p_1^2}{2 p_1 h}. \quad (2.17)$$

Таким образом, формула для скорости фильтрации газа в модели Козени—Кармана в общем случае будет иметь следующий вид:

$$v_{1\Phi} = \left( \frac{k}{\mu} + \frac{1}{p_{cp}} k_1 \right) \frac{p_2^2 - p_1^2}{2 p_1 h}, \quad (2.18)$$

где

$$k = m^3 / (\gamma \Phi^2 s_V^2)$$

— известная немодифицированная формула Козени—Кармана, а

$$k_1 = \frac{4 \delta m^2}{3 \gamma_1 \Phi^2 s_V^2} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \quad (2.19)$$

— некоторая новая характеристика среды.

Как уже упоминалось, коэффициент  $\gamma_1$  в случае длинных капилляров можно полагать равным единице, значение  $\varphi$  согласно представлениям Кармана постоянно для различных сред и равно

$\sqrt{2}$ . Тогда для режима скольжения ( $\delta = \delta_1 = 0,8$ )

$$k_1 = k_{\text{ск}} = 0,53 \frac{m^2}{s_V} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}; \quad (2.20)$$

для кнудсеновского режима ( $\delta = \delta_0 = 1$ )

$$k_1 = k_{\text{кн}} = 0,66 \frac{m^2}{s_V} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \quad (2.21)$$

Критерием возможности использования той или иной из полученных формул является соотношение между первым и вторым членами в скобках формулы (2.18). При этом следует подчеркнуть, что если режим скольжения, вообще говоря, может существовать совместно с пуазейлевским режимом, то кнудсеновский режим осуществляется, как правило, при течении газов в пористых средах в условиях достаточно низкого вакуума. В связи с этим в известных методах определения удельной поверхности дисперсных материалов [13] используются главным образом формулы типа (2.18), где  $k_1 = k_{\text{ск}}$ , и формулы типа (2.21).

Если для определения удельной поверхности горных пород формулы (2.18) и (2.21) имеют лишь ограниченное значение, так как применимы (согласно главным постулатам Козени—Кармана) только для однородных по составу неконсолидированных дисперсных систем, то формула (2.18) играет важную роль в методике определения проницаемости образцов горных пород с помощью фильтрации газа в лабораторных условиях. Известно, что определение газопроницаемости образца для повышения точности и надежности измерений производят при нескольких перепадах давления. Если исследуемый образец характеризуется достаточно тонкими порами, то в формуле (2.18) нельзя пренебречь членом, связанным со скольжением газа. В связи с этим Л. Клинкенберг [1941 г.] предложил графический метод определения «истинной» (связанной с пуазейлевским режимом течения) проницаемости. Сущность метода заключается в том, что проницаемость измеряется при различных средних давлениях в образце, после чего строится зависимость проницаемости от параметра  $1/p_{\text{ср}}$ . Аппроксимацией полученного графика в точке  $1/p_{\text{ср}} = \infty$  находят искомую «истинную» проницаемость. Вводимая таким образом поправка носит название «поправки Клинкенберга» и обязательно должна учитываться при лабораторных определениях проницаемости тонкокористых горных пород.

#### 2.1.4. Возможности модели Козени—Кармана и пути дальнейших исследований

Модель Козени—Кармана (как модифицированная, так и не-модифицированная) показала свою вполне удовлетворительную применимость для определения удельной поверхности достаточно

однородных по составу неконсолидированных дисперсных систем. Поэтому указанная модель нашла широкое практическое использование в физико-химических исследованиях, в цементной промышленности, в промышленности строительных материалов, т. е. в тех областях, где необходимо иметь дело с искусственными сыпучими пористыми телами. Тем не менее существует достаточно обширный экспериментальный материал, посвященный попыткам применить модель Козени—Кармана к сцементированным горным породам. Сначала формулу Козени—Кармана использовали непосредственно для определения удельной поверхности консолидированных сред с последующей проверкой полученных значений с помощью какого-либо точного метода, например БЭТ. Эти эксперименты показали, что значения удельной поверхности, полученные методом БЭТ, в несколько раз больше значений, вычисленных по формуле Козени—Кармана (2.9). Стало очевидным, что для консолидированных сред предположения о постоянстве извилистости и о том, что все капилляры модели имеют приблизительно одинаковый гидравлический радиус, являются неправомочными. Отсюда следует, что дальнейшее усовершенствование капиллярной модели структуры порового пространства горных пород должно быть направлено на изучение неоднородности распределения пор по размерам и на исследование параметра извилистости.

## 2.2. Простая капиллярная модель из пучка прямых параллельных капилляров

В отличие от модели Козени—Кармана, которая связывает между собой пористость, проницаемость и удельную поверхность, простая капиллярная модель имеет своей целью установить соотношения между пористостью, абсолютной и относительными фазовыми проницаемостями, кривой капиллярного давления и функцией распределения пор по размерам. При этом само предположение о наличии параллельных капилляров с известной функцией распределения по их диаметрам и является элементом структуры порового пространства модели, называемым геометрией пор (см. рис. в. 1).

### 2.2.1. Принципы построения модели

Простая капиллярная модель, неоднократно описанная различными авторами [28], представляет собой пучок параллельных капилляров, радиусы которых распределены согласно некоторой функции распределения  $F(r)$  так, что

$$F(r) = \int_0^r f(r) dr,$$

где  $f(r)$  — плотность распределения:  $f(r) dr$  — доля объема порового пространства модели, обусловленная капиллярами, радиусы

которых находятся в интервале от  $r$  до  $r+dr$ . При этом функция  $F(r)$  нормирована, так что

$$F(\infty) = \int_0^\infty f(r) dr = 1.$$

Рассмотрим абсолютную проницаемость модели. Расход жидкости через группы из  $n$  капилляров, радиусы которых отличаются друг от друга не более чем на  $dr$ , будет равен согласно формуле Пуазейля

$$dQ = n \frac{\pi r^4}{8\mu} \frac{\Delta p}{l}.$$

Но  $n$  равно общему объему, занимаемому капиллярами, деленному на объем одного капилляра:

$$n = mSf(r) dr / (\pi r^2 l),$$

где  $S$  — площадь фильтрации. Отсюда

$$dQ = \frac{mSr^2f(r) dr}{8\mu} \frac{\Delta p}{l}$$

или, учитывая, что скорость фильтрации определяется формулой  $dv_\Phi = dQ/S$ , находим

$$dv_\Phi = \frac{mr^2f(r) dr}{8\mu} \frac{\Delta p}{l}. \quad (2.22)$$

Для того чтобы найти суммарную скорость фильтрации, обусловленную всеми капиллярами модели, формулу (2.22) следует проинтегрировать по всему диапазону изменения радиусов капилляров:

$$v_\Phi = \frac{m}{8\mu} \frac{\Delta p}{l} \int_0^\infty r^2 f(r) dr. \quad (2.23)$$

Сопоставив это выражение с известной формулой закона Дарси

$$v_\Phi = \frac{k}{\mu} \frac{\Delta p}{l},$$

найдем

$$k = \frac{m}{8} \int_0^\infty r^2 f(r) dr. \quad (2.24)$$

Покажем связь простой капиллярной модели с моделью Коэни—Кармана. Последняя предусматривает, что все капилляры

модели одинаковы, т. е.  $r = r_{\Phi}$  и  $\int_0^\infty f(r) dr = 1$ . Отсюда

$$k = mr_{\Phi}^2 / 8. \quad (2.25)$$

Перейдем в этой формуле к гидравлическому радиусу  $r_0$ . Так как для цилиндрического капилляра  $r_{\text{оф}} = 2r_0$ , то

$$k = mr_0^2/2.$$

Если от цилиндрических капилляров перейти к капиллярам произвольного сечения, то вместо коэффициента 2 в этой формуле следует использовать параметр формы  $\gamma$ , определяемый табл. 2.1. Учитывая фактор извилистости  $\varphi$  капилляров, что характерно для модели Козени—Кармана, находим

$$k = mr_0^2/(\gamma\varphi^2). \quad (2.26)$$

Выразим теперь гидравлический радиус капилляров через пористость и удельную поверхность модели —  $r_0 = m/s_V$ . Тогда

$$k = m^3/(\gamma\varphi^2 s_V^2),$$

что совершенно идентично уже рассмотренной ранее формуле Козени—Кармана.

Следует подчеркнуть, что рассмотренная простая капиллярная модель существенно анизотропна, так как ее проницаемость в направлении, перпендикулярном к оси капилляров, равна нулю. Для того чтобы сделать модель изотропной, необходимо рассмотреть не один пучок параллельных капилляров, а три таких пучка, оси которых перпендикулярны друг к другу. В этом случае формула (2.24) будет, естественно, иметь следующий вид:

$$k = \frac{m}{24} \int_0^{\infty} r^2 f(r) dr. \quad (2.27)$$

## 2.2.2. Кривая капиллярного давления и функция распределения пор по размерам

Известно, что на границах раздела фаз возникают молекулярные силы, связанные с неодинаковыми условиями, в которых находятся молекулы на поверхности и в глубине фазы. Если одна из жидкоких фаз смачивает твердое тело, а вторая не смачивает, то в условиях контакта всех трех фаз будет иметь место равновесие сил (рис. 2.1), действующих на единицу длины границы раздела и называемых силами поверхностного натяжения. На рисунке  $\sigma_{\text{т. жн}}$ ,  $\sigma_{\text{т. жи}}$  и  $\sigma_{\text{ж. жн}}$  — поверхностное натяжение на границах раздела фаз: твердое тело — смачивающая жидкость, твердое

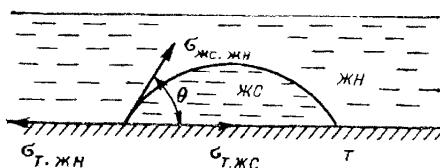


Рис. 2.1. Равновесие сил на границе раздела трех фаз: смачивающая жидкость — несмачивающая жидкость — твердое тело [1].

тело—несмачивающая жидкость, смачивающая жидкость—несмачивающая жидкость соответственно;  $\theta$  — угол смачивания (контактный угол). Очевидно, что при этом должно быть справедливым следующее соотношение:

$$F_\sigma = \sigma_{\text{т. жн}} - \sigma_{\text{т. жс}} = \sigma_{\text{жс. жн}} \cos \theta, \quad (2.28)$$

где  $F_\sigma$  — суммарная сила поверхностного натяжения. В условиях равновесия  $F_\sigma = 0$  и краевой угол смачивания определяется соотношением

$$\cos \theta = (\sigma_{\text{т. жн}} - \sigma_{\text{т. жс}}) / \sigma_{\text{жс. жн}}.$$

Рассмотрим достаточно тонкий капилляр, внутри которого существует граница раздела между смачивающей и несмачивающей жидкостями. В этом случае условие равновесия не выполняется и в сторону несмачивающей жидкости будет направлена результирующая сила, равная суммарной силе поверхностного натяжения, умноженной на общую длину границы раздела:

$$F = \sigma \cdot 2\pi r,$$

где  $r$  — радиус капилляра. Разделив правую и левую части этого равенства на площадь капилляра и подставив затем сюда выражение для  $F_\sigma$  из формулы (2.28), получим частный случай известного соотношения Лапласа для цилиндрического капилляра:

$$p_k = 2\sigma_{\text{жс. жн}} \cos \theta / r. \quad (2.29)$$

где  $p_k$  — так называемое капиллярное давление, направленное от смачивающей жидкости к несмачивающей.

Приведем простую капиллярную модель, заполненную воздухом, в соприкосновение с несмачивающей фазой, например со ртутью. Если давление ртути будет равно  $p_k$ , то в модели окажутся заполненными все капилляры, радиусы которых удовлетворяют условию  $r \geq 2\sigma \cos \theta / p_k$  (для простоты опускаем индексы при  $\sigma$ , имея в виду, что это поверхностное натяжение на границе раздела смачивающей и несмачивающей жидкостей). При повышении давления ртуть будет проникать во все более тонкие капилляры модели, в результате чего модель характеризуется вполне определенной кривой капиллярного давления  $S = S(p_k)$ , где  $S$  — насыщенность модели смачивающей фазой (воздухом). Эта насыщенность при давлении  $p_k$ , соответствующем радиусу капилляров  $r$ , является функцией распределения

$$F(r) := \int_0^r f(\zeta) d(\zeta).$$

Таким образом, представляется возможность по экспериментально найденной кривой капиллярного давления  $S = S(p_k)$  определить функцию распределения пор по размерам, т. е.

$$F\left(r = \frac{2\sigma \cos \theta}{p_k}\right) = S(p_k). \quad (2.30)$$

Простым дифференцированием функции (2.30) по  $r$  можно найти плотность распределения  $f(r)$ .

Интересно с этой точки зрения вновь обратиться к исследованиям Р. Мейера и Р. Стоу, которые проанализировали функцию распределения пор по размерам гранулярной модели Слихтера. На рис. 1.7 представлены теоретические капиллярные кривые, свидетельствующие о том, что в гранулярной модели с одинаковыми частицами капилляры практически тоже одинаковы. Именно это обстоятельство, т. е. необходимость отразить в модельных представлениях факт наличия в реальных горных породах пор различных размеров, привело к созданию простой капиллярной модели.

Фактически формула (2.30) связывает функцию распределения цилиндрических капилляров по их радиусам (элемент структуры порового пространства — геометрия пор) с кривой капиллярного давления (физическое свойство модели) (см. рис. в.1).

### 2.2.3. Методы определения функции распределения пор по размерам в горных породах

Подавляющее большинство практических методов определения функции распределения пор по размерам реальных горных пород основано на представлениях, связанных с простой капиллярной моделью. Тем не менее многочисленные исследования структуры порового пространства несцементированных и сцементированных горных пород [37, 46 и др.] показывают, что поровые каналы горной породы меньше всего похожи на прямые непересекающиеся капилляры. Напротив, поры представляют собой, как правило, щелевидные каналы неправильной формы, характеризующиеся многочисленными сужениями, расширениями и самое главное, соединяющими друг с другом, при этом расстояния между соседними пересечениями сопоставимы с размерами канала. В этих условиях трудно говорить о «размере пор», а еще труднее о «функции распределения пор по размерам». В связи с этим реальными на самом деле являются лишь кривые капиллярного давления или какие-либо иные капиллярные характеристики (динамика сушки образца, его пропитки, динамика смесимого вытеснения и т. д.), по которым и определяется функция распределения цилиндрических капилляров по их радиусам в соответствующей простой капиллярной модели.

**Ртутная порометрия.** Порометрические исследования пористых тел с помощью вдавливания ртути в образец нашли широкое применение в различных областях науки и техники благодаря своей простоте и чрезвычайно широкому диапазону измеряемых размеров пор: от  $2 \cdot 10^{-7}$  до  $10^{-2}$  см. Правда, для того чтобы ртуть вошла в поры, измеряемые сотнями нанометров, необходимо давление в несколько тысяч мегапаскалей, но в настоящее время создание подобных давлений не является серьезной технической проблемой.

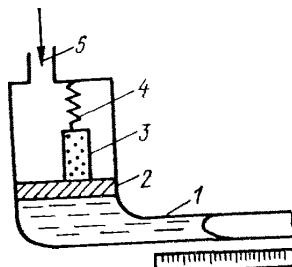


Рис. 2.2. Схема капилляриметра [18].

Образец породы помещают в дилатометр с измерительным капилляром, уровень ртути в котором регистрируется обычно электрическими датчиками. Образец вакуумируют, после чего приводят в соприкосновение со ртутью. Затем ступенями повышают давление ртути, регистрируя при этом изменения ее объема в дилатометре.

Несоответствие структуры порового пространства реальных горных пород простой капиллярной модели приводит к возникновению принципиальной ошибки ртутного метода, которая заключается в том, что крупные поры породы часто бывают блокированы мелкими, поэтому ртуть в эти крупные поры попадает при давлениях, соответствующих более мелким блокирующими порам. Это обстоятельство должно неизбежно деформировать кривую распределения пор по размерам, сдвигая ее в сторону меньших радиусов.

К другим техническим недостаткам метода ртутной порометрии следует отнести возможные разрушения стенок пор при высоких давлениях ртути, невозможность вторичного использования исследуемого образца, так как его поры оказываются запачканными ртутью, и, наконец, токсичность метода. Тем не менее метод ртутной порометрии нашел широкое распространение для изучения порового пространства пористых горных пород [1, 32, 45 и др.].

**Метод полупроницаемой мембранны (капиллярного вытеснения).** Метод основан на получении кривой капиллярного давления образца породы 3 (рис. 2.2), насыщенного вначале смачивающей жидкостью и помещенного на поверхность пористой мембранны 2, самые широкие поры которой тоньше самых узких пор образца. При этом образец должен находиться в жидкостном контакте с мембранны, которая также насыщена смачивающей жидкостью, что осуществляется с помощью пружины 4. В камеру 5 поступает несмачивающая жидкость (например, воздух), которая вытесняет смачивающую через мембранны в измерительный капилляр 1. Повышая ступенями давление в камере, всякий раз регистрируют увеличение объема вытесняемой жидкости. По полученной таким образом кривой капиллярного давления находят функцию распределения пор по размерам.

Принципиальным недостатком этого метода является та же возможность блокировки крупных пор мелкими и вызванная этим деформация искомой порометрической кривой. Кроме того, как

показали исследования Н. Морроу [44] (см. раздел 1.2.3), при капиллярном вытеснении внутри образца могут оставаться насыщенные смачивающей жидкостью области, окруженные со всех сторон несмачивающей жидкостью, поэтому дальнейшее повышение давления никоим образом не повлияет на эту «неуменьшаемую» насыщенность смачивающей фазой.

К техническим недостаткам метода следует отнести весьма медленное установление в образце капиллярного равновесия, что приводит к длительности снятия капиллярной кривой образца, измеряемой неделями.

Метод полупроницаемой мембранны широко освещен в литературе [1, 20 и др.]. Существуют также основанные на простой капиллярной модели модифицированные методы капиллярного вытеснения, в которых капиллярная кривая снимается в процессе вытеснения одной жидкости другою [Браун Х., 1951 г.] или под действием центробежных сил [Хесслер Г., Бруннер Э., 1950 г.; Слобод Р., Чеймберс А., Прен У., 1951 г.].

**Метод смесимого вытеснения.** Этот метод впервые предложен, по-видимому, М. П. Воларовичем и Н. В. Чураевым [1962 г.], а затем был развит и усовершенствован Л. М. Мармортейном и Ю. Б. Меклером [18]. Метод очень жестко связан с простой капиллярной моделью и основан на том, что жидкость, насыщающая вначале образец, вытесняется той же жидкостью, отличающейся от вытесняемой индикатором, не меняющим ее физических свойств. В опытах М. П. Воларовича и Н. В. Чураева таким индикатором служил радиоактивный изотоп; в методике, предложенной в работе [18], вытесняющая жидкость (октан) подкрашивалась неполлярным красителем в такой концентрации, которая не изменяла свойств жидкости. Метод основан на том, что при одинаковых перепадах давления на торцах капиллярной модели скорость движения границы раздела жидкости в каждом капилляре зависит от его радиуса. Естественно, что в условиях пучка параллельных капилляров (простая капиллярная модель) вытесняющая жидкость появится на выходе модели, пройдя в первую очередь по широким капиллярам, а затем с увеличением времени эксперимента новые ее порции проходят через все более узкие капилляры. Если обеспечить такую скорость вытеснения, чтобы на границе раздела жидкостей в каждом капилляре не происходило их перемешивание, то по динамике изменения концентрации индикатора на выходе из модели можно найти функцию распределения пор по радиусам. Теория метода и методика проведения экспериментов подробно описаны в работе [18].

К принципиальным недостаткам метода следует отнести то обстоятельство, что его основой является предположение о перемешивании вытесняемой и вытесняющей жидкости только после выхода из модели, т. е. предположение о параллельности капилляров модели здесь является крайне существенным. На самом деле в реальных горных породах, и вообще в подавляющем большинстве пористых тел, поровые каналы характеризуются многочисленными

пересечениями, что обуславливает перемешивание жидкостей задолго до выхода из образца и ставит под сомнение правомочность теории метода.

**Методы эталонной порометрии.** В работе Ю. М. Вольфовича, В. С. Багоцкого, В. Е. Сосенкина и Е. И. Школьникова [20] предложены принципиально новые методы определения функции распределения пор по размерам различных пористых тел, называемые методами эталонной порометрии. Сущность этих методов состоит в том, что группа исследуемых образцов пористых тел образует единую замкнутую систему с образцом-эталоном, распределение пор по размерам которого уже определено каким-либо известным методом. Затем исследуемые образцы и эталон насыщаются жидкостью, после чего осуществляется ступенчатая одновременная сушка всего комплекса образцов. Следует подчеркнуть при этом, что контакт между исследуемыми образцами и эталоном может осуществляться как непосредственно (пришлифованные торцы образцов прижимаются друг к другу пружиной), так и через пары жидкости, насыщающие емкость, где находится комплект.

Основой метода служит то обстоятельство, что в процессе сушки между поровым пространством эталона и исследуемых образцов все время сохраняется равновесие, т. е. в исследуемых образцах и в эталоне рабочей жидкостью заполнены поры, размеры которых находятся в одном и том же диапазоне. А если это так, то простым взвешиванием образцов (включая и эталон) после каждой ступени сушки можно установить объемы порового пространства исследуемых образцов, которые соответствуют размеру пор эталона.

Методы эталонной порометрии имеют значительные преимущества перед многими другими методами, так как, меняя эталоны на различных этапах сушки исследуемых образцов, можно определить функцию распределения пор по размерам в диапазоне от  $10^{-7}$  до  $10^{-1}$  см. Это объясняется тем, что на разных этапах сушки комплекса образцов осуществляются различные механизмы их дренирования: от простого перераспределения насыщенностей благодаря капиллярной пропитке (диапазон крупных пор) до механизма капиллярной конденсации, связанного с изменением давления паров жидкости над ее мениском в зависимости от его кривизны, т. е. от радиуса капилляра ( $10^{-7}$ — $5 \cdot 10^{-6}$  см). (Именно такими размерами пор характеризуются катализаторы, пористые электроды и всякого рода химические адсорбенты, что и обуславливает широкое применение метода капиллярной конденсации в физико-химических исследованиях [36]). Авторы метода эталонной порометрии приводят, например, дифференциальную кривую распределения пор по радиусам для электрода-катализатора из активированного угля АГ-3 (рис. 2.3). Этот материал обладает очень широким диапазоном размеров пор: от 1 до  $10^5$  нм. Поэтому для получения его порометрической характеристики были использованы три эталона на разные диапазоны радиусов: силикагель КСК ( $r=1 \div 10$  нм) и два металлокерамических эталона — один

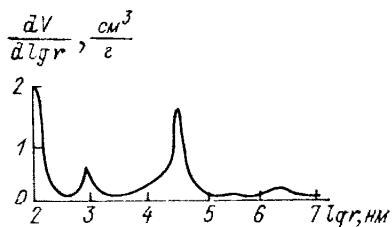


Рис. 2.3. Кривая распределения пор по размерам образца активированного угля [20].

из карбонильно-никелевого порошка ( $r = 3 \cdot 10^2 \div 10^5$  нм), а другой из его смеси со скелетным никелем ( $r = 4 \div 10^3$  нм).

Порометрической кривой служили: для первого эталона — изотерма десорбции бензола, измеренная методом капиллярной конденсации, а для двух других — кривые распределения пор по радиусам, полученные с помощью ртутной порометрии.

Авторы метода утверждают, что с помощью эталонов, имеющих поры в виде «модельных» прямых капилляров, которыми являются, например, фильтры Петрянова ФПП-ДС и ФПП-15, можно получить «истинные» функции распределения пор по радиусам пористых образцов, а также оценить некоторые новые статистические характеристики порового пространства, а именно «гофрировку» пор. Указанный параметр может быть выражен функцией

$$F(r_a, r_b) = \frac{\partial^2 V_a}{\partial r_a \partial r_b}, \quad (2.31)$$

которая является функцией распределения объема блокирующих пор (пор-ловушек) по их размерам  $r_a$  и по радиусам блокирующих пор  $r_b$ . Общий объем блокирующих пор можно получить путем двойного интегрирования функции (2.31):

$$V_b = \int_0^\infty \int_0^\infty F(r_a, r_b) dr_a dr_b.$$

К сожалению, описанные методы эталонной порометрии не нашли пока распространения при изучении структуры порового пространства горных пород, хотя по своей простоте и возможностям они превосходят наиболее широко применяемые методы ртутной порометрии, капиллярного вытеснения и др.

#### 2.2.4. Абсолютная и относительные фазовые проницаемости и простая капиллярная модель

Как уже было показано, простая капиллярная модель непосредственно связывает пористость, абсолютную проницаемость и функцию распределения пор по радиусам с помощью формулы (2.24):

$$k = \frac{m}{8} \int_0^\infty r^2 f(r) dr.$$

Таким образом, для установления связи между фильтрационными характеристиками породы и соответствующей этой породе кривой капиллярного давления необходимо найти зависимость ее капиллярных свойств от функции распределения пор по размерам.

**Теория моделирования.** Для вычисления абсолютной и относительных фазовых проницаемостей простая капиллярная модель была впервые использована У. Перселлом [45], а затем Н. Бэрдином [32], Л. Рапопортом и У. Лиссом [1951 г.], И. Фэттом и Х. Дикстрий [1951 г.].

В простой капиллярной модели функция распределения пор по радиусам  $F(r)$  по определению является долей объема капилляров, радиусы которых находятся в интервале от нуля до  $r$ . Если простая капиллярная модель заполняется под давлением несмачивающей жидкостью, то насыщенность модели этой жидкостью  $S_{nc}$  при давлении  $p = p_k$  будет определяться формулой

$$S_{nc} = F(r) = \int_r^0 f(r) dr, \quad (2.32)$$

где  $r$  определяется согласно соотношению Лапласа:

$$r = 2\sigma \cos \theta / p_k, \quad (2.33)$$

а  $p_k$  — капиллярное давление, при котором несмачивающая жидкость удерживается в порах. Из формулы (2.32) легко найти, что

$$dS_{nc} = -f(r) dr. \quad (2.34)$$

Теперь уже в формуле (2.34) можно перейти к новой переменной  $S_{nc}$ :

$$k = -\frac{m}{8} \int_1^0 \frac{\sigma^2 \cos^2 \theta}{p_k^2(S_{nc})} dS_{nc}$$

или

$$k = \frac{m\sigma^2 \cos^2 \theta}{8} \int_0^1 \frac{dS_{nc}}{p_k^2(S_{nc})}, \quad (2.35)$$

где  $p_k(S_{nc})$  — экспериментально определяемая функция капиллярного давления.

У. Перселл для получения порометрической кривой использовал метод ртутной порометрии, поэтому он положил  $\sigma^2 \cos^2 \theta = \text{const}$  и ввел в уравнение (2.35) дополнительный множитель  $\lambda$ , назвав его литологическим множителем, учитывающим отличие простой капиллярной модели от структуры порового пространства реальных горных пород. Тогда формулу (2.35) можно написать в следующем виде:

$$k = Am\lambda \int_0^1 \frac{dS_{nc}}{p_k^2(S_{nc})}, \quad (2.36)$$

где  $A$  — некоторый численный коэффициент, в который входят постоянное значение  $\sigma^2 \cos^2 \theta$  и переводные коэффициенты, связанные единицами измерения физических величин. Множитель такого же характера, как и  $\lambda$ , вводится в уравнение, аналогичное (2.35), в работе [32].

Таким образом, уравнение (2.35) с помощью простой капиллярной модели устанавливает связь между пористостью, проницаемостью и кривой капиллярного давления (см. рис. в.1).

Описанный выше подход может быть легко осуществлен при анализе ОФП горных пород. Действительно, если предположить, что в процессе двухфазной фильтрации при последовательном увеличении насыщенности пористой среды несмачивающей фазой она заполняет все более мелкие поры, то из формулы (2.36) непосредственно вытекают уравнения ОФП для смачивающей и несмачивающей фаз соответственно:

$$k_c^* = \frac{k_c}{k} = \frac{\int_0^S dS / p_k^2}{\int_0^1 dS / p_k^2}; \quad (2.37a)$$

$$k_{hc}^* = \frac{\int_1^S dS / p_k^2}{\int_0^1 dS / p_k^2}. \quad (2.37b)$$

(Здесь и далее под  $S$  будем понимать насыщенность пористой среды смачивающей фазой.)

Легко видеть, что в числите формулах (2.37) находятся величины, пропорциональные проницаемости по порам, занятых смачивающей и несмачивающей фазами.

Значения ОФП, рассчитанные по формулам (2.37), значительно отличаются от измеренных. В связи с этим И. Фэтт и Х. Дикстра предположили, что структурный коэффициент  $\lambda$  в формуле Перселя (2.36) в случае двухфазного потока зависит от насыщенности, а тем самым и от минимального радиуса пор, заполненных вытесняющей фазой, т. е. от капиллярного давления. Указанная зависимость, по мнению авторов, должна иметь следующий вид:

$$\lambda = a/r^b,$$

где  $a$  и  $b$  — некоторые константы, связанные со структурой порового пространства. Приняв далее  $b = 1/2$  одинаковым для всех пористых сред, И. Фэтт и Х. Дикстра получили следующее уравнение для  $k_c^*$ :

$$k_c^* = \frac{\int_0^S dS / p_k^3}{\int_0^1 dS / p_k^3}. \quad (2.38)$$

Интересно отметить, что Н. Бэрдин и И. Фэтт и Х. Дикстра считали литологический коэффициент в формуле Перселла мерой извилистости поровых каналов по сравнению с капиллярами простой капиллярной модели. Здесь нельзя не согласиться с мнением А. Шейдегера [28], который утверждает, что введение в формулы, использующие простую капиллярную модель, фактора извилистости является неким искусственным приемом, с помощью которого вводится дополнительный параметр, позволяющий приводить в соответствие теоретические и экспериментальные данные.

Вместо структурного коэффициента  $\lambda$ , зависящего от насыщенности, Н. Бэрдин [32] ввел в рассмотрение относительную извилистость, определяемую раздельно для обеих движущихся фаз:

$$\varphi_c^* = \varphi/\varphi_c \text{ и } \varphi_{nc}^* = \varphi/\varphi_{nc},$$

где  $\varphi$  — коэффициент извилистости при однофазной фильтрации;  $\varphi_c$  и  $\varphi_{nc}$  — коэффициенты извилистости для смачивающей и несмачивающей фаз при двухфазной фильтрации, которые зависят от насыщенности и определяются эмпирически. В результате Н. Бэрдин получил следующие уравнения для ОФП:

— для смачивающей фазы

$$k_c^* = \varphi_c^{*2} \frac{\int_0^S dS/p_k^2}{\int_0^1 dS/p_k^2}; \quad (2.39a)$$

— для несмачивающей фазы

$$k_{nc}^* = \varphi_{nc}^{*2} \frac{\int_0^1 dS/p_k^2}{\int_0^S dS/p_k^2}, \quad (2.39b)$$

причем автору удалось показать, что

$$\varphi_c^* = \frac{S - S_{min}}{1 - S_{min}};$$

$$\varphi_{nc}^* = \frac{(1 - S) - S_p}{(1 - S_{min}) - S_p},$$

где  $S_p$  и  $S_{min}$  — равновесная и минимальная насыщенности смачивающей фазой соответственно.

**Методика расчета проницаемости по кривой капиллярного давления и экспериментальная проверка справедливости простой капиллярной модели.** Основным методом расчета проницаемости по формулам типа (2.36) — (2.39) является численное интегрирование функции  $1/p_k^2(S)$  в тех или иных пределах. На рис. 2.4 представлены зависимости  $p_k = f(S)$ , определяемая непосредственно

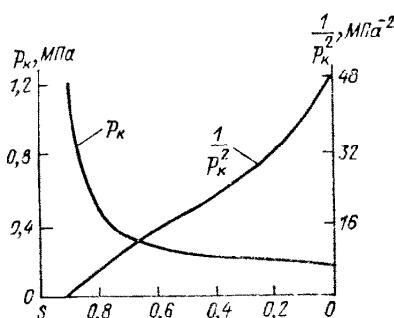


Рис. 2.4. Графический метод расчета проницаемости по данным капиллярного давления [45].

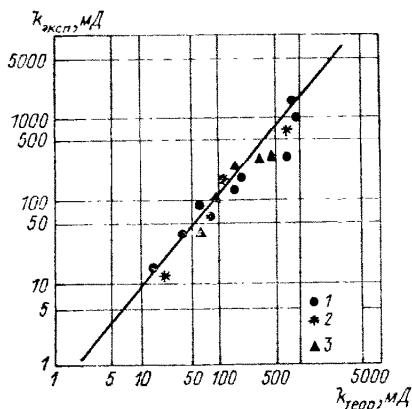


Рис. 2.5. Сравнение проницаемости, рассчитанной по данным капиллярного давления ( $k_{\text{теор}}$ ), с экспериментальными данными ( $k_{\text{эксп}}$ ).

1 — керн верхнего Уилкокса; 2 — шлам верхнего Уилкокса; 3 — керн Палакси [45].

по нагнетанию ртути в образец, и  $1/p_k^2 = f(S)$ , пересчитанная из первой. Площадь под кривой второй зависимости и является искомым интегралом в формуле (2.36). Аналогично вычисляются интегралы в формулах (2.37) — (2.39).

При изучении абсолютной проницаемости У. Перселл [45] обработал коллекцию из 27 образцов песчаников из месторождений Уилкокс и Палакси (США). Для каждого из образцов им были экспериментально определены пористость, проницаемость и кривая капиллярного давления, а затем по этим данным были вычислены значения  $\lambda$ , которые изменялись в весьма широких пределах: от 0,085 до 0,363. Тем не менее было найдено среднее значение  $\lambda_{\text{ср}} = 0,216$ , с помощью которого по той же формуле (2.36) были вычислены теоретические значения проницаемости ( $k_{\text{теор}}$ ). Сравнение полученных таким образом значений с экспериментальными данными ( $k_{\text{эксп}}$ ) (рис. 2.5) свидетельствует о вполне удовлетворительном их совпадении.

Для расчетов ОФП по смачивающей фазе И. Фэтт и Х. Дикстра [1951 г.] использовали полученную ими формулу (2.38). Вычисленные по этой формуле кривые ОФП по смачивающей фазе значительно отличаются от экспериментально измеренных значений. Гораздо более близкое соответствие экспериментальных и теоретических данных удалось получить Н. Бэрдину, что, по-видимому, следует объяснить введением в расчетную формулу нескольких дополнительных параметров ( $S_{\text{min}}$ ,  $S_p$ ,  $\phi$  и т. д.).

Следует подчеркнуть, что основное положение, лежащее в основе всех исследований механизма двухфазной фильтрации с позиций простой капиллярной модели, заключается в том, что с ро-

стом насыщенности среды движущейся смачивающей фазой она должна последовательно занимать поры со все большими значениями радиуса. Из этого, в частности, следует, что если капилляры модели одинаковы, то кривые ОФП должны вырождаться в прямые линии, так как в этом случае проницаемость по каждой фазе должна быть просто пропорциональна насыщенности среды этой фазой. Тем не менее описанные в гл. 1 теоретические и экспериментальные исследования по внедрению ртути внутрь гранулярной модели из одинаковых сферических частиц свидетельствуют о наличии практически одинаковых фильтрационных каналов в такой модели. Однако экспериментальные кривые ОФП, полученные на хорошо отсортированных песках, а также на гранулярных моделях с одинаковыми сферическими частицами (раздел 1.2.2), весьма далеки от прямых. Это свидетельствует о том, что реальные пористые материалы обладают некоторой принципиальной особенностью, которая определяет совместное движение несмешивающихся жидкостей в указанных условиях. Этой особенностью является факт пересекаемости фильтрационных каналов в горных породах, который ведет к интенсивному перемешиванию фильтрующихся жидкостей внутри порового пространства. Простая капиллярная модель этот факт игнорирует и поэтому для исследования механизма многофазных течений может иметь лишь ограниченное значение.

#### 2.2.5. Диффузионно-адсорбционная активность горных пород

Изучение потенциалов, возникающих на стенке скважины при взаимодействии горной породы, насыщенной пластовой водой, с фильтратом бурового раствора, широко используется в промыслово-геофизической практике. Регистрация указанных потенциалов в стволе скважины с помощью специального геофизического зонда позволяет определять местоположение продуктивных горизонтов в разрезе и носит название метода собственных потенциалов (метода СП).

Возникновение собственных потенциалов совершенно справедливо связывается с адсорбцией ионов из раствора электролита внутренней поверхностью породы и изменением в этих условиях механизма диффузии. Именно поэтому подобные потенциалы получили наименование диффузионно-адсорбционных, тогда как для электрохимической характеристики различных типов горных пород было введено понятие диффузионно-адсорбционной активности:

$$A_{\text{да}} = \frac{E - E_0}{\lg (C'/C'')}, \quad (2.40)$$

где  $E_0$  — диффузионный потенциал, возникающий между двумя растворами электролита с концентрациями  $C'$  и  $C''$ ;  $E$  — диффузионный потенциал между этими же растворами, разделенными пористой перегородкой.

Количественные зависимости диффузионно-адсорбционных потенциалов от химического состава раствора и адсорбционных свойств пород рассматривались многими авторами (например, [4]). При всем разнообразии предлагаемых механизмов образования диффузионно-адсорбционных потенциалов все они основываются на оценке влияния двойного электрического слоя на процессы переноса ионов в поровом пространстве горной породы. Совершенно очевидно, что подобное влияние будет заметным лишь в том случае, когда толщина двойного слоя сопоставима с размерами поровых каналов. Между тем расчеты показывают, что при обычных концентрациях растворов солей в пластовых водах толщина двойного слоя составляет  $10^{-7}$ — $10^{-6}$  см. Если учесть, что размеры пор в песчаных породах-коллекторах нефти и газа изменяются в пределах  $10^{-4}$ — $10^{-2}$  см, то, исходя из описанных выше представлений, следует ожидать, что заметной диффузионно-адсорбционной активностью будут обладать лишь глины, где расстояния между чешуйками глинистых минералов измеряются  $10^{-6}$ — $10^{-5}$  см. Тем не менее экспериментальные лабораторные исследования свидетельствуют о том, что песчаные хорошо проницаемые породы характеризуются достаточно высокими значениями диффузионно-адсорбционной активности, достигающими 10 мВ и более.

Отмеченное противоречие может быть устранено, если для анализа возникновения диффузионно-адсорбционного потенциала использовать развитые в работе [23] представления о наличии на поверхности окислов, контактирующих с растворами электролитов, некоторого рыхлого пористого слоя (гель-слоя), способного в той или иной степени адсорбировать все ионы, находящиеся в растворе. Более того, благодаря пористой структуре гель-слоя адсорбированные им ионы обладают вполне определенными подвижностями [Ромм Е. С., Рубашкин А. А., 1984 г.].

Рассмотрим простую капиллярную модель пористой среды, состоящую из трех взаимно перпендикулярных пучков одинаковых прямых капилляров с радиусом  $r$ . В этих условиях соотношение между пористостью  $m$  и проницаемостью  $k$  моделируемой пористой среды и радиусом капилляров в модели будет иметь вид

$$r = \beta \sqrt{k/m}, \quad (2.41)$$

где  $\beta$  — некоторый численный коэффициент, равный в данном случае 4,9.

При анализе возникновения диффузионного потенциала в капиллярной модели можно ограничиться рассмотрением отдельного капилляра в пучке, имея в виду, что при параллельном включении одинаковых э. д. с., возникающих на концах капилляров, суммарная э. д. с. остается неизменной.

Итак, рассмотрим капилляр радиусом  $r$  и длиной  $l$ , заполненный раствором электролита переменной концентрации, изменяющейся линейно вдоль совпадающей с осью капилляра координаты  $x$  по закону

$$C_i(\xi) = C_i'' + \xi(C_i' - C_i''), \quad (2.42)$$

где  $\xi = x/l$ ;  $C'_i$  и  $C''_i$  — концентрации ионов  $i$ -го сорта на концах капилляра.

Как уже указывалось, на стенке капилляра образуется пористый гель-слой толщиной  $\delta$ , внутри которого также существует распределение концентраций адсорбированных ионов согласно тому же закону:

$$\bar{C}_i(\xi) = \bar{C}'_i + \xi(\bar{C}'_i - \bar{C}''_i),$$

где  $\bar{C}_i$  — концентрация ионов  $i$ -го сорта в гель-слое.

Выпишем известное уравнение Нернста—Планка для раствора, находящегося в капилляре:

$$-j = F^2 \frac{dE}{dx} \sum_i z_i^2 u_i C_i + RTF \sum_i z_i u_i \frac{dC_i}{dx}, \quad (2.43)$$

где  $j$  — плотность тока;  $E$  — потенциал;  $u_i$  и  $z_i$  — подвижность и валентность иона  $i$ -го сорта;  $R$  — универсальная газовая постоянная;  $F$  — число Фарадея;  $T$  — абсолютная температура. Вводя обозначения:

$$A = \sum_i z_i u_i (C'_i - C''_i); \quad B' = \sum_i z_i^2 u_i C'_i; \quad B'' = \sum_i z_i^2 u_i C''_i, \quad (2.44)$$

а также учитывая выражение (2.42), из формулы (2.43) можно найти

$$\frac{dE}{d\xi} = -\frac{RT}{F} \frac{A}{B'' + (B' - B'')\xi} - \frac{jl}{F^2 [B'' + (B' - B'')\xi]}.$$

Интегрируя это уравнение в пределах от 0 до 1, получаем выражение для обобщенного диффузионного потенциала

$$E = -\frac{\ln(B'/B'')}{B' - B''} \left( \frac{RT}{F} A + \frac{jl}{F^2} \right),$$

которое отличается от известной формулы Гендерсона

$$E_0 = -\frac{\ln(B'/B'')}{B' - B''} \frac{RT}{F} A \quad (2.45)$$

членом, зависящим от плотности тока.

Введем обозначение

$$\alpha = -\frac{\ln(B'/B'')}{B' - B''}. \quad (2.46)$$

Учитывая, что падение потенциала в обеих средах должно быть одинаково, для раствора и для гель-слоя можно соответственно написать:

$$E = \alpha(RTA/F + jl/F^2); \quad (2.47)$$

$$E = \bar{\alpha}(RT\bar{A}/F + \bar{jl}/F^2). \quad (2.48)$$

Но площади поперечного сечения раствора в капилляре  $S$  и гель-слоя на его стенках  $\bar{S}$  равны

$$S = \pi r^2 \text{ и } \bar{S} = 2\pi r\delta,$$

где  $\delta$  — толщина гель-слоя. Тогда для соответствующих сил токов можно написать

$$I = \pi r^2 j \text{ и } \bar{I} = 2\pi r \delta \bar{j}.$$

В стационарных условиях суммарный ток в системе должен быть равен нулю ( $I + \bar{I} = 0$ ), откуда

$$j = I/(\pi r^2) \text{ и } \bar{j} = -I/(2\pi r \delta).$$

Подставляя эти значения  $j$  и  $\bar{j}$  в формулы (2.47) и (2.48), получаем систему из двух уравнений с двумя неизвестными  $E$  и  $I$ :

$$\begin{aligned} E &= R T A / F + I l / (\pi r^2 F); \\ E &= R T \bar{A} / F - I l / (2\pi r \delta F). \end{aligned} \quad \left. \right\}$$

Решив эту систему относительно обобщенного диффузационного потенциала, найдем

$$E = a \frac{RT}{F} \left[ A + \frac{(\bar{a}/a) \bar{A} - A}{1 + \bar{a}r/(2a\delta)} \right]. \quad (2.49)$$

Для нахождения выражения диффузионно-адсорбционной активности необходимо использовать формулы (2.40), (2.45) и (2.49). Совершая соответствующие подстановки, после несложных алгебраических преобразований получаем

$$A_{da} = \frac{1}{\lg(C'/C'')} \frac{RT}{F} \frac{\bar{a}\bar{A} - aA}{1 + \frac{\bar{a}}{a} \frac{r}{2\delta}}. \quad (2.50)$$

Если перейти от отдельного капилляра к капиллярной модели пористой среды, то, используя формулу (2.41), можно найти непосредственную связь между пористостью, проницаемостью среды (фильтрационно-емкостным параметром  $k/m$ ) и диффузионно-адсорбционной активностью:

$$A_{da} = \frac{1}{\lg(C'/C'')} \frac{RT}{F} \frac{\bar{a}\bar{A} - aA}{1 + \frac{\bar{a}}{a} \frac{\beta}{2\delta} \sqrt{\frac{k}{m}}}, \quad (2.51)$$

где  $a$ ,  $\bar{a}$ ,  $A$  и  $\bar{A}$  определяются формулами (2.44) и (2.46). Таким образом, в формулу (2.51) входят концентрации и подвижности ионов в растворе ( $C_i$  и  $u_i$ ) и в гель-слое ( $\bar{C}_i$  и  $\bar{u}_i$ ). Что касается концентраций  $\bar{C}_i$ , то они согласно работе [23] выражаются через концентрации  $C_i$  следующим образом:

$$\bar{C}_i^+ = n_i^+ C_i^+ \sqrt{g} \text{ и } \bar{C}_i^- = n_i^- C_i^- / \sqrt{g},$$

где

$$g = \sum_i C_i^- n_i^- / \sum_i C_i^+ n_i^+;$$

$C_i^+$  и  $C_i^-$  — концентрации положительных и отрицательных ионов;  $n_i^+$  и  $n_i^-$  — термодинамические константы, связанные со стандартными потенциалами иона  $i$ -го сорта в гель-слое  $\bar{\mu}_{0i}$  и в растворе  $\mu_{0i}$ :

$$n_i = \exp [(\mu_{0i} - \bar{\mu}_{0i})/(RT)].$$

Отсюда следует, что для определения зависимости  $A_{\text{да}} = f(\sqrt{k/m})$  необходимо знать ионные составы растворов по обе стороны пористой мембранны, термодинамические константы и подвижности ионов, адсорбированных гель-слоем, а также его толщину.

С целью определения возможности использования формулы (2.51) для изучения диффузионно-адсорбционной активности горных пород решим обратную задачу: найдем для некоторой коллекции сходных по литологическому составу образцов, обладающих различными значениями фильтрационно-емкостного параметра, такие  $n_i$ ,  $u_i$  и  $\delta$ , которые, с одной стороны, удовлетворительно описывали бы экспериментальную зависимость  $A_{\text{да}} = f(\sqrt{k/m})$ , а с другой — не противоречили общим физическим представлениям.

Для решения подобной задачи воспользуемся результатами определения значений  $A_{\text{да}}$  20 образцов песчаных горных пород, отобранных в скважинах Северного Сахалина. Рабочими жидкостями служили растворы KCl с концентрациями, равными на разных концах цилиндрического образца соответственно  $10^{-3}$  и  $10^{-4}$  моль/см<sup>3</sup>. В этом случае  $z_i = 1$ ,  $C_1^+ = C_K$ ,  $C_1^- = C_{\text{Cl}}$ ,  $C_2^+ = C_{\text{H}}$  и  $C_2^- = C_{\text{OH}}$ . Так как значение pH в опытах было близко к 7, то  $C_{\text{H}} = C_{\text{OH}} = 10^{-10}$  моль/см<sup>3</sup>. Электрохимические подвижности указанных ионов в растворе известны, м<sup>2</sup>·Ом<sup>-1</sup>·моль<sup>-1</sup>:  $u_K = 73,5 \cdot 10^{-4}$ ,  $u_{\text{Cl}} = 76,3 \cdot 10^{-4}$ ;  $u_{\text{H}} = 349,8 \cdot 10^{-4}$ ,  $u_{\text{OH}} = 199,2 \cdot 10^{-4}$ .

Обработка экспериментальных данных с помощью формулы (2.51) показала, что она вполне удовлетворительно описывает зависимость диффузионно-адсорбционной активности от фильтрационно-емкостного параметра, если  $\bar{u}_K = 14,7 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>·Ом<sup>-1</sup>·моль<sup>-1</sup>,  $\bar{u}_{\text{Cl}} = u_{\text{Cl}}$ ,  $\bar{u}_{\text{H}} = u_{\text{H}}$ ,  $\bar{u}_{\text{OH}} = u_{\text{OH}}$ ,  $n_K = 1$ ,  $n_{\text{Cl}} = 0,1$ ,  $n_{\text{OH}} = 10^7$  и  $\delta = 2,8 \cdot 10^{-5}$  см.

На рис. 2.6 представлена зависимость  $A_{\text{да}} = f(\sqrt{k/m})$  [кружками обозначены экспериментальные данные, а сплошной линией — функция, рассчитанная по формуле (2.51)]. Следует отметить, что найденные при этом значения подвижностей ионов в гель-слое, его толщина и термодинамические константы не противоречат данным, полученным в работе [23]. Анализируя представленный график, можно заключить, что предложенная аналитическая зависимость диффузионно-адсорбционной активности горной породы от ее фильтрационно-емкостного параметра [формула (2.51)] может быть широко использована для оценки фильтрации

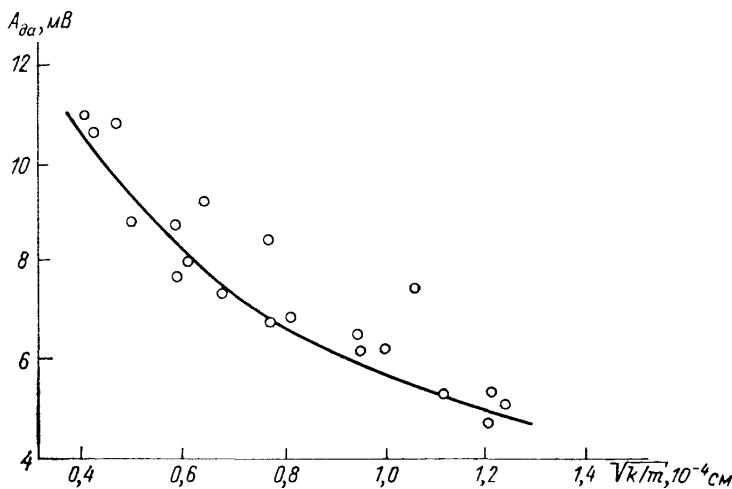


Рис. 2.6. Зависимость диффузионно-адсорбционной активности  $A_{da}$  от фильтрационно-емкостного параметра  $\sqrt{k/m}$  для коллекции песчаников, отобранных из скважин Северного Сахалина.

онных свойств пород-коллекторов нефти и газа методом собственных потенциалов.

### 2.3. Капиллярная модель с переменной извилистостью

Анализ результатов использования простой капиллярной модели для установления количественных связей между различными физическими свойствами горных пород позволяет заключить, что эта модель вполне приемлема лишь для тех условий, когда в число связываемых параметров не входит проницаемость. Именно поэтому простая капиллярная модель так успешно и широко используется для развития методов определения функции распределения пор по размерам на основе данных о кривой капиллярного давления. Что же касается методов определения абсолютной и относительных фазовых проницаемостей горной породы по капиллярной кривой, а также установления связи между диффузионно-адсорбционной активностью и фильтрационно-емкостным коэффициентом  $k/m$ , то для приведения в соответствие экспериментальных данных и модельных представлений в последние необходимо вводить некие не подлежащие экспериментальному определению численные коэффициенты, разные для разных типов пород. В работах У. Перселла это «литологический коэффициент  $\lambda$ », в работах Н. Бэрдина — «делящий коэффициент» и извилистость, в работах о диффузионно-адсорбционной активности — структурный коэффициент  $\beta$ , который умножается на фильтрационно-емкостной параметр. С другой стороны, существует множество исследований возможности применения формулы Козени—Кармана для определения удельной поверхности консолидированных сред, в том

числе и сцементированных горных пород. При этом использовалась как формула вида (2.8), действительная для фильтрации несжимаемой жидкости, так и формулы (2.18) и (2.19), полученные для случая течения газа в тонкодисперсных средах. Первые попытки применения этих формул для консолидированных сред привели к значениям удельной поверхности, намного превышающим данные, полученные более точными методами определения этой величины. Таким образом, здесь снова возникает необходимость введения параметра извилистости, который учитывает неправильную форму фильтрационных каналов реальных пористых сред, что увеличивает их гидродинамическое сопротивление. Подобный подход к проблеме позволяет видоизменить задачу: можно определять извилистость с помощью той же формулы Козени—Кармана на базе измерений пористости и проницаемости среды при условии постоянства коэффициента формы ( $\gamma=2,5$ ). В этом смысле большой интерес представляют исследования Ф. Шверца [1949 г.], который определял извилистость в спеченном стекле. Автором были исследованы три образца: среднепористый, тонкопористый и ультратонкопористый. Способ приготовления образцов предусматривал получение максимально возможной однородности поровой структуры. Результаты экспериментов позволяют заключить, что если в первом случае  $\varphi^2=2$  (соответствует неконсолидированным средам), то во втором образце уже  $\varphi^2=2,25$ , а в третьем —  $\varphi^2=3,12$ .

В работе Р. Баррера и Дж. Барри [1952 г.] исследовалось течение неона через образец консолидированной среды в условиях кнудсеновского режима, удельная поверхность образца определялась методом низкотемпературной адсорбции азота ( $s_t=2,94 \times 10^6$  1/см;  $m=0,3$ ). В этих условиях оказалось, что  $\varphi^2=4,6$ .

В другой своей работе Ф. Шверц [1949 г.], исследуя также течение газа через пористое спеченное стекло ( $s_t=3,42 \cdot 10^6$  1/см;  $m=0,32$ ), нашел, что  $\varphi^2=8,7$ . Используя данные М. Нордберга, который изучал течение воды и ацетона через спеченное стекло «Викор», П. Карман [33] подсчитал, что в этих опытах  $\varphi^2=6,2$ .

Приведенные данные заставляют подходить к параметру извилистости как к некоторому переменному количественному фактору, определяющему структуру порового пространства, а именно — геометрию пор. При этом основная задача состоит в разработке независимых методов определения этого параметра, чтобы формулу Козени—Кармана можно было распространить на консолидированные среды, т. е. на сцементированные горные породы.

### 2.3.1. Принципы построения модели и ее физический смысл

Рассмотрим капиллярную модель пористой среды, состоящую из извилистых капилляров, имеющих определенную функцию распределения по гидравлическим радиусам:

$$F(r_0) = \int_0^{r_0} f(r_0) dr_0.$$

Пусть далее каждый из капилляров модели обладает извилистостью, определяемой по формуле  $\varphi = l/h$  (где  $l$  — длина капилляра;  $h$  — собственно длина модели). Расход жидкости через группу из  $n$  капилляров, гидравлические радиусы которых находятся в интервале от  $r_0$  до  $r_0 + dr_0$ , будет равен

$$dQ = nr_0^2 s_1 \Delta p / (\mu \gamma l),$$

где  $s_1$  — площадь единичного капилляра;  $\gamma$  — коэффициент формы, определяемый табл. 2.1. Но число капилляров  $n$  определяется общим объемом капилляров в группе, деленным на объем единичного капилляра:

$$n = mS l f(r_0) dr_0 / (s_1 l),$$

где  $S$  — площадь сечения модели. Отсюда

$$dQ = mS r_0^2 f(r_0) \Delta p dr_0 / (\mu \gamma l).$$

Перейдем в этой формуле к скорости фильтрации с учетом извилистости  $dv_\Phi = dQ / (S\varphi)$  и к длине модели  $h$ . Тогда

$$dv_\Phi = m r_0^2 f(r_0) \Delta p dr_0 / (\mu \gamma \varphi^2 h).$$

Общая скорость фильтрации определится с помощью интегрирования этой формулы по всем значениям гидравлического радиуса:

$$v_\Phi = \frac{m \Delta p}{\mu \gamma \varphi^2 h} \int_0^\infty r_0^2 f(r_0) dr_0.$$

И наконец, сравнивая получившееся выражение с законом Дарси, находим

$$k = \frac{m}{\gamma \varphi^2} \int_0^\infty r_0^2 f(r_0) dr_0. \quad (2.52)$$

Следуя П. Карману [33], известную формулу Лапласа, связывающую капиллярное давление  $p_k$  с гидравлическим радиусом капилляра произвольного сечения, можно написать в следующем виде:

$$p_k = \sigma / r_0. \quad (2.53)$$

(Здесь для простоты считается, что контактный угол  $\theta = 0$ .)

В этом случае интеграл, находящийся в правой части формулы (2.52), легко приводится к новой переменной — насыщенности  $S$  порового пространства модели фильтрующейся жидкостью:

$$k = \frac{m \sigma^2}{\gamma \varphi^2} \int_0^1 \frac{dS}{p_k^2(S)}. \quad (2.54)$$

В частности, если капилляры в модели имеют одинаковые радиусы, то  $p_{\kappa}^2(S) = p_{\kappa}^2 = \text{const}$  и формула (2.54) приобретает следующий вид:

$$k = m\sigma^2/(\gamma\varphi^2 p_{\kappa}^2).$$

Но по П. Карману [33] в случае одинаковых капилляров  $p_{\kappa}^2 = \sigma^2/r_0^2 = \sigma^2 s_v^2/m^2$ , откуда

$$k = m^3/(\gamma\varphi^2 s_v^2). \quad (2.55)$$

Формулы (2.54) и (2.55) в отличие от аналогичных соотношений (2.8) и (2.35) содержат параметр извилистости  $\varphi$ , который подлежит определению какими-либо независимыми методами.

Таким образом, капиллярная модель с переменной извилистостью дает возможность связать друг с другом проницаемость породы, ее пористость, кривую капиллярного давления (а в случае однородного распределения пор по размерам — удельную поверхность) и параметр структуры порового пространства (геометрию пор), называемый извилистостью (см. рис. в.1).

Тот факт, что реальная длина пути частиц жидкости в любой модели пористой среды больше длины пути фильтрации, стал ясен уже при создании первой структурной модели неконсолидированной среды — модели Слихтера. В частности, можно показать, что извилистость в этой модели определяется соотношением

$$\varphi = 3(1 - m)/[2(1 - 0,603m^{1,38})]$$

и при изменении пористости в пределах от 0,26 до 0,48 меняется соответственно от 1,22 до 1,00.

В случае неконсолидированных сред фактор извилистости представляет собой величину, характеризующую «огибание» потоком жидкости частиц, составляющих среду, и не вызывает особых сомнений, хотя и там сечение потока сильно меняется на длине пути фильтрации и не очень понятно, как измерить «истинную» траекторию частицы жидкости. Тем не менее в условиях неконсолидированных сред широко используется формула Козени—Кармана, где извилистость — величина постоянная, и поэтому сама проблема извилистости не имеет того острого значения, которое она приобретает при переходе к консолидированным средам.

Так, например, А. Шейдеггер [28] не без оснований утверждает, что извилистость не имеет под собой глубокой физической основы, но вводится различными исследователями в качестве дополнительного «свободного» параметра для приведения в соответствие модельных представлений и экспериментальных данных. Действительно, фактор извилистости вводится как некоторое дополнительное гидродинамическое сопротивление при фильтрации жидкости в пористых средах, которое может быть вызвано не реальной извилистостью поровых каналов, а совсем иными причинами, например пересечением каналов с различными гидравлическими

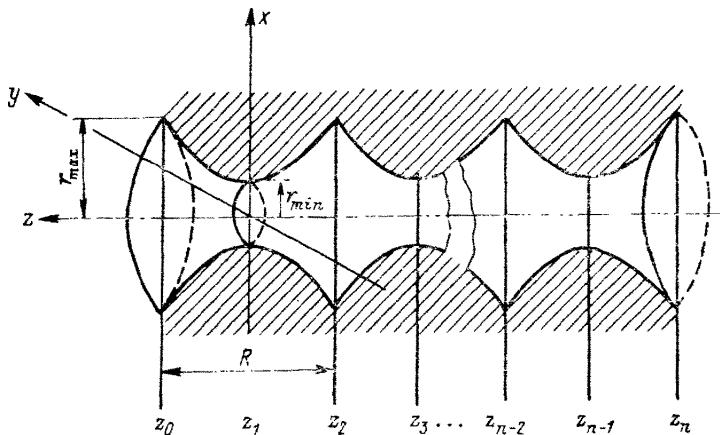


Рис. 2.7. Поровый канал переменного сечения по Э. Петерсену [1958 г.].

радиусами или наличием в каждом канале расширений и сужений, несомненно характерных для реальных пористых сред.

Это обстоятельство было детально исследовано Э. Петерсеном [1958 г.], который рассмотрел капиллярную модель пористой среды с прямыми капиллярами переменного сечения. Автор теоретически исследовал изменение эффективного коэффициента диффузии через пору, элемент которой представляет собой тело вращения, обра- зованное гиперболой (рис. 2.7).

Автор рассмотрел два упрощенных случая, при которых получаются два решения поставленной задачи: завышенное и заниженное. Если обозначить отношение эффективного коэффициента диффузии в капилляре переменного сечения к коэффициенту диффузии в эквивалентном цилиндрическом капилляре через  $\bar{D}$ , а отношение самого широкого ( $r_{\max}$ ) и самого узкого ( $r_{\min}$ ) участков капилляра — через  $g$ , то полученные решения (сплошные линии) и среднее между ними (штриховая линия) изображены на рис. 2.8.

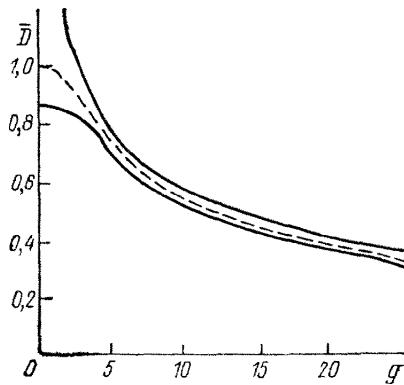


Рис. 2.8. Зависимость относительного коэффициента диффузии  $\bar{D}$  от соотношения максимального и минимального радиусов  $g$  поры переменного сечения [Петерсен Э., 1958 г.].

Таким образом, при  $g=10$   $D=0,5$ , что соответствует извилистости  $\varphi=2$  ( $\varphi^2=4$ ). С увеличением неравномерности сечения капилляра извилистость, естественно, увеличивается еще больше.

Таким образом, показано, что прямые неодинаковые по сечению капилляры характеризуются значительными значениями извилистости. Отсюда вытекает, что под извилистостью действительно следует понимать некоторый параметр, связанный с увеличением гидродинамического сопротивления фильтрации в реальных пористых средах из-за сложности реальной структуры порового пространства. Однако если этот параметр можно определять какими-либо независимыми методами, то это должно значительно приблизить структурную капиллярную модель с переменной извилистостью к реальным сцементированным горным породам.

