



Издательство Московского университета • 1982

В. М. Шестаков

**Методика
интерпретации
опытно-
фильтрационных
наблюдений**



В.М.ШЕСТАКОВ

Методика интерпретации опытно-фильтрационных наблюдений

Издательство Московского университета

1982

УДК 55I.49I.5

Шестаков В.М. Методика интерпретации опытно-фильтрационных наблюдений. М., Изд-во Моск. ун-та, 1982. 52 с.

Методическое пособие, в котором рассматриваются основные принципы постановки опытно-фильтрационных наблюдений, используемых для определения геофильтрационных параметров. Дается обзор известных методов и предлагаются оригинальные методы интерпретации таких наблюдений (аналитические, численные и машинные).

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета

Рецензенты:
доктор геол.-мин. наук В.А.Всеволожский,
доктор геол.-мин. наук Ф.Е.Питьева

© Издательство Московского университета, 1982 г.

Возрастающее воздействие хозяйственной деятельности человека на подземные воды приводит к необходимости проведения крупномасштабных исследований с непрерывно повышающимися требованиями к достоверности гидрогеологических прогнозов.

Во многих случаях наложение прогнозируемых воздействий происходит на территориях уже подверженных влиянию хозяйственной деятельности. Такое положение характерно, например, для мелиорируемых территорий и районов крупного водоотбора. В этой ситуации возрастает интерес к возможностям использования данных натурных наблюдений, особенно для обоснования схематизации гидрогеологической обстановки. Такие режимно-балансовые наблюдения назовем опытно-фильтрационными, выделяя их в особое направление полевых гидрогеологических работ. Таким образом, под опытно-фильтрационными наблюдениями (ОФН) понимаются режимно-балансовые наблюдения за подземными и поверхностными водами, направленные на определение геофильтрационных параметров строения и питания потоков подземных вод. К параметрам строения потока относятся: коэффициент фильтрации породы, проводимость пласта, коэффициенты гравитационной и упругой емкости, а также обобщенные характеристики сопротивления ложа водотоков и зон местной разгрузки. К параметрам питания относятся: интенсивность инфильтрации или испарения (с учетом их зависимости от мощности и строения зоны аэрации), расходы поглощения поверхностного стока.

Использование относительно дешевых опытно-фильтрационных наблюдений позволяет существенно рационализировать постановку комплекса опытно-фильтрационных работ, особенно, имея в виду, что для определения параметров питания применение гидродинамических опробований нередко оказывается нереальным. Предложения по постановке и методическим позициям ОФН разработаны в многочисленных трудах, главным образом, советских ученых [8,10,18,26]. Вместе с тем существующие методы проведения и интерпретации ОФН далеко не всегда дают удовлетворительные результаты, особенно из-за недостаточного внимания к обоснованию достоверности получаемых параметров. Решение этой проблемы имеет важное значение для решения задач оптимальной постановки гидрогеологических изысканий. Интерпретация ОФН сводится к идентификации геофильтрационной схемы и натурального потока подземных вод.

В общем случае выделяются три вида идентификационных задач: обратные, направленные на идентификацию граничных условий; инверсные, направленные на обоснование физических параметров про-

цесса; индуктивные, направленные на выявление теоретической постановки задачи (обоснование математического описания процесса). Однако в геофильтрационных исследованиях такое разделение оказывается неоправданным, поскольку все виды идентификационных задач геофильтрации (особенно обратные и инверсные), как правило, рассматриваются совместно. Поэтому задачи интерпретации ОФН будем относить к обратным.

Рассматривая общие пути исследования обратных задач, следует вместе с тем представлять себе значительную специфику их постановки и методики решения применительно к тому или иному определяемому параметру или характеру представляемой информации о потоке подземных вод. Например, определение проводимости пласта, — эта задача нередко рассматривается как основная при построении общей теории решения обратных задач, — можно проводить только при наличии данных о расходах потока, получаемых в результате анализа стока рек, каналов, дрен или фиксируемых при работе водозаборных (дренажных) систем. Совершенно различную постановку должны иметь такие задачи, как определение параметров емкости пластов и интенсивности инфильтрации в плановых потоках или проницаемости разделяющих слоев в системе взаимодействующих пластов (горизонтов). Таким образом, в каждом конкретном случае характер решения обратной задачи будет различным в зависимости от целевого назначения ОФН, т.е. от того, какие именно параметры подлежат определению.

Цель настоящей работы — представить основные положения методики интерпретации ОФН, опираясь на современные достижения гидродинамических (геофильтрационных) методов исследований. В связи с этим изложение материалов дано применительно к использованию определенных решений гидродинамических задач с выявлением особенностей каждого из таких решений с учетом указанного выше требования оценки достоверности получаемых результатов. С этой точки зрения особого внимания заслуживают пути и возможности диагностики опытных данных и обобщения (свертывания) исходной информации во времени и в пространстве.

Диагностика служит для выявления закономерной изменчивости параметров, которая может быть связана с неполнотой используемой математической модели (например, при влиянии неучитываемых изменений коэффициентов емкости пласта во времени) или с неизвестной нелинейностью процесса (например, при изменении коэффициента гравитационной емкости, определяемой слоистостью пород зоны аэра-

ции). Применительно к грунтовым водам резко улучшает решение независимое предварительное установление закономерностей изменчивости инфильтрационного питания по гидролого-метеорологическим данным (составление многолетних рядов изменчивости режима грунтовых вод, изучение влагопереноса в зоне аэрации и баланса поверхностных вод).

I. Аналитические решения

Аналитические решения дифференциальных уравнений геофильтрации реально применимы только для определения параметров одномерных потоков, обычно однородного строения. Чаще всего такие условия встречаются в локальных зонах проявления нестационарного режима фильтрации вблизи источников возмущения потока. Рассмотрим некоторые типичные примеры применения аналитических решений для интерпретации ОФН.

I.1. Одномерные плановые потоки вблизи водотоков

Применение аналитических решений одномерных задач для планового потока вблизи реки при колебаниях ее уровня впервые было предложено С.Ф.Аверьяновым [9], использовавшим решение для полуограниченного потока при линейном изменении уровня на границе потока с нулевым начальным условием (исходный псток стационарный). В дальнейшем были предложены такие решения при различных условиях на границах потока [16,26,32,37]. Было также рекомендовано учитывать искажения, вносимые сопротивлением ложа реки сдвигом границы потока в сечение первой скважины створа [26]. Кроме того, рассматривались решения при гармонических колебаниях уровня на границе, характерных для приморских территорий [32,35], для условий упорядоченного спада уровней после резкого подъема за счет интенсивной инфильтрации [33]. Предлагалось также применение аналитических решений для определения интенсивности инфильтрации, в частности, при орошении [10,18].

Весьма эффективным для таких расчетов является использование интегрального преобразования напорov и расходов потока по Лапласу-Карсону. В этом случае вместо исходных функций или оригинала $p(t)$ вводится операторное изображение $F(p)$ вида

$$F(p) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad (I.1)$$

где ρ — параметр преобразования (иногда вместо ρ используется параметр времени преобразования $t_p = 1/\rho$).

Такое преобразование применяется для линеаризованных исходных дифференциальных уравнений, в которых пространственные производные сохраняют для изображения те же выражения, что и для оригинала, а временная производная $\partial f / \partial t$ заменяется на величину $\rho (F - f_0)$, где $f_0 = f(0)$ — начальное условие для оригинала.

В качестве примера рассмотрим решение одномерной задачи нестационарной фильтрации, когда изменения уровня потока ΔH описываются дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2 \Delta H}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial \Delta H}{\partial t} \quad (1.2)$$

Для изображения H_p изменения уровня ΔH дифференциальное уравнение (1.2) при нулевом начальном условии для ΔH преобразуется в уравнение

$$\frac{\partial^2 H_p}{\partial x^2} = \frac{H_p}{a t_p} \quad (1.3)$$

Рассмотрим далее условия полуограниченного потока, когда решение уравнения (1.3) имеет вид

$$H_p = H_p^0 \exp \left(- \frac{x}{\sqrt{a t_p}} \right), \quad (1.4)$$

где H_p^0 — изображение изменений напора ΔH^0 в граничном сечении.

При использовании уравнения (1.4) для интерпретации режимных данных изменения уровней под действием возбуждения на границе потока целесообразно предварительно прологарифмировать это уравнение

$$2,3 \lg \frac{H_p^0}{H_p} = \frac{x}{\sqrt{a t_p}} \quad (1.5)$$

Обработку данных удобно проводить, отроя график зависимости величин $\lg (H_p^0/H_p)$ и $x/\sqrt{t_p}$ при различных t_p . На таком графике опытные данные должны ложиться на прямую линию, проходящую в начало координат. По уклону этой прямой $i = \frac{\Delta \lg (H_p^0/H_p)}{\Delta (x/\sqrt{t_p})}$ находим $a = 0,435/i$.

Для перехода от оригинала к изображению можно пользоваться

численными способами, приведенными, например, в работах [15,27]. Применительно к форме наводочного гидрографа такой способ предложен М.М.Гылибовым [6].

Применение аналитических решений в изображениях особенно эффективно при наличии нескольких наблюдательных скважин, поскольку на преобразованных графиках данные по всем наблюдательным скважинам должны совпадать. Это условие может рассматриваться как важный диагностический признак правильности выбранной расчетной схемы.

Решения в изображениях удобно использовать для определения расхода потока в граничном сечении, что представляет существенный интерес для оценки фильтрационных потерь из водотока (канала) по данным наблюдения за нестационарным режимом грунтовых вод вблизи него. Если граница $x = 0$ выбрана в сечении уреза водотока, то изображение удельного расхода q_p^0 , исходя из решения (I.4) будет

$$q_p^0 = -T \left. \frac{\partial H_p}{\partial x} \right|_{x=0} = T \frac{H_p^0}{\sqrt{a t_p}} \quad (I.6)$$

По значениям q_p^0 , посчитанным при различных значениях t_p , можно обратным переходом найти значения удельных расходов потока q^0 в граничном сечении. Решение такой задачи представляет интерес для оценки фильтрационных потерь вблизи магистрального канала после пуска его в работу по данным режимных наблюдений вблизи канала. При этом величины q^0 и q_p^0 изменяются обычно немонотонно: сначала они резко увеличиваются, а затем могут уменьшаться (рис. I). В этом случае для обратного перехода от q_p^0 к q^0 гра-

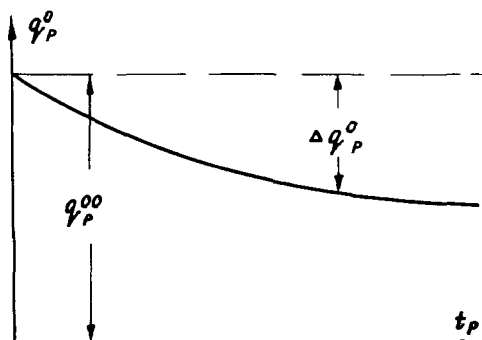


Рис. I.

фик $q_p^0(t_p)$ следует разложить на две части: q_p^0 и $\Delta q_p^0 = q_p^{00} - q_p^0$, где q_p^{00} — значение q_p^0 при $t = 0$. Тогда оригинал так же будет состоять из разницы двух частей q^{00} и Δq^0 , причем $q^{00} = q_p^{00}$, а Δq^0 определяется численным путем, как для монотонно-ме-

нящейся функции. Таким путем применение численных методов перехода, разработанных для монотонных функций, можно распространить для более сложных условий.

В работе [39] рекомендуется особая форма интегрального преобразования, использующая интегральное выражение для изменения градиента напора ΔJ_0 на границе одномерного полуограниченного потока. Таким путем получено следующее выражение для коэффициента уронепроводности

$$a = \frac{M^2}{\Delta J_0^2} \quad , \quad M(t) = \int_0^t H'_0(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \quad , \quad (1.7)$$

где $H'_0(t) = \partial H^0 / \partial t$ - скорость изменения уровня на границе потока. Для сравнительно несложных форм изменения граничного уровня в [39] приведены аналитические выражения интеграла $M(t)$, а в общем случае он может находиться численным путем. Для таких расчетов используются данные о градиенте напора, полученные по замерам в створе двух наблюдательных скважин на границе потока.

1.2. Применение аналитических решений для периода опускания уровня на междуренъи после полива

Рассмотрим способы обработки данных нестационарного режима грунтового потока на мелиорируемой территории, оборудованной линейным систематическим дренажом в виде горизонтальных дрен, расположенных на расстоянии $2L$ друг от друга. В таком случае поток к дренам образуется за счет отвода оросительных вод и осушения территории. Поскольку дренаи имеют обычно большую длину, то поток на междуренъи нередко оказывается линейным в плане и тогда для интерпретации режимных данных здесь могут использоваться аналитические решения задач нестационарной фильтрации.

Для периода полива характерно резкое повышение уровня между дренами, которое по времени можно считать мгновенным. В этом случае для избыточного напора H относительно уровня воды в дренае применимо аналитическое решение уравнения нестационарной фильтрации для ограниченного потока длиной $2L$, на границах которого $x = \pm L$ выполняется условие 3-го рода $\partial H / \partial x = H / L_H$. Это решение для достаточно длительного процесса (при $at > 0,25 L^2$) имеет вид [18]:

$$H = H_0 A \cos \left(\nu \frac{x}{L} \right) e^{-\nu^2 \tau}, \quad \tau = \frac{a t}{L^2}. \quad (I.8)$$

Таблица I

Параметры A , B и ν в зависимости от соотношения L / L_H .