### 2.3.2. Использование модельных представлений для определения фактора пористости и удельной поверхности горных пород-коллекторов нефти и газа

Первым, по-видимому, кто рассмотрел разницу между удельными электрическими сопротивлениями свободного солевого раствора  $\rho_0$  и образца горной породы, насыщенного этим раствором,  $\rho_n$  был Г. Арчи [30]. Этим автором было введено понятие фактора пористости  $R_n$ , который измеряется отношением  $\rho_n$  и  $\rho_0$ :

$$R_n = \rho_n / \rho_0, \quad (2.56)$$

(Следует отметить, что в литературе существует множество наименований этого параметра: фактор формы, показатель пористости и т. д.) На основании многочисленных измерений фактора пористости образцов нефтеносных песчаников, отобранных на различных нефтяных площадях США, Г. Арчи пришел к эмпирической формуле:

$$R_n = m^{-1,3}.$$

М. Вилли и У. Роуз [1950 г.] предложили использовать данные по определению фактора пористости для установления насыщенности. Считая, что удельная электропроводность насыщенной горной породы находится в такой же связи с удельной электропроводностью свободного раствора, как скорость фильтрации с истинной скоростью в поровом канале по формуле Дюпюи—Форхгеймера с поправкой Кармана на извилистость, авторы получили соотношение

$$1/\rho_n = (1/\rho_0) (m/\varphi),$$

откуда  $R_n = \varphi/m$  и

$$\varphi = R_n m. \quad (2.57)$$

Эту же формулу использовали в своих исследованиях М. Вилли и М. Шпенглер [49]. Л. Клинкенберг [40] экспериментально показал, что для определения параметра извилистости можно с таким

же успехом пользоваться изучением диффузионного переноса в насыщенных раствором образцах горной породы. В этом случае

$$\varphi = \bar{D}_n m, \quad (2.58)$$

где  $\bar{D}_n = D_0/D_n$ ;  $D_0$  и  $D_n$  — коэффициенты диффузии в свободном растворе и в насыщенном этим раствором образце породы соответственно.

Здесь возникает очень важный вопрос о правомерности использования извилистости, полученной в опытах по электропроводности и диффузии, для гидродинамических расчетов. Совершенно очевидно, что сила электрического тока и диффузионный поток пропорциональны в общем случае квадрату гидравлического радиуса, тогда как расход жидкости в канале пропорционален той же величине, но в четвертой степени. Исследования, посвященные установлению связи между «электрической» («диффузионной») извилистостью и извилистостью «гидродинамической», были выполнены В. А. Нелидовым [13], но окончательно эта проблема не решена до настоящего времени.

У. Уинсор, Х. Шэрин, П. Мэссон и М. Уильямс [50] измеряли извилистость по данным об истинном времени прохождения иона через пористый образец при настолько большом градиенте потенциала, что диффузионным переносом можно было пренебречь. Легко показать, что в этом случае

$$\varphi = \sqrt{t'/t},$$

где  $t'$  и  $t$  — время прохождения иона через насыщенный образец и через эквивалентную толщину свободного раствора соответственно.

В отличие от М. Вилли, У. Роуза и М. Шпенглера У. Уинсор с сотрудниками [50] предположили, что в формуле (2.57) вместо пористости необходимо использовать просветность  $n$ , т. е.

$$\varphi = R_n n.$$

Но, как полагают авторы,  $n = m/\varphi$ , поэтому

$$R_n = \varphi^2/m. \quad (2.59)$$

Совершенно аналогичные рассуждения приводятся в работе Д. Корнелла и Д. Катца [35], которые получают ту же формулу (2.59).

Эксперименты У. Уинсора с соавторами на 40 образцах глин, известняков и песчаников самого различного состава показали, что наиболее справедливой является эмпирическая формула

$$R_n = \varphi^{1.67}/m. \quad (2.60)$$

Интересно отметить, что как М. Вилли, У. Роуз и М. Шпенгер для расчетов удельной поверхности использовали формулу (2.57), так и Д. Корнелл и Д. Катц для этих же целей определяли извилистость по формуле (2.59). М. Вилли и У. Роуз [1950 г.] использовали формулу Козени—Кармана в виде

$$k = mr_0^2/(\gamma\varphi^2).$$

Учитывая, что согласно предположению  $\varphi = R_n m$ , можно написать

$$k = r_0^2 / (\gamma R_n^2 m)$$

или

$$r_0 = \sqrt{\gamma R_n^2 m k}, \quad (2.61)$$

где  $k = k_{\text{эксп}}$  определяется экспериментальным путем.

Авторы по формуле (2.61) рассчитывали гидравлический радиус образца и сравнивали его со значением, полученным из экспериментов по капиллярному вытеснению:

$$r_0 = \sigma \cos \theta / p_k. \quad (2.62)$$

Для получения достоверных данных М. Вилли и У. Роуз подбирали исследуемые образцы таким образом, чтобы распределение пор по размерам в них можно было считать однородным и была справедлива формула (2.62), а в формуле (2.61) величину  $\gamma$  можно было полагать равной 2,5.

Для наглядности П. Карман [33] по данным о гидравлических радиусах, полученным М. Вилли и У. Роузом из соотношения (2.62), нашел «теоретическую» проницаемость по формуле

$$k_{\text{теор}} = \left( \frac{\sigma \cos \theta}{p_k} \right)^2 \frac{1}{\gamma R_n^2 m}. \quad (2.63)$$

В табл. 2.3 представлены результаты М. Вилли и У. Роуза, пересчитанные П. Карманом.

Таблица 2.3

Образец	$m$	$\varphi$	$\gamma \varphi^2$	$k_{\text{теор}}, \text{Д}$	$k_{\text{эксп}}, \text{Д}$
Алундум	0,258	3,54	31,2	0,570	0,680
Алундум	0,254	2,87	20,5	0,440	0,660
Алундум	0,236	2,72	18,4	0,044	0,063
Пирекс	0,374	1,64	6,8	0,0105	0,0081
Пирекс	0,286	1,77	7,8	3,40	3,900
Песчаник Николсон	0,200	2,50	15,6	0,193	0,230
Буффалло					
Песчаник Береа	0,225	2,63	17,3	0,665	0,890

М. Вилли и М. Шпенглер [49] распространяли описанную выше теорию на среды со случайным распределением пор по размерам. Для этого они применили формулу (2.63) для каждой группы капилляров приблизительно одинакового радиуса:

$$k = \frac{(\sigma \cos \theta)^2}{\gamma R_n^2 m} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta S_i}{p_{ki}^2},$$

где  $\Delta S_i$  — насыщенность фильтрующейся жидкостью  $i$ -й группы капилляров. Аналогичная ситуация была рассмотрена ранее У. Перселлом [45] (раздел 2.2.4), который показал, что

$$\sum_{i=1}^n \frac{\Delta S_i}{p_{ki}^2} = \int_0^1 \frac{dS}{p_k^2(S)}.$$

Отсюда

$$k = \frac{(\sigma \cos \theta)^2}{\gamma R_n^2 m} \int_0^1 \frac{dS}{p_k^2(S)}. \quad (2.64)$$

М. Вилли и М. Шпенглер экспериментально определили пористость, проницаемость, удельную поверхность и фактор пористости семи образцов песчаников. Далее по формуле

$$s_{t, \text{теор}} = (\sigma \cos \theta)^2 \int_0^1 dS / p_k^2(S)$$

авторы вычислили теоретические значения удельной поверхности, а по формуле (2.64) — теоретические значения проницаемости. Полученные таким образом экспериментальные и теоретически вычисленные значения исследуемых параметров пористых образцов представлены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

Материал	$m$	$n$	$s_{t, \text{теор}}$ 1/см	$s_{t, \text{эксп.}}$ 1/см	$\Phi$	$r_0, 10^{-4},$ см	$k_{\text{теор.}}$ Д	$k_{\text{эксп.}}$ Д
Олигоценовый песчаник	0,218	0,220	497	507	2,85	5,45	0,318	0,336
Номер образца	151	0,163	0,173	437	3,27	5,05	0,155	0,120
	154	0,181	0,213	457	2,54	5,04	0,286	0,264
	220	0,195	0,208	433	2,71	6,45	0,445	0,332
	250	0,205	0,215	388	2,66	6,11	0,428	0,510
	252	0,185	0,190	365	3,13	6,27	0,296	0,292
	228	0,201	0,200	387	3,51	6,31	0,263	0,274

Данные, представленные в табл. 2.3 и 2.4, свидетельствуют о возможности использования электрических измерений (или измерений диффузии) для определения извилистости на базе формулы (2.57). С другой стороны, практическое совпадение значений просветности и пористости (табл. 2.4) говорит не в пользу соображения У. Уинсора о том, что  $m = n\Phi$ .

Следует, однако, отметить, что экспериментальные данные Д. Корнелла и Д. Катца [35], использовавших формулу (2.59), также находятся в хорошем соответствии с модельными представлениями; это, естественно, противоречит работам М. Вилли, У. Роуза и М. Шпенглера.

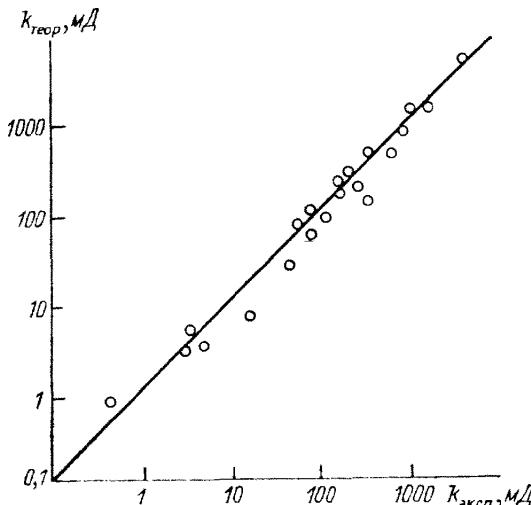


Рис. 2.9. Результаты определения показателя степени  $n$  в формуле (2.65) [Фэйрис С., Горней Л., Липсон Л. и Уэбб Т., 1954 г.].

Для решения вопроса о том, какая из двух формул (2.57) или (2.59) соответствует действительности, С. Фэйрис, Л. Горней, Л. Липсон и Т. Уэбб [1954 г.] провели исследование формулы, аналогичной (2.64), но написанной в следующем виде:

$$k = \frac{(\sigma \cos \theta)^2 m}{\gamma (R_n m)^\pi} \int_0^1 \frac{dS}{p_k^2(S)}. \quad (2.65)$$

Здесь все величины измерялись экспериментально, кроме показателя степени  $n$ . В работе исследовались 24 естественных песчаника и известняка и один синтетический образец из алундуна. Распределение пор по размерам определялось с помощью ртутной порометрии. Экспериментальные данные этих авторов представлены на рис. 2.9. В результате было получено, что экспериментально найденная зависимость извилистики от пористости и фактора пористости имеет следующий вид:

$$\varphi^2 = 0,459 (R_n m)^{1,95}.$$

Это практически совпадает с теоретическим значением  $n = 2$  [формула (2.59)]. Константа 0,459 связана с предположением о цилиндрической форме пор и о существовании контактного угла на границе порода—ртуть. Колебания значений этого коэффициента вполне можно объяснить колебаниями значений контактного угла и поверхностного натяжения.

Таким образом, эксперименты С. Фэйриса и других, с одной стороны, еще раз показали возможность использования капиллярной

модели с переменной извилистостью для изучения свойств горных пород-коллекторов, а с другой — окончательно решили вопрос о соотношении между извилистостью, пористостью и фактором пористости в пользу формулы М. Вилли, У. Роуза и М. Шпенглера ( $\varphi = R_{\text{п}} m$ ), а не У. Уинсора, Д. Корнелла и Д. Катца ( $\varphi^2 = R_{\text{п}} m$ ).

### 2.3.3. Определение ОФП пород-коллекторов нефти и газа по данным об их электрических свойствах и кривой капиллярного давления

Для нефтяной промышленности связь между абсолютной проницаемостью породы и ее удельной поверхностью имеет, вообще говоря, чисто научный интерес и является лишь необходимым шагом к решению важной в практическом отношении задачи — определению ОФП. С этой целью М. Вилли и М. Шпенглер [49] ввели в рассмотрение «каждущийся фактор пористости»  $R_{\text{пс}}$  частично насыщенной смачивающей фазой пористой среды:

$$R_{\text{пс}} = \varphi_c / (mS), \quad (2.66)$$

где  $\varphi_c$  — извилистость, соответствующая насыщенности породы смачивающей фазой. Далее авторы рассматривают показатель сопротивления  $\tilde{R}$ , определяемый соотношением

$$\tilde{R} = R_{\text{пс}} / R_{\text{п}}.$$

Учитывая формулы (2.57) и (2.66), из последнего выражения можно получить

$$\tilde{R} = \varphi_c / (\varphi S). \quad (2.67)$$

Дж. Гейтс и У. Лейц [1950 г.] впервые предложили вычислять ОФП по смачивающей фазе с помощью данных о капиллярном давлении и электрическом сопротивлении частично насыщенных образцов. Фазовая проницаемость по смачивающей фазе частично насыщенного ею образца будет

$$k_c = \frac{\sigma^2 m}{\gamma \varphi_c^2} \int_0^S dS / p_k^2(S).$$

Но из формулы (2.67) следует, что  $\varphi_c^2 = \tilde{R}^2 \varphi^2 S^2$ , откуда

$$k_c = \frac{\sigma^2 m}{\gamma \tilde{R}^2 \varphi^2 S^2} \int_0^S dS / p_k^2(S). \quad (2.68)$$

Для получения ОФП значение  $k_c$  следует разделить на абсолютную проницаемость, определяемую по формуле (2.54):

$$k_c^* = \frac{k_c}{k} = \frac{1}{\tilde{R}^2 S_c^2} \frac{\int_0^S dS / p_k^2(S)}{\int_0^1 dS / p_k^2(S)}. \quad (2.69)$$

Для определения ОФП по несмачивающей фазе необходимо ввести еще одну величину: извилистость части порового пространства, занятого несмачивающей фазой,—  $\varphi_{hc}$ . В этом случае легко показать, что

$$k_{hc}^* = \left( \frac{\varphi_c}{\varphi_{hc}} \right)^2 \frac{\int\limits_{\frac{S}{1}} dS / p_k^2 (S)}{\int\limits_{\frac{0}{1}} dS / p_k^2 (S)}. \quad (2.70)$$

Ввиду того что извилистость по несмачивающей фазе не подлежит, вообще говоря, даже косвенному определению, формула (2.70) мало чем отличается от соответствующего соотношения, предложенного Н. Бэрдином и др. [32].

Таким образом, строго говоря, с помощью капиллярной модели с переменной извилистостью можно установить связь между следующими физическими свойствами пород-коллекторов нефти и газа (см. рис. в. 1): пористостью, удельной поверхностью, абсолютной и относительной фазовой проницаемостью по смачивающей фазе, фактором пористости, показателем сопротивления и кривой капиллярного давления.

Тем не менее при всей кажущейся универсальности капиллярная модель с переменной извилистостью обладает рядом существенных недостатков. Так, до настоящего времени не установлена достоверно эквивалентность «электрической» и «гидродинамической» извилистостей, особенно если в поровом пространстве существует также и несмачивающая фаза. Это наглядно демонстрируется тем обстоятельством, что при минимальной насыщенности смачивающей фазой, когда она перестает двигаться, гидродинамическая извилистость по смачивающей фазе совершенно неопределенна, тогда как электрическая имеет вполне определенное значение.

С другой стороны, получение кривых ОФП возможно лишь при неоднородном распределении пор в модели. В то же время известны многочисленные экспериментальные данные, свидетельствующие о достаточно выраженной кривизне графиков ОФП пористых материалов с практически одинаковым размером пор [1, 21, 28 и др.]. В связи с этим дальнейшее развитие модельных представлений о структуре порового пространства пошло по пути отказа от понятий «электрической» и «гидродинамической» извилистостей с тем, чтобы найти более физически обоснованные факторы, определяющие увеличение гидродинамического сопротивления при фильтрации жидкости в реальных горных породах.

## 2.4. Капиллярно-статистические модели

Как уже указывалось, введение в модельные представления фактора извилистости не имеет под собой достаточной физической основы. Исходя из этого, в 1958 г. Э. Маршалл [43] и независимо

от него М. Вилли и Г. Гардиер [48] предложили капиллярные модели, устанавливающие связь между кривой капиллярного давления и остальными свойствами породы: пористостью, абсолютной и относительной фазовыми проницаемостями, фактором пористости и показателем сопротивления — без привлечения фактора извилистости (см. рис. в. 1). В основе этих представлений лежит предположение о том, что простая капиллярная модель с прямыми параллельными капиллярами, распределенными по размерам в соответствии с некоторой функцией распределения, разрезается на части, плоские границы которых перпендикулярны к осям капилляров. Далее эти части поворачиваются друг относительно друга на некоторые произвольные углы, так что отрезки капилляров одной части соединяются с отрезками совсем других капилляров другой части. При этом следует подчеркнуть, что в любом сечении модели ее пористость одинакова и равна просветности. Вследствие случайности углов поворота и статистического характера связи капилляров друг с другом подобные модели целесообразно наименовать капиллярно-статистическими.

#### 2.4.1. Модель Маршалла

**Принципы построения модели и ее физический смысл.** Основным предположением, лежащим в основе модели Маршалла, является то, что скорость потока в каждой части модели определяется площадью сечения самых узких мест (перешейков), соединяющих отрезки капилляров. Соединение отрезков капилляров может быть совершенным, если площадь сечения меньшего капилляра полностью перекрывается площадью соединяющегося с ним большего капилляра. Если соединение между капиллярами совершенно, то поперечным сечением перешейка считается сечение меньшего капилляра. Если же соединение капилляров несовершенно, то, естественно, площадь сечения перешейка меньше площади сечения наименьшего капилляра. Эффективным сечением капилляра считается среднее сечение перешейка. При этом возникает ошибка из-за пренебрежения частью потока в широком капилляре, который переходит в узкий, но она компенсируется противоположной по знаку ошибкой из-за предположений: 1) о круговой форме капилляров в каждой секции; 2) о наличии только одного перешейка на конце наименьшего капилляра; 3) о том, что путь потока не удлиняется из-за несовершенства соединений капилляров.

Если бы все капилляры были одинаковы и имели радиус  $\bar{r}$ , то согласно простой капиллярной модели с одинаковыми капиллярами скорость фильтрации в модели определялась бы формулой

$$v_{\Phi} = \frac{m\bar{r}^2}{8\mu} \frac{\Delta p}{l}. \quad (2.71)$$

Рассмотрим секцию модели, ограниченную двумя плоскими поверхностями  $A$  и  $B$ . Разделим единицу площади каждой поверх-

ности на  $n$  частей, так что площадь каждой части будет равна  $1/n$ . Пористость (просветность) этой части равна  $m$ , а сама часть содержит капилляры с радиусами  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ , причем  $r_1 > r_2 > r_3 > \dots > r_n$ . Часть поверхности  $A$ , которая содержит капилляры радиуса  $r_1$ , гидродинамически связана с  $n$  частями поверхности  $B$ , каждая из которых содержит капилляры какого-либо одного радиуса из  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$  и площадь которой равна, естественно,  $1/n^2$ .

Вследствие того что соединение капилляров друг с другом может быть несовершенно, площадь контакта между капиллярами окажется в  $m$  раз меньше, чем площадь наименьшего капилляра. Таким образом, средние площади перешейков для каждой из  $n$  частей поверхности  $B$ , находящихся в гидродинамической связи с первой частью поверхности  $A$ , должны определяться выражениями:  $m\pi r_1^2, m\pi r_2^2, m\pi r_3^2, \dots, m\pi r_n^2$ . Площадь поверхности  $A$ , содержащая капилляры радиусом  $r_2$ , должна обеспечивать площади сечения перешейков с  $n$  частями поверхности  $B$  —  $m\pi r_2^2, m\pi r_2^2, m\pi r_3^2, \dots, m\pi r_n^2$ . Подобные серии рассуждений следует провести для всех остальных ( $n - 2$ ) частей поверхности  $A$  вплоть до  $n$ -й ее части, содержащей поры радиусом  $r_n$ . Эта последняя часть обеспечит площадь перешейков  $m\pi r_n^2$  для каждой из  $n$  частей поверхности  $B$ , с которыми эта часть имеет гидродинамическую связь. Средняя площадь  $\bar{s}$  перешейков каждой из  $n^2$  частей поверхности  $B$  будет определяться выражением

$$\bar{s} = \frac{m\pi}{n^2} [(r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2) + (2r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_n^2) + \dots + (3r_3^2 + r_4^2 + \dots + r_n^2) + \dots + nr_n^2]$$

или

$$\bar{s} = \frac{m\pi}{n^2} [r_1^2 + 3r_2^2 + 5r_3^2 + \dots + 2(n-1)r_n^2] = \frac{m\pi}{n^2} \sum_{i=1}^n (2i-1)r_i^2.$$

Так как  $\bar{s} = \pi \bar{r}^2$ , то

$$\bar{r}^2 = \frac{m}{n^2} \sum_{i=1}^n (2i-1)r_i^2.$$

Скорость фильтрации в модели согласно формуле (2.71) определяется соотношением

$$v_\Phi = \frac{m^2}{8n^2\mu} \frac{\Delta p}{l} \sum_{i=1}^n (2i-1)r_i^2.$$

Сравнив это выражение с законом Дарси

$$v_\Phi = \frac{k}{\mu} \frac{\Delta p}{l},$$

найдем

$$k = \frac{m^2}{8n^2} \sum_{i=1}^n (2i-1) r_i^2. \quad (2.72)$$

Но так как по формуле Лапласа  $r_i = 2\sigma \cos \theta / p_k(S)$ , то

$$k = \frac{(m\sigma \cos \theta)^2}{2n^2} \sum_{i=1}^n \frac{2i-1}{p_k^2(S)}. \quad (2.73)$$

Формула (2.73) непосредственно связывает пористость и абсолютную проницаемость модели с кривой капиллярного давления.

Принципиальная важность полученных соотношений состоит в том, что впервые связь между указанными физическими свойствами была получена без каких бы то ни было количественных предположений о геометрии пор, подобных, например, фактору извилистости, но на основании лишь некоторых статистических соображений о закономерностях соединения различных капилляров друг с другом.

Если все капилляры модели одинаковы, то  $r_i = r$ ,  $\sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2$  и  $k = m^2 r^2 / 8$ .

Так как удельная поверхность простой капиллярной модели с одинаковыми капиллярами определяется формулой

$$s_V = 2m/r,$$

то

$$k = m^4 / (2s_V^2).$$

Если положить  $m = 0,4$ , последняя формула переходит в классическую формулу Козени—Кармана:

$$k = m^3 / (5s_V^2).$$

**Определение абсолютной проницаемости горных пород по кривой капиллярного давления.** Для проверки справедливости полученных соотношений Э. Маршалл использовал данные изучения образцов песков и песчаников, полученные различными авторами. Для определения кривой капиллярного давления использовалось капиллярное поднятие в образце при различных давлениях вытеснения. Так как согласно формуле Лапласа

$$r_i = 2\sigma \cos \theta / (\rho g h_i),$$

из выражения (2.72) можно получить следующее соотношение:

$$k = 2,89 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{2i-1}{h_i^2}. \quad (2.74)$$

Здесь  $k$  выражается в квадратных сантиметрах, а все не изменяющиеся для группы образцов величины включены в постоянный коэффициент.

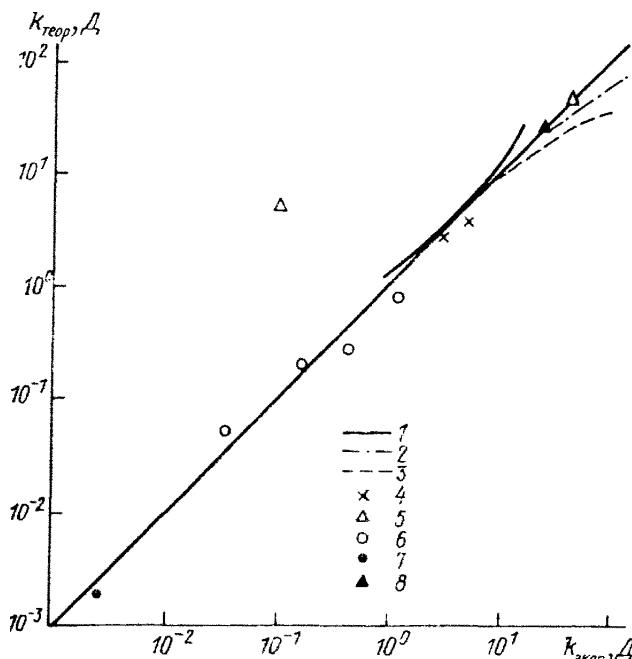


Рис. 2.10. Зависимость между экспериментальными и вычисленными с помощью модели Маршалла значениями проницаемости.

1 — чистый песок [Бавер Л. Д., 1938 г.]; 2 — песок с фракциями от 0,5 до 1 мм; 3 — песок с фракциями от 0,25 до 0,5 мм; 4 — сланцевый порошок [Карман П., 1938 г.]; 5 — песчаная почва [Карман П., 1956 г.]; 6 — песчаники и известняки [Чайлдс Е., Коллинс-Джордж П. Д., 1950 г.]; 7 — песчаники [Далэйвэл Дж., 1948 г.]; 8 — кварцевый песок [Дэй П., Лютин Дж., 1956 г.] [43].

Для каждого образца проницаемость определялась экспериментально, а также вычислялась по формуле (2.74) по данным измерения капиллярного поднятия. Результаты экспериментов представлены на рис. 2.10, где значения проницаемости  $k_{\text{теор}}$  вычислены по формуле (2.74).

Как видно из рисунка, капиллярно-статистическая модель Маршалла весьма эффективно описывает связь между основными свойствами песчаных пород-коллекторов нефти и газа. Указанное обстоятельство позволило В. М. Добрынину [8] успешно использовать модель для построения полуэмпирической теории сжимаемости в этих условиях.

#### 2.4.2. Модель Вилли—Гарднера

**Принципы построения модели и ее физический смысл.** Так как модель Вилли—Гарднера предназначена для расчетов ОФП и электрических свойств горных пород, то она, сохраняя основную секционную структуру модели Маршалла, предусматривает соответствие между остаточной насыщенностью смачивающей фазой

(для краткости будем считать ее водой) моделируемой породы и моделью. Для этого предполагается, что остаточная вода в порах моделируемой породы превратилась в твердое тело. Такую моделируемую породу, где остаточная насыщенность водой равна нулю, будем называть модифицированным прототипом. Если остаточную водонасыщенность обозначить через  $S_0$ , то пористость модифицированного прототипа  $\tilde{m} = m(1 - S_0)$ . Аналогичное рассуждение приводит к тому, что насыщенность водой  $\tilde{S}$  модифицированного прототипа будет определяться выражением

$$\tilde{S} = (S - S_0)/(1 - S_0),$$

где  $S$  — истинная насыщенность водой моделируемой породы.

Соответствующая насыщенность модифицированного прототипа несмачивающей фазой  $\tilde{S}_{nc}$  будет определяться формулой

$$\tilde{S}_{nc} = S_{nc}/(1 - S_0).$$

Так как по условию остаточная вода в моделируемой породе не участвует в фильтрации, то проницаемость модифицированного прототипа должна быть равна проницаемости моделируемой породы. Справедливость такого предположения обосновывается близкими значениями проницаемости по несмачивающей фазе, измеренными при  $S = 0$  и  $S = S_0$ . (Далее для простоты в качестве несмачивающей фазы рассматривается газ.)

Будем считать, что капиллярное давление в модели (в модифицированном прототипе) при насыщенности  $S^*$  равно капиллярному давлению в моделируемой породе при насыщенности  $S$ . Таким образом, если функция распределения пор по размерам в мо-

дели  $F(r) = \int_0^r f(r) dr$ , то по ее определению

$$\tilde{S} = \int_{r_{\min}}^r r^2 f(r) dr / \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} r^2 f(r) dr, \quad (2.75)$$

где  $r_{\min}$  и  $r_{\max}$  — минимальное и максимальное значения радиусов капилляров модели. Последнее выражение позволяет по данным о капиллярном давлении определить функцию распределения пор по размерам.

**Определение ОФП, фактора пористости и показателя сопротивления по кривой капиллярного давления.** Рассмотрим какую-либо секцию модели, образованную, как и в случае модели Маршалла, двумя параллельными плоскостями, рассекающими простую капиллярную модель и перпендикулярными к осям капилляров, с последующим поворотом секции на некоторый произвольный угол. Если  $A$  — полная площадь сечения секции, то площадь, занятая водой при капиллярном давлении  $r_k$  и насыщенности  $\tilde{S}$ , определяется как произведение  $\tilde{m} \tilde{S} A$ ; при этом вода занимает капилляры с радиусами от  $r_{\min}$  до  $r$ . Такая же площадь будет за-

нята водой и в соседней секции. Так как вероятность того, что случайная точка попадет в площадь, занятую водой, в каждой секции равна  $\tilde{m}\tilde{S}$ , то вероятность совпадения этих событий равна  $(\tilde{m}\tilde{S})^2$ . Таким образом, гидродинамические свойства модели определяются площадью  $A(\tilde{m}\tilde{S})^2$ .

Если тем же путем рассмотреть единичную пору радиусом  $r$  в одной секции, то площадь всех пор, насыщенных водой в соседней секции, которые соединяются с порой первой секции, определяется произведением  $\pi r^2 \tilde{m}\tilde{S}$ . Таким образом, каждую пору в секции с радиусом  $r$  можно рассматривать как имеющую на концах сужения с площадями сечения  $\pi r^2 \tilde{m}\tilde{S}$ . Поэтому можно предположить, что радиус эквивалентной поры  $\bar{r}$  в секции будет определяться выражением

$$\bar{r} = \frac{(\tilde{m}\tilde{S})^{1/2}}{n^{1/2}} r, \quad (2.76)$$

где  $n$  — некоторая константа, отражающая тот факт, что площадь сечения меньшей поры в одной секции не полностью перекрывается площадью сечения большей поры в соседней секции.

Тогда для эффективной поры радиусом  $\bar{r}$  может быть написана формула Пуазейля:

$$Q = \frac{\pi \bar{r}^4}{8\mu} \frac{\Delta p}{l}$$

или, если подставить вместо  $\bar{r}$  его выражение из формулы (2.76),

$$Q = \frac{\pi}{8\mu} \frac{\Delta p}{l} r^4 \left( \tilde{m}\tilde{S} \right)^2 \frac{\beta}{n^2}, \quad (2.77)$$

где  $\beta$  — некоторый численный коэффициент, учитывающий возможное преувеличение гидродинамического сопротивления в тех случаях, когда более узкий капилляр в секции, находящейся посередине, контактирует с более широкими капиллярами в соседних секциях.

Суммируя поток через поры, радиусы которых находятся в промежутке между  $r_{\min}$  и  $r$ , находим

$$Q = \frac{\pi}{8\mu} \frac{\Delta p}{l} \left( \tilde{m}\tilde{S} \right)^2 \frac{\beta}{n^2} \int_{r_{\min}}^r r^4 f(r) dr. \quad (2.78)$$

Продифференцируем уравнение (2.75):

$$d\tilde{S} = r^2 f(r) dr / \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} r^2 f(r) dr. \quad (2.79)$$

Учитывая, что по формуле Лапласа при  $\theta = 0$   $r = 2\sigma/p_k(\tilde{S})$ , и исключая  $r$  из уравнения (2.78) с помощью выражения (2.79), можно найти скорость фильтрации воды в секции:

$$v_{\phi} = \frac{Q}{A} = \frac{\sigma^2 \tilde{m}}{2\mu} \frac{\Delta p}{l} \left( \tilde{m}\tilde{S} \right)^2 \frac{\beta}{n^2} \int_0^{\tilde{S}} \frac{d\tilde{S}}{p_k^2(\tilde{S})}. \quad (2.80)$$

Сравнив это выражение с законом Дарси, найдем фазовую проницаемость по воде:

$$k_c = \frac{\sigma^2}{2} \tilde{m} \left( \tilde{m} \tilde{S} \right)^2 \frac{\beta}{n^2} \int_0^{\tilde{S}} \frac{dS}{p_k^2(S)}. \quad (2.81)$$

Если  $\tilde{S} = 1$ , то формула (2.81) дает абсолютную проницаемость

$$k = \frac{\sigma^2}{2} \tilde{m}^3 \frac{\beta}{n^2} \int_0^1 \frac{dS}{p_k^2(S)}. \quad (2.82)$$

Тогда ОФП по смачивающей фазе (воде) будет

$$k_c^* = \frac{k_c}{k} = \tilde{S}^2 \frac{\int_{S_0}^S dS / p_k^2(S)}{\int_{S_0}^1 dS / p_k^2(S)}. \quad (2.83)$$

Учитывая, что  $\tilde{S} = (S - S_0) / (1 - S_0)$ , формулы для ОФП по смачивающей  $k_c^*$  и несмачивающей  $k_{nc}^*$  фазам можно написать в виде

$$k_c^* = \frac{(S - S_0)^2}{(1 - S_0)^2} \frac{\int_{S_0}^S dS / p_k^2(S)}{\int_{S_0}^1 dS / p_k^2(S)}; \quad (2.84)$$

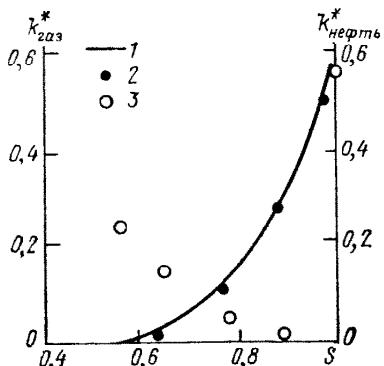
$$k_{nc}^* = \frac{(S - S_0)^2}{(1 - S_0)^2} \frac{\int_1^S dS / p_k^2(S)}{\int_1^{S_0} dS / p_k^2(S)}. \quad (2.85)$$

Полученные уравнения были использованы для вычисления ОФП по нефти при наличии в породе остаточной воды и газа. Исследовался образец нефтеносного песчаника Береса (США), на котором производились измерения ОФП по нефти и газу в условиях различного насыщения водой (10 и 38,8 %). В обоих случаях получились вполне идентичные кривые. На этом же образце измерялась кривая капиллярного давления. Экспериментальные данные и вычисленные значения ОФП представлены на рис. 2.11. Как видно из рисунка, соответствие теоретических и экспериментальных данных является вполне удовлетворительным.

Рассмотренная модель может быть использована для анализа электрических свойств насыщенных растворами солей горных пород. Действительно, если предположить, что сопротивление электрическому току в модели определяется в основном площадью се-

Рис. 2.11. Экспериментальные (точки) и теоретические (сплошная линия) значения ОФП.

1 — вычисленная ОФП по нефти; 2 — измеренные значения ОФП по нефти; 3 — измеренные значения ОФП по газу;  $S$  — суммарная насыщенность образца породы водой и нефтью [48].



чения выходного конца капилляра в секции, то можно вычислить электрическое сопротивление модели тем же способом, которым подсчитывались ОФП. Эффективная площадь поперечного сечения модели будет  $(mS)^2$ . Здесь используются действительные значения насыщенности смачивающей проводящей фазой  $S$  и пористости  $m$ , так как доказано, что остаточная вода тоже проводит электрический ток. Если  $\rho$  и  $\rho_0$  — удельные электрические сопротивления модели и раствора соответственно, то

$$\rho/\rho_0 = 1/(mS)^2. \quad (2.86)$$

В случае, когда  $S=1$ , формула (2.86) связывает параметр пористости с пористостью:

$$R_n = \rho/\rho_0 = 1/m^2. \quad (2.87)$$

Интересно отметить, что если в капиллярной модели с переменной извилистостью положить  $\varphi = 1/m$ , то формула (2.87) совпадает с выражением  $R_n = \varphi/m$ , использованным М. Вилли, У. Роузом и М. Шпенглером [49].

Показатель сопротивления  $\tilde{R}$  дается отношением правых частей формул (2.86) и (2.87):

$$\tilde{R} = 1/S^2. \quad (2.88)$$

Анализируя результаты исследований капиллярно-статистических моделей, можно сделать вывод, что они надежно устанавливают количественные связи между пористостью и кривой капиллярного давления, с одной стороны, и абсолютной и относительными фазовыми проницаемостями, фактором пористости и показателем сопротивления — с другой (см. рис. в.1). Что касается геометрии пор, то относительно нее сделаны лишь некоторые вероятностные предположения, общие для всех исследованных горных пород и не требующие специального определения. Это обстоятельство, несомненно, является значительным шагом вперед в развитии модельных представлений. Тем не менее, как и капиллярная модель с переменной извилистостью, для объяснения кривизны

графиков ОФП капиллярно-статистическая модель предусматривает необходимость наличия дисперсии плотности распределения капилляров модели по их радиусам, что, как это будет показано ниже, не вполне адекватно процессам многофазных течений в пористой среде.

## 2.5. Капиллярная модель Феррандона

Изучение движения жидкостей в водоносных и нефтеносных пластах свидетельствует о существовании некоторых преимущественных направлений, в которых наблюдаются более интенсивные фильтрационные потоки при одних и тех же перепадах давления. Следовательно, в таких пластах не все направления равнозначны в отношении фильтрационных свойств горных пород. В этом случае фильтрующая среда является анизотропной относительно коэффициента проницаемости.

В реальных нефтеносных и водоносных пластах анизотропия проявляется в основном при сравнении фильтрационных потоков в плоскости напластования горных пород и в перпендикулярном к этой плоскости направлении.

Анизотропию фильтрующих сред следует подразделить на два типа: прямолинейную, когда направление осей анизотропии не меняется при переходе от точки к точке, и криволинейную, когда тройка векторов, характеризующих направления осей анизотропии, поворачивается при изменении координат. Среда также может быть однородно или неоднородно анизотропной в зависимости от того, меняются ли значения проницаемости в заданном направлении при переходе от точки к точке. Очевидно, наиболее общим случаем будет являться неоднородная криволинейная анизотропия.

### 2.5.1. Принципы построения модели и ее физический смысл

Ж. Феррандон [1948 г.] рассмотрел модель пористой среды, составленную из большого числа прямолинейных капилляров, различно ориентированных в пространстве и имеющих различную площадь поперечного сечения. Для каждого капилляра в отдельности применяется известная формула Пуазейля, которую можно записать в следующем виде:

$$q = \lambda \frac{f^2}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x},$$

где  $f$  — площадь капилляра;  $q$  — расход;  $\mu$  — вязкость жидкости;  $\partial p / \partial x$  — градиент давления;  $\lambda$  — некоторый коэффициент, связанный с формой сечения капилляра [если капилляр имеет, например, цилиндрическую форму, то  $\lambda = 1/(8\pi)$ ].

Если перейти к рассмотрению системы параллельных капилляров, соответствующих трубке тока в эквивалентной сплошной среде с непрерывным распределением скоростей фильтрации, то

$$\vec{v}_\Phi = k_\Phi \vec{H},$$

где коэффициент фильтрации  $k_\phi = k_\lambda m$ ;  $v_\phi$  — скорость фильтрации;  $k_\lambda$  — параметр, зависящий от коэффициента формы  $\lambda$  и площади сечения  $S$  пористой среды;  $\vec{H}$  — гидравлический градиент.

Рассмотрим какую-либо точку пористой среды  $M(x_1, x_2, x_3)$ , где  $x_1, x_2$  и  $x_3$  — координаты ее в прямоугольной системе. Эта точка лежит на элементе поверхности  $S$  с вектором нормали  $\vec{n}_1(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$ , где  $\alpha'_i$  — направляющие косинусы вектора  $\vec{n}_1$ . Рассмотрим далее элемент другой поверхности, находящейся на бесконечно близком расстоянии от точки  $M$ , видимый из этой точки под бесконечно малым углом  $d\omega$  и имеющий нормаль  $\vec{n}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ . Пусть  $F$  — площадь сечения капилляров, выходящих на площадку  $dS$ . Тогда вектор этой площади может быть выражен следующим образом:  $\vec{F}nd\omega$  (ввиду малости угла  $d\omega$  все капилляры считаются параллельными). Проекция этого вектора на направление  $\vec{n}_1$  (площадка  $S_1$ ) будет  $\vec{F}(\vec{n}\vec{n}_1)d\omega = \vec{m}(\vec{n}\vec{n}_1)$ , где  $(\vec{n}\vec{n}_1)$  — скалярное произведение векторов  $\vec{n}$  и  $\vec{n}_1$ ;  $m$  — пористость.

Если обозначить гидравлический градиент в точке  $M$  в направлении  $\vec{n}$  через  $\vec{H}$ , то расход через единичную площадку  $S_1$ , обусловленный капиллярами направления  $\vec{n}$ , будет

$$dq = k_\lambda F(\vec{n}\vec{n}_1) \vec{H} d\omega.$$

Полный расход  $q$  через площадку  $S_1$ , обусловленный капиллярами всех направлений, получается путем интегрирования  $dq$  по всему телесному углу в области  $0 \leq \omega \leq 2\pi$  (где нормаль  $\vec{n}$  имеет положительное направление):

$$q = \int_0^{2\pi} k_\lambda F(\vec{n}\vec{n}_1) \vec{H} d\omega.$$

Но

$$\vec{H} = -\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\sum_{l=1}^3 \alpha_l \frac{\partial \phi}{\partial x_l} \quad (l = 1, 2, 3),$$

где  $\phi$  — гидравлический напор. Тогда

$$q = \int_0^{2\pi} k_\lambda F(\vec{n}\vec{n}_1) \frac{\partial \phi}{\partial n} d\omega.$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} k_{\phi 11} &= \int_0^{2\pi} k_\lambda F a_1^2 d\omega; & k_{\phi 22} &= \int_0^{2\pi} k_\lambda F a_2^2 d\omega; \\ k_{\phi 33} &= \int_0^{2\pi} k_\lambda F a_3^2 d\omega; & k_{\phi 23} &= \int_0^{2\pi} k_\lambda F a_2 a_3 d\omega; \\ k_{\phi 13} &= \int_0^{2\pi} k_\lambda F a_1 a_3 d\omega; & k_{\phi 21} &= \int_0^{2\pi} k_\lambda F a_2 a_1 d\omega. \end{aligned}$$

Эти соотношения являются не чем иным, как компонентами симметричного тензора второго ранга

$$\mathbf{k}_\phi = \begin{vmatrix} k_{\phi 11} & k_{\phi 12} & k_{\phi 13} \\ k_{\phi 12} & k_{\phi 22} & k_{\phi 23} \\ k_{\phi 13} & k_{\phi 23} & k_{\phi 33} \end{vmatrix}.$$

Теперь формулу для расхода можно выразить в векторном виде (после перехода к скорости фильтрации  $\vec{v}_\phi$ ):

$$\vec{v}_\phi = -\mathbf{k}_\phi \nabla \varphi,$$

что является обобщенным законом Дарси для анизотропной среды.

Тензор  $\mathbf{k}_\phi \mu / (\rho g)$  получил название тензора проницаемости ( $\rho$  и  $\mu$  — плотность и вязкость жидкости соответственно;  $g$  — ускорение свободного падения).

Если воспользоваться этим тензором, то обобщенный закон Дарси можно написать в виде

$$\vec{v}_\phi = -(\mathbf{k}/\mu) \nabla p,$$

где  $\nabla p$  — вектор градиента давления.

Из векторной алгебры известно, что тензор, вообще говоря, представляет собой определенный закон преобразования вектора. При этом указанный закон предусматривает линейную зависимость каждого из компонентов преобразованного вектора от всех трех компонентов преобразующегося. Из этого следует, что при воздействии тензора на вектор последний меняет не только свой модуль, но и направление. Именно подобная зависимость имеется между векторами градиента давления и скорости фильтрации жидкости в анизотропной среде, где существует некоторое преимущественное направление, по которому движущаяся жидкость встречает наименьшее гидродинамическое сопротивление. Естественно, что направление вектора градиента давления лишь в частном случае может совпадать с этим преимущественным направлением. Отсюда вытекает физическое обоснование необходимости характери-

стики фильтрационных свойств анизотропных сред при помощи тензора. Иными словами, в изотропной среде переход от вектора градиента к вектору скорости фильтрации заключается только в изменении масштаба, роль которого играет скалярный коэффициент проницаемости; в случае анизотропной среды при переходе от вектора градиента к вектору скорости меняется не только масштаб, но и направление. Подобное преобразование может выполнить только тензор, который и является в этих условиях тензором проницаемости.

Из тензорной теории проницаемости следует, что в самом общем случае вектор скорости фильтрации  $\vec{v}_\phi$  и вектор градиента давления  $\vec{\nabla}p$  не совпадают по направлению и имеются лишь три направления (главные оси тензора проницаемости), характеризующиеся коллинеарностью векторов  $\vec{v}$  и  $\vec{\nabla}p$ .

Основное значение модели Феррандона заключается в том, что она продемонстрировала тензорную природу проницаемости горных пород, хотя компоненты тензора проницаемости и не могут быть вычислены по формулам, предложенными автором модели. Их можно определить только в результате достаточно сложных экспериментов.

### 2.5.2. Экспериментальные исследования тензорного характера проницаемости

В работе А. Шейдеггера [1956 г.] рассматривается вопрос о справедливости тензорной теории проницаемости для реальных пористых горных пород. Анализу подвергаются два способа определения направленной проницаемости, соответствующие измерениям, проводившимся К. Джонсоном и Р. Хьюджесом [1948 г.]. Первый метод заключался в определении коэффициентов проницаемости цилиндрических образцов, вырезаемых вдоль различных направлений, перпендикулярных к оси керна. При втором методе просверливалось отверстие вдоль оси керна и жидкость подавалась под давлением в это отверстие, что соответствует условиям радиальной фильтрации. Если в первом случае определялись коэффициенты направленной проницаемости  $k'_n$ , то во втором — коэффициенты  $k''_n$ , которые находились по одинаковому для всех направлений перепаду давлений вдоль радиусов и составляющей скорости фильтрации вдоль соответствующего радиуса. Эта скорость измерялась при помощи специального коллектора жидкости, позволяющего выделить расход только вдоль заданного направления. Таким образом, удалось связать коэффициенты  $k'_n$  и  $k''_n$  с тензором проницаемости:

$$k'_n = 1/(\vec{n} \mathbf{k}^{-1} \vec{n}); \quad k''_n = (\vec{n} \mathbf{k} \vec{n}).$$

В своей следующей работе А. Шейдеггер [1956 г.] анализирует ошибку, которая может возникнуть из-за смешения коэффициентов  $k'_n$  и  $k''_n$ . При этом для плоского случая получается следующее выражение:

$$(k''_n/k_n)_{\max} = 1 + \frac{1}{4} \frac{(k_1 - k_2)^2}{k_1 k_2} = 1 + \varepsilon,$$

где  $k_1$  и  $k_2$  — главные значения тензора  $\mathbf{k}$ . Таким образом, максимальное превышение отношения  $k''_n/k'_n$  над единицей определится соотношением

$$\varepsilon = \frac{1}{4} \frac{(k_1 - k_2)^2}{k_1 k_2}.$$

Если положить  $t = k_1/k_2$ , то  $\varepsilon = (t - 1)^2/(4t)$ . Отсюда следует, что  $\varepsilon$  зависит от отношения главных значений тензора проницаемости.

Достаточно интересна методика обработки экспериментальных данных по определению направленной проницаемости. Известно, что симметричному тензору второго ранга соответствует некоторая поверхность второго порядка. Если измеренные значения  $k'_n$  и  $k''_n$  откладывать на полярной диаграмме вдоль соответствующих радиусов, то концы векторов  $\vec{k}'_n$  и  $\vec{k}''_n$  не будут лежать на этой поверхности, так как для ее получения необходимо пользоваться (как это будет показано ниже) одним из двух векторов:  $\vec{r}/\sqrt{k''_n}$  или  $\vec{r}\sqrt{k''_n}$ . Между тем К. Джонсон и Р. Хьюджес для плоского случая получали экспериментальные кривые, образованные концами векторов  $k'_n$  и  $k''_n$  в относительных координатах. Анализ этих кривых не давал возможности достаточно достоверно определять главные направления фильтрации и абсолютные значения проницаемости в этих направлениях. Обработка указанных кривых заключалась в переходе от относительных координат к абсолютным и установлении средних значений проницаемости в любом направлении. После этого, откладывая вдоль каждого направления значения  $\sqrt{k'_n}$  или  $1/\sqrt{k''_n}$ , можно получить эллипсы проницаемости, которые дают возможность с совершенной определенностью судить о главных направлениях фильтрации по их главным осям. Далее по известному правилу минимизации суммы квадратичных погрешностей строился теоретический эллипс, соответствующий тем же экспериментальным данным. Удовлетворительное совпадение теоретического эллипса и эллипса, построенного по измеренным значениям  $k_n$ , доказывало справедливость тензорной теории проницаемости для реальных пористых сред, т. е. справедливость модели Феррандона.

## 2.6. Определение физических свойств горных пород по данным об изучении шлифов и модельные представления

### 2.6.1. Теоретическая основа метода и его практическая реализация

Количественное изучение структуры порового пространства горных пород в шлифах под микроскопом имеет к настоящему времени уже долгую историю. Оценка пористости и удельной поверхности породы по данным подобного изучения не представляет принципиальных затруднений, и для этой цели разработан целый ряд практических методов, основанных на известных закономерностях стереологии [Салтыков С. А., 1970 г.]. Такие величины, как количество объектов в единице объема гетерогенной среды и средневзвешенный диаметр этих объектов, связаны с числом сечений объектов на единице площади шлифа и средним диаметром этих сечений специальными соотношениями, тогда как общий объем объектов в единице объема среды и их удельная поверхность эквивалентны удельной площади сечений объектов плоскостью шлифа и их удельному периметру соответственно. Так как пористые среды являются типичными гетерогенными системами, то полученные выводы можно распространить и на пористые горные породы, рассматривая содержащиеся в них поры как иородные объекты, обуславливающие неоднородность среды. Это открывает широкие возможности для определения по данным изучения шлифов под микроскопом таких элементов структуры порового пространства, как пористость и удельная поверхность горной породы. Эти методы достаточно подробно описаны в работе С. А. Салтыкова, и здесь будет уместно упомянуть лишь наиболее широко используемые из них.

Для определения удельной поверхности измеряется частота пересечений случайно проведенных секущих на плоскости шлифа со стенками пор. Тогда удельная поверхность, рассчитанная на единицу объема породы, определится выражением

$$s_V = 2ca/L, \quad (2.89)$$

где  $s_V$  — удельная поверхность;  $c$  — число пересечений со стенками пор;  $\alpha$  — кратность увеличения;  $L$  — суммарная длина всех секущих [19].

Для определения пористости измеряют случайное значение хорды, соединяющей две ближайшие точки на периметре поры. Тогда пористость вычисляется по формуле

$$m = \left( \sum_{i=1}^M n_i d_i \right) / (NL), \quad (2.90)$$

где  $n_i$  — число измерений длин хорд, попавших в интервал  $d_i$ ;  $M$  — число интервалов;  $N$  — число секущих;  $L$  — длина секущей.

С помощью описанной методики можно также получить кривую распределения пор по размерам [21]. В этом случае плотность

распределения случайной величины  $d_i$  будет определяться соотношением

$$f(d_i) = n_i/P, \quad (2.91)$$

где  $P$  — общее число измерений.

Указанные методы представляются достаточно надежными, и их развитие сдерживается лишь трудностью ручных измерений параметров шлифов и необходимостью использования для этих целей современных ЭВМ. Тем не менее последние образцы специальной аппаратуры типа «Квантимет» позволяют успешно решать эти задачи.

Гораздо более сложной является проблема определения фильтрационных характеристик горной породы по измерениям параметров структуры порового пространства в шлифах под микроскопом. Впервые подобная попытка была предпринята П. П. Авдусиным и М. А. Цветковой [1938 г.]. Эти авторы ввели в рассмотрение так называемый фактор формы, определив его как отношение площади поры к ее периметру. С помощью этого параметра, который, как ясно из определения, является гидравлическим радиусом канала с сечением, равным сечению поры в плоскости шлифа, авторы оценивали фильтрационную характеристику породы. Однако из-за трудностей, связанных с практическим осуществлением указанного метода, можно сказать, что в описываемой работе продемонстрирована лишь теоретическая возможность подобного подхода к изучению фильтрационных свойств горных пород.

Развитие современной вычислительной техники позволило вернуться к разработке методов определения физических свойств горных пород по данным о структуре их порового пространства. Очевидно, что наиболее целесообразно положить в основу этих методов представления о гидравлическом радиусе пор породы и о существовании функции распределения размеров пор по их гидравлическим радиусам. Как это следует из общих положений стереологии, в шлифе можно непосредственно измерить пористость и удельную поверхность породы, т. е. как раз те параметры, которые входят в формулу Козени—Кармана для простейшей капиллярной модели:

$$k = m^3/(5s_V^2) \quad (2.92)$$

[раздел 2.1, формулы (2.5), (2.7) и (2.8)].

Как показали исследования П. Кармана [33], формула (2.92) вполне удовлетворительно описывает фильтрационные свойства неконсолидированных сред с дисперсией формирующих их частиц, близкой к нулевой. Таким образом, если определить в шлифе, сделанном из такого насыщенного связующим веществом материала, значения пористости и удельной поверхности, то по формуле (2.92) можно достоверно рассчитать проницаемость среды. Если же среда является консолидированной, где поры и твердый скелет имеют самую причудливую форму, использование такой модели встречает принципиальные затруднения, которые, по совершенно

справедливому мнению П. Кармана [33], связанны в основном со значительной дисперсией распределения пор по размерам. Таким образом, представляется вполне обоснованным попытаться распространить модельные представления Козени—Кармана на скематизированные горные породы, имея в виду возможность оценить вклад в общий фильтрационный поток каждой поры в отдельности с учетом ее индивидуального гидравлического радиуса. В этом случае формула Козени—Кармана будет иметь следующий вид:

$$k = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^N \frac{m_i^3}{s_{Vi}^2} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^N r_{0i}^2 m_i, \quad (2.93)$$

где  $N$  — число пор;  $r_0$  — гидравлический радиус; индекс « $i$ » относит измеряемые величины к  $i$ -й поре.

Естественно, что практическая реализация измерений указанных параметров в шлифе с последующими вычислениями по формуле (2.93) не возможна без использования современной электроники и электронно-вычислительной техники. В связи с указанным был разработан количественный метод изучения структуры порового пространства горных пород в шлифах под микроскопом с последующим вычислением их физических свойств согласно модельным представлениям. Реализация этого метода состоит из трех последовательных этапов.

1. Получение изображения шлифа (или иного сечения) горной породы с контрастным выделением областей «пора» и «не пора». Указанная задача может быть решена разными методами. Если обработке подлежит изображение тонкопористых литологических разностей, которые изучаются под электронным микроскопом, то получают изображения двух сопряженных частей расколотого образца. Определив сопряженные точки на этих изображениях, можно совместить их так, что участки, соответствующие порам, будут вогнутыми на обоих изображениях; это позволит выделить их для последующей обработки.

В случае исследования обычных горных пород-коллекторов нефти и газа, поры в которых измеряются десятками микрометров, контрастное изображение шлифа получают путем фотографирования в различным образом поляризованных лучах. При этом минералы, слагающие твердый скелет породы, при одном из избранных направлений плоскости поляризации света будут непрозрачными, тогда как освещенность пор максимальна и не зависит от направления плоскости поляризации. В дальнейшем необходимое контрастное изображение порового пространства можно получить путем многократного перефотографирования изображения с использованием контрастных фотоматериалов.

2. Полученное изображение порового пространства в плоскости шлифа необходимо преобразовать в двумерный массив чисел, каждый элемент которого по координатам соответствовал бы элементу

ФИЛЬТРАЦИОННЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ Р = .1566669922<sub>10</sub> - 05 КВ.СМ ИЛИ .1566669922<sub>10</sub> + 03 ДАРСИ.  
 ПОЛЯ ЗРЕНИЯ K = 3  
 ЧИСЛО СТРОК Y = 80  
 ЧИСЛО СТОЛБЦОВ M = 80  
 ПЛОЩАДЬ ПОЛЯ ЗРЕНИЯ = .4000000000<sub>10</sub> - 01 КВ.СМ  
 ЛИНЕЙНЫЙ РАЗМЕР ЯЧЕЙКИ = .2500000000<sub>10</sub> - 02 СМ

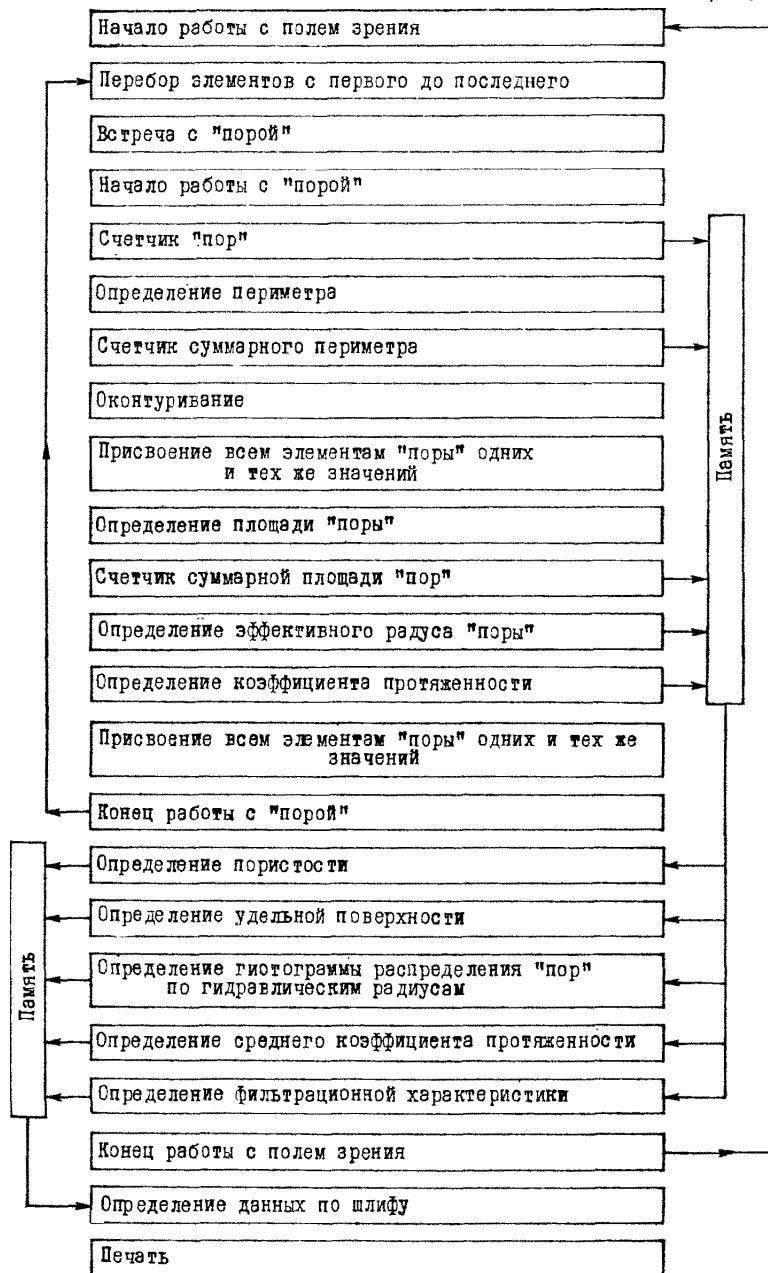
Рис. 2.12. Машинное изображение одного поля зрения шлифа, изготовленного из образца песчаника.

шлифа, а его значение определялось бы наличием или отсутствием поры в данной точке (например, элемент массива, равный нулю, соответствует «поре», а равный единице — «не поре»). Таким образом, если подобный массив ввести в память ЭВМ, а затем вывести его на широкую печать, то получим машинное изображение порового пространства шлифа, где области, занятые нулями, соответствуют областям пор, а единицами — твердого скелета. Практически описанная операция может быть выполнена любым сканирующим устройством, преобразующим световые импульсы в электронные. В нашем случае для этой цели было использовано приемное устройство фототелеграфного аппарата «Паллада», позволяющего обрабатывать изображения размером  $20 \times 20$  см, разбивая их на отдельные участки, размеры которых определяются объемом памяти ЭВМ. Приемное устройство с помощью специальной переходной аппаратуры соединено с ЭВМ «Минск-32», в память которой и записывается сканируемое изображение в виде двумерного массива чисел, подлежащего дальнейшей обработке.

3. Обработка изображения шлифа производится с помощью специальной программы, основой которой является процедура «Шлиф». Посредством этой процедуры осуществляется обход по контуру области, состоящей из одинаковых элементов, вычисляется ее периметр и граничные координаты. Алгоритм программы представлен в табл. 2.5.

На рис. 2.12 показаны машинное изображение части поля зрения шлифа образца породы песчаника с пористостью 18 % и проницаемостью 15 мД, а также данные, полученные на ЭВМ с помощью описанной выше программы.

Таблица 2.5



### Сеточные модели

Одним из наиболее сложных и малоизученных процессов фильтрации в горных породах является течение в них многофазной жидкости. Если механизмы течения однородной жидкости в пористой среде с качественной точки зрения достаточно ясны, то механизм двухфазной фильтрации до самого последнего времени осознан еще не до конца. Действительно, если эффект взаимного торможения жидкостей при их совместной фильтрации, приводящий к тому, что сумма ОФП много меньше единицы, связан со значительной дисперсией распределения фильтрационных каналов по их размерам, то в гранулярной модели, состоящей из одинаковых сферических частиц, упомянутая сумма должна при всех значениях насыщенности оставаться равной единице. Однако опыты Р. Уикофа и др. [1936 г.], М. Леверетта [42], Э. Четеневера и Дж. Колхайуна [34] и других свидетельствуют о том, что независимо от степени отсортированности частиц, слагающих фильтрационную среду, сумма ОФП при насыщенности смачивающей фазой в области 0,4—0,6 всегда меньше единицы. Это обстоятельство связано с тем, что, очевидно, в реальных горных породах фильтрационные каналы пересекаются друг с другом и в местах пересечений возникают мениски между фазами, что приводит к возникновению дополнительных местных сопротивлений. Все рассмотренные ранее структурные модели игнорировали фактор пересекаемости поровых каналов, являющийся, по-видимому, определяющим для условий многофазных течений. Именно поэтому в 1956 г. [38] И. Фэттом впервые была предложена модель, состоящая из капилляров, соединяющихся друг с другом в узлах, подобно тому, как соединяются в узлах нити сети. Поэтому такие модели получили название сеточных. В отличие от гранулярных и капиллярных сеточные модели предназначены не столько для получения количественных соотношений между свойствами пород, сколько для исследования механизма многофазных течений, а именно установления связи структуры порового пространства (геометрии пор) с формой кривых ОФП.

### 3.1. Сеточная модель Фэтта

#### 3.1.1. Описание модели и ее свойства

В качестве структурной модели пористой среды И. Фэтт рассматривал плоские сетки капилляров с ячейками различной конфигурации (рис. 3.1). Относительно свойств модели приняты следующие допущения.

1. В модели отсутствуют тупиковые поры.
2. Каждый элемент модели (каждая пора) может быть заполнен либо смачивающей, либо несмачивающей фазой.
3. Капиллярное давление, необходимое для вытеснения смачивающей фазы из поры радиусом  $r$ , определяется формулой Лапласа:

$$p_k = 2\sigma \cos \theta / r.$$

4. Смачивающая фаза смачивает стенки поры абсолютно, т. е.  $\cos \theta = 1$ . Это предположение влечет за собой наличие на стенках пор, наполненных несмачивающей фазой, пленки смачивающей фазы, которая позволяет последней вытесняться из любой поры, даже если она окружена со всех сторон порами с несмачивающей фазой.

5. Для упрощения последующих расчетов принято, что длина каждой поры обратно пропорциональна ее радиусу, т. е.  $l = c/r$ . Можно показать, что это предположение не влияет на общность получаемых результатов.

6. Сложность структуры сетки капилляров определяется значением параметра  $\beta$ , который равен числу капилляров, соединяющихся с любым капилляром сетки. Для сетки с квадратной ячейкой  $\beta = 6$ , одинарной гексагональной  $\beta = 4$ , двойной гексагональной  $\beta = 7$ , тройной гексагональной  $\beta = 10$ . Легко видеть, что для пучка

параллельных капилляров  $\beta = \infty$ , а для пучка параллельных капилляров, радиусы которых ступенчато меняются по длине,  $\beta = 2$ . Таким образом, ясно, как сильно отличается простейшая модель Фэтта даже от самой сложной капиллярно-статистической модели.

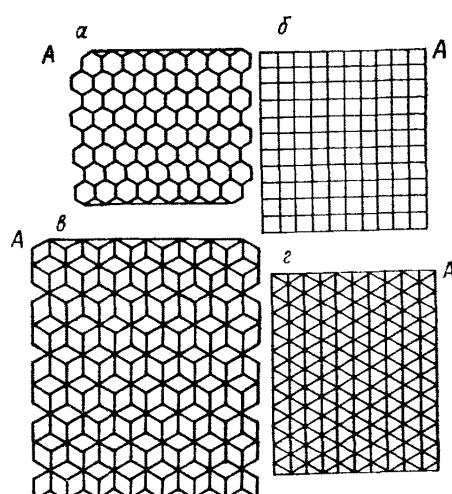


Рис. 3.1. Сеточные модели И. Фэтта.

*a* — одинарная гексагональная; *b* — квадратная; *c* — двойная гексагональная; *d* — тройная гексагональная [38].

7. Местоположение в модели капилляров различных радиусов случайно (практически модель строится с использованием таблицы случайных чисел).

8. Для построения моделей используется несколько видов распределения пор по радиусам с заданными гистограммами распределения.

### 3.1.2. Моделирование процессов капиллярного вытеснения и двухфазной фильтрации

Механизм моделирования капиллярного вытеснения заключался в следующем. Плоская модель вычертывалась на бумаге с обозначением местоположения и радиуса каждого капилляра (всего, например, в тройной гексагональной модели насчитывался 331 капилляр). Все капилляры полагались заполненными смачивающей фазой, несмачивающая фаза подавалась со все возрастающим капиллярным давлением на верхнюю кромку модели (см. рис. 3.1). (Естественно, что опыт на этой стадии является мысленным.) Давление несмачивающей фазы возрастает до значения, необходимого для вытеснения смачивающей фазы из самых крупных пор, существующих в сетке согласно принятой гистограмме. При этом акт вытеснения считается состоявшимся при условии, если эти поры контактируют с верхней кромкой модели *A*. Насыщенность несмачивающей фазой рассчитывается как отношение объема пор, заполненных этой фазой при данном капиллярном давлении, к общему объему пор модели. Следующим шагом давление несмачивающей фазы поднимается до значения, необходимого для дренирования следующей по размерам группы пор согласно принятой гистограмме. Акт вытеснения считается состоявшимся, если эти поры соединяются с верхней кромкой модели *A* или с порами, дренирование которых уже произошло. Следует учитывать при этом дренирование тех пор большего радиуса, которые в результате данного шага повышения давления оказались соединенными с дренирующимися порами меньшего радиуса. Ступенчатое повышение давления с вычислением объема дренируемых пор на каждой ступени продолжается до тех пор, пока все поры модели не окажутся заполненными несмачивающей фазой. Полученные данные позволяют построить кривую капиллярного давления для данной модели. Пример такой кривой для тройной гексагональной модели представлен на рис. 3.2, *a*. Эта кривая соответствует гистограмме распределения пор, изображенной на рис. 3.2, *б*.

Следует отметить, что описанный механизм вытеснения предусматривает наличие в модели непрерывной несмачивающей фазы, тогда как смачивающая фаза при промежуточных этапах вытеснения может занимать поры, со всех сторон окруженные порами с несмачивающей фазой.

Следующим этапом исследований автора явилось получение кривых ОФП сеточных моделей. В этом случае сетка капилляров моделировалась аналогичной сеткой, собранной из электрических

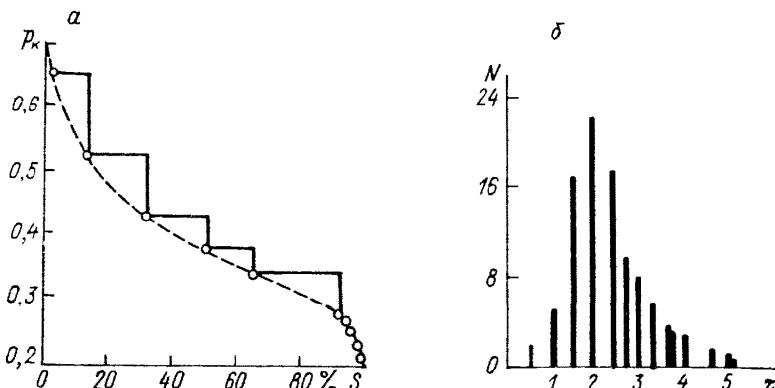


Рис. 3.2. Кривая капиллярного давления (а) и гистограмма распределения пор по размерам (б) для тройной гексагональной модели Фэтта [38].

сопротивлений. Сначала был рассмотрен случай, когда все капилляры в модели имеют почти одинаковые радиусы. При этом распределение пор по радиусам считалось настолько узким, что при вычислении ОФП и объемов пор радиусы можно было считать одинаковыми, но при определении последовательности дренирования пор следовало пользоваться вышеописанным механизмом капиллярного вытеснения. Сам опыт состоял в следующем. Наряду с существующим чертежом модели с обозначенным местоположением и радиусом каждого капилляра имелась такая же сетка из электрических сопротивлений, установленных на специальной плате. В согласии с описанным выше мысленным опытом при каждом повышении давления несмачивающей фазы определялось местоположение капилляров, которые заполнялись ею, сопоставленные этим капиллярам электрические сопротивления изымались из модели и устанавливались на соседней плате в местах, соответствующих их положению в первой сетке. После каждого шага повышения давления с помощью моста Уитстона измерялась проводимость обеих сеток сопротивлений, при этом проводимость первой сетки соответствовала фазовой проницаемости по смачивающей фазе, а второй — по несмачивающей. Отношение этих проводимостей к проводимости всей сетки с полным набором сопротивлений и являлось аналогом ОФП. Полученные таким образом кривые ОФП для пяти типов сеток представлены на рис. 3.3.

Основным результатом этих исследований был вывод, что сама структура сетки капилляров является вполне достаточным фактором для объяснения характерной формы кривых ОФП без привлечения для этой цели распределения пор по размерам, т. е. сам факт наличия пересекающихся капилляров обуславливает специфические черты процесса двухфазной фильтрации.

Далее автор исследовал влияние на форму кривых ОФП различных законов распределения пор по размерам в сеточных моделях различной конфигурации. Методика этих исследований в об-

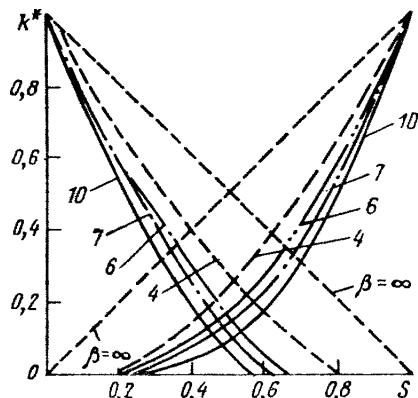
Рис. 3.3. Кривые ОФП для различных сеточных моделей Фэтта [38].

ших чертак совпадала с методикой, использованной в предыдущей части работы, только вместо одинаковых сопротивлений в сетку монтировались сопротивления, значения которых соответствовали радиусам пор согласно рассматриваемой гистограмме. Исследования показали, что кривые ОФП в этом случае не имеют принципиальных отличий от кривых, полученных для моделей с одинаковыми капиллярами.

Результаты, полученные И. Фэттом, имеют принципиальное значение, несмотря на некоторую идеализацию процессов капиллярного вытеснения и двухфазной фильтрации. Это значение состоит в том, что показана принципиальная важность «пересекаемости» поровых каналов пористой среды для основных характеристик совместного течения несмешивающихся жидкостей.

### 3.1.3. Развитие сеточных моделей

В работе Р. Эрлиха и Ф. Крейна [1969 г.] также рассматривается установившаяся и неустановившаяся фильтрация в плоской сеточной модели, имеющей общие черты с моделями Фэтта. Модель Эрлиха и Крейна состоит из последовательно соединенных друг с другом блоков, включающих в себя параллельные четырехпоровые элементы, как это изображено на рис. 3.4. Существенным является то обстоятельство, что в этой модели  $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq r_4$ , причем от того, как относятся друг к другу радиусы капилляров в единичном элементе, будет зависеть его насыщенность и фильтрационные свойства, а тем самым и насыщенность и фильтрационные свойства всей модели в целом. Указанная модель позволяет получить кривые ОФП, отличающиеся для установившихся процессов двухфазной фильтрации при последовательном увеличении насыщенности смачивающей фазой и при последовательном увеличении насыщенности несмачивающей фазой. Рассматриваемые авторами четырехпоровые элементы являются усложненной моделью «поровых дублетов» Дж. Наара и Дж. Гендерсона [1961 г.]. В результате анализа процесса смены фаз в каждой из пор рассматриваемого элемента модели при дренировании и пропитке авторы получили кривые ОФП, характерные для сильно сцементированных пород. Кроме того, эти кривые являлись существенно гистерезисными.



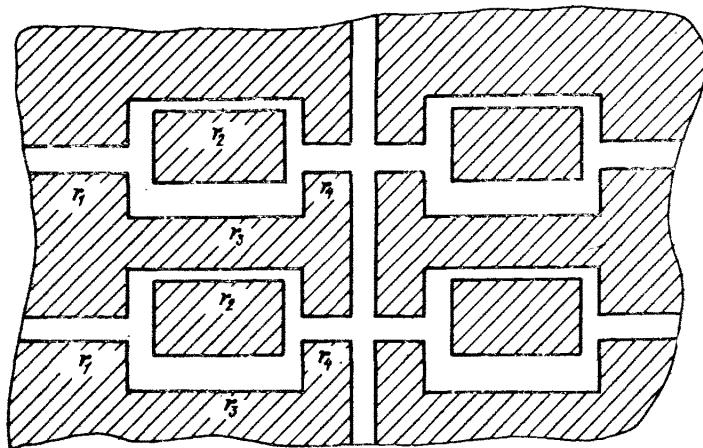


Рис. 3.4. Сеточная модель Эрлиха и Крейна [1969 г.].

К сожалению, авторы не подвергли анализу случай, когда капилляры в элементе имеют почти одинаковый радиус. Можно полагать, что и тогда в результате расчетов получились бы характеристические кривые ОФП.

Весьма интересный подход к изучению механизма двухфазной фильтрации был осуществлен в работах А. А. Черненко, Ю. А. Чизматжева [1963 г.] и В. С. Маркина [17]. Так, в работе В. С. Маркина рассматривается вероятностная модель пористого тела с порами, изменяющими свой радиус по длине и имеющими узлы пересечения, в которых сходятся не более трех пор. Характеристика структуры порового пространства складывается из двух параметров: степени пересекаемости  $\lambda$  и степени неоднородности  $\nu$ , где  $\lambda$  и  $\nu$  — коэффициенты в формулах:

$$P_{\text{в}} = \nu dx \quad \text{и} \quad P_{\text{г}} = \lambda dx,$$

где  $P_{\text{в}}$  — вероятность ветвления поры на отрезке  $dx$ ;  $P_{\text{г}}$  — вероятность затухания поры на этом отрезке (т. е. вероятность того, что ее радиус станет настолько мал, что несмачивающая фаза не сможет проникнуть далее в пору при данном давлении). Изучаемый гипотетический процесс состоит в том, что в пористую среду, полностью насыщенную смачивающей фазой, подается вытесняющий ее газ (несмачивающая фаза). При этом подача газа производится циклами с разных сторон образца среды. Далее рассматривается замкнутая система из четырех событий, которые могут произойти с порой на протяжении линейного элемента среды  $dx$ : пора может прерваться, раздвоиться, осться без изменений и две поры могут слиться в одну. Перечисленные предположения дали возможность автору рассчитать вероятность заполнения поры газом после первого цикла вытеснения:

$$y_1(x) = (3\lambda - \nu) / [3\lambda \exp(\lambda - \nu/3) - \nu],$$

которая есть не что иное, как аналог насыщенности среды газом.

Дальнейший анализ позволил получить аналогичную формулу и для бесконечно большого количества циклов вытеснения.

Можно предположить, что дальнейшее развитие этого подхода представит большой интерес для обоснования остаточной насыщенности в моделях и средах, где физически невозможно существование смачивающей фазы в виде подвешенных колец вокруг контактов между зернами.

Прямым продолжением исследований И. Фэтта, связанных с сеточными моделями, явились работы В. М. Енгова, А. Я. Фельдмана, Э. Чен-Син. Суть первой из них [9] заключается в том, что алгоритм мысленного опыта И. Фэтта по капиллярному вытеснению в сеточной модели был записан на языке АЛГОЛ-60, а сам опыт моделировался на БЭСМ-4. Кроме того, в исследованиях И. Фэтта ОФП сеточной модели определялись на реальном приборе типа электроинтегратора, тогда как в работе В. М. Енгова и других проводимость модели (т. е. ее ОФП) тоже вычислялась на ЭВМ. Принятые авторами основные предположения о характере механизма капиллярного вытеснения и двухфазной фильтрации не отличались от предположений И. Фэтта, если не считать условия возможности вытеснения из капилляра смачивающей фазы. По И. Фэтту такая возможность не зависела от того, соединен этот капилляр с выходной кромкой цепью капилляров со смачивающей фазой или нет, тогда как по В. М. Енгову выполнение этого условия обязательно.

Следует подчеркнуть, что исследования В. М. Енгова, как и опыты И. Фэтта, показали практическую инвариантность формы кривых ОФП относительно конфигурации ячеек сетки (значение  $\beta$  в работе И. Фэтта, равное числу капилляров, с которыми соединяется любой капилляр модели).

Кривые ОФП, полученные в работе [9], приведены на рис. 3.5. Форма этих кривых достаточно далека от формы кривых ОФП реальных пористых сред (например, обычных пористых горных пород) и по признанию самих авторов отражает лишь качественные характеристики изучаемых явлений. Более того, эти кривые не столь близки к реальным зависимостям, как кривые И. Фэтта. Это обстоятельство следует объяснить тем, что предположение о связанныности вытесняемой смачивающей фазы менее соответствует действительности, чем принятое И. Фэттом условие о возможности вытеснения смачивающей фазы из любой поры. Действительно, если, например, предположить, что начальное распределение насыщенности характеризуется чередованием слоев смачивающей и несмачивающей фаз, параллельных входной кромке модели, то согласно представлениям работы [9] процесс капиллярного вытеснения идти не должен, что, естественно, противоречит реальным условиям.

Дальнейшим развитием машинного моделирования процесса двухфазной фильтрации явилась работа Э. Сингала и У. Сомертона [1977 г.], в которой использовалась сеточная модель Фэтта с числом  $\beta$ , равным 10. На этой модели рассматривался нестацио-

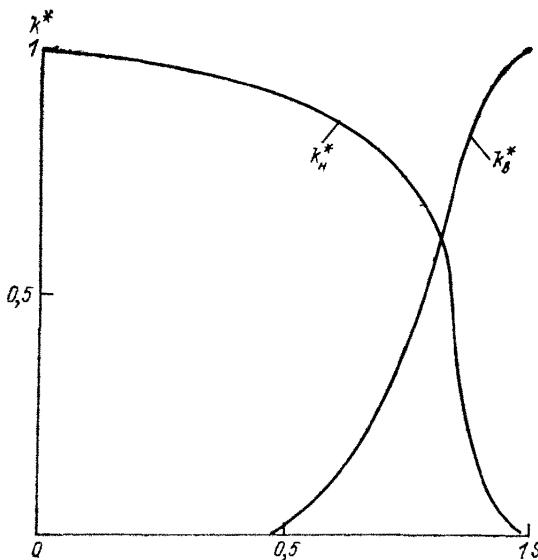


Рис. 3.5. Кривые ОФП, полученные на сеточной модели Енгова и др. [9].

нарный процесс вытеснения с построением кривых ОФП по методике Велджа [1]. Основным отличием этой работы явилось моделирование смены режимов в капиллярах модели, имеющих треугольное сечение. При этом предполагалось, что в каждом отдельном капилляре может существовать один из четырех режимов течения: однофазный, поршневого вытеснения, «пятнистый» («slug flow») и кольцеобразный («pendular rings»). Кроме того, характеристики сеточной модели соответствовали характеристикам реального образца пористой среды, сформированного из тефлоновых шариков. В результате проведенных экспериментов — математического на модели и физического на образце пористой среды — было установлено, что кривые капиллярного давления и ОФП в обоих случаях весьма близки друг к другу. Анализ частоты смены одного режима движения другим показал наибольшую устойчивость однофазного режима фильтрации в каждом отдельном капилляре.

Рассмотрение значительного числа работ, посвященных механизму двухфазной фильтрации, позволяет заключить, что одним из принципиально важных вопросов для понимания этого механизма является решение проблемы о влиянии распределения пор по размерам на форму кривых ОФП. Не говоря уже о различных авторах, по-разному отвечающих на этот вопрос, в работах одного и того же исследователя можно встретить разные точки зрения на эту проблему. Так, в работе, опубликованной в 1951 г., И. Фэтт и Х. Дикстра предложили метод расчета кривых ОФП по данным о кривой распределения пор по размерам, а в 1956 г. в статье [38] И. Фэтт пришел к выводу о слабой зависимости ОФП от распреде-

ления пор по диаметрам. Противоречивые данные о влиянии структуры порового пространства на ОФП содержатся также в обзорной работе Дж. Бэра [1970 г.]. С другой стороны, некоторые исследователи [22] использовали для решения уравнений Бакли—Леверетта линейную зависимость между фазовыми проницаемостями и насыщенностью в случае фильтрации в трещиноватых породах, так как известно, что раскрытие трещин в породе на значительных глубинах почти одинаково [11]. Тем интереснее представляются результаты экспериментальных фильтрационных исследований на сеточных моделях пористых сред, фильтрационные каналы которых имеют известные размеры и конфигурацию.

### 3.1.4. Физическое моделирование двухфазной фильтрации на сеточной модели

Для экспериментального изучения двухфазной фильтрации была создана специальная модель, характеризующаяся двумя взаимно перпендикулярными вертикальными системами трещин равной густоты. Подобная модель является фильтрационным аналогом сеточной модели Фэтта с квадратной ячейкой. Щелевидная, а не иная форма фильтрационных каналов выбрана только потому, что изучение фильтрации в сетке из цилиндрических капилляров весьма затруднительно. Кроме того, экспериментальное определение вида кривых ОФП для чисто трещиноватой среды откроет возможность численного решения уравнения двухфазного течения для вытеснения нефти водой из трещинных коллекторов, т. е. для решения практически интересных задач о нефтеотдаче в подобных условиях.

Используемая в наших опытах сеточная модель (рис. 3.6) состоит из набора прямоугольных параллелепипедов 1, образующих две системы вертикальных взаимно перпендикулярных трещин. Размеры каждого параллелепипеда  $40 \times 20 \times 20$  мм, их рабочие поверхности обработаны с точностью до 10 мкм. Раскрытие щелей модели обеспечивается с помощью полиэтиленовых прокладок 2 размером  $20 \times 10$  мм. Эти прокладки расположены между рабочими поверхностями соседних параллелепипедов так, что остающаяся в центре часть боковой поверхности образует элемент щели высотой 20 мм и раскрытием около 260 мкм. Для сохранения строго определенного положения в отдельных местах пересечения щелей параллелепипеды фиксированы металлическими прокладками из нержавеющей стали. Таким образом исключается возможность создания тупиковых щелей за счет сдвига одной группы параллелепипедов относительно другой. Параллелепипеды уложены так, что плоскости трещин расположены под углом  $45^\circ$  к направлению потока закачиваемой жидкости.

Были проведены две группы экспериментов на двух моделях I и II, отличающихся друг от друга степенью однородности распределения щелей по раскрытиям.

Модель I состояла из щелей одинакового раскрытия и имела следующие параметры: длина 0,944, высота 0,02, ширина 0,43 м;  $k = 75,05$  Д; раскрытие

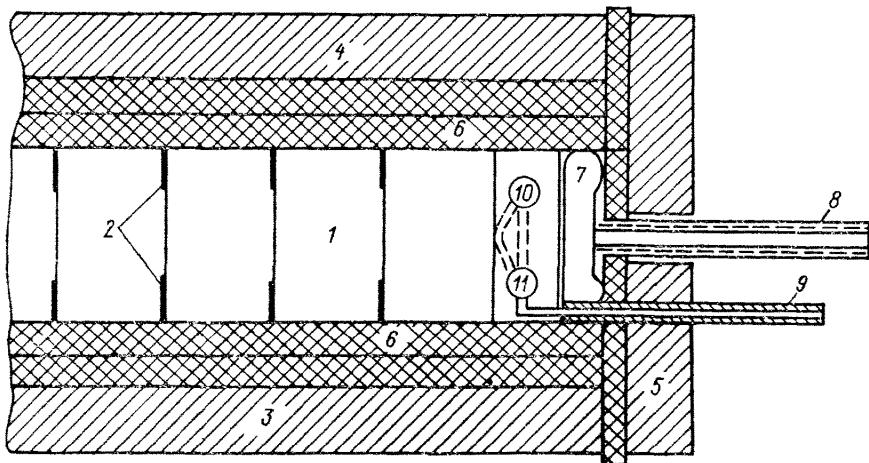


Рис. 3.6. Схема физической сеточной модели с квадратной ячейкой.

1 — параллелепипеды; 2 — полиэтиленовые прокладки; 3, 4, 5 — сенки кожуха модели; 6 — резиновые прокладки; 7 — камера гидрообжима модели; 8 — штуцер для подачи давления гидрообжима. 9, 10, 11 — устройство для подачи жидкостей.

трещин  $b = 2,6 \cdot 10^{-4}$  м; удельная поверхность трещин  $s_v = 2 \cdot 10^{-2}$  1/м; трещинная пористость 26 %; объем трещинного пространства модели  $0,211 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>. Кривые ОФП, изображенные на рис. 3.7, получены при трех значениях градиента давления, МПа/м: 1 —  $0,34 \cdot 10^{-4}$ , 2 —  $0,67 \cdot 10^{-4}$ , 3 —  $1,05 \cdot 10^{-4}$ .

Модель II состояла из щелей с двумя значениями раскрытия, причем щели с меньшим раскрытием располагались в модели так, как это показано на рис. 3.8. Модель II имела длину, высоту, ширину и плотность трещиноватости такие же, как и модель I. Остальные характеристики были следующими:  $k = 48,1$  Д; раскрытия трещин  $b_1 = 2,6 \cdot 10^{-4}$  и  $b_2 = 0,47 \cdot 10^{-4}$  м (на рис. 3.8 показаны жирными линиями); трещинная пористость 1,9 %; объем трещинного пространства, характеризующийся щелями большего размера,  $0,144 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>, меньшего —  $0,014 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>. Эксперименты на модели II производились при тех же трех значениях градиента давления, что и на модели I. Кривые ОФП модели II представлены на рис. 3.9.

В качестве первого этапа исследований была выбрана максимально простая модель I. Казалось, что значительное раскрытие щелей, одинаковое во всей модели, исключало существенное влияние капиллярных сил на процесс вытеснения. Тем не менее были получены большие значения остаточной насыщенности смачивающей фазой, которые составляли 33—35 % от объема трещин модели. В связи с этим были сделаны следующие предположения.

1. В каждом элементе щели (участки между соседними пересечениями) присутствует одновременно только одна фаза: либо керосин, либо вода.

2. Элементы щелей, заполненные неподвижной смачивающей жидкостью, располагаются друг за другом таким образом, чтобы создавать минимальное гидравлическое сопротивление потоку движущейся несмачивающей жидкости.

Для проверки этих предположений была выполнена серия экспериментов с моделью II. При этом ожидалось, что наличие в модели II щелей значительно меньшего раскрытия приведет к капиллярному удержанию смачивающей жидкости в этих щелях, что должно значительно уменьшить остаточную насыщенность. Это означает, что если выдвинутые предположения справедливы, то остаточная насыщенность модели II должна соответствовать объему трещин с раскрытием  $b_2 = 0,47 \cdot 10^{-4}$  м, а именно 8,5 %. В действительности эксперименты на модели II показали, что остаточная насыщенность в этом случае составляет 15—16 %; это в 2 раза меньше соответствующего значения, полученного на модели I, но почти вдвое больше ожидавшегося.

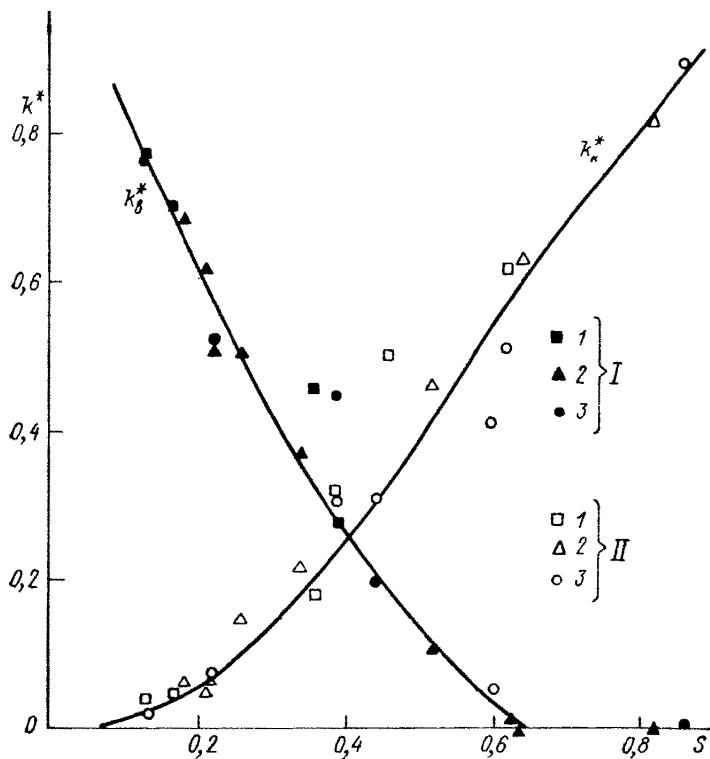


Рис. 3.7. Кривые ОФП для модели I.  
 I — вода; II — керосин;  $S$  — насыщенность модели керосином.

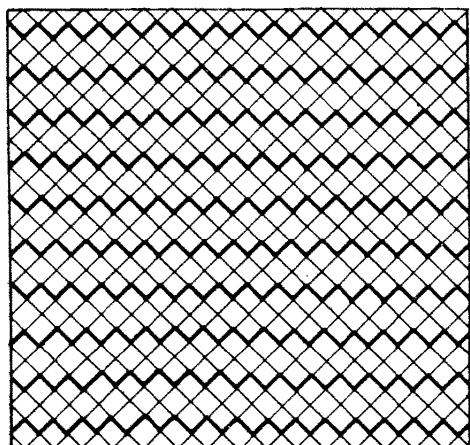


Рис. 3.8. Схема расположения каналов разного раскрытия в модели II.

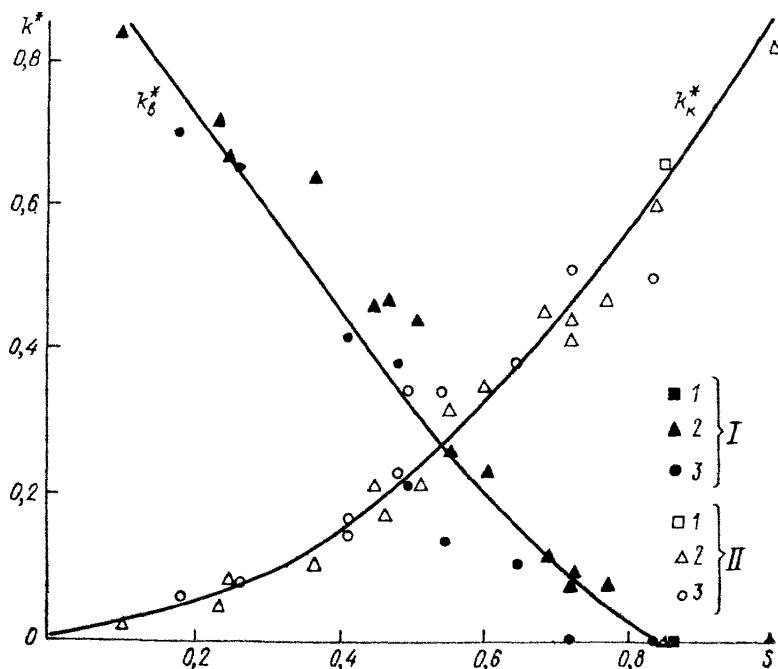


Рис. 3.9. Кривые ОФП для модели II (обозначения на рис. 3.7).

Анализ результатов экспериментальных исследований двухфазной фильтрации на сеточных моделях трещиноватых сред позволяет сделать следующие выводы.

1. Гидродинамическая модель пористой среды с одинаковыми фильтрационными каналами характеризуется кривыми ОФП, имеющими изогнутую форму, обычную для реальных пористых сред. Это обстоятельство экспериментально подтверждает тот факт, что эффект взаимного торможения жидкостей при двухфазной фильтрации можно объяснить лишь пересекаемостью фильтрационных каналов пористой среды.

2. Введение в модель трещиноватой среды «упорядоченной неоднородности» в виде элементов щелей с меньшим раскрытием приводит к улучшению условий фильтрации для смачивающей фазы и ухудшению — для несмачивающей. Однако эти же опыты показывают, что распределение фаз в модели во многом определяется статистическими закономерностями.

3. Остаточная насыщенность модели I смачивающей фазой составляет 33—35 %, что в 3 раза больше значений остаточной насыщенности, полученных в опытах Н. Морроу [44] для различных моделей пористых сред (раздел 1.2.3). Это несоответствие следует, скорее всего, объяснить наличием в моделях Морроу крупных фильтрационных каналов, капиллярные силы в которых сопоста-

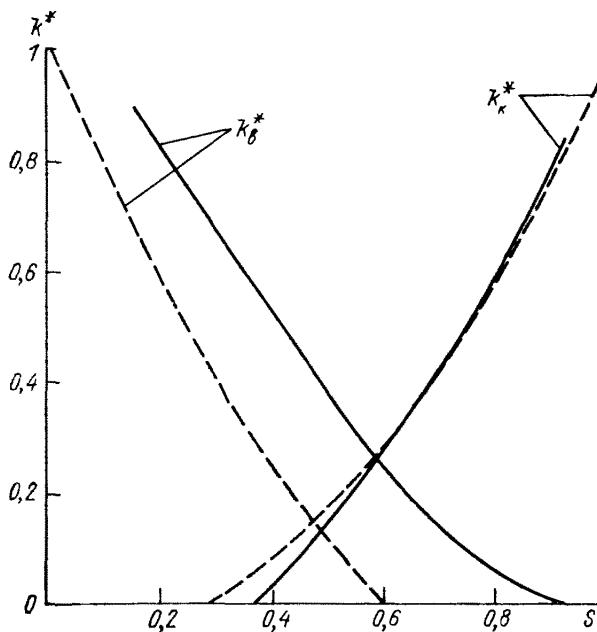


Рис. 3.10. Кривые ОФП, полученные на модели I (сплошные линии) и в опытах И. Фэтта на сеточной модели с квадратной ячейкой (штриховые линии).

вимы с гравитационными, а остаточная насыщенность смачивающей фазой в этих моделях в отличие от рассматриваемой сеточной имеет форму подвешенных колец в местах контактов между частицами, составляющими модель.

Как уже упоминалось, исследованная модель I трещиноватой среды соответствует сеточной модели Фэтта с квадратной ячейкой. В связи с этим представляет несомненный интерес сопоставление результатов определения ОФП на I физической модели с результатами И. Фэтта. Следует лишь учесть, что в наших опытах керосин являлся смачивающей, а вода несмачивающей фазой по отношению к оргстеклу, из которого были сделаны блоки модели. Поэтому для сопоставления экспериментальные кривые следует перестроить, откладывая на оси абсцисс значения насыщенности модели смачивающей фазой, т. е. керосином. На рис. 3.10 представлены кривые ОФП, полученные на модели I трещиноватой среды и в опытах И. Фэтта для сеточной модели с квадратной ячейкой. Из рисунка видно, что кривые фазовых проницаемостей по смачивающей фазе весьма близки друг к другу, тогда как реальная кривая по несмачивающей фазе располагается значительно выше кривой Фэтта. Это несоответствие может объясняться разными причинами. С одной стороны, условия эксперимента на физической модели не разрешали использовать меньшие значения перепада

давления, необходимые для априорного существования струйного характера течения. (Безразмерный параметр  $P$  в экспериментах на физической модели не может быть определен столь однозначно, как в пористой среде, так как размер фильтрационных каналов в модели на два порядка меньше, чем размер зерен. Тем не менее оценка значений этого параметра показывает, что в наших условиях они не превышают нескольких сотен.) С другой стороны, предложенный И. Фэттом механизм капиллярного вытеснения может не во всех деталях отвечать реальной действительности.

### 3.2. Сеточная модель с включенными объемами

На основании рассмотренных ранее результатов изучения сеточных моделей представляется целесообразным провести исследование механизма стационарной и нестационарной двухфазной фильтрации с помощью математического моделирования на базе предположений, имеющих, по нашим представлениям, более тесное соответствие реальным природным процессам. Это исследование проводилось на БЭСМ-6 с использованием языка АЛГОЛ-60.

#### 3.2.1. Описание модели и ее свойства. Моделирование процессов капиллярного вытеснения и двухфазной фильтрации

В качестве модели пористой среды принята модель, которая характеризуется квадратной ячейкой из капилляров разных диаметров, соединяющихся в узлы разных объемов. Капиллярные силы в трубках могут иметь самые разные значения, вплоть до нулевых. Схема подобной модели изображена на рис. 3.11. Особенностью этой модели является то, что акт вытеснения здесь состоит в заполнении вытесняющей фазой всего узла и примыкающих к нему частей трубок, а не одной трубки. Таким образом, граница между фазами в описываемой модели проходит по сечениям трубок, а не по сечениям узлов. Понятно, что если радиус трубки не постоянен по длине, то эта граница должна проходить в месте минимального сечения трубы. В этих условиях трубы, соединяющая

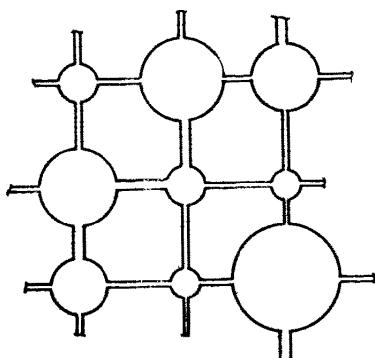


Рис. 3.11. Схема сеточной модели с включенными объемами.

два узла, которые заполнены одной и той же фазой, всегда считается заполненной той же фазой. Легко заметить, что такая модель в какой-то мере эквивалентна сеточной модели Фэтта при  $\beta = 4$ , а объем несмачивающей фазы в модели не связан однозначно с капиллярным давлением, которое при снятии кривой Леверетта определяется узкими частями элементов модели.

При моделировании решетки предусматривается возможность устанавливать различные законы распределения трубок по диаметрам и узлов по объемам.

При расчете емкостных и фильтрационных характеристик модели предполагается, что первые обусловлены только узлами, а вторые — только трубками. Понятно, что подобная модель вполне аналогична представлению непрерывной фильтрующей среды некоторыми конечными элементами (ячейками), характеризующимися емкостью и двумя главными значениями тензора проницаемости.

При анализе процессов вытеснения и фильтрации в сеточных моделях целеобразно ввести некоторые определения. Будем называть верхнюю границу модели входной, а нижнюю — выходной кромками. Со стороны входной кромки в модель поступает вытесняющая фаза, замещая в трубках и узлах (элементах) вытесняемую фазу. Трубки, из которых в данных условиях может произойти вытеснение одной фазы другой, будем называть активными. При замене в трубке модели одной фазы другой автоматически заменяется фаза и в узле, которым оканчивается трубка в направлении вытеснения. Критическим радиусом трубы будем называть то значение, при котором капиллярное давление на границе фаз в трубке равно давлению вытеснения.

Назовем группу соединяющихся друг с другом трубок, заполненных одной и той же фазой, зоной фазы. Если зоне принадлежит хотя бы одна трубка, выходящая на входную кромку модели, то данная зона вытесняюще-активна; если эта трубка выходит на выходную кромку модели, то зона вытесняемо-активна; если зоне принадлежат хотя бы две трубы, выходящие на правую и левую кромки модели, то зона переходно-активна; если эти трубы выходят одновременно на входную и выходную кромки модели, то зона фильтрационно-активна.

Укажем некоторые принципиальные отличия механизма моделирования двухфазной фильтрации, принятого в описываемых исследованиях, от предложений, принятых в работах И. Фэтта и В. М. Енгова и др.

1. Если все элементы модели одинаковы, то элемент, в котором происходит вытеснение, выбирается случайно.

2. При каждом акте вытеснения вытесняющая и вытесняемая фазы меняются местами.

3. Процесс считается законченным, когда в модели осуществлена заданная насыщенность, которая может и не совпадать с насыщенностью при капиллярном равновесии.

4. В процессе вытеснения участвуют переходно-активные зоны.

Условия первоначального распределения фаз в модели состояли в том, что на ее нижней кромке задавалось вполне определенное распределение насыщенности и процесс вытеснения происходил без каких бы то ни было изменений этого распределения.

При моделировании процесса вытеснения в работах [38] и [9] принималась во внимание только одна насыщенность, а именно общая насыщенность модели данной фазой, равная объему этой фазы, отнесенному к объему модели. В настоящем исследовании состояние модели, кроме того, определяется еще двумя параметрами: «открытой» насыщенностью и «эффективной» насыщенностью. «Открытая» насыщенность учитывает лишь те трубы и узлы, которые принадлежат фильтрационно-активной зоне, тогда как «эффективная» насыщенность включает в себя элементы модели, относящиеся к эффективно-фильтрационно-актив-

ной зоне, которая полностью входит в фильтрационно-активную зону за вычетом тех элементов модели, в которых скорость фильтрации равна нулю.

В этой связи представляют несомненный интерес данные о возможных конкретных значениях указанных параметров насыщенности, полученных в результате моделирования стохастического процесса вытеснения одной фазы другою в моделях, где радиусы трубок и объемы узлов подчиняются различным законам распределения.

Выше уже указывалось, что в работе И. Фэтта ОФП определялась экспериментально на модели типа электроинтегратора. В настоящем исследовании, так же как в исследованиях В. М. Енгова и др. [9], ОФП рассчитывалась на ЭВМ с использованием аналогии между законом Ома для отрезка цепи и формулой Пуазейля для течения жидкости в капилляре. Сущность способа вычисления ОФП состоит в следующем. Все ячейки, принадлежащие входной кромке модели, принимают потенциал, равный 1. Все ячейки выходной кромки имеют сопротивление правой границы, равное 0, последняя ячейка имеет сопротивление нижней границы, также равное 0. В этих условиях весь поток, проходящий через модель, проходит также и через нижнюю границу ячейки, расположенной в правом нижнем углу модели. Для каждой ячейки, принадлежащей к эффективно-фильтрационно-активной зоне, составляется система из трех уравнений: одно — для потока через правую границу ячейки, второе — через нижнюю ее границу, и, наконец, третье — аналогичное уравнение Кирхгофа, отвечающее тому факту, что сумма потоков через все четыре стороны ячейки равна нулю, если в данной ячейке отсутствует источник или сток. Полученная таким образом система уравнений имеет порядок  $3 \times M \times N$  (где  $M$  и  $N$  — число строк и столбцов в модели соответственно) и должна быть решена относительно одного неизвестного — потока через нижнюю границу последней в строке последнего столбца ячейки модели.

Для определения ОФП сначала определяется поток через модель, заполненную одной фазой. Значение этого потока максимально для данной модели и равно абсолютной проницаемости. Отношение потока при наличии разных фаз в модели к максимальному потоку и представляет собой ОФП модели в данных условиях.

Подробное описание достаточно сложной программы, написанной на языке АЛГОЛ-60 и оформленной в виде отдельных процедур и блоков, входящих друг в друга, заняло бы слишком много места. Поэтому ограничимся здесь лишь кратким описанием разработанных алгоритмов и общей схемы вычислений (табл. 3.1).

Было проведено несколько опытов по моделированию процесса вытеснения одной жидкости другой согласно описанному выше алгоритму на сеточной модели, содержащей 156 ячеек. Результаты моделирования и расчетов выводились на широкую печать в виде описания параметров, характеризующих модель. По специальной подпрограмме по данным вычислений строились графики: кривые ОФП и зависимость суммы ОФП от насыщенности. Эти графики представлены на рис. 3.12.

В данном примере заданные дисперсии распределения радиусов трубок и объемов узлов были настолько малы, что модель можно было предполагать состоящей из одинаковых элементов. Заданное же критическое значение радиуса трубы было гораздо больше радиуса трубы модели, имевшего максимальное значение. Таким образом, был осуществлен процесс моделирования вытеснения одной фазы другою в условиях, при которых механизм двухфазной фильтрации, предложенный И. Фэттом, осуществиться не мог.

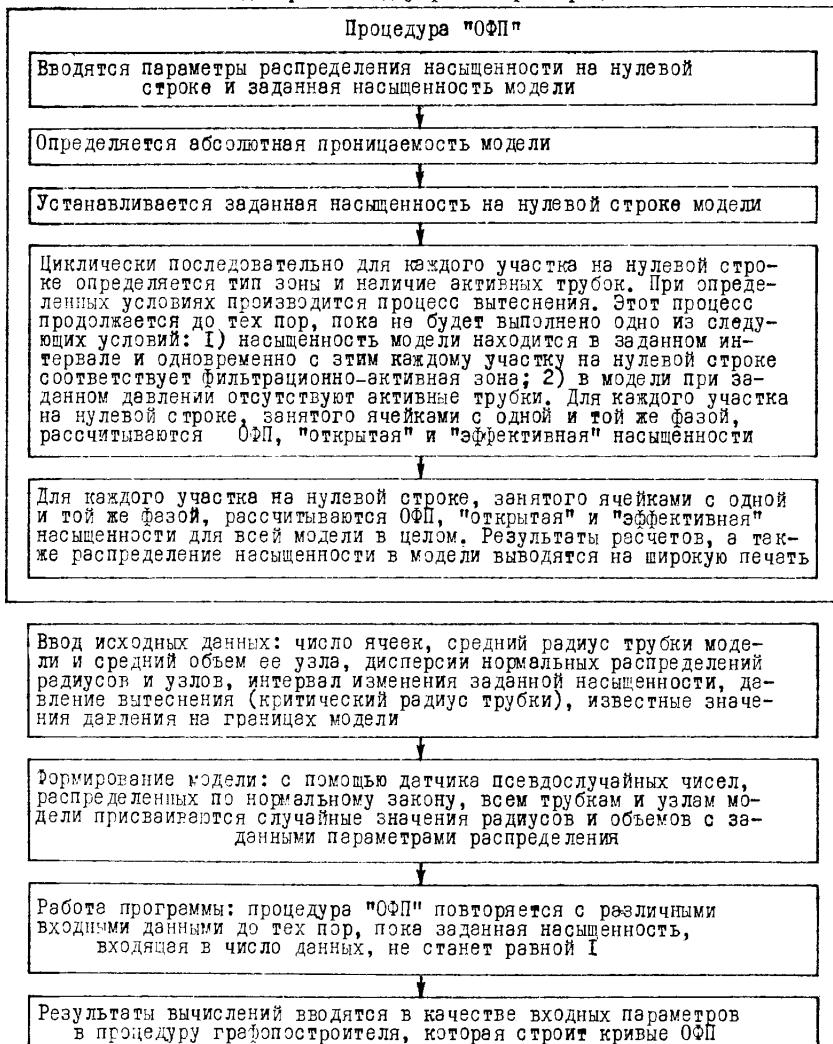
С помощью описанной программы было экспериментально найдено то минимальное значение насыщенности одной из фаз, при

котором зона фазы становится фильтрационно-активной (при условии равенства радиусов всех капилляров модели). Это значение оказалось равным  $0,57 \pm 0,3$ , что хорошо согласуется со значением, полученным при решении соответствующей задачи для перколяционной модели [29].

Форма кривых ОФП, полученная в результате моделирования стохастического процесса вытеснения, достаточна близка к форме реальных кривых ОФП. Это говорит, во-первых, о правомочности подобного стохастического подхода к изучению механизма

Таблица 3.1

Блок-схема программы математического моделирования двухфазной фильтрации



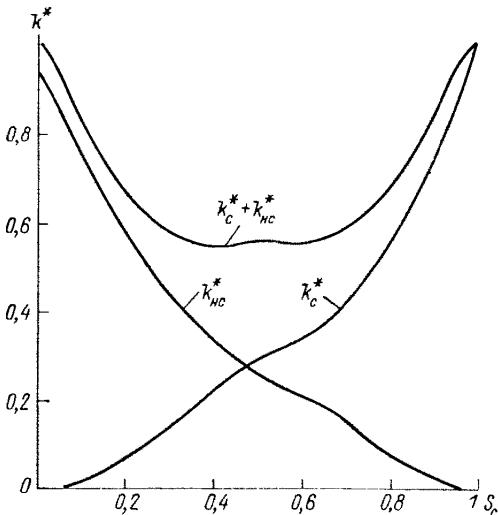


Рис. 3.12. Кривые ОФП, полученные на сеточной модели с включенными объемами.

деления каналов по диаметрам и узлов давление (критический радиус), условия на входе и выходе модели, а также ее форма. Кроме того, они позволяют рассмотреть с новых позиций процесс формирования кривой капиллярного давления в пористой среде с учетом известного явления гистерезиса и т. д. Решение этих, а также многих других вопросов на основе предложенных алгоритмов моделирования и расчета должно быть предметом дальнейших исследований.

В последнее время для решения многих задач, связанных с общими свойствами переноса в сильно неоднородных системах, достаточно широкое развитие получила теория перколяции [29]. Обычно задачи теории перколяции рассматриваются на некоторой решетке (сетке), характеризуемой узлами и соединяющими эти узлы связями. В зависимости от размерности решетки может быть дву- и трехмерной, а в зависимости от числа связей, сходящихся в каждом узле, решетки подразделяются на шестиугольную, квадратную, треугольную в двумерном случае и на алмаза, простую кубическую и гранецентрированную кубическую — в трехмерном.

Практически задачи теории перколяции сводятся к двум основным типам: так называемым задачам связей и узлов. Задача связей состоит в том, что исследуются проводящие свойства решетки в условиях постепенного изменения числа разорванных связей при статистически случайном выборе очередной связи, подлежащей разрыву или восстановлению. Аналогичным образом ставится задача узлов: определяется изменение проводящих свойств решетки в условиях постепенного блокирования (или, наоборот, разблокирования) узлов при статистически случайном выборе очередного узла, состояния которого подлежит изменению.

Большинство перколяционных задач решается с помощью известного метода Монте-Карло с применением ЭВМ.

двуфазной фильтрации и, во-вторых, о решающей роли фактора пересекаемости каналов пористой среды в процессе формирования кривых ОФП.

Разработанные алгоритмы моделирования процесса вытеснения и расчета ОФП в пористой среде позволяют оценить влияние различных факторов на эти явления, таких, как законы распределения по объемам, капиллярное

Многочисленные исследования простых кубических решеток с числом узлов, измеряемых десятками тысяч, показали, что значение доли неблокированных узлов, при которой образуется так называемый бесконечный кластер (совокупность бесконечно большого числа связанных друг с другом узлов), будет 0,31. Это значение удивительно близко к значениям минимальной насыщенности хорошо проницаемых пористых сред смачивающей фазой, при которой ОФП по этой фазе становится отличной от нуля. Так, согласно экспериментам Х. Ботсета и др. [1936 г.] минимальная насыщенность  $S_0$ , при которой начинается движение смачивающей фазы, равна 0,3; по М. Леверетту [42]  $S_0=0,3$ ; по М. Вилли и Г. Гарднеру [48]  $S_0=0,31$ ; по У. Оуэнсу и Г. Арчи [1971 г.]  $S_0=0,25 \div 0,30$ ; по результатам наших экспериментов, описанных в разделе 3.1.4,  $S_0=0,32$  и т. д. При этом отклонения  $S_0$  от значения 0,31 тем сильнее, чем больше распределение пор по размерам данной среды отличается от распределения с нулевой дисперсией. Это обстоятельство является убедительным подтверждением того, что квадратная или кубическая модель с включенными объемами является близким аналогом реальных пористых сред. Отсюда следует правомочность использования подобных моделей для изучения механизма двухфазной фильтрации, а также перспективность исследований этого механизма методами теории перколяции.

### **3.2.2. Проблема изучения функции распределения пор по диаметрам в породах-коллекторах нефти и газа и различные модельные представления**

Современные методы лабораторного определения функции распределения пор по радиусам в образцах горных пород часто дают несопоставимые результаты. Это связано с двумя причинами: во-первых, само понятие «радиуса поры» имеет неопределенный характер, во-вторых, указанные лабораторные методы имеют некоторые неустранимые методические погрешности.

Рассмотрим три наиболее распространенных метода изучения структуры порового пространства: ртутной порометрии (I метод), полупроницаемой мембранны (II метод) и смесимого вытеснения (III метод). Если говорить о первых двух методах, то они, как известно, основаны на последовательном ступенчатом вытеснении менее смачивающей жидкостью более смачивающей, первоначально насыщающей поры образца. Из-за хаотически случайного распределения в образце пор различных размеров в процессе вытеснения могут иметь место условия, когда крупная пора окружена группой более мелких, что влечет за собой ошибочное включение объема этой крупной поры в объем мелких окружающих ее пустот. Если же рассматривать метод смесимого вытеснения, то его теория основана на решении задачи поршневого вытеснения жидкости в пучке параллельных капилляров при условии равномерного движения границы раздела жидкостей внутри каждого капилляра. В то же время реальная пористая среда представляет собой слож-

ную систему пересекающихся капилляров разного диаметра, что, естественно, приводит к «размазыванию» фронта вытеснения в каждой поре и к возникновению неустранимой погрешности метода. Для установления возможной погрешности лабораторных способов определения порометрических кривых и для сравнительной оценки этих способов было проведено математическое моделирование различных вариантов вытеснения одной жидкости другой из порового пространства образца пористой среды. В качестве математической сеточной модели использовалась описанная выше модель с включенными объемами, схематически изображенная на рис. 3.12.

Само математическое моделирование состоит в том, что сначала с помощью специальной процедуры капиллярам в модели придаются различные значения радиусов, чтобы вся совокупность капилляров характеризовалась вполне определенными параметрами распределения, тогда как положение каждого капилляра в сетке оставалось бы случайным.

Как уже указывалось, в основе методов ртутной порометрии и полупроницаемой мембранны лежит одно и то же явление ступенчатого вытеснения из исследуемого образца менее смачивающей жидкостью более смачивающей. При этом если в условиях ртутной порометрии исследуются вакуумированные образцы, что обеспечивает практически 100 %-ное заполнение ртутью порового пространства, то в методе полупроницаемой мембранны поры, отсеченные от мембранны вытесняющей жидкостью, в дальнейшем процессе вытеснения не участвуют. Кроме того, при насыщении образца ртутью в ртутном поромере жидкость входит в поры образца по всей его поверхности, тогда как в капиллярометре (метод полупроницаемой мембранны) часть поверхности образца находится в контакте с мембранны, через которую насыщающая жидкость попасть в него не может. В соответствии с этими условиями при рассмотрении I и II методов моделируется ступенчатый процесс вытеснения из модели жидкости, имеющей меньшее поверхностное натяжение, жидкостью с большим значением этой величины. Вытеснение происходит лишь в ячейках, расположенных на границе фронта вытеснения и имеющих радиусы капилляров большие, чем пороговое значение для данной ступени давления жидкости, которое определяется с помощью обычной формулы Лапласа. При анализе II метода на вытеснение жидкости из данной ячейки накладывается еще такое условие: вытесняемая жидкость должна занимать ячейку, принадлежащую вытесняемо-активной зоне модели, которая контактирует с полупроницаемой мембранны (одна из граней модели), где процесс вытеснения исключен.

Основными процедурами алгоритма вытеснения для I и II методов являются следующие.

1. Поиск областей модели, заполненных вытесняемой фазой, и определение их координат.

2. В случае моделирования II метода исключение из рассматриваемых не вытесняемо-активных зон.

3. Последовательный перебор всех областей и обход каждой из них по контуру с целью определения ячейки с максимальным входным радиусом.

4. Если найденный радиус больше порогового, соответствующего данной ступени давления вытеснения, то в ячейке вытесняемая фаза заменяется на вытесняющую, объем ячейки складывается с объемом пор данного радиуса и осуществляется переход к поиску новой ячейки с максимальным радиусом, находящейся на фронте вытеснения.

5. Если найденный максимальный радиус меньше критического, то давление вытеснения увеличивается на одну ступень и осуществляется переход к первой процедуре алгоритма. Процесс продолжается до тех пор, пока все поры не будут заполнены вытесняющей жидкостью (I метод) или пока фронт вытеснения не совпадает с гранью, моделирующей полупроницаемую мембрану (II метод).

По данным работы [9] для статистической достоверности получаемых результатов модель должна содержать не менее 300—400 капилляров. При моделировании I и II методов число капилляров в исследуемых моделях достигало 500—600, III метода — 200—300.

Алгоритм процесса вытеснения при моделировании III метода состоит из следующих основных процедур.

1. Каждому капилляру приписывается определенное гидродинамическое сопротивление, обратно пропорциональное квадрату его радиуса.

2. С помощью известных формул Кирхгофа определяется направление и значение потока жидкости в каждом капилляре.

3. Всем ячейкам на входной грани модели присваивается значение, равное единице, которое характеризует вытесняющую жидкость.

4. Рассматриваются последовательно все ячейки модели и для каждой из них определяются как изменение концентрации через малый промежуток времени, так и суммарная концентрация в данный момент.

5. Подсчитывается общая насыщенность модели вытесняющей жидкостью. Если значение этой насыщенности становится больше заранее заданного, то процесс прекращается.

6. По известным формулам теории метода смесимого вытеснения [18] по скорости изменения концентрации вытесняющей жидкости на выходе модели определяется соответствующий элемент гистограммы распределения пор по их радиусам.

7. Если общая насыщенность модели не достигла некоторого заранее заданного значения, то алгоритм вычислений повторяется с пункта 3.

Для сопоставления результатов, полученных всеми тремя методами моделирования, были выбраны три варианта распределения пор по радиусам в модели:

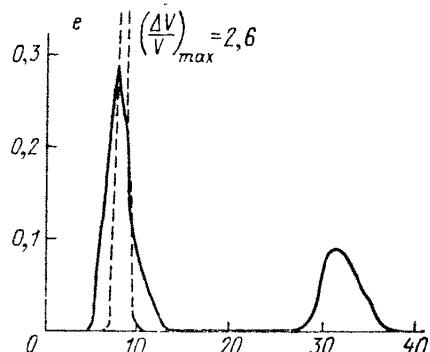
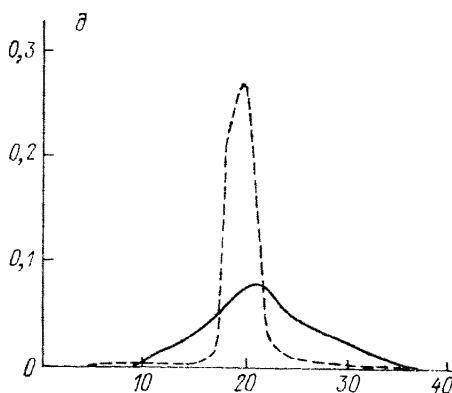
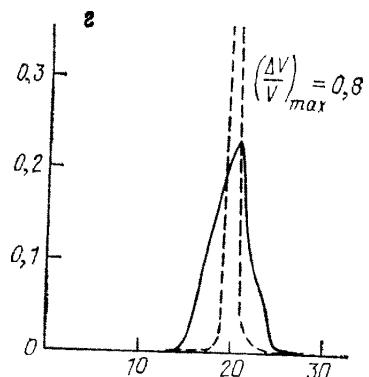
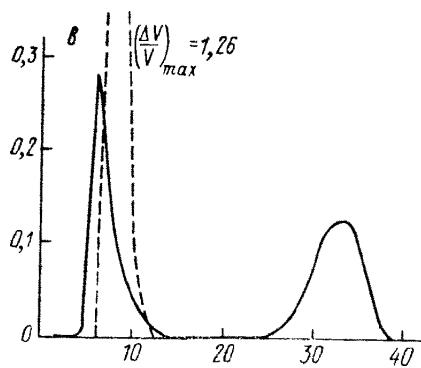
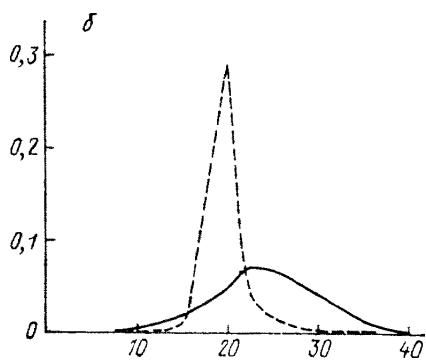
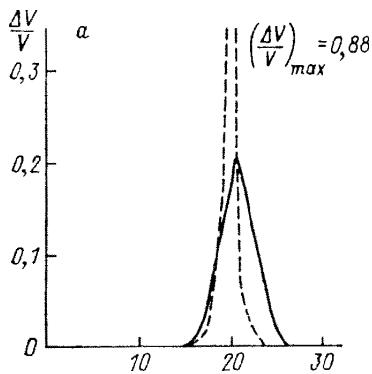
1) нормальное с параметрами  $M=20$  усл. ед. и  $D=4$  усл. ед. (где  $M$  — математическое ожидание,  $D$  — дисперсия);

2) нормальное с параметрами  $M=20$  усл. ед. и  $D=36$  усл. ед.;

3) получающееся из наложения друг на друга двух нормальных распределений с параметрами  $M_1=8$  усл. ед.,  $M_2=32$  усл. ед.,  $D_1=D_2=4$  усл. ед.

На рис. 3.13 представлены «истинные» (сплошные линии) и «экспериментальные» (штриховые линии) кривые распределения пор по радиусам, полученные в результате математического моделирования методов ртутной порометрии (рис. 3.13, *а, б, в*), полупроницаемой мембранны (рис. 3.13, *г, д, е*) и смесимого вытеснения (рис. 3.13, *ж, з, и*) при трех описанных выше вариантах «истинного» (заданного) распределения капилляров в модели.

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы.



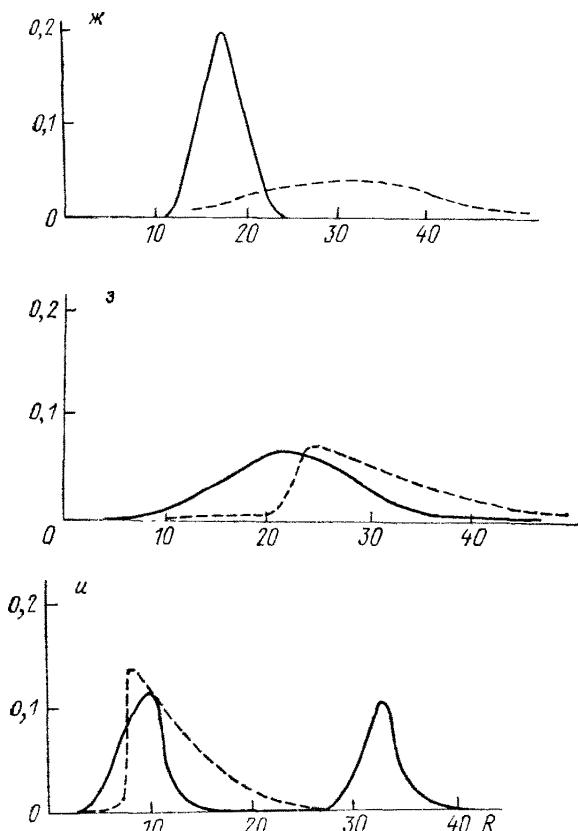


Рис. 3.13. Порометрические кривые, полученные методами математического моделирования.

Параметры, усл. ед.: *a*,  $\varphi$ ,  $\chi$  —  $M=20$ ,  $D=4$ ; *b*,  $\vartheta$ ,  $\varepsilon$  —  $M=20$ ,  $D=36$ ; *c*,  $e$ ,  $u$  —  $M_1=8$ ,  $M_2=32$ ,  $D_1=D_2=4$ .

1. В случае распределения, характеризуемого одним максимумом на порометрической кривой, все три метода дают относительно правильную оценку среднего значения радиуса пор в модели, причем наиболее значительной погрешностью в этом смысле обладает III метод, который сдвигает среднее значение в сторону больших радиусов.

2. I и II методы значительно уменьшают дисперсию распределения за счет включения в число малых пор пустот большего размера, а также за счет ограниченности доступа ко всем исследуемым порам с поверхности образца. В противоположность этому III метод увеличивает дисперсию распределения, что происходит, по-видимому, вследствие «размазывания» фронта вытеснения внутри каждой поры.

3. Все три метода обладают значительной неустранимой погрешностью при характеристике распределений с большими значениями дисперсии, особенно в тех случаях, когда распределение имеет несколько отстоящих друг от друга максимумов.