L / L_H	0	0,1	0,2	0,5	1	2	5	10	20	∞
A	1	1,02	1,03	1,07	1,12	1,18	1,24	1,26	1,27	1,27
ν	0	0,311	0,433	0,653	0,86	1,08	1,31	1,43	1,50	1,57
B	0	0,097	0,181	0,425	0,643	1,12	1,58	1,78	1,9	2,0

Скорость снижения уровня $U_H = - \partial H / \partial t$ при этом будет

$$U_H = H_0 A \nu^2 \frac{a}{L^2} \cos \left(\nu \frac{x}{L} \right) e^{-\nu^2 \tau}, \quad (I.9)$$

а расход потока q_A , поступающего в дренаж:

$$q_A = -2T \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{x=L} = 2TA \frac{\nu}{L} H_0 \sin \nu e^{-\nu^2 \tau}. \quad (I.10)$$

Рассмотрим различные варианты обработки опытных данных по этим зависимостям.

а. Логарифмирование выражений для H и q_A

Логарифмируя выражение (I.8), получим

$$\ln H = \ln H^0 - \nu^2 \frac{a t}{L^2}; \quad H^0 = H_0 A \cos \left(\nu \frac{x}{L} \right). \quad (I.11)$$

На графике зависимости $\ln H$ от t опытные данные должны ложиться на прямую линию с уклоном $i = \frac{\nu^2 a}{L^2}$, отсекающую на оси $\ln H$ величину $\lg H^0$. После этого из выражения для H^0 подбором находится значение L / L_H , а затем $a = \frac{i L^2}{\nu^2}$.

Логарифмируя выражение (I.10), получим

$$\ln q_A = \ln q_A^0 - \nu^2 \frac{a t}{L^2}, \quad q_A^0 = 2 T A H_0 \frac{\nu}{L} \sin \nu. \quad (I.I2)$$

Обработка данных ведется составлением графика зависимости $\ln q_A$ от t , который должен иметь тот же уклон $i = \frac{\nu^2 a}{L^2}$ и отрезок $\ln q_A^0$, отсекаемый на оси $\ln q_A$, причем по значению q_A^0 находится проводимость пласта

$$T = \frac{q_A^0 L}{2 B H_0}, \quad B = A \nu \sin \nu. \quad (I.I3)$$

Диагностическими признаками являются прямолинейный характер графиков и одинаковый уклон для Н и q_A .

б. По соотношениям характеристик потока

Поскольку согласно (I.8) и (I.9) имеем $H/U_H = L^2/\nu^2 a$, то соотношение Н и U_H должно сохраняться во всех точках и во все время постоянным; из него определяется комплексный параметр

$$\nu^2 a = L^2 \frac{U_H}{H}. \quad (I.I4)$$

Если имеются данные изменений снижения уровней в двух пьезометрах U_H' и U_H'' при $x = x_1$ и $x = x_2$, то согласно (I.9) их соотношение

$$\frac{U_H'}{U_H''} = \frac{\cos(\nu \frac{x_1}{L})}{\cos(\nu \frac{x_2}{L})}. \quad (I.I5)$$

По нему подбором рассчитывается значение ν , по которому из табл. I находится соотношение L / L_H .

Значения T и μ удобно находятся из соотношений q_A с U_H и H . Так, разделив выражение (I.I0) на (I.9) получается

$$\frac{q_A}{U_H} = 2 \mu L \frac{\sin \nu}{\nu \cos(\nu \frac{x}{L})}. \quad (I.I6)$$

При заранее определенном значении ν находится величина μ

$$\mu = \frac{q_A}{U_H} \cdot \frac{\nu \cos(\nu \frac{x}{L})}{2 L \sin \nu}. \quad (I.I7)$$

Соответственно, по соотношению q_A/H , имеющему выражение

$$\frac{q_A}{H} = \frac{2T}{L} \cdot \frac{\nu \sin \nu}{\cos(\nu \frac{x}{L})}, \quad (I.18)$$

при определенном заранее значении ν находится значение проводимости пласта

$$T = \frac{q_A L}{2H} \cdot \frac{\cos(\nu \frac{x}{L})}{\nu \sin \nu}. \quad (I.19)$$

I.3. Нестационарный режим в двухслойном пласте

Для характерной схемы двухслойного строения потока грунтовых вод, когда основной песчаный или песчано-гравийный водоносный пласт покрывается супесчано-суглинистыми отложениями, обычно принимаются предпосылки перетекания, согласно которым течение в водоносном пласте считается горизонтальным, а в покровных отложениях - вертикальным. В этом случае по предложению Е.Л.Минкина [13] используются данные ОФН по этажным пьезометрам в покровных отложениях и по створам пьезометров, располагаемых в водоносном пласте по направлению потока (рис. 2).

Данные наблюдений по этажным пьезометрам в покровных отложениях могут применяться для оценки параметров их строения и инфильтрации (или испарения) с поверхности грунтовых вод. Этажные пьезометры располагаются на свободной поверхности и на некоторой глубине под ней (чаще всего в подошве покровных отложений). Если кроме того иметь дополнительные дублирные пьезометры, расположенные на разных уровнях в супесчано-суглинистых покровных отложениях, то появляется возможность определения относительной проницаемости отдельных слоев.

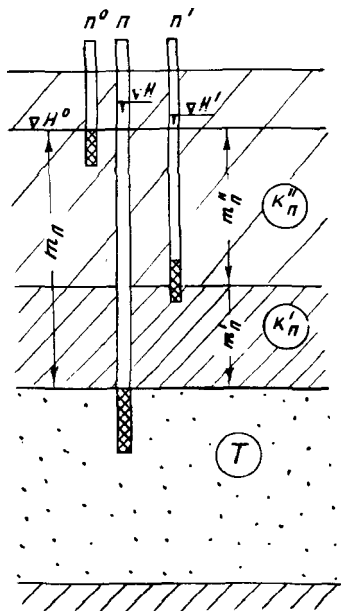
При интерпретации режимных данных в этих условиях принимается, что поток в покровных отложениях имеет вертикальное направление и формируется за счет площадного питания (инфильтрации, испарения) и перетекания из подстилающего водоносного пласта. Разделение напоров внутри такого потока зависит от изменчивости проницаемости покровных отложений по глубине, которая обуславливается литолого-фациальной изменчивостью и уменьшением плотности пород с возрастанием давления. Для обработки данных по уровням в этажных пьезометрах используются соотношения [27]

$$w + \kappa \frac{H - H^0}{m} = \mu V^0, \quad (a)$$

(I.20)

$$\kappa \frac{H - H^0}{m} = \kappa_i \frac{\Delta H_i}{m_i}, \quad (б)$$

где H и H^0 – напоры в нижнем и верхнем пьезометрах; V^0 – скорость изменения уровня свободной поверхности, фиксируемая по показаниям верхнего пьезометра; w – интенсивность инфильтрации; ΔH_i – разница напоров в пределах олоя мощностью m_i ; κ – осредненный по вертикали коэффициент фильтрации покровных отложений.



При обосновании этих соотношений предполагается (кроме одномерности потока), что можно пренебречь упругой емкостью пород, считать коэффициент гравитационной емкости μ постоянным и допускать применимость закона Дарси.

Обработку режимных данных по этим соотношениям рекомендуется производить в следующей последовательности: сначала выбираются периоды нестационарного режима при отсутствии площадного питания (инфильтрации или испарения), когда при $w = 0$ согласно (I.20a) имеем

$$\frac{\kappa}{\mu} = \frac{m V^0}{H - H^0}, \quad (I.21)$$

Рис. 2 после чего для периодов существенного проявления площадного питания получим

$$\frac{w}{k} = \frac{H^0 - H}{m} + \frac{\mu}{k} U^0 . \quad (I.22)$$

Во всех случаях согласно (I.20б) находится относительная проницаемость i -го олюа по отношению

$$\frac{\kappa_i}{\kappa} = \frac{m}{m_i} \cdot \frac{\Delta H_i}{H - H^0} . \quad (I.23)$$

Заметное влияние на формирование нестационарного режима потока в покровных отложениях может оказывать динамичность гравитационной емкости, дооверных способов учета которой пока что не имеется. Поэтому для практической обработки следует ограничиваться данными квазистационарного режима, характеризующегося постоянной скоростью изменения напоров в покровных отложениях.

С этой точки зрения для определения величины w лучше всего использовать данные стационарного режима ($U^0 = 0$). При этом надо учитывать, что обычно такие условия характеризуются малыми различиями напоров в пьезометрах. Например, при характерных значениях $w = 10^{-3}$ м/сут, $k = 0,2$ м/сут и $m = 20$ м согласно (I.22) получим $H^0 - H = 0,1$ м, причем это значение реально является близким к предельно возможному. Поэтому для таких расчетов, а также для оценок соотношений коэффициентов фильтрации согласно (I.23) требуется прецизионное определение уровней в пьезометрах (с точностью порядка миллиметра).

В покровных отложениях большой мощности заметное влияние может оказывать задержка в передаче давления, обусловленная проявлением упругих свойств пород. Для учета этого фактора запишем для такого потока конечно-разностное уравнение упругой фильтрации

$$(\kappa_n'' J_1 - \kappa_n'' J_2) \Delta t = \frac{1}{2} \eta^* \Delta H' (m_n' + m_n''), J_1 = \frac{H - H'}{m_n'}, J_2 = \frac{H' - H^0}{m_n'}, \quad (I.24)$$

где η^* - коэффициент упругоемкости покровных отложений, $\Delta H'$ - изменение напора H' за расчетный интервал времени Δt . Из уравнения (I.24) находим соотношение

$$\frac{\kappa_n''}{\kappa_n'} \cdot \frac{J_2}{J_1} = 1 - \frac{\eta^* U' (m_n' + m_n'')}{2 \kappa_n' J_1}, \quad U' = \frac{\Delta H'}{\Delta t}, \quad (I.25)$$

из которого видно, что относительная погрешность $\varepsilon_{\text{упр}}$, вносимая пренебрежением упругой емкости в определение соотношения коэффициентов фильтрации κ''_n / κ'_n , будет

$$\varepsilon_{\text{упр}} = \frac{\eta^* U' (m'_n + m''_n)}{2 \kappa'_n J_1} \quad (I.26)$$

Если $\varepsilon_{\text{упр}}$ оказывается соизмеримым с единицей, то для интерпретации опытных данных следует построить график зависимости величин J_2 / J_1 и U' / J_1 , на котором согласно уравнению (I.25) опытные точки должны ложиться на прямую линию, параметры которой позволяют получить значения κ''_n / κ'_n и η^* / κ'_n .

При монотонном протекании нестационарного режима влияние упругого режима перетекания проявляется при расчетном времени меньшем величины $t_{\text{упр}}$, определяемой соотношением [15]

$$t_{\text{упр}} = \frac{\eta^* m_n^2}{10 \kappa_n} \quad (I.27)$$

Для оценочных расчетов в первом приближении можно принимать $\eta^* = 0,007 / (z_{гв} + 0,5 m_n)$, где $z_{гв}$ — глубина залегания уровня грунтовых вод. Например, при $m_n = 30$ м, $z_{гв} = 5$ м, $\eta^* = 3,5 \cdot 10^{-4}$ I/м, а задавая характерное значение $\kappa_n = 3 \cdot 10^{-2}$ м/сут, из (I.27) найдем $t_{\text{упр}} = 10$ сут, т.е. время реального проявления упругого режима в покровных отложениях здесь оказывается существенным.

Опытные данные свидетельствуют также о возможности заметных осложнений, связанных с нарушением предпосылки о вертикальном направлении потока в покровных отложениях за счет существенного проявления бокового растекания. Показательным примером в этом отношении являются данные наблюдений на участке майтужных понижений в Куйбышевском Поволжье. Основной водоносный горизонт приурочен здесь к пласту хазарских песков, покрываемому хвалынскими супесчано-суглинистыми отложениями пестрого строения. Здесь были оборудованы расположенные по кресту этажные режимные пьезометры, анализ уровневого режима по которым показал [9], что существует несоответствие между определяемой по нижним пьезометрам интенсивностью площадного питания и определяемому по дублирным пьезометрам различием напоров по вертикали. В связи с этим здесь была проведена дополнительная гидродинамическая съемка уровней свободной поверхности по сетке скважин, разбурен-

ным мотобуром, причем уровни были замерены на два момента времени. По данным этих замеров построены профили свободной поверхности, которая оказалась волнистой, причем повышения и понижения свободной поверхности согласуются с отрицательными и положительными мезоформами рельефа (рис. 3). Затем вычислялась раз-

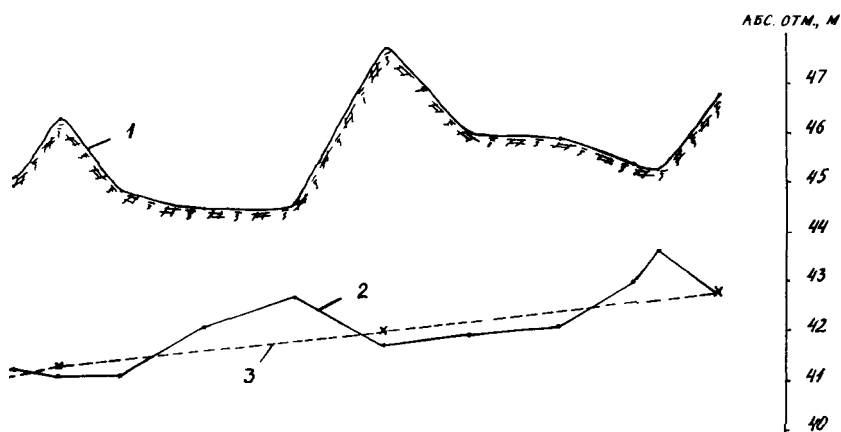


Рис. 3

Профили уровней грунтовых вод на участке майтужных понижений в Куйбышевском Поволжье по двум взаимноперпендикулярным направлениям:

(1 — поверхность земли; 2 — уровни свободной поверхности; 3 — уровни основного пласта).

ница уровней свободной поверхности H^0 и основного пласта H , причем значения H между пьезометрами в основном пласте были получены интерполяцией с аппроксимацией уровней полиномом второй степени, после чего для каждого пьезометра вычислялась величина $U^0/(H-H^0)$, которая оказалась чрезвычайно изменчивой, причем во многих случаях ее значения получились отрицательными [30]. Согласно уравнению (1.22) такая ситуация может быть обусловлена влиянием площадного питания, однако в это время не было заметных осадков, а значительная глубина залегания грунтовых вод исключает проявление испарения. Поэтому остается предположить, что существенно проявляется боковое растекание в покровных отложениях и принятая предпосылка о вертикальном направлении потока уже оказывается неправомерной. В связи с этим, в покровных отложе-

ниях при установке этажных пьезометров необходимо, по крайней мере, на ключевых участках, предусматривать установку боковых пьезометров вокруг основного отбора, приурочивая их расположение по вертикали к наиболее проницаемым слоям.

Для интерпретации данных нестационарного режима в основном водоносном пласте, вызываемого влиянием изменений уровней на границе потока (например, в водотоке), при одномерном в плане потоке целесообразно использовать аналитические решения в интегральных изображениях по Лапласу-Карсону [27]. Такое решение в полуграниченном потоке дает следующее выражение для изображений H_p изменений напора ΔH в основном пласте относительно исходных стационарных уровней, имеющих место в начальный момент времени (при $t = 0$):

$$H_p = H_p^0 \exp\left(-x \sqrt{\frac{1}{B^2} + \frac{1}{a t_p}}\right), \quad B^2 = \frac{\pi n T}{\kappa_n}, \quad a = \frac{T}{\mu}, \quad (I.28)$$

где H_p^0 — значение H_p в граничном сечении (при $x = 0$).

Примем это уравнение для обработки данных нестационарного режима уровней в наблюдательном створе, расположенном по направлению одномерного в плане потока, когда граница $x = 0$ задается в крайнем (граничном) пьезометре, со стороны которого распространяется возмущение потока. Тогда величина H_p^0 представляет собой изображение изменений напора в граничном пьезометре, а величины H_p соответствуют изображениям изменений напоров в наблюдательных скважинах, отстоящих на расстояниях x от граничной. Обобщенную обработку таких данных целесообразно проводить, нанося опытные данные, подочитанные для различных значений t_p , на единый график в координатах $X = (x^{-1} \ln \frac{H_p^0}{H_p})^2$ и t_p^{-1} . На таком графике все опытные точки должны лечь на одну прямую, отсекающую на оси X (при $t_p^{-1} = 0$) отрезок $1/B^2$ и имеющую уклон к оси t_p^{-1} численно равный a^{-1} . Прямолинейность такого графика является диагностическим признаком правильности рассматриваемой расчетной схемы.

2. Конечно-разностные уравнения для одномерного планового потока

Конечно-разностные уравнения широко используются для обработки данных режимных наблюдений [7, 10, 18], однако при их применении обычно не ставятся задачи диагностики и проверки досто-

верности получаемых данных. Для решения этих задач полезно произвести преобразования этих уравнений, которые представим здесь для условий одномерного в плане потока в пределах наблюдательного отбора из трех пьезометров (рис. 4). Конечно-разностное уравнение при отсутствии инфильтрационного питания здесь будет

$$T_{12} J_{12} - T_{23} J_{23} = \mu H'_t \Delta x_2, \quad (2.1)$$

$$J_{12} = \frac{H_1 - H_2}{\Delta x_{12}}, \quad J_{23} = \frac{H_2 - H_3}{\Delta x_{23}}. \quad (2.1, a)$$

$H'_t = \Delta H_2 / \Delta t$ - скорость изменения уровня в среднем пьезометре (положительная при подъеме и отрицательная при опадении), T_{12} , T_{23} - проводимости пласта между соответствующими пьезометрами.

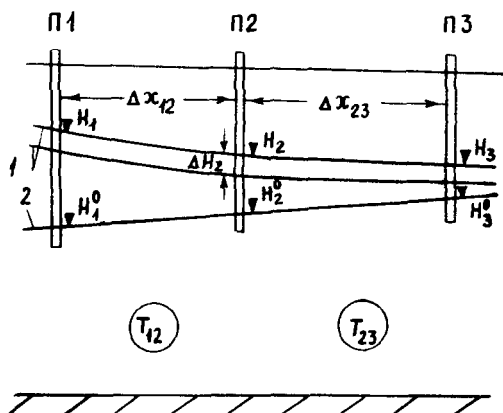


Рис. 4

1 и 2 - начальные и текущие уровни подземных вод
 Конечно-разностное уравнение величины напоров H_i заменяются на разности напоров $H_i - H_i^0$. Если исходное состояние является стационарным, то величина H'_t заменяется при этом на разницу скоростей подъема уровней в расчетном интервале времени и в исходном состоянии.

Рассмотрим вопрос о выборе расчетного размера блока Δx_2 при неравномерном шаге конечно-разностной сетки, используя в ка-

Это уравнение ооглаено принципу оуперпозиции можно распространить и на уоловия наличия ин- фильтрации, еоли только она не меня- ется во времени. Для этого только ве- личины напоров H_i должны отсчитывать- ся от исходных уровней H_i^0 , име- щих место в начале расчетного периода времени наблюдений. Следовательно, при таком раочете в ко-

честве тестовых условия одномерного стационарного потока постоянной проводимости при равномерном инфильтрационном питании по его длине. В створе между тремя сечениями (узлами сетки) для напора H_2 в среднем сечении (узле) имеем выражение [27]

$$H_2 = \frac{H_3 \Delta x_{12} + H_1 \Delta x_{23}}{\Delta x_{13}} + \frac{w}{2T} \Delta x_{12} \Delta x_{23} . \quad (2.2)$$

Соответствующее конечно-разностное уравнение будет

$$\frac{H_3 - H_2}{\Delta x_{23}} + \frac{H_1 - H_2}{\Delta x_{12}} + \frac{w}{T} \Delta x_2 = 0 . \quad (2.2, a)$$

Выразим из (2.2, a) напор H_2 в среднем сечении :

$$H_2 = \frac{H_1 \Delta x_{23} + H_3 \Delta x_{12}}{\Delta x_{13}} + \frac{w}{2T} \cdot \frac{\Delta x_{12} \Delta x_{12} \Delta x_{23}}{\Delta x_{13}} . \quad (2.3)$$

Сопоставляя выражения (2.2) и (2.3), можно видеть, что они дают совпадающие результаты, если положить

$$\Delta x_2 = \frac{\Delta x_{13}}{2} , \quad (2.4)$$

т.е. из такого теста следует, что расчетный размер блока должен задаваться равным полусумме расстояний между соседними и расчетной узловыми точками. Такое решение отвечает разбивке потока "по узлам", когда границы блоков проводятся посередине между узлами сетки.

Запишем уравнение (2.1) в преобразованной форме, разделив его на величину $T_{12} H'_t$:

$$\varphi_1(t) - \bar{T} \varphi_2(t) = \frac{\Delta x_2}{a} , \quad (2.5)$$

где обозначено

$$\varphi_1(t) = \frac{J_{12}}{H'_t} , \varphi_2(t) = \frac{J_{23}}{H'_t} , \bar{T} = \frac{T_{23}}{T_{12}} , a = \frac{T_{12}}{\mu} . \quad (2.5, a)$$

Из этого уравнения следует, что между величинами φ_1 и φ_2

должна быть линейная связь, выполнение которой является важным диагностическим признаком возможности использования принятой расчетной схемы. Для расчетов по уравнению (2.5) следует по данным наблюдений на ряд интервалов времени посчитать величины φ_1 и φ_2 (по напорам в середине каждого расчетного интервала). После этого строится график зависимости φ_1 от φ_2 , на котором опытные точки должны удовлетворительно ложиться на прямую линию. Если этот диагностический признак выполняется, то по отрезку φ_1^0 , который эта прямая отсекает на оси φ_1 , получаем коэффициент уровняпроводности $\alpha = \Delta x_2 / \varphi_1^0$, а ее уклон $\Delta \varphi_1 / \Delta \varphi_2$ представляет собой соотношение проводимостей \bar{T} .

Если интенсивность инфильтрации меняется и подлежит определению, то конечно-разностное уравнение одномерного планового потока

$$T_{12} J_{12} - T_{23} J_{23} = (\mu H'_t - w) \Delta x_2 \quad (2.6)$$

Рассмотрим прежде всего условия стационарного режима фильтрации, когда уравнение (2.6) записывается в форме

$$\frac{w}{T_{12}} = \frac{\bar{T} J_{23} - J_{12}}{\Delta x_2} \quad (2.7)$$

откуда при найденном предварительно значении \bar{T} получается величина w / T_{12} .

Важная особенность такого расчета связана с тем, что величина инфильтрационного питания находится из члена конечно-разностного уравнения, представляющего собой разность между приходно-расходными частями этого уравнения. Для того, чтобы такая операция была корректной, необходимо, чтобы член уравнения с определяемым параметром был достаточно большим по сравнению с другими приходно-расходными членами уравнения. Для корректности такого расчета в случае стационарного режима необходимо, чтобы расход площадного питания (или разгрузки) в пределах расчетного участка был соизмерим с расходом потока, притекающего через участок. Такое условие корректности можно выразить неравенством:

$$w \Delta x_2 \gg \delta_a q_{\max} \quad (2.8)$$

или

$$\frac{w}{T} \Delta x_2 \gg \delta_a J_{\max}, \quad (2.8, a)$$

где q_{\max} и J_{\max} — максимальные значения удельного расхода и градиента напора в створе (при $w > 0$ имеем $q_{\max} = q_{23}$, $J_{\max} = J_{23}$, $T = T_{23}$), δ_a — возможная погрешность определения изменчивости расходов потока, связанная главным образом с изменчивостью проводимости (по-видимому, можно принимать $\delta_a = 0,2-0,3$).

Это условие реально выполняется только на водораздельных участках потока (в том числе между систематическими дренами) или в областях его формирования, где расход потока еще не велик. Вместе с тем, в транзитной зоне потока надеяться на корректность такого расчета, как правило, не приходится.

Обратимся теперь к определению w по нестационарному режиму. В этом случае уравнение (2.6) целесообразно разрешить относительно величины w/μ :

$$\frac{w}{\mu} = H'_t \left[1 - \frac{a}{\Delta x_2} (\varphi_1 - \bar{T} \varphi_2) \right], \quad (2.9)$$

которая наиболее достоверно может быть получена при условии

$$\frac{a}{\Delta x_2} (\varphi_1 - \bar{T} \varphi_2) \ll 1. \quad (2.10)$$

Это условие соответствует такой обстановке, при которой боковой приток и отток на расчетном участке оказываются сравнительно малыми, и величина w/μ может находиться даже по изменению уровней в одном (центральной) пьезометре, как

$$\frac{w}{\mu} = H'_t. \quad (2.11)$$

При этом проблема корректности расчета снимается, однако требуется обоснование величины μ и ее возможной изменчивости в связи с влиянием капиллярной зоны и неоднородности разреза зоны аэрации.

Если же условие (2.10) не выполняется, то расчет величины w/μ ведется по выражению (2.9). Для обеспечения достаточной

точности такого расчета необходимо, как минимум, чтобы получаемая величина w/μ заметно превышала возможный разброс членов правой части выражения (2.9), который выявляется при расчетах по периоду отсутствия инфильтрации. В частности, если получены отклонения $\Delta \varphi_I$ величины φ_I от осредняющей прямой линии на расчетном графике зависимости φ_I от φ_2 , то абсолютная погрешность расчета w/μ будет

$$\Delta \left(\frac{w}{\mu} \right) = \frac{a H'_t}{\Delta x_2} \Delta \varphi_1. \quad (2.12)$$

Корректность расчетов по уравнению (2.9) будет соблюдена, если выполнится условие

$$\left| \frac{w}{\mu} \right| > \delta_a \Sigma_+, \quad (2.13)$$

где Σ_+ — сумма абсолютных значений всех членов уравнения (2.9).

Рассмотрим особенности применения конечно-разностного уравнения при расположении наблюдательного створа перпендикулярно дрене, считая, что поток направлен вдоль створа, который состоит из двух пьезометров, располагаемых с каждой стороны от дрены за пределами зоны резкой деформации потока у дрены (рис. 3, в). Эти пьезометры можно устанавливать на свободную поверхность потока, однако ближайшие к дрене пьезометры (I' и I'') должны иметь дублиеры, закладываемые в основном пласте, для проверки выполнения условия постоянства напора по вертикали.