4. Результаты использования метода полупроницаемой мембранны почти не отличаются от результатов, полученных методом ртутной порометрии. Это указывает на то, что невытесняемые цепочки несмачивающей жидкости в образце практически не влияют на форму «экспериментальной» кривой распределения пор по размерам.

Таким образом, проведенные исследования показывают, что широко распространенные методы лабораторного определения параметров структуры порового пространства образцов горных пород могут дать лишь приближенные качественные оценки параметров распределения пор по размерам. При этом наибольшая погрешность должна отмечаться у тех образцов, которые имеют сложную порометрическую кривую с несколькими максимумами и с большими значениями дисперсии распределения.

### **3.3. Использование сеточных моделей для изучения процессов конвективной диффузии в горных породах**

Многочисленные эксперименты по наблюдению движения индикаторов в водоносных пластах, описанные в работах Г. В. Богоцкова [1955 г.], Г. В. Богомолова и А. И. Силина-Бикчурина [1955 г.], Г. Н. Каменского [1943 г.] и др. [21], показывают, что к приемной скважине фронт движения индикатора подходит значительно более размытым, чем в условиях движения жидкости в каналах и трубах. Подобный эффект отмечается даже тогда, когда в нагнетательной скважине осуществляется практически мгновенное действие источника индикатора. Более того, его наличие часто отмечается в скважинах, далеко отстоящих от линии, соединяющей нагнетательную и приемную скважины. Попытки объяснить эти факты процессами молекулярной диффузии вещества индикатора в фильтрующейся жидкости успехом не увенчались: получаемые при этом характерные расстояния молекулярно-диффузационного переноса оказались значительно меньше, чем наблюдаемые на практике. Таким образом, становится ясно, что сам процесс фильтрации приводит к интенсивному перемешиванию жидкости, которое нельзя объяснить только молекулярной диффузией. Детально изучивший теорию этого явления П. Саффман предложил называть перемешивание фильтрующейся в пористой среде жидкости конвективной диффузией, подчеркивая тем самым то обстоятельство, что этот вид диффузии может существовать только в условиях конвективного переноса.

Для установления механизма конвективной диффузии различными исследователями рассматривались капиллярные [28, Петерсен Э., 1958 г.; Розенберг Д., 1956 г. и др.] и сеточные [Джонг Г. Дж., 1958 г.; Тэйлор Дж., 1953 г.; Саффман П., 1959, 1960 гг.; Николаевский В. Н., 1959 г., и др.] модели пористой среды. Что касается капиллярных моделей, то на их базе не удалось получить сколько-нибудь удовлетворительного объяснения механизма

конвективной диффузии. Наиболее плодотворными в этом отношении оказались сеточные структурные модели.

### 3.3.1. Сеточная модель со случайно ориентированными капиллярами

Модель представляет собой трехмерную сетку, составленную из случайнм образом ориентированных капилляров одинакового радиуса и одинаковой длины. Впервые подобная модель была рассмотрена Дж. Тэйлором [1953 г.], но наиболее глубокий анализ процесса конвективной диффузии в такой модели был проведен П. Саффманом. Автор рассмотрел динамику дисперсии нейтрального индикатора в модели при осуществлении в ней фильтрации жидкости-носителя, подчиняющейся закону Дарси. При этом предполагается, что путь частицы индикатора состоит из суммы статистически независимых шагов, каждый из которых связан с одним из капилляров модели, поэтому его направление и продолжительность варьируют случайнм образом. В работе, опубликованной в 1959 г., рассматривается случай, когда коэффициент молекулярной диффузии сопоставим или меньше характерной для модели величины, измеряемой произведением длины единичного капилляра на среднюю скорость фильтрации жидкости.

Рассмотрение механизма конвективной диффузии основано на понятии случайног блуждания частицы индикатора. Координаты этой частицы после  $n$  шагов случайног блуждания в сеточной модели определяются выражениями:

$$x_{1n} = \sum_{i=1}^n l_i \cos \vartheta_i; \quad x_{2n} = \sum_{i=1}^n l_i \sin \vartheta_i \cos \varphi_i;$$
$$x_{3n} = \sum_{i=1}^n l_i \sin \vartheta_i \sin \varphi_i,$$

где  $\vartheta_i$  — угол между направлением средней скорости фильтрации, совпадающим с осью координат  $x_1$ , и направлением движения частицы на  $i$ -м шаге;  $\varphi_i$  — азимутальный угол между осью  $x_2$  и проекцией направления  $i$ -го шага на плоскость  $x_2x_3$ .

Время блуждания частицы индикатора определится как сумма отрезков времени, затраченных на каждый шаг:

$$t_n = \sum_{i=1}^n t_i = \sum_{i=1}^n (l_i/u_i),$$

где  $u_i$  — скорость частицы на  $i$ -м шаге;  $l_i$  — длина капилляра;  $t_i$  — продолжительность  $i$ -го шага.

Для последующего анализа используются следующие величины: 1) скорость фильтрации в модели и скорость жидкости в капилляре; 2) проницаемость модели (при этом предполагается, что значения градиента давления на каждом шаге подчиняются нормальному закону распределения); 3) продолжительность шага при случайном блуждании; 4) вероятность того, что данный шаг встретится в процессе случайног блуждания; 5) статистические свойства распределения после многих шагов и после  $n$  шагов; 6) функция распределения числа шагов за заданное время.

В результате достаточно сложных и громоздких математико-статистических выкладок П. Саффман получает следующие количе-

ственные соотношения для коэффициентов продольной  $D_l$  и боковой  $D_t$  конвективной диффузии:

$$D_l = \frac{1}{2t} \overline{(x_1 - v_\phi t)^2} = \frac{1}{2} v_\phi l S^2;$$

$$D_t = \frac{3}{16} v_\phi l,$$

где  $v_\phi$  — скорость фильтрации;  $x_1$  — координата частицы индикатора в момент времени  $t$  после начала процесса фильтрации; а дисперсия  $S^2$  определяется в зависимости от условий:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} \ln \frac{3v_\phi a_0}{l} + \frac{1}{12} \left( \ln \frac{6v_\phi a_1}{l} \right)^2 - \frac{1}{4} \ln \frac{6v_\phi a_1}{l} + \frac{19}{24}, \\ \text{если } \frac{v_\phi a_0/l}{\bar{n}^{1/2} \ln (3v_\phi a_0/l)} \ll 1; \\ \frac{1}{6} \ln \frac{27v_\phi t}{2l} + \frac{1}{12} \left( \ln \frac{6v_\phi a_1}{l} \right)^2 - \frac{1}{4} \ln \frac{6v_\phi a_1}{l} + \frac{19}{24}, \\ \text{если } \ln \bar{n}^{-1/2} \gg 1, \frac{3v_\phi a_1/l}{\bar{n}^{1/2} (\ln \bar{n}^{1/2})^{1/2}} \ll 1, \\ \frac{3v_\phi a_0/l}{\bar{n}^{1/2} (\ln \bar{n}^{1/2})^{1/2}} \gg 1; \\ \frac{1}{48} \left( \ln \frac{54v_\phi t}{l} \right)^2, \text{ если } \ln \bar{n}^{1/2} \gg 1, \\ \frac{4v_\phi a_1/l}{\bar{n}^{1/2} \ln \bar{n}^{1/2}} \gg 1, \frac{4v_\phi a_0/l}{\bar{n}^{1/2} \ln \bar{n}^{1/2}} \gg 1, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

где  $a_0 = l^2/(2D)$ ;  $a_1 = r^2/(8D)$ ;  $\bar{n} = 3v_\phi t/(2l)$ ;  $D$  — коэффициент молекулярной диффузии;  $r$  — радиус капилляра в модели;  $\bar{n}$  — среднее число шагов за время  $t$  ( $\bar{n} \gg 1$ ).

Иными словами, если  $a_0 \gg t \gg l/v_\phi$ , то  $D_l/(v_\phi l)$  — логарифмическая функция от  $v_\phi t/l$  и растет с ростом  $t$ ; если же  $t \gg a_0 \gg l/v_\phi$ , что эквивалентно случаю малых значений  $D$ , то  $D_l/(v_\phi l)$  — логарифмическая функция от  $v_\phi t/D$  и не зависит от  $t$ . При этом автор отмечает, что принятые допущения о статистической независимости последующего шага от предыдущего, а также о том, что дисперсия облака индикатора следует непосредственно из статистических свойств распределения единичных элементов модели, могут быть несправедливыми для боковой дисперсии, поэтому формулу для  $D_t$  следует считать результатом, который имеет предварительный характер.

Полученные соотношения использовались для расчета дисперсии в экспериментах, выполненных Д. фон Розенбергом [1956 г.], Дж. Ибихом и Р. Уайтом [1958 г.] и Г. Дж. де Джонг [1958 г.]. Скорость фильтрации и проницаемость фильтрующих сред, используемые в опытах, измерялись непосредственно в экспериментах.

Из этих данных по формуле типа Козени—Кармана определялись радиусы капилляров в модели, тогда как их длина, необходимая для расчетов по формулам (3.1), принималась равной диаметру слагающих частиц. Сопоставление полученных результатов экспериментов с результатами вычислений по формулам (3.1) показало вполне удовлетворительное соответствие опытных и теоретических данных.

В своей последующей работе П. Саффман рассмотрел другой случай конвективной диффузии, соответствующий условию, когда  $v_\Phi l/D \ll A$ , где  $A$  — некоторая достаточно большая величина (больше единицы). Для решения поставленной задачи в рассмотрение вводится функция корреляции Лагранжа или ковариация компоненты  $u$  скорости частицы индикатора вдоль оси  $x_1$  в момент  $t$  и в более поздний момент  $t'$ . Эта функция будет равна  $\overline{u(t)u(t')}$  (где черта обозначает среднюю величину, определяемую способом, зависящим от природы стохастического процесса). Как это ранее было найдено Дж. Тэйлором [1921 г.], перемещение в направлении оси  $x_1$  за время  $t$  некоторой частицы индикатора в потоке фильтрующейся жидкости

$$x_1(t) = \int_0^t u(t') dt';$$

$$dx_1/dt = u(t).$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt} \overline{x_1^2(t)} = 2x_1(t)u(t) = 2 \int_0^t u(t)u(t') dt'.$$

Если  $u(t)$  представляет собой стационарную случайную функцию времени, то

$$\overline{u(t)u(t')} = R(t-t') = R(\tau),$$

где  $R(\tau)$  — корреляционная функция скорости  $u$ . Можно показать, что

$$\frac{x_1^2}{2t} \approx \int_0^\infty R(\tau) d\tau,$$

где интеграл представляет собой не что иное, как коэффициент эффективной диффузии.

С помощью уже описанных модельных представлений для коэффициента продольной конвективной диффузии можно получить следующее выражение:

$$D_l = D_m + \frac{3}{80} \frac{r^2 v_\Phi}{D} + \frac{1}{4} l^2 v_\Phi^2 \int_0^1 (3z^2 - 1) \frac{F \operatorname{cth} F - 1}{\Phi F^2} dz, \quad (3.2)$$

где  $D_m$  — коэффициент диффузии, измеренный при  $v_\Phi = 0$ ;  $F = (3/2)(v_\Phi l z)/D$  и  $\Phi = D + 3r^2 v_\Phi^2 z^2/(16D)$ .

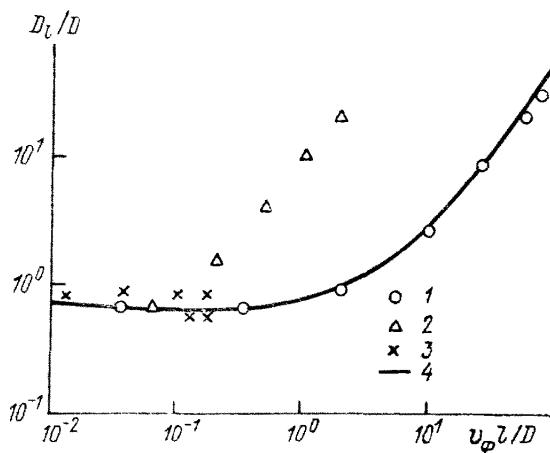


Рис. 3.14. Сопоставление теоретических и экспериментальных данных при изучении конвективной диффузии в пористой среде.

Данные: 1 — Дж. Хайби [1959 г.]; 2 — Р. Блэквэлл и др. [1958 г.]; 3 — Дж. Карберри и др. [1958 г.]; 4 — вычисленные по формуле (3.2) [Саффман П., 1960 г.].

Теория при этом дает  $D_m = D/3$ , тогда как эксперименты, выполненные на образцах несцементированных сред, свидетельствуют о том, что  $D_m = 2D/3$ . Это несоответствие опытных и теоретических данных объясняется различиями структур порового пространства реальной пористой среды и рассматриваемой модели. Поэтому формулу (3.2) следует применять при предположении, что  $D_m = 2D/3$ .

Если  $v_\phi l/D \ll 1$ , то формула (3.2) принимает вид

$$D_l = D_m + \frac{1}{15} \frac{v_\phi^2 l^2}{D}, \quad (3.3)$$

а для случая, когда  $1 \ll v_\phi l/D \ll 8l^2/r^2$ ,

$$D_l = \frac{v_\phi l}{6} \left( \ln \frac{3v_\phi l}{D} - \frac{17}{12} - \frac{1}{8} \frac{r^2 v_\phi}{l D} \right) + D_m + \frac{4}{9} D + O\left(\frac{D^2}{v_\phi l}\right), \quad (3.4)$$

что практически совпадает с формулой (3.1).

На рис. 3.14 представлена зависимость  $D_l/D$  от значений  $v_\phi l/D$ , построенная по формуле (3.2) ( $r/l = 0.2$ ;  $D_m = 2D/3$ ), и экспериментальные данные. Как видно из рисунка, в двух из трех случаев теоретические и экспериментальные данные вполне удовлетворительно соответствуют друг другу. Несовпадение теории и эксперимента в одном из трех случаев [Блэквэлл Р. и др., 1959 г.] можно объяснить недостаточно тщательной упаковкой фильтрующей среды в колонке.

### 3.3.2. Сеточная модель с параллельно включенными капиллярами

Для изучения механизма конвективной диффузии В. Н. Николаевский [1959 г.] предложил структурную модель пористой среды, несколько отличную от модели Саффмана. Поры этой модели представляют собой систему произвольным образом направленных пересекающихся капилляров, диаметры которых распределены по размерам согласно некоторой функции распределения с плотностью  $f(\delta)$ . В каждом узле сетки сходится несколько капилляров с разным диаметром; при этом диаметр каждого капилляра, соединяющего два ближайших узла, остается постоянным. Система капилляров характеризуется, кроме того, пористостью и некоторым усредненным фактором извилистости  $\varphi_i$ , учитывающим изогнутость капилляра при движении жидкости вдоль оси  $x_i$ .

Средняя скорость жидкости  $u_i$  в капилляре диаметром  $\delta$ , направленном вдоль  $i$ -й оси, определяется формулой Пуазейля:

$$u_i = -\frac{\delta^2}{32\varphi_i \mu} \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (3.5)$$

где  $p$  — давление;  $\mu$  — вязкость жидкости.

Будем считать, что от одного узла модели к другому идет связка капилляров, подобная банановой грозди, причем среднее значение квадратов их диаметров близко к среднему значению квадратов диаметров всех капилляров модели. Тогда флюктуациями градиента давления можно пренебречь, считая его в любой точке модели постоянным. (Это предположение коренным образом отличает модель Николаевского от модели Саффмана.)

Если обозначить через  $M$  начальный момент  $k$ -го порядка случайной величины  $\delta$ , то

$$M\delta^k = \int_0^\infty \delta^k f(\delta) d\delta.$$

Тогда средняя скорость движения жидкости через макроплощадку, перпендикулярную к оси  $x_i$ , должна определяться следующим образом:

$$\bar{u}_i = -\frac{1}{32\varphi_i \mu} \delta^2 \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{v_{\varphi_i}}{32\varphi_i k_i} \frac{M\delta^4}{M\delta^2}, \quad (3.6)$$

где  $v_{\varphi_i}$  и  $k_i$  — скорость фильтрации и проницаемость вдоль  $i$ -й оси соответственно.

Введем в рассмотрение скорость пульсации  $v_i$  в капилляре, определяемую по формуле

$$v_i = u_i - \bar{u}_i.$$

Средняя квадратическая пульсация

$$\sqrt{\bar{v}_i^2} = \frac{v_{\varphi_i}}{32\varphi_i k_i} \left[ \frac{M\delta^6}{M\delta^2} - \left( \frac{M\delta^4}{M\delta^2} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.7)$$

Так как проницаемость рассматриваемой модели

$$k_i = M\delta^4 / (32\varphi_i M\delta^2),$$

то из формулы (3.7) следует, что

$$\sqrt{\bar{v}_i^2} = \frac{v_{\phi i}}{m} \frac{M\delta^2}{M\delta^4} \left[ \frac{M\delta^6}{N\delta^2} - \left( \frac{M\delta^4}{M\delta^2} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.8)$$

Таким образом, средняя квадратическая пульсационная скорость является функцией скорости фильтрации, пористости и формы кривой распределения капилляров по размерам.

Рассмотрим новую систему координат, движущуюся со скоростью  $\bar{u}_i$ . Скорость движения частицы индикатора в капилляре в этой системе будет определяться скоростью пульсации. Среднее квадратическое перемещение меченои частицы за время  $t$  будет выражаться формулой

$$\bar{x}_i^2 = \int_0^t \int_0^t \overline{v_i(\tau_1) v_i(\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2. \quad (3.9)$$

Скорость меченои частицы не изменяется за время пребывания ее в отдельном капилляре, поэтому

$$\bar{x}_i^2 = \int_0^t \overline{v_i^2(\tau_1) \tau_0} d\tau_1 = \overline{v_i^2 \tau_0} t, \quad (3.10)$$

где  $\bar{\tau}_0$  — среднее время пребывания частицы в капилляре, которое при длине капилляра, равной  $l$ , определяется следующим образом:

$$\bar{\tau}_0 = \left( \frac{l}{u_i} \right) = l \left( \frac{1}{u_i} \right) = \frac{32\varphi_i k_i l}{v_{\phi i} M\delta^2}. \quad (3.11)$$

Согласно центральной предельной теореме теории вероятностей [7] случайная функция  $x_i(t)$ , связанная со случайной функцией  $v_i(t)$  формулой (3.10), имеет нормальное распределение даже при произвольном законе распределения функции  $v_i(t)$ , если значения  $v_i(t)$  при каждом шаге статистически независимы. В этом случае дисперсия нормального распределения  $\sigma_i^2$  будет равна  $\bar{x}_i^2$  и можно ввести коэффициент продольной конвективной диффузии по формуле

$$D_{ii} = \frac{\sigma_i^2}{2t} = \frac{1}{2} \overline{v_i^2 \tau_0} = \frac{l v_{\phi i}}{m} - \frac{1}{2M\delta^4} \left[ \frac{M\delta^6}{M\delta^2} - \left( \frac{M\delta^4}{M\delta^2} \right)^2 \right]. \quad (3.12)$$

Полученный результат свидетельствует о том, что коэффициент продольной конвективной диффузии линейно зависит от скорости фильтрации и от средней длины капилляров модели, что вполне соответствует результатам П. Саффмана. Однако в отличие от модели со случайно ориентированными капиллярами рассматриваемая структурная модель не приводит к наличию боковой конвективной диффузии, а также к зависимости  $D_{ii}$  от времени. Кроме того, согласно формуле (3.12) конвективная диффузия при нулевой дисперсии распределения капилляров модели по диаметрам также равна нулю, что противоречит экспериментальным данным, а также выводам, полученным П. Саффманом.

Результаты использования модельных представлений для изучения процессов конвективной диффузии оказались весьма успешными, потому что позволили объяснить многие экспериментальные данные наблюдения движения индикаторов в водоносных пластах, а так как диффузия и теплопроводность имеют одну и ту же природу и описываются одними и теми же уравнениями математической физики, то эти результаты позволяют количественно оцени-

вать всякого рода тепловые потоки в пористой среде в условиях фильтрации в ней жидкости. Так, на основе полученных уравнений для конвективной диффузии возможно решение важной в практическом отношении задачи о нагреве нефтяного продуктивного пласта при закачке в скважину горячей воды.

Дальнейшие исследования конвективной диффузии позволили отказаться от каких бы то ни было модельных представлений [33, 21], но тем не менее, как указывается в работе [21], «изучение движения частиц индикатора в капиллярных (сеточных) моделях позволило понять и оценить различные стороны процесса перемешивания; использование сеточных моделей оказалось полезным на первом этапе разработки теории перемешивания однородной жидкости в фильтрационных потоках и позволило сформулировать основные исходные положения для дальнейших исследований».

### Трещинно-капиллярная модель анизотропных трещиноватых горных пород

Анализ особенностей развития трещиноватости горных пород, характерной для глубин залегания нефтяных пластов-коллекторов, дает основание рассматривать трещиноватую горную породу как некоторую своеобразную пористую среду, где роль зерен играют слабопроницаемые и малопористые блоки породы [22]. Установившаяся фильтрация в трещиноватой среде с хаотическим расположением ориентировок и размеров трещин будет происходить так же, как и в пористой среде, без каких бы то ни было существенных различий.

Если межзерновая проницаемость блоков сравнима с трещинной проницаемостью, суммарный установившийся фильтрационный поток будет просто складываться из порового и трещинного потоков. Но, как показывают многочисленные геологические и геолого-промышленные исследования [11, 22], трещины в горных породах распределяются не хаотически, а по определенным системам, при этом раскрытие трещин в пределах одной системы с достаточной точностью можно принять постоянным. Более того, на глубинах залегания продуктивных трещинных коллекторов раскрытия трещин в разных системах мало отличаются друг от друга и составляют в среднем 20—30 мкм. В этих условиях достаточно большая группа методов исследования дает возможность получить более или менее полную информацию о структуре трещинного (частный случай порового) пространства, что открывает новые пути для чисто теоретических расчетов фильтрационных и емкостных характеристик по данным геометрии трещин. Таким образом, структуру трещинно-порового пространства трещиноватых горных пород можно представить себе в виде некоторой структурной модели, состоящей из пористых блоков и рассекающих эти блоки трещин. Подобная модель должна прежде всего предусматривать установление количественных связей между параметрами трещиноватости (геометрией пор) горных пород и ее емкостными и фильтрационными свойствами (см. рис. в.1).

То, что трещины в горных породах распределяются согласно определенным образом ориентированным в пространстве системам, приводит к существенной анизотропности трещинных коллекторов нефти и газа. Следовательно, одной из основных задач должно явиться исследование модели трещиноватой породы, обладаю-

щей анизотропностью относительно ее фильтрационных свойств, так как анизотропность трещинного коллектора значительно влияет на методы его разведки и разработки.

Процессы фильтрации в трещиноватых горных породах имеют важные особенности и при отсутствии анизотропии последних. К ним следует отнести особенности так называемого упругого режима фильтрации. Структурные модели трещиновато-пористых горных пород в связи с процессами пьезопроводности в этих условиях будут рассмотрены в следующей главе книги.

Рассмотрим трещинно-капиллярную модель трещиноватой горной породы, состоящую из пористых блоков, ограниченных со всех сторон трещинами. Так как в данном случае нас интересуют особенности фильтрации, связанные лишь с анизотропностью трещиноватых горных пород, то будем полагать пористость и проницаемость блоков такими, что процессами обмена жидкостью между блоками и трещинами можно пренебречь. Это условие, естественно, не распространяется на случай, когда имеет место установившаяся фильтрация, т. е. когда обмен жидкостью приводит к простому сложению порового и трещинного потоков.

#### 4.1. Принципы построения модели

Как уже указывалось, трещины в горной породе располагаются не хаотически, а по определенным системам, каждая из которых характеризуется определенной ориентировкой трещин в пространстве, раскрытием трещин в системе и некоторой густотой трещин  $\Gamma$ , обратной среднему расстоянию между трещинами в системе.

Рассмотрим какой-либо объем трещиноватой породы, содержащий  $N$  систем трещин. С одной стороны, этот объем должен быть достаточно большим, чтобы его линейные размеры были значительно большие средних расстояний между трещинами, с другой — достаточно малым, чтобы трещиноватость в его пределах можно было считать однородной. Так как расстояния между трещинами в горных породах измеряются обычно единицами или десятками сантиметров, линейные размеры рассматриваемого объема должны измеряться единицами или десятками метров. Геологические наблюдения показывают, что выделение в трещиноватых породах подобных объемов вполне возможно. Более того, во многих случаях участки однородной трещиноватости простираются на сотни метров.

Так как раскрытия трещин в горных породах на глубинах залегания нефтегазоносных пластов не превышают  $10^{-2}$  см, то при модельном рассмотрении движения жидкости на участке трещины между линиями пересечения последней с другими трещинами можно пренебречь концевыми эффектами.

Итак, рассмотрим модель трещиноватой горной породы, представляющую собой некоторый непористый и непроницаемый материал, рассеченный системами трещин, каждая из которых характеризуется определенными значениями густоты, раскрытия

и элементами ориентировки в пространстве. По аналогии с по-  
ристой средой введем скорость фильтрации  $\vec{v}_\phi$  как сумму скоро-  
стей фильтрации, обусловленных отдельными  $N$  системами тре-  
щин [22]:

$$\vec{v}_\phi = \sum_{i=1}^N \vec{v}_{\phi i}. \quad (4.1)$$

Но

$$\vec{v}_{\phi i} = b_i \Gamma_i \vec{v}_i, \quad (4.2)$$

где  $b_i$  — раскрытие трещин;  $\Gamma_i$  — густота трещин;  $\vec{v}_i$  — истинная  
скорость жидкости; индекс « $i$ » относит все величины к системе  
трещин  $i$ -го номера.

Истинная скорость движения жидкости в трещине будет опре-  
деляться формулой Буссинеска:

$$\vec{v}_i = -\frac{b_i^2}{12\mu} (\nabla p \vec{m}_i) \vec{m}_i, \quad (4.3)$$

где  $\vec{m}_i$  — единичный вектор, совпадающий по направлению с со-  
ставляющей вектора  $\nabla p$  по плоскости трещины системы  $i$ -го но-  
мера;  $(\nabla p \vec{m}_i)$  — скалярное произведение векторов  $\nabla p$  и  $\vec{m}_i$ .

Подставляя в формулу (4.3) выражение (4.2), а результат под-  
становки в соотношение (4.1), получаем

$$\vec{v}_\phi = -\frac{1}{12\mu} \sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i (\nabla p \vec{m}_i) \vec{m}_i. \quad (4.4)$$

Чтобы найти явную зависимость вектора  $\vec{v}_\phi$  от градиента дав-  
ления и ориентировки систем трещин, разложим вектор  $\nabla p$  по  
двум направлениям, одно из которых определяется единичным  
вектором  $\vec{m}_i$ , а другое — единичным вектором  $\vec{n}_i$ , нормальным  
к плоскости трещины:

$$\nabla p = (\nabla p \vec{m}_i) \vec{m}_i + (\nabla p \vec{n}_i) \vec{n}_i.$$

Тогда формулу (4.4) можно переписать в виде

$$\vec{v}_\phi = -\frac{1}{12\mu} \sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i [\nabla p - (\nabla p \vec{n}_i) \vec{n}_i]. \quad (4.5)$$

Но  $(\nabla p \vec{n}_i) \vec{n}_i = \nabla p \vec{n}_i \vec{n}_i = \vec{n}_i \vec{n}_i \nabla p$  и  $\nabla p = \mathbf{I} \nabla p$  (где  $\vec{n}_i \vec{n}_i$  — векторная  
диада и  $\mathbf{I}$  — единичный тензор). Отсюда

$$\vec{v}_\phi = -\frac{1}{12\mu} \sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i (\mathbf{I} - \vec{n}_i \vec{n}_i) \nabla p. \quad (4.6)$$

Выражение

$$\frac{1}{12} \sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i (\mathbf{I} - \vec{n}_i \vec{n}_i) \quad (4.7)$$

представляет собой симметричный тензор второго ранга, который можно обозначить через  $\mathbf{k}$ . Тогда формула (4.6) перепишется в виде

$$\vec{v}_\Phi = -\frac{\mathbf{k}}{\mu} \nabla p. \quad (4.8)$$

Выражение (4.8) есть обобщенный закон Дарси для анизотропной среды, частным случаем которого является известная формула

$$\vec{v}_\Phi = -\frac{\mathbf{k}}{\mu} \nabla p.$$

Тензор  $\mathbf{k}$ , компоненты которого выражаются через параметры трещиноватости, можно назвать тензором трещинной проницаемости. Для изотропной среды компоненты сферического тензора одинаковы и равны коэффициенту проницаемости.

Составим матрицу тензора проницаемости. Если в системе координат  $x_1, x_2, x_3$  направляющие косинусы векторов нормалей обозначить через  $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \alpha_{3i}$ , то, используя выражение (4.7), получаем

$$\mathbf{k} = \frac{1}{12} \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i (1 - \alpha_{1i}^2) & -\sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i \alpha_{1i} \alpha_{2i} & -\sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i \alpha_{1i} \alpha_{3i} \\ -\sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i \alpha_{2i} \alpha_{1i} & \sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i (1 - \alpha_{2i}^2) & -\sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i \alpha_{2i} \alpha_{3i} \\ -\sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i \alpha_{3i} \alpha_{1i} & -\sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i \alpha_{3i} \alpha_{2i} & \sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i (1 - \alpha_{3i}^2) \end{vmatrix} \quad (4.9)$$

или

$$\mathbf{k} = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, выражение (4.9) представляет собой вполне определенную количественную связь между параметрами структуры трещинного (порового) пространства трещинно-капиллярной модели трещиноватой горной породы [ $b_i, \Gamma_i$  и  $\alpha_{li}$  ( $l=1, 2, 3$ )] и ее фильтрационными свойствами (см. рис. в. 1).

Рассмотрим некоторое направление  $\vec{n}$  в исследуемой анизотропной среде и попытаемся найти коэффициент пропорциональности  $k_n$  между проекциями скорости фильтрации и градиента

давления на это направление, т. е. попытаемся ввести понятие «коэффициента проницаемости» по аналогии с тем, как это делается для изотропных сред. Назовем его коэффициентом направленной проницаемости

$$k_n = \mu(\vec{v}_\phi \vec{n}) / (\nabla p \vec{n}).$$

Пользуясь формулой (4.8), найдем

$$\begin{aligned} (\vec{v}_\phi \vec{n}) &= (\mathbf{k} \nabla p \vec{n}) / \mu = (\mathbf{k} \vec{n} \nabla p) / \mu; \\ (\nabla p \vec{n}) &= \mu (\mathbf{k}^{-1} \vec{v}_\phi \vec{n}) = \mu (\mathbf{k}^{-1} \vec{n} \vec{v}_\phi), \end{aligned}$$

где  $\mathbf{k}^{-1}$  — тензор, обратный тензору  $\mathbf{k}$ .

Отсюда

$$k_n = (\mathbf{k} \vec{n} \nabla p) / [\mu (\mathbf{k}^{-1} \vec{n} \vec{v}_\phi)]. \quad (4.10)$$

Из этого выражения видно, что  $k_n$  является функцией не только направления  $\vec{n}$ , но и направления вектора градиента давления (или вектора скорости фильтрации), т. е. попытка введения скалярного коэффициента направленной проницаемости  $k_n$  как коэффициента пропорциональности между проекциями вектора скорости и вектора градиента на направление  $\vec{n}$ , который являлся бы характеристикой только анизотропной среды, не имеет смысла, так как этот коэффициент зависел бы от внешнего поля давлений. Для возможности однозначного определения  $k_n$  необходимо единичный вектор  $\vec{n}$  связать с векторами градиента и скорости, т. е. избираемое направление  $\vec{n}$  не может быть произвольным относительно этих векторов. Очевидно, наиболее простой формой связи будет являться совмещение  $\vec{n}$  либо с вектором скорости фильтрации, либо с вектором градиента давления. Легко показать, что в первом случае

$$k_n = 1/k'_n = (\vec{n} \mathbf{k}^{-1} \vec{n}), \quad (4.11)$$

а во втором

$$k_n = k''_n = (\vec{n} \mathbf{k} \vec{n}). \quad (4.12)$$

Такая двойственность коэффициента направленной проницаемости анизотропной среды соответствует возможности определения этого коэффициента двумя способами, о чем говорилось в работе А. Шейдеггера [1956 г.]. Первый способ заключается в измерении проекции вектора градиента давления на направление вектора скорости фильтрации, а второй — в измерении проекции скорости фильтрации на направление вектора градиента давления.

Коэффициенты  $k'_n$  и  $k''_n$  можно рассматривать как проекции векторов проницаемости  $\vec{k}'_n = \vec{k}^{-1} \vec{n}$  и  $\vec{k}''_n = \vec{k} \vec{n}$  на направление  $\vec{n}$ .

Возвращаясь к формуле (4.8) и проектируя левую и правую ее части на направление  $\vec{n}$ , можно написать, что

$$v_{\phi n} = \left( \frac{k}{\mu} \nabla p \vec{n} \right) = \left( \frac{k}{\mu} \vec{n} \nabla p \right) = \left( \frac{\vec{k}_n}{\mu} \nabla p \right), \quad (4.13)$$

где  $\vec{k}_n = \vec{k} \vec{n}$  — вектор проницаемости, соответствующий направлению  $\vec{n}$ . Иначе говоря, для вычисления скорости фильтрации в направлении  $\vec{n}$  необходимо соответствующий данному направлению вектор проницаемости  $\vec{k}_n$  скалярно умножить на вектор градиента давления  $\nabla p$ . Вид формулы (4.13) обусловливается тем, что, как уже указывалось, в анизотропной среде, вообще говоря, векторы  $v_\phi$  и  $\nabla p$  не коллинеарны (как и векторы  $\vec{k}_n$  и  $\vec{n}$ ), именно поэтому оказывается невозможным связать векторы  $v_\phi$  и  $\nabla p$  скалярным коэффициентом.

Если тензор трещинной проницаемости записать в координатах, оси которых совпадают с главными осями анизотропии, то он будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{k} = \begin{vmatrix} {}^0k_1 & 0 & 0 \\ 0 & {}^0k_2 & 0 \\ 0 & 0 & {}^0k_3 \end{vmatrix}, \quad (4.14)$$

где

$${}^0k_1 = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i (1 - \alpha'_{1i});$$

$${}^0k_2 = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i (1 - \alpha'_{2i});$$

$${}^0k_3 = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i (1 - \alpha'_{3i});$$

$\alpha'_{1i}$ ,  $\alpha'_{2i}$  и  $\alpha'_{3i}$  — направляющие косинусы системы трещин  $i$ -го номера в системе координат  $x'_1$ ,  $x'_2$ ,  $x'_3$ , совпадающих с главными осями анизотропии. Существуют вполне определенные соотношения, позволяющие определить  ${}^0k_1$ ,  ${}^0k_2$  и  ${}^0k_3$ , а также тройку направляющих косинусов в новой системе координат  $x'_1$ ,  $x'_2$  и  $x'_3$  [22].

Условием изотропности рассматриваемой модели трещиноватой среды будет являться равенство главных значений тензора трещинной проницаемости (4.14):

$$\sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i (1 - a_{1i}'^2) = \sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i (1 - a_{2i}'^2) = \sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i (1 - a_{3i}'^2). \quad (4.15)$$

Это условие может выполняться при наличии достаточно большого числа систем трещин с равномерным распределением вероятностей независимых величин  $b_i^3 \Gamma_i$  и  $a_{li}'$  (бессистемная или хаотическая трещиноватость). Действительно, если  $i$  достаточно велико и все значения  $a_{1i}'$ ,  $a_{2i}'$  и  $a_{3i}'$  равновероятны, то

$$M \sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i (1 - a_{li}'^2) = \frac{2}{3} \sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i \quad (l = 1, 2, 3).$$

Таким образом, в этом случае тензор трещинной проницаемости будет иметь вид

$$\mathbf{k} = \frac{1}{18} \sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i \mathbf{I}.$$

Условие (4.15) может также выполняться и при некоторых упорядоченных распределениях систем трещин. Так, в случае трех взаимно перпендикулярных систем трещин с равными значениями раскрытия и густоты тензор трещинной проницаемости примет вид

$$\mathbf{k} = \frac{1}{6} b^3 \Gamma \mathbf{I}.$$

В простейших случаях анизотропии трещинно-капиллярной модели тензор трещинной проницаемости сводится к достаточно простым выражениям. Для одной системы трещин

$$\mathbf{k} = \frac{b^3 \Gamma}{12} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

для двух взаимно перпендикулярных систем трещин

$$\mathbf{k} = \frac{b^3 \Gamma}{12} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Известно, что всякому симметричному тензору второго ранга можно сопоставить некоторую поверхность второго порядка. В нашем случае следует рассматривать две поверхности, соответствующие тензорам  $\mathbf{k}^{-1}$  и  $\mathbf{k}$ . Если координатные оси совпадают с главными осями анизотропии, то уравнения этих поверхностей легко получить следующим образом:

$$(\vec{n} \mathbf{k}^{-1} \vec{n}) = 1/k_n' = a_1^2/k_1 + a_2^2/k_2 + a_3^2/k_3;$$

$$(\vec{n} \mathbf{k} \vec{n}) = k_n'' = a_1^2/k_1 + a_2^2/k_2 + a_3^2/k_3.$$

Из-за того что коэффициенты при  $\alpha_i^2$  существенно положительны, первое из этих соотношений дает уравнение эллипсоида при условии  $\vec{r} = \vec{n} / \sqrt{k'_n}$ :

$$\frac{x_1^2}{\vec{n} \vec{k}_1} + \frac{x_2^2}{\vec{n} \vec{k}_2} + \frac{x_3^2}{\vec{n} \vec{k}_4} = 1, \quad (4.16)$$

а второе — при  $\vec{r} = \vec{n} / \sqrt{k''_n}$ :

$$\frac{x_1^2}{1/\vec{n} \vec{k}_1} = \frac{x_2^2}{1/\vec{n} \vec{k}_2} + \frac{x_3^2}{1/\vec{n} \vec{k}_3} = 1. \quad (4.17)$$

Уравнения (4.16) и (4.17) естественно называть уравнениями эллипсоидов трещинной проницаемости.

При изучении различных случаев движения жидкости в анизотропных трещиноватых пластах-коллекторах могут быть встречены оба из рассмотренных методов измерения направленной проницаемости. Так, приток жидкости в скважину и интерференция скважин соответствуют тем условиям, когда направленная проницаемость измеряется проекцией вектора градиента давления на направление вектора скорости фильтрации:

$$1/k'_n = (\vec{n} \vec{k}^{-1} \vec{n}).$$

Приток жидкости к бесконечной галерее и измерение проницаемости образцов анизотропных пород в тех условиях, когда фронт входа жидкости в образец много больше длины пути фильтрации, соответствует рассмотрению направленной проницаемости, определяемой проекцией вектора скорости фильтрации на направление вектора градиента давления:

$$k''_n = (\vec{n} \vec{k} \vec{n}).$$

Напишем уравнение для направленной трещинной проницаемости  $k''_n$  в произвольно ориентированных осях  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  [22]:

$$k''_n = k_{11}^2 a_1^2 + k_{22}^2 a_2^2 + k_{33}^2 a_3^2 + 2k_{12} a_1 a_2 + 2k_{13} a_1 a_3 + 2k_{23} a_2 a_3.$$

Перейдем в этом уравнении от компонентов тензора трещинной проницаемости к их выражениям через параметры трещиноватости:

$$\begin{aligned} k''_n = & \frac{1}{12} \left[ \sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i (1 - a_{1i}^2) a_1^2 + \sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i (1 - a_{2i}^2) a_2^2 + \right. \\ & + \sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i (1 - a_{3i}^2) a_3^2 - 2 \sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i a_{1i} a_{2i} a_1 a_2 - \\ & \left. - 2 \sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i a_{1i} a_{3i} a_1 a_3 - 2 \sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i a_{2i} a_{3i} a_2 a_3 \right]. \end{aligned}$$

После несложных алгебраических преобразований с учетом того, что  $\sum_{i=1}^3 \alpha_{li}^2 = 1$  и  $\sum_{k=1}^3 \alpha_k^2 = 1$ , получим

$$k_n'' = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i \{1 - (\alpha_1 \alpha_{1i} + \alpha_2 \alpha_{2i} + \alpha_3 \alpha_{3i})^2\}.$$

Переходя в этом выражении от  $\alpha_{li}$  к принятым в геологии азимутам и углам падения по формулам:

$$\alpha_1 = \cos \alpha = -\sin \delta \sin \omega;$$

$$\alpha_2 = \cos \beta = \cos \delta \sin \omega;$$

$$\alpha_3 = \cos \gamma = \cos \omega,$$

можно получить

$$k_n'' = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i \{1 - [\sin \omega_i (\cos \delta_i \cos \beta - \sin \delta_i \cos \alpha) + \cos \omega_i \cos \gamma]^2\}, \quad (4.18)$$

где  $\omega_i$  и  $\delta_i$  — соответственно угол и азимут падения системы трещин  $i$ -го номера;  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — углы между вектором градиента давления (совпадающим с направлением  $n$ , в котором измеряется  $k_n''$ ) и координатными осями  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ . Отсюда следует, что, имея в распоряжении данные о параметрах трещиноватости, с помощью формулы (4.18) возможно построение полярных диаграмм и эллипсов трещинной проницаемости в любой интересующей нас плоскости. Трещинная пористость модели определяется согласно простой формуле

$$m_t = \sum_{i=1}^N b_i \Gamma_i. \quad (4.19)$$

Таким образом, трещинно-капиллярная модель анизотропной трещиноватой горной породы позволяет связать геометрию трещин (трещина — частный случай поры) с пористостью и проницаемостью модели (см. рис. в.1).

Рассмотрим некоторые частные случаи геометрии трещиноватости модели.

1. Фильтрация в горизонтальной плоскости. В этом случае  $\gamma = \pi/2$ . Тогда

$$k_n'' = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i \{1 - [\sin \omega_i (\cos \delta_i \cos \beta - \sin \delta_i \cos \alpha)]^2\}.$$

Но  $\alpha = \beta + \pi/2$ . Учитывая также, что  $\cos(\beta + \pi/2) = -\sin \beta$  и  $\sin \delta_i \sin \beta + \cos \delta_i \cos \beta = \cos(\delta_i - \beta)$ , можно получить

$$k_n'' = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i [\sin^2 \omega_i \sin^2(\delta_i - \beta) + \cos^2 \omega_i].$$

А. Одна система вертикальных трещин. Тогда  $i=1$ ,  $\omega_1=\pi/2$  и

$$k_n'' = \frac{b^2 \Gamma}{12} \cos^2(\delta - \beta). \quad (4.20)$$

Б. Одна система горизонтальных трещин. Тогда  $i=1$ ,  $\omega_1=0$  и

$$k_n'' = b^3 \Gamma / 12. \quad (4.21)$$

В. Две взаимно перпендикулярные и вертикальные системы трещин. Тогда  $i=2$ ,  $\omega_1=\omega_2=\pi/2$ ,  $\delta_1=\delta_2+\pi/2$  и

$$k_n'' = \frac{1}{12} [b_1^3 \Gamma_1 \cos^2(\delta_2 + \pi/2 - \beta) + b_2^3 \Gamma_2 \cos^2(\delta_2 - \beta)].$$

Если  $b_1=b_2=b$  и  $\Gamma_1=\Gamma_2=\Gamma$ , то

$$k_n'' = b^3 \Gamma / 12. \quad (4.22)$$

Г. Три взаимно перпендикулярные системы трещин, одна из которых горизонтальна. Тогда  $i=3$ ,  $\omega_1=\omega_2=\pi/2$ ,  $\omega_3=0$ ,  $\delta_1=\delta_2+\pi/2$ , а  $\delta_3$  — неопределенность. В этом случае

$$k_n'' = \frac{1}{12} [b_1^3 \Gamma_1 \cos^2(\delta_2 - \beta) + b_2^3 \Gamma_2 \sin^2(\delta_2 - \beta) + b_3^3 \Gamma_3].$$

Если  $b_1=b_2=b_3=b$  и  $\Gamma_1=\Gamma_2=\Gamma_3=\Gamma$ , то

$$k_n'' = b^3 \Gamma / 6. \quad (4.23)$$

2. Фильтрация в вертикальном направлении. В этом случае  $\alpha=\beta=\pi/2$  и  $\gamma=0$ . Тогда

$$k_n'' = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i \sin^2 \omega_i.$$

А. Одна система горизонтальных трещин. Тогда  $i=1$ ,  $\omega_1=0$  и

$$k_n'' = 0.$$

Б. Одна система вертикальных трещин. Тогда  $i=1$ ,  $\omega_1=\pi/2$  и

$$k_n'' = b^3 \Gamma / 12.$$

В. Две взаимно перпендикулярные и вертикальные системы трещин. В этом случае  $i=2$ ,  $\omega_1=\omega_2=\pi/2$  и

$$k_n'' = (b_1^3 \Gamma_1 + b_2^3 \Gamma_2) / 12.$$

Если  $b_1=b_2=b$  и  $\Gamma_1=\Gamma_2=\Gamma$ , то

$$k_n'' = b^3 \Gamma / 6.$$

Г. Три взаимно перпендикулярные системы трещин, одна из которых горизонтальна. Тогда  $i=3$ ,  $\omega_1=\omega_2=\pi/2$ ,  $\omega_3=0$  и

$$k_n'' = (b_1^3 \Gamma_1 + b_2^3 \Gamma_2) / 12.$$

Если  $b_1=b_2=b$  и  $\Gamma_1=\Gamma_2=\Gamma$ , то

$$k_n'' = b^3 \Gamma / 6.$$

Пользуясь формулой (4.18), можно показать, что модель, характеризующаяся тремя взаимно перпендикулярными системами трещин с равными густотами и раскрытиями, является изотропной. Действительно, в этом случае  $\omega_1 = \omega_2 = \pi/2$ ,  $\omega_3 = 0$ ,  $\delta_1 = \delta_2 + \pi/2$  и  $\delta_3$  — неопределенность. Тогда можно показать, что

$$k_n'' = b^3 \Gamma / 6. \quad (4.24)$$

## 4.2. Приток жидкости в скважину в анизотропном пласте. Интерференция скважин

Для обсуждения вопроса о применении рассмотренной трещинно-капиллярной структурной модели в целях оценки фильтрационных свойств трещиноватых горных пород необходимо сначала найти выражения для притока жидкости в скважину в анизотропном пласте. Для этого выберем оси координат так, чтобы две из них были направлены вдоль главных осей эллипса проницаемости, лежащего в плоскости фильтрации, а третья совпадала с осью скважины [Ромм Е. С., Позиненко Б. В., 1963 г.]. В этих условиях уравнение поля фильтрации будет иметь вид

$$k_1 \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + k_2 \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} = 0, \quad (4.25)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  — главные значения тензора трещинной проницаемости.

Произведем изотропизирующую деформацию пространства, заключающуюся в переходе к новым координатам  $x'_1$  и  $x'_2$  по формулам

$$x'_1 = \sqrt[4]{k_2/k_1} x_1; \quad x'_2 = \sqrt[4]{k_1/k_2} x_2. \quad (4.26)$$

При подобном переходе любые линейные отрезки преобразуются по следующему закону:

$$|\vec{r}'| = \frac{\sqrt[4]{k_1 k_2}}{\sqrt[4]{k_n}} |\vec{r}|. \quad (4.27)$$

В новых координатах уравнение (4.26) будет иметь вид уравнения Лапласа в канонической форме:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x'_1^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x'_2^2} = 0,$$

решение которого для случая точечного источника (стока) хорошо известно:

$$p(x'_1, x'_2) = \frac{\mu Q}{2\pi \sqrt{k_1 k_2}} \ln r' + c,$$

где  $\mu$  и  $Q$  — вязкость и расход жидкости соответственно;  $c$  — произвольная постоянная, определяемая из граничных условий.

Переходя от новых координат к старым и учитывая формулу (4.27), получаем

$$p(\vec{r}) = \frac{\mu Q}{2\pi \sqrt{k_1 k_2}} \ln \frac{|\vec{r}|}{\sqrt{k_n}} + c'_1, \quad (4.28)$$

где  $\vec{r}$  — радиус-вектор точки пласта, совпадающий по направлению с вектором скорости фильтрации.

Анализ уравнения (4.28) позволяет заключить, что эквипотенциальными линиями плоского гидродинамического поля точечного стока в анизотропной среде являются подобные эллипсы с соотношением между осями, равным  $(k_1/k_2)^{1/2}$ . Отсюда следует, что контуром питания скважины, пробуренной в анизотропной среде, будет также эллипс, являющийся одной из эквипотенциальных линий гидродинамического поля стока на достаточном удалении от скважины.

Абсолютные значения осей этого эллипса будем определять из следующих соотношений:

$$(a_k + b_k)/2 = R_k; \quad a_k/b_k = \sqrt{k_1/k_2}, \quad (4.29)$$

где  $a_k$  и  $b_k$  — полуоси эллиптического контура питания;  $R_k$  — стандартная величина, которая принимается условно равной радиусу контура питания при расчете притока жидкости к скважине в изотропном пласте. Решая уравнения (4.29), получаем

$$a_k = 2R_k \sqrt{k_1}/(\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}); \quad b_k = 2R_k \sqrt{k_2}/(\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}).$$

Применив преобразование (4.26), найдем эквивалентный радиус, который следует подставить в формулу (4.28) при учете граничных условий на контуре питания:

$$R'_k = 2R_k c / (\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}). \quad (4.30)$$

Что касается контура скважины, то во вспомогательной изотропной среде он преобразуется в эллипс с полуосами:

$$a'_c = cR_c / \sqrt{k_1}; \quad b'_c = cR_c / \sqrt{k_2}.$$

Таким образом, мы пришли к задаче о притоке жидкости к эллиптической скважине в изотропной среде с круговым контуром питания. Однако, как известно, в этом случае эллиптическую скважину с достаточной точностью можно заменить круговой скважиной с эквивалентным радиусом

$$R'_c = \frac{a'_c + b'_c}{2} = \frac{R_c}{2} \frac{\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1 k_2}} c. \quad (4.31)$$

Используя найденные выражения для  $R'_k$ ,  $R'_c$ ,  $a'_c$  и  $b'_c$ , можно написать формулу для притока жидкости к скважине в анизотропном пласте:

$$Q = \frac{2\pi \sqrt{k_1 k_2} h (p_k - p_c)}{\mu \ln \{4R_k \sqrt{k_1/k_2} / [R_c (1 + \sqrt{k_1/k_2})^2]\}}. \quad (4.32)$$

Аналогичные уравнения легко получить для совместной работы двух, трех скважин и более. Для примера используем формулу для интерференции двух скважин, находящихся на расстоянии  $\delta_1$  друг от друга в изотропной среде,

когда радиусы скважин и их забойные давления равны [Щелкачев В. Н., Пыхачев Г. Б., 1939 г.]:

$$Q = \frac{2\pi h \sqrt{k_1 k_2} (p_k - p_c)}{\mu \ln \left[ R_k^{1/2} / (2\delta_1' R_c) \right]}. \quad (4.33)$$

При рассмотрении анизотропного пласта вместо параметров фильтрации необходимо подставить соответствующие выражения —  $k = \sqrt{k_1 k_2}$ , (4.30), (4.31) — и учесть, что согласно формуле (4.27)

$$\delta_1' = \frac{c\delta_1}{\sqrt{k_n'}} = \delta_1 \sqrt{\left(1 - \frac{k_1 - k_2}{k_1} \cos^2 \alpha\right) \frac{1}{k_2}},$$

где  $\delta_1$  — расстояние между скважинами в анизотропном пласте;  $\alpha$  — угол между линией, соединяющей центры интерферирующих скважин, и соответствующей главной осью фильтрации.

Таким образом, для анизотропного пласта имеем формулу

$$Q = \frac{2\pi \sqrt{k_1 k_2} h (p_k - p_c)}{\mu \ln \frac{[2R_k \sqrt{k_2} / (\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2})]^2}{\delta_1 \sqrt{1 - [(k_1 - k_2)/k_1] \cos^2 \alpha} R_c (\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}) / \sqrt{k_1}}}. \quad (4.34)$$

Полученные результаты анализа фильтрации в анизотропных пластах позволяют сделать некоторые важные выводы. Прежде всего учет параметров анизотропии продуктивного трещиноватого пласта-коллектора должен внести существенные поправки в обычно проектируемые параметры сетки эксплуатационных скважин. То, что контуры питания скважин представляют собой эллипсы, влечет за собой необходимость изменять расстояния между скважинами в сетке таким образом, чтобы вдоль главных осей фильтрации эти расстояния относились друг к другу, как

$\sqrt{k_2}/k_1$  при сохранении избранной плотности скважин. Только при соблюдении подобных условий анизотропные продуктивные пласти будут так же хорошо дренироваться, как соответствующие им в смысле проницаемости изотропные залежи.

Учет параметров анизотропии коллектора необходим также при проведении мероприятий по интенсификации добычи или при вторичных методах эксплуатации месторождений. Так, при всевозможных процессах заводнения анизотропных трещинных коллекторов необходимо обеспечить условия, при которых вытеснение нефти водой происходило бы в направлении оси анизотропии, соответствующей минимальному значению направленной проницаемости.

### 4.3. Методы определения параметров анизотропии с целью повышения эффективности поисков, разведки и разработки трещинных коллекторов нефти и газа

Определение параметров анизотропии пласта сводится к нахождению главных осей анизотропии и главных значений тензора трещинной проницаемости, или, что то же самое, к определению

ориентировки и абсолютных значений главных осей эллипса трещинной проницаемости.

Наиболее простым способом определения параметров анизотропии горных пород является изучение и непосредственное измерение параметров трещиноватости на обнажениях коренных горных пород. Естественно, что этот метод носит сугубо качественный характер и применяется в основном на начальных этапах изучения трещинных коллекторов. Сам метод состоит в том, что на обнажениях непосредственно измеряются густоты систем трещин и элементы их ориентировки: азимут и угол падения каждой системы. Предполагается, что на глубинах залегания пород-коллекторов нефти и газа раскрытие трещин во всех системах приблизительно одинаково [11].

В качестве примера рассмотрим данные о параметрах трещиноватости, полученные при полевых наблюдениях р. Фортанга (Чечено-Ингушская АССР). На станции наблюдения (обнажении) были выделены три системы трещин со следующими параметрами (по данным М. Х. Булач):

- 1)  $\omega_1 = 36^\circ$ ,  $\delta_1 = 208^\circ$ ,  $\Gamma_1 = 0,3$  1/cm;
- 2)  $\omega_2 = 61^\circ$ ,  $\delta_2 = 113^\circ$ ,  $\Gamma_2 = 0,3$  1/cm;
- 3)  $\omega_3 = 38^\circ$ ,  $\delta_3 = 146^\circ$ ,  $\Gamma_3 = 0,04$  1/cm.

По этим данным с помощью формулы (4.18) были построены полярные диаграммы и эллипсы трещинной проницаемости, представленные на рис. 4.1.

Другим методом определения параметров анизотропии продуктивных нефтяных и газовых пластов является метод изучения гидродинамического взаимодействия скважин. Подобные задачи для установившейся фильтрации решались

Г. В. Щербаковым [1958 г.], У. П. Куванышевым [1962 г.], М. Арнольдом и др. [1962 г.]. Методика, предлагаемая в работах Г. В. Щербакова и У. П. Куванышева, предусматривает заранее известные направления осей анизотропии и исследование трех скважин, расположенных на концах отрезков, составляющих друг с другом прямой угол. Методика, разработанная М. Арнольдом и другими и использованная для практических расчетов параметров анизотропии трещинных коллекторов нефти и газа, основана на анализе многочисленных скважин-пьезометров и употреблении сложных графических построений. В связи с этим

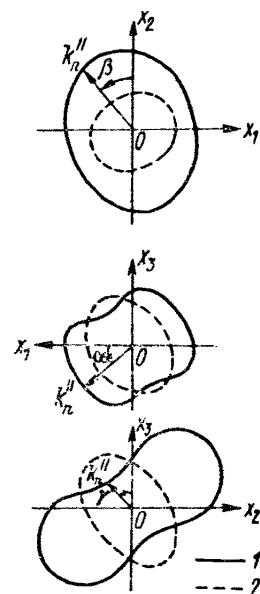


Рис. 4.1. Полярные диаграммы 1 и эллипсы 2 трещинной проницаемости, построенные по данным наблюдений трещиноватости на дневной поверхности.

применение указанных методов для определения параметров анизотропии трещинного коллектора во многих практически важных случаях достаточно затруднительно. Поэтому здесь предлагаются методы, для использования которых необходимо минимальное количество данных об интерференции скважин в условиях стационарного режима фильтрации.

Параметры анизотропии коллектора будут полностью определены, если известны  $k_1$ ,  $k_2$  и угол  $\alpha$  между осью анизотропии, соответствующей значению  $k_1$ , и осью координат  $x_1$ . Тогда для определения этих трех величин необходимо иметь три уравнения, в которые искомые величины входили бы в качестве неизвестных.

Рассмотрим уравнение (4.28). С учетом формулы (4.32) это уравнение можно написать в виде

$$p(\vec{r}) = p_c + \frac{\mu Q}{2\pi \sqrt{k_1 k_2}} \ln \frac{2\sqrt{k_1 k_2}}{R_c (\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2})} - \frac{r}{\sqrt{k_n}} \quad (4.35)$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{k_n}} \frac{2r\sqrt{k_1 k_2}}{\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}} = \exp \left[ \frac{2\pi h (p_r - p_c)}{\mu Q} \sqrt{k_1 k_2} \right]. \quad (4.36)$$

Рассматривая формулу притока жидкости к скважине в условиях анизотропного пласта (4.32), легко заключить, что с достаточной точностью

$$\sqrt{k_1 k_2} \approx \frac{\mu Q \ln (R_k / R_c)}{2\pi h (p_k - p_c)}. \quad (4.37)$$

[Так, расчеты показывают, что при  $k_1/k_2 = 25$  погрешность определения  $\sqrt{k_1 k_2}$  по приближенной формуле (4.37) не превышает 5%.]

Тогда, подставляя значение  $\sqrt{k_1 k_2}$  из формулы (4.37) в правую часть уравнения (4.36), находим

$$\frac{1}{\sqrt{k_n}} \frac{2\sqrt{k_1 k_2}}{\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}} = \frac{R_c}{r} \exp \left( \frac{p_r - p_c}{p_k - p_c} \ln \frac{R_k}{R_c} \right)$$

или

$$\frac{f(k_1, k_2)}{\sqrt{k_n}} = \left( \frac{R_k}{r} \right)^2 \exp \left( 2 \frac{p_r - p_c}{p_k - p_c} \ln \frac{R_k}{R_c} \right), \quad (4.38)$$

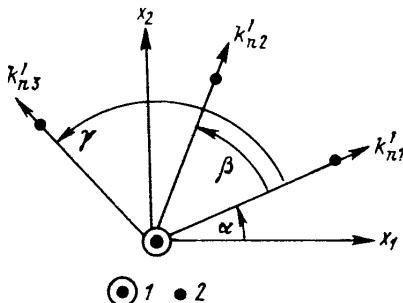
где

$$f(k_1, k_2) = \left( \frac{2\sqrt{k_1 k_2}}{\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}} \right)^2.$$

Таким образом, имеется возможность при помощи формулы (4.38) определить направленную проницаемость первого рода  $k_n'$  с точностью до постоянного множителя  $f(k_1, k_2)$ , не зависящего от направления измерений. Если обозначить неизвестный угол между осью анизотропии и направлением измерений  $f(k_1, k_2)/k_n'$  через  $\alpha$ , а углы между  $k_{n1}', k_{n2}'$  и  $k_{n1}', k_{n3}'$  через  $\beta$  и  $\gamma$  соответст-

Рис. 4.2. Схема измерений направленных проницаемостей между скважинами.

1 — скважина-возбудитель; 2 — скважина-пьезометр.



венно (рис. 4.2), то для трех значений направленной проницаемости, измеренных в различных направлениях, можно написать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} f \left[ \frac{\cos^2 \alpha}{k_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{k_2} \right] = a_1; \\ f \left[ \frac{\cos^2 (\alpha + \beta)}{k_1} + \frac{\sin^2 (\alpha + \beta)}{k_2} \right] = a_2; \\ f \left[ \frac{\cos^2 (\alpha + \gamma)}{k_1} + \frac{\sin^2 (\alpha + \gamma)}{k_2} \right] = a_3, \end{cases} \quad (4.39)$$

где  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  — измеренные значения  $f/k'_{n1}$ ,  $f/k'_{n2}$  и  $f/k'_{n3}$ .

Раскрывая значения тригонометрических функций сумм углов и учитывая первое уравнение системы, получаем

$$\begin{cases} a_2 - a_1 \cos^2 \beta = f \left[ \sin^2 \beta \left( \frac{\sin^2 \alpha}{k_1} + \frac{\cos^2 \alpha}{k_2} \right) + \right. \\ \left. + 2 \sin \beta \cos \beta (1/k_2 - 1/k_1) \sin \alpha \cos \alpha \right]; \\ a_3 - a_1 \cos^2 \gamma = f \left[ \sin^2 \gamma \left( \frac{\sin^2 \alpha}{k_1} + \frac{\cos^2 \alpha}{k_2} \right) + \right. \\ \left. + 2 \sin \gamma \cos \gamma (1/k_2 - 1/k_1) \sin \alpha \cos \alpha \right]. \end{cases}$$

Эти уравнения можно рассматривать как систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными  $A$  и  $B$ :

$$\begin{cases} a_{11}A + a_{12}B = C_1; \\ a_{21}A + a_{22}B = C_2, \end{cases} \quad (4.40)$$

где

$$a_{11} = \sin^2 \beta; \quad a_{12} = 2 \sin \beta \cos \beta; \quad a_{21} = \sin^2 \gamma; \quad a_{22} = 2 \sin \gamma \cos \gamma;$$

$$C_1 = a_2 - a_1 \cos^2 \beta; \quad C_2 = a_3 - a_1 \cos^2 \gamma;$$

$$A = f [(\sin^2 \alpha)/k_1 + (\cos^2 \alpha)/k_2]; \quad B = f \sin \alpha \cos \alpha (1/k_2 - 1/k_1).$$

Решая эту систему согласно известному правилу Крамера, получаем

$$A = \frac{C_1 a_{22} - C_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}; \quad B = \frac{C_2 a_{11} - C_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}.$$

Теперь можно составить новую систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} f[(\sin^2 \alpha)/k_1 + (\cos^2 \alpha)/k_2] = A; \\ f[1/k_2 - 1/k_1] \sin \alpha \cos \alpha = B; \\ f[(\cos^2 \alpha)/k_1 + (\sin^2 \alpha)/k_2] = a_1. \end{cases} \quad (4.41)$$

Решение системы (4.41) уже не представляет труда, и угол  $\alpha$  определяется из уравнения

$$\tan \alpha = \frac{a_1 - A}{2B} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1 - A}{2B}\right)^2 + 1}.$$

Этому уравнению соответствуют два корня, т. е. два угла, дополняющие друг друга до  $\pi/2$ . При этом один из них будет всегда положителен, а другой — отрицателен. Откладывая положительное значение угла  $\alpha$  по часовой стрелке от направления измерения  $k_{n1}$ , находим направление главной оси фильтрации, соответствующее главному значению тензора проницаемости  $k_1$ . Далее, подставляя значение  $\alpha$  в уравнения системы (4.40), легко рассчитать  $f/k_1$  и  $f/k_2$ . Определив одним из известных методов  $\sqrt{k_1 k_2}$ , не представляет труда найти истинные значения  $k_1$  и  $k_2$ .