Для интерпретации данных наблюдений составим балансовое уравнение в пределах участков потока, относящихся к первым от дрены пьезометрам (I' и I'' на рис. 5) за расчетный интервал времени Δt :

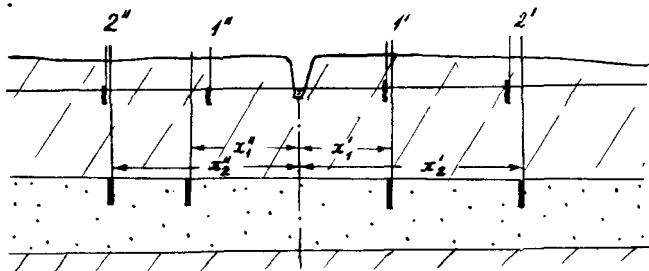


Рис. 5

$$q_A = T (J' + J'') + (w' - \mu U'_H) \Delta x' + (w'' - \mu U''_H) \Delta x'' , \quad (2.14)$$

где T и μ - проводимость и коэффициент гравитационной емкости пласта; $J' = (H'_2 - H'_1)(x'_2 - x'_1)$ и $J'' = (H''_2 - H''_1)/(x''_2 - x''_1)$ - градиенты напора между пьезометрами 2' и 1' (с напорами H'_2 и H'_1), 2'' и 1'' (с напорами H''_2 и H''_1); $\Delta x'$ и $\Delta x''$ - размеры расчетных участков потока, причем в данном случае следует принять $\Delta x' = 0,5(x'_2 + x'_1)$ и $\Delta x'' = 0,5(x''_2 + x''_1)$; w' и w'' - интенсивность инфильтрации в пределах участков створов $\Delta x'$ и $\Delta x''$; U'_H и U''_H - средняя скорость подъема урвней в пределах участков, принимаемая по пьезометрам 1' и 1'' (при спаде уровней значения U'_H и U''_H будут отрицательными).

Обработку данных по уравнению (2.14) целесообразно прежде всего производить при отсутствии инфильтрации (например, на период спада уровней после окончания полива), когда уравнение (2.14) принимает вид

$$q_A = T (J' + J'') - \mu (U'_H \Delta x' + U''_H \Delta x''). \quad (2.14,a)$$

Это уравнение преобразовывается к виду

$$\theta(t) = T - \mu \varphi(t) , \quad (2.15)$$

где

$$\theta(t) = \frac{q_A}{J' + J''} , \quad \varphi(t) = \frac{U'_H \Delta x' + U''_H \Delta x''}{J' + J''} . \quad (2.15,a)$$

Для расчетов параметров по уравнению (2.15,a) по опытным данным рассчитываются значения $\theta(t)$ и $\varphi(t)$ на ряд моментов времени и по этим значениям строится график связи θ и φ , который должен удовлетворительно аппроксимироваться прямой линией, отсекающей на оси θ величину проводимости T , а на оси φ величину $a = T/\mu$.

После этого можно использовать уравнение (2.14) для определения величин w' и w'' , преобразуя его к виду

$$w' \Delta x'_H + w'' \Delta x''_H = q_A - T (J' + J'') + \mu (U'_H \Delta x' + U''_H \Delta x'') . \quad (2.16)$$

Далее следует задать соотношение между величинами w' и w'' , исходя из площадных уловий инфильтрации. Если, например, рассматриваются условия равномерного полива с обеих сторон от дрены, то закономерно считать $w' = w'' = w$ и тогда

$$w = \frac{q_A - T(J' + J'') + \mu(U'_H \Delta x' + U''_H \Delta x'')}{\Delta x' + \Delta x''} \quad (2.17)$$

Если же полив производится только с одной стороны от дрены, то определяется величина w только с этой стороны, а на другой стороне она принимается равной нулю.

Уравнение (2.14) и производные от него можно составлять на любой интервал времени Δt , задавая средне-интегральные значения q_A , J и U_H за этот интервал и получая, соответственно, средне-интегральное значение w за это время. В частности, можно проводить такие расчеты для интервала времени, в течение которого изменяющиеся уровни возвращаются к начальному положению и, следовательно, здесь будет $U_H = 0$. Такой путь позволяет исключить из расчета параметр μ , который определяется обычно наименее достоверно. Принципиально такие же конечно-разностные уравнения применимы для описания потока вблизи канала или прямолинейного участка реки, если поток в пределах расчетного участка несущественно деформируется в плане.

3. Конечно-разностные уравнения для планового потока

В двумерном плановом потоке изменчивость проводимости можно учитывать, задаваясь определенным законом ее изменения в плане. Рассмотрим такие преобразования для участка наблюдений, состоящего из пяти пьезометров, расположенных по кресту (рис. 6) при задании линейного закона изменения проводимости T по известному направлению, причем расположение наблюдательных скважин принимается таким, чтобы направление изменения проводимости совпадало с направлением одного из створов (ось x):

$$T = T_0(1 + \theta x), \quad (3.1)$$

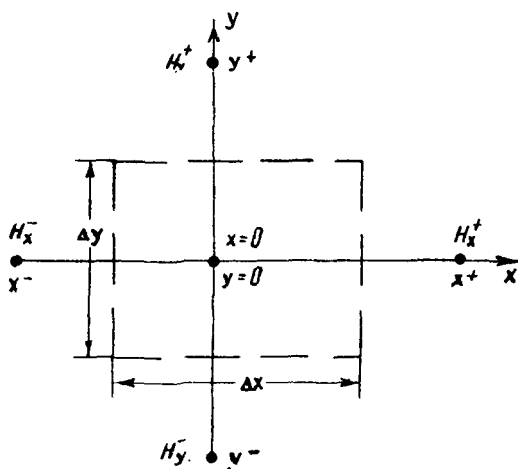
где T_0 — проводимость в центре участка; θ — параметр, характеризующий изменчивость проводимости.

Уравнение баланса потока во внутреннем (расчетном) блоке

здесь будет

$$(T_x^+ J_x^+ + T_x^- J_x^-) \Delta y + (T_y^+ J_y^+ + T_y^- J_y^-) \Delta x = \mu N_t' \Delta x \Delta y \quad , \quad (3.2)$$

$$\Delta x = 0,5(x^+ + x^-), \quad \Delta y = 0,5(y^+ + y^-) \quad ,$$



где N_t' — скорость изменения уровня в расчетном блоке, определяемая по центральному пьезометру; J_x^+ , J_x^- , J_y^+ , J_y^- — градиенты напора по сторонам положительных и отрицательных направлений осей координат; T_x^+ , T_x^- , T_y^+ , T_y^- — соответствующие средние значения проводимости пласта между пьезометрами, которые при первом приближении можно считать равными

Рис. 6
средним значениям T на сторонах расчетного блока, т.е.

$$T_x^+ = T_0 (1 + 0,5 \theta x^+), \quad T_x^- = T_0 (1 - 0,5 \theta x^-),$$

$$T_y^+ = T_y^- = T_0 \left[1 + 0,5 \theta (x^+ - x^-) \right] \quad , \quad (3.3)$$

где x^- берется по абсолютному значению.

Запишем уравнение (3.2), подставляя в него выражения (3.3) для расчетных значений проводимости пласта и проведя перегруппировку членов

$$(J_x^+ + J_x^-) \Delta y + (J_y^+ + J_y^-) \Delta x + 0,5 \theta (x^+ J_x^+ - x^- J_x^-) \Delta y +$$

$$+ (x^+ - x^-) (J_y^+ - J_y^-) \Delta x = \frac{N_t'}{a} \Delta x \Delta y \quad , \quad a = \frac{T_0}{\mu} \quad . \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) можно представить в следующем виде

$$\varphi_1 + \theta \varphi_2 = \frac{\Delta x \Delta y}{a}, \quad \varphi_1 = \frac{F_1}{H'_t}, \quad \varphi_2 = \frac{F_2}{2H'_t}, \quad (3.5)$$

где

$$F_1 = (J_x^+ + J_x^-) \Delta y + (J_y^+ + J_y^-) \Delta x, \quad (3.5, a)$$

$$F_2 = (x^+ J_x^- - x^- J_x^+) \Delta y + (x^+ - x^-) (J_y^+ + J_y^-) \Delta x. \quad (3.5, б)$$

Для интерпретации режимных данных по уравнению (3.5) составляется график связи величин φ_1 и φ_2 , на котором расчетные точки должны укладываться на прямую линию, что является диагностическим признаком правильности используемого уравнения. Эта линия отсекает на оси φ_1 величину φ_1^0 , по которой определяется коэффициент уровнепроводности $a = \Delta x \Delta y / \varphi_1^0$, а по ее уклону находится величина $\theta = -\Delta \varphi_1 / \Delta \varphi_2$.

Аналогичные зависимости получаются и в более общем случае линейного изменения проводимости в любом заданном направлении [29].

В таких расчетах коэффициент уровнепроводности также находится из члена конечно-разностного уравнения, представляющего собой "невязку" баланса потока в расчетном блоке. Для корректности такой операции необходимо, чтобы этот член был достаточно значимым по сравнению с другими членами уравнения, определяющими расходы притока и оттока. Для выполнения этого требования можно исходить из соблюдения следующего условия

$$\mu \Delta x \Delta y H'_t \geq \delta_d Q_+ \quad (3.6)$$

или

$$\frac{\Delta x \Delta y H'_t}{a Q_+} \geq \delta_d, \quad \bar{Q}_+ = Q_+ / T, \quad (3.6, a)$$

где Q_+ — сумма абсолютных значений расходов потока, притекающих и вытекающих в расчетном блоке; δ_d — погрешность определения изменения расхода.

После определения параметров a и θ конечно-разностное уравнение планового потока можно применить и для оценки интенсивности инфильтрации, как это показано выше для одномерного потока. Для условий нестационарного режима фильтрации такое урав-

нение запишется

$$\frac{w}{\mu} = H'_t \left[1 - \frac{a}{\Delta x \Delta y} (\varphi_1 + 8 \varphi_2) \right], \quad (3.7)$$

где φ_1 и φ_2 выражаются согласно (3.5). Для оценки корректности такого расчета можно пользоваться условием (2.13), которое применительно к уравнению (3.7) имеет вид

$$\frac{w}{\mu} > \delta_a H'_t \left[1 + \frac{a}{\Delta x \Delta y} (|\varphi_1| + 8 |\varphi_2|) \right]. \quad (3.8)$$

Оценку погрешностей такого расчета можно делать согласно (2.12) с заменой Δx_2 на $\Delta x \Delta y$.

Аналогичные преобразования конечно-разностных уравнений можно проводить при расположении пьезометров по неправильному кресту (рис. 7), где расчетный блок образуется сторонами, прове-

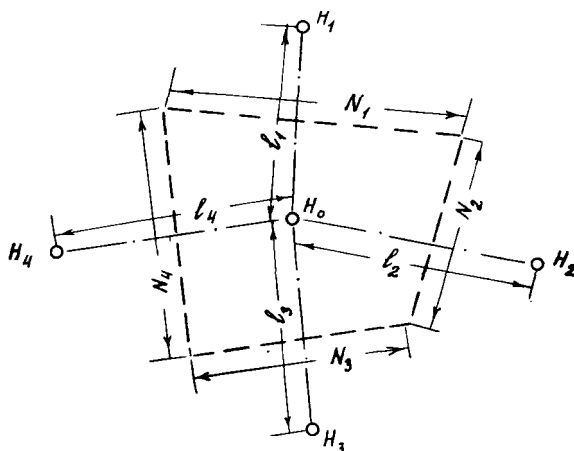


Рис. 7

денными посередине линий, соединяющих центральный пьезометр с боковыми нормально к их направлению [10]. В этом случае расход потока Q_i , поступающий в блок со стороны пьезометра с напором H_i , определится выражением

$$Q_i = T_i N_i J_i, \quad J_i = \frac{H_i - H_0}{l_i}, \quad (3.9)$$

в котором T_i — средняя проводимость между i -ым и центральным пьезометром, а остальные обозначения показаны на рис. 5. При отсутствии внутренних источников-стоков уравнение баланса потока

в расчетном блоке здесь будет

$$\Sigma Q_i = \mu H'_0 F, \quad (3.10)$$

где ΣQ_i - сумма по всем сторонам блока, F - площадь блока, определяемая любым из способов планиметрирования; H'_0 - скорость изменения уровня в центральном пьезометре (положительная при подъеме и отрицательная при спаде). Подставляя выражения для Q_i из (3.9) в (3.10), получим конечно-разностное уравнение

$$\Sigma T_i N_i J_i = \mu H'_0 F. \quad (3.11)$$

А.В.Лебедев предлагает использовать это уравнение для однородного потока (при $T_i = T$) для определения коэффициента уравнепроводности

$$a = \frac{T}{\mu} = \frac{H'_0}{\Sigma N_i J_i}. \quad (3.12)$$

Можно использовать конечно-разностное уравнение (3.11) в случае линейной изменчивости проводимости по заданному направлению x , принимая $T_i = T_0(1 + \theta x_i)$, где T_0 - проводимость в точке центрального пьезометра; x_i - ординаты точек посередине между центральным и i -ым пьезометром (со своим знаком по расположению точки относительно центрального пьезометра). Тогда это уравнение записывается в виде

$$T_0 \Sigma N_i J_i + T_0 \theta \Sigma x_i N_i J_i = \mu H'_0 F, \quad (3.13)$$

приводимого к форме уравнения (3.5) при

$$F_1 = \Sigma N_i J_i, \quad F_2 = \Sigma x_i N_i J_i, \quad \Delta x \Delta y = F. \quad (3.14)$$

Условие корректности расчетов по таким уравнениям аналогично (3.6) и (3.6,а) представляется в форме

$$\frac{F H'_0}{\Sigma |N_i J_i|} > \delta_a. \quad (3.15)$$

При наличии большой пьезометрической сети, располагаемой сравнительно равномерно на изучаемой территории, В.И.Вартельский предлагает для определения коэффициента уровняпроводности с учетом неоднородности потока по проводимости и отсутствия инфильтрации использовать решение системы конечных уравнений, записываемых для полигона, привязанного к каждой наблюдательной скважине [1].