Если  $k_{n1}$  и  $k_{n2}$  измерялись в двух взаимно перпендикулярных направлениях, задача определения параметров анизотропии существенно упрощается. Пользуясь известным условием постоянства суммы квадратов обратных величин двух любых ортогональных осей эллипса, можно написать, что

$$1/k_{n1}' + 1/k_{n2}' = 1/k_1 + 1/k_2.$$

Легко убедиться в том, что в этом случае достаточно исследовать взаимодействие только двух скважин-пьезометров со скважиной-возбудителем. Действительно, в этих условиях решению подлежит следующая система уравнений:

$$\begin{cases} (\cos^2 \alpha)/k_1 + (\sin^2 \alpha)/k_2 = a_1; \\ \sqrt{k_1 k_2} = b_1; \\ 1/k_1 + 1/k_2 = d_1. \end{cases}$$

Решение этой системы не представляет каких бы то ни было затруднений.

Определить параметры анизотропии коллектора можно и на основании данных об интерференции скважин. Так, дебиты двух скважин, интерферирующих друг с другом, определяются формулой (4.34). Пусть далее на линии, соединяющей эти две скважины, находится третья, дебит которой в условиях взаимодействия с любой из двух первых скважин определяется формулой, аналогичной (4.34). Тогда можно рассмотреть следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} Q = \frac{2\pi \sqrt{k_1 k_2} h (p_k - p_c)}{\mu \ln \{(4R_k \sqrt{k_1} / \sqrt{k_2}) / [R_c (1 + \sqrt{k_1} / \sqrt{k_2})^2]\}}; \\ Q_1 = \frac{2\pi \sqrt{k_1 k_2} h (p_k - p_c)}{\mu \ln \frac{2R_k \sqrt{k_2} / (\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2})}{\delta_1 \sqrt{1 - [(k_1 - k_2) / k_1] \cos^2 \alpha} R_c (\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}) / \sqrt{k_1}}}; \\ Q_2 = \frac{2\pi \sqrt{k_1 k_2} h (p_k - p_c)}{\mu \ln \frac{2R_k \sqrt{k_2} / (\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2})}{\delta_2 \sqrt{1 - [(k_1 - k_2) / k_1] \cos^2 \alpha} R_c (\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}) / \sqrt{k_1}}}. \end{cases} \quad (4.42)$$

Решая совместно последние два уравнения этой системы, находим

$$\sqrt{k_2 k_1} = \frac{\mu Q_1 Q_2}{2\pi h (Q_1 - Q_2) (p_k - p_c)} \ln \frac{\delta_1}{\delta_2}.$$

Теперь уже не представляет труда, пользуясь первым уравнением системы (4.42), найти  $\sqrt{k_1/k_2}$ , а затем  $k_1$  и  $k_2$ , после чего из второго и третьего уравнений определяется  $\alpha$ .

Имеется принципиальная возможность определения параметров анизотропии коллектора по данным о работе трех различно ориентированных галерей, длина каждой из которых много больше радиуса контура питания. В этом случае, как уже указывалось, непосредственно определяется направленная проницаемость второго рода  $k_n$ .

Следует подчеркнуть, что здесь рассматриваются лишь принципиальные возможности определения параметров анизотропии трещиноватых пластов-коллекторов. В каждом конкретном случае необходим детальный анализ всех возможных способов решения задачи с целью выбора тех методов и уравнений, которые в рассматриваемых условиях разведки и разработки месторождения могут дать наиболее достоверные результаты.

#### 4.4. Оценка эффективной емкости анизотропного трещиноватого пласта по данным о стационарной фильтрации

Трещинно-капиллярная модель анизотропных трещиноватых горных пород позволяет в некоторых случаях устанавливать связь между трещинными пористостью и проницаемостью.

Рассмотрим трещиноватый пласт, характеризующийся  $N$  произвольно ориентированными системами трещин. В этом случае согласно формуле (4.14) главные значения тензора трещинной проницаемости будут выражаться через параметры трещиноватости следующим образом (рассматривается плоский случай фильтрации):

$$k_1 = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i \sin^2 \alpha_{1i}; \quad k_2 = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^N b_i^3 \Gamma_i \sin^2 \alpha_{2i}. \quad (4.43)$$

Очевидно трещинная пористость должна определяться выражением

$$m_t = \sum_{i=1}^N b_i \Gamma_i. \quad (4.44)$$

Анализ уравнений (4.43) и (4.44) показывает, что в этом самом общем случае какая бы то ни было возможность определения  $m_t$  через  $k_1$  и  $k_2$  отсутствует. Но, как показывают результаты геологических исследований трещиноватости горных пород, последние чаще всего характеризуются наличием вертикальных (или близких к вертикальным) систем трещин. В связи с этим Б. В. Позиненко [1962 г.] рассмотрел некоторые частные случаи геометрии трещиноватости, представляющие наибольший практический интерес.

Пусть изучаемый трещиноватый продуктивный пласт рассечен  $N$  системами вертикальных трещин одинакового раскрытия. Тогда, согласно уравнениям (4.43) и (4.44), обозначив  $\sum_i^N \Gamma_i = T$ , найдем, что

$$k_1 + k_2 = b^3 T / 12 \quad \text{и} \quad m_t = bT.$$

Решая совместно эти уравнения, находим

$$m_t = \sqrt[3]{12T^2(k_1 + k_2)}. \quad (4.45)$$

Это соотношение следует рассматривать как базу для определения трещинной пористости различными гидродинамическими методами, основанными на анализе данных об установившейся фильтрации. Так, если на исследуемом месторождении производились какие-либо промысловые исследования параметров анизотропии, то  $k_1$  и  $k_2$  можно считать заданными. При этом значение объемной плотности трещиноватости может быть определено одним из методов, описанных в работе [22].

Если, кроме единичных испытаний скважин на приток, никаких промысловых исследований не производилось, для решения поставленной задачи необходимо привлечь приближенное уравнение (4.37), а также известное значение эксцентриситета эллипса трещинной проницаемости, которое может быть найдено из анализа графических построений, основанных на данных наблюдений трещиноватости на дневной поверхности. Напомним, что для определения

$$\epsilon = \sqrt{k_1/k_2} \quad (4.46)$$

достаточно предположить равенство раскрытий трещин во всех системах, так как абсолютные значения раскрытия влияют лишь на масштаб строящегося эллипса, но не на его форму и ориентировку главных осей. Таким образом, решив совместно уравнения (4.45), (4.37) и (4.46), найдем

$$m_t = T \left[ \frac{6\eta\mu \ln (R_k/R_c)}{\pi h} \left( \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} + \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \right) \right]^{1/3}, \quad (4.47)$$

где  $\eta = Q/(p_k - p_c)$  — коэффициент продуктивности скважины. Анализ этого уравнения дает возможность заключить, что уже при  $\epsilon^2 = 4$  погрешность в определении  $m_t$  без учета анизотропии коллектора достигает 26 % в сторону уменьшения трещинной пористости.

Для двух взаимно перпендикулярных и вертикальных систем трещин равного раскрытия формула (4.47) приобретает вид

$$m_t = T \left[ \frac{6\eta\mu \ln (R_k/R_c)}{\pi h \sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2}} \right]^{1/3}, \quad (4.48)$$

так как

$$\sqrt{k_1 k_2} = b^3 \sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2} / 12 = m_t^3 \sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2} / (12T^3) \text{ и } T = \Gamma_1 + \Gamma_2.$$

Таким образом, для изотропной среды, расчлененной двумя вертикальными и взаимно перпендикулярными системами трещин равного раскрытия и густоты, получим

$$m_t = 2 \left[ \frac{6\eta\mu \ln (R_k/R_c)}{\pi h} \Gamma^2 \right]^{1/3}. \quad (4.49)$$

Для трех взаимно перпендикулярных систем трещин получим

$$m_t = T \left[ \frac{6\eta\mu \ln (R_k/R_c)}{\pi h \sqrt{(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\Gamma_2 + \Gamma_3)}} \right]^{1/3}. \quad (4.50)$$

Если  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \Gamma$ , то

$$m_t = 3 \left[ \frac{3\eta\mu \ln (R_k/R_c)}{\pi h} \Gamma^2 \right]^{1/3}. \quad (4.51)$$

Подчеркнем, что использование формул (4.48) — (4.51) предполагает возможность определения густот систем вертикальных трещин одним из способов, описанных в работе [22].

Для пласта с хаотической трещиноватостью  $T = \pi/(2P)$ , где  $P$  — поверхностная плотность трещиноватости, поэтому

$$m_t = \left[ \frac{3\pi\eta \ln (R_k/R_c)}{h} P^2 \right]^{1/3}. \quad (4.52)$$

Из всего сказанного следует, что при произвольно ориентированных системах вертикальных трещин в пласте его трещинная пористость может быть найдена с точностью, зависящей от точности определения  $T^{2/3}$ .

Изложенная методика определения трещинной пористости не учитывает, естественно, наличия в горной породе карстовых пустот и каверн, поэтому описанным выше методом можно найти лишь емкость трещин в коллекторе, а не запасы в нем нефти, значительная часть которых, как правило, приурочена к порам нетрещиноватых блоков и ко всякого рода вторичным пустотам выщелачивания.

#### 4.5. Оценка физических свойств трещиноватых горных пород по данным о структуре их порового (трещинного) пространства (метод шлифов ВНИГРИ)

Как уже было показано, все основные физические свойства трещинно-капиллярной модели горной породы определяются параметрами трещиноватости, т. е. числом и ориентировкой систем трещин в пространстве, их густотой и раскрытием трещин в каждой системе. Таким образом, если бы реальные горные породы находились в близком соответствии с описанной выше структурной моделью, то по данным о параметрах трещиноватости в образцах керна, поднятого из скважин, можно было бы оценивать трещинные пористость и проницаемость исследуемых пород. Очевидно, что единственным критерием возможности осуществления подобного пути исследования является сравнение полученных таким образом результатов определения физических свойств продуктивных горизонтов трещинных коллекторов нефти и газа с результатами гидродинамических методов их изучения.

Существует несколько методов исследования трещиноватости по керновому материалу, отобранному из скважин глубокого бу-

рения. Самым простым из них является метод определения ориентировки трещин и выделения их систем при последовательном осмотре высоких, составленных из многих образцов столбиков керна [Калачева В. Н., 1961 г.]. Отметим, что указанный метод предусматривает, во-первых, достаточно полный вынос керна из скважин и, во-вторых, возможность ориентировки керна относительно сторон света, что, разумеется, ограничивает условия применения метода.

Самым эффективным методом определения параметров трещиноватости по керну следует, очевидно, считать микроскопическое исследование шлифов. Этот метод является единственным, с помощью которого возможно прямое определение раскрытия трещин. Метод состоит в том, что под микроскопом непосредственно измеряются раскрытие трещин, длина их следов в шлифе и площадь поверхности шлифа. В качестве обязательного условия метод предусматривает массовые измерения этих параметров во многих шлифах, изготовленных из многих образцов — представителей исследуемого участка разреза.

Интересной модификацией метода шлифов является методика изучения трещиноватости в аншлифах, разработанная В. М. Бортницкой и Д. В. Кутовой [3]. Согласно этой методике образцы керна предварительно пропитывают бакелитом, окрашенным родамином. Затем из образцов выпиливают кусочки, имеющие правильную параллелепипедальную форму, грани которых и подвергаются микроскопическому исследованию. Существенным достоинством этого метода является возможность непосредственного измерения раскрытия трещин и наличие у каждого образца шести граней, что повышает точность измерений поверхностной плотности трещиноватости.

Итак, трещиноватость горных пород может быть количественно определена с помощью ее параметров: раскрытия трещин, их объемной плотности и элементов ориентировки в пространстве. Однако и фильтрационные свойства трещиноватой горной породы определяются именно этими параметрами. Таким образом, если возможно в лаборатории по образцам керна определять параметры трещиноватости, то, зная связь между этими параметрами и коэффициентом проницаемости трещиноватой породы, легко найти трещинную проницаемость. (Так как метод шлифов является очночным, горную породу в первом приближении можно считать изотропной.)

Метод шлифов достаточно подробно описан в работе [22] и может применяться в двух различных аспектах. Во-первых, при помощи метода шлифов можно приблизенно определить трещинные пористость и проницаемость интересующего нас определенного горизонта в разрезе скважины до гидродинамического исследования этого интервала. При этом должно строго выполняться условие равномерного отбора из данного горизонта достаточно большого числа образцов (не менее одного с 1 м бурения и в сумме не менее 15—20 образцов). Во-вторых, с помощью метода шлифов

Месторождение	Номер скважины	Интервал, из которого взят керн, м
Быстрянская площадь (Минусинский район)	1	1844—1861
Осинская площадь (Иркутский район)	2	1647—1696
Малышевская площадь (Ишимбайский район)	1 8 11	414—461 418—461 396—463
Карабулакская площадь (Грозненский район)	30 30 30	2530—2564 2462—2515 2304—2462
Площадь Караул-Базар (Средняя Азия)	1	1249—1302
Шебелинское (Харьковская область)	20 21	1595—1693 1531—1610
Зарубежные месторождения в Юго-Восточной Азии:		
I	1	864—975
II	16	1182—1196
III	4	829—849
Зарубежное месторождение в Центральной Европе	2 3	3169—3457 3234—3465

\* Проницаемость подсчитана по кривым восстановления ности).

\*\* Данные получены Е. М. Минским [1959 г.].

Таблица 4.1

Интервал, опробованный при испыта- нии, м	Продукция скважин	Проницаемость по данным испытания скважин, мД	Проницаемость по методу шлифов, мД	Число исследованных шлифов
1884—1881	Газ	0,55	0,13	25
1647—1696	„	1,0	0,46	45
389—461	Нефть	7,7	10,9	56
412—461	„	7,8	6,6	97
386—463	„	5,6	9,3	91
2543—2555	Вода	1,7 *	1,3	15
		0,7		
—	Нефть	0,9	3,4	23
—	„	1,5		
—	„	3,2	3,7	69
1250—1277	„	0,74	1,5	7
1600—1672	Газ	1,2 **	2,7	53
1522—1606	„	4,5 **	3,7	33
866—868	„	3,8	1,5	6
1184—1187	„	0,4	0,6	6
847—857	„	3,1	7,7	20
3134—3500	Нефть	4,2	4,2	108
3235—3435	„	3,5	4,8	113

давления (остальные значения — по коэффициенту продуктив-

в разрезе скважины можно выделить интервалы (горизонты, пласти) с повышенной трещинной проницаемостью.

Если первая задача заключается в приближенном количественном определении трещинной проницаемости, то во второй задаче нас интересует чисто качественная (относительная) характеристика разреза. Для получения такой характеристики следует исследовать шлифы из образцов, равномерно отобранных со всего разреза, по крайней мере через каждые 3—5 м. Полученные значения трещинной проницаемости используются для построения графика, одной из осей которого служит глубина взятия образца, а другой — трещинная проницаемость, вычисленная по данному шлифу. Пользуясь этим графиком, можно выделить в разрезе зоны, характеризующиеся повышенными отдельными значениями трещинной проницаемости, каждое из которых, как уже об этом говорилось, является случайным. Решение подобных задач должно содействовать более рациональному выбору интервалов для опробования скважин, проведения гидравлического разрыва пласта и ряда других операций.

В течение нескольких лет получаемые результаты определения трещинной проницаемости по шлифам сопоставлялись с результатами гидродинамического исследования скважин. Это сопоставление проводилось в целях установления возможности практического применения метода шлифов в различных геологических условиях, т. е. для установления степени соответствия предложенной трещинно-капиллярной структурной модели реальным трещиноватым горным породам. Очевидно, сравнительный анализ результатов двух вышеуказанных методов может быть осуществлен только в том случае, если по скважине поднят керн из продуктивного горизонта, давшего устойчивый приток нефти или газа. Подобное сопоставление проведено по 16 горизонтам нефтяных и газовых скважин, пробуренных в различных районах Советского Союза и за рубежом. Полученные при подобном сопоставлении данные представлены в табл. 4.1. Так как подавляющее большинство продуктивных горизонтов, представленных в табл. 4.1, сложено карбонатными породами, для расчетов использовалась формула, соответствующая двум взаимно перпендикулярным и вертикальным системам трещин с равными раскрытиями и густотой, что характерно именно для этого типа отложений.

Как видно из табл. 4.1, значения проницаемости, определенные методом шлифов и путем гидродинамического исследования скважин, вполне сопоставимы друг с другом, что показывает возможность широкого практического применения описанной выше методики. Таким образом, можно заключить, что рассматриваемая структурная трещинно-капиллярная модель трещиноватой горной породы может быть с успехом использована для практической оценки емкостных и фильтрационных свойств трещинных коллекtorов нефти и газа.

### Исследование процессов пьезопроводности в трещиновато-пористых горных породах на структурных моделях сред с двойной пористостью

В классической подземной гидромеханике используется представление о пористой горной породе как о среде, состоящей из твердых непроницаемых зерен и межзернового пространства — сети взаимосвязанных пор, по которым осуществляется движение жидкости. Процессы фильтрации в подобных породах описываются в рамках механики сплошных сред посредством введения осредненных параметров: проницаемости  $k$ , упругоемкости  $\beta$ , пьезопроводности  $\kappa$  и т. д. Под характеристиками движения — давлением  $p$  и расходом  $q$  — также понимаются величины, осредненные в окрестности рассматриваемой точки по объему, содержащему достаточно большое число элементов — пор и зерен.

В предположении однородности и слабой сжимаемости жидкости и породы, безынерционности движения и при некоторых других оговорках уравнение упругого режима фильтрации в подобных средах записывается в виде

$$\frac{k}{\mu} \Delta p - \beta \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad (5.1)$$

где  $\Delta$  — лапласиан;  $t$  — время;  $\mu$  — вязкость жидкости.

Вместе с тем многие из реально существующих горных пород рассечены сетью трещин, по своей геометрии и фильтрационным параметрам существенно отличающихся от межзернового порового пространства. Такие породы называют трещиновато-пористыми, а если межзерновая пористость пренебрежимо мала по сравнению с удельной емкостью трещин, то — трещиноватыми или чисто трещиноватыми. Последние, так же как и чисто пористые породы, можно рассматривать как гомогенную среду, процесс упругого режима фильтрации в которой описывается уравнением пьезопроводности вида (5.1) с той лишь разницей, что масштаб осреднения входящих в него величин будет иным: роль зерен здесь играют блоки породы, разделенные трещинами.

Вместе с тем для трещиновато-пористых пластов существуют специфические особенности нестационарных процессов фильтрации, не укладывающиеся в рамки теории для гомогенных сред и требующие ее обобщения с учетом факта гетерогенности. Поскольку попытки детального описания процессов перераспределения давления в пористых блоках и трещинах бесперспективны

уже из-за сложности реальной системы трещиноватости в недрах, встал вопрос о создании моделей гетерогенных сред и протекающих в них процессов фильтрации, о методах и принципах моделирования.

В работе Л. И. Рубинштейна [24] для аналогичных процессов теплопроводности в многокомпонентных средах был предложен следующий метод. Совокупность элементов каждого компонента рассматривается как отдельная гомогенная среда, для которой записывается уравнение вида (5.1), но с дополнительным третьим членом, отвечающим обменному потоку между «составляющими» средами.

Вообще говоря, замена множества элементов непрерывной средой представляется физически оправданной лишь при определенной связности элементов данного множества. Например, для гипотетической гетерогенной среды со строением по схеме шахматной доски, а также для многокомпонентных сред такой подход выглядит искусственным приемом и является по меньшей мере спорным. Напротив, характер структуры трещиновато-пористой породы делает представление ее в виде двух составляющих сред вполне естественным.

Если говорить об общих требованиях, предъявляемых к модели, то одним из основных является ее простота. На данном этапе моделирования цель состоит не в том, чтобы записывать систему уравнений, учитывающую во всей полноте современные феноменологические представления о процессе, а в том, чтобы одновременно указать математические методы ее изучения, удобные для решения, анализа получаемых результатов, физических интерпретаций и т. п.

### 5.1. Феноменологические модели пьезопроводности в среде с двойной пористостью

В настоящее время существуют две феноменологические модели упругого режима фильтрации однородной жидкости в трещиновато-пористых породах. Согласно одной из них, предложенной в 1960 г. Г. И. Баренблаттом и Ю. П. Желтовым и часто именуемой моделью вложенных сред, уравнения пьезопроводности записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{k_1}{\mu} \Delta p_1 - \beta_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} - q &= 0; \\ \frac{k_2}{\mu} \Delta p_2 - \beta_2 \frac{\partial p_2}{\partial t} + q &= 0, \end{aligned} \tag{5.2}$$

где индексами «1» и «2» обозначены соответственно параметры трещиноватой и пористой сред.

В предположении квазистационарности режима обмена жидкостью между средами обменный поток  $q$  принимается пропорцио-

нальным разности осредненных в окрестности рассматриваемой точки давлений:

$$q = a(p_1 - p_2). \quad (5.3)$$

Система (5.2), (5.3), полученная в работе [24] применительно к процессам теплопроводности, является симметричной относительно обеих сред и при равенстве их фильтрационных параметров ( $k_1 = k_2$ ,  $\beta_1 = \beta_2$ ) переходит, как это и требуется по физическому смыслу, в уравнение вида (5.1) для гомогенной среды. Специфические свойства гетерогенности, напротив, будут проявляться в случае качественного отличия параметров:

$$k_1 \gg k_2, \quad \beta_1 \ll \beta_2. \quad (5.4)$$

Условия (5.4) к тому же согласуются с современными представлениями о наиболее распространенном типе трещиновато-пористых пород, для которых проводящие свойства определяются сетью трещин, а емкостные — межзерновым пространством. При этих условиях исходная система за счет пренебрежения соответствующими членами уравнений существенно упрощается:

$$\begin{aligned} \frac{k_1}{\mu} \Delta p_1 - a(p_1 - p_2) &= 0; \\ \beta_2 \frac{\partial p_2}{\partial t} - a(p_1 - p_2) &= 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

и может быть сведена к двум автономным уравнениям вида

$$\Delta p_i - \frac{1}{\kappa^*} \frac{\partial p_i}{\partial t} + \tau^* \frac{\partial \Delta p_i}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (5.6)$$

где коэффициент эффективной пьезопроводности  $\kappa^*$  и параметр  $\tau^*$  определяются формулами:

$$\kappa^* = \frac{k_1}{\mu \beta_2}; \quad \tau^* = \frac{\beta_2}{a}. \quad (5.7)$$

По соображениям теории размерностей при условиях (5.4) удается получить выражение коэффициента  $\alpha$ , а также  $\tau^*$  через фильтрационные параметры среды:

$$a = \frac{\sigma^2 k_2}{c \mu}; \quad \tau^* = \frac{c}{\kappa_2 \sigma^2}, \quad (5.8)$$

где  $\sigma$  — удельная поверхность трещин;  $c$  — некоторый безразмерный множитель, учитывающий конфигурацию пористых блоков.

Уравнения (5.6) являются основными для рассматриваемой модели. Совпадение формы записи для обеих составляющих сред не ведет к тождественному равенству давлений  $p_1$  и  $p_2$ , поскольку предельный переход от системы (5.2), (5.3) к системе (5.5) обуславливает для последней специфику постановки краевых задач и некоторых свойств их решений. Так, начальные распределения давлений  $p_1$  и  $p_2$  уже не могут задаваться независимо, а должны

удовлетворять определенным соотношениям. Скачки порового давления  $p_2$  не исчезают мгновенно, как в случае уравнения (5.1) для гомогенной среды, а убывают по экспоненциальному закону [2].

Отличительной особенностью второй модели, предложенной в 1965 г. И. А. Волковым и получившей наименование «модели с типовым блоком», является учет реализации обменного потока между порами и трещинами на поверхности пористых блоков. При этом уравнение пьезопроводности для трещиноватой среды имеет совпадающий с предыдущей моделью вид:

$$\frac{k_1}{\mu} \Delta p_1(M, t) - \beta_1 \frac{\partial p_1(M, t)}{\partial t} - q(M, t) = 0, \quad (5.9)$$

где  $M$  — точка физического пространства с координатами  $x, y, z$ .

Уравнение же фильтрации в пористой среде записывается в двучленном виде и во «внутренних» координатах  $M(\zeta, \xi, \eta)$  блоков:

$$\frac{k_2}{\mu} \Delta_M p_2(M, t, M) - \beta_2 \frac{\partial p_2(M, t, M)}{\partial t} = 0, \quad (5.10)$$

где координаты  $x, y, z$  служат лишь параметрами.

Обменный поток жидкости  $q$  находится из условия равенства давлений в трещинах и порах:

$$p_2(S, t, M) = p_1(M, t) \quad (5.11)$$

на поверхности  $S$  типового блока

$$q = -\frac{1}{V} \int_S \frac{k_2}{\mu} \frac{\partial p_2}{\partial n} \Big|_S dS, \quad (5.12)$$

где  $V$  — объем блока;  $n$  — внутренняя нормаль к его поверхности; конфигурация типового блока может быть задана, вообще говоря, произвольно.

Система (5.9) — (5.12) может быть существенно упрощена, если первая краевая задача (5.10), (5.11) допускает автономное решение. В этом случае определение по формуле (5.12) зависимости  $q = f(p_1)$  с последующей ее подстановкой в уравнение (5.9) приводит к уравнению пьезопроводности относительно одного неизвестного  $p_1$ .

Рассмотрим вначале процесс фильтрации при сугубо нестационарном режиме обмена жидкостью между средами, когда свойства гетерогенности среды должны проявляться наиболее отчетливо. Пусть начальное распределение давления — нулевое, а коэффициенты пьезопроводности составляющих сред отвечают соотношению

$$\varkappa_2 \ll \varkappa_1, \quad (5.13)$$

согласующемуся с условиями (5.4).

Тогда, очевидно, процесс распространения возмущения от границы области по системе трещин будет опережать тот же процесс в пористой среде с малым значением коэффициента пьезо-

проводности и в начальные моменты времени влиянием ограниченности блоков можно пренебречь. В этих условиях решение краевой задачи (5.10), (5.11) приводит, как легко убедиться, к следующему выражению для нестационарного потока:

$$q = \sigma \sqrt{\chi_2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{p_1(\tau) d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}. \quad (5.14)$$

Физический параметр

$$\chi_2 = \beta_2 k_2 / \mu, \quad (5.15)$$

не имеющий специального наименования, будет часто использоваться в дальнейшем изложении.

Подстановка выражения (5.14) в формулу (5.9) дает уравнение пьезопроводности для трещиноватой среды:

$$\Delta p_1 - \frac{1}{\kappa_1} \frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{1}{\kappa^* \sqrt{\theta^*}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{p_1(\tau) d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} = 0, \quad (5.16)$$

где введены согласующиеся с формулами (5.7) и (5.8) обозначения

$$\kappa^* = \frac{k_1}{\mu \beta_2} \quad \text{и} \quad \theta^* = \frac{1}{\kappa_2 \sigma^2}. \quad (5.17)$$

Из системы (5.9)–(5.12) может быть получено аналогичное (5.16) уравнение и для произвольных значений времени, однако в этом случае приходится прибегать к условной схематизации фильтрационного потока в пористых блоках.

Если считать, например, поток плоскопараллельным, когда на единицу поверхности трещин приходится цилиндрический столбик пористой породы высотой  $1/\sigma$ , пьезоизолированный со всех сторон, кроме поверхности контакта с трещиной

$$p_2(0, t) = p_1(t), \frac{\partial p_2}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1/\sigma} = 0, \quad (5.18)$$

то обменный поток определится из решения задачи (5.10), (5.18):

$$q = \sigma^2 \frac{k_2}{\mu} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t p_1(\tau) \vartheta_2[0, \kappa_2 \sigma^2(t-\tau)] d\tau, \quad (5.19)$$

где  $\vartheta_2$  — стандартное обозначение второй тэта-функции Якоби:

$$\vartheta_2(u, v) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\pi^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 v} \cos \pi(2n+1)u. \quad (5.20)$$

Отметим, что то же самое выражение (5.19) получается и при эквивалентных (5.18) условиях:

$$p_2(1/\sigma, t) = p_2(-1/\sigma, t) = p_1(t). \quad (5.21)$$

Подстановка формулы (5.19) в выражение (5.9) приводит к уравнению

$$\Delta p_1 - \frac{1}{\kappa_1} \frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{1}{\kappa^* \theta^*} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t p_1(\tau) \vartheta_2 \left(0, \frac{t-\tau}{\theta^*}\right) d\tau = 0. \quad (5.22)$$

Вместо линейной схемы фильтрационного потока в пористых блоках в равной мере, конечно, можно было бы принять любую другую, отвечающую краевой задаче (5.10), (5.11) для типового блока той или иной конфигурации либо даже для типового набора блоков. При этом для возможности автономного решения указанной задачи используется условие равенства давления  $p_1$  вдоль поверхности блоков типа (5.21).

Подобное допущение на первый взгляд кажется вполне оправданным, поскольку под  $p_1$  в формуле (5.9) понимается давление в трещиноватой среде, осредненное в окрестности рассматриваемой точки  $M$ , содержащей достаточно большое число блоков. Однако оно не согласуется с физически очевидным требованием

$$q = 0 \quad \text{при } k_1 = k_2, \beta_1 = \beta_2, \quad (5.23)$$

что говорит о сугубо условном характере схематизации потока и ограничивает диапазон применимости модели по меньшей мере неравенствами (5.4).

Если по аналогии с предыдущей моделью ограничиться рассмотрением тех трещиновато-пористых сред, фильтрационные параметры которых отвечают соотношениям (5.4), и пренебречь емкостными членами уравнений (5.16) и (5.22), то получим наиболее простой для данной модели вид уравнений пьезопроводности в трещиноватой среде для начальных и произвольных значений времени соответственно:

$$\Delta p_1 - \frac{1}{\kappa^* \sqrt{\theta^*}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{p_1(\tau) d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} = 0; \quad (5.24)$$

$$\Delta p_1 - \frac{1}{\kappa^* \theta^*} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t p_1(\tau) \vartheta_2 \left(0, \frac{t-\tau}{\theta^*}\right) d\tau = 0. \quad (5.25)$$

По найденной функции давления в трещиноватой среде решением задачи (5.10), (5.11) может быть определено и поровое давление в блоках. При этом постановка задач для любого из приведенных уравнений, а также свойства их решений не обладают спецификой предыдущей модели: скачки давлений  $p_1$  и  $p_2$  исчезают мгновенно. Данное утверждение [Волков И. А., 1967 г.] является вполне очевидным, если принять во внимание структуру гипотетической гетерогенной среды, строго отвечающей рассматриваемой модели. В простейшем одномерном случае это пьезопроводный пористый стержень с фильтрационными параметрами трещиноватой среды и гидродинамически связанный с ним тонкий

пласт, обладающий параметрами пористой среды, но не проводящий в направлении, перпендикулярном к стержню.

Отличие схем для уравнений (5.13), (5.22), (5.24) и (5.25) состоит лишь в том, ограничена протяженность пласта в поперечном направлении или же он бесконечен, учитывается собственная упругоемкость основного стержня или нет.

Рассмотренные феноменологические модели в той или иной модификации до последнего времени служили основой исследований процессов упругого режима фильтрации однородной жидкости в трещиновато-пористых породах. Более того, заложенные в них принципы моделирования с успехом применены и для изучения ряда других процессов массопереноса в гетерогенных средах: двухфазной фильтрации [2], конвективной диффузии [Кутляров В.С., 1967 г.], фильтрационно-диффузионного переноса и конвективного теплопереноса (раздел 5.3.2). Близкие по постановке задачи используются и при исследовании фильтрации в слоистых средах [21].

Вместе с тем следует признать, что обе модели, построенные на базе априорных феноменологических гипотез относительно свойств самого процесса, не являются совершенными. Для первой из них, например, замкнутость системы уравнений (5.2) достигается ценой постулирования зависимости (5.3) для обменного потока. При этом модель остается незамкнутой в физическом смысле: входящий в зависимость (5.3) коэффициент  $\alpha$  определен по формуле (5.8) лишь с точностью до постоянного множителя, а его численное значение в каждом конкретном случае подлежит определению на экспериментальной основе.

Несовершенство модели с типовым блоком обусловлено прежде всего гипотезой о равенстве давления по всей поверхности отдельно взятого пористого блока, что заведомо неприемлемо при совпадении или близости значений фильтрационных параметров составляющих сред. Диапазон применимости обеих моделей, по существу, ограничен неравенствами (5.4), к тому же сугубо приближенно.

Перечень спорных положений и слабых сторон моделей мог бы быть значительно расширен. Некоторые из них, как будет показано в следующем разделе, носят принципиальный характер и не могут быть устранены в рамках рассмотренных феноменологических моделей.

## 5.2. Моделирование процессов пьезопроводности на основе точных решений для модели среды с двойной пористостью

Несовершенство феноменологических моделей пьезопроводности в среде с двойной пористостью предопределило интерес к разработке такой структурной модели, которая исключала бы необходимость принятия априорных феноменологических гипотез относительно характерных свойств процесса пьезопроводности в гетерогенной среде, а также ограничений на соотношения фильтра-

ционных параметров составляющих сред. Этим требованиям во многом отвечает предлагаемая ниже модель бикомпонентной среды.

### 5.2.1. Бинарная модель среды. Сравнение с феноменологическими моделями

Рассмотрим гипотетическую среду — систему двух пористых стержней 1 и 2 (или тонких труб, заполненных гомогенными пористыми средами), имеющих разные фильтрационные свойства и пересекающихся в равноотстоящих узлах (рис. 5.1) [Волков И. А., 1978 г.]. Если положить, что процесс пьезопроводности в каждом из стержней подчиняется уравнению вида (5.1), то нетрудно убедиться, что данная система обладает основными свойствами трещиновато-пористой среды. Действительно, возмущение давления распространяется по двум средам с разными фильтрационными характеристиками, а локальная согласованность давлений в средах обеспечивается наличием узлов, имитирующих поверхность блоков. Число узловых точек на единице длины стержней моделирует при этом плотность трещиноватости породы.

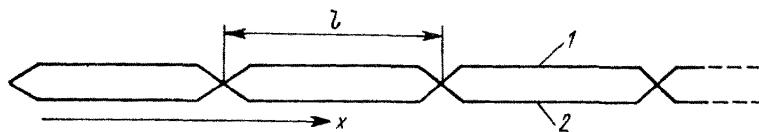


Рис. 5.1. Схема бинарной модели с дискретными узлами.

Определенный схематизм структуры модели есть не что иное, как сознательная абстракция. Это — традиционный прием в науке: замена сложной ситуации более простой, которая содержит основные свойства исходной, но свободна от лишнего балласта деталей. Упрощенная модель облегчает поиски решений, их анализ, интерпретацию и обсуждение получаемых результатов.

Задача пьезопроводности для данной модели записывается в виде

$$\frac{\partial^2 p_i}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa_i} \frac{\partial p_i}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, 2);$$

$$t > 0, \quad x \neq nl \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \quad (5.26)$$

$$p_i(nl, t) = P_n(t), \quad \frac{k_1}{\mu} \left[ \frac{\partial p_1}{\partial x} \right]_{x=nl} + \frac{k_2}{\mu} \left[ \frac{\partial p_2}{\partial x} \right]_{x=nl} = 0.$$

В последнем соотношении, представляющем собой условие баланса потоков в узловых точках, квадратными скобками обозначен скачок заключенной в них функции:

$$\left[ \frac{\partial p_i}{\partial x} \right]_{x=nl} = \frac{\partial p_i}{\partial x} \Big|_{x=nl+0} - \frac{\partial p_i}{\partial x} \Big|_{x=nl-0}. \quad (5.27)$$

Рис. 5.2. Схема полубесконечного трещиновато-пористого пласта, рассеченного двумя ортогональными системами трещин, (а) и сетка, составленная двумя системами тонких пористых стержней, (б).

К системе (5.26) необходимо, конечно, присоединить начальные и граничные условия, например,

$$p_i(x, 0) = 0, \quad p_i(0, t) = P_0, \quad p_i(\infty, t) = 0. \quad (5.28)$$

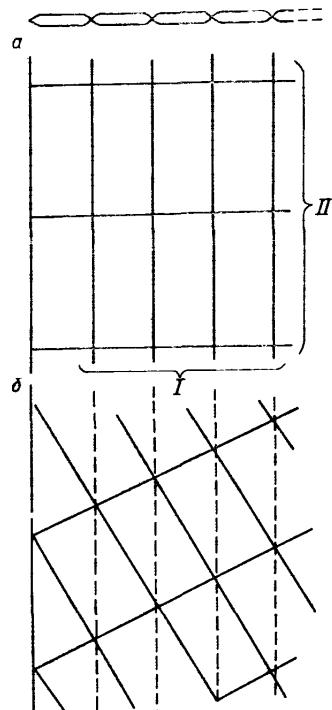
Таким образом, постановка задачи для предложенной бинарной модели не включает в себя каких-либо предварительных условий относительно режима процесса либо ограничений, накладываемых на параметры среды.

Отметим, что задаче (5.26)–(5.28) можно придать менее строгую, но непосредственно относящуюся к трещиновато-пористой среде интерпретацию. Рассмотрим неустановившуюся фильтрацию в полубесконечном пористом пласте, рассеченном двумя ортогональными системами трещин (рис. 5.2, а). Пусть система I имеет густоту, существенно превосходящую густоту трещин системы II. Тогда пористые блоки имеют форму вытянутых прямоугольников. Пренебрежение обменным потоком с меньших сторон прямоугольников и градиентом давления вдоль больших, параллельных границ пласта, приводит к задаче (5.26)–(5.28). Соответствие процессов в обеих средах уравнениям вида (5.1), а также выполнение условий (5.28) подразумевается.

На рис. 5.2, б изображена сетка, составленная двумя семействами тонких пористых стержней. Нетрудно убедиться, что при надлежащем выборе углов наклона этих стержней и приписываемых им фильтрационных параметров задача пьезопроводности для данной сетки совпадает с задачей (5.26)–(5.28). А так как рис. 5.2, б может истолковываться как схема трещиноватости, то приходим к выводу о том, что бинарная модель и эквивалентная ей сеточная система могут одновременно рассматриваться как модели трещиновато-пористой и чисто трещиноватой сред.

Решения системы уравнений (5.26) будут получены в последующих разделах, здесь приведены лишь те результаты, которые удается получить непосредственно из системы с помощью преобразования Лапласа:

$$\bar{F}(x, \lambda) = \int_0^{\infty} F(x, t) e^{-\lambda t} dt \quad (5.29)$$



с параметром  $\lambda$ . Задача (5.26) — (5.28) в изображениях принимает следующий вид:

$$\frac{d^2\bar{p}_i}{dx^2} - \frac{\lambda}{\kappa_i} \bar{p}_i = 0 \quad (i = 1, 2);$$

$$\bar{p}_i(nl, \lambda) = \bar{P}_n; \sum_{i=1,2} k_i \left[ \frac{d\bar{p}_i}{dx} \right]_{x=nl} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots); \quad (5.30)$$

$$\bar{p}_i(0, \lambda) = \bar{P}_0; \quad \bar{p}_i(\infty, \lambda) = 0$$

и может быть сведена к отысканию функций давления в узловых точках. Решая первую краевую задачу для отдельного звена и подставляя результат в условие баланса потоков, получаем

$$\sum_{i=1,2} \frac{\sqrt{\lambda \kappa_i}}{\operatorname{sh} \Lambda_i} (\bar{P}_{n-1} - 2\bar{P}_n \operatorname{ch} \Lambda_i + \bar{P}_{n+1}) = 0; \quad (5.31)$$

$$\chi_i = \frac{\beta_i k_i}{\mu}; \quad \Lambda_i = \sqrt{\frac{\lambda}{\kappa_i}} l.$$

Элементарными алгебраическими преобразованиями уравнение (5.31) приводится к виду

$$\bar{P}_{n-1} + \bar{P}_{n+1} = 2R\bar{P}_n; \quad R = \frac{\sqrt{\chi_1} \operatorname{ch} \Lambda_1 \operatorname{sh} \Lambda_2 + \sqrt{\chi_2} \operatorname{ch} \Lambda_2 \operatorname{sh} \Lambda_1}{\sqrt{\chi_1} \operatorname{sh} \Lambda_2 + \sqrt{\chi_2} \operatorname{sh} \Lambda_1} \quad (5.32)$$

и при граничных условиях (5.28) имеет решением функцию

$$\bar{P}_n = \bar{P}_0 (R - \sqrt{R^2 - 1})^n, \quad (5.33)$$

в простейшем случае  $[\kappa_1 = \kappa_2 \quad (\Lambda_1 = \Lambda_2)]$  переходящую в дискретную разновидность известного изображения

$$\bar{P}_n = \bar{P}_0 e^{-\sqrt{\lambda/\kappa} nl}$$

для гомогенного полуограниченного стержня.

Некоторые свойства исследуемого процесса удается установить, минуя нахождение оригинала по изображению (5.33). Отметим, что выражение (5.31) может быть также приведено к любому из двух следующих видов:

$$\frac{\sqrt{\lambda \kappa_1}}{\operatorname{sh} \Lambda_1} (\bar{P}_{n-1} - 2\bar{P}_n \operatorname{ch} \Lambda_1 + \bar{P}_{n+1}) -$$

$$- 2\sqrt{\lambda} \bar{P}_n \frac{\operatorname{ch} \Lambda_2 - \operatorname{ch} \Lambda_1}{\chi_1^{-1/2} \operatorname{sh} \Lambda_1 + \chi_2^{-1/2} \operatorname{sh} \Lambda_2} = 0; \quad (5.34)$$

$$\frac{\sqrt{\lambda \kappa_2}}{\operatorname{sh} \Lambda_2} (\bar{P}_{n-1} - 2\bar{P}_n \operatorname{ch} \Lambda_2 + \bar{P}_{n+1}) +$$

$$+ 2\sqrt{\lambda} \bar{P}_n \frac{\operatorname{ch} \Lambda_2 - \operatorname{ch} \Lambda_1}{\chi_1^{-1/2} \operatorname{sh} \Lambda_1 + \chi_2^{-1/2} \operatorname{sh} \Lambda_2} = 0.$$

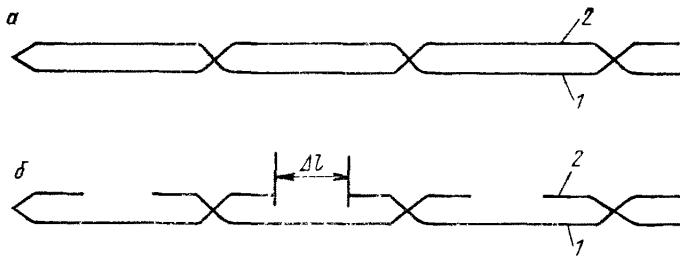


Рис. 5.3. Эквивалентные модели с неразорванными (а) и разорванными (б) участками одного из стержней.

Из сопоставления равенств (5.31) и (5.34) нетрудно дать физическое толкование членам в уравнениях (5.34). Так, первые из них, совпадающие с соответствующими слагаемыми суммы в выражении (5.31), отвечают процессу фильтрации в отдельно взятых средах при отсутствии их взаимного влияния. Вторые же члены, отличающиеся один от другого только знаком, соответствуют обменному потоку между средами. В этом отношении просматривается прямая аналогия с системой уравнений (5.2), однако для бинарной модели обменные члены определены точно. В частном случае, когда

$$\chi_1 = \chi_2 = \chi, \quad (5.35)$$

выражение для обменного потока в узловых точках упрощается:

$$\bar{q}_n = 2 \sqrt{\lambda \chi} \frac{\operatorname{ch} \Lambda_2 - \operatorname{ch} \Lambda_1}{\operatorname{sh} \Lambda_1 + \operatorname{sh} \Lambda_2} \bar{P}_n = 2 \sqrt{\lambda \chi} \operatorname{th} \frac{\Lambda_2 - \Lambda_1}{2} \bar{P}_n \quad (5.36)$$

и согласуется с формулой (5.19), полученной из решения задач (5.10), (5.18) или (5.10), (5.21).

Если без ограничения общности считать  $\chi_1 \geq \chi_2$  и переписать выражение (5.36) в виде

$$\bar{q}_n = 2 \sqrt{\lambda \chi_2} \bar{P}_n \operatorname{th} \left( \sqrt{\frac{\lambda}{\chi_2}} \frac{l - \Delta l}{2} \right), \quad \Delta l = l \sqrt{\frac{\chi_2}{\chi_1}}, \quad (5.37)$$

то приходим к выводу о совпадении значений давления в узловых точках систем, изображенных на рис. 5.3. Из равенства давлений в узлах, в свою очередь, следует идентичность профилей давления по стержню 1, моделирующему (в силу принятого условия  $\chi_1 \geq \chi_2$ ) трещиноватую среду. Таким образом, интерпретируя отрезки стержня 2 как пористые блоки с учетом аналогии, приведенной в начале раздела, приходим к следующему интересному, несмотря на его частный характер, результату: изоляция (например, цементация) центральных  $\Delta l$  частей блоков на процессе пьезопроводности в трещиноватой среде не отражается.

Поскольку для данной модели процесс фильтрации удается описать точно, а при условии (5.35) даже получить конкретную количественную интерпретацию обменного потока, появляется воз-

можность оценить степень справедливости рассмотренных ранее феноменологических моделей. С позиции модели вложенных сред, применимость или неприменимость которой для конкретных гетерогенных сред не оговорена сколь-либо строго особенностями их структуры, процесс пьезопроводности для бинарной модели должен отвечать системе (5.2), (5.3), так как выдвинутое ранее требование связанности элементов каждого компонента в данном случае удовлетворяется. В то же время полученные для бинарной модели точные результаты позволяют сопоставить величины емкостных — вторых и обменных — третьих членов уравнения (5.2), понимаемых, как и функции давления, в осредненном смысле. Напомним, что  $p_1$  и  $p_2$  в уравнении (5.2) интерпретируются как значения давлений в трещинах и в порах, осредненные в содержащей достаточно большое число пористых блоков окрестности рассматриваемой точки.

Выделим элемент бистержневой системы, состоящий из двух звеньев, и условимся соотносить емкостным и обменным членам в уравнении (5.2) значения изменения упругосодержания (аналог теплосодержания) стержней в пределах элемента и удвоенное значение обменного потока в его центральной точке. Удвоение обусловлено тем, что каждое звено является общим для двух элементов. Таким образом, в случае (5.35) согласно выражению (5.36) записываем условие соответствия

$$\bar{q} \rightarrow 2\bar{q}_n = 4\sqrt{\lambda\chi} \bar{P}_n \operatorname{th} \frac{\Lambda_2 - \Lambda_1}{2} \quad (5.38)$$

и, кроме того,

$$\overline{\beta_i \frac{\partial p_i}{\partial t}} \rightarrow (\bar{P}_{n-1} + 2\bar{P}_n + \bar{P}_{n+1}) \sqrt{\lambda\chi} \operatorname{th} \frac{\Lambda_i}{2} \quad (i = 1, 2), \quad (5.39)$$

так как изменение упругосодержания отдельных отрезков стержней равно сумме потоков на его концах.

С помощью формулы (5.33) соотношения (5.39) могут быть приведены к виду

$$\overline{\beta_1 \frac{\partial p_1}{\partial t}} - \overline{\beta_2 \frac{\partial p_2}{\partial t}} \rightarrow 4 \sqrt{\lambda\chi} \bar{P}_n \operatorname{th} \frac{\Lambda_2 - \Lambda_1}{2}, \quad (5.40)$$

и из-за совпадения правых частей в выражениях (5.38) и (5.40) имеем

$$q = \beta_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} - \beta_2 \frac{\partial p_2}{\partial t}, \quad (5.41)$$

причем последнее равенство для членов в системе (5.2) выполняется с точностью до принятых пропорциональностей (5.38) и (5.39), правые части которых подсчитаны для отдельного элемента системы. Можно показать, что при осреднении по большому числу звеньев точность соотношений типа (5.38) и (5.40), а поэтому и равенства (5.41) растет.

Таким образом, замена процедуры начального осреднения на осреднение в конце расчета приводит к отличающейся от (5.3) зависимости обменного потока от давления в составляющих средах. Замена выражения (5.3) на (5.41) в уравнениях (5.2) приводит к системе

$$\Delta p_1 - \frac{1}{\chi^*} \frac{\partial p_2}{\partial t} = 0; \quad \Delta p_2 - \frac{1}{\chi^*} \frac{\partial p_1}{\partial t} = 0, \quad (5.42)$$

а после сложения и вычитания уравнений (5.42) получим

$$\begin{aligned} \Delta(p_1 + p_2) - \frac{1}{\chi^*} \frac{\partial(p_1 + p_2)}{\partial t} &= 0; \\ \Delta(p_1 - p_2) + \frac{1}{\chi^*} \frac{\partial(p_1 - p_2)}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Нетрудно заметить, что при совпадении начальных и граничных условий для функций  $p_1$  и  $p_2$  система (5.43) отвечает тривиальный результат  $p_1 = p_2 = 0$ . Однако тождественное равенство давлений в обоих стержнях системы противоречит физическим представлениям, а потому предпринятая попытка модификации модели вложенных сред оказывается несостоительной и система уравнений (5.2), (5.41) не может рассматриваться как континуальный аналог системы (5.26).

Согласно второму феноменологическому методу, рассмотренному в модели с типовым блоком, процесс пьезопроводности для бинарной модели среды должен отвечать одномерному уравнению (5.22) при условии

$$\sigma = 2/l. \quad (5.44)$$

В данном случае не удалось установить каких-либо принципиальных расхождений с точными результатами для бинарной модели. Более того, из сопоставления структуры среды, строго соответствующей данному уравнению (раздел 5.1), со стержневой конструкцией, изображенной на рис. 5.3, б и представляющей собой фильтрационный эквивалент бинарной модели при условии (5.35), с очевидностью выявляется их сходство. Первая из них по существу является континуальным аналогом второй с точностью до разницы  $\Delta l$  в поперечных размерах, отраженной в формуле (5.37).

Интуитивно кажется, что с введением соответствующей поправки достигается высокая степень согласованности уравнения (5.22) с основной системой (5.26) при условии (5.35). И тем не менее существует другой, более точный метод континуализации системы (5.26), приводящий к тому же и к наиболее простому виду итогового уравнения.

Заметим, что в структуре бинарной модели уже заложена вполне определенная схема взаимного влияния процессов пьезопроводности в двух составляющих ее средах — через третью услов-

ную среду. Роль последней играет совокупность узловых точек модели, закон изменения давления в которых определяет распределение давления во всей системе в целом.

Таким образом, задачу моделирования процессов упругого режима фильтрации на базе бинарной модели естественнее всего свести к определению давления в названной условной среде с последующим поиском континуального аналога. Введем в рассмотрение функции

$$\bar{G}_n = - \sum_{i=1,2} \frac{k_i}{\mu} \frac{d\bar{p}_i}{dx} \Big|_{x=nl}; \quad \bar{S}_n = \sum_{r=n}^{\infty} (\bar{P}_r + \bar{P}_{r+1}), \quad (5.45)$$

связанные между собой соотношением

$$\bar{G}_n = \bar{S}_n \sum_{i=1,2} \sqrt{\lambda \chi_i} \operatorname{th} \frac{\Lambda_i}{2}. \quad (5.46)$$

С помощью равенства (5.33) функции  $\bar{G}_n$  и  $\bar{S}_n$  могут быть представлены в сходном виде:

$$\begin{aligned} \bar{G}_n &= \bar{P}_n \sqrt{\lambda} \times \\ &\times \sqrt{\left( \sqrt{\chi_1} \operatorname{cth} \frac{\Lambda_1}{2} + \sqrt{\chi_2} \operatorname{cth} \frac{\Lambda_2}{2} \right) \left( \sqrt{\chi_1} \operatorname{th} \frac{\Lambda_1}{2} + \sqrt{\chi_2} \operatorname{th} \frac{\Lambda_2}{2} \right)}; \\ \bar{S}_n &= \bar{P}_n \times \\ &\times \sqrt{\left( \sqrt{\chi_1} \operatorname{cth} \frac{\Lambda_1}{2} + \sqrt{\chi_2} \operatorname{cth} \frac{\Lambda_2}{2} \right) \left( \sqrt{\chi_1} \operatorname{th} \frac{\Lambda_1}{2} + \sqrt{\chi_2} \operatorname{th} \frac{\Lambda_2}{2} \right)^{-1}}, \end{aligned} \quad (5.47)$$

а при малых значениях параметров  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  с точностью до второго члена разложения в ряд по степеням  $\lambda$  допускают и сходную аппроксимацию:

$$\begin{aligned} \bar{G}_n &= \frac{k_1 + k_2}{\mu} \bar{P}_n \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{\varkappa \sqrt{\theta}} \operatorname{th} \sqrt{\theta \lambda} \right)^{1/2}; \\ \bar{S}_n &= \bar{P}_n \operatorname{cth} \left[ \frac{l}{2} \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{\varkappa \sqrt{\theta}} \operatorname{th} \sqrt{\theta \lambda} \right)^{1/2} \right], \end{aligned} \quad (5.48)$$

где

$$\varkappa = \frac{k_1 + k_2}{\mu (\beta_1 + \beta_2)}; \quad \theta = \left( \frac{l}{2} \right)^2 \frac{k_1 k_2}{\mu (k_1 + k_2) (\beta_1 + \beta_2)} \left( \frac{1}{\varkappa_1} - \frac{1}{\varkappa_2} \right)^2. \quad (5.49)$$

Используя представление  $\bar{S}_n$  в виде (5.45) и (5.48), находим, что

$$\bar{P}_n = \bar{P}_0 \exp \left[ - \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{\varkappa \sqrt{\theta}} \operatorname{th} \sqrt{\theta \lambda} \right)^{1/2} nl \right]. \quad (5.50)$$

При этом дискретно определенные функции  $\bar{P}_n$  и  $\bar{G}_n$  простой заменой  $nl$  на  $x$  допускают обобщение на функции непрерывного

аргумента  $\bar{P}(x, \lambda)$  и  $\bar{G}(x, \lambda)$ , связанные между собой законом Дарси:

$$\bar{G} = -\frac{k_1 + k_2}{\mu} \frac{d\bar{P}}{dx}. \quad (5.51)$$

Кроме того, функция  $\bar{P}$  является решением уравнения

$$\frac{d^2\bar{P}}{dx^2} - \frac{\sqrt{\lambda}}{\kappa\sqrt{\theta}} \bar{P} \operatorname{th} \sqrt{\lambda\theta} = 0,$$

или в оригиналах

$$\frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa\theta} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t P(x, \tau) \vartheta_2\left(0, \frac{t-\tau}{\theta}\right) d\tau = 0, \quad (5.52)$$

с точностью до коэффициентов совпадающего с усеченным вариантом (5.25) уравнения пьезопроводности (5.22) для модели с типовым блоком.

Подчеркнем, что в отличие от (5.25) уравнение (5.52) справедливо при произвольных соотношениях фильтрационных параметров составляющих сред и его двучленность не является следствием упрощений. При выполнении условий усечения (5.4) уравнения (5.22), (5.25) и (5.52) совпадают полностью, что непосредственно видно из сравнения формул (5.17) и (5.49) для коэффициентов.

По результатам раздела 5.1 уравнению (5.52) можно поставить в соответствие непрерывную среду определенной структуры, процесс пьезопроводности в которой будет, таким образом, континуально аналогичен закону изменения давления в условной среде — совокупности узловых точек бинарной модели. Немаловажным является и то обстоятельство, что при всей условности третьей среды и фиктивности ее континуального эквивалента градиент давления в последнем согласно закону (5.51) определяет истинный фильтрационный поток с точностью до аппроксимации.

Аппроксимирующие функции (5.48) не являются, конечно, единственными возможными. С той же точностью можно было бы, например, принять

$$\bar{G}_n = \frac{k_1 + k_2}{\mu} \bar{P}_n \left[ \frac{\lambda}{\kappa(1+\tau\lambda)} \right]^{1/2}; \quad \bar{S}_n = \bar{P}_n \operatorname{cth} \left\{ \frac{l}{2} \left[ \frac{\lambda}{\kappa(1+\tau\lambda)} \right]^{1/2} \right\};$$

$$\tau = \frac{\theta}{3}. \quad (5.53)$$

При этом аналогичная рассмотренной выше процедура введения функции  $\bar{P}(x, \lambda)$  непрерывного аргумента  $x$  ведет к уравнению

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial P}{\partial t} + \tau \frac{\partial^3 P}{\partial x^2 \partial t} = 0, \quad (5.54)$$

являющемуся одномерной разновидностью основного уравнения (5.6) для модели вложенных сред. Как и в предыдущем случае,

оно отличается от уравнения (5.6) тем, что получено для условной третьей среды, распределение давления в которой, т. е. решение уравнения (5.54), определяет граничные условия в задачах пьезопроводности для составляющих сред. (Сказанное вполне очевидно, если иметь в виду, что условная среда до континуализации представляла собой совокупность узловых точек бинарной модели.) При этом исчезает отмеченная для модели вложенных сред специфичность постановки и свойств решений краевых задач, истолкование которых трудно укладывалось в рамки физических представлений для процессов рассматриваемого типа.

Формулы (5.49) позволяют получить выражения для входящих в уравнение (5.54) в качестве коэффициентов  $\kappa$  и  $\tau$  через параметры составляющих сред:

$$\kappa = \frac{k_1 + k_2}{\mu (\beta_1 + \beta_2)}; \quad \tau = \frac{1}{3\sigma^2} \frac{k_1 k_2}{\mu (k_1 + k_2) (\beta_1 + \beta_2)} \left( \frac{1}{\kappa_2} - \frac{1}{\kappa_1} \right)^2; \\ \sigma = \frac{2}{l}, \quad (5.55)$$

что делает задачу физически замкнутой.

При выполнении условий (5.4) данные выражения согласуются с формулами (5.7) и (5.8), а уравнение (5.54) совпадает с уравнением (5.6) для трещиноватой среды.

Таким образом, уже первые результаты исследования процессов пьезопроводности в конкретной бикомпонентной среде, сохраняющей основные свойства структуры трещиновато-пористой горной породы, привели к пересмотру многих положений феноменологических модельных построений, существовавших в настоящее время и рассмотренных ранее. Уточнения (если не ревизии) требует даже вывод основных уравнений (5.6) и (5.25), поскольку исходные уравнения, из которых они получены, в тестовом примере оказались неудовлетворительными.

Следует, однако, отметить, что и для бинарной модели общность заключительных результатов данного раздела ограничена характерным масштабом времени протекания процесса, теми малыми значениями параметра  $\lambda$ , для которых использованные в анализе предельные представления (5.48) и (5.53) изображений (5.47) остаются достаточно точными. Это обстоятельство и определяет направление исследований, содержащихся в последующих разделах.

### 5.2.2. Сведение задач пьезопроводности к задачам волнового типа

Как уже отмечалось в начале этой главы, эффективность моделей во многом зависит от определенности математических средств, удобных для исследования. В случае отказа от априорных гипотез, упрощающих постановку задачи, и разработки модели на основе точных решений вопрос о математической базе выступает на передний план.

Особенности структуры бинарной модели, а отсюда и системы уравнений (5.26), предопределили и специфику методов их исследования. Несмотря на определенные результаты, полученные в предыдущем разделе, трудности при использовании операционного метода возникают уже при отыскании оригинала по изображению (5.33). Вместе с тем удачное направление поиска связано именно с анализом формул (5.32) и (5.33). Подобный путь привел к установлению взаимосвязей между процессами пьезопроводности и колебаний для систем с подобной внутренней структурой, а также между процессами колебаний и случайного блуждания. Это позволило, в частности, упростить задачу (5.26), получить принципиально новую трактовку ряда соотношений (в том числе уравнений блуждания и теплопроводности) и, в конечном счете, облегчило поиск, анализ и осмысливание полученных результатов.