Рассмотрим случай криволинейного креста, у которого один поперечник располагается вдоль границы зон кусочного изменения проводимости, а другой — по нормали к этой границе (рис. 8). В

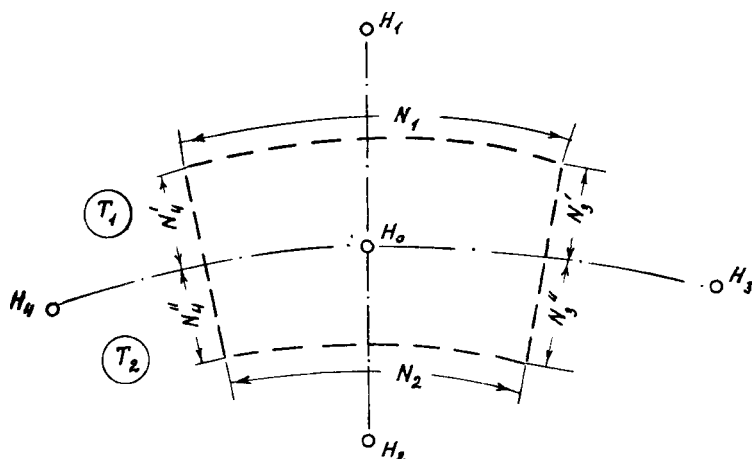


Рис. 8

этом случае при отсутствии инфильтрации конечно-разностное уравнение для расчетного блока будет

$$T_1 N_1 J_1 + T_2 N_2 J_2 + T_1 (N'_3 J_3 + N'_4 J_4) + T_2 (N''_3 J_3 + N''_4 J_4) = \mu H'_0 F, \quad (3.16)$$

где F — площадь блока; J_i — градиент напора от i -го пьезометра к центральному, остальные размеры показаны на рис. 5, а. Уравнение (3.16) запишем в виде

$$1 + \frac{T_2}{T_1} \varphi = \frac{\mu}{T_1} \varphi_2 F, \quad \varphi = \frac{\bar{Q}_2}{\bar{Q}_1}, \quad \varphi_2 = \frac{H'_0}{\bar{Q}_1}. \quad (3.17)$$

где обозначено $\bar{Q}_I = N_I J_I + N'_3 J_3 + N'_4 J_4$, $\bar{Q}_2 = N_2 J_2 + N''_3 J_3 + N''_4 J_4$.

Рассчитывая ряд значений φ и φ_t для различных интервалов времени, когда можно считать $w = 0$, и наложив их на график зависимости φ от φ_t , получим отрезки φ^0 и φ_t^0 , отсекаемые этой прямой на осях φ и φ_t . Согласно уравнению (3.17) по этим отрезкам найдем

$$\frac{T_2}{T_1} = -\frac{1}{\varphi^0}, \quad a_1 = \frac{T_1}{\mu} = \varphi_t^0 F. \quad (3.18)$$

Особого рассмотрения заслуживают конечно-разностные уравнения для определения параметра сопротивления ложа крупной реки или водохранилища ΔL по данным нестационарного режима. Для планового потока участок наблюдений должен состоять, как минимум, из четырех наблюдательных скважин, располагаемых по схеме "полукреста" (рис. 9). Конечно-разностное уравнение для однородного

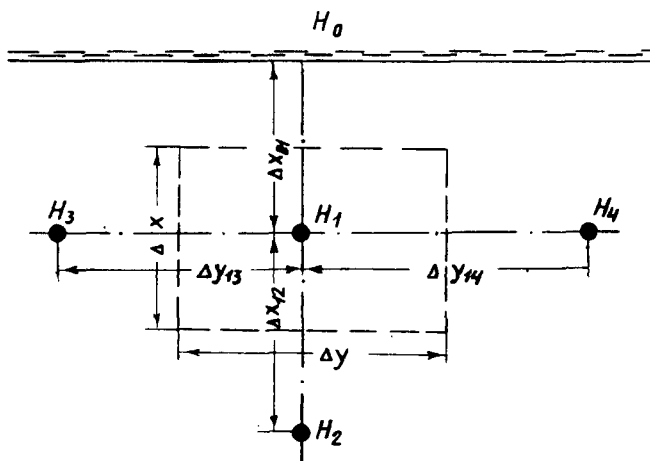


Рис. 9

потока и отсутствии инфильтрации в пределах участка здесь будет

$$T \left(\frac{H_0 - H_1}{\Delta x_{01} + \Delta L} - \frac{H_1 - H_2}{\Delta x_{12}} \right) \Delta y + T (J_{13} + J_{14}) \Delta x = \mu \Delta x \Delta y H'_1, \quad (3.19)$$

$$\Delta x = 0,5(\Delta x_{01} + \Delta x_{12}), \quad \Delta y = 0,5(\Delta y_{13} + \Delta y_{14}), \quad (3.19,a)$$

где H'_1 - скорость повышения уровня в пьезометре I ; J_{13} и J_{14} - градиенты напора между пьезометрами I-3 и I-4.

Преобразуем это уравнение

$$\frac{\Delta x_{12}}{\Delta x_{01} + \Delta L} - \varphi = \frac{\Delta x \cdot \Delta x_{12}}{a} \varphi_t, \quad \varphi = \varphi_x + \varphi_y, \quad (3.20)$$

где

$$\varphi_t = \frac{H'_1}{H_0 - H_1}, \quad \varphi_x = \frac{H_1 - H_2}{H_0 - H_1}, \quad \varphi_y = \frac{\Delta x \cdot \Delta x_{12}}{(H_0 - H_1) \Delta y} (J_{13} + J_{14}). \quad (3.20, a)$$

Для обработки опытных данных по уравнению (2.II) в пределах каждого расчетного интервала времени рассчитываются значения φ и φ_t (причем напоры в пьезометрах берутся в середине интервала) и строится график связи величин φ и φ_t . Если точки на этом графике удовлетворительно ложатся на прямую линию, то по отрезкам φ^0 и φ_t^0 находят значения параметров из выражений

$$\Delta L = \frac{\Delta x_{12}}{\varphi^0} - \Delta x_{01}, \quad a = \Delta x (\Delta x_{01} + \Delta L) \varphi_t^0. \quad (3.21)$$

Заметим, что обычно для таких расчетов используются данные по створу, проходящему по нормали к водотоку. В этом случае для расчетов по уравнению (2.II) следует принимать $\varphi_y = 0$ и $\varphi = \varphi_x$. Однако справедливость расчетов по одному створу обязательно требует обоснования, поскольку, как показывает опыт наблюдений, вблизи водотоков поток может существенно деформироваться в плане.

4. Аппроксимационный способ расчетов

Недостатком конечно-разностных уравнений является необходимость определенного расположения пьезометров в плане - по схеме "креста". Этого ограничения удастся избежать при использовании аппроксимационного способа расчета, основанном на возможности аппроксимации распределения напоров по площади некоторой заданной функцией. Рассмотрим применение этого способа для случая однородного планового потока, описываемого уравнением

$$\mu H'_t - w = T \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right), \quad H'_t = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (4.1)$$

Если считать левую часть уравнения (2.13) постоянной, что соответствует предпосылкам конечно-разностного уравнения, то в правой части напор H будет представляться полиномом 2-ой степени

$$H = H_0 + a_1 x + b_1 y + a_2 x^2 + b_2 y^2, \quad (4.2)$$

где H_0, a_1, a_2, b_1, b_2 — величины, определяемые по данным уровней в пьезометрах. Подставляя это выражение в (4.1) придем к выражению

$$\mu H'_t - w = 2T (a_2 + b_2). \quad (4.3)$$

При отсутствии инфильтрации ($w = 0$) отсюда получается формула для определения коэффициента уровнянепроводности

$$a = \frac{T}{\mu} = \frac{H'_t}{2 (a_2 + b_2)}. \quad (4.4)$$

Если значение a определено, то согласно (4.3) находится значение

$$\frac{w}{\mu} = H'_t - 2 (a_2 + b_2). \quad (4.5)$$

Таким образом, для обработки режимных данных по аппроксимационному способу необходимо определить величины a_2 и b_2 . Выражения для этих величин зависят от расположения пьезометров. При произвольном расположении пьезометров в плане (рис. 10, а), ведя отсчет напоров от уровня в центральном пьезометре (т.е. принимая $H_0 = 0$), запишем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= b_1 y_1^2 + b_2 y_1^2 \\ H_2 &= a_1 x_2 + b_1 y_2 + a_2 x_2^2 + b_2 y_2^2 \\ H_3 &= a_1 x_3 + b_1 y_3 + a_2 x_3^2 + b_2 y_3^2 \\ H_4 &= a_1 x_4 + b_1 y_4 + a_2 x_4^2 + b_2 y_4^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

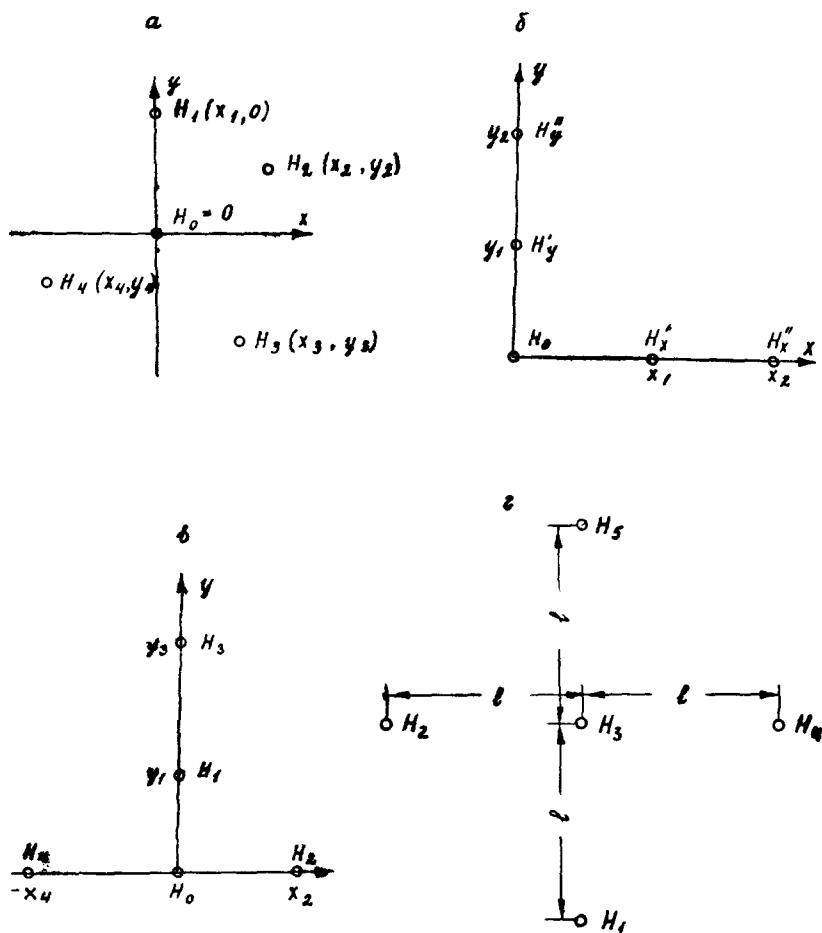


Рис. 10

Решение этой системы уравнений дает следующие выражения

$$a_2 = \frac{1}{\Delta} \left[y_2 (y_2 - y_1) (x_3 A_4 - A_3 x_4) + y_3 (y_3 - y_1) (x_4 A_2 - x_2 A_4) + \right. \\ \left. + y_4 (y_4 - y_1) (x_2 A_3 - A_2 x_3) \right],$$

$$b_2 = \frac{1}{\Delta} [x_3 x_4 (x_4 - x_3) A_2 + x_2 x_4 (x_2 - x_4) A_3 + x_2 x_3 (x_3 - x_2) A_4] , \quad (4.7)$$

где $\Delta = x_3 x_4 y_2 (y_2 - y_1) (x_4 - x_3) + x_2 x_4 y_3 (y_3 - y_1) (x_2 - x_4) +$
 $+ x_2 x_3 y_4 (y_4 - y_1) (x_3 - x_2) ,$

$$A_2 = H_2 - H_1 \frac{y_2}{y_1} , \quad A_3 = H_3 - H_1 \frac{y_3}{y_1} , \quad A_4 = H_4 - H_1 \frac{y_4}{y_1} . \quad (4.7, a)$$