Вернемся теперь к уравнению (5.32), которое в простейшем случае ( $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ ) принимает вид

$$\bar{P}_{n-1} + \bar{P}_{n+1} = 2\bar{P}_n \operatorname{ch} \Lambda; \quad \Lambda = \sqrt{\lambda/\chi} l, \quad (5.56)$$

отвечающий гомогенной среде, а его решением в оригиналах является функция

$$P_n = P_0 \operatorname{erfc} \frac{nl}{2\sqrt{\chi t}}; \quad \operatorname{erfc} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi. \quad (5.57)$$

Рассмотрим другой частный случай:

$$\Lambda_1 = 2\Lambda_2 \quad (\chi_1 = 4\chi_2); \quad \chi_1 = \chi_2 = \chi \quad (\beta_1 k_1 = \beta_2 k_2), \quad (5.58)$$

когда в уравнении (5.32)  $R = 2 \operatorname{ch} \Lambda_1 - 1$ , а само уравнение (5.32) может быть записано в согласованной с равенством (5.56) форме:

$$\bar{B}_n = 2\bar{P}_n \operatorname{ch} \Lambda_1; \quad \bar{B}_n = (\bar{P}_{n-1} + 2\bar{P}_n + \bar{P}_{n+1})/2. \quad (5.59)$$

Таким образом, если искать решение в виде ряда

$$P_n = \sum_{k=0}^{\infty} C(n, k) \operatorname{erfc} \frac{kl}{2\sqrt{\chi_1 t}}, \quad (5.60)$$

то, с одной стороны, из-за совпадения правых частей в уравнениях (5.56) и (5.59) должно быть

$$\begin{aligned} B_n(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} C(n, k) \left[ \operatorname{erfc} \frac{(k-1)l}{2\sqrt{\chi_1 t}} + \operatorname{erfc} \frac{(k+1)l}{2\sqrt{\chi_1 t}} \right] = \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} C(n, k+1) \operatorname{erfc} \frac{kl}{2\sqrt{\chi_1 t}} + \sum_{k=1}^{\infty} C(n, k-1) \operatorname{erfc} \frac{kl}{2\sqrt{\chi_1 t}}, \end{aligned} \quad (5.61)$$

а с другой —

$$B_n(t) = \frac{P_{n-1} + 2P_n + P_{n+1}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} C(n-1, k) + C(n, k) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} C(n+1, k) \right] \operatorname{erfc} \frac{kl}{2\sqrt{\kappa_1 t}}. \quad (5.62)$$

Приравнивая выражения (5.61) и (5.62), из сопоставления подобных членов для коэффициентов ряда (5.60) при  $n > 0$ ,  $k > 0$  получаем уравнение

$$C(n, k+1) + C(n, k-1) = \frac{1}{2} C(n-1, k) + \\ + C(n, k) + \frac{1}{2} C(n+1, k),$$

которое может быть записано в конечно-разностной форме:

$$\Delta_k^2 C(n, k) = \frac{1}{2} \Delta_n^2 C(n, k), \quad (5.63)$$

где  $\Delta_n^2$  и  $\Delta_k^2$  — стандартные обозначения вторых частных разностей:

$$\Delta_r^2 F(r, k) = F(r+1, k) - 2F(r, k) + F(r-1, k). \quad (5.64)$$

Таким образом, решение системы параболических уравнений (5.26) свелось к конечно-разностному аналогу волнового уравнения, отличному от уравнения тепло(пьезо)проводности как по математическому типу, так и по физической природе соответствующих процессов. Поиски обобщения этого результата привели вначале к доказательству [Волков И. А., 1976 г.] следующего предложения: решения уравнения тепло(пьезо)проводности

$$\Delta P(M, t) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial P(M, t)}{\partial t} = 0, \quad M = M(x, y, z) \quad (5.65)$$

и волнового уравнения

$$\Delta u(M, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(M, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (5.66)$$

для одинаковых областей при совпадающих начальных распределениях

$$P(M, 0) = u(M, 0) = \varphi(M), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(M, 0) = 0 \quad (5.67)$$

и граничных условиях, связанных равенством

$$P(s, t) = \int_0^{\infty} u(s, \xi) G(\xi, t) d\xi; \\ G(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^2 t}} e^{-\xi^2/(4a_0^2 t)}, \quad a_0^2 = \frac{\kappa}{v^2}, \quad (5.68)$$

где  $s$  — точка границы, удовлетворяют соотношению

$$P(M, t) = \int_0^\infty u(M, \xi) G(\xi, t) d\xi. \quad (5.69)$$

Применим к задаче (5.65), (5.67), (5.68) преобразование Лапласа (5.29):

$$\begin{aligned} \Delta \bar{P}(M, \lambda) - \frac{\lambda}{\kappa} \bar{P}(M, \lambda) + \frac{\varphi(M)}{\lambda} &= 0; \\ \bar{P}(s, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt{a_0^2 \lambda}} \bar{u}\left(s, \sqrt{\frac{\lambda}{a_0^2}}\right) \end{aligned} \quad (5.70)$$

и преобразуем задачу (5.70) к виду

$$\Delta \bar{\theta}(M, q) - \frac{q^2}{v^2} \bar{\theta}(M, q) + \frac{\varphi(M)}{q} = 0; \quad \bar{\theta}(s, q) = \bar{u}(s, q), \quad (5.71)$$

где

$$q = \sqrt{\frac{\lambda}{a_0^2}}; \quad \bar{\theta}(M, q) = \sqrt{\lambda a_0^2} \bar{P}(M, \lambda). \quad (5.72)$$

Сравнивая формулы (5.71) с преобразованным уравнением (5.66):

$$\Delta \bar{u}(M, \lambda) - \frac{\lambda^2}{v^2} \bar{u}(M, \lambda) + \frac{\varphi(M)}{\lambda} = 0, \quad (5.73)$$

с учетом выражений (5.72) найдем

$$\bar{P}(M, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{a_0^2 \lambda}} \bar{u}\left(M, \sqrt{\frac{\lambda}{a_0^2}}\right), \quad (5.74)$$

откуда по теореме Эфроса [14] следует соотношение (5.69).

Необходимо отметить, что фактически тот же результат, но иным образом и раньше, как любезно сообщил автору С. Н. Антонцев, был получен в работе Р. Хеша [1975 г.]. Вместе с тем доказательство с использованием теоремы Эфроса дает возможность дальнейших обобщений полученного результата. Можно, например, доказать аналогичную соотношению (5.69) зависимость для пары уравнений вида

$$\operatorname{div}\left(\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} u\right) - L_t u = 0; \quad (5.75)$$

$$\operatorname{div}\left(\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} v\right) - L_t^* v = 0,$$

если операторы по времени  $L_t$  и  $L_t^*$  в преобразованиях по Лапласу связаны равенством

$$\bar{L}^*(\lambda) = \bar{L}[q(\lambda)],$$

где  $q(\lambda)$  удовлетворяет требованиям теоремы Эфроса.

Так, подобная соотношению (5.69) зависимость будет верна для следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} A_1 \Delta p_1 - B_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} - q = 0; \\ A_2 \Delta p_2 - B_2 \frac{\partial p_2}{\partial t} + q = 0; \end{cases} \quad q = a(p_1 - p_2); \quad (5.76)$$

$$\begin{cases} A_1 \Delta u_1 - B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - g = 0; \\ A_2 \Delta u_2 - B_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + g = 0. \end{cases} \quad g = a(u_1 - u_2). \quad (5.77)$$

Первая система отвечает модели вложенных сред, вторая — волновому процессу в двух средах, между которыми действует упругая связь. При этом принятые в модели вложенных сред выражение для обменного потока оказывается равносильным (при параллельном рассмотрении процессов распространения колебаний в бикомпонентной среде сходной структуры) аппроксимации взаимодействия составляющих сред распределенной гуковской силой.

Совершенно аналогичное доказательство справедливости зависимости типа (5.69) может быть приведено и для следующих уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta p_1 - \frac{1}{\kappa^* \sqrt{\theta^*}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{p_1(\tau) d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} &= 0; \\ \Delta u - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} &= 0 \quad \left( a_0^2 = \frac{\kappa^{*2} \theta^*}{a^4} \right). \end{aligned} \quad (5.78)$$

Для первого, совпадающего с уравнением пьезопроводности (5.24), структура фильтрационной среды известна (раздел 5.1), так что по аналогии с предыдущим следует ожидать, что второе уравнение (5.78) описывает волновой процесс в механической системе сходного строения. Действительно, для безынерционной струны и прикрепленной к ней бесконечно протяженной тонкой мембрани, не обладающей упругими свойствами в направлении вдоль струны, нетрудно получить следующие уравнения распространения колебаний:

$$\begin{aligned} T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2T^* \frac{\partial u^*}{\partial y} \Big|_{y=0} &= 0; \\ T^* \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} &= \rho^* \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2}, \quad u^*|_{y=0} = u, \end{aligned} \quad (5.79)$$

где  $u$  и  $u^*$  — отклонения от положения равновесия струны и мембрани соответственно;  $x$  и  $y$  — геометрические координаты, отсчитываемые в направлениях вдоль и поперек струны;  $T$  — сила натяжения струны;  $T^*$  и  $\rho^*$  — погонные сила натяжения и плотность мембрани соответственно.

Решение второго уравнения (5.79) имеет вид

$$u^*(y, t, x) = u\left(t - \frac{y}{v^*}, x\right), \quad v^* = \sqrt{\frac{T^*}{\rho^*}},$$

а его подстановка в первое завершает вывод:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad a^2 = \frac{T}{2\sqrt{\rho^* T^*}}$$

и одновременно нестандартную волновую интерпретацию уравнения теплопроводности.

В плане взаимосвязи решений согласно соотношению (5.69) парными являются и следующие уравнения:

$$\Delta p_1(M, t) - \frac{1}{\kappa^* \theta^*} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t p_1(M, \tau) \vartheta_2\left(0, \frac{t-\tau}{\theta^*}\right) d\tau = 0; \quad (5.80)$$

$$\Delta [u(M, t) + u(M, t-T)] - \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} [u(M, t) - u(M, t-T)] = 0,$$

$$a_0^2 = \frac{T}{4\theta^*},$$

отвечающие процессам пьезопроводности и колебаний тех же систем, что и для уравнений (5.78), но ограниченных по оси  $y$ . В том же смысле уравнению (5.16) соответствует телеграфное уравнение

$$\Delta u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (5.81)$$

Можно показать [Волков И. А., 1976 г.], что для сеточных областей, разновидностью которых является рассматриваемая бинарная модель среды, волновой процесс играет параметрическую роль между процессами случайного блуждания и пьезо(тепло)проводности, а решение задачи (5.26), (5.28) может быть представлено в виде (5.60) или

$$P_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty U_n(\xi) e^{-\xi^2/(4\tau)} d\xi, \quad \tau = \frac{\kappa_1 t}{l}, \quad (5.82)$$

где кусочно-постоянная функция

$$U_n(\xi) = U(n, k), \quad k < \xi < k+1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (5.83)$$

связана с  $C(n, k)$  в ряду (5.60) равенствами:

$$U(n, k) = \sum_{r=0}^n C(r, k); \quad C(n, k) = U(n, k) - U(n, k+1). \quad (5.84)$$

При этом функции  $U(n, k)$  и  $C(n, k)$  находятся из уравнения

$$[E^{m+1} + (a_1 - a_2)E^{m-1} - (a_1 - a_2)E^{-m+1} - E^{-m-1}] U(n, k) -$$

$$- (a_1 E^m + a_2 E - a_2 E^{-1} - a_1 E^{-m}) [U(n+1, k) + U(n-1, k)] = 0, \quad (5.85)$$

в целях упрощения вида которого использован символ  $E$  оператора сдвига по аргументу  $k$ , т. е.  $E^s U(n, k) = U(n, k+s)$ , и принято, что отношение  $\sqrt{\kappa_1/\kappa_2} = m$  — число натурального ряда.

Вывод уравнения (5.85) проще всего осуществить из волнового аналога соотношения (5.32), для чего в последнем гиперболические функции следует представить через экспоненты и затем перейти к оригиналам с учетом теоремы запаздывания. Начальные и граничные условия для функции  $U(n, k)$  совпадают с условиями (5.28), а для  $C(n, k)$  — трансформируются по равенствам (5.84).

Рассмотрим теперь частные случаи уравнения (5.85).

1. Пусть  $m=1$ . Тогда с учетом равенства  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$  получим  $(E^2 - E^{-2}) U(n, k) = (E - E^{-1}) [U(n+1, k) + U(n-1, k)]$ ,

откуда после сокращения на  $(E - E^{-1})$  приходим к уравнению

$$U(n, k+1) + U(n, k-1) = U(n+1, k) + U(n-1, k). \quad (5.86)$$

При условиях  $U(n, k \leq 0) = 0$ ,  $U(0, k) = 1$  его решение имеет вид

$$U(n, k) = \begin{cases} 0 & \text{при } k < nM; \\ 1 & \text{при } k \geq nM \end{cases}$$

и отвечает функции

$$p(nl, t) = \operatorname{erfc} nl / (2 \sqrt{\pi t}), \quad (5.87)$$

согласующейся с решением задачи пьезопроводности в гомогенной среде.

Нетрудно убедиться, что уравнение (5.85) вырождается в (5.86) и при условиях  $\alpha_i = 1$ ,  $\alpha_j = 0$  ( $k_j = 0$ ). Таким образом, получен естественный, в контрольном плане правильный результат: при равенстве коэффициентов пьезопроводности составляющих сред, а также при нулевой проницаемости одной из них бикомпонентная среда свойств гетерогенности не проявляет.

2. Пусть  $m = \infty$ . Данное условие соответствует пренебрежению влиянием ограниченности пористых блоков, а уравнение (5.85) принимает вид

$$\begin{aligned} U(n, k+1) - \alpha_1 [U(n+1, k) + U(n-1, k)] - \\ - (\alpha_2 - \alpha_1) U(n, k-1) = 0 \end{aligned} \quad (5.88)$$

и при  $\alpha_2 - \alpha_1 > 0$  может истолковываться как уравнение случайног блуждания частицы по прямой с двухшаговыми отклонениями. При этом  $\alpha_1$  — вероятность перемещения частицы вправо и влево вдоль прямой, а  $\alpha_2 - \alpha_1$  — вероятность отклонения от прямой с обязательным возвращением в прежнюю точку через два шага. В частном случае ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$ ) приходим к простейшему уравнению блуждания частицы по прямой:

$$U(n, k+1) = (1/2) [U(n+1, k) + U(n-1, k)]. \quad (5.89)$$

Одновременно, конечно, сохраняется и возможность общей волновой интерпретации уравнений (5.88) и (5.89), что согласуется с двойственной физической трактовкой уравнения теплопроводности, отмеченной ранее.

3.  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$  ( $\chi_1 = \chi_2$ ). Данное соотношение фильтрационных параметров составляющих сред, в предельном случае согласующееся с условиями (5.4), отвечает уравнению

$$\begin{aligned} U(n, k+1) - \left(\frac{1}{2}\right) [U(n+1, k) + U(n-1, k)] = \\ = \left(\frac{1}{2}\right) [U(n+1, k-m+1) + U(n-1, k-m-1)] - \\ - U(n, k-m) \end{aligned} \quad (5.90)$$

или в конечно-разностной форме

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta_n^2 [U(n, k) + U(n, k-s)] = \Delta_k^+ U(n, k) - \\ - \Delta_k^- U(n, k-s), \quad s = m-1, \end{aligned} \quad (5.91)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_n^2 U(n, k) &= U(n+1, k) - 2U(n, k) + U(n-1, k); \\ \Delta_k^+ U(n, k) &= U(n, k+1) - U(n, k); \\ \Delta_k^- U(n, k) &= U(n, k) - U(n, k-1). \end{aligned} \quad (5.92)$$

Любопытно отметить, что уравнение (5.91), представляющее собой дискретный аналог второго уравнения (5.80), в частных случаях:

$$\Delta_n^2 U(n, k) = \Delta_k^2 U(n, k) \quad \text{при } s=0; \quad (5.93)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) \Delta_n^2 U(n, k) = \Delta_k^2 U(n, k) \quad \text{при } s=1; \quad (5.94)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) \Delta_n^2 U(n, k) = \Delta_k^+ U(n, k) \quad \text{при } s=\infty \quad (5.95)$$

совпадает соответственно с уравнениями (5.86), (5.63) и (5.89), являющимися, в свою очередь, конечно-разностными аналогами уравнений разного типа: гиперболического и параболического.

### 5.2.3. Рекуррентные соотношения для некоторых специальных функций, используемые при решении волновых задач

В предыдущем разделе показано, что решение задач пьезопроводности в бикомпонентных средах различного строения сводится к решению задач о колебании механических систем подобной структуры. Для бинарной модели волновое уравнение сведено к виду рекуррентного соотношения (5.85) для функции  $U(n, k)$  прогиба в узлах или связанной с ней по равенствам (5.84) функции  $C(n, k)$ . Таким образом, при заданных начальных и граничных условиях последовательными вычислениями по возрастающим значениям  $k$  можно найти указанные функции при любых целочисленных значениях их аргументов. Этими же функциями согласно равенству (5.82) или (5.60) определяется и решение задачи пьезопроводности для бинарной модели при произвольных параметрах составляющих сред.

Вместе с тем для исследования свойств процесса особый интерес представляют решения краевых задач в замкнутой форме. Подобные решения будут

построены в дальнейшем на базе новых рекуррентных соотношений [10, 11] для некоторых специальных функций.

### А. Ряды, соответствующие цепи Маркова из двух состояний

Рассмотрим следующие функции:

$$P_+^+(m, k) = \begin{cases} p_1 \sum_{s=1}^{\min(m-1, k-m)} C_{m-1}^s C_{k-m-1}^{s-1} \alpha^{m-s-1} \beta^{k-m-s} \times \\ \quad \times (1-\alpha)^s (1-\beta)^s & \text{при } k > m \geq 0; \\ p_1 \alpha^{k-1} & \text{при } k = m > 0; \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \quad (5.96)$$

$$P_-^-(m, k) = \begin{cases} q_1 \sum_{s=1}^{\min(m, k-m-1)} C_{m-1}^{s-1} C_{k-m-1}^s \alpha^{m-s} \beta^{k-m-s-1} \times \\ \quad \times (1-\alpha)^s (1-\beta)^s & \text{при } k \geq 3, m \geq 1, k > m; \\ q_1 \beta^{k-1} & \text{при } k > 0, m = 0; \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \quad (5.97)$$

$$P_+^-(m, k) = \begin{cases} p_1 \sum_{s=0}^{\min(m-1, k-m-1)} C_{m-1}^s C_{k-m-1}^{s-1} \alpha^{m-s-1} \times \\ \quad \times \beta^{k-m-s-1} (1-\alpha)^{s+1} (1-\beta)^s & \text{при } k > m \geq 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \quad (5.98)$$

$$P_-^+(m, k) = \begin{cases} q_1 \sum_{s=0}^{\min(m-1, k-m-1)} C_{m-1}^s C_{k-m-1}^{s-1} \alpha^{m-s-1} \times \\ \quad \times \beta^{k-m-s-1} (1-\alpha)^s (1-\beta)^{s+1} & \text{при } k > m \geq 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (5.99)$$

где символами вида  $C_r^s$  обозначены биномиальные коэффициенты, а требуемое при этом условие

$$r \geq s \geq 0 \quad (5.100)$$

обеспечивается областями определения и пределами суммирования рядов в функциях (5.96)–(5.99).

При дополнительном условии

$$0 < \alpha, \beta; p_1, q_1 < 1 \quad (5.101)$$

функции  $P(m, k)$  могут интерпретироваться [7] как вероятности  $m$ -кратного наступления некоторого события при  $k$  испытаниях, связанных в простую цепь Маркова, когда вероятности перехода заданы матрицей

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{vmatrix}. \quad (5.102)$$

Индексы в функциях  $P(m, k)$  отвечают появлению (+) или непоявлению (–) события при первом и последнем испытаниях, причем их вероятности при первом испытании (нижние индексы) соответственно равны  $p_1$  и  $q_1$ .

В работе [5] показано, что функции (5.96)–(5.99) удовлетворяют уравнению

$$P(m, k) - \alpha P(m-1, k-1) - \beta P(m, k-1) - (1-\alpha-\beta) P(m-1, k-2) = 0. \quad (5.103)$$

Если вместо  $m$  ввести новую переменную  $n$ , связанную с первой равенством  
 $n = 2m - k$  [ $m = (n + k)/2$ ], (5.104)

то для функций  $S(n, k) = P(m, k)$  из уравнения (5.103) и функций (5.96)–(5.99) получим

$$S(n, k) - \alpha S(n-1, k-1) - \beta S(n+1, k-1) - (1-\alpha-\beta) S(n, k-2) = 0; \quad (5.105)$$

$$S_+^+ (n, k) = \begin{cases} p_1 \alpha^{k-1} & \text{при } k = n > 0; \\ p_1 \sum_{(s)} C_{\frac{k+n}{2}-1}^s C_{\frac{k-n}{2}-1}^{s-1} \alpha^{\frac{k+n}{2}-s-1} \beta^{\frac{k-n}{2}-s} \times & \\ \times (1-\alpha)^s (1-\beta)^s & \text{в иных случаях;} \end{cases} \quad (5.106)$$

$$S_-^- (n, k) = \begin{cases} q_1 \beta^{k-1} & \text{при } k = -n > 0; \\ q_1 \sum_{(s)} C_{\frac{k+n}{2}-1}^s C_{\frac{k-n}{2}-1}^{s-1} \alpha^{\frac{k+n}{2}-s} \beta^{\frac{k-n}{2}-s-1} \times & \\ \times (1-\alpha)^s (1-\beta)^s & \text{в иных случаях;} \end{cases} \quad (5.107)$$

$$S_+^- (n, k) = p_1 \sum_{(s)} C_{\frac{k+n}{2}-1}^s C_{\frac{k-n}{2}-1}^{s-1} \alpha^{\frac{k+n}{2}-s-1} \beta^{\frac{k-n}{2}-s-1} \times \\ \times (1-\alpha)^{s+1} (1-\beta)^s; \quad (5.108)$$

$$S_-^+ (n, k) = q_1 \sum_{(s)} C_{\frac{k+n}{2}-1}^s C_{\frac{k-n}{2}-1}^{s-1} \alpha^{\frac{k+n}{2}-s-1} \beta^{\frac{k-n}{2}-s-1} \times \\ \times (1-\alpha)^s (1-\beta)^{s+1}. \quad (5.109)$$

Здесь, как и в функциях (5.96)–(5.99) под символами вида  $C_r^s$  понимаются биномиальные коэффициенты при целых  $r$  и  $s$ , удовлетворяющих условию (5.100), и  $C_r^s = 0$  в противном случае. При этой оговорке пределы суммирования в записанных выше выражениях можно формально считать бесконечными либо определяемыми условиями (5.100).

Рассмотрим случай, когда  $\alpha = \beta = p$  ( $1 - \alpha = 1 - \beta = 1 - p = q$ ). При данном условии уравнение (5.105) принимает согласующийся с уравнением (5.88) вид:

$$S(n, k) - p [S(n-1, k-1) + S(n+1, k-1)] - (q-p) S(n, k-2) = 0, \quad (5.110)$$

физическая интерпретация которого дана в разделе 5.2.2.

Если принять  $p_1 = q_1 = p$ , то из формул (5.106)–(5.109) получим

$$S_+^+ (n, k) = \sum_{s=0}^{\infty} C_{\frac{k+n}{2}-1}^s C_{\frac{k-n}{2}-1}^{s-1} p^{k-2s} q^{2s}; \\ S_-^- (n, k) = \sum_{s=0}^{\infty} C_{\frac{k+n}{2}-1}^{s-1} C_{\frac{k-n}{2}-1}^s p^{k-2s} q^{2s}; \quad (5.111)$$

$$S_+^- (n, k) = S_-^+ (n, k) = \sum_{s=0}^{\infty} C_{\frac{k+n}{2}-1}^s C_{\frac{k-n}{2}-1}^{s-1} p^{k-2s-1} q^{2s+1},$$

где в целях общности и краткости записи условно считается  $C_{-1}^{-1} = 1$ .

Отметим следующее свойство функций  $S_+^+$  и  $S_-^-$ :

$$S_+^+(0, k) = S_-^-(0, k), \quad (5.112)$$

которое непосредственно вытекает из двух первых выражений (5.111). Таким образом, если ввести функцию

$$C(n, k) = S_+^+(n, k) - S_-^-(n, k) \quad (5.113)$$

и условно считать  $C(0, 0) = 1$ , то она будет решением уравнения (5.110) при  $k > 0, n \neq 0$  с условиями

$$C(n \neq 0, 0) = C(n, -1) = 0; C(0, k) = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0; \\ 0 & \text{при } k > 0. \end{cases} \quad (5.114)$$

### Б. Многочлены и функции Кравчука

Многочлены Кравчука  $k_r(m, k)$  определяются [25] производящей функцией

$$\sum_{r=0}^k k_r(m, k) z^r = (1 + qz)^m (1 - pz)^{k-m}. \quad (5.115)$$

Можно показать [5, 6], что нормированные многочлены Кравчука, которые в дальнейшем по аналогии с функциями Чебышева—Эрмита условимся называть функциями Кравчука

$$K_r(m, k) = \sqrt{\frac{C_k^m}{C_k^r}} p^{\frac{m-r}{2}} q^{\frac{k-m-r}{2}} k_r(m, k), \quad (5.116)$$

удовлетворяют соотношению

$$\begin{aligned} & K_r^2(m, k) - qK_r^2(m, k-1) - pK_r^2(m-1, k-1) = \\ & = pK_{r-1}^2(m, k-1) + qK_{r-1}^2(m-1, k-1) - K_{r-1}^2(m-1, k-2) \end{aligned} \quad (5.117)$$

при условиях

$$r \geq 0; -\infty < m < \infty; k > 0, \quad (5.118)$$

если значения функций Кравчука, выпадающие из области их определения ( $r \geq 0; k \geq m \geq 0$ ), считать нулевыми.

В работе [5] показано, что рекуррентному соотношению (5.117) при  $r > 1$  удовлетворяют также функции

$$F_r(m, k) = 2 \left( pq \frac{k-r+1}{r} \right)^{1/2} K_{r-1}(m, k) K_r(m, k). \quad (5.119)$$

Докажем (это понадобится в приложении), что оно будет выполняться и при  $r = 0, 1$ , если принять

$$\begin{aligned} F_{-1}(m, k) = 0; F_0(m, k) = \sum_{\mu=0}^{\infty} (C_{k+1}^{m+\mu+1} p^{m+\mu+1} q^{k-m-\mu} \\ - C_{k+1}^{m-\mu} p^{m-\mu} q^{k-m+\mu+1}). \end{aligned} \quad (5.120)$$

Функция  $F_0(m, k)$  является решением уравнения

$$F_0(m, k) - qF_0(m, k-1) - pF_0(m-1, k-1) = 0 \quad (5.121)$$

при  $k \geq 0$  с начальными условиями

$$F_0(m, -1) = \Phi(m) = \begin{cases} 1 & \text{при } m < 0; \\ -1 & \text{при } m \geq 0. \end{cases} \quad (5.122)$$

Действительно, аналогом функции источника для уравнения (5.121) является выражение

$$G_0(m - \mu, k - v) = C_{k-v}^{m-\mu} p^{m-\mu} q^{k-v-m+\mu}, \quad k > v, \quad (5.123)$$

а решение задачи Коши (5.121) — (5.122) выражается через него формулой

$$F_0(m, k) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \Phi(\mu) G_0(m - \mu, k + 1), \quad (5.124)$$

откуда после простых преобразований приходим к соотношению (5.120).

С учетом того, что  $F_{-1}(m, k) = 0$ , полученный результат доказывает справедливость равенства (5.117) для  $F_r(m, k)$  при  $r = 0$ . Доказательство для  $r = 1$  проведем непосредственной проверкой, для чего вычислим вначале правую часть равенства (5.117):

$$\Pi(m, k) = pF_0(m, k - 1) + qF_0(m - 1, k - 1) - F_0(m - 1, k - 2) \quad (5.125)$$

при  $k = 1$ . Прямыми вычислениями по формулам (5.121) и (5.122) найдем

$$\Pi(m, 1) = \begin{cases} -2pq & \text{при } m = 0; \\ 2pq & \text{при } m = 1; \\ 0 & \text{при } m \neq 0, 1. \end{cases} \quad (5.126)$$

Очевидно, что при  $k > 1$  значение  $\Pi(m, k)$  можно искать как решение уравнения (5.121) с начальными условиями (5.126), откуда по формулам (5.122) и (5.123) получим

$$\Pi(m, k) = 2(C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m+1} - C_{k-1}^m p^{m+1} q^{k-m}). \quad (5.127)$$

Для вычисления левой части  $\Lambda(m, k)$  того же равенства (5.117) воспользуемся явным представлением функции  $F_1(m, k) = 2(m - pk) C_k^m p^m q^{k-m}$ , откуда получим

$$\begin{aligned} \Lambda(m, k) &= F_1(m, k) - qF_1(m, k - 1) - pF_1(m - 1, k - 1) = \\ &= 2C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m+1} - 2C_{k-1}^m p^{m+1} q^{k-m} + \\ &+ 2(m - pk) p^m q^{k-m} (C_k^m - C_{k-1}^m - C_{k-1}^{m-1}). \end{aligned} \quad (5.128)$$

Сопоставление равенств (5.128) и (5.127) с учетом того, что последний член в уравнении (5.128) равен нулю, завершает доказательство справедливости соотношения (5.117) для функций  $F_r(m, k)$  при  $r \geq 0$ .

Если вместо  $m$  ввести новую переменную  $n$ , такую, что

$$n = 2m - k \quad [m = (n + k)/2], \quad (5.129)$$

то уравнение (5.117) преобразуется для  $U_r(n, k) = F_r(m, k)$ :

$$\begin{aligned} U_r(n, k + 1) - qU_r(n + 1, k) - pU_r(n - 1, k) &= \\ &= pU_{r-1}(n + 1, k) + qU_{r-1}(n - 1, k) - U_{r-1}(n, k - 1) \end{aligned} \quad (5.130)$$

и при условии  $p = q = 1/2$  может быть записано в конечно-разностной форме:

$$(\frac{1}{2}) \Delta_n^2 [U_r(n, k) + U_{r-1}(n, k)] = \Delta_k^+ U_r(n, k) - \Delta_k^- U_{r-1}(n, k). \quad (5.131)$$

Отметим, что при том же условии средние значения многочленов и функций Кравчука с нечетными индексами равны нулю:

$$k_{2s+1}(m, 2m) = K_{2s+1}(m, 2m) = 0, \quad (5.132)$$

поскольку производящая функция (5.115) в этом случае имеет вид

$$\sum_{(r)} k_r(m, 2m) z^r = \left(1 - \frac{z^2}{4}\right)^m.$$

Из равенства (5.132), в свою очередь, следует, что средние значения функций  $F_r(m, k)$  равны нулю:

$$F_r(m, 2m) = 0, \quad r > 0. \quad (5.133)$$

[Для случая  $r=0$  это доказывается непосредственной проверкой по формуле (5.120).]

Рассмотрим теперь предельные представления полученных решений уравнения (5.117). С этой целью воспользуемся известной [25] предельной связью между функциями Кравчука  $K_r(m, k)$  и Чебышева—Эрмита  $\Psi_r(\xi)$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{K_r(m, k)}{\sqrt{C_k^m p^{m/2} q^{(k-m)/2}}} = \pi^{1/4} \Psi_r(\xi) e^{\xi^2/2}, \quad \xi = \frac{m-pk}{\sqrt{2pqk}}, \quad (5.134)$$

$$k \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty, \quad \xi < \infty, \quad r < \infty, \quad p > 0, \quad q > 0,$$

которая в силу локальной предельной теоремы [13]

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{2pqk} C_k^m p^m q^{k-m} = \pi^{-1/2} e^{-\xi^2}$$

$$k \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty, \quad \xi < \infty, \quad p > 0, \quad q > 0$$

может быть приведена к простому виду:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (2pqk)^{1/4} K_r(m, k) = \Psi_r(\xi). \quad (5.135)$$

$$k \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty, \quad \xi < \infty, \quad r < \infty$$

Возведением в квадрат обеих частей равенства (5.135) получаем предельное представление для квадратов функций Кравчука, а для второго найденного решения уравнения (5.117) подстановка выражения (5.135) в формулу (5.119) дает

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_r(m, k) = \sqrt{2/r} \Psi_{r-1}(\xi) \Psi_r(\xi). \quad (5.136)$$

$$k \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty, \quad \xi < \infty, \quad r < \infty, \quad p > 0, \quad q > 0.$$

### В. Многочлены и функции Чебышева—Эрмита

Выше была приведена установленная Сегё предельная связь между функциями Кравчука и Чебышева—Эрмита [формулы (5.134)–(5.136)]. Покажем, что предельные зависимости между ними могут быть дополнены более широкими аналогиями. С этой целью отметим [6], что функция

$$\tilde{F}_r(z) = \sqrt{2/r} \Psi_{r-1}(z) \Psi_r(z), \quad z = x/\sqrt{2t}, \quad (5.137)$$

с точностью до расшифровки аргументов совпадающая с выражением (5.136), удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [F_r(x, t) + F_{r-1}(x, t)] = \frac{\partial}{\partial t} [F_r(x, t) - F_{r-1}(x, t)], \quad (5.138)$$

конечно-разностным аналогом которого является уравнение (5.131), а также дифференциальному уравнению в полных производных

$$\frac{d^2 [F_r(z) + F_{r-1}(z)]}{dz^2} + 2z \frac{d [F_r(z) - F_{r-1}(z)]}{dz} = 0 \quad (5.139)$$

при  $r > 1$ .

Так же, как и в предыдущем пункте можно ввести функции

$$F_{-1}(z) = 0, \quad F_0(z) = -\operatorname{erf} z, \quad z = x/\sqrt{2t}, \quad (5.140)$$

удовлетворяющие уравнениям (5.138) и (5.139) при  $r=0, 1$ .

В случае  $r=0$  особого доказательства не требуется, поскольку функция вероятности является решением уравнения теплопроводности. При  $r=1$  в справедливости уравнения (5.139) удостоверимся непосредственной проверкой. Имеем

$$F_0(z) = -\operatorname{erf} z; F_0'(z) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2); F_0''(z) = \frac{4z}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2),$$

$$F_1(z) = \frac{2z}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2); F_1'(z) = \frac{2-4z^2}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2);$$

$$F_1''(z) = \frac{8z^3-12z}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2).$$

Подстановка этих выражений в уравнение (5.139) подтверждает его выполнение.

Вычислим частную производную от функции (5.137) по  $x$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} F_r \left( \frac{x}{\sqrt{2t}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2t}} F_r'(z) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2t}} [\Psi_{r-1}'(z) \Psi_r(z) + \Psi_{r-1}(z) \Psi_r'(z)], \quad z = \frac{x}{\sqrt{2t}}.$$

Подставляя в это равенство выражения

$$\Psi_{r-1}'(z) = z \Psi_{r-1}(z) - \sqrt{2r} \Psi_r(z); \quad \Psi_r'(z) = \sqrt{2r} \Psi_{r-1}(z) - z \Psi_r(z),$$

вытекающие из известных [25] соотношений для многочленов Чебышева—Эрмита, получаем

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} F_r \left( \frac{x}{\sqrt{2t}} \right) = \frac{\Psi_{r-1}^2(z)}{\sqrt{2t}} - \frac{\Psi_r^2(z)}{\sqrt{2t}}, \quad z = \frac{x}{\sqrt{2t}}. \quad (5.141)$$

Поскольку левая часть равенства (5.141) является решением уравнения (5.138), то и правая должна удовлетворять тому же уравнению. А так как функция

$$\frac{1}{\sqrt{2t}} \Psi_0^2 \left( \frac{x}{\sqrt{2t}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/(2t)} \quad (5.142)$$

является решением уравнения теплопроводности, то приходим к выводу о том, что любая пара функций

$$\Phi_r(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2t}} \Psi_r^2 \left( \frac{x}{\sqrt{2t}} \right), \quad r > 0$$

удовлетворяет уравнению вида (5.138), если условно считать  $\Phi_{-1}(x, t) = 0$ . Полученный результат, как нетрудно убедиться, дополняет проводимую аналогию между многочленами Чебышева—Эрмита и Кравчука.

#### 5.2.4. Решение волновых задач для бинарной модели

Переходя к решению волновых задач для модели бикомпонентной среды, уместно отметить, что играющие в данном исследовании вспомогательную роль вопросы колебания механических систем имеют большое самостоятельное значение, представление о котором можно составить, например, по работе Р. Ф. Нагаева и К. Ш. Ходжаева [1973 г.]. В этом плане дополнительный интерес могут представить впервые полученные уравнения колебания струнных сеток, их строгие континуальные аналоги и, по-видимому, первые точные решения волновых задач для механических систем с периодической структурой.

Обратимся к решению уравнения

$$C(n, k) - a_1 [C(n-1, k-1) + C(n+1, k-1)] -$$

$$- (a_2 - a_1) C(n, k-2) = 0, \quad (5.143)$$

которое согласно ранее полученным результатам (раздел 5.2.2.) при  $\alpha_2 > \alpha_1$  может истолковываться как уравнение случайного блуждания частицы по прямой с двухшаговыми отклонениями. Подобная трактовка подсказывает комбинаторный метод построения его решения — определения вероятности попадания в точку  $n$  после  $n + 2r$  шагов. Будем для простоты полагать, что начальная позиция блуждающей частицы соответствует нулевым условиям:

$$n_0 = r_0 = 0. \quad (5.144)$$

Очевидно, что искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных траекторий ее перемещения при фиксированных начальной и конечной координатах и заданном числе шагов. Нетрудно убедиться, что данный путь приводит к формуле

$$G(n, r) = \sum_{s=0}^r C_{n+2r-s}^s C_{n+2r-2s}^{r-s} (\alpha_2 - \alpha_1)^s \alpha_1^{n+2r-2s}. \quad (5.145)$$

С помощью замены  $n \rightarrow n - n_0$ ,  $r \rightarrow r - r_0$  эта формула обобщается на случай произвольного положения ( $n_0$ ) частицы в начальный момент  $k_0 = n_0 + r_0$ . Получающаяся при этом функция представляет собой аналог функции источника для уравнения (5.143). На его основе могут быть в принципе построены решения краевых задач, однако получаемые подобным способом выражения будут иметь неудобную для анализа форму кратных рядов.

Решение уравнения (5.143) с условиями

$$C(n \neq 0, 0) = C(n, -1) = 0; \quad C(0, k) = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0; \\ 0 & \text{при } k > 0, \end{cases} \quad (5.146)$$

представляющее особый интерес в плане решения задач пьезопроводности, с точностью до обозначений имеет вид (5.113), (5.111). Для его упрощения по аналогии с формулой (5.145) вместо  $k$  введем новую переменную

$$r = (k - n)/2 \quad (k = n + 2r), \quad (5.147)$$

откуда находим

$$\begin{aligned} C(n, r) &= \sum_{s=1}^r C_{n+r-1}^s C_{r-1}^{s-1} \alpha_1^{n+2r-2s} \alpha_2^{2s} - \sum_{s=1}^{r-1} C_{n+r-1}^{s-1} C_{r-1}^s \alpha_1^{n+2r-2s} \alpha_2^{2s} = \\ &= C_{n+r-1}^r \alpha_1^n \alpha_2^{2r} + \sum_{s=1}^{r-1} (C_{n+r-1}^{s-1} C_{r-1}^{s-1} - C_{n+r-1}^{s-1} C_{r-1}^s) \alpha_1^{n+2r-2s} \alpha_2^{2s}. \end{aligned} \quad (5.148)$$

Преобразуя  $C_{n+r-1}^r$  и выражение в круглых скобках, получаем

$$C_{n+r-1}^r = \frac{n}{n+r} C_{n+r}^r; \quad C_{n+r-1}^{s-1} C_{r-1}^{s-1} - C_{n+r-1}^{s-1} C_{r-1}^s = \frac{n}{n+r} C_{n+r}^s C_{r-1}^{s-1},$$

подставляя полученное в формулу (5.148), окончательно находим

$$C(n, r) = \frac{n}{n+r} \sum_{s=1}^{\infty} C_{n+r}^s C_{r-1}^{s-1} \alpha_1^{n+2r-2s} \alpha_2^{2s}; \quad \alpha_i = \frac{\sqrt{\chi_i}}{\sqrt{\chi_1} + \sqrt{\chi_2}}. \quad (5.149)$$

Решение соответствующей задачи пьезопроводности для модели трещиновато-пористой среды в случае пренебрежения влиянием ограниченностей пористых блоков будет иметь вид

$$P_n(t) = p_i(nl, t) = \sum_{r=0}^{\infty} C(n, r) \operatorname{erfc} \frac{(n+2r)l}{2\sqrt{\chi_1 t}}. \quad (5.150)$$

Перейдем теперь к уравнению (5.90) для функции прогиба в узлах однородной струнной сетки. Будем искать функцию целочисленных аргументов  $n$  и  $k$ , удовлетворяющую уравнению

$$\begin{aligned} U(n, k) - \frac{1}{2} [U(n+1, k-1) + U(n-1, k-1)] = \\ = \frac{1}{2} [U(n+1, k-m) + U(n-1, k-m)] - U(n, k-m-1) \quad (5.151) \end{aligned}$$

при всех  $n > 0$  и  $k > 0$  и отвечающую условиям

$$U(n, k \leq 0) = 0; U(0, k \geq 0) = 1. \quad (5.152)$$

Непосредственно из уравнения (5.151) видно, что искомое решение определяется по периодам

$$U(n, k) = U_r(n, k) \quad \text{при } rm \leq k < (r+1)m \quad (r = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.153)$$

При этом для функций  $U_r(n, k)$  получаем рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} U_r(n, k) - \frac{1}{2} [U_r(n+1, k-1) + U_r(n-1, k-1)] = \\ = \frac{1}{2} [U_{r-1}(n+1, k-m) + U_{r-1}(n-1, k-m)] - U_{r-1}(n, k-m-1) \quad (5.154) \end{aligned}$$

с условиями

$$\begin{aligned} U_{-1}(n, k) = 0; U_r(0, k) = 1; r \geq 0; \\ U_0(n, -1) = U_0(n, 0) = 0; U_r(n, rm-1) = U_{r-1}(n, rm-1). \quad (5.155) \end{aligned}$$

Если ввести функции  $U_r^*(n, k)$ , являющиеся решением той же задачи (5.154), (5.155), но для полу бесконечных интервалов изменения аргумента

$$k \geq rm \quad (r = 0, 1, 2, \dots), \quad (5.156)$$

то, очевидно, функции  $U_r^*(n, k)$  будут совпадать с  $U_r(n, k)$  и  $U(n, k)$  в конечных промежутках (5.153), а искомое решение — представляться через разности этих функций

$$W_r^*(n, k) = U_r^*(n, k) - U_{r-1}^*(n, k) \quad (5.157)$$

формулой

$$U(n, k) = U_0^*(n, k) + \sum_{r=1}^{\lfloor k/m \rfloor} W_r^*(n, k), \quad (5.158)$$

где квадратной скобкой обозначена целая часть заключенного в ней числа.

Из краевой задачи для первого члена в формуле (5.158)

$$U_0^*(n, k) - \frac{1}{2} [U_0^*(n+1, k-1) + U_0^*(n-1, k-1)] = 0; \quad n > 0, k > 0; \quad (5.159)$$

$$U_0^*(n, 0) = 0 \quad (n \neq 0); \quad U_0^*(0, k) = 1$$

видно, что ее решение состоит из двух одинаковых частей, сдвинутых одна относительно другой по аргументу  $k$  на единицу, а потому и члены ряда в формуле (5.158) состоят из двух таких же слагаемых

$$W_r^*(n, k) = V_r^*(n, k) + V_r^*(n, k-1), \quad (5.160)$$

определяемых по условиям (5.155) из решения задачи

$$\begin{aligned}
 V_r^*(n, k) - \frac{1}{2} [V_r^*(n+1, k-1) + V_r^*(n-1, k-1)] = \\
 = \frac{1}{2} [V_{r-1}^*(n+1, k-m) + V_{r-1}^*(n-1, k-m)] - V_{r-1}^*(n, k-m-1), \\
 n > 0, k \geq rm \quad (r=1, 2, 3, \dots); \\
 V_r^*(0, k) = 0; V_r^*(n, rm-1) = 0.
 \end{aligned} \tag{5.161}$$

Если в уравнении (5.161) сделать замену  $V_r^*(n, k) = V_r(n, k_r)$ ,  $k_r = k - r(m-1)$ , то решение ее видоизмененного варианта

$$\begin{aligned}
 V_r(n, k_r) - \frac{1}{2} [V_r(n+1, k_r-1) + V_r(n-1, k_r-1)] = \\
 = \frac{1}{2} [V_{r-1}(n+1, k_r-1) + V_{r-1}(n-1, k_r-1)] - V_{r-1}(n, k_r-2), \\
 n > 0, k_r \geq r \quad (r=1, 2, 3, \dots); \\
 V_r(0, k_r) = 0; V_r(n, r-1) = 0
 \end{aligned} \tag{5.162}$$

с точностью до обозначений дается формулами (5.119) и (5.129):

$$F_r(n, k_r) = \sqrt{\frac{k_r - r + 1}{r}} K_{r-1}\left(\frac{n+k_r}{2}, k_r\right) K_r\left(\frac{n+k_r}{2}, k_r\right), \quad r > 0. \tag{5.163}$$

При этом первое из условий в задаче (5.162) удовлетворяется в силу условий (5.133) и (5.129), а выполнение второго без труда подтверждается с помощью производящей функции (5.115). Решение задачи (5.129) также можно было бы записать с помощью формулы (5.120), так как функция  $U_0^*(m, k) = 1 + F_0(m, k)$  отвечает тем же рекуррентным соотношениям, что и  $F_0(m, k)$ , и условиям

$$U_0^*(0, k) = 1; U_0^*(m, 0) = 0 \quad (m \neq 0).$$

Однако в более простом виде решение получается, если искать его как сумму  $U_0^*(n, k) = \sum_{r=0}^{k-1} U_0'(n, r)$  решений уравнения (5.159) со следующими условиями:

$$U_0'(n, 0) = 0; U_0'(0, k) = \begin{cases} 1 & \text{при } k=0; \\ 0 & \text{при } k > 0. \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что при  $n > 0$  оно представимо в виде

$$U_0'(n, k) = \frac{1}{2} G_0(n-1, k-1) - \frac{1}{2} G_0(n+1, k-1);$$

$$G_0(n, k) = C_k^{(n+k)/2} \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

откуда после упрощений находим

$$U_0'(n, k) = \frac{n}{k} C_k^{(n+k)/2} \left(\frac{1}{2}\right)^k. \tag{5.164}$$

Собирая результаты, получим решение задачи (5.151), (5.152):

$$U(n, k) = U_0^*(n, k) + \sum_{r=0}^{\lfloor k/m \rfloor} \{V_r[n, k-r(m-1)] + \\ + V_r[n, k-r(m-1)-1]\};$$

$$U_0^*(n, k) = \begin{cases} 1 & \text{при } n=0; \\ \sum_{r=n}^k \frac{n}{r} C_r^{(n+r)/2} \left(\frac{1}{2}\right)^r & \text{при } n>0; \end{cases} \quad (5.165)$$

$$V_r(n, k) = \sqrt{\frac{k-r+1}{r}} K_{r-1}\left(\frac{n+k}{2}, k\right) K_r\left(\frac{n+k}{2}, k\right).$$

Под  $C_r^{(n+r)/2}$  и  $K_r\left(\frac{n+k}{2}, k\right)$  здесь понимаются биномиальные коэффициенты и функции Кравчука в области их стандартного определения и нули в противном случае.

По результатам раздела 5.2.3. (п. Б) удается построить и аналог функции источника  $\tilde{G}(n, k)$  для уравнения (5.151):

$$G(n, k) = \Phi(n, k) + \Phi(n+1, k);$$

$$\Phi(n, k) = B_0(n, k) - \sum_{r=1}^{\lfloor k/m \rfloor} \{B_{r-1}[n, k-r(m-1)-1] - \\ - B_r[n, k-r(m-1)]\}; \quad (5.166)$$

$$B_r(n, k) = K_r^2\left(\frac{n+k}{2}, k\right).$$

Действительно, квадраты функций Кравчука удовлетворяют соотношению (5.117) при условиях (5.118). Следовательно, при тех же условиях функции  $B_r(n, k)$  удовлетворяют соотношению вида (5.162), а члены ряда в выражении (5.166) по аналогии с предыдущей задачей — соотношению (5.161). Отдельного подтверждения требует лишь случай  $r=1, k=m$ , так как при этом второй аргумент входящий в формулу (5.166) функции  $B_0(n, 0)$  выпадает из условия (5.118). Однако непосредственная проверка подтверждает справедливость соотношения (5.161) и в данном случае при условии  $G(n, -1) = G(n, 0)$ , а поэтому функция  $\tilde{G}(n, k)$  является решением уравнения (5.151) при  $-\infty < n < \infty, k > \infty$ .

В силу ортонормированности функций Кравчука:

$$\sum_{m=0}^k K_r^2(m, k) = 1 \quad (5.167)$$

имеем

$$\sum_{(n)} \Phi(n, k) = 1; \quad \sum_{(n)} G(n, k) = 2, \quad (5.168)$$

где для простоты можно считать пределы суммирования бесконечными.

Установленные свойства функции  $G(n, k)$  совместно с начальным распределением

$$G(n, -1) = G(n, 0) = \begin{cases} 1 & \text{при } n=0, -1; \\ 0 & \text{при } n \neq 0, -1 \end{cases} \quad (5.169)$$

позволяют рассматривать ее как функцию сдвоенных мгновенных источников, находящихся в точках  $n=0$  и  $n=-1$ . Возможности обобщения функции  $G(n, k)$  очевидны.

Запишем теперь предельное представление решения (5.165) задачи (5.151), (5.152):

$$\lim U(n, k) = \operatorname{erfc} \frac{n}{\sqrt{2k}} + \sum_{r=1}^{\lfloor k/s \rfloor} \sqrt{\frac{2}{r}} \Psi_{r-1} \left[ \frac{n}{\sqrt{2(k-rs)}} \right] \times \\ \times \Psi_r \left[ \frac{n}{\sqrt{2(k-rs)}} \right], \quad s = m - 1, \quad (5.170)$$

$$k \rightarrow \infty, \quad s \rightarrow \infty, \quad n/\sqrt{2k} < \infty, \quad k/s < \infty$$

непосредственно следующее из соотношения (5.136) и интегральной предельной теоремы [7].

Из сопоставления полученных ранее результатов можно предположить, что функция, аналогичная (5.170), является решением следующей краевой задачи:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [u(x, t) + u(x, t-\tau)] - \frac{\partial}{\partial t} [u(x, t) - u(x, t-\tau)] = 0, \quad (5.171)$$

$$x > 0, \quad t > 0;$$

$$u(x, t \leq 0) = 0; \quad u(0, t > 0) = 1.$$

Нетрудно заметить, что искомая функция может быть определена по периодам

$$u_r(x, t) = u(x, t) \quad \text{при} \quad r\tau < t < (r+1)\tau \quad (r = 0, 1, 2, \dots) \quad (5.172)$$

на основе решения выпадающей из (5.171) задачи:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [u_r(x, t) + u_{r-1}(x, t-\tau)] - \\ - \frac{\partial}{\partial t} [u_r(x, t) - u_{r-1}(x, t-\tau)] = 0, \quad r\tau < t < (r+1)\tau; \\ u_{-1}(x, t) = 0; \quad u_0(x, t \leq 0) = 0; \quad (5.173)$$

$$u_r(x, r\tau) = u_{r-1}(x, r\tau); \quad u_r(0, t) = 1 \quad (r = 0, 1, 2, \dots).$$

Если ввести функции  $u_r^*(x, t)$ , являющиеся решением той же задачи (5.173), но для полубесконечных интервалов изменения аргумента  $t$  ( $t > r\tau; r = 0, 1, 2, \dots$ ), то они будут совпадать с  $u_r(x, t)$  и  $u(x, t)$  в соответствующих конечных промежутках, а искомое решение — представляться через разности этих функций

$$v_r^*(x, t) = u_r^*(x, t) - u_{r-1}^*(x, t) \quad (5.174)$$

формулой

$$u(x, t) = u_0^*(x, t) + \sum_{r=1}^{\lfloor t/\tau \rfloor} v_r^*(x, t), \quad (5.175)$$

где квадратной скобкой обозначена целая часть заключенного в ней числа.

Краевые задачи для слагаемых правой части формулы (5.175) по задаче (5.173) имеют вид

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0^*(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} u_0^*(x, t) = 0, \quad t > 0; \\ u_0^*(x, 0) = 0; \quad u_0^*(0, t) = 1; \quad (5.176)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [v_r^*(x, t) + v_{r-1}^*(x, t-\tau)] - \\ - \frac{\partial}{\partial t} [v_r^*(x, t) - v_{r-1}^*(x, t-\tau)] = 0, \quad t > r\tau; \\ v_r^*(x, r\tau) = 0; \quad v_r^*(0, t) = 0 \quad (r = 1, 2, 3, \dots). \quad (5.177)$$

Если сделать замену

$$v_r^*(x, t) = v_r(x, t_r), \quad t_r = t - r\tau, \quad (5.178)$$

то приходим к видоизмененному варианту записи задачи (5.177):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [v_r(x, t_r) + v_{r-1}(x, t_r)] - \\ & - \frac{\partial}{\partial t_r} [v_r(x, t_r) - v_{r-1}(x, t_r)] = 0, \quad t_r > 0; \end{aligned} \quad (5.179)$$

$$v_r(x, 0) = 0; \quad v_r(0, t_r) = 0, \quad (5.180)$$

решением которой будут функции

$$v_r(x, t_r) = \sqrt{\frac{2}{r}} \Psi_{r-1} \left( \frac{x}{\sqrt{2t_r}} \right) \Psi_r \left( \frac{x}{\sqrt{2t_r}} \right). \quad (5.181)$$

Действительно, то, что функции (5.181) удовлетворяют уравнению (5.179), говорилось в пункте В предыдущего раздела, а выполнение условий (5.180) следует из известных свойств функций Чебышева—Эрмита:

$$\Psi_r(\infty) = 0; \quad \Psi_{2r+1}(0) = 0 \quad (r = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.182)$$

Собирая результаты, получим решение задачи (5.171):

$$u(x, t) = \operatorname{erfc} \frac{x}{\sqrt{2t}} + \sum_{r=1}^{\lfloor t/\tau \rfloor} \sqrt{\frac{2}{r}} \Psi_{r-1} \left[ \frac{x}{\sqrt{2(t-r\tau)}} \right] \Psi_r \left[ \frac{x}{\sqrt{2(t-r\tau)}} \right], \quad (5.183)$$

которое с точностью до обозначений совпадает с уравнением (5.170) и поэтому может рассматриваться как его континуальный аналог.

Как это было показано, уравнение (5.171) может интерпретироваться как волновое для системы безынерционная струна—мембрана, а соответствующее ему уравнение пьезопроводности (5.80) отвечает аналогичной системе неупругомким стержень—пласт.

Исходя из решения (5.183) краевой задачи (5.171), нетрудно найти функцию типа мгновенного точечного источника  $G(x, \xi, t, \eta)$  для того же уравнения:

$$G(x, \xi, t, \eta) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} u(x - \xi, t - \eta). \quad (5.184)$$

Действительно, получаемое подобным способом с учетом формулы (5.142) выражение

$$\begin{aligned} G(x, \xi, t, \eta) = & \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-\eta)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2(t-\eta)}} - \\ & - \sum_{r=1}^{\lfloor (t-\eta)/\tau \rfloor} \frac{1}{\sqrt{2(t-\eta-r\tau)}} \left\{ \Psi_{r-1}^2 \left[ \frac{x-\xi}{\sqrt{2(t-\eta-r\tau)}} \right] - \right. \\ & \left. - \Psi_r^2 \left[ \frac{x-\xi}{\sqrt{2(t-\eta-r\tau)}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.185)$$

при  $t < \eta + \tau$  вырождается в функцию источника для уравнения теплопроводности, а в силу ортонормированности функций Чебышева—Эрмита

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t, \eta) dx = 1.$$

### 5.2.5. Дифференциальные уравнения упругого режима в среде с двойной пористостью

В предыдущем разделе было получено следующее решение задачи пьезопроводности для бинарной модели трещиновато-пористой среды в случае пренебрежения влиянием ограниченности пористых блоков:

$$P_n(t) = \sum_{r=0}^{\infty} C(n, r) \operatorname{erfc} \frac{(n+2r)l}{2\sqrt{\kappa_1}t}; \quad (5.186)$$

$$C(n, r) = \begin{cases} a_1^n & \text{при } r = 0; \\ \frac{n}{n+r} \sum_{k=1}^r C_{n+r}^k C_{r-1}^{k-1} a_1^{n+2r-2k} a_2^{2k} & \text{при } r > 0. \end{cases} \quad (5.187)$$

Найдем предельное представление этого решения [Волков И. А., 1982 г.]. С этой целью вначале преобразуем выражение для  $C(n, r > 0)$  к виду

$$C(n, r) = \frac{n a_2}{n+r} \sum_{k=1}^r C_{n+r}^k a_1^{n+r-k} a_2^k C_{r-1}^{k-1} a_1^{r-k} a_2^{k-1}, \quad (5.188)$$

предельное представление ряда в котором получено в работе [7] при доказательстве локальной теоремы для цепи Маркова из двух состояний. Имеем

$$C(n, r) = \frac{1}{n+r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \xi_r e^{-\frac{a_2}{a_1} \frac{\xi_r^2}{2}} [1 + \omega_n(\xi_r)], \quad (5.189)$$

где при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\omega_n(\xi_r) \rightarrow 0$  равномерно в любом конечном интервале изменения

$$\xi_r = n/\sqrt{n+2r}. \quad (5.190)$$

Вводя по аналогии с интегральной теоремой Муавра—Лапласа кусочно-постоянную функцию

$$\Pi_n(\xi) = \begin{cases} \frac{\sqrt{(n+2r)(n+2r+2)}}{n(\sqrt{n+2r+2} - \sqrt{n+2r})} C(n, r) & \text{при } \xi_{r+1} < \xi < \xi_r; \\ 0 & \text{при } \xi > \xi_0 = \sqrt{n}, \end{cases} \quad (5.191)$$

в силу тождественного равенства

$$C(n, r) = \frac{\sqrt{(n+2r)(n+2r+2)}}{n(\sqrt{n+2r+2} - \sqrt{n+2r})} C(n, r) (\xi_r - \xi_{r+1})$$

запишем

$$C(n, r) = \int_{\xi_{r+1}}^{\xi_r} \Pi_n(\xi) d\xi; \quad \sum_{(r)} C(n, r) = \int_{(\xi)} \Pi_n(\xi) d\xi. \quad (5.192)$$

В последнем равенстве (5.192) пределы интегрирования и суммирования связаны между собой формулой вида (5.190), причем верхний предел интеграла находится по нижнему пределу суммы, а нижний — по верхнему, увеличенному на единицу.

Нетрудно убедиться, что при любом конечном значении  $\xi_r$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2r+2}/[(n+r)(\sqrt{n+2r+2} - \sqrt{n+2r})] = 2,$$

откуда по формулам (5.189) и (5.191) находим, что

$$\Pi_n(\xi_r) = \sqrt{\frac{2\alpha_2}{\pi\alpha_1}} e^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{\xi_r^2}{2}} [1 + \omega_n'(\xi_r)]. \quad (5.193)$$

Для промежуточных значений  $\xi_{r+1} < \xi < \xi_r$  имеем

$$\Pi_n(\xi) = \sqrt{\frac{2\alpha_2}{\pi\alpha_1}} e^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{\xi^2}{2}} [1 + \omega_n''(\xi)], \quad (5.194)$$

где

$$\omega_n''(\xi) = e^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{\xi_r^2 - \xi^2}{2}} [1 + \omega_n'(\xi)] - 1.$$

А поскольку  $(\xi_r^2 - \xi^2)/2 < \xi_r(\xi_r - \xi_{r+1})$  и  $\xi_r - \xi_{r+1} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  при любом конечном  $\xi_r$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max \omega_n''(\xi) = 0. \quad (5.195)$$

Представим теперь в виде двух слагаемых сумму

$$\sum_{r=0}^{\infty} C(n, r) = \Sigma_1 + \Sigma_2, \quad (5.196)$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{r=0}^{n^2/(2A^2) - n/2} C(n, r); \quad \Sigma_2 = \sum_{r=n^2/(2A^2) - n/2}^{\infty} C(n, r).$$

В силу соотношений (5.192), (5.194) и (5.195) получим

$$\Sigma_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^A \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} e^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{\xi^2}{2}} d\xi + R_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^A e^{-\frac{z^2}{2}} dz + R_n, \quad (5.197)$$

причем  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ .

Заметим, что

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1; \quad \sum_{r=0}^{\infty} C(n, r) = 1, \quad (5.198)$$

где последнее равенство устанавливается, например, из сопоставления решения (5.186) с (5.33) при соответствующем значении  $R$ .

Из первого равенства (5.198) следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  можно выбрать столь большое число  $A$ , что

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{A \sqrt{\alpha_2/\alpha_1}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz &> 1 - \frac{\varepsilon}{4}; \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{A \sqrt{\alpha_2/\alpha_1}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz &< \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned} \quad (5.199)$$

Выберем далее в соответствии с уравнением (5.197) столь большое  $n$ , чтобы

$$\left| \Sigma_2 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{A \sqrt{\alpha_2/\alpha_1}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (5.200)$$

Из условий (5.199) и (5.200) следует, что

$$\Sigma_2 > 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \quad (5.201)$$

а с учетом соотношения (5.196) и второго равенства (5.198)

$$\Sigma_1 < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.202)$$

Переходя к рассмотрению суммы в формуле (5.186), заметим, что из соотношений, получаемых при умножении обеих частей равенств (5.189) и (5.194) на  $\operatorname{erfc}[(n+2r)l/(2\sqrt{\kappa_1 t})] = \operatorname{erfc}[x^2/(2l\sqrt{\kappa_1 t}\xi^2)]$ , а также с учетом ограниченности функций  $\operatorname{erfc} z \leq 1$ , из оценок условий (5.199), (5.200) и (5.202) при  $n \rightarrow \infty$  и достаточно больших  $A$  можно найти, что

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_A^{\infty} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} e^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{\xi^2}{2}} \operatorname{erfc} \frac{x^2}{2l\sqrt{\kappa_1 t}\xi^2} d\xi &< \frac{\varepsilon}{4}; \\ \sum_{r=0}^{n^2/(2A^2) - n/2} C(n, r) \operatorname{erfc} \frac{(n+2r)l}{2\sqrt{\kappa_1 t}} &< \frac{\varepsilon}{2}; \\ \left| \sum_{r=n^2/(2A^2) - n/2}^{\infty} C(n, r) \operatorname{erfc} \frac{(n+2r)l}{2\sqrt{\kappa_1 t}} \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^A \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} e^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{\xi^2}{2}} \operatorname{erfc} \frac{x^2}{2l\sqrt{\kappa_1 t}\xi^2} d\xi \right| &< \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Используя данные оценки, находим, что при  $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{r=0}^{\infty} C(n, r) \operatorname{erfc} \frac{(n+2r)l}{2\sqrt{\kappa_1 t}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} e^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{\xi^2}{2}} \times \right. \\
 & \times \operatorname{erfc} \frac{x^2}{2l \sqrt{\kappa_1 t} \xi^2} d\xi \left. \right| \leq \sum_{r=0}^{n^2/(2A^2) - n/2} C(n, r) \operatorname{erfc} \frac{(n+2r)l}{2\sqrt{\kappa_1 t}} + \\
 & + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_A^{\infty} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} e^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{\xi^2}{2}} \operatorname{erfc} \frac{x^2}{2l \sqrt{\kappa_1 t} \xi^2} d\xi + \\
 & + \left| \sum_{r=n^2/(2A^2) - n/2}^{\infty} C(n, r) \operatorname{erfc} \frac{(n+2r)l}{2\sqrt{\kappa_1 t}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^A \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \times \right. \\
 & \times e^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{\xi^2}{2}} \operatorname{erfc} \frac{x^2}{2l \sqrt{\kappa_1 t} \xi^2} d\xi \left. \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к асимптотическому представлению решения (5.186), (5.187):

$$P(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} e^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{\xi^2}{2}} \operatorname{erfc} \frac{x^2}{2l \sqrt{\kappa_1 t} \xi^2} d\xi$$

или после замены переменной интегрирования и перехода к унифицированным комплексам фильтрационных параметров

$$\kappa^* = \frac{k_1}{\mu \beta_2}; \quad \theta^* = \frac{1}{\sigma^2 \kappa_2}; \quad \sigma = \frac{2}{l} \quad (5.203)$$

получим

$$P(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} \operatorname{erfc} \frac{x^2}{8\kappa^* \sqrt{\theta^* t} z^2} dz. \quad (5.204)$$

Нетрудно убедиться (и это будет показано в разделе 5.2.6), что данное выражение является решением краевой задачи

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa^* \sqrt{\theta^*}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{p(x, \tau) d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} = 0; \\
 & p(x, 0) = 0; \quad p(\infty, t) = 0; \quad p(0, t) = 1,
 \end{aligned} \quad (5.205)$$

уравнение в которой отличается от соответствующего уравнения (5.16) в модели с типовым блоком отсутствием среднего — емкостного — члена и совпадает с его предельной разновидностью (5.24).

На фоне физической сущности различия между уравнениями (5.16) и (5.205) принципиальное отсутствие емкостного члена в задаче (5.205) выглядит нестандартно и требует дополнительных пояснений. Воспользуемся результатами раздела 5.2.2, позволяю-

щими заменить непосредственное сопоставление уравнений (5.16) и (5.205) сравнением их волновых аналогов. Для (5.16) таковым является телеграфное уравнение вида (5.81), а для (5.205) — уравнение теплопроводности (5.78), отличающееся от (5.81), как и (5.205) от (5.16), отсутствием одного члена, в данном случае — инерционного.

Поскольку точное решение задачи пьезопроводности в рассматриваемом случае приводится к уравнению блуждания (5.88) с равными вероятностями перемещения в обе стороны, то континуальным аналогом (5.88) является уравнение теплопроводности. А этим, в свою очередь, объясняется и двучленность уравнения (5.205).

Таким образом, полученное на основе нового принципа моделирования, т. е. на базе точных решений для предложенной модели гетерогенной среды при отказе от каких-либо априорных феноменологических гипотез, уравнение (5.205) для начальных моментов переходных процессов является более простым, чем аналогичное уравнение (5.16) в модели с типовым блоком, и более общим, чем его предельная разновидность (5.24).

Нетрудно убедиться, что аналогичными свойствами при сопоставлении с выражениями (5.22), (5.25) и (5.6) обладают и полученные в разделе 5.2 уравнения для больших значений времени:

$$\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa\theta} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t p(x, \tau) \vartheta_2\left(0, \frac{t-\tau}{\theta}\right) d\tau = 0; \quad (5.206)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\theta}{3} \frac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial t} = 0, \quad (5.207)$$

где

$$\kappa = \frac{k_1 + k_2}{\mu(\beta_1 + \beta_2)}; \quad \theta = \frac{1}{\sigma^2} \frac{k_1 k_2}{\mu(\beta_1 + \beta_2)(k_1 + k_2)} \left( \frac{1}{\kappa_2} - \frac{1}{\kappa_1} \right)^2. \quad (5.208)$$

При этом уравнения (5.205) и (5.206) с точностью до расшифровки входящих в них параметров допускают согласованную интерпретацию (раздел 5.1) и связанное с ней включение решения уравнения (5.205) в качестве первого члена в решение уравнения (5.206). Последнее утверждение иллюстрируется структурой решения (5.183) задачи (5.171) с учетом связи (5.69) для уравнений (5.78) и (5.80).

Таким образом, в основу исследования процессов пьезопроводности может быть положено единое, вне зависимости от режима процесса, уравнение (5.206). Тем более что при характерном для трещиновато-пористых пород соотношении (5.4) фильтрационных характеристик составляющих сред параметры (5.203) и (5.208) попарно близки по значениям. Кстати говоря, исходя из последних формул, самому соотношению (5.4) можно придать более определенный количественный смысл.

Выбор уравнения (5.206) в качестве основания для исследования не является, конечно, обязательным. При решении частных

задач могут оказаться более удобными уравнения (5.205) и (5.207), что и следует иметь в виду.

### 5.2.6. Некоторые решения уравнений пьезопроводности

Рассмотрим вначале уравнение (5.205), которое может быть записано в простом виде:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{n} \frac{\partial^{1/2} p}{\partial t^{1/2}} = 0; \quad \eta = \chi^* \sqrt{\theta^*} = \frac{k_1}{\sigma \sqrt{\mu \beta_2 k_2}} \quad (5.209)$$

с помощью понятия производной дробного порядка

$$\frac{\partial^{1/2} p}{\partial t^{1/2}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{p(x, \tau) d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}. \quad (5.210)$$

При этой форме записи видно, что оно должно иметь автомодельное решение с параметром автомодельности  $x^2/\sqrt{t}$ . Действительно, при условиях

$$p(0, t) = 1; \quad p(\infty, t) = p(x, 0) = 0, \quad (5.211)$$

совместно с уравнением (5.209) отвечающих задаче для дренажной галереи, из выражений (5.69) и (5.78) находим

$$p = \int_0^\infty \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \frac{x}{l \sqrt{2\xi}} \right) e^{-\frac{\xi^2}{4t}} \frac{d\xi}{\sqrt{\pi t}}, \quad (5.212)$$

где

$$\tau = \frac{\chi_1 t}{l^2}; \quad a_i = \frac{\sqrt{\chi_i}}{\sqrt{\chi_1} + \sqrt{\chi_2}}; \quad \chi_i = \frac{\beta_i k_i}{\mu} \quad (i = 1, 2), \quad (5.213)$$

а функция

$$\operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \frac{x}{l \sqrt{2\xi}} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \frac{x}{l \sqrt{2\xi}}}^\infty e^{-z^2} dz \quad (5.214)$$

является решением уравнения

$$\frac{1}{2} \frac{a_1}{a_2} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial u}{\partial \bar{\xi}} = 0, \quad \bar{x} = \frac{x}{l} \quad (5.215)$$

с условиями, совпадающими с (5.211). При этом уравнение (5.215) представляет собой дифференциальный аналог уравнения блуждания (5.143), что уже отмечалось ранее для частного случая  $\alpha_1 = \alpha_2$  ( $\chi_1 = \chi_2$ ). Если в соотношение (5.212) подставить функцию (5.214), сделать замену переменных

$$\xi/(2\sqrt{\tau}) = z \quad (5.216)$$

и поменять порядок интегрирования, то приходим к совпадающей с (5.204) формуле:

$$p(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-z^2} \operatorname{erfc} \frac{x^2}{8\eta\sqrt{tz^2}} dz. \quad (5.217)$$

Приведем еще одно автомодельное решение для осесимметричной задачи:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) - \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{(p - p_0) d\tau}{\sqrt{\pi(t - \tau)}} = 0; \quad (5.218)$$

$$\left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=0} = -p_*; \quad p(x, 0) = p(\infty, t) = p_0,$$

попутно отметив, что установившееся начальное распределение входит непосредственно в исходное уравнение.

Вводя обозначение

$$p_\Delta = p - p_0 \quad (5.219)$$

и используя преобразования Лапласа (5.29), из решения (5.218) получаем

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\bar{p}_\Delta}{dr} \right) - \frac{1}{\eta} \sqrt{\lambda} \bar{p}_\Delta = 0; \quad (5.220)$$

$$\left( r \frac{d\bar{p}_\Delta}{dr} \right)_{r=0} = -\frac{p_*}{\lambda}; \quad \bar{p}_\Delta(\infty, \lambda) = 0.$$

Решение задачи (5.220) имеет вид

$$\bar{p}_\Delta = p_* \frac{K_0(r\lambda^{1/4}/\sqrt{\eta})}{\lambda}, \quad (5.221)$$

где  $K_0$  — функция Макдональда.

Для нахождения оригинала по изображению (5.221) запишем

$$\frac{1}{\lambda} K_0 \left( \frac{r\lambda^{1/4}}{\sqrt{\eta}} \right) = \frac{K_0[\sqrt{q(\lambda)}]}{q(\lambda)} s(\lambda),$$

где  $q(\lambda) = x^2 \sqrt{\lambda}/\eta$ ;  $s(\lambda) = x^2/(\eta \sqrt{\lambda})$ . Если теперь с учетом равенств [Лурье А. И., 1950 г.]

$$\frac{K_0(\sqrt{\lambda})}{\lambda} = -\frac{1}{2} \overline{\operatorname{Ei}\left(-\frac{1}{4t}\right)}; \quad -\operatorname{Ei}(-z) = \int_z^\infty e^{-\xi} \frac{d\xi}{\xi} \quad (5.222)$$

воспользоваться теоремой умножения, то после некоторых упрощений приходим к решению задачи (5.218):

$$p = p_0 - \frac{p_*}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\xi^2} \operatorname{Ei}\left(-\frac{r^2}{8\eta\sqrt{t}\xi}\right) d\xi. \quad (5.223)$$

Обратимся теперь к уравнению (5.206), решение которого при условиях (5.211) согласно зависимости (5.69) может быть представлено так:

$$p(x, t) = \int_0^\infty u(x, \xi) e^{-\xi^2/(4\tau)} \frac{d\xi}{\sqrt{\pi\tau}}; \quad \tau = \frac{\chi_1 t}{l^2}, \quad (5.224)$$

через решение краевой задачи

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} [u(x, \xi) + u(x, \xi - T)] - \\ & - \frac{2}{L^2} \frac{\partial}{\partial \xi} [u(x, \xi) - u(x, \xi - T)] = 0; \\ & u(0, \xi) = 1; \quad u(\infty, \xi) = u(x, t \leq 0) = 0, \end{aligned} \quad (5.225)$$

где использованы обозначения  $L^2 = 4\chi \sqrt{\theta}/(\sigma \sqrt{\chi_1})$ ;  $T = \sigma \sqrt{\chi_1 \theta}$ ;  $\sigma = 2/l$ .

По результатам раздела 5.2.4 находим выражение

$$\begin{aligned} u(x, \xi) = & \operatorname{erfc} \frac{x}{\sqrt{2L^2 \xi}} + \sum_{r=1}^{\lfloor \xi/T \rfloor} \sqrt{\frac{2}{r}} \Psi_{r-1} \left[ \frac{x}{\sqrt{2L^2(\xi - rT)}} \right] \times \\ & \times \Psi_r \left[ \frac{x}{\sqrt{2L^2(\xi - rT)}} \right], \end{aligned} \quad (5.226)$$

которое совместно с уравнением (5.224) определяет решение первой краевой задачи для уравнения (5.206). Интересно отметить, что, хотя данное решение и не является автомодельным, оно представимо в виде суммы слагаемых, зависящих от одного аргумента.

В случае  $\chi_1 = \chi_2$  выражение (5.226), как нетрудно убедиться, согласуется с уравнениями (5.183) и (5.170), а при условиях (5.4) вырождается в функцию (5.214), а (5.224) — в найденное выше решение задачи (5.209), (5.211).

Исходя из решения (5.224) краевой задачи, по аналогии с уравнением (5.184) можно построить функцию мгновенного точечного источника на прямой:

$$G = \int_0^\infty G_u(x, \xi) e^{-\xi^2/(4\tau)} \frac{d\xi}{\sqrt{\pi\tau}}; \quad \tau = \frac{\chi_1 t}{l^2}, \quad (5.227)$$

где согласно выражению (5.185) имеем

$$\begin{aligned} G_u(x, \xi) = & \frac{1}{\sqrt{2\pi L^2 \xi}} e^{-x^2/(2L^2 \xi)} - \sum_{r=1}^{\lfloor \xi/T \rfloor} \frac{1}{\sqrt{2L^2(\xi - rT)}} \times \\ & \times \left\{ \Psi_{r-1}^2 \left[ \frac{x}{\sqrt{2L^2(\xi - rT)}} \right] - \Psi_r^2 \left[ \frac{x}{\sqrt{2L^2(\xi - rT)}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.228)$$

Уравнение (5.207), как уже отмечалось, с точностью до обозначений совпадает с уравнением (5.6), основные задачи для

которого найдены авторами модели вложенных сред [4, 19]. В частности, решение задачи

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\theta}{3} \frac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial t} = 0; \quad (5.229)$$

$$p(0, t) = 1, \quad p(x, 0) = p(\infty, t) = 0$$

согласно работе [2] имеет вид

$$p(x, t) = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \xi x}{\xi \left(1 + \frac{\kappa \theta}{3} \xi^2\right)} e^{-\xi^2 \kappa t / \left(1 + \frac{\kappa \theta}{3} \xi^2\right)} d\xi. \quad (5.230)$$

В заключение напомним, что уравнения (5.205)–(5.207) отвечают процессу пьезопроводности в фиктивной среде, дискретным аналогом которой является совокупность узловых точек бистерженевой системы. Поэтому распределение давления в обеих составляющих средах находится из решения соответствующего уравнения пьезопроводности

$$\frac{\partial^2 p_i}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa_i} \frac{\partial p_i}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (5.231)$$

для отрезка, условия на концах которого определяются давлением в указанной фиктивной среде:

$$p_i(x, t) = P(x, t); \quad p_i(x + l, t) = P(x + l, t). \quad (5.232)$$

### 5.3. Использование модельных представлений для решения практических задач тепло- и массопереноса в трещиновато-пористых горных породах

#### 5.3.1. Гидродинамические методы исследования трещиновато-пористых пластов на базе решения обратной задачи теории упругого режима фильтрации

При проектировании разработки и для анализа результатов эксплуатации нефтяных месторождений необходимо знать фильтрационные характеристики трещиновато-пористых продуктивных пластов, и если для поровых коллекторов эти данные с достаточной точностью могут быть установлены с помощью лабораторных исследований, то общепринятым способом определения фильтрационных параметров трещиноватых пластов служат гидродинамические испытания скважин. Эта так называемая обратная задача теории упругого режима фильтрации занимает на сегодня центральное место среди задач с непосредственной практической направленностью.

В основу решения задачи положим известный [2] метод интегральных преобразований с использованием уравнений (5.205)–(5.207), записанных в цилиндрической системе координат. При

этом будем полагать, что межзерновая проницаемость  $k_2$  и упруго-емкость трещин  $\beta_1$  таковы, что

$$k_1 + k_2 \approx k_1; \quad \beta_1 + \beta_2 \approx \beta_2. \quad (5.233)$$

Соотношения (5.233) представляют собой количественно более определенную разновидность условий (5.4) и, не являясь принципиальными, в то же время позволяют рассматривать указанные уравнения в едином виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) - \frac{1}{\kappa^* \theta^*} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t [p(r, \tau) - p(r, 0)] \theta_2 \left( 0, \frac{t-\tau}{\theta^*} \right) d\tau = 0, \quad (5.234)$$

где  $p(r, 0)$  — установившееся начальное распределение.

Предположим, что бесконечно протяженный горизонтальный трещиновато-пористый пласт вскрывается скважиной радиусом  $r_0$ . (Под  $r_0$  понимается некоторая фиктивная величина, характеризующая совершенство скважины и состояние призабойной зоны.)

Будем считать, что до начала исследования скважина достаточно долго работала с постоянным дебитом, так что распределение давления по пласту можно считать установившимся:

$$p(r, 0) = p_0(0) - \frac{Q_0 \mu}{2\pi k_1 h} \ln \frac{r}{r_0}, \quad (5.235)$$

где  $p_0(0)$  — установившееся забойное давление.

Пусть в момент времени  $t=0$  устье скважины внезапно закрывается заглушкой. Тогда приток  $Q(t)$  жидкости из пласта может быть определен по формуле, предложенной И. А. Чарным [1948 г.]:

$$Q(t) = \frac{f_n + f_k}{\gamma} \frac{dp_0}{dt} - \frac{f_n}{\gamma} \frac{dp_b}{dt} - \frac{f_k}{\gamma} \frac{dp_k}{dt}, \quad (5.236)$$

где  $f_n$  и  $f_k$  — площади поперечных сечений подъемных труб и кольцевого пространства;  $p_b$  и  $p_k$  — устьевые давления на буфере и в кольцевом пространстве;  $\gamma$  — удельный вес нефти.

Таким образом, на устье скважины в соответствии с выражениями (5.51) и (5.233) имеем

$$2\pi h \frac{k_1}{\mu} r \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = Q(t); \quad Q(0) = Q_0. \quad (5.237)$$

Применяя к задаче (5.234) — (5.237) преобразование Лапласа (5.29), получаем

$$\frac{d^2 [p - p(r, 0)]}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d [p - p(r, 0)]}{dr} - \frac{\sqrt{\lambda}}{\kappa^* \theta^*} \operatorname{th} \sqrt{\lambda \theta^*} [p - p(r, 0)] = 0; \quad (5.238)$$

$$\frac{2\pi h k_1}{\mu} r \frac{d [p - p(r, 0)]}{dr} \Big|_{r=r_0} = \frac{f_n + f_k}{\gamma} \lambda [p_0 - p_0(0)] - \frac{f_n}{\gamma} \lambda [p_b - p_b(0)] - \frac{f_k}{\gamma} \lambda [p_k - p_k(0)] - \frac{Q_0}{\lambda}. \quad (5.239)$$

Ограниченнное на бесконечности решение уравнения (5.238) при условии, что  $\overline{p - p(r, 0)}|_{r=r_0} = \overline{p_0 - p_0(0)}$ , имеет вид

$$\overline{p - p(r, 0)} = \overline{p_0 - p_0(0)} \frac{K_0(\sqrt{\xi} r)}{K_0(\sqrt{\xi} r_0)}, \quad \xi = \frac{\sqrt{\lambda}}{\kappa^* \sqrt{\theta^*}}. \quad (5.240)$$

Подставляя в уравнение (5.239) вместо  $\overline{p - p(r, 0)}$  выражение (5.240) и полагая  $\lambda = 1/t_0$ , получаем

$$\Psi(t_0) = \frac{Q_0 \mu}{2\pi h k_1} \frac{K_0(\sqrt{\xi} r_0)}{\sqrt{\xi} r_0 K_1(\sqrt{\xi} r_0)}, \quad (5.241)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi(t_0) &= \frac{\Psi_0(t_0)}{1 - \frac{1}{t_0 Q_0} \overline{Q}(t_0)} = \\ &= \frac{(1/t_0) [\overline{p_0 - p_0(0)}]}{1 - \frac{f_n + f_k}{\gamma Q_0 t_0} \left[ \overline{p_0 - p_0(0)} - \frac{f_n}{f_n + f_k} \overline{p_0 - p_0(0)} - \frac{f_k}{f_n + f_k} \overline{p_0 - p_0(0)} \right]}, \end{aligned} \quad (5.242)$$

причем функция

$$\Psi_0(t_0) = (1/t_0) [\overline{p_0 - p_0(0)}] \quad (5.243)$$

соответствует случаю, когда приток жидкости в скважину после ее остановки отсутствует или же им пренебрегают:

$$Q(t) = 0 \quad \text{при } t > 0. \quad (5.244)$$

При условии, что аргумент  $z$  функций Макдональда  $K_0(z)$  и  $K_1(z)$  меньше 0,1, можно воспользоваться следующим представлением:

$$K_0(z)/[z K_1(z)] \approx -\ln(\gamma z/2); \quad \gamma = 1,781 \dots$$

Тогда из выражения (5.241) получаем основное соотношение:

$$\Psi(t_0) = -\frac{Q_0 \mu}{2\pi h k_1} \ln \left( \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{1}{\kappa^* \sqrt{\theta^*} t_0}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{\theta^*}{t_0}} r_0 \right). \quad (5.245)$$

При различных значениях параметра  $t_0$  функция, стоящая под знаком общего радикала, допускает следующие приближенные представления.

1. Пусть  $t_0 = t_{0m}$  настолько мало, что

$$t_{0m} < 0,20^*. \quad (5.246)$$

Тогда с достаточной степенью точности гиперболический тангенс в соотношении (5.245) равен единице, а само выражение приводится к виду

$$\Psi(t_{0m}) = \frac{Q_0 \mu}{8\pi h k_1} \ln t_{0m} - \frac{Q_0 \mu}{2\pi h k_1} \ln \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{r_0^2}{\kappa^* \sqrt{\theta^*}}}. \quad (5.247)$$

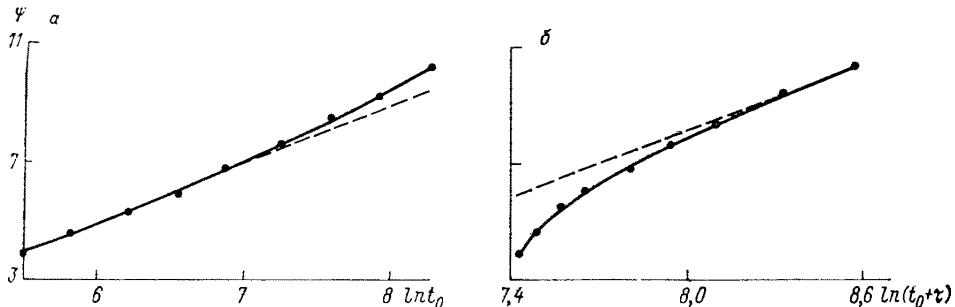


Рис. 5.4. Кривая восстановления давления в скважине в координатах  $\Psi - \ln t_0$  (a) и  $\Psi - \ln(t_0 + \tau)$  (b).

Данная зависимость соответствует тем начальным значениям времени, когда ограниченность размеров блоков на процессе пьезопроводности не сказывается. Нетрудно убедиться, что выражение (5.247) может быть получено тем же способом непосредственно на базе уравнения (5.205) [Волков И. А., 1966 г.].

2. В случае достаточно больших  $t_0 - t_{06}$ , когда

$$t_{06} > 1,50^*, \quad (5.248)$$

можно воспользоваться следующим приближенным равенством:

$$(1/\sqrt{0^* t_{06}}) \operatorname{th} \sqrt{0^*/t_{06}} \approx 1/(t_{06} + \tau); \quad \tau = 0^*/3, \quad (5.249)$$

справедливым, как нетрудно убедиться, с точностью до вторых членов разложения функций в ряд по степеням  $1/t_{06}$ . С помощью равенства (5.249) формула (5.245) может быть приведена к виду

$$\Psi(t_{06}) = \frac{Q_0 \mu}{4\pi k_1 h} \ln(t_{06} + \tau) - \frac{Q_0 \mu}{2\pi k_1 h} \ln \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{r_0^2}{\kappa^*}}, \quad (5.250)$$

совпадающему по форме записи с равенством, получаемым аналогичным образом непосредственно из уравнения (5.6) [21].

Зависимости (5.247) в координатах  $\Psi$  и  $\ln t_0$ , а также (5.250) в координатах  $\Psi$  и  $\ln(t_0 + \tau)$ , представляющие собой прямые с вдвое отличающимися тангенсами углов наклона, являются соответственно ранней и поздней асимптотами общей зависимости (5.245).

Результаты вычислений функций (5.243) по опытным данным для скважины № 141 Салымского месторождения Тюменской области представлены на рис. 5.4, a, b в виде графиков в координатах  $\Psi$  и  $\ln t_0$  и  $\Psi$  и  $\ln(t_0 + \tau)$ . На этих графиках отчетливо видно, что ранняя и поздняя асимптоты имеют согласованные с уравнениями (5.247) и (5.250) углы наклона, по тангенсу которых была определена гидропроводность пласта, а по отрезкам, отсекаемым

от осей ординат,— параметры  $r_0^2/x^*$  и  $r_0^2/(x^* \sqrt{\theta^*})$ . Обработка промыслового материала и вычисления были выполнены А. А. Гофманом [1982 г.].

Следует отметить, что ранняя асимптота позволяет получить дополнительную информацию о фильтрационных характеристиках среды, однако эта принципиальная возможность далеко не всегда может быть использована из-за различного рода искажений на начальных этапах процесса либо просто из-за отсутствия данных. Вместе с тем подобную возможность следует иметь в виду, поскольку кривые восстановления давления с характерным для трещиновато-пористых горных пород изломом встречаются довольно часто.

### 5.3.2. Процессы фильтрационно-диффузионного и конвективного тепло- и массопереноса в трещиновато-пористых горных породах

Модель с типовым пористым блоком, рассмотренная в разделе 5.1, позволяет исследовать не только процессы тепло- и пьезопроводности в трещиновато-пористой горной породе, но и более сложный механизм в этих условиях, который учитывает также и конвективный перенос жидкости и тепла в системе хорошо проводящих трещин. Подобные задачи могут представлять практический интерес для изучения вытеснения нефти водой [2], фильтрационно-диффузионного переноса растворимых веществ [Кутляров В. С., 1967 г.; Ромм Е. С., 1978 г.], а также для расчетов передачи геотермального тепла закачиваемому в нагретые трещиновато-пористые пласты теплоносителю [Ромм Е. С., 1972 г.]. Рассматриваемый в настоящем разделе подход к изучению тепло- и массообмена в гетерогенной среде может быть с одинаковым успехом использован как для трещиноватых, так и для слоистых горных пород.

В соответствии с моделью с типовым блоком общее уравнение для распределения температуры в трещине или в тонком пласте в условиях теплообмена фильтрующейся жидкости с бесконечно простирающимся по обе стороны от трещины массивом малопроницаемых вмещающих пород имеет следующий вид:

$$Lk_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - Lvc_{ж}\rho_{ж} \frac{\partial T}{\partial x} - Lc_1\rho_1 \frac{\partial T}{\partial t} + 2q = 0, \quad (5.251)$$

где  $L$  — раскрытие трещины ( $b$ ) или мощность пласта ( $h$ );  $k$  — коэффициент теплопроводности;  $v$  — скорость движения фильтрующейся жидкости;  $c$  — теплоемкость;  $\rho$  — плотность;  $x$  — координата;  $t$  — время;  $T$  — температура. Индексами «1» будем обозначать принадлежность величин к трещине или пласту, «ж» — к фильтрующейся жидкости, «п» — к вмещающей породе.

Четвертый член уравнения (5.251) представляет собой тепловой поток между трещиной (или пластом) и вмещающими поро-

дами. В случае фильтрации жидкости по одной трещине (или пласту), как это было показано в разделе 5.1,

$$q = -\sqrt{k_n c_n \rho_n} \int_0^t \frac{T(x, \tau) d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}. \quad (5.252)$$

Если же фильтрация осуществляется по системе параллельных трещин (или пластов), разделенных слоями вмещающих пород одинаковой мощности  $H$ , то

$$q = -\frac{2k_n}{H} \int_0^t T(x, \tau) \vartheta_2 \left[ 0, \frac{4k_n(t-\tau)}{H^2 c_n \rho_n} \right] d\tau, \quad (5.253)$$

где  $\vartheta_2[0, y] = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \exp[-\pi^2(k+1/2)^2 y]$  — вторая тэта-функция Якоби.

Следует подчеркнуть, что уравнение (2.251) справедливо только в том случае, когда тепловой поток в толще вмещающих пород в направлении фильтрации жидкости пренебрежимо мал по сравнению с тепловым потоком внутри трещин (или пластов). С другой стороны, теплопроводность внутри трещины (или пласта) предполагается настолько высокой, что температура по сечению области фильтрации устанавливается практически мгновенно.

Пусть в трещину (пласт) или в систему трещин (пластов) с постоянной скоростью поступает жидкость с температурой  $T_1$ . Пусть также до начала процесса весь массив горных пород с насыщающей его жидкостью имел температуру  $T_0$ . В этом случае уравнение (5.251) необходимо решить со следующими начальным и граничным условиями:

$$\begin{aligned} T(x, 0) &= T_0; \\ T(0, t) &= T. \end{aligned} \quad (5.254)$$

При этом коэффициенты  $L$ ,  $k_1$ ,  $c_1$ ,  $\rho_1$  и  $v$  для случая фильтрации жидкости в трещинах и пластах следующие (через  $v_{tr}$  и  $v_{\phi}$  обозначены истинные скорости движения жидкости в трещине и скорость фильтрации в пласте):

	$L$	$k_1$	$c_1 \rho_1$	$v$
Трещины	$b$	$k_{tr}$	$c_{jk} \rho_{jk}$	$v_{tr}$
Пласти	$h$	$k_{pl}$	$c_{pl} \rho_{pl}$	$v_{\phi}$

Введем новые безразмерные величины по формулам:

$$\lambda = \frac{4k_n c_n \rho_n x}{L^2 v c_{jk} \rho_{jk} c_1 \rho_1}; \quad \theta = \frac{4k_n c_n \rho_n t}{L^2 c_1^2 \rho_1^2}; \quad (5.255)$$

$$\gamma = \frac{H c_n \rho_n}{L c_1 \rho_1}; \quad 2a^2 = \frac{L^2 v^2 c_{jk}^2 \rho_{jk}^2 c_1 \rho_1}{4k_n k_1 c_n \rho_n}; \quad w = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}.$$

Тогда уравнения для конвективного переноса тепла в трещиноватых и слоистых средах запишутся в следующем виде:

- для единичной трещины (пласта)

$$\frac{1}{2a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial w}{\partial \lambda} - \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^\theta \frac{w(\lambda, \tau) d\tau}{\sqrt{\pi(\theta - \tau)}} = 0; \quad (5.256)$$

- для системы трещин (пластов)

$$\frac{1}{2a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial w}{\partial \lambda} - \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^\theta w(\lambda, \tau) \vartheta_2 \left[ 0, \frac{\theta - \tau}{\gamma^2} \right] d\tau = 0 \quad (5.257)$$

с начальным и граничным условиями

$$\begin{cases} w(\lambda, 0) = 0; \\ w(0, \theta) = 1. \end{cases} \quad (5.258)$$

Можно рассмотреть совершенно аналогичную задачу и в терминах диффузионно-фильтрационного переноса вещества. Пусть, например, в трещину (пласт) или в систему трещин (пластов) с постоянной скоростью поступает жидкость с некоторой определенной концентрацией растворенного вещества  $C_1$ , а до начала процесса вся толща горных пород была насыщена раствором этого же вещества с концентрацией  $C_0$ . Это означает, что уравнение

$$LD_1 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - Lv \frac{\partial C}{\partial x} - mL \frac{\partial C}{\partial t} + 2q = 0 \quad (5.259)$$

необходимо решить при следующих начальном и граничном условиях:

$$\begin{cases} C(x, 0) = C_0; \\ C(0, t) = C_1. \end{cases} \quad (5.260)$$

Здесь

$$q = \begin{cases} -\sqrt{D_n} \int_0^t \frac{(C - C_0) d\tau}{\sqrt{\pi(t - \tau)}} & \text{— для единичной трещины (пласта);} \\ -\frac{2D_n}{H} \int_0^t (C - C_0) \vartheta_2 \left[ 0, \frac{4D_n(t - \tau)}{H^2} \right] d\tau & \text{— для системы трещин (пластов),} \end{cases} \quad (5.261)$$

где  $D$  — коэффициент диффузии;  $m$  — пористость; коэффициенты для случаев фильтрации в трещинах и в пластах следующие:

	$D_1$	$L$	$v$	$m$
Трещины	$D_{tr}$	$b$	$v_{tr}$	1
Пласти	$D_{pl}$	$h$	$v_{\phi}$	$m_{pl}$

Если в задаче (5.259)–(5.260) перейти к безразмерным величинам по следующим формулам:

$$\lambda = \frac{4D_{\text{пп}}x}{L^2vm}; \quad \gamma = \frac{H}{Lm}; \quad \theta = \frac{4D_{\text{пп}}t}{L^2m^2}; \quad 2a^2 = \frac{L^2v^2m}{4D_1D_{\text{пп}}}; \quad w = \frac{C - C_0}{C_1 - C_0}, \quad (5.262)$$

то эта задача сводится к уже полученным уравнениям (5.256)–(5.258).

Рассмотрим сначала задачу (5.256)–(5.259). Используя преобразование Лапласа

$$\bar{w}(\lambda, p) = \int_0^\infty w(\lambda, t) \exp(-pt) dt, \quad (5.263)$$

(где  $p$  — параметр преобразования), найдем операторное уравнение

$$\frac{1}{2a^2} \frac{d^2\bar{w}}{d\lambda^2} - \frac{d\bar{w}}{d\lambda} - (p + \sqrt{p}) \bar{w} = 0, \quad (5.264)$$

которое надо решить при условиях

$$\begin{cases} w(0, p) = 1/p; \\ w(\infty, p) — \text{ограничено.} \end{cases} \quad (5.265)$$

Решение задачи (5.264)–(5.265) имеет вид

$$\bar{w}(\lambda, p) = \frac{1}{p} \exp\left\{-a^2\lambda\left[1 - \sqrt{1 - 2(p + \sqrt{p})/a^2}\right]\right\}.$$

Оригинал искомой функции  $w(\lambda, \theta)$  определяется с помощью формулы обращения [14]:

$$w(\lambda, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \exp\left\{-a^2\lambda\left[1 - \sqrt{2(p + \sqrt{p})/a^2}\right] + p\theta\right\} \frac{dp}{p}.$$

Так как подынтегральная функция имеет одну особую точку, а именно полюс первого порядка в точке  $p=0$ , заменим прямую интегрирования ( $a - i\infty$ ,  $a + i\infty$ ) контуром, изображенным на рис. 5.5, а. Согласно лемме Жордана [14] интеграл вдоль дуг  $C_{R1}$  и  $C_{R2}$  стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ , так как  $\lim_{|p| \rightarrow \infty} |w(\lambda, p)| = 0$ , а

$$\int_{C_R} \bar{w}(\lambda, p) e^{p\theta} = \underset{p \rightarrow 0}{\text{res}} w(\lambda, p) e^{p\theta} = 2\pi i.$$

Таким образом,

$$w(\lambda, \theta) = 1 + \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_r^R \bar{w}(\lambda, p) e^{p\theta} dp + \frac{1}{2\pi i} \int_R^r \bar{w}(\lambda, p) e^{p\theta} dp \right].$$

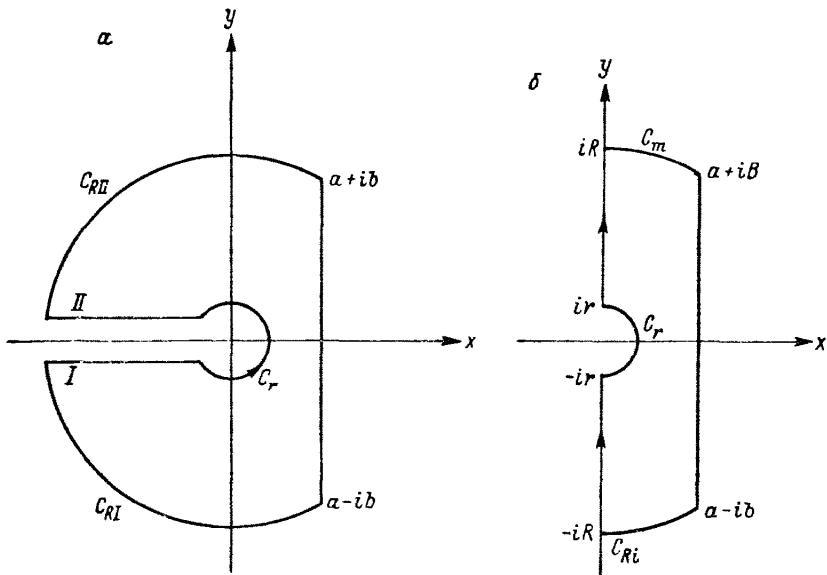


Рис. 5.5. Схемы к преобразованию области интегрирования.

Учитывая, что на берегу I  $p = -x$  и  $\sqrt{p} = -i\sqrt{x}$ , а на берегу II  $p = -x$  и  $\sqrt{p} = i\sqrt{x}$ , переходя к пределам и выполняя некоторые преобразования, находим

$$w(\lambda, \theta) = 1 - 2\pi \int_0^\infty \exp \left\{ -\alpha^2 \lambda \left[ 1 - \sqrt{\sqrt{\left(\frac{1}{2} - z^2\right)^2 + \left(\frac{z}{\alpha}\right)^2} + \left(\frac{1}{2} - z^2\right)} - \alpha^2 z^2 \theta \right] \sin \alpha^2 \lambda \sqrt{\sqrt{\left(\frac{1}{2} - z^2\right)^2 + \left(\frac{z}{\alpha}\right)^2} - \left(\frac{1}{2} - z^2\right)} \right\} \frac{dz}{z}. \quad (5.266)$$

Рассмотрим теперь задачу (5.257) — (5.258). Операторное уравнение с соответствующими начальными и граничными условиями будет иметь вид

$$\frac{1}{2\alpha^2} \frac{d^2 \tilde{w}}{d\lambda^2} - \frac{d\tilde{w}}{d\lambda} - (p + \sqrt{p} \operatorname{th} \gamma \sqrt{p}) \tilde{w} = 0; \quad (5.267)$$

$$\begin{cases} \tilde{w}(0, p) = 1/p; \\ \tilde{w}(\infty, p) \text{ — ограничено.} \end{cases} \quad (5.268)$$

Решение задачи (5.267) — (5.268) известно:

$$\tilde{w}(\lambda, p) = \frac{1}{p} \exp \left\{ -\alpha^2 \lambda \left[ 1 - \sqrt{1 - 2(p + \sqrt{p} \operatorname{th} \gamma \sqrt{p})/\alpha^2} \right] \right\}.$$

Используя теорему подобия и формулу обращения [14], получаем

$$w(\lambda, \frac{\theta}{\gamma^2}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \exp \left\{ -\alpha^2 \lambda \left[ 1 - \sqrt{1 - 2(p + \sqrt{p} \operatorname{th} \gamma \sqrt{p})/\alpha^2} \right] + \frac{p\theta}{\gamma^2} \right\} \frac{dp}{p}.$$

Так как

$$\operatorname{th} \sqrt{p} = \operatorname{sh} \sqrt{p} / \cos(i \sqrt{p}),$$

то точки  $\operatorname{Re}(p) = -[(2k+1)\pi/2]^2$  есть существенно особые точки подынтегральной функции. Кроме того, точка  $p=0$  является ее полюсом первого порядка. В связи с этим заменим прямую интегрирования  $(a-i\infty, a+i\infty)$  контуром, изображенным на рис. 5.5, б. Значения интегралов вдоль дуг  $C_{R1}$  и  $C_{R2}$  стремятся к нулю при  $R \rightarrow \infty$ , так как  $\lim_{|p| \rightarrow \infty} |\varpi(\lambda, p)| = 0$ , а

$$\int_{C_r} \bar{\varpi}(\lambda, p) e^{p\theta/\gamma^2} dp = \frac{1}{2} \operatorname{res} \bar{\varpi}(\lambda, p) e^{p\theta/\gamma^2} = \pi i,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \varpi\left(\lambda, \frac{\theta}{\gamma^2}\right) = & \frac{1}{2} + \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left[ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-iR}^{-ir} \bar{\varpi}(p, \lambda) e^{p\theta/\gamma^2} dp + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{ir}^{iR} \bar{\varpi}(p, \lambda) e^{p\theta/\gamma^2} dp \right]. \end{aligned}$$

Учитывая, что на отрезке  $(-iR, -ir) - p = -iy$  и  $\sqrt{p} = \sqrt{y/2} - i\sqrt{y/2}$ , а на отрезке  $(ir, iR) - p = iy$  и  $\sqrt{p} = \sqrt{y/2} + i\sqrt{y/2}$ , переходя к пределам и выполняя некоторые преобразования, находим

$$\begin{aligned} \varpi(\lambda, \theta/\gamma^2) = & \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp \left\{ -\lambda \left[ a^2 - \frac{a}{\gamma \sqrt{2}} \times \right. \right. \\ & \times \sqrt{\sqrt{(a^2\gamma^2 + \gamma z\varphi)^2 + (z^2 + \gamma z\Psi)^2} + (a^2\gamma^2 + \gamma z\varphi)^2} \left. \left. \right] \times \right. \\ & \times \sin \left[ \frac{z^2\theta}{\gamma^2} - \frac{a\lambda}{\gamma \sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(a^2\gamma^2 + \gamma z\varphi)^2 + (z^2 + \gamma z\Psi)^2} - (a^2\gamma^2 + \gamma z\varphi)^2} \right] \left. \frac{dz}{z} \right\}, \end{aligned} \quad (5.269)$$

где

$$\varphi = \frac{\operatorname{sh} z - \sin z}{\operatorname{ch} z + \cos z}; \quad \Psi = \frac{\operatorname{sh} z + \sin z}{\operatorname{ch} z + \cos z}.$$

### 5.3.3. Определение динамики теплоотдачи подземных тепловых котлов в связи с использованием геотермальной энергии

В последнее время в связи с разработкой методов использования геотермических ресурсов верхних слоев земной коры [Дядькин Ю. Д., Парицкий Ю. М. и др., 1970 г.] приобретают все большее значение задачи о теплопереносе в трещиноватых горных породах при фильтрации в них воды.

Рассмотрим задачу о распределении температур в трещиноватом массиве горных пород, характеризующихся одной системой горизонтальных трещин с раскрытием, равным  $b$ , и расстоянием между трещинами, равным  $l$ . Пусть в начальный момент времени температура массива была  $T_1$ , после чего в трещины массива начинает поступать вода с температурой  $T_2$  (причем  $T_2 < T_1$ ) и со скоростью фильтрации, равной  $v_\phi$ . В условиях эксплуатации теп-

лового котла естественно считать скорость фильтрации настолько большой, что теплопроводностью по трещинам можно пренебречь, т. е. пренебречь первым членом в уравнении (5.251). В этом случае для одномерного фильтрационного потока будет действительно следующее уравнение баланса тепла:

$$v_{\Phi} c_{\text{в}} \rho_{\text{в}} \frac{\partial T}{\partial x} + m_{\text{т}} c_{\text{в}} \rho_{\text{в}} \frac{\partial T}{\partial t} - \sigma q (T, x, t) = 0, \quad (5.270)$$

которое необходимо решить совместно с начальным и граничным условиями

$$\begin{cases} T(x, 0) = T_1; \\ T(0, t) = T_2, \end{cases} \quad (5.271)$$

где  $c_{\text{в}}$  — удельная теплоемкость воды;  $\rho_{\text{в}}$  — плотность воды;  $T(x, t)$  — температура;  $x$  — координата;  $t$  — время;  $\sigma$  — удельная поверхность трещин;  $m_{\text{т}}$  — трещинная пористость;  $q$  — тепловой поток. Из-за малости раскрытия трещин, так же как и ранее, будем полагать, что температура по сечению трещины устанавливается практически мгновенно. Тогда для определения теплового потока  $q$  можно моделировать блоки массива теплоизолированными стержнями длиной  $l/2$ . В этом случае тепловой поток будет определяться выражением, аналогичным формуле (5.11):

$$q = - \frac{2k_{\text{п}}(T_1 - T_2)}{l} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t u(x, \tau) \vartheta_2 \left[ 0, \frac{4a_{\text{п}}^2(t - \tau)}{l^2} \right] d\tau,$$

где  $u = (T_1 - T)/(T_1 - T_2)$ ;  $\vartheta_2(0, y)$  — вторая тэта-функция Якоби.

Введем следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \lambda &= 2\sigma a_{\text{в}}^2 \varepsilon^2 x / (b v_{\Phi}); \quad \theta = 4a_{\text{в}}^2 \varepsilon^2 t / b^2; \quad \zeta = 4a_{\text{в}}^2 \varepsilon^2 \tau / b^2; \\ \gamma &= l c_{\text{п}} \rho_{\text{п}} / (b c_{\text{в}} \rho_{\text{в}}); \quad \varepsilon = (k_{\text{п}} a_{\text{в}}) / (k_{\text{п}} a_{\text{п}}). \end{aligned} \quad (5.272)$$

Тогда задача (5.270) — (5.271) перепишется в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^\theta u(\lambda, \zeta) \vartheta_2 \left[ 0, \frac{\theta - \zeta}{\gamma^2} \right] d\zeta = 0; \quad (5.273)$$

$$\begin{cases} u(0, 0) = 1; \\ u(\lambda, 0) = 0. \end{cases} \quad (5.274)$$

Для решения задачи (5.273) — (5.274) воспользуемся операторным методом Лапласа. Совершив соответствующее преобразование, найдем

$$\frac{dF(p)}{d\lambda} + pF(p) + F(p) \sqrt{p} \operatorname{th} \gamma \sqrt{p} = 0; \quad (5.275)$$

$$\text{при } \lambda = 0 \quad F(p) = 1/p, \quad (5.276)$$

где  $F(p) = u(\lambda, \theta)$ ;  $p$  — параметр преобразования.

Решением уравнения (5.275) с начальным условием (5.276) будет являться функция

$$F(p) = (1/p) \exp(-p\lambda - \lambda \sqrt{p} \operatorname{th} \gamma \sqrt{p}).$$

Обозначив  $p_1^2 = p_1$  и  $\beta = \lambda/\gamma$ , получим

$$F(p_1) = (\gamma^2/p_1) \exp(-p_1\lambda/\gamma^2 - \beta\sqrt{p_1} \operatorname{th} \sqrt{p_1}). \quad (5.277)$$

Для отыскания оригинала изображения (5.277) исследуем функцию

$$F_1(p_1) = (1/p_1) \exp(-\beta\sqrt{p_1} \operatorname{th} \sqrt{p_1}).$$

Согласно формуле обращения [14] можно написать

$$u_1(\beta, \varphi_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{-\beta\sqrt{p_1} \operatorname{th} \sqrt{p_1} + p_1\varphi_1} \frac{dp_1}{p_1}. \quad (5.278)$$

Легко видеть, что точки  $\operatorname{Re}(p_1) = -[2(k+1)\pi/2]^2$  есть существенно особые точки функции  $F_1(p_1)$ . Кроме того, точка  $p_1=0$  является ее полюсом первого порядка. В связи с этим заменим интегрирование вдоль прямой  $(a-i\infty, a+i\infty)$  в формуле (5.278) интегрированием по контуру, изображенному на рис. 5.5, б, при условии стремления  $|R|$  к бесконечности. Согласно лемме Жордана [14] значения интегралов вдоль дуг  $I$  и  $II$  окружности в центре и в точке  $p_1=0$  при  $|R| \rightarrow \infty$  стремятся к нулю, поэтому можно написать

$$u_1(\beta, \varphi_1) = \lim_{R \rightarrow \infty} (I_1 + I_2 + I_3)/(2\pi i),$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_R^{\infty} \exp(-\beta\sqrt{-iy} \operatorname{th} \sqrt{-iy} - iy\varphi_1) \frac{dy}{y}; \\ I_2 &= \int_{-R}^0 \exp(-\beta\sqrt{iy} \operatorname{th} \sqrt{iy} + iy\varphi_1) \frac{dy}{y}; \\ I_3 &= \int_{C_r} \exp(-\beta\sqrt{p_1} \operatorname{th} \sqrt{p_1} + p_1\varphi_1) \frac{dp_1}{p_1}. \end{aligned}$$

Устремляя  $R$  к бесконечности и  $\epsilon$  к нулю, получаем

$$\begin{aligned} u_1(\beta, \varphi_1) &= \frac{1}{2\pi i} \left[ \pi i + \int_0^{\infty} (e^{-\beta\sqrt{iy} \operatorname{th} \sqrt{iy} + iy\varphi_1} - \right. \\ &\quad \left. - e^{-\beta\sqrt{-iy} \operatorname{th} \sqrt{-iy} - iy\varphi_1}) \frac{dy}{y} \right] = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \pi i + 2i \int_0^{\infty} e^{\operatorname{Re}[iy\varphi_1 - \beta\sqrt{iy} \operatorname{th} \sqrt{iy}]} \times \right. \\ &\quad \left. \times \sin[\operatorname{Im}(iy\varphi_1 - \beta\sqrt{iy} \operatorname{th} \sqrt{iy})] \frac{dy}{y} \right\}, \end{aligned}$$

так как  $I_3 = \pi i + 0(\epsilon)$ .

Так как

$$\operatorname{Re}[iy\varphi_1 - \beta\sqrt{iy} \operatorname{th} \sqrt{iy}] = -\beta \frac{\sqrt{2y}}{2} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{2y} - \sin \sqrt{2y}}{\operatorname{ch} \sqrt{2y} + \cos \sqrt{2y}} = -\frac{\beta z}{2} \frac{A(z)}{C(z)},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[iy\varphi_1 - \beta\sqrt{iy} \operatorname{th} \sqrt{iy}] &= y\varphi_1 - \beta \frac{\sqrt{2y}}{2} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{2y} + \sin \sqrt{2y}}{\operatorname{ch} \sqrt{2y} + \cos \sqrt{2y}} = \\ &= \frac{\beta z^2}{2} - \frac{\beta z}{2} \frac{B(z)}{C(z)}, \end{aligned}$$

то

$$u_1(\beta, \varphi_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\beta z}{2} \frac{A(z)}{C(z)}\right) \sin\left(\frac{\varphi_1 z^2}{2} - \frac{\beta z}{2} \frac{B(z)}{C(z)}\right) \frac{dz}{z}.$$

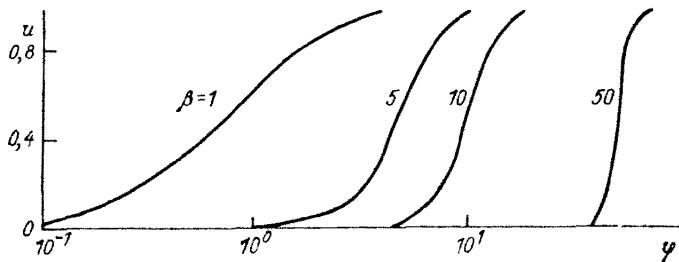


Рис. 5.6. Графики функции  $u(\beta, \varphi)$  при различных значениях параметра  $\beta$ .

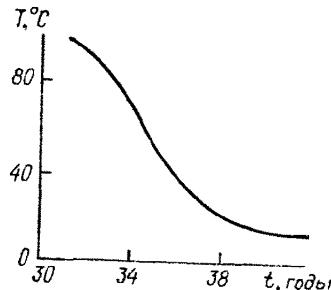


Рис. 5.7. Зависимость температуры воды на выходе из подземного котла от времени.

Возвращаясь к основному решению (5.277) и учитывая известную теорему запаздывания [14], находим

$$u(\beta, \varphi) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\beta z}{2} \frac{A(z)}{C(z)}\right) \sin\left[\frac{\varphi z^2}{2} - \frac{\beta z}{2} \frac{B(z)}{C(z)}\right] \frac{dz}{z}, \quad (5.279)$$

где

$$z = \sqrt{2y}; \varphi = (\theta - \lambda)/\gamma^2, \beta = \lambda/\gamma.$$

Численные расчеты функции  $u(\beta, \varphi)$  выполнены на ЭВМ и по этим данным построены графики, часть которых представлена на рис. 5.6. Легко показать, что решение (5.279) справедливо и для радиального фильтрационного потока в массиве. В этом случае безразмерные параметры  $\lambda$ ,  $\beta$  и  $\varphi$  будут иметь следующий вид:

$$\lambda_r = 2a_B \epsilon r \sqrt{\pi h \sigma / Q_B}; \beta_r = (\lambda_r^2 - \lambda_c^2) / (2\gamma); \varphi_r = (\theta - \beta_r \gamma r) / \gamma^2,$$

где  $h$  — мощность (высота) теплового котла;  $r$  — его радиус.

На основе полученного решения задачи был произведен расчет динамики выноса тепла фильтрационным потоком из теплового котла. При этом значения параметров, определяющих процесс, заимствованы из упомянутой ранее работы Ю. Д. Дядькина и др. и принятые следующими:  $r = 250$  м,  $h = 500$  м,  $T_1 = 100$  °C,  $T_2 = -15$  °C,  $l = 5$  м,  $b = 2 \cdot 10^{-2}$  см,  $a_B^2 = 0,2 \cdot 10^{-2}$  см<sup>2</sup>/с,  $k_B = 0,2 \times 10^{-2}$  кал/(см·с·°C),  $\rho_B = 1 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_B = 1,0$  кал/(г·°C),  $a_{\pi}^2 = 0,86 \cdot 10^{-2}$  см<sup>2</sup>/с,  $k_{\pi} = 0,55 \cdot 10^{-2}$  кал/(см·с·°C),  $c_{\pi} = 0,25$  кал/(г·°C),  $\rho_{\pi} = 2,5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $Q = 200$  м<sup>3</sup>/ч,  $r_0 = 10$  см. Результаты проведенного расчета представлены на рис. 5.7.

### Нелинейно-упругая модель пористой среды

Известно, что коренные горные породы в условиях их естественного залегания характеризуются напряженным состоянием, связанным с массой вышележащих толщ и давлением насыщающих горную породу жидкостей. Если рассматривать однородный нетронутый массив пород, залегающий на некоторой глубине в районах со «спокойной» тектоникой, то напряжение, испытываемое элементом этого массива, можно считать равномерным и всесторонним, т. е. подобным давлению гидростатического столба жидкости. Если же горная порода вскрывается скважинами, шахтами или какими-либо иными горными выработками, а также если в окрестностях массива возводится крупное инженерное сооружение, то состояние, в котором находится порода, является сложнонапряженным, т. е. таким, что в каждой точке массива существуют три неравных другу другу главных напряжения, которые изменяются и по значению и по направлению от точки к точке. Горная порода может испытывать сложнонапряженное состояние и при отсутствии каких-либо горно-проходческих работ; такие условия могут иметь место, если порода неоднородна или находится в зоне активных тектонических движений.

Многочисленные экспериментальные исследования [8, 26] показывают, что основные физические свойства горной породы (пористость, проницаемость, коэффициент сжимаемости ее порового пространства) достаточно сильно зависят от ее напряженного состояния. Это обстоятельство может сыграть значительную роль при оценке притоков нефти, воды и газа к скважинам глубоко залегающих продуктивных пластов, при разработке методов борьбы с водопроявлениями при бурении шахт, штолен и других горных выработок в обводненных массивах горных пород, а также при расчетах фильтрации под гидротехническими сооружениями. С другой стороны, знание зависимости электрических свойств горной породы от напряженного состояния позволяет более достоверно интерпретировать промыслово-геофизические данные, широко используемые для изучения разреза разведочных и эксплуатационных скважин.

#### 6.1. Задачи исследования

До последнего времени единственным способом изучения горных пород в условиях напряженного состояния являлся способ

лабораторного моделирования. Известно, что продуктивные нефтяные пласти, залегающие на глубине 3—5 км, могут испытывать давления до 75—125 МПа. Конструирование и создание лабораторных установок, способных создавать на образце подобные давления и позволяющих при этом экспериментально определять его проницаемость, является очень сложной задачей, решение которой доступно лишь крупным, хорошо технически оснащенным научно-исследовательским организациям. С другой стороны, как уже указывалось, многие задачи о фильтрации в массиве горных пород связаны с его сложнонапряженным состоянием. Современная же экспериментальная техника позволяет моделировать в лаборатории условия равномерного сжатия и лишь частный случай сложнонапряженного состояния, когда из трех главных напряжений, действующих на породу, два равны друг другу. Кроме того, решение фильтрационной задачи в массиве горных пород (аналитическим методом или методом конечных элементов) предусматривает необходимость знания главных компонентов тензора проницаемости в каждой точке массива, тогда как экспериментальные данные могут быть получены лишь для отдельных образцов, отобранных из тех участков, где пробурены скважины.

Все эти обстоятельства заставляют искать такое решение задачи, которое предусматривало бы возможность вычисления компонентов тензора проницаемости по заданным условиям напряженного состояния породы. Иными словами, необходимо создать такую гидродинамическую структурную модель горных пород, которая бы позволила связать фильтрационные, емкостные, электрические и упругие свойства породы с параметрами структуры ее порового пространства и тем самым друг с другом (см. рис. в. 1).

## **6.2. Принципы построения модели, ее геометрические характеристики и деформационные свойства**

Исследования А. Райдера [46], Х. Шуманна [1949 г.] и И. Фэтта [37] свидетельствуют о том, что в реальных сцементированных горных породах структура порового пространства характеризуется двумя видами пустот: узкими щелевидными каналами и связанными с ними объемами неправильной формы. Особенно убедительными в этом отношении являются эксперименты И. Фэтта, проведенные с резиновыми шариками, моделирующими твердые частицы породы (раздел 1.2.4).

Исходя из результатов этих исследований Т. Н. Кречетовой и Е. С. Роммом [1981 г.] была предложена нелинейно-упругая гидродинамическая модель пористой среды, обладающая определенными структурными и деформационными свойствами. Согласно этой модели поровое пространство реальной пористой среды представляется в виде полостей двух типов: узких щелевидных каналов и гидродинамически связанных с ними сферических полостей гораздо большего гидравлического радиуса. Будем в дальнейшем для простоты называть щелевидные каналы трещинами, имея

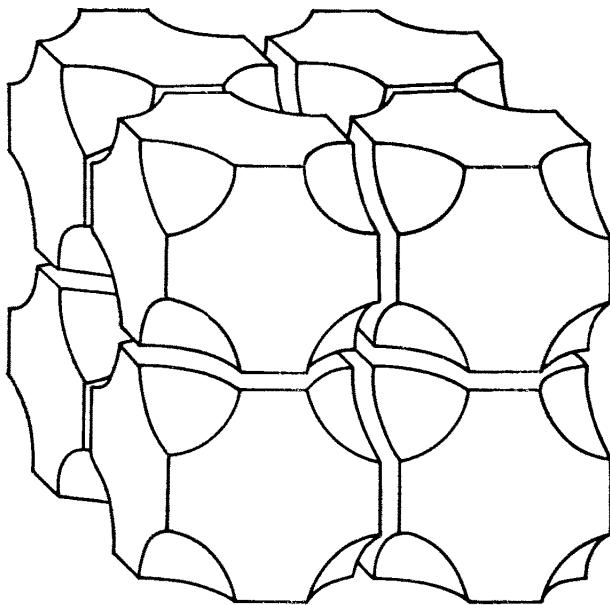


Рис. 6.1. Схема структурной нелинейно-упругой модели пористой среды.

в виду, что морфологически у них нет ничего общего с реальными трещинами в трещиноватой горной породе, так как они являются модельным представлением сужений пор в пористой горной породе.

Трещины в модели группируются в системы с параметрами, зависящими в общем случае от ориентации системы в пространстве, которая определяется вектором нормали к плоскости трещины (раздел 4.1). Ограничимся в дальнейшем рассмотрением однородной и изотропной среды. Тогда раскрытия трещин и их густоты во всех системах должны быть одинаковыми, а также распределение нормалей к системам трещин по полному телесному углу должно быть равномерным. В случае трех взаимно перпендикулярных систем трещин с равными значениями раскрытий и густот рассмотриваемая модель будет иметь вид, изображенный на рис. 6.1.

Будем полагать, что под действием нагрузки изменение физических свойств модели будет происходить главным образом за счет объемных изменений пространства трещин, которые вызываются нормальной к плоскости трещины составляющей напряжения, тогда как деформациями сферических включений и минерального скелета можно пренебречь как малыми величинами. Из этого предположения следует, что, вообще говоря, не имеет значения ни форма включений, ни их местоположение.

Поровое пространство модели включает в себя как объем, занимаемый системами трещин, так и объем сферических полостей, поэтому коэффициент пористости можно представить в виде

$$m = m_t + m_{\text{сф}}, \quad (6.1)$$

где  $m_t$  — коэффициент трещинной пористости модели;  $m_{\text{сф}}$  — коэффициент пористости, обусловленный только сферическими включениями.

Согласно сделанному предположению о пренебрежимо малых деформациях сферических включений для общей пористости модели можно написать  $m_0 = m_{0t} + m_{\text{сф}}$  (где  $m_0$  и  $m_{0t}$  — соответственно общая и трещинная пористости модели при нулевом значении давления). Если положить далее, что  $m_{\text{сф}} = \alpha m_0$ , то

$$m_{0t} = m_0 (1 - \alpha), \quad (6.2)$$

где  $\alpha$  — некоторый структурный коэффициент, характеризующий долю порового пространства модели, приходящегося на сферические включения.

Будем полагать, что изменения таких физических свойств модели, как ее пористость, проницаемость, удельное электрическое сопротивление и сжимаемость порового пространства, определяются лишь деформациями трещин.

Относительно упругих свойств породы примем следующие не противоречащие экспериментальным данным предположения.

1. Модуль Юнга модели не является постоянной величиной, а зависит от нормального эффективного напряжения, действующего вдоль главной оси нагружения:

$$E(\sigma_i) = A(1 - e^{-B\sigma_i}) + C \quad (i = 1, 2, 3), \quad (6.3)$$

где  $E$  — модуль Юнга;  $\sigma_i$  — нормальное эффективное напряжение;  $A$ ,  $B$  и  $C$  — постоянные, имеющие простой физический смысл. При малых нагрузках модуль Юнга характеризуется некоторым минимальным значением  $C$ , которое определяется упругими свойствами контактов на стенках щелевидных каналов. При больших нагрузках, когда стенки практически сомкнутся, модуль Юнга принимает максимальное значение  $A + C$ , которое определяется упругими свойствами твердых компонентов модели;  $B$  — скорость перехода от минимального к максимальному значению с ростом напряжения. Как показала обработка экспериментальных данных, при давлениях до 100 МПа можно пользоваться более простой зависимостью, которая получается из формулы (6.3), если ограничиться первым членом разложения в ряд экспоненциальной функции:

$$E(\sigma_i) = C + g\sigma_i \quad (g = AB; \quad i = 1, 2, 3). \quad (6.4)$$

2. Будем считать, что рассматриваемая среда изотропна относительно упругих свойств и при действии разноосного неравномерного нагружения связь между малыми изменениями деформаций и напряжений в координатных осях, совпадающих с главными

осами тензоров  $\boldsymbol{\epsilon}$  и  $\boldsymbol{\sigma}$ , может быть выражена законом Гука в дифференциальной форме:

$$d\epsilon_i = \sum_{k=1}^3 \theta_{ik} \frac{d\sigma_k}{E(\sigma_k)} \quad (i = 1, 2, 3),$$

где

$$\theta_{ik} = \begin{cases} -1 & \text{при } i = k; \\ v & \text{при } i \neq k; \end{cases}$$

$v$  — коэффициент Пуассона.

Интегрируя эти выражения с помощью формул (6.3), получаем

$$\epsilon_i = \frac{1}{A+C} \sum_{k=1}^3 \theta_{ik} \left[ \sigma_k + \frac{1}{B} \ln \frac{E(\sigma_k)}{C} \right] \quad (i = 1, 2, 3). \quad (6.5)$$

Если для интегрирования воспользоваться формулой (6.4), то

$$\epsilon_i = \frac{1}{g} \sum_{k=1}^3 \theta_{ik} \ln \left( 1 + \frac{g}{C} \sigma_k \right) \quad (i = 1, 2, 3),$$

где  $g = AB$ . При этом в случае равномерного сжатия  $\sigma_i = \sigma$ ,  $\epsilon = 3\epsilon_i$  и

$$\epsilon = -[3(1-2v)/g] \ln(1 + g\sigma/C). \quad (6.6)$$

### 6.3. Связь между компонентами разноосного нагружения модели и ее физическими свойствами

Предположим, что рассматриваемая структурная модель заполнена несжимаемой жидкостью, внутри которой существует градиент давления  $\nabla p$ , а сама модель подвергается сжатию [12]. Тогда истинная скорость движения жидкости в трещинах любой системы будет определяться формулой Буссинеска:

$$\vec{u} = -\frac{b^2}{12\mu} (\nabla p \vec{r}) \vec{r}, \quad (6.7)$$

где  $\vec{u}$  — истинная скорость;  $\mu$  — вязкость жидкости;  $\vec{r}$  — единичный вектор, направленный вдоль проекции вектора  $\nabla p$  на плоскость трещины;  $b$  — раскрытие трещины, которое является функцией нормального к поверхности трещины напряжения.