Расчеты заметно упрощаются при некотором упорядочении расположения наблюдательной сети. Если хотя бы три скважины располагаются на одной прямой, то одна из осей совмещается с этой прямой. Например, если скважина с напором H_3 лежит на оси y , т.е. $x_3 = 0$, то сначала записываются уравнения (4.2) для напоров H_I и H_3 , из которых находятся выражения

$$b_2 = \frac{H_3 - H_1 \cdot \frac{y_3}{y_1}}{y_3 (y_3 - y_1)} , \quad b_1 = \frac{H_1}{y_1} - b_2 y_1 , \quad (4.8)$$

после чего записывается уравнение (4.2) для напоров H_3 и H_4 , которое после преобразований дает выражение

$$a_2 = \frac{H_4 - H_2 \frac{x_4}{x_2} + b_1 (y_2 \frac{x_4}{x_2} - y_4) + b_2 (y_2^2 \frac{x_4}{x_2} - y_4^2)}{x_4 (x_4 - x_2)} . \quad (4.9)$$

В частности, для схемы расположения пьезометров по углу (рис. 10, б) получим

$$a_2 = \frac{1}{x_2 - x_1} \left(\frac{H''_x}{x_2} - \frac{H'_x}{x_1} \right) , \quad b_2 = \frac{1}{y_2 - y_1} \left(\frac{H''_y}{y_2} - \frac{H'_y}{y_1} \right) , \quad (4.10)$$

а для Т-образной схемы (рис. 10, в)

$$a = \frac{H_4 - H_2 \frac{x_4}{x_2}}{x_4 (x_4 - x_2)} . \quad (4.11)$$

Некоторую неопределенность в таком расчете имеет задание расчетной величины H'_i , которая представляет собой среднюю скорость изменения уровня всды в пределах расчетного участка. В первом приближении ее можно, по-видимому, задавать соответствующей скорости изменения уровня в пьезометре, располагаемом в середине участка.

Если скорости изменения уровня существенно меняются в различных пьезометрах, то можно уточнить такое решение, аппроксимируя величину H некоторой функцией от координат, вид которой должен соответствовать наблюдаемой изменчивости этой величины в плане.

Для проверки корректности расчетов коэффициента уровнепроводности аппроксимационным способом следует сопоставить приращения расходов в пределах наблюдательного участка с протекающим через него расходом. Поскольку в центре участка

$$q_x = -T \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=0} = -a_1 T, \quad q_y = -T \frac{\partial H}{\partial y} \Big|_{y=0} = -b_1 T, \quad (4.12)$$

то полный расход

$$q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2} = T \sqrt{a_1^2 + b_1^2}.$$

Приращение удельного расхода в пределах участка размерами Δx и Δy будет

$$\Delta q = \frac{\partial q_x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial q_y}{\partial y} \Delta y = 2(a_2 \Delta x + b_2 \Delta y) T. \quad (4.12, a)$$

Для корректности расчета здесь должно выполняться условие $\Delta q / q > \delta_a$, что дает

$$\frac{\Delta q}{q} = \frac{2(a_2 \Delta x + b_2 \Delta y)}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} > \delta_a. \quad (4.13)$$

Если изменения H'_i имеет закономерный характер, то форма аппроксимирующей функции может быть выбрана более сложной, соответствующей этой закономерности. В качестве примера, иллюстрирующего такой подход, рассмотрим условия формирования одномерно-

го планового потока вблизи водоема или водотока большой ширины, когда можно пренебречь взаимодействием потоков между берегами и оценивать сопротивление водоема параметром ΔL , входящим в граничное условие

$$\frac{H_0 - H_g}{\Delta L} = \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=0} . \quad (4.14)$$

Поскольку в этом случае изменение напора в пределах расчетного створа может существенно меняться, то аппроксимирующую функцию зададим в виде

$$H = H_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3. \quad (4.15)$$

Подстановка этой функции в правую часть уравнения (4.1) дает при $w = 0$ выражение

$$\mu H'_t = T (2A_2 + 6A_3 x) . \quad (4.16)$$

Тогда входящие сюда коэффициенты определяются соотношениями

$$A_2 = \frac{H'_{0t}}{2a} , \quad A_3 = \frac{\Delta H'_t}{6a \Delta x} , \quad (4.17)$$

где H'_{0t} — значение H'_t в сечении $x = 0$, $\Delta H'_t$ — среднее изменение H'_t на участке размером Δx . Для определения этих величин график зависимости H'_t от x , построенный по натурным данным аппроксимируется прямой линией.

Параметры H_0 и A_1 получаем из условия совпадения натуральных и расчетных напоров в наблюдательных скважинах

$$A_1 = \frac{H_2 - H_1}{x_2 - x_1} - A_2 (x_2 + x_1) - A_3 (x_2^2 - x_1 x_2 + x_1^2) , \quad (4.18)$$

$$H_0 = H_1 - A_1 x_1 - A_2 x_1^2 - A_3 x_1^3 , \quad (4.18, a)$$

причем величины A_2 и A_3 находятся согласно (4.17).

Подставляя далее выражение (4.15) в (4.14), получим формулу для определения ΔL .

$$\Delta L = \frac{H_0 - H_B}{A_1}, \quad (4.19)$$

где A_1 находится из (4.18). Для такого расчета предварительно по данным изменения уровня в наблюдательных скважинах должно быть получено значение коэффициента уровнепроводности, входящее в выражения (4.17) для A_2 и A_3 .

5. Интегральные унифицированные алгоритмы^{*})

Суть этой методики, предложенной В.Б.Георгиевским [4], состоит в идентификации уравнений геофильтрации путем построения интегральных аналогов дифференциальных уравнений процедурой последовательного интегрального преобразования дифференциальных уравнений.

В данном разделе будет изложена методика И-алгоритмов на примере двумерного уравнения планового потока (4.1) при $w = 0$ с целью иллюстрации получения формул для практического расчета коэффициента уровнепроводности в случае минимального объема информации, когда используется наиболее простой И-метод, обладающий минимальным сглаживающим эффектом.

Для получения алгоритма определения α уравнение (4.1) надо подвергнуть интегральному преобразованию

$$I_t I_x I_y \left[a \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial H}{\partial t} \right] = 0, \quad (5.1)$$

где I_x и I_y — преобразования по координатам x и y , по которым уравнение имеет второй порядок; I_t — преобразование по времени t , по которому уравнение имеет первый порядок.

Запись алгоритма (5.1) в явном виде сводится к формальной процедуре использования таблицы изображений для различных типов слагаемых уравнений. Для координаты, по которой уравнение имеет второй порядок (например, по координате x) изображения некоторых членов в пределах от $x = 0$ до $x = x_2$ имеют вид [4]:

^{*}) В этом разделе использованы материалы, любезно представленные автору В.Б.Георгиевским.

$$I_x \left[\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right] = x_2 H(x_1) - x_1 H(x_2) - (x_2 - x_1) H(0), \quad (a)$$

$$I_x[f] = (x_1 - x_2) \int_0^{x_1} x f dx - x_1 x_2 \int_{x_1}^{x_2} f dx + x_1 \int_{x_1}^{x_2} x f dx, \quad (б)$$

$$I_x[A] = \frac{A}{2} x_1 x_2 (x_1 - x_2), \quad (в) \quad (5.2)$$

$$I_x[Ax] = \frac{A}{6} x_1 x_2 (x_1 - x_2) (x_1 + x_2), \quad (г)$$

$$I_x[Ax^2] = \frac{A}{12} x_1 x_2 (x_1 - x_2) (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2), \quad (д)$$

где $f = f(x)$, а $A = \text{const}$.

По координате t изображения некоторых типов членов таковы:

$$I_t \left[\frac{\partial H}{\partial t} \right] = H(t_1) - H(0), \quad (5.3)$$

$$I_t[f] = \int_0^{t_1} H dt, \quad I_t[A] = A t_1. \quad (5.3, a)$$

Используя такие выражения в (5.1), найдем величину a из соотношения

$$a = \frac{I_t I_x I_y \left[\frac{\partial H}{\partial t} \right]}{I_t I_x I_y \left[\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right]}. \quad (5.4)$$

При практическом вычислении величины a из (5.4) без какой-либо априорной информации о структуре H необходима некоторая интерполяция этой функции. Обычно принимается полиномиальная интерполяция. В тех случаях, когда таблица исходных данных достаточна велика, вычисление по (5.4) сводится, как правило, к использованию стандартных квадратурных формул с протабулированными коэффициентами, порожденных полиномиальной интерполяцией [4]. В рассматриваемом случае, когда за исходное положение принято условие минимума информации, целесообразно интерполицию

осуществить в явном виде. Ясно, что выражение

$$H = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 y + A_4 y^2 + A_5 t \quad (5.5)$$

представляет собой простейший вид полинома, при котором интерполяция функции H в уравнении (4.1) имеет смысл.

Таким образом принципиальный минимум информации, необходимой для идентификации модели есть: измерение $H(x, y, t)$ в два момента времени в одной из точек (x_i, y_i) и в пяти точках на плоскости (x, y) в один фиксированный момент времени, причем эти точки должны располагаться так, чтобы выполнялось условие определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & y_0 & y_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & y_1 & y_1^2 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & x_4 & x_4^2 & y_4 & y_4^2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (5.6)$$

Если точки на плоскости расположены регулярным образом, то алгоритм по И-методу сводится к конечно-разностной аппроксимации уравнения (4.1) и, следовательно, точность идентификации параметра по этим двум методам будет одинаковой.

Увеличение объема информации сверх принципиального минимума существенно увеличивает точность. В частности, построим алгоритм при условии, что замеры $H(t)$ производятся в каждой точке (x_i, y_i) . Примем аппроксимацию напора выражением

$$H = A(t) + A_1(t)x + A_2(t)x^2 + A_3(t)y + A_4(t)y^2. \quad (5.7)$$

Зависимость функции от времени отражена переменными параметрами полинома, причем предполагается, что в фиксированные моменты времени поверхность $H(x, y)$ интерполируется полиномом и коэффициенты этого полинома вычисляются для каждого из моментов замера.

Вид интерполяционного полинома по двум пространственным координатам x и y определяет требования на минимальное количество точек (x_i, y_i) (например, число скважин) и их расположение: ко-

личество точек должно быть не менее пяти при соблюдении условия (5.6), чтобы определялись назначенные коэффициенты полинома.

При малом числе точек интерполяции, вычисление интегралов в (5.4) целесообразно провести с интерполяционной степенью точности, т.е. вычислить их в явном виде. Подставляя (5.7) в (5.4), получим

$$a = \frac{A_0(t_1) - A_0(0) + \frac{1}{3}(x_1 + x_2) [A_1(t_1) - A_1(0)] + \frac{1}{6}(x_1 + x_1 x_2 + x_2^2) \times}{\times [A_2(t_1) - A_2(0)] + \frac{1}{3}(y_1 + y_2) [A_3(t_1) - A_3(0)] + \frac{1}{6}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) \times} \times \frac{2 \int_0^{t_1} (A_2 + A_4) dt}{[A_4(t_1) - A_4(0)]} \quad (5.8)$$

Для вычисления параметра a по (5.8) необходимо вычисление A_j для конкретного расположения точек наблюдения и для каждого момента наблюдения, как это представлено выше для аппроксимационного способа расчета (см. пункт 4).

Алгоритм можно также построить, используя по координате изображения полного сглаживания I_t , для которого таблица изображений будет [4] :

$$I_t \left[\frac{\partial H}{\partial t} \right] = (t_2 - t_1) \int_0^{t_1} H dt - t_1 \int_{t_1}^{t_2} H dt, \quad (5.9)$$

$$I_t[f] = (t_1 - t_2) \int_0^{t_1} t f dt + t_1 \int_{t_1}^{t_2} t f dt - t_1 t_2 \int_{t_1}^{t_2} f dt. \quad (5.10)$$

Тогда при интерполяции (5.7) получаем (5.4) в виде:

$$a = \frac{(t_2 - t_1) \int_0^{t_1} A_0 dt - t_1 \int_{t_1}^{t_2} A_0 dt + \frac{1}{3}(x_1 + x_2) \left[(t_2 - t_1) \int_0^{t_1} A_1 dt - t_1 \int_{t_1}^{t_2} A_1 dt \right] +}{+ \frac{1}{6}(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) \left[(t_2 - t_1) \int_0^{t_1} A_2 dt - t_1 \int_{t_1}^{t_2} A_2 dt \right] + \frac{1}{3}(y_1 + y_2) \left[(t_2 - t_1) \right]} \times$$

$$\frac{\int_0^{t_1} A_3 dt - t_1 \int_{t_1}^{t_2} A_3 dt + \frac{1}{6} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) \cdot \left[(t_2 - t_1) \int_0^{t_1} A_4 dt - t_1 \int_{t_1}^{t_2} A_4 dt \right]}{(t_1 - t_2) \int_0^{t_1} t (A_2 + A_4) dt + t_1 \int_{t_1}^{t_2} t (A_2 + A_4) dt - t_1 t_2 \int_{t_1}^{t_2} (A_2 + A_4) dt} \quad (5.11)$$

Алгоритм (5.11) отличается от (5.8) тем, что все величины, зависящие от времени вычисляются с использованием всей временной информации в точках x_i и y_i .

Если узлы расположены в узлах регулярной сетки, то интерполяция существенно упрощается и оказывается стандартной процедурой последовательной интерполяции по каждой из координат. Приведем для примера расчетную формулу (5.8), приспособленную для расчета параметров a при расположении точек наблюдения по схеме равномерного креста (рис. 7, г) и замера в два момента времени. В этом случае

$$A_0 = z_1 + z_2 - z_3, \quad A_1 = \frac{1}{2\ell} (4z_3 - 3z_2 - z_4),$$

$$A_2 = \frac{1}{2\ell^2} (z_2 + z_4 - 2z_3), \quad A_3 = \frac{1}{2\ell} (4z_3 - 3z_1 - z_5),$$

$$A_4 = \frac{1}{2\ell^2} (z_1 + z_5 - 2z_3) \text{ и}$$

$$a = \frac{\ell^2 \{ [z_1(t_1) - z_1(0)] + [z_2(t_1) - z_2(0)] + 8[z_3(t_1) - z_3(0)] +$$

$$6t_1 \{ [z_1(t_1) + z_1(0)] + [z_2(t_1) + z_2(0)] + [z_4(t_1) + z_4(0)] +$$

$$+ [z_4(t_1) - z_4(0)] + [z_5(t_1) - z_5(0)] \}}{+ [z_5(t_1) + z_5(0)] - 4[z_3(t_1) + z_3(0)]} \quad (5.12)$$

Следует заметить, что при малой информации, в частности, при пяти точках наблюдения, точность аппроксимации экспериментальной функции и расчетная величина параметра a может зави-

сеть от расположения точек $H(x_i, y_i)$ даже при выполнении условий (5.6) и (5.13). Хоршей в указанном смысле схемой расположения точек наблюдения является схема "креста" и, наоборот, неудачной для многих типов функций может быть схема "угла".

Очевидно, что добавление точек на плоскости также должно способствовать увеличению точности идентификации. Если имеется 6 наблюдательных точек, то аппроксимация экспериментальной функции представляется выражением

$$H = A_0(t) + A_1(t)x + A_2(t)x^2 + A_3(t)y + A_4(t)y^2 + A_5(t)xy. \quad (5.13)$$

Расположение наблюдательных точек с координатами x_i, y_i должно быть в этом случае таково, чтобы соблюдалось условие

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & y_0 & y_0^2 & x_0 y_0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & y_1 & y_1^2 & x_1 y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_5 & x_5^2 & y_5 & y_5^2 & x_5 y_5 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (5.14)$$

Слагаемое в алгоритме, порожденное числом $A_5 xy$ легко получить, используя дважды - по координате x и y изображение типа (5.2,г). Алгоритм для определения a имеет при этом вид (5.8), только в числителе добавляется слагаемое $\frac{1}{9}(x_1+x_2)(y_1+y_2)$ $[A_5(t_1) - A_5(0)]$.

Коэффициенты A_j необходимо определить в каждом конкретном случае расположения точек наблюдения, причем для регулярного расположения точек x_i, y_i параметры A_j легко вычисляются.

Дальнейшее увеличение количества точек на плоскости дает возможность улучшать интерполяцию $H(x, y, t)$ добавлением слагаемых $A_6 x^2 y; A_7 y^2 x; A_8 x^2 y^2$ и т.д. Члены алгоритма, обусловленные этими слагаемыми, формально записываются с помощью выражений (5.2,г,д).

По-видимому, при большем числе точек наблюдений процедура вычислений может быть упрощена до использования стандартных квадратурных формул с протабулированными узлами на каждом из подинтервалов, как это показано в [4].

Следует заметить, что в случае регулярного расположения то-

чек наблюдения целесообразно расчетную формулу для определения α выразить через значения функций $H(x_i, y_i)$ в явном виде, подставив в расчетные формулы выражения для A_i . Это связано с тем, что структура формул, выраженных через $H(x_i, y_i)$, может оказаться более устойчивой к погрешностям экспериментальной функции, чем формулы, выраженные через A_i , где возможно вычитание двух близких величин. Разумеется, в алгебраическом смысле эти формулы эквивалентны.

6. Интерпретация ОФН с применением моделирования

К использованию моделирования для интерпретации ОФН приходится прибегать при невозможности применения изложенных выше аналитических и численных решений. К таким условиям прежде всего относятся геофильтрационные потоки на крупных территориях при неупорядоченном расположении пьезометров, а также локальные профильные потоки сложного строения с довольно сложной структурой. При этом идентификация геофильтрационной схемы и природных условий территории осуществляется путем сопоставления натуральных характеристик потока с материалами моделирования. Методика такого моделирования требует самого пристального внимания со стороны гидрогеологов, особенно потому, что она обязательно должна базироваться на возможно более глубоком раскрытии и понимании гидрогеологических закономерностей. Это положение следует особо подчеркнуть в связи с тем, что зачастую в разработке методов решения идентификационных задач с применением моделирования преобладают формально-математические построения.

При постановке обратных задач на моделях следует особенно внимательно использовать структурно-литологические материалы, рассматривая их как основу для задания изменчивости параметров. С этой точки зрения прежде всего целесообразно производить выделение зон, в которых по структурно-литологическим признакам геофильтрационные параметры должны быть идентичными. При оценке параметров площадного питания такую зональность следует устанавливать по ландшафтным признакам. В дальнейшем процессе решения обратной задачи дифференциация параметров внутри каждой такой зоны должна базироваться на геологических закономерностях, а не устанавливаться "слепым" подбором (например, изменения проводимости определяются по изменениям мощности пласта и гранулометрического состава песчаных отложений, изменения емкости

пласта связываются с изменениями состава покрывающих отложений и т.п.).

В математическом плане обратные задачи сводятся к отысканию коэффициентов дифференциальных уравнений (геофильтрационных параметров) по известным значениям функции или ее производной (расхода) в отдельных точках фильтрационного потока. Для решения обратной задачи строится математическая модель, которая выверяется для того, чтобы достаточно надежно воспроизводить известную "историю" фильтрационного процесса – такая операция эвристического моделирования иногда называется калибровкой модели [36].

Использование для решения обратных задач прямых методов, основанных на решении исходного уравнения непосредственно относительно искомого параметра, обычно оказывается неприемлемым из-за значительного влияния на такое решение некорректности задачи. Поэтому практически всегда для решения обратных задач используются более достоверные методы целенаправленного поиска, когда параметры последовательно уточняются – от одного приближения к другому – в процессе перебора решений прямой задачи (метод проб и ошибок).

Для обобщенного сопоставления натуральных и модельных данных в процессе решения обратной задачи (калибровки модели) обычно исходят из условия достижения минимального значения функции качества F_K (калибрационного критерия), которая обычно задается выражением

$$F_K = \sum_1^n \delta_i (H_i - H_i^M)^2, \quad (6.1)$$

где H_i и H_i^M – натурные и модельные (найденные при решении обратной задачи) значения напоров в i -ой наблюдательной точке области потока; δ_i – весовой коэффициент; n – число имеющихся точек наблюдений.

При решении обратных задач нестационарной фильтрации по определению коэффициентов емкости пласта, параметров перетекания и сопротивления дна водоемов более обоснованной представляется функция качества вида

$$F_K = \sum_1^n \delta_i / H_i - H_i^M / , \quad (6.2)$$

поскольку она ближе отражает изменения емкости фильтрационного

потока, причем в этом случае, по-видимому, целесообразно задавать пропорциональным площади потока, относящееся к i -ой наблюдательной скважине. Для лучшего согласования натурной и модельной формы потока предлагается [31] сочетать функции качества вида (6.2) и вида

$$F_k = \sum_{i=1}^n \delta_i (J_i - J_{i,m}) \quad , \quad (6.3)$$

где J_i и $J_{i,m}$ - натурные и модельные значения градиента напора между наблюдательными точками.

Считая, что такие выражения функции качества слабо отражают балансный смысл процесса, Ш.Нымен рекомендует [35] для задач, направленных на определение проводимости пласта, пользоваться следующим видом функции качества

$$F_k = \sum_{i=1}^m \delta_i \Delta Q_i \quad , \quad (6.4)$$

где m - число узлов сетки; ΔQ_i - погрешность определения баланса расхода потока в i -ом узле сеточной модели. Для такой функции качества требуется находить расходы натурального потока для каждого блока, интерполируя напоры между наблюдаемыми точками. Такая операция может внести значительные погрешности, оценка которых затруднительна.

Пока что остается неясным способ задания весовых коэффициентов, которые должны отражать влияние представительности пьезометров в зоне активного проявления искомых параметров. Здесь, по-видимому, придется ориентироваться на экспертные оценки. Отметим, что проведенные расчеты параметров μ и ΔL в зоне подпора Куйбышевского водохранилища [25] показали малое влияние выбора вида функции качества и способа задания весовых коэффициентов.

Рассмотрим алгоритм определения интенсивности инфильтрации в плановом потоке при стационарном режиме и известных значениях проводимости пласта T . При решении этой задачи предполагаются известными значения напоров H_i в наблюдательных скважинах (пьезометрах) номера $i = 1, 2, \dots, n$, где n - общее число пьезометров, а распределение w устанавливается кусочным со значениями w_j в каждой зоне номера $j = 1, 2, \dots, m$, где m - число

выделенных зон с кусочно-постоянной интенсивностью инфильтрации.

При решении такой задачи предварительно на модели получают распределение напоров $H_{0,i}$ в пьезометрических точках при заданных условиях на границах и отсутствии инфильтрации. Затем для каждого пьезометра получаются значения $H_{w,i} = H_i - H_{0,i}$, которые таким образом отражают только влияние инфильтрации. Для величин $H_{w,i}$ можно записать выражение

$$H_{w,i} = \sum_j^m \frac{w_j F_j}{T_j} f_{i,j}, \quad (6.5)$$

где F_j - площадь j -ой зоны инфильтрации; T_j - проводимость пласта в пределах этой зоны; $f_{i,j}$ - единичная функция влияния от j -ой зоны инфильтрации в i -ой пьезометрической точке. Значения $f_{i,j}$ определяются на модели по методике, изложенной в [II], для каждой комбинации j -ых зон и i -ых точек. После такого определения согласно (6.5) могут быть составлены системы уравнений, которые обуславливаются числом пьезометров n и зон инфильтрации m . В частном случае $n = m$ согласно (6.5) составляется n линейных уравнений с n неизвестными значениями w_j , и такая система имеет однозначное решение. Если же $n \neq m$, то согласно (6.5) находятся m модельных значений $H_{m,i}$, которые сопоставляются с натурными значениями напоров $H_{w,i}$ в пьезометрических точках путем составления функции качества. Принципиально такой же ход решения может быть использован при нестационарном режиме, однако при этом следует дополнительно решать вопрос о согласовании натурных и модельных данных во времени.

При определении параметров строения водоносных пластов для построения алгоритма минимизации функции качества целесообразно использовать коэффициенты чувствительности α [15,36], представляющие собой отношение изменения уровня ΔH в каждой расчетной (наблюдательной) точке к изменению параметров $\Delta \Pi$, т.е. для точки i от параметров в зоне k :

$$\alpha_{i,k} = \frac{\Delta H_{i,k}}{\Delta \Pi_k}. \quad (6.6)$$

При значительных изменениях параметров в качестве величины Π в (6.6) целесообразно использовать преобразованную величину пара-

метра. Например, при поиске коэффициента фильтрации слабопроницаемого пласта κ_0 , который может изменяться на порядки, следует принимать $\Pi = l q \kappa_0$.

Величины коэффициентов чувствительности принципиально зависят от интервала изменения параметров, однако в некотором диапазоне $\Delta \Pi_k$ можно считать величины $\alpha_{i,k}$ постоянными (независящими от Π_k). Тогда при наличии n зон с различными параметрами суммарное изменение уровня будет

$$\Delta H_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{i,k} \Delta \Pi_k. \quad (6.7)$$

При таких расчетах сначала моделируется поток при параметрах, заданных в первом приближении в соответствии с геологическим строением и известными значениями параметров в различных зонах потока (по литературным данным и материалам опытно-фильтрационных работ), а также находятся значения α при варьировании в некоторых пределах параметров для каждой зоны в отдельности. После этого величина $H_i - H_{i,m}$ в выражениях функции качества (6.1) или (6.2) заменяется на ΔH_i , выражаемое согласно (6.7). Минимизируя полученное таким образом выражение функции качества, получим значения $\Delta \Pi_k$, которые вводятся как поправки к исходным значениям параметров. При значительных изменениях параметров следует далее уточнить значения коэффициентов чувствительности, отвечающих изменению параметров вблизи полученных величин Π_k , после чего повторить расчеты заново. При таких оценках следует контролировать соответствие полученных значений параметров геологическим закономерностям.

В работе [22] дана постановка прикладной обратной задачи, в которой доказывается, что при выполнении определенных условий оценки метода наименьших квадратов почти наверняка сходятся к истинным значениям параметров (в рамках принятой математической модели). Такая постановка обратной задачи реализована в виде программы "Град + ОУТ" на языке алгол для транслятора ТА-1М БЭСМ-4 [21]. Опыт расчетов по этой программе показал, что величины, имеющие размерность, могут быть представлены компактно и поэтому хорошо получается одновременное определение таких параметров, как T и w , ΔL и T , ΔL и w и др. В то же время, одновременное определение T и μ привело в одном примере к абсурдным результа-

там ($\mu \gg I$).

В настоящее время теорию поиска достоверной и оптимальной структуры геофильтрационной модели при решении такой обратной задачи еще нельзя считать разработанной. Следует заметить, что в понятие оптимальная модель исследуемого процесса, помимо достоверно предсказуемых свойств, входят требования к самому процессу оценивания, который должен проходить достаточно быстро с использованием доступного оборудования по сходным ценам. В гидрогеологической литературе еще нет работ, в которых выбор модели процесса заключал все указанные аспекты.

Обычно решение обратных задач моделирования рассматривается безотносительно к дальнейшему использованию их результатов. Однако методически более правильно связывать эпигнозную и прогнозируемую задачи в единое решение, связывая идентификацию отдельных параметров модели со значимостью этих параметров при прогнозировании. При этом следует большее внимание уделять определению тех параметров, влияние которых на прогнозируемые условия оказывается наиболее значимым.

7. Методические положения ОФН

Методы интерпретации ОФН составной частью входят в общие методические положения ОФН, включающие в себя обоснование их постановки, причем вопросы постановки и интерпретации ОФН находятся в тесной взаимосвязи. Вместе с тем постановка ОФН должна опираться на глубокое понимание природных условий и факторов формирования режима и баланса рассматриваемого подземного потока. Исходя из этих позиций, следует при проведении ОФН соблюдать ряд основных принципов.

Для связи с методикой интерпретации важно соблюдение принципа методической обоснованности ОФН, согласно которому структура пьезометрической сети должна задаваться в соответствии с требованиями соответствия методики интерпретации данных наблюдений.

В связи с этим следует подчеркнуть необходимость внимательного учета структуры потока при постановке и анализе материалов ОФН, особенно потому, что это требование нередко нарушается. В частности, обычно рекомендуется [18,19,20] и широко практикуется использование данных режимных наблюдений по створу наблюдательных скважин, располагаемых по направлению потока. Вместе с

тем, анализ натуральных материалов показывает, что такое упрощенное представление о структуре потока часто приводит к неправильным результатам при интерпретации режимных данных. Поэтому створный принцип построения наблюдательной сети ни в коем случае не следует рассматривать как универсальный и его применение требует обстоятельного обоснования на ключевых участках с площадным расположением пьезометров.

При постановке ОФН вблизи несовершенных (неполностью врезаемых) водотоков следует учитывать зону резкой вертикальной деформации потока, которая образуется под водотоком и захватывает некоторую область потока вблизи водотока. Для изучения планового потока необходимо размещать пьезометрическую сеть за пределами зоны вертикальной деформации потока, размеры которой следует предварительно оценивать моделированием, а затем проверять этажными замерами напоров в натуре на обоснованных моделированием ключевых участках. Выше уже отмечалось (см. I.3), что при использовании этажных пьезометров для наблюдения за процессами перетекания требует проверки предпосылка о вертикальном направлении потока в покровных и разделяющих пластах.

Приведенные соображения приводят к выводу, что в большинстве случаев организацию ключевых участков с более подробной расстановкой пьезометрической сети можно рассматривать, как обязательное условие достоверности ОФН.

Методически обоснованная сеть должна по своей структуре соответствовать определенной методике обработки материалов. В частности, для применения конечно-разностных уравнений в плановом потоке необходимо располагать минимум пять пьезометров по схеме "креста". Вместе с тем, при расчетах с применением моделирования это требование не обязательно, а расположение пьезометров должно соответствовать элементам неоднородности потока и зонам наибольшей чувствительности гидродинамического режима к определяемым параметрам. При изучении режима подземных вод вблизи водотоков необходимо получать возможно большую информацию о режиме и балансе водотоков, причем особенно важно получать представление о расходах потока, например, с применением гидрометрических замеров на водотоках.

Для рационального проведения ОФН существенным представляется также соблюдение принципа неравномерности ОФН, который исходит из условия целесообразности их размещения и выбора времени наблюдений, отвечающих требованию наиболее рельефного влия-

ния искомых геофильтрационных параметров. Исходя из этого положения, можно утверждать, что рациональными являются ОФН неравномерные как в пространстве, так и во времени.

Применительно к пространственной постановке ОФН этот принцип заключается в обоснованной неравномерности распределения наблюдательной сети по изучаемой области с сосредоточением ее на ключевых участках, на которых поток изучается значительно более подробно с проверкой всех принимаемых допущений о его формировании (например, возможность принятия предположений о плановом или линейном характере потока и т.п.).

Принцип неравномерного проведения наблюдений во времени требует детализации наблюдений в выделяемые наиболее интересные периоды водного режима (например, при колебаниях уровней в водотоке, начале поливов, выявлении внутрисуточного колебания уровня). При этом для ОФН должны выбираться периоды, когда влияние изучаемых параметров или факторов проявляется наиболее четко.

При выборе типа решения, используемого для интерпретации ОФН, следует исходить из строения наблюдаемого потока и расположения пьезометров (структуры пьезометрической сети), причем, обобщая особенности каждого метода интерпретации (используемого решения), можно представить рекомендации по этому поводу следующей таблицей.

Используемые решения	Строение потока	Расположение пьезометров
Аналитические	плановый однородный	по створу вдоль потока
Конечно-разностные уравнения	плановый неоднородный	локальное упорядоченное ("крест")
"Унифицированных алгоритмов" и аппроксимационное	плановый однородный	локальное неупорядоченное
Моделирование	плановый и профильный, неоднородный	неупорядоченно разбросанное по области потока

В заключение необходимо подчеркнуть, что интерпретация ОФН всегда требует творческого подхода, который под силу лишь специалисту, хорошо владеющему как методами гидродинамического анализа, так и пониманием гидрогеологических процессов.

Литература

1. Вартецкий В.И. Некоторые особенности гидродинамического анализа режима грунтовых вод. Материалы по гидрогеологии. - Труды ТашГУ, 1976, № 488.
2. Великина Г.М., Зильберг В.С., Слишко О.В. Применение вариационного метода при решении краевых задач фильтрации в сложных гидрогеологических условиях (на примере оценки эксплуатационных запасов подземных вод). - В кн.: Методы и средства решения краевых задач. Рига, 1978.
3. Гавич И.К. Теория и практика применения моделирования в гидрогеологии. М., "Недра", 1980.
4. Георгиевский В.Б. Унифицированные алгоритмы для определения фильтрационных параметров. Киев, Наукова думка, 1971.
5. Гидрат О.А., Гиф А.Г., Невечера И.К. и др. Принципы оценки эксплуатационных ресурсов подземных вод в речных долинах. М., Изд-во МГУ, 1978.
6. Гылыбов М.М. Определение некоторых гидрогеологических параметров по реагированию скважин-пьезометров на прохождение паводка. Водные ресурсы, 1979, № 2.
7. Каменский Г.Н., Гавич И.К., Мясникова Н.А., Семенова С.М. Гидродинамические основы изучения режима грунтовых вод. - Труды лабор. гидрогеол. проблем. т. XXVI, М., 1960.
8. Киселев П.А. Изучение баланса подземных вод в слоистых толщах по режимным данным. М., "Недра", 1975.
9. Кравченко И.П., Колобашкин Б.В. Изучение режима и баланса подземных вод на территории майтужных понижений Волго-Чайринского междуречья. - В кн.: Гидрогеология и инж. геология, Новочеркасск, 1978.
10. Лебедев А.В. Методы изучения баланса грунтовых вод. М., "Недра", 1976.
11. Лукнер Л., Шестаков В.М. Моделирование геофильтрации. М., "Недра", 1976.
12. Лифшиц В.М., Красс М.С. Численные методы решения задач геофильтрации на ЭВМ. М., 1974.
13. Минкин Е.Л. К вопросу о режиме уровня грунтовых вод в условиях орошения. - В сб. по геол. и гидрогеол. Всес. гидрогеол. треста, вып. 2, М., Госгеолиздат, 1962.
14. Мироненко В.А., Шестаков В.М. О принципах интерпретации опытно-фильтрационных наблюдений. Водные ресурсы, 1978, № 3.

15. Мироненко В.А., Шестаков В.М. Теория и методы интерпретации опытно-фильтрационных работ. М., "Недра", 1978.
16. Невечера И.К. Определение гидрогеологических параметров по результатам наблюдений за режимом подземных вод. Гидрогеология и инж.геология. Обзор. М., ВИЭМС, 1980.
17. Огильви Н.А. Определение параметров скорости распространения подпора в грунтовых водах путем анализа их режима. Советская геология, № 56, М., Госгеолиздат, 1956.
18. Основы гидрогеологических расчетов. 2-ое изд. Бочвар Ф.М., Гармонов И.В., Лебедев А.В., Шестаков В.М. М., Недра, 1969.
19. Принципы размещения сети гидрогеологических наблюдательных пунктов в естественных и нарушенных условиях (методические рекомендации), М., ВСЕГИНГЕО, 1974.
20. Рекомендации по методике комплексных воднобалансовых исследований на орошаемых землях. Кац Д.М., Парфенова Н.И., Райнин В.Е. и др. М., ВНИИГМ, 1978, вып.1,2.
21. Семенова-Ерофеева С.М., Невечера И.К., Гриф А.Г. Оценка взаимосвязи поверхностных и подземных вод в речных долинах. — В кн.: Взаимодействие поверхностного и подземного стока, вып.4, М., Изд-во МГУ, 1976.
22. Успенский А.Б., Федоров В.В. О постановке и решении задач планирования эксперимента для некоторых обратных задач математической физики. — В кн.: Приближенные методы решения задач оптимального управления и некоторых некорректных обратных задач. М., Изд-во МГУ, 1972.
23. Успенский А.Б., Федоров В.В. Вычислительные аспекты метода наименьших квадратов при анализе и планировании регрессионных экспериментов. М., Изд-во МГУ, 1975.
24. Ходжибаев Н.Н., Самойленко В.Г. Гидрогеолого-мелиоративные прогнозы и их обоснование. Ташкент, ФАН, 1978.
25. Чан Тхе Винь. Методика оценки геофильтрационных параметров по данным режимных наблюдений в прибрежных зонах крупных водохранилищ. Автореф.канд.дисс. МГУ, 1975.
26. Шестаков В.М. Теоретические основы оценки подпора, водопонижения и дренажа. М., Изд-во МГУ, 1965.
27. Шестаков В.М. Динамика подземных вод. 2-ое изд. М., Изд-во МГУ, 1979.
28. Шестаков В.М. Постановка опытно-фильтрационных работ вблизи водотоков. Разведка и охрана недр, 1977, № 9.

29. Шестаков В.М. Интерпретация опытно-фильтрационных наблюдений численными методами. Разведка и охрана недр, 1979, № 12.
30. Шестаков В.М. Методика режимных наблюдений в покровных отложениях. "Тезисы докл. IV междувед. совещ. по мелиор. гидрогеол., инж. геол. и почвовед." М., Совхозпроект, 1980.
31. Bohem B. Beitrag zur indirekten Ermittlung von Parametern für Grundwasserströmungsmodelle. Dissertation. Fakultät für Bauwesen der Techn. Universität, Hannover, 1975.
32. Coopes Jr. H., Rozabaugh M. J. Groundwater movements and bank storage due to flood stages in surface streams. U. S. Geol. Survey Water Supply Paper, 1536-J, 1973.
33. Degalliez R. Determination des paramètres hydrodynamiques de la nappe souterraine du bassin versant de Korhogo. "Bulletin du BRGM", sec. III., n° 314, 1977.
34. Dominick J. F., Wilkins B. Mathematical model for bank groundwater fluctuations. "Water Resources Research", v. 7, n° 6, 1971.
35. Fezzis J. G. Cyclic Water Level Fluctuation as a Basis for Determining Aquifer Transmissibility. U. S. Geol. Survey Water-Supply Paper, 1536-J, 1963.
36. Lovell R., Duckstein L., Kisiel C. Use of Subjective Information in Estimation of Aquifer Parameters. Water Resources Res. vol. 8, N° 3, 1972.
37. Neuman Sh. Calibration of Distributed Parameter Groundwater Flow Models. Water Resources Res., vol. 9, N° 4, 1973.
38. Rowe P. P. An Equation for Estimating Transmissibility and Coefficient of Storage from River-Level Fluctuations. Journal of Geophysical Research, vol. 65, 1960.
39. Singh S. R., Sagar B. Aquifer Diffusivity from Noisy Boundary Data. Journal of the Hydraulic Division, v. 105, N° 8, 1979.

Всеволод Михайлович Шестаков

Методика интерпретации опытно-фильтрационных наблюдений

Заведующая редакцией И.И.Шехура

Редактор Г.С.Савельева

Технический редактор К.С.Чистякова

Подписано к печати 18.12.81 Д-97717 Формат 60х90/16 Бумага офс.
№ 1 Офсетная печать. Усл. печ. л. 3,25 Уч.-изд. л. 2,57
Зак. 1016 Тираж 500 экз. Цена 15 коп.
З а к а з н а я

Ордена "Знак Почета" издательство Московского университета
103009, Москва, ул.Герцена, 5/7
Типография ордена "Знак Почета" изд-ва МГУ, Москва, Ленинские горы