Разложим вектор  $\nabla p$  по двум направлениям, определяемым вектором  $\vec{r}$  и единичным вектором нормали к плоскости трещины  $\vec{n}$ :

$$\nabla p = (\nabla p \vec{r}) \vec{r} + (\nabla p \vec{n}) \vec{n}, \quad (6.8)$$

но  $(\nabla \vec{p} \vec{n}) \vec{n} = \vec{\nabla} \vec{p} \vec{n} \vec{n}$ , где  $\vec{n} \vec{n}$  — векторная диада, откуда

$$\vec{u} = -\frac{b^2}{12\mu} [\mathbf{I} - \vec{n} \vec{n}] \nabla p, \quad (6.9)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичный тензор.

Анализируя структуру рассматриваемой модели, легко обнаружить, что эффективная пористость за счет систем трещин, нормали которых заключены в бесконечно малом элементе телесного угла  $d\omega$ , равна

$$dm_t = \frac{Nb}{b+L} \frac{d\omega}{4\pi}, \quad (6.10)$$

где  $N$  — общее число систем трещин в модели;  $L$  — расстояние между трещинами в системе.

Тогда согласно формуле (6.9) выражение для дифференциала скорости фильтрации, обусловленной системами трещин, определяющие нормали которых содержатся в бесконечно малом элементе телесного угла  $d\omega$ , имеет вид

$$d\vec{v} = -\frac{D(\omega) N}{48\pi\mu} [\mathbf{I} - \vec{n} \vec{n}] \nabla p d\omega, \quad (6.11)$$

где  $D(\omega) = b^3/(b+L)$ .

Так как при воздействии нагрузок изменение порового пространства модели происходит только за счет деформации трещин и при этом их раскрытие меняется лишь за счет нормальной к плоскости трещины составляющей напряжения, то справедливо следующее соотношение:

$$b + L = b_0 + L + (b_0 + L) \varepsilon_n,$$

где  $b_0$  — раскрытие трещины при отсутствии нагрузки;  $\varepsilon_n$  — нормальная к плоскости трещины составляющая деформации.

Отсюда следует, что  $b + L = (b_0 + L)(1 + \varepsilon_n)$  и

$$b = b_0 \left( 1 + \frac{b_0 + L}{b_0} \varepsilon_n \right). \quad (6.12)$$

Согласно формуле (6.10)

$$b = b_0 (1 + N \varepsilon_n / m_{0t})$$

или, подставляя сюда выражение для трещинной пористости при нулевом давлении, находим

$$b = b_0 \{1 + N \varepsilon_n / [m_0 (1 - \alpha)]\} = b_0 [1 + \varepsilon_n / (\delta m_0)], \quad (6.13)$$

где  $\delta = (1 - \alpha) / N$ .

Таким образом, согласно формулам (6.11) и (6.13) выражение для дифференциала скорости фильтрации в модели, которая испытывает воздействие трех главных напряжений, можно написать в следующем виде:

$$d\vec{v} = -\frac{ND(\omega) G(\omega)}{48\pi\mu} [\mathbf{I} - \vec{n} \vec{n}] \nabla p d\omega, \quad (6.14)$$

где  $G(\omega) = [1 + \epsilon_n / (\delta m_0)]^3 / (1 + \epsilon_n)$ ;  $\epsilon_n = \sum_{i=1}^3 \epsilon_i n_i^2$ ;  $\epsilon_i$  — главные значения тензора деформаций;  $n_i$  — направляющие косинусы единичного вектора  $\vec{n}$ , которые, как известно, в сферической системе координат имеют следующие значения:  $n_1 = \sin \theta \cos \varphi$ ;  $n_2 = -\sin \theta \sin \varphi$ ;  $n_3 = \cos \theta$ .

Для определения суммарной скорости фильтрации, обусловленной всеми имеющимися в модели системами трещин, следует проинтегрировать формулу (6.14) по всему телесному углу  $\omega$  (в силу симметрии угол  $\varphi$  изменяется от 0 до  $2\pi$ , угол  $\theta$  — от 0 до  $\pi$ ):

$$\vec{v} = -\frac{N}{24\pi\mu} \iint_{\omega} D(\omega) G(\omega) [I - \vec{n}\vec{n}] \nabla p d\omega.$$

Анализ этого выражения показывает, что проницаемость модели представляет собой некоторый симметричный тензор второго ранга, главные компоненты которого определяются соотношениями

$$k_i = \frac{N}{24\pi} \iint_{\omega} D(\omega) G(\omega) (1 - n_i^2) d\omega. \quad (6.15)$$

Так как согласно принятым предположениям модель до приложения нагрузок была изотропной относительно проницаемости [ $D(\omega) = D_0$ ], то из формулы (6.15) получаем

$$k_i = \frac{ND_0}{24\pi} \iint_{\omega} G(\omega) (1 - n_i^2) d\omega \quad \left( D_0 = \frac{b_0^3}{b_0 + L} \right).$$

В ненагруженном состоянии деформации в модели отсутствуют, т. е.  $\epsilon_n = 0$  и  $k_1 = k_2 = k_3 = k_0 = ND_0/18$ . Можно показать, что полученное соотношение является некоторым аналогом известной формулы Козени—Кармана для капиллярной модели [формула (2.8)]. Действительно, умножая числитель и знаменатель этого соотношения на  $(b_0 + L)^2$  и учитывая, что для простейшего случая  $m_{0\tau} = 3b_0/(b_0 + L)$ , находим

$$k_0 = m_{0\tau}^3 (b_0 + L)^2 / 162.$$

Но  $s_V = 6(1 - m)/L$  и  $m_{0\tau} = m_0(1 - \alpha)$ , откуда

$$k_0 = \frac{m^3}{162} (1 - \alpha)^3 [b^2 + 12b(1 - m)/s_V + 36(1 - m)^2/s_V^2].$$

Если положить  $\alpha = 0,35$ , то полученное соотношение абсолютно идентично формуле (2.8).

Введем в рассмотрение относительную проницаемость модели  $\bar{k}_i = k_i/k_0$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Тогда для компонентов тензора относительной проницаемости найдем

$$\bar{k}_i = \frac{3}{4\pi} \iint_{\omega} G(\omega) (1 - n_i^2) d\omega. \quad (6.16)$$

Рассмотрим удельное электрическое сопротивление исследуемой модели, находящейся под действием неравномерной всесторонней нагрузки. Согласно принятым предположениям о структуре и свойствах модели ее электропроводность должна обуславливаться лишь жидкостью, находящейся в трещинах. (Удельное электрическое сопротивление твердых компонентов модели считается бесконечно большим.) Тогда сила тока, проходящего по системам трещин, нормали которых к их плоскостям заключены в бесконечно малом элементе телесного угла  $d\omega$ , может быть определена выражением

$$dI = \frac{1}{4\pi} \frac{Nb}{b+L} \frac{\gamma}{S} (\nabla u \vec{r}) \vec{r}, \quad (6.17)$$

где  $\gamma$  — удельная электропроводность жидкости;  $\nabla u$  — градиент напряжения электрического поля;  $S$  — площадь поперечного сечения элемента модели.

Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям, использованным при анализе фильтрации в модели, для силы тока можно получить следующее выражение:

$$\vec{I} = \frac{\gamma}{4\pi} \iint_{\omega} \frac{Nb}{b+L} \frac{1}{S} [I - \vec{n} \vec{n}] \nabla u d\omega. \quad (6.18)$$

Подставляя сюда соотношения (6.12) и (6.13), получаем

$$\vec{I} = \frac{\gamma N}{4\pi S} \frac{b_0}{b_0 + L} \iint_{\omega} G_1(\omega) [I - \vec{n} \vec{n}] \nabla u d\omega,$$

где  $G_1(\omega) = [1 + \varepsilon_n / (\delta m_0)] / (1 + \varepsilon_n)$ .

Анализ этого соотношения показывает, что удельное электрическое сопротивление модели представляет собой симметричный тензор второго ранга с главными компонентами:

$$\rho_i = \frac{4\pi (b_0 + L) S}{\gamma N b_0} \left[ \iint_{\omega} G_1(\omega) (1 - n_i^2) d\omega \right]^{-1}.$$

Если учесть, что  $3(b_0 + L)S / (\gamma N b_0) = \rho_0$ , где  $\rho_0$  — удельное электрическое сопротивление модели при нулевом давлении, получим

$$\bar{\rho}_i = \frac{\rho_i}{\rho_0} = \frac{4\pi}{3} \left[ \iint_{\omega} G_1(\omega) (1 - n_i^2) d\omega \right]^{-1}. \quad (6.19)$$

Согласно формуле (6.10) эффективная пористость модели за счет систем трещин, определяющие нормали которых заключены в бесконечно малом элементе телесного угла  $d\omega$ , равна

$$dm_t = Nb d\omega / [4\pi (b + L)].$$

Тогда пористость, обусловленная всеми системами трещин, определится следующим образом:

$$m_t = \frac{1}{4\pi} \iint_{\omega} \frac{Nb}{b+L} d\omega.$$

Подставляя в это выражение формулы (6.12) и (6.13), а также учитывая, что при отсутствии нагрузки

$$m_{0T} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\omega} \frac{Nb_0}{b_0 + L} d\omega = \frac{Nb_0}{3(b_0 + L)},$$

имеем

$$m_T = \frac{3}{4\pi} m_{0T} \iint_{\omega} G_1(\omega) d\omega. \quad (6.20)$$

Так как согласно формулам (6.1) и (6.2)  $m_{0T} = m_0(1 - \alpha)$  и  $m = m_T + \alpha m_0$ , то

$$\bar{m} = \frac{m}{m_0} = \frac{3}{4\pi} (1 - \alpha) \iint_{\omega} G_1(\omega) d\omega + \alpha. \quad (6.21)$$

Как известно, сжимаемость порового пространства породы описывается соотношением

$$\beta = -\frac{1}{V_n} \frac{\Delta V_n}{\Delta \sigma},$$

где  $V_n$  — объем пор;  $\Delta V_n$  и  $\Delta \sigma$  — соответственно приращения значений объема пор и среднего напряжения при ступенчатом увеличении давления.

Так как по определению  $m = V_n/V$  (где  $V$  — объем элемента модели) и изменение сжимаемости пор под действием нагрузки обусловливается лишь сжимаемостью щелевидных пустот модели, то

$$\beta_{l+1} = \Delta m_l / (m \Delta \sigma) = (m_{nl} - m_{nl+1}) / (m_l \Delta \sigma),$$

где  $l$  — номер ступени нагружения;  $l = 0$  соответствует нулевому давлению.

Согласно формуле (6.2)  $m_T = m - \alpha m_0$ , поэтому

$$\beta_{l+1} = \frac{m_l - m_{l+1}}{m_l \Delta \sigma} = \frac{m_l/m_0 - m_{l+1}/m_0}{m_l \Delta \sigma/m_0} = \frac{\bar{m}_l - \bar{m}_{l+1}}{\bar{m}_l \Delta \sigma}.$$

Подставляя сюда формулу (6.21), получаем окончательное выражение для сжимаемости пор нелинейно-упругой структурной модели пористой среды:

$$\beta_{l+1} = \frac{\iint_{\omega} \frac{1 + \varepsilon_{n,l}/(\beta m_0)}{1 + \varepsilon_{n,l}} d\omega - \iint_{\omega} \frac{1 + \varepsilon_{n,l+1}/(\beta m_0)}{1 + \varepsilon_{n,l+1}} d\omega}{(\sigma_{l+1} - \sigma_l) \left[ \iint_{\omega} \frac{1 + \varepsilon_{n,l}/(\beta m_0)}{1 + \varepsilon_{n,l}} d\omega + \alpha \right]}. \quad (6.22)$$

Таким образом, соотношения (6.4), (6.6), (6.19), (6.21) и (6.22) должны полностью описывать изменение всех основных свойств пористой горной породы под действием всестороннего неравномерного сжатия. Эти же соотношения позволяют в качестве частного

случая найти аналитические зависимости физических свойств пористой породы и от изменения всестороннего сжатия.

Рассмотрим наиболее простой вариант модели, обеспечивающий условие изотропности свойств, а именно случай, когда  $N=3$ . Тогда, если модель испытывает всестороннее равномерное сжатие, то  $\varepsilon_n=\varepsilon/3$ , где  $\varepsilon$  определяется из формулы (6.6).

Подставляя это выражение для  $\varepsilon_n$  в формулы (6.16), (6.19), (6.21) и (6.22), получаем искомые аналитические зависимости физических свойств модели от всестороннего равномерного сжатия:

$$k = \frac{3 \{1 + \varepsilon/[m_0(1-\alpha)]\}^3}{3 + \varepsilon}; \quad (6.23)$$

$$\bar{\rho} = \frac{3 + \varepsilon}{3 \{1 + \varepsilon/[m_0(1-\alpha)]\}}; \quad (6.24)$$

$$\bar{m} = \alpha + \frac{3(1-\alpha + \varepsilon/m_0)}{3 + \varepsilon}; \quad (6.25)$$

$$\beta_{l+1} = \frac{3[3 - m_0(1-\alpha)](\varepsilon_{l+1} - \varepsilon_l)}{m_0 \left[ \alpha + \frac{3(1-\alpha + \varepsilon_l/m_0)}{3 + \varepsilon_l} \right] (\sigma_{l+1} - \sigma_l) (3 + \varepsilon_{l+1}) (3 + \varepsilon_l)}. \quad (6.26)$$

В найденные соотношения входят четыре постоянные: три из них —  $C$ ,  $g$  и  $v$  — характеризуют деформационные свойства модели, четвертый —  $\alpha$  — представляет собой некоторый структурный коэффициент.

#### 6.4. Экспериментальное подтверждение возможности использования модели для изучения реальных пород-коллекторов нефти и газа

Проверка степени соответствия предложенной нелинейно-упругой модели реальным породам-коллекторам нефти и газа проводилась на коллекции образцов, исследованных в МИНХиГП в условиях всестороннего равномерного сжатия. Всего было изучено 35 образцов, единственным критерием отбора которых из таблиц, содержащихся в работе [26], являлось наличие экспериментальных данных о зависимости всех основных характеристик породы от эффективного давления, а именно пористости, проницаемости, удельного электрического сопротивления и сжимаемости порового пространства. Сущность указанной проверки состояла в следующем. Если полученные для нелинейно-упругой модели соотношения (6.23) — (6.26) справедливы и для пород-коллекторов нефти и газа, то для каждого из образцов коллекции должны найтись такие значения постоянных  $C$ ,  $g$ ,  $v$  и  $\alpha$ , при которых эти соотношения выполняются с достаточной степенью точности.

Поиск постоянных  $C$ ,  $g$  и  $\alpha$  осуществляется из условия минимума суммы средних квадратических отклонений физических ха-

рактеристик образца, вычисленных по формулам (6.23)–(6.26), от экспериментальных данных, т. е. минимум функции

$$F(C, g, a) = \sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{k_{iB} - k_{i3}}{k_{iB}} \right)^2 + \left( \frac{m_{iB} - m_{i3}}{m_{iB}} \right)^2 + \left( \frac{\rho_{iB} - \rho_{i3}}{\rho_{iB}} \right)^2 + \left( \frac{\beta_{iB} - \beta_{i3}}{\beta_{iB}} \right)^2 \right]. \quad (6.27)$$

Минимизация проводилась на БЭСМ-6 с помощью программ поиска глобального экстремума функции нескольких переменных при наличии ограничений. Начальное приближение для каждого из локальных экстремумов отыскивалось методом случайных проб, оптимизация проводилась методом Ньютона с применением стохастического поиска и метода «золотого сечения». При этом наименьший из найденных локальных экстремумов с некоторой вероятностью принимался за глобальный.

Коэффициент Пуассона принимался постоянным и равным 0,1. Как показала проверка, реализация метода поиска экстремумов при изменении значения коэффициента Пуассона дает одинаковое решение относительно структурного коэффициента и деформации, определяемой формулой (6.4). Поэтому при замене, например,  $v_1$  на  $v_2$  меняются лишь упругие постоянные  $C$  и  $g$  таким образом, что  $(1 - 2v_1)/(1 - 2v_2) = C_1/C_2 = g_1/g_2$ , а все вычисленные физические характеристики остаются прежними.

После определения для каждого образца  $C$ ,  $g$  и  $\alpha$  по полученным данным с помощью тех же формул (6.23)–(6.26) рассчитывались «теоретические» значения физических параметров. Далее для каждого образца вычислялись средние относительные погрешности, %, по формуле

$$\overline{\Delta x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{x_{k3} - x_{kB}}{x_{k3}} \right| \cdot 100, \quad (6.28)$$

где  $\overline{\Delta x}$  — средняя погрешность определения;  $x_{k3}$  — экспериментально определенное значение физического параметра;  $x_{kB}$  — теоретически вычисленное значение параметра;  $n$  — число ступеней нагружения.

На рис. 6.2 представлены гистограммы распределения погрешностей определения проницаемости  $k$ , удельного электрического сопротивления  $\rho$  и сжимаемости порового пространства  $\beta$ . Аналогичное распределение для пористости отсутствует, так как погрешность определения пористости не превышает 4 % (исключая лишь один образец, где эта погрешность равна 12 %). Из анализа данных, приведенных на рис. 6.2, видно, что наибольшие погрешности получаются при вычислении сжимаемости порового пространства, что, очевидно, объясняется значительными погрешностями экспериментального определения этой величины.

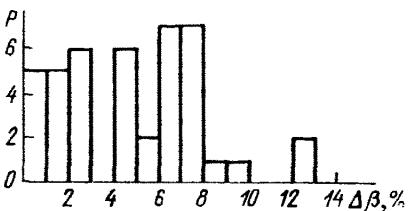
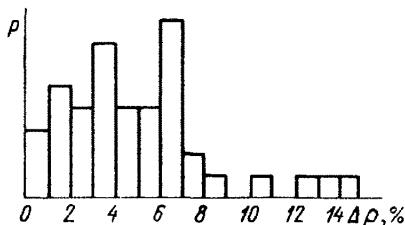
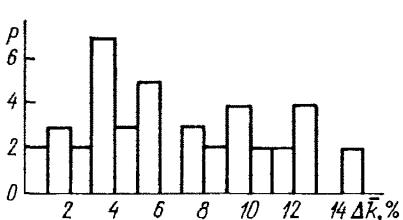


Рис. 6.2. Гистограммы распределения погрешностей определения физических свойств горных пород по формулам (6.23)–(6.26).

Интересно отметить, что в двух образцах значения  $\alpha$  оказались близкими к нулю; это указывает на наличие в образцах открытых трещин, определяющих их проницаемость. В целом анализ данных, представленных на рис. 6.2, позволяет заключить, что предложенная нелинейно-упругая модель пористой среды вполне удовлетворительно описывает изменения основных физических свойств горных пород-коллекторов нефти и газа. Наиболее важной задачей дальнейших исследований должна, по-видимому, явиться разработка комплекса независимых методов определения упругих постоянных  $C$ ,  $g$  и структурного коэффициента  $\alpha$ .

## 6.5. Практическое использование модели для изучения влияния напряженного состояния на физические свойства горных пород-коллекторов нефти и газа

### 6.5.1. Определение влияния эффективного давления на физические свойства коллектора по данным о его сжимаемости

Данные, полученные в предыдущих разделах, позволили разработать новый метод исследования поведения горных пород в условиях равномерного всестороннего сжатия, который исключает необходимость экспериментального изучения проницаемости [Кречетова Т. Н., Марморштейн Л. М., Ромм Е. С., 1983 г.].

Соотношения (6.3), (6.6) и (6.23)–(6.26) полностью описывают изменения всех основных физических свойств образцов горных пород под действием гидростатической нагрузки с помощью трех постоянных:  $C$ ,  $g$  и  $\alpha$ . Это обстоятельство открывает возможность определения указанных постоянных по данным экспериментальных исследований какого-либо одного свойства образца горной породы с тем, чтобы изменения остальных свойств можно было вычислять по формулам (6.3), (6.6) и (6.23)–(6.26).

Проведенные исследования показали, что наиболее целесообразно использовать результаты изучения сжимаемости порового пространства, тем более что лабораторные исследования изменения этой величины отличаются значительно меньшей трудоемкостью по сравнению с исследованиями проницаемости.

Предлагаемый способ определения изменения фильтрационных и электрических свойств пород при равномерном всестороннем сжатии основывается на возможности вычисления упругих постоянных  $C$ ,  $g$  и структурного коэффициента  $\alpha$  из условия минимума суммы средних квадратических отклонений сжимаемости, вычисленной по формуле (5.26), от значений, полученных экспериментальным путем, т. е. минимума функции

$$F(C, g, \alpha) = \sum_{k=1}^n [(\beta_{k\alpha} - \beta_{k\alpha})/\beta_{k\alpha}]^2,$$

где  $n$  — число ступеней нагружения;  $\beta_{kv}$  и  $\beta_{k\alpha}$  — вычисленные и экспериментально найденные значения сжимаемости соответственно. Подставляя затем найденные значения постоянных  $C$ ,  $g$  и  $\alpha$  в формулы (6.3), (6.4), (6.24) и (6.25), можно вычислить проницаемость и удельное электрическое сопротивление при любых значениях эффективного давления.

Проверка предлагаемой методики проводилась на коллекции из 46 образцов, экспериментально исследованных в МИНХиГП [26]. Минимизация выполнялась на БЭСМ-6 с помощью методики, описанной в разделе 6.4 и реализованной Т. Н. Кречетовой.

Исследованная коллекция содержит образцы алевролитов и песчаников различных типов с широким диапазоном изменения их физических свойств при атмосферных условиях. Так, пористость изученных пород изменяется от 0,13 до 0,272, проницаемость — от 1,3 до 1920 мД, удельное электрическое сопротивление — от 0,94 до 18,7 Ом·м. Для каждого образца породы после вычислений физических параметров были найдены средние погрешности определения, %, по формуле

$$\overline{\Delta x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{x_{k\alpha} - x_{kv}}{x_{k\alpha}} \right| \cdot 100,$$

где  $x_{k\alpha}$  — экспериментально полученное значение;  $x_{kv}$  — теоретически вычисленное значение;  $n$  — число ступеней нагружения.

Из общего числа рассмотренных образцов в двух оказались, по-видимому, открытые трещины, так как их структурный коэффициент близок к нулю. В двух образцах песчаников погрешность по проницаемости составила 20—22 %, в то время как удельное электрическое сопротивление определилось с погрешностью, не превосходящей экспериментальную (5 %). Для одного образца погрешность определения удельного сопротивления составила 19 %, тогда как погрешность по проницаемости не превысила 9 %. Результаты исследования остальных 42 образцов представлены на рис. 6.3, где изображены кривые распределения погрешностей вы-

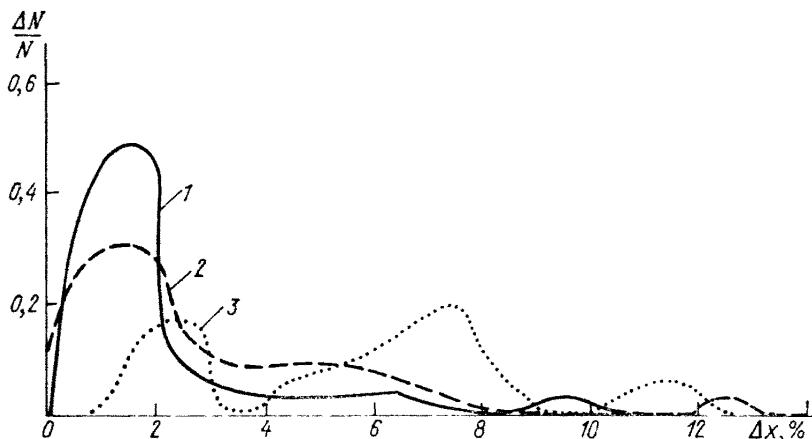


Рис. 6.3. Кривые распределения погрешностей вычисленных значений проницаемости (1), удельного электрического сопротивления (2) и сжимаемости (3) по данным экспериментального изучения сжимаемости.

численных значений сжимаемости пор, проницаемости и удельного электрического сопротивления.

В целом анализ данных, представленных на рис. 6.3, позволяет заключить, что предлагаемая методика дает возможность на основе экспериментального изучения сжимаемости быстро и достаточно точно определять упругие постоянные и структурный коэффициент; это, в свою очередь, позволяет оценивать изменения физических свойств пород-коллекторов нефти и газа в условиях напряженного состояния.

Таким образом, определение упругих постоянных и структурного коэффициента образца горной породы сводится к выполнению следующих операций.

1. С помощью известных методов находятся основные физические характеристики образца при нулевом давлении. При этом пористость определяется обязательно, тогда как проницаемость и удельное электрическое сопротивление измеряются в тех случаях, когда в дальнейшем будет изучаться изменение соответствующего параметра.

2. На специальных лабораторных установках определяется изменение сжимаемости пор образца под действием равномерного всестороннего сжатия не менее чем для трех значений эффективной нагрузки (например, при давлениях 10, 20 и 30 МПа).

3. Если в дальнейшем искомые упругие постоянные и структурный коэффициент будут использоваться для определения физических характеристик породы при разностороннем нагружении, необходимо с помощью одного из известных методов найти коэффициент Пуассона  $\nu$  для данного образца. Если характеристики породы представляют интерес лишь при всестороннем равномерном сжатии, достаточно задаться некоторым произвольным коэффици-

ентом Пуассона, характерным для горных пород. (Известно, что среднее значение  $v$  в этих условиях равно 0,2.) Следует заметить, что при задании интервала изменения  $v$  от 0 до 0,5 эта постоянная может быть найдена в качестве четвертой независимой переменной по предложенной выше методике.

4. С помощью специальной программы на ЭВМ определяются значения  $C$ ,  $g$ ,  $\alpha$ , а в случае необходимости и  $v$  по известным экспериментальным данным о сжимаемости порового пространства.

Можно также определить упругие постоянные и структурный коэффициент образца породы по изменению всех четырех физических параметров под действием всестороннего равномерного сжатия. Этот способ практически совпадает с использованным ранее методом подтверждения справедливости предложенных модельных представлений для изучения изменений физических свойств пород-коллекторов нефти и газа (раздел 6.4).

#### 6.5.2. Прогнозирование физических свойств горных пород на больших глубинах

В связи с разведкой и разработкой нефтяных и газовых месторождений, характеризующихся большими глубинами залегания, в практике геолого-промышленных исследований возникает проблема достаточно уверенного прогнозирования свойств коллектора в условиях высоких давлений. До настоящего времени эта проблема имела единственное решение, состоящее в непосредственном лабораторном моделировании условий, в которых находятся глубоко залегающие продуктивные пласти. Подобное моделирование связано с конструированием специальной дорогостоящей аппаратуры и с проведением достаточно сложных экспериментов. В то же время представленные в настоящей главе теоретические зависимости физических свойств горных пород от испытываемых этими породами нагрузок позволяют осуществить другой метод исследования. Сначала на лабораторных установках определяют изменения физических свойств образца исследуемой породы под действием сравнительно небольших давлений, например до 30 МПа (достаточно иметь для этой цели не более трех экспериментальных точек, не считая нулевого давления: 10, 20 и 30 МПа). По этим данным с помощью описанных выше методов рассчитываются постоянные  $C$ ,  $g$  и  $\alpha$ , а затем по формулам (6.23)–(6.26) определяются значения физических параметров практически для любых давлений.

Для проверки возможности осуществления подобного подхода к решению задачи были обработаны данные по 13 образцам песчаников, исследованным различными авторами [26]. Эта обработка состояла в том, что для каждого образца выбирались  $n$  ступеней нагружения (равномерного всестороннего эффективного сжатия) и для каждой ступени определялись пористость, проницаемость (образцы 1–9), удельное электрическое сопротивление (образцы 9–13) и коэффициент сжимаемости пор ( $l=0$  соответствует нулю).

вому давлению). Результаты экспериментов по первым трем ступеням нагружения принимались в качестве исходных данных, по которым согласно формулам (6.23)–(6.26) отыскивались значения постоянных  $C$ ,  $g$  и  $\alpha$ , минимизирующие функцию (6.27). Далее по тем же формулам (6.23)–(6.26) вычислялись «прогнозируемые» значения пористости, проницаемости, удельного электрического сопротивления и сжимаемости пор при максимальном нагружении  $\sigma_n$ , которые сравнивались с экспериментальными значениями. При этом погрешность, %, вычисленная по формуле

$$\Delta x = \left| \frac{x_b - x_e}{x_e} \right| \cdot 100,$$

представляет собой объективную оценку достоверности прогноза. Кроме того, по этим же данным были рассчитаны значения физических параметров при эффективном давлении  $\sigma_{\max}$ , превышающем  $\sigma_n$ .

Изученные образцы характеризуются большими диапазонами изменения физических свойств: проницаемость, например, меняется в пределах от 1,4 до 4100 мД, а пористость — от 9 до 24 %. Тем не менее погрешность определения фильтрационных свойств лишь для трех образцов превышает 10 %. Средняя же погрешность «прогнозируемой» проницаемости (а именно эта величина представляет наибольший практический интерес) составляет 5,6 %, что является вполне удовлетворительным, если учесть значительные погрешности экспериментального определения фильтрационных свойств образцов при высоких давлениях.

Результаты сопоставления вычисленных (сплошные линии) и реально измеренных (точки) значений проницаемости для трех

наудачу выбранных образцов представлены на рис. 6.4, где вертикальной штриховой линией разграничены области «известных» и «прогнозируемых» характеристик фильтрационных свойств исследованных образцов. Представленные данные позволяют утверждать, что предложенный метод прогнозирования физических свойств горных пород-коллекторов на больших глубинах залегания может быть с успехом использован в практике геолого-разведочных и геолого-промышленных исследований.

Нелинейно-упругая структурная модель может быть использована

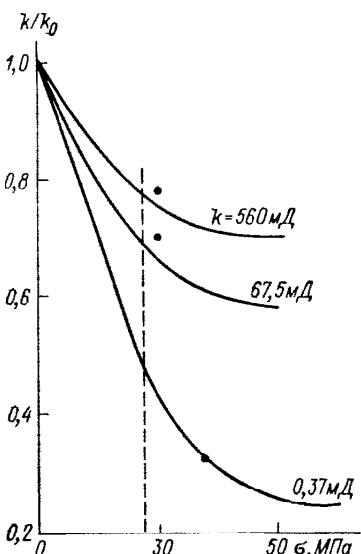


Рис. 6.4. Зависимость проницаемости от давления для трех образцов песчаников.

и для прогнозирования изменения диффузионно-адсорбционной активности в зависимости от испытываемого этой породой давления [Кречетова Т. Н., Куликова И. И., Марморштейн Л. М., Ромм Е. С., 1983 г.]. Действительно, как это было показано в разделе 2.2.5, диффузионно-адсорбционная активность породы  $A_{\text{да}}$  зависит от пористости и проницаемости следующим образом:

$$A_{\text{да}} = \frac{RT}{F} \lg \frac{C''}{C'} \frac{A}{1 + B \sqrt{k/m}}, \quad (6.29)$$

где  $R$  — универсальная газовая постоянная;  $T$  — абсолютная температура;  $F$  — число Фарадея;  $A$  и  $B$  — некоторые постоянные, связанные с физико-химическими свойствами минералов и ионным составом диффундирующих растворов.

Но изменение проницаемости и пористости в зависимости от эффективного давления определяется формулами (6.23) и (6.25), поэтому для фильтрационно-емкостного коэффициента можно написать, что

$$\frac{k}{m} = \left( \frac{k}{m} \right)_0 \frac{3 \left[ 1 - \frac{3(1-2v)}{m_0 g (1-\alpha)} \ln \left( 1 + \frac{g}{C} \sigma \right) \right]^3}{3 - (\alpha + 3/m_0) [3(1-2v)/g] \ln [1 + (g/C) \sigma]}. \quad (6.30)$$

Это соотношение в явном виде связывает фильтрационно-емкостной параметр горной породы (комплекс  $k/m$ ) с испытываемой этой породой нагрузкой. Таким образом, если подставить значение  $k/m$  из формулы (6.30) в соотношение (6.29), то получим выражение, связывающее  $A_{\text{да}}$  с приложенным давлением.

Для оценки справедливости полученного соотношения было проведено исследование результатов экспериментального определения  $A_{\text{да}}$  образцов пород при различных давлениях и температурах. Эксперименты выполнены на 22 образцах терригенных пород, отобранных из скважин Северного Сахалина. Значения  $A_{\text{да}}$  изменились для каждого образца при давлении 0,1, 30, 40 и 60 МПа и при температуре 20, 40, 60 и 80°C для каждой ступени нагрузки. Пористость и проницаемость были определены при нулевых давлениях и температуре. Параметр  $k/m$  исследованных образцов меняется от 0,13 до 1,5;  $A_{\text{да}}$  — от 4,8 до 16,0 мВ.

Методика проверки заключалась в следующем. С помощью ЭВМ \* были найдены те значения  $A$  и  $B$ , которые минимизировали сумму квадратических отклонений измеренных значений  $A_{\text{да}}$  при нулевых давлениях и температуре от вычисленных по формуле (6.29) для всей совокупности образцов. Затем по формулам (6.29), (6.30) был осуществлен подбор трех упругих ( $C$ ,  $g$  и  $v$ ) и одной структурной ( $\alpha$ ) постоянных для каждого образца коллекции таким образом, чтобы эти найденные значения минимизировали сумму квадратических отклонений измеренных значений  $A_{\text{да}}$  при различных давлениях от вычисленных по формулам (6.29), (6.30). Если с помощью формул (6.29), (6.30) действительно можно

\* Составление программ для ЭВМ и обработка числового материала выполнены Т. Н. Кречетовой.

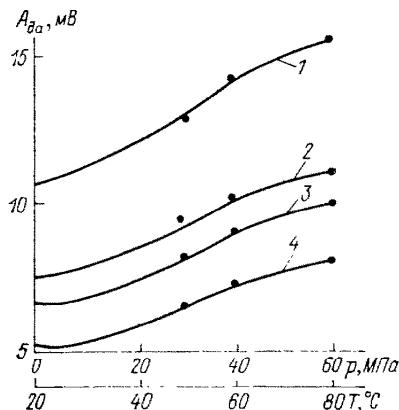


Рис. 6.5. Зависимость диффузионно-адсорбционной активности от давления и температуры для четырех образцов песчаников.

Образцы: 1 — 2, 2 — 8, 3 — 10, 4 — 16.

описать поведение диффузионно-адсорбционной активности породы при изменении давления и температуры, то погрешности вычисления по этим формулам с известными постоянными  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $g$ ,  $\nu$  и  $\alpha$  должны быть не слишком большими.

Сопоставление полученных таким образом значений  $A_{da}$  (сплошные линии) с экспериментальными результатами (точки) при различных давлениях и температурах показано на рис. 6.5. Анализ графиков на рис. 6.5 свидетельствует о том, что формулы (6.29), (6.30) вполне удовлетворительно описывают зависимость  $A_{da}$  от давления и температуры.

Соотношения (6.29), (6.30) позволяют решать некоторые важные в практическом отношении задачи. Так, после получения в лаборатории данных о зависимости  $A_{da}$  от испытываемой породой нагрузки можно определить упругие постоянные и структурный коэффициент  $\alpha$ , а затем по этим значениям рассчитывать изменения петрофизических свойств в самых различных условиях залегания. С другой стороны, упругие постоянные и структурный коэффициент могут быть определены в лабораторных условиях каким-либо иным методом, например по данным изменения сжимаемости пор. Используя эти постоянные, можно с помощью формул (6.29), (6.30) оценить те поправки, которые необходимо вносить в результаты геофизических исследований скважин методом СП. Возможно, что дальнейшее развитие метода позволит определять упругие постоянные и структурный коэффициент горных пород непосредственно в скважине; это обеспечит возможность корректировать интерпретируемые величины, не прибегая к привлечению дополнительных данных.

В заключение следует отметить, что перспективы разработки более простых методов определения упругих постоянных породы и ее структурного коэффициента открывают широкие возможности уверенного прогнозирования основных физических свойств пород-коллекторов нефти и газа на больших глубинах их залегания в различных геологических условиях.

### 6.5.3. Изучение физических свойств пород-коллекторов в условиях разноосного нагружения

Вопрос о влиянии сложнопрессованного состояния на физические свойства пород-коллекторов нефти и газа до настоящего времени мало изучен как экспериментально, так и теоретически. Однако решение этого вопроса имеет большое значение для понимания процессов, происходящих в массиве горных пород при проводке в нем всякого рода выработок, для интерпретации геофизических полей в районах со сложной тектоникой, а также для более эффективного анализа промыслового-геофизического материала, полученного на скважинах.

Зная упругие постоянные породы ( $C$ ,  $g$  и  $v$ ) и структурный коэффициент ( $\alpha$ ), по соотношениям (6.16), (6.19), (6.21) и (6.22) можно определить значения проницаемости, удельного электрического сопротивления, пористости и сжимаемости порового пространства в условиях разноосного нагружения, что требует вычисления двойных интегралов, которое удобно осуществлять на ЭВМ. Наибольший интерес представляет собой проницаемость породы в условиях разноосного нагружения, которая позволяет оценить влияние сложнопрессованного состояния на фильтрационные характеристики пласта.

Рассмотрим цилиндрический образец горной породы, которая обладает вполне определенными значениями  $C$ ,  $g$ ,  $v$  и  $\alpha$ . Осуществим нагружение образца таким образом, чтобы напряжение вдоль оси  $x_1$ , совпадающей с осью цилиндрического образца, отличалось от боковых напряжений, направленных по двум взаимно перпендикулярным нормалям к его цилиндрической поверхности (оси  $x_2$  и  $x_3$ ). Для решения вопроса о том, как влияет сложнопрессованное состояние на фильтрацию в образце жидкости, необходимо рассчитать коэффициент проницаемости в направлении оси образца при различных соотношениях осевой и боковой нагрузок для случая, когда сумма трех главных эффективных напряжений остается постоянной [12].

На рис. 6.6 приведены результаты расчетов проницаемости в осевом направлении двух цилиндрических образцов в случае сохранения среднего нормального напряжения и изменения соотношения между осевым и боковыми напряжениями ( $f = \sigma_1/\sigma_2$ ). Эти расчеты, проведенные на ЭВМ по формуле (6.19), не противоречат экспериментальным данным В. Б. Мулина [1973 г.]. Они показывают также, что проницаемость в каждом из главных направлений зависит в основном лишь от суммы всех трех главных напряжений и при сохранении среднего нормального напряжения будет изменяться в незначительных пределах.

Так, анализ графиков на рис. 6.6 показывает, что даже при значительных различиях осевой и боковой нагрузок на образец, когда маловероятно отсутствие в нем трещин, осевая проницаемость меняется лишь в пределах 5–10 %. Следовательно, для определения проницаемости однородных и изотропных пород при

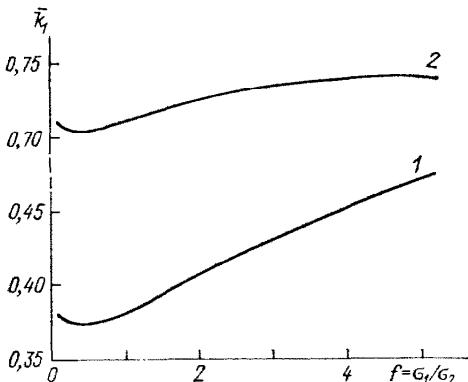


Рис. 6.6. Зависимость осевой проницаемости от  $f = \sigma_1/\sigma_2$ .

Для обоих образцов  $v=0,1$  и  $\sigma=40$  МПа; образец 1 —  $G_1=1977$  МПа,  $g=1012$ ,  $\beta=0,0333$ ; образец 2 —  $G_2=1568$  МПа,  $g=1033$ ,  $\beta=0,154$ .

неравномерном разноосном нагружении можно использовать понятие «среднего нормального напряжения» и производить соответствующие вычисления на основе схемы всестороннего сжатия, что совпадает с предположением, высказанным В. М. Добрыниным в работе [8].

Аналогичные выводы справедливы для пористости, удельного электрического сопротивления и сжимаемости образца горной породы, находящегося в условиях всестороннего неравномерного сжатия, что совпадает с данными, полученными в упоминавшейся работе В. Б. Мулина на основе экспериментального изучения коллекции, состоящей из 78 образцов полимиктовых песчаников и алевролитов.

#### 6.5.4. Расчет увеличения притока жидкости к скважине в условиях щелевого вскрытия пласта

Предложенная нелинейно-упругая структурная модель пористой среды позволяет оценить влияние напряженного состояния на фильтрационные характеристики массива горных пород, который в первом приближении можно считать однородным и изотропным. Подобные задачи встречаются при оценке притоков жидкости к забоям скважин и шахт, при изучении фильтрации под плотинами, при строительстве инженерных и гидротехнических сооружений.

Одним из используемых в настоящее время методов интенсификации притока жидкости к скважине является метод щелевого вскрытия продуктивных нефтяных и газовых пластов, который заключается в прорезке двух симметрично расположенных вертикальных щелей на всю мощность испытываемого горизонта с помощью специально разработанной для этой цели аппаратуры [Марморштейн Л. М., Петухов И. М., Сидоров В. С., 1975 г.]. В результате происходит увеличение проницаемости призабойной зоны, которое обеспечивается рядом факторов, в том числе перераспределением напряжений в окрестности скважины, разрушением глинистой корки, увеличением площади фильтрации (уве-

личением коэффициента совершенства скважины по характеру вскрытия) и т. д.

Т. Н. Кречетовой [1983 г.] рассмотрено влияние факторов разгрузки и увеличения площади фильтрации на изменение притока жидкости к скважине. Решение этой, а также и других задач подобного типа можно разделить на три этапа. Необходимо, во-первых, определить поле напряжений, действующих в массиве горных пород, при заданных граничных условиях, во-вторых, осуществить переход от главных значений напряжений в каждой точке массива к главным значениям тензора проницаемости, в-третьих, по значениям фильтрационных характеристик внутри контура питания и граничным условиям найти поле скоростей фильтрации, т. е. оценить приток жидкости к исследуемому контуру (в случае щелевого вскрытия — к контуру скважины с разрезами). Такой подход к решению задачи позволяет не только учесть влияние напряжений на фильтрационные характеристики, но и решить задачу теории фильтрации в условиях окрестностей горных выработок произвольной конфигурации с произвольными граничными условиями.

Решение задачи на первом этапе осуществляется методом комплексных потенциалов и основано на приближенном полиномиальном представлении аналитической функции, отображающей исследуемую область на внешность единичного круга. Это решение достаточно громоздко и требует численной реализации на ЭВМ. Разработанная с этой целью программа для БЭСМ-6 позволила вычислить значения напряжений в любой точке прискважинной области. Далее, на втором этапе, с помощью формул (6.16) в каждой точке области фильтрации можно найти главные значения тензора проницаемости. Таким образом определяется поле направленных проницаемостей вокруг скважины, осложненной вертикальными щелевыми разрезами.

Этот путь исследования приводит к задаче фильтрации в неоднородном анизотропном массиве горных пород (третий этап). Известно, что задачи такого рода практически не имеют аналитических решений, поэтому для определения поля фильтрации и оценки притока жидкости к скважине в рассматриваемых условиях использована специальная программа для ЭВМ, основанная на методе конечных элементов и разработанная на кафедре грунтов МИСИ [Семенов В. В., Шеварина Н. Н., 1976 г.].

В результате проведенных исследований установлено, что в рамках сделанных предположений изменение поля напряжений при бурении скважины практически не влияет на поле проницаемостей по сравнению с нетронутым массивом. Это явление вызвано, по-видимому, тем фактом, что сумма всех трех главных напряжений в задаче Ламе, соответствующей случаю распределения напряжений в тонком пласте при вскрытии его скважиной, остается во всех точках постоянной. При прорезке вертикальных щелей происходит увеличение проницаемости за счет перераспределения напряжений, а также возрастает площадь фильтрации, что

влечет за собой увеличение притока жидкости к скважине. Для двух щелей с глубиной, равной пяти радиусам скважины, это увеличение составляет 18 %. Указанные результаты получены для породы, имеющей следующие характеристики:  $m = 0,244$ ,  $k_0 = 1920$  мД,  $C = 1976$  МПа,  $g = 1011$ ,  $\alpha = 0,882$ . Значительные вариации исходных данных приводят лишь к небольшим изменениям притока жидкости к скважине, находящимся в пределах 2–4 %. Это свидетельствует о том, что основным из двух рассматриваемых факторов, определяющих увеличение притока при щелевом вскрытии пласта, является фактор увеличения площади фильтрации.

Таким образом, определение поля фильтрации в массиве горных пород, находящихся в условиях всестороннего неравномерного сжатия, сводится к последовательности операций.

1. Образцы породы из исследуемого массива изучаются в лаборатории, где пористость и проницаемость определяются при нулевом давлении, а сжимаемость пор — при трех ступенях всестороннего равномерного сжатия.

2. По полученным данным с помощью методики, изложенной в разделе 6.5.1, рассчитываются две упругие и одна структурная постоянные исследуемой породы.

3. По одному из известных методов (например, методом конечных элементов) находится распределение напряжений в исследуемой области фильтрации.

4. С помощью формул (6.16) в каждой точке исследуемой области вычисляются значения главных компонентов тензора проницаемости.

5. На основе использования специальной программы МИСИ на ЭВМ определяются поле скоростей фильтрации в массиве и соответствующие данной конкретной задаче потоки фильтрующейся жидкости.

## Заключение

Обзор структурных моделей порового пространства горных пород позволяет заключить, что все они основаны на тех или иных представлениях о конфигурации пор. В табл. 3.1 представлена возможная классификационная схема важнейших моделей структуры порового пространства, которая основана на четырех простейших элементах формы пор: межзерновые полости, капилляры, щели и сферические пустоты. Большинство конкретных моделей в схеме обозначено для краткости фамилиями их авторов. Указанная классификационная схема отражает, на наш взгляд, сложившееся к настоящему времени состояние рассмотренной в книге проблемы.

История развития модельных представлений о структуре порового пространства пористых тел, в том числе и горных пород, свидетельствует о том, что во многих случаях именно те или иные модели позволили получать важные количественные соотношения между различными физическими свойствами среды. Так, в случае изучения двухфазной фильтрации капиллярная модель с переменной извилистостью позволяет строить кривые относительных фазовых проницаемостей горной породы по гораздо более простым в экспериментальном отношении параметрам: порометрической кривой и фактору пористости; модельные представления о структуре сложной трещиновато-пористой среды приводят к установлению количественных соотношений между параметрами неуставновившейся фильтрации в трещинных коллекторах нефти и их фильтрационно-емкостными свойствами, что открывает широкие возможности использования гидродинамических методов исследования трещиновато-пористых пластов. Нелинейно-упругая структурная модель пористых пород-коллекторов устанавливает количественные связи между главными компонентами разноосного неравномерного нагружения породы и ее важнейшими физическими свойствами, включающими главные компоненты тензора проницаемости. Именно эта структурная модель позволила детально проанализировать эффективность щелевого метода вскрытия продуктивных нефтяных и газовых пластов.

Структурные модели играют очень важную роль в понимании сложных механизмов некоторых явлений тепло- и массопереноса в горных породах. Так, сеточные модели позволили установить

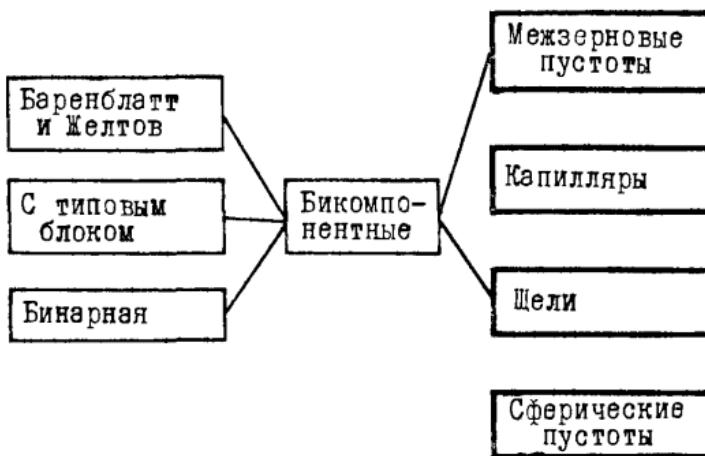
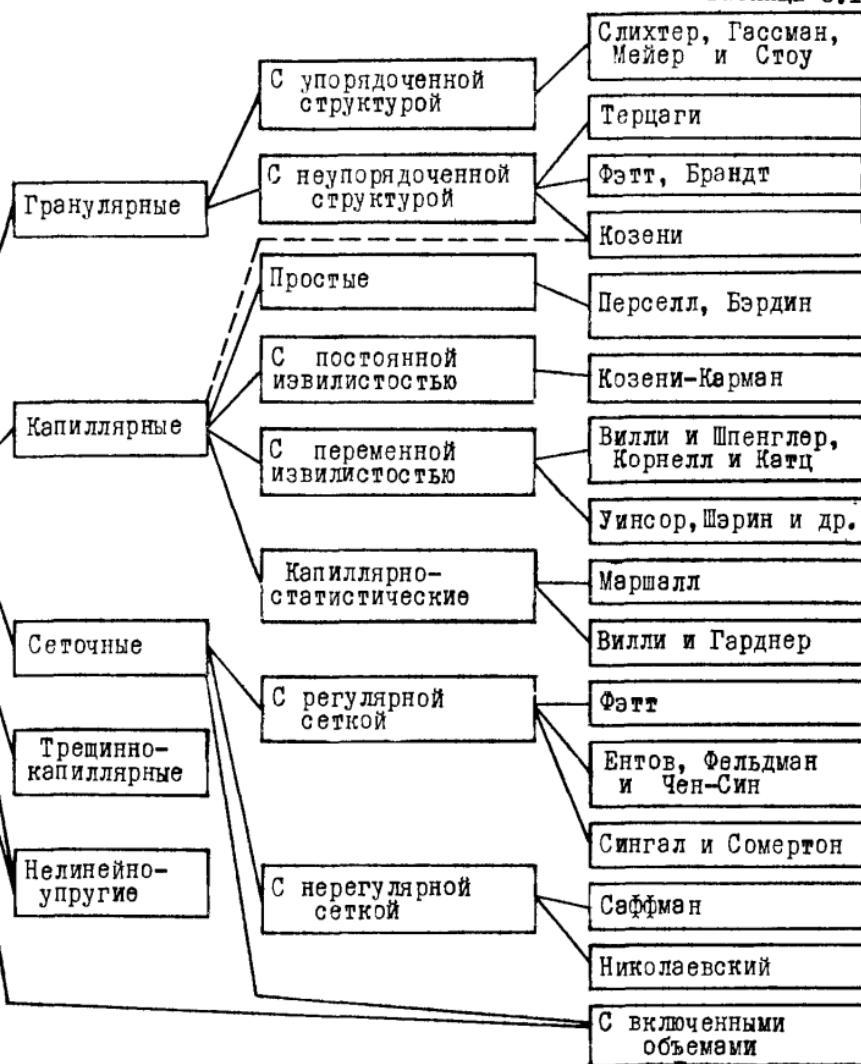


Таблица 3.1



существенные детали механизма двухфазной фильтрации в пористой среде. Механизм конвективной диффузии тоже стал намного более понятным после использования для его рассмотрения некоторых сеточных моделей.

Бурно развивающаяся в настоящее время теория перколяции должна, по-видимому, сыграть решающую роль в понимании физики многофазных течений. С другой стороны, одна из сеточных моделей пористой среды уже сейчас позволила оценить практическую ценность различных методов порометрических исследований.

Можно надеяться, что дальнейшее развитие модельных представлений о структуре порового пространства как о некоторой сетке, обладающей определенными топологическими характеристиками, позволит решить многие практические важные задачи исследования физических свойств горных пород.

## Список литературы

1. Амикс Дж., Басс Д., Уайтинг Р. Физика нефтяного пласта. М., Гостоптехиздат, 1962. 572 с.
2. Баренблatt Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М., Недра, 1972. 288 с.
3. Бортницкая В. М., Кутовая Д. В. Изучение трещиноватости коллекторов палеогена нефтяных месторождений Предкарпатского прогиба.— В кн.: Материалы по геологии и нефтегазоносности Украины. М., Гостоптехиздат, 1963.
4. Вендельштейн Б. Ю. Исследование разрезов нефтяных и газовых скважин методом собственных потенциалов. М., Недра, 1966. 206 с.
5. Волков И. А. Решение двух вспомогательных задач для модели пьезопроводности в трещиновато-пористой среде.— В кн.: Коллекторы и покрышки нефтегазоносных районов. Л., ВНИГРИ, 1980, с. 126—133.
6. Волков И. А. Решение краевых задач тепло- и массопереноса на модели трещиновато-пористой среды.— В кн.: Теоретические и экспериментальные исследования механизмов миграции углеводородов. Л., ВНИГРИ, 1980, с. 104—117.
7. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М., Наука, 1965. 400 с.
8. Добрынин В. М. Деформации и изменения физических свойств коллекторов нефти и газа. М., Недра, 1966. 197 с.
9. Ентов В. М., Фельдман А. Я., Чен-Син Э. Программное моделирование процесса капиллярного вытеснения в пористой среде.— Программирование, 1975, № 3, с. 67—74.
10. Желтов Ю. П. Механика нефтегазоносного пласта. М., Недра, 1975. 216 с.
11. Киркинская В. Н., Смехов Е. М. Карбонатные породы-коллекторы нефти и газа. Л., Недра, 1981. 256 с.
12. Кречетова Т. Н., Ромм Е. С. О связи главных компонентов тензоров напряжений и проницаемости пористых сред.— Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1983, № 1, с. 181—185.
13. Курочкина М. И., Лунев В. Д. Удельная поверхность дисперсных материалов. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 138 с.
14. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Наука, 1965. 716 с.
15. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М., Гостехиздат, 1947. 244 с.
16. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., Наука, 1978. 736 с.
17. Маркин В. С. О капиллярном равновесии в модели пористого тела с пересекающимися порами переменного сечения.— Докл. АН СССР, 1963, т. 151, № 3, с. 620—623.
18. Мармортейн Л. М. Коллекторские и экранирующие свойства осадочных пород при различных термодинамических условиях. Л., Недра, 1975. 159 с. (Труды НИИГА, т. 180).
19. Методические рекомендации по исследованию пород-коллекторов нефти и газа физическими и петрографическими методами. М., ВНИГНИ, 1978. 381 с.
20. Методы эталонной порометрии и возможные области их применения в электрохимии/Ю. М. Вольфович, В. С. Багоцкий, В. Е. Сосенкин, Е. И. Школьников.— Электрохимия, 1980, т. XVI, вып. 11, с. 1620—1652.
21. О влиянии свойств горных пород на движение в них жидкости/А. Бан, А. Ф. Богомолова, В. А. Максимов и др. М., Гостоптехиздат, 1962. 276 с.

22. Ромм Е. С. Фильтрационные свойства трещиноватых горных пород. М., Недра, 1966. 283 с.
23. Ромм Е. С., Рубашкин А. А. Адсорбция, поверхностный заряд и штерновский потенциал на границе окисел/раствор электролита.— Электрохимия, 1983, т. XIX, вып. 7, с. 993—997.
24. Рубинштейн Л. И. К вопросу о распространении тепла в гетерогенных средах.— Изв. АН СССР. Серия геогр. и геофиз., 1948, т. XII, № 1, с. 27—45.
25. Сеё Г. Ортогональные многочлены. М., ГИФМЛ, 1962. 500 с.
26. Справочник по физическим свойствам минералов и горных пород при высоких термодинамических параметрах. М., Недра, 1978. 121 с.
27. Терцаги К. Строительная механика грунта на основе его физических свойств. М.—Л., Гостройиздат, 1933. 392 с.
28. Шайдеггер А. Э. Физика течения жидкостей через пористые среды. М., Гостехиздат, 1960. 250 с.
29. Шкловский Б. И., Эфрос А. М. Теория протекания и проводимости сильно неоднородных сред.— Успехи физических наук, 1975, т. 117, вып. 3, с. 401—435.
30. Archie G. E. The electrical resistivity log as an aid in determining some reservoir characteristics.— Trans. AIME, 1942, v. 146, p. 54—62.
31. Brandt H. A study of the speed of sound in porous granular media.— J. of Appl. Mech., 1955, v. 22, N 4, p. 479—486.
32. Burdine N. T., Gourney L. S., Richards P. P. Pore size distribution of petroleum reservoir rocks.— J. Petrol. Technol., 1950, v. 2, N 7, p. 195—204.
33. Carman P. C. Flow of gases in porous media. London, 1956. 182 p.
34. Chatenever A., Cathouh J. C. Visual examinations of fluid behavior in porous media.— J. Petrol. Technol., 1952, v. 4, N 6, p. 149—154.
35. Cornell D., Katz D. Flow of gases through consolidated porous media.— Ind. Eng. Chem., 1953, v. 45, N 10, p. 2415—2150.
36. Dullien A. L., Batra V. K. Determination of the structure of porous media.— Ind. Eng. Chem., 1970, v. 62, N 10, p. 25—53.
37. Fatt I. Pore structure in sandstones by compressible sphere-pack models.— Bull. Am. Ass. Petrol. Geol., 1958, v. 42, N 8, p. 1914—1957.
38. Fatt I. The network model of porous media.— Trans. AIME, 1956, v. 207, p. 160—181.
39. Gassman F. Elastic waves through a packing of spheres.— Geophysics, 1951, v. 16, N 4, p. 673—685.
40. Klinkenberg L. J. Analogy between diffusion and electrical conductivity in porous rocks.— Bull. Geol. Soc. Amer., 1954, v. 62, N 6, p. 559—564.
41. Kozeny J. Über Kapillare Leitung des Wassers im Boden.— Sitzung Berichte Akad. Wiss., Wien, Nat. Kl., 1927, Bd. 136, Abt. 11a, S. 271.
42. Leverett M. C. Flow of oil-water mixtures through unconsolidated sands.— Trans. AIME, 1939, v. 132, p. 149—152.
43. Marshall A. Relation between permeability and size distribution of pores.— J. Soil Sci., 1958, v. 9, N 1, p. 2—7.
44. Morrow N. R. Irreducible wettingphase saturations in porous media.— Chem. Eng. Sci., 1970, v. 25, p. 1799—1815.
45. Purcell W. R. Capillary pressures — their measurements using mercury and the calculation of permeability therefrom.— Trans. AIME, 1949, v. 186, TP2603, p. 39—46.
46. Ryder A. M. Character of pores in oil sands.— World Oil. 1948, April, p. 129—131.
47. Stichter C. S. Theoretical investigations of the motion of ground waters. 19-th Am. Rep. U. S. Geol. Survey, 1899, v. 2, p. 295—384.
48. Willie M. R. J., Gardner G. H. F. The generalized Kozeny—Carman equation.— World Oil, 1958, v. 146, N 4, p. 121—126; N 5, p. 210—213.
49. Willie M. R. J., Spangler M. B. Application of electrical resistivity measurements to problems of fluid flow in porous media.— Bull. Am. Ass. Petrol. Geol., 1952, v. 36, N 2, p. 359—403.
50. Winsauer W. O., Shearin H. M., Masson P. H., Williams M. Resistivity of brandsaturates sands in relation to pore geometry.— Bull. Am. Ass. Petrol. Geol., 1952, v. 36, N 2, p. 253—278.

# Оглавление

Предисловие . . . . .	3
Введение . . . . .	4
<b>Глава 1. Гранулярные модели . . . . .</b>	<b>7</b>
1.1. Математическое моделирование . . . . .	—
1.2. Физическое моделирование . . . . .	27
<b>Глава 2. Капиллярные модели . . . . .</b>	<b>44</b>
2.1. Модель Козени—Кармана . . . . .	45
2.2. Простая капиллярная модель из пучка прямых параллельных капилляров . . . . .	54
2.3. Капиллярная модель с переменной извилистостью . . . . .	72
2.4. Капиллярно-статистические модели . . . . .	83
2.5. Капиллярная модель Феррандона . . . . .	92
2.6. Определение физических свойств горных пород по данным об изучении шлифов и модельные представления . . . . .	97
<b>Глава 3. Сеточные модели . . . . .</b>	<b>103</b>
3.1. Сеточная модель Фэтта . . . . .	104
3.2. Сеточная модель с включенными объемами . . . . .	116
3.3. Использование сеточных моделей для изучения процессов конвективной диффузии в горных породах . . . . .	126
<b>Глава 4. Трещинно-капиллярная модель анизотропных трещиноватых горных пород . . . . .</b>	<b>134</b>
4.1. Принципы построения модели . . . . .	135
4.2. Приток жидкости в скважину в анизотропном пласте. Интерференция скважин . . . . .	144
4.3. Методы определения параметров анизотропии с целью повышения эффективности поисков, разведки и разработки трещинных коллекторов нефти и газа . . . . .	146
4.4. Оценка эффективной емкости анизотропного трещиноватого пласта по данным о стационарной фильтрации . . . . .	151
4.5. Оценка физических свойств трещиноватых горных пород по данным о структуре их порового (трещинного) пространства (метод шлифов ВНИГРИ) . . . . .	153
<b>Глава 5. Исследование процессов пьезопроводности в трещиновато-пористых горных породах на структурных моделях сред с двойной пористостью . . . . .</b>	<b>157</b>
5.1. Феноменологические модели пьезопроводности в среде с двойной пористостью . . . . .	158
5.2. Моделирование процессов пьезопроводности на основе точных решений для модели среды с двойной пористостью . . . . .	163
5.3. Использование модельных представлений для решения практических задач тепло- и массопереноса в трещиновато-пористых горных породах . . . . .	200
<b>Глава 6. Нелинейно-упругая модель пористой среды . . . . .</b>	<b>213</b>
6.1. Задачи исследования . . . . .	—
6.2. Принципы построения модели, ее геометрические характеристики и деформационные свойства . . . . .	214
6.3. Связь между компонентами разноосного нагружения модели и ее физическими свойствами . . . . .	217
6.4. Экспериментальное подтверждение возможности использования модели для изучения реальных пород-коллекторов нефти и газа . . . . .	222
6.5. Практическое использование модели для изучения влияния напряженного состояния на физические свойства горных пород-коллекторов нефти и газа . . . . .	224
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>235</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>238</b